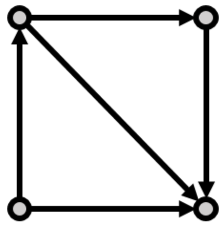
CH6、圖論

圖論

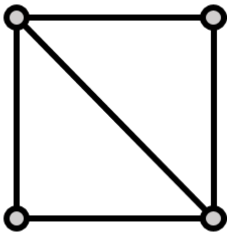
目錄：

6-1 種類與術語
有/無向圖、簡單/多重圖、起/終/孤立點、強/弱連通
路 *Walk*/長度 *Length*/路線 *Trail*/路徑 *Path*、迴/環路
子圖/誘導子圖 *Induced*/生成子圖 *Spanning*
分量圖、切點/切集、橋、雙連通圖、完全圖、雙分圖、補圖、懸吊點
規則圖、K、分圖 *Clique*、獨立集、支配集 *Dominating Set*、*Covering*
6-2 表示法與同構
鄰接矩陣 *Adjacency Matrix(點對點)*、接合矩陣 *Incidence Matrix(點對邊)*
同構*(點、邊、degree、子圖結構、對應點結構、補圖同構)*
6-3 圖之基本性質
度數 *Degree*
極長路徑
6-4 尤拉迴路及漢米爾頓環路
尤拉迴路 EC、尤拉路線 ET
漢米爾頓環路 HC、漢米爾頓路徑 HP
6-5 平面圖
平面圖
同胚、基本區分、尤拉公式
6-6 著色理論
正當著色、著色數
著色多項式
拆邊黏點

6.1 種類與術語



V = {a, b, c, d}
E = {(a, b), (b, c), (a, c), (d, c), (d, a)}

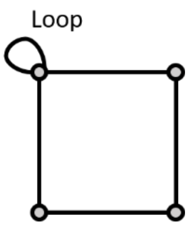


{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a), (a, c)}

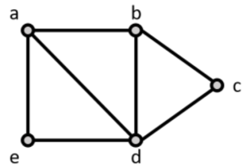
定義：
V ≠ Φ (V：Vertex Set(點集))
E ⊆ V×V(E：Edge Set(邊集))
稱 G = (V, E)為一個 Direct Graph 或 Digraph(有向圖)
當 G 之邊無方向性，稱 G 為 Undirected Graph(無向圖)

定義：
G = (V, E)：graph
若 G 中任兩點之間，至多一邊相連，稱 G 為 Simple Graph，否則為 Multi-graph(多重圖)

Note：
未特別指定下，一個 Graph 視為 Undirected Simple Graph(無向簡單圖)



定義：
G=(V, E)
P：$V_0(x), e_1, V_1, e_2, \ldots, e_n, V_n(y)$ *//起點、一邊一點、一邊一點…終點*
V0, …, Vn ∈ V
e1, …, en ∈ N
稱 P 為 x-y walk



1. 若 P 不含重複的點，稱 P 為一 Path(路徑)
2. 若 P 不含重複的邊，稱 P 為一 Trail(路線)
3. 當 $x=y$，稱 P 為 Closed Walk
4. 當 $x \neq y$，稱 P 為 Open walk
5. Closed Trail：Circuit(迴路) ∞
6. Closed Path：Cycle(環)　O
7. Proper Cycle：洽只有 3 個邊之 Cycle(及三角形)

定義：

G=(V, E)，若 G 中任 2 點之間，皆有 Path 相連，稱 G 為 Connected(連通)，當 G 為 Digraph 時，稱 G 為(Strongly) Connected((強)連通)

定義：

G=(V, E)

$V' \subseteq V, E' \subseteq E \cap (V' \times V')$，稱 G'=(V', E')為 G 之一 Subgraph(子圖)

1. 若 $E' = E \cap (V' \times V')$，稱 G'為 G 之 Induced Subgraph by V'(誘導子圖)
2. 若 $V' = V$，稱 G'為 G 之 Spanning Subgraph(生成子圖)

定義：

G=(V, E)未必 Connected，G 之"Maximal" Connected Induced Subgraph，稱為 G 之一(Connected) Componenet(元件/單元)

定義：

G=(V, E)：Connected

1. $V \in V$，若 G-V 為 Disconnected，稱 V 為 Cut Point 或 Articulation Point(切點)
2. $x \subseteq E$，若 G 中去掉最小邊集，x 變成 Disconnected，稱 x 為 Cut Set(切集)
3. 當 Cut Set 只含一邊 e，則稱 e 為 Bridge(橋)

