证券投资学-第二次作业

made by LaTeX

刘宇晨　　20002515

计金（双）200

2022 年 12 月 1 日

第八章作业

习题6

构建单因素模型，需要的变量：

- $n(\mathcal{A},\mathcal{B})$个超额收益估计值，$\alpha_{\mathcal{A}} = 13\% - 8\%, \alpha_{\mathcal{B}} = 18\% - 8\%$
- $n(\mathcal{A},\mathcal{B})$个敏感系数估计值，$\beta_{\mathcal{A}} = 0.8, \beta_{\mathcal{B}} = 1.2$
- $n(\mathcal{A},\mathcal{B})$个公司特有方差的估计值，$\sigma^2(e_{\mathcal{A}}) = 30\%, \sigma^2(e_{\mathcal{B}}) = 40\%$
- 1个市场溢价估计值，$E(R_M) = \text{UNKNOWN}$
- 1个宏观经济因素方差的估计值，$\sigma_M^2 = 22\%$

a.股票$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$的标准差(总风险)

$$
\begin{aligned}
\text{总风险} &= \text{系统性风险} + \text{公司特定风险} \\
\sigma_i^2 &= \beta_i^2\sigma_M^2 + \sigma^2(e_i) \\
\sigma_{\mathcal{A}} = \sqrt{\sigma_{\mathcal{A}}^2} &= \sqrt{\beta_{\mathcal{A}}^2\sigma_M^2 + \sigma^2(e_{\mathcal{A}})} = \sqrt{0.8^2 \times 0.22^2 + 0.3^2} = 34.78\% \\
\sigma_{\mathcal{B}} = \sqrt{\sigma_{\mathcal{B}}^2} &= \sqrt{\beta_{\mathcal{B}}^2\sigma_M^2 + \sigma^2(e_{\mathcal{B}})} = \sqrt{1.2^2 \times 0.22^2 + 0.4^2} = 347.93\%
\end{aligned}
$$

b.计算期望收益率、标准差、β和非系统性标准差(公司特定标准差)

σ_P是标准差，$\sigma(e_P)$是非系统性标准差

$$
\begin{aligned}
E(r_P) &= w_{\mathcal{A}} \times E(r_{\mathcal{A}}) + w_{\mathcal{B}} \times E(r_{\mathcal{B}}) + w_f \times r_f \\
&= 0.3 \times 0.13 + 0.45 \times 0.18 + 0.25 \times 0.08 = 14\% \\
\beta_P &= w_{\mathcal{A}} \times \beta_{\mathcal{A}} + w_{\mathcal{B}} \times \beta_{\mathcal{B}} \\
&= 0.3 \times 0.8 + 0.45 \times 1.2 = 0.78 \\
\sigma^2(e_P) &= w_{\mathcal{A}} \times \sigma^2(e_{\mathcal{A}}) + w_{\mathcal{B}} \times \sigma^2(e_{\mathcal{B}}) \\
&= 0.30^2 \times 0.30^2 + 0.45^2 \times 0.40^2 = 4.05\% \\
\sigma(e_P) = \sqrt{\sigma^2(e_P)} &= \sqrt{4.05\%} = 20.12\% \\
\sigma_P^2 &= \beta_P^2\sigma_M^2 + \sigma^2(e_P) \\
&= (0.78^2 + 0.22^2) + 4.05\% = 6.99\% \\
\sigma_P = \sqrt{\sigma_P^2} &= \sqrt{6.99\%} = 26.45\%
\end{aligned}
$$

习题8

构建单因素模型，需要的变量：

- $n(\mathcal{A},\mathcal{B})$个超额收益估计值，$\alpha_{\mathcal{A}}=1\%,\alpha_{\mathcal{B}}=-2\%$
- $n(\mathcal{A},\mathcal{B})$个敏感系数估计值，$\beta_{\mathcal{A}}=1.2,\beta_{\mathcal{B}}=0.8$
- $n(\mathcal{A},\mathcal{B})$个公司特有方差的估计值，$\sigma^2(e_{\mathcal{A}})=10.3\%,\sigma^2(e_{\mathcal{B}})=9.1\%$
- 1个市场溢价估计值，$E(R_M)=$ UNKNOWN
- 1个宏观经济因素方差的估计值，$\sigma_M^2=$ UNKNOWN

