5. Напряженность и потенциал электрического диполя.

Электрическим диполем называется два одинаковых по величине разноименных точечных заряда, отстоящих друг от друга на расстоянии ℓ. Вектор $\vec{\ell}$, проведенный из отрицательного заряда в положительный, называется плечом диполя. В случае, когда расстояние до точки наблюдения $r \gg \ell$, диполь называется точечным. Назовем левый отрицательный заряд q_1, а правый положительный q_2. Введем обозначение $q = |q_1| = q_2$.

Вектор $\vec{p} = q\vec{\ell}$ *называется электрическим дипольным моментом*.

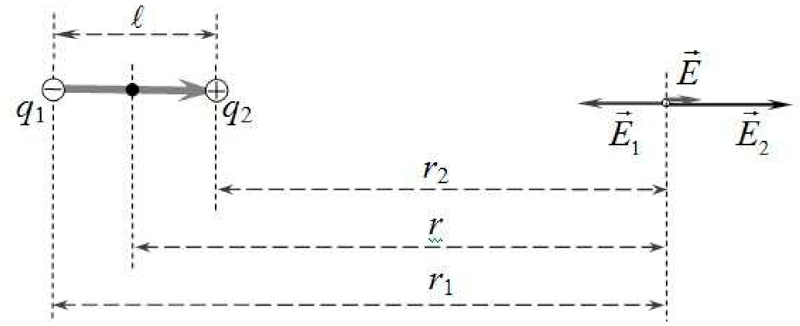


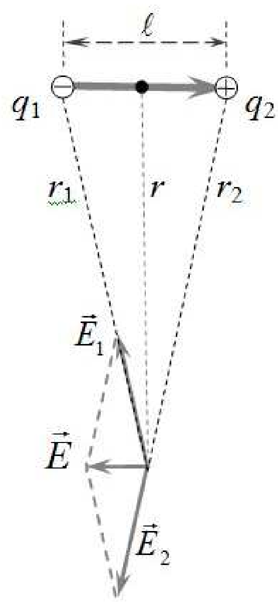
Рис. 5.1. Продольная составляющая вектора $\vec{E}$ для электрического диполя.

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ Поскольку $\vec{E}_1 \uparrow\downarrow \vec{E}_2 \Rightarrow E = E_2 - E_1$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_2^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_1^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(r_1^2 - r_2^2\right)}{r_1^2 r_2^2} = \frac{q\left(r_1 - r_2\right)\left(r_1 + r_2\right)}{4\pi\varepsilon_0\left(r_1 r_2\right)^2}.$$

Учитывая, что $r_1 - r_2 = \ell$, $r_1 + r_2 = 2r$, $r_1 r_2 \approx r^2$, а $q\ell = p$, получаем

$$E = \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}. \qquad (5.1)$$



Теперь найдем напряженность электрического поля в перпендикулярном вектору $\vec{\ell}$ направлении, как это показано на рисунке 5.2. Поскольку диполь точечный, считаем, что $r_1 = r_2 = r$. Заряды q_1 и q_2 создают в точке наблюдения одинаковые по величине, но немного не параллельные вектора $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$. Их длины равны

$$E_1 = E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Рис. 5.2. Поперечная составляющая вектора $\vec{E}$ для электрического диполя

Результирующий вектор $\vec{E}$ направлен, как это показано на рис.5.2. Треугольник векторов $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}$ подобен треугольнику r_1, r_2, ℓ, поэтому имеем:

$$\frac{E}{E_1} = \frac{\ell}{r}; \quad \Rightarrow \quad E = \frac{E_1 \ell}{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\ell}{r} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}. \qquad (5.2)$$

Получилось значение в два раза меньшее, чем по формуле (5.1).
Рассмотрим общий случай, показанный на рисунке 5.3, когда вектор $\vec{r}$ направлен под произвольным углом θ к вектору $\vec{p}$.

