CH1、Time Complexity

時間複雜度

考題重點(目錄)

Asymptotic Notation

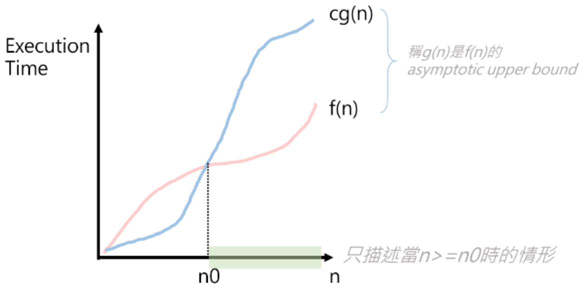
一、目的

當 Input size 變大時，執行時間以何種趨勢成長

二、Asymptotic Notation

1. $f(n) = O(g(n))$：f(n)的 Order $\le$ g(n)的 Order

   存在 $c, n_0 > 0$，使得當 $n \ge n_0$*(當 Input size 夠大時)*時，$f(n) \le cg(n)$



2. $f(n)=\Omega(g(n))$：f(n)的 order $\ge$ g(n)的 order、或稱：g(n)為 f(n)的 Asymptotic Lower Bound

   存在 $c, n_0 > 0$，使得當 $n \ge n_0$*(當 input size 夠大時)*時，$f(n) \ge cg(n)$

3. $f(n)=\Theta(g(n))$：f(n)的 Order = g(n)的 Order、或稱 g(n)為 f(n)的 Asymptotic Tight Bound

   存在 $c_1, c_2, n_0 > 0$，使得當 $n \ge n_0$*(當 Input size 夠大時)*時，$c_1g(n) \le f(n) \le c_2g(n)$*(前一不等式表 Ω、後一不等式表 O)*

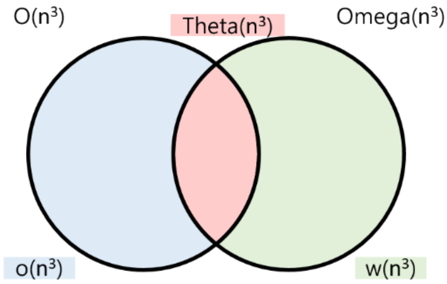
4. $f(n)=o(g(n))$：f(n)的 order < g(n)的 order
   (def：可用 lim 法)
   例(94 成大)： True/False
   1. $n=o(2n)$
   2. $n=o(n^2)$

   1. False
   2. True
   比較：$n=O(2n)$ => True；$n=O(n^2)$ => True

5. $f(n)=\omega(g(n))$：f(n)的 order > g(n)的 order
   (def：可用 lim 法)
   例 ：True/False
   1. $2n = \omega(n)$
   2. $n^2 = \omega(n)$

   1. False
   2. True

三、若固定 g(n)，則可將所有函數做以下分類：例：$g(n)=n^3$



例(99 政大)：寫出 2 個在 $O(n^3)$中，但不在 $o(n^3)$的函數

n^3 、$2n^3$

例(100 交大)：
$NCTU=\Theta(n)$
$CS=\Omega(n)$
1. NCTU 總是比 CS 快
2. 當 n≥100000..0 時，NCTU 比 CS 快
3. 兩者執行時間相同
4. 稱 CS 的時間複雜度為 $\Theta(n)$
5. 以上皆非

1. False
2. False
3. False
4. False
5. True

四、特性

1. 若 $f(n) = O(g(n))$，則 $f(n) + g(n) = O(g(n))$

(Note：函數相加後的 order，決定於大者 => 多項式函數的 order 為最高次項)

例(98 交大)：

$p(n)=\sum a_i n^i$ 是 d 次多項式，填 True/False 在以下表格：

		O	o	Ω	ω	Θ
p(n)	n^k, k>d					
p(n)	n^k, k<d					
p(n)	n^k, k=d					

p(n)的 order 為 n^d

		O	o	Ω	ω	Θ
p(n)	n^k, k>d	O	O			
p(n)	n^k, k<d			O	O	
p(n)	n^k, k=d	O		O		O

例(98 交大)：寫出最適答案：$O(n^2)+\Theta(n^2)$

此為一常見的誤用：$O(n^2) + \Theta(n^2) = \Theta(n^2)$
自 $O(n^2)$取一函數 $f(n)$；自 $\Theta(n^2)$取一函數 $g(n)$；$f(n)+g(n)$的 order 為何？
n(小) + n^2(大) = $\Theta(n^2)$

