1. Взаимодействие электрических зарядов. Закон сохранения заряда.

С древних времен люди наблюдали проявления атмосферного электричества – *молнию*. Свыше двух тысяч лет известна еще одна группа электрических явлений – *электризация трением*. Лишь в 18–м веке было доказано, что молнии и искорки, возникающие при расчёсывании волос – одно и то же явление – электрический разряд.

Электромагнитные взаимодействия – фундаментальные. Очень многие окружающие нас силы сводятся к электромагнитным силам между частицами вещества, но сами электромагнитные взаимодействия не сводятся, ни к каким другим. Столь же фундаментальными являются *гравитационные* взаимодействия. Электромагнитные силы имеют ряд существенных отличий от гравитационных:

1. Взаимодействуют только заряженные тела.
2. Заряженные тела могут, как притягиваться, так и отталкиваться.
3. Электромагнитное взаимодействие заряженных тел на много порядков превышает их гравитационное взаимодействие.

Электрический заряд – это величина определяющая силу электромагнитного взаимодействия между телами. Мы имеем дело с принципиально новыми явлениями, которые не сводятся ни к механическим, ни к тепловым. Поэтому логически точного определения электрическому заряду дать невозможно. В подобных случаях определение дается через процедуру измерения.

При электрическом взаимодействии заряды могут притягиваться или отталкиваться. Есть два вида электрических зарядов: положительные и отрицательные. Заряды разных знаков притягиваются друг к другу, а заряды одного знака друг от друга отталкиваются. Это проиллюстрировано на рис. 1.1.

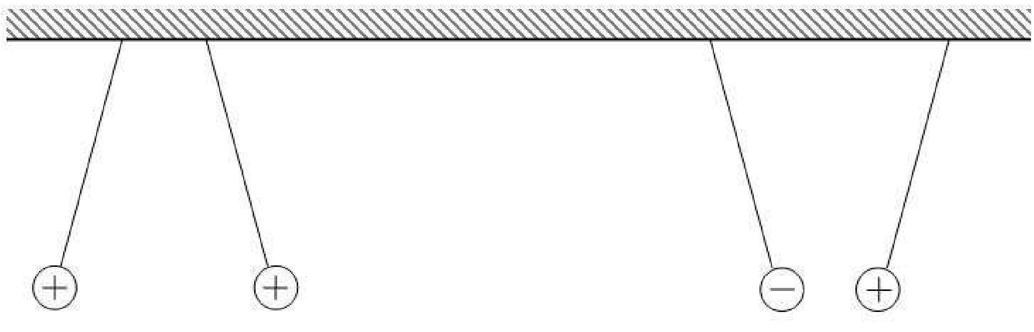


Рис. 1.1. Взаимодействие одноименных и разноименных зарядов

Отметим, что для микрочастиц заряд является их неотъемлемым свойством. Все электрические заряды кратны элементарному заряду – e.

Макроскопические тела всегда содержат в себе огромное количество заряженных элементарных частиц. Если количество положительных и отрицательных частиц одинаково, то тело в целом нейтрально. Наличие отрицательного или положительного заряда тела связано с избытком или с недостатком в теле мельчайших отрицательно заряженных частиц – электронов.

> *Заряды не создаются и не пропадают, они могут быть лишь переданы от одного тела другому или перемещены внутри данного тела.*

Это положение, известное под названием закона сохранения электрического заряда, является основным в области учения об электричестве и подтверждается многочисленными фактами.

Точечным зарядом называется заряженное тело, с очень малыми размерами – много меньшими расстояний до точки наблюдения. Фактически, *точечный заряд – это заряженная материальная точка.*

Закон Кулона:

> *Два точечных электрических заряда взаимодействуют с силой, пропорциональной величине произведения зарядов и обратно пропорциональной квадрату расстояния меду ними.*

