線性代數200問題集

周志成*

2012.12.24

這份問題集彙整自2009年3月至2012年12月刊登於「線代啓示錄†」的200個每週問題。本題集收錄的問題來源甚廣, 有我過去教學使用的演習題, 美國麻省理工學院的考題, 台灣各大學的研究所入學試題, 以及多本參考書籍的練習題‡。這些問題大都具有解釋基本觀念或彰顯實用技巧的作用, 部分問題可能超越一般基礎線性代數水平, 但我相信演練略為艱深的問題不僅可以刺激思考活動, 鍛鍊推理解析力, 也有鞏固核心觀念的效果。

為方便查閱, 本題集按「線性方程式與矩陣代數」,「向量空間」,「線性變換」,「內積空間」,「行列式」,「特徵分析」與「二次型」編排, 但一些綜合問題不易切割, 此時便依解題過程所最需要聯繫的概念和方法歸類。由於時間倉促, 未及逐題校閱, 內容或有錯誤, 期待讀者提出批評與改進意見, 來日再版時將一併訂正。

* 作者任教於國立交通大學電機工程系

† http://ccjou.wordpress.com

‡ 見參考文獻

線性方程式與矩陣代數

Problem 1

In each part solve the matrix equation for X.

(a)

$$X\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

(b) $AXB = C$ given that

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 8 & 6 & -6 \\ 6 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solution

(a) 因爲未知矩陣 X 出現於係數矩陣的左邊, 我們可以將整個矩陣方程式轉置以便得出如 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的線性方程基本形式:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} X^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}。$$

此矩陣方程式等價於二個係數矩陣相同的線性方程式, 將方程式等號右端的兩個常數向量併入 3×3 階係數矩陣, 再以消去法將 3×5 階增廣矩陣化簡至最簡列梯形陣式 (reduced row echelon form), 如此一來只需要進行一回計算程序便可解出二方程式。消去法的化簡過程如下:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \leadsto \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \leadsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\leadsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \leadsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \leadsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}。$$

最簡列梯形矩陣的右末二行即爲 X^T 的解, 取轉置可得

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

(b) 首先判斷出 X 是 2×2 階矩陣, 直覺的做法是設 X 的4個未知元爲 x, y, z, w, 進行二次矩陣乘法運算將 $AXB = C$ 乘開, 改寫成標準形式的線性方程式後再以消去法求解。不過, 這樣做會產生9個一次方程式, 計算時很容易出錯。

另一個方法是將求解程序分解成二個步驟, 令 $Y = XB$, 由方程式 $AY = C$ 先解出 Y, 然後由方程式 $XB = Y$ 解出 X。以下說明第二個做法。爲求解 Y, 類似題 (a) 的做法, 我們可以一次解出三個方程式, 利用消去法化簡增廣矩陣 $\left[\, A \quad C \,\right]$, 得到

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & 6 & -6 \\ -2 & 3 & 6 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & 6 & -6 \\ 0 & 11 & 22 & 11 & -11 \\ 0 & -6 & -12 & -6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & 6 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

將最簡列梯形矩陣用分塊矩陣表示爲 $\begin{bmatrix} I_2 & D \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 並設 E 爲消去法所執行過所有的基本矩陣乘積, 由分塊矩陣乘法可得

$$E\left[\, A \quad C \,\right] = \left[\, EA \quad EC \,\right] = \begin{bmatrix} I_2 & D \\ 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

上式指出 $EA = \begin{bmatrix} I_2 \\ 0 \end{bmatrix}$, 因此 $EC = EAY = \begin{bmatrix} I_2 \\ 0 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix}$, 但上面的分塊乘積顯示 $EC = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}$, 這說明了分塊 D 即爲 Y, 因此

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}。$$

接下來的工作是求解方程式 $XB = Y$。將方程式轉置可得 $B^T X^T = Y^T$, 同樣以消去法化簡增廣矩陣 $[\ B^T \quad Y^T\ ]$, 過程如下:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

與前一個步驟的道理相同, 由得出的分塊可知 $X^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, 所以

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}。$$

□

Problem 2

Let

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 & -8 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Determine the LU decomposition $PA = LU$, where P is the associated permutation matrix.

Solution

我們設計一個演算流程來紀錄高斯消去法的執行過程與結果, 包括下三角形矩陣 $L = [l_{ij}]$ 所儲存的乘數 l_{ij}, $i > j$, 排列矩陣 P 的列排序, 以及上三角形矩陣 $U = [u_{ij}]$, $i \leq j$。方法是在最右側加入一行代表列排序, 初始値設爲 $(1, 2, 3, 4)$, 並於消去法產生的梯形矩陣零元位置填入取代運算所使用的乘數, 在該元底下加註一直線以利辨識。注意, 消去法的取代

和縮放運算不會計算代表列排序的最右行與儲存的乘數 (即加註底線的元), 詳細過程如下:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 4 & 8 & 12 & -8 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 1 & -4 & 4 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 12 & -8 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 1 & -4 & 4 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ \underline{4} & 0 & 24 & -24 & 1 \\ \underline{2} & -1 & 8 & -7 & 3 \\ \underline{-3} & 5 & -8 & 8 & 4 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ \underline{2} & -1 & 8 & -7 & 3 \\ \underline{4} & 0 & 24 & -24 & 1 \\ \underline{-3} & 5 & -8 & 8 & 4 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ \underline{2} & -1 & 8 & -7 & 3 \\ \underline{4} & \underline{0} & 24 & -24 & 1 \\ \underline{-3} & \underline{-5} & 32 & -27 & 4 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ \underline{2} & -1 & 8 & -7 & 3 \\ \underline{4} & \underline{0} & 24 & -24 & 1 \\ \underline{-3} & \underline{-5} & \underline{4/3} & 5 & 4 \end{array}\right]。$$

所以得到

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -5 & 4/3 & 1 \end{bmatrix}, \ U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 24 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \ P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

□

Problem 3

An $n \times n$ matrix A is called *idempotent* if $A^2 = A$.

(a) Show that if A is idempotent and invertible, then $A = I$.

(b) Describe all 2×2 real idempotent matrices.

(c) If A is idempotent, find the inverse of $I - cA$ (if possible) for some scalar c.

Solution

(a) 令 $A - A^2 = 0$ 左乘 A^{-1} 便有 $A^{-1}(A - A^2) = A^{-1}A - A^{-1}AA = I - A = 0$, 得出 $A = I$。

(b) 2×2 階矩陣的秩可能爲 2, 1, 0, 以下分別考慮這三種狀況。

若 $\text{rank}A = 2$, A 是可逆的, 由題 (a) 可知 $A = I$。

若 $\text{rank}A = 1$, A 總是可寫成 $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$, 而且 $A^2 = \mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{u}\mathbf{v}^T$, 比較兩式得知 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 要滿足 $\mathbf{v}^T\mathbf{u} = 1$, 例如, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$。

若 $\text{rank}A = 0$, 顯然 $A = 0$。

(c) 由於 $A^2 = A$, 矩陣 A 的二次多項式總能變換爲一次多項式, 可以嘗試計算

$$(I - cA)(I - dA) = I - cA - dA + cdA^2 = I + (cd - c - d)A。$$

若 $cd - c - d = 0$, 即 $d = \frac{c}{c-1}$, 解出逆矩陣

$$(I - cA)^{-1} = I - \frac{c}{c-1}A,$$

此式成立的條件爲 $c \neq 1$。 $\square$

Problem 4

Answer the following questions.

(a) Show that if A and $A + B$ are invertible, then $I + BA^{-1}$ is also invertible.

(b) If A, B, and $A + B$ are invertible, express $(A^{-1} + B^{-1})^{-1}$ in terms of A, B, and $A + B$.

(c) Suppose that a square matrix A satisfies $A^2 - 3A + I = 0$. Find the inverse of A.

(d) Suppose that $I + A$ is invertible and $B = (I + A)^{-1}(I - A)$. Show that $I + B$ is also invertible.

Solution

(a) 我們可以試探性地令矩陣 $I+BA^{-1}$ 與某些矩陣相乘, 以得出單位矩陣。依序右乘 A 及 $(A+B)^{-1}$, 那麼 $(I+BA^{-1})A(A+B)^{-1}=(A+B)(A+B)^{-1}=I$, 得到 $(I+BA^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}$。

(b) 可設法將矩陣加法 $A^{-1}+B^{-1}$ 表示成數個可逆矩陣的乘積, 再運用逆矩陣性質 $(XYZ)^{-1}=Z^{-1}Y^{-1}X^{-1}$ 來完成計算。經過初步嘗試後發現

$$A^{-1}(A+B)B^{-1}=(I+A^{-1}B)B^{-1}=B^{-1}+A^{-1}。$$

應用上述逆矩陣乘積性質得

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A。$$

(c) 將單位矩陣 I 從給出的方程式 $A^2-3A+I=0$ 移至等號的一端, 另一端可提出公因子 A, 即得

$$I=-A^2+3A=A(-A+3I),$$

所以 $A^{-1}=3I-A$。

(d) 首先要知道關鍵在於去除等式 $B=(I+A)^{-1}(I-A)$ 裡面的 $(I+A)^{-1}$, 可直接於上式左端通乘 $I+A$, 就得到 $(I+A)B=I-A$, 整理爲 $AB+A+B=I$, 接著進行因式分解以分離出 $I+B$, 於是有 $(I+A)(I+B)=2I$, 由此解出

$$(I+B)^{-1}=\frac{1}{2}(I+A)。$$

□

Problem 5

Let $\mathbf{x}$ be a vector in $\mathbb{R}^3$ satisfying $\mathbf{x}^T\mathbf{x}=1$.

(a) Find a vector $\mathbf{x}$ such that

$$(I_3-2\mathbf{x}\mathbf{x}^T)\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

(b) If possible, find a vector $\mathbf{x}$ such that

$$(I_3 - 2\mathbf{x}\mathbf{x}^T)\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Otherwise, give a reason why there is no such $\mathbf{x}$.

Solution

我們使用符號運算來考慮一般的情況, 先將問題重述如下: 已知 $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$, 求單位向量 $\mathbf{x}$ ($\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1$) 使滿足 $(I - 2\mathbf{x}\mathbf{x}^T)\mathbf{b} = \mathbf{c}$。乘開得到

$$(I - 2\mathbf{x}\mathbf{x}^T)\mathbf{b} = \mathbf{b} - 2(\mathbf{x}^T\mathbf{b})\mathbf{x} = \mathbf{c}。$$

方程式中出現了二個未知向量 $\mathbf{x}$, 表面上似乎增加求解的困難度。由於 $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 是已知的, 移項改寫爲 $2(\mathbf{x}^T\mathbf{b})\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{c}$, 可知 $\mathbf{x}$ 與 $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ 共線, 因此設 $\mathbf{x} = k(\mathbf{b} - \mathbf{c})$, 再代回上面的方程式得到

$$2k^2(\mathbf{b} - \mathbf{c})^T\mathbf{b}(\mathbf{b} - \mathbf{c}) = \mathbf{b} - \mathbf{c}。$$

又因 $\mathbf{x}$ 不爲零向量, 亦即 $\mathbf{b} \neq \mathbf{c}$, 上式等價於 $2k^2(\mathbf{b} - \mathbf{c})^T\mathbf{b} = 1$, 且若 $(\mathbf{b} - \mathbf{c})^T\mathbf{b} > 0$, 便有

$$k = \pm\frac{1}{\sqrt{2(\mathbf{b} - \mathbf{c})^T\mathbf{b}}},$$

於是解出

$$\mathbf{x} = \pm\frac{1}{\sqrt{2(\mathbf{b} - \mathbf{c})^T\mathbf{b}}}(\mathbf{b} - \mathbf{c})。$$

另外, 此題要求 $\mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1$, 因此 $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 必須滿足 $2(\mathbf{b} - \mathbf{c})^T\mathbf{b} = (\mathbf{b} - \mathbf{c})^T(\mathbf{b} - \mathbf{c})$, 乘開整理得到條件 $\|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{c}\|$。

(a) 首先查驗 $\|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{c}\| = 1$, 再將數值代入計算得到 $k = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, 因此

$$\mathbf{x} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}。$$

(b) 因爲 $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{14}$, 而 $\|\mathbf{c}\| = 1$, 這不符合解存在的必要條件, 故此題無解。 □

Problem 6

Let B be a skew-symmetric matrix, $B^T = -B$. If

$$A = (I + B)(I - B)^{-1},$$

prove that A is an orthogonal matrix.

Solution

利用已知 $B^T = -B$, 計算

$$\begin{aligned} A^T &= \big((I+B)(I-B)^{-1}\big)^T \\ &= (I - B^T)^{-1}(I + B^T) \\ &= (I+B)^{-1}(I-B)。 \end{aligned}$$

因爲 $(I-B)(I+B) = (I+B)(I-B)$,

$$\begin{aligned} A^T A &= (I+B)^{-1}(I-B)(I+B)(I-B)^{-1} \\ &= (I+B)^{-1}(I+B)(I-B)(I-B)^{-1} = I。 \end{aligned}$$

證得 $A^T = A^{-1}$。 □

Problem 7

Suppose that A is an $n \times n$ matrix such that for some $k > 0$, $A^k = 0$. Such matrices are called *nilpotent*.

(a) Show that A is not invertible.

(b) Show that $I - A$ is invertible.

(c) If the matrices A and B commute, show that $I + AB$ is invertible. Note that B may not be nilpotent.

Solution

(a) 可以用反證法證明。假設 A 是可逆的, 則有 $AA^{-1} = I$, 那麼

$$\begin{aligned} A^k(A^{-1})^k &= \underbrace{(A\cdots A)}_{k}\underbrace{(A^{-1}\cdots A^{-1})}_{k} \\ &= \underbrace{A\cdots A}_{k-1}(AA^{-1})\underbrace{A^{-1}\cdots A^{-1}}_{k-1} \\ &= A^{k-1}(A^{-1})^{k-1}。\end{aligned}$$

重複上述步驟可歸納得 $A^k(A^{-1})^k = AA^{-1} = I$。但已知 $A^k = 0$, 因此 $(A^{-1})^k$ 不可能存在, 出現了矛盾的結果, 顯然最初的假設是錯的。

另一個做法是運用行列式性質直接證明。計算 A^k 的行列式值

$$\det(A^k) = \underbrace{\det(A)\cdots\det(A)}_{k} = \det(A)^k。$$

由於 $\det(A^k) = \det(0) = 0$, 可知 $\det(A) = 0$, 證得 A 不是可逆的。

(b) 直接求出 $I - A$ 的逆矩陣便可以證明此命題成立。問題的重心在於存在 $k > 0$, 使 $A^k = 0$, 我們於是產生了聯繫 A^k 與 $I - A$ 的想法。注意以下的因式分解公式:

$$1 - x^k = (1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1}),$$

對應的矩陣多項式則爲

$$I - A^k = (I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1})。$$

從已知條件 $A^k = 0$ 推得 $(I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) = I$, 這表明 $I - A$ 是可逆的, 而且

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}。$$

(c) 可以運用題 (b) 的方法。當 k 是奇數時, 考慮下面的因式分解公式:

$$1 + x^k = (1 + x)(1 - x + x^2 - \cdots + x^{k-1})。$$

應用於矩陣的情況, 也就有

$$I+(AB)^k=(I+AB)(I-AB+(AB)^2-\cdots+(AB)^{k-1})。$$

剩下的工作是計算 $(AB)^k$。因爲問題給出 $BA=AB$, 就有

$$\begin{aligned}(AB)^k&=AB(AB)^{k-1}=A(BA)B(AB)^{k-2}\\&=A(AB)B(AB)^{k-2}=A^2B^2(AB)^{k-2}。\end{aligned}$$

繼續重複上述步驟可歸納出 $(AB)^k=A^kB^k$, 但 $A^k=0$, 所以 $(AB)^k=0$, 故推知 $I+AB$ 是可逆的。如果滿足 $A^k=0$ 的 k 是偶數, 可令 $m=k+1$, 則 $(AB)^m=(AB)^k(AB)=0$, 將上述論證的 k 改爲 m, 再分解 $I+(AB)^m$ 爲因式, 仍然可以證明原命題成立。 $\square$

Problem 8

Let A be an $n\times n$ matrix. If $A^2=0$, show that $I-A$ is nonsingular.

Solution

最直接的方法是求出 $I-A$ 的逆矩陣, 利用已知條件可得

$$(I-A)(I+A)=I-A^2=I。$$

因此, $(I-A)^{-1}=I+A$。第二個做法是從子空間著手, 如果能證得 $I-A$ 的零空間僅包含零向量, 即證出所求。設 $(I-A)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 亦即 $\mathbf{x}=A\mathbf{x}$, 等號兩邊同乘 A, 就有 $A\mathbf{x}=A^2\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 推知 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$。此外, 還可以利用特徵值來證明: 若 $I-A$ 不包含零特徵值, 則 $I-A$ 是可逆的。設 $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$, 則 $A^2\mathbf{x}=\lambda^2\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 因爲 $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, 得知 $\lambda=0$, A 的所有特徵值爲 0, 稱爲冪零矩陣。計算 $(I-A)\mathbf{x}=\mathbf{x}-\lambda\mathbf{x}=\mathbf{x}$, 可知 $I-A$ 有重複 n 次的特徵值 1, 因此爲可逆矩陣。 $\square$

Problem 9

Let A be an n by n real symmetric matrix, and $s(A)$ be the sum of all entries of A. Prove that

$$s(A^2)\geq\frac{(s(A))^2}{s(I_n)}.$$

Solution

展開 A^2 並將所有元加總,

$$s(A^2)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kj}。$$

已知 A 是對稱矩陣, 對於任意 i, k, $a_{ik}=a_{ki}$, 交換加總順序就得到

$$\begin{aligned}
s(A^2)&=\sum_{k=1}^n\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ki}a_{kj}\right)\\
&=\sum_{k=1}^n\left(\sum_{i=1}^n a_{ki}\right)\left(\sum_{j=1}^n a_{kj}\right)\\
&=\sum_{k=1}^n\left(\sum_{i=1}^n a_{ki}\right)^2\\
&=\sum_{k=1}^n \rho_k^2。
\end{aligned}$$

上式中我們令 $\rho_k=\sum_{i=1}^n a_{ki}$。利用 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$\sum_{k=1}^n\rho_k^2\geq\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^n\rho_k\right)^2=\frac{(s(A))^2}{s(I_n)}。$$

另外也可以使用精簡的符號推導, 令 $\mathbf{1}=(1,1,\ldots,1)$, 則

$$s(A^2)=\mathbf{1}^TA^2\mathbf{1}=\mathbf{1}^TA^TA\mathbf{1}=(A\mathbf{1})^T(A\mathbf{1})=\|A\mathbf{1}\|^2。$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$(s(A))^2=(\mathbf{1}^TA\mathbf{1})^2\leq\|\mathbf{1}\|^2\cdot\|A\mathbf{1}\|^2=n\|A\mathbf{1}\|^2。$$

合併上面兩式即證得所求。 □

Problem 10

Let A and B be $n\times n$ matrices. Prove that if $AB=0$, then for every positive integer k,

$$\operatorname{trace}(A+B)^k=\operatorname{trace}A^k+\operatorname{trace}B^k.$$

Solution

考慮展開式

$$(A+B)^k = A^k + kA^{k-1}B + \cdots + kAB^{k-1} + B^k。$$

注意, $(A+B)^k$ 包含四種不同類型的項, 即 A^k, B^k, A^mB^{k-m}, 以及 B^mA^{k-m}, $m \geq 1$。因爲 $AB=0$, 可知 $A^mB^{k-m} = A^{m-1}(AB)B^{k-m-1} = 0$。利用跡數性質 $\text{trace}(XY) = \text{trace}(YX)$, 其中 XY 和 YX 爲方陣, 就有

$$\text{trace}(B^mA^{k-m}) = \text{trace}(A^{k-m}B^m) = \text{trace}0 = 0。$$

對上面展開式等號兩邊取跡數可得

$$\text{trace}(A+B)^k = \text{trace}(A^k + B^k) = \text{trace}A^k + \text{trace}B^k。$$

最後一個步驟使用了矩陣加法的跡數性質, $\text{trace}(X+Y) = \text{trace}X + \text{trace}Y$, X 和 Y 爲方陣。 □

Problem 11

For $n \times n$ matrices A and B, the commutator of A and B is defined by $[A,B] \equiv AB - BA$. Show that

(a) $[A,B]^T = [B^T, A^T]$

(b) $[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$

(c) $\text{trace}[A,B] = 0$

(d) $[A,B]$ is never similar to the identity matrix.

(e) If the diagonal entries of A are all equal to zero, then there exists matrices U and V such that $A = [U,V]$.

Solution

(a) 代入計算並展開

$$[A,B]^T = (AB-BA)^T = B^TA^T - A^TB^T = [B^T, A^T]。$$

(b) 直接計算

$$\begin{aligned}[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]] &= A(BC-CB)-(BC-CB)A\\ &\quad+B(CA-AC)-(CA-AC)B\\ &\quad+C(AB-BA)-(AB-BA)C\\ &=0。\end{aligned}$$

(c) 利用跡數性質計算

$$\begin{aligned}\mathrm{trace}[A,B] &= \mathrm{trace}(AB-BA)=\mathrm{trace}(AB)-\mathrm{trace}(BA)\\ &= \mathrm{trace}(BA)-\mathrm{trace}(BA)=0。\end{aligned}$$

(d) 利用題 (c) 結果, $\mathrm{trace}[A,B]=0$, 但 $\mathrm{trace}I=n\neq 0$, 推知 $[A,B]$ 和 I 的特徵值不相同, 故 $[A,B]$ 不相似於 I。

(e) 如不加入限制直接解方程式 $A=[U,V]=UV-VU$, 可以想像其過程十分繁雜。先選擇一種特殊形式的 U 矩陣, 例如下面的主對角矩陣

$$U=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n\end{bmatrix}。$$

以元爲計算單位展開 $A=[U,V]=UV-VU$, 比較等號兩邊得到

$$a_{ij}=iv_{ij}-v_{ij}j=(i-j)v_{ij}。$$

因此若 $i\neq j$, 可設 $v_{ij}=a_{ij}/(i-j)$, 若 $i=j$, 則 $v_{ij}=0$。 $\square$

Problem 12

Consider the following linear equations

$$\begin{aligned}x+(\lambda-1)y+(\lambda-2)z &= 2\\ \lambda x+(2\lambda-2)y+(\lambda-2)z &= \lambda+1\\ (\lambda^2-2\lambda)x+\lambda z &= -2\lambda.\end{aligned}$$

Find the real values of λ such that this system of equations satisfies the following conditions.

(a) The system has no solution.

(b) The system has a unique solution.

(c) The set of solutions is a line in $\mathbb{R}^3$.

(d) The set of solutions is a plane in $\mathbb{R}^3$.

Solution

寫出增廣矩陣並進行消去法, 可得

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda-1 & \lambda-2 & 2 \\ \lambda & 2\lambda-2 & \lambda-2 & \lambda+1 \\ \lambda^2-2\lambda & 0 & \lambda & -2\lambda \end{bmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & \lambda-1 & \lambda-2 & 2 \\ 0 & -\lambda^2+3\lambda-2 & -\lambda^2+3\lambda-2 & -\lambda+1 \\ \lambda^2-2\lambda & 0 & \lambda & -2\lambda \end{bmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & \lambda-1 & \lambda-2 & 2 \\ 0 & -(\lambda-1)(\lambda-2) & -(\lambda-1)(\lambda-2) & -\lambda+1 \\ 0 & -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) & -\lambda(\lambda-1)(\lambda-3) & 2\lambda(\lambda-1) \end{bmatrix}。$$

注意 3×3 階係數矩陣行列式爲

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda-1 & \lambda-2 \\ 0 & -(\lambda-1)(\lambda-2) & -(\lambda-1)(\lambda-2) \\ 0 & -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) & -\lambda(\lambda-1)(\lambda-3) \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & \lambda-1 & \lambda-2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$
$$= -\lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)。$$

當 λ 不等於 $0, 1$, 或 2 時, 係數矩陣可逆, 方程組有唯一解。以下分開討論係數矩陣不可逆的情況。若 $\lambda = 0$, 增廣矩陣為

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

故解為一直線。若 $\lambda = 1$, 增廣矩陣為

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

故解為一平面。若 $\lambda = 2$, 增廣矩陣為

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right],$$

方程組無解。解答如下:

(a) $\lambda = 2$。

(b) λ 不等於 $0, 1, 2$。

(c) $\lambda = 0$。

(d) $\lambda = 1$。 $\square$

Problem 13

Suppose A is $m \times m$, U is $m \times n$, V is $n \times m$, and D is $n \times n$. The following questions relate to the inverse of the block matrix $\begin{bmatrix} A & U \\ V & D \end{bmatrix}$.

(a) Suppose A is invertible. Find W, X, Y, and Z satisfying

$$\begin{bmatrix} W & 0 \\ X & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & U \\ V & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & Y \\ 0 & Z \end{bmatrix}.$$

(b) Suppose Z is invertible. Find the inverse of $\begin{bmatrix} I_m & Y \\ 0 & Z \end{bmatrix}$.

(c) Use the results of (a) and (b) to compute the inverse of $\begin{bmatrix} A & U \\ V & D \end{bmatrix}$. To have this result, what assumptions of the matrix invertibility should be made?

(d) An alternative way to derive the inverse of a block matrix is to start with

$$\begin{bmatrix} I_m & X' \\ 0 & W' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & U \\ V & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z' & 0 \\ Y' & I_n \end{bmatrix}.$$

Follow the steps described in (a), (b), (c) and then derive a new formula for the inverse of the block matrix $\begin{bmatrix} A & U \\ V & D \end{bmatrix}$. By equating the (1,1) entry of the obtained inverse and that obtained in (c), show that

$$(A - UD^{-1}V)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}U(D - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}.$$

(e) By the formula in (d), derive a formula for $(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1}$.

(f) By the formula in (d), show that

$$(A + UBV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(I + BVA^{-1}U)^{-1}BVA^{-1}.$$

Solution

(a) 給出的矩陣方程式其用意在於將分塊矩陣轉換爲上三角形矩陣，因此不難解出其中的未知分塊。以分塊矩陣乘法展開，得到以下四式:

$$\begin{aligned} WA &= I_m \\ XA + I_nV &= 0 \\ WU &= Y \\ XU + I_nD &= Z。 \end{aligned}$$

已知 A 是可逆矩陣, 可依序解出

$$\begin{aligned}W &= A^{-1}\\ X &= -VA^{-1}\\ Y &= A^{-1}U\\ Z &= D-VA^{-1}U\text{。}\end{aligned}$$

(b) 類似一般矩陣性質, 分塊上三角矩陣的逆矩陣仍爲分塊上三角矩陣, 故考慮

$$\begin{bmatrix} I_m & Y \\ 0 & Z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & P \\ 0 & Q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\text{。}$$

展開後, 由分塊矩陣的第二行取出等式:

$$\begin{aligned}I_mP+YQ&=0\\ ZQ&=I_n\text{。}\end{aligned}$$

因 Z 是可逆的, 便有 $Q=Z^{-1}$, $P=-YQ=-YZ^{-1}$, 所求的逆矩陣爲

$$\begin{bmatrix} I_m & Y \\ 0 & Z \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} I_m & -YZ^{-1} \\ 0 & Z^{-1} \end{bmatrix}\text{。}$$

(c) 由題 (a) 可知以下關係式:

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -VA^{-1} & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & U \\ V & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_m & A^{-1}U \\ 0 & D-VA^{-1}U \end{bmatrix}\text{。}$$

利用題(b) 求得之上三角形分塊矩陣的逆矩陣公式, 將上式同時左乘等號右端矩陣之逆矩陣, 便得到

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} A & U \\ V & D \end{bmatrix}^{-1} ! &= \begin{bmatrix} I_m & A^{-1}U \\ 0 & D-VA^{-1}U \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -VA^{-1} & I_n \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} I_m & -A^{-1}U(D-VA^{-1}U)^{-1} \\ 0 & (D-VA^{-1}U)^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -VA^{-1} & I_n \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} A^{-1}+A^{-1}U(D-VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1} & -A^{-1}U(D-VA^{-1}U)^{-1} \\ -(D-VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1} & (D-VA^{-1}U)^{-1} \end{bmatrix},\end{aligned}$$

此式成立的條件是 A 和 $D-VA^{-1}U$ 都是可逆的。

(d) 設 D 是可逆的, 重複前題的步驟可得另一分塊逆矩陣, 如下:

$$\begin{bmatrix} A & U \\ V & D \end{bmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} (A-UD^{-1}V)^{-1} & -(A-UD^{-1}V)^{-1}UD^{-1} \\ -D^{-1}V(A-UD^{-1}V)^{-1} & D^{-1}V(A-UD^{-1}V)^{-1}UD^{-1}+D^{-1} \end{bmatrix}。$$

此式與題 (c) 的逆矩陣相等, 比較 (1,1) 元即可得所求公式。

(e) 設 $D=-1$, $U=\mathbf{u}$, $V=\mathbf{v}^T$, 代入題 (d) 給出的公式, 可知

$$\begin{aligned}(A+\mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1} &= A^{-1}+A^{-1}\mathbf{u}(-1-\mathbf{v}^TA^{-1}\mathbf{u})^{-1}\mathbf{v}^TA^{-1}\\ &= A^{-1}-\frac{A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^TA^{-1}}{1+\mathbf{v}^TA^{-1}\mathbf{u}}。\end{aligned}$$

上式成立的要件是純量 $1+\mathbf{v}^TA^{-1}\mathbf{u}$ 不得爲零。

(f) 設 $B=-D^{-1}$, 亦即 $D=-B^{-1}$, 再代入題(d) 的公式, 便有

$$(A+UBV)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}U(B^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}。$$

由等式 $B(B^{-1}+VA^{-1}U)=I+BVA^{-1}U$, 可得 $(B^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}=(I+BVA^{-1}U)^{-1}B$, 故

$$(A+UBV)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}U(I+BVA^{-1}U)^{-1}BVA^{-1}。$$

注意, 此公式假設 A 和 $I+BVA^{-1}U$ 是可逆矩陣。 □

Problem 14

Suppose A and B are $n\times n$ matrices, and B is not nilpotent. If $AB+BA=0$, then $AX+XA=B$ has no solution. Note that an $n\times n$ matrix A is called *nilpotent* if $A^k=0$ for some positive integer k.

Solution

令 k 爲任意正整數, 重複使用 $2k-1$ 次 $AB=-BA$, 可得

$$AB^{2k-1}=(AB)B^{2k-2}=-BAB^{2k-2}=B^2AB^{2k-3}=\cdots=-B^{2k-1}A。$$

接者使用反證法, 如果 $B = AX + XA$, 利用上式就有

$$B^{2k} = (AX + XA)B^{2k-1} = AXB^{2k-1} + XAB^{2k-1} = AXB^{2k-1} - XB^{2k-1}A。$$

計算

$$\begin{aligned}\text{trace}B^{2k} &= \text{trace}(AXB^{2k-1} - XB^{2k-1}A)\\ &= \text{trace}(AXB^{2k-1}) - \text{trace}(XB^{2k-1}A)\\ &= \text{trace}(AXB^{2k-1}) - \text{trace}(AXB^{2k-1}) = 0。\end{aligned}$$

令 B 的特徵值爲 λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, 根據跡數 (trace) 與特徵值關係, 就有

$$\text{trace}B^{2k} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{2k} = 0。$$

因爲 k 是任意正整數, 這說明 $\lambda_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, 換句話說, B 爲冪零矩陣, 這與原命題矛盾。 □

Problem 15

If $\mathbf{b} = (1, 3, 0, 2)^T$ and the general solution to $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

where α and β are free parameters, determine the matrix A.

Solution

因爲 $\mathbf{b}$ 是 4 維向量, $\mathbf{x}$ 是 3 維向量, 即知 A 是 4×3 階矩陣。由給出的通解可得

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}。$$

將上面三式合併成一矩陣方程:

$$A\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

由此解出

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -6 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -4 \end{bmatrix}。 \end{aligned}$$

□

Problem 16

Let A and B be $n \times n$ matrices, and $X = A + B$ and $Y = A - B$. If X and Y are nonsingular, show that

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} X^{-1} + Y^{-1} & X^{-1} - Y^{-1} \\ X^{-1} - Y^{-1} & X^{-1} + Y^{-1} \end{bmatrix}.$$

Solution

考慮

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

乘開後可得

$$AP + BR = I, \quad AQ + BS = 0, \quad BP + AR = 0, \quad BQ + AS = I。$$

令第一式加上第三式, 可得 $(A+B)(P+R)=I$, 故 $P+R=(A+B)^{-1}=X^{-1}$。令第一式減去第三式, 可得 $(A-B)(P-R)=I$, 故 $P-R=(A-B)^{-1}=Y^{-1}$。由以上導出兩式可解出

$$P=\frac{1}{2}(X^{-1}+Y^{-1}),\quad R=\frac{1}{2}(X^{-1}-Y^{-1})。$$

運用相同方法, 由第二式與第四式亦可解出

$$Q=\frac{1}{2}(X^{-1}-Y^{-1}),\quad S=\frac{1}{2}(X^{-1}+Y^{-1}),$$

故證得所求。 $\square$

Problem 17

Let A be an $m\times n$ matrix. Suppose $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ has solutions $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$, for some $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$.

(a) Show that $c_1\mathbf{x}_1+\cdots+c_n\mathbf{x}_n$ is a solution to $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ if and only if $c_1+\cdots+c_n=1$.

(b) Show that if $d_1\mathbf{x}_1+\cdots+d_n\mathbf{x}_n=\mathbf{0}$ then $d_1+\cdots+d_n=0$.

Solution

(a) 設 $c_1\mathbf{x}_1+\cdots+c_n\mathbf{x}_n$ 是 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的一個解, 則

$$A(c_1\mathbf{x}_1+\cdots+c_n\mathbf{x}_n)=A(c_1\mathbf{x}_1)+\cdots+A(c_n\mathbf{x}_n)=\mathbf{b}。$$

因爲 $A(c_i\mathbf{x}_i)=c_i(A\mathbf{x}_i)=c_i\mathbf{b}$, $i=1,\ldots,n$, 可得 $(c_1+\cdots+c_n)\mathbf{b}=\mathbf{b}$。已知 $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$, 推論 $c_1+\cdots+c_n=1$。反過來說, 若 $c_1+\cdots+c_n=1$, 就有

$$A(c_1\mathbf{x}_1+\cdots+c_n\mathbf{x}_n)=c_1A\mathbf{x}_1+\cdots+c_nA\mathbf{x}_n=(c_1+\cdots+c_n)\mathbf{b}=\mathbf{b},$$

證得 $c_1\mathbf{x}_1+\cdots+c_n\mathbf{x}_n$ 也是 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的一個解。

(b) 設 $d_1\mathbf{x}_1+\cdots+d_n\mathbf{x}_n=\mathbf{0}$, 代入 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$, 可知

$$A(d_1\mathbf{x}_1+\cdots+d_n\mathbf{x}_n)=d_1A\mathbf{x}_1+\cdots+d_nA\mathbf{x}_n=(d_1+\cdots+d_n)\mathbf{b},$$

但 $A(d_1\mathbf{x}_1+\cdots+d_n\mathbf{x}_n)=A\mathbf{0}=\mathbf{0}$, 證得 $d_1+\cdots+d_n=0$。 $\square$

Problem 18

Let A be the $n \times n$ matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Find the inverse of A.

Solution

將 A 改寫爲

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} = PB,$$

其中 $P^{-1} = P$, 故 $A^{-1} = B^{-1}P^{-1} = B^{-1}P$。再將 B 寫成 $B = E - I$, 其中 E 的所有元都等於1。因爲 $E^2 = nE$, 就有 $BE = (E-I)E = E^2 - E = (n-1)E$, 即 $B\left(\frac{1}{n-1}E\right) = E$。上式等號兩邊同減 B, 就有 $B\left(\frac{1}{n-1}E - I\right) = E - B = I$, 解出 $B^{-1} = \frac{1}{n-1}E - I$, 於是得到

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{n-1}E - I\right)P = \frac{1}{n-1}E - P,$$

或明確地表示如下:

$$(A^{-1})_{ij} = \begin{cases} \frac{2-n}{n-1} & \text{若 } i + j = n + 1, \\ \frac{1}{n-1} & \text{其他情況。} \end{cases}$$

$\square$

Problem 19

Let A and B be $n \times n$ matrices. If $AB - BA = A$, show that A is singular.

Solution

使用反證法。假設 A 可逆, 等式 $AB - BA = A$ 兩邊右乘 A^{-1} 可得 $ABA^{-1} - B = I_n$。上式等號兩邊取跡數 (trace), 左邊爲 $\text{trace}(ABA^{-1}) - \text{trace}B = \text{trace}(BA^{-1}A) - \text{trace}B = 0$, 右邊是 $\text{trace}I_n = n$, 但 $n > 0$, 這造成矛盾, 證得 A 不可逆。 $\square$

Problem 20

Let A and B be $n \times n$ matrices. Prove the following statements.

(a) If $AB = A + B$, then $AB = BA$.

(b) If $AB = A - B$, then $AB = BA$.

Solution

(a) 若 $AB = A + B$, 則 $(A - I)(B - I) = AB - A - B + I = I$, 也就有 $(A - I)(B - I) = (B - I)(A - I)$, 展開等號兩邊即證得 $AB = BA$。

(b) 若 $AB = A - B$, 則 $(A + I)(I - B) = -AB + A - B + I = I$, 也就有 $(A + I)(I - B) = (I - B)(A + I)$, 展開等號兩邊即證得 $AB = BA$。 $\square$

Problem 21

Let A and B be $n \times n$ idempotent matrices, i.e., $A^2 = A$ and $B^2 = B$. Show that $AB = BA = 0$ if and only if $A + B$ is idempotent.

Solution

因爲 $A^2 = A$ 且 $B^2 = B$, 可知

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A + AB + BA + B。$$

利用此結果進行下列推導。

$(\Rightarrow)$ 若 $AB = BA = 0$, 立得 $(A + B)^2 = A + B$, 故 $A + B$ 是冪等 (idempotent) 矩陣。

$(\Leftarrow)$ 若 $(A + B)^2 = A + B$, 則 $AB + BA = 0$, 即 $AB = -BA$。再考慮

$$AB = A^2B = A(AB) = A(-BA) = -(AB)A = (BA)A = BA^2 = BA,$$

因此推得 $AB = BA = 0$。 $\square$

Problem 22

Let A be an $n\times n$ matrix. If $A^3 = 2I$, show that $B = A^2 - 2A + 2I$ is nonsingular.

Solution

由 $A^3 = 2I$ 可知 A 可逆, 運用上式將 B 分解如下:

$$B = A^2 - 2A + 2I = A^2 - 2A + A^3 = A(A^2 + A - 2I) = A(A + 2I)(A - I)。$$

另外,

$$I = A^3 - I = (A - I)(A^2 + A + I),$$

由此可知 $A - I$ 可逆。再使用

$$10I = A^3 + 8I = (A + 2I)(A^2 - 2A + 4I),$$

故知 $A + 2I$ 可逆。綜合以上結果即證得 $B = A(A + 2I)(A - I)$ 可逆。 $\square$

Problem 23

Let A, B and C be $n \times n$ matrices such that $ABC = 2I$. Show that

$$B^3(CA)^3 = 8I.$$

Solution

寫出 $ABC = (AB)C = 2I$, 即知 $CAB = C(AB) = 2I$, 由此可推得 $BCA = B(CA) = 2I$。重覆利用上式可化簡得

$$\begin{aligned} B^3(CA)^3 &= BBBCACACA = BB(BCA)CACA \\ &= BB(2I)CACA = 2BBCACA = 2B(BCA)CA \\ &= 2B(2I)CA = 4(BCA) = 4(2I) = 8I。\end{aligned}$$

$\square$

Problem 24

Let A and B be 2×2 real matrices. If $A^2 + B^2 = AB$ and $BA = 0$, prove that $AB = 0$.

Solution

利用已知 $BA = 0$, 條件式 $A^2 = AB - B^2$ 右乘 A 可得 $A^3 = ABA - B^2A = 0$; 同理, 條件式左乘 B 即得 $B^3 = 0$。所以 A 和 B 是冪零 (nilpotent) 矩陣, 所有特徵值皆爲零, 故二階方陣 A 和 B 的特徵多項式同爲 $p(t) = t^2$。利用 Cayley-Hamilton 定理, 可知 $p(A) = A^2 = 0$, $p(B) = B^2 = 0$, 因此證明 $AB = A^2 + B^2 = 0$。 $\square$

Problem 25

Let A and B be $n \times n$ nonsingular matrices such that $ABA = B$ and $BAB = A$. Prove that $A^2 = B^2$ and $A^4 = B^4 = I$.

Solution

由已知 $ABA = B$ 和 $BAB = A$ 可知 $AB = BA^{-1}$ 且 $AB = B^{-1}A$, 故 $BA^{-1} = B^{-1}A$, 等號兩邊左乘 B, 右乘 A, 即得 $B^2 = A^2$。再將 $B = ABA$ 代入 $A = BAB$, 可得

$$A = BAB = (ABA)AB = (AB)A^2B = (B^{-1}A)A^2B = B^{-1}A^3B,$$

因此 $BA = A^3B$。使用 $BA = A^{-1}B$, 就有 $A^{-1}B = A^3B$, 故 $A^{-1} = A^3$, 即 $A^4 = I$。由 $B^4 = A^4$, 可得 $B^4 = I$。 $\square$

向量空間

Problem 26

Let A and B be $n \times n$ involutory matrices, i.e., $A^2 = B^2 = I$. Show that

$$C(AB - BA) = C(A - B) \cap C(A + B),$$

where $C(X)$ denotes the column space of X.

Solution

由給出等式觀察出 $A - B$ 和 $A + B$ 爲主要物件, 利用已知條件 $A^2 = B^2 = I$, 可得

$$\begin{aligned}(A - B)(A + B) &= A^2 - BA + AB - B^2 = AB - BA\\ (A + B)(A - B) &= A^2 + BA - AB - B^2 = BA - AB。\end{aligned}$$

上面兩式指出 $C(AB - BA) \subseteq C(A - B)$ 且 $C(AB - BA) \subseteq C(A + B)$, 也就有 $C(AB - BA) \subseteq C(A - B) \cap C(A + B)$。另一方面, 令 $\mathbf{v} \in C(A - B) \cap C(A + B)$, 亦即存在表達式 $\mathbf{v} = (A - B)\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{v} = (A + B)\mathbf{y}$, 第一式左乘 $A + B$, 第二式左乘 $A - B$, 可得

$$\begin{aligned}(A + B)\mathbf{v} &= (BA - AB)\mathbf{x}\\ (A - B)\mathbf{v} &= (AB - BA)\mathbf{y}。\end{aligned}$$

將兩式相加, $2A\mathbf{v} = (AB - BA)(\mathbf{y} - \mathbf{x})$, 再利用 $A^2 = I$, 小心進行代數操作, 可得

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = A^2\mathbf{v} &= \frac{1}{2}A(AB - BA)(\mathbf{y} - \mathbf{x})\\ &= \frac{1}{2}(ABA - A^2B)(\mathbf{x} - \mathbf{y})\\ &= \frac{1}{2}(ABA - BA^2)(\mathbf{x} - \mathbf{y})\\ &= \frac{1}{2}(AB - BA)A(\mathbf{x} - \mathbf{y})。\end{aligned}$$

這指出 $\mathbf{v} \in C(AB - BA)$, 得知 $C(A - B) \cap C(A + B) \subseteq C(AB - BA)$, 故證得原命題。 $\square$

Problem 27

Let

$$S=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\2\end{bmatrix}\right\}.$$

Find an extension vector set T from $\mathbb{R}^4$ so that $S\cup T$ form a basis for $\mathbb{R}^4$.

Solution

使用嘗試錯誤法並不難求出一組基底, 但問題在於如何以系統化方式計算擴展向量集 T。想法是藉助列梯形矩陣分辨線性獨立向量的能力, 將標準基底向量 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_4$ 併入給定的向量集 S 構成一增廣矩陣 A, 再將 A 化簡至列梯形矩陣, 如下:

$$\begin{bmatrix}1&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\-2&2&0&0&0&1\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&0&1&0&0&0\\0&1&1&0&0&\frac{1}{2}\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}。$$

此結果顯示 A 的第 1, 2, 4, 5 行是線性獨立的, 故擴展向量集可爲

$$T=\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}。$$

□

Problem 28

Suppose A is a 3×4 matrix. The block matrix $[\,A\quad I_3\,]$ is reduced by row operations to

$$\begin{bmatrix}1&2&1&0&2&-1&0\\0&0&0&1&-1&1&0\\0&0&0&0&1&-2&1\end{bmatrix}.$$

(a) Find a basis for the row space of A.

