Manipulation [Méthodes de descente - séance 1]

L'objectif principal pour les trois prochaines séances est de mettre en œuvre quelques patrons de conception en C++ dans le cadre d'une mise-en-oeuvre d'une méthode de *méthodes de descente*. Pour simplifier, vous vous restreindrez au cas de l'optimisation sans contraintes.

L'objectif de cette première séance est d'obtenir une **méthode fonctionnelle** qui minimise les deux fonctions testes suivantes :

$$(x_1, x_2) \rightsquigarrow q_1(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2, \tag{1}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \rightsquigarrow q_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2, \tag{2}$$

$$(x_1, x_2) \rightsquigarrow r(x_1, x_2) = (1 - x_1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2. \tag{3}$$

Principe

☞ Commencer toujours avec une implémentation opérationnelle.

Consigne

1. Implémenter la méthode de descente ainsi que la méthode de la plus forte pente pour minimiser les fonctions ci-dessous. Vous utiliserez un pas fixe $\alpha = 0.1$.
   ☞ Pour rappel, la méthode de la plus forte pente est un cas particulier des méthodes de directions réalisables dont le gabarit est rappelé ci-dessous.

Algorithme 1 : Méthode des directions réalisables

Entrées : Ω :: contient un minimum de f
f :: fonction $\in \mathcal{C}^1(\Omega)$,
ϵ :: paramètre,
$\vec{x}_0 \in \Omega$ :: Point initial

Sortie : $\vec{z}$ :: un point satisfaisant les conditions KKT

Début
  $k \leftarrow 0$
  Répéter
    $\vec{d}_k \leftarrow$ `DirDescenteRealisable` $(\vec{x}_k, f)$
    $\lambda_k \leftarrow$ `PasDeplacement` $\left(\vec{x}_k, f, \vec{d}_k\right)$
    $\vec{x}_{k+1} \leftarrow \vec{x}_k + \lambda_k \vec{d}_k$
    $k \leftarrow k + 1$
  Jusqu'à $\|\nabla f(\vec{x}_k)\| \leq \epsilon$
  $\vec{z} \leftarrow \vec{x}_k$
Fin

Testes

Vous procéderez, à minima, aux testes ci-dessous.

1. Pour la minimisation de la fonction q_1 vous prendrez $(3, 5)$ comme point initial. Vos sorties doivent être du même format que les sorties ci-dessous.

Sorties-1

```
---
--- Descente de Gradient (Pas Fixe)
---
```

```
Point initial : (3, 5)
     Fonction : x1^2 + 2*x2^2

      Méthode : Descente Gradient
    Max-iters : 100

Iter.            Obj.       ||Grad||          Point

    0        59.00000       2.09e+01     (3.00, 5.00)
   10         0.10559       6.55e-01     (0.32, 0.03)
   20         0.00120       6.92e-02     (0.03, 0.00)
   30         0.00001       7.43e-03     (0.00, 0.00)
   40         0.00000       7.98e-04     (0.00, 0.00)
   50         0.00000       8.56e-05     (0.00, 0.00)
   60         0.00000       9.19e-06     (0.00, 0.00)
   70         0.00000       9.87e-07     (0.00, 0.00)

Solution :
     Statut : CONVERGENCE (Tolérance atteinte)
   Solution : (0.00, 0.00)
     Valeur : 0.00
```

2. Pour la minimisation de la fonction q_2 vous prendrez $(3,5,2)$ comme point initial. Vos sorties doivent être du même format que les sorties ci-dessous.

Sorties-2

```
---
--- Descente de Gradient (Pas Fixe)
---

   Point initial : (3, 5, 2)
        Fonction : x1^2 + 2*x2^2 + 3x_3^2

         Méthode : Descente Gradient
       Max-iters : 100

   Iter.            Obj.       ||Grad||          Point

       0        71.00000       2.41e+01     (3.00, 5.00, 2.00)
      10         0.10559       6.55e-01     (0.32, 0.03, 0.00)
      20         0.00120       6.92e-02     (0.03, 0.00, 0.00)
      30         0.00001       7.43e-03     (0.00, 0.00, 0.00)
      40         0.00000       7.98e-04     (0.00, 0.00, 0.00)
      50         0.00000       8.56e-05     (0.00, 0.00, 0.00)
      60         0.00000       9.19e-06     (0.00, 0.00, 0.00)
      70         0.00000       9.87e-07     (0.00, 0.00, 0.00)

   Solution :
        Statut : CONVERGENCE (Tolérance atteinte)
      Solution : (0.00, 0.00, 0.00)
        Valeur : 0.00
```

3. Qu'obtenez-vous en appliquant la méthode de descente ainsi que la méthode de la plus forte pente pour minimiser fonction r_2 à partir du point $(0,0)$? Enfin, pour vous aider à analyser vos résultats ci-dessous les courbes de niveaux de la fonction r_2.

