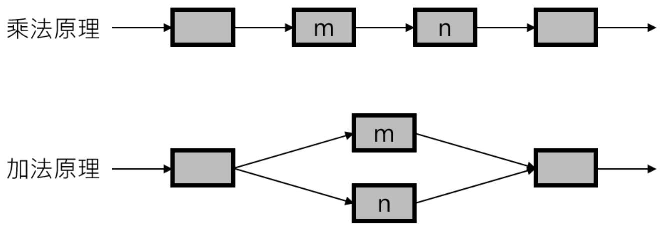
CH3、排列組合及排容原理

排列組合、排容原理與城堡多項式

目錄：

3.1 基本計數原理



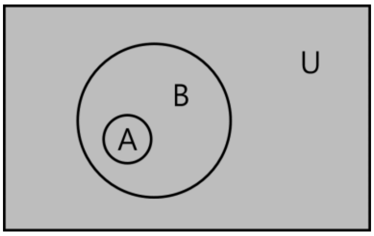
例：0~6

1. 3-digit，且數字皆相異有幾個？
2. 其中奇數有幾個？

*1. 6*6*5*

*2. 3*5*5*

例(96 靜宜)：U={1~n}，A⊆B⊆U 之 Order Pair(A, B)有幾個？



例(98 淡江)：100~999 中，3 數字都相異之偶數有幾個？

*5*9*8 – 4*8 = 360-32 = 328*

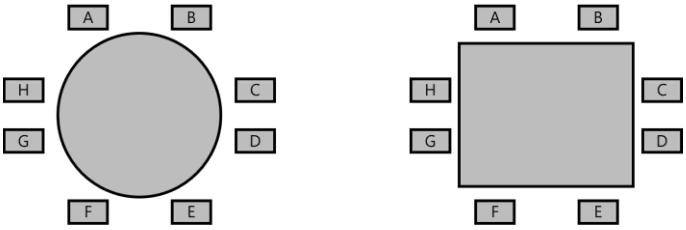
3.2 排列

公式：
1. n 件相異物，不允許重複取 r 件排列：$n(n-1)\ldots(n-r+1) = n!/(n-r)! = P_r^n$
2. n 件相異物，允許重複取 r 件排列：n^r
3. n 件相異物排列：$n(n-1)\ldots1 = n!$
4. n 件相異物環狀排列：$n!/n = (n-1)!$
5. n 件物不全相異，共 r 類：$n_1+\ldots+n_r=n$：$n!/(n_1!n_2!\ldots n_r!)$
6. 公式 1 中排列改成組合：$C_r^n = (n, r)$

例(97 台大)：由 0, 1, 2 構成長度 10 字串
1. 恰好 5 個 0、5 個 1，有幾個？
2. 恰有 3 個 0、4 個 1、3 個 2，有幾個？
3. 至少 2 個 0，有幾個？

1. *C_5^{10}*
2. *$C_3^{10}C_4^7$*
3. *$3^{10}-2^{10}- C_5^{10}*2^9$*

例：



正方：8!/4
長方：8!/2

例：MISSISSIPPI
1. 字母排列數
2. S 不相鄰之排列數

1. *$11!/(4!4!2!)$*
2. *S 先不排：$7!/(4!2!)$，8 選 4 格：$7!/(4!2!) * C_4^8$*

例(96 台大)：$(3, 2)\rightarrow(7, 14)$
1. Shortest Path 有幾條？
2. 其中，不經(5, 8)有幾條？

1. *$(4+12)!/(4!12!)$*
2. *$16!/(4!12!) - 8!/(2!6!)*8!/(2!6!)$*

例(97 逢甲)：
1. 證：$(3n)!/2^n3^n \in \mathbb{Z}$
2. 證：$(k!)!/(k!(k-1)!) \in \mathbb{Z}$