a.哪个公司特定风险更高？

公司特定风险为$\sigma(e_i)$，在题目中具体表现为残差标准差，且$\sigma(e_{\mathcal{A}})>\sigma(e_{\mathcal{B}})$ 所以$\mathcal{A}$的公司特定风险更高

b.哪个市场风险更高？

市场风险为系统性风险$=\beta_i^2\sigma_M^2$，$\mathcal{A}$与$\mathcal{B}$共用一个宏观经济因素σ_M(虽然题目没给), 根据条件，有$\beta_{\mathcal{A}}>\beta_{\mathcal{B}}$。所以$\beta_{\mathcal{A}}^2\sigma_M^2>\beta_{\mathcal{B}}^2\sigma_M^2$。综上，$\mathcal{A}$市场风险更高

c.拟合优度R^2能解释收益整体方差中可由市场收益率解释的部分。根据条件，$R_{\mathcal{A}}^2>R_{\mathcal{B}}^2$。所以$\mathcal{A}$的拟合效果更好，说明公司特定风险对整体的干扰较小，即系统性风险(市场变动)能更好地解释收益波动

d.假设无风险收益率为6%，回归使用的是总收益而非超额收益，求$\mathcal{A}$的回归截距：回归的方程是：

$$R_i=\alpha_i+\beta_iR_M$$

斜率为β_i，自变量是R_M，剩下的α_i是截距，在进行变化后，除了R_M项都为截距项。所以：

$$\begin{aligned}
E(R_i)&=\alpha_i+\beta_iE(R_M)\\
r_{\mathcal{A}}-r_f&=\alpha_i+\beta_i(r_M-r_f)\\
r_{\mathcal{A}}&=\alpha_i+r_f(1-\beta_i)+r_M\beta_i\\
\therefore \text{截距}&=\alpha_i+r_f(1-\beta_i)\\
&=1\%+6\%(1-1.2)=-0.2\%
\end{aligned}$$

习题9、10、11、12

构建单因素模型，需要的变量：

- $n(\mathcal{A},\mathcal{B})$个超额收益估计值，$\alpha_{\mathcal{A}}=3\%,\alpha_{\mathcal{B}}=-2\%$
- $n(\mathcal{A},\mathcal{B})$个敏感系数估计值，$\beta_{\mathcal{A}}=0.7,\beta_{\mathcal{B}}=1.2$
- $n(\mathcal{A},\mathcal{B})$个公司特有方差的估计值(之后可以通过$R^2$计算得出)，$\sigma^2(e_{\mathcal{A}})=\text{UNKNOWN},\sigma^2(e_{\mathcal{B}})=\text{UNKNOWN}$
- 1个市场溢价估计值，$E(R_M)=\text{UNKNOWN}$
- 1个宏观经济因素方差的估计值，$\sigma_M^2=\text{UNKNOWN}$

9.求每只股票的标准差

题目中已知拟合优度R^2，书中说R^2等于被解释的SS除以总的SS。其中，回归平方和(SS)表示因变量方差中能够被自变量解释的那一部分，该值等于$\beta_i^2\sigma_M^2$。而总的SS等于股票的总体方差σ_i^2。所以，有：

$$\begin{aligned}
R^2&=\frac{\beta_i^2\sigma_M^2}{\sigma_i^2}=\frac{\text{解释方差}}{\text{总体方差}}\\
\sigma_{\mathcal{A}}^2&=\beta_i^2\sigma_M^2/R_{\mathcal{A}}^2=0.7^2\times0.2^2/0.2=9.8\%\\
\sigma_{\mathcal{A}}&=\sqrt{\sigma_{\mathcal{A}}^2}=\sqrt{9.8\%}=31.3\%\\
\sigma_{\mathcal{B}}^2&=\beta_i^2\sigma_M^2/R_{\mathcal{B}}^2=1.2^2\times0.2^2/0.12=48\%\\
\sigma_{\mathcal{B}}&=\sqrt{\sigma_{\mathcal{B}}^2}=\sqrt{9.8\%}=69.28\%
\end{aligned}$$