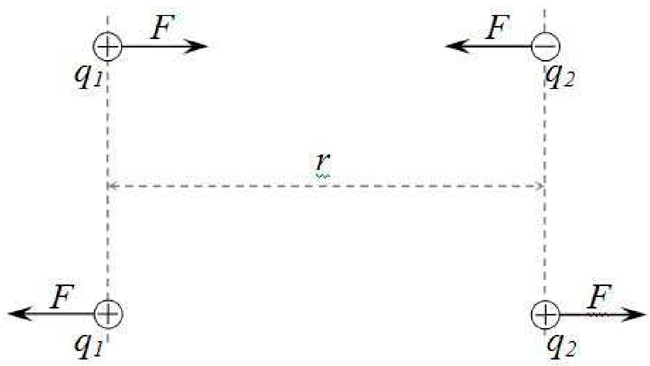


Рис.1.2. Силы Кулона

Независимо от знаков зарядов q_1 и q_2 для величины силы взаимодействия справедливо выражение

$$F \sim \frac{|q_1 q_2|}{r^2}$$

В системе единиц CGS (сантиметр–грамм–секунда) знак пропорциональности заменяется знаком равенства

$$F = \frac{|q_1 q_2|}{r^2},$$

и единица измерения электрического заряда выражается через механические единицы:

$$[q] = \left[\sqrt{F}\right] \cdot [r].$$

В международной системе единиц SI в закон Кулона вводится коэффициент пропорциональности k или ε_o, имеющий размерность

$$F = k \cdot \frac{|q_1 q_2|}{r^2}, \tag{1.1}$$

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{|q_1 q_2|}{r^2}, \tag{1.2}$$

Электрический заряд измеряется в кулонах, причем кулон – составная единица, которая выражается через ампер[1] и секунду.

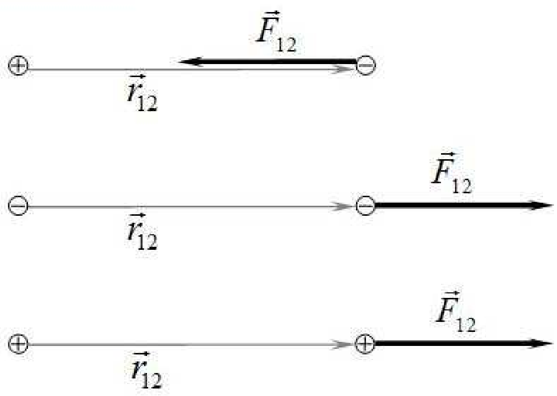
$$k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н·м}^2/\text{Кл}^2, \qquad \varepsilon_o = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/\text{ Н·м}^2,$$
$$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}.$$

Формулы (1.1) и (1.2) задают процедуру измерения электрического заряда.

Любая сила – векторная величина. Пусть нас интересует сила $\vec{F}_{12}$, действующая на второй точечный заряд со стороны первого. Если заряды одноименные, то направление этой силы совпадает с направлением вектора $\vec{r}_{12}$, соединяющего точку 1 с точкой 2. Если заряды разноименные, то направление силы противоположное. Все сказанное можно учесть, умножив величину силы на единичный вектор, направленный вдоль вектора $\vec{r}_{12}$.

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}. \tag{1.3}$$

Направление этой силы для различных знаков зарядов показаны на рис.1.3.



$$q_1 q_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{12} \uparrow\downarrow \vec{r}_{12}$$

$$q_1 q_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{12} \uparrow\uparrow \vec{r}_{12}$$

$$q_1 q_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{12} \uparrow\uparrow \vec{r}_{12}$$

Рис. 1.3. Направление силы Кулона.

Формула (1.3) задает *центральную силу*, которая всегда потенциальна. Следовательно, можно получить выражение для потенциальной энергии взаимодействия электрических зарядов.

---

[1] 1 Кл = 1 А × 1 с, определение 1 ампера будет дано позже в разделе Магнетизм.

Сначала нужно выбрать точку, в которой потенциальная энергия будет равна нулю. Удаленные на бесконечность электрические заряды не взаимодействуют друг с другом. Резонно считать, что потенциальная энергия взаимодействия зарядов равна нулю именно на бесконечности.

