CH2、關係與函數

關係、鴿籠原理與計數問題

目錄：

2.1 關係

A={1, 2, 3}, B={a, b}

R1 = {(1, a), (2, a), (2, b), (3, b)}

R2 = {(3, b)}

R3 = {}

定義：

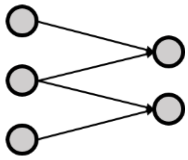
A, B：Set，R ⊆ A×B，稱 R 為 A 至 B 之一關係 Relation

Note：

1. (a, b)∈R，也記作 aRb
2. R⊆A×B ⇔ R∈ P(A×B)
3. |A|=m, |B|=n, A 至 B 之 R 的個數為 $2^{m\times n}$

*表示法：

1. 圖形



2. 矩陣

MR 為 0/1 Matrix，又稱 Boolean Matrix

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

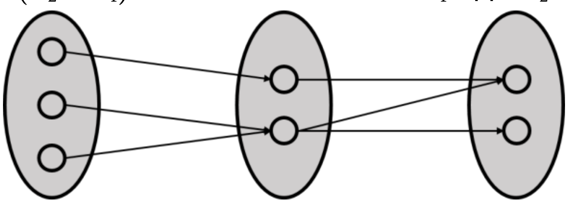
*運算

合成：

$R_1 \subseteq A\times B$, $R_2 \subseteq B\times C$

合成：$R_2 \circ R_1 \subseteq A\times C$ by

$a(R_2 \circ R_1)c \Leftrightarrow \exists\, b\in B \ni aR_1b \cap bR_2c \Leftrightarrow a(R_1 \cdot R_2)c$



$R_2 \circ R_1 = \{(a_1, c_1), (a_1, c_3), (a_3, c_1), (a_3, c_3)\}$

$M_{R1}=$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$M_{R2}=$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$M_{R1} \cdot M_{R2}=$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(其中 a_{11} 視為 1)

定理：

$M_{R2 \circ R1}=M_{R1} \cdot M_{R2}$

例(99 台大)：

$A=\{a, b, c, d\}, R \subseteq A\times A$

$R=\{(a, c), (b, d), (d, a)\}$，求 $R^3=R \circ R \circ R$

$M_R=$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$M_{R^3}=$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$\Longrightarrow R^3=\{(b, c)\}$

定理：

$R_1 \subseteq A\times B, R_2 \subseteq B\times C, R_3 \subseteq C\times D$

$\Longrightarrow (R_3 \circ R_2) \circ R_1 = R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$

定義：

$R \subseteq A\times B$，R 之 Inverse

$R^{-1} \subseteq A\times B$ by $bR^{-1}a \Leftrightarrow aRb$

$R = \{(1, a), (2, a), (2, b), (3, b)\}$

$R^{-1}=\{(a, 1), (a, 2), (b, 2), (b, 3)\}$

$M_R=$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$M_{R-1}=$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Note：

1. $M_{R^{-1}} = (M_R)^T$
2. $(R^{-1})^{-1} = R$
3. 補關係：$R \subseteq A \times B$，R 之 Complement：

   $R = \{(1, a), (2, a), (2, b), (3, b)\}$

   $\cancel{R} = \{(3, a), (1, b)\} = (A \times B) - R$ *//(A×B)稱為全關係*

Note：

1. $R = (A \times B) - R$ 為 R 之補集
2. $\cancel{R^{-1}} = (\cancel{R})^{-1}$
3. $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$
4. $\cancel{(R_1 \cup R_2)} = \cancel{R_1} \cap \cancel{R_2}$
5. $\cancel{(R_1 \cap R_2)} = \cancel{R_1} \cup \cancel{R_2}$