10.将总方差分解为系统性和公司特定的两部分

$$\begin{aligned}
\text{总风险}&=\text{系统性风险}+\text{公司特定风险}\\
\sigma_i^2&=\beta_i^2\sigma_M^2+\sigma^2(e_i)\\
\mathcal{A}\text{系统风险}&=\beta_{\mathcal{A}}^2\sigma_M^2=0.7^2\times0.2^2=1.96\%\\
\mathcal{A}\text{公司特有风险}&=\sigma^2(e_{\mathcal{A}})=\sigma_{\mathcal{A}}^2-(\beta_{\mathcal{A}}^2\sigma_M^2)=9.8\%-1.96\%=7.84\%\\
&\text{同理，}\\
\mathcal{B}\text{系统风险}&=\beta_{\mathcal{B}}^2\sigma_M^2=1.2^2\times0.2^2=5.76\%\\
\mathcal{B}\text{公司特有风险}&=\sigma^2(e_{\mathcal{B}})=\sigma_{\mathcal{B}}^2-(\beta_{\mathcal{B}}^2\sigma_M^2)=48\%-5.76\%=42.24\%
\end{aligned}$$

11.求两只股票之间的协方差和相关系数

$$\begin{aligned}
\text{协方差}&=\beta\text{的乘积}\times\text{市场指数风险}\\
\text{Cov}(r_{\mathcal{A}},r_{\mathcal{B}})&=\beta_{\mathcal{A}}\beta_{\mathcal{B}}\sigma_M^2\\
&=0.7\times0.12\times(20\%)^2=3.36\%\\
\text{相关系数}&=\text{与市场之间的相关系数之积}\\
\text{Corr}(r_{\mathcal{A}},r_{\mathcal{B}})&=\frac{\beta_{\mathcal{A}}\beta_{\mathcal{B}}\sigma_M^2}{\sigma_{\mathcal{A}}\sigma_{\mathcal{B}}}=\frac{0.7\times1.2\times(20\%)^2}{\sqrt{9.8\%\times48\%}}=0.155
\end{aligned}$$

12.每只股票与市场指数的协方差是多少

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(r_{\mathcal{A}},r_M)&=\beta_{\mathcal{A}}\beta_M\sigma_M^2=0.7\times1\times20\%^2=2.8\%\\
\text{Cov}(r_{\mathcal{B}},r_M)&=\beta_{\mathcal{B}}\beta_M\sigma_M^2=1.2\times1\times20\%^2=4.8\%
\end{aligned}$$

习题16

根据教材最后风险组合构造程序，分别将股票$\mathcal{A}.\mathcal{B}$作为积极组合进行构造：

方法一

1. 计算积极组合中每个证券的原始头寸：由于分别进行构造，所以不必构造原始头寸
2. 调整这些原始权重，使组合权重和为1，略过
3. 计算积极组合的α值：

$$
\begin{aligned}
E(R_i) &= \alpha_i + \beta_i E(R_M) \\
\alpha_{\mathcal{A}} &= E(R_i) - \beta_i E(R_M) = 0.2\% \\
\alpha_{\mathcal{B}} &= E(R_i) - \beta_i E(R_M) = -1\%
\end{aligned}
$$

4. 计算积极组合的残差：$\sigma^2(e_{\mathcal{A}}) = 10\%^2, \sigma^2(e_{\mathcal{B}}) = 11\%^2$

$$
\begin{aligned}
\text{公司特定风险} &= \text{总风险} - \text{系统性风险} \\
\sigma^2(e_i) &= \sigma_i^2 - \beta_i^2 \sigma_M^2 \\
\sigma^2(e_{\mathcal{A}}) &= 10\%^2 - 0.8^2 \times 5\%^2 = 0.84 \\
\sigma^2(e_{\mathcal{B}}) &= 11\%^2 - 0.8^2 \times 5\%^2 = 0.6475
\end{aligned}
$$

5. 计算积极组合原始头寸：

$$
\begin{aligned}
w_i^0 &= \frac{\alpha_i \sigma_M^2}{E(R_M)\,\sigma^2(e_i)} \\
w_{\mathcal{A}}^0 &= \frac{0.2\% \times 5\%^2}{(12\% - 6\%) \times 0.84\%} = 0.0099 \\
w_{\mathcal{B}}^0 &= \frac{-1\% \times 5\%^2}{(12\% - 6\%) \times 0.6475\%} = -0.06435
\end{aligned}
$$