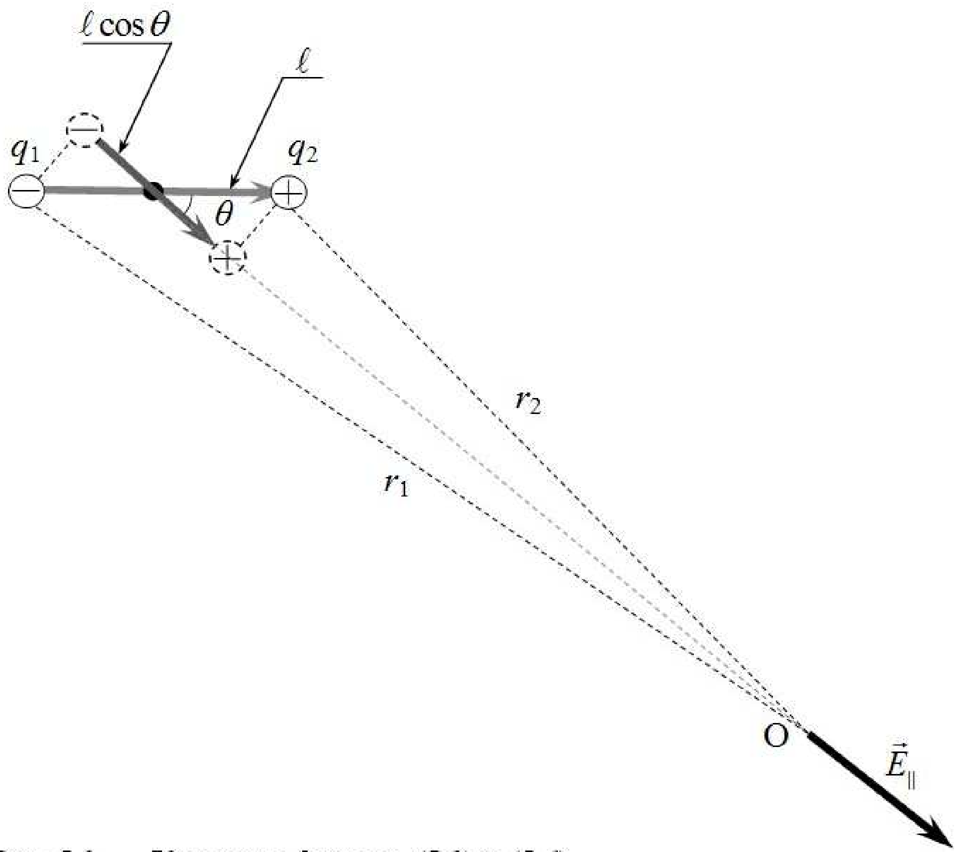


Рис. 5.3. К выводу формул (5.3) и (5.6).

Повторим выкладки, проведённые при выводе формулы (5.1), учитывая, что $r_1 - r_2 = \ell \cdot \cos\theta$. Для продольной составляющей вектора напряжённости электрического диполя в этом случае получим

$$E_{\parallel} = \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \cdot \cos\theta. \qquad (5.3)$$

Вернемся к формуле (5.2) для произвольного угла θ, как показано на рис 5.4.

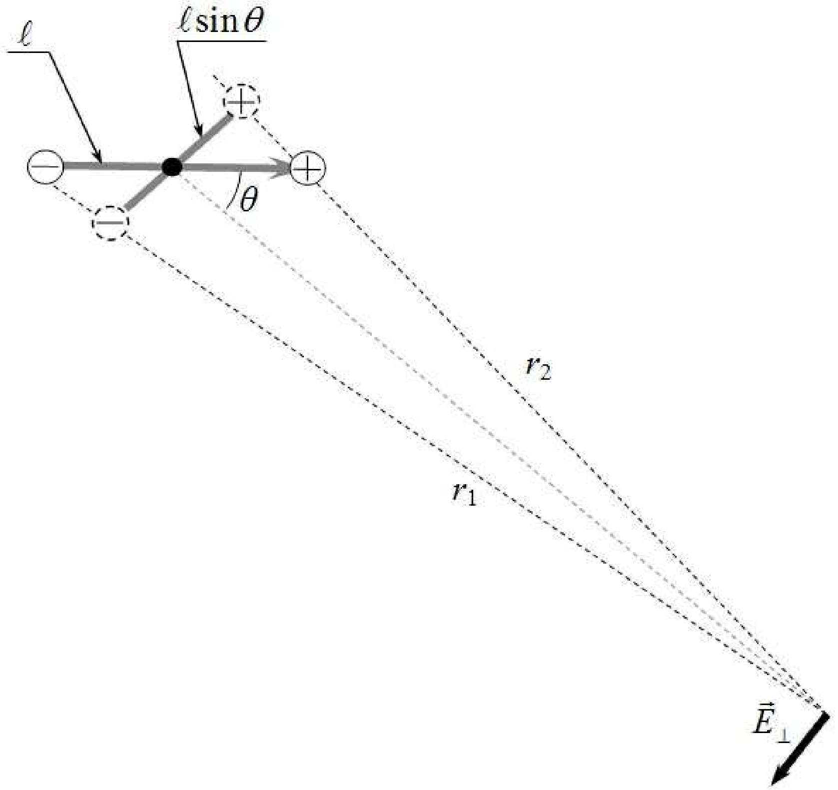


Рис. 5.4. К выводу формулы (5.4)

Использованная при выводе формулы пропорция переписывается в виде

$$\frac{E}{E_1} = \frac{\ell\sin\theta}{r}.$$

Следовательно, поперечная составляющая вектора напряженности электрического поля точечного диполя равна

$$E_\perp = = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\sin\theta. \tag{5.4}$$

В общем случае (рис.5.5), когда точка наблюдения лежит не на оси диполя и не на перпендикуляре к ней, напряженность электрического поля, создаваемого этим диполем, будет иметь две компоненты (5.3) и (5.4). Первая из них направлена вдоль радиус-вектора, а вторая – перпендикулярно к нему.

