Оглавление

Механические колебания

41. Уравнение гармонических колебаний.

Рассмотрим *пружинный маятник*, рисунок 41.1. Груз массой m на пружине жесткостью k, прикреплен к стене. Сила трения отсутствует.

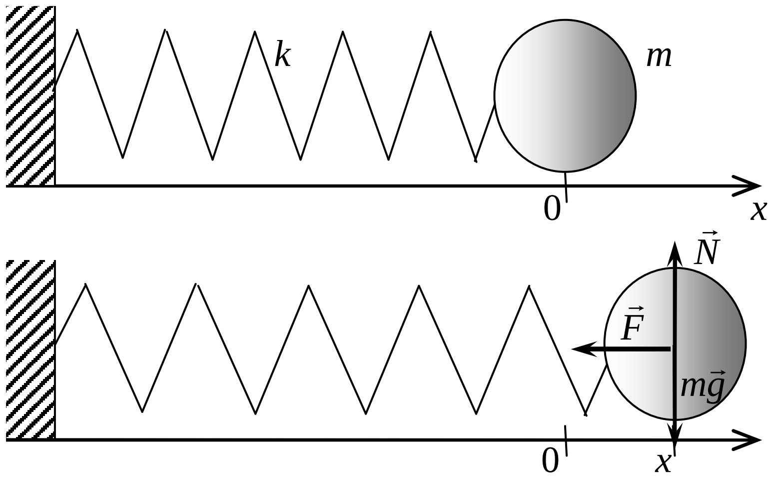


Рисунок 41.1. Пружинный маятник.

Обозначим точку 0 – положение равновесия груза. Если груз на пружине оттянуть, деформировать пружину на величину x, то возникнет сила, возвращающая тело к положению равновесия. Проекция этой силы на ось равна

$$F_x = -kx. \qquad (41.1)$$

В этой формуле k – жесткость, а x – деформация пружины.

По второму закону Ньютона сумма всех приложенных к телу сил равна произведению массы тела на ускорение

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} = m\vec{a}.$$

Силы тяжести и реакции опоры компенсируют друг друга $m\vec{g}+\vec{N}=0.$ Поэтому сила упругости пружины – единственная не скомпенсированная сила, действующая на тело

$$\vec{F}=m\vec{a}.$$

Спроектируем получившееся выражение на ось (ох), учитывая выражение (41.1) и рассматривая левую и правую части, как функции времени, имеем

$$ma_x(t)=-kx(t). \tag{41.2}$$

Ускорение – это вторая производная координаты по времени, поэтому

$$m\cdot x''(t)+k\cdot x(t)=0. \tag{41.3}$$

Вводим обозначение

$$\omega_o=\sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{41.4}$$

и получаем дифференциальное уравнение гармонических колебаний в каноническом виде:

$$x''(t)+\omega_o^2\cdot x(t)=0. \tag{41.5}$$

Решением этого уравнения является функция:

$$x(t)=A\cdot\cos(\omega_o t+\varphi_o), \tag{41.6}$$

в которой A – амплитуда колебаний, т.е. максимальная по модулю деформация пружины; φ_0 – начальная фаза. Эти величины могут быть найдены из начальных условий: начальной координаты x_0 и начальной скорости υ_0. Выражение в скобках называется фазой колебаний. Она измеряется в радианах. Период колебаний пружинного маятника $T=2\pi/\omega_o$, т.е. с учетом (41.4)

$$T=2\pi\sqrt{m/k}. \tag{41.7}$$

Скорость – это производная от координаты по времени. Поэтому, скорость маятника, совершающего гармонические колебания, равна

$$\upsilon(t)=-\omega A\cdot\sin(\omega_o t+\varphi_o). \tag{41.8}$$

Получается, что скорость маятника меняется по гармоническому закону на той же частоте ω_0. Максимальная скорость равна

$$\upsilon_m = A\omega_o.$$

Ускорение – это вторая производная от координаты по времени или первая производная от скорости по времени. Поэтому, ускорение маятника, совершающего гармонические колебания, равно

$$a(t) = -\omega A^2 \cdot \sin(\omega_o t + \varphi_o). \tag{41.9}$$

Получается, что ускорение маятника меняется по гармоническому закону на той же частоте ω_o. Максимальное ускорение равно

$$a_m = A\omega_o^2.$$

Покажем, как по начальным условиям $-x_o$ и υ_o найти амплитуду и начальную фазу колебаний

$$x_o = x_{(t=0)} = A\cos(\omega_o \cdot 0 + \varphi_o) = A\cos\varphi_o; \qquad x_o = A\cos\varphi_o. \tag{41.10}$$

$$\upsilon_o = \upsilon_{(t=0)} = -A\omega_o \sin(\omega_o \cdot 0 + \varphi_o) = -A\omega_o \sin\varphi_o; \qquad -\upsilon_o/\omega_o = A\sin\varphi_o. \tag{41.11}$$

Возведем в квадрат левые и правые части (41.10), (41.11) и сложим их

$$x_o^2 + \frac{(-\upsilon_o)^2}{\omega_o^2} =_o A^2\cos^2\varphi_o + A^2\sin^2\varphi_o;$$

$$x_o^2 + \frac{\upsilon_o^2}{\omega_o^2} = A^2(\cos^2\varphi_o + \sin^2\varphi_o) = A^2;$$

$$A = \sqrt{x_o^2 + \frac{\upsilon_o^2}{\omega_o^2}}. \tag{41.12}$$

Теперь поделим выражение (41.11) на выражение (41.10)

$$\frac{-\upsilon_o}{\omega_o x_o} = \frac{A\sin\varphi_o}{A\cos\varphi_o}; \qquad tg\varphi_o = \frac{-\upsilon_o}{\omega_o x_o};$$

$$\varphi_o = -\mathrm{arctg}\left(\frac{\upsilon_o}{\omega_o x_o}\right). \tag{41.13}$$

Итак, мы выразили амплитуду A и начальную фазу φ_o колебаний через начальные условия x_o и υ_o. Функция (41.6) полностью определена и поставленная основная обратная задача динамики решена.

43. Энергия гармонических колебаний.

Потенциальная энергия сжатой пружины равна

$$E_П = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_о t + \varphi_о). \qquad (43.1)$$

Кинетическая энергия движущегося маятника равна

$$E_К = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_m{}^2\sin^2(\omega_о t + \varphi_о) = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega_о t + \varphi_о).$$

Вспомним, что жесткость пружины, масса груза и частота собственных колебаний связаны соотношением (41.4) $\omega_о = \sqrt{k/m}$, и закончим выкладки для кинетической энергии:

$$E_К = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_о t + \varphi_о). \qquad (43.2)$$

Полная механическая энергия маятника равна сумме потенциальной и кинетической; сложим их и получим

$$E = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_о t + \varphi_о) + \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_о t + \varphi_о) = \frac{1}{2}kA^2. \qquad (43.3)$$

Получилось, что полная энергия – величина постоянная, что и следовало ожидать.

Найдем средние значения потенциальной и кинетической энергий. При этом учтем, что средние значения квадрата косинуса и квадрата синуса одинаковы и равны ½.

$$\langle E_К \rangle = \frac{1}{2}kA^2\langle \sin^2(\omega_о t + \varphi_о)\rangle = \frac{1}{4}kA^2; \qquad (43.4)$$

$$\langle E_П \rangle = \frac{1}{2}kA^2\langle \cos^2(\omega_о t + \varphi_о)\rangle = \frac{1}{4}kA^2. \qquad (43.5)$$

Средние значения кинетической и потенциальной энергии равны друг другу.

44. Векторная диаграмма.

Пусть материальная точка равномерно вращается с угловой скоростью ω_o против часовой стрелки по окружности с радиусом A, как это показано на рисунке 44.1. Если в начальный момент времени угол поворота был φ_0, то вращения материальной точки будет происходить по закону

$$\varphi(t) = \omega_o t + \varphi_o. \qquad (4.1)$$

Проекции конца вектора $\vec{A}$ на координатные оси будут равны

$$x = A\cos\varphi; \qquad y = A\sin\varphi.$$

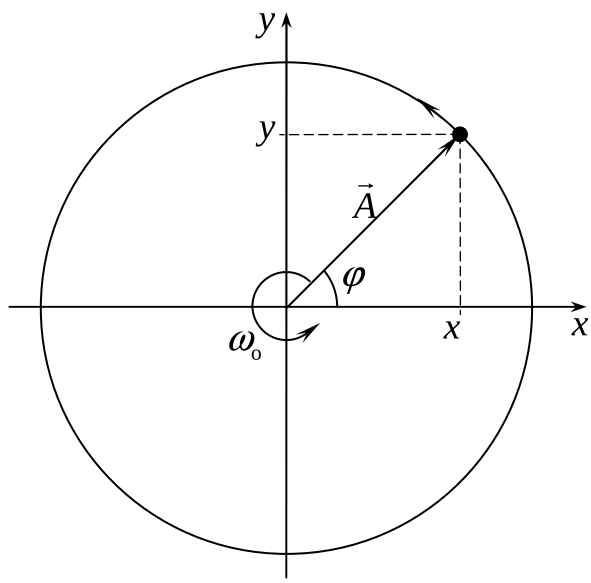


Рисунок 44.1. Равномерное вращение точки по окружности.

Учитывая (44.1), получаем два гармонических колебания, происходящих вдоль оси x и вдоль оси y одновременно.

$$x(t) = A\cos(\omega_o t + \varphi_o);$$
$$y(t) = A\sin(\omega_o t + \varphi_o).$$

> Одно равномерное вращение эквивалентно двум гармоническим колебаниям.