6. 计算积极组合β值：$\beta_{\mathcal{A}} = 0.8, \beta_{\mathcal{B}} = 1.5$
7. 调整积极组合的原始头寸：

$$
\begin{aligned}
w_i^* &= \frac{w_i^0}{1 + (1 - \beta_i) w_i^0} \\
w_{\mathcal{A}}^* &= \frac{0.0099}{1 + (1 - 0.8)0.0099} = 0.988\% \\
w_{\mathcal{B}}^* &= \frac{-0.06435}{1 + (1 - 1.5)(-0.06435)} = -6.2344\%
\end{aligned}
$$

8. 此时最优风险组合的权重：$w_M^* = 1 - w_i^*$
   选择一：由于$w_{\mathcal{A}}^* > w_{\mathcal{B}}^*$，故可以选择做多$\mathcal{A}$ 选择二：由于$|w_{\mathcal{B}}^*| > |w_{\mathcal{A}}^*|$，故可以选择做空$\mathcal{B}$

方法二

积极组合(当持有最优权重时)对整个风险投资组合的夏普比率的贡献取决于它的α值和残差标准差的比率。所以此题可以分别计算$\mathcal{A},\mathcal{B}$的信息比率来进行判断。

$$
\begin{aligned}
S_P^2 &= S_M^2 + [\frac{\alpha_A}{\sigma(e_A)}]^2 \\
E(R_i) &= \alpha_i + \beta_i E(R_M) \\
\alpha_{\mathcal{A}} &= E(R_i) - \beta_i E(R_M) = 0.2\% \\
\alpha_{\mathcal{B}} &= E(R_i) - \beta_i E(R_M) = -1\% \\
\text{公司特定风险} &= \text{总风险} - \text{系统性风险} \\
\sigma^2(e_i) &= \sigma_i^2 - \beta_i^2 \sigma_M^2 \\
\sigma^2(e_{\mathcal{A}}) &= 10\%^2 - 0.8^2 \times 5\%^2 = 0.84 \\
\sigma^2(e_{\mathcal{B}}) &= 11\%^2 - 0.8^2 \times 5\%^2 = 0.6475 \\
\mathcal{A}\text{的}S_P^2 &= \frac{12\% - 6\%}{6\%}^2 + [\frac{0.2\%}{\sqrt{0.84}}]^2 = 0.360476\% \\
\mathcal{B}\text{的}S_P^2 &= \frac{12\% - 6\%}{6\%}^2 + [\frac{-1\%}{\sqrt{0.6475}}]^2 = 0.37544\%
\end{aligned}
$$

由于$\mathcal{B}$的信息比率大于$\mathcal{A}$的信息比率，且$\mathcal{B}$的$\alpha < 0$，所以选择做空$\mathcal{B}$

第九章作业

习题9

a.假设激进型股票为$\mathcal{A}$，防守型股票为$\mathcal{B}$，根据题目和期望收益-贝塔关系，有

$$E(r_P) = r_f + \beta_P[E(r_M) - r_f]$$

$$\text{对于股票}\mathcal{A}\begin{cases} E(r_{P1}) = r_f + \beta_{\mathcal{A}}[E(r_{M1}) - r_f] \Rightarrow -2\% = r_f + \beta_{\mathcal{A}}(5\% - r_f) \\ E(r_{P2}) = r_f + \beta_{\mathcal{A}}[E(r_{M2}) - r_f] \Rightarrow 38\% = r_f + \beta_{\mathcal{A}}(25\% - r_f) \end{cases}$$

$$\text{解得：}\begin{cases} \beta_{\mathcal{A}} = 2 \\ r_f = 12\% \end{cases}$$

$$\text{对于股票}\mathcal{B}\begin{cases} E(r_{P1}) = r_f + \beta_{\mathcal{B}}[E(r_{M1}) - r_f] \Rightarrow 6\% = r_f + \beta_{\mathcal{B}}(5\% - r_f) \\ E(r_{P2}) = r_f + \beta_{\mathcal{B}}[E(r_{M2}) - r_f] \Rightarrow 12\% = r_f + \beta_{\mathcal{B}}(25\% - r_f) \end{cases}$$

$$\text{解得：}\begin{cases} \beta_{\mathcal{B}} = 0.3 \\ r_f = 6.43\% \end{cases}$$