例(3 個)：證明：G=(V, E)：Connected，$e \in E$，e 為 Bridge ⇔ e 不在任何 Cycle 中

(矛盾證法) ⟹：

若 e 在某個 Cycle 中，則 G-e 仍 Connected →←

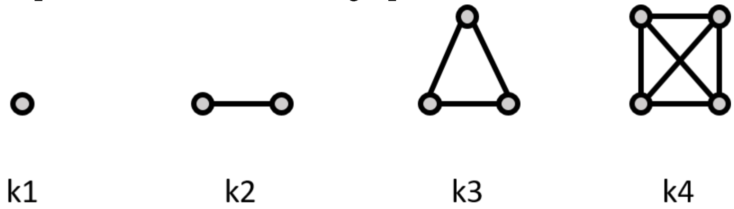
(矛盾證法) ⟸：

設 e = (a, b)不為 Bridge，則 G-e 仍 Connected，代表 a 有 Path p 到 b in G-e，則 p 加 e 形成一 Cycle→←

定義：

G=(V, E)，若 G 不含 Cut Point，稱 G 為 Biconnected(雙連通圖)，G 之 Maximal Biconnected Induced Subgraph，稱為 G 之 Biconnected Component(雙連通單元)

定義：G=(V, E), |V| = n，若 G 中任 2 相異點皆恰有一邊相連，稱 G 為 Complete Graph 記作 k_n，當 G 為 Digraph 時，稱 G 為 Directed Complete Graph，記作 k_n^*



Note：
1. k_n之邊數：$C2^n$
2. n 個點，有幾種 k_n^*：$2^{(n, 2)}$

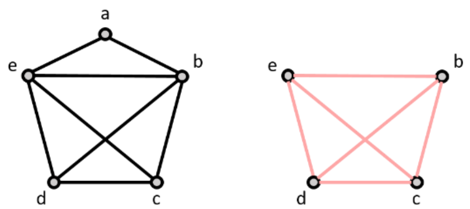
定義：
G=(V, E)，G 之 Completement Graph G^C 或 G=(V, $\overline{E}$)，滿足$(a, b) \in \overline{E} \Leftrightarrow (a, b) \notin E$

例(98 交大)：G 有 11 個邊，$\overline{G}$有 10 個邊，問 G 之點數 n 為何？

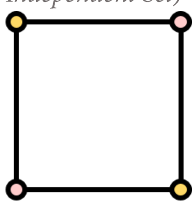
11+10=21
$C_2^n = 21 \Longrightarrow n=7$

Note(6 個)：
$G=(V, E), |V|=n, |E| \geq C_2^{n-1}+1 \Longrightarrow$ G is Connected

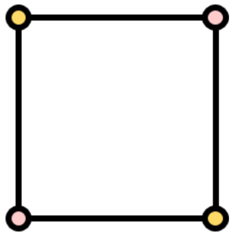
定義：
1. Clique(分圖)：在 G 中找一些『兩兩皆相鄰的點』為一集合，即會形成 Complete Subgraph(完全子圖)*(通常會要求 Maximal Clique)*



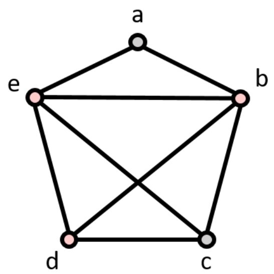
2. Independent Set(獨立集)：在 G 中找一些『互不相鄰的點』為一集合，也等於是找 $\overline{G}$ 中，能形成 Clique 的點集合，可以只含一點*(通常會要求 Maximal Independent Set)*



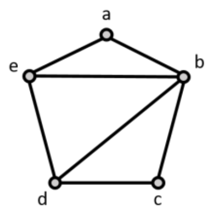
3. Domainating Set(支配集)：在 G 中找一些點為一集合，使得 G 中所有其他點，都與此集合有相連*(通常會要求 Minimal Domainating Set)*



4. Covering：在 G 中找一些點為一集合，使所有的邊都與此集合有相連*(通常會要求 Miniamal Covering，即找到『數個點』，與所有邊皆相連)*



例(96 清大)：求所有之 Maximal Independent Set？



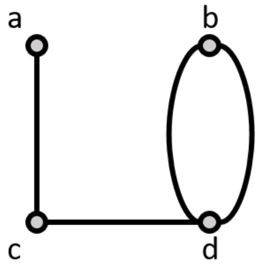
{a, c}, {a, d}, {b}, {c, e}

6.2 圖的表示法與同構

*表示法

Adjacency Matrix：A

Incidence Matrix：B

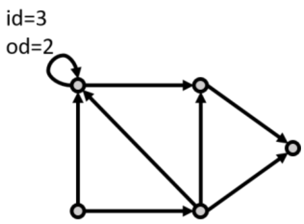


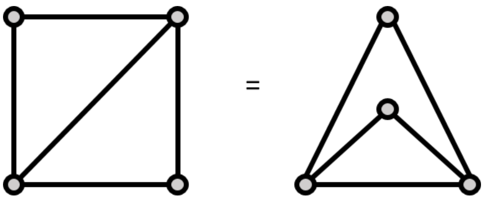
$$A = 4\times 4 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \left|\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right| \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| \end{array}$$

