54. Стоячие волны.

Рассмотрим волну, бегущую вдоль шнура слева направо. Шнур закреплен на стене, как это показано на рисунке 54.1.

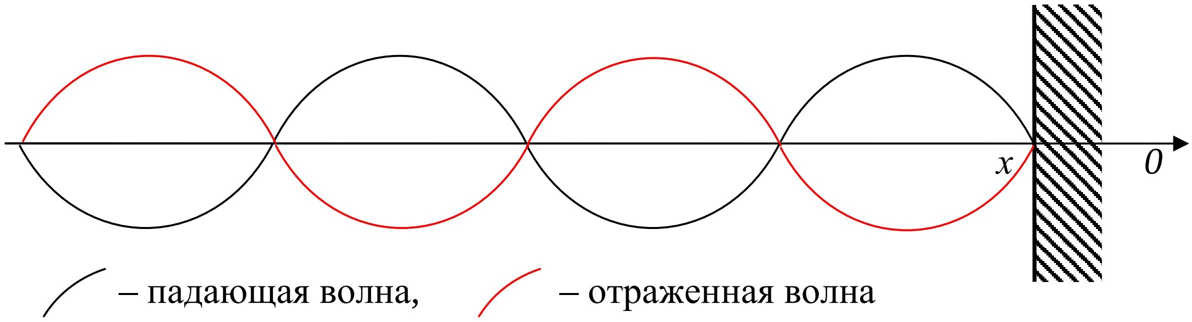

Рисунок 54.1. Образование стоячей волны.

$$\xi_{\text{пад}}(x,t) = A\cdot\cos(\omega t - \kappa x). \tag{54.1}$$

Волны не могут бежать дальше, они отражаются в обратном направлении. В шнуре возникает наложение бегущей и отраженной волны. Считаем, что волна отражается от стены полностью, без потерь. При этом амплитуды падающей и отраженной волн одинаковы. Фаза отраженной волны может отличаться от фазы падающей волны на угол α.

$$\xi_{\text{отр}}(x,t) = A\cdot\cos(\omega t + \kappa x + \alpha). \tag{54.2}$$

Найдем сумму падающей и отраженной волн как сумму косинусов:

$$\xi(x,t) = \xi_{\text{пад}}(x,t) + \xi_{\text{отр}}(x,t) = A\cos(\omega t - \kappa x) + A\cos(\omega t + \kappa x + \alpha) =$$
$$= 2A\cos\left(\frac{(\omega t - \kappa x) - (\omega t + \kappa x + \alpha)}{2}\right)\cos\left(\frac{(\omega t - \kappa x) + (\omega t + \kappa x + \alpha)}{2}\right) =$$
$$= 2A\cos\left(\frac{\omega t - \kappa x - \omega t - \kappa x - \alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega t - \kappa x + \omega t + \kappa x + \alpha}{2}\right) =$$
$$= 2A\cos\left(-\kappa x - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\alpha}{2}\right) = 2A\cos\left(\kappa x + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Поскольку шнур закреплен на стене в точке $x = 0$, эта точка должна всегда оставаться неподвижной.

$$\xi(0,t) = 0; \quad \Rightarrow \quad \cos(\kappa x + \alpha/2)\Big|_{x=0} = 0; \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha/2) = 0; \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm\pi.$$

Физически $-\pi$ и $+\pi$ – это одно и то же; – волна отражается в <u>противофазе</u>.

Поэтому, выберем то, что удобнее, а именно: $\alpha = -\pi$, и воспользуемся тем, что косинус – четная функция.

$$\xi(x,t) = 2A\cos\left(\kappa x - \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = 2A\sin(\kappa x)\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (54.3)$$