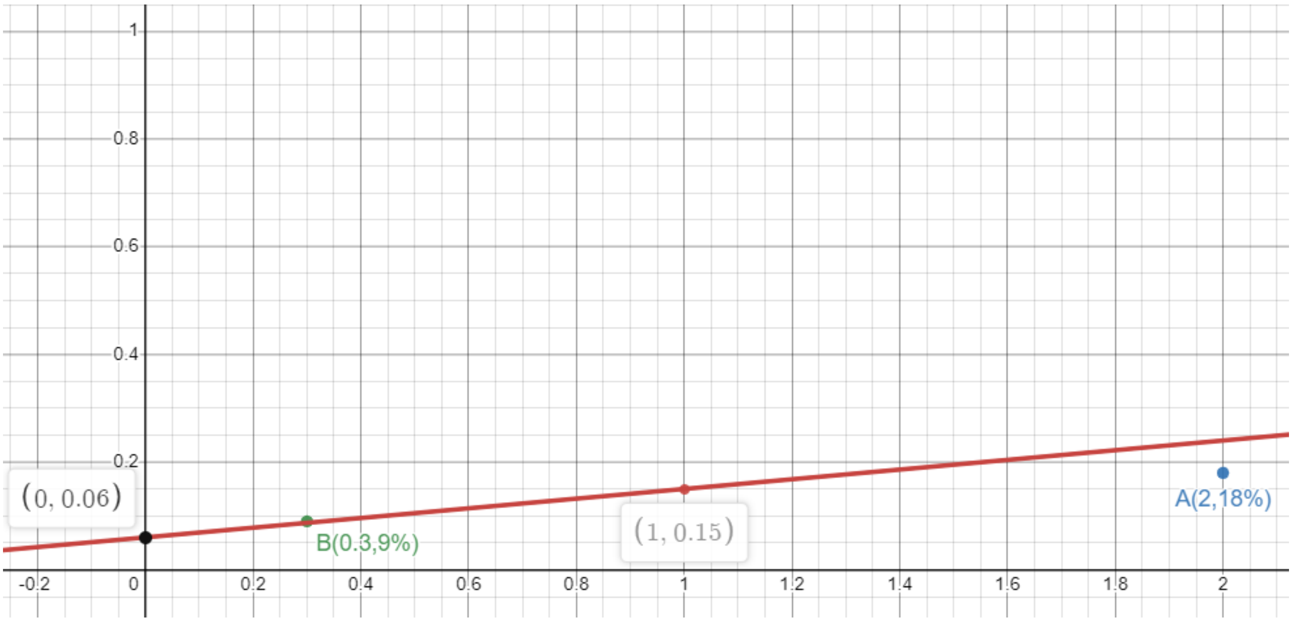
b.如果$P(1) = P(2) = 0.5$，则$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$的期望收益率：

$$E(r_{\mathcal{A}}) = 0.5 \times -2\% + 0.5 \times 38\% = 18\%$$
$$E(r_{\mathcal{B}}) = 0.5 \times 6\% + 0.5 \times 12\% = 9\%$$

c.国债利率(无风险收益率)r_f为6%，收益几率和b所描述的一样，求证券市场线：

描绘证券市场线：需要知道两个点，分别是$\beta_M=0$和$\beta_M=1$时，即无风险国债和市场平均收益的情况。而且，在均衡市场中所有证券应该都在这条证券市场线上。由此经过简单的数学计算可以得知，证券市场线的截距是无风险利率，斜率是市场平均超额收益率。对于这道题，有：

$$E(r_M)=0.5\times 25\%+0.5\times 5\%=15\%$$
$$\beta_f=0, r_f=6\%$$
$$\beta_M=1, E(r_M)=15\%$$
$$\text{解得SML方程：}E(r)=6\%+\beta\times 9\%$$
$$\text{对于}\mathcal{A}\text{点}, \beta_{\mathcal{A}}=2, E(r_{\mathcal{A}})=18\%$$
$$\text{对于}\mathcal{B}\text{点}, \beta_{\mathcal{B}}=0.3, E(r_{\mathcal{A}})=9\%$$



证券市场线(Desmos)

d.标出$\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$在图中的位置(见上图)，并分别求出对应的α：

