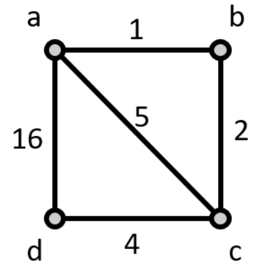
CH8、演算法分析

演算法分析

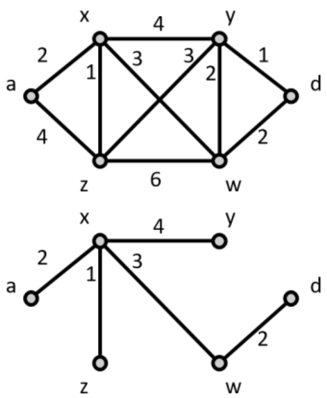
目錄：

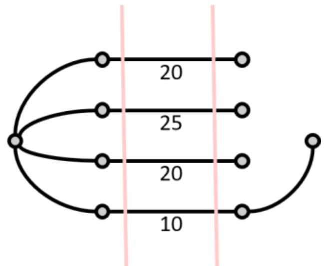
8.1 Dijstra's Algorithm



Input：G=(V, E, w)、a=source
Output：a 到各點之 Shortest Path

例(98 台大)：





Note：
1. Dijstra's Spanning Tree 未必為 Minimum Cost Spanning Tree
2. 為 one-to-all 演算法
3. 它何時不 Work？邊的 Weight 允許為負數時不 Work

8.3 Warshall's Algorithm

例(97 交大)：

A={a, b, c, d, e}，R∈A×A

R={(a, b), (a, d), (b, a), (b, c), (c, e), (d, e), (e, c),}，求 t(R)？

W_0：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

W_1：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

W_2：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

W_3：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

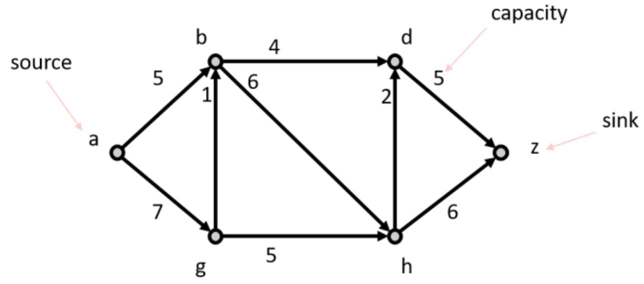
W_4：

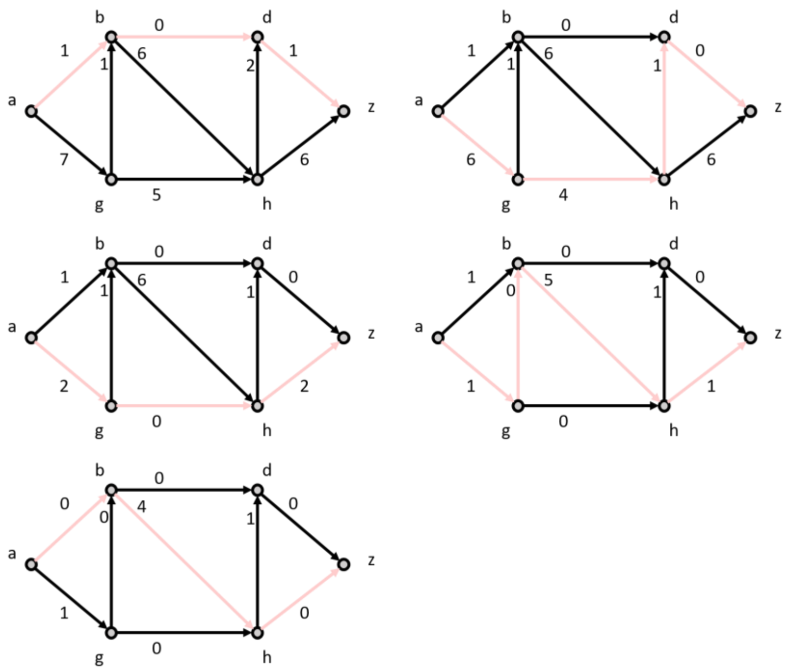
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

W_5：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8.4 傳輸網路





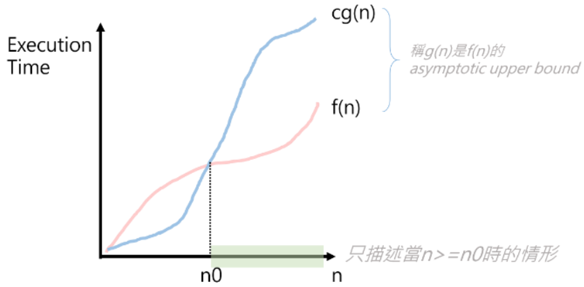
4+1+4+1+1 = 11

Cut Capacity=$c(P\overline{P})$

定理： N=(V, E)：Transport Network，N 之 Max Flow 等於 N 之 Minimal Cut 之 Capacity

8.6 計算複雜度

1. $f(n) = O(g(n))$：$f(n)$的 Order $\leq g(n)$的 Order
   存在 $c, n_0 > 0$，使得當 $n \geq n_0$*(當 Input size 夠大時)*時，$f(n) \leq cg(n)$