1. 1 1 1 2 2 2 3 3 3 … n n n 之排列數
   $(3n)! / 3!3!3!...3! = (3n)!/2^n3^n$
2. 構造：

k 個 1	k 個 2	⋯	k 個 n

   共(k-1)!組，共 k!個
   排列數= $(k!)! / (k!(k+1)!) \in \mathbb{Z}$

3.3 組合

公式： 7. n 件相異物，允許重複取 r 件組合：C_r^{n+r-1} 例：n=4, r=7 1. r 個相同球，放到 n 個相異箱子，允許空箱的方法數 2. $x_1+x_2+\ldots+x_n=r$ 之非負整數解個數

例：改成不允許空箱

$x_1+\ldots+x_n=r,\ x_1\sim x_n \geq 1$

令 $y_1=x_1-1,\ \ldots\ y_n=x_n-1$

$\Longrightarrow y_1+\ldots+y_n = (x_1+\ldots+x_n) - n = r \Longrightarrow C_{r-n}^{r-1} = C_{n-1}^{r-1}$

公式： 8. $x_1+\ldots+x_n=r$ 之整數解為 C_{n-1}^{r-1}

例(99 中山)：求整數解的個數

1. $x_1+\ldots+x_5=17,\ x_i\geq 0$
2. $x_1+\ldots+x_5=17,\ x_i>0$
3. $x_1+\ldots+9x_3+\ldots+x_5=17,\ x_i\geq 0$

1. $C_{17}^{4+17-1} = C_{17}^{20} = C_3^{20}$
2. C_{19}^{5+12-1}
3. $C_{19}^{4+19-1} + C_{10}^{4+10-1} + C_1^{4+1-1}$

例(98 中山)：$x_1+\ldots+x_4=32,\ x_1\sim x_4>0,\ 0<x_4\leq 25$

$(x_4>0) - (x_4>25)$

C_3^{31} - C_3^{6}

例(98 台大)：$x_1+x_2+x_3\leq 100,\ x_1\sim x_3\geq 0$

令 $x_4 = 100-(x_1+x_2+x_3)$

$\Longrightarrow x_1+x_2+x_3+x_4 = 100 \Longrightarrow C_3^{103}$

例(96 逢甲)：問 print 幾次？

```
for i=1 to 20
    for j=1 to i
        for k=1 to j
            print()
```

$1\leq k\leq j\leq i\leq 20 \Longrightarrow$ *20 個相異物允許重複取 3 個組合之方法數*

$\Longrightarrow\ \ C_3^{20+3-1}$

例(97 高第一)： 5-digit integer

1. 數字為 increasing 有幾個？
2. 數字為 nondecreasing 有幾個？
3. 數字為 nonincreasing 有幾個？

1. $1 \le a \le b < c < d < e \le 9 \Longrightarrow C_5^9$
2. $1 \le a \le b \le c \le d \le e \le 9 \Longrightarrow C_5^{9+5-1}$
3. $9 \ge a \ge b \ge c \ge d \ge e \ge 0 \Longrightarrow C_5^{10+5-1} - 1$

定理：

$C_r^n = C_r^{n-1} + C_{r-1}^{n-1}$

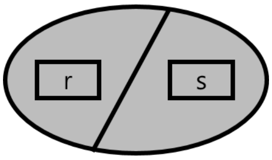
證明：

C_r^n n 相同異物取 r 個組合，固定一物 A

1. A 不取：C_r^{n-1}
2. 取 A：C_{r-1}^{n-1}

Note：

$C_r^n = C_{r-2}^{n-2} + 2C_{r-1}^{n-2} + C_r^{n-2}$



$C_r^{r+s} = C_0^r C_n^s + C_1^r C_{n-1}^s + \ldots + C_n^r C_0^s$

當 r=s=n $\Longrightarrow C_n^{2n} = (C_0^n)^2 + (C_1^n)^2 + \ldots + (C_n^n)^2$

例(4 個)：$\sum C_m^k = ?$

$\equiv\ C_m^m (= C_{m+1}^{m+1}) + C_m^{m+1} + c_m^{m+2} + \ldots C_m^{n-1} + C_m^n = C_{m+1}^{n+1}$

