FACULTY OF IT-HCMUS

Mathematical Method in Visual Data Analysis

Lecturer: Assoc Prof. Lý Quốc Ngọc

HCMc, 10-2022

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

fit@hcmus

Mathematical Method in Visual Data Analysis

Lecture 6:
Optimization Method

Lecturer: Assoc Prof. Lý Quốc Ngọc

TRUONG DAI HOC KHOA HOC TU NHIEN
TP. HO CHI MINH
KHTN

cdio 4.0

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

fit@hcmus

Content

6.1. Unconstrained Optimization

6.2. Constrained Optimization

6.1. Unconstrained Optimization

Problem Statement

Given a function $f: R^n \to R$ and a set $S \subset R^n$, we seek $x \in S$ Such that f attains a minimum on S at x, i.e,

$f(x) \leq f(y) \quad \forall y \in S.$

The objective function, f, may be linear or nonlinear.
The constrained set S is usually defined by a system of equations or inequalities, or both, that may be linear or nonlinear.

6.1. Unconstrained Optimization

Problem Statement

If $S = R^n$ then the problem is unconstrained.

General continuous optimization problems have the form

$$\min_x f(x) \text{ subject to } \quad g(x) = 0, h(x) \leq 0$$

$$f : R^n \to R,\ g : R^n \to R^m,\ h : R^n \to R^k$$

6.1. Tối ưu không ràng buộc

Tối ưu cục bộ, tối ưu toàn cục

Hàm f có cực tiểu toàn cục tại x^* nếu

$$f(x^*) \le f(x), \forall x \in S$$

Hàm f có cực tiểu cục bộ tại x^* nếu

$$f(x^*) \le f(x), \; \| x - x^* \| < \varepsilon$$

6.1. Tối ưu không ràng buộc

Tối ưu không ràng buộc

Điều kiện cần để x^* là điểm cực trị của $f : R^n \rightarrow R$ là

$$\nabla f(x^*) = 0$$

Điều kiện đủ để x^* là điểm cực tiểu, cực đại, yên ngựa là

Nếu $H_f(x)$ xác định dương $(x^T H_f x > 0)$ thì x^* là điểm cực tiểu.

Nếu $H_f(x)$ xác định âm $(x^T H_f x < 0)$ thì x^* là điểm cực đại.

Nếu $H_f(x)$ không xác định thì x^* là điểm yên ngựa.

$$\{H_f(x)\}_{ij} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$$

6.1. Tối ưu không ràng buộc

Tối ưu không ràng buộc

Vd: $$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + O(h^3),$$

$$f : R \to R$$

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ f''(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x+h) = f(x) + \frac{f''(x)}{2}h^2 > f(x)$$

6.1. Tối ưu không ràng buộc

Tối ưu không ràng buộc

Vd: $f(x+h) