

7. Теорема Гаусса для вектора \vec{E} .

Сначала введём понятие потока вектора \vec{E} . Рассмотрим небольшую площадку S в однородном электрическом поле. Построим единичный вектор \vec{n} из ее середины перпендикулярно поверхности и назовем его нормалью. Эту площадку пересекают силовые линии под некоторым углом к поверхности и углом α к нормали. Поток вектора \vec{E} через площадку S назовем произведение длины вектора на площадь и на косинус угла α .

$$\Phi = ES \cos \alpha = E_n S \quad (7.1)$$

Здесь E_n – проекция вектора напряженности на направление нормали.

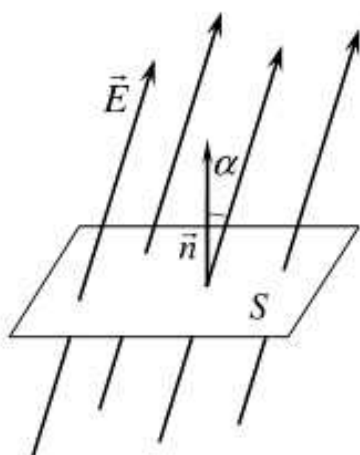


Рис. 7.1. Силовые линии, пересекающие площадку.

Условимся считать S вектором, длина которого равна площади, направление совпадает с вектором нормали

$$\vec{S} = S \vec{n}.$$

Теперь формулу (7.1) можно переписать в виде скалярного произведения

$$\Phi = (\vec{E} \vec{S}). \quad (7.2)$$

На рис. 7.2 показаны различные случаи ориентации площадки S во внешнем электрическом поле.

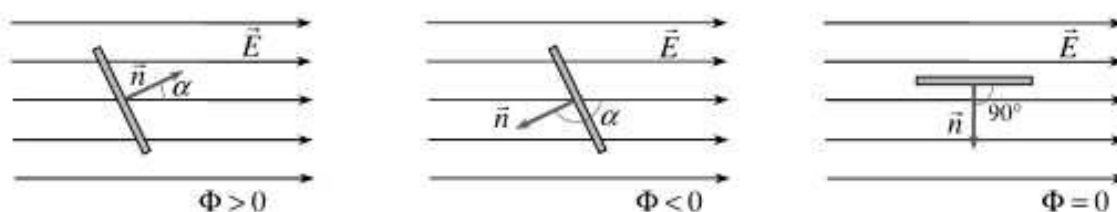


Рис. 7.2. Электрический поток при разных ориентациях площадки во внешнем поле.

В случае, когда поле неоднородно или поверхность неплоская, формулами (7.1) и (7.2) пользоваться невозможно. В таком случае (рис. 7.3) поверхность разбивают на элементарные области $d\vec{S}$. Вычисляют элементарные потоки через каждую такую область, полагая, что в пределах малой области поверхность можно считать плоской, а поле однородным

$$d\Phi = (\vec{E} d\vec{S}). \quad (7.3)$$

Полный поток Φ через всю поверхность находится суммированием (интегрированием) всех элементарных потоков

$$\Phi = \int_{(S)} (\vec{E} d\vec{S}). \quad (7.4)$$

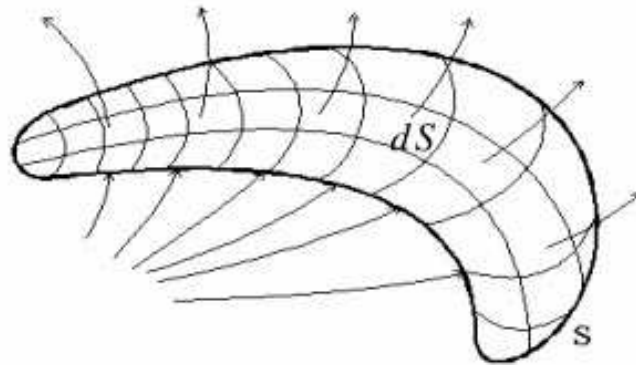


Рис.7.3. Вычисление потока неоднородного поля через сложную поверхность.

В случае замкнутой поверхности введем соответствующий символ на знаке интеграла

$$\Phi = \oint_{(S)} (\vec{E} d\vec{S}). \quad (7.5)$$

На языке силовых линий поток имеет смысл полного количества силовых линий, пересекающих поверхность.

Формулировка теоремы Гаусса:

Поток вектора \vec{E} через замкнутую оболочку равен алгебраической сумме зарядов, оказавшихся внутри этой оболочки, деленной на ϵ_0 .

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i \quad (7.6)$$

Докажем теорему в 4 этапа.

1. Оболочка сферическая, один заряд находится в ее центре (рис.7.3).

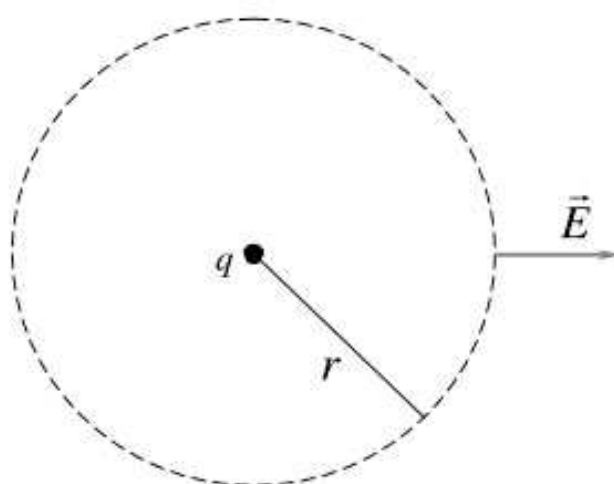


Рис. 7.2. Сферическая оболочка с зарядом в центре.

