CH6、NP-Complete

NP 完全

考題重點(目錄)：

1. 基本概念
2. Reduce 概念
3. P, NP, NP-hard, NP-Complete
4. 證明過程
5. 近似演算法

基本概念

一、目的：將問題依難度做分類

1. 如何定義”A 比 B 難”
2. 要分幾類？
3. 如何做出分類的動作？

二、Decision Problem

答案為 yes/no 的問題

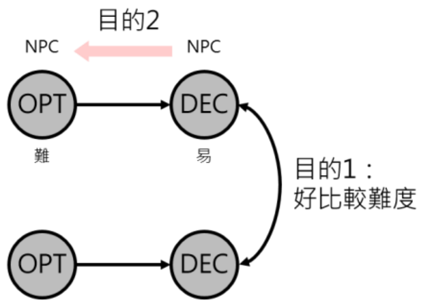
例：”一個 Graph 中有無 Hamiltanian Cycle”為 Decision Problem

三、每一個 Optimization Problem 均可用『參數化』的方式，化成一對應的 Decision Problem

例：

KP-OPT：給定一背包負重 W 及 n 個 item，問最大 Profit 為何？

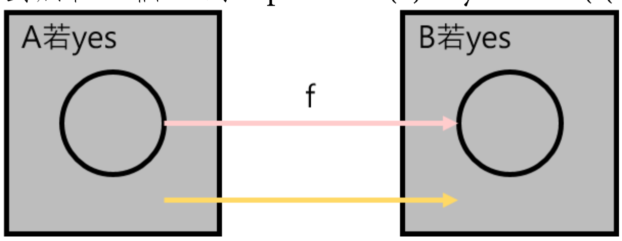
KP-DEC：給定一背包負重 W，n 個 item 及一個整數 k，問：Profit 是否可大於 k？



Reduce 概念

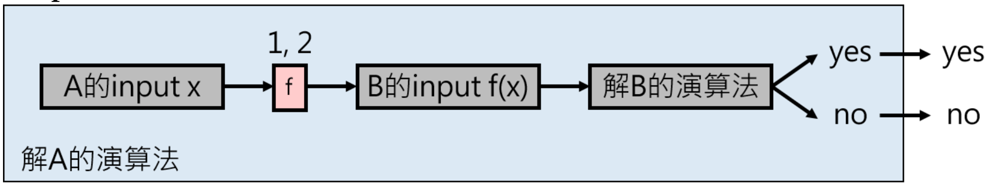
一、Def：設 A, B 是 2 個問題，A 可以 Polynomial-Time Reduce 到 B，則滿足：

1. 存在一個函數 f：A 的 input → B 的 input (transformation)
2. f 為 Polynomial-Time Computable
3. 對於任一個 A 的 input x，A(x) =”yes” ⇔ B(f(x)) =”yes”



Note：A 可以 Polynomial-Time Reduce 到 B，記作：A $\leq_p$ B

二、A ≤p B 代表可用解 B 的演算法，去實作出解 A 的演算法



三、A $\leq_p$ B 代表：A 的難度 ≤ B 的難度(B 至少比 A 難)[Q1 的答案]

排 a, b, c ,d 是一種排 1, 2, 3, 4 的問題

P, NP, NP-hard, NP-Complete[Q2 **的答案**]

一、Def：以下 4 者皆為 a set of problems

1. P：在其中的 Problem 皆有 Deterministic Algorithm 可在 Polynomial-Time 中解之
   例：”排序 n 個數”屬於 P*(因為存在一個演算法 QSORT，可在 $\Theta(n \lg n)$ 中解之)*

2. NP*(easy to verify)*：
   (1) *(書寫用)*在其中的 Problem 皆有 Non-deterministic Algorithm 可在 Polynomial-Time 中解之*(注意：NP 不等於 Not-P)*
   (2) *(理解用)*給一個可能的解，若可在 Polynomical-Time 內，判斷其是否為該問題的解，則此問題屬於 NP

小結：P 包含於 NP

3. NP-hard*(NP 難問題)*：對於所有 Q ∈ NP，Q $\leq_p$ A ⇔ A ∈ NP-hard

   比喻：
   所有正妹的集合

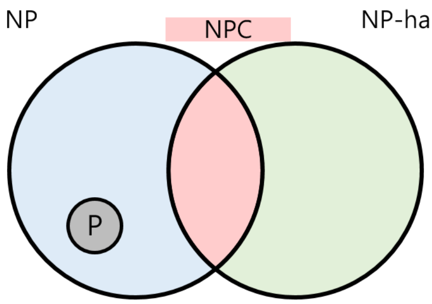
4. NP-Complete：A ∈ NP-Complete ⇔ A ∈ NP、且 A ∈ NP-hard