(b) Find a basis for the nullspace of A.

(c) Find a basis for the left nullspace of A.

(d) Find a basis for the column space of A.

Solution

爲方便推理, 我們考慮一般的情況。設 A 爲 $m\times n$ 階矩陣, 又設 $m\times m$ 階矩陣 E 代表消去法所執行的基本矩陣乘積, 因此有

$$E\begin{bmatrix} A & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & EI_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & E \end{bmatrix},$$

其中 $m\times n$ 階矩陣 $R=EA$ 爲 A 的最簡列梯形矩陣。當 A 的秩等於 r 時, 記爲 $\mathrm{rank}A=r$, 在不失一般性原則下, 以分塊形式將 R 表示如下:

$$R=\begin{bmatrix} I_r & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$r\times(n-r)$ 階分塊 F 由對應非軸行的係數所構成。令 $E=\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$, E_1 爲 $r\times m$ 階, E_2 爲 $(m-r)\times m$ 階, 化簡後的分塊矩陣可以進一步分解爲

$$\begin{bmatrix} R & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & F & E_1 \\ 0 & 0 & E_2 \end{bmatrix}。$$

以此題給出的數值爲例, $\mathrm{rank}A=2$,

$$F=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad E_1=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad E_2=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}。$$

注意, 分塊 F 和 E_2 爲描述矩陣 A 的四個基本子空間提供的充分的資訊。

(a) 列運算不改變矩陣的列空間, 因此 $C(A^T)=C(R^T)$, 由於 R 的非零列是線性獨立的, 因此可以作爲 A 的列空間基底向量, 亦即分塊 $\begin{bmatrix} I_r & F \end{bmatrix}$ 的列。故此題答案爲 $[1,2,1,0]^T$, $[0,0,0,1]^T$。

(b) 列運算不改變矩陣的零空間, 齊次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 和 $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有相同的解集合, 故其零空間相同 $N(A) = N(R)$。由已知的 R 矩陣, 可確定零空間矩陣 (nullspace matrix) 爲

$$N = \begin{bmatrix} -F \\ I_{n-r} \end{bmatrix},$$

滿足 $RN = 0$。由於 N 的行向量是線性獨立的, A 的零空間基底可爲 N 的行向量。由給出的 R 可知

$$N = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

所以 A 的零空間基底包含向量 $[-2, 1, 0, 0]^T$, $[-1, 0, 1, 0]^T$。

(c) 矩陣 A 其左零空間中的向量 $\mathbf{y}$ 滿足 $A^T\mathbf{y} = \mathbf{0}$ 或 $\mathbf{y}^T A = \mathbf{0}^T$。因爲

$$EA = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} I_r & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = R,$$

便有 $E_2 A = 0$, 這說明了 E_2 的各列都屬於 A^T 的零空間, 又由於基本矩陣乘積 E 是可逆的, 故包含線性獨立的列, E_2 的列便可組成 A^T 的零空間基底。此題答案爲 $[1, -2, 1]^T$。

(d) 列運算改變了矩陣的行空間, $C(A) \neq C(R)$, 由最簡列梯形矩陣 R 不可能推論出 A 的行空間, 但從題 (c) 得到的左零空間 $N(A^T)$ 仍提供足夠的資訊以描述 $C(A)$。設矩陣 B 其各列爲 A^T 的零空間基底向量, 由題 (c) 得知 $B = E_2$, 也就有 $C(B^T) = N(A^T)$, 利用子空間的正交互補關係, $C(A) = N(A^T)^\perp$ 和 $C(B^T)^\perp = N(B)$, 可推知 $C(A) = N(B)$, 表明了 A 的行空間其實就是 B 的零空間。由前題結果, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, B 已經爲最簡列梯形陣式, 其零空間由 $[2, 1, 0]^T$ 和 $[-1, 0, 1]^T$ 所擴張而成, 此即爲 A 的行空間基底向量。

另一個做法是直接求矩陣 A, 不過這個方法的計算量稍大。由式 $EA=R$, 同時左乘 E^{-1} 得到 $A=E^{-1}R$, 如下:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&0\\1&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1&1\\1&2&1&2\\1&2&1&3\end{bmatrix}。$$

最簡列梯形矩陣 R 的第1, 4行爲軸行, 可知 A 的第1, 4行可爲行空間基底: $[1,1,1]^T$ 和 $[1,2,3]^T$。 □

Problem 29

Consider the following matrices:

$$A=\begin{bmatrix}1&5&1\\2&6&0\\1&7&2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&4&-4\\4&6&-8\\0&5&-4\end{bmatrix}.$$

Determine if A and B have the same column space, row space, nullspace, or left nullspace.

Solution

若 A 列等價於 B, 則 A 和 B 有相同的最簡列梯形矩陣 (reduced row echelon form), 因此有相同的列空間與零空間。同樣道理, 若 A^T 列等價於 B^T, 則 A^T 和 B^T 有相同的最簡列梯形矩陣, 也有相同的行空間與左零空間。分別以基本列運算化簡 A, B 得到

$$A\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&5&1\\0&-4&-2\\0&2&1\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&5&1\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&0&-\frac{3}{2}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$B\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&4&-4\\0&-10&8\\0&5&-4\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&4&-4\\0&1&-\frac{4}{5}\\0&0&0\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&0&-\frac{4}{5}\\0&1&-\frac{4}{5}\\0&0&0\end{bmatrix}。$$

A 和 B 的最簡列梯形矩陣不同, 推知 $C(A^T) \neq C(B^T)$, $N(A) \neq N(B)$。再計算化簡 A^T, B^T:

$$A^T \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^T \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -10 & 5 \\ 0 & 8 & -4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 8 & -4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

A^T 和 B^T 的最簡列梯形矩陣相同, 推知 $C(A) = C(B)$, $N(A^T) = N(B^T)$。 □

Problem 30

If possible construct a 3×3 real matrix A with the following properties:

(a) A is a symmetric matrix. Its row space is spanned by the vector $[1, 1, 2]^T$ and its column space is spanned by the vector $[1, 2, 3]^T$.

(b) All three of these equations have no solution but $A \neq 0$:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1, \qquad A\mathbf{x} = \mathbf{e}_2, \qquad A\mathbf{x} = \mathbf{e}_3,$$

where $\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0]^T$, $\mathbf{e}_2 = [0, 1, 0]^T$, $\mathbf{e}_3 = [0, 0, 1]^T$.

(c) The vector $[1, 1, 1]^T$ is in the row space of A but the vector $[1, -1, 0]^T$ is not in the nullspace of A.

Solution

(a) 矩陣 A 的列空間以及行空間僅由一個向量擴張而成, 表示 $\mathrm{rank}A = 1$。任意秩爲 1 的矩陣可表爲 $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$, 由給出的向量可知

$$A = k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix},$$

其中 $k \neq 0$, 所以不存在滿足此條件的對稱矩陣。

(b) 只要設法使 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ 都不在 A 的行空間內即可, 例如,

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}。$$

(c) 矩陣的零空間和列空間正交, 但因爲 $[1,1,1]^T$ 正交於 $[1,-1,0]^T$, 列空間不能僅由 $[1,1,1]^T$ 擴張而成, 否則 $[1,-1,0]^T$ 便於零空間內, 這與題意不符。克服此障礙的方式是讓列空間再增加一個不與 $[1,-1,0]^T$ 正交的基底向量, 例如,

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

此矩陣的零空間由向量 $[0,-1,1]^T$ 所擴張, 不包含 $[1,-1,0]^T$。 □

Problem 31

Suppose that U and W are two subspaces in $\mathbb{R}^4$. The subspace U is spanned by $\mathbf{u}_1=[1,1,0,0]^T$ and $\mathbf{u}_2=[1,0,1,0]^T$, and the subspace W is spanned by $\mathbf{w}_1=[0,1,0,1]^T$ and $\mathbf{w}_2=[0,0,1,1]^T$.

(a) Find a basis for the sum $U+W$.

(b) Find a basis for the intersection $U\cap W$.

(c) Explain why the following relation is correct:

$$\dim U+\dim W=\dim(U+W)+\dim(U\cap W).$$

Solution

(a) 令矩陣 A 的行向量依序爲 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2$, 則子空間之和 $U+W=\text{span}(U\cup W)$ 即爲 A 的行空間。以下使用標準程序找尋 A 的行空間基底, 以消去法化簡得到梯形

陣式:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

得知 $U+W$ 的基底向量為 A 的軸行, 即 1, 2, 3行:

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}。$$

(b) 最簡單計算子空間交集 $U\cap W$ 的做法是求題 (a) 的 A 之零空間 $N(A)$。任何 $\mathbf{x}\in N(A)$ 滿足 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 或寫成向量方程式

$$x_1\mathbf{u}_1+x_2\mathbf{u}_2+x_3\mathbf{w}_1+x_4\mathbf{w}_2=\mathbf{0}。$$

進一步將 $\mathbf{u}_i$ 和 $\mathbf{w}_i$ 分離:

$$x_1\mathbf{u}_1+x_2\mathbf{u}_2=-x_3\mathbf{w}_1-x_4\mathbf{w}_2。$$

等號左邊的向量屬於 U, 而等號右邊的向量屬於 W, 所以此向量屬於 $U\cap W$。由題 (a) 結果, 可繼續化簡 A 至最簡列梯形矩陣, 如下:

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}。$$

由最簡列梯形矩陣得知 A 的零空間由 $[1,-1,-1,1]^T$ 擴張, 子空間交集 $U\cap W$ 的基底向量也就是

$$1\cdot\mathbf{u}_1+(-1)\cdot\mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}。$$

(c) 題 (a) 與題 (b) 結果提供了 $U+W$ 和 $U\cap W$ 的維度, $\mathrm{rank}A=\dim(U+W)$, $\dim N(A)=\dim(U\cap W)$。A 的行向量總數爲 $\dim U+\dim W$, 從秩–零度定理推知 $\dim N(A)+\mathrm{rank}(A)=\dim U+\dim W$, 因此證得

$$\dim U+\dim W=\dim(U+W)+\dim(U\cap W)。$$

□

Problem 32

Let W_1 and W_2 be two subspaces in vector space V. Show that the following two statements are equivalent.

(a) $W_1\cap W_2=\{\mathbf{0}\}$.

(b) $\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2$.

Solution

(a) $\Rightarrow$ (b)
若 (a) 成立, 設 $\{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m\}$ 爲 W_1 的一組基底, $\{\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_n\}$ 爲 W_2 的一組基底, 因爲 $W_1\cap W_2=\{\mathbf{0}\}$, 向量集 $\{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m,\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_n\}$ 構成 W_1+W_2 的一組基底, 所以 $\dim(W_1+W_2)=m+n=\dim W_1+\dim W_2$。
(b) $\Rightarrow$ (a)
利用反證法, 若 (b) 成立且假設 $W_1\cap W_2\neq\{\mathbf{0}\}$。設 $\{\mathbf{z}_1,\ldots,\mathbf{z}_k\}$ 爲 $W_1\cap W_2$ 的一組基底, 將向量集 $\{\mathbf{z}_1,\ldots,\mathbf{z}_k\}$ 擴增成 W_1 和 W_2 的基底, 分別爲 $\{\mathbf{z}_1,\ldots,\mathbf{z}_k,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m\}$ 和

$\{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_k, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$, 因此 $\dim W_1 = k+m$, $\dim W_2 = k+n$, 而 $\dim(W_1+W_2) = k+n+m$。當 $k > 0$, 就有

$$\dim(W_1 + W_2) < \dim W_1 + \dim W_2。$$

這與 (b) 矛盾, 因此必定有 $k = 0$, 這指出 $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$。 □

Problem 33

Prove that the intersection of three 6-dimensional subspaces in $\mathbb{R}^8$ is not the single point $\{\mathbf{0}\}$.

Solution

想法是先限制二個子空間交集的維度, 然後延伸推論出三個子空間交集維度的範圍。令 U, V, W 爲 $\mathbb{R}^8$ 內的子空間, 且 $\dim U = \dim V = \dim W = 6$。因爲 $U + V$ 仍屬於 $\mathbb{R}^8$, 便有 $\dim(U + V) \leq 8$, 再由關係式

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V),$$

得知 $6 + 6 - \dim(U \cap V) \leq 8$, 所以 $\dim(U \cap V) \geq 4$, 同理可以得到 $\dim(V \cap W) \geq 4$。再次引用前述性質

$$\dim((U \cap V) + (U \cap W)) = \dim(U \cap V) + \dim(U \cap W) - \dim(U \cap V \cap W),$$

但是 $(U \cap V) + (U \cap W) \subseteq U$, 故 $\dim((U \cap V) + (U \cap W)) \leq 6$, 因此

$$\dim(U \cap V) + \dim(U \cap W) - \dim(U \cap V \cap W) \leq 6。$$

引用 $\dim(U \cap V) \geq 4$, $\dim(V \cap W) \geq 4$, 上面不等式就爲

$$\dim(U \cap V \cap W) \geq \dim(U \cap V) + \dim(U \cap W) - 6 \geq 4 + 4 - 6 = 2,$$

從而得知 U, V, W 的交集不可能爲零向量。 □

Problem 34

Let

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

(a) Find the intersection of the nullspace of A and the nullspace of B.

(b) Find the intersection of the column space of A and the column space of B.

Solution

(a) 設 $\mathbf{x} \in N(A) \cap N(B)$, 因此有 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 與 $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 合併二式成爲 $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$, 零空間交集 $N(A) \cap N(B)$ 即爲分塊矩陣 $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ 的零空間。以消去法化簡分塊矩陣至最簡列梯形矩陣, 如下:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & -8 & 3 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

分塊矩陣的秩與其行數相等, 這說明 A 的零空間與 B 的零空間交集爲 $\{\mathbf{0}\}$。

(b) 行空間的交集較爲困難求得, 原因是行空間可以由許多不同的基底擴張而成, 因此最直覺的解法是將行空間改以零空間形式表示。先將矩陣 A, B 的行空間轉換爲矩陣 D, E 的零空間, 再按題 (a) 方式求其交集。以 $N(A^T)$ 的基底向量設爲 D 的列, 便有 $C(D^T) = N(A^T)$, 利用子空間的正交互補關係 $C(A) = N(A^T)^\perp$, 故 $C(A) = C(D^T)^\perp = N(D)$。同理, 以 $N(B^T)$ 的基底向量設爲 E 的列, 則有 $C(B) =$

$N(E)$。以下分別將 A^T 與 B^T 的零空間找出:

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & -5 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

取整數可設 $D = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$。下一步是計算分塊矩陣 $\begin{bmatrix} D \\ E \end{bmatrix}$ 的零空間, 以消去法進行化簡, 可得

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}。$$

D 與 E 的零空間交集由向量 $[0, -2, 1]^T$ 所擴張, 這便是 A 和 B 行空間其交集的基底向量。 □

Problem 35

Suppose A is m by n, and $\operatorname{rank} A = r$. Let $E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$ be a nonsingular matrix such that

$$EA = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix},$$

where B is r by n, and B is in row echelon form. Prove that $C(A) = N(E_2)$, where $C(A)$ is the column space of A, and $N(E_2)$ is the nullspace of E_2.

Solution

欲證明 $C(A) = N(E_2)$, 我們可以分別證明 $C(A) \subset N(E_2)$ 和 $N(E_2) \subset C(A)$。由 $\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$, 得知 $E_2 A = 0$, A 的行向量屬於 E_2 的零空間, 故 $C(A) \subset N(E_2)$。

設 $\mathbf{b} \in N(E_2)$, 就有

$$E\mathbf{b} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} E_1\mathbf{b} \\ E_2\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

其中 $\mathbf{c} = E_1\mathbf{b}$ 是 r-維向量。考慮增廣矩陣 $\begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \end{bmatrix}$, 則

$$E \begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & E\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & \mathbf{c} \\ 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}。$$

上式給出 $\operatorname{rank} \begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \operatorname{rank} A = r$, 故方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 是一致的, 因此 $\mathbf{b} \in C(A)$, 這證明了 $N(E_2) \subset C(A)$。 □

Problem 36

Let A be an n by n nilpotent matrix of index k, i.e., k is the smallest positive integer such that $A^k = 0$. If $\mathbf{x}$ is a vector such that $A^{k-1}\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, show that the set $\{\mathbf{x}, A\mathbf{x}, A^2\mathbf{x}, \ldots, A^{k-1}\mathbf{x}\}$ is linearly independent.

Solution

考慮向量集的線性組合

$$c_1\mathbf{x} + c_2A\mathbf{x} + \cdots + c_kA^{k-1}\mathbf{x} = \mathbf{0}。$$

將上式左乘 A^{k-1}, 利用性質 $A^j = 0$, $j \geq k$, 就有

$$c_1A^{k-1}\mathbf{x} + c_2A^k\mathbf{x} + \cdots + c_kA^{2k-2}\mathbf{x} = c_1A^{k-1}\mathbf{x} = \mathbf{0}。$$

由已知 $A^{k-1}\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 斷定 $c_1 = 0$, 因此

$$c_2A\mathbf{x} + c_3A^2\mathbf{x} + \cdots + c_kA^{k-1}\mathbf{x} = \mathbf{0}。$$

再將上式左乘 A^{k-2}, 同樣可以推論 $c_2 = 0$, 就得到

$$c_3A^2\mathbf{x} + \cdots + c_kA^{k-1}\mathbf{x} = \mathbf{0}。$$

重複進行上述步驟可以證得 $c_i = 0$, $i = 1, \ldots, k$。 □

Problem 37

Let $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ be a basis for a vector space V and $n \geq 2$. Is the set

$$\{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_{n-1} + \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_1\}$$

also a basis for V?

Solution

設

$$c_1(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + c_2(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + \cdots + c_n(\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_1) = \mathbf{0},$$

展開整理成

$$(c_1 + c_n)\mathbf{v}_1 + (c_1 + c_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (c_{n-1} + c_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{0}。$$

於是有以下齊次線性方程組: $c_1 + c_n = 0$, $c_1 + c_2 = 0, \ldots$, $c_{n-1} + c_n = 0$, c_i 存在非平凡解的充要條件爲

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{n+1} = 0。$$

若 n 爲偶數, c_i 有不全爲零解, 給出的向量集不可作爲 V 的基底; 若 n 爲奇數, $c_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, 向量集可爲 V 的基底。 □

Problem 38

Vandermonde matrices are descirbed by

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^{n-1} \end{bmatrix},$$

in which $x_i \neq x_j$, for all $i \neq j$. Show that if $n \leq m$, the columns of V are linearly independent.

Solution

考慮齊次方程

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}。$$

對於 $i = 1, 2, \ldots, m$, 也就有

$$c_0 + c_1 x_i + c_2 x_i^2 + \cdots + c_{n-1} x_i^{n-1} = 0。$$

這指出多項式

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$$

有 m 個相異根, x_i, $i = 1, 2, \ldots, m$。根據代數學基本定理, $(n-1)$ 階多項式 $p(x)$ 至多存在 $(n-1)$ 個相異根, 但已知 $n \leq m$, 上述齊次方程成立的條件必須是 $c_0 = c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0$, 因此證得 V 的行向量是線性獨立的。 $\square$

Problem 39

If A is an $m \times n$ matrix and B is an $n \times p$ matrix, prove that

$$\text{rank}A + \text{rank}B - n \leq \text{rank}AB.$$

This is called *Sylvester's inequality.*

Solution

我們從秩–零度定理下手, 即 $\dim\ N(A) = n - \text{rank}A$。如果能夠證明

$$\text{rank}B - \text{rank}AB \leq \dim\ N(A),$$

等於證得給出的命題爲眞。關鍵想法是要聯繫 $\text{rank}B$ 和 $\text{rank}AB$, 考慮這個情境: 設線性轉換 $T : C(B) \to \mathbb{C}^m$, 也就是說 T 的定義域爲 $C(B)$, 對於 $\mathbf{x} \in C(B)$, 其像爲 $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, 也可以說 $T(\mathbf{y}) = AB\mathbf{y}$, 但 $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^p$。秩–零度定理的線性轉換語言陳述爲

$$\dim\ \text{ima}(T) + \dim\ \ker(T) = \dim\ C(B),$$

但是 $\dim\ \text{ima}(T) = \dim\ C(AB) = \text{rank}AB$, 且 $\dim\ C(B) = \text{rank}B$, 可推知

$$\dim\ \ker(T) = \text{rank}B - \text{rank}AB\text{。}$$

然而 $C(B) \subseteq \mathbb{C}^n$, 轉換 T 的核僅爲 A 其零空間 $N(A)$ 的部分集合 (子空間), 故 $\dim\ \ker(T) \le \dim N(A)$, 因此得證。 $\square$

Problem 40

Suppose A is an $m \times n$ matrix.

(a) Prove that there exist an $m \times m$ invertible matrix P and an $n \times n$ invertible matrix Q such that

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

where r is the rank of A.

(b) Suppose that A with rank r can be factorized as

$$A = U \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V,$$

where U is an $m \times m$ invertible matrix and V is an $n \times n$ invertible matrix. Decribe the column space of A and the row space of A in terms of U and V.

Solution

(a) 對矩陣 A 執行消去法化簡至最簡列梯形矩陣, 設 $m \times m$ 階可逆矩陣 P 爲所執行過所有基本矩陣的乘積, 再於化簡所得矩陣右乘一排列矩陣使其軸行全部移動至最左邊,

因爲 rank$A=r$, 故得到

$$PAS=\begin{bmatrix} I_r & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=R,$$

其中 S 是 $n\times n$ 階排列矩陣, 注意 P 和 S 都是可逆的。接著再對 $n\times m$ 階矩陣 R^T 進行列運算化簡, 設 $n\times n$ 階可逆矩陣 T^T 表示執行過的基本矩陣乘積, 因 rank$R^T=r$, 就有

$$T^TR^T=T^T\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ F^T & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=J^T。$$

上式結果 J^T 爲 $n\times m$ 階矩陣, 由 $J=RT$, 再將 $R=PAS$ 代入得到 $PAST=J$, 令 $Q=ST$, 故 $PAQ=J$, 此即爲所求。

(b) 將 U 和 V 矩陣切割爲適當分塊便可以清楚地描述 A 的行空間和列空間, 如下:

$$U=\begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix},\quad V=\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}。$$

分塊 U_1 包含 U 的前 r 個行向量, V_1 包含 V 的前 r 個列向量, 因此 A 即爲

$$A=\begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}。$$

考慮矩陣 A 的第一種形式:

$$A=\begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V=\begin{bmatrix} U_1 & 0 \end{bmatrix}V,$$

因 V 是可逆的, $C(V)=\mathbb{C}^n$, 所以 A 的行空間基底由 U_1 的行向量構成。從第二種形式:

$$A=U\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=U\begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

因 U 是可逆矩陣, $C(U)=\mathbb{C}^m$, 故 A 的列空間基底由 V_1 的列形成。 □

Problem 41

Let A be an $n\times n$ matrix. Prove that there is an invertible matrix B such that BA is a projection.

Solution

設 A 的行空間 $C(A)$ 維度爲 r, 則零空間 $N(A)$ 維度爲 $n-r$。令 $\{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_r\}$ 爲 A 的行空間基底, 將此基底擴充爲 $\mathbb{C}^n$ 的基底: $\{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_r,\mathbf{x}_{r+1},\dots,\mathbf{x}_n\}$。因爲任一 $i=1,\dots,r$, $\mathbf{x}_i\in C(A)$, 我們可以找到 $\mathbf{y}_i$ 使得 $A\mathbf{y}_i=\mathbf{x}_i$。再設 $\{\mathbf{y}_{r+1},\dots,\mathbf{y}_n\}$ 爲零空間 $N(A)$ 基底, 下面我們證明 $\{\mathbf{y}_1,\dots,\mathbf{y}_n\}$ 爲線性獨立集, 故可爲 $\mathbb{C}^n$ 基底。考慮 $c_1\mathbf{y}_1+\cdots+c_n\mathbf{y}_n=\mathbf{0}$, 因爲 $\mathbf{y}_i\in N(A)$, $i=r+1,\dots,n$, 就有

$$A\left(\sum_{i=1}^n c_i\mathbf{y}_i\right)=\sum_{i=1}^r c_iA\mathbf{y}_i=\sum_{i=1}^r c_i\mathbf{x}_i=\mathbf{0}。$$

但 $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_r$ 爲 $C(A)$ 的基底向量, 因此是線性獨立集, 推知 $c_1=\cdots=c_r=0$, 也就有 $c_{r+1}\mathbf{y}_{r+1}+\cdots+c_n\mathbf{y}_n=\mathbf{0}$, 又因爲 $\mathbf{y}_{r+1},\dots,\mathbf{y}_n$ 爲 $N(A)$ 的基底, 可斷定 $c_{r+1}=\cdots=c_n=0$。現在我們有兩組 $\mathbb{C}^n$ 基底: $\{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n\}$ 和 $\{\mathbf{y}_1,\dots,\mathbf{y}_n\}$。令可逆矩陣 B 滿足 $B\mathbf{x}_i=\mathbf{y}_i$, $i=1,\dots,n$。對於 $i=1,\dots,r$, $BA\mathbf{y}_i=B\mathbf{x}_i=\mathbf{y}_i$, 對於 $i=r+1,\dots,n$, $BA\mathbf{y}_i=B\mathbf{0}=\mathbf{0}$, 證得 BA 爲一投影矩陣。 $\square$

Problem 42

Let A and B be n by n matrices. If $AB=0$, show that the dimension of the nullspace of BA is at least $n/2$.

Solution

令 $B=\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_n\end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_j\in\mathbb{C}^n$, 已知條件可寫爲

$$AB=A\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A\mathbf{b}_1 & \cdots & A\mathbf{b}_n\end{bmatrix}=0,$$

得知 $\mathbf{b}_j\in N(A)$, $j=1,\dots,n$, 亦即 $C(B)\subseteq N(A)$, 就有 $\text{rank}B\le\dim N(A)$。由秩–零度定理, $\text{rank}A+\dim N(A)=n$, 可推出 $\text{rank}B\le n-\text{rank}A$, 又因爲 $\text{rank}(BA)\le\min\{\text{rank}A,\text{rank}B\}$, 就有

$$\text{rank}(BA)\le\min\{\text{rank}A,n-\text{rank}A\}。$$

上式指出 $\text{rank}(BA)\le n/2$, 再使用秩–零度定理, 可得

$$\text{dim}N(BA)=n-\text{rank}(BA)\ge n/2。$$

$\square$

Problem 43

Let A be an n by n matrix of the form

$$A = P \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1},$$

where P and D are $n \times n$ and $r \times r$, $r \leq n$, nonsingular matrices, respectively. Prove the following statements.

(a) There exists a nonsingular matrix B such that $A^2 = BA$.

(b) $\text{rank} A = \text{rank} A^2$

(c) The column space of A and the nullspace of A are disjoint, i.e., $C(A) \cap N(A) = \{\mathbf{0}\}$.

Solution

(a) 設計以下的分塊乘法

$$A^2 = P \begin{bmatrix} D^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} P^{-1} P \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = BA,$$

上式中 $B = P \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} P^{-1}$ 是可逆的。

(b) 證明 $(a) \Rightarrow (b)$。因爲可逆矩陣不改變矩陣秩, $\text{rank} A^2 = \text{rank}(BA) = \text{rank} A$。

(c) 證明 $(b) \Rightarrow (c)$。設 $\text{rank} A = \text{rank} A^2$, 由秩-零度定理可知 $\dim N(A) = \dim N(A^2)$。又因爲 $N(A) \subseteq N(A^2)$, 故 $N(A) = N(A^2)$。設 $\mathbf{x} \in C(A) \cap N(A)$, 就有 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 且存在 $\mathbf{y}$ 使得 $\mathbf{x} = A\mathbf{y}$, 則

$$A\mathbf{x} = A(A\mathbf{y}) = A^2\mathbf{y} = \mathbf{0}。$$

推論 $\mathbf{y} \in N(A^2) = N(A)$, $A\mathbf{y} = 0$, 所以 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$。 $\square$

Problem 44

Let A and B be nonsingular $n \times n$ matrices. Prove that

$$\text{rank}(A - B) = \text{rank}(A^{-1} - B^{-1}).$$

Solution

關鍵在於聯繫 $A - B$ 和 $A^{-1} - B^{-1}$, 觀察後不難得到下式:

$$B^{-1} - A^{-1} = B^{-1}(A - B)A^{-1}。$$

已知 A^{-1} 和 B^{-1} 是可逆的, 就有 $\text{rank}(B^{-1} - A^{-1}) = \text{rank}(A - B)$, 矩陣與非零常數相乘不改變矩陣秩, 故 $\text{rank}(A^{-1} - B^{-1}) = \text{rank}(B^{-1} - A^{-1})$, 證得原命題。補充解釋爲何與可逆矩陣相乘不改變原矩陣的秩。設 A 爲 $m \times m$ 階可逆矩陣, B 爲 $m \times n$, 有這個事實: AB 和 B 的零空間相同, $N(AB) = N(B)$。證明如下: 若 $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 顯然 $AB\mathbf{x} = \mathbf{0}$。反之, 若 $AB\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 同時左乘 A^{-1}, 就有 $A^{-1}AB\mathbf{x} = B\mathbf{x} = \mathbf{0}$。再來利用秩–零度定理可得 $\text{rank}(AB) = n - \dim N(AB)$, $\text{rank}B = n - \dim N(B)$, 故 $\text{rank}(AB) = \text{rank}B$。另一方面, 若 BA 是合法運算, 且 A 是可逆的, 則利用上述結果以及 $\text{rank}A^T = \text{rank}A$, 就有 $\text{rank}(BA) = \text{rank}(BA)^T = \text{rank}(A^TB^T) = \text{rank}B^T = \text{rank}B$。 □

Problem 45

Suppose A and B are $n \times n$ matrices and A is nonsingular. Let $B = A - UQV$, where U is $n \times p$, Q is $p \times m$, and V is $m \times n$. Show that if B is nonsingular then $I - VA^{-1}UQ$ is nonsingular, and vice versa.

Solution

若 B 是可逆的, 利用反證法, 假設 $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ 且 $(I - VA^{-1}UQ)\mathbf{y} = \mathbf{0}$。令 $\mathbf{x} = A^{-1}UQ\mathbf{y}$, 則 $V\mathbf{x} = \mathbf{y}$, 這指出 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$。將上式左乘 A, 就有 $A\mathbf{x} = UQ\mathbf{y}$, 因此

$$B\mathbf{x} = A\mathbf{x} - UQV\mathbf{x} = A\mathbf{x} - UQ\mathbf{y} = \mathbf{0}。$$

這與原假設 B 是可逆矩陣矛盾, 可知 $I - VA^{-1}UQ$ 的零空間不含非零向量, 故 $I - VA^{-1}UQ$ 是可逆的。

若 $I - VA^{-1}UQ$ 是可逆的, 仍使用反證法, 假設有 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 使得 $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 就有 $A\mathbf{x} = UQV\mathbf{x}$。左乘 A^{-1}, 可得 $\mathbf{x} = A^{-1}UQV\mathbf{x} = A^{-1}UQ\mathbf{y}$。將上面結果代入以下算式

$$(I - VA^{-1}UQ)\mathbf{y} = \mathbf{y} - V\mathbf{x} = \mathbf{0}。$$

因為 $I - VA^{-1}UQ$ 是可逆的, 必定有 $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, 也就有 $V\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 這又使 $A\mathbf{x} = B\mathbf{x} + UQV\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 與 A 是可逆矩陣矛盾, 推知 B 的零空間不含非零向量, B 是可逆的。 $\square$

Problem 46

Let A and B be $n \times n$ matrices. Prove that $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}AB$ if and only if

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & I_n \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} A & 0 \\ I_n & B \end{bmatrix}.$$

Solution

重排序矩陣的行列不改變矩陣秩, 因此

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & I_n \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & A \\ I_n & B \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} I_n & B \\ 0 & A \end{bmatrix} = n + \mathrm{rank}A。$$

上面最後一個步驟由計算軸列數而得。矩陣乘以一可逆矩陣也不改變矩陣秩, 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A & 0 \\ I_n & B \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} I_n & B \\ A & 0 \end{bmatrix} &= \mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & B \\ A & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \mathrm{rank}\begin{bmatrix} I_n & B \\ 0 & -AB \end{bmatrix} = n + \mathrm{rank}AB。\end{aligned}$$

比較上面兩式即證得所求。 $\square$

Problem 47

Suppose A is an $m \times n$ real matrix.

(a) If $A^TA\mathbf{x} = \mathbf{0}$, show that $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(b) Show that A and A^TA have the same nullspace.

(c) Show that A and A^TA have the same row space, and thus $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}A^TA$.

Solution

(a) 左乘 $\mathbf{x}^T$ 於 $A^TA\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 即得 $\mathbf{x}^TA^TA\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^TA\mathbf{x} = \|A\mathbf{x}\|^2 = 0$, 推知 $A\mathbf{x} = 0$。另一個做法是利用子空間的交集關係, 由 $A^T(A\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ 可知 $A\mathbf{x} \in N(A^T)$, 但是 $A\mathbf{x}$ 屬於行空間 $C(A)$, 再利用子空間互補關係 $N(A^T) \cap C(A) = \{\mathbf{0}\}$ 可確定 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$。

(b) 若 $\mathbf{x} \in N(A)$, 即 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 也就有 $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{0} = \mathbf{0}$, 這指出 $\mathbf{x} \in N(A^TA)$, 因此 $N(A) \subseteq N(A^TA)$。題 (a) 已說明 $N(A^TA) \subseteq N(A)$, 故推論得 $N(A) = N(A^TA)$。

(c) 矩陣的列空間爲其零空間的正交互補, 即 $C(A^T) = N(A)^\perp$, $C(A^TA) = N(A^TA)^\perp$。利用題 (b) 結論 $N(A) = N(A^TA)$, 可得 $C(A^T) = C(A^TA)$, 也因此 $\text{rank}A = \dim C(A^T) = \dim C(A^TA) = \text{rank}A^TA$。 □

Problem 48

(a) Suppose A is an n by n matrix of rank r. Show that A may be written as a sum of rank-one matrices:

$$A = \mathbf{x}_1\mathbf{y}_1^T + \cdots + \mathbf{x}_r\mathbf{y}_r^T,$$

where $\mathbf{x}_i$ and $\mathbf{y}_i$, $i = 1, \ldots, r$, are n-dimensional vectors.

(b) Suppose B is an n by n matrix of the form

$$B = \mathbf{x}_1\mathbf{y}_1^T + \cdots + \mathbf{x}_r\mathbf{y}_r^T.$$

If n-dimensional vectors $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ are independent, what conditions of $\mathbf{y}_i$'s must be satisfied so that the rank of B is r?

(c) Suppose X is a 3×2 matrix, and Y is a 2×5 matrix. How many possible dimensions of the nullspace of XY are there?

Solution

(a) 矩陣 A 的行空間基底向量數是 r, 令 A 的行空間基底爲線性獨立向量集合 $\{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_r\}$, 則 A 的每一行 $\mathbf{a}_j$ 都可用唯一方式表示爲此基底向量的線性組合。對於 $j=1,\ldots,n$, 便有唯一確定的 y_{ij}'s 使

$$\mathbf{a}_j = y_{1j}\mathbf{x}_1 + \cdots + y_{rj}\mathbf{x}_r。$$

以行作爲計算單位來實現矩陣乘法, 表現形式如下:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{r1} & \cdots & y_{rn} \end{bmatrix}。$$

將上式右邊的權重矩陣以其列向量表示, 再以行-列相乘展開, 可得

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{y}_r^T \end{bmatrix} = \mathbf{x}_1\mathbf{y}_1^T + \cdots + \mathbf{x}_r\mathbf{y}_r^T。$$

(b) 將基底向量 $\{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_r\}$ 擴充爲 n-維向量空間的基底: $\{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_r,\mathbf{x}_{r+1},\ldots,\mathbf{x}_n\}$, B 於是可寫爲

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_r & \mathbf{x}_{r+1} & \ldots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{y}_r^T \\ \mathbf{0}^T \\ \vdots \\ \mathbf{0}^T \end{bmatrix} = XY。$$

$n\times n$ 階矩陣 X 由 n 個基底向量構成, 因此是可逆的。任意矩陣 Y 與可逆矩陣 X 相乘並不改變其秩, 故 $\mathrm{rank}B=\mathrm{rank}Y$。爲滿足條件 $\mathrm{rank}B=r$, 矩陣 Y 的前 r 個列 (亦即非零列) 必須是線性獨立的, 即 $\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_r$ 爲一組線性獨立向量。

(c) 將矩陣 XY 的各行視爲 X 的行向量之線性組合, 3×2 階矩陣 X 僅有2行, 因此不論任何 Y, 總有 $0\le \mathrm{rank}XY\le 2$。矩陣 XY 爲 3×5 階, 利用秩-零度定理推得 $\dim N(XY)=5-\mathrm{rank}XY$, 故 $\dim N(XY)$ 可能爲 3, 4, 5。 □

Problem 49

Suppose A is an $m \times n$ real matrix with full row rank, i.e., $\text{rank}A = m$. Which of the following equations always have a solution (possibly infinitely many) for any legal $\mathbf{b}$?

(a) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

(b) $A^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$

(c) $A^TA\mathbf{x} = \mathbf{b}$

(d) $AA^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$

(e) $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$

(f) $AA^T\mathbf{x} = A\mathbf{b}$

Solution

(a) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 總是有解, 因爲 $\text{dim}C(A) = \text{rank}A = m$, 所以 $C(A) = \mathbb{R}^m$。

(b) $A^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 可能沒有解, 因爲 $\text{dim}C(A^T) = \text{rank}A = m$, 但 $\mathbf{b}$ 可以是 $\mathbb{R}^n$ 中的任意向量。當 $n > m$ 時, A^T 的行空間 (維度爲 m) 未能充滿整個 $\mathbb{R}^n$ 空間。

(c) $A^TA\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 可能無解, 推論如下: 因爲 $N(A) = N(A^TA)$, 其互補空間亦相等, 即 $N(A)^\perp = N(A^TA)^\perp$, 也就是 $C(A^T) = C(A^TA)$。由題 (b), $\text{dim}C(A^TA) = \text{dim}C(A^T) = m$, 因此得知 $n \times n$ 階矩陣 A^TA 的行空間是 $\mathbb{R}^n$ 空間內維度爲 m 的子空間。

(d) $AA^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 恆有唯一解, AA^T 是 $m \times m$ 階矩陣, 由題 (c) 可知 $C(AA^T) = C(A)$, 即 $\text{dim}C(AA^T) = \text{dim}C(A) = m$, AA^T 是滿秩, 故爲可逆矩陣。

(e) $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ 總是有解的, 利用題 (a) 結果, 任何 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解也必爲 $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ 的解。

(f) $AA^T\mathbf{x} = A\mathbf{b}$ 有唯一解, 直接利用題 (d), 矩陣 AA^T 是可逆的。 $\square$

Problem 50

Suppose $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ are linearly dependent and $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ are linearly independent.

(a) Show that $\mathbf{v}_1$ is a linear combination of $\mathbf{v}_2$ and $\mathbf{v}_3$.

(b) Show that $\mathbf{v}_4$ is not a linear combination of $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, and $\mathbf{v}_3$.

Solution

(a) 因爲 $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ 線性相依, 即知存在不全爲零的 c_1, c_2, c_3 使得 $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$。若 $c_1 = 0$, 則 c_2 或 c_3 不爲零, 也就是說 $\mathbf{v}_2$ 和 $\mathbf{v}_3$ 線性相依。但這與 $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ 是線性獨立集矛盾, 故推論 $c_1 \neq 0$。向量 $\mathbf{v}_1$ 可表示爲 $\mathbf{v}_2$ 和 $\mathbf{v}_3$ 的線性組合, 如下:

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{1}{c_1}(c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3)。$$

(b) 假設 $\mathbf{v}_4$ 可表示爲 $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ 和 $\mathbf{v}_3$ 的線性組合, 令 $\mathbf{v}_4 = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + d_3\mathbf{v}_3$。代入 (a) 的 $\mathbf{v}_1$ 表達式, 則 $\mathbf{v}_4$ 可表示爲 $\mathbf{v}_2$ 和 $\mathbf{v}_3$ 的線性組合。但這與 $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ 是線性獨立集矛盾, 因此得證。 $\square$

Problem 51

Let A be an $n \times n$ matrix. If $\text{rank}A = \text{rank}A^2$, show that $N(A) = N(A^2)$, i.e., $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ and $A^2\mathbf{x} = \mathbf{0}$ have the same solution space.

Solution

若 $\mathbf{x} \in N(A)$, 即 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 則 $A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, 這說明 $N(A) \subseteq N(A^2)$。利用已知條件 $\text{rank}A = \text{rank}A^2$, 以及秩-零度定理 $\text{rank}A + \dim N(A) = n$ 和 $\text{rank}A^2 + \dim N(A^2) = n$, 可得 $\dim N(A) = \dim N(A^2)$, 也就證明 $N(A) = N(A^2)$。 $\square$

Problem 52

Let A be an $n \times n$ matrix and $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{C}^n$ be linearly independent. Show that A is nonsingular if and only if $A\mathbf{v}_1, \ldots, A\mathbf{v}_n$ are linearly independent.

Solution

若 A 是可逆矩陣, 考慮

$$c_1 A\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n A\mathbf{v}_n = \mathbf{0}。$$

左乘 A^{-1} 即得 $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$。因爲 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 爲一線性獨立集, 可知 $c_1 = \cdots = c_n = 0$, 因此證明 $A\mathbf{v}_1, \ldots, A\mathbf{v}_n$ 線性獨立。另一方面, 若 A 不可逆, 則存在 $\mathbf{x} = d_1\mathbf{v}_1 + \cdots + d_n\mathbf{v}_n \neq \mathbf{0}$ 使得 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$。換句話說, $d_1, \ldots, d_n$ 不全爲零, 且

$$A(d_1\mathbf{v}_1 + \cdots + d_n\mathbf{v}_n) = d_1 A\mathbf{v}_1 + \cdots + d_n A\mathbf{v}_n = \mathbf{0},$$

這指出 $A\mathbf{v}_1, \ldots, A\mathbf{v}_n$ 線性相依。 □

Problem 53

Let $\mathcal{V}$ be the solution space of

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$$

and $\mathcal{W}$ be the solution space of

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n,$$

where $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. Show that $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W} = \mathbb{R}^n$.

Solution

欲證明 $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W} = \mathbb{R}^n$, 只需要證明 $\dim\mathcal{V} + \dim\mathcal{W} = n$ 且 $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$ 即可。第一式 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 包含 n 個未知變數, 故 $\dim\mathcal{V} = n - 1$。第二組線性方程的解爲 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \alpha$, 故 $\dim\mathcal{W} = 1$。再將 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \alpha$ 代入第一式, 就有 $\alpha + \alpha + \ldots + \alpha = 0$, 得到 $\alpha = 0$, 即證明 $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$。 □

Problem 54

Let A be an $n \times n$ matrix. Show that

$$N(A) \subseteq C(I - A)$$

and

$$N(I - A) \subseteq C(A).$$

Solution

令 $\mathbf{x}$ 為一 n 維向量, 利用下列關係式進行推論:

$$\mathbf{x} = A\mathbf{x} + (I - A)\mathbf{x}。$$

若 $\mathbf{x} \in N(A)$, 即 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 則 $\mathbf{x} = (I - A)\mathbf{x}$, 這說明 $\mathbf{x} \in C(I - A)$。若 $\mathbf{x} \in N(I - A)$, 即 $(I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 則 $\mathbf{x} = A\mathbf{x}$, 推論 $\mathbf{x} \in C(A)$。 $\square$

Problem 55

Let T be an $n \times n$ upper triangular matrix. Show that λ appears one the diagonal of T precisely $\dim N((T - \lambda I)^n)$ times, where $N(A)$ denotes the nullspace of A.