2.2 基本關係

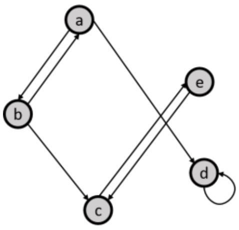
定義：

R ⊆ A×A，稱 R 為 A 上之 Binary Relation

例(99 交大)：

A={a, b, c, d, e}, R={(a, b), (a, d), (b, a), (b, c), (c, e), (d, d), (e, c)}

R ⊆ R×R



$M_R=$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

反身性與非反身性：

定義：

R ⊆ A×A，A={1, 2, 3}

1. R 具反身性 Reflexive ⇔ ∀ a∈A, aRa
   R={(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 3)}
2. R 具非反身性 Irreflexive ⇔ ∀ a∈A, aRa
   R={(1, 2), (2, 3)}

Note(9 個)：

|A|=n

1. A 上之 Binary Relation 個數為何？
2. A 上之 Reflexive 個數為何？
3. A 上之 Irrecflexive 個數為何？

1. 2^{n^2}：a_{ij} 可為任意 0 or 1
2. 2^{n^2-n}：對角線 a_{ii} 為 1
3. 2^{n^2-n}：對角線 a_{ii} 為 0

對稱性、非對稱性、反對稱性：
定義：
1. R 具對稱性 Symmetric ⇔ ∀ a, b∈A, aRb ⟹ bRa
   R={(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)}　　　*//可以有對應元素不存在*
2. R 具非對稱性 Asymmetric ⇔ ∀ a, b∈A ⟹ b~~R~~a
   R={(1, 2), (2, 3)}　　　*//不可有自己對到自己*
3. R 具反對稱性 Antisymmetric ⇔ ∀ a, b∈A, aRb 且 bRa ⟹ a=b
   a≠b ⟹ aRb 與 bRa 不同時存在

Note(10 個)：
1. A 上之 Symmetric Relation 個數為何 ?
2. A 上之 Asymmetric Relation 個數為何 ?
3. A 上之 Antisymmetric Relation 個數為何 ?

1. $2^{n(n+1)/2}$ *：上/下三角的部分決定 0 or 1*
2. $3^{n(n-1)/2}$ *：對角為 0，對應點可為(0, 0), (1, 0)與(0, 1)三種可能，故底數為 3*
3. $2^n \times 3^{n(n-1)/2}$ *：對角線隨意×對應點有三種可能(第 2.題)*

遞移性：
定義：
R ⊆ A×A，R 具遞移性 Transitive ⇔ aRb ⋂ bRc ⟹ aRc

例(4 個)：|A|=n
1. A 上具 Reflexive 與 Symmetric 的個數為何 ?
2. A 上具 Reflexive 且不具 Symmetric 的個數為何 ?
3. A 上不具 Reflexive 且不具 Irreflexive 的個數為何 ?

1. $2^{n(n-1)/2}$
2. 2^{n^2-n}-$2^{n(n+1)/2}$ *：Reflexive – (Reflexive⋂ Symmetric)*
3. $(2^n-2)\times 2^{n^2-n}$ *：對角線不全為 0、也不全為 1：2^n-2；上下隨意*

例：
1. A=$\mathbb{Z}^+$, R={(a, b) | b-a 為正奇數}
2. A=$\mathbb{Z}$, (x, y)∈R ⇔ $x=y^2$
3. A=$\mathbb{Z}$, (a, b) ⇔ ab≤0
4. A=$\mathbb{R}$, xRy ⇔ x=y±1
5. A=$\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$, (a, b)R(c, d) ⇔ a≤c

	Reflexive	*Symmetric*	*Antisymmetric*	*Transitive*
1			*O*	
2			*O*	
3		*O*		
4		*O*		
5	*O*			*O*

Note：

1. R, S 具 Reflexive $\Longrightarrow$ $R \cap S$, $R \cup S$ 具 Reflexive
2. R, S 具 Symmetric $\Longrightarrow$ $R \cap S$, $R \cup S$ 具 Symmetric
3. R, S 具 Transtive $\Longrightarrow$ $R \cap S$ 具 Reflexive，但 $R \cup S$ 不具 Transitive

