

概率论与数理统计笔记

made by L^AT_EX

周学勤

2022 年 5 月 30 日

概率论的基本概念

公式

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$P(A - B) = P(A) - P(AB) = P(A\bar{B})$$

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(AB) = P(A)P(B) \iff A \text{ 与 } B \text{ 独立}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$$

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$$

概念

两两独立 \neq 相互独立

超几何分布与是否计序无关

抽签原理：与抽签的次序无关

模型

- 会面问题
- 蒲丰投针
- 不放回抽样与二项分布
- 放回抽样与超几何分布
- 匹配问题

随机变量的概率分布

基本概念

$$P(a < \xi \leq b) = F(b) - F(a) \quad P(a \leq \xi < b) = F(b-0) - F(a-0)$$

定理：若 $g(x)$ 处处可导，恒有 $g'(x) > 0$ 或 $g'(x) < 0$ ，则 $Y = g(X)$ 是连续型随机变量，概率密度

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)] |h'(y)|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

普通情况/证明

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} \\ &= P\{X \leq h(y)\} = F_X[h(y)] \end{aligned}$$

离散型随机变量

- 单点分布 $\xi \sim (x - c)$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < c \\ 1 & , x \geq c \end{cases}$$

$$E\xi = c \quad D\xi = 0$$

- (0-1) 分布

$$P\{X = k\} = p^k (1-p)^{1-k} \quad k = 0, 1$$

$$E\xi = p \quad D\xi = p(1-p)$$

- 二项分布 $\xi \sim B(n, p)$

$$P\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{1-k} \quad k = 0, 1, 2 \cdots n$$

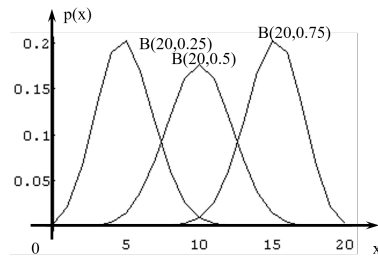


图 1: 二项分布的概率密度函数

$$E\xi = np \quad D\xi = np(1-p)$$

- 泊松分布 $\xi \sim P(\lambda)$

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

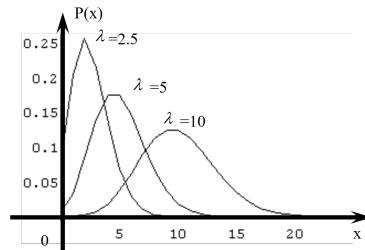


图 2: 泊松分布的概率密度函数

注意：泊松分布是非对称的，越大，非对称性越不明显。

$$E\xi = \lambda \quad D\xi = \lambda$$

- 超几何分布 $\xi \sim H(n, M, N)$

$$P\{X = k\} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \quad k = 0, 1, 2, \dots, r = \min(n, M)$$

- 几何分布 $\xi \sim Ge(p)$ 首次成功发生在第 k 次

$$P\{X = k\} = (1-p)^{k-1} p \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

p: A 发生的概率 ξ : A 首次发生时的试验次数

$$E\xi = \frac{1}{p} \quad D\xi = \frac{q}{p^2}$$

连续型随机变量

- 均匀分布 $\xi \sim U(a, b)$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

$$E\xi = \frac{a+b}{2} \quad D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- 指数分布 $\xi \sim E(\lambda)$ 寿命、某种服务的等待时间

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & a < x \leq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

★密度函数和分布函数的图形:

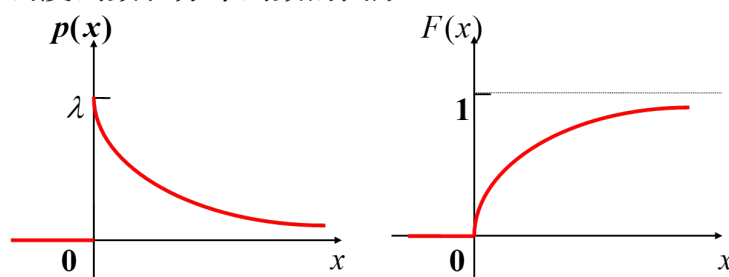


图 3: 指数分布

$$E\xi = \frac{1}{\lambda} \quad D\xi = \frac{1}{\lambda^2}$$

★ 模型: Poisson 分布与指数分布的关系 (电话, 飞机)
无记忆性

- 正态分布 $\xi \sim N(\mu, \sigma)$ ★ 3μ 原则

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\star E(|X|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$f_X(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}} \sim \chi^2(1)$$

多元随机变量及其分布

二元正态分布: $\sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$

1. 联合正态 \implies 边际正态
2. 相同的边际正态, 联合不一定正态
3. 相同的边际正态, 联合即使是正态, 也可能不一样

联合分布是均匀分布, 但边缘分布都不是均匀分布。

二项分布具有可加性: $\zeta = \xi + \eta \sim B(n_1 + n_2, p)$

泊松分布具有可加性: $\zeta = \xi + \eta \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$

正态分布具有可加性: $\zeta = \xi + \eta \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

★ 卷积公式: $p_\zeta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)p_\eta(y)|_{y=(z-x)}dx$

一般的如果 $Y = a\xi + b\eta$ 则

$$p_\zeta(z) = \frac{1}{|b|} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi\eta}(x, y)|_{y=\frac{z-ax}{b}} dx$$

商分布定理 ($Z = \frac{Y}{X}$ 、 $Z = XY$):

$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x, xz) dx$$

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f(x, \frac{z}{x}) dx$$

极值分布定理:

$$F_{max}(z) = [F(z)]^n$$

$$F_{min}(z) = 1 - [1 - F(z)]^n$$

★ Γ 函数:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \alpha > 0$$

1. $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$
2. $\Gamma(n + 1) = n!$
3. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

随机变量的数字特征

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x) dx$$

$$P\{|X - \mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

$$P\{|X - \mu| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

$$\text{Cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - (E\xi) \cdot (E\eta)$$

ξ 与 η 独立是 ξ 与 η 不相关的充分不必要条件

- 若独立则:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$$

- 非不独立则:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

★ 下车问题: 20 位旅客, 十个车站可以下车, 设

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{在第 } i \text{ 站没人下车} \\ 1, & \text{在第 } i \text{ 站有人下车} \end{cases}$$

所以 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$

$$E(X_i) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20}$$

$$E(X) = 10\left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20}\right] = 8.784$$

数理统计

基本概念

- 卡方分布 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$
$$E(X) = n \qquad D(X) = 2n$$

- t 分布 $t \sim t(n)$

$$t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

- F 分布 $F \sim F(n_1, n_2)$

$$F = \frac{U/n_1}{V/n_2}$$

定理：

- $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$
- $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2)$
- \bar{X} 与 S^2 相互独立
- $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

区间估计评选标准：

- 无偏性

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

- 有效性

$$D(\hat{\theta}_1) \leq D(\hat{\theta}_2)$$

- 相和性

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon = 1\}$$

枢轴量分布：

- σ^2 已知

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \qquad \text{置信区间: } (\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2})$$

- σ^2 未知

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \qquad \text{置信区间: } (\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1))$$

假设检验中的两类错误		
真实情况 (未知)	所作决策	
	接受 H_0	拒绝 H_0
H_0 为真	正确	犯第 I 类错误
H_0 不真	犯第 II 类错误	正确