Получилось выражение, которое не является бегущей волной (сравни с формулой (52.3)). В нем множитель $\cos(\omega t - \pi/2)$ задает закон гармонических колебаний, а множитель $2A\cdot\sin(\kappa x)$ – амплитуду, зависящую от координаты. Амплитуда должна быть всегда положительной, значит, $\sin(\kappa x)$ нужно взять по модулю. Но в таком случае получится выражение, отличающееся от (54.3). Оно будет неверным в каждом втором полупериоде. Чтобы исправить ошибку, одновременно с модулем поставим перед $\pi/2$ двойной знак $\mp$. Если $\sin(\kappa x) > 0$, во втором сомножителе работает знак “минус”, а если $\sin(\kappa x) > 0$, – то знак “плюс”. Кроме того введем обозначение $2A \equiv A_0$ и запишем в окончательном виде:

$$\xi(x,t) = A_0\left|\sin(kx)\right|\cos(\omega t \mp \pi/2). \qquad (54.4)$$

Сравним получившееся выражение с уравнением бегущей волны (52.3). На рис.54.2 показаны мгновенные изображения бегущей (а) и стоячей (б) волн. Пунктиром показаны те же волны спустя малый промежуток времени.

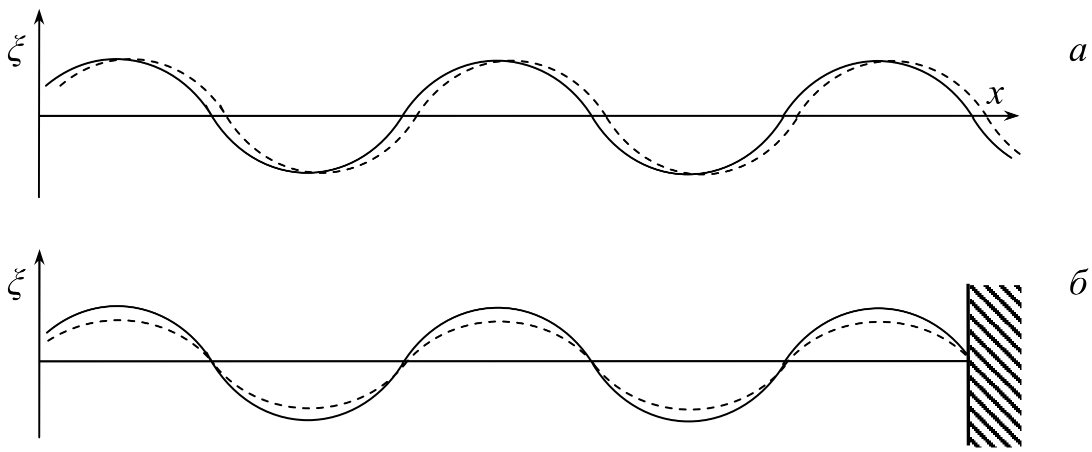

Рисунок 54.2. Мгновенные изображения бегущей и стоячей волн.

Из рисунка видно, что:
- бегущая волна за время наблюдения убежала слева направо, а стоячая – осталась на месте;
- соседние точки бегущей волны колеблются в разных фазах, а соседние точки в стоячей – в одинаковых.

Подробнее рассмотрим колебания в стоячей волне на рисунке 54.3.

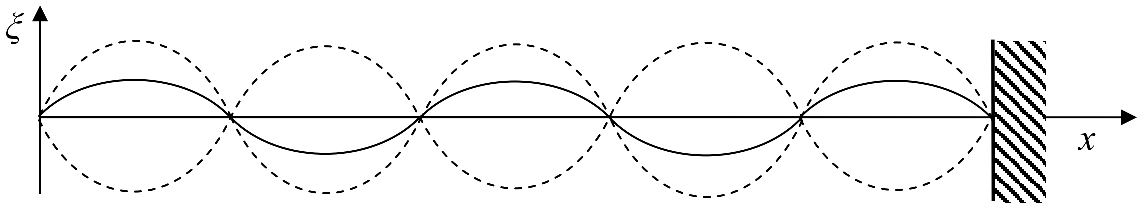

Рисунок 54.3. Стоячая волна.

