CH10、偏序集與全序集

偏序集與全序集

目錄：

10.1 偏序及全序集

定義：

$S \neq \Phi$, $R \subseteq S \times S$

若 R 具 Reflexive, Antisymmetric, Transitive，稱 R 為 Partial Ordering Relation 偏序集

且稱(S, R) = Partial Order Set(POS 或 POSET)

若再加上$\forall\ a \neq b \in S$, aRb 與 bRa 恰有一成立，稱 R 為 Total Ordering Relation 且(S, R)為 Total Ordering Set(TOS)，其中(S, R)記作$(S, \preccurlyeq)$

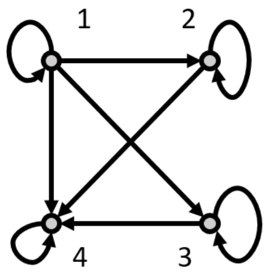
例：

1. $(\mathbb{Z}^+, \preccurlyeq)$：POS、TOS
2. $(\mathbb{Z}^+, |)$：POS、非 TOS，$\because 2 \nmid 5$、$5 \nmid 2$
3. $(P(x), \subseteq)$：POS、非 TOS，$\because \{(1, 2)\}$、$\{(1, 3)\} \subseteq \{(1, 2, 3)\}$；但$\{(1, 2)\}$、$\{(1, 3)\}$互相不包含

*表示法：漢斯圖 Hasse Diagram

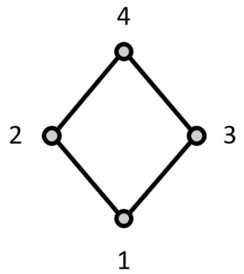
S = {1, 2, 3, 4}

R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (1, 3) , (1, 4), (2, 4), (3, 4)}



簡化：

1. 必有自己到自己，故砍掉 Loop
2. 只留走一步可到達的
3. 畫成樹，最小的起點放最下方

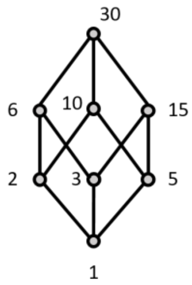


Note：

1. TOS 之漢斯圖必為一直鏈
2. |S|=n，S 上之 Total Ordering Relation 個數為 n!(n!種漢斯圖)

例：

$S=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, $(S, |)$



其中 Chain 長度為 4：

定義：

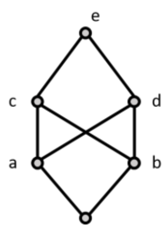
$(S, \preccurlyeq)$：POS, $A \subseteq S$

1. 若$\forall\, a \neq b \in A$, $a \leq b$ 與 $b \leq a$ 恰一者成立，稱 A 為 Chain，且$|A|$=Length 長度(與圖論不同)
2. 若$\forall\, a \neq b \in A$, $a \leq b$ 與 $b \leq a$ 皆不成立，稱 A：Antichain

定理：

$(S, \preccurlyeq)$：POS

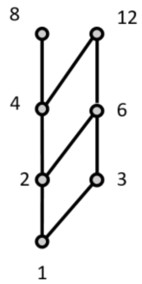
1. $a \leq u$ 且 $b \leq u$，稱 u 為 ab 之 Upper Bound
2. 若 u 為 a, b 之 Upper Bound 且對 a, b 之任意 Upper Bound u'皆滿足：$u \leq u'$，稱 u 為 a, b 之 Least Upper Bound，記作 lub(a, b)

   c, d, e 為 a, b 之 Upper Bound，但 lub(a, b)不存在
3. 同理可定義 a, b 之 Lower Bound 及 Greastest Lower Bound，記作 glb(a, b)
4. $\neg\exists\, a \in S \ni a > M$，稱 M：Maximal
5. $\neg\exists\, a \in S \ni a < m$，稱 m：Minimal
6. $I \in S \ni I \geq a, \forall\, a \in S$，稱 I 為 Greatest(比所有的都大)
7. $o \in S \ni o \leq a, \forall\, a \in S$，稱 o 為 Least(比所有的都小)