2.3 等價關系 → 分堆

定義：

$R \subseteq A \times A$，若 R 具 Reflexive, Symmetric 與 Transitive，稱 R 為 A 上之 Equivalent Relation

A={1, 2, 3, 4}

R={ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (1, 4), (4, 1),
(2, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 2), (3, 4), (4, 3)}

定義：

$R \subseteq A \times A$ 為一 Equivalent Relation，$a \in A$

$[a] = \{x \mid xRa\}$稱為 a 之等價包 Equivalence Class

Lemma：

$R \subseteq A$，A 為一 Equivalent Relation，$a, b \in A$, $aRb \Longrightarrow [a]=[b]$

證明：

$\subseteq$：$\forall x \in [a]$	$\supseteq$：$\forall x \in [b]$
$\Longrightarrow xRa$	$\Longrightarrow xRb$
$\because aRb$	$\because aRb$, $\therefore bRa$
$\Longrightarrow xRa \Longrightarrow x \in [b]$	$\Longrightarrow xRa \Longrightarrow x \in [a]$

A={1, 2, 3, 4}, R={(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)}

[1] = {1, 2} = [2]

[3] = {3, 4} = [4]

P = {{1, 2}, {3, 4}}

定義：

1. $A_1, A_2, \ldots, A_k = A$ (Cover)
2. $A_i \cap A_j = \Phi, \forall i \neq j$ (Disjoint)，稱$\{A_1, \ldots, A_k\}$形成 A 之一 Partition，也記作 $A=A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$

定理(3 個)(96 輔大)：

$R \subseteq A \times A$ 為一 Equivalent Relation $\Longrightarrow P=\{[a] \mid a \in A\}$形成 A 之一分割

證明：

1. $\cup[a]=A$
2. Claim：$[a] \neq [b] \Longrightarrow [a] \cap [b]=\Phi$

反證法：

設$[a] \cap [b] \neq \Phi \Longrightarrow \exists x \in [a] \cap [b]$

$\Longrightarrow xRa$ 且 $xRb \Longrightarrow aRx$ 且 $xRb \Longrightarrow aRb \Longrightarrow [a]=[b]$

Equivalent Relation ⇔ 分割

A={1, 2, 3, 4}

R={ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1),
(2, 3), (3, 2), (4, 5), (5, 4)}

[1]={1, 2, 3}=[2]=[3]

A={1, 2, 3}∪{4, 5}為 R 所對應之分割

例(98 台大)：

A={1, 2, 3, 4, 5}

A={1, 3}∪{2, 4, 5}，求 R=？

R={(1, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 2), (4, 4), (5, 5), (2, 4), (4, 2), (2, 5), (5, 2), (4, 5), (5, 4)}

|R|=13

例(6 個)(98 中山)：

$|A|=30$，A 分割成 $A=A_1 \cup A_2 \cup A_3$

$|A_1|=|A_2|=|A_3|$，對應之 Equivalent Relation R，求|R|

$|A_1|=|A_2|=|A_3|=30/3=10$

$R=(A1\times A1)\cup(A2\times A2)\cup(A3\times A3)$

$|R|=10^2 + 10^2 + 10^2 = 300$

A={1, 2, 3}

R={(1, 1), (2, 2), (3, 3)} ⇔ {1}∪{2}∪{3}

R={(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (3, 3)} ⇔ {1, 2}∪{3}

定理(6 個)(96 交大)：

設 P_n 表示 n 個元素上之 Equivalent Relation 數 $\Longrightarrow P_n \sum C_i^{n-1}, P_0=1$

證明：令 $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，Pn 表 A 之相異分割數

若$|x|=1$，分割為 P_{n-1}

若$|x|=2$，分割為 $C_1^{n-1}P_{n-2}$

若$|x|=3$，分割為 $C_2^{n-1}P_{n-3}$

…

若$|x|=n$，分割為 $C_{n-1}^{n-1}P_0=1$

$\Longrightarrow P_n = C_0^{n-1}P_{n-1} + C_1^{n-1}P_{n-2} + \ldots + C_{n-1}^{n-1}P_0$