股票的实际期望收益与正常期望收益之间的差，称为股票的阿尔法(α_i)。

令β为2，在证券市场线上，收益应为$E'(r_{\mathcal{A}})=6\%+2\times 9\%=24\%$，题目中的信息$\mathcal{A}$的期望收益率$E(r_{\mathcal{A}})=18\%$，解得：

$$\alpha_{\mathcal{A}}=18\%-24\%=-6\%$$

同理可得：

$$\alpha_{\mathcal{B}}=9\%-8.7\%=0.3\%$$

e.求激进型企业的临界利率：

令激进型企业的β值等于防守型企业，$\beta=0.3$，带入证券市场线求得临界利率为8.7%

习题20

a.判断哪个投资者更善于选择个股

由于题目只给了两个投资者的平均收益率和β值，并没有提供无风险收益率和市场平均收益率。故无法通过构造证券市场线的方法来计算α值来判断谁的投资效果好。

换一种思路，可以通过判断相同风险厌恶系数下各自效用的多少来判断投资效果，但是题目只提供了β值，并不知道两种投资的标准差，所以也无法通过计算各自的效用来判断投资效果。

b.已知$r_f = 6\%, r_M = 14\%$，判断哪个投资者选股更出色

假设两个投资者的投资组合分别是$\mathcal{A}, \mathcal{B}$，构造证券市场线：

$$\begin{aligned}
\text{SML方程：} E(r) &= 6\% + \beta \times 14\% \\
\text{对于}\mathcal{A}\text{点}, \beta_{\mathcal{A}} &= 1.5, E(r_{\mathcal{A}}) = 19\% \\
\text{对于}\mathcal{B}\text{点}, \beta_{\mathcal{B}} &= 1, E(r_{\mathcal{A}}) = 16\% \\
\alpha_{\mathcal{A}} &= (6\% + 1.5 \times 14\%) - 19\% = 1\% \\
\alpha_{\mathcal{B}} &= (6\% + 1 \times 14\%) - 16\% = 2\%
\end{aligned}$$

有$\alpha_{\mathcal{B}} > \alpha_{\mathcal{A}}$，所以投资组合$\mathcal{B}$的异常收益更高，书中说有人认为证券分析就是找出$\alpha$非零的证券。资产组合管理者将增加$\alpha$大于零的证券的比例，减小$\alpha$小于零的证券的比例。所以投资组合$\mathcal{B}$要优于$\mathcal{A}$。故后者选股更出色。

c.已知$r_f = 3\%, r_M = 15\%$，判断哪个投资者选股更出色

与b.一样，假设两个投资者的投资组合分别是$\mathcal{A}, \mathcal{B}$，构造证券市场线：

$$\begin{aligned}
\text{SML方程：} E(r) &= 3\% + \beta \times 15\% \\
\text{对于}\mathcal{A}\text{点}, \beta_{\mathcal{A}} &= 1.5, E(r_{\mathcal{A}}) = 19\% \\
\text{对于}\mathcal{B}\text{点}, \beta_{\mathcal{B}} &= 1, E(r_{\mathcal{A}}) = 16\% \\
\alpha_{\mathcal{A}} &= (3\% + 1.5 \times 15\%) - 19\% = -2\% \\
\alpha_{\mathcal{B}} &= (3\% + 1 \times 15\%) - 16\% = 1\%
\end{aligned}$$

有$\alpha_{\mathcal{B}} > \alpha_{\mathcal{A}}$，依然是后者选股更出色。

习题21

a.市场组合的期望收益率

在证券市场线中，因为市场的$\beta = 1$，这一点就是市场投资组合的期望收益率，故

$$r_M = 12\%$$

b.求$\beta = 0$的股票的期望收益率

$\beta = 0$的股票在证券市场线中为截距，即无风险收益，故

$$r_{\beta=0} = r_f = 5\%$$

c.构造证券市场线，并求出$\beta = 0.5$时证券市场线上该股票的期望收益：

$$\begin{aligned} &\text{SML方程：} E(r) = 5\% + \beta \times 12\% \\ &\text{对于该股票}, \beta_i = 1.5, E'(r_i) = 5\% + 0.5 \times 12\% = 11\% \end{aligned}$$

计算该股票预期的年收益率：

$$\begin{aligned} &E(r_i) = (\frac{41+3}{40} - 1) \times 100\% = 10\% \\ &E(r_i) > E'(r_i) \end{aligned}$$

所以股票被低估了。