例：

S={1, 2, 3, 4, 6, 8, 12}



Max = 8, 12

Greastest = 不存在

Minimal = 1

Least = 1

lub(3, 4) = 12、glb(3, 4)=1

lub(2, 6) = 6

glb(2, 6) = 2

lub(6, 8) = 不存在

10.2 絡

定義：

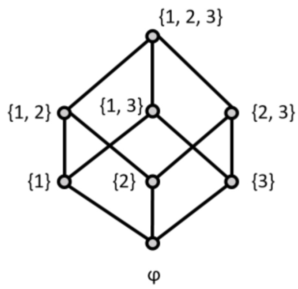
$(S, \preccurlyeq)$：POS，若$\forall$ a, b $\in$ S

1. a, b 之 lub 存在，記作 $a \vee b$，稱為 joint
2. a, b 之 glb 存在，記作 $a \wedge b$，稱為 meet

稱 S 為 Lattice 絡，記作$(S, \vee, \wedge)$

Note：

1. $(\mathbb{Z}^+, \leq)$：
   $a \vee b = \max(a, b)$
   $a \wedge b = \min(a, b)$
   $\Longrightarrow (\mathbb{Z}^+, \vee, \wedge)$為一 Lattice
2. $(\mathbb{Z}^+, |)$：
   $a \vee b = \mathrm{lcm}(a, b)$
   $a \wedge b = \gcd(a, b)$
   $\Longrightarrow (\mathbb{Z}^+, \vee, \wedge)$為一 Lattice
3. $(P(x), \subseteq)$：
   $A \vee B = A \cup B$
   $A \wedge B = A \cap B$
   $\Longrightarrow (P(x), \cup, \cap)$為一 Lattice



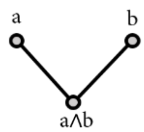
x={1, 2, 3}

$(P(x), \cup, \cap)$：POS，且為一 Lattice

特性：

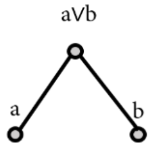
$(S, \vee, \wedge)$：Lattice：a, b, c $\in$ S

1. 交換性：$a \vee b = b \vee a$
2. 結合性：$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
3. 等效性：$a \vee a = a$
4. 吸收性：$a \vee (a \wedge b) = a$



5. 一致性：$a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b$

6. 對偶性(Dual)：$\le \leftrightarrow \ge$、$\vee \leftrightarrow \wedge$，以上性質替換後仍成立，即具 Dual
    (1) 交換性：$a \wedge b = b \wedge a$
    (2) 結合性：$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
    (3) 等效性：$a \wedge a = a$
    (4) 吸收性：$a \wedge (a \vee b) = a \wedge b$



    (5) 一致性：$a \ge b \Leftrightarrow a \wedge b = b$

定義：
$(S, \vee, \wedge)$：Lattice，具 Greastest 和 Least
稱 S 為 Bounded Latice 有界絡

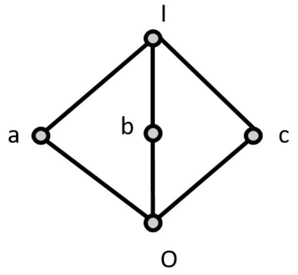
定義：
$(S, \vee, \wedge)$：Lattice，若$\forall\, a, b, c \in S$，滿足：
$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$與 $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
稱 S 為 Distributive Latice

定義：
$(S, \vee, \wedge, I, o)$ = Bounded Lattice
1. $a \in S$，若$\exists\, b \in S \ni$：$a \vee b = I$ 與 $a \wedge b = o$，稱 b 為 a 之 Complement
2. 若$\forall\, a \in S$, a 之 Complement 皆存在，則 S 為 Complement Lattice 互補絡