   比喻：
   是班上所有女生的一員，而且也是正妹

   在 NP 中的問題，均有演算法可以解，所以 NP-Complete 中的問題即：有演算法可解的問題中，最難的那些

   Note：NPC 的問題：在『Worst Case』下，沒有『Polynomial-Time』的演算法可解(至少都要 Exponential Time)

二、一般相信四者關係如下*(在 P 不等於 NP 的假設下)*：



在無任何假設下，”P=NP”尚無定論

例：True/False

1. $P \subset NP$？
2. $P \supset NP$？
3. P=NP？
4. $P \neq NP$？

True：1；False(Unknown)：2, 3, 4

三、有一個在 NPC 的問題，可在 Worst Case 下被一個 Polynomial-Time 的演算法解決 ⇔ P=NP

證明一個問題為 NPC(Q3)

一、證明方式：

欲證 A∈NPC，則：

1. 證 A∈NP
2. 任找一個 B∈NPC，證 $B \leq_p A$　　*//等價於證明：A∈NP-hard*

Note：注意方向

例(94 交大)：(True/False)已知 CLIQUE ∈ NPC，VERTEX-COVER ∈ NP，欲證 VERTEX-COVER ∈ NPC，則將 VERTEX-COVER $\leq_p$ CLIQUE 即可

False：方向錯誤

例(99 政大)：(True/False)欲證 A 為 NPC，則將一個 B 屬於 NPC reduce 到 A 即可？

False：2. $B \leq_p A$ 是對的，方向也正確，但沒有證明 1. A∈NP

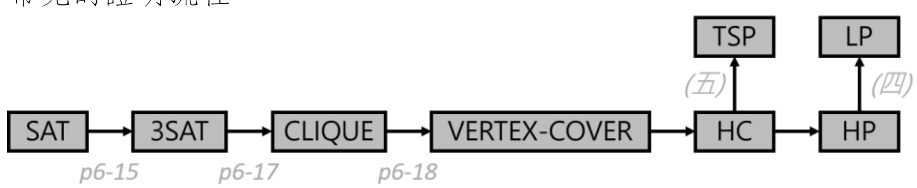
二、第一個 NP-Complete 的問題為 SAT problem

SAT Problem：給一個 CNF F，問有無一組 assignment 可使 F 為真？

例：F=(x1 v !x2 v !x3) ^ (!x1 v x3) ^ (x2 v !x3)　　*//clause 之間用 and 相連，之內用 or 相連*

有 assignment 可使 F 為真：{x1 = T, x2 = T, x3 = T}
因此，若將此 F 當做 SAT problem 的 input，則其 answer 為 True

三、常見的證明流程：



四、Longest Path Problem ∈ NPC

證明：Longest Path Problem：給定一個 Graph G=(V, E)及 k，問 G 中有沒有長度 ≥k 的 simple path？

1. Claim LP ∈ NP

   給定一個 LP：1.input: (G, k)及任一條 simple path P，則可在 Polynomial-Time 中，判斷 P 是否為 G 中長度≥ k 的 simple path

   ⇨ LP ∈ NP

   $P=\langle u_1, u_2, \ldots, u_m \rangle$為給定的 path

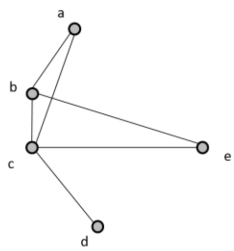
   (1) check $m \geq k+1$？若 yes 則(2)；若 no 則錯誤　　*//Θ(1)*

   (2) check (u_i, u_{i+1})屬於 E？若 yes 則正確；若 no 則錯誤　*//Θ(m)：G 用 adj matrix 表示，判斷一邊是否屬於 E ⟹ Θ(1)*

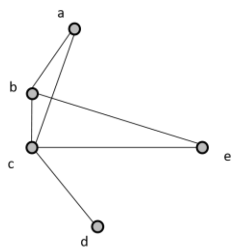
2. Claim HP $\leq_p$ LP

   (1) 給定一個 HP 的 input：G=(V, E)，定義一個函數 f: G → (G, k=|V|-1)，則(G, |V|-1)為 LP 的 input

   例：



G



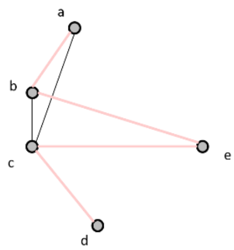
G, k=4

   (2) 顯然地，f 為 Polynomial-Time Computable

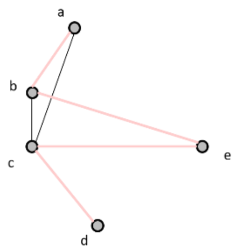
   (3) G 有 HP ⇔ G 有長度≥ |V|-1 的 simple path，G 有 HP P

   ⇨ P 必過 G 中每點恰一次，且 P 為 simple path

   ⇨ P 為 G 中長度 ≥|V|-1 的 simple path



G

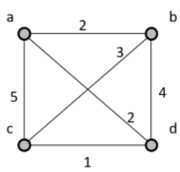


G, k=4

五、TSP 屬於 NPC：Travelling Salesman Problem

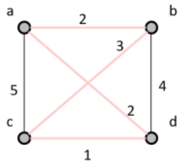
給定一個無向、有權重的完全圖 G=(V, E)及 k，問 G 中有沒有 weight 和 ≤ k 的 HC？

例：



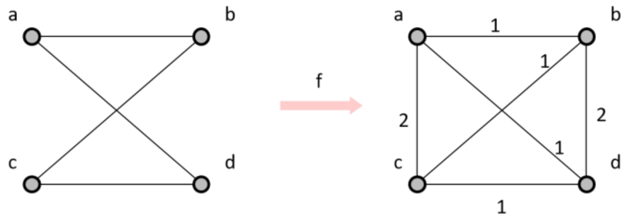
G, k=10

給定(G, 10)為 TSP 的 input，則 answer 為 yes(因為存在一個 HC：C 其 weight 和 ≤ 10)
證明：



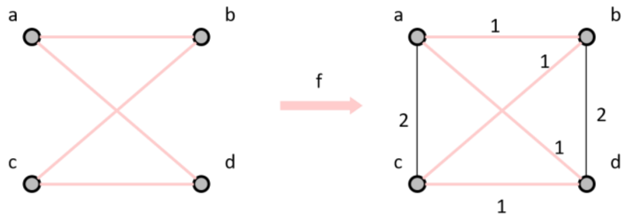
G, k=10

1. *Claim TSP 屬於 NP：給定一個無向、有權重的完全圖 G=(V, E)及 k，和一個其上的 HC：C，則可在 Polynomial-Time 中驗證 C 的 weight 和是否 ≤ k*
   ⇨ *TSP 屬於 NP*
2. *Claim* $HC \le_p TSP$
   (1) *給定一個 HC 的 input：G=(V, E)，定義一個 f: G -> (G', k=|V|)，其中 G'的定義如下：*
   G'=(V, E')，　若(u, v)屬於 E，則(u, v)屬於 E'，且 weight 為 1
   若(u, v)不屬於 E，則(u, v)屬於 E'，且 weight 為 2
   例：



G　　G, k=4

   (2) *顯然地，f 為 Polynomial-Time Computable*
   (3) *[⟹]*
   G 有 HC ⇔ G'有 weight ≤ |V|的 HC
   G 有 HC：C
   ⇨ *C 是一個 cycle 通過每點一次*
   ⇨ *C 上的每一個邊屬於 E*
   ⇨ *C 上的每一邊在 G'的 weight=1*
   ⇨ *C 在 G'中為 weight ≤ |V|的 HC*



G　　G, k=4

   [⟸]
   G'中有 weight ≤ |V|的 HC：C
   ⇨ *C 中邊的 weight 均為 1*
   ⇨ *C 中每邊屬於 E*
   ⇨ *C 為 G 的 HC*

例(100 交大)(p6-52.22)：

1. (TSP)給定一個 n×n 的 Distance matrix，n 個 city B，有無一個 tour 經每個 city 恰一次，且 Distance 和 ≤B
2. (HC 的變形)給定一個無向圖，2 個點 s, t，問可否自 s -> t 且經每點恰一次的 path？
3. (HC)給一無向圖，有無 cycle 可過每點恰一次？

1. *正確：因為 a ∈NP，且所有的 b ∈NP，$b \leq_p a$*
2. *正確*
3. *錯誤：必須連 s, t 才行*
4. *正確*
5. *正確：HP 無論 Graph 是有向或無向均為 NPC*

3. *例題*
   (1) *正確*
   (2) *正確*
   (3) *正確，問題 1 為原本最佳化 TSP 的決定性版本*
   (4) *錯誤：reduction 並無此含意*
   (5) *正確*

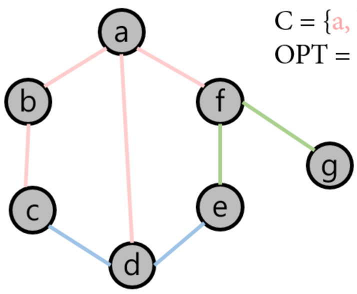
近似演算法 Approximation Algorithm

一、Approximation Ratio：設 A 是一個 Approximation Algorithm，OPT 是可解出最佳解的演算法。對於任一個 input x，$|A(x)|$*(以 x 為 input，A 產生的解的大小)* $\leq \alpha|OPT(x)|$，則稱 A 的 Approximation Ratio 為 α。*(假設處理的問題為最小化問題)*

