46. Затухающие колебания.

Рассмотрим *пружинный маятник*, погруженный в вязкую среду. Считаем, что сила тяжести, сила Архимеда и сила реакции опоры компенсируют друг друга. Поэтому, мы их не будем изображать на рисунке 46.1. Трение скольжения о горизонтальную поверхность отсутствует.

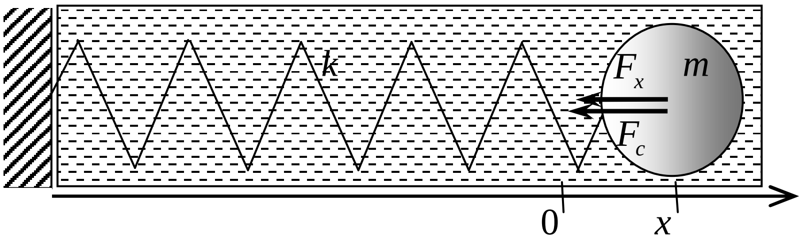

Рисунок 46.1. Пружинный маятник в вязкой среде.

На груз действует сила упругости пружины, возвращающая тело к положению равновесия. Проекция этой силы на ось x равна

$$F_x = -kx. \tag{46.1}$$

Кроме силы упругости пружины на тело действует сила сопротивления среды или сила вязкого трения, которая направлена в сторону, противоположную направлению скорости

$$F_c = c\upsilon. \tag{46.2}$$

По второму закону Ньютона $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_c$. Учитывая, что $a(t) = x''(t)$, а $\upsilon(t) = x'(t)$, с учетом направления сил получаем

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0\,. \tag{46.3}$$

Вводим новое обозначения $$\beta = \frac{c}{2m}, \tag{46.4}$$

вспоминаем старое (41.4) $\omega_0 = \sqrt{k/m},$ и получаем

дифференциальное уравнение затухающих колебаний в каноническом виде

$$x''(t) + 2\beta x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0. \tag{46.5}$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$x(t) = e^{-\beta t} y(t). \tag{46.6}$$

Сначала найдем первую производную этой функции по правилу дифферен-цирования произведения.

$$x'(t) = \left(e^{-\beta t}\right)' y(t) + e^{-\beta t} y'(t);$$

$$x'(t) = e^{-\beta t}\left(y'(t) - \beta y(t)\right). \qquad (46.7)$$

Продифференцируем это выражение еще раз

$$x''(t) = \left(e^{-\beta t}\right)'\left(y'(t) - \beta y(t)\right) + e^{-\beta t}\left(y'(t) - \beta y(t)\right)' =$$

$$= e^{-\beta t}\left(-\beta y'(t) + \beta^2 y(t)\right) + e^{-\beta t}\left(y''(t) - \beta y'(t)\right);$$

$$x''(t) = e^{-\beta t}\left(y''(t) - 2\beta y'(t) + \beta^2 y(t)\right). \qquad (46.8)$$

Подставим выражения (46.6), (46.7) и (46.8) в уравнение (46.5)

$$e^{-\beta t}\left(y''(t) - 2\beta y'(t) + \beta^2 y(t)\right) + 2\beta \cdot e^{-\beta t}\left(y'(t) - \beta y(t)\right) + \omega_o^2 \cdot e^{-\beta t} y(t) = 0;$$

$$e^{-\beta t}\left(y''(t) - 2\beta y'(t) + \beta^2 y(t) + 2\beta y'(t) - 2\beta^2 y(t) + \omega_o^2 y(t)\right) = 0;$$

$$e^{-\beta t}\left(y''(t) - \beta^2 y(t) + \omega_o^2 y(t)\right) = 0;$$

$$y''(t) + \left(\omega_o^2 - \beta^2\right) y(t) = 0. \qquad (46.9)$$

Введем обозначение $$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2} \qquad (46.10)$$

и перепишем получившееся уравнение (46.9)

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0.$$

Мы снова получили уравнение (41.5), только для другой функции – *y(t)*. Решение такого уравнения нам уже известно

$$y(t) = A_o \cos\left(\omega t + \varphi_o\right).$$

Подставляем эту функцию в (46.6) и получаем уравнения затухающих колебаний

$$x(t) = A_o e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_o). \qquad (46.11)$$

В этом уравнении ω − частота затухающих колебаний, а φ_0 – начальная фаза.