$= C_{n-1}^{n-1}P_{n-1} + C_{n-2}^{n-1}P_{n-2} + \ldots + C_0^{n-1}P_0$

例：

$P_0 = 1, P_1 = 1, P_2 = 2, P_3 = 5, P_4 = 15, P_5 = 52$

例(14 個)：

$n\in\mathbb{Z}^+$，在 $\mathbb{Z}$ 上定義 $\equiv_n$ by $a\equiv_n b \Leftrightarrow n|(a-b)$

1. 證：$\equiv_n$ is an equivalent relation
2. 求所有 Equivalent Class

1. 從定義

(a) Reflexive：$\forall a, b\in\mathbb{Z}$，$\because n|(a-a)$，$\therefore a\equiv_n a$

(b) Symmetric：$\forall a, b\in\mathbb{Z}$，設 $a\equiv_n b$，Claim：$b\equiv_n a$

$\Rightarrow n|(a-b) \Rightarrow n|(b-a) \Leftrightarrow b\equiv_n a$

(c) Transitive：$\forall a, b, c\in\mathbb{Z}$，設 $a\equiv_n b$, $b\equiv_n c$,，Claim：$a\equiv_n c$

$\Rightarrow n|(a-b), n|(b-c) \Rightarrow n|(a-b)+(b-c) \Rightarrow n|(a-c) \Rightarrow a\equiv_n c$

2. $[a]=\{x \mid x\equiv_n a\} = \{x \mid n(x-a)\} = \{x \mid x-a = nk, k\in\mathbb{Z}\} = \{x \mid x = nk+a\}$

$\therefore$共有 n 個相異之 Equivalent Class：[0], [1], ..., [n-1]，如 n=5：[0], [1], [2], [3], [4]

例(11 個)：

$A=\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$，在 A 上定義◊

$(a, b)\lozenge(c, d) \Leftrightarrow a+d = b+c$

1. 證：◊ is an equivalent relation？
2. Draw equivalent class

1. 從定義

(a) Reflexive：$\forall (a, b)\in A$，$a+b = b+a \Rightarrow (a, b)\lozenge(a, b)$

(b) Symmetric：$\forall (a, b), (c, d)\in A$，設 $(a, b)\lozenge(c, d)$ 即 $(c, d)\lozenge(a, b)$

$\Rightarrow (c+d)=(d+a) \Rightarrow (c, d)\lozenge(a, b)$

(c) Transitive：$\forall (a, b), (c, d), (x, y)\in A$

設 $(a, b)\lozenge(c, d)$ 且 $(c, d)\lozenge(x, y)$，即 $(a+d)=(b+c)$、$(c+x)=(d+y)$

$\Rightarrow (a+d+c+y)=(b+c+d+x) \Rightarrow (a+y)=(b+x)$

$\Rightarrow (a, b)\lozenge(x, y)$

2.

(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) ...
(2, 1) (2, 2) (2, 3) (2, 4) (2, 5)...
(3, 1) (3, 2) (3, 3) (3, 4) (3, 5) ...
(4, 1) (4, 2) (4, 3) (4, 4) (4, 5) ...
(5, 1) (5, 2) (5, 3) (5, 4) (5, 5) ...

例(97 政大)：A 表示長度 11 之 Bit String 之集合，sRt ⇔ s 與 t 中 1 之個數相同

1. [110 1010 1010]有幾個元素
2. 共有幾個 Equivalent Class

1. C_6^{11}

2. 12 類(0 個 1~11 個 1)

2.4 關係之包

定義：$R \subseteq A \times A$

1. r(R)表示包含 R 之最小反身關係為 Reflexive Closure
2. s(R)表示包含 R 之最小對稱關係為 Symmtric Closure
3. t(R)表示包含 R 之最小遞移關係為 Transitive Closure

