48. Сложение колебаний одного направления с одинаковыми частотами.

Пусть материальная точка одновременно совершает два гармонических колебания

$$x_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1);$$
$$x_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2). \qquad (48.1)$$

Построим векторную диаграмму в начальный момент времени. Для этого на рисунке 48.1 отложим вектор $\vec{A}_1$ под углом φ_1, а вектор $\vec{A}_2$ под углом φ_2.

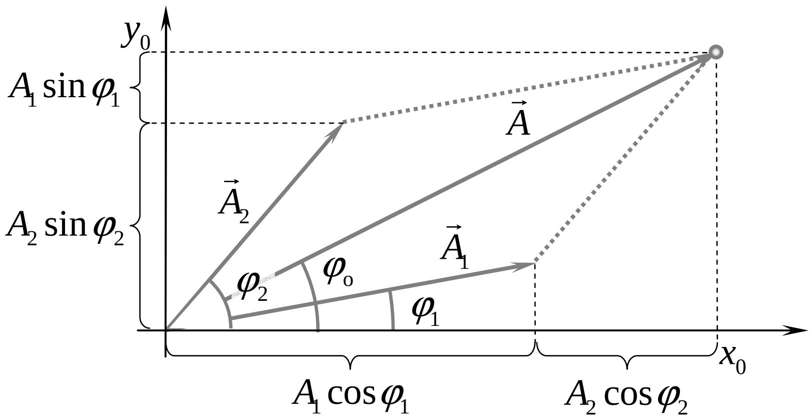

Рисунок 48.1. Векторная диаграмма.

Сумма этих векторов – вектор $\vec{A}$ задает положение точки на векторной диаграмме в начальный момент времени

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2. \qquad (48.2)$$

Что будет происходить с этим вектором с течением времени? Поскольку частоты первого и второго колебаний одинаковы, векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ будут вращаться на диаграмме с одинаковыми угловыми скоростями, вся нарисованная картинка будет вращаться как целое; длина вектора $\vec{A}$ при этом будет оставаться постоянной. В проекции на ось x будут происходить гармонические колебания на той же частоте ω

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_o). \qquad (48.3)$$

При сложении двух гармонических колебаний одного направления с одинаковыми частотами получается гармоническое колебание на той же частоте.

Найдем амплитуду и начальную фазу этого результирующего колебания. Для этого сначала умножим выражение (48.2) скалярно само на себя – левую часть на левую, а правую часть на правую[1].

$$A^2 = \left(\vec{A}\vec{A}\right) = \left(\left(\vec{A}_1 + \vec{A}_2\right)\left(\vec{A}_1 + \vec{A}_2\right)\right) = \left(\vec{A}_1\vec{A}_1\right) + 2\left(\vec{A}_1\vec{A}_2\right) + \left(\vec{A}_2\vec{A}_2\right);$$

$$A^2 = A_1^2 + 2A_1A_2\cos\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) + A_2^2. \qquad (48.4)$$

Амплитуда результирующего колебания найдена. Теперь найдем начальную фазу φ_o. Из рисунка 8.1 видим, что $tg\varphi_o = y_o / x_o$.

$$y_o = A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2;$$
$$x_o = A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2.$$

$$\mathrm{tg}\varphi_o = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}. \qquad (48.5)$$

Подставляя амплитуду A и начальную фазу φ_o, найденные из (48.4), (48.5) в выражение (48.3), мы получим результат сложения двух гармонических колебаний на одинаковых частотах.

[1] Учитываем, что скалярное произведение вектора самого на себя есть квадрат длины вектора.

49. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковыми частотами.

Пусть материальная точка совершает одновременно два гармонических колебания: одно – вдоль оси x, другое – вдоль оси y

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t); \tag{49.1}$$

$$y(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_o). \tag{49.2}$$

Преобразуем написанные выражения:

$$\frac{x}{A_1} = \cos(\omega t); \quad \Rightarrow \quad \sin(\omega t) = \pm\sqrt{1-\cos^2(\omega t)} = \pm\sqrt{1-(x/A_1)^2}.$$

$$\frac{y}{A_2} = \cos(\omega t + \varphi_o) = \cos(\omega t)\cos\varphi_o - \sin(\omega t)\sin\varphi_o.$$