Solution

設 $n \times n$ 階上三角形矩陣 T 有 m 個主對角元 λ, 則 $T - \lambda I$ 有 m 個主對角元 0, 也就是說 $T - \lambda I$ 有 $n - m$ 個非零主對角元, 所以 $\text{rank}(T - \lambda I) = n - m$。根據秩-零度定理, $\text{rank}((T - \lambda I)^n) = n - \dim N((T - \lambda I)^n)$, 接下來只要證明 $\text{rank}((T - \lambda I)^n) = \text{rank}(T - \lambda I)$ 即可證得 $m = \dim N((T - \lambda I)^n)$。將上三角形矩陣 $T - \lambda I$ 分解為 $T - \lambda I = D + U$, 其中 D 是主對角矩陣, U 是上三角形矩陣且主對角元全部是零, 則 $\text{rank}(T - \lambda I) = \text{rank}D$。利用二項式定理,

$$(T - \lambda I)^n = (D + U)^n = D^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} U^k。$$

對於 $k \geq 1$, $D^{n-k}U^k$ 的主對角元皆為零, 因此 $(T - \lambda I)^n$ 的主對角元恰為 D^n 的主對角元, 就有 $\text{rank}((T - \lambda I)^n) = \text{rank}D^n$。明顯地, $\text{rank}D^n = \text{rank}D$, 故 $\text{rank}((T - \lambda I)^n) = \text{rank}D = \text{rank}(T - \lambda I)$。 $\square$

Problem 56

Let A be an $n \times n$ matrix. Show that $S = \{X | AX = XA\}$, the set of all the matrices commuting with A, is a vector space.

Solution

只需要證明 S 滿足矩陣加法和純量乘法封閉性即可。令 $X, Y \in S$, 則 $AX = XA$ 且 $AY = YA$。計算

$$A(X+Y) = AX + AY = XA + YA = (X+Y)A,$$

故 $X + Y \in S$。對於任意純量 c,

$$A(cX) = c(AX) = c(XA) = (cX)A,$$

故 $cX \in S$。因此證得 S 是一向量空間。 $\square$

Problem 57

Let $A_1, A_2, \ldots, A_m$ be $n \times n$ matrices. If $A_1 A_2 \cdots A_m = 0$, prove that

$$\text{rank}A_1 + \text{rank}A_2 + \cdots + \text{rank}A_m \leq (m-1)n.$$

Solution

設 A 和 B 爲 $n \times n$ 階矩陣, 以下不等式成立:

$$\text{rank}(AB) \geq \text{rank}A + \text{rank}B - n。$$

重複利用上述性質, 可得

$$\begin{aligned}
\text{rank}(A_1 A_2 \cdots A_k) &\geq \text{rank}A_1 + \text{rank}(A_2 \cdots A_m) - n \\
&\geq \text{rank}A_1 + \text{rank}A_2 + \text{rank}(A_3 \cdots A_m) - 2n \\
&\geq \cdots \\
&\geq \text{rank}A_1 + \text{rank}A_2 + \cdots + \text{rank}A_m - (m-1)n,
\end{aligned}$$

但已知 $\text{rank}(A_1 A_2 \cdots A_m) = \text{rank}0 = 0$, 因此得證。 $\square$

Problem 58

Let A be an $n \times n$ complex matrix. If $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k\}$ is a basis for the column space of A and if $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ is such a set of vectors of $\mathbb{C}^n$ that

$$A\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i, \quad i = 1, \ldots, k,$$

show that

$$\operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\} \oplus N(A) = \mathbb{C}^n,$$

where $N(A)$ denotes the nullspace of A.

Solution

令 $\{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_l\}$ 是 $N(A)$ 的一基底。欲證明 $\operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\} \oplus N(A) = \mathbb{C}^n$, 只要證明 $\operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_l\} = \mathbb{C}^n$ 且 $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_l\}$ 是一線性獨立集即可。對於任一 $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, $A\mathbf{v}$ 屬於 A 的行空間 $C(A)$。將 $A\mathbf{v}$ 表示爲

$$\begin{aligned} A\mathbf{v} &= c_1\mathbf{y}_1 + \cdots + c_k\mathbf{y}_k \\ &= c_1A\mathbf{x}_1 + \cdots + c_kA\mathbf{x}_k, \end{aligned}$$

就有

$$A(\mathbf{v} - c_1\mathbf{x}_1 - \cdots - c_k\mathbf{x}_k) = \mathbf{0}。$$

這說明 $\mathbf{v} - c_1\mathbf{x}_1 - \cdots - c_k\mathbf{x}_k \in N(A)$, 故令

$$\mathbf{v} - c_1\mathbf{x}_1 - \cdots - c_k\mathbf{x}_k = d_1\mathbf{z}_1 + \cdots + d_l\mathbf{z}_l,$$

則

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k + d_1\mathbf{z}_1 + \cdots + d_l\mathbf{z}_l,$$

證得 $\mathbb{C}^n = \operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_l\}$。再考慮 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, 上式左乘 A, 即得

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= c_1A\mathbf{x}_1 + \cdots + c_kA\mathbf{x}_k + d_1A\mathbf{z}_1 + \cdots + d_lA\mathbf{z}_l \\ &= c_1A\mathbf{x}_1 + \cdots + c_kA\mathbf{x}_k \\ &= c_1\mathbf{y}_1 + \cdots + c_k\mathbf{y}_k。 \end{aligned}$$

因爲 $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k\}$ 是行空間 $C(A)$ 的基底, 推論 $c_1 = \cdots = c_k = 0$, 於是有

$$\mathbf{0} = d_1\mathbf{z}_1 + \cdots + d_l\mathbf{z}_l,$$

同樣道理, 因爲 $\{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_l\}$ 是零空間 $N(A)$ 的基底, 可知 $d_1 = \cdots = d_l = 0$, 證得 $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_l\}$ 是一線性獨立集。 $\square$

Problem 59

Let A and B be $m \times n$ and $p \times n$ matrices, respectively. If $\text{rank}A + \text{rank}B < n$, show that there exists a nonzero n-dimensional vector $\mathbf{x}$ such that $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ and $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Solution

證明 $N(A) \cap N(B) \neq \{\mathbf{0}\}$ 即證得原命題。考慮零空間 $N(A)$ 和 $N(B)$ 的容斥關係,

$$\dim(N(A) + N(B)) = \dim N(A) + \dim N(B) - \dim(N(A) \cap N(B))。$$

利用秩–零度定理, $\text{rank}A + \dim N(A) = n$, $\text{rank}B + \dim N(B) = n$, 即有

$$\dim(N(A) \cap N(B)) = n - \text{rank}A + n - \text{rank}B - \dim(N(A) + N(B))。$$

使用已知條件 $\text{rank}A + \text{rank}B < n$, 而且 $N(A) + N(B)$ 爲 $\mathbb{C}^n$ 的子空間, 可以推論 $\dim(N(A) \cap N(B)) > n - \dim(N(A) + N(B)) \geq 0$. $\square$

Problem 60

Let A and B be 5×7 and 7×6 matrices, respectively. If $\text{rank}A = 3$ and $\text{rank}B = 5$, find all possible values of $\text{rank}(AB)$.

Solution

我們從矩陣乘積 AB 的行空間分析著手。因爲 $C(AB) \subseteq C(A)$, 可知 $\dim C(AB) \leq \dim C(A)$, 亦即 $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}A$。轉置不改變矩陣秩, 就有

$$\text{rank}(AB) = \text{rank}(AB)^T = \text{rank}(B^TA^T) \leq \text{rank}B^T = \text{rank}B,$$

故得到 rank(AB) 上界:

$$\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}A, \text{rank}B\}。$$

矩陣乘積可視爲變換 A 具有定義域 $C(B)$, 值域 $C(AB)$, 零空間 $C(B) \cap N(A)$。由秩–零度定理, 可得

$$\dim C(B) = \dim C(AB) + \dim(C(B) \cap N(A)),$$

改寫爲

$$\text{rank}(AB) = \text{rank}B - \dim(C(B) \cap N(A))。$$

但是 $C(B) \cap N(A) \subseteq N(A)$, 也就有 $\dim(C(B) \cap N(A)) \leq \dim N(A) = n - \text{rank}A$, 故得到 rank$(AB)$ 下界:

$$\text{rank}(AB) \geq \text{rank}B + \text{rank}A - n。$$

最後代入數值 $n = 7$, rank$A = 3$, rank$B = 5$, 即得 $1 \leq \text{rank}(AB) \leq 3$。 □

Problem 61

If A and B are $m \times n$ and $n \times m$ matrices, respectively, such that rank$(AB) = n$ and $(AB)^2 = k(AB)$, where $k \neq 0$, show that $BA = kI_n$.

Solution

利用矩陣乘法的矩陣秩性質, rank$(XY) \leq \min\{\text{rank}X, \text{rank}Y\}$, 即知

$$\text{rank}(BA) \geq \text{rank}(A(BA)B) = \text{rank}(AB)^2 = \text{rank}(AB) = n。$$

由此判斷 $n \times n$ 矩陣 BA 可逆。另一方面,

$$(BA)^3 = B(AB)^2A = B(kAB)A = k(BA)^2。$$

因爲 BA 可逆, 故得 $BA = kI_n$。 □

Problem 62

The following statements are false. For matrices of appropriate sizes, construct a counterexample.

(a) If $\text{rank}A = \text{rank}B$, then $\text{rank}(A^2) = \text{rank}(B^2)$.

(b) If $A^2 = B^2$, then $A = B$ or $A = -B$.

(c) If $\text{rank}(AB) = 0$, then $\text{rank}(BA) = 0$.

(d) If $\text{rank}(AB) = 0$, then $\text{rank}A = 0$ or $\text{rank}B = 0$.

Solution

(a) 從一般性質 $\text{rank}(A^2) \leq \text{rank}A$ 下手。設 A, B 爲 2×2 階矩陣, 若 $\text{rank}A = \text{rank}B = 2$, 顯然 $\text{rank}(A^2) = \text{rank}(B^2) = 2$。考慮 $\text{rank}A = \text{rank}B = 1$ 的情況, 不難找出 A 滿足 $\text{rank}(A^2) = \text{rank}A$, 如 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 再設法找出 B 滿足 $\text{rank}(B^2) < \text{rank}B$。當 $C(B) \subseteq N(B)$, B 的行空間在零空間中, 則 $B^2 = BB = 0$, 就有 $\text{rank}(B^2) = 0$, 如 $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$。

(b) 設 A 有特徵值 λ, 則 A^2 有特徵值 λ^2, 利用此性質很容易找到反例, 如 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$。

(c) 若 $\text{rank}(AB) = 0$, 則 $AB = 0$, 所以只要找出 A, B 使得 $AB = 0$ 且 $BA \neq 0$ 即可, 如 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$。

(d) 同題 (c) 的例子。 $\square$

Problem 63

Let A be an $n \times n$ matrix. Prove that if A is idempotent, i.e., $A^2 = A$, then $\text{rank}A + \text{rank}(A - I) = n$.

Solution

寫出 $I = A + (I - A)$, 等號兩邊取矩陣秩, $\text{rank}I = n = \text{rank}(A + (I - A))$, 利用 $\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}A + \text{rank}B$, 即得 $n \leq \text{rank}A + \text{rank}(I - A)$。再將 $A^2 = A$ 改寫成 $A(A - I) = 0$, 此式可解讀爲 $I - A$ 的行空間 (值域) 屬於 A 的零空間 (核), 亦即 $C(I - A) \subseteq N(A)$, 由秩–零度定理即得 $\text{rank}(I - A) \leq \dim N(A) = n - \text{rank}A$, 也就證明了 $\text{rank}A + \text{rank}(A - I) = n$。 $\square$

Problem 64

Let A and B be $n \times n$ matrices, and $\text{rank}A = \text{rank}B$. Show that $A^2B = A$ if and only if $B^2A = B$.

Solution

由於 A 和 B 可互換, 我們只需要證明 $A^2B = A$ 蘊含 $B^2A = B$。若 $A^2B = A$, 利用兩矩陣乘積的秩必不大於相乘矩陣的秩, 即知

$$\text{rank}A = \text{rank}(A^2B) \leq \min\{\text{rank}(A^2), \text{rank}B\},$$

而且 $\text{rank}(A^2) \leq \text{rank}A$, 故知 $\text{rank}(A^2) = \text{rank}A = \text{rank}B$, 這說明 A^2, A 和 B 有相同的零空間維度。若 $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 則 $A\mathbf{x} = A^2B\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, 因此 $N(B) \subseteq N(A)$, $N(B) \subseteq N(A^2)$, 但 $\dim N(B) = \dim N(A) = \dim N(A^2)$, 也就推得 $N(B) = N(A) = N(A^2)$。對於任意 $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, $(A^2B)(A\mathbf{y}) = A(A\mathbf{y}) = A^2\mathbf{y}$, 改寫爲 $A^2(BA\mathbf{y} - \mathbf{y}) = \mathbf{0}$, 這指出 $(BA\mathbf{y} - \mathbf{y}) \in N(A^2)$, 也就有 $B(BA\mathbf{y} - \mathbf{y}) = \mathbf{0}$, 亦即 $B^2A\mathbf{y} = B\mathbf{y}$。上式對任意 n 維向量 $\mathbf{y}$ 皆成立, 故可推論 $B^2A = B$。 $\square$

Problem 65

Let A be an $m \times n$ matrix and B be an $n \times p$ matrix. Denote

$$C = \begin{bmatrix} I_n & B \\ A & 0 \end{bmatrix}.$$

Show that $\text{rank}C = n + \text{rank}(AB)$.

Solution

設計下列分塊矩陣乘法

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & B \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & -B \\ 0 & I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -AB \end{bmatrix},$$

其中 $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_m \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} I_n & -B \\ 0 & I_p \end{bmatrix}$ 爲可逆矩陣, 故不改變矩陣秩。等號右邊矩陣可表示爲分塊直和,

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -AB \end{bmatrix} = I_n \oplus (-AB),$$

即得 $\text{rank}C = \text{rank}I_n + \text{rank}(-AB) = n + \text{rank}(AB)$。 □

Problem 66

Let T be a linear transformation on a finite-dimensional vector space V, and let W be subspace of V. Denote

$$T(W) = \{T(\mathbf{w})|\ \mathbf{w} \in W\}.$$

Prove that $T(W)$ is a subspace of V, and

$$\dim W = \dim T(W) + \dim(\text{Ker}(T) \cap W).$$

Solution

設 $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$, 顯然, $c\mathbf{v} \in W$, c 爲一純量, $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in W$, 就有

$$cT(\mathbf{v}) = T(c\mathbf{v}) \in T(W)$$
$$T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w}) = T(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \in T(W),$$

故 $T(W)$ 爲 V 的一子空間。設 $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ 爲 $\text{Ker}(T) \cap W$ 的基底, 將此基底擴充成 W 基底 $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r\}$。考慮 $\mathbf{w} = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k + d_1\mathbf{w}_1 + \cdots + d_r\mathbf{w}_r$,

則

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{w}) &= T(c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k + d_1\mathbf{w}_1 + \cdots + d_r\mathbf{w}_r) \\
&= c_1T(\mathbf{u}_1) + \cdots + c_kT(\mathbf{u}_k) + d_1T(\mathbf{w}_1) + \cdots + d_rT(\mathbf{w}_r) \\
&= d_1T(\mathbf{w}_1) + \cdots + d_rT(\mathbf{w}_r),
\end{aligned}$$

故 $T(W) = \text{span}\{T(\mathbf{w}_1), \ldots, T(\mathbf{w}_r)\}$。接著我們證明 $T(\mathbf{w}_1), \ldots, T(\mathbf{w}_r)$ 是線性獨立集, 考慮 $\mathbf{0} = d_1T(\mathbf{w}_1) + \cdots + d_rT(\mathbf{w}_r) = T(d_1\mathbf{w}_1 + \cdots + d_r\mathbf{w}_r)$ 推知 $d_1\mathbf{w}_1 + \cdots + d_r\mathbf{w}_r = \mathbf{0}$, 因 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r$ 爲獨立集, 必有 $d_1 = \cdots = d_r = 0$, 證得

$$\text{dim}T(W) = r = (k + r) - k = \text{dim}W - \text{dim}(\text{Ker}(T) \cap W)。$$

$\square$

線性變換

Problem 67

Let V be the vector space of polynomials of degree at most 3 with real coefficients. Let T be the map defined by

$$T(f(x)) = \frac{d^2 f}{dx^2} + 2\frac{df}{dx},$$

for all $f(x) \in V$.

(a) Show that T is a linear transformation.

(b) Find the matrix $[T]_B$ and $[T]_C$ representing T with respect to the bases $\mathfrak{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ and $\mathfrak{C} = \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$, respectively.

(c) Find the matrix M representing the change of bases from $\mathfrak{B}$ to $\mathfrak{C}$.

Solution

(a) 設 $f(x), g(x) \in V$, 則

$$\begin{aligned} T(f(x)+g(x)) &= \frac{d^2(f+g)}{dx^2} + 2\frac{d(f+g)}{dx} = \left(\frac{d^2 f}{dx^2} + 2\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{d^2 g}{dx^2} + 2\frac{dg}{dx}\right) \\ &= T(f(x)) + T(g(x)) \end{aligned}$$

$$T(cf(x)) = \frac{d^2 cf}{dx^2} + 2\frac{dcf}{dx} = c\left(\frac{d^2 f}{dx^2} + 2\frac{df}{dx}\right) = cT(f(x)),$$

這證明了 T 爲線性轉換。

(b) $\mathfrak{B}$ 的基底向量經轉換後爲

$$\begin{aligned} T(1) &= 0 \\ T(x) &= 2 \\ T(x^2) &= 2 + 4x \\ T(x^3) &= 6x + 6x^2, \end{aligned}$$

因此 $T(a+bx+cx^2+dx^3)$ 可表示爲矩陣乘法, 如下:

$$[T(\mathbf{x})]_B = [T]_B[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}。$$

$\mathfrak{C}$ 的基底向量經轉換後爲

$$\begin{aligned} T(1) &= 0 \\ T(1+x) &= 2 \\ T(1+x+x^2) &= 4+4x = 4(1+x) \\ T(1+x+x^2+x^3) &= 4+10x+6x^2 = -6+4(1+x)+6(1+x+x^2), \end{aligned}$$

因此 $T(s+t(1+x)+u(1+x+x^2)+v(1+x+x^2+x^3))$ 可表示爲

$$[T(\mathbf{x})]_C = [T]_C[\mathbf{x}]_C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \\ u \\ v \end{bmatrix}。$$

(c) 令 M 表示基底 $\mathfrak{B}$ 至基底 $\mathfrak{C}$ 的轉換矩陣, 而 M^{-1} 即爲基底 $\mathfrak{C}$ 至基底 $\mathfrak{B}$ 的轉換矩陣。因爲 $\mathfrak{B}$ 爲標準基底, 所以

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

解得其逆矩陣爲

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

利用 $M[\mathbf{x}]_B = [\mathbf{x}]_C$ 和 $M[T(\mathbf{x})]_B = [T(\mathbf{x})]_C$, 可聯繫題 (b) 的兩個轉換: $M[T]_B[\mathbf{x}]_B = [T]_C M[\mathbf{x}]_B$, 即 $M[T]_B = [T]_C M$, 或 $[T]_C = M[T]_B M^{-1}$。驗證如下:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

□

Problem 68

Let A be an $m \times n$ matrix. Prove or disprove the following statements.

(a) If the vectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ in $\mathbb{C}^n$ are linearly independent, so are $A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_k$.

(b) If the vectors $A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_k$ in $\mathbb{C}^m$ are linearly independent, so are $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$.

Solution

(a) 考慮極端情況 $A = 0$, 可知此題陳述不爲眞。延伸討論, 矩陣 A 要滿足什麼條件方能維持 $A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_k$ 的獨立性? 由線性獨立定義, 方程式

$$c_1 A\mathbf{v}_1 + c_2 A\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k A\mathbf{v}_k = A(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}$$

僅有解 $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$, 矩陣 A 的零空間和向量 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$ 的擴張僅交集於零向量, 或者說 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$ 不屬於 A 的零空間。

(b) 利用反證法, 先假設 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ 是線性相依, 則必定存在不全爲零的權重 $c_1, c_2, \ldots, c_k$ 使得

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}。$$

等號兩邊左乘 A,

$$c_1 A\mathbf{v}_1 + c_2 A\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k A\mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

這指出 $A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_k$ 爲線性相依, 與已知條件矛盾, 故得證。 □

Problem 69

Suppose $[T]_E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ is the transformation matrix for a linear transformation T with respect to the standard basis, and $[T]_B = \begin{bmatrix} -9 & -25 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$ is the transformation matrix with respect to $\mathfrak{B}$ basis. Find a set of basis vectors of $\mathfrak{B}$.

Solution

設基底 $\mathfrak{B}$ 包含2-維基底向量集 $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$, 令 $B = [\ \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2\ ]$, B 的兩行向量是線性獨立, 故 B 是可逆的。因轉換矩陣 $[T]_E$ 滿足 $T(\mathbf{x}) = [T]_E\mathbf{x}$, 而參考基底 $\mathfrak{B}$ 的座標向量 $[\mathbf{x}]_B$ 又滿足 $[T(\mathbf{x})]_B = [T]_B[\mathbf{x}]_B$。因爲 $[\mathbf{x}]_B = B^{-1}\mathbf{x}$ 且 $[T(\mathbf{x})]_B = B^{-1}T(\mathbf{x}) = B^{-1}[T]_E\mathbf{x}$, 則 $[T]_B B^{-1} = B^{-1}[T]_E$, 或 $B[T]_B = [T]_E B$。設線性轉換 $L(B) = B[T]_B - [T]_E B$, 問題即爲求轉換 L 的核 (kernel), 即 $L(B) = 0$。令 $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 代入 $L(B)$ 並展開, 可得

$$L(B) = \begin{bmatrix} -10a + 4b - c & -25a + 10b - d \\ -10c + 4d & -25c + 10d \end{bmatrix}。$$

再將此轉換改爲矩陣乘法形式, 如下:

$$L\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -10 & 4 & -1 & 0 \\ -25 & 10 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & 4 \\ 0 & 0 & -25 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}。$$

以消去法化簡至最簡列梯形矩陣:

$$\begin{bmatrix} -10 & 4 & -1 & 0 \\ -25 & 10 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & 4 \\ 0 & 0 & -25 & 10 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{25} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

零空間即爲 $[\frac{2}{5}, 1, 0, 0]^T$ 和 $[-\frac{1}{25}, 0, \frac{2}{5}, 1]$ 的擴張, 寫回 2×2 階矩陣, 滿足 $L(B)=0$ 的矩陣可表示爲

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{5}\alpha - \frac{1}{25}\beta & \alpha \\ \frac{2}{5}\beta & \beta \end{bmatrix},$$

其中的兩行向量就是 $\mathfrak{B}$ 的基底向量:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{5}\alpha - \frac{1}{25}\beta \\ \frac{2}{5}\beta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}。$$

又因爲 B 是可逆矩陣,

$$\det(B) = \begin{vmatrix} \frac{2}{5}\alpha - \frac{1}{25}\beta & \alpha \\ \frac{2}{5}\beta & \beta \end{vmatrix} = -\frac{1}{25}\beta^2 \neq 0,$$

還要再加上條件 $\beta \neq 0$。 $\square$

Problem 70

Let A be a nonzero 2×2 matrix. Consider the following linear transformation

$$T(X) = AX - XA,$$

where X is a 2×2 matrix. If A is diagonalizable, prove that T is also diagonalizable.

Solution

設 $A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$, $i=1,2$, 因爲 A 可對角化, $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ 爲線性獨立向量集。令 2×2 階矩陣 B_{ij} 的第 j 行等於 $\mathbf{x}_i$, 其餘各行爲零, 則 $\mathfrak{B} = \{B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}\}$ 爲所有 2×2 階矩陣形成的向量空間的有序基底。計算各基底向量 B_{ij} 的像 $T(B_{ij}) = AB_{ij} - B_{ij}A$, 如下:

$$\begin{aligned} T(B_{11}) &= AB_{11} - B_{11}A \\ &= A\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{x}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{x}_1 & a_{12}\mathbf{x}_1 \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 B_{11} - a_{11}B_{11} - a_{12}B_{12}。 \end{aligned}$$

以同樣方式可以得到

$$
\begin{aligned}
T(B_{12}) &= AB_{12} - B_{12}A = \lambda_1 B_{12} - a_{21}B_{11} - a_{22}B_{12} \\
T(B_{21}) &= AB_{21} - B_{21}A = \lambda_2 B_{21} - a_{11}B_{21} - a_{12}B_{22} \\
T(B_{22}) &= AB_{22} - B_{22}A = \lambda_2 B_{22} - a_{21}B_{21} - a_{22}B_{22}。
\end{aligned}
$$

所以 T 參考有序基底 $\mathfrak{B}$ 的表示矩陣爲

$$
\begin{aligned}
[T]_{\mathfrak{B}} &= \begin{bmatrix} [T(B_{11})]_{\mathfrak{B}} & [T(B_{12})]_{\mathfrak{B}} & [T(B_{21})]_{\mathfrak{B}} & [T(B_{22})]_{\mathfrak{B}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 - a_{11} & -a_{21} & 0 & 0 \\ -a_{12} & \lambda_1 - a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 - a_{11} & -a_{21} \\ 0 & 0 & -a_{12} & \lambda_2 - a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 I - A^T & 0 \\ 0 & \lambda_2 I - A^T \end{bmatrix}。
\end{aligned}
$$

設 A 可對角化爲 $A = S\Lambda S^{-1}$, 則 $cI - A^T = (S^T)^{-1}(cI - \Lambda)S^T$ 也爲可對角化矩陣, 因此證得所求。 □

Problem 71

If $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ and $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ are bases of $\mathbb{R}^n$, and if

$$
\begin{aligned}
A\mathbf{u}_j &= \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\mathbf{u}_i \\
B\mathbf{v}_j &= \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\mathbf{v}_i,
\end{aligned}
$$

what is the relation between the matrices A and B?

Solution

令 C, U, V 爲 $n \times n$ 階矩陣, $C = [c_{ij}]$, U 的行向量爲 $\mathbf{u}_j$, V 的行向量爲 $\mathbf{v}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$。給出的第一個方程式可寫爲矩陣乘積:

$$
A \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix},
$$

亦即 $AU = UC$, 同理由第二個方程式可得 $BV = VC$。因為 U, V 的行向量都是完整基底, U 和 V 同是可逆矩陣, 故 A 和 C 可表示為 $A = UCU^{-1}$ 和 $C = V^{-1}BV$, 也就有 $A = UV^{-1}BVU^{-1}$。設 $P = UV^{-1}$, 得到 $A = PBP^{-1}$, A 相似於 B。

另外一個做法是利用線性變換觀念, 關鍵想法是聯繫這二組基底向量, 設矩陣 P 表示線性變換滿足 $P\mathbf{v}_j = \mathbf{u}_j$, $j = 1, \dots, n$, 則 $A\mathbf{u}_j = AP\mathbf{v}_j$ 且

$$A\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}P\mathbf{v}_i = P\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\mathbf{v}_i\right) = PB\mathbf{v}_j。$$

因此對於任意 j, $AP\mathbf{v}_j = PB\mathbf{v}_j$, 或 $(AP - PB)\mathbf{v}_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, 推知 $AP - PB$ 的零空間維度等於 n, 即 $\operatorname{rank}(AP - PB) = 0$, 所以 $AP = PB$。矩陣 A, B 其實是參考不同基底的線性變換表示矩陣, 而 P 則是這兩組基底的變換矩陣。 $\square$

Problem 72

Let $\mathfrak{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ be a basis for a vector space $\mathcal{V}$ of dimension 4. Suppose T is a linear transformation on $\mathcal{V}$, and the matrix representation of T with respect to $\mathfrak{B}$ is

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Find the range and kernel of T.

(b) Find a new basis $\mathfrak{B}'$ for $\mathcal{V}$ so that the matrix representation of T with respect to $\mathfrak{B}'$ has the form $\begin{bmatrix} B & 0 \end{bmatrix}$, where B and 0 are 4×2 matrices.

Solution

(a) 將線性變換 T 的表示矩陣 A 化約至簡約列梯陣式:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

由此可知 A 的行空間爲

$$C(A)=\text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\5\\-1\end{bmatrix}\right\},$$

且零空間爲

$$N(A)=\text{span}\left\{\begin{bmatrix}2\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}。$$

故線性變換 T 的值域爲

$$R(T)=\text{span}\{T(\mathbf{v}_1),T(\mathbf{v}_2)\},$$

其中

$$\begin{aligned}T(\mathbf{v}_1)&=\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3+\mathbf{v}_4\\T(\mathbf{v}_2)&=2\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+5\mathbf{v}_3-\mathbf{v}_4,\end{aligned}$$

而 T 的核 (零空間) 爲

$$N(T)=\text{span}\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\},$$

其中

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_1&=2\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3\\\mathbf{w}_2&=\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_4。\end{aligned}$$

(b) 考慮 $\mathcal{V}$ 的一組基底 $\mathfrak{B}'=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\}$。令 $[T(\mathbf{v}_1)]_{\mathfrak{B}'}=(c_1,c_2,c_3,c_4)^T$ 和 $[T(\mathbf{v}_2)]_{\mathfrak{B}'}=(d_1,d_2,d_3,d_4)^T$, 就有

$$\begin{aligned}T(\mathbf{v}_1)&=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{w}_1+c_4\mathbf{w}_2\\&=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3(2\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3)+c_4(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_4)\\&=(c_1+2c_3+c_4)\mathbf{v}_1+(c_2-c_3-c_4)\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3+c_4\mathbf{v}_4\\&=\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3+\mathbf{v}_4,\end{aligned}$$

解得 $c_1 = -2$, $c_2 = 1$, $c_3 = 1$, $c_4 = 1$。同時,

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{v}_2) &= d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + d_3\mathbf{w}_1 + d_4\mathbf{w}_2 \\
&= d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + d_3(2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + d_4(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4) \\
&= (d_1 + 2d_3 + d_4)\mathbf{v}_1 + (d_2 - d_3 - d_4)\mathbf{v}_2 + d_3\mathbf{v}_3 + d_4\mathbf{v}_4 \\
&= 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 5\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4,
\end{aligned}$$

解得 $d_1 = -7$, $d_2 = 5$, $d_3 = 5$, $d_4 = -1$。另外, $T(\mathbf{w}_1) = T(\mathbf{w}_2) = \mathbf{0}$, 所以線性變換 T 參考基底 $\mathfrak{B}'$ 的表示矩陣如下:

$$\begin{aligned}
[T]_{\mathfrak{B}'} &= \begin{bmatrix} [T(\mathbf{v}_1)]_{\mathfrak{B}'} & [T(\mathbf{v}_2)]_{\mathfrak{B}'} & [T(\mathbf{w}_1)]_{\mathfrak{B}'} & [T(\mathbf{w}_2)]_{\mathfrak{B}'} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}。
\end{aligned}$$

□

Problem 73

Let $\mathcal{U}$ and $\mathcal{W}$ be two subspaces of a finite dimensional vector space $\mathcal{V}$. The sum $\mathcal{U}+\mathcal{W}$ is called a direct sum, denoted by $\mathcal{U}\oplus\mathcal{W}$, if every element $\mathbf{x}\in\mathcal{U}+\mathcal{W}$ can be uniquely written as $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, where $\mathbf{u}\in\mathcal{U}$ and $\mathbf{w}\in\mathcal{W}$. Let T be a linear transformation on $\mathcal{V}$. Show that there exists a positive integer n so that

$$\mathcal{V} = R(T^n) \oplus N(T^n),$$

where $R(T^n)$ and $N(T^n)$ denote the range and kernel of T^n, respectively.

Solution

若 $T\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 則 $T^2\mathbf{x} = T(T\mathbf{x}) = T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, 即知 $N(T) \subseteq N(T^2)$, 繼續此程序可推論

$$N(T) \subseteq N(T^2) \subseteq \cdots \subseteq N(T^k) \subseteq N(T^{k+1}) \subseteq \cdots,$$

但 $\mathcal{V}$ 爲一有限維向量空間, 故必定存在一正整數 n 使得對於所有正整數 m 都有 $N(T^n) = N(T^{n+m})$。根據秩-零度定理 $\dim \mathcal{V} = \dim R(T^n) + \dim N(T^n)$, 因此欲證明 $\mathcal{V} = R(T^n) \oplus N(T^n)$, 只須證明 $R(T^n) \cap N(T^n) = \{\mathbf{0}\}$ 即可。令 $\mathbf{x} \in R(T^n) \cap N(T^n)$, 則存在 $\mathbf{y}$ 使得 $\mathbf{x} = T^n\mathbf{y}$ 且 $T^n\mathbf{x} = \mathbf{0}$。合併上面兩式, $\mathbf{0} = T^n\mathbf{x} = T^n(T^n\mathbf{y}) = T^{2n}\mathbf{y}$, 這說明 $\mathbf{y} \in N(T^{2n}) = N(T^n)$, 所以 $\mathbf{x} = T^n\mathbf{y} = \mathbf{0}$, 得證。 □

Problem 74

Let $\mathbf{u} = (1,1,1,1,1)^T$. Evaluate

$$(I_5 + 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T)(I_5 + \mathbf{u}\mathbf{u}^T)^{-1}\mathbf{u}.$$

Solution

將 $I_5 + \mathbf{u}\mathbf{u}^T$ 視爲一線性變換。考慮 $\mathbf{u}$ 的映射, 因爲 $\mathbf{u}^T\mathbf{u} = 5$, 即得

$$(I_5 + \mathbf{u}\mathbf{u}^T)\mathbf{u} = I_5\mathbf{u} + \mathbf{u}(\mathbf{u}^T\mathbf{u}) = 6\mathbf{u},$$

故知 $I_5 + \mathbf{u}\mathbf{u}^T$ 將向量 $\mathbf{u}$ 伸長了 6 倍, 由此推論逆變換爲 $(I_5 + \mathbf{u}\mathbf{u}^T)^{-1}\mathbf{u} = \frac{1}{6}\mathbf{u}$。所以,

$$(I_5 + 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T)(I_5 + \mathbf{u}\mathbf{u}^T)^{-1}\mathbf{u} = (I_5 + 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T)\frac{1}{6}\mathbf{u} = \frac{1}{6}\left(\mathbf{u} + 2\mathbf{u}(\mathbf{u}^T\mathbf{u})\right) = \frac{11}{6}\mathbf{u}。$$

另外也可以使用矩陣代數計算 $(I_5 + \mathbf{u}\mathbf{u}^T)^{-1}\mathbf{u}$。令 $\mathbf{x} = (I_5 + \mathbf{u}\mathbf{u}^T)^{-1}\mathbf{u}$, 等號兩邊同時左乘 $I_5 + \mathbf{u}\mathbf{u}^T$ 可得 $(I_5 + \mathbf{u}\mathbf{u}^T)\mathbf{x} = \mathbf{x} + k\mathbf{u} = \mathbf{u}$, 其中 $k = \mathbf{u}^T\mathbf{x}$, 則 $\mathbf{x} = (1-k)\mathbf{u}$。將上式代回計算 $k = \mathbf{u}^T\mathbf{x} = (1-k)\mathbf{u}^T\mathbf{u} = 5 - 5k$, 解出 $k = \frac{5}{6}$, 故得 $(I_5 + \mathbf{u}\mathbf{u}^T)^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{x} = (1-k)\mathbf{u} = \frac{1}{6}\mathbf{u}$。 □

Problem 75

If $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ and $\mathbf{u}^T\mathbf{u} = 3$, then there exists $k \in \mathbb{R}$ such that

$$(I_n + \mathbf{u}\mathbf{u}^T)^{10} = I_n + k\mathbf{u}\mathbf{u}^T.$$

Determine the value of k.

Solution

我們可以視 $I_n + \mathbf{u}\mathbf{u}^T$ 爲一線性變換。考慮 $\mathbf{u}$ 的映射, 利用已知條件可得

$$(I_n + \mathbf{u}\mathbf{u}^T)\mathbf{u} = I_n\mathbf{u} + \mathbf{u}(\mathbf{u}^T\mathbf{u}) = \mathbf{u} + 3\mathbf{u} = 4\mathbf{u},$$

故知變換矩陣 $I_n + \mathbf{u}\mathbf{u}^T$ 將向量 $\mathbf{u}$ 拉伸了 4 倍長, 繼續此過程推知 $(I_n + \mathbf{u}\mathbf{u}^T)^{10}\mathbf{u} = 4^{10}\mathbf{u}$。另一方面, 等號右邊等於 $(I_n + k\mathbf{u}\mathbf{u}^T)\mathbf{u} = I_n\mathbf{u} + k\mathbf{u}(\mathbf{u}^T\mathbf{u}) = (1+3k)\mathbf{u}$, 即得 $4^{10} = 1 + 3k$, 解出 $k = \frac{4^{10}-1}{3}$。

另一個做法運用對角化。因爲 $I_n + \mathbf{u}\mathbf{u}^T$ 是實對稱矩陣, 故可正交對角化爲 $I_n + \mathbf{u}\mathbf{u}^T = Q\Lambda Q^T$, 其中 $Q^T = Q^{-1}$。注意 $I_n + \mathbf{u}\mathbf{u}^T$ 有特徵值 4 對應特徵向量 $\mathbf{u}$, 並有 $n-1$ 個特徵值 0 對應特徵空間 $\operatorname{span}\{\mathbf{u}\}^\perp$, 即得 $\Lambda = \operatorname{diag}(4, 0, \ldots, 0)$。另一方面, $I_n + k\mathbf{u}\mathbf{u}^T$ 亦可正交對角化爲 $I_n + k\mathbf{u}\mathbf{u}^T = Q \cdot \operatorname{diag}(1+3k, 0, \ldots, 0) \cdot Q^T$。所以

$$(I_n + \mathbf{u}\mathbf{u}^T)^{10} = Q\begin{bmatrix} 4^{10} & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}Q^T = Q\begin{bmatrix} 1+3k & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}Q^T,$$

由上式可知 $4^{10} = 1 + 3k$, 故 $k = \frac{4^{10}-1}{3}$。 □

Problem 76

Let $M_2(\mathbb{R})$ be the vector space of all 2×2 real matrices. The standard basis for $M_2(\mathbb{R})$ is given as follows:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Define the linear transformation

$$T(X) = XA - AX,$$

where $X \in M_2(\mathbb{R})$, and $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Find the matrix representation of T under the basis E_i, $i = 1, 2, 3, 4$.

(b) Find a basis for the range of T.

(c) Find a basis for the kernel of T.

Solution

(a) 令 $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 展開 $T(X)$, 如下:

$$T(X) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2c & 2a-2d \\ 0 & 2c \end{bmatrix}。$$

將標準基底 E_i 代入計算 $T(E_i)$, 可得

$$T(E_1) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ T(E_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$T(E_3) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ T(E_4) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以線性變換 T 參考標準基底的表示矩陣為

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}。$$

(b) 對表示矩陣 $[T]$ 執行基本列運算, 可得下列簡化列梯形矩陣:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

這顯示 $[T]$ 的第 1 和 3 行為軸行, 故 T 的值域基底可為 $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$。

(c) 由 (b) 可知 $[T]$ 的零空間由 $(0,1,0,0)^T$ 和 $(1,0,0,1)^T$ 擴張而成, 故 T 的核基底可爲 $\left\{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$。 $\square$

Problem 77

True or false, with counterexample if false. Let T be a linear transformation on a finite dimensional vector space $\mathcal{V}$ and let $\mathcal{U}$ and $\mathcal{W}$ be subspaces of $\mathcal{V}$. Denote $T(\mathcal{U}) = \{T(\mathbf{u}) | \mathbf{u} \in \mathcal{U}\}$.

(a) $T(\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) = T(\mathcal{U}) \cap T(\mathcal{W})$

(b) $T(\mathcal{U} \cup \mathcal{W}) = T(\mathcal{U}) \cup T(\mathcal{W})$

(c) $T(\mathcal{U} + \mathcal{W}) = T(\mathcal{U}) + T(\mathcal{W})$

Solution

(a) 錯誤。雖然 $T(\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) \subseteq T(\mathcal{U}) \cap T(\mathcal{W})$ 確實爲眞, 但等號不總是成立。例如, 若 T 代表 $\mathbb{R}^2$ 中至 x 軸的正交投影, $\mathcal{U}$ 是直線 $y = x$, $\mathcal{W}$ 是 x 軸, 則 $T(\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) = \{\mathbf{0}\}$, 而 $T(\mathcal{U}) \cap T(\mathcal{W}) = \mathcal{W}$。

(b) 正確。若 $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, 則 $T(\mathbf{u}) \in T(\mathcal{U}) \subseteq T(\mathcal{U}) \cup T(\mathcal{W})$; 同樣地, 若 $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$, 則 $T(\mathbf{w}) \in T(\mathcal{W}) \subseteq T(\mathcal{U}) \cup T(\mathcal{W})$, 所以 $T(\mathcal{U} \cup \mathcal{W}) \subseteq T(\mathcal{U}) \cup T(\mathcal{W})$。另一方面, $T(\mathcal{U}) \subseteq T(\mathcal{U} \cup \mathcal{W})$ 且 $T(\mathcal{W}) \subseteq T(\mathcal{U} \cup \mathcal{W})$, 也就有 $T(\mathcal{U}) \cup T(\mathcal{W}) \subseteq T(\mathcal{U} \cup \mathcal{W})$。

(c) 正確。任意 $\mathbf{x} \in \mathcal{U} + \mathcal{W}$ 可表示爲 $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, 其中 $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$, 就有 $T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{w}) \in T(\mathcal{U}) + T(\mathcal{W})$, 所以 $T(\mathcal{U} + \mathcal{W}) \subseteq T(\mathcal{U}) + T(\mathcal{W})$。另一方面, 若 $\mathbf{y} \in T(\mathcal{U}) + T(\mathcal{W})$, 則 $\mathbf{y} = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{w}) = T(\mathbf{u} + \mathbf{w}) \in T(\mathcal{U} + \mathcal{W})$, 所以 $T(\mathcal{U}) + T(\mathcal{W}) \subseteq T(\mathcal{U} + \mathcal{W})$。 $\square$

Problem 78

Let $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ be the set of all polynomials of degree less than n with real coefficients. Let

$$T(p(x)) = xp'(x) - p(x),$$

where $p(x) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

(a) Prove that T is a linear transformation on $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

(b) Determine the range and kernel of T, i.e., $R(T)$ and $N(T)$, respectively.

Solution

(a) 設 $p(x), q(x)$ 屬於 $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, c 爲一純量, 則

$$\begin{aligned} T((p+q)(x)) &= T(p(x)+q(x)) \\ &= x(p(x)+q(x))' - (p(x)+q(x)) \\ &= xp'(x) + xq'(x) - p(x) - q(x) \\ &= T(p(x)) + T(q(x)), \end{aligned}$$

而且

$$\begin{aligned} T((cp)(x)) &= T(cp(x)) \\ &= x(cp(x))' - (cp(x)) \\ &= cxp'(x) - cp(x) \\ &= cT(p(x))。 \end{aligned}$$

因此證明 T 是一定義於 $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ 的線性變換。

(b) 欲求 $R(T)$, 將 $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ 代入 $T(p(x))$, 即得

$$\begin{aligned} T(p(x)) &= x(a_1 + 2a_2x + \cdots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2}) - (a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) \\ &= -a_0 + a_2x^2 + \cdots + (n-2)a_{n-1}x^{n-1}, \end{aligned}$$

所以

$$R(T) = \{b_0 + b_2x^2 + \cdots + b_{n-1}x^{n-2} | b_0, b_2, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{R}\}。$$

欲求 $N(T)$, 將 $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ 代入 $T(p(x)) = 0$, 即得

$$x(a_1 + 2a_2x + \cdots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2}) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}。$$

比較等號兩邊係數可解出 $a_1 = k$, $k \in \mathbb{R}$, $a_i = 0$ 若 $i \neq 1$, 故 $N(T) = \{kx | k \in \mathbb{R}\}$。 $\square$

Problem 79

Let V be the real vector space spanned by

$$\{1, t, t^2, t^3, t^4, e^t, te^t, t^2e^t, t^3e^t, t^4e^t\},$$

W be the subspace of V, spanned by

$$\{1, t, t^2, e^t, te^t, t^2e^t\},$$

and V/W is the quotient space of V modulo W. Let D be the derivative on V. Define the map $G : V/W \to V/W$ induced by D as follows:

$$G(\mathbf{x} + W) = D(\mathbf{x}) + W,$$

for any $\mathbf{x} + W \in V/W$.