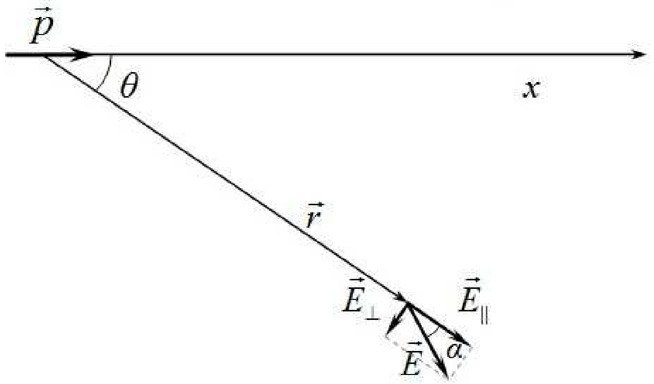


Рис. 5.5. Направление вектора напряженности точечного диполя.

$$E=\sqrt{E_{\perp}^2+E_{\parallel}^2}=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{\sin^2\theta+4\cos^2\theta}=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}.$$

$$tg\alpha=\frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}}=\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\frac{4\pi\varepsilon_0 r^3}{2p\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{2\cos\theta}=\frac{1}{2}tg\theta.$$

$$E=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}. \qquad (5.5)$$

$$tg\alpha=\frac{1}{2}tg\theta. \qquad (5.6)$$

Снова обратимся к рисунку 5.3 и найдем потенциалы, создаваемые первым и вторым зарядами в точке О.

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(r_1-r_2)}{r_1r_2};$$

Учтем, что диполь точечный, т.е. $r_1r_2=r^2$ и то, что $r_1-r_2=\ell\cdot\cos\theta$.

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\ell\cos\theta}{r^2}; \quad \Rightarrow$$

$$\varphi=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta. \qquad (5.7)$$

Выводы:

1. Поле точечного диполя не центральное. Это значит, что вектор напряженности направлен не вдоль радиус-вектора. Потенциал зависит от угла.

2. Напряженность и потенциал точечного диполя уменьшаются с расстоянием быстрее, чем для точечного заряда.

6. Электрический диполь во внешнем поле.

Сначала рассмотрим диполь в однородном электрическом поле.

> Однородным называется такое электрическое поле, для которого вектор напряженности имеет постоянное значение и направление в изучаемой области.

1. Сила, действующая на диполь в однородном электрическом поле.

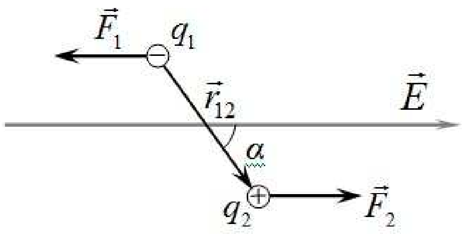


Рис. 6.1. Диполь в однородном поле

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = q_1\vec{E} + q_2\vec{E} = \left(q_1 + q_2\right)\vec{E} = 0$$

$$\left(q_1 = -q_2\right)$$

Сила, действующая на диполь в однородном поле равна нулю.

2. Момент сил, действующий на диполь в однородном поле.

На диполь в однородном электрическом поле действуют две силы, одинаковые по величине, противоположные по направлению, т.е. пара сил. Воспользуемся доказанным ранее[1] свойством момента пары сил: $\vec{M} = \left[\vec{r}_{12}\vec{F}_2\right]$.

$$\vec{M} = \left[\vec{r}q\vec{E}\right] = q\left[\vec{r}\vec{E}\right] = \left[\vec{p}\vec{E}\right].$$

На электрический диполь во внешнем электрическом поле действует момент сил, стремящийся повернуть диполь вдоль силовой линии.[2]

$$\begin{gathered} \vec{M} = \left[\vec{p}\vec{E}\right], \\ M = pE\sin\alpha. \end{gathered} \tag{6.1}$$

3. Потенциальная энергия электрического диполя во внешнем поле.