Пусть заряд q_1 находится в начале координат, заряд q_2 – в точке $\vec{r}$. Символом $\vec{r}_\infty$ обозначим точку, на бесконечном удалении от начала координат, где потенциальная энергия равна нулю. Согласно определению, потенциальная энергия в точке $\vec{r}$ равна работе силы Кулона по перемещению заряда q_2 из точки $\vec{r}$ на бесконечность

$$W = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_\infty} \left(\vec{F} d\vec{r}\right) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{\left(\vec{r} d\vec{r}\right)}{r}.$$

Поскольку скалярное произведение $\left(\vec{r} d\vec{r}\right)$ равно произведению длин тех же векторов[2], получаем

$$W = \int_r^\infty \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{r \cdot dr}{r} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}\bigg|_r^\infty = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot \infty} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Таким образом, потенциальная энергия взаимодействия двух зарядов равна

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{1.4}$$

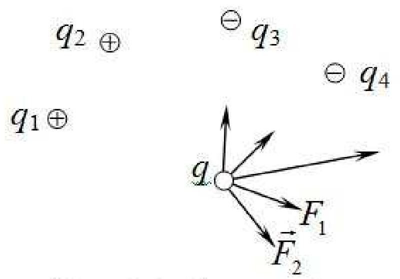
2. Напряженность и потенциал электрического поля.

Электрические заряды взаимодействуют друг с другом на расстоянии при помощи электрического поля. Сила Кулона и потенциальная энергия – это характеристики взаимодействия. Если поместить пробный заряд q в поле других зарядов – источников $q_1,\ q_2,\ q_3,\ \ldots\ q_N$, то на него будет действовать сила, равная векторной сумме сил взаимодействия с каждым зарядом

$$\vec{F} = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q q_i}{r_i^2} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i} = q \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_i}{r_i^2} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i} = q \sum_i \vec{E}_i = q\vec{E}.$$

---

[2] $\left(\vec{r}\,\vec{r}\right) = r^2, \quad \Rightarrow \quad d\left(\vec{r}\,\vec{r}\right) = d\left(r^2\right), \quad \Rightarrow \quad \left(d\vec{r}\,\vec{r}\right) + \left(\vec{r}\,d\vec{r}\right) = 2r dr, \quad \Rightarrow \quad \left(\vec{r}\,d\vec{r}\right) = r dr.$



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_N = \sum \vec{F}_i.$$

Рис. 2.1. Силы, действующие на электрический заряд.

Сила, действующая на электрический заряд во внешнем поле, зависит от величины самого заряда q и от векторной характеристики электрического поля – от его напряженности

$$\vec{F} = q\vec{E}. \tag{2.1}$$

Напряженность электрического поля $\vec{E}$ *равна силе, действующей на единичный заряд в изучаемом поле.*

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \tag{2.2}$$

Напряжённость не зависит от величины внесённого в поле пробного заряда, а зависит лишь от положения и величин зарядов – источников. Даже если в поле вообще не вносить пробный заряд, напряженность электрического поля всё равно будет существовать и иметь значение

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i}. \tag{2.3}$$

Суммирование ведется по всем источникам электрического поля. Каждый заряд – источник в отдельности создает Кулоновское поле с напряженностью

$$\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_i}{r_i^2} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i}. \tag{2.4}$$

Результирующая напряженность есть векторная сумма напряженностей, созданных каждым источником в отдельности

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i. \tag{2.5}$$

Полученное утверждение называется *принципом суперпозиции* для напряженности электрического поля.

Заряд q, помещенный в поле других зарядов q_1, q_2, q_3 , … q_N, имеет потенциальную энергию, которая складывается из энергий взаимодействия с каждым зарядом

$$W = \sum_i W_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qq_i}{r_i} = q\sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_i}{r_i} = q\varphi. \qquad (2.6)$$

Потенциальная энергия электрического заряда во внешнем поле, зависит от величины самого заряда q и от скалярной характеристики электрического поля – от его потенциала

$$W = q\varphi. \qquad (2.7)$$

Потенциал электрического поля φ равен потенциальной энергии единичного заряда, внесенного в изучаемое поле.