(a) Show that G is well defined, i.e., $G(\mathbf{x}+W) = G(\mathbf{y}+W)$ whenever $\mathbf{x}+W = \mathbf{y} + W$.

(b) Show that G is a linear transformation.

(c) Show that $\mathfrak{B} = \{t^3 + W, t^4 + W, t^3e^t + W, t^4e^t + W\}$ is a basis for V/W.

(d) Find the matrix representation of G with respect to the ordered basis $\mathfrak{B}$.

Solution

(a) 若 $\mathbf{x}+W = \mathbf{y}+W$, 則 $(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \in W$, 然而 W 是 D 的一不變子空間, 即 $D(W) \subseteq W$, 所以 $D(\mathbf{x}) - D(\mathbf{y}) = D(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \in W$, 這表示 $D(\mathbf{x}) + W = D(\mathbf{y}) + W$, 即 $G(\mathbf{x} + W) = G(\mathbf{y} + W)$。

(b) 設 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, 則

$$\begin{aligned} G((\mathbf{x} + W) + (\mathbf{y} + W)) &= G((\mathbf{x} + \mathbf{y}) + W) \\ &= D(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + W \\ &= D(\mathbf{x}) + D(\mathbf{y}) + W \\ &= (D(\mathbf{x}) + W) + (D(\mathbf{y}) + W) \\ &= G(\mathbf{x} + W) + G(\mathbf{y} + W)。\end{aligned}$$

對於任意純量 c,

$$\begin{aligned} G(c(\mathbf{x}+W)) &= G((c\mathbf{x})+W) \\ &= D(c\mathbf{x})+W \\ &= cD(\mathbf{x})+W \\ &= c(D(\mathbf{x})+W) \\ &= cG(\mathbf{x}+W)。\end{aligned}$$

(c) 定義線性變換 $Q: V \to V/W$ 如下:

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}+W。$$

對任一 $\mathbf{x} \in V$, 有唯一表達式

$$\mathbf{x} = c_1 + c_2t + c_3t^2 + c_4t^3 + c_5t^4 + c_6e^t + c_7te^t + c_8t^2e^t。+ c_9t^3e^t + c_{10}t^4e^t$$

當 $\mathbf{v} \in W$, $Q(\mathbf{v}) = W$。將上式代入 Q, 可得

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) &= c_4Q(t^3) + c_5Q(t^4) + c_9Q(t^3e^t) + c_{10}Q(t^4e^t) \\ &= c_4(t^3+W) + c_5(t^4+W) + c_9(t^3e^t+W) + c_{10}(t^4e^t+W), \end{aligned}$$

得知 $\mathfrak{B}$ 擴張 V/W。再證明 $\mathfrak{B}$ 是獨立集, 考慮

$$\begin{aligned} 0+W = \mathbf{x} &= c_4(t^3+W) + c_5(t^5+W) + c_9(t^3e^t+W) + c_{10}(t^4+e^t+W) \\ &= (c4t^3+W) + (c_5t^4+W) + (c_9t^3e^t+W) + (c_{10}t^4e^t+W) \\ &= (c_4t^3 + c_5t^4 + c_9t^3e^t + c_{10}t^4e^t) + W。\end{aligned}$$

這指出 $(c_4t^3 + c_5t^4 + c_9t^3e^t + c_{10}t^4e^t) \in W$, 也就有

$$c_4t^3 + c_5t^4 + c_9t^3e^t + c_{10}t^4e^t = c_1 + c_2t + c_3t^2 + c_6e^t + c_7te^t + c_8t^2e^t$$

或者

$$c_4t^3 + c_5t^4 + c_9t^3e^t + c_{10}t^4e^t - c_1 - c_2t - c_3t^2 - c_6e^t - c_7te^t - c_8t^2e^t = 0。$$

然而 $\{1, t, t^2, t^3, t^4, e^t, te^t, t^2e^t, t^3e^t, t^4e^t\}$ 是 V 的一組基底, 故 $c_i = 0$, $i = 1, \ldots, 10$, 證得 $\mathfrak{B}$ 是獨立集。

(d) 計算各基底向量的像,

$$
\begin{aligned}
G(t^3+W) &= D(t^3)+W = 3t^2+W = 0+W \\
G(t^4+W) &= D(t^4)+W = 4t^3+W = 4(t^3+W) \\
G(t^3e^t+W) &= D(t^3e^t)+W = 3t^2e^t+t^3e^t+W = t^3e^t+W \\
G(t^4e^t+W) &= D(t^4e^t)+W = 4t^3e^t+t^4e^t+W = 4(t^3e^t+W)+(t^4e^t+W)。
\end{aligned}
$$

所以 G 參考有序基底 $\mathfrak{B}$ 的矩陣表示爲

$$
\begin{aligned}
[G]_{\mathfrak{B}} &= \begin{bmatrix} [G(t^3+W)]_{\mathfrak{B}} & [G(t^4+W)]_{\mathfrak{B}} & [G(t^3e^t+W)]_{\mathfrak{B}} & [G(t^4e^t+W)]_{\mathfrak{B}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。
\end{aligned}
$$

□

内積空間

Problem 80

Suppose W is a subspace of an inner product space V and $W^\perp$ is the orthogonal complement of W in V. For any $\mathbf{x} \in V$, show that $\mathbf{y} \in W$ is the orthogonal projection of $\mathbf{x}$ onto W, i.e., $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{y}'$, for some $\mathbf{y}' \in W^\perp$, if and only if for every $\mathbf{z} \in W$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|$.

Solution

設 $\mathbf{y} \in W$, 且 $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{y}'$, 其中 $\mathbf{y}' \in W^\perp$, 可知 $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in W^\perp$。對於任意 $\mathbf{z} \in W$, 就有 $\mathbf{y} - \mathbf{z} \in W$, 故 $\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z} \rangle = 0$, 所以

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2 = \|(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + (\mathbf{y} - \mathbf{z})\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|^2,$$

證得 $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|$。

欲證明相反方向陳述, 設 $\mathbf{w}$ 為 $\mathbf{x}$ 至 W 的正交投影且 $\mathbf{w} \neq \mathbf{y}$。考慮 $\mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{w}'$, 其中 $\mathbf{w}' \in W^\perp$, 因為 $\mathbf{y}, \mathbf{w} \in W$, 可得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 &= \|(\mathbf{x} - \mathbf{w}) - (\mathbf{w} - \mathbf{y})\|^2 \\ &= \|\mathbf{x} - \mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{w} - \mathbf{y}\|^2 \\ &\geq \|\mathbf{x} - \mathbf{w}\|^2, \end{aligned}$$

這造成矛盾, 因此證得原命題。 $\square$

Problem 81

Let $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ be an orthonormal basis for an inner product space V over $\mathbb{C}$. If $\mathbf{x} \in V$, show that

(a) $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i$

(b) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq \sum_{i=1}^k |\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle|^2, 1 \leq k \leq n$.

Note that $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ denotes the inner product of $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$.

Solution

(a) 將 $\mathbf{x}$ 表示爲

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n。$$

令等號兩邊與 $\mathbf{v}_i$ 計算內積, 因爲 $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 1$ 若 $i = j$, $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$ 若 $i \neq j$, 就有

$$c_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle, i = 1, \ldots, n。$$

(b) 將題 (a) 公式代入計算

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{v}_i, \sum_{j=1}^{n} c_j\mathbf{v}_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle c_i\mathbf{v}_i, c_j\mathbf{v}_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 \\
&\geq \sum_{i=1}^{k} |c_i|^2 (k = 1, \ldots, n)。
\end{aligned}$$

□

Problem 82

Suppose $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ are vectors in an inner product space V. Show that

$$|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

This is called the backward triangle inequality.

Solution

利用三角不等式

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|,$$

改寫 $\|\mathbf{x}\|$, 如下:

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|,$$

得到 $\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$。再考慮

$$\|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| + \|\mathbf{x}\|,$$

也就有 $-(\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|) \leq \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$。合併上面二式即證得所求。 $\square$

Problem 83

Suppose $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ are three vectors in $\mathbb{R}^n$, and $\mathbf{x}_i^T\mathbf{x}_j < 0$, for $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$. Prove that $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ are linearly independent.

Solution

利用反證法, 假設 $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ 是線性相依。在不失一般性下, 設 $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, 3$, 爲單位向量, 且

$$\mathbf{x}_3 = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2\text{。}$$

計算內積並使用已知條件,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_3 &= \mathbf{x}_1^T(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2) = c_1 + c_2\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_2 < 0 \\
\mathbf{x}_2^T\mathbf{x}_3 &= \mathbf{x}_2^T(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2) = c_1\mathbf{x}_2^T\mathbf{x}_1 + c_2 < 0\text{。}
\end{aligned}$$

已知 $\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_2 < 0$, 第一式乘以 $-\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_2$ 可得 $-c_1(\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_2) < c_2(\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_2)^2$, 再合併第二式可得

$$c_2 < -c_1\mathbf{x}_2^T\mathbf{x}_1 < c_2(\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_2)^2\text{。}$$

所以 $(\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_2)^2 > 1$, 這與最初假設 $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ 爲單位向量矛盾, 證得 $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ 爲線性獨立。
$\square$

Problem 84

Let $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ be vectors in $\mathbb{R}^m$, and let $A = [a_{ij}]$, where

$$a_{ij} = \mathbf{x}_i^T\mathbf{x}_j,$$

$i, j = 1, \ldots, n$. Show that $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ are linearly independent if and only if A is nonsingular.

Solution

考慮

$$c_1\mathbf{x}_1+\cdots+c_n\mathbf{x}_n=\mathbf{0}。$$

計算 $\mathbf{x}_i^T$, $i=1,2,\ldots,n$, 與上式乘積, 利用給出條件可得

$$\mathbf{x}_i^T(c_1\mathbf{x}_1+\cdots+c_n\mathbf{x}_n)=c_1\mathbf{x}_i^T\mathbf{x}_1+\cdots+c_n\mathbf{x}_i^T\mathbf{x}_n=c_1a_{i1}+\cdots+c_na_{in}=0。$$

將這 n 個式子以矩陣乘法表示, 如下:

$$A\mathbf{c}=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}。$$

若向量集 $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ 是線性獨立的, 必定有 $c_1=\cdots=c_n=0$, 這說明 $A\mathbf{c}=\mathbf{0}$ 存在平凡解, 故 $\mathrm{rank}A=n$, A 爲可逆矩陣。相反方向的陳述也成立。

另一個做法運用 QR 分解。設 $X=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1&\cdots&\mathbf{x}_n\end{bmatrix}$, 令其 QR 分解式爲 $X=QR$, 因爲 $Q^TQ=I_n$,

$$A=X^TX=(QR)^T(QR)=R^TQ^TQR=R^TR。$$

若 X 有線性獨立的行向量, 則 R 爲可逆矩陣。又因爲 $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}(R^TR)=\mathrm{rank}R$, 所以 A 也是可逆的。顯然反向陳述亦眞。 $\square$

Problem 85

Let A be an n by n real matrix satisfying

$$(A\mathbf{x})^T(A\mathbf{y})=\mathbf{x}^T\mathbf{y},$$

for every $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ in $\mathbb{R}^n$. Show that A is an orthogonal matrix.

Solution

從給出條件 $(A\mathbf{x})^T(A\mathbf{x})=\mathbf{x}^TA^TA\mathbf{x}=\mathbf{x}^T\mathbf{x}$ 得到

$$\mathbf{x}^T(A^TA-I)\mathbf{x}=0。$$

令 $B = A^TA - I$, B 爲對稱矩陣, 接著我們證明: 對於對稱矩陣 B, 任意向量 $\mathbf{x}$ 都滿足 $\mathbf{x}^TB\mathbf{x} = 0$, 則 $B = 0$。考慮 $(\mathbf{x}+\mathbf{y})^TB(\mathbf{x}+\mathbf{y})$ 的展開式, 將它寫爲

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})^TB(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - \mathbf{x}^TB\mathbf{x} - \mathbf{y}^TB\mathbf{y} = \mathbf{x}^TB\mathbf{y} + \mathbf{y}^TB\mathbf{x}。$$

由已知條件, 上式等號左邊爲零, 右邊等於 $2\mathbf{x}^TB\mathbf{y}$, 亦即 $\mathbf{x}^TB\mathbf{y} = 0$。設 $\mathbf{x} = B\mathbf{y}$ 再代回左式, 就有 $\|B\mathbf{y}\|^2 = 0$, 因此 $B\mathbf{y} = \mathbf{0}$, 但 $\mathbf{y}$ 是任意向量, 所以必定有 $B = 0$, 推知 $A^TA = I$, 即 $A^T = A^{-1}$, A 爲正交矩陣。 □

Problem 86

Suppose Q is a 4×3 real matrix with orthonormal columns $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_3$.

(a) Suppose $\mathbf{v}$ is not in the column space of Q. Use Gram-Schmidt process to obtain the fourth orthonormal vector $\mathbf{q}_4$.

(b) Describe the nullspaces of Q, Q^T, Q^TQ and QQ^T.

(c) Suppose $\mathbf{b} = \mathbf{q}_1 + 2\mathbf{q}_2 + 3\mathbf{q}_3 + 4\mathbf{q}_4$. Find the least-squares solution to $Q\mathbf{x} = \mathbf{b}$. What is the projection $\mathbf{p}$ of this $\mathbf{b}$ onto the column space of Q?

Solution

(a) 將向量 $\mathbf{v}$ 投影至 $\mathbf{q}_i$, $i = 1, 2, 3$, 的分量去除即可:

$$\mathbf{p}_4 = \mathbf{v} - (\mathbf{v}^T\mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1 - (\mathbf{v}^T\mathbf{q}_2)\mathbf{q}_2 - (\mathbf{v}^T\mathbf{q}_3)\mathbf{q}_3,$$

再正規化向量: $\mathbf{q}_4 = \mathbf{p}_4/\|\mathbf{p}_4\|$。

(b) 因 $Q = [\,\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \mathbf{q}_3\,]$ 有線性獨立的3個行, Q 的零空間僅含零向量。Q^T 的零空間即爲 $C(Q)$ 的正交互補空間, 故 $N(Q^T)$ 由題 (a) 的 $\mathbf{q}_4$ 向量所擴張成 (因 $\mathbf{q}_4$ 與 $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_3$ 正交)。因爲 $Q^TQ = I_3$, 故其零空間爲 $\{\mathbf{0}\}$, 而 4×4 階矩陣 QQ^T 的零空間由 $\mathbf{q}_4$ 所擴張, 這是由於 $QQ^T\mathbf{q}_4 = Q \cdot 0 = 0$。

(c) 因爲 $Q^TQ = I$, 正規方程式 (normal equation) $Q^TQ\hat{\mathbf{x}} = Q^T\mathbf{b}$ 等價於 $\hat{\mathbf{x}} = Q^T\mathbf{b}$, 所以

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T \\ \mathbf{q}_2^T \\ \mathbf{q}_3^T \end{bmatrix} (\mathbf{q}_1 + 2\mathbf{q}_2 + 3\mathbf{q}_3 + 4\mathbf{q}_4) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}。$$

投影向量 $\mathbf{p}$ 即爲 $\mathbf{p} = Q\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{q}_1 + 2\mathbf{q}_2 + 3\mathbf{q}_3$。 □

Problem 87

Suppose C is an $n \times n$ real symmetric positive-definite matrix.

(a) Suppose $C = B^TB$ for some $m \times n$ matrix B. Which of the following (if any) must be properties of B: full column rank, full row rank?

(b) Suppose A has linear independent columns, and $C = B^TB$ as in (a). In terms of B, A, and $\mathbf{b}$, write down an explicit formula for the $\mathbf{x}$ that minimize $(A\mathbf{x} - \mathbf{b})^TC(A\mathbf{x} - \mathbf{b})$.

(c) Suppose that C was only positive semi-definite. Is there still a minimum value of $(A\mathbf{x} - \mathbf{b})^TC(A\mathbf{x} - \mathbf{b})$? Is there still a unique solution $\mathbf{x}$?

Solution

(a) 因爲 C 是正定矩陣, 對於任意 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{x}^TC\mathbf{x} = \mathbf{x}^TB^TB\mathbf{x} = \|B\mathbf{x}\|^2 > 0$, 故 $N(B) = \{\mathbf{0}\}$, B 是滿行秩。但 B 未必是滿列秩, 例如, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 則 $C = B^TB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。

(b) 整理算式:

$$\begin{aligned}(A\mathbf{x} - \mathbf{b})^TC(A\mathbf{x} - \mathbf{b}) &= (A\mathbf{x} - \mathbf{b})^TB^TB(A\mathbf{x} - \mathbf{b}) \\ &= (BA\mathbf{x} - B\mathbf{b})^T(BA\mathbf{x} - B\mathbf{b}) \\ &= \|BA\mathbf{x} - B\mathbf{b}\|^2。\end{aligned}$$

最小平方解滿足正規方程式 $(BA)^T(BA)\hat{\mathbf{x}} = (BA)^T B\mathbf{b}$。由已知以及題 (a), A 和 B 都是滿行秩, 因此 BA 也是滿行秩, 理由是 $N(A) = \{\mathbf{0}\}$ 且 $N(B) = \{\mathbf{0}\}$, 若 $BA\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 則 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 又 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 故 $N(BA) = \{\mathbf{0}\}$。BA 有線性獨立的行, 推知 $(BA)^T(BA)$ 是可逆的, 所以最小平方解爲

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^T B^T BA)^{-1} A^T B^T B\mathbf{b} = (A^T CA)^{-1} A^T C\mathbf{b}。$$

(c) 倘若 C 僅爲半正定, 仍有 $C = B^T B$, 且 $(A\mathbf{x} - \mathbf{b})^T C(A\mathbf{x} - \mathbf{b})$ 仍有最小值, 但 B 未必爲滿行秩, 也因此最小平方解並不唯一存在。例如, 若 $C = 0$, 則任何 $\mathbf{x}$ 都可使 $(A\mathbf{x} - \mathbf{b})^T C(A\mathbf{x} - \mathbf{b})$ 最小化。 □

Problem 88

Suppose A is an $n \times n$ real matrix.

(a) Show that $A^T A$ may be written as $A^T A = LL^T$, where L is a real lower triangular matrix with nonnegative diagonal entries.

(b) Show that the factorization $A^T A = LL^T$, L with positive diagonal entries, is unique if A is nonsingular. This is called the Cholesky factorization of $A^T A$; every positive definite matrix may be factored in this way.

Solution

(a) 將矩陣 A 以 QR 形式分解爲 $A = QR$, $Q = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \cdots & \mathbf{q}_n \end{bmatrix}$ 是 $n \times n$ 階正交正規矩陣, R 是 $n \times n$ 階上三角形矩陣。因爲 $Q^{-1} = Q^T$,

$$R = Q^{-1}A = Q^T A = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}。$$

矩陣 R 的主對角元爲 $(R)_{ii} = \mathbf{q}_i^T \mathbf{a}_i$, 進行 QR 分解時可以選擇 $\mathbf{q}_i$ 的正負符號使 $(R)_{ii} \geq 0$。令 $L = R^T$, 所以

$$A^T A = (QR)^T(QR) = R^T Q^T QR = R^T R = LL^T。$$

下三角形矩陣 L 的主對角元皆不爲負。

(b) 當 A 是可逆時, A 的零空間僅含零向量, 對於 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^T(A\mathbf{x}) = \|A\mathbf{x}\|^2 > 0$, 這指出 $A^T A$ 是對稱正定矩陣。$A^T A$ 的主對角之元皆爲正值, 因爲 $(A^T A)_{ii} = \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i = \mathbf{e}_i^T A^T A \mathbf{e}_i > 0$。設 $B = A^T A$, 將 $B = LL^T$ 以如下的分塊矩陣表示

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \mathbf{b}_{21}^T \\ \mathbf{b}_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{l}_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & \mathbf{l}_{21}^T \\ \mathbf{0} & L_{22}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11}\mathbf{l}_{21}^T \\ l_{11}\mathbf{l}_{21} & \mathbf{l}_{21}\mathbf{l}_{21}^T + L_{22}L_{22}^T \end{bmatrix}。$$

注意 $b_{11} > 0$, 由第1列可解出 $l_{11} = \sqrt{b_{11}}$, $\mathbf{l}_{21} = \frac{1}{\sqrt{b_{11}}}\mathbf{b}_{21}$, 由 (2,2) 元得到

$$L_{22}L_{22}^T = B_{22} - \mathbf{l}_{21}\mathbf{l}_{21}^T = B_{22} - \frac{1}{b_{11}}\mathbf{b}_{21}\mathbf{b}_{21}^T。$$

由於 B 是正定的, 對於任意不都爲零的 x, $\mathbf{y}$ 就有

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} x & \mathbf{y}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \mathbf{b}_{21}^T \\ \mathbf{b}_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \\ &= b_{11}x^2 + 2x(\mathbf{b}_{21}^T\mathbf{y}) + \mathbf{y}^T B_{22}\mathbf{y} \\ &= b_{11}\left(x - \frac{1}{b_{11}}\mathbf{b}_{21}^T\mathbf{y}\right)^2 + \mathbf{y}^T B_{22}\mathbf{y} - \frac{1}{b_{11}}(\mathbf{b}_{21}^T\mathbf{y})^2 \\ &= b_{11}\left(x - \frac{1}{b_{11}}\mathbf{b}_{21}^T\mathbf{y}\right)^2 + \mathbf{y}^T\left(B_{22} - \frac{1}{b_{11}}\mathbf{b}_{21}\mathbf{b}_{21}^T\right)\mathbf{y} > 0。\end{aligned}$$

這說明 $B_{22} - \frac{1}{b_{11}}\mathbf{b}_{21}\mathbf{b}_{21}^T$ 亦爲對稱正定矩陣。利用歸納法, 必定可以解出唯一的 L_{22} 滿足 $B_{22} - \frac{1}{b_{22}}\mathbf{b}_{21}\mathbf{b}_{21}^T = L_{22}L_{22}^T$。 □

Problem 89

Suppse $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ are linear independent vectors in $\mathbb{R}^n$.

(a) Find a nonzero vector $\mathbf{w}$ in $\mathbb{R}^n$ as a linear combination of $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ so that $\mathbf{w}$ is perpendicular to $\mathbf{u}$.

(b) Suppose $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ are two columns of A, i.e., $A = \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} \end{bmatrix}$, find Q and R so that $A = QR$, where Q has orthonormal columns and R is a 2 by 2 upper triangular matrix.

(c) Let P be the orthogonal projection matrix onto the subspace spanned by $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$. Express P in terms of Q only.

Solution

(a) 運用 Gram-Schmidt 正交化程序將 $\mathbf{v}$ 中的 $\mathbf{u}$ 分量去除即可。令 $\mathbf{w} = \mathbf{v} - c\mathbf{u}$, 按題意 $\mathbf{w}$ 和 $\mathbf{u}$ 正交, 故 $\mathbf{w}^T\mathbf{u} = \mathbf{v}^T\mathbf{u} - c\mathbf{u}^T\mathbf{u} = 0$, 所以 $c = (\mathbf{v}^T\mathbf{u})/(\mathbf{u}^T\mathbf{u})$, 則

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v}^T\mathbf{u}}{\mathbf{u}^T\mathbf{u}}\mathbf{u}。$$

(b) 由題 (a) 已知 $\mathbf{w}$ 和 $\mathbf{u}$ 正交, 再將他們正規化, 令 $\mathbf{q}_1 = \mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$, $\mathbf{q}_2 = \mathbf{w}/\|\mathbf{w}\|$, 此即為 Q 的兩行, $Q = [\ \mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2\ ]$。接著設法將矩陣 A 的兩行表示為 $\mathbf{q}_1$ 和 $\mathbf{q}_2$ 的線性組合, 設矩陣 $\mathbf{R}$ 的兩行為 $\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2$, 以行為計算單位展開 $A = QR$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= Q\mathbf{r}_1 = [\ \mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2\ ]\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} & \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \end{bmatrix}\mathbf{r}_1 \\
\mathbf{v} &= Q\mathbf{r}_2 = [\ \mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2\ ]\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} & \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \end{bmatrix}\mathbf{r}_2,
\end{aligned}$$

分別可解出 $\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} \|\mathbf{u}\| \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} c\|\mathbf{u}\| \\ \|\mathbf{w}\| \end{bmatrix}$, 其中 $c = (\mathbf{v}^T\mathbf{u})/(\mathbf{u}^T\mathbf{u})$。

(c) 投影矩陣 P 將向量投影至 A 的行空間, 利用題 (b) 的 QR 分解及性質 $Q^TQ = I$, 就有

$$\begin{aligned}
P &= A(A^TA)^{-1}A^T \\
&= (QR)(R^TQ^TQR)^{-1}(R^TQ^T) \\
&= (QR)(R^TR)^{-1}(R^TQ^T) \\
&= Q(RR^{-1}(R^T)^{-1}R^T)Q^T \\
&= QQ^T。
\end{aligned}$$

□

Problem 90

Suppoes A, B and Q are $n \times n$ real matrices, and $B = Q^TAQ$, where Q is an orthogonal matrix. Denote the (i, j) entry of A to be a_{ij}. Show that

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2.$$

Solution

執行矩陣乘法運算可得出

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \mathrm{tr}(A^TA),$$

因此問題變成證明 $\mathrm{tr}(A^TA) = \mathrm{tr}(B^TB)$。因為 $B = Q^TAQ$, 且正交矩陣滿足 $Q^T = Q^{-1}$, 便有 $\mathrm{tr}(B^TB) = \mathrm{tr}(Q^TA^TQQ^TAQ) = \mathrm{tr}(Q^TA^TAQ) = \mathrm{tr}(A^TAQQ^T) = \mathrm{tr}(A^TA)$, 最後步驟利用了跡數的一個實用性質: 若 CD 和 DC 都是方陣, 但尺寸未必相同, $\mathrm{tr}(CD) = \mathrm{tr}(DC)$。 $\square$

Problem 91

Suppose $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ form an orthonormal basis for $\mathbb{R}^3$ and $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ form an orthonormal basis for $\mathbb{R}^2$. Let $A = \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^T + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^T$.

(a) Show that AA^T is an orthogonal projection matrix.

(b) Find the eigenvalues and corresponding eigenvectors of AA^T.

(c) Show that A^TA is the identity matrix.

Solution

(a) 因為 $\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_2 = 0$ 且 $\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_i = 1$, 計算

$$AA^T = (\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^T + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^T)(\mathbf{v}_1\mathbf{u}_1^T + \mathbf{v}_2\mathbf{u}_2^T) = \mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T + \mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T。$$

AA^T 是對稱的, 而且 $(AA^T)^2 = AA^T$, 這是由於

$$(AA^T)^2 = (\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T + \mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T)(\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T + \mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T) = \mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T + \mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T,$$

同樣利用了 $\mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_2 = 0$ 且 $\mathbf{u}_i^T\mathbf{u}_i = 1$。任何滿足條件 $P^T = P$ 及 $P^2 = P$ 的矩陣便是正交投影矩陣。

(b) 投影矩陣 AA^T 將 $\mathbb{R}^3$ 空間的向量投影至 AA^T 的行空間, 我們從題 (a) 知道 AA^T 的行空間基底可為 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, 因此投影矩陣 AA^T 不改變 $\mathbf{u}_1$ 和 $\mathbf{u}_2$, 驗證如下:

$$AA^T\mathbf{u}_1 = (\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T + \mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T)\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1$$
$$AA^T\mathbf{u}_2 = (\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T + \mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T)\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2。$$

AA^T 有特徵値 1, 1, 以及對應的特徵向量 $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$。又由於 AA^T 是實數對稱矩陣, 必定可選擇一組正交特徵向量, 因而推論 $\mathbf{u}_3$ 也是特徵向量, 但 $\mathbf{u}_3$ 與 AA^T 的行空間正交, 故 $\mathbf{u}_3$ 屬於左零空間 $N((AA^T)^T)$, 亦即 $(AA^T)^T\mathbf{u}_3 = AA^T\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$。綜合上面的討論, AA^T 的特徵值爲 $1, 1, 0$, 而對應的特徵向量分別是 $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$。

(c) 重複利用正交正規向量的基本關係, 得出

$$A^TA = (\mathbf{v}_1\mathbf{u}_1^T + \mathbf{v}_2\mathbf{u}_2^T)(\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^T + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^T) = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^T + \mathbf{v}_2\mathbf{v}_2^T。$$

注意 $A^TA\mathbf{v}_1 = (\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^T + \mathbf{v}_2\mathbf{v}_2^T)\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$ 且 $A^TA\mathbf{v}_2 = (\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^T + \mathbf{v}_2\mathbf{v}_2^T)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2$, 因爲 $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的基底向量, 對於任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ 總有唯一表示式 $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$, 計算

$$A^TA\mathbf{x} = A^TA(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1A^TA\mathbf{v}_1 + c_2A^TA\mathbf{v}_2 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}。$$

這指出對於任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, 恆有 $A^TA\mathbf{x} = \mathbf{x}$, 由此可推論 $A^TA = I_2$。 □

Problem 92

Suppose we are given the following measurements: $y = 2$ at $t = -1$, $y = 0$ at $t = 0$, $y = -3$ at $t = 1$, and $y = -5$ at $t = 2$.

(a) Find the best straight line fit to the above measurements.

(b) Suppose that instead of a straight line, we fit the data by a parabola: $y = c_0 + c_1t + c_2t^2$. Without actually solving the best parabola fit, will it be possible to determine whether the best parabola fit has less fitting error than that generated by the best line fit? Explain the reason.

Solution

(a) 令配適的直線爲 $y = c + dt$, 假設給出的四組測量值滿足直線方程式, 就有

$$\begin{aligned} c - d &= 2 \\ c &= 0 \\ c + d &= -3 \\ c + 2d &= -5, \end{aligned}$$

表示爲矩陣形式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$, 其中 $\mathbf{x}=[c,d]^T$, 且

$$A=\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\\1&1\\1&2\end{bmatrix},\qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}2\\0\\-3\\-5\end{bmatrix}。$$

由於此方程式並不一致, 我們改以最小平方法求解。因爲 A 的二行向量是線性獨立的, 可順利得出最小平方解, 詳細過程如下:

$$A^TA=\begin{bmatrix}4&2\\2&6\end{bmatrix},\quad A^T\mathbf{b}=\begin{bmatrix}-6\\-15\end{bmatrix}。$$

正規方程式 $A^TA\hat{\mathbf{x}}=A^T\mathbf{b}$ 即爲

$$\begin{bmatrix}4&2\\2&6\end{bmatrix}\hat{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}-6\\-15\end{bmatrix},$$

解出 $\hat{\mathbf{x}}=[-0.3,-2.4]^T$, 故最佳配適直線是 $y=-0.3-2.4t$。

(b) 由題 (a) 的最佳配適可以計算出誤差向量爲

$$\mathbf{e}=\mathbf{b}-A\mathbf{x}=\begin{bmatrix}2\\0\\-3\\-5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\\1&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.3\\-2.4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.1\\0.3\\-0.3\\0.1\end{bmatrix}。$$

若以二次曲線配適, 則有以下不一致的方程式 $A'\mathbf{x}'=\mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&0&0\\1&1&1\\1&2&4\end{bmatrix}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}2\\0\\-3\\-5\end{bmatrix}。$$

注意由直線配適得到的誤差向量 $\mathbf{e}$ 與矩陣 A' 的第三個行向量正交:

$$\begin{bmatrix}-0.1&0.3&-0.3&0.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\4\end{bmatrix}=0。$$

這表示誤差 $\mathbf{e}$ 已經與 A' 的行空間正交, 也就是說二次曲線配適與一次曲線配適得出的誤差相等。 $\square$

Problem 93

The trace of an n by n matrix A is defined to be the sum of its diagonal entries, denoted by $\operatorname{tr}(A)$.

(a) Suppose A is an $m \times n$ matrix and B is an $n \times m$ matrix. Show by direct calculation that $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

(b) If A and B are 2×2 matrix such that

$$AB - BA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

show that $a + d = 0$.

(c) Suppose $m \times n$ matrix A has linear independent columns, P is the projection matrix onto the column space of A, and Q is the projection matrix onto the left nullspace of A. Show that $\operatorname{tr}(P) = n$ and $\operatorname{tr}(Q) = m - n$.

Solution

(a) 對於矩陣 C, 設 $(C)_{ij}$ 爲其第 (i, j) 元。由跡數 (trace) 的定義得知

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{m} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (A)_{ij} (B)_{ji}$$
$$\operatorname{tr}(BA) = \sum_{j=1}^{n} (BA)_{jj} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (B)_{ji} (A)_{ij}\text{。}$$

比較以上二式證得 $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$。

(b) 對原式等號兩端計算跡數:

$$\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0 = a + d\text{。}$$

(c) 投影至 $C(A)$ 的矩陣是 $P = A(A^TA)^{-1}A^T$, 利用題 (a) 的性質,

$$\mathrm{tr}(P) = \mathrm{tr}(A(A^TA)^{-1}A^T) = \mathrm{tr}((A^TA)^{-1}A^TA) = \mathrm{tr}(I_n) = n。$$

因爲 $Q = I_m - P$, 就有 $\mathrm{tr}(Q) = \mathrm{tr}(I_m - P) = \mathrm{tr}(I_m) - \mathrm{tr}(P) = m - n$。 □

Problem 94

Suppose A is an $m \times n$ real matrix. Given some $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, it is known that the equation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is solvable.

(a) Show that there is a unique vector $\mathbf{y}$ in the row space of A such that $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$.

(b) Show that among all possible solutions of $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, the one in the row space has the minimum length.

(c) Suppose A has independent rows and $\mathbf{y}$ is in the row space of A so that $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$. Express $\mathbf{y}$ in terms of A and $\mathbf{b}$.

Solution

(a) 設 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 滿足方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, 因列空間 $C(A^T)$ 與零空間 $N(A)$ 爲正交互補, $\mathbf{x}$ 可唯一分解爲 $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, 其中 $\mathbf{y} \in C(A^T)$, $\mathbf{z} \in N(A)$。代入方程式 $A\mathbf{x} = A(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = A\mathbf{y} + A\mathbf{z} = A\mathbf{y} = \mathbf{b}$, 所以 $\mathbf{y}$ 亦爲方程式的解。

假設 $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in C(A^T)$ 皆爲方程式的解, 即 $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$, $A\mathbf{y}' = \mathbf{b}$, 將兩式相減可得 $A(\mathbf{y} - \mathbf{y}') = \mathbf{0}$, 由此知 $\mathbf{y} - \mathbf{y}' \in N(A)$, 但是 $\mathbf{y}$ 和 $\mathbf{y}'$ 的線性組合仍於列空間中, 因此 $\mathbf{y} - \mathbf{y}' \in C(A^T)$, 故 $\mathbf{y} - \mathbf{y}' \in N(A) \cap C(A^T) = \{\mathbf{0}\}$, 必有 $\mathbf{y}' = \mathbf{y}$, 證得列空間內的解是唯一的。

(b) 承題 (a), 方程式有解 $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, 其中 $\mathbf{y} \in C(A^T)$, $\mathbf{z} \in N(A)$, 且 $\mathbf{y}$ 是唯一存在。因 $\mathbf{y}$ 和 $\mathbf{z}$ 是正交的, 解的長度爲 $\|\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{y}+\mathbf{z})^T(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{z}\|^2 \geq \|\mathbf{y}\|^2$, 等號發生於 $\mathbf{z} = \mathbf{0}$。

(c) 因爲 A 有線性獨立的列, 列空間的任何向量 $\mathbf{y}$ 可以用唯一方式表示爲 A 的列空列向量之線性組合: $\mathbf{y} = A^T\mathbf{c}$, $\mathbf{c}$ 爲權重向量。考慮方程式 $A\mathbf{y} = AA^T\mathbf{c} = \mathbf{b}$ 的求解問

題, 因 $\mathrm{rank}AA^T = \mathrm{rank}A^T = m$, AA^T 是滿秩, 於是有唯一解 $\mathbf{c} = (AA^T)^{-1}\mathbf{b}$, 亦即 $\mathbf{y} = A^T(AA^T)^{-1}\mathbf{b}$ 滿足 $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$。 □

Problem 95

Let $W = \mathrm{span}\{1, x\} \subset \mathcal{P}_2$, where $\mathcal{P}_2$ is a vector space of polynomials of degree at most 2 has the standard inner product for $p, q \in \mathcal{P}_2$ as follows:

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

Compute the orthogonal complement $W^\perp$.

Solution

設 $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in W^\perp$, 必定有 $p(x) \perp 1$ 和 $p(x) \perp x$, 亦即

$$0 = \langle p, 1\rangle = \int_0^1 (a_0 + a_1x + a_2x^2)1dx = a_0\int_0^1 1dx + a_1\int_0^1 xdx + a_2\int_0^1 x^2dx$$

$$0 = \langle p, x\rangle = \int_0^1 (a_0 + a_1x + a_2x^2)xdx = a_0\int_0^1 xdx + a_1\int_0^1 x^2dx + a_2\int_0^1 x^3dx。$$

積分後可得下列線性方程

$$\begin{aligned} a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 &= 0 \\ \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}a_2 &= 0。\end{aligned}$$

解出 $a_0 = \frac{1}{6}\alpha$, $a_1 = -\alpha$, $a_2 = \alpha$, 其中 α 是自由變數, 得到

$$p(x) = \alpha\left(\frac{1}{6} - x + x^2\right)。$$

所以, $W^\perp = \mathrm{span}\left\{\frac{1}{6} - x + x^2\right\}$。 □

Problem 96

Let $C[0, 1]$ be the space of continuous functions on the interval $[0, 1]$ with the inner product defined by

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Let $\mathcal{P}_2 = \mathrm{span}\{1, x, x^2\}$. Apply the Gram-Schmidt algorithm to the basis $1, x, x^2$ to obtain an orthonormal basis for $\mathcal{P}_2$.

Solution

令 $\mathbf{u}_1 = 1$, $\mathbf{u}_2 = x$, $\mathbf{u}_3 = x^2$。Gram-Schmidt 正交化程序如下:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1 = 1 \\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle}\mathbf{v}_1 = x - \frac{1/2}{1}1 = x - \frac{1}{2} \\
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_3 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3 \rangle}{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle}\mathbf{v}_2 \\
&= x^2 - \frac{1/3}{1}1 - \frac{1/12}{1/12}\left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - x + \frac{1}{6}\text{。}
\end{aligned}
$$

再將 $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ 予以標準化:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_1 &= \frac{1}{\sqrt{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle}}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{1}\mathbf{v}_1 = 1 \\
\mathbf{q}_2 &= \frac{1}{\sqrt{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle}}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{1/12}}\left(x - \frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) \\
\mathbf{q}_3 &= \frac{1}{\sqrt{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 \rangle}}\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{1/180}}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) = 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\text{。}
\end{aligned}
$$

□

Problem 97

Let $C[0,1]$ be the space of continuous functions on the interval $[0,1]$ with the inner product defined by

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Find the closet straight line to $f(x) = x^2$ over $0 \le x \le 1$.

Solution

令 $\mathbf{p} = x^2$, $\mathbf{v}_1 = 1$, $\mathbf{v}_2 = x$, 最近似直線 $g(x) = c_1 + c_2 x$ 滿足下列正規方程式 (normal equation):

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{p} - c_1\mathbf{v}_1 - c_2\mathbf{v}_2 \rangle &= 0 \\
\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{p} - c_1\mathbf{v}_1 - c_2\mathbf{v}_2 \rangle &= 0\text{。}
\end{aligned}
$$

將上面兩式展開整理成矩陣方程, 如下:

$$\begin{bmatrix} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{p} \rangle \\ \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{p} \rangle \end{bmatrix},$$

計算可得

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

解出 $c_1 = -\frac{1}{6}$, $c_2 = 1$, 故最近似直線是 $g(x) = x - \frac{1}{6}$。 □

Problem 98

Let $\mathcal{X}$ be a subspace of an inner product space $\mathcal{V}$. Prove the following statements.

(a) $\mathcal{X} \cap \mathcal{X}^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$

(b) $\mathcal{X} + \mathcal{X}^{\perp} = \mathcal{V}$

(c) $\dim \mathcal{X} + \dim \mathcal{X}^{\perp} = \dim \mathcal{V}$

(d) $(\mathcal{X}^{\perp})^{\perp} = \mathcal{X}$

Solution

(a) 令 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ 且 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^{\perp}$, 則 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$, 所以 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$。

(b) 令 $n = \dim \mathcal{V}$。若 $\mathcal{X} = \{\mathbf{0}\}$ 或 $\mathcal{X} = \mathcal{V}$, 顯然有 $\mathcal{X} + \mathcal{X}^{\perp} = \mathcal{V}$。以下考慮 $\dim \mathcal{V} = k$ 且 $0 < k < n$。令 $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ 爲 $\mathcal{X}$ 的一組標準正交 (orthonormal) 基底。對於任一 $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, 寫出 $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k$, 其中 $c_i = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{v} \rangle$, 則 $\mathbf{y} = \mathbf{v} - \mathbf{x}$ 正交於 $\mathcal{X}$。證明如下: 對於每一 $i = 1, \ldots, k$,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{y} \rangle &= \left\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{v} - \sum_{j=1}^{k} c_j \mathbf{x}_j \right\rangle \\ &= \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{v} \rangle - \sum_{j=1}^{k} c_j \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle \\ &= c_i - c_i = 0, \end{aligned}$$

得知 $\mathbf{y}$ 正交於所有基底向量 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$, 因此 $\mathbf{y} \in \mathcal{X}^\perp$。所以, 任一 $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ 皆可分解成 $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, 其中 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{X}^\perp$, 證得 $\mathcal{V} = \mathcal{X} + \mathcal{X}^\perp$。

(c) 由 (b) 可知 $\dim \mathcal{V} = \dim(\mathcal{X} + \mathcal{X}^\perp)$, 由 (a) 可知 $\dim(\mathcal{X} + \mathcal{X}^\perp) = \dim \mathcal{X} + \dim \mathcal{X}^\perp$。

(d) 利用 (c) 恆等式: $\dim \mathcal{X} + \dim \mathcal{X}^\perp = \dim \mathcal{V}$, 將 $\mathcal{X}$ 取代爲 $\mathcal{X}^\perp$, 就有 $\dim \mathcal{X}^\perp + \dim(\mathcal{X}^\perp)^\perp = \dim \mathcal{V}$, 立得 $\dim(\mathcal{X}^\perp)^\perp = \dim \mathcal{X}$。若 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, 則 $\mathbf{x} \perp \mathcal{X}^\perp$, 這意味 $\mathcal{X} \subseteq (\mathcal{X}^\perp)^\perp$。但子空間 $\mathcal{X}$ 和 $(\mathcal{X}^\perp)^\perp$ 有相同的維度, 因此證明 $(\mathcal{X}^\perp)^\perp = \mathcal{X}$。$\square$

Problem 99

Let A and B be an $m \times n$ and $m \times p$ real matrices, respectively. If $N(A^T) \subseteq N(B^T)$, prove that $C(B) \subseteq C(A)$.