A={1, 2, 3}, R={(1, 1), (1, 2), (2, 3)}

1. r(R)={(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 3)}
2. s(R)={ (1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 1), (3, 2)}
3. t(R)={ (1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3)

例(97 交大)：A={1, 2, 3, 4}, R={(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 4), (5, 3)}，求 t(R)=？

t(R)={原式, (1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (2, 5), (1, 5)}

Note：

A={1, 2, 3}, R_1={(1, 1), (2, 2), (3, 3)}, R_2={(1, 1), (2, 2), (3, 3}, (1, 2), (2, 1)}

$R_1 \subseteq R_2$，R_1 對應之分割為 R_2 對應分割之加細分割

A={1, 2, 3, 4, 5}, R={(1, 2), (2, 3), (4, 5)}，求包含 R 之最小等價關係？

RA={(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (2, 1), (3, 2), (3, 1), (5, 4)}

Note：

R_1, R_2：Equivalent Relation，對應之分割 π_1, π_2

1. $R_1 \cap R_2$ 仍為 Equivalent Relation，對應之分割記作 $\pi_1 \cdot \pi_2$(交集)
2. $R_1 \cup R_2$ 不一定為 Equivalent Relation，但 $t(R_1 \cup R_2)$為 Equivalent Relation：$(\pi_1 + \pi_2)$ (聯集)

例(92 清大)：

π_1={abcd, efg, hi, jk}

π_2={abch, di, efjk, g}

$\pi_1 \cdot \pi_2$={abc, d, ef, g, h, i, jk}

$\pi_1 + \pi_2$={abcdhi, efjkg}

2.5 函數

定義：

$f \subseteq A\times B, \forall a\in A, \exists!\, b\in B \ni afb$，稱 f 為 A 到 B 之函數/關係(Function/Relation)，記作 $f: A\times B$，其中 afb，記作 $f(a)=b$

定義：

1. A：定義域 Domain
2. B：對應域 Codomain
3. $A_1\subseteq A, f(A_1)=\{f(a) \mid a\in B_1\}$為 A_1 之 Image
4. $B_1\subseteq B, f^{-1}(B1)=\{a\in A \mid f(a)\in B_1\}$為 B_1 之 Inverse Image
5. f(A)：值域 Range of f

例(95 清大)：

$g: R\rightarrow R$ by $g(x)=[x]$

1. $g^{-1}(\{0\})=\{x \mid 0 \le x < 1\}$
2. $g^{-1}(\{-1, 0, 1\}) = \{x \mid -1 \le x < 2\}$
3. $g^{-1}(\{x \mid 0 < x < 1\}) = \Phi$

定義：

$f: A\rightarrow B$ function

1. 若 $a_1\neq a_2, f(a_1)\neq f(a_2)$，稱 f 為一對一函數(1-1、One-to-one 或 Injection)
   ex：$f(a_1)=f(a_2) \Longrightarrow a1=a_2$
2. 若 f(A)=B，稱 f 為映成函數(Onto 或 Surjective)
3. 若 f 為 1-1 且 onto ⟹ 稱為可逆函數(Invertable)，又稱 Bijection

例：

1. $f: \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, by $f(x)=x^2$：f 不 1-1，不 onto
2. $f: \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, by $f(x)=x^3$：f 為 1-1 且 onto
3. $f: \mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z}$, by $f(x)=x3$：f 為 1-1，但不 onto*(無對應到 2 之整數)*

例(96 靜宜)：$f: \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z}$

1. $f(x, y)=x+y$
2. $f(x, y)=x$
3. $f(x, y)=|x|-|y|$
4. $f(x, y)=x^2-y^2$

1. 不 1-1，有 onto
2. 不 1-1，有 onto
3. 不 1-1，有 onto
4. 不 1-1，不 onto

定理：
f：A×B, $A_1, A_2 \subseteq A$, $B_1, B_2 \subseteq B$

1. $A_1 \subseteq A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$
2. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
3. $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
4. if f 為 1-1，上述等號成立
5. $B_1 \subseteq B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$
6. $f(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
7. $f(B_1 \cap B_2) \subseteq f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