Пунктирной линией показана амплитуда $\pm A(x)$, как функция координаты

$$A(x) = A_0 \left|\sin\left(\kappa x\right)\right|. \tag{54.5}$$

Эта функция имеет узлы и пучности. Найдем координаты узлов, т.е. нулей:

$$\sin\left(\kappa x\right) = 0; \quad \Rightarrow \quad \kappa x = \pi m; \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi x}{\lambda} = \pi m; \quad \Rightarrow$$

$$x_m = \frac{\lambda}{2} \cdot m, \qquad \text{где} \quad m \text{ – целое число.} \tag{54.6}$$

- Все точки, расположенные между соседними узлами, колеблются в одинаковых фазах.
- Все точки, расположенные по разные стороны от узла, колеблются в противоположных фазах.

Измерив на опыте расстояние между соседними узлами. Можно найти длину волны.

55. Волновое уравнение.

Рассмотрим плоскую волну, бегущую в произвольном направлении, и запишем эту же функцию в скалярном виде.

$$\xi(\vec{r},t) = A\cdot\cos\left(\omega t - \vec{\kappa}\cdot\vec{r} + \varphi_{\text{o}}\right) = A\cdot\cos\left(\omega t - \kappa_x x - \kappa_y y - \kappa_z z + \varphi_{\text{o}}\right). \quad (55.1)$$

Нужно понимать, что это две формы записи одной и той же функции. Мы будем пользоваться той формой записи, которая удобнее.

Найдем вторую частную производную этой функции по координате x.

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \kappa_x A\cdot\sin\left(\omega t - \kappa_x x - \kappa_y y - \kappa_z z + \varphi_{\text{o}}\right);$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = -\kappa_x^2 A\cdot\cos\left(\omega t - \kappa_x x - \kappa_y y - \kappa_z z + \varphi_{\text{o}}\right);$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = -\kappa_x^2\cdot\xi(x,y,z,t). \quad (55.2.а)$$

Аналогично получаем вторые производные по другим координатам:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = -\kappa_y^2\cdot\xi(x,y,z,t), \quad (55.2.б)$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = -\kappa_z^2\cdot\xi(x,y,z,t). \quad (55.2.в)$$

Складываем выражения (55.2.а), (55.2.б), (55.2.в) и получаем:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = -\left(\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_z^2\right)\cdot\xi(x,y,z,t).$$

В левой части равенства стоит оператор Лапласа, примененный к функции $\xi(x,y,z)$. В скобках в правой части – квадрат волнового числа.

Сведения из математики.

Оператором Лапласа, примененным к скалярной функции f от декартовых координат x, y, z, называется сумма вторых частных производных по этим координатам:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

$$\nabla^2 \xi(x,y,z,t) = -\kappa^2 \xi(x,y,z,t);$$

$$\frac{\nabla^2 \xi(x,y,z,t)}{\kappa^2} = -\xi(x,y,z,t). \tag{55.3}$$

Теперь найдем вторую частную производную функции (55.1) по времени:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega A \cdot \sin\left(\omega t - \kappa_x x - \kappa_y y - \kappa_z z + \varphi_о\right);$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cdot \cos\left(\omega t - \kappa_x x - \kappa_y y - \kappa_z z + \varphi_о\right);$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 \xi\left(x,y,z,t\right);$$

$$\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\xi\left(x,y,z,t\right). \tag{55.4}$$

Правые части уравнений (55.3) и (55.4) равны друг другу, значит, равны и левые части.

$$\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\nabla^2 \xi(x,y,z,t)}{\kappa^2}; \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{\kappa^2}\nabla^2 \xi(x,y,z,t);$$

$$\frac{\partial^2 \xi(x,y,z,t)}{\partial t^2} = \upsilon^2 \nabla^2 \xi(x,y,z,t). \tag{55.5.а}$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка в частных производных. В механике, в физике оно называется *волновым уравнением*. Хотя мы вывели его для плоских волн, оно справедливо для любых волн, в том числе и для немеханических. В одномерном виде это уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = \upsilon^2 \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2}. \tag{55.5.б}$$

> Если какая-либо функция координат и времени удовлетворяет уравнению вида (55.5.а) или (55.5.б), то эта функция описывает распространение волны со скоростью υ.

62.Эффект Доплера.

Все мы замечали, что гудок приближающегося и удаляющегося электровоза звучит по-разному. Скачок частоты сигнала в момент, когда электровоз проходит мимо нас, хорошо заметен. Если источник и приемник движутся, то частота испускаемого и принимаемого звука не совпадают. Качественно понять явление можно на следующем наглядном примере.

Представим себе некого корреспондента начала 20 века, который по заданию своего издательства отправляется в путешествие на поезде из Петербурга во Владивосток. Такое путешествие длилось около двух недель. В те времена не было интернета и мобильной связи. Главным средством общения были обыкновенные бумажные письма. Редактор ждет от него ежедневных письменных отчетов об увиденном в пути. Каждый день корреспондент пишет письмо и вечером отправляет его в редакцию. В то время даже авиапочты еще не было. Самый быстрый способ доставки в то время – положить письмо в почтовый вагон встречного поезда. Будем считать, что именно это и удается корреспонденту каждый вечер. Сутки проходят. Письмо отправлено. Оно едет назад на таком же поезде и оказывается в Петербурге через два дня после отъезда. Второе письмо будет отправлено через двое суток и прибудет в Петербург через четверо суток, третье – через шесть и т.д. Письма отправляются ежедневно, а приходят в редакцию через день. Корреспондент в этом не виноват, в этом “виноват” эффект Доплера. Частота сигнала, испускаемого движущимся объектом, не совпадает с частотой принимаемого сигнала.

Рассмотрим случай, показанный на рисунке 62.1, когда источник звуковой волны приближается к неподвижному приемнику со скоростью $\upsilon_и$. Скорость звука в воздухе – $\upsilon_з$.

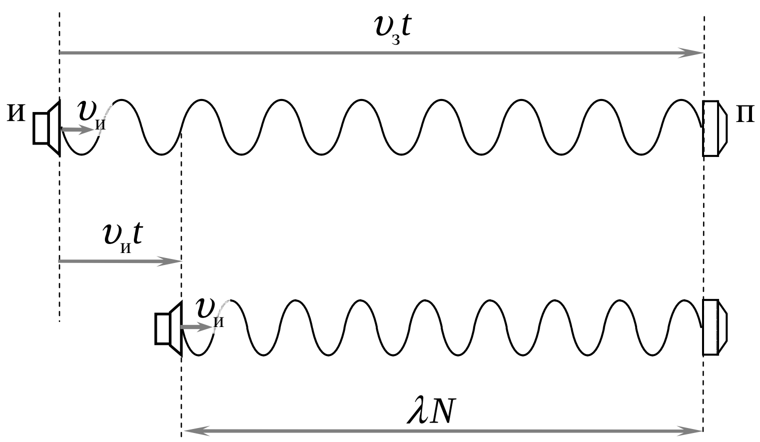

Рисунок 62.1. Источник звука приближается к приемнику.

В некоторый момент времени движущийся источник начинает излучать звуковую волну на частоте ν_0. Через некоторое время t, совершив N колебаний, источник заканчивает излучение. За это время волна пробежала расстояние $\upsilon_з t$, а источник переместился на расстояние $\upsilon_и t$. На длине $\upsilon_з t - \upsilon_и t$ укладывается N длин волн. Таким образом, длина волны, излучаемая движущимся источником равна

$$\lambda = \frac{(\upsilon_з - \upsilon_и)t}{N}.$$

Здесь N/t частота излучаемого источником сигнала ν_0. Таким образом,

$$\lambda = \frac{\upsilon_з - \upsilon_и}{\nu_0}. \qquad (62.1)$$

В верхней части рисунка показана волна, которую излучал бы неподвижный источник. Очевидно, что длина волны, излучаемой движущимся источником, изменилась. Причина этого в том, что звук бежит относительно неподвижной среды – воздуха.

Рассмотрим второй случай, показанный на рисунке 62.2, когда источник неподвижен, а приемник приближается к нему со скоростью $\upsilon_п$.