В силу полной симметрии картинки:

- вектор \vec{E} всегда перпендикулярен поверхности сферы; $\vec{E} \parallel \vec{n}$, $\vec{E} \parallel d\vec{S}$.
- длина вектора \vec{E} одинакова в любой точке сферы, $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.

$$\oint_{(S)} (\vec{E} d\vec{S}) = \oint_{(S)} E dS = E \oint_{(S)} dS = E S_{\text{сферы}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad \text{Доказано.}$$

- Оболочка произвольной формы, один заряд находится внутри (рис.7.4). Сначала – сведения из геометрии (стереометрии).

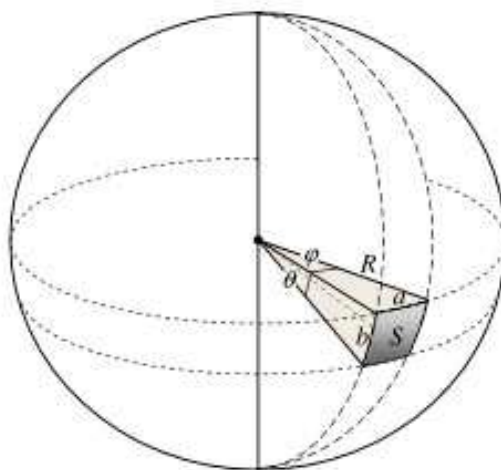


Рис. 7.3. К определению телесного угла.

Углы φ и θ в радианной мере равны

$$\varphi = \frac{a}{R}, \quad \theta = \frac{b}{R}.$$

Площадь S небольшого прямоугольника на поверхности сферы с радиусом R

$$S = a \cdot b = \varphi \theta \cdot R^2 = \Omega R^2.$$

Величина Ω называется **телесным** или **объемным углом**. В данном случае

$$\Omega = \varphi\theta. \quad (7.7)$$

Телесный угол – это часть пространства, ограниченная некоторой конической поверхностью, которая является объединением всех лучей, выходящих из точки O (вершины угла) и пересекающих некоторую поверхность.

Величина телесного угла определяется формулой

$$\Omega = \frac{S}{R^2}. \quad (7.8)$$

В этой формуле S – площадь участка на поверхности сферы, стягивающего данный телесный угол, R – радиус этой сферы.

Единицей измерения телесного угла является **Стерadian**. Эту величину можно иначе назвать квадратным радианом. $1 \text{ ср} = (1 \text{ рад})^2$

Радян и стерадиан являются безразмерными производными единицами СИ.

Найдем телесный угол, соответствующий всему пространству. Для этого нужно площадь сферы поделить на радиус сферы в квадрате.

$$\Omega_{\text{полн}} = \frac{S_{\text{сф}}}{R^2} = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi(\text{ср}). \quad (7.9)$$

Мы доказали, что **телесный угол всего пространства равен 4π стерадиан**.

Вернемся к теореме Гаусса для точечного заряда внутри произвольной оболочки. Рассмотрим поток $d\Phi$ через элемент поверхности dS , произвольным образом ориентированный к направлению силовых линий (рис.7.5)

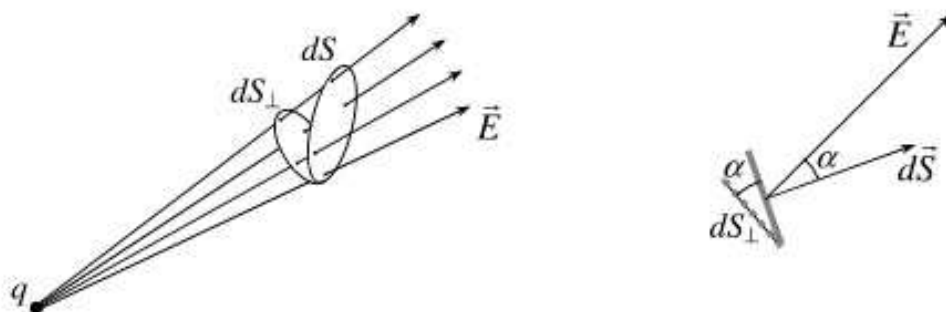


Рис. 7.4. Поток через элемент поверхности.

$$d\Phi = (\vec{E}d\vec{S}) = EdS \cdot \cos \alpha = EdS_{\perp}.$$

Учтем, что электрическое поле создается точечным зарядом q , а элемент поверхности dS_{\perp} – это элемент поверхности сферы.

$$d\Phi = E dS_{\perp} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot d\Omega \cdot r^2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot d\Omega.$$

Получается, что поток через элемент поверхности не зависит от расстояния до заряда, но зависит от величины заряда и от телесного угла, который стягивает эта поверхность. Интегрируем по всему пространству и получаем:

$$\Phi = \oint_{(S)} (\vec{E} d\vec{S}) = \oint_{(\Omega)} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_{(\Omega)} d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Утверждение доказано.