Note：
f：A→B function, f：1-1 且 onto ⇔ f 之反關係仍為函數，稱 f 之 Inverse function，記作 f^{-1}
$f(x)=2x-3$, $f^{-1}(2x-3)=x$, ≡ $f^{-1}(y)=(y+3)/2$

例(94 雲科)：f：$\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ by $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{if } x>0 \\ -2x, & \text{if } x\le 0 \end{cases}$，求 f-1

$\Longrightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} (x+1)/2, & \text{if } x=2k+1,\ \forall k\in\mathbb{N}\text{；} \\ x/(-2), & \text{if } x=2k,\ k\in\mathbb{N} \end{cases}$

Note：
f：A→B, g：B→C function
合成：g∘f：A→C by (g∘f)(a)=g(f(a))

例(95 逢甲)：
f, g, h：$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ by f(n)=n+1, g(n)=2n, h(n)=0, if even；1 if odd

1. f∘g(n)=？
2. g∘f(n)=？
3. (g∘h)(n)=？
4. (h∘g)(n)=？

1. f · g(n) = f(g(n)) = f(2n) = 2n+1
2. g · f(n) = g(f(n)) = g(n+1) = 2(n+1)
3. (g · h)(n) = g(h(n)) = 0 if even, 2 if odd
4. (h · g)(n) = h(g(n)) = 0

定理(93 政大)：

$f：A \to B, g：B \to C$ function

1. f：1-1 且 g：1-1 $\Longrightarrow g \circ f$：1-1
2. f：onto 且 g：onto $\Longrightarrow g \circ f$：onto
3. f, g 皆 1-1 且 onto $\Longrightarrow g \circ f$：1-1 且 onto

證明：

1. 設$(g \circ f)(a_1)=(g \circ f)(a_2) \Longrightarrow g(f(a_1))=g(f(a_2))$
   $\because g$ is 1-1，$\therefore f(a_1)=f(a_2)$
   $\because f$ is 1-1 $\Longrightarrow a_1=a_2$
2. $\because f$ is onto, $\therefore f(A)=B$
   $\because g$ is onto, $\therefore f(B)=C$
   $\Longrightarrow (g \circ f)(A) = g(f(A)) = g(B) = C$, $\therefore g \circ f$ 為 onto

2.6 鴿籠原理

定理(10 個)：(Pigeonhole Principle)
m 隻鴿子，n 個籠子，m>n，則存在至少一籠子含至少一隻以上鴿子

例(98 台大)：12 黑球、12 白球，問至少取幾球，才能保證取到 2 白球？

14 球

例(5 個)：證：任 n+1 整數，必有 2 數相減被 n 整除

Given any $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}$
令 $ri = ai \bmod n$, $i=1, 2, \ldots, n+1$
$\Longrightarrow ri \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ by pigeonhole principle, $\exists\, i \neq j \ni r_i = r_j$
$\therefore n|(a_i - a_j)$

例(10 個)：A={1, 2, …, 2n}
1. 證：A 中取 n+1 個數，必有 2 數和為 2n+1
2. 證：A 中取 n+1 個數，必有 2 數互質

1. 將 A 分成 n 組：{1, 2n}, {2, 2n-1}, …, {n, n+1}，A 中取 n+1 數，必有 2 數在同一組，則此 2 數相加為 2n+1
2. 將 A 分成 n 組：{1, 2}, {3, 4}, …, {2n, 2n+1}，A 中取 n+1 數，必有 2 數在同一組，則相鄰 2 數必互質

例(99 交大)：1, 4, 7, 10, …, 100 中，至少取幾個數，保證必有 2 數和為 104？

$\Longrightarrow \{100, 4\}, \{97, 7\}, \ldots \Longrightarrow 102/3 = 34,\ 34/2 + 1 + 1 = 19$

例(12 個)：A={1, 2, …, 2n}，證 A 中取 n+1 數，必有 2 數 a, b 使 a|b 或 b|a？

$\forall x \in A$, X 可唯一寫成 $x=2^k y$, $k \in \mathbb{N}$, y 為 odd，∵A 中奇數的個數只有 n 個，故 A 中取 n+1 個數，必有 2 數 a, b，候得 $a=2^k y$，$b=2^k 2y \Longrightarrow a|b$ 或 $b|a$

例(10 個)：$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 為整數數列，證：$\exists\, i \leq j \ni n|(a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j)$

令：
$x_1=a_1$,
$x_2=a_1+a_2$
$x_3=a_1+a_2+a_3$
…
$x_n=a_1+\ldots+a_n$
則 $\exists\, x<t \ni n|x_t-x_s \Longrightarrow n|(a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j)$

例(3 個)：77 天完成 132 場球賽，每一天至少一場；證存在一段連續日子恰 21 場球賽？

令 a_i 表示前 i 天球賽的數目

$\Longrightarrow 1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_{77} = 132$

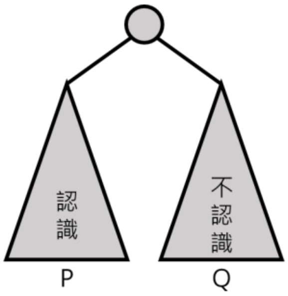
$\Longrightarrow 22 \leq a_1 + 21 < a_2 + 21 < \ldots < a_{77} + 21 = 153$

考慮 154 個數 $a_1, \ldots, a_{77}, a_1+21, \ldots, a_{77}+21$，它們之值介於 1~153，∴必有 2 數相同，即第 i 天至第 j 天恰 21 場球賽

例(14 個)：Ramsey Number

證 6 個人中，必有 3 個人彼此認識，或有 3 個人彼此不認識？

固定一人 a，則存在一堆≥3 人



1. *若 P 堆≥3 人，P 堆取出 3 人，x, y, z，若 x, y, z 中有某 2 人認識，則此 2 人加上 a 形成 3 人彼此認識；否則 x, y, z 形成彼此不認識*
2. *若 Q 堆≥3 人，Q 堆取出 3 人，x, y, z，若 x, y, z 中有某 2 人認識，則此 2 人加上 a 形成 3 人彼此不認識；否則 x, y, z 形成彼此認識*

2.7 計數問題

Note：

$|A|=m<\infty$, $|B|=n<\infty$

1. f：A→B 1-1 ⟹ $m\le n$
2. f：A→B onto ⟹ $m\ge n$
3. f：A→B 1-1 且 onto ⟹ $m=n$

定義：

A, B：Sets，若∃ f：A→B 為 1-1 且 onto，稱 AB 具相同之 Cardinality，記作 A~B

例：證 $\mathbb{Z}^+ \sim \mathbb{Z}_{even}^+$

取 f：$\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}_{even}^+$ by $f(x)=2x$ ⟹ f 為 1-1 且 onto

例(92 中正)：[0~1], [10~100]

取 f：[0~1]→[10~100] by $f(x)=90x+10$ ⟹ f：1-1 且 onto

定義：

A：Set；若 A=Φ 或∃ $n\in\mathbb{Z}^+$ ∋ A~{1, 2, …, n}，稱 A 為 Finite Set，否則稱為 Infinite Set

定義：

A：Set；若 A 為 finite 或 $A\sim\mathbb{Z}^+$，稱 A 為 Countable Set

定理：

$\mathbb{Z}$ is countable

證明：

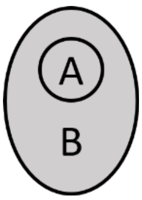
定義 f：$\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}^+$ by $f(x)=\begin{cases}1, & \text{if } x=0\\ 2x, & \text{if } x>0\\ -2x+1, & \text{if } x<0\end{cases}$