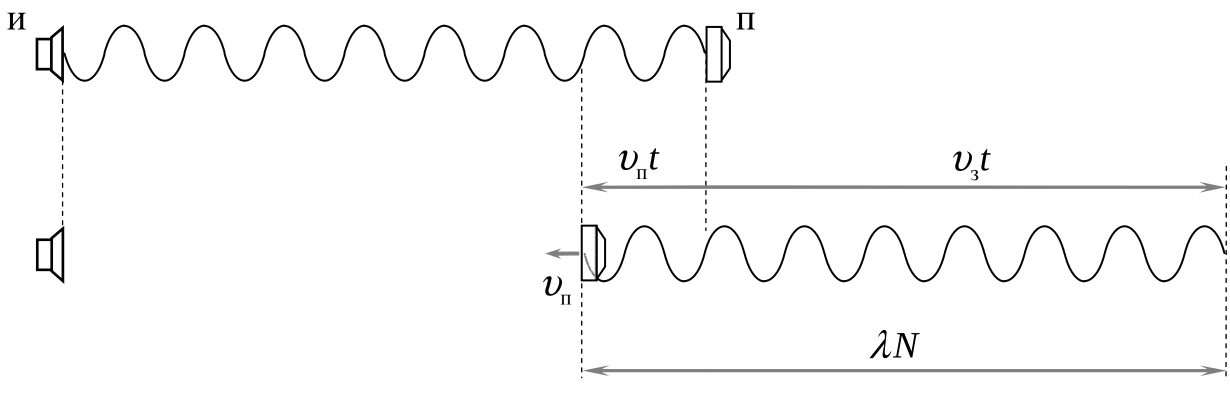

Рисунок 62.2. Приемник приближается к источнику звука.

В некоторый момент времени неподвижный источник начинает излучать звуковую волну на частоте ν_0. Совершив N колебаний, источник заканчивает излучение. Через некоторое время t после этого момента волна пробегает расстояние $\upsilon_з t$. За то же самое время приемник перемещается навстречу волне на расстояние $\upsilon_п t$ оказывается в ее конце. На длине $\upsilon_з t + \upsilon_и t$ укладывается N длин волн. Таким образом, для длины волны, принятой движущимся приемником имеем

$$\lambda = \frac{(\upsilon_з + \upsilon_п)t}{N}.$$

В этой формуле N/t частота принимаемых колебаний ν.

$$\nu = \frac{\upsilon_з + \upsilon_п}{\lambda}. \qquad (62.2)$$

В общем случае, когда двигаются и источник, и приемник, нужно в формулу (62.2) подставить длину волны из (62.1). Получается формула изменения частоты принимаемого сигнала при одновременном движении и источника и приемника

$$\nu = \frac{\upsilon_з + \upsilon_п}{\upsilon_з - \upsilon_и}\nu_0. \qquad (62.3)$$

Формула (62.3) получена для скоростей источника и приемника, направленных навстречу друг другу. Если одна из этих скоростей направлена в противоположную сторону, то перед ней нужно изменить знак.

<u>Пример 62.1.</u> Локомотив движется со скоростью 17 м/с и издает сигнал на частоте 2 кГц. Какую частоту сигнала слышит человек при приближении и при удалении локомотива? Скорость звука принять равной 340 м/с.

Дано:

$\upsilon_и$ = 17 м/с
$\upsilon_п$ = 0
$\upsilon_з$ = 340 м/с

Решение:

В случае, когда локомотив приближается к наблюдателю

$$\nu_1 = \frac{\upsilon_з + \upsilon_п}{\upsilon_з}\nu_0. \quad \nu_1 = \frac{340 + 17}{340}2000 = 2100 \text{ Гц}.$$

В случае, когда локомотив удаляется от наблюдателя

$$\nu_2 = \frac{\upsilon_з - \upsilon_п}{\upsilon_з}\nu_0. \quad \nu_2 = \frac{340 - 17}{340}2000 = 1900 \text{ Гц}.$$

Ответы: $\nu_1 = 2100$ Гц, $\nu_2 = 1900$ Гц.