Учтем, чему равен $\cos(\omega t)$, чему равен $\sin(\omega t)$, и продолжим:

$$\frac{y}{A_2} = \frac{x}{A_1}\cos\varphi_o \mp \sqrt{1-(x/A_1)^2}\sin\varphi_o; \qquad \left(\frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1}\cos\varphi_o\right)^2 = \left(1-\left(\frac{x}{A_1}\right)^2\right)\sin^2\varphi_o;$$

$$\frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos\varphi_o + \frac{x^2}{A_1^2}\cos^2\varphi_o = \sin^2\varphi_o - \frac{x^2}{A_1^2}\sin^2\varphi_o;$$

$$\frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos\varphi_o + \frac{x^2}{A_1^2}\left(\cos^2\varphi_o + \sin^2\varphi_o\right) = \sin^2\varphi_o;$$

$$\frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos\varphi_o + \frac{x^2}{A_1^2} = \sin^2\varphi_o. \tag{49.3}$$

Мы получили уравнение наклонного эллипса в декартовых координатах. Его график изображен на рисунке 49.1.

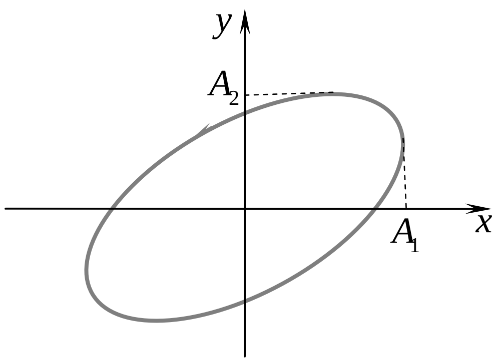

Рисунок 49.1. Наклонный эллипс.

Траекторией движения точки совершающей два взаимно перпендикулярных колебания на одинаковых частотах в общем случае является эллипс.

Рассмотрим частный случай, когда колебания по оси x и по оси y происходят синфазно.

$$\varphi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi_o = 1; \quad \sin\varphi_o = 0.$$

Уравнение (49.3) преобразуется к виду

$$\frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2} + \frac{x^2}{A_1^2} = 0; \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0; \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2} = 0;$$

$$y = \frac{A_2}{A_1} \cdot x. \tag{49.4}$$

Мы получили уравнение прямой, проходящей через начало координат в первой и третьей четвертях.

Траекторией движения точки совершающей два взаимно перпендикулярных колебания на одинаковых частотах с одинаковыми начальными фазами является отрезок прямой, проходящей через начало координат в первой и третьей четвертях.

Траектория материальной точки в этом случае показана на рисунке 49.2.а.

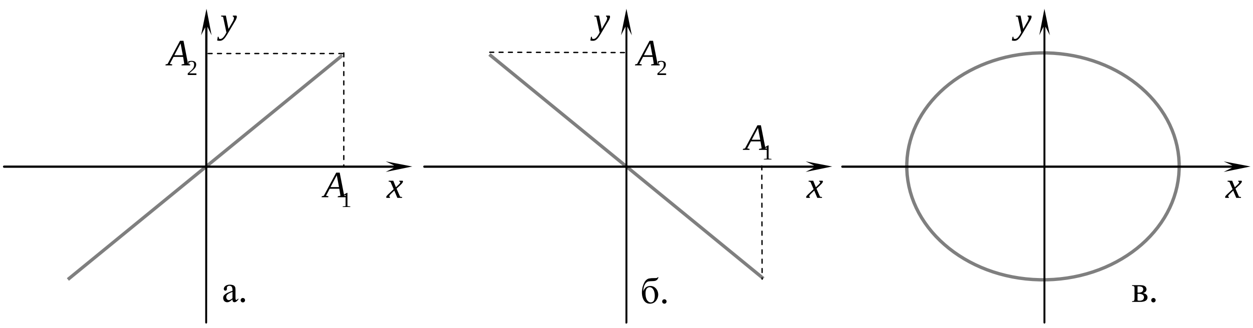

Рисунок 9.2. Траектории движения материальной точки в частных случаях.
а. $\varphi_o = 0$, б. $\varphi_o = \pm\pi$, в. $\varphi_o = \pm\pi/2$.

Рассмотрим частный случай, когда колебания по оси x и по оси y происходят в противофазе.

$$\varphi_o = \pm\pi \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi_o = -1; \quad \sin\varphi_o = 0.$$

Уравнение (49.3) преобразуется к виду

$$\frac{y^2}{A_2^2}+\frac{2xy}{A_1A_2}+\frac{x^2}{A_1^2}=0; \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x}{A_1}+\frac{y}{A_2}\right)^2=0; \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{A_1}+\frac{y}{A_2}=0;$$

$$y=-\frac{A_2}{A_1}\cdot x. \tag{49.5}$$

Мы получили уравнение прямой, проходящей через начало координат во второй и четвертой четвертях.