定理：

$(x+y)^n = \sum C_r^n x^r y^{n-r}$

$(x+y)^4 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$

證明：

$(x+y)^n$ 展開後 $x^r y^{n-r}$ 之系數，相當於 n 個 Bits 中：恰含 r 個 1，且 n-r 個 0 之 Bit String，個數為 C_r^n

推廣：

$(x1 + \ldots + xk)^n$

$= \sum (^n,_{n1, n2, \ldots, nk})^n$

例(99 政大)：$(w-2x+3y+z)^{20}$

1. $w^2x^4y^6z^8$之系數為何？
2. 展開後共有幾項？
3. 係數和為何？

1. $= \sum \binom{20}{n1, n2, \ldots, n4} w^{n1}(-2x)^{n2}(3y)^{n3}z^{n4} \Longrightarrow \binom{20}{2, 4, 6, 8}(-2)^4(3)^6$
2. $n_1+n_2+n_3+n_4 = 20 \Longrightarrow C_{20}^{4+20-1} = C_{20}^{23}$
3. 3^{20}

例 98 成大：$(a+3b-2c+4)^6$

1. a^2b^c之係數為何？
2. 展開後有幾項？

1. $\binom{6}{2, 1, 1, 2}(3)^1(-2)^1(4)^2$
2. $n_1+n_2+n_3+n_4=6 \Longrightarrow C_6^{4+6-1} = C_6^9$

Note(9 個)：$|A|=m$, $|B|=n$

1. $A\rightarrow B$ 之 function 個數？
2. $A\rightarrow B$ 之 1-1 function 個數？

1. n^m
2. $n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = P_m^n$

3.4 排容原理

Note：

U：Universal Set

$a_1, \ldots, a_n$：性質

$N(a_i) = |A_i|$

$N(\cancel{a_i}) = |\cancel{A_i}|$

$N(a_i a_j) = |A_i \cap A_j|$

$N(a_i a_j) = |A_i \cap A_j| = |U| - [N(a_i)+N(a_j)] + N(a_i a_j)$

例(97 台大)：1~1000 中，不被 2, 5, 17 整除的有幾個？

1000 – 1000/2 – 1000/5 – 1000/17 + 1000/10 + 1000/34 + 1000/85 + 1000/170

例(97 元智)：0~9 共 10 字排列，含 Pattern 289, 234, 478 至少一個的有幾個？

8! ×3 – 0 – 0 – 6! + 0

例(97 清大)：1~100 中，質數個數？

25

例(97 台大)：$n = p_1^{e1} p_2^{e2} p_3^{e3}$，證 $\Phi(n) = n(1-1/p_1)(1-1/p_2)(1-1/p_3)$？

U = {1, …, N}，令 a_i 表 p_i 之倍數，i=1, 2, 3

$\Phi(n) = N(a_1 a_2 a_3) = S_0 - S_1 + S_2 - S_3$

$= n - n/p_1 - n/p_2 - n/p_3 + n/p_1p_2 + n/p_1p_3 + n/p_2p_3 - n/p_1p_2p_3$

$= n\,[1-(1/p_1 + 1/p_2 + 1/p_3) + (1/p_1p_2 + 1/p_2p_3 + 1/p_1p_3) - 1/p_1p_2p_3]$

$= n/p_1p_2p_3[p_1p_2p_3 - (p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3) + (p_1 + p_2 + p_3) - 1]$

$= n/p_1p_2p_3\,(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1) = n(1-1/p_1)(1-1/p_2)(1-1/p_3)$

定理(5 個)：

$|A|=m, |B|=n, m\geq n$, $A\rightarrow B$ 之 onto function 為 $onto(m, n) = \sum_0 (-1)^i C_i^n (n-i)^m$

證明：

$|U| = n^m$，令 a_i 表第 i 個箱子為空，i=1, …, n

$onto(m, n) = N(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$

$= S0-S1+S2-\ldots+(-1)^n Sn$

$= n^m - C_1^n(n-1)^m + C_2^n(n-2)^m - C_3^n(n-3)^m + \ldots + (-1)^n C_n^n (n-n)^m$