Solution

因爲 $N(A^T) \subseteq N(A^T) + N(B^T)$, 利用集合容斥性質即得 $(N(A^T) + N(B^T))^\perp \subseteq N(A^T)^\perp$, 其中 $\perp$ 代表正交補集。同樣地, $(N(A^T) + N(B^T))^\perp \subseteq N(B^T)^\perp$, 合併以上結果可得

$$(N(A^T) + N(B^T))^\perp \subseteq N(A^T)^\perp \cap N(B^T)^\perp。$$

已知 $N(A^T) \subseteq N(B^T)$, 就有 $N(A^T)+N(B^T) = N(B^T)$, 因此 $N(B^T)^\perp \subseteq N(A^T)^\perp \cap N(B^T)^\perp$。最後將子空間正交補集關係 $N(A^T)^\perp = C(A)$ 和 $N(B^T)^\perp = C(B)$ 代入上式, 即得 $C(B) \subseteq C(A) \cap C(B)$, 故可推論 $C(B) \subseteq C(A)$。 $\square$

Problem 100

An $n \times n$ Householder matrix H has the form $H = I - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$, where $\|\mathbf{u}\| = 1$. Let $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ be nonzero vectors in $\mathbb{R}^n$. If $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$, show that there exists a Householder matrix H such that $H\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Solution

令 $H = I - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$, 其中 $\|\mathbf{u}\| = 1$, 且 $H\mathbf{x} = \mathbf{y}$, 也就有

$$H\mathbf{x} = (I - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T)\mathbf{x} = \mathbf{x} - 2(\mathbf{u}^T\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{y},$$

亦即

$$2(\mathbf{u}^T\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{y}。$$

觀察出

$$(\mathbf{x}-\mathbf{y})^T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{y} - \mathbf{y}^T\mathbf{x} - \mathbf{y}^T\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2 = 0。$$

若 $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, 令 $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}$, 改寫 $\mathbf{x} = \frac{1}{2}[(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + (\mathbf{x}+\mathbf{y})]$, 乘開確認

$$2(\mathbf{u}^T\mathbf{x})\mathbf{u} = \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^T}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}[(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + (\mathbf{x}+\mathbf{y})]\mathbf{u} = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|\mathbf{u} = \mathbf{x}-\mathbf{y}。$$

若 $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, 則任意選擇單位長向量 $\mathbf{u} \in \mathrm{span}\{\mathbf{x}^\perp\}$ 使得 $\mathbf{u}^T\mathbf{x} = 0$。 $\square$

Problem 101

Let $A = [a_{ij}]$ be an $n \times n$ matrix such that $a_{ij} = 1$ or -1 for every i, j, and all rows are mutually orthogonal. If A has an $p \times q$ submatrix whose entries are all 1, show that $pq \leq n$.

Solution

令 P 和 Q 分別代表 A 的 $p \times q$ 子陣的列行指標集合, 對於所有 $i \in P$, $j \in Q$, $a_{ij} = 1$。將 A 的各列表示爲行向量 $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$, 並設 $\mathbf{x} = [x_j] = \sum_{i\in P} \mathbf{r}_i$。因爲 A 的各列彼此正交, 可知

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \left(\sum_{i\in P}\mathbf{r}_i\right)^T\left(\sum_{j\in P}\mathbf{r}_j\right) = \sum_{i\in P}\mathbf{r}_i^T\mathbf{r}_i = pn。$$

但是 $x_j = \sum_{i\in P} a_{ij}$, 推論

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\|^2 &= \sum_{j=1}^n x_j^2 = \sum_{j=1}^n\left(\sum_{i\in P} a_{ij}\right)^2 \\ &= \sum_{j\in Q}\left(\sum_{i\in P} a_{ij}\right)^2 + \sum_{j\notin Q}\left(\sum_{i\in P} a_{ij}\right)^2 \\ &= \sum_{j\in Q} p^2 + \sum_{j\notin Q}\left(\sum_{i\in P} a_{ij}\right)^2 \geq p^2 q。\end{aligned}$$

合併以上結果即得 $pn \geq p^2 q$, 也就有 $n \geq pq$。 $\square$

Problem 102

Let $\mathcal{V}$ be a finite dimensional inner product space, and $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ be two subspaces of $\mathcal{V}$. If $\dim\mathcal{X} < \dim\mathcal{Y}$, show that there exists a nonzero vector $\mathbf{y}$ in $\mathcal{Y}$ such that $\mathbf{y}$ is orthogonal to all vectors in $\mathcal{X}$.

Solution

為簡化符號, 令 $\dim\mathcal{V} = n$, $\dim\mathcal{X} = p$, $\dim\mathcal{Y} = q$, 且 $q > p$。利用子空間維度的容斥關係, 可得

$$\dim(\mathcal{X}^\perp + \mathcal{Y}) = \dim\mathcal{X}^\perp + \dim\mathcal{Y} - \dim(\mathcal{X}^\perp \cap \mathcal{Y}) \leq n。$$

因爲 $\dim\mathcal{X}^\perp = n - p$, 可得

$$\dim(\mathcal{X}^\perp \cap \mathcal{Y}) \geq (n-p) + q - n = q - p > 0。$$

這說明 $\mathcal{X}^\perp \cap \mathcal{Y} \neq \{\mathbf{0}\}$, 亦即存在 $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ 使得 $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ 且 $\mathbf{y} \in \mathcal{X}^\perp$; 也就是說, 對於任何 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$。 □

Problem 103

Let $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ be subspaces of an inner product space $\mathcal{V}$. Show that

(a) $(\mathcal{X}+\mathcal{Y})^\perp = \mathcal{X}^\perp \cap \mathcal{Y}^\perp$,

(b) $(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})^\perp = \mathcal{X}^\perp + \mathcal{Y}^\perp$.

Solution

(a) 利用集合的容斥性質, 由 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}+\mathcal{Y}$ 可得 $(\mathcal{X}+\mathcal{Y})^\perp \subseteq \mathcal{X}^\perp$。同樣道理, $(\mathcal{X}+\mathcal{Y})^\perp \subseteq \mathcal{Y}^\perp$, 合併以上結果即得到 $(\mathcal{X}+\mathcal{Y})^\perp \subseteq \mathcal{X}^\perp \cap \mathcal{Y}^\perp$。接者考慮相反方向關係, 若 $\mathbf{z} \in \mathcal{X}^\perp \cap \mathcal{Y}^\perp$, 則對於任意 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$, $\langle \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle = 0$ 且 $\langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle = 0$。換句話說, 對於任意 $\mathbf{u} \in \mathcal{X}+\mathcal{Y}$, 必有 $\langle \mathbf{z}, \mathbf{u} \rangle = 0$, 證得 $\mathcal{X}^\perp \cap \mathcal{Y}^\perp \subseteq (\mathcal{X}+\mathcal{Y})^\perp$。

(b) 利用題 (a) 結果, 將 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 分別以 $\mathcal{X}^\perp$ 和 $\mathcal{Y}^\perp$ 取代, 即有 $(\mathcal{X}^\perp + \mathcal{Y}^\perp)^\perp = (\mathcal{X}^\perp)^\perp \cap (\mathcal{Y}^\perp)^\perp = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$。 □

Problem 104

Let T be a linear transformation on an inner product space $\mathcal{V}$, satisfying

$$\langle T(\mathbf{x}), \mathbf{y}\rangle = -\langle \mathbf{x}, T(\mathbf{y})\rangle .$$

If λ is a real eigenvalue of T, show that $\lambda = 0$.

Solution

令 λ 爲線性變換 T 的一特徵值, 對應的特徵向量爲 $\mathbf{x}$, 則 $\langle T(\mathbf{x}), \mathbf{x}\rangle = -\langle \mathbf{x}, T(\mathbf{x})\rangle$ 蘊含 $\langle \lambda\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = -\langle \mathbf{x}, \lambda\mathbf{x}\rangle$。根據內積性質, $\langle \lambda\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = \bar{\lambda}\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$ 且 $\langle \mathbf{x}, \lambda\mathbf{x}\rangle = \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$。由於 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 故得 $\lambda + \bar{\lambda} = 0$, 這說明 $\lambda = 0$ 若 λ 爲實數。 $\square$

行列式

Problem 105

Explain why the following determinant is equal to zero:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

For an n by n matrix $A = [a_{ij}]$, what is the smallest $m \times m$ zero principal submatrix, $a_{ij} = 0$, $i, j = 1, \ldots, m$, making $\det A = 0$?

Solution

行列式的前三個行向量爲線性相關, 所以行列式等於零; 也就是說, 如果零主子陣「太大」, 將使行列式爲零。當零主子陣爲 $m \times m$ 階時, 有 m 個 n-維向量擠在維度是 $n - m$ 的子空間中, 這 m 個向量要爲獨立的條件是必須有足夠的活動空間, 亦即 $n - m \geq m$; 反過來說, 如果 $m > n - m$, 則此 m 個向量必定是線性相關, 因此使行列式爲零的最小 m 值爲 $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$。 $\square$

Problem 106

Let A_n be the tridiagonal $n \times n$ matrix with 2's on the main diagonal, 1's immediately above the main diagonal, 3's immediately below the main diagonal, and 0's everywhere else:

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Explicitly calculate $\det A_n$, for $n = 1, 2, 3, 4$, and express $\det A_n$ in terms of $\det A_{n-1}$ and $\det A_{n-2}$.

(b) Derive the formula for $\det A_n$.

Solution

(a) 前面幾個低階行列式可以很容易求出

$$
\begin{aligned}
\det A_1 &= \det[2] = 2 \\
\det A_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \\
\det A_3 &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 2\det A_2 - 3\det A_1 = 2\cdot 1 - 3\cdot 2 = -4 \\
\det A_4 &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 2\det A_3 - 3\det A_2 = 2\cdot(-4) - 3\cdot(1) = -11\text{。}
\end{aligned}
$$

由此可歸納得到 $\det A_n$ 的遞迴公式

$$\det A_n = 2\det A_{n-1} - 3\det A_{n-2}\text{。}$$

(b) 將題 (a) 的遞迴公式寫成矩陣形式:

$$\begin{bmatrix} \det A_{k+2} \\ \det A_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \det A_{k+1} \\ \det A_k \end{bmatrix}\text{。}$$

令 $\mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} \det A_{k+1} \\ \det A_k \end{bmatrix}$, A 為上式的係數矩陣, 便有差分方程式 $\mathbf{u}_{k+1} = A\mathbf{u}_k$, 初始值為 $\mathbf{u}_1 = [1, 2]^T$。將矩陣 A 正交化為 $A = S\Lambda S^{-1}$, S 和 Λ 分別為特徵向量矩

陣和特徵值矩陣:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}i} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix},$$

其中 $\lambda_1 = -1 + \sqrt{2}i$, $\lambda_2 = -1 - \sqrt{2}i$。差分方程式的解爲 $\mathbf{u}_n = A^{n-1}\mathbf{u}_1$, 計算矩陣的冪

$$\begin{aligned} A^{n-1} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} \end{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}i} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}i} \begin{bmatrix} \lambda_1^n - \lambda_2^n & -\lambda_1^n\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2^n \\ \lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} & -\lambda_1^{n-1}\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2^{n-1} \end{bmatrix}。 \end{aligned}$$

再將初始值 $\mathbf{u}_1$ 和得到的 A^{n-1} 代入 $\mathbf{u}_n = A^{n-1}\mathbf{u}_1$ 可得出解

$$\det A_n = \frac{1}{2\sqrt{2}i}(\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} - 2\lambda_1^{n-1}\lambda_2 + 2\lambda_1\lambda_2^{n-1})。$$

$\square$

Problem 107

Calculate the determinant of the following 6×6 matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solution

觀察發現給出的矩陣每一列及每一行僅含一零元, 於是將 A 改寫爲排列矩陣 P 和矩陣 B 的乘積, 而 B 的主對角元皆爲零, 如下:

$$A = PB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}。$$

排列矩陣 P 其列次序爲 521634, 經過3次列交換可轉換爲單位矩陣, 因此 $\det P = -1$。將矩陣 B 改寫成 $B = \mathbf{u}\mathbf{u}^T - I$, 其中 $\mathbf{u} = [1,1,1,1,1,1]^T$, 而 6×6 階方陣 $\mathbf{u}\mathbf{u}^T$ 的每一個元皆爲1。因 $\mathbf{u}\mathbf{u}^T$ 爲對稱矩陣, 必可找出互爲正交的完整特徵向量集合。計算 $(\mathbf{u}\mathbf{u}^T)\mathbf{u} = (\mathbf{u}^T\mathbf{u})\mathbf{u} = 6\mathbf{u}$, 令 $\mathbf{v} \in \text{Span}\{\mathbf{u}\}^\perp$, 則 $\mathbf{u}^T\mathbf{v} = 0$, 因此有 $(\mathbf{u}\mathbf{u}^T)\mathbf{v} = (\mathbf{u}^T\mathbf{v})\mathbf{u} = \mathbf{0}$。因爲 $\dim\text{Span}\{\mathbf{u}\}^\perp = 5$, 矩陣 $\mathbf{u}\mathbf{u}^T$ 的特徵值爲 $6,0,0,0,0,0$, 得知 B 的特徵值則爲 $5,-1,-1,-1,-1,-1$, 故 $\det B = -5$, 所以 $\det A = (\det P)(\det B) = (-1)(-5) = 5$。 $\square$

Problem 108

Let

$$P = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

where A, B, C, D are $n \times n$ matrices. If D is invertible and $CD = DC$, show that

$$\det P = \det(AD - BC).$$

Solution

分塊矩陣的行列式有一個有效而實用的性質: 三角形分塊矩陣的行列式等於主對角分塊行列式的乘積。因此, 若三角形分塊矩陣的主對角分塊都是單位矩陣 (其階數未必相同), 則行列式值爲1。爲利用上述性質, 我們設計一個矩陣乘法運算: 令 P 和一個主對角爲單位矩陣的

三角形分塊矩陣相乘, 並使其乘積亦爲三角形分塊矩陣, 下爲一例:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -D^{-1}C & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{bmatrix}。$$

三角形分塊其 (2,1) 元設爲 $-D^{-1}C$ 的目的是使矩陣乘積也爲三角形分塊矩陣。剩下來的工作是計算矩陣的行列式, 利用前述性質, 等號左邊的行列式爲

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_n & 0 \\ -D^{-1}C & I_n \end{vmatrix} = \det P \cdot \det I_n \cdot \det I_n = \det P,$$

等號右邊的行列式則爲

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A-BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{vmatrix} &= \det(A-BD^{-1}C) \cdot \det D \\ &= \det(AD-BD^{-1}CD) \\ &= \det(AD-BD^{-1}DC) \\ &= \det(AD-BC)。\end{aligned}$$

我們使用了已知條件 $CD = DC$。上面左右兩端的兩行列式相等, 於是得證。 □

Problem 109

Let A and B be $m \times m$ and $n \times n$ matrices, respectively. Derive a formula for $\det \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & C \end{bmatrix}$.

Solution

考慮下面的分塊矩陣乘法

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_m & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}。$$

計算等號兩邊行列式, 利用矩陣乘積行列式可乘性質, 可得

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & I_n \\ I_m & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix}。$$

執行 $m+n$ 次列交換運算, 每次列交換改變行列式正負符號, 因此

$$\begin{vmatrix} 0 & I_n \\ I_m & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{m+n} \begin{vmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{vmatrix} = (-1)^{m+n}。$$

因爲下三角形分塊矩陣的行列式等於主對角分塊行列式乘積, 也就有

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = (\det A)(\det B),$$

所以

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{m+n}(\det A)(\det B)。$$

□

Problem 110

Let A and B be n by n matrices over $\mathbb{C}$. Prove that

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A+B)\ \det(A-B).$$

Solution

設 $(A+B)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, $(A-B)\mathbf{y} = \mu\mathbf{y}$, 則

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ -\mathbf{y} \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ -\mathbf{y} \end{bmatrix}。$$

上兩式指出方陣 $\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$ 包含 $A+B$ 的特徵值 λ 和 $A-B$ 的特徵值 μ, 因此存在以下特徵多項式關係:

$$\begin{vmatrix} A-tI_n & B \\ B & A-tI_n \end{vmatrix} = \det\left((A+B)-tI_n\right)\ \det\left((A-B)-tI_n\right)。$$

代入 $t=0$ 即證得所求。 □

Problem 111

Suppose A and B are $n \times n$ real matrices. Let

$$C = \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}.$$

Show that $\det C \geq 0$.

Solution

設計分塊矩陣乘法

$$\begin{bmatrix} I & iI \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -iI \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - iB & 0 \\ -B & A + iB \end{bmatrix},$$

其中 $i = \sqrt{-1}$。等號兩邊同時計算行列式, 因爲

$$\begin{vmatrix} I & iI \\ 0 & I \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} I & -iI \\ 0 & I \end{vmatrix} = 1,$$

就有

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A - iB & 0 \\ -B & A + iB \end{vmatrix} \\ &= \det(\overline{A + iB}) \det(A + iB) \\ &= \overline{\det(A + iB)} \det(A + iB) \geq 0。\end{aligned}$$

$\square$

Problem 112

Suppose A, B, C and D are $n \times n$ matrices. If rank $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = n$, show that

$$\begin{vmatrix} |A| & |B| \\ |C| & |D| \end{vmatrix} = 0.$$

Solution

分開兩個情況討論。若 A 是可逆的, 則 $\operatorname{rank}A = n$, 考慮

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}。$$

所以 $D - CA^{-1}B = 0$, 亦即 $D = CA^{-1}B$。上式等號兩邊同時計算行列式, 可得 $\det D = (\det C)(\det A^{-1})(\det B)$, 也就有 $|A| \cdot |D| = |B| \cdot |C|$。若 A 不可逆, 只要證明 $\det B = 0$ 或 $\det C = 0$ 即可。若 B 爲可逆矩陣, $\operatorname{rank}B = n$, 就有

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -DB^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C - DB^{-1}A & 0 \end{bmatrix},$$

推知 $C = DB^{-1}A$, 故 $\det C = (\det D)(\det B^{-1})(\det A) = 0$。 □

Problem 113

Suppose A and B are n by n orthogonal matrices such that

$$\det A + \det B = 0.$$

Prove that $\det(A + B) = 0$.

Solution

利用行列式性質

$$\det(A + B) = \det(A + B)^T = \det(A^T + B^T)。$$

等號兩邊分別左乘 $\det A$ 和 $\det B$, 使用行列式可乘公式和正交矩陣關係, 可得

$$(\det A)\det(A + B) = (\det A)\det(A^T + B^T) = \det(AA^T + AB^T) = \det(I + AB^T)$$

且

$$(\det B)\det(A + B) = \det(BA^T + BB^T) = \det(BA^T + I)^T = \det(I + AB^T)。$$

將兩式相減, 就有

$$(\det A - \det B)\det(A + B) = 0。$$

若 $\det(A + B) \neq 0$, 則 $\det A = \det B$。由已知 $\det A + \det B = 0$ 可推得 $\det A = 0$, 這與 A 是正交矩陣矛盾, 所以必定有 $\det(A + B) = 0$。 □

Problem 114

Suppose A and B are $n \times n$ matrices satisfying $AB = -BA$.

(a) Find the flaw in the statement: Taking determinants gives $(\det A)(\det B) = -(\det B)(\det A)$, so either A or B must have zero determinant. Thus $AB = -BA$ is only possible if A or B is singular.

(b) In the case of $n = 2$, let $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix}$. Express the relation $AB + BA = 0$ in the form of matrix equation $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$, where C is a 4 by 4 matrix, and $\mathbf{x} = [s, t, u, v]^T$. Find the determinant of C, and identify the condition for $\det C = 0$. If $B \neq 0$, find all possible 2×2 A's and B's satisfying $AB + BA = 0$.

Solution

(a) 注意, 行列式並非矩陣的線性運算。若 A 是 $n \times n$ 階矩陣, $\det(kA) = k^n \det A$, 所以 $\det(-BA) = \det(-B)(\det A) = (-1)^n(\det B)(\det A)$。因此當 n 是偶數時, 此題陳述並不爲眞。

(b) 將 A, B 以給出的矩陣形式代入, 並展開 $AB + BA = 0$, 可以得到

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2as + bu + ct & at + bv + bs + dt \\ au + cs + cv + du & ct + bu + 2dv \end{bmatrix} = 0。$$

設 $\mathbf{x} = [s, t, u, v]^T$, 上式等價於

$$C\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2a & c & b & 0 \\ b & a+d & 0 & b \\ c & 0 & a+d & c \\ 0 & c & b & 2d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s \\ t \\ u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}。$$

執行標準的行列式計算程序, 先以列運算初步化簡 C, 再以共因子展開, 計算如下:

$$\det C = \begin{vmatrix} 2a & c & b & 0 \\ b & a+d & 0 & b \\ c & 0 & a+d & c \\ 0 & c & b & 2d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 0 & 0 & -2d \\ b & a+d & 0 & b \\ c & 0 & a+d & c \\ 0 & c & b & 2d \end{vmatrix}$$

$$= 2a \begin{vmatrix} a+d & 0 & b \\ 0 & a+d & c \\ c & b & 2d \end{vmatrix} + 2d \begin{vmatrix} b & a+d & 0 \\ c & 0 & a+d \\ 0 & c & b \end{vmatrix}。$$

剩下來的計算並不困難, 持續以共因子展開並重組化簡, 最終可以得到結果:

$$\begin{aligned} \det C &= 2a\left[(a+d)(2d(a+d)-bc)-bc(a+d))\right] - 2d\left[2bc(a+d)\right] \\ &= 4a(a+d)(ad+d^2-bc) - 4bcd(a+d) \\ &= 4(a+d)(a^2d+ad^2-abc-bcd) \\ &= 4(a+d)^2(ad-bc)。\end{aligned}$$

當 $a+d=0$ 或 $ad-bc=0$ 時, $\det C=0$。此即爲矩陣 A 必須滿足的條件, 當 C 的行列式爲零時, C 的零空間存在非平凡解 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 而這些非平凡解 $\mathbf{x}$ 即構成對應的 B 矩陣。 □

Problem 115

Suppose $A=[a_{ij}]$ is an $n\times n$ matrix. Let adj$A$ denote the adjoint of A; that is, adj$A$ is the $n\times n$ matrix whose (i,j)-entry is the cofactor $(-1)^{i+j}\det A_{ji}$ of a_{ji}, where A_{ji} is the submatrix obtained from A by deleting the j-th row and the i-th column. Prove the following statements.

(a) $\det(\mathrm{adj}A) = (\det A)^{n-1}$

(b) $\mathrm{adj}(\mathrm{adj}A) = (\det A)^{n-2}A$

(c) $\mathrm{adj}(AB) = (\mathrm{adj}B)(\mathrm{adj}A)$

(d) $\mathrm{adj}A^T = (\mathrm{adj}A)^T$

(e) $\mathrm{adj}(kA) = k^{n-1}\mathrm{adj}A$

(f) $\mathrm{adj}(SAS^{-1}) = S(\mathrm{adj}A)S^{-1}$ for nonsingular S.

(g) If A is symmetric, so is $\mathrm{adj}A$.

(h) If A is upper triangular, so is $\mathrm{adj}A$.

Solution

伴隨矩陣 $\mathrm{adj}A$ 有幾個重要的性質:

$$A(\mathrm{adj}A) = (\mathrm{adj}A)A = (\mathrm{det}A)I。$$

若 A 是可逆的, $\mathrm{adj}A = (\mathrm{det}A)A^{-1}$。若 A 不可逆, 則 $\mathrm{adj}A$ 也不可逆, 若 $\mathrm{rank}A = n-1$, $\mathrm{rank}(\mathrm{adj}A) = 1$, 又若 $\mathrm{rank}A < n-1$, $\mathrm{rank}(\mathrm{adj}A) = 0$, 亦即 $A = 0$, 證明從略。

(a) 若 A 是可逆矩陣, 利用上述性質計算

$$\begin{aligned}\mathrm{det}(\mathrm{adj}A) &= \mathrm{det}\left((\mathrm{det}A)A^{-1}\right) = (\mathrm{det}A)^n\mathrm{det}(A^{-1}) \\ &= (\mathrm{det}A)^n(\mathrm{det}A)^{-1} = (\mathrm{det}A)^{n-1}。\end{aligned}$$

若 A 不可逆, $\mathrm{det}A = 0$, $\mathrm{det}(\mathrm{adj}A) = 0$, 上式仍成立。

(b) 若 A 是可逆的, 利用前述伴隨矩陣性質, 將 A 取代爲 $\mathrm{adj}A$, 就有

$$\mathrm{adj}(\mathrm{adj}A) = \mathrm{det}(\mathrm{adj}A)(\mathrm{adj}A)^{-1}。$$

上式中, $(\mathrm{adj}A)^{-1} = ((\mathrm{det}A)A^{-1})^{-1} = (\mathrm{det}A)^{-1}A$, 再利用題 (a) 結果, 可得

$$\mathrm{adj}(\mathrm{adj}A) = (\mathrm{det}A)^{n-1}(\mathrm{det}A)^{-1}A = (\mathrm{det}A)^{n-2}A。$$

若 A 不可逆, 由前述 $\mathrm{rank}(\mathrm{adj}A)$ 性質, 不難證明 $\mathrm{rank}(\mathrm{adj}(\mathrm{adj}A)) = 0$, 也就有 $\mathrm{adj}(\mathrm{adj}A) = 0$。

(c) 先考慮 A, B 都是可逆的情況, 將 AB 代入上述伴隨矩陣性質,

$$\mathrm{adj}(AB) = (\mathrm{det}(AB))(AB)^{-1} = (\mathrm{det}A)(\mathrm{det}B)B^{-1}A^{-1} = (\mathrm{adj}B)(\mathrm{adj}A)。$$

若 A 或 B 不可逆, 將 A, B 分別以 $A+\epsilon I$ 和 $B+\epsilon I$ 替換, 上式便爲

$$\mathrm{adj}((A+\epsilon I)(B+\epsilon I)) = (\mathrm{adj}(B+\epsilon I))(\mathrm{adj}(A+\epsilon I))。$$

利用連續性, 當 $\epsilon \to 0$, 上式趨於前面得到的可逆矩陣的關係式。

(d) 由伴隨矩陣定義可知 $\mathrm{adj}A^T$ 的 (i,j) 元爲 $(-1)^{i+j}\mathrm{det}A_{ji}^T$ 也就是 $(-1)^{i+j}\mathrm{det}A_{ij}$, 此即爲 $(\mathrm{adj}A)^T$ 的 (i,j) 元。

(e) 因爲 $(-1)^{i+j}\mathrm{det}(kA_{ji}) = (-1)^{i+j}k^{n-1}\mathrm{det}A_{ji}$ 得知此題陳述爲眞。

(f) 由題 (c),

$$\begin{aligned}\mathrm{adj}(SAS^{-1}) &= (\mathrm{adj}S^{-1})(\mathrm{adj}A)(\mathrm{adj}S)\\ &= (\mathrm{det}S^{-1})S(\mathrm{adj}A)(\mathrm{det}S)S^{-1}\\ &= S(\mathrm{adj}A)S^{-1}。\end{aligned}$$

(g) 由題 (d) 得知 $(\mathrm{adj}A)^T = \mathrm{adj}A^T = \mathrm{adj}A$, 因 $A^T = A$。

(h) 設 A 爲上三角形矩陣, $a_{ij}=0$, $i>j$。伴隨矩陣 $\mathrm{adj}A$ 的 (i,j) 元爲 $(-1)^{i+j}\mathrm{det}A_{ji}$, 以共因子展開不難確認當 $i>j$, 子矩陣 A_{ji} 不可逆, 即 $\mathrm{det}A_{ji}=0$。 □

Problem 116

Suppose A is an $n\times n$ matrix. What are the possible values of the rank of $\mathrm{adj}A$?

Solution

我們分開幾種 $\mathrm{rank}A$ 的可能情況。若 $\mathrm{rank}A=n$, A 是可逆矩陣, $\det(A)\neq 0$, 則伴隨矩陣 $\mathrm{adj}A=\det(A)A^{-1}$ 也是可逆的, 故 $\mathrm{rank}(\mathrm{adj}A)=n$。當矩陣 A 不爲可逆時, 我們直接計算矩陣的秩。利用兩矩陣之積的伴隨矩陣性質 $\mathrm{adj}EA=(\mathrm{adj}A)(\mathrm{adj}E)$, 並設 E 爲基本矩陣, 因爲 E 是可逆的, $\mathrm{adj}E$ 也是可逆矩陣。推知基本運算不會改變矩陣的秩, 也不改變伴隨矩陣的秩, 亦即 $\mathrm{rank}(\mathrm{adj}EA)=\mathrm{rank}(\mathrm{adj}A)$。令 $n\times n$ 階矩陣 R 爲 A 的最簡列梯形矩陣, 於是有 $\mathrm{rank}(\mathrm{adj}R)=\mathrm{rank}(\mathrm{adj}A)$。考慮以分塊形式表示的最簡列梯形矩陣

$R = \begin{bmatrix} I_r & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 當 $\text{rank}R = r = n-1$ 時, 由 $\text{adj}R$ 的定義得到

$$\text{adj}R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}。$$

$\text{adj}R$ 僅有一非零列, 因此 $\text{rank}(\text{adj}R) = 1$。當 $\text{rank}R = r < n-1$ 時, R 的線性獨立列和行的總數小於 $n-1$, 就有 $\text{adj}R = 0$, 故 $\text{rank}(\text{adj}R) = 0$。總結以上結果, $\text{rank}(\text{adj}A)$ 共有3種可能: 0, 1, 以及 n。 □

Problem 117

Consider the following linear equation:

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^T & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ b_{n+1} \end{bmatrix},$$

where A is a nonsingular $n \times n$ matrix, and $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, and $\mathbf{b}$ are vectors in $\mathbb{R}^n$.

(a) Find an $n \times n$ matrix Y and a vector $\mathbf{z}$ in $\mathbb{R}^n$ so that multiplying both sides of the system by $\begin{bmatrix} Y & \mathbf{0} \\ \mathbf{z}^T & 1 \end{bmatrix}$ yields an equivalent echelon form, i.e.,

$$\begin{bmatrix} Y & \mathbf{0} \\ \mathbf{z}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^T & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & * \\ \mathbf{0}^T & * \end{bmatrix},$$

where $*$ means arbitrary vector or scalar.

(b) Show that the determinant of $\begin{bmatrix} A & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^T & d \end{bmatrix}$ has the form

$$\begin{vmatrix} A & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^T & d \end{vmatrix} = d\ (\det A) - \mathbf{v}^T(\text{adj}A)\mathbf{u}.$$

(c) Show that the determinant of $A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ has the formula

$$\det(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) = \det A + \mathbf{v}^T(\mathrm{adj}A)\mathbf{u}.$$

(d) Show that if $d - \mathbf{v}^T A^{-1}\mathbf{u} \neq 0$, then the solution of the system is given by

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= A^{-1}(\mathbf{b} - x_{n+1}\mathbf{u}),\\ x_{n+1} &= \frac{b_{n+1} - \mathbf{v}^T A^{-1}\mathbf{b}}{d - \mathbf{v}^T A^{-1}\mathbf{u}}.\end{aligned}$$

Solution

(a) 直接將分塊矩陣乘開, 得到下式:

$$\begin{aligned} YA &= I_n \\ \mathbf{z}^T A + \mathbf{v}^T &= \mathbf{0}^T。\end{aligned}$$

由第一式可知 $Y = A^{-1}$, 第二式右乘 A^{-1} 可得 $\mathbf{z}^T = -\mathbf{v}^T A^{-1}$, 解出下三角形分塊矩陣爲

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{v}^T A^{-1} & 1 \end{bmatrix}。$$

(b) 將題 (a) 得到的下三角形分塊矩陣和給出的係數矩陣相乘可以得到下面的梯形矩陣:

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{v}^T A^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^T & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & A^{-1}\mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & d - \mathbf{v}^T A^{-1}\mathbf{u} \end{bmatrix}。$$

因爲三角形分塊矩陣其行列式等於主對角分塊行列式的乘積, 於是有

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A^{-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{v}^T A^{-1} & 1 \end{vmatrix} &= \det A^{-1} = (\det A)^{-1}, \\ \begin{vmatrix} I_n & A^{-1}\mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & d - \mathbf{v}^T A^{-1}\mathbf{u} \end{vmatrix} &= d - \mathbf{v}^T A^{-1}\mathbf{u}。\end{aligned}$$

由此可算出所求的行列式

$$\begin{vmatrix} A & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^T & d \end{vmatrix} = (\det A)(d - \mathbf{v}^T A^{-1}\mathbf{u}) = d\ (\det A) - \mathbf{v}^T(\mathrm{adj}A)\mathbf{u}。$$

我們使用了基本關係 $A(\text{adj}A)=(\text{adj}A)A=(\det A)I$, 當 A 是可逆時, $\text{adj}A=(\det A)A^{-1}$。

(c) 我們可以設計以下分塊矩陣乘法以產生主對角分塊 $A+\mathbf{u}\mathbf{v}^T$:

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{u} \\ -\mathbf{v}^T & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^T & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A+\mathbf{u}\mathbf{v}^T & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}。$$

引用三角形分塊行列式爲其主對角分塊行列式乘積, 可知

$$\begin{vmatrix} I_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^T & 1 \end{vmatrix}=1$$

$$\begin{vmatrix} A+\mathbf{u}\mathbf{v}^T & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{vmatrix}=\det(A+\mathbf{u}\mathbf{v}^T)。$$

再利用題 (b) 得到的行列式公式, 即得

$$\begin{vmatrix} A & \mathbf{u} \\ -\mathbf{v}^T & 1 \end{vmatrix}=\det A+\mathbf{v}^T(\text{adj}A)\mathbf{u},$$

如此便導出關係式 $\det(A+\mathbf{u}\mathbf{v}^T)=\det A+\mathbf{v}^T(\text{adj}A)\mathbf{u}$。

(d) 考慮對應給出方程式的增廣矩陣:

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{u} & \mathbf{b} \\ \mathbf{v}^T & d & b_{n+1} \end{bmatrix}。$$

將題(a) 求得的下三角分塊矩陣和上面的增廣矩陣相乘, 乘積爲一梯形矩陣:

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{v}^T A^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \mathbf{u} & \mathbf{b} \\ \mathbf{v}^T & d & b_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_n & A^{-1}\mathbf{u} & A^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0}^T & d-\mathbf{v}^T A^{-1}\mathbf{u} & b_{n+1}-\mathbf{v}^T A^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix}。$$

與原方程式等價的簡化方程式爲

$$\begin{bmatrix} I_n & A^{-1}\mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & d-\mathbf{v}^T A^{-1}\mathbf{u} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A^{-1}\mathbf{b} \\ b_{n+1}-\mathbf{v}^T A^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix},$$

展開之後得到以下等價方程式:

$$\mathbf{x} + A^{-1}\mathbf{u}x_{n+1} = A^{-1}\mathbf{b}$$
$$(d - \mathbf{v}^T A^{-1}\mathbf{u})x_{n+1} = b_{n+1} - \mathbf{v}^T A^{-1}\mathbf{b}。$$

當 $d - \mathbf{v}^T A^{-1}\mathbf{u} \neq 0$ 時, 解爲 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} - A^{-1}x_{n+1}\mathbf{u}$, 而 $x_{n+1} = (b_{n+1} - \mathbf{v}^T A^{-1}\mathbf{b})(d - \mathbf{v}^T A^{-1}\mathbf{u})^{-1}$。 □

Problem 118

Suppose A and B are n by n matrices and suppose there exists a nonzero vector $\mathbf{x}$ such that $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ and a vector $\mathbf{y}$ such that $A\mathbf{y} = B\mathbf{x}$. If A_j is the matrix obtained from A by replacing its jth column by the jth column of B, show that

$$\sum_{j=1}^{n} \det A_j = 0.$$

Solution

由已知 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 且 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 因此 A 不是可逆的, 故 $\det A = 0$, $\mathrm{rank}A < n$。若 $\mathrm{rank}A < n-1$, 則 A_j 必包含線性相依的行向量, 因此也不爲可逆, 就有 $\sum_{j=1}^{n} \det A_j = 0$。接下來我們只需要考慮 $\mathrm{rank}A = n-1$ 的情況, 此時 $\dim N(A) = 1$, 這確定了 $N(A)$ 必定由 $\mathbf{x}$ 擴張而成。

令矩陣 $C = [c_{ij}]$ 的元爲 A 的共因子 (cofactor), 其轉置即爲伴隨 (adjoint) 矩陣, $C^T = \mathrm{adj}A$。以 A_j 的第 j 行做共因子展開, 得到

$$\det A_j = b_{1j}c_{1j} + b_{2j}c_{2j} + \cdots + b_{nj}c_{nj},$$

因此有

$$\sum_{j=1}^{n} \det A_j = \sum_{j=1}^{n} (b_{1j}c_{1j} + b_{2j}c_{2j} + \cdots + b_{nj}c_{nj}) = \mathrm{tr}(BC^T) = \mathrm{tr}(C^T B)。$$

剩下的問題是證明 $\mathrm{tr}(C^T B) = 0$。

由關係式 $AC^T = C^T A = (\det A)I$ 得知 $AC^T = C^T A = 0$, 也就有 $AC^T B = 0$, 此式表明 $C^T B$ 的每行都屬於 A 的零空間, 因此 $C^T B$ 的每個行向量都與 $\mathbf{x}$ 共線。另外,

$C^TB\mathbf{x} = C^TA\mathbf{y} = 0\mathbf{y} = \mathbf{0}$, 由於 $\mathbf{x}$ 擴張出 C^TB 的行空間, 可推得 $(C^TB)^2 = 0$。令 C^TB 的特徵值爲 λ, 則零矩陣 $(C^TB)^2$ 的特徵值爲 $\lambda^2 = 0$, 這說明 C^TB 的特徵值全都爲零, 而 $\mathrm{tr}(C^TB)$ 爲其所有的特徵值之和, 故 $\mathrm{tr}(C^TB) = 0$。 □

Problem 119

If

$$\mathrm{adj}A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

find A.

Solution

考慮伴隨矩陣主要關係式

$$A(\mathrm{adj}A) = (\det A)I。$$

因爲 $\det(\mathrm{adj}A) = 4$, $\mathrm{adj}A$ 可逆, 所以 $A = (\det A)(\mathrm{adj}A)^{-1}$。下面分別求出 $\det A$ 和 $(\mathrm{adj}A)^{-1}$。計算上述關係式等號兩邊的行列式, 因爲 A 是一 3×3 階矩陣, 可得 $(\det A)\det(\mathrm{adj}A) = (\det A)^3$, 解出 $\det A = \pm 2$ 或 $\det A = 0$ (此解與 A 可逆相矛盾)。最後求得

$$(\mathrm{adj}A)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

得到兩個答案:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -6 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

或

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}。$$

□

Problem 120

Let

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{bmatrix}.$$

What is $\det(A + I_5)$?

Solution

觀察發現 A 可表示爲

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \\ 1 & 10 \\ 1 & 15 \\ 1 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = UV,$$

利用 Sylvester 行列式定理 $\det(I_5 + UV) = \det(I_2 + VU)$, 因爲 $VU = \begin{bmatrix} 15 & 200 \\ 5 & 50 \end{bmatrix}$, 即得

$$\det(A + I_5) = \det(I_2 + VU) = \begin{vmatrix} 16 & 200 \\ 5 & 51 \end{vmatrix} = -184。$$

另一個做法: 利用特徵值之積計算行列式。令 VU 的特徵值爲 λ_1 和 λ_2。因爲 $A = UV$ 和 VU 有相同的非零特徵值, 推知 A 有特徵值 $\lambda_1, \lambda_2, 0, 0, 0$, 故 $A + I$ 有特徵值 $\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, 1, 1, 1$, 就有 $\det(A + I_5) = (\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1 + \lambda_2 + 1$。但是 $\lambda_1\lambda_2 = \det(VU) = -250$, $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{trace}(VU) = 65$, 所以 $\det(A + I) = -250 + 65 + 1 = -184$。 $\square$

Problem 121

Find the determinant and inverse of the $n \times n$ matrix

$$\begin{bmatrix} a+b & b & \cdots & b \\ b & a+b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a+b \end{bmatrix}.$$

Solution

令 A 代表給定的 $n \times n$ 階矩陣。先計算 A 的行列式, 將第 $2, 3, \ldots, n$ 行減去第1行, 再將第 $2, 3, \ldots, n$ 列加至第1列, 可得一下三角形行列式:

$$\begin{vmatrix} a+b & b & b & \cdots & b \\ b & a+b & b & \cdots & b \\ b & b & a+b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & -a & -a & \cdots & -a \\ b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a+nb & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix},$$

故 $\det A = a^{n-1}(a+nb)$。

另一個做法令 $A = aI + bE$, 其中 E 的每一元都爲1。因爲 $\mathrm{rank}E = 1$, 不難得知 E 僅有一非零特徵值 n, 故 E 的特徵值爲 $n, 0, \ldots, 0$, 即知 A 有特徵值 $a+nb, a, \ldots, a$, 也就得到 $\det A = (a+nb)a \cdots a = a^{n-1}(a+nb)$。若 $a = 0$, 則 A 不可逆。若 $a \neq 0$, $b = 0$, 則 $A^{-1} = \frac{1}{a}I$。以下考慮 a, b 皆不爲零的情況。因爲 $E^2 = nE$, 可知

$$AE = (aI + bE)E = aE + nbE = (a+nb)E = \frac{a+nb}{b}(A - aI),$$

上式可整理成 $A\left(\frac{1}{a}I - \frac{b}{a(a+nb)}E\right) = I$, 故得

$$A^{-1} = \frac{1}{a}I - \frac{b}{a(a+nb)}E,$$

亦即

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} - \frac{b}{a(a+nb)} & -\frac{b}{a(a+nb)} & \cdots & -\frac{b}{a(a+nb)} \\ -\frac{b}{a(a+nb)} & \frac{1}{a} - \frac{b}{a(a+nb)} & \cdots & -\frac{b}{a(a+nb)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{b}{a(a+nb)} & -\frac{b}{a(a+nb)} & \cdots & \frac{1}{a} - \frac{b}{a(a+nb)} \end{bmatrix}。$$

□

Problem 122

Let $V_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ be an $n \times n$ Vandermonde matrix of the form

$$V_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

For any integers $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, show that

$$\frac{\det V_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{\det V_n(1, 2, \ldots, n)}$$

is an integer.

Solution

利用 Vandermonde 行列式公式, 可知

$$\det V_n(1, 2, \ldots, n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (j - i) = \prod_{j=1}^{n} (j-1)!。$$

令 f_j 爲 j 階首一 (領先係數爲 1) 多項式, 如下:

$$f_j(a) = a^j + b_{j-1}a^{j-1} + \cdots + b_1 a + b_0,$$

並令

$$A = \begin{bmatrix} 1 & f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_{n-1}(a_1) \\ 1 & f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_{n-1}(a_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_{n-1}(a_n) \end{bmatrix}。$$

利用行列式基本性質, 可得

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 + b_0 & a_1^2 + b_1 a_1 + b_0 & \cdots & a_1^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} b_j a_1^j \\ 1 & a_2 + b_0 & a_2^2 + b_1 a_2 + b_0 & \cdots & a_2^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} b_j a_2^j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n + b_0 & a_n^2 + b_1 a_n + b_0 & \cdots & a_n^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} b_j a_n^j \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \det V_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)。\end{aligned}$$

對於任意整數 a, 設

$$f_j(a) = a(a-1)(a-2)\cdots(a-j+1) = j! \cdot \binom{a}{j},$$

所以 $f_j(a)$ 必包含因數 $(j-1)!$。再從 $\det A$ 的第 j 行, $j = 2, 3, \ldots, n$, 提出因數 $(j-1)!$, 即知 $\det A$, 也就是 $\det V_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, 可被 $\prod_{j=1}^{n}(j-1)!$ 整除, 故證得所求。 □

Problem 123

Let $\mathbf{a}_1$ and $\mathbf{a}_2$ be two independent vectors in $\mathbb{R}^3$. Consider the parallelogram whose adjacent sides are defined by $\mathbf{a}_1$ and $\mathbf{a}_2$. Prove that the area of the parallelogram is given by $\sqrt{\det A^T A}$, where $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}$.