> Траекторией движения точки совершающей два взаимно перпендикулярных колебания на одинаковых частотах с начальными фазами, отличающимися на π, является отрезок прямой, проходящей через начало координат во второй и четвертой четвертях.

Траектория материальной точки в этом случае показана на рисунке 9.2.б.

Рассмотрим частный случай, когда колебания по оси x и по оси y происходят со сдвигом по фазе $\pi/2$.

$$\varphi_о=\pm\pi/2 \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi_о=0; \quad \sin\varphi_о=\pm1.$$

Уравнение (49.3) преобразуется к виду $\quad \dfrac{y^2}{A_2^2}-\dfrac{2xy}{A_1A_2}\cdot 0+\dfrac{x^2}{A_1^2}=(\pm1)^2;$

$$\frac{y^2}{A_2^2}+\frac{x^2}{A_1^2}=1. \tag{49.6}$$

Получилось уравнение эллипса, ориентированного вдоль координатных осей. Если $A_1 > A_2$, эллипс горизонтальный, если $A_1 < A_2$, эллипс вертикальный.

> Траекторией движения точки совершающей два взаимно перпендикулярных колебания на одинаковых частотах с начальными фазами, отличающимися на $\pi/2$, является эллипс, направленный вдоль координатных осей.

Траектория материальной точки в этом случае показана на рисунке 49.2.в.

При $\varphi_о=-\dfrac{\pi}{2}$ движение происходит по часовой стрелке, при $\varphi_о=\dfrac{\pi}{2}$ −против.

50. Волны.

Волна *– это процесс распространения колебаний в пространстве*. Источник, колеблющийся на частоте ω, заставляет точки окружающей среды колебаться на той же частоте, но с некоторой задержкой по фазе. Чем больше расстояние от источника до точки среды, тем больше разность фаз. Отметим, что в волновом процессе частицы среды не перемещаются, а колеблются около своих положений равновесия.

В случае, когда колебания точек происходит в направлении вектора скорости волны, волна называется *продольной*. Если же колебания происходят в направлении, перпендикулярном направлению вектора скорости, то волна называется *поперечной*.

Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к данному моменту времени называется *волновым фронтом*.

> Волновой фронт делит пространство на две области: внутреннюю – вовлеченную в волновой процесс и внешнюю – не вовлеченную.

Геометрическое место точек среды, колеблющихся в одинаковой фазе, называется *волновой поверхностью*. Волновые поверхности неподвижны, а волновой фронт бежит со скоростью волны. В каждый момент времени волновой фронт совпадает с одной из волновых поверхностей.

Волновые поверхности могут быть разной формы. В простейших случаях это сфера, плоскость, цилиндр. Соответствующие волны называются *сферическими*, *плоскими* и *цилиндрическими*.[2] Форма волновой поверхности определяется формой источника и свойствами среды.

Расстояние между соседними волновыми поверхностями с разностью фаз $\Delta\varphi = 2\pi$ называется *длиной волны*. Между двумя такими волновыми поверхностями есть точки, колеблющиеся во всех фазах. Таким образом:

Длина волны – это расстояние, которое волна пробегает за один период колебаний T

$$\lambda = \upsilon T. \tag{50.1}$$

Здесь λ – длина волны, υ – скорость волны. Если в этом соотношении выразить период через частоту $T = 1/\nu$, то формулу можно переписать в виде

$$\lambda\nu = \upsilon. \tag{50.2}$$

[2] В двумерном пространстве простейшие виды волновых поверхностей – это прямая линия и окружность. Соответствующие волны называются линейными и круговыми.

52. Уравнение бегущей волны.

Пусть в точке 0 на оси x находится источник, который колеблется по закону

$$\xi(t) = A\cdot\cos(\omega t + \varphi_{\text{o}}). \qquad (52.1)$$

В этой формуле ξ – смещение источника относительно положения равновесия. Если вдоль оси бежит волна, то любая точка x тоже совершает колебания, но они происходят с задержкой по времени τ. Эта задержка равна времени, пока волна добегает от источника до точки x.

$$\xi(x,t) = A\cdot\cos\left(\omega(t-\tau)+\varphi_{\text{o}}\right) = A\cdot\cos\left(\omega\left(t-\frac{x}{\upsilon}\right)+\varphi_{\text{o}}\right) = A\cdot\cos\left(\omega t-\frac{\omega x}{\upsilon}+\varphi_{\text{o}}\right)$$