$$\varphi = \frac{W}{q}. \qquad (2.8)$$

Потенциал не зависит от величины пробного заряда, а зависит лишь от положения и от величин зарядов-источников. Даже если в поле вообще не вносить пробный заряд, потенциал электрического поля все равно будет существовать и иметь значение

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}. \qquad (2.9)$$

Суммирование ведется по всем источникам электрического поля. Каждый заряд – источник в отдельности создает Кулоновское поле с потенциалом

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_i}{r_i}. \qquad (2.10)$$

Результирующий потенциал есть алгебраическая сумма потенциалов, созданных каждым источником в отдельности

$$\varphi = \sum \varphi_i. \qquad (2.11)$$

Полученное утверждение называется *принципом суперпозиции* для потенциала электрического поля.

В международной системе единиц потенциал измеряется в вольтах

В = Дж/Кл,

а напряжённость - в вольтах, делённых на метр.

В нашем распоряжении имеются две характеристики электрического поля: силовая характеристика – напряженность и энергетическая характеристика – потенциал. Обе они зависят от расположения зарядов – источников поля, и не зависят от внесенного в поле пробного электрического заряда. Для обеих характеристик справедлив принцип суперпозиции. Этот принцип утверждает, что электрические поля от различных источников складываются, не влияя друг на друга. Он справедлив в случае, когда пробный заряд не вызывает перемещения зарядов – источников поля, и сами эти заряды будучи собранными вместе остаются там, где их разместили. Это наблюдается не всегда.

В случаях непрерывного распределения электрического заряда по объему, по поверхности, или вдоль линии выбираются элементарные, т.е. малые заряженные области, которые можно считать точечными зарядами. Суммирование по всем источникам поля заменяется интегрированием по заряженной области.

Переместим заряд q в электрическом поле по замкнутой траектории и вернемся в исходную точку. Совершенная при этом работа будет вычисляться по формуле

$$A = \oint\limits_{(\ell)} \left(\vec{F} d\vec{\ell}\right) = \oint\limits_{(\ell)} \left(q\vec{E} d\vec{\ell}\right) = q\oint\limits_{(\ell)} \left(\vec{E} d\vec{\ell}\right).$$

Поскольку электрическое поле потенциально, работа сил по замкнутой траектории равна нулю. Таким образом, получаем утверждение:

$$\oint\limits_{(\ell)} \left(\vec{E} d\vec{\ell}\right) = 0. \qquad (2.12)$$

Стоящий слева интеграл называется *циркуляцией*, а доказанное утверждение – теоремой о циркуляции вектора $\vec{E}$.

> *Циркуляция вектора $\vec{E}$ в электростатическом поле равна нулю.*

3. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности.

Майкл Фарадей предложил метод изображения электростатических полей с помощью силовых линий (линий напряженности).

Силовыми линиями называются кривые, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора напряженности поля.

Силовым линиям приписывается направление, совпадающее с направлением вектора $\vec{E}$. Они направлены от положительных зарядов к отрицательным, как показано на рисунке 3.1.

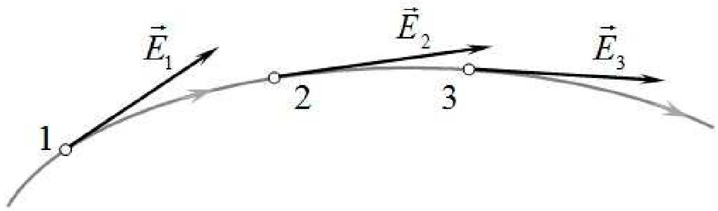


Рис. 3.1. Направление силовой линии.

Поскольку в каждой точке пространства вектор $\vec{E}$ имеет единственное направление, линии напряженности не пересекаются. Если электрическое поле однородное или центральное, то силовые линии прямые как на рисунке 3.2. Во всех остальных случаях они искривлены.