Solution

令 $B = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{u} \end{bmatrix}$, 其中 $\mathbf{u} \in \operatorname{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}^{\perp}$, 且 $\|\mathbf{u}\| = 1$, 則 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, 和 $\mathbf{u}$ 所張開的平行六面體體積, 即 $|\det B|$, 等於 $\mathbf{a}_1$ 和 $\mathbf{a}_2$ 所張開的平行四邊形面積。因爲 $\det(B^T B) =$

$(\det B^T)(\det B) = (\det B)^2$, 可知 $\sqrt{\det(B^T B)}$ 即爲 $\mathbf{a}_1$ 和 $\mathbf{a}_2$ 所張的平行四邊形面積。展開計算

$$B^T B = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \mathbf{u}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_1^T\mathbf{u} \\ \mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_2^T\mathbf{u} \\ \mathbf{u}^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{u}^T\mathbf{a}_2 & \mathbf{u}^T\mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_2 & 0 \\ \mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

所以

$$\det(B^T B) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_2 \end{vmatrix} = \det(A^T A),$$

因此得證。 □

Problem 124

Let A_n be the $n \times n$ tridiagonal matrix of the form

$$A_n = \begin{bmatrix} a & b & & & & 0 \\ c & a & b & & & \\ & c & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & a & b \\ 0 & & & & c & a \end{bmatrix}.$$

Show that

$$\det A_n = \begin{cases} a^n & \text{if } \ bc = 0, \\ (n+1)(a/2)^n & \text{if } \ a^2 = 4bc, \\ (p^{n+1} - q^{n+1})/(p-q) & \text{if } \ a^2 \neq 4bc, \end{cases}$$

where

$$p = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}, \quad q = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}.$$

Solution

對 A_n 的第一列展開行列式降階運算, 可得

$$\det A_n = a \det A_{n-1} - bc \det A_{n-2}。$$

若 $bc=0$, 則 $b=0$ 或 $c=0$, A_n 是下或上三角形矩陣, 故 $\det A_n = a^n$。若 $bc \neq 0$, 令 p 和 q 爲 $x^2 - ax + bc = 0$ 的兩根, 就有 $p+q=a$, $pq=bc$。上面的遞歸公式可改寫如下:

$$\begin{aligned}\det A_n - p\det A_{n-1} &= q(\det A_{n-1} - p\det A_{n-2})\\ \det A_n - q\det A_{n-1} &= p(\det A_{n-1} - q\det A_{n-2})。\end{aligned}$$

令 $\alpha_n = \det A_n - p\det A_{n-1}$, $\beta_n = \det A_n - q\det A_{n-1}$, 則 $\alpha_n = q\alpha_{n-1}$ 且 $\beta_n = p\beta_{n-1}$。因爲 $\det A_1 = a$ 且 $\det A_2 = a^2 - bc$, 可得

$$\alpha_2 = (a^2 - bc) - pa = a(a-p) - bc = (p+q)q - pq = q^2。$$

運用同樣方式可得 $\beta_2 = p^2$, 因此解出 $\alpha_n = q^n$ 和 $\beta_n = p^n$。所以,

$$\begin{aligned}\det A_n - p\det A_{n-1} &= q^n\\ \det A_n - q\det A_{n-1} &= p^n。\end{aligned}$$

注意, $(p-q)^2 = (p+q)^2 - 4pq = a^2 - 4bc$。若 $p \neq q$, 即 $a^2 \neq 4bc$, 以 $n+1$ 替換 n, 並將兩式相減, 即得

$$\det A_n = \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p-q}。$$

若 $p=q$, 即 $a^2 = 4bc$, 則

$$\det A_n = p\det A_{n-1} + p^n。$$

使用歸納法可推得

$$\det A_n = (n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n。$$

□

Problem 125

Find the determinant of the following $2n \times 2n$ matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solution

矩陣 A 可分解如下:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} = B + E,$$

其中 $E = \mathbf{e}\mathbf{e}^T$, $2n$ 維向量 $\mathbf{e}$ 的所有元皆爲 1。利用矩陣行列式引理 (matrix determinant lemma),

$$\det A = \det(B + \mathbf{e}\mathbf{e}^T) = \det B + \mathbf{e}^T(\mathrm{adj}B)\mathbf{e} = \det B + \sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2n}(\mathrm{adj}B)_{ij}。$$

矩陣 B 的行列式爲其主對角分塊行列式乘積, 就有

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^n = (-1)^n。$$

伴隨矩陣 $\mathrm{adj}B$ 的非零元僅有 $(\mathrm{adj}B)_{2k,2k-1} = (\mathrm{adj}B)_{2k-1,2k} = (-1)^n$, $k = 1, \ldots, n$。合併以上結果, 即得 $\det A = (-1)^n + 2n(-1)^n = (-1)^n(2n+1)$。

另一個做法是直接利用行列式基本性質計算化簡。觀察出矩陣 A 的所有列總和皆爲 $2n+1$, 故可將第 $2,3,\ldots,2n$ 行加至第 1 行, 再將所得矩陣的第 $2,3,\ldots,2n$ 列各自減去第 1 列, 如下:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2n+1 & 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2n+1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2n+1 & 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ 2n+1 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2n+1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \\ 2n+1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2n+1 & 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}。$$

至此即可對第 1 行展開, 再對 $(2n-1)\times(2n-1)$ 階新矩陣的第 1 列展開:

$$\det A = (2n+1)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2n+1)(-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}。$$

如前述做法, $(2n-2)\times(2n-2)$ 階矩陣的行列式爲其主對角分塊行列式乘積, 於是得到

$$\det A = (2n+1)(-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^{n-1} = (2n+1)(-1)(-1)^{n-1} = (-1)^n(2n+1)。$$

□

Problem 126

Let A and X_i, $i=1,2,3,4$, be 2×2 real matrices. If $A\neq 0$ and

$$\det(A+X_i) = \det A + \det X_i, \quad i=1,2,3,4,$$

show that X_1, X_2, X_3, X_4 are linearly dependent over $\mathbb{R}$.

Solution

令

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad X_i = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4。$$

展開已知條件

$$\begin{vmatrix} a + \alpha_i & b + \beta_i \\ c + \gamma_i & d + \delta_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{vmatrix},$$

可推得

$$d\alpha_i - c\beta_i - b\gamma_i + a\delta_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4。$$

考慮線性組合

$$d\alpha - c\beta - b\gamma + a\delta = 0。$$

因為 $A \neq 0$, A 至少有一非零元, 也就是說滿足上式解空間的維度等於 3, 故存在不全為零的實數 c_i, $i = 1, 2, 3, 4$, 使得

$$c_1 \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \\ \delta_1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \\ \delta_2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \\ \delta_3 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} \alpha_4 \\ \beta_4 \\ \gamma_4 \\ \delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

亦即 $c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 + c_4X_4 = 0$, 因此得證。 □

Problem 127

Let A be an $n \times n$ real matrix. Prove the following statements.

(a) If $A^T = -A$ and n is odd, then $\det A = 0$.

(b) If $A^2 + I = 0$, then n is even.

Solution

(a) 若 n 為奇數, 運用行列式基本性質並代入已知條件, 可得

$$\det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A,$$

即知 $\det A = 0$。

(b) 同樣運用行列式基本性質計算

$$(\det A)^2 = \det(AA) = \det(-I) = (-1)^n \det I = (-1)^n。$$

若 n 爲奇數, 則 $(\det A)^2 = -1$, 但實矩陣行列式爲實數, 證得 n 必爲偶數。 $\square$

Problem 128

Let A and B be $n \times n$ real orthogonal matrices. If $\det A + \det B = 0$, show that $\det(A + B) = 0$.

Solution

考慮關係式 $\det(A + B) = \det(A^T + B^T)$, 等號兩邊分別左乘 $\det A$ 和 $\det B$, 運用行列式可乘公式, 並代入已知條件 $AA^T = I$ 和 $BB^T = I$, 可得

$$(\det A)\det(A + B) = (\det A)\det(A^T + B^T) = \det(AA^T + AB^T) = \det(I + AB^T)$$
$$(\det B)\det(A + B) = (\det B)\det(A^T + B^T) = \det(BA^T + BB^T) = \det(BA^T + I)。$$

將上面兩式相減, 因爲 $\det(I + AB^T) = \det(I + AB^T)^T = \det(I + BA^T)$, 即得

$$(\det A - \det B)\det(A + B) = 0。$$

若 $\det(A + B) \neq 0$, 則 $\det A = \det B$, 但已知 $\det A + \det B = 0$, 必定有 $\det A = \det B = 0$, 亦即 A 和 B 皆不可逆, 這與 A 和 B 是實正交矩陣相矛盾, 故得證。 $\square$

Problem 129

Let A and B be $n \times n$ complex matrices, and $C = AB - BA$. If $AC = CA$ and $BC = CB$, prove that

(a) C is nilpotent, i.e., $C^m = 0$ for some positive integer m.

(b) $\det(B + kC) = \det B$, for every $k \in \mathbb{C}$.

Solution

(a) 首先設法建立 A, B 和 C 的關係式, 使用已知條件 $C = AB - BA$ 和 $BC = CB$ 可證明對於正整數 m,

$$AB^m - B^m A = mB^{m-1}C。$$

當 $m = 1$ 時, 上式即爲 $AB - BA = C$。假設 $AB^{k-1} - B^{k-1}A = (k-1)B^{k-2}C$, 同時右乘 B, 等號左邊爲

$$AB^k - B^{k-1}AB = AB^k - B^{k-1}(C + BA) = AB^k - B^{k-1}C - B^k A,$$

等號右邊爲

$$(k-1)B^{k-2}CB = (k-1)B^{k-2}(BC) = (k-1)B^{k-1}C,$$

因此證得 $AB^k - B^k A = kB^{k-1}C$。另外也可以證明對於正整數 m,

$$AC^m = C^m A。$$

當 $m = 1$ 時, 上式顯然成立。假設 $AC^{k-1} = C^{k-1}A$, 同時右乘 C, 即得 $AC^k = C^{k-1}AC = C^{k-1}(CA) = C^k A$。接下來證明 C 是冪零矩陣, 亦即 $C^n = 0$。令 $p(t) = b_n t^n + \cdots + b_1 t + b_0$ 爲 B 的特徵多項式, 根據 Cayley-Hamilton 定理,

$$p(B) = b_n B^n + \cdots + b_1 B + b_0 I = 0。$$

利用以上結果, 可得

$$\begin{aligned}
p'(B)C &= (nb_n B^{n-1} + \cdots + 2b_2 B + b_1 I)C \\
&= b_n(AB^n - B^n A) + \cdots + b_2(AB^2 - B^2 A) + b_1(AB - BA) \\
&= A(b_n B^n + \cdots + b_1 B) - (b_n B^n + \cdots + b_1 B)A \\
&= A(-b_0 I) - (-b_0 I)A \\
&= b_0(IA - AI) = 0。
\end{aligned}$$

運用類似方式,

$$\begin{aligned}
p''(B)C^2 &= (n(n-1)b_nB^{n-2}+\cdots+2b_2I)C^2 \\
&= nb_n(AB^{n-1}-B^{n-1}A)C+\cdots+2b_2(AB-BA)C \\
&= A(nb_nB^{n-1}+\cdots+2b_2B)C-(nb_nB^{n-1}+\cdots+2b_2B)CA \\
&= A(-b_1C)C-(-b_1C)CA \\
&= b_1(C^2A-AC^2)=0,
\end{aligned}$$

以此類推可歸納出 $p^{(n)}(B)C^n=0$。因爲 $p^{(n)}(B)=n!I$, 故有 $C^n=0$, 也就證明了 C 是冪零矩陣。

(b) 令 m 爲一正整數使得 $C^m=0$ 且 $C^{m-1}\neq 0$。若 B 可逆, 設 λ 爲矩陣 $I+kCB^{-1}$ 的一特徵值, $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ 爲對應的特徵向量, 即有 $(I+kCB^{-1})\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$, 或者 $kCB^{-1}\mathbf{x}=(\lambda-1)\mathbf{x}$, 等號兩邊左乘 C^{m-1} 可得 $(\lambda-1)C^{m-1}\mathbf{x}=\mathbf{0}$。如果 $\lambda-1\neq 0$, 則 $C^{m-1}\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 因爲 k 爲任意數, 特徵向量 $\mathbf{x}$ 未必屬於 C^{m-1} 的零空間, 故必有 $C^{m-1}=0$, 但這與原假設相矛盾, 所以 $\lambda=1$。利用行列式等於矩陣特徵值乘積, 可知 $\det(I+kCB^{-1})=1$, 因此

$$\det(B+kC)(\det B^{-1})=\det((B+kC)B^{-1})=\det(I+kCB^{-1})=1,$$

也就證明 $\det(B+kC)=\det B$。若 B 不可逆, 使用連續論證法, 將 B 替換爲 $B+\epsilon I$, ϵ 是一個小正數, 則 $A(B+\epsilon I)-(B+\epsilon I)A=AB-BA=C$, 故 C 維持不變, 同樣可得 $\det(B+\epsilon I+kC)=\det(B+\epsilon I)$, 令 $\epsilon\to 0$, 即證得所求。□

Problem 130

What is the determinant of the following matrix?

$$A=\begin{bmatrix}4&0&0&0&0&3\\0&4&0&0&3&0\\0&0&4&3&0&0\\0&0&3&4&0&0\\0&3&0&0&4&0\\3&0&0&0&0&4\end{bmatrix}.$$

Solution

利用排列矩陣 P 將 A 的列行指標重新排序, 如下:

$$PAP^T = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

其中 P 對應列指標序 $(1, 6, 2, 5, 3, 4)$,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

因爲 $P^T = P^{-1}$, 利用行列式可乘公式, 可得 $\det(PAP^T) = (\det P)(\det A)(\det P^T) = \det A$。主對角分塊矩陣 PAP^T 的行列式等於主對角分塊行列式乘積, 就有

$$\det(PAP^T) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7^3 = 343,$$

故 $\det A = 343$。 $\square$

Problem 131

Let A and B be 4×4 real matrices. If $\det(A + iB) = 0$, $i = \sqrt{-1}$, show that

$$\det(A + B) + \det(A - B) = 4(\det A + \det B).$$

Solution

根據問題給出的行列式型態, 可令 $f(x)=\det(A+xB)$, 其中 $x\in\mathbb{C}$。因爲 A 和 B 是四階實方陣, $f(x)$ 可表示爲

$$f(x)=(\det B)x^4+ax^3+bx^2+cx+\det A,$$

其中 a,b,c 是實數。已知 $f(i)=\det(A+iB)=0$, 但因爲 $f(x)$ 是實多項式, 故有共軛根, 亦即 $f(-i)=0$。分別計算得到

$$\begin{aligned}f(i)&=\det B-ai-b+ci+\det A=0\\ f(-i)&=\det B+ai-b-ci+\det A=0。\end{aligned}$$

將上面兩式相加即得 $b=\det A+\det B$, 所以

$$\begin{aligned}\det(A+B)+\det(A-B)&=f(1)+f(-1)\\ &=\det B+a+b+c+\det A+\det B-a+b-c+\det A\\ &=2\det A+2\det B+2b\\ &=4(\det A+\det B)。\end{aligned}$$

□

Problem 132

Let $f_1(x),f_2(x),\dots,f_n(x)$ be polynomials with degree at most $n-2$. For any numbers $a_1,a_2,\dots,a_n$, prove that

$$\begin{vmatrix}f_1(a_1)&f_1(a_2)&\cdots&f_1(a_n)\\ f_2(a_1)&f_2(a_2)&\cdots&f_2(a_n)\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ f_n(a_1)&f_n(a_2)&\cdots&f_n(a_n)\end{vmatrix}=0.$$

Solution

令 $f_i(x) = b_{i0} + b_{i1}x + \cdots + b_{i,n-2}x^{n-2}$, 將 $n \times n$ 階矩陣 $F = [f_i(a_j)]$ 寫成下列矩陣乘法:

$$F = \begin{bmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{10} & b_{11} & \cdots & b_{1,n-2} & 0 \\ b_{20} & b_{21} & \cdots & b_{2,n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n,0} & b_{n,1} & \cdots & b_{n,n-2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix} = BA。$$

利用矩陣乘積行列式可乘公式, 即得 $\det F = (\det B)(\det A)$, 但 $\det B = 0$, 故知 $\det F = 0$。 □

Problem 133

A parallelepiped is bounded by the following six planes:

$$\begin{aligned} &x - y - z = 0, \quad &&x + y - z = 0, \quad &&x - 5y + 3z = 0, \\ &x - y - z = -4, \quad &&x + y - z = 2, \quad &&x - 5y + 3z = 4. \end{aligned}$$

Determine the volume of the parallelepiped.

Solution

令向量 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) 分別表示此平行六面體與原點相交的三邊, 向量端點即爲平行六面體端點。設

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}。$$

矩陣 A 的行向量所張開的平行六面體體積等於 $|\det A|$。利用下列方程式可解得上述向量:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

再由方陣乘積行列式可乘公式,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix},$$

計算得到 $\det A = 8$, 此即所求。 □

Problem 134

Let a_i and b_i, $i = 1, \ldots, n$, be two sequences such that $a_i + b_j \neq 0$ for every i, j. If P_n is the $n \times n$ matrix with (i, j) entry $\frac{1}{a_i + b_j}$, show that

$$\det P_n = \frac{\prod_{i=2}^{n} \prod_{j=1}^{i-1} (a_i - a_j)(b_i - b_j)}{\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} (a_i + b_j)}.$$

Solution

先寫出行列式以便觀察,

$$\det P_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{n-1}} & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}。$$

將前 $n-1$ 列減去最末列, 分別由各行提出公因式 $\frac{1}{a_n+b_1}, \frac{1}{a_n+b_2}, \ldots, \frac{1}{a_n+b_n}$, 由各列提出公因式 $a_n-a_1, a_n-a_2, \ldots, a_n-a_{n-1}$, 和 1, 可得

$$\det P_n = \begin{vmatrix} \frac{a_n-a_1}{(a_1+b_1)(a_n+b_1)} & \frac{a_n-a_1}{(a_1+b_2)(a_n+b_2)} & \cdots & \frac{a_n-a_1}{(a_1+b_{n-1})(a_n+b_{n-1})} & \frac{a_n-a_1}{(a_1+b_n)(a_n+b_n)} \\ \frac{a_n-a_2}{(a_2+b_1)(a_n+b_1)} & \frac{a_n-a_2}{(a_2+b_2)(a_n+b_2)} & \cdots & \frac{a_n-a_2}{(a_2+b_{n-1})(a_n+b_{n-1})} & \frac{a_n-a_2}{(a_2+b_n)(a_n+b_n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{a_n-a_{n-1}}{(a_{n-1}+b_1)(a_n+b_1)} & \frac{a_n-a_{n-1}}{(a_{n-1}+b_2)(a_n+b_2)} & \cdots & \frac{a_n-a_{n-1}}{(a_{n-1}+b_{n-1})(a_n+b_{n-1})} & \frac{a_n-a_{n-1}}{(a_{n-1}+b_n)(a_n+b_n)} \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)}{\prod_{j=1}^{n}(a_n+b_j)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{n-1}} & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}。$$

接著將前 $n-1$ 行減去最末行, 分別由各列提出公因式 $\frac{1}{a_1+b_n}, \frac{1}{a_2+b_n}, \ldots, \frac{1}{a_{n-1}+b_n}$, 和 1, 由各行提出公因式 $b_n-b_1, b_n-b_2, \ldots, b_n-b_{n-1}$, 和 1, 並以共因子展開行列式, 即得

$$\det P_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)}{\prod_{j=1}^{n}(a_n+b_j)}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{b_n-b_1}{(a_1+b_1)(a_1+b_n)} & \frac{b_n-b_2}{(a_1+b_2)(a_1+b_n)} & \cdots & \frac{b_n-b_{n-1}}{(a_1+b_{n-1})(a_1+b_n)} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{b_n-b_1}{(a_2+b_1)(a_2+b_n)} & \frac{b_n-b_2}{(a_2+b_2)(a_2+b_n)} & \cdots & \frac{b_n-b_{n-1}}{(a_2+b_{n-1})(a_2+b_n)} & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{b_n-b_1}{(a_{n-1}+b_1)(a_{n-1}+b_n)} & \frac{b_n-b_2}{(a_{n-1}+b_2)(a_{n-1}+b_n)} & \cdots & \frac{b_n-b_{n-1}}{(a_{n-1}+b_{n-1})(a_{n-1}+b_n)} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)}{\prod_{j=1}^{n}(a_n+b_j)} \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(b_n-b_j)}{\prod_{i=1}^{n-1}(a_i+b_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 1 \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{n-1}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(a_n-a_j)(b_n-b_j)}{\prod_{i=1}^{n-1}\prod_{j=1}^{n}(a_i+b_n)(a_n+b_j)} \det P_{n-1}。$$

因爲 $\det P_1 = \frac{1}{a_1+b_1}$, 根據遞迴式,

$$\begin{aligned}
\det P_2 &= \frac{\prod_{j=1}^{1}(a_2-a_j)(b_2-b_j)}{\prod_{i=1}^{1}\prod_{j=1}^{2}(a_i+b_2)(a_2+b_j)}\det P_1\\
&= \frac{\prod_{j=1}^{1}(a_2-a_j)(b_2-b_j)}{\prod_{i=1}^{1}\prod_{j=1}^{2}(a_i+b_2)(a_2+b_j)}\frac{1}{a_1+b_1}\\
&= \frac{\prod_{i>j}^{i,j=1,2}(a_i-a_j)(b_i-b_j)}{\prod_{i=1}^{2}\prod_{j=1}^{2}(a_i+b_j)}\text{。}
\end{aligned}$$

運用歸納法即得證。 □

Problem 135

Suppose

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix},\quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix}4\\3\\2\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix}1\\3\\2\\4\end{bmatrix}.$$

If Q is an orthogonal matrix, i.e., $Q^T = Q^{-1}$, such that

$$Q\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix}b_{11}\\b_{12}\\b_{13}\\0\end{bmatrix},\quad Q\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix}b_{21}\\b_{22}\\b_{23}\\0\end{bmatrix},\quad Q\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix}b_{31}\\b_{32}\\b_{33}\\0\end{bmatrix},$$

find $\det B$, where

$$B = \begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{bmatrix}.$$

Solution

令

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}。$$

已知條件即為 $QA = \begin{bmatrix} B^T \\ 0 \end{bmatrix}$, 也就有

$$A^TQ^TQA = \begin{bmatrix} B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^T \\ 0 \end{bmatrix} = BB^T。$$

因為 $Q^TQ = I$, 利用矩陣乘積行列式可乘性質,

$$\det(A^TQ^TQA) = \det(A^TA) = \det(BB^T) = (\det B)(\det B^T) = (\det B)^2。$$

代入數值計算得到

$$A^TA = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 29 \\ 20 & 30 & 21 \\ 29 & 21 & 30 \end{bmatrix},$$

且 $\det(A^TA) = 900$, 故 $\det B = \pm 30$。 $\square$

特徵分析

Problem 136

Let

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Compute the eigenvalues and eigenvectors of A.

Solution

觀察發現: 若 $i+j$ 爲奇數, $a_{ij}=0$, 也就是說, 若列行指標包含一奇一偶, 則所指定的元等於零。利用這個事實, 我們將列行指標重新命名: $(1,2,3,4,5) \rightarrow (1,3,5,2,4)$, 若按行向量排序, 對應的排列矩陣爲

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

計算可以確認

$$P^TAP = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = B。$$

注意, B 是主對角分塊矩陣, B 的特徵值包含 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的特徵值和 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的特徵值。排列矩陣爲正交矩陣, $P^TP=I$, 故 A 相似於 B。相似變換不改變矩陣的特徵值, 設

$B\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$, 等號兩邊左乘 P, 就有

$$PB\mathbf{y} = AP\mathbf{y} = \lambda P\mathbf{y},$$

得知 A 的特徵值爲 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$。下面推導 n 階方陣 $E = [e_{ij}]$, $e_{ij} = 1$, 的特徵值和特徵向量。令 n 維向量 $\mathbf{e} = (1, 1, \ldots, 1)$, E 可以表示成 $E = \mathbf{e}\mathbf{e}^T$。利用乘法結合律, 可得

$$E\mathbf{e} = (\mathbf{e}\mathbf{e}^T)\mathbf{e} = (\mathbf{e}^T\mathbf{e})\mathbf{e} = n\mathbf{e},$$

因此 E 有特徵值 n, 特徵向量爲 e。子空間 $\mathrm{span}\{\mathbf{e}\}$ 的正交互補空間維度等於 $n-1$, 故包含 $n-1$ 個線性獨立向量 $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}\}$, 計算

$$E\mathbf{u}_i = (\mathbf{e}\mathbf{e}^T)\mathbf{u}_i = (\mathbf{e}^T\mathbf{u}_i)\mathbf{e} = \mathbf{0},$$

得知 E 有 $n-1$ 個零特徵值, 特徵向量爲 $\mathbf{u}_i$, $i = 1, \ldots, n-1$。根據上面的結果, 矩陣 A 的特徵值即爲 B 的特徵值 $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 2$, $\lambda_5 = 0$, 而 B 的特徵向量如下:

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{y}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{y}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}。$$

方陣 A 的特徵向量等於 $\mathbf{x}_i = P\mathbf{y}_i$, $i = 1, \ldots, 5$, 計算得出

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}。$$

$\square$

Problem 137

Let

$$A=\begin{bmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}b&c&a\\c&a&b\\a&b&c\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}c&a&b\\a&b&c\\b&c&a\end{bmatrix}.$$

(a) For any scalars, a, b, and c, show that A, B, and C are similar.

(b) If $BC=CB$, show that A has two zero eigenvalues.

Solution

(a) 方陣 B 和 C 排列相似於 A, 運用基本列交換和行交換可得

$$A=\begin{bmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b&c&a\\c&a&b\\a&b&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}=P^TBP$$

$$A=\begin{bmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c&a&b\\a&b&c\\b&c&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}=PCP^T。$$

(b) 若 $BC=CB$, 乘開後比較等號兩邊各元, 就有

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0。$$

將上式乘以 $(a+b+c)$, 化簡得

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0。$$

將上面兩式代入 A 的特徵多項式, 不難驗證

$$p_A(t)=\begin{vmatrix}t-a&b&c\\b&c-t&a\\c&a&t-b\end{vmatrix}=t^3-(a+b+c)t^2。$$

□

Problem 138

Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Which of the following matrices are similar to A?

$$B_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}, B_5 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}, B_6 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solution

若二 $n \times n$ 矩陣的特徵值集合同爲 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, 且特徵值都相異, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$, 則此二矩陣爲相似矩陣, 這是因爲有相異特徵值的矩陣總是可以被對角化。給出的主對角矩陣 A 有特徵值 $1, 2, 3$, 若 B 也有特徵值 $1, 2, 3$, 便可判斷 B 相似於 A。利用三角形矩陣的主對角元爲其特徵值此性質, 可知 B_1, B_2, B_3 與 A 相似。B_4 的特徵值爲 $-3, 3, 6$, B_5 的特徵值爲 $-3, 2, 7$, 故 B_4 和 B_5 都不相似於 A。矩陣 B_6 有特徵值 $1, 2, 3$, 故 B_6 也相似於 A。 $\square$

Problem 139

Suppose A is an $n \times n$ real matrix.

(a) Show that A and A^T have the same set of eigenvalues.

(b) If λ and μ are eigenvalues of A, with $\lambda \neq \mu$, then any eigenvector of A corresponding to λ is orthogonal to any eigenvector of A^T corresponding to μ.

Solution

(a) 直接比較 A 和 A^T 的特徵多項式, 利用 $\det B^T = \det B$ 聯繫彼此關係:

$$\det(A^T - \lambda I) = \det((A^T - \lambda I)^T) = \det(A - \lambda I^T) = \det(A - \lambda I)。$$

二特徵多項式相等自然就有相同的解, 這表明 A 和 A^T 有相同的特徵值集合。

(b) 首先就問題給出的條件作假設, 設 A 有特徵值 λ 與對應的特徵向量 $\mathbf{x}$, 再設 A^T 有特徵值 μ 與對應的特徵向量 $\mathbf{y}$, 於是有特徵方程式 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, $A^T\mathbf{y} = \mu\mathbf{y}$。再考慮 $\mathbf{y}^T A\mathbf{x}$ 的兩種計算方式:

$$\mathbf{y}^T A\mathbf{x} = \mathbf{y}^T(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{y}^T\mathbf{x})。$$

注意, 我們可以對純量轉置其結果不變, $\mathbf{y}^T A\mathbf{x} = (\mathbf{y}^T A\mathbf{x})^T = \mathbf{x}^T A^T\mathbf{y}$, 因此

$$\mathbf{x}^T A^T\mathbf{y} = \mathbf{x}^T(\mu\mathbf{y}) = \mu(\mathbf{x}^T\mathbf{y})。$$

當 $\lambda \neq \mu$ 時, $\lambda(\mathbf{x}^T\mathbf{y}) = \mu(\mathbf{y}^T\mathbf{x})$ 的充要條件是 $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0$, 亦即 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 互爲正交, 得證。 □

Problem 140

Let A be an $n \times n$ real matrix. If $\text{rank}A = 1$, show that either $A^2 = 0$ or A is diagonalizable.

Solution

對於任意 n-階實矩陣 A, 若 $\text{rank}A = 1$, 則存在非零向量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 使得 $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$。令 $V = \text{span}\{\mathbf{v}\}$, 則 $\dim V^\perp = n - 1$, 因此存在 $n - 1$ 個線性獨立向量 $\mathbf{x}_i \in V^\perp$, $i = 1, \ldots, n-1$, 滿足 $A\mathbf{x}_i = \mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{x}_i = \mathbf{u}0 = \mathbf{0}$, 故 A 有重複 $n - 1$ 次零特徵值, 對應的特徵向量爲 $\mathbf{x}_i$, $i = 1, \ldots, n-1$。另考慮 $A\mathbf{u} = \mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{u} = (\mathbf{v}^T\mathbf{u})\mathbf{u}$, 可知 A 尙有一特徵值 $\mathbf{v}^T\mathbf{u}$, 特徵向量爲 $\mathbf{u}$。若 $\mathbf{u}$ 不屬於 $V^\perp$, $\mathbf{v}^T\mathbf{u} \neq 0$, A 有完整的 n 個線性獨立特徵向量, 故爲可對角化矩陣。若 $\mathbf{u} \in V^\perp$, 就有 $\mathbf{v}^T\mathbf{u} = 0$, A 共有重複 n 次零特徵值, 但僅有 $n - 1$ 的線性獨立特徵向量, 故 A 不可對角化且 $A^2 = \mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{u}\mathbf{v}^T = \mathbf{u}0\mathbf{v}^T = 0$。 □

Problem 141

Let A be an $n \times n$ real matrix, and T be the linear transformation defined by $T(A) = A^T$.

(a) Show that ± 1 are the only eigenvalues of T.

(b) Describe the eigenvectors corresponding to each eigenvalue of T.

(c) Find an ordered basis for 2×2 real matrices such that the matrix representation with respect to that basis is diagonal.

Solution

(a) 考慮特徵方程 $T(A) = A^T = \lambda A$, 等號兩邊取轉置, 就有 $A = \lambda A^T$, 合併這兩個式子可得 $A = \lambda A^T = \lambda^2 A$。推知 $\lambda^2 = 1$, 因爲 A 爲任意實數矩陣, λ 是實數, 解出 $\lambda = \pm 1$。

(b) 對應特徵值 $\lambda = 1$, $A^T = A$, 特徵向量爲對稱矩陣, 對應特徵值 $\lambda = -1$, $A^T = -A$, 特徵向量爲反對稱 (skew-symmetric) 矩陣。

(c) 考慮 2×2 實矩陣的標準基底

$$\mathfrak{S} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}。$$

設 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 線性變換 T 可表示如下:

$$T(A) = T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix},$$

參考基底 $\mathfrak{S}$ 的變換矩陣即爲

$$[T]_{\mathfrak{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

由題 (a), $[T]_{\mathfrak{S}}$ 有特徵值 $\lambda=\pm 1$。對應 $\lambda=1$ 的特徵向量爲

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \mathbf{x}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix},$$

對應 $\lambda=-1$ 的特徵向量爲

$$\mathbf{x}_4=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}。$$

選擇下列由特徵向量構成的基底即可使 T 參考該基底的表示矩陣爲主對角矩陣:

$$\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\right\}。$$

□

Problem 142

If $AB=BA$, show that A and B have a common eigenvector.

Solution

設 $n\times n$ 階矩陣 A 有一特徵值 λ, 且 $\dim N(A-\lambda I)=k$, $k\geq 1$, 又設 $\{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k\}$ 爲特徵空間 $N(A-\lambda I)$ 的基底, 將這些線性獨立的特徵向量組成一 $n\times k$ 矩陣 $X=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_k\end{bmatrix}$, 顯然, $(A-\lambda I)X=0$。利用已知條件 $AB=BA$, 計算

$$(A-\lambda I)BX=ABX-\lambda BX=BAX-\lambda BX=B(A-\lambda I)X=0,$$

得知 $BX\in N(A-\lambda I)$, 換句話說, BX 可以表示爲基底 $\{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k\}$ 的線性組合, $BX=XC$, C 爲 $k\times k$ 階矩陣。接下來考慮 C 的特徵方程 $C\mathbf{z}=\beta\mathbf{z}$, 利用前面的結果, 可得

$$BX\mathbf{z}=XC\mathbf{z}=X(\beta\mathbf{z})=\beta X\mathbf{z},$$

推論 $X\mathbf{z}$ 爲矩陣 B 的特徵向量。但是 $X\mathbf{z}$ 是 $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k$ 的線性組合, $X\mathbf{z}$ 必定屬於特徵空間 $N(A-\lambda I)$, 因此證得 A 和 B 並定有一個相同的特徵向量。 □

Problem 143

Suppose A is an n by n real matrix with eigenvalues $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Note that the eigenvalues are not necessarily real. Denote $\lambda_j = a_j + ib_j$, where $i = \sqrt{-1}$. Prove that

(a) $\sum_{j=1}^n b_j = 0$,

(b) $\sum_{j=1}^n a_j b_j = 0$.

Solution

(a) 利用跡數 (trace) 與特徵值關係式, 可得

$$\text{trace}A = \sum_{j=1}^n \lambda_j = \sum_{j=1}^n a_j + i\sum_{j=1}^n b_j\text{。}$$

已知 A 爲實數矩陣, $\text{trace}A \in \mathbb{R}$, 證得 $\sum_{j=1}^n b_j = 0$。

(b) 爲產生乘積 $a_j b_j$, 計算

$$\text{trace}A^2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 = \sum_{j=1}^n a_j^2 - \sum_{j=1}^n b_j^2 + 2i\sum_{j=1}^n a_j b_j\text{。}$$

同樣道理, 因爲 A 是實數矩陣, $\text{trace}A^2$ 亦爲實數, 故 $\sum_{j=1}^n a_j b_j = 0$。 □

Problem 144

Let A and B be $n \times n$ matrices satisfying $AB = BA$. Prove the following statements.

(a) If λ is an eigenvalue of A, then the eigenspace corresponding to λ is invariant under B.

(b) The column space of A and the nullspace of A are invariant under B.

Note that s subspace X is invariant under linear transformation T if $T(X) \subseteq X$.

Solution

(a) 考慮 $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$, 利用已知條件,

$$A(B\mathbf{x})=B(A\mathbf{x})=B(\lambda\mathbf{x})=\lambda(B\mathbf{x}),$$

得知 $B\mathbf{x}$ 仍屬於對應 λ 的特徵空間。

(b) 設 $\mathbf{x}\in N(A)$, 亦即 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 計算

$$A(B\mathbf{x})=B(A\mathbf{x})=B\mathbf{0}=\mathbf{0},$$

也就有 $B\mathbf{x}\in N(A)$, 所以 $N(A)$ 是線性映射 B 的一個不變子空間。運用同樣方式, 設 $\mathbf{x}\in C(A)$, 必定有 $\mathbf{y}$ 使得 $\mathbf{x}=A\mathbf{y}$, 則

$$B\mathbf{x}=BA\mathbf{y}=A(B\mathbf{y}),$$

也就是說, $B\mathbf{x}\in C(A)$, 故 $C(A)$ 也爲 B 的一個不變子空間。 □

Problem 145

Suppose A is an n by n matrix. The adjoint of A, denoted by $\mathrm{adj}A$, is defined to be the transposed of cofactors of elements of A. Show that each eigenvector of A is also an eigenvector of $\mathrm{adj}A$.

Solution

考慮 $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$ 且 $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, 證明過程倚重關係式 $A(\mathrm{adj}A)=(\mathrm{adj}A)A=(\det A)I$。若 $\lambda\neq 0$, 則

$$(\mathrm{adj}A)\mathbf{x}=(\mathrm{adj}A)\left(\frac{1}{\lambda}A\mathbf{x}\right)=\frac{\det A}{\lambda}\mathbf{x},$$

在此情況下, $\mathbf{x}$ 亦爲 $\mathrm{adj}A$ 的特徵向量。若 $\lambda=0$, 則 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 但因 $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, 可知 A 不爲可逆, 就有 $\det A=0$ 且 $\mathrm{rank}A<n$。分開兩個情況討論: $\mathrm{rank}A<n-1$ 和 $\mathrm{rank}A=n-1$。當 $\mathrm{rank}A<n-1$, A 的線性獨立行向量總數小於 $n-1$, 由 $\mathrm{adj}A$ 定義可知 $\mathrm{adj}A=0$, 故 $(\mathrm{adj}A)\mathbf{x}=0\cdot\mathbf{x}$。當 $\mathrm{rank}A=n-1$, 利用秩-零度定理推知 A 的零空間維度是 1, 且 $N(A)=\mathrm{Span}\{\mathbf{x}\}$。由 $A(\mathrm{adj}A)\mathbf{x}=(\det A)I\mathbf{x}=0\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 可推論 $(\mathrm{adj}A)\mathbf{x}$ 也屬於 $N(A)$, 所以必定存在 μ 使得 $(\mathrm{adj}A)\mathbf{x}=\mu\mathbf{x}$。綜合以上結果, 證得不論 $\lambda\neq 0$ 或 $\lambda=0$, A 的特徵向量 $\mathbf{x}$ 也是 $\mathrm{adj}A$ 的特徵向量。 □

Problem 146

Assume that $a \neq 0$. Show that the eigenvalues and eigenvectors of the following n by n matrix

$$A = \begin{bmatrix} b & a & & & \\ c & b & a & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c & b & a \\ & & & c & b \end{bmatrix}$$

are given by

$$\lambda_j = b + 2a\sqrt{\frac{c}{a}}\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)$$

and

$$\mathbf{x}_j = \begin{bmatrix} (c/a)^{1/2}\sin(1j\pi/(n+1)) \\ (c/a)^{2/2}\sin(2j\pi/(n+1)) \\ \vdots \\ (c/a)^{n/2}\sin(nj\pi/(n+1)) \end{bmatrix},$$

for $j = 1, 2, \ldots, n$.

Solution

矩陣 A 的特徵方程式 $(A-\lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 可分開表示爲

$$cx_{i-1} + (b-\lambda)x_i + ax_{i+1} = 0,$$

其中 $i = 1, 2, \ldots, n$, 且 $x_0 = x_{n+1} = 0$。將上式改寫爲

$$x_{k+2} + \left(\frac{b-\lambda}{a}\right)x_{k+1} + \frac{c}{a}x_k = 0,$$

其中 $k = 0, 1, \ldots, n-1$, 總計有 n 個二階差分方程式, 並包含邊界條件 $x_0 = x_{n+1} = 0$。設解爲 $x_k = r^k$, 代入方程式, r 滿足

$$r^2 + \left(\frac{b-\lambda}{a}\right)r + \frac{c}{a} = 0。$$

令上面二次方程式的二根爲 r_1 和 r_2, 加上 λ, 共有三個未知數。若發生重根, $r_1 = r_2 = r$, 則 $x_k = c_1 r^k + c_2 k r^k$, 從已知條件 $x_0 = x_{n+1} = 0$ 可推知 $c_1 = c_2 = 0$, 因此對任意 k,

都有 $x_k=0$, 也就是說 $\mathbf{x}$ 爲零向量, 這與特徵向量不得爲零抵觸, 得知 $r_1\neq r_2$。因此解爲 $x_k=c_1r_1^k+c_2r_2^k$, 由已知條件 $x_0=x_{n+1}=0$ 可得

$$\begin{aligned} 0 &= c_1+c_2 \\ 0 &= c_1r_1^{n+1}+c_2r_2^{n+1}。\end{aligned}$$

解出 $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n+1}=-\frac{c_2}{c_1}=1$, 故 $r_1=r_2e^{i2\pi j/(n+1)}$, $i=\sqrt{-1}$, $j=1,2,\ldots,n$。再考慮根與係數關係:

$$\begin{aligned} r_1r_2 &= \frac{c}{a} \\ r_1+r_2 &= -\frac{b-\lambda}{a}。\end{aligned}$$

由第一式解得 $r_1=\sqrt{\frac{c}{a}}e^{i\pi j/(n+1)}$, $r_2=\sqrt{\frac{c}{a}}e^{-i\pi j/(n+1)}$, 由第二式並利用尤拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 解得

$$\lambda=b+a(r_1+r_2)=b+2a\sqrt{\frac{c}{a}}\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)。$$

上式給出 n 個特徵值 λ_j, $j=1,2,\ldots,n$。對應特徵值 λ_j 的特徵向量 $\mathbf{x}_j$ 其第 k 個元素即爲 $x_k=c_1r_1^k+c_2r_2^k$, 且 $c_1+c_2=0$, 將上面得到的 r_1 和 r_2 代入, 就有

$$x_k=c_1(r_1^k-r_2^k)=2ic_1\left(\frac{c}{a}\right)^{k/2}\sin\left(\frac{jk\pi}{n+1}\right)。$$

設 $c_1=1/(2i)$, 特徵向量便爲

$$\mathbf{x}_j=\begin{bmatrix} (c/a)^{1/2}\sin(1j\pi/(n+1)) \\ (c/a)^{2/2}\sin(2j\pi/(n+1)) \\ \vdots \\ (c/a)^{n/2}\sin(nj\pi/(n+1)) \end{bmatrix},$$

證得所求。 □

Problem 147

Use the Cayley-Hamilton theorem to show that if A is an n by n nonsingular matrix, then there is a polynomial $q(t)$, of degree at most $n-1$, such that $A^{-1}=q(A)$.

Solution

設 A 的特徵多項式爲 $p(t)=\det(tI-A)$, $p(t)$ 是 n 次多項式, 故可表示爲

$$p(t)=t^n+a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_1t+a_0。$$

因爲 $p(0)=a_0=\det A$, 已知 A 是可逆, 故 $a_0\neq 0$。Cayley-Hamilton 定理給出 $p(A)=0$, 亦即

$$A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0I=0。$$

將上式乘以 A^{-1}, 就有

$$A^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\cdots+a_1I+a_0A^{-1}=0,$$

整理得

$$A^{-1}=-\frac{1}{a_0}\left(A^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\cdots+a_1I\right)。$$

令

$$q(t)=-\frac{1}{a_0}\left(t^{n-1}+a_{n-1}t^{n-2}+\cdots+a_2t+a_1\right),$$

上式即爲所求的多項式。 □

Problem 148

An n by n square matrix $A=[a_{ij}]$ has the properties that $a_{ii}=1$ and $a_{ik}a_{kj}=a_{ij}$ for all i,j,k. What are the eigenvalues of A?

Solution

對於任意 i,j,k, 由於 $a_{kk}=1$, 已知條件即爲 $a_{ik}a_{kj}=a_{ij}=a_{kk}a_{ij}$, 如此便有

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kj}=\sum_{k=1}^n a_{kk}a_{ij}=\left(\sum_{k=1}^n a_{kk}\right)a_{ij}=(\mathrm{tr}A)a_{ij}。$$

上式等同於以元表示之矩陣乘法 $A^2=(\mathrm{tr}A)A$。令矩陣 A 的特徵值爲 λ, 利用特徵方程式關係推知 $\lambda^2=(\mathrm{tr}A)\lambda$, 解出 $\lambda=0$ 或 $\lambda=\mathrm{tr}A$。已知對於任意 k, $a_{kk}=1$, 所以 $\mathrm{tr}A=n$。但 $\mathrm{tr}A$ 又爲 A 的所有特徵值之和, 故推論 A 必定有 $(n-1)$ 個特徵值 0 與一個特徵值 n。 □

Problem 149

Let A be the following $n \times n$ matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Show that the characteristic polynomial of A is $\det(A - tI) = (-1)^n p(t)$, where

$$p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0.$$

The matrix A is known as the *companion matrix* of the polynomial $p(t)$.

Solution

設計下面的 $n \times n$ 階下三角形矩陣

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ t^2 & t & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^{n-1} & t^{n-2} & t^{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}。$$

令 $C = (A - tI)B$, 乘開得到

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -p(t) & * & * & \cdots & * \end{bmatrix},$$

上式中 $*$ 表示某多項式。對第一行以共因子展開計算行列式

$$\det C = (-1)^{n+1}(-p(t))\det I_{n-1} = (-1)^n p(t),$$

又因爲 B 爲下三角形矩陣且主對角元皆爲 1, 可知 $\det B = 1$, 就有

$$\det C = \det((A - tI)B) = \det(A - tI)(\det B) = \det(A - tI)。$$

$\square$

Problem 150

Let A and B be $n \times n$ matrices, either real or complex. Consider a linear transformation $T(X) = AXB$, where X is also $n \times n$. Suppose that A has distinct eigenvalues $\{\lambda_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$ and associated eigenvectors $\{\mathbf{y}_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$, while B^T has distinct eigenvalues $\{\phi_j, j = 1, 2, \ldots, n\}$ and associated eigenvectors $\{\mathbf{z}_j, j = 1, 2, \ldots, n\}$. Show that the eigenvalues of T are $\{\lambda_i \phi_j, i, j = 1, 2, \ldots, n\}$ and the matrices $\{\mathbf{y}_i \mathbf{z}_j^T, i, j = 1, 2, \ldots, n\}$ are associated linearly independent eigenvectors.