3. Рассмотрим оболочку произвольной формы, внутри которой имеются электрические заряды, как это показано на рисунке 7.6.

В силу принципа суперпозиции для напряженности электрического поля имеем $\vec{E} = \sum \vec{E}_i$. Суммирование производится по всем зарядам.

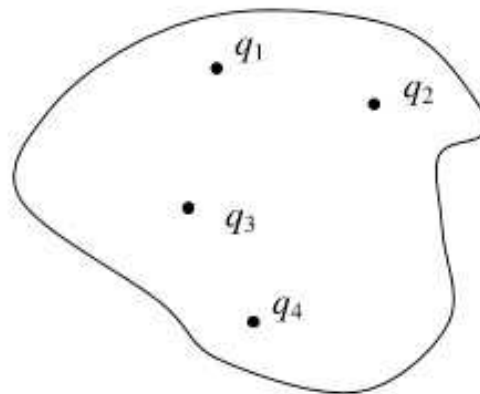


Рис. 7.6. Электрические заряды внутри замкнутой оболочки.

Учтем, что знаки интегрирования и суммирования можно менять местами.

$$\Phi = \oint_{(S)} (\vec{E} d\vec{S}) = \oint_{(S)} \sum (\vec{E}_i d\vec{S}) = \sum \oint_{(S)} (\vec{E}_i d\vec{S}) = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}.$$

Теорему Гаусса для нескольких зарядов внутри замкнутой оболочки доказана.

4. Пусть положительный заряд находится рядом с замкнутой оболочкой, но за её пределами, как это показано на рис. 7.8.

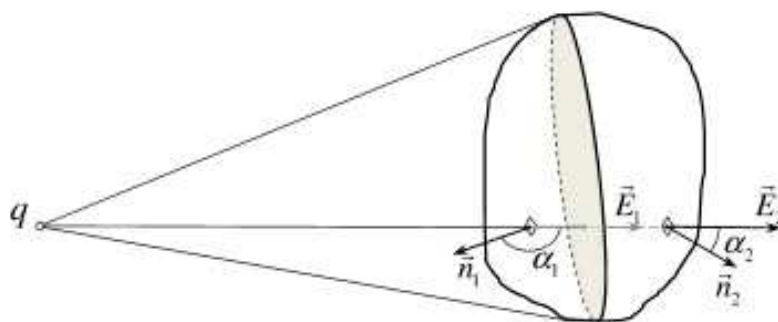


Рис.7.8. Поток через замкнутый контур.

В этом случае каждая силовая линия пересекает поверхность S дважды: входит через левую часть – S_1 и выходит через правую часть – S_2 . Граница между ними на рис.7.8 обозначена. Полный поток через оболочку можно разбить на два: Φ_1 – через левую половину – входящий и Φ_2 – через правую половину – выходящий. Отметим, что силовые линии около границы могут только касаться поверхности S , но не могут ее пересекать. Они дают нулевой вклад в полный поток через оболочку S . Поскольку обе оболочки S_1 и S_2 стягивают один и тот же телесный угол, потоки Φ_1 и Φ_2 равны по модулю; но угол между нормалью и вектором \vec{E} для S_1 тупой, а для S_2 – острый. Значит,

$$\Phi_2 = -\Phi_1; \quad \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 0.$$

Мы доказали, что *поток через замкнутую поверхность от заряда, расположенного снаружи, равен нулю.*

Если электрические заряды расположены снаружи и внутри замкнутой оболочки, то внешние заряды (на рис. 7.9 – это q_5 и q_6) не дают вклада в результирующий поток вектора \vec{E} . Значит, их нужно исключить из суммы.

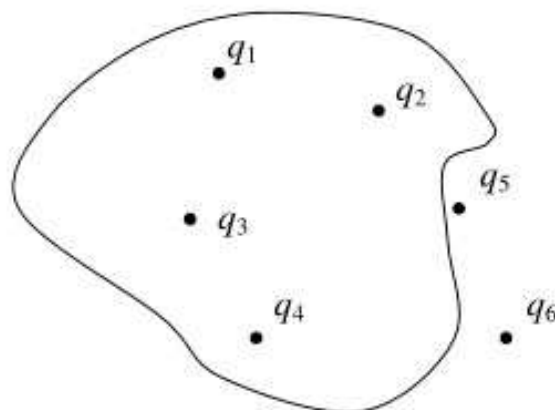


Рис. 7.9. Электрические заряды снаружи и внутри замкнутой оболочки.

Суммируются только заряды, находящиеся внутри контура. Таким образом, мы доказали теорему Гаусса для вектора \vec{E} , формула (7.6).

$$\oint_{(S)} (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i$$

8. Применение теоремы Гаусса для расчета электрических полей.

8.1. Равномерно заряженная сфера.

Пусть заряд q равномерно распределен по сфере с радиусом R с центром в точке O . Требуется найти напряженность и потенциал на расстоянии r от центра заряженной сферы.