定義：

$G=(V, E)$

1. $v\in V$，定義 v 之 Degree，$deg(v)$ = “與 v 相連之邊數”
2. 在 Digraph 中，分成 v 之 in degree, $id(v)$、及 out degree, $od(v)$
3. 若$\forall v\in V, deg(v)=k$，稱 G 為 Regular Graph





定義：

$G_1=(V_1, E_1)$, $G_2=(V_2, E_2)$

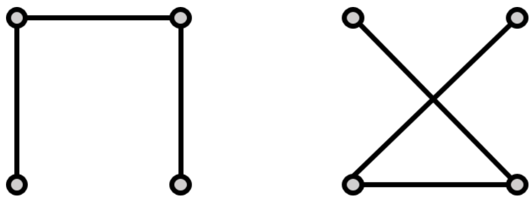
若$\exists f: V_1\rightarrow V_2$, 1-1 且 onto，滿足$\forall a, b\in V$，$\{a, b\}\in E \Leftrightarrow \{f(a), f(b)\}\in E_2$，稱 G_2 與 G_1 同構，記作 $G_1\cong G_2$

例：$G=(V, E)$, $|V|=n$，若 $G\cong\overline{G}$，證：$n=4k$ 或 $4k+1$

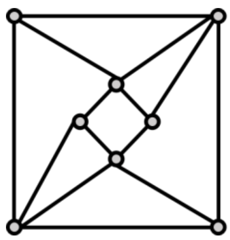
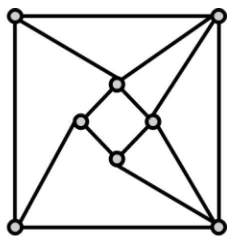
$G=(V, E)\cong\overline{G}(V, \overline{E}) \Longrightarrow |E|+|\overline{E}| = C_2^n$, $|E| = |\overline{E}|$

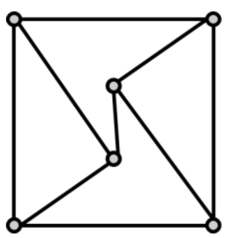
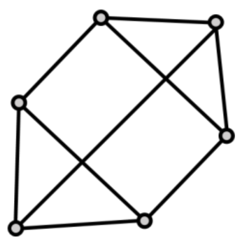
$\Longrightarrow 2|E| = C_2^n = n(n-1)/2 \Longrightarrow |E| = n(n-1)/4 \in\mathbb{Z} \Longrightarrow 4|n$ 或 $4|(n-1)$

即 $n=4k$ 或 $4k+1$



Note：
同構的不變性：
1. 點數
2. 邊數
3. degree sequence (由大到小)
4. 子圖不變
5. 對應點結構
6. 補圖


=



=


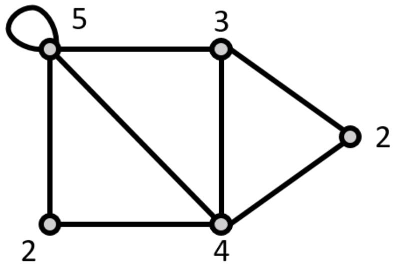
6.3 圖之基本性質

定理：

G=(V, E)：Simple 或 Multi-graph，則$\sum \deg(v) = 2|E|$

證明：

$\forall$ e = {a, b}，則 deg(a)與 deg(b)累加 1 得證



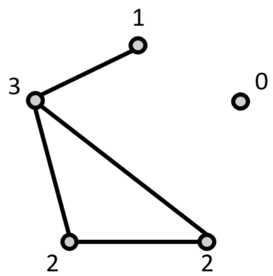
推廣(12 個)：

G=(V, E)：Simple 或 Multi-graph，則奇數 degree 之點，必含偶數個

G=(V, E)：Digraph，則$\sum id(v) = \sum od(v)$

例(99 台大)：具下列 Degree 之 Simple Graph 是否存在？

1. 4, 4, 3, 2, 2
2. 3, 2, 2, 1, 0
3. 5, 5, 4, 3, 2, 1
4. 9, 7, 5, 4, 4, 3, 3, 1, 1, 1