二、Minimum Vertex Cover 的 Approximation Algorithm

程式：

```
C <- 0;        //記 Vertex Cover 的球員
E' <- E;
while(E'!=0)
{
        (u, v) <- E'之任一邊;
        C <- C 連集{u, v};
        將 E'所有含 u 及 v 的邊去除
}
return C;
```



C = {a, b, c, d, e, f}
OPT = {b, d, e}

Time Complexity：$\Theta(|E|)$，*因為在 while 中，每次至少會去掉 1 個邊，又在 E'=Φ 時，跳出 while，所以 $\Theta(|E|)$*

Approximation Ratio：對於每個邊而言，至少有 1 個 Vertex 會屬於 Minimum Vertex Cover C*中，在此演算法中，每次挑一邊，並將 2 個點，均加入 C 中，因此，在 Worst Case 下，挑到的邊恰只有一個 Vertex 在 C* 中。因此，$|C| \leq 2|C^*|$

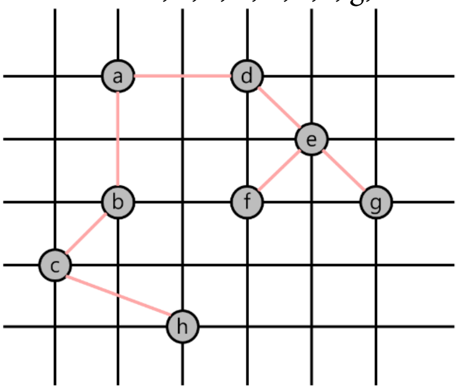
⇨ Approximation Ratio = 2

三、Euclidean TSP

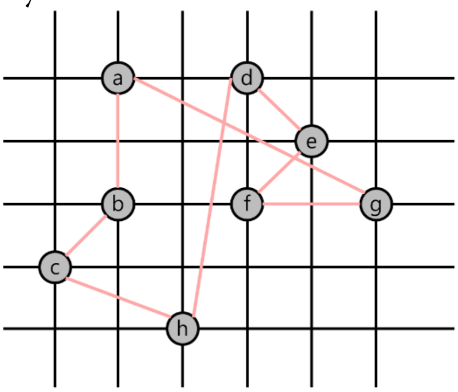
1. problem statement：給定平面上的 n 個點，求一個 cycle 經過每個點恰一次、且 Euclidean Distance 和最小
2. 演算法：
   (1) 選一個點 v 當做 root
   (2) 以 v 為起點，用 Prim's Algorithm 算出 n 個點的 MST
   (3) 令 L 是 MST 上做 Preorder Traversal 的順序
   (4) 依 L 的順序將點相連，則可得到欲求的 Cycle C

   例(p6-30.4.4)：

   Preorder：a, b, c, h, d, e, f, g,



   Cycle：

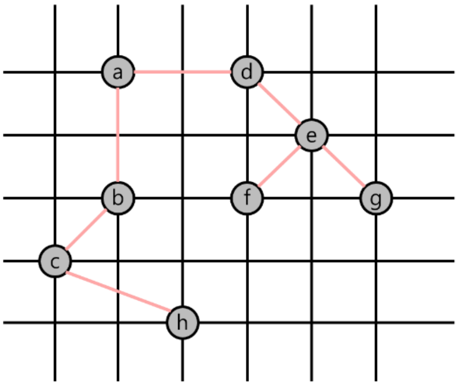


3. Time Complexity：$\Theta(n^2)$
    1. $\Theta(1)$
    2. $\Theta(n^2)$, n 為點數
    3. $\Theta(n)$
    4. Logical 上的步驟，依 3.結果 Output 即可

    ⇨ $\Theta(n^2)$

4. Approximation Ratio：設有最小 Distance 和的 cycle 為 C*，令 T 為步驟所求出的 MST。將 C*去掉任一邊 => 形成一個 Spanning Tree T’
因為 T 是 MST，所以 cost(T) ≤ cost(T’) ≤ cost(C*)…(1)

    設 w 為找 preorder 時的 full walk(以上例：w=a, b, c, h, c, b, a, d, e, f, e, g, e, d)，又 MST 的邊被 full walk 走過 2 次，因此：cost(w)=2cost(T)…(2)



    又因為 Euclidean Distance 符合三角不等式*(即 dist(a, b) ≤ dist(a, c)+dist(c, a))*，且用演算法求出的 cycle C，可由將 full walk 去掉若干點得到*(以上例：w=a, b, c, h, c, b, a, d, e, f, e, g, e, d, a 、C=a, b, c, h, x, x, x, d, e, f, x, g, x, x, a)*，因此：cost(C) ≤ cost(w)…(3)

    By (2)與(3) => cost(C) ≤ 2cost(T)…(4)
    By (1)與(4) => cost(C) ≤ 2cost(C*)

    ⇨ Approximation Ratio=2