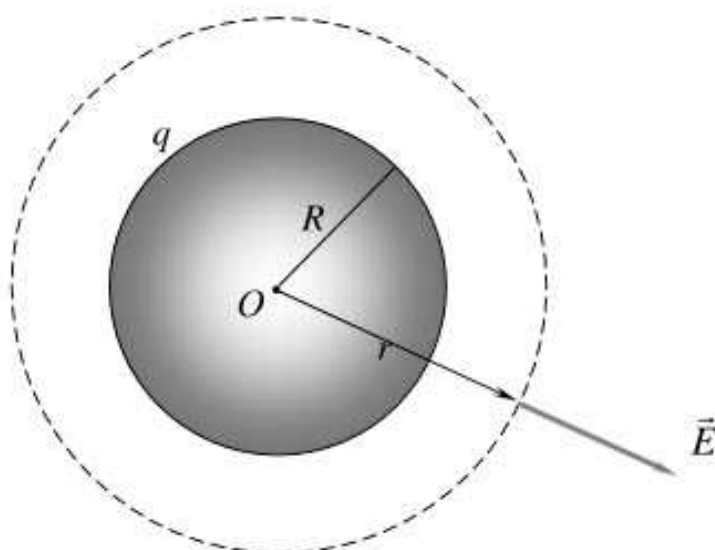


Рис. 8.1. Напряженность электрического поля равномерно заряженной сферы.

Очевидно, что поле равномерно заряженной сферы должно быть сферически симметричным. Это значит, что вектор \vec{E} должен быть направлен либо вдоль радиус-вектора \vec{r} , либо навстречу ему. Для определенности будем считать, что заряд q положителен (знак заряда не важен, нужно лишь для определенности выбрать один знак). Кроме того, величина напряженности (длина вектора \vec{E}) может зависеть лишь от длины радиус-вектора \vec{r} . Окружим сферу концентрической оболочкой с радиусом r . Вектор \vec{E} направлен перпендикулярно поверхности этой сферы, т.е. $\vec{E} \uparrow\uparrow d\vec{S}$, $\Rightarrow (\vec{E} d\vec{S}) = E dS$. Кроме того, длина вектора \vec{E} в любой точке пунктирной сферы одинаковая. Постоянную величину можно вынести из под интеграла

$$\oint_{(S)} (\vec{E} d\vec{S}) = \oint_{(S)} E dS = E \oint_{(S)} dS = ES_{\text{сф}} = E \cdot 4\pi r^2.$$

С другой стороны, по теореме Гаусса поток вектора \vec{E} равен полному заряду внутри оболочки, деленному на ϵ_0 .

$$\oint_{(S)} (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Левые части равны, значит, равны и правые:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}; \quad \Rightarrow \quad E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Напряженность электрического поля равномерно заряженной сферы можно вычислить, полагая, что весь заряд сосредоточен в ее центре

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (8.1)$$

Напряженность электрического поля однозначно связана с его потенциалом. Об этом говорилось в параграфе 4. Если для напряженности электрического поля справедлива формула (2.4), то для потенциала обязательно будет справедлива формула (2.10). Это значит, что

потенциал электрического поля равномерно заряженной сферы можно вычислять, полагая, что весь заряд сосредоточен в ее центре

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (8.2)$$

Теперь предположим, что точка наблюдения находится внутри равномерно заряженной сферы

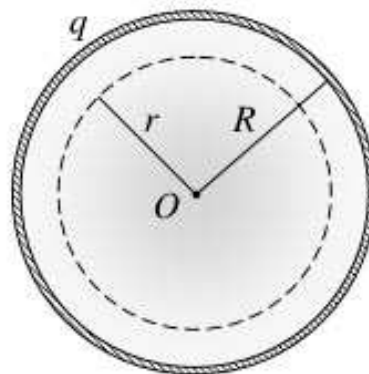


Рис. 8.2. Электрическое поле внутри заряженной сферы.

Все приведенные выше рассуждения о симметрии электрического поля проходят, но внутри пунктирной области заряда нет, он весь сосредоточен на поверхности сферы с радиусом R . Значит, по теореме Гаусса для вектора \vec{E} ,

$$\oint_{(S)} (\vec{E} d\vec{S}) = 0; \quad \Rightarrow \quad E = 0, \quad \Rightarrow \quad \varphi = \text{const.}$$

Потенциал – функция непрерывная, значит, потенциал на поверхности сферы должен совпадать со значением (8.2), взятым при $r = R$. Окончательно имеем для области внутри равномерно заряженной сферы

$$E = 0, \quad (8.3)$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (8.4)$$

Внутри равномерно заряженной сферы напряженность равна нулю, потенциал постоянен и равен потенциалу на поверхности сферы.

Сказанное обозначает, что внутри равномерно заряженной сферы электрического поля нет.

8.2. Равномерно заряженная нить.

Пусть электрический заряд равномерно распределен по бесконечно длинной прямой нити с линейной плотностью λ , как это показано на рисунке 8.3. Любой участок нити длиной Δx имеет электрический заряд Δq

$$\Delta q = \lambda \Delta x. \quad (8.5)$$

Требуется найти напряженность и потенциал на расстоянии r от этой нити.