Поместим диполь во внешнее электрическое поле и повернем его на угол α по часовой стрелке, как это показано на рис. 6.2. На диполь действует вращательный момент, стремящийся повернуть вектор $\vec{p}$ в направлении вектора $\vec{E}$, т.е. против часовой стрелки. Следовательно, векторы $\vec{M}$ и $d\vec{\alpha}$ имеют противоположные направления $\vec{M} \uparrow\downarrow d\vec{\alpha}$. Считаем диполь абсолютно твер-

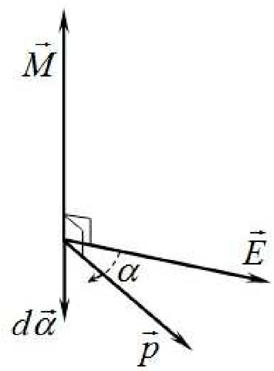


Рис.6.2. Направления векторов

[1] Курс Физики. Часть 1. Механика. Колебания и волны. Момент импульса и момент силы.

[2] Электрический диполь ведет себя так же, как магнитная стрелка в магнитном поле.

дым телом. Работа по повороту такого тела на малый угол $d\vec{\alpha}$ равна:

$$dA = \left(\vec{M}d\vec{\alpha}\right) = Md\alpha \cdot \cos\pi = -Md\alpha.$$

$$\left(\vec{M} \uparrow\downarrow d\vec{\alpha}\right)$$

Вспомним связь работы и потенциальной энергии: $dW = -dA.$

$$dW = Md\alpha = pE\sin\alpha\, d\alpha = -pEd(\cos\alpha) =$$
$$= -d(pE\cos\alpha) = -d(\vec{p}\vec{E}).$$

Когда дифференциалы двух величин равны, сами величины могут отличаться друг от друга только на константу. Если выбрать ноль потенциальной энергии при $\vec{p} \perp \vec{E}$, то эта константа окажется равной нулю.

Электрический диполь во внешнем однородном электрическом поле имеет потенциальную энергию

$$W = -\left(\vec{p}\vec{E}\right). \tag{6.2}$$

Эта энергия минимальна (отрицательна), если диполь ориентирован по силовым линиям. Энергия максимальна (положительна), если диполь ориентирован навстречу силовым линиям. Энергия равна нулю, если диполь ориентирован перпендикулярно силовым линиям.

4. Электрический диполь в неоднородном электрическом поле.

Неоднородное электрическое поле, так же, как и однородное, стремится повернуть диполь вдоль силовой линии. Будем считать, что уже повернуло.

В неоднородном поле вектор напряженности в разных точках имеет различные значения. Пусть напряженность поля увеличивается в направлении силовой линии (вдоль оси x) и силовые линии сгущаются. Такую картину силовых линий может создать, например, отрицательный заряд, находящийся справа за пределами рисунка 6.3.

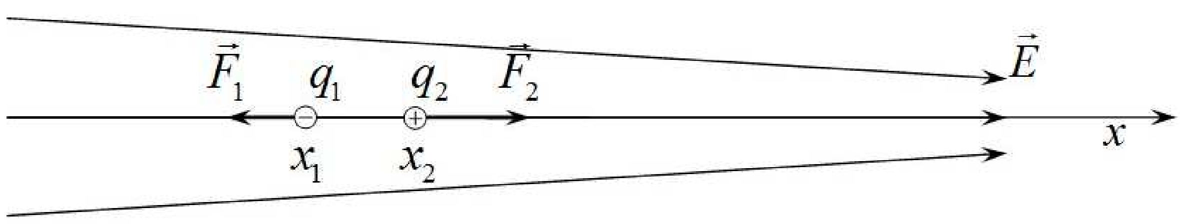


Рис. 6.3. Электрический диполь в неоднородном поле.

На заряды q_1 и q_2 действуют силы в противоположных направлениях. Поскольку электрическое поле неоднородное, величины этих разные, их сумма не равна нулю. Имеется равнодействующая сила, направленная вдоль оси ox.

$$F_x = F_2 - F_1 = q\left(E_2 - E_1\right).$$

Учтем, что диполь точечный, $\dfrac{\partial E}{\partial x} = \dfrac{\Delta E}{\Delta x} = \dfrac{E_2 - E_1}{x_2 - x_1}$, и то, что $\ell = x_2 - x_1$.

$$F_x = q\left(E_2 - E_1\right) = q\frac{\partial E}{\partial x}\ell = p\frac{\partial E}{\partial x}.$$

На электрический диполь в неоднородном поле, ориентированный в вдоль силовой линии, действует сила, пропорциональная дипольному моменту и величине неоднородности поля. Эта сила затягивает диполь в область сгущения силовых линий.

$$F_x = p\frac{\partial E}{\partial x} \tag{6.3}$$