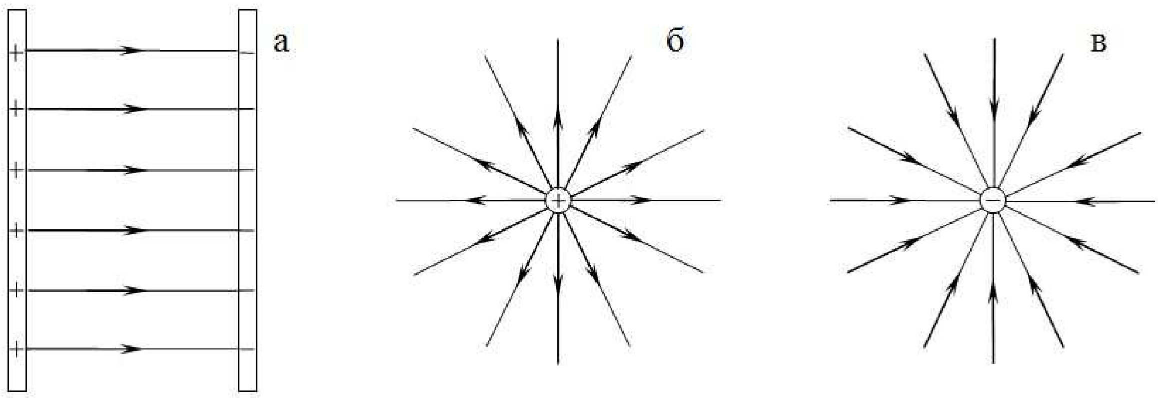


Рис. 3.2. Силовые линии для однородного (а) и центрального (б, в) полей.

– Суперпозиция однородных полей является однородным полем.
– Суперпозиция центральных полей не является центральным полем.
– Суперпозиция однородного и центрального полей не является ни однородным, ни центральным полем.
– Суперпозиция любых электрических полей всегда потенциальна.