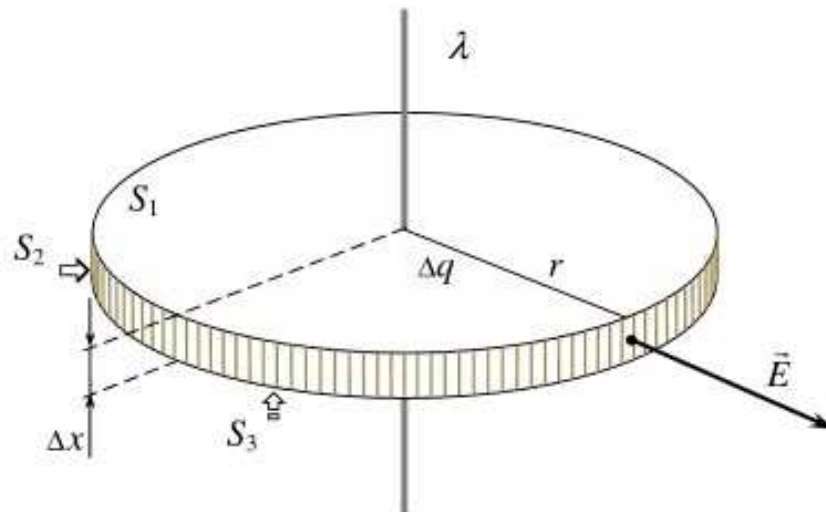


Рис. 8.3. Электрическое поле заряженной нити.

Очевидно, что поле равномерно заряженной нити должно быть цилиндрически симметричным.

Во-первых, это значит, что вектор \vec{E} должен быть направлен по радиусу окружности, либо от нити, если она заряжена положительно, либо к нити, если – отрицательно. Из сказанного следует, что силовые линии пересекают только боковую поверхность цилиндра на рис.8.3. Поток через верхнюю и нижнюю грани равен нулю.

Во-вторых, цилиндрическая симметрия поля обозначает, что величина напряженности может зависеть лишь от расстояния r – радиуса окружности.

Выберем небольшой кусочек нити, длиной Δx , несущий заряд (8.5), и окружим его цилиндрической оболочкой с радиусом r и высотой Δx , как это показано на рис.8.3. Поток вектора \vec{E} через цилиндрическую поверхность равен сумме трех потоков, через поверхности S_1 , S_2 и S_3 ; причем потоки через S_1 и S_3 равны нулю. Остается только поток через боковую поверхность S_2 . Будем считать, что $\lambda > 0$ (на самом деле знак зарядов не важен, нужно лишь выбрать один, все равно какой, и на этом остановиться). Длина вектора \vec{E} повсюду на боковой поверхности цилиндра одинаковая $E = const$.

Кроме того $\vec{E} \uparrow \uparrow d\vec{S}, \Rightarrow (\vec{E}d\vec{S}) = EdS$.

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \Phi_2 = \int_{(S_2)} (\vec{E}d\vec{S}) = \int_{(S_2)} E dS = E \int_{(S_2)} dS = ES_2 = E2\pi r \cdot \Delta x.$$

С другой стороны, по теореме Гаусса для вектора \vec{E} , имеем $\Phi = \frac{\Delta q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda \Delta x}{\epsilon_0}$.

Левые части равны, значит, равны и правые:

$$E2\pi r \Delta x = \frac{\lambda \Delta x}{\epsilon_0}.$$

Получаем окончательное выражение для напряженности электрического поля бесконечно длинной равномерно заряженной нити

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (8.6)$$

Разность потенциалов в двух точках на расстояниях r_1 и r_2 от нити равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda dr}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} (\ln r_2 - \ln r_1).$$

Учитывая свойства логарифма, окончательно получаем:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad (8.7)$$

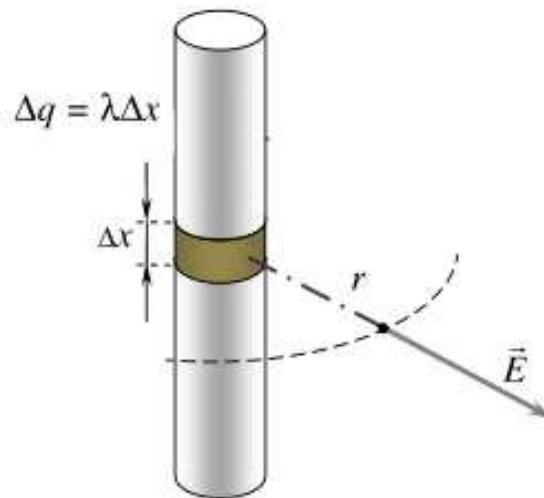


Рис. 8.4. Напряженность электрического поля равномерно заряженного цилиндра.

Если вместо заряженной нити взять бесконечный (очень длинный) равномерно заряженный цилиндр, показанный на рисунке 8.4), с линейной плотностью заряда λ , то снаружи от него мы получим такие же выражения, как (8.6) и (8.7). Внутри цилиндра электрического поля нет, т.е. напряженность равна нулю, а потенциал равен потенциалу на его поверхности.



Рис. 8.5. Цилиндрический конденсатор.

Два соосных заряженных цилиндра образуют *цилиндрический конденсатор*. Пространство между цилиндрическими обкладками обычно запол-

няется веществом – диэлектриком. Пример такого конденсатора – коаксиальный кабель рис.8.5. Обычно центральной обкладкой является проволока, внешней – оплетка. Напряжение между обкладками такого конденсатора может быть найдено по формуле, аналогичной (8.7)

$$U = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (8.8)$$

В этой формуле λ – линейная плотность заряда на *внутренней* обкладке, R_1 и R_2 – радиусы внутренней и внешней обкладок, ϵ – диэлектрическая проницаемость заполняющей среды.

8.3. Равномерно заряженная плоскость.