Solution

設 $X = \mathbf{y}_i \mathbf{z}_j^T$, 則

$$T(X) = A\mathbf{y}_i \mathbf{z}_j^T B = (A\mathbf{y}_i)(B^T \mathbf{z}_j)^T = \lambda_i \phi_j \mathbf{y}_i \mathbf{z}_j^T = \lambda_i \phi_j X,$$

因此 $\lambda_i \phi_j$ 確爲 $T(X)$ 的特徵值, 對應的特徵向量爲 $\mathbf{y}_i \mathbf{z}_j^T$。考慮

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \mathbf{y}_i \mathbf{z}_j^T &= \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \cdots & \mathbf{y}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1^T \\ \mathbf{z}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{z}_n^T \end{bmatrix} \\ &= YCZ^T, \end{aligned}$$

其中 Y 的行向量爲 $\mathbf{y}_i$, Z 的行向量爲 $\mathbf{z}_j$。已知 A 和 B 各自有相異的特徵值, 其各自特徵向量必定是線性獨立的, 因此 Y 與 Z^T 都是可逆的, 將上式同時左乘 Y^{-1}, 右乘 $(Z^T)^{-1}$, 就有 $C = 0$, 這指出矩陣集合 $\{\mathbf{y}_i \mathbf{z}_j^T, i, j = 1, 2, \ldots, n\}$ 是線性獨立的。

Problem 151

Let $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ be vectors in $\mathbb{R}^n$, and let A be the square matrix $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$.

(a) What are the row space and nullspace of A in terms of $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$?

(b) Show that $\mathbf{u}$ is an eigenvector of A, and find the corresponding eigenvalue.

(c) Show that $\det(I+\mathbf{u}\mathbf{v}^T)=\det(I+\mathbf{v}\mathbf{u}^T)$.

(d) The inverse of $I+\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ has the form $I+c\mathbf{u}\mathbf{v}^T$. What condition must be satisfied so that $I+\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ is invertible? And what is the value of c?

(e) What condition must be satisfied by $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ for A to be skew-symmetric ($A=-A^T$)?

(f) What condition must be satisfied by $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ so that $A^2=A$?

(g) What are the possible values of the rank of $I+\mathbf{u}\mathbf{v}^T$?

Solution

(a) 矩陣 $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ 的每行與 $\mathbf{u}$ 共線而每列與 $\mathbf{v}$ 共線, 故 A 的列空間爲 $\mathbf{v}$ 的擴張, $C(A^T)=\mathrm{span}\{\mathbf{v}\}$。零空間是列空間的正交互補空間,$N(A)=C(A^T)^{\perp}$, A 的零空間爲所有的 $\mathbb{R}^n$ 向量 $\mathbf{x}$ 滿足 $\mathbf{v}^T\mathbf{x}=0$。

(b) 由 $A\mathbf{u}=(\mathbf{u}\mathbf{v}^T)\mathbf{u}=(\mathbf{v}^T\mathbf{u})\mathbf{u}$, 可知對應的特徵值爲 $\mathbf{v}^T\mathbf{u}$。

(c) $\det(I+\mathbf{u}\mathbf{v}^T)=\det(I+\mathbf{u}\mathbf{v}^T)^T=\det(I+\mathbf{v}\mathbf{u}^T)$

(d) 直接計算矩陣乘積,

$$\begin{aligned}(I+\mathbf{u}\mathbf{v}^T)(I+c\mathbf{u}\mathbf{v}^T)&=I+\mathbf{u}\mathbf{v}^T+c\mathbf{u}\mathbf{v}^T+c\mathbf{u}(\mathbf{v}^T\mathbf{u})\mathbf{v}^T\\&=I+(1+c+c\mathbf{v}^T\mathbf{u})\mathbf{u}\mathbf{v}^T。\end{aligned}$$

令上式等號右邊爲單位矩陣, 若 $\mathbf{v}^T\mathbf{u}\neq -1$, $c=-1/(1+\mathbf{v}^T\mathbf{u})$, $I+\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ 的逆矩陣爲

$$(I+\mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1}=I-\frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1+\mathbf{u}^T\mathbf{v}}。$$

(e) 因 A 的轉置矩陣爲 $A^T = (\mathbf{u}\mathbf{v}^T)^T = \mathbf{v}\mathbf{u}^T$, 反對稱 (skew-symmetric) 矩陣滿足 $\mathbf{u}\mathbf{v}^T = -\mathbf{v}\mathbf{u}^T$, 此結果要求 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 共線 (由題 (a)), 令 $\mathbf{v} = k\mathbf{u}$, 代回上式得到 $k\mathbf{u}\mathbf{u}^T = -k\mathbf{u}\mathbf{u}^T$, 所以 $k = 0$ 或 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, 這說明了 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 至少有一個是零向量。

(f) 因 $A^2 = (\mathbf{u}\mathbf{v}^T)^2 = \mathbf{u}(\mathbf{v}^T\mathbf{u})\mathbf{v}^T = (\mathbf{v}^T\mathbf{u})\mathbf{u}\mathbf{v}^T$, 但問題限制 $A^2 = A$, 所以一定有 $\mathbf{v}^T\mathbf{u} = 1$。

(g) 若 $\mathbf{v}^T\mathbf{u} \neq -1$, 則 $I + \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ 是可逆的, $\text{rank}(I + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) = n$。但如果 $\mathbf{v}^T\mathbf{u} = -1$, 考慮 $(I + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 展開得到 $\mathbf{x} = -(\mathbf{v}^T\mathbf{x})\mathbf{u}$, 這說明 $I + \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ 的零空間由 $\mathbf{u}$ 所擴張, 所以 $\dim N(I + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) = 1$, 故 $\text{rank}(I + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) = n - 1$。 □

Problem 152

Let A be an n by n real matrix and have eigenvalues $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, 0$, so that $\text{rank}A \leq n - 1$, and suppose that the last row of A is a linear combination of the others.

(a) If A is partitioned as

$$\begin{bmatrix} C & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^T & d \end{bmatrix},$$

in which C is an $(n-1) \times (n-1)$ matrix, show that there is an $(n-1)$-dimensional vector $\mathbf{b}$ such that $\mathbf{v}^T = \mathbf{b}^T C$ and $d = \mathbf{b}^T\mathbf{u}$.

(b) Show that $C + \mathbf{u}\mathbf{b}^T$ has eigenvalues $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$.

Solution

(a) 因爲 A 的最底列可以表示爲其他列的線性組合, 考慮以下矩陣乘法, 目的是不改變 A 的第 1 列至第 $n-1$ 列, 並設法藉由線性組合將最底列消去:

$$\begin{bmatrix} I_{n-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{b}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^T & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & \mathbf{u} \\ -\mathbf{b}^T C + \mathbf{v}^T & d - \mathbf{b}^T\mathbf{u} \end{bmatrix}。$$

由題意, 必定存在 $\mathbf{b}$ 使乘積的最底列爲零列, 亦即 $\mathbf{v}^T = \mathbf{b}^T C$ 且 $d = \mathbf{b}^T\mathbf{u}$。

(b) 承題 (a), 令 $\mathbf{b}$ 滿足此關係:

$$\begin{bmatrix} I_{n-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{b}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^T & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix},$$

$\begin{bmatrix} I_{n-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{b}^T & 1 \end{bmatrix}$ 是基本矩陣, 故為可逆。對給出的 A 矩陣進行以下相似轉換:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_{n-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{b}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^T & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}^T & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}^T & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C + \mathbf{u}\mathbf{b}^T & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} = D。\end{aligned}$$

矩陣 D 相似於 A, 因此 D 和 A 有相同的特徵值, 即 $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, 0$。上三角分塊矩陣 D 的特徵值包含主對角分塊 $C + \mathbf{u}\mathbf{b}^T$ 的特徵值以及主對角元 0, 由此證明 $C + \mathbf{u}\mathbf{b}^T$ 的特徵值即為 $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$。 $\square$

Problem 153

Suppose A is a real symmetric $n \times n$ matrix.

(a) Show that the rank of A is equal to the number of nonzero eigenvalues of A, but that this is not generally true for non-symmetric matrices.

(b) If $A \neq 0$, show that

$$\text{rank} A \geq \frac{(\text{tr} A)^2}{\text{tr}(A^2)},$$

with equality if and only if there is an $n \times r$ matrix U with orthonormal columns and some $a \in \mathbb{R}$ such that $A = aUU^T$.

Solution

(a) 首先要知道實數對稱矩陣的特徵值皆為實數, 我們總是可以選擇彼此正交且長度正規化的特徵向量, 換言之, 實數對稱矩陣是正交可對角化。設 $n \times n$ 階實數對稱矩陣 A 有 r 個非零特徵值 $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$, 而 $\lambda_i = 0$, $i = r+1, r+2, \ldots, n$, 對

應的正交正規特徵向量爲 $\mathbf{u}_i$, $i=1,2,\ldots,n$。令 U 爲 $n\times n$ 階特徵向量矩陣, Λ 爲 $n\times n$ 階特徵值矩陣, A 可被正交對角化:

$$\begin{aligned}A=U\Lambda U^T&=\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1&\cdots&\mathbf{u}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1^T\\\vdots\\\mathbf{u}_n^T\end{bmatrix}\\&=\lambda_1\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T+\cdots+\lambda_r\mathbf{u}_r\mathbf{u}_r^T。\end{aligned}$$

我們將 $\lambda_i=0$ 的項都去除, 這是一個行-列乘積展開式, 矩陣 A 的行空間由 r 個線性獨立的向量 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_r$ 所擴張, 因此 $\operatorname{rank}A=r$, 證明了 A 的秩等於非零特徵值總數。另一個想法是對 A 執行基本列運算移除可逆矩陣 U, A 列等價於 $B=\Lambda U^T$, 因此 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}B^T$, 繼續對 $B^T=U\Lambda$ 執行列運算消去 U, 就有 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}\Lambda=r$。當 A 不爲對稱時, 例如, $A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ 有特徵值 0, 0, 但是 $\operatorname{rank}A=1$, 上述命題對於非對稱矩陣未必成立。

(b) 承題 (a) 的設定, 因爲 $\operatorname{tr}A=\lambda_1+\cdots+\lambda_r$, 利用科西–舒瓦茲 (Cauchy-Schwarz) 不等式

$$(\mathbf{x}^T\mathbf{y})^2\le(\mathbf{x}^T\mathbf{x})(\mathbf{y}^T\mathbf{y})。$$

令 r-維向量 $\mathbf{x}=[\lambda_1,\ldots,\lambda_r]^T$, $\mathbf{y}=[1,\ldots,1]^T$, 於是

$$(\operatorname{tr}A)^2=\left(\sum_{i=1}^r\lambda_i\right)^2\le r\sum_{i=1}^r\lambda_i^2=(\operatorname{rank}A)\operatorname{tr}(A^2),$$

上式利用了 A^2 的特徵值爲 A 的特徵值之平方此性質。當 $A\neq 0$, $\operatorname{rank}A>0$, 因此必定存在非零特徵值, 保證 $\operatorname{tr}(A^2)>0$, 故證得給出的不等式成立。只在所有特徵值都相等時, 上述不等式的左右兩邊才相等, 延續題 (a) 的結果, 若 $\lambda_1=\cdots=\lambda_r=a$, 則有

$$A=a(\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T+\cdots+\mathbf{u}_r\mathbf{u}_r^T)=a\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1&\cdots&\mathbf{u}_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1^T\\\vdots\\\mathbf{u}_r^T\end{bmatrix}=aUU^T。$$

注意這裡的 U 爲 $n\times r$ 階矩陣, 它包含了 r 個互爲正交且正規的行向量。 □

Problem 154

Suppose that A is an $m \times n$ matrix, B is an $n \times m$ matrix, with $m \leq n$.

(a) Suppose that C is m by m, and E is n by n. Show that the eigenvalues of the triangular block matrix $\begin{bmatrix} C & D \\ 0 & E \end{bmatrix}$ are those of C together with those of E.

(b) Show that $(m+n) \times (m+n)$ matrices $\begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{bmatrix}$ are similar.

(c) Show that BA has the same eigenvalues as AB, counting multiplicity, together with additional $n-m$ eigenvalues equal to 0.

Solution

(a) 令 C 的特徵值爲 λ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, E 的特徵值爲 σ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, 分別滿足 $C\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$, $E^T \mathbf{y}_j = \sigma_j \mathbf{y}_j$, 其中 $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{y}_j$ 分別爲 C 和 E^T 的特徵向量。考慮

$$\begin{bmatrix} C & D \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\mathbf{x}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C^T & 0 \\ D^T & E^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{y}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ E^T \mathbf{y}_j \end{bmatrix} = \sigma_j \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{y}_j \end{bmatrix}。$$

注意

$$\begin{bmatrix} C & D \\ 0 & E \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} C^T & 0 \\ D^T & E^T \end{bmatrix},$$

轉置矩陣與原矩陣的特徵值相同, 故分塊矩陣 $\begin{bmatrix} C & D \\ 0 & E \end{bmatrix}$ 有特徵值 λ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, 與 σ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$。

(b) 若存在可逆矩陣 S 使 $DS = SE$, 則 D 和 E 是相似的。考慮以下分塊矩陣乘法:

$$\begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB & ABA \\ B & BA \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB & ABA \\ B & BA \end{bmatrix}。$$

分塊矩陣 $\begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix}$ 其特徵值皆爲1, 因此可逆, 這證明了給出的兩分塊矩陣確實是相似的。

(c) 應用題 (a) 結果, $\begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix}$ 的特徵值即爲 AB 的特徵值加上 n 個 0, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{bmatrix}$ 的特徵值爲 BA 的特徵值加上 m 個 0。但由題 (b) 得知此二分塊矩陣相似, 因此有相同的特徵值集合, 但已知 $m \le n$, 所以 $n \times n$ 階矩陣 BA 的特徵值包含來自 $m \times m$ 階矩陣 AB 的 m 個特徵值, 以及 $n - m$ 個 0。 □

Problem 155

Let

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) If $A^k = c_k A + d_k I$, for $k \ge 0$, find c_k and d_k as functions of k.

(b) Express A^{-1} as a linear combination of I and A.

Solution

(a) Cayley-Hamilton 定理的一個重要應用是將 $n \times n$ 階冪矩陣 A^k, $k \ge n$, 以 $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$ 的線性組合表示。矩陣 A 的特徵多項式是 $p(t) = t^2 - 3t + 2$, 根據 Cayley-Hamilton 定理, $A^2 - 3A + 2I = 0$, 則

$$A^2 = 3A - 2I$$

$$A^3 = A(A^2) = 3A^2 - 2A = 3(3A - 2I) - 2A = 7A - 6I$$

$$A^4 = A(A^3) = 7A^2 - 6A = 7(3A - 2I) - 6A = 15A - 14I。$$

已知 $A^k = c_kA + d_kI$, 那麼 $A^{k+1} = c_kA^2 + d_kA = c_k(3A - 2I) + d_kA = (3c_k + d_k)A - 2c_kI$, 於是有遞迴關係

$$\begin{aligned} c_{k+1} &= 3c_k + d_k \\ d_{k+1} &= -2c_k。\end{aligned}$$

初始值爲 $c_0 = 0$, $d_0 = 1$。將上面二式寫爲矩陣形式的差分方程式:

$$\begin{bmatrix} c_{k+1} \\ d_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_k \\ d_k \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} c_k \\ d_k \end{bmatrix}。$$

矩陣 A 可對角化爲

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = S\Lambda S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

解出

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c_k \\ d_k \end{bmatrix} &= A^k \begin{bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{bmatrix} = S\Lambda^k S^{-1} \begin{bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2^k - 1 \\ -2^k + 2 \end{bmatrix}。\end{aligned}$$

(b) 仍然利用 $A^2 - 3A + 2I = 0$, 移項後 $2I = -A^2 + 3A = A(-A + 3I)$, 或

$$I = A\left[\frac{1}{2}(-A + 3I)\right],$$

這表明了 $A^{-1} = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I$。另一個做法是利用題 (a) 導出的公式, 此公式不僅對 $k \geq 0$ 成立, 對 $k = -1$ 也成立, 故令 $k = -1$, 就有 $A^{-1} = c_{-1}A + d_{-1}I = (2^{-1} - 1)A + (-2^{-1} + 2)I = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I$。 $\square$

Problem 156

Suppose a 2 by 2 real matrix has the form

$$A = \begin{bmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{bmatrix},$$

where $0 < a \le 1$, $0 < b \le 1$, $a+b < 2$.

(a) By the eigenvalue method, show that $A^k \to P$ as $k \to \infty$, where

$$P = \frac{1}{a+b}\begin{bmatrix} b & b \\ a & a \end{bmatrix}.$$

(b) Let $B = A - I$. By the binomial theorem, show that

$$A^k = I + \frac{1}{r}[(1+r)^n - 1]B,$$

where $r = -(a+b)$. Then, show that $A^k \to P$, where P is given in (a).

Solution

(a) 想法是利用矩陣對角化來計算, 首先要知道 A 的特徵值及特徵向量。不難發現 A^T 有特徵值 1, 因爲

$$\begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}。$$

由此可知 A 有一個特徵值爲 $\lambda_1 = 1$, 對應的特徵向量是 $\mathbf{x}_1 = [b, a]^T$。再利用 $\text{tr}A = 2-a-b = \lambda_1 + \lambda_2$ 得知另一個特徵值爲 $\lambda_2 = 1-a-b$, 對應的特徵向量爲 $\mathbf{x}_2 = [1, -1]^T$。接著將矩陣 A 對角化, 如下:

$$A = \begin{bmatrix} b & 1 \\ a & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-a-b \end{bmatrix}\frac{1}{a+b}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & -b \end{bmatrix}。$$

從已知 $a+b<2$, 就有 $1-a-b > -1$。因 $a > 0$ 且 $b > 0$, $1-a-b < 1$, 故 $|1-a-b| < 1$。當 $k \to \infty$, $(1-a-b)^k \to 0$, 所以

$$A^k \to \begin{bmatrix} b & 1 \\ a & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{a+b}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & -b \end{bmatrix} = \frac{1}{a+b}\begin{bmatrix} b & b \\ a & a \end{bmatrix} = P。$$

(b) 令

$$B = A - I = \begin{bmatrix} -a & b \\ a & -b \end{bmatrix}。$$

直接計算可以確認 $B^2 = rB$, 並歸納出 $B^k = r^{k-1}B$, 其中 $r = -(a+b)$。利用二項式定理展開 A^k:

$$\begin{aligned} A^k = (I+B)^k &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B^i = I + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} B^i \\ &= I + \frac{1}{r}\left[\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} r^i\right] B = I + \frac{1}{r}\left[\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} r^i - 1\right] B \\ &= I + \frac{1}{r}[(1+r)^k - 1]B。\end{aligned}$$

由題 (a) 我們知道 $|1+r| < 1$, 因此當 $k \to \infty$, $(1+r)^k \to 0$, 則 $A^k \to I - \frac{1}{r}B$, 整理化簡證得 $P = I - \frac{1}{r}B$。 □

Problem 157

Find e^A, where

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solution

矩陣函數的標準算法是對角化。寫出特徵多項式

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1),$$

可知 A 有特徵值 5 和 -1, 再計算零空間 $N(A-\lambda I)$ 即得對應的特徵向量: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$。將 A 對角化爲 $A = S\Lambda S^{-1}$, 其中 $\Lambda = \operatorname{diag}(5,-1)$, $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, 則

$$\begin{aligned} e^A = Se^{\Lambda}S^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^5 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} e^5+2e^{-1} & e^5-e^{-1} \\ 2e^5-2e^{-1} & 2e^5+e^{-1} \end{bmatrix}。\end{aligned}$$

另一個做法是利用 Cayley-Hamiton 定理: $A^2-4A-5I=(A-5I)(A+I)=0$。考慮

$$e^t = (t-5)(t+1)q(t)+c_1t+c_0,$$

以 A 替換 t, I 替換 1, 就有 $e^A = c_1A+c_0I$。將 $t=5$ 和 $t=-1$ 代入 e^t 表達式, 可得 $5c_1+c_0=e^5$ 和 $-c_1+c_0=e^{-1}$, 解出

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{6}(e^5-e^{-1}) \\ c_0 &= \frac{1}{6}(e^5+5e^{-1})。\end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} e^A &= \frac{1}{6}(e^5-e^{-1})\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}(e^5+5e^{-1})\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} e^5+2e^{-1} & e^5-e^{-1} \\ 2e^5-2e^{-1} & 2e^5+e^{-1} \end{bmatrix}。\end{aligned}$$

□

Problem 158

Let A be an $n\times n$ positive definite matrix with eigenvalues $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. Find the eigenvalues of

$$B = \begin{bmatrix} A & I \\ I & A^{-1} \end{bmatrix}.$$

Solution

運用基本列運算將 B 化簡成上三角形分塊矩陣:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A^{-1} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & I \\ I & A^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & I \\ -A^{-1}A+I & -A^{-1}+A^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

考慮下列相似變換:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A^{-1} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & I \\ I & A^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ A^{-1} & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ A^{-1} & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+A^{-1} & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

可知 B 相似於 $\begin{bmatrix} A+A^{-1} & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$。所以, B 的特徵值包含主對角分塊 $A+A^{-1}$ 的特徵值 $\lambda_i + \frac{1}{\lambda_i}$, $i=1,\ldots,n$, 以及零矩陣的 n 個特徵值 0。 □

Problem 159

Let $A=[a_{ij}]$ be an $n\times n$ matrix and

$$\begin{aligned}
\rho_i(A) &= \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad i=1,\ldots,n, \\
\gamma_j(A) &= \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \quad j=1,\ldots,n, \\
\rho(A) &= \max_{1\le i\le n}\{\rho_i(A)\}, \\
\gamma(A) &= \max_{1\le j\le n}\{\gamma_i(A)\}.
\end{aligned}$$

If λ is an eigenvalue of A, show that $|\lambda| \le \min\{\rho(A),\gamma(A)\}$.

Solution

令 $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)^T$ 為對應特徵值 λ 的特徵向量, 設 $M=|x_i|=\max\{|x_1|,\ldots,|x_n|\}$。考慮 $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$ 的第 i 元,

$$a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n=\lambda x_i。$$

等號兩邊取絕對值, 可得

$$\begin{aligned}|\lambda|M = |\lambda|\cdot|x_i| = |\lambda x_i| &= |a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n| \\ &\le |a_{i1}x_1| + \cdots + |a_{in}x_n| \\ &= |a_{i1}|\cdot|x_1| + \cdots + |a_{in}|\cdot|x_n| \\ &\le (|a_{i1}| + \cdots + |a_{in}|)M \\ &\le \rho_i(A)M \le \rho(A)M。\end{aligned}$$

因爲 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 可知 $M > 0$, 就有 $|\lambda| \le \rho(A)$。注意 A^T 和 A 有相同的特徵值 λ, 重複上面的計算步驟, 可得 $|\lambda| \le \rho(A^T) = \gamma(A)$。綜合以上結果, $|\lambda| \le \min\{\rho(A), \gamma(A)\}$。 $\square$

Problem 160

Let A be a 3×3 real matrix with eigenvalues 0, 1, 2 and let $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ be the corresponding eigenvectors.

(a) Find all solutions to $A\mathbf{x} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}$.

(b) Find the particular solution $\mathbf{x}$ in the row space of A.

Solution

(a) 因爲 A 有相異特徵值 0, 1, 2, 可知對應的特徵向量 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ 是線性獨立的, 故任何 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ 皆可唯一表示成 $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} + c_3\mathbf{w}$。利用給定條件, 可得

$$\begin{aligned}A\mathbf{x} &= A(c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} + c_3\mathbf{w}) \\ &= c_1A\mathbf{u} + c_2A\mathbf{v} + c_3A\mathbf{w} \\ &= c_2\mathbf{v} + 2c_3\mathbf{w}。\end{aligned}$$

上式與線性方程 $A\mathbf{x} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}$ 比較, 可得一特解:

$$\mathbf{x}_p = \alpha\mathbf{v} + \frac{\beta}{2}\mathbf{w}。$$

因爲 $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$, A 的零空間 $N(A)$ 由 $\mathbf{u}$ 擴張而成, 故通解爲

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + c\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v} + \frac{\beta}{2}\mathbf{w} + c\mathbf{u},$$

其中 c 是任意純量。

(b) 因爲列空間 $C(A^T)$ 是零空間 $N(A)$ 的正交補集, 屬於列空間的特解必定正交於零空間, 也就滿足下列條件:

$$
\begin{aligned}
0 &= \mathbf{u}^T\mathbf{x} \\
&= \mathbf{u}^T\left(\alpha\mathbf{v} + \frac{\beta}{2}\mathbf{w} + c\mathbf{u}\right) \\
&= \alpha\mathbf{u}^T\mathbf{v} + \frac{\beta}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{w} + c\|\mathbf{u}\|^2,
\end{aligned}
$$

由此解出

$$
c = -\frac{\alpha\mathbf{u}^T\mathbf{v} + \frac{\beta}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{w}}{\|\mathbf{u}\|^2},
$$

故屬於列空間的特解爲

$$
\mathbf{x} = \alpha\mathbf{v} + \frac{\beta}{2}\mathbf{w} - \frac{\alpha\mathbf{u}^T\mathbf{v} + \frac{\beta}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{w}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u}。
$$

□

Problem 161

Explain what is wrong with the following arguments for Cayley-Hamilton theorem: $p(A) = 0$, where $p(\lambda)$ is the characteristic polynomial of A.

(a) "Since $p(\lambda) = 0$ for every eigenvalue λ of A, and since the eigenvalues of $q(A)$, q is a polynomial, are the $q(\lambda)$, it follows that all eigenvalues of $p(A)$ are 0. Therefore, $p(A) = 0$."

(b) "Since $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, $p(A) = \det(AI - A) = \det(A - A) = \det 0 = 0$. Therefore, $p(A) = 0$."

Solution

(a) 問題出在最後一個步驟: 矩陣 $p(A)$ 的所有特徵値爲零不能保證 $\mathrm{rank}(p(A)) = 0$, 因此無法推論出 $p(A) = 0$, 例如, $p(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$。

(b) 若 A 爲一 $n \times n$ 階矩陣, $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ 代表 A 的特徵多項式, 特徵方程 $p(t) = 0$ 的根即爲 A 的特徵値。Cayley-Hamilton 定理說: 任一方陣滿足它自己

的特徵方程。我們必須先由 $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ 求出多項式 $p(\lambda)$, 然後用此特徵多項式建構出矩陣 $p(A)$。所以, $p(A) = \det(AI - A)$ 是出於輕率的謬誤。 $\square$

Problem 162

Let A be an $n \times n$ matrix. If A has n distinct eigenvalues, show that there is a vector $\mathbf{x}$ such that $\mathbf{x}, A\mathbf{x}, A^2\mathbf{x}, \ldots, A^{n-1}\mathbf{x}$ are linearly independent.

Solution

令 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 爲 $n \times n$ 階矩陣 A 的特徵值, 且 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ 爲對應的特徵向量。因爲特徵值互異, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ 構成一線性獨立集。令

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_n,$$

就有

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n \\ A^2\mathbf{x} &= \lambda_1^2\mathbf{x}_1 + \lambda_2^2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n^2\mathbf{x}_n \\ &\vdots \\ A^{n-1}\mathbf{x} &= \lambda_1^{n-1}\mathbf{x}_1 + \lambda_2^{n-1}\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n^{n-1}\mathbf{x}_n\text{。} \end{aligned}$$

將上面 n 個方程式合併成矩陣形式, 如下:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x} & A\mathbf{x} & A^2\mathbf{x} & \cdots & A^{n-1}\mathbf{x} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \\ &= SC, \end{aligned}$$

上式中 S 是由特徵向量 $\mathbf{x}_i$ 構成的 $n \times n$ 階矩陣, C 是由特徵值 λ_i 組成的 $n \times n$ 階矩陣。因爲 S 有線性獨立的行向量, 故 S 爲可逆矩陣。注意 C 是一 Vandermonde 矩陣, 其行列式等於

$$\det C = \prod_{1 \le j < i \le n}^{n} (\lambda_i - \lambda_j),$$

但因為 A 有互異特徵值, $\det C \neq 0$, 故 C 亦為可逆矩陣。綜合以上結果, SC 是可逆的, 也就證明 $\mathbf{x}, A\mathbf{x}, A^2\mathbf{x}, \ldots, A^{n-1}\mathbf{x}$ 構成一線性獨立集。 $\square$

Problem 163

Find the eigenvalues of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solution

考慮

$$B = A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

設 B 有特徵值 λ, 對應的特徵向量為 $\mathbf{x}$, 則 $B\mathbf{x} = (A-2I)\mathbf{x} = A\mathbf{x} - 2\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, 可知 A 有特徵值 $\lambda + 2$, 對應的特徵向量為 $\mathbf{x}$。接下來的工作是解出 B 的特徵值。觀察出 B 具有分塊形式 $B = \begin{bmatrix} 0 & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix}$, 其中 $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$。令 B 對應特徵值 λ 的特徵向量為 $\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}$, 則

$$\begin{bmatrix} 0 & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix},$$

乘開可得 $C\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$, $C^T\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$。第二式左乘 C, 再使用第一式, 即得

$$CC^T\mathbf{u} = \lambda C\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{u},$$

上式說明 CC^T 有特徵值 λ^2。代入數值算出 $CC^T = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$, 解出 $\lambda^2 = 1, 9$, 立得 $\lambda = \pm 1, \pm 3$, 故 A 的特徵值為 $-1, 1, 3, 5$。 $\square$

Problem 164

Let $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ be the eigenvectors corresponding to distinct eigenvalues $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ of a linear transformation. Show that $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ are linearly independent.

Solution

使用數學歸納法來證明。明顯地, $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$ 構成一線性獨立集。假設 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}$ 是線性獨立的向量集, 考慮

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}。$$

左乘 A, 就有

$$A(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k) = c_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\lambda_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}。$$

令第一式乘以 λ_k,

$$c_1\lambda_k\mathbf{x}_1 + c_2\lambda_k\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\lambda_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0},$$

再將上面兩式相減, 立得

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_k)\mathbf{x}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_k)\mathbf{x}_2 + \cdots + c_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{0}。$$

但是 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ 互異, 推知 $c_1 = c_2 = \cdots = c_{k-1} = 0$, 再由第一式可推得 $c_k = 0$, 故 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_k$ 爲一線性獨立集。令 $k = n$, 即證得所求。 □

Problem 165

What is the condition that a and b must satisfy so that

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

has three linearly independent eigenvectors?

Solution

寫出 A 的特徵方程式如下:

$$\det(A-tI)=\begin{vmatrix}-t & 0 & 1\\ a & 1-t & b\\ 1 & 0 & -t\end{vmatrix}=-(1-t)^2(1+t),$$

故 A 有特徵值 $1,1,-1$。欲使 A 有三個線性獨立的特徵向量, 必須有 $\dim N(A-I)=2$, 亦即 $\operatorname{rank}(A-I)=1$。利用消去法化簡 $A-I$:

$$A-I=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ a & 0 & b\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & a+b\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

得知 a 和 b 需滿足 $a+b=0$。 □

Problem 166

Let λ_1 and λ_2 be two eigenvalues of an n-square matrix A and let $\mathbf{x}_1$ and $\mathbf{x}_2$ be the eigenvectors of A corresponding to λ_1 and λ_2, respectively. If $\lambda_1 \neq \lambda_2$, prove that $\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2$ is not an eigenvector of A.

Solution

假設 A 有一特徵向量 $\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2$, 對應特徵值 μ, 則 $A(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)=\mu(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)=\mu\mathbf{x}_1+\mu\mathbf{x}_2$; 另一方面, $A(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)=A\mathbf{x}_1+A\mathbf{x}_2=\lambda_1\mathbf{x}_1+\lambda_2\mathbf{x}_2$。將上面兩式相減, 即得

$$(\mu-\lambda_1)\mathbf{x}_1+(\mu-\lambda_2)\mathbf{x}_2=\mathbf{0},$$

因為 $\mu-\lambda_1\neq\mu-\lambda_2$, 可推論 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$ 線性相依。然而, 對應相異特徵值的特徵向量必定線性獨立, 因此證得 $\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2$ 不可能是 A 的特徵向量。 □

Problem 167

Determine the eigenvalues of the $n \times n$ matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}.$$

Solution

若 $n = 2$, A 有特徵值 $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$。下面討論 $n > 2$ 的情況。考慮

$$A^2 = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix},$$

其中 $(n-1) \times (n-1)$ 階矩陣 B 可表示爲 $B = I_{n-1} + E$, 矩陣 E 的所有元皆爲 1。主對角分塊矩陣的特徵值由主對角分塊的特徵值組成, 可知 A^2 的特徵值包含 n 以及 B 的所有特徵值。觀察出 E 有特徵向量 $(1, 1, \ldots, 1)^T$ 對應特徵值 $n-1$, 因爲 $\mathrm{rank}E = 1$, 可知 E 還有 $n-2$ 個特徵值 0。若 $E\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}$, 則 $B\mathbf{x} = (I + E)\mathbf{x} = (1+\mu)\mathbf{x}$, 推得 B 有特徵值 $n, 1, 1, \ldots, 1$, 故 A^2 的特徵值爲 $n, n, 1, 1, \ldots, 1$。若 λ^2 是 A^2 的特徵值, 則 A 必定有特徵值 λ 或 $-\lambda$, 剩下的問題是決定 A 的特徵值正負號。因爲矩陣跡數等於特徵值之和, 而 $\mathrm{trace}A = -(n-2)$, 由此可推論 A 的特徵值爲 $\sqrt{n}, -\sqrt{n}, -1, -1, \ldots, -1$。$\square$

Problem 168

Let A and B be $n \times n$ matrices such that $AB = BA$. If A has n distinct eigenvalues, show that A, B, and AB are all diagonalizable.

Solution

設 A 有相異特徵值 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, 則對應的特徵向量 $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ 爲一線性獨立集, 故 A 可對角化爲 $S^{-1}AS=\Lambda$, 其中 $S=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_n\end{bmatrix}$, $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$。令 $C=S^{-1}BS$, 利用 $AB=BA$, 就有

$$\Lambda C=(S^{-1}AS)(S^{-1}BS)=S^{-1}ABS=S^{-1}BAS=(S^{-1}BS)(S^{-1}AS)=C\Lambda。$$

由上式推知對於任意 i,j, $\lambda_i c_{ij}=c_{ij}\lambda_j$。當 $i\neq j$, $\lambda_i\neq\lambda_j$, 故必有 $c_{ij}=0$, 推論 C 是一主對角矩陣, 證得 B 可對角化。明顯地, $S^{-1}(AB)S=S^{-1}ASS^{-1}BS=\Lambda C$ 也是主對角矩陣, 故 AB 亦可對角化。 □

Problem 169

If the rank of the following matrix A is 3, find the value of a:

$$A=\begin{bmatrix}a&1&1&1\\1&a&1&1\\1&1&a&1\\1&1&1&a\end{bmatrix}.$$

Solution

若 $\mathrm{rank}A=3$, 則 4×4 階矩陣 A 有零特徵值且相重數爲 1。剩下的工作是求出 A 的特徵值 (表示爲 a 的函數), 將 A 改寫如下:

$$A=\begin{bmatrix}a-1&0&0&0\\0&a-1&0&0\\0&0&a-1&0\\0&0&0&a-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}=(a-1)I+\mathbf{e}\mathbf{e}^T,$$

其中 $\mathbf{e}=(1,1,1,1)^T$。設 $\mathbf{e}\mathbf{e}^T$ 的特徵值爲 λ, 特徵向量爲 $\mathbf{x}$, 則

$$A\mathbf{x}=(a-1)I\mathbf{x}+\mathbf{e}\mathbf{e}^T\mathbf{x}=(a-1)\mathbf{x}+\lambda\mathbf{x}=(a+\lambda-1)\mathbf{x},$$

可知 A 有特徵值 $a+\lambda-1$。因爲 $(\mathbf{e}\mathbf{e}^T)\mathbf{e}=\mathbf{e}(\mathbf{e}^T\mathbf{e})=4\mathbf{e}$, $\mathbf{e}\mathbf{e}^T$ 有一特徵值 4, 對應特徵向量 $\mathbf{e}$。由於 $\mathrm{rank}(\mathbf{e}\mathbf{e}^T)=1$, 根據秩–零度定理, $\mathbf{e}\mathbf{e}^T$ 的零空間維度等於 3, 也就是

說 $\mathbf{e}\mathbf{e}^T$ 有零特徵值且相重數爲 3, 對應的特徵向量分別爲 $(1,-1,0,0)^T$, $(0,1,-1,0)^T$, $(0,0,1,-1)^T$。綜合以上結果可知 A 有特徵值 $a+3$, $a-1$, $a-1$, $a-1$, 故當 $a=-3$ 時, $\mathrm{rank}A=3$。 $\square$

Problem 170

Let A, B, and C be $m\times m$, $n\times n$, and $m\times n$ matrices, respectively. If A and B have no common eigenvalue, show that $AC=CB$ implies $C=0$.

Solution

利用等式 $AC=CB$, 可得

$$A^2C=A(AC)=A(CB)=(AC)B=(CB)B=CB^2。$$

運用同樣做法可歸納出 $A^kC=CB^k$, 其中 k 是正整數。令 A 的特徵多項式爲

$$p(t)=\det(tI-A)=c_mt^m+c_{m-1}t^{m-1}+\cdots+c_1t+c_0。$$

Cayley-Hamilton 定理給出 $p(A)=0$, 也就有

$$\begin{aligned}0=p(A)C&=(c_mA^m+c_{m-1}A^{m-1}+\cdots+c_1A+c_0I)C\\&=c_mA^mC+c_{m-1}A^{m-1}C+\cdots+c_1AC+c_0C\\&=c_mCB^m+c_{m-1}CB^{m-1}+\cdots+c_1CB+c_0C\\&=Cp(B)。\end{aligned}$$

設 A 的特徵值爲 λ_i, $i=1,\ldots,m$, 特徵多項式 $p(t)$ 亦可表示成

$$p(t)=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_m),$$

則 $p(B)=(B-\lambda_1I)(B-\lambda_2I)\cdots(B-\lambda_mI)$。因爲 λ_i, $i=1,\ldots,m$, 不爲 B 的特徵值, 所有 $B-\lambda_iI$ 皆可逆, 所以 $p(B)$ 可逆, 也就證得 $C=0$。 $\square$

Problem 171

Let A be an $n \times n$ positive definite matrix with eigenvalues $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Find the eigenvalues of the following matrix:

$$B = \begin{bmatrix} A & I \\ I & A^{-1} \end{bmatrix}.$$

Solution

設計下列相似變換:

$$\begin{bmatrix} I & A^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & I \\ I & A^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + A^{-1} & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} = C。$$

分塊矩陣 B 和 C 有相同的特徵值集合, 但 C 是主對角分塊矩陣, 其特徵值即爲主對角分塊 $A + A^{-1}$ 和 0 的特徵值聯集, 故 B 有特徵值 $\lambda_i + 1/\lambda_i$, $i = 1, \ldots, n$, 以及 n 個零特徵值。注意 A 是正定矩陣, 可知每一 $\lambda_i > 0$, 因此 $\lambda_i + 1/\lambda_i > 0$。 □

Problem 172

Find the values of a, b and c such that the following matrices are similar:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & b \\ 3 & 2 & a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Solution

因爲 A 具有主對角分塊形式, 其特徵值爲主對角分塊 $A_1 = \begin{bmatrix} -5 \end{bmatrix}$ 和 $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 2 & a \end{bmatrix}$ 的特徵值聯集。另一方面, A 相似於主對角矩陣 B, 可知 A 有特徵值 $\{2, c, -1\}$。比較兩組數組立得 $c = -5$, 且 2 和 -1 爲分塊 A_2 的特徵值, 故 $\operatorname{trace} A_2 = 1 + a = 2 + (-1) = 1$, $\det A_2 = a - 2b = 2(-1) = -2$, 由此解出 $a = 0$, $b = 1$。 □

Problem 173

Let $A = [a_{ij}]$ be an $n \times n$ matrix such that $a_{ij} \geq 0$ for every i and j. If $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ for each i, prove that

(a) For every eigenvalue λ of A, $|\lambda| \leq 1$.

(b) 1 is an eigenvalue of A.

(c) If A is nonsingular, then each row sum of A^{-1} also equals to 1.

Solution

(a) 令對應特徵值 λ 的特徵向量為 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, 設 $|x_i| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$, 亦即 $\mathbf{x}$ 的第 i 元有最大絕對值, 顯然 $x_i \neq 0$。考慮 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ 的第 i 元,

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = \lambda x_i\text{。}$$

等號兩邊同時取絕對值, 利用已知條件可得

$$\begin{aligned} |\lambda| \cdot |x_i| &= |a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n| \\ &\leq a_{i1}|x_1| + \cdots + a_{in}|x_n| \\ &\leq (a_{i1} + \cdots + a_{in})|x_i| = |x_i|, \end{aligned}$$

因此證得 $|\lambda| \leq 1$。

(b) 令 $\mathbf{x} = (1, \ldots, 1)^T$, 直接計算可驗證 $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$。

(c) 因為 A 可逆, 由 (b), $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ 同時左乘 A^{-1}, 即得 $A^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{x}$, 故知 A^{-1} 各列之和等於 1。 □

Problem 174

Let A and B be $n \times n$ nilpotent matrices. If $AB = BA$, prove that AB and $A+B$ are also nilpotent. Recall that A is nilpotent if it has no eigenvalue other than 0, or $A^k = 0$ for some positive integer k.

Solution

因爲 A 和 B 是冪零矩陣, 必有正整數 p, q 使得 $A^p = B^q = 0$。令 $m = \max\{p, q\}$, 則 $A^m = B^m = 0$。利用已知 $AB = BA$, 即得 $(AB)^m = A^m B^m = 0$。考慮

$$(A+B)^{2m} = \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} A^k B^{2m-k}。$$

因爲 $\max\{k, 2m-k\} \geq m$, 可推論 $(A+B)^{2m} = 0$。另一做法利用可交換矩陣 $AB = BA$ 具備同時可三角化性質, 亦即存在一可逆矩陣 P 使得 PAP^{-1} 和 PBP^{-1} 同爲上三角形矩陣, 其主對角元 (特徵值) 全部是零。所以 $P(AB)P^{-1} = (PAP^{-1})(PBP^{-1})$ 和 $P(A+B)P^{-1} = PAP^{-1} + PBP^{-1}$ 亦爲上三角形矩陣, 且主對角元皆爲零, 因此 AB 和 $A+B$ 的所有特徵值爲零, 證得 AB 和 $A+B$ 是冪零矩陣。 $\square$

Problem 175

Let A and B be 3×3 real matrices. Show that

$$\det(AB - BA) = \frac{1}{3}\mathrm{trace}\left((AB - BA)^3\right).$$

Solution

令 $C = AB - BA$, C 有特徵值 λ_i, $i = 1, 2, 3$。利用跡數 (trace) 基本性質, 可得

$$\mathrm{trace}(C) = \mathrm{trace}(AB - BA) = \mathrm{trace}(AB) - \mathrm{trace}(BA) = 0,$$

即知 $\mathrm{trace} C = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$。由恆等式

$$\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 - 3\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_2\lambda_3 - \lambda_3\lambda_1)$$

可推得 $\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 = 3\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, 此即 $\mathrm{trace} C^3 = 3\det C$。 $\square$

Problem 176

Find all the 2×2 matrices A such that $A^2 - 3A + 2I = 0$.