True：2；False：1, 3, 4

例(98 成大)：G=(V, E), |V|=n ≥ 3，若 G 中恰含一個點，degree 是偶數，問 ~~G~~中，degree 是偶數之點數為何？

1

Note：

1. Maximal Path：一條 Path 之 2 端點，無法再延伸
2. Maximal Path 必存在

定理：

$G=(V, E)$

1. 若 $deg(v) \geq 2, \forall v \in V$，則 G 含 Cycle
2. 若 $deg(v) \geq k, \forall v \in V$，則 G 含 Cycle 數 $\geq k+1$

證明：

1. 任取一條 Maximal Path：$P(v_1, \ldots, v_m)$，因為 $deg(v_1) \geq 2 \Longrightarrow \exists\, i \geq 3 \ni v_1$ 與 v_i 相連，得$(v_1, \ldots, v_i, v_1)$為一 Cycle
2. 同理，因為 $deg(v_1) \geq k$, $\therefore \exists\, i \geq k+0$, v_1 與 v_i 相連，得$(v_1, \ldots, v_i, v_1)$為一 Cycle，長 $i \geq k+1$

定理(3 個)：

$G=(V, E)$：Connected $\Longrightarrow |E| \geq |V|-1$

證明：

by induction on $|V|$,

1. $|V|=1$ 時成立
2. 設$|V|<n$ 時成立，考慮$|V|=n$
3. 任取一點 v，$deg(v) = m$,則 G-V 形成 k 個 Components, $G_1(V_1, E_1), \ldots, G_k(V_k, E_k)$, $1 \leq k \leq m$，所以 G_i is Connected 且$|V_i|<n$
4. $|E| = |E_1|+\ldots+|E_k| + m \geq (|V_1|-1)+\ldots+(|V_k|-1) + m = |V_1|+\ldots+|V_k| + (m-k)$
   $= |V| -1 + (m-k) \geq |V|-1$

定理：

$G=(V, E)$, $V=\{V_1, \ldots, V_n\}$，A 為 G 之 Adjacency Matrix $\Longrightarrow A^r$ 之第(i, j)項為 V_i 至 V_j，長 r 之 Walk 個數

Note：

$1/6\ tr(A^3)$為 G 之三角形個數

Note：

$V=\{1, \ldots, n\}$

1. 由 V 造出來之 Simple Graph 個數：$2^{(n, 2)}$
2. 其中含 Δ123 之個數：$2^{(n, 2)-3}$

6.4 Euler Circuit 與 Hamilton Cycle

定義：

G=(V, E)

1. Euler Circuit：經過 G 中每一邊恰好一次之 Circuit
2. Euler Trail：經過 G 中每一邊恰好一次之 Trail
3. Hamilton Circuit：經過 G 中每一點恰好一次之 Circuit
4. Hamilton Trail：經過 G 中每一點恰好一次之 Trail

定理：

G=(V, E)：Simple 或 Multi-graph，G 具 Euler Circuit ⇔ G is connected 且∀ v ∈ V, deg(v)為偶數

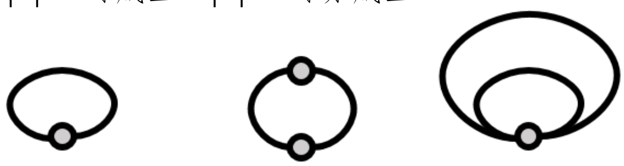
證明：

⟹：Trival

⟸：

By Induction on |E|

1. |E|=1 時成立，|E|=2 時亦成立

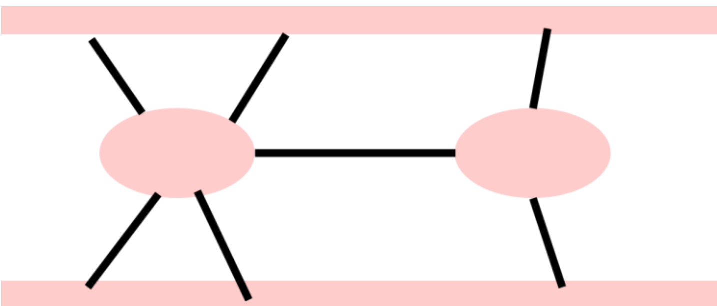


2. 設|E|<m 時成立，G 中任取一條 Circuit C，若 C 含所有邊，則 C 為 Euler Circuit，否則 G 中去掉 C 之所有邊後，再把孤立點去掉，形成 k 個 Component：$G_1=(V_1, E_1), \ldots, G_k=(V_k, E_k)$。因此 G_i 為 Connected 且$|E_i|<m$，且所有 degree 為偶數
3. by Induction, G_i 具 Euler Circuit，∀ i=1, …, k，沿著 C 依序拜訪被去掉的孤立點，及每個 G_i 之 Euler Circuit，得 G 為一 Euler Circuit