Пусть электрический заряд равномерно распределен по бесконечной плоскости с поверхностной плотностью σ . Любая площадь ΔS имеет электрический заряд Δq

$$\Delta q = \sigma \Delta S. \quad (8.9)$$

Требуется найти напряженность и потенциал вблизи заряженной плоскости.

Очевидно, что вектор \vec{E} должен быть направлен перпендикулярно заряженной поверхности. Если плоскость заряжена положительно, то силовые линии *выходят* из нее налево и направо, как это показано на рис. 8.6. Если плоскость заряжена отрицательно, то направления всех силовых линий изменятся на противоположные, они будут *входить* в плоскость слева и справа.

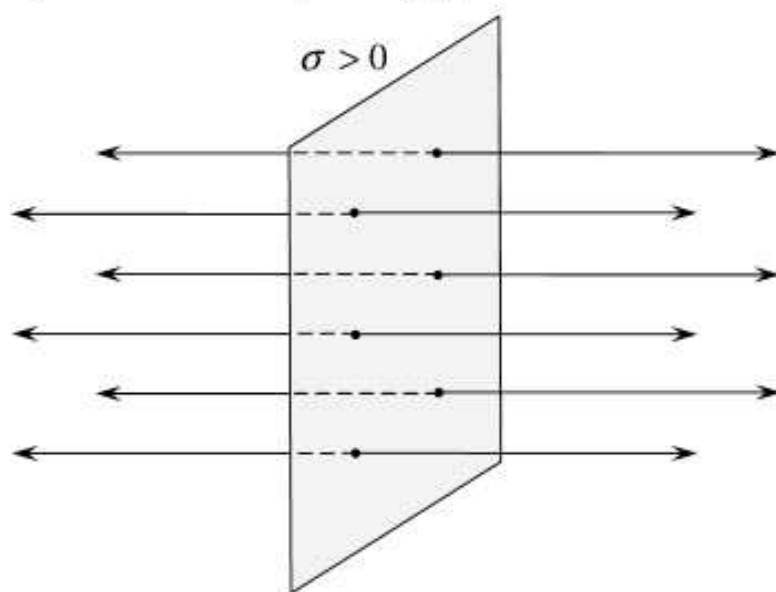


Рис. 8.6. Силовые линии от равномерно заряженной плоскости.

Какого-либо отклонения линий от перпендикулярного направления не может быть, поскольку для плоскости есть лишь одно выделенное направление – нормаль. Все отклонения от нормали равноправны. Если отклонение есть, то оно происходит во всех направлениях сразу, чего не может быть. Значит, вектор \vec{E} перпендикулярен заряженной плоскости.

Выберем небольшой участок плоскости, площадью ΔS с зарядом Δq , определяемым формулой (8.9). Окружим этот участок оболочкой в форме параллелепипеда, как показано на рис. 8.7. Поскольку силовые линии параллельны боковым поверхностям, они пересекают лишь торцы выбранной оболочки, но зато пересекают их нормально. Таким образом поток вектора \vec{E} через всю замкнутую область равен сумме $\Phi_1 + \Phi_2$ через ее торцы ΔS_1 и ΔS_2 .

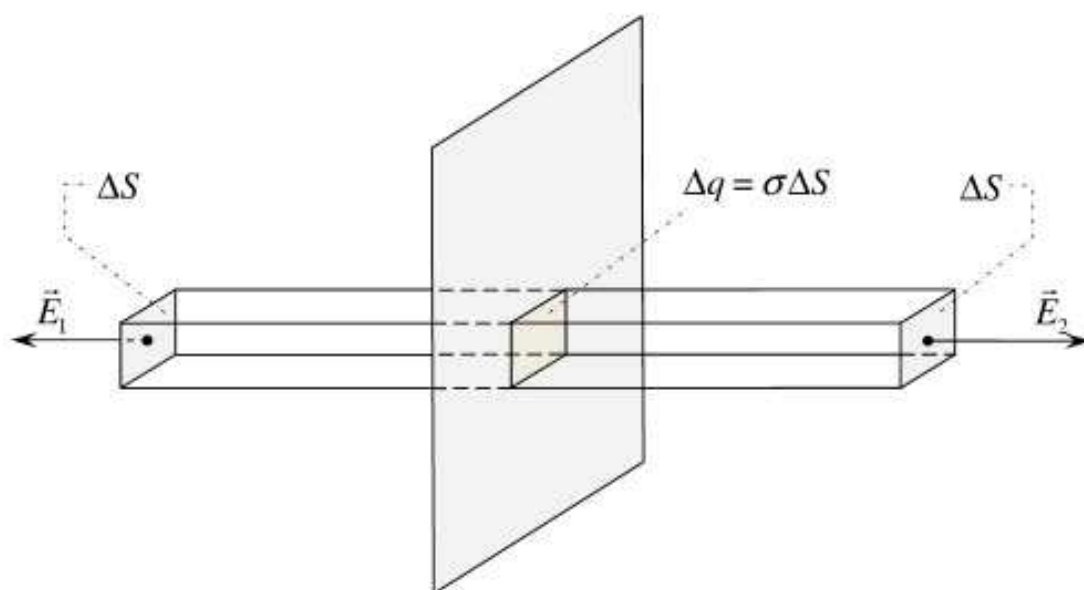


Рис. 8.7. Вычисление потока вектора \vec{E} от заряженной плоскости.