К тому же выводу можно прийти, используя комплексные числа. Запишем комплексное число в показательном виде

$$z = A \cdot e^{i\varphi}.$$

Здесь A – модуль числа, φ – его фаза (угол между вещественной осью и направлением отрезка A). Если фаза меняется по закону (44.1), то

$$z(t) = Ae^{i(\omega_0^2 t + \varphi_0)}. \qquad (44.2)$$

Физический смысл имеет лишь проекция комплексного числа на вещественную ось

$$x(t) = \operatorname{Re} z(t) = A \cdot \operatorname{Re}\left(e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)}\right) = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right).$$

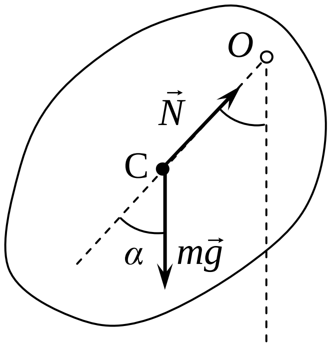
Мы снова пришли к той же формуле (41.6). В некоторых случаях для удобства, для наглядности, для простоты пользуются формулой (44.2) вместо (41.6). В этой замене и заключается метод векторной диаграммы.

Метод векторных диаграмм

Гармоническое колебание маятника с амплитудой A на собственной частоте ω_0 заменяется равномерным вращением материальной точки против часовой стрелки с угловой скоростью ω_0 по окружности с радиусом, равным амплитуде колебаний.

45. Физический и математический маятник.

Физическим маятником называется абсолютно твердое тело, подвешенное на горизонтальной оси, не проходящей через центр масс. Расстояние от центра масс до оси обозначим буквой b.



$$|OC| = b$$

Рисунок 45.1. Физический маятник

К физическому маятнику на рис.45.1 приложены две силы: сила тяжести и сила взаимодействия с осью O. Момент первой из них относительно оси подвеса равен $M_1 = mgb \cdot \sin\alpha$. Момент силы N взаимодействия с осью равен нулю, поскольку сама сила направлена вдоль отрезка $[OC]$. По второму закону Ньютона для вращательного движения

$$\sum \vec{M}_i = \vec{M}_{\text{тяж}} = I\vec{\varepsilon}\,, \tag{45.1}$$

где I – момент инерции маятника относительно оси O, а $\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение. Поскольку, момент силы тяжести стремится вернуть маятник к положению равновесия, векторы $\vec{M}_{\text{тяж}}$ и $\vec{\varepsilon}$ имеют противоположные направления. При записи уравнения (45.1) в скалярном виде в проекции на направление оси вращения нужно поставить знак минус у одного из этих векторов:

$$I\varepsilon = -mgb \cdot \sin\alpha\,. \tag{45.2}$$

Вспомним, что $\varepsilon(t) = \alpha''(t)$, и при малых углах отклонения $\sin\alpha = \alpha$

$$\alpha''(t) + \frac{mgb}{I}\alpha(t) = 0\,. \tag{45.3}$$

Вводим обозначение, $$\omega_0 = \sqrt{mgb/I} \tag{45.4}$$

и окончательно имеем $$\alpha''(t) + \omega_0^2 \cdot \alpha(t) = 0. \tag{45.5}$$

Мы получили уравнение, аналогичное (41.5), но не для смещения, а для угла поворота. От того, какой буквой обозначена искомая функция $x(t)$ или $\alpha(t)$, разумеется, ничего не зависит. Решение уравнения (45.5) будет таким же, как и для уравнения (41.5)

$$\alpha(t) = A\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi_0). \tag{45.6}$$

Физический маятник при малых углах отклонения совершает гармонические колебания с периодом $T = 2\pi/\omega_0$, т.е. с учетом (45.4)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgb}}. \tag{45.7}$$

Математическим маятником называется материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити, рисунок 45.2. Его можно рассматривать, как частный случай физического маятника с $b = \ell$ и моментом инерции $I = m\ell^2$.

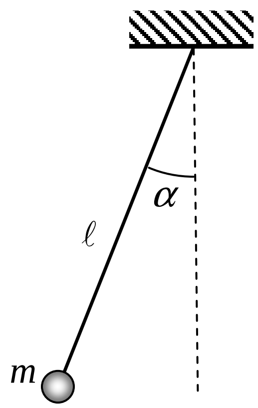


Рисунок 45.2. Математический маятник.

Сказанное обозначает, что *математический маятник при малых углах отклонения совершает гармонические колебания* с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell^2}{mg\ell}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}. \tag{45.8}$$

Приведенной длиной физического маятника называют длину L такого математического, который колеблется с той же частотой.

$$L = \frac{I}{mb}. \tag{45.9}$$