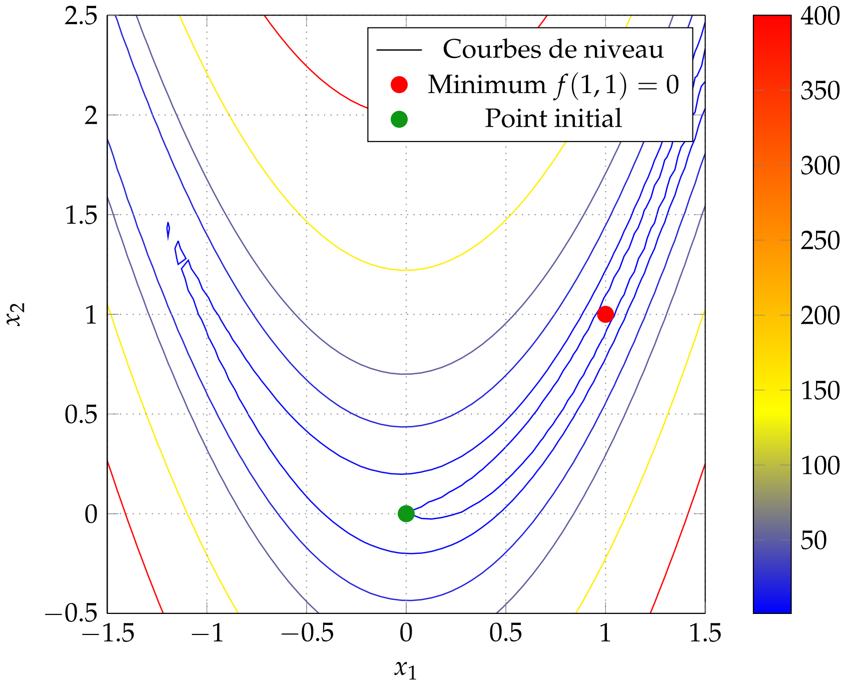

FIGURE 1 – Courbes de niveau de la fonction r_2.

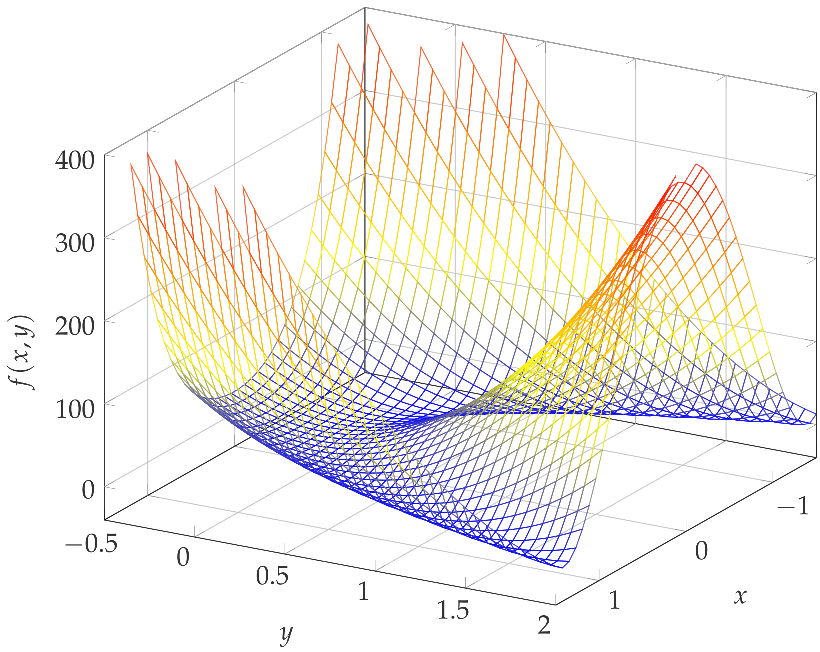

FIGURE 2 – Surface de Rosenbrock r_2.