10.3 **布林代數**

定義：

(S, ∨, ∧)為 Bounded, Distributed, Complement 之 Lattice，稱 S 為 Boolean Lattice 或 Boolean Algebra



定理：

(B, ∨, ∧, I, o) = Boolean Algebra(布林代數)

則∀ a ∈ B, a 之 Complement 唯一，記作 ~~a~~

BA 記作(B, ∨, ∧, I, o, -)

證明：

設 b 及 c 皆為 a 之 Complement，則：

a∨b = I、a∧b = o 且 a∨c = I、a∧c = o

b = b∨o = b∨(a∧c) = I∧(b∨c) = b∨c ⟹ c≤b

c = c∨o = c∨(a∧b) = I∧(c∨b) = c∨b ⟹ b≤c

⟹ b=c

例：

(B, +, ‧, 1, 0, -)：Boolean Algebra, a ∈ B，證¬(¬a) = a

證：

a + ¬a = 1 且 a‧¬a = 0，∵a 為¬a 之 Complement，且∵唯一性(要證)，∴¬(¬a) = a

Dual Priciple：

(B, ∨, ∧, I, o, -)：Boolean Algebra 中

一個恆為 True 的 Statements，將：

≤ ↔ ≥

∨ ↔ ∧

I ↔ o

\- ↔ -

得到 S 之 Dual Statement S^d 亦為 True

定理：De-Morgan's Law

1. $\overline{a\vee b} = \overline{a}\wedge\overline{b}$
2. $\overline{a\wedge b} = \overline{a}\vee\overline{b}$

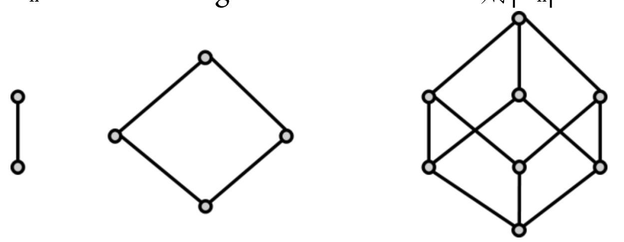
證明：

∵BA 有 Dual，∴證一即可

1. $(a\vee b)\vee(\overline{a}\vee\overline{b}) = (a\vee b\vee\overline{a})\wedge(a\vee b\vee\overline{b}) = (I\vee b)\wedge(I\vee a) = I\vee I = I$
2. $(\overline{a}\wedge\overline{b})\vee(a\wedge b) = (\overline{a}\wedge\overline{b}\wedge a)\vee(\overline{a}\wedge\overline{b}\wedge b) = (o\wedge b)\vee(o\wedge a) = o\vee o = o$，得證

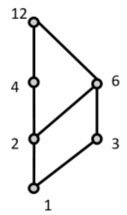
Note：

1. B_n：Boolean Algebra with n atom，則 $|B_n| = 2^n$ *(用 bool 去想：_ _ _有 2^3 種可能)*

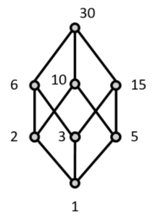


2. $m \in \mathbb{Z}^+$, D_m = {a | a 為 m 之正因數}

   D_{12} = {1, 2, 3, 4, 6, 12}



   D_{30} = {1, 2, 3, 5, 6, 15, 30}



   (1) (D_m, |)：POS

   (2) (D_m, lcm, gcd, m, |)：Bounded, Distributed Lattice，但不具 Complement

   12 = 23×3 = 2×2×3

   3 的 Complement 為 4 → lcm(3, 4)=12、gcd(3, 4)=1，但 2 的 Complement 為何？

   而 $30 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1$ 即具 Complement

   (3) 若 m 之質因數分解為 $m=p_1^{\,1} \times p_2^{\,1} \times \ldots \times p_k^{\,1}$，則 D_m 為 Boolean Algebra(Bounded：(I, o), Distributed：(∨, ∧), Complement：(-) Lattice)