例(100 中央)：prove or disprove

2. $f(n)+g(n) = \Theta(\max\{f(n), g(n)\})$

True，用定義證：存在 $c_1=1$ $c_2=1$ $n_0=10$ 使得當 $n\geq 10$ 時，滿足以下：
$c_1 [f(n) + g(n)] \leq \Theta(\max\{f(n), g(n)\}) \leq c_2 [f(n) + g(n)]$

2. $f(n)=O(g(n))$且 $f(n)=\Omega(g(n)) \Leftrightarrow f(n)=\Theta(g(n))$ *//是一種常見求 Tight Bound 的方式*

例(95 台大)：$\sum i^5 = \Theta(n^a)$, a=?

1. *證$\sum i^5 = O(n^6)$ by 1,2*
2. *證$\sum i^5 = \Omega(n^6)$*
3. *=> $\sum i^5 = \Theta(n^6)$*

比較

一、定義法：適用時機：型簡單、分多

例(96 成大)：True/False(10%)

$n^2 + n \lg n + n/2 = O(n^8)$

True，存在 c=10 , n_0= 100, 使得當 n≥ 時，$n^2 + n \lg n + n/2 \le 10\ O(n^8)$

例(91 交大)：證明以下為錯誤

$n^2 / \log n = \Theta(n^2)$

定義法證明之想法：以下兩條件，破解其一即得證

$n^2 / \log n = O(n^2)$ 正確

$n^2 / \log n = \Omega(n^2)$ 不正確，故：

設 $n^2 / \log n = \Omega(n^2)$成立，則存在 c, n_0 >0，使得當 $n \ge n_0$ 時，$n^2 / \log n \ge cn^2$

⇨ $1/\log n \ge c$ (不可能成立，因為 n 愈大，1/log n 愈接近 0)

因不存在此 c，故等式錯誤

例(100 中央)：prove or disprove

1. $f(n)=\Theta(g(n))$，則 $h(f(n))=O(h(g(n)))$，其中 h()為遞增函數

False，

$f(n)=2n, g(n)=n \Rightarrow f(n)=O(g(n))$

$h(n)=2^n$

$h(f(n)) = 2^n \mathrel{!}= 2^{2n}=O(h(g(n)))$

二、lim 法：適用時機：型複雜，尚知如何微分，證 o, ω 時可當 def

1. lim f(n)/g(n) = 0 ⇔ f(*n)=o(g(n))
2. lim f(n)/g(n) = 無限大 ⇔ f(*n)=w(g(n))
3. lim f(n)/g(n) = L ⇔ f(*n)=Θ(g(n))

(Note：通常搭配羅必達使用)

lim f(n)/g(n) = lim f'(n)/g'(n)

例：$f(n) = \log_3 4n$，問 f(n) = 何種(g(n))？

$\lim \log_3 4n/\log_4 3n = \lim (1/\lg 3 * 1/n)/(1/\lg 4 * 1/n) = \ln 4/\ln 3 > 0$

⇨ $f(n) = \Theta(g(n))$

(Note：log n 的底只要是常數，其 order 均相同)

Ex：$\lg n, \ln n, \log n, \log_{100} n$

例(96 成大)：True/False
$n^b = o(a^n)$, 其中 a>1, b 為任意實數

True
$\lim n^b/a^n = \lim bn^{b-1}/a^n(\ln a) = \lim b(b-1)n^{b-2}/a^n(\ln a)^2 = 0$

例(98 台大電機)：True/False
對任何正數 a, b 而言：$n^b = o(a^n)$

False
反例：b=2, a=1

三、log 法：適用時機：分少的計算題(定理層次)
指數函數，n! (和 $\log(n!) = \Theta(n \lg n$ 搭配))

$\log(f(n)) = o/\omega(\log(g(n)))$，則 $f(n) = o/\omega(g(n))$
Note：若為Θ 則不能使用

例：$f(n)=1.1^{0.01n}$, $g(n)=n^{100}$

$\log(f(n)) = \log(1.1^{0.01n}) = 0.01n(\log 1.1) = cn$
$\log(g(n)) = \log(n^{100}) = 100(\log n) = c \log n$
因為 $\log(f(n)) = o(\log(g(n)))$
所以 $f(n) = o(g(n))$
⇨ f(n)的 order 較大