Учтем, что $\omega = 2\pi/T$, $\lambda = \upsilon T$, и продолжим выкладки:

$$\xi(x,t) = A\cdot\cos\left(\omega t-\frac{2\pi x}{T\upsilon}+\varphi_{\text{o}}\right) = A\cdot\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}\cdot x+\varphi_{\text{o}}\right).$$

Введем *волновое число*

$$\kappa = 2\pi/\lambda, \qquad (52.2)$$

и запишем в окончательном виде:

$$\xi(x,t) = A\cdot\cos\left(\omega t - \kappa x + \varphi_{\text{o}}\right). \qquad (52.3)$$

Мы получили уравнение волны, бегущей вдоль оси x. Оно задает закон колебания сразу всех точек на оси x. Если волна бежит в обратную сторону против направления оси, то перед x надо поменять знак.

В трехмерном случае уравнение волны, бегущей в произвольном направлении, запишется в следующем виде:

$$\xi(\vec{r},t) = A\cdot\cos\left(\omega t - \vec{\kappa}\cdot\vec{r} + \varphi_{\text{o}}\right). \qquad (52.4)$$

В этой формуле $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из источника в интересующую нас точку, $\vec{\kappa}$ – *волновой вектор*. Его длина – волновое число, а направление совпадает с направлением скорости волны. Точкой обозначено скалярное произведение этих векторов.

Для плоской волны амплитуда постоянна, A – *const*.

Для сферической волны $A(r) \sim r^{-1}$.

Для цилиндрической волны $A(r) \sim r^{-1/2}$.

Вернемся к уравнению (52.2). Запишем фазу волны, продифференцируем ее, а потом зафиксируем (φ – const, $d\varphi = 0$). На рисунке 52.1 показано, что значит, зафиксировать фазу волны на примере серфингиста.

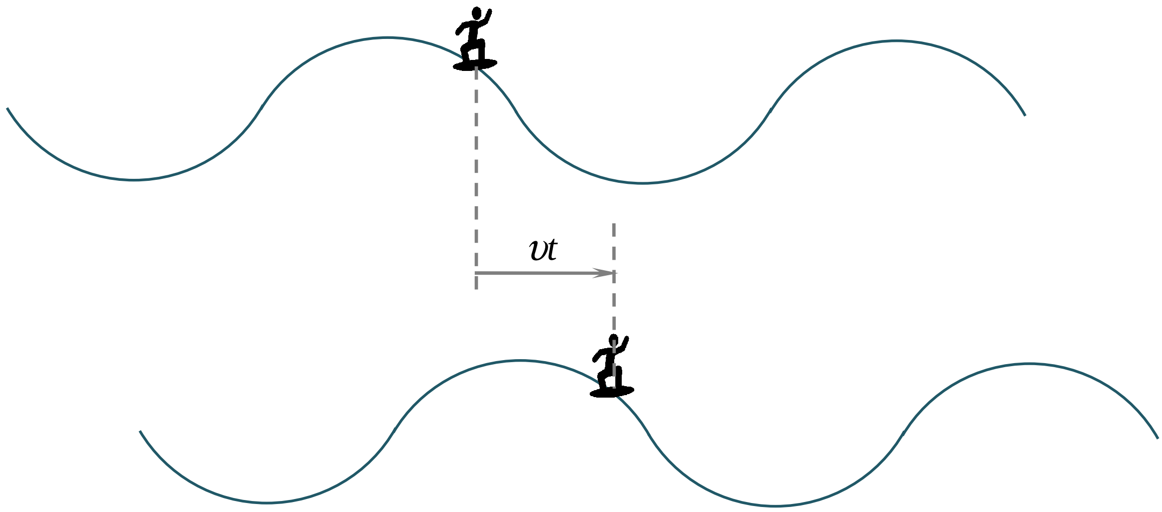

Рисунок 52.1. Перемещение серфингиста с постоянной фазой волны.

Скорость серфингиста – это скорость, с которой бежит постоянная фаза волны.

$$\varphi = \omega t - \kappa x + \varphi_0; \quad d\varphi = \omega dt - \kappa dx; \quad d\varphi = 0; \quad \omega dt = \kappa dx; \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\kappa}.$$

Получилось выражение для *фазовой скорости* волны, т.е. для скорости, с которой перемещается зафиксированная фаза волны

$$\upsilon = \frac{\omega}{\kappa}. \qquad (52.5)$$

Здесь ω – циклическая частота колебаний, а κ – волновое число.