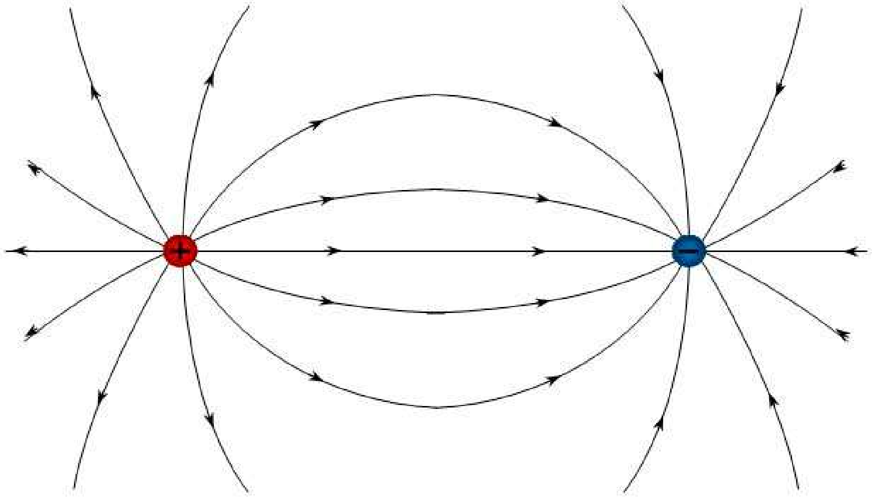


Рис. 3.3.а. Силовые линии разноименных точечных зарядов

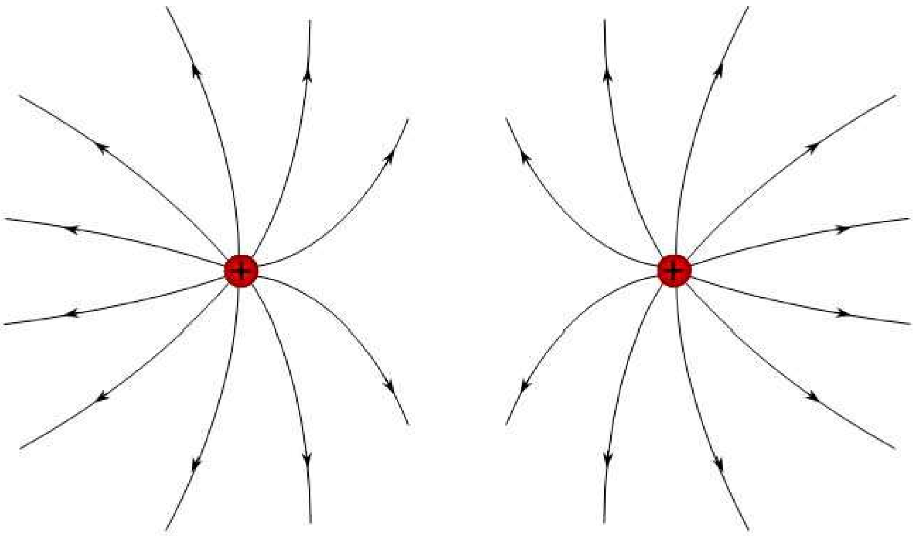


Рис. 3.3.а. Силовые линии одноименных точечных зарядов

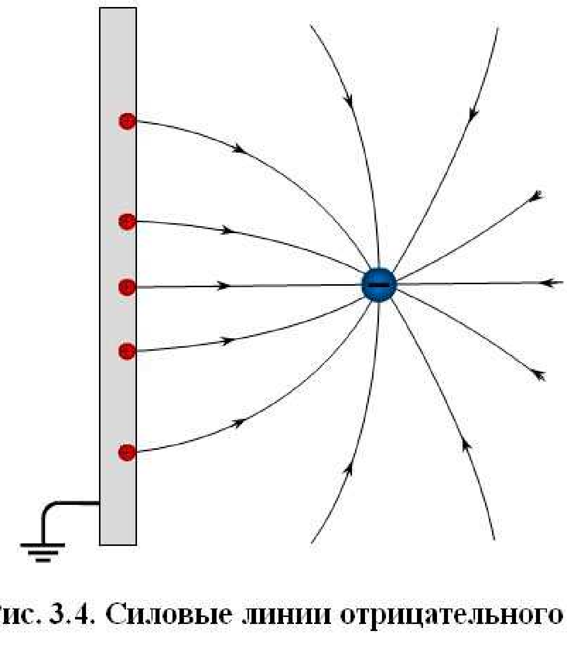


Рис. 3.4. Силовые линии отрицательного точечного заряда и плоскости

На рис.3.3 и 3.4 показаны силовые линии от двух точечных зарядов и от точечного заряда рядом с заземлённой плоскостью. Из этих рисунков видно, что:

– силовые линии во всех случаях искривлены,
– в непосредственной близости от зарядов картина силовых линий практически такая же, как и на рис.3.2.
– силовые линии выходят из плоскости перпендикулярно к ее поверхности
– линии могут уходить на бесконечность или приходить с бесконечности.

Силовые линии поля не следует отождествлять с траекториями, по которым движутся легкие заряженные частицы в электрическом поле. Движение частиц происходит вдоль силовой линии лишь в случае, если эта линия прямая и начальная скорость направлена вдоль нее.

Величину вектора напряженности задает густота силовых линий, т.е. количество линий, пересекающих единичную поверхность, расположенную перпендикулярно к ним.

Потенциал электростатического поля представляет собой функцию, меняющуюся от точки к точке, однако всегда можно выделить совокупность точек, потенциалы которых одинаковы.

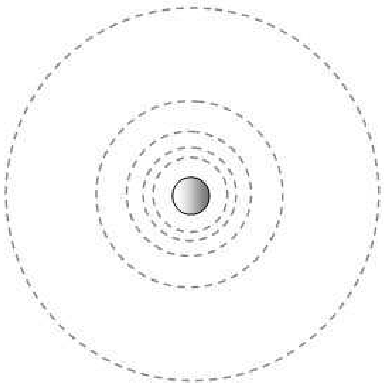
Эквипотенциальные поверхности – это поверхности равного потенциала.

Очевидно, что работа перемещения заряда по эквипотенциальной поверхности равна нулю.

