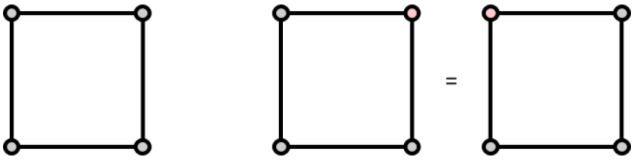
CH11、坡里密計數

坡里密計數

目錄：

11.1 Bumside 定理

(此章只需要記得 4 個例題即可)



定義：

$|S| = n$，$S_n = \{\pi \mid \pi : S \to S$ 1-1 且 onto$\}$

G 為 S_n 之 Subgroup

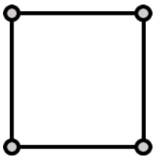
稱 G 為 Permutation Group on S，S 上之重排群

在 S 上定義一 Equivalent Relation "~" by $a \sim b \Leftrightarrow \exists\, \pi \in G \ni \pi(a)=b$

對應等價類集記作 S/~

定理： $\lvert S/\sim \rvert = 1/\lvert G \rvert \sum \Phi(\pi)$ 其中 $\Phi(\pi) = \lvert \{a \in S \mid \pi(a)=a\} \rvert$

例 1：4 點塗 b, w 兩色，問非同構(或 Nonequivalent)之圖有幾個？



$|S| = 2^4$ (全部)

$G = \{\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3\}$, $\pi_i =$ 旋轉 $90 \times i$ 度

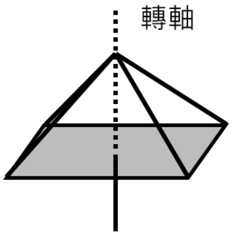
$\Phi(\pi_0) = 16$ (不動則全部都自己對自己)

$\Phi(\pi_1) = 2 = \Phi(\pi_3)$ (轉 90 度與轉 270 度一樣，皆同構)

$\Phi(\pi_2) = 4$

$\Longrightarrow |S/\sim| = 1/4(16+2+2+4) = 6$

例 2：金字塔有五面塗 4 種顏色且保證底面之顏色與他面不同有幾種？



$|S| = 4 \times 3^4$ (全部)

$G = \{\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3\}$, $\pi_i =$ 旋轉 $90 \times i$ 度

$\Phi(\pi_0) = 4 \times 3^4$

$\Phi(\pi_1) = 4 \times 3$ (上面 4 面一樣) $= \Phi(\pi_3)$

$\Phi(\pi_2) = 4 \times 3 \times 3$

$\Longrightarrow |S/\sim| = 1/4(324+12+12+36) = 96$

11.2 Polya **定理**

定義：

F：{f | f=D→R function}　　*//D 為要塗的點；R 為要塗的顏色*

G：Permutation Group on D

$f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow \exists\, \pi \in G \ni f_1 = f_2 \circ \pi$ (π 為旋轉)

Bunside 為先塗再轉 Polya 為先轉再塗

1. $r \in R$, w(r)=weight of r
2. $w(f) = \pi\, w(f(d))$
3. F/~之目錄：$\sum w(f)$

例：$w^4+w^3b+2w^2b^2+wb^3+b^4$，系數為方法數(不同構的樣式)

⟹ 與 Bumside 不同點在於 Polya 可得知各種的實際(細部)方法數

Note：

1. $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & A \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 9 & 7 & A \end{pmatrix}$

   $= (1\ 2) \circ (3\ 4) \circ (5\ 6) \circ (7\ 8\ 9) \circ (A)$

   π 之 cycle structure representation

   $C_\pi = x_1^1\, x_2^3\, x_3^1$　//x_1^1 表示有 1-cycle 有 1 個
2. G 之 Cycle Index

   $P_G(x_1, \ldots, x_k) = 1/|G| \sum C_\pi$

定理： F/~之目錄為 $P_G(\sum w(r), \sum w(r)^2, \ldots)$

例 3：旋轉木馬 7 隻馬，塗 b, w, r 3 色，其中 3b, 2w, 2r 有幾種？

D = {1, 2, …, 7}

R = {b, w, r}

w(b)=b, w(w)=w, w(r)=r

$G = \{\pi_0, \ldots, \pi_6\}$, π_i = 旋轉 90×i 度

$\pi 0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = (1) \circ (2) \circ \ldots \circ (7)$