Будем считать, что $\sigma > 0$ (на самом деле знак зарядов не важен, нужно лишь выбрать один, все равно какой, и на этом остановиться). Длина вектора \vec{E} повсюду на торцевых поверхностях одинаковая $E_1 = E_2 = E = \text{const}$.

Кроме того $\vec{E} \uparrow\uparrow \Delta\vec{S}, \Rightarrow (\vec{E}\Delta\vec{S}) = E\Delta S$.

$$\oint_{(S)} (\vec{E}d\vec{S}) = \int_{(\Delta S_1)} (\vec{E}_1d\vec{S}) + \int_{(\Delta S_2)} (\vec{E}_2d\vec{S}) = E_1\Delta S_1 + E_2\Delta S_2 = 2E\Delta S.$$

С другой стороны, по теореме Гаусса для вектора \vec{E} , имеем

$$\oint_{(S)} (\vec{E}d\vec{S}) = \frac{\Delta q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma\Delta S}{\epsilon_0}.$$

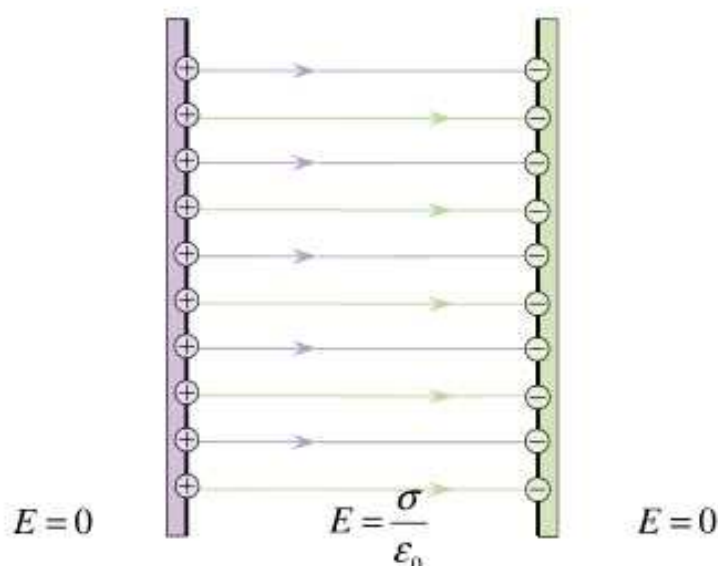


Рис. 8.9. Напряженность электрического поля плоского конденсатора.

Получились следующие формулы для напряженности электрического поля:

Внутри конденсатора	$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$	(8.11)
---------------------	----------------------------------	--------

Вне конденсатора	$E = 0.$	(8.12)
------------------	----------	--------

Ход силовых линий в реальном плоском конденсаторе показан на рис. 8.10. Видно, что электрическое поле неоднородно только на краях конденсатора.

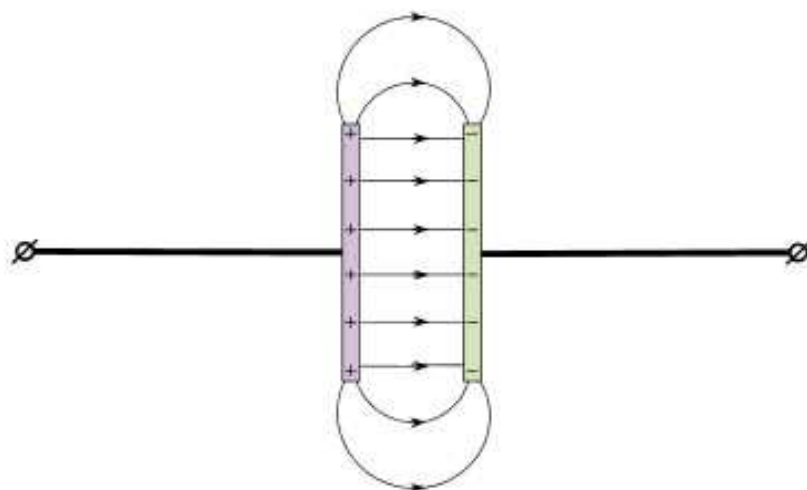


Рис. 8.10. Силовые линии в реальном плоском конденсаторе.

Найдем разность потенциалов для двух точек в однородном электрическом поле. При выводе формулы учтем, что вектор \vec{E} одинаков в любой точке поля как по величине, так и по направлению. Проекцию вектора перемещения \vec{r}_{12} на направление силовых линий обозначим буквой d .

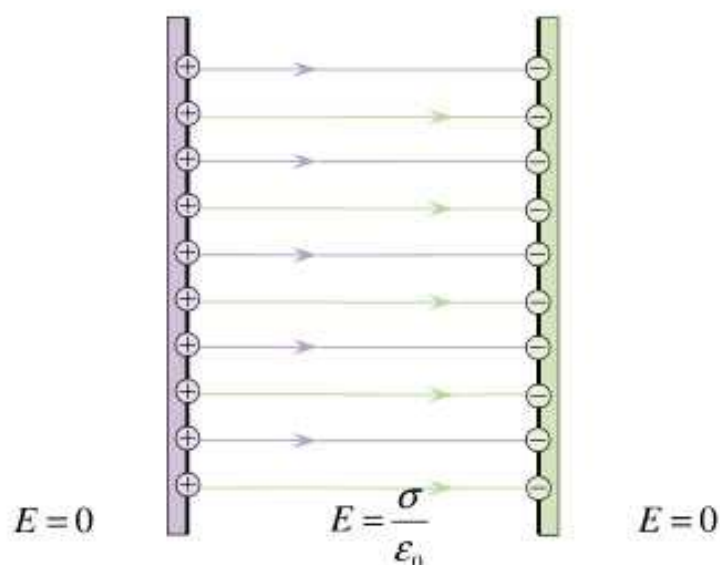


Рис. 8.9. Напряженность электрического поля плоского конденсатора.

Получились следующие формулы для напряженности электрического поля:

Внутри конденсатора	$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$	(8.11)
---------------------	----------------------------------	--------

Вне конденсатора	$E = 0.$	(8.12)
------------------	----------	--------

Ход силовых линий в реальном плоском конденсаторе показан на рис. 8.10. Видно, что электрическое поле неоднородно только на краях конденсатора.

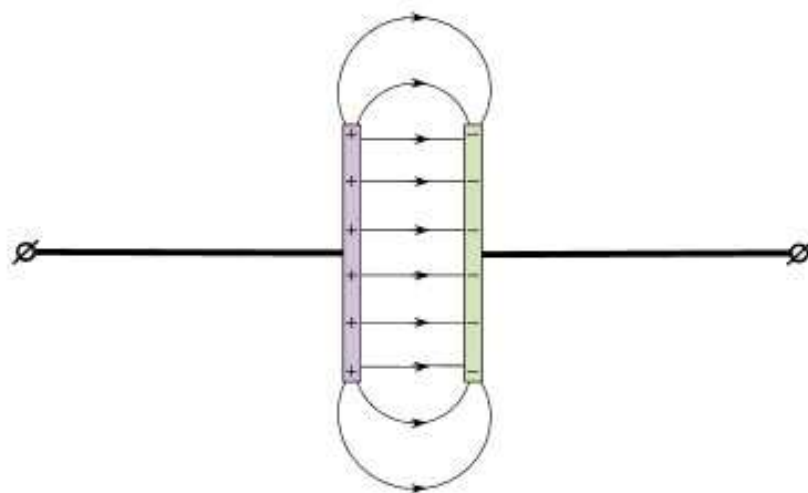


Рис. 8.10. Силовые линии в реальном плоском конденсаторе.

Найдем разность потенциалов для двух точек в однородном электрическом поле. При выводе формулы учтем, что вектор \vec{E} одинаков в любой точке поля как по величине, так и по направлению. Проекцию вектора перемещения \vec{r}_{12} на направление силовых линий обозначим буквой d .

$$r_{12} \cdot \cos \alpha = d.$$

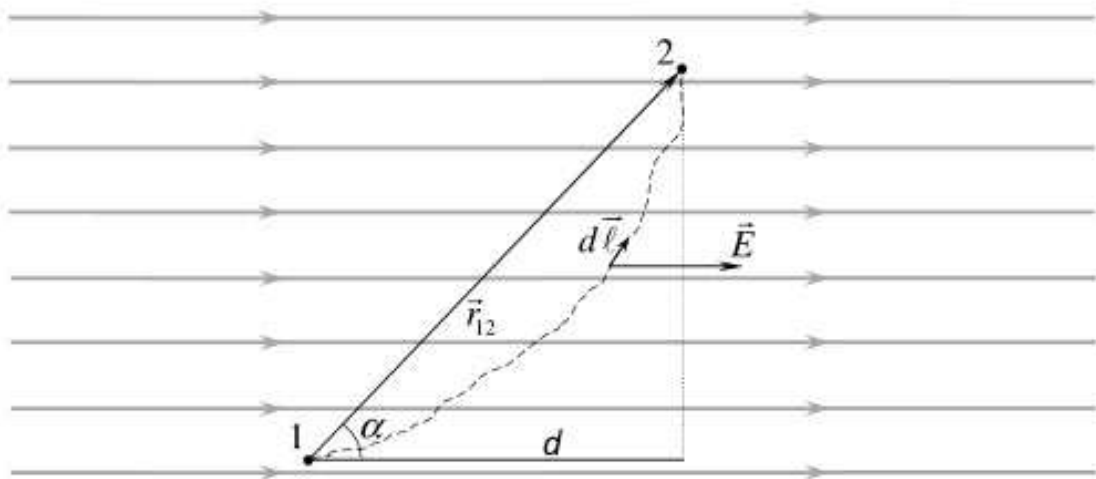


Рис. 8.11. Связь напряженности и потенциала однородного поля.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (\vec{E} d\vec{r}) = \left(\vec{E} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \right) = (\vec{E} \vec{r}_{12}) = E r_{12} \cos \alpha = Ed.$$

Если d – расстояние между обкладками, то разность потенциалов в точках 1 и 2 равна напряжению на конденсаторе:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U.$$

Окончательно имеем

$$U = Ed, \quad (8.13)$$

Или, с учетом (8.11)

$$U = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}, \quad (8.14)$$

Формула (8.14) получена для плоского воздушного конденсатора, обкладки которого имеют поверхностную плотность заряда $+\sigma$ и $-\sigma$. Реальный конденсатор заполнен веществом – диэлектриком. Формула (8.14) переписывается

$$U = \frac{\sigma d}{\varepsilon \varepsilon_0}, \quad (8.15)$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды между обкладками.