Произведение, стоящее перед косинусом в формуле (46.11), есть убывающая со временем амплитуда колебаний:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}. \quad (46.12)$$

Затухающие колебания не являются гармоническими.

Частота затухающих колебаний ω меньше частоты собственных колебаний ω_0. Это очевидно из (46.10). Соответственно, период затухающих колебаний будет больше периода собственных незатухающих гармонических колебаний. На рисунке 46.2 дано сравнение незатухающих и затухающих колебаний.

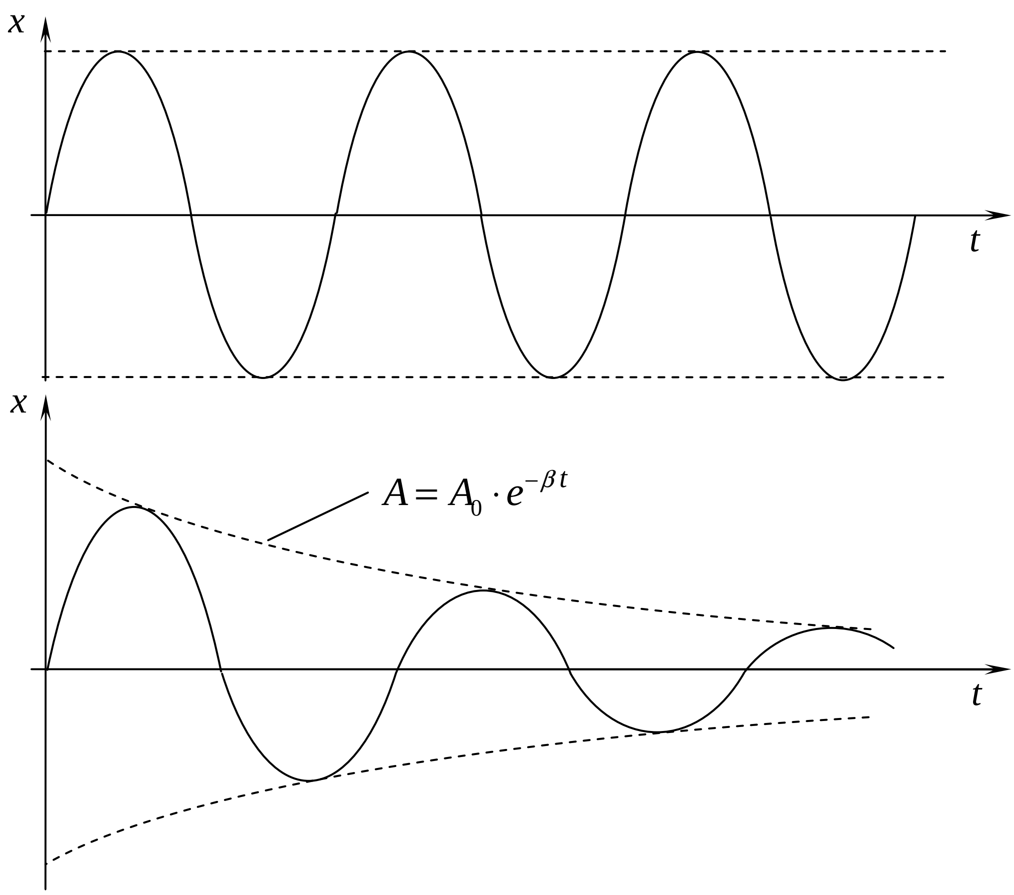

Рисунок 46.2. Незатухающие и затухающие колебания.