   (4) D_{24} = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}

   $24 = 2^3\times 3$ → 2 之 Complement 不存在，故不為 Boolean Algebra

∑ / DNF / PoS(Product of Sum)

π / CNF / SoP(Sum of Product)

10.6 命題邏輯

定義：一個 Statement 之結果不是 True，就是 False，即稱為命題 Proposition

1. 1+2=3
2. 2+3=7
3. x+y=z
4. What time is it?
5. 學生要念書
6. 黑板是黑的

True：1, 2；False：3, 4, 5；無法判斷：6

例(97 清大)：

1. $1+1=2 \rightarrow 2+2=5$
2. $1+1=2 \rightarrow 2+2=4$
3. $1+1=3 \rightarrow 2+2=5$
4. $1+1=3 \rightarrow 2+2=4$
5. $1+1=3 \rightarrow$ Pigs can fly.
6. $1+1=2 \rightarrow$ Pigs can fly.

True：2, 3, 4, 5；False：1, 6

例(98 中山)：Prove：$\neg((a \vee b)\wedge(\neg b))\vee a$ is true？

a	b	$a \vee b$	$\neg b$	$(a \vee b)\wedge(\neg b)$	$\neg((a \vee b)\wedge(\neg b))$	$\neg((a \vee b)\wedge(\neg b))\vee a$
0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1

例(99 政大)：證$(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r)$與$(p\vee q)\rightarrow r$ 為 Logically Equivalent？

$(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r) \equiv (\cancel{p}\vee r)\wedge(\cancel{q}\vee r) \equiv (\cancel{p}\wedge\cancel{q})\vee r \equiv (\cancel{p\vee q})\vee r \equiv (p\vee q)\rightarrow r$

例(成大)：$q=1$ 且$[q\rightarrow[(p\vee r)\wedge s] \wedge [s\rightarrow(r\wedge q)]]$，求 p, r, s=?

1. $q\rightarrow[(\cancel{p}\vee r)\wedge\cancel{s}] = 1$
2. $\cancel{s}\rightarrow(\cancel{r}\wedge q) = 1$
3. $(\cancel{p}\vee r)\wedge\cancel{s} = 1$
4. $\cancel{s}=1 \Longrightarrow s = 0$
5. $\cancel{r}\wedge q = 1$
6. $\cancel{r}=1,\ r = 0$
7. $(\cancel{p}\vee r) = 1$
8. $\cancel{p}=1 \Longrightarrow p = 0$

例(92 清大)：Lai 教授

A：B always lies

B：A always tells the truth

A：1 → A=0 →←

A：0 → A=1 →←

例(97 元智)：Knight：說實話；Knave：說謊話

1. A：at least one of us is knave；B：…
2. A：We are both knave；B：…
3. A、B：I am a knight

1. *A=1；B=0*
2. *A=0；B=1*
3. *No Conclusion*

例(98 台大)：if p then q, else r，寫成數學式

$(p\land q)\lor(\cancel{p}\land r)$

Functional Complete：¬∨∧；其他：→ ↔…
¬加上(∨∧)二選一

例(5 個)(99 成大)：證：{Nor}, {Nand} is complete？

$p \text{ Nor } q \equiv p\downarrow q \equiv \cancel{p}\lor\cancel{q} \equiv \cancel{p\land q}$

1. $\cancel{p} \equiv \cancel{p}\land\cancel{p} \equiv p\downarrow p$
2. $p\land q \equiv \neg(\cancel{p\land q}) \equiv \cancel{p}\downarrow\cancel{q} \equiv (p\downarrow p)\downarrow(q\downarrow q)$
3. $p\lor q \equiv \neg(\cancel{p\lor q}) \equiv \cancel{(p\downarrow q)} \equiv (p\downarrow q)\downarrow(p\downarrow q)$