推廣：

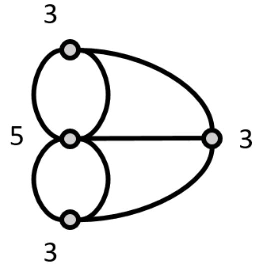
G=(V, E)具 Euler Trail ⇔ G 為 Connected 且 G 中恰含 0 或 2 個點，其 degree 為『奇數』

例：七橋問題



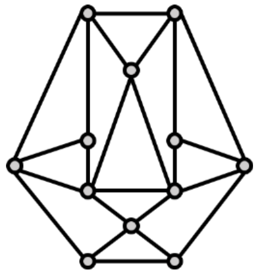
⟹ 無 Euler Cycle，亦無 Euler Trail

例：以下是否為 Euler Circuit？



否

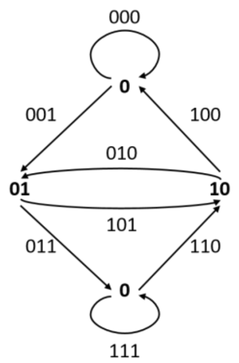
例：以下是否為 Euler Circuit？



是

例：圓上填 4 個 0、4 個 1，保證任三個連續 bit 皆相異

證：造一有向圖 G=(V, E)
V = {00, 01, 10, 11}
E = {(b1b2, b2b3)}



定理(5 個)：
k_n^*具 Hamilton Path

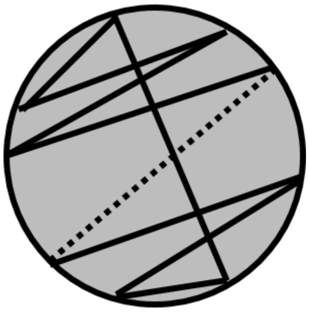
證明：
任取一條 Path $P=(V_1, \ldots, V_m)$若 P 含所有點，得證；否則至少存在一點 V_x 不存在 P 中

1. 若 V_x 連向 V_1，取$(V_x, V_1, \ldots, V_m)$
2. 若$\exists\, i \ni V_i$ 連向 V_x，且 V_x 連向 V_{i+1}，取 $V_1, \ldots, V_i, V_x, \ldots, V_m$
3. 否則，V_m 必定連向 V_x，取$(V_1, \ldots, V_m, V_x)$

Note：

1. k_n 具 Euler Circuit ⇔ n 為奇數
2. k_n 具 Hamilton Circuit
3. k_n 中，相異 Hamilton Circuit 個數為(n-1)!
4. k_n 中，不具共同邊之 Hamilton 個數為(n-1)/2　　*//n 為奇數*

   k_n 之邊數 $= C_2^n$，每包含 n 個邊，所以至多(n-1)/2 條



每次轉一格，可得一條 Hamilton Circurt，總共轉了(n-1)/2 – 1 次，得到(n-1)/2 條 Hamilton Circuit

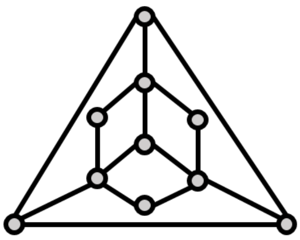
例(98 逢甲)：11 人圓桌取餐，至少幾次保證任三人皆曾相鄰？

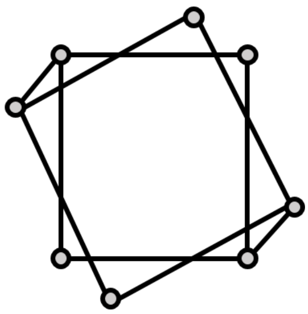
(11-1)/2 = 5

Note：

1. 如何判斷具 Hamilton Circuit：畫出來　　*//WTF*
2. 如何判斷不具 Hamilton Cirucuit：Hamilton Circuit 過每點之恰 2 邊

例：



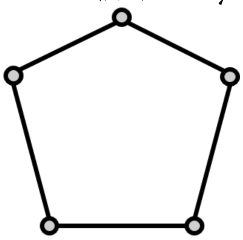


1. *無 Hamilton Circuit*
2. *無 Hamilton Circuit*

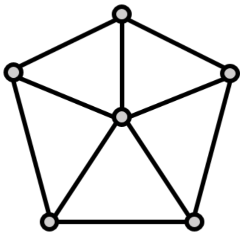
*Special Graph：

1. P_n：n 個點之 Path(P_6)

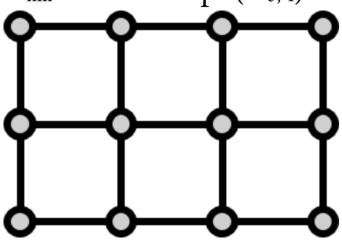
2. C_n：n 個點之 Cycle(C_5)