例(98 交大)：證(log n)!不是 Polynomial-Bounded

若 f(n)是 Polynomial-Bounded，則 $f(n) = O(n^k)$ for some k
$\log f(n) = O(\log n^k) = O(\log n)$
⇨ *若為 Polynomial-Pounded，則 order 小於 log n*
$\log((\log n)!) = \Theta(\log n \log(\log n))$
其 order 大於 log n，即 $\log((\log n)!) = \omega(\log n)$
因此不是 Polynomial-Bounded

計算複雜度

一、如何求 Tight Bound(Θ)
[法一]：求出 Closed Form，最高次項即為其 Tight Bound
例：T(n) = 1+2+…+n = n(n-1)/2 = n2/2 + n/2 = Θ(n2)

[法二]：求 Upper Bound + 求 Lower Bound，兩者一樣即為 Tight Bound
例：$T(n) = \sum i^5 = \Theta(n^a)$，求 a= ?

證 $T(n) = O(n^6)$、證 $T(n) = \Omega(n^6) \Rightarrow T(n) = \Theta(n^6)$

二、Harmonic Series：$Hn = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n = \Theta(\log n)$

1. 證：$Hn = O(\log n)$ ⇔ 證：存在 $c, n_0>0$，使得當 $n \geq n_0$ 時，$Hn \leq c \lg n$
   $Hn -1 = 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n \leq$ 積分 $1/x\, dx = \ln x|(n\ 1) = \ln n - \ln 1 = \ln n$
   $\Rightarrow Hn \leq (\ln n)+1 \leq 2(\ln n)$ (當 $c=2, n\geq 3$ 成立) $\Rightarrow Hn = O(\log n)$
2. 證：$Hn = \Omega(\log n)$ ⇔ 證：存在 $c, n_0>0$，使得當 $n \geq n_0$ 時，$Hn \geq c \lg n$
   $Hn = 1 + 1/2 + \ldots + 1/n \geq$ 積分 $1/x|(n\ 1) = \ln n \Rightarrow Hn = \Omega(\ln n)$

Note：$T(n) = 1^a + 1/2^a + 1/3^a + \ldots + 1/n^a = \Theta(1)$, if $a = 2, 3, \ldots$ //收練

三、$\log(n!) = \Theta(n \lg n)$

1. 證：$\log(n!) = O(n \lg n)$
   $\log(n!) = \log(1*2*\ldots*n) = \log 1 + \log 2 + \ldots + \log n \leq \log n + \log n + \ldots + \log n = n \log n \Rightarrow$
   $\log(n!) = O(n \lg n)$
2. 證：$\log(n!) = \Omega(n \lg n)$
   $\log(n!) = \log(1*2*\ldots*n) = \log 1 + \log 2 + \ldots + \log n \geq \log n/2 + \log (n/2+1) + \ldots + \log n \geq \log n/2 + \log n/2 + \ldots + \log n/2 = n/2 \log n/2 \Rightarrow \log(n!) = \Omega(n \lg n)$

例(96 台大)：$T(n)=\sum k^2(\log k)^3 = \Theta(n^d(\log n)^e)$，求 d, e=?

$1^2(\log 1)^3 + 2^2(\log 2)^3 + \ldots + n^2(\log n)^3 \leq n * n^2(\log n)^3 \Rightarrow \Theta (n^3(\log n)^3)$

四、$(\log_a n)^b = o(n^k)$

例：$(\log n)^{100} = o(n^{0.0001})$

例(96 輔大)：$(\log n)^3= O(n^{1/16})$

$\lim (\log n)^3/n^{1/16} = \lim (1/\ln 10)^3*(\ln n)^2*1/n \quad / \quad 1/16\, n^{-15/16} = \lim a (\ln n)2/n^{1/16}$
$= \lim a*b*\ldots / n^{1/16} = 0 \Rightarrow (\log n)^3 = o(n^{1/16}) = O(n^{1/16})$

例：問 n^{1+e} 和 $n^2/\log n$ 誰的 order 較大，其中 $0<e<1$

$n^{1+e} = n^{2-c}, 0<c<1$，因為 $\log n = o(n^c)$，因此 $n^{1+e} = o(n^2/\log n)$