Рассмотрим функцию (46.11) и найдем отношение двух следующих друг за другом амплитуд колебаний. Натуральный логарифм такого отношения называется *логарифмическим декрементом* затухания Θ

$$\Theta = \ln \frac{A_N}{A_{N+1}}. \qquad (46.13)$$

Возьмем две амплитуды в моменты времени t и $t+T$, и вычислим логарифмический декремент

$$\Theta = \ln \frac{A_o \cdot e^{-\beta t}}{A_o \cdot e^{-\beta(t+T)}} = \ln \frac{e^{-\beta t}}{e^{-\beta t} e^{-\beta T}} = \ln \frac{1}{e^{-\beta T}} = \ln e^{\beta T} = \beta T.$$

$$\Theta = \beta T. \qquad (46.14)$$

Снова обратимся к формуле (46.12) и будем в ней время отсчитывать не в секундах, а в периодах – $t = NT$

$$A_N = A_o e^{-\beta NT}. \qquad (46.15)$$

Выберем номер N периода, при котором амплитуда колебаний уменьшится в e раз, т.е.

$$A_N = A_o / e.$$

$$A_N = A_o e^{-1} = A_o e^{-\beta TN} = A_o e^{-\Theta N}; \qquad e = e^{\Theta N}; \qquad \Theta N = 1.$$

Величина, обратная логарифмическому декременту, равна числу N колебаний, за время которых амплитуда уменьшится в e раз

$$N = 1/\Theta.$$

Добротностью Q колебательной системы называется величина

$$Q = \frac{\pi}{\Theta} = \pi N. \qquad (46.16)$$

> Можно сказать, что добротность – это количество колебаний, которое совершит маятник до остановки.

47. Вынужденные колебания. Резонанс.

Рассмотрим *пружинный маятник*, погруженный в вязкую среду. Считаем, что сила тяжести, сила Архимеда и сила реакции опоры компенсируют друг друга. Поэтому, мы их не будем изображать на рисунке 47.1. Трение скольжения о горизонтальную поверхность отсутствует.

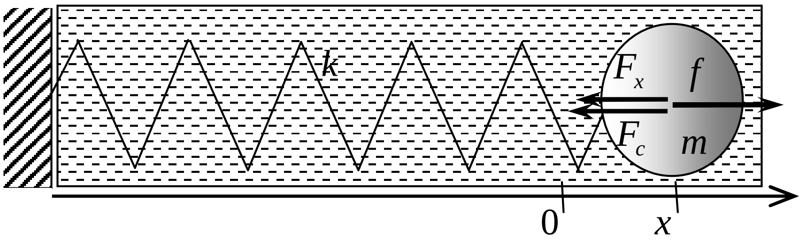

Рисунок 47.1. Пружинный маятник в вязкой среде.

На груз действует сила упругости пружины, возвращающая тело к положению равновесия. Проекция этой силы на ось x равна

$$F_x = -kx. \qquad (47.1)$$

Кроме силы упругости пружины на тело действует сила сопротивления среды или сила вязкого трения, которая направлена в сторону, противоположную направлению скорости

$$F_c = c\upsilon. \qquad (47.2)$$

Кроме этих двух сил, на тело действует еще внешняя *периодическая* (в рассматриваемом случае *гармоническая*) сила

$$f = f_0 \cos\omega t. \qquad (47.3)$$

Применим второй закон Ньютона ко всем силам, приложенным к маятнику. Полученное выражение спроектируем на ось ox:

$$ma = -kx - c\upsilon + f_0 \cos\omega t. \qquad (47.4)$$

Учтем, что $a(t) = x''(t)$, а $\upsilon(t) = x'(t)$, и перепишем получившееся уравнение

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = f_0 \cos\omega t. \qquad (47.5)$$

Вводим уже знакомые обозначения $\beta = c/2m$; $\omega_0 = \sqrt{k/m}$; и получаем *дифференциальное уравнение вынужденных колебаний* в каноническом виде

$$x''(t) + 2\beta x'(t) + \omega_0^2 x(t) = \left(f_0/m\right)\cos\omega t. \qquad (47.6)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде гармонической функции на частоте вынуждающей силы ω

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0). \qquad (47.7)$$

Очевидно, что вынужденные колебания могут отставать, но не могут опережать колебания вынуждающей силы, поэтому φ_0 отрицательно.