$= \sum_0 (-1)^i C_i^n (n-i)^m$

例(98 輔大)：1 個經理有一個祕書、三個助理，7 把 key 分給此 4 人，每人至少 1 把，最貴的 key 一定給祕天，有幾種分法？

onto(6, 3)　　+　　onto(6, 4)

祕書恰 1 把　　祕書 2 把以上

Note：
改成允許空箱：
$S(m, n) + S(m, n-1) + S(m, n-2) + \ldots + S(m, 1)$

定理：
$S(m+1, n) = S(m, n-1) + nS(m, n)$

證明：
$S(m+1, n)$：m+1 個相異物，分成恰好 n 個箱子
固定一物 A
1. A 所在之箱子只有 A(箱同故 1 種)
2. 否則，其他人先入箱，A 再從 N 中選 1 箱進入

	1	2	3	4	5	6
1	*1*					
2	*1*	*1*				
3	*1*	*3*	*1*			
4	*1*	*7*	*6*	*1*		
5	*1*	*15*	*25*	*10*	*1*	
6	*1*	*31*	*90*	*65*	*15*	*1*

3.5 亂序及禁位問題

定理：(Degrangement)
{1, …, n}作排列，使得每個號碼都不在自然位置之排列數為 D_n
$D_n = n![\sum_0 (-1)^i/i!\ ]$

證明：
$|U| = n!$，a_i 表示 i 在自然位子，$Dn = N(\cancel{a_1}, \cancel{a_2}, \cancel{a_3}, \ldots \cancel{a_n})$
$= S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + \ldots + (-1)^n S_n$
$= n! - C_1^n(n-1)! + C_2^n(n-2)! - \ldots + (-1)^n C_n^n(n-n)! = \sum_0 (-1)^i C_i^n(n-i)!$
$= \sum_0 (-1)^i \times n!/[i!(n-i)!] \times (n-i)! = n![\sum_0 (-1)^i/i!\ ]$

Note：
$e^x = \sum x^i/i! \Longrightarrow e\text{-}1 = \sum (-1)i/i!\ \ \therefore D_n \rightarrow n!e^{-1}$, as $n \rightarrow \infty$

例(97 海大)：15 個學生，2 堂課位子，不同有幾種可能？
(15!)×(15!) 但需要錯位
$\Longrightarrow \sum 0\ (-1)^i/i! \approx (15!)^2 e^{-1}$

例(99 成大)：1~8 亂序
1. 前 4 數為 1~4 有幾種？
2. 前 4 數為 5~8 有幾種？

1. $D_4 \times D_4 = (D_4)^2$
2. $4! \times 4! = (4!)^2$

例(99 成大)：4 個女生，5 個男生，w_1 不喜歡 m_1, m_3, m_5、w_2 不喜歡 m_2, m_4、w_3 不喜歡 m_3, m_5、w_4 不喜歡 m_4，問 $w_1 \sim w_4 \rightarrow m_1 \sim m_5$ 之 1-1？

$|U| = 5\times4\times3\times2$
令 a_i 表示 w_i 在禁位上，i=1~4
$= S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = 5\times4\times3\times2 - (3+2+2+1)(4\times3\times2) + \ldots$
Rock Polynomial：

	m1	m2	m3	m4	m5
w1	X		X		X
w2		X		X	
w3			X		X
w4				X	

$\Downarrow$

	m1	m3	m5	m2	m4
w1	X	X	X		
w3		X	X		
w2				X	X
w4					X

$r(c, x) = 1 + 8x + 20x^2 + 17x^3 + 4x^4$
$\quad = (5\times4\times3\times2) - 8(4\times3\times2) + 20(3\times2) - 17(2) + 4$
$(1 + 5x + 4x^2)(1 + 3x + 1x^2) = 1 + 8x + 20x^2 + 17x^3 + 1x^4$