3. W_n：n+1 個點之 Wheel(W_5)



4. G_{mn}：Grid Graph($G_{3,4}$)



5. Qn：n-cube：
   (1) 點數：2^n
   (2) degree：n
   (3) 邊數：$n \times 2^{n-1}$

例(9 個)：證：Q_n 具 Hamilton Circuit, $\forall$ n≥2

定義 Gray Code：G_N, G_1=0, 1, G_1r=1, 0

$G_2 = 0G_1, 1G_1^r$ = 00, 01, 11, 10

G_2^r = 10, 11, 01, 00

$G_3 = 0G_2, 1G_2^r$ = 000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100

$G_n = 0G_{n-1}, 1G_{n-1}^r$

則 G_n 為 n-cube 之一 Hamilton Circuit

定理：

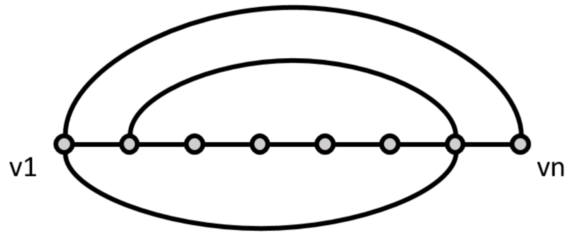
G=(V, E), |V|=n

1. 若$\forall$ x≠y ∈ V, deg(x) + deg(y) ≥ n-1 ⟹ G 具 Hamilton Path

2. 若 G 中任 2 個不相鄰 x, y，滿足 $\deg(x)+\deg(y) \geq n$，則 G 具 Hamilton Circuit

證明：

1. 設 G 不具 Hamilton Circuit，G 中加邊變成 H，使 H 中再加入任一邊，將具 Hamilton Circuit(H 不具 Hamilton Circuit)
   任取一邊 $e = (a, b)$不在 H 中，則 H 加 e 具 Hamilton Circuit，設 $C(V_1, \ldots, V_n, V_1)$為 Hamilton Circuit。若 b 與 V_i 相連，則 a 必定不與 V_{i-1} 相連，否則 H 具 Hamilton Circuit，如



2. 設 $\deg_H(b) = k$，則 H 中至少 k 個點不與 a 相連，所以 $\deg_H(a) \leq (n-1)-k$，因此 $\deg_H(a)+\deg_H(b) \leq n-1$，與 $\deg_G(a)+\deg_G(b) \geq n-1$ →←

Note：

$G=(V, E), |V|=n$，若$|E| \geq C_2^{n-1} + 2 \Longrightarrow$ G 具 Hamilton Circuit

定義：

$G=(V, E)$，若 V 可分割成 $V=V_1 \cup V_2$，$V_1 \cap V_2=\Phi$，使 V_1 與 V_2 皆為 Independent Set，稱 G 為一 Bipartite Graph(雙分圖、二分圖)，記作 $G=(V_1 \cap V_2, E)$

當 G 具有最大邊數時，稱 G 為 Complete Bipartite Graph，記作 $K_{m, n}$

$(m=|V_1|, n=|V_2|)$

Note：

1. $K_{m, n}$之邊數$=m \times n$
2. $K_{m, n}$具 Euler Circuit，當 m, n 為偶數

Note：

$G=(V_1 \cap V_2, E)$：Bipartite

1. G 具 Hamilton Circuit
2. G 具 Hamilton Path $\Longrightarrow |V_1| = |V_2|$
3. $K_{m, n}$具 Hamilton Circuit $\Leftrightarrow m=n \geq 2$
4. $K_{m, n}$具 Hamilton Path $\Leftrightarrow |m-n| \leq 1$
5. $K_{n, n}$中相異 Hamilton Circuit 個數 $= 1/2 \times n! \times (n-1)!$