Найдем поверхности равного потенциала в поле точечного заряда. Потенциал точечного заряда задается формулой (2.10)

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

где r – расстояние от заряда q до точки, где измеряется потенциал, ε_0 - мировая константа. Следовательно, поверхность постоянного потенциала будет поверхностью с постоянным радиусом, т.е. сферой. На рис.3.5. показаны поверхности равного потенциала для точечного заряда и для однородного поля.



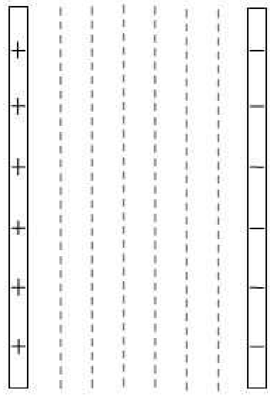


Рис. 3.5. Эквипотенциали в поле точечного заряда и в однородном поле.

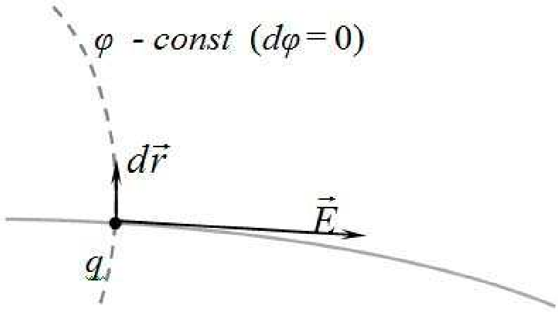


Рис. 3.6. Перемещение заряда по эквипотенциальной поверхности.

На рис.3.6. показана эквипотенциальная поверхность и пересекающая ее силовая линия. Переместим заряд по эквипотенциали на малое расстояние $d\vec{r}$.

Работа по переносу заряда равна $dA = (\vec{F}d\vec{r}) = q(\vec{E}d\vec{r})$.

С другой стороны $dA = qd\varphi = 0$. Следовательно, $(\vec{E}d\vec{r}) = 0$,

Значит, косинус угла между векторами $\vec{E}$ и $d\vec{r}$ $= 0$, т.е. $\vec{E} \perp d\vec{r}$

Доказано, что

силовые линии всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям.

На рис.3.7 показаны силовые линии (сплошные) и эквипотенциальные поверхности (пунктирные) для системы двух точечных разноименных зарядов. Эквипотенциали даны через 1 вольт.