2. $f(n)=\Omega(g(n))$：$f(n)$的 order $\geq g(n)$的 order、或稱：$g(n)$為 $f(n)$的 Asymptotic Lower Bound
   存在 $c, n_0 > 0$，使得當 $n \geq n_0$*(當 input size 夠大時)*時，$f(n) \geq cg(n)$
3. $f(n)=\Theta(g(n))$：$f(n)$的 Order $= g(n)$的 Order、或稱 $g(n)$為 $f(n)$的 Asymptotic Tight Bound
   存在 $c_1, c_2, n_0 > 0$，使得當 $n \geq n_0$*(當 Input size 夠大時)*時，$c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$*(前一不等式表 Ω、後一不等式表 O)*

Note：
1. $f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n))$
2. $f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n)) \cap f(n) = O(g(n))$

例(99 中原)：
1. 證：$n^2+2n+5 = O(n^3)$
2. 證：$n^3 \neq O(n^2+2n+5)$

1. $n^2+2n+5 \leq n^2+2n^2+5n^2 = 8n^2 \leq 8n^3$，$\forall n \geq 1$
   $\because n^2+2n+5 = O(n^3)$

2. 若 $n^3 = O(n^2+2n+5)$，則 $\exists n_0 \in \mathbb{Z}^+, \exists c \in \mathbb{R}^+ \ni n^3 \leq c(n^2+2n+5), \forall n \geq n^0$
   $\Longrightarrow n^3/(n^2+2n+5) \leq c, \lim n^3/(n^2+2n+5) = \infty$, $\therefore$ 當 n 夠大時，$n^3/(n^2+2n+5) > c \rightarrow\leftarrow$

> 定理：
> $f(n) = a_k n^k + a_{n-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0 \Longrightarrow f(n) = \Theta(n^k)$

> 定理(5 個)：
> $\log(n!) = \Theta(n \log n)$
>
> 證明：
> 1. $\log(n!) = \log n + \log(n-1) + \ldots + \log 1$
> $\leq \log n + \ldots + \log n = n \log n, \forall n \geq 1$
> $\Longrightarrow \log(n!) = O(n \log n)$
> 2. $\log(n!) = \log n + \ldots + \log[n/2] + \ldots + \log 1$
> $\geq \log n/2 + \ldots + \log n/2 + 0 + 0 + \ldots \geq \quad n/2 \log n/2 = n/2 (\log n - 1)$
> $= 1/2 (1/2 \log n + 1/2 \log n - 1) \geq n/2(1/2 \log n) = 1/4\, n \log n, \forall n \geq 4$

例(99 中原)：

1. $\log(4n^3+n!) + \sin(n^2) + 10n$
2. $(n \log (n+1))^2 + (\log n +1)(n^2+1)$

1. $O(n!)$
2. $O(n^2 \log^2 n)$

Note：

$\lim f(n)/g(n) = 0 \implies f(n) = O(g(n))$ or $o(g(n))$

$-1 \implies f(n) = \Omega(g(n))$ or $\omega(g(n))$

$l \neq 0 \implies f(n) = \Theta(g(n))$

例(99 元智)：$f(n) = (4-2n^4+3n)/(3n^3-2n)$

$O(n)$

$2^n \rightarrow n \log 2$(大)

$n^2 \rightarrow 2 \log n$(小)

若是 log 法失敗，則代表原式應該可以以簡易的方式判斷 ex：n^2、n^3

例：比大小：$f(n) = \sqrt{}(n)$, $g(n) = (\log n)^2$

取 log：$1/2 \log n > 2 \log \log n$，故 $g(n) = O(f(n))$

Note：

$\log_a n = (\log_b n)/(\log_b a)$

例(98 台大)：下列何者成長最快？

1. $\Theta(\ln(n^{n\ln n}))$
2. $\Theta(n \ln(n!))$
3. $\Theta(n \log n)$
4. $\Theta(\log(n!))$
5. $\Theta(n \ln n^2)$

2：$\Theta(n^2 \log n)$

例：$H_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n$，Harmonic Number 調和級數，證：$H_n = \Theta(\log n)$

1. *證：$H_n = O(\log n)$ ⇔ 證：存在 $c, n_0>0$，使得當 $n \geq n_0$ 時，$H_n \leq c \lg n$*
   $H_n - 1 = 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n \leq \int 1/x\,dx = \ln x|(n\ 1) = \ln n - \ln 1 = \ln n$
   $\Rightarrow H_n \leq (\ln n)+1 \leq 2(\ln n)$ (當 $c=2, n \geq 3$ 成立) $\Rightarrow H_n = O(\log n)$
2. *證：$H_n = \Omega(\log n)$ ⇔ 證：存在 $c, n_0>0$，使得當 $n \geq n_0$ 時，$H_n \geq c \lg n$*
   $H_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n \geq \int 1/x|(n\ 1) = \ln n \Rightarrow H_n = \Omega(\ln n)$