Воспользуемся методом векторных диаграмм, для чего перепишем дифференциальное уравнение и ожидаемо решения в комплексном виде

$$z''(t) + 2\beta z'(t) + \omega_0^2 z(t) = \left(f_0/m\right)\cos\omega t; \qquad (47.6.а)$$

$$z(t) = A \cdot e^{i(\omega t + \varphi_0)}. \qquad (47.7.а)$$

Найдем первую и вторую производные по времени функции (47.7.а).

$$z'(t) = i\omega A \cdot e^{i(\omega t + \varphi_0)}. \qquad (47.8)$$

$$z''(t) = (i\omega)^2 A \cdot e^{i(\omega t + \varphi_0)};$$

$$z''(t) = -\omega^2 A \cdot e^{i(\omega t + \varphi_0)}. \qquad (47.9)$$

Подставим $z(t)$, $z'(t)$ и $z''(t)$ в формулу (47.6.а)

$$-\omega^2 A \cdot e^{i(\omega t + \varphi_0)} + 2i\beta\omega A \cdot e^{i(\omega t + \varphi_0)} + \omega_0^2 A \cdot e^{i(\omega t + \varphi_0)} = \left(f_0/m\right)\cos\omega t.$$

Написанное уравнение рассмотрим в момент времени $t = 0$.

$$-\omega^2 A \cdot e^{i\varphi_0} + 2i\beta\omega A \cdot e^{i\varphi_0} + \omega_0^2 A \cdot e^{i\varphi_0} = f_0/m.$$

Учтем при этом, что умножение комплексного числа на i сводится к повороту в комплексной плоскости на угол $\pi/2$ против часовой стрелки.

Сведения из математики.

Возьмем, например, число $z_1 = 2+3i$, умножим его на i, получим $z_2 = 2i - 3$. На рисунке 7.2 мы видим, что в комплексной плоскости число z_2 повернуто на угол $\pi/2$ относительно z_1.

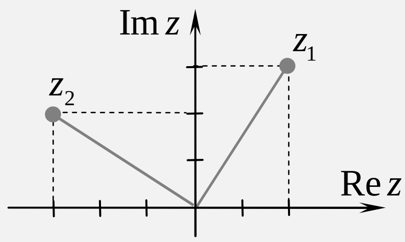

Рисунок 7.2. Числа z_1 и z_2 на комплексной плоскости.

Умножение комплексного числа на -1 сводится к повороту в комплексной плоскости на угол π.

$$\omega_{\text{o}}^2 A\cdot e^{i\varphi_{\text{o}}} + 2\beta\omega A\cdot e^{i(\pi/2+\varphi_{\text{o}})} + \omega^2 A\cdot e^{i(\pi+\varphi_{\text{o}})} = f_{\text{o}}/m. \qquad (47.10)$$

Отложим на диаграмме, показанной на рисунке 47.3, вектор длиной $\omega_{\text{o}}^2 A$ под углом φ_{o} к оси x. Не забудем, что $\varphi_{\text{o}} < 0$. Вектор длиной $\omega^2 A$ отложим в противоположном направлении. Вектор длиной $2\beta\omega A$ отложим под углом 90°. Сумма трех этих векторов должна иметь длину f_{o}/m и в начальный момент времени быть направлена вдоль оси x.