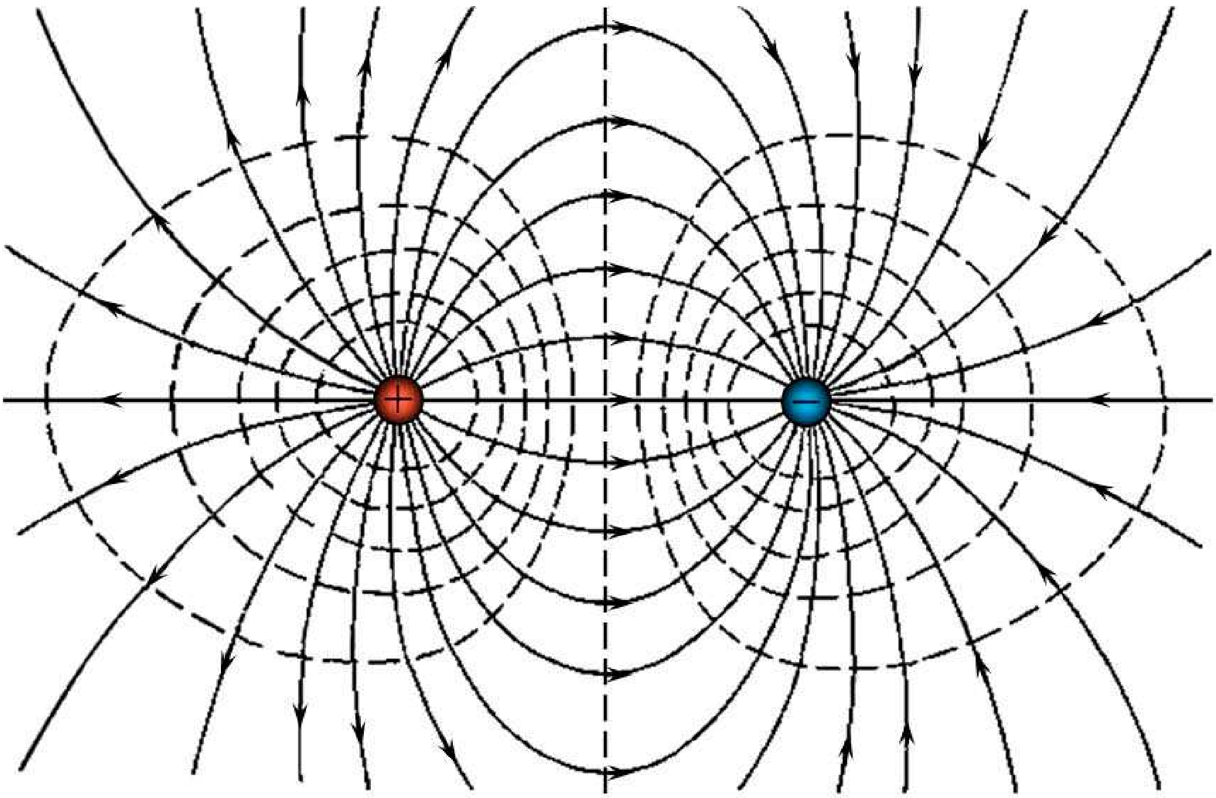


Рис. 3.7. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности для двух точечных разноименных зарядов.

В заключение отметим то, что силовые линии – это именно *линии*, а эквипотенциальные поверхности – это именно *поверхности*. Линии одномерные, а поверхности двумерные. Они похожи друг на друга лишь на двумерных картинках, где показано *сечение* эквипотенциальных поверхностей. В действительности все приведенные картинки трехмерные.

4. Связь напряженности и потенциала электрического поля.

Силы электрического поля потенциальны, а, как известно, работа потенциальной силы равна обратной разности потенциальных энергий

$$A = W_1 - W_2 = q\left(\varphi_1 - \varphi_2\right). \tag{4.1}$$

С другой стороны,

$$A = \int\left(\vec{F}d\vec{r}\right) = q\int\left(\vec{E}d\vec{r}\right). \tag{4.2}$$

Сравнивая эти выражения, получаем связь разности потенциалов с напряженностью электрического поля в интегральной

$$\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = \int\limits_{(1)}^{(2)}\left(\vec{E}d\vec{r}\right) \tag{4.3}$$

и в дифференциальной форме $$d\varphi = -\left(\vec{E}d\vec{r}\right). \tag{4.4}$$

Запишем скалярное произведение через произведения соответствующих компонент векторов[3]

$$d\varphi = -\left(\vec{E}d\vec{r}\right) = -\left(E_x dx + E_y dy + E_z dz\right). \tag{4.5}$$

Теперь учтем, что потенциал – функция, зависящая только от координат

$$\varphi = \varphi(x, y, z); \quad \Rightarrow \quad d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot dz. \tag{4.6}$$

Приравниваем правые части формул (4.5), (4.6) и получаем три равенства для трёх проекций вектора $\vec{E}$:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \qquad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \qquad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Для вектора напряжённости в целом получаем выражение

$$\vec{E} = -\vec{i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \vec{j} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \vec{k} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\left(\vec{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi \ = \ -\ grad\ \varphi;$$

$$\vec{E} = -\ grad\ \varphi \tag{4.7}$$

Вектор *градиент* имеет направление, в котором скалярная величина φ возрастает быстрее всего. Величина градиента равна скорости возрастания скалярной величины φ в этом направлении, т.е. равна частной производной

$$\left|grad\ \varphi\right| = \frac{\partial \varphi}{\partial \ell}. \tag{4.8}$$

Вектор напряженности электрического поля имеет направление, в котором потенциал поля быстрее всего убывает. Графически это значит, что вектор $\vec{E}$ направлен по кратчайшему пути к ближайшей эквипотенциальной поверхности.

---

[3] $\left(\vec{a}\vec{b}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.