例(99 北大)：下列推導是否成立？

$p\rightarrow(q\lor r)$
$r\rightarrow(s\lor t)$
$s\rightarrow t$
$q\rightarrow\cancel{p}$
$\therefore p\rightarrow t$

1.	p	已知
2.	$p\rightarrow(q\lor r)$	已知
3.	$q\lor r$	1, 2
4.	$q\rightarrow\cancel{p}$	已知
5.	$p\rightarrow\cancel{q}$	4
6.	$\cancel{q}$	1, 5
7.	r	3, 6
8.	$r\rightarrow(s\lor t)$	已知
9.	$s\lor t$	7, 8
10.	$s\rightarrow t$	已知
11.	$\cancel{s}\rightarrow t$	10
12.	t	9, 11

10.7 一階邏輯

E：7 歲

F：8 歲

G：9 歲

…

P(x)：x 歲，Propositional Function 或 Predicat

定義：

P(x)：Propositional Function

1. D：Domain
2. 兩個量詞：$\forall$ P(x)、$\exists$ P(x)

例(99 台大)：D $\in \mathbb{N}$

P(m, n)表示"m $\leq$ n"，True/False

1. $\exists$ n P(n, 0)
2. $\forall$ n P(0, n)
3. $\exists$ n $\forall$ m P(m, n)
4. $\forall$ m $\exists$ n P(m, n)

True：1, 2, 3；False：4

Note(97 交大)：

$\exists y \forall x\, P(x, y) \rightarrow \forall x \exists y\, P(x, y)$ *//但反之錯誤、不成立*

定理：

前者相同 x，後者不同 x

1. $\forall x\, [p(x) \land q(x)] \leftrightarrow \forall x\, p(x) \land \forall x\, q(x)$
2. $\forall x\, [p(x) \lor q(x)] \rightarrow \forall x\, p(x) \land \lor x\, q(x)$
3. $\exists x\, [p(x) \land q(x)] \rightarrow \exists x\, p(x) \land \exists x\, q(x)$
4. $\exists x\, [p(x) \lor q(x)] \leftrightarrow \exists x\, p(x) \lor \exists x\, q(x)$

定理：(Generalized De-Morgan's Law)

1. $\neg(\forall x\, P(x)) = \exists x\, \neg P(x)$
2. $\neg(\exists x\, P(x)) = \forall x\, \neg P(x)$

例：$\neg\forall x \exists y \exists z\, P(x, y, z) \equiv \exists x \forall y \forall z\, P(x, y, z)$

例(98 中原)：

展至沒有"¬"為止：$\neg[\forall x\, [x>0 \rightarrow \exists y\, (y>0 \land x\geq y)]]$

$\equiv \exists x\, \neg[x>0 \rightarrow \exists y\, (y>0 \land x\geq y)]$

$\equiv \exists x\, [x>0 \land \neg \exists y\, (y>0 \land x\geq y)]$

$\equiv \exists x\, [x>0 \land \forall y\, (y\leq 0 \lor x<y)]$

例(98 長庚)：

S(x)：x 為班上學生

C(x)：x 修過 Computer Science

M(x)：x 去過墨西哥

1. 班上所有的學生皆修過 C
   (1) $\forall x\, S(x) \rightarrow C(x)$
   (2) $\forall x\, S(x) \wedge C(x)$
2. 班上有人去過墨西哥
   (1) $\exists x\, S(x) \rightarrow M(x)$
   (2) $\exists x\, S(x) \wedge M(x)$

1. 1

2. 2

例(95 清大)：L(x, y)：x loves y

1. There is exactly one person who everybody loves
2. There is someone who loves no one besides him self or herself

1. $\exists x\, [\forall y\, L(y, x) \wedge \quad \forall z\, \forall w\, L(w, z) \rightarrow x=z]$

2. $\exists x\, L(x, x) \wedge \exists x\, L(x, y) \rightarrow x=y$ *或者* $\exists x\, \forall y\, L(x, y) \leftrightarrow x=y$