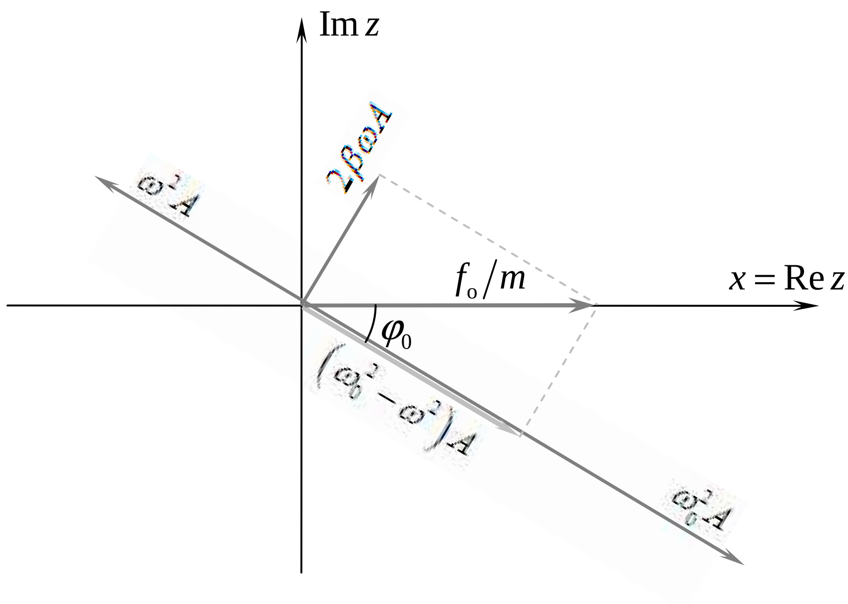

Рисунок 47.3. Векторная диаграмма для вынужденных колебаний.

Пользуясь рисунком, свяжем длины векторов и выразим амплитуду

$$(f_{\text{o}}/m)^2 = \left(\omega_{\text{o}}^2 - \omega^2\right)^2 A^2 + (2\beta\omega)^2 A^2, \Rightarrow$$

$$A = \frac{f_{\text{o}}/m}{\sqrt{\left(\omega_{\text{o}}^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \qquad (47.11)$$

Пользуясь тем же рисунком, найдем сдвиг по фазе между колебаниями вынуждающей силы и вынужденными колебаниями маятника

$$tg\varphi_{\text{o}} = \frac{-2\beta\omega}{\omega_{\text{o}}^2 - \omega^2}. \qquad (47.12)$$

Получены значения амплитуды и начальной фазы вынужденных колебаний, как функции частоты вынуждающей силы. На рисунке 47.4 приведены графики этих функций при разных значениях параметра затухания β. Соответствующие кривые называются резонансными.