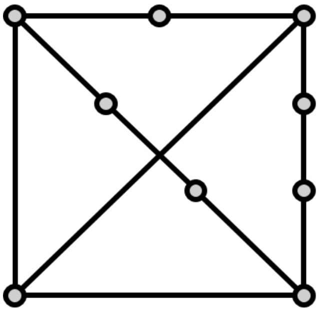
6.5 平面圖

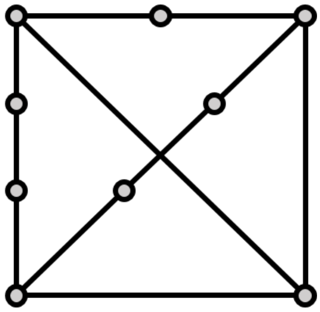
定義：

G=(V, E)，若 G 可在平面上，redraw 使任 2 邊皆不產生 Cross，稱 G 為 Planar Graph，$k_1, \ldots, k_4$：Planar

定義：

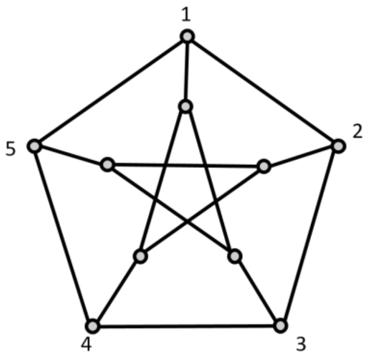
1. G=(V, E)，G 中去掉一個邊 e=(a, b)，加入一個點 z，2 個邊(a, z), (b, z)，稱 G 之一 Elementary Sub-division(基本區分)
2. $G_1=(V_1, E_1)$, $G_2=(V_2, E_2)$，若 G_1 與 G_2 皆可由某個 H 作若干次基本區分獲得，稱 G_1 與 G_2 Homomorphic(同胚)

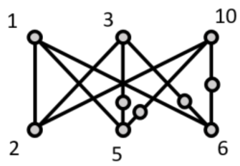




定理：(Kuratowski)
G=(V, E)，G 為 Planar Graph ⇔ G 不具子圖與 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚

Peterson Graph：Non-Planar

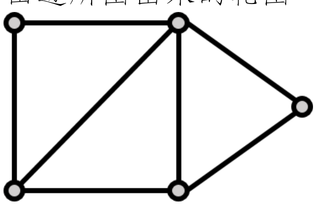




定義：

G=(V, E)：Planar Graph

由邊所圍出來的範圍，稱為 Region of Face



5-7+4=2

v-e+r = 2

定理：
G=(V, E)：Connected Planar, |V|=v, |E|=e, r 表 Region 個數，則 v-e+r=2

例(99 台大)：G：Connected Planar，v=12，每個點 degree=3，求 r=？

12-e+r = 2
*e = 3*12/2 = 18*
⟹ r=8

例(97 政大)：G：Planar, |V|=30, e=50, κ(G)=5，求 r=？

$v-e+r = (v_1-e_1+r_1) + \ldots +(v_5-e_5+r_5) - 4 = 6$
$\Longrightarrow 30-50+r-4 = 6 \Longrightarrow r=30$

Note：
G：Planar Graph ⟹ v-e+r = 1+ κ(G)

定理(13 個)：
G=(V, E)：Connected Planar ⟹ (3/2)r ≤ e ≤ 3v-6

證明：
令 N 表所有 Region 之 Degree 總和，則 2e=N ≥ 3r ⟹ e ≥(3/2)r
代入 Euler Formula
2 = v-e+r ≤ v-e + (2/3)e = v-(1/3)e ⟹ 6 ≤ 3v – e ⟹ e ≤ 3v-6

Note：
G is connected，若 e > 3v-6，則 G 必為 Non-planar

例(12 個)：證 K_5 is non-planar？
v=5, e=10 > 3v-6 = 9

定理：
G：Connected Planar，若每一個 Cycle 至少含 k 個邊，則 e ≤ k/(k-2) × (v-2)

證明：
2e = N ≥ k×r ⟹ r ≤ (2/k)×e 代入 Euler Formula
2 = v-e+r ≤ v-e+(2/k)e = v-[(k-2)/k]×e ⟹ (k-2)/k×e ≤ v-2
⟹ e ≤ k/(k-2) × (v-2)

Note：G：Connected，若 G 為 Bipartite 或 Trangle-Free ⟹ v ≤ 2v – 4

例(11 個)：證：$K_{3,3}$ is non-planar？
v=6, e=9 e> 2v-4 = 8

定理(13 個)：

G=(V, E)：Connected Planar，則 G 存在一點 degree ≤ 5

證明：

(矛盾證法)

設對$\forall$ $a \in V$, $\deg(a) \geq 6$，則 $2e = \sum \deg(a) \geq 6v$

$e \geq 3v$ $\rightarrow\leftarrow$

$e \leq 3v - 6$

6.6 著色理論

定義：

G=(V, E)