Solution

由給出條件可知 $p(t) = t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$ 爲 A 的一個消滅多項式 (annihilating polynomial), 所以 A 的最小多項式 (minimal polynomial) 有以下三種可能:

(a) $m(t) = t - 1$, 則 $m(A) = A - I = 0$, 可得 $A = I$。

(b) $m(t) = t - 2$, 則 $m(A) = A - 2I = 0$, 可得 $A = 2I$。

(c) $m(t) = (t-1)(t-2)$, 則 A 的特徵多項式爲 $m(t) = (t-1)(t-2)$。因爲 A 有相異特徵值, A 具有下列對角化形式:

$$A = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} P^{-1},$$

其中 P 是任意可逆矩陣。 □

Problem 177

Let $A = [a_{ij}]$ be an $n \times n$ matrix with eigenvalues $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Show that

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{ji}.$$

Solution

若 λ 是 A 的特徵值, 則 λ^2 是 A^2 的特徵值, 所以 A^2 有特徵值 $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$, 也就有 $\text{trace} A^2 = \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2$。另一方面, 根據跡數定義,

$$\text{trace} A^2 = \sum_{i=1}^{n} (A^2)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{ji},$$

因此證得命題。 □

Problem 178

An $n \times n$ complex matrix A is said to be *involutory* if $A^2 = I$. If A is involutory, prove the following statements.

(a) $C(A-I) \subseteq N(A+I)$, where $C(A-I)$ is the column space of $A-I$ and $N(A+I)$ is the nullspace of $A+I$.

(b) $\text{rank}(A+I)+\text{rank}(A-I)=n$

(c) A has only eigenvalues ± 1.

(d) $\mathbb{C}^n = N(A-I) \oplus N(A+I)$, where $N(A-I)$ and $N(A+I)$ denote the eigenspaces of 1 and -1, respectively.

(e) A is diagonalizable and similar to $\text{diag}(1,\ldots,1,-1,\ldots,-1)$.

Solution

(a) 將 $A^2-I=0$ 寫爲 $(A+I)(A-I)=0$, 對於任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, 就有 $(A+I)(A-I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 亦即 $(A-I)\mathbf{x} \in N(A+I)$, 故得 $C(A-I) \subseteq N(A+I)$。

(b) 由 (a), $\dim C(A-I) \leq \dim N(A+I)$, 利用秩–零度定理 $\text{rank}(A+I)+\dim N(A+I)=n$, 推得 $\text{rank}(A-I)+\text{rank}(A+I) \leq n$。另一方面, 因爲 $A^2=AA=I$, 即 $A^{-1}=A$, A 爲可逆矩陣, 就有

$$n=\text{rank}A=\text{rank}((A+I)+(A-I)) \leq \text{rank}(A+I)+\text{rank}(A-I)。$$

上面不等式成立的原因在於 $C(X+Y) \subseteq C(X)+C(Y)$。合併二不等式即證得所求。

(c) 考慮特徵方程 $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$, 左乘 A 立得 $A^2\mathbf{x}=\lambda^2\mathbf{x}$, 但 $A^2\mathbf{x}=I\mathbf{x}=\mathbf{x}$, 故知 $\lambda^2=1$, 亦即 $\lambda=\pm 1$。

(d) 設 $\mathbf{x}$ 爲任意 n 維向量, 就有

$$\mathbf{x}=\frac{1}{2}(\mathbf{x}+A\mathbf{x})+\frac{1}{2}(\mathbf{x}-A\mathbf{x})=\frac{1}{2}(I+A)\mathbf{x}+\frac{1}{2}(I-A)\mathbf{x}。$$

然而 $(I-A)(I+A)=(I+A)(I-A)=0$, 所以 $\frac{1}{2}(I+A)\mathbf{x} \in N(A-I)$, $\frac{1}{2}(I-A)\mathbf{x} \in N(A+I)$, 由此可推論 $\mathbf{x} \in N(A-I)+N(A+I)$, 也就是 $\mathbb{C}^n=N(A-I)+N(A+I)$。對應相異特徵值的特徵空間不交集, $N(A-I) \cap N(A+I)=\{\mathbf{0}\}$, 也就證明了 $\mathbb{C}^n=N(A-I) \oplus N(A+I)$。

(e) 由 (d) 可知 A 有完整的 n 個線性獨立特徵向量, 故 A 可對角化, 由 (c) 可知 A 相似於特徵值構成的主對角矩陣 $\mathrm{diag}(1,\ldots,1,-1,\ldots,-1)$。 □

Problem 179

Let A be an $n\times n$ matrix. Prove that $A^n=0$ if and only if $\mathrm{trace}A^k=0$, $k=1,2,\ldots,n$.

Solution

令 A 的特徵值為 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, 則 A^n 的特徵值為 $\lambda_1^n,\ldots,\lambda_n^n$, 但 $A^n=0$, 推知 $\lambda_i=0$, $i=1,\ldots,n$, 故 A 為冪零 (nilpotent) 矩陣。對於所有 $k\geq 1$, 冪矩陣 A^k 的特徵值也全為零, 推得 $\mathrm{trace}A^k=0$。再看相反方向陳述, $\mathrm{trace}A^k=0$, $k=1,\ldots,n$, 可表示為下列方程組:

$$\begin{aligned}\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n&=0\\ \lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2&=0\\ &\vdots\\ \lambda_1^n+\lambda_2^n+\cdots+\lambda_n^n&=0,\end{aligned}$$

或寫成矩陣形式:

$$\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\ \lambda_1&\lambda_2&\cdots&\lambda_n\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \lambda_1^{n-1}&\lambda_2^{n-1}&\cdots&\lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}。$$

上式 n 階方陣為 Vandermonde 矩陣, 若所有特徵值彼此相異, 則 Vandermonde 矩陣是可逆的, 因此僅存在平凡解 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$, 產生矛盾, 故推論必有相重根。在不失一般性情況下, 設 $\lambda_1=\lambda_2$, 且其餘特徵值彼此相異, 於是有下列 $(n-1)$ 階方程式:

$$\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\ \lambda_2&\lambda_3&\cdots&\lambda_n\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \lambda_2^{n-2}&\lambda_3^{n-2}&\cdots&\lambda_n^{n-2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\lambda_2\\ \lambda_3\\ \vdots\\ \lambda_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}。$$

按同樣方式推得 λ_i, $i \geq 2$, 必包含相重根, 繼續下去可歸納出所有特徵值相等, 也就證明 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$。 $\square$

Problem 180

Let $A = [a_{ij}]$ be an $n \times n$ matrix with eigenvalues $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Prove that

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2,$$

which is also called *Schur inequality*.

Solution

考慮 Schur 分解定理 $A = U^* T U$, 其中 $U^* = U^{-1}$, $T = [t_{ij}]$ 爲上三角形矩陣, $t_{ii} = \lambda_i$, 對於任一 $i = 1, \ldots, n$。利用 $A^*A = U^*T^*TU$, 故

$$\operatorname{trace}(A^*A) = \operatorname{trace}(U^*T^*TU) = \operatorname{trace}(T^*TUU^*) = \operatorname{trace}(T^*T)。$$

算出

$$\operatorname{trace}(A^*A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2$$

而且

$$\operatorname{trace}(T^*T) = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_i|^2 + \sum_{i<j} |t_{ij}|^2。$$

證得 Schur 不等式成立, 等號發生於 $t_{ij} = 0$, $i < j$, 亦即 T 爲主對角矩陣。 $\square$

Problem 181

Let A and B be $n \times n$ matrices and let $p_B(t) = \det(tI - B)$ be the characteristic polynomial of B. Prove that the matrix $p_B(A)$ is invertible if and only if A and B have no common eigenvalues.

Solution

令 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 爲方陣 A 的特徵值, 則 $p_B(A)$ 的特徵值爲 $p_B(\lambda_1), \ldots, p_B(\lambda_n)$。若對於所有 $i = 1, \ldots, n$, $p_B(\lambda_i) \neq 0$, 則 $p_B(A)$ 爲可逆矩陣, 換句話說, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 不得爲特徵多項式 $p_B(t)$ 的根, 亦即不能爲 B 的特徵值。 $\square$

Problem 182

Find an $n \times n$ matrix B with rational entries so that B is similar to

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1+i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix},$$

where $i = \sqrt{-1}$.

Solution

考慮由 $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0)$ 在線性變換 A 下產生的循環子空間 $\text{span}\{\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_1, A^2\mathbf{e}_1, \ldots\}$, 直接計算可得

$$\begin{aligned} A\mathbf{e}_1 &= e^{i\pi/4}\mathbf{e}_2 \\ A^2\mathbf{e}_1 &= e^{i\pi/4}(A\mathbf{e}_2) = e^{i\pi/4}(e^{i3\pi/4}\mathbf{e}_3) = e^{i4\pi/4}\mathbf{e}_3 \\ A^3\mathbf{e}_1 &= e^{i4\pi/4}(A\mathbf{e}_3) = e^{i4\pi/4}(e^{i5\pi/4}\mathbf{e}_4) = e^{i9\pi/4}\mathbf{e}_4 \\ A^4\mathbf{e}_1 &= e^{i9\pi/4}(A\mathbf{e}_4) = e^{i9\pi/4}(e^{i7\pi/4}\mathbf{e}_1) = e^{i16\pi/4}\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1\text{。} \end{aligned}$$

向量集 $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_1, A^2\mathbf{e}_1, A^3\mathbf{e}_1\}$ 可作爲 $\mathbb{C}^4$ 基底, 且

$$A(A^3\mathbf{e}_1) = 1\mathbf{e}_1 + 0 \cdot A\mathbf{e}_1 + 0 \cdot A^2\mathbf{e}_1 + 0 \cdot A^3\mathbf{e}_1\text{。}$$

方陣 A 參考基底 $\mathfrak{B}$ 的表示矩陣計算如下:

$$[A]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} [A\mathbf{e}_1]_{\mathfrak{B}} & [A^2\mathbf{e}_1]_{\mathfrak{B}} & [A^3\mathbf{e}_1]_{\mathfrak{B}} & [A^4\mathbf{e}_1]_{\mathfrak{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

此即所求之 B 矩陣。 $\square$

Problem 183

Let A be an $n \times n$ matrix. If $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ be respective right eigenvector and left eigenvector corresponding to a simple eigenvalue λ of A, i.e., the algebraic multiplicity of λ is 1, show that $\mathbf{y}^*\mathbf{x} \neq 0$.

Solution

設 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, λ 的相重數爲 1。利用 Schur 定理將 A 化簡爲分塊上三角形矩陣:

$$U^*AU = \begin{bmatrix} \lambda & * \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

其中 $U^* = U^{-1}$, U 的第一個行向量爲 $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$, B 爲 $n-1$ 階方陣, 且 λ 不爲 B 的特徵值。觀察出 $U^*AU\mathbf{e}_1 = \lambda\mathbf{e}_1$, 標準單位向量 $\mathbf{e}_1$ 爲特徵向量, 對應特徵值 λ。考慮

$$(U^*AU)^* = U^*A^*U = \begin{bmatrix} \overline{\lambda} & 0 \\ * & B^* \end{bmatrix}。$$

設 $U^*A^*U\mathbf{z} = \overline{\lambda}\mathbf{z}$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$。若 $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, 則

$$U^*A^*U\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ B^*\mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \overline{\lambda}\mathbf{w} \end{bmatrix},$$

得知 $\overline{\lambda}$ 爲 B^* 的特徵值, 也就是說, λ 爲 B 的特徵值, 這與原命題矛盾, 故 $\mathbf{z}$ 的第一個元必定不爲零, 就有

$$(U\mathbf{z})^*(U\mathbf{e}_1) = \mathbf{z}^*U^*U\mathbf{e}_1 = \mathbf{z}^*\mathbf{e}_1 \neq 0。$$

然而 $(U\mathbf{z})^*A = \lambda(U\mathbf{z})^*$ 且 $A(U\mathbf{e}_1) = \lambda(U\mathbf{e}_1)$, 這表示 $U\mathbf{z}$ 和 $U\mathbf{e}_1$ 分別爲 A 的左特徵向量和右特徵向量。因爲已經假設左特徵空間和右特徵空間維度皆爲 1, 必有 $\mathbf{y} = \alpha U\mathbf{z}$, $\alpha \neq 0$, 且 $\mathbf{x} = \beta U\mathbf{e}_1$, $\beta \neq 0$, 證得 $\mathbf{y}^*\mathbf{x} = \alpha\beta\mathbf{z}^*\mathbf{e}_1 \neq 0$。 □

二次型

Problem 184

Let $A = [a_{ij}]$ be an $n \times n$ complex matrix. The numerical range of A is defined by

$$W(A) = \{\mathbf{x}^* A\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

(a) Show that $W(A + cI) = W(A) + c$ for every $c \in \mathbb{C}$.

(b) Show that $W(cA) = cW(A)$ for every $c \in \mathbb{C}$.

(c) Explain why $a_{ii} \in W(A)$.

(d) Let λ be an eigenvalue of A. Explain why $\lambda \in W(A)$.

(e) Describe $W(A)$ if A is Hermitian.

Solution

(a) 直接計算 $\mathbf{x}^*(A + cI)\mathbf{x} = \mathbf{x}^* A\mathbf{x} + c\mathbf{x}^*\mathbf{x} = \mathbf{x}^* A\mathbf{x} + c$。

(b) 如 (a), $\mathbf{x}^*(cA)\mathbf{x} = c(\mathbf{x}^* A\mathbf{x})$。

(c) 設 $\mathbf{e}_i$ 爲標準單位向量, 其第 i 元等於 1, 其餘各元爲零, 則 $\mathbf{e}_i^* A\mathbf{e}_i = a_{ii} \in W(A)$。

(d) 考慮 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, 且 $\|\mathbf{x}\| = 1$, 則 $\mathbf{x}^* A\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\lambda\mathbf{x}) = \lambda \in W(A)$。

(e) Hermitian 矩陣 A 可分解爲 $A = U\Lambda U^*$, 其中 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $U^* = U^{-1}$, 則

$$\mathbf{x}^* A\mathbf{x} = \mathbf{x}^* U\Lambda U^*\mathbf{x} = \mathbf{z}^*\Lambda\mathbf{z} = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2,$$

上式中 $\mathbf{z} = U^*\mathbf{x}$。注意, $\|\mathbf{z}\|^2 = \|U^*\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^* UU^*\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2 = 1$, 因此 $\lambda_{\min} \leq \mathbf{z}^*\Lambda\mathbf{z} \leq \lambda_{\max}$, 其中 $\lambda_{\min} = \min_{i=1,\ldots,n} \lambda_i$, $\lambda_{\max} = \max_{i=1,\ldots,n} \lambda$。因爲 $W(A) = W(\Lambda)$, 推得 $\lambda_{\min} \leq W(A) \leq \lambda_{\max}$。 $\square$

Problem 185

Let

$$A = \begin{bmatrix} I & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix},$$

where I and B are n by n matrices. If B is nonsingular, determine the number of positive, negative, and zero eigenvalues of A.

Solution

給出的 A 是對稱矩陣, 其特徵值必爲實數。問題只要求得到特徵值的正負, 而非大小, 我們可以利用相合 (congruence) 變換來化簡對稱矩陣 A。若 S^{-1} 存在, 相合變換 S^TAS 不改變正特徵值總數, 負特徵值總數, 和零特徵值總數, 這個性質稱爲 Sylvester 慣性定律 (law of inertia)。實際做法是設計出可逆矩陣 S 使得 S^TAS 爲主對角分塊矩陣, 下爲一例,

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -B^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -B \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -B^TB \end{bmatrix}。$$

主對角分塊矩陣的特徵值由各主對角分塊組成, n 階單位矩陣 I 的特徵值全是 1, n 階對稱矩陣 $-B^TB$ 是負定矩陣。因爲 B 是可逆矩陣, 對於任意 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $B\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 就有

$$\mathbf{x}^T(-B^TB)\mathbf{x} = -(B\mathbf{x})^T(B\mathbf{x}) = -\|B\mathbf{x}\|^2 < 0。$$

負定矩陣的特徵值都小於零。所以, A 有 n 個正特徵值, n 個負特徵值。 □

Problem 186

Suppose A is symmetric positive semi-definite. Show that there exists a unique symmetric positive semi-definite matrix B such that $B^2 = A$.

Solution

設 A 爲 n 階對稱半正定方陣。將 A 對角化爲 $A = U\Lambda U^*$, 其中 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, 且 $U^*U = I$。令 $\Lambda^{\frac{1}{2}} = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$ 且 $B = U\Lambda^{\frac{1}{2}}U^*$, 顯然 B 是對稱半正定矩陣, 而且

$$B^2 = U\Lambda^{\frac{1}{2}}U^*U\Lambda^{\frac{1}{2}}U^* = U\Lambda U^* = A。$$

剩下只需要證明唯一性。假設 C 爲對稱半正定, 且 $C^2 = B^2 = A$。因爲 A 的特徵值等於 C 的特徵值平方, 故 C 必定可表示爲 $C = V\Lambda^{\frac{1}{2}}V^*$, $V^*V = I$。由 $C^2 = B^2$ 可得

$$V\Lambda V^* = U\Lambda U^*。$$

令 $W = U^*V$, 上式左乘 U^*, 右乘 V, 就有

$$W\Lambda = \Lambda W。$$

乘開比較各元得到 $W = I$, 亦即 $U = V$, 證得 B 是唯一的。 $\square$

Problem 187

Let A be an n by n real normal matrix. A matrix is called normal if $A^TA = AA^T$. Show that A and A^T have the same nullspace and column space, i.e., $N(A^T) = N(A)$ and $C(A^T) = C(A)$.

Solution

先證明 $N(A^T) \subseteq N(A)$。設 $\mathbf{x} \in N(A^T)$, 即 $A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 就有 $AA^T\mathbf{x} = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$, 故 $\mathbf{x} \in N(AA^T)$。已知 $A^TA = AA^T$, 因此 $\mathbf{x} \in N(A^TA)$, 即 $A^TA\mathbf{x} = \mathbf{0}$。計算 $\mathbf{x}^TA^TA\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^T(A\mathbf{x}) = \|A\mathbf{x}\|^2 = 0$, 推知 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$。使用同樣方式可以證得 $N(A) \subseteq N(A^T)$, 故 $N(A^T) = N(A)$。

接著證明 $C(A^T) \subseteq C(A)$。設 $\mathbf{x} \in C(A^T)$, 這表示存在 $\mathbf{y}$ 使得 $\mathbf{x} = A^T\mathbf{y}$。$A$ 是正規矩陣, 必定存在一正交矩陣 Q 使得 $A^T = AQ$, 因爲 $A^TA = (AQ)(Q^TA^T) = AQQ^TA^T = AA^T$。所以 $\mathbf{x} = A^T\mathbf{y} = AQ\mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in C(A)$。同樣道理可以證得 $C(A) \subseteq C(A^T)$, 故 $C(A^T) = C(A)$。 $\square$

Problem 188

Suppose A is a real symmetric positive definite. For every vector $\mathbf{x}$, show that

$$\mathbf{x}^TA^{-1}\mathbf{x} = \max_{\mathbf{y}} \left(2\mathbf{x}^T\mathbf{y} - \mathbf{y}^TA\mathbf{y}\right).$$

Solution

設 A 為 $n\times n$ 階對稱正定矩陣, 令 A 正交對角化為 $A=Q\Lambda Q^T$, 其中 $Q^T=Q^{-1}$, $\Lambda=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, 且每個 $\lambda_i>0$。令 $\mathbf{z}=Q^T\mathbf{x}$, 則

$$\mathbf{x}^TA^{-1}\mathbf{x}=\mathbf{x}^TQ\Lambda^{-1}Q^T\mathbf{x}=\mathbf{z}^T\Lambda^{-1}\mathbf{z}。$$

令 $\mathbf{w}=Q^T\mathbf{y}$, 最大化條件式亦可表示為

$$\max_{\mathbf{w}}\left(2\mathbf{z}^T\mathbf{w}-\mathbf{w}^T\Lambda\mathbf{w}\right)。$$

將上式展開, 使用正定矩陣性質 $\mathbf{v}^T\Lambda\mathbf{v}\geq 0$可得

$$\begin{aligned}2\mathbf{z}^T\mathbf{w}-\mathbf{w}^T\Lambda\mathbf{w}&=-\left(\mathbf{z}^T\Lambda^{-1}\mathbf{z}-2\mathbf{z}^T\mathbf{w}+\mathbf{w}^T\Lambda\mathbf{w}\right)+\mathbf{z}^T\Lambda^{-1}\mathbf{z}\\&=-(\Lambda^{-1}\mathbf{z}-\mathbf{w})^T(\mathbf{z}-\Lambda\mathbf{w})+\mathbf{z}^T\Lambda^{-1}\mathbf{z}\\&=-(\Lambda^{-1}\mathbf{z}-\mathbf{w})^T\Lambda(\Lambda^{-1}\mathbf{z}-\mathbf{w})+\mathbf{z}^T\Lambda^{-1}\mathbf{z}\\&\leq\mathbf{z}^T\Lambda^{-1}\mathbf{z},\end{aligned}$$

證畢。 □

Problem 189

Suppose A, B, and C are n by n real matrices. For each of the following statements, give an example.

(a) A and B have only positive eigenvalues, but AB has only negative eigenvalues.

(b) A, B, and C are positive definite, but ABC has only negative eigenvalues.

Solution

(a) 矩陣乘法是代數性質延伸最常出錯的地方，矩陣乘積的特徵值正負號變化就是一例。三角形方陣的特徵值即為其主對角元, 可以考慮

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}。$$

A 和 B 的特徵值皆爲 1, 1。計算 AB 得

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

解出特徵值 -1, -1。

(b) 正定矩陣乘積未必有正特徵值, 關鍵在於非主對角元可以爲負值。利用正定矩陣的主子陣行列式都是正數, 考慮下面的正定矩陣

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}。$$

計算其乘積可得

$$ABC = \begin{bmatrix} -45 & 24 \\ -55 & 28 \end{bmatrix},$$

其特徵值爲 -5, -12。此例並顯示對稱矩陣乘積未必仍爲對稱。 □

Problem 190

If A is a 3×3 symmetric matrix with eigenvalues $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Prove that if p, q are two eigenvalues of a 2×2 principal submatrix of A and $p \le q$, then

$$\lambda_1 \le p \le \lambda_2 \le q \le \lambda_3.$$

Solution

三階對稱矩陣 A 必可正交對角化爲 $A = Q\Lambda Q^T$, 其中 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $Q = [q_{ij}]$ 爲正交矩陣 (orthogonal matrix), $Q^T = Q^{-1}$。對於 $t \neq \lambda_i$, $i = 1, 2, 3$, $tI - A$ 是可逆的, 且

$$tI - A = Q(tI)Q^T - Q\Lambda Q^t = Q(tI - \Lambda)Q^T$$

其伴隨矩陣爲

$$\mathrm{adj}(tI - A) = \det(tI - A)(tI - A)^{-1}。$$

注意, 對稱矩陣的主子陣亦爲對稱矩陣。設 B 爲 A 的左上 2×2 階主子陣, 其特徵值爲 p, q, 且 $p \le q$。利用第一式計算 $(tI - A)^{-1} = Q(tI - \Lambda)^{-1}Q^T$ 的 $(3, 3)$ 元:

$$\frac{q_{31}^2}{t - \lambda_1} + \frac{q_{32}^2}{t - \lambda_2} + \frac{q_{33}^2}{t - \lambda_3}。$$

利用第二式也可得 $(tI-A)^{-1}$ 的 $(3,3)$ 元, 即 $(\operatorname{adj}(tI-A))_{33}/\det(tI-A)$, 也就是 $\det(tI_2-B)/\det(tI-A)$, 因此有

$$\frac{\det(tI_2-B)}{\det(tI-A)}=\frac{q_{31}^2}{t-\lambda_1}+\frac{q_{32}^2}{t-\lambda_2}+\frac{q_{33}^2}{t-\lambda_3}。$$

因爲 p,q 是 $\det(tI_2-B)$ 的二根, 將上面的特徵多項式因式分解, 就有

$$\frac{(t-p)(t-q)}{(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)(t-\lambda_3)}=\frac{q_{31}^2}{t-\lambda_1}+\frac{q_{32}^2}{t-\lambda_2}+\frac{q_{33}^2}{t-\lambda_3}。$$

設 ϵ 爲正數, 若 $t=\lambda_3+\epsilon$, 上式等號右邊爲正, 表示 p,q 在 $\lambda_3+\epsilon$ 同側; 若 $t=\lambda_1-\epsilon$, 上式等號右邊爲負, p 和 q 也在 $\lambda_1-\epsilon$ 同側。令 $\epsilon\to 0$, 綜合上面兩個結果可知 $\lambda_1\le p\le q\le\lambda_3$, 剩下只要證明 p,q 在 λ_2 的兩側即可。同樣考慮 $t=\lambda_2+\epsilon$, 當 $\epsilon\to 0$, 等號右側爲正, 等號左側分母爲負, 所以分子必須也爲負, 這說明 $p\le\lambda_2\le q$。 □

Problem 191

Let A be an $n\times n$ real symmetric positive definite matrix. If B is an $n\times m$ real matrix, show that B^TAB is positive semidefinite. Also show that $\operatorname{rank}(B^TAB)=\operatorname{rank}B$, so that B^TAB is positive definite if and only if B has rank m.

Solution

首先, 不難驗證 B^TAB 是對稱的。已知 A 是正定矩陣, 對於任意 m-維實數向量 $\mathbf{x}$, 我們有 $\mathbf{x}^TB^TAB\mathbf{x}=(B\mathbf{x})^TA(B\mathbf{x})\ge 0$, 因此得知 B^TAB 是半正定矩陣。上式的等號發生於 $B\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 所以如果 $B\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, 必有 $\mathbf{x}^TB^TAB\mathbf{x}>0$。

注意, B 是 $n\times m$ 階矩陣, B^TAB 是 $m\times m$ 階矩陣。如果能證明 B^TAB 和 B 有相同的零空間, 根據秩–零度定理, 便有 $\operatorname{rank}(B^TAB)=\operatorname{rank}B$。若 $B\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 很明顯, $B^TAB\mathbf{x}=\mathbf{0}$; 反之, 若 $B^TAB\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 則 $\mathbf{x}^TB^TAB\mathbf{x}=0$, 由前面結果推知 $B\mathbf{x}=\mathbf{0}$。最後我們證明若 $\operatorname{rank}B=m$ 則 B^TAB 是正定。若 $\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}(B^TAB)=m$, B^TAB 是滿秩, 所有特徵値皆不爲零, 因此是正定矩陣, 反向陳述也同樣成立。 □

Problem 192

Let A be an $n\times n$ real symmetric positive semidefinite matrix and $\mathbf{x}$ be an n-dimensional real vector. Show that $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}=0$ if and only if $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Conclude that an $n \times n$ positive semidefinite matrix has rank n if and only if it is positive definite.

Solution

考慮下面的二次多項式

$$p(t) = (\mathbf{x} + t\mathbf{y})^T A(\mathbf{x} + t\mathbf{y}),$$

其中 t 爲實數。已知 A 是半正定, 因此對於任意 t, $p(t) \geq 0$。將上式乘開, 因爲 A 是對稱矩陣, $A^T = A$, 就有

$$p(t) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + 2t\mathbf{y}^T A\mathbf{x} + t^2\mathbf{y}^T A\mathbf{y}。$$

計算微分

$$\frac{dp}{dt} = 2\mathbf{y}^T A\mathbf{x} + 2t\mathbf{y}^T A\mathbf{y}。$$

若常數項 $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0$, 便有 $p(0) = 0$。二次多項式有唯一極值, 所以當 $t = 0$, $\frac{dp}{dt} = 0$。這指出 $\mathbf{y}^T A\mathbf{x} = 0$, 此式對於任意 $\mathbf{y}$ 都成立, 故必定有 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$。相反方向的推論十分明顯, 若 $A\mathbf{x} = 0$, 則 $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0$。若半正定矩陣 A 是滿秩, $\text{rank}A = n$, 則零空間 $N(A)$ 僅包含零向量, 所以對於 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 有 $A\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 使用上述結果得知 $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$, 反向陳述亦同。□

Problem 193

Let A be an $n \times n$ matrix. Show that A^*A and AA^* are unitarily similar, i.e., there exists a unitary matrix Q such that

$$AA^* = QA^*AQ^*.$$

Note that Q is unitary if $QQ^* = Q^*Q = I$.

Solution

令 A 的奇異值分解爲 $A = U\Sigma V^*$, 其中 Σ 爲一 $n \times n$ 階實主對角矩陣, U 和 V 爲 $n \times n$ 階么正 (unitary) 矩陣。計算

$$A^*A = V\Sigma U^*U\Sigma V^* = V\Sigma^2 V^*$$

且

$$AA^* = U\Sigma V^* V \Sigma U^* = U\Sigma^2 U^* = (UV^*)(V\Sigma^2 V^*)VU^* = Q(A^*A)Q^*,$$

其中 $Q = UV^*$ 是么正矩陣, 因爲 $QQ^* = UV^*VU^* = UU^* = I$。 $\square$

Problem 194

Find a 3×3 real symmetric matrix A such that the eigenvalues of A are $1, 1$, and -1, and $(1,1,1)$ and $(2,1,1)$ are eigenvectors corresponding to the eigenvalue 1.

Solution

令 $\mathbf{x}$ 爲對應特徵值 -1 的特徵向量。因爲實對稱矩陣對應相異特徵值的特徵向量互爲正交, 可知 $\mathbf{x} \perp \operatorname{span}\{(1,1,1)^T, (2,1,1)^T\}$。令

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

則 $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 解出 $\mathbf{x} = \alpha(0,1,-1)^T$, 故對應特徵值 $1, 1$, 和 -1 的特徵向量分別是 $(1,1,1)^T$, $(2,1,1)^T$, 和 $(0,1,-1)^T$。寫出對角化表達式, 可得

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}。$$

$\square$

Problem 195

Let A, B be $n\times n$ matrices. If A is Hermitian and positive semidefinite, prove that $A^2B = B^2A$ if and only if $AB = BA$.

Solution

因爲 A 是 Hermitian 且正定, 故可對角化爲 $A = UDU^*$, 其中 U 是么正 (unitary) 矩陣, $U^*U = UU^* = I$, 且 $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_j \geq 0$。將分解式代入 $A^2B = B^2A$, 就有 $UD^2U^*B = BUD^2U^*$, 等號兩邊左乘 U^*, 右乘 U, 可得 $D^2(U^*BU) =$

$(U^*BU)D^2$。令 $C=[c_{ij}]=U^*BU$, 就有 $D^2C=CD^2$。若能證明 $DC=CD$, 即 $D(U^*BU)=(U^*BU)D$, 左乘 U, 右乘 U^*, 即證得 $AB=BA$。下面證明 $DC=CD$: 展開 $D^2C=CD^2$, 比較等號兩邊 (i,j) 元, 可知 $\lambda_i^2c_{ij}=c_{ij}\lambda_j^2$。若 $c_{ij}\neq 0$, 則 $\lambda_i=\lambda_j$, 即知 $\lambda_ic_{ij}=c_{ij}\lambda_j$。若 $c_{ij}=0$, 同樣有 $\lambda_ic_{ij}=c_{ij}\lambda_j=0$。因此證明 $DC=CD$。 $\square$

Problem 196

Let A be a 5×4 real matrix. If A has nonzero singular values $1,2,3,4$, determine the value for each of the following functions.

(a) $\det(A^TA)$

(b) $\operatorname{trace}(AA^T)$

(c) $\dim N(AA^T)$

(d) $\max\limits_{\|\mathbf{x}\|=1}\|A\mathbf{x}\|$

Solution

設 A 的奇異値分解爲 $A=U\Sigma V^T$, 其中 $UU^T=U^TU=I_5$, $VV^T=V^TV=I_4$,

$$\Sigma=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}。$$

將奇異値分解代入計算 A^TA 和 AA^T, 得到以下結果:

$$\begin{aligned}A^TA&=(U\Sigma V^T)^T(U\Sigma V^T)=V\Sigma^TU^TU\Sigma V^T=V\Sigma^T\Sigma V^T\\AA^T&=(U\Sigma V^T)(U\Sigma V^T)^T=U\Sigma V^TV\Sigma^TU^T=U\Sigma\Sigma^TU^T,\end{aligned}$$

其中

$$\Sigma^T\Sigma = \begin{bmatrix} 4^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1^2 \end{bmatrix}, \quad \Sigma\Sigma^T = \begin{bmatrix} 4^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

(a)

$$\begin{aligned} \det(A^TA) &= \det(V\Sigma^T\Sigma V^T) = (\det V)\det(\Sigma^T\Sigma)(\det V^T) \\ &= \det(\Sigma^T\Sigma) = 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2 = 576。\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \text{trace}(AA^T) &= \text{trace}(U\Sigma\Sigma^TU^T) = \text{trace}(\Sigma\Sigma^TU^TU) \\ &= \text{trace}(\Sigma\Sigma^T) = 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 0 = 30。\end{aligned}$$

(c) 利用秩–零度定理, 可知 $\text{rank}(AA^T) + \dim N(AA^T) = 5$。因爲 U 是實正交矩陣, 因此可逆, 即知

$$\text{rank}(AA^T) = \text{rank}(U\Sigma\Sigma^TU^T) = \text{rank}(\Sigma\Sigma^T) = 4。$$

所以, $\dim N(AA^T) = 5 - 4 = 1$。

(d) 利用奇異值分解寫出

$$\begin{aligned} \|A\mathbf{x}\|^2 &= (A\mathbf{x})^T(A\mathbf{x}) = \mathbf{x}^TA^TA\mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^TV\Sigma^T\Sigma V^T\mathbf{x} = \mathbf{z}^T\Sigma^T\Sigma\mathbf{z}, \end{aligned}$$

上面令 $\mathbf{z} = V^T\mathbf{x}$, 就有 $\|\mathbf{z}\|^2 = \mathbf{z}^T\mathbf{z} = \mathbf{x}^TVV^T\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1$, 因此原問題又等價於計算

$$\max_{\|\mathbf{z}\|=1} \sqrt{\mathbf{z}^T\Sigma^T\Sigma\mathbf{z}}。$$

令 $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)^T$, 且 $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 1$, 可得

$$\mathbf{z}^T\Sigma^T\Sigma\mathbf{z} = 4^2z_1^2 + 3^2z_2^2 + 2^2z_3^2 + 1^2z_4^2 \leq 4^2(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2) = 4^2,$$

等號發生於 $\mathbf{z} = (1, 0, 0, 0)^T$。所以, $\max_{\|\mathbf{x}\|=1}\|A\mathbf{x}\| = 4$。 □

Problem 197

Let A and B be $n \times n$ real symmetric positive definite matrices. Find a nonzero vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ that minimizes

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T B \mathbf{x}}.$$

What is the minimum value of $f(\mathbf{x})$?

Solution

實對稱正定矩陣 B 的特徵值 $\lambda_i(B)$ 皆爲正實數, 且 B 可正交對角化爲 $B = QDQ^T$, 其中 $D = \operatorname{diag}(\lambda_1(B), \ldots, \lambda_n(B))$, Q 是實正交矩陣滿足 $Q^T = Q^{-1}$。令 $D^{1/2} = \operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1(B)}, \ldots, \sqrt{\lambda_n(B)}\right)$, 則 B 可分解爲

$$B = QD^{1/2}Q^TQD^{1/2}Q^T = CC = C^TC。$$

上式中 $C = QD^{1/2}Q^T$ 是實對稱正定矩陣, 因此可逆。令 $\mathbf{y} = C\mathbf{x}$, 改寫 f 如下:

$$\frac{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T C^T C \mathbf{x}} = \frac{(C^{-1}\mathbf{y})^T A (C^{-1}\mathbf{y})}{\mathbf{y}^T \mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y}^T C^{-1} A C^{-1} \mathbf{y}}{\mathbf{y}^T \mathbf{y}}。$$

令 $H = C^{-1}AC^{-1}$, 現在問題變成求 $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ 使 $\frac{\mathbf{y}^T H \mathbf{y}}{\mathbf{y}^T \mathbf{y}}$ 最小。因爲 H 也是實對稱正定矩陣, 故可正交對角化爲 $H = U\Lambda U^T$, 其中 $U = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix}$ 是實正交矩陣, $\mathbf{u}_i$ 是對應特徵值 $\lambda_i(H)$ 的特徵向量, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1(H), \ldots, \lambda_n(H))$。在不失一般性的原則下, 假設 $\lambda_1(H) \geq \cdots \geq \lambda_n(H) > 0$, 令 $\mathbf{z} = U^T\mathbf{y}$, 因爲 $UU^T = I$, 就有

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{y}^T H \mathbf{y}}{\mathbf{y}^T \mathbf{y}} &= \frac{\mathbf{y}^T U \Lambda U^T \mathbf{y}}{\mathbf{y}^T U U^T \mathbf{y}} = \frac{\mathbf{z}^T \Lambda \mathbf{z}}{\mathbf{z}^T \mathbf{z}} \\
&= \frac{\lambda_1(H) z_1^2 + \cdots + \lambda_n(H) z_n^2}{z_1^2 + \cdots + z_n^2} \\
&\geq \frac{\lambda_n(H)(z_1^2 + \cdots + z_n^2)}{z_1^2 + \cdots + z_n^2} = \lambda_n(H)。
\end{aligned}$$

當 $\mathbf{y} = \mathbf{u}_n$, 亦即 $\mathbf{y}$ 爲對應 H 的最小特徵值 $\lambda_n(H)$ 的單位長度特徵向量, 這時 $\mathbf{z} = U^T\mathbf{u}_n = (0, \ldots, 0, 1)^T$, 即有 $\frac{\mathbf{y}^T H \mathbf{y}}{\mathbf{y}^T \mathbf{y}} = \lambda_n(H)$。所以, 當 $\mathbf{x} = C^{-1}\mathbf{u}_n$, 函數 f 有最小值 $\lambda_n(H)$。最後將特徵方程 $H\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ 化簡。使用 $H = C^{-1}AC^{-1}$, $\mathbf{x} = C^{-1}\mathbf{u}$, 就有 $C^{-1}A\mathbf{x} = \lambda C\mathbf{x}$, 上式左乘 C 即得 $A\mathbf{x} = \lambda C^2\mathbf{x} = \lambda B\mathbf{x}$, 再左乘 B^{-1}, 導出

$$B^{-1}A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}。$$

換句話說, 當 $\mathbf{x}$ 爲對應 $\lambda_n(B^{-1}A) = \lambda_n(H)$ 的特徵向量時, f 有最小值 $\lambda_n(B^{-1}A)$。□

Problem 198

Let A and B be $n \times n$ positive semidefinite matrices. Show that

$$C(AB) \cap N(AB) = \{\mathbf{0}\},$$

where $C(AB)$ and $N(AB)$ are the column space and nullspace of AB, respectively. If $B = I$, it proves $C(A) \cap N(A) = \{\mathbf{0}\}$.

Solution

令 $\mathbf{x} \in C(AB) \cap N(AB)$, 則存在 $\mathbf{y}$ 使得 $\mathbf{x} = AB\mathbf{y}$ 且 $AB\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 合併兩式就有 $ABAB\mathbf{y} = \mathbf{0}$。等號左乘 $\mathbf{y}^*B$, 半正定矩陣 B 可分解爲 $B = B^{1/2}B^{1/2}$, $B^{1/2}$ 也是半正定, 即得

$$0 = \mathbf{y}^*BABAB\mathbf{y} = (\mathbf{y}^*BAB^{1/2})(B^{1/2}AB\mathbf{y}) = \|B^{1/2}AB\mathbf{y}\|^2。$$

這指出 $B^{1/2}AB\mathbf{y} = \mathbf{0}$, 左乘 $B^{1/2}$, 就有 $BAB\mathbf{y} = \mathbf{0}$。再運用上述做法, 左乘 $\mathbf{y}^*$, 利用 $A = A^{1/2}A^{1/2}$ 可知

$$0 = \mathbf{y}^*BAB\mathbf{y} = (\mathbf{y}^*BA^{1/2})(A^{1/2}B\mathbf{y}) = \|A^{1/2}B\mathbf{y}\|^2,$$

推論 $A^{1/2}B\mathbf{y} = \mathbf{0}$, 左乘 $A^{1/2}$, 即得 $AB\mathbf{y} = \mathbf{0}$, 因此證明 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$。 □

Problem 199

Let A be an $n \times n$ matrix with singular values σ_i, $i = 1, \ldots, n$. Note that the nonnegative square roots of the eigenvalues of A^*A are called the singular values of A. Show that

(a) A^* has the same singular values as A.

(b) UAV has the same singular values as A, where U and V are $n \times n$ unitary matrices.

(c) $(A^*A)^{\frac{1}{2}} = UA$ for some unitary matrix U.

Solution

(a) 因爲矩陣乘積 XY 和 YX 有相同的特徵值, A^*A 和 AA^* 也有相同的特徵值, 但 A 和 A^* 的奇異值分別爲 A^*A 和 AA^* 的特徵值的非負平方根, 故 A^* 和 A 有相同的奇異值。

(b) 考慮

$$(UAV)^*(UAV) = V^*A^*U^*UAV = V^*(A^*A)V,$$

得知 $(UAV)^*(UAV)$ 相似於 A^*A, 所以此二矩陣有相同的特徵值, 也就表明 UAV 和 A 有相同的奇異值。

(c) 設 A 的奇異值分解爲 $A = W\Sigma V^*$, W 和 V 爲 $n \times n$ 夭正 (unitary) 矩陣, $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, 則

$$A^*A = (V\Sigma W^*)(W\Sigma V^*) = V\Sigma^2 V^*。$$

將 A 的奇異值分解代入下式,

$$(UA)^2 = UAUA = U(W\Sigma V^*)U(W\Sigma V^*) = (UW)\Sigma(V^*UW)\Sigma V^*。$$

令么正矩陣 $U = VW^*$, 就有 $V^*UW = I$, $UW = V$, 因此 $A^*A = (UA)^2$, 即得證。 $\square$

Problem 200

Let A be an $n \times n$ matrix. Show that $A = 0$ if and only if $\mathbf{x}^*A\mathbf{x} = 0$ for all $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$.

Solution

若 $A = 0$, 明顯地, 任意 $\mathbf{x}$ 都有 $\mathbf{x}^*A\mathbf{x} = 0$。下面證明反向陳述, 將 n 維標準單位向量 $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$, 取代 $\mathbf{x}$, 可得 $\mathbf{e}_i^*A\mathbf{e}_i = a_{ii} = 0$。再令 $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i + c\mathbf{e}_j$, $i \neq j$, $c \in \mathbb{C}$, 就有

$$(\mathbf{e}_i + c\mathbf{e}_j)^*A(\mathbf{e}_i + c\mathbf{e}_j) = a_{ii} + ca_{ij} + \bar{c}a_{ji} + c\bar{c}a_{jj} = 0。$$

由前面得到結果 $a_{ii} = a_{jj} = 0$, 即知 $ca_{ij} + \bar{c}a_{ji} = 0$, 但 c 爲任意複數, 推論 $a_{ij} + a_{ji} = 0$ 且 $a_{ij} - a_{ji} = 0$, 故得 $a_{ij} = a_{ji} = 0$。 $\square$

参考文獻

台大圖書館各校研究所入學試題連結網站: http://www.lib.ntu.edu.tw/exam/default.htm

美國麻省理工學院線性代數教學網站: http://web.mit.edu/18.06/www/

參考書目:

H. Anton, C. Rorres, *Elementary Linear Algebra*, 8th ed., John Wiley & Sons, New York, 2000.

S. H. Friedberg, A. J. Insel, and L. E. Spence, *Linear Algebra*, 4th ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2003.

P. R. Halmos, *Finite-Dimensional Vector Spaces*, Springer-Verlag, New York, 1958.

R.A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, New York, 1985.

B. Jacob, *Linear Algebra*, W.H. Freeman and Company, New York, 1990.

D.C. Lay, *Linear Algebra and its Applications*, 3rd ed., Pearson, New York, 2006.

S. J. Leon, *Linear Algebra with Applications*, 5th ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1998.

C. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 2000.

G. Strang, *Linear Algebra and its Applications*, 3rd ed., Harcout Brace Jovanovich, San Diego, CA, 1988.

G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, 3rd ed., Wellesley-Cambridge, Wellesley, MA, 2003.

F. Zhang, *Linear Algebra: Challenging Problems for Students*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1996.

F. Zhang, *Matrix Theory: Basic Results and Techniques*, Springer-Verlag, New York, 1999.