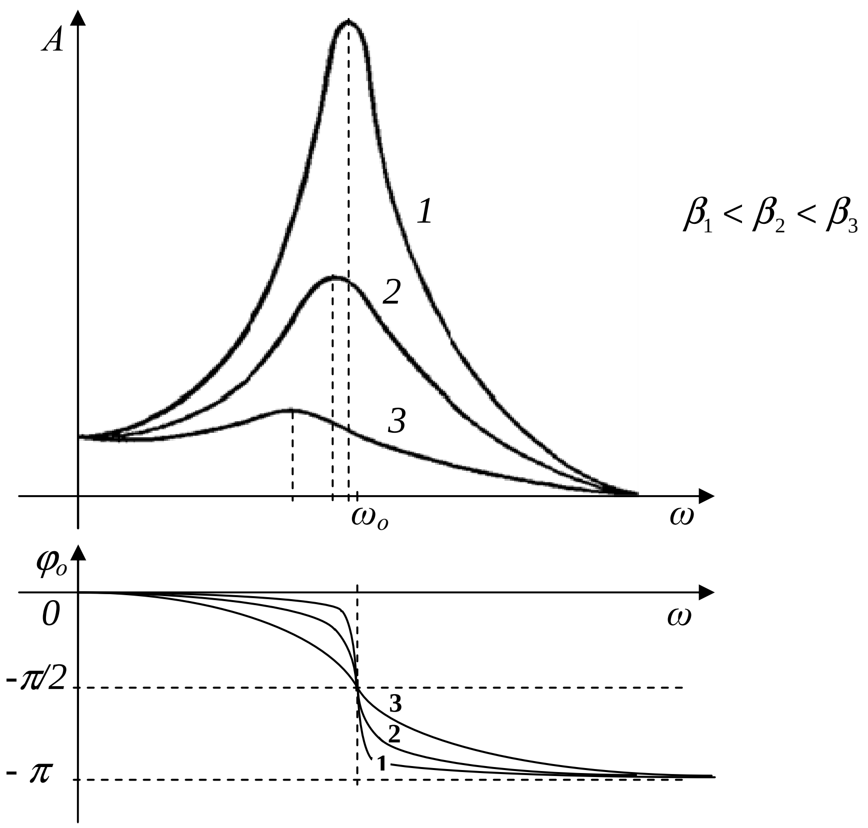

Рисунок 47.4. Резонансные кривые.

Функция $A(\omega)$ имеет максимум при частотах, близких к ω_0, немного меньших ω_0. Чем меньше коэффициент затухания β, тем острее выражен пик на зависимости.

> Явление резкого возрастания амплитуды колебаний при частотах, близких к частоте собственных колебаний ω_0 называется *резонансом*.

Формула (47.11) имеет максимум при минимуме знаменателя, а знаменатель, в свою очередь имеет минимум при минимуме подкоренного выражения. Берем производную этого выражения по ω и приравниваем ее нулю.

$$\left(\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2\right)'=\left(\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2\right)'+\left(4\beta^2\omega^2\right)'=$$

$$=2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\left(\omega_0^2-\omega^2\right)'+4\beta^2\left(\omega^2\right)'=$$

$$= 2\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)\left(-2\omega\right) + 4\beta^2 2\omega = 4\omega\left(\omega_o^2 - \omega^2 + 2\beta^2\right) = 0$$

Поскольку $\omega \neq 0$, значит, $\left(\omega_o^2 + 2\beta^2 - \omega^2\right) = 0$. Получаем частоту, на которой вынужденные колебания имеют максимальную амплитуду

$$\omega_P = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}. \qquad (47.13)$$

> Резонансная частота меньше и частоты собственных колебаний ω_o, и частоты затухающих колебаний, вычисляемой по формуле (46.10).

Найдем амплитуду колебаний на резонансной частоте.

$$A_{max} = \frac{f_o/m}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega_P^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_P^2}} = \frac{f_o/m}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega_o^2 + 2\beta^2\right)^2 + 4\beta^2\left(\omega_o^2 - 2\beta^2\right)}} =$$

$$= \frac{f_0/m}{\sqrt{\left(2\beta^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_o^2 - 4\beta^2 2\beta^2}} = \frac{f_0/m}{\sqrt{4\beta^4 + 4\beta^2\omega_o^2 - 8\beta^4}} = \frac{f_0/m}{\sqrt{4\beta^2\omega_o^2 - 4\beta^4}}.$$

$$A_{max} = \frac{f_o/m}{2\beta\sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}}. \qquad (47.14)$$

> В отсутствие трения амплитуда колебаний при резонансе стремилась бы к бесконечности, а резонансная частота равнялась бы ω_o.

Из формулы (47.12) и графика соответствующей функции (рисунок 47.4 нижний) видно, что колебания маятника отстают по фазе от вынуждающей силы. На малых частотах колебания происходят практически в одинаковой фазе, а на больших частотах – в противофазе. При $\omega = \omega_o$ сдвиг по фазе составляет $-\pi/2$.