1. 對 G 之點著色，使有邊相連之點，著不同顏色，稱 Proper Coloring
2. 若 G 可用 n 種顏色作正當著色，則稱為 n-Colorable
3. 其中最小的 n，稱為 G 之 Chromatic Number，記作 X(G)

Note：

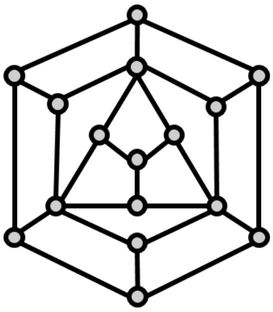
1. $X(K_n) = n$
2. $X(K_{m,n}) = 2$
3. $X(P_n) = 2$
4. $X(C_n) = 2$ if even, 3 if odd($\neq 1$)

5. $X(W_n) = 3$ if even, 4 if odd $= 1 + X(C_n)$

定理：(四色問題)
G=(V, E), G is Planar $\Longrightarrow$ G：4-colorable

定理：
G is bipartite graph $\Leftrightarrow$ G is 2-colorable $\Leftrightarrow$ G 中不含奇數長之 Cycle

例：是否具 Hamilton Circuit？



因為 2-colorable $\Longrightarrow$ bipartite, $|V_1|=9$, $|V_2|=7$ $\Longrightarrow$ 非 Hamilton Circuit

例(96 中央)：期末考不衝堂，保證不衝堂，如何排？

定義：

G=(V, E), λ：顏色數，定義 G 之 Chromatic Polynomial P(G, λ)表示至多用 λ 種顏色對 G 作正當著色之方法數

$P(G, \lambda) = \lambda(\lambda-1)$

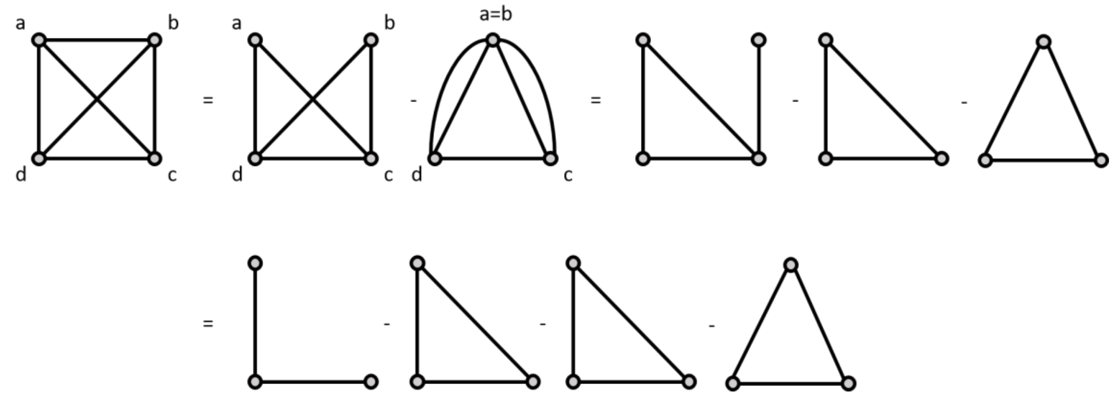
Note：

1. $X(G) = \min\{\lambda \mid P(G, \lambda) > 0\}$
2. $P(kn, \lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-n+1)$
3. $P(Pn, \lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-1}$

例(97 元智)：$P(C_4, \lambda) =$ ？

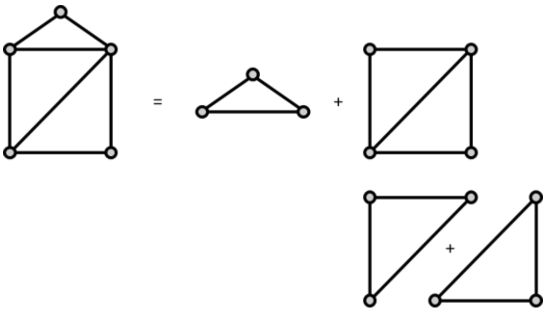
$\lambda(\lambda-1)^2 + \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2$

Note：



定理：
若 $G=G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2 = K_n$, 則 $P(G,\lambda) = [P(G_1,\lambda)P(G_2,\lambda)] / P(K_n,\lambda)$

例(99 中山)：求 $P(G,\lambda)=$?



$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) \times [\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)] / [\lambda(\lambda-1)] = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^3$

例(96 清大)：求 $P(C_n,\lambda)=$?

令 $a_n = P(C_n,\lambda)$, $P(C_n,\lambda) = P(P_n,\lambda) - P(C_{n-1},\lambda)$

$a_n = \lambda(\lambda-1)^{n-1} - a_{n-1}$

$a_3 = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$