⟹ f：1-1 且 onto

Note：

$A\subseteq B$

1. B countable ⟹ A countable
2. A countable ⟹ B countable



Lemma

$f: A \to \mathbb{Z}^+$ 1-1 $\Longrightarrow$ A is countable

Lemma

$\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ is countable

證明：

定義 $f: \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ by $f(a, b)=2^a 3^b \Longrightarrow$ f is 1-1 *(but not onto)*

Lemma

$\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$

證明：

$$\begin{array}{llllll}
(1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & (1, 4) & (1, 5) & \ldots \\
(2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & (2, 4) & (2, 5) & \ldots \\
(3, 1) & (3, 2) & (3, 3) & (3, 4) & (3, 5) & \ldots \\
(4, 1) & (4, 2) & (4, 3) & (4, 4) & (4, 5) & \ldots \\
(5, 1) & (5, 2) & (5, 3) & (5, 4) & (5, 5) & \ldots
\end{array}$$

$f(i, j) \Longrightarrow 1/2(i+j-2)(i+j-1) + j$

Note：

1. A, B countable $\Longrightarrow A\times B$: countable
2. A_i is countable, $\forall$ i=1, 2, … $\Longrightarrow \coprod Ai$ is countable
3. $\mathbb{Q}^+ = \{q/p \mid p, q\in\mathbb{Z}^+\} \sim \{(p, q) \mid p, q \in \mathbb{Z}^+\} = \mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$
4. $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$ is countable

定理(8 個)：

(0, 1) is uncountable

證明：

設(0, 1) is countable $\Longrightarrow \mathbb{Z}^+\sim(0, 1) \Longrightarrow \exists\, f: \mathbb{Z}^+ \to (0, 1)$ 1-1 且 onto

0.3126

03325431

0.6215439

0.1167893

令

$f(1) = 0.\mathbf{a_{11}}a_{12}a_{13}a_{14}\ldots$

$f(2) = 0.a_{21}\mathbf{a_{22}}a_{23}a_{24}\ldots$

$f(3) = 0.a_{31}a_{32}\mathbf{a_{33}}a_{34}\ldots$

$f(4) = 0.a_{41}a_{42}a_{43}\mathbf{a_{44}}\ldots$

取 $x= 0.x_1x_2x_3\ldots$，其中 $x_i=\{5(\text{if}=4), 4(\text{if}\neq 4)\}$，則 $x\in (0, 1)$，但 $x\neq f(1), x\neq f(2),\ldots$

與 f 為 onto $\rightarrow\leftarrow$

定理：
R is countable，且(0, 1)~ $\mathbb{R}$

證明：
$(0, 1) \rightarrow (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$
取 $f(x) = \pi x - \pi/2$, $g(x) = \tan(x) \Longrightarrow h=g \circ f=(0, 1) \rightarrow \mathbb{R} \Longrightarrow$ h is 1-1 且 onto

Note：
1. A is uncountable, B is countable $\Longrightarrow$ A-B is uncountable
2. $\cancel{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ uncountable
3. $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$
4. $|\mathbb{Z}^+| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\cancel{\mathbb{Q}}| = |\mathbb{R}| = |\mathbb{C}|$ *//"<"連續統假設*

例(99 高大)：證：$\mathbb{Z}^+$不~$P(\mathbb{Z}+)$

若 $\mathbb{Z}^+ \sim P(\mathbb{Z}^+) \Longrightarrow \exists f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow P(\mathbb{Z}^+)$ 1-1 且 onto

O	*1 → 123*
X	*2 → 137*
O	*3 → 234*
O	*4 → 1489*
X	*5 → 176*
X	*6 → 173*

取 $B=\{a \in \mathbb{Z}^+ \mid a \notin f(a)\}$
$\because$ f is onto
$\therefore \exists b \in \mathbb{Z}^+ \ni f(b)=B$
1. *若 $b \in B \Longrightarrow b \notin f(b) = B \rightarrow\leftarrow$*
2. *若 $b \notin B \Longrightarrow b \in f(b) = B \rightarrow\leftarrow$*