$C_{\pi 0} = x_1^7$

$\pi 0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$

$C_{\pi 1} = x_7 = C_{\pi 2} = C_{\pi 3} = C_{\pi 4} = C_{\pi 6} = C_{\pi 6}$

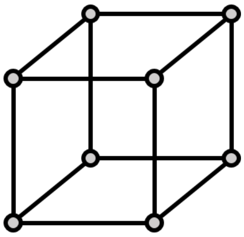
$\Longrightarrow P_G(x_1, x_7) = 1/7(x_1^7 + 6x_7)$

其中 $x_1 \to b+w+r$, $x_2 = b^2+w^2+r^2$, …, $x_7 = b^7+w^7+r^7$

F/~目錄 $= 1/7[(b+w+r)^7 + 6(b^7+w^7+r^7)]$，$b^3w^2r^2$ *之系數* $= 1/7\, C_{3,2,2}^7$

另外 $|F/\sim| \Longrightarrow$ *b, w, r 都代 1* $\Longrightarrow P_G(3, 3) = 1/7(3^7+6\times 3) = 315$　　*//全部方法數*

例 4：8 點塗 b, w 二色：1.共有幾種、2.其中 4b4w 有幾種？



$D = \{1, 2, \ldots, 8\}$

$R = \{b, w\}$

$w(b)=b, w(w)=w$

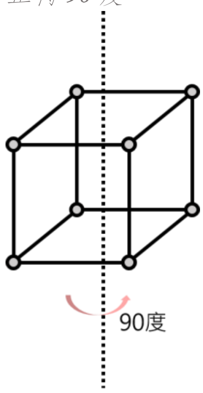
G 具下列 24 個，共 5 堆

1. 不動：

   $C_\pi = x_1^8$，因為

   $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

2. 正轉 90 度：

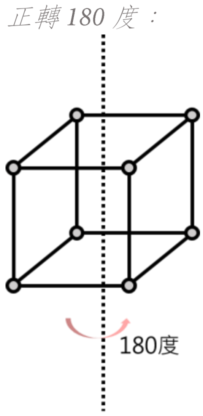


   $C_\pi = x_4^2$，因為

   $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

   ，而有 3 軸，2 方向(順逆)→6 個

3. 正轉 180 度：

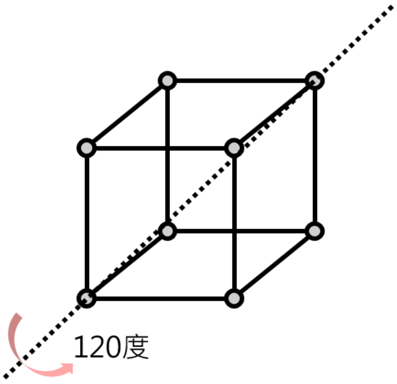


   $C_\pi = x_2^4$，因為

   $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

   ，而有 3 軸，順逆相同→3 個

4. *斜轉 120 度：*

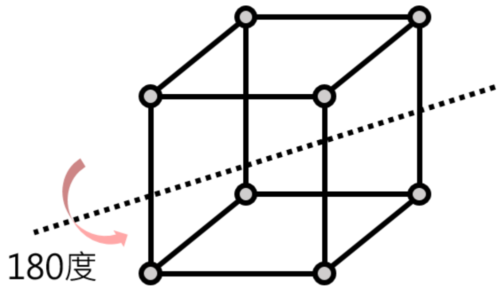


$C_\pi = x_1^2\, x_3^2$，因為

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 7 & 4 & 5 & 8 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

，而有 4 軸，2 方向(順逆)→8 個

5. *邊轉 180 度：*



$C_\pi = x_2^4$，因為

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

，而有 6 軸，順逆相同→6 個

$PG(x1, \ldots, x4) = 1/24(x_1^8 + 6x_4^2 + 3x_2^4 + 8x_1^2x_3^2 + 6x_2^4)$

1. $|F/\sim| = 1/24\,(2^8 + 6\times2^2 + 9\times2^4 + 8\times2^2\times2^2)$ *//每個變數代 2 → b, w 代 1 → 1+1=2*
2. *目錄* $= 1/24[(b+w)^8 + 6(b^4+w^4)^2 + 9(b^2+w^2)4 + 8(b+w)^2(b^3+w^3)^2]$

   $\Longrightarrow$ *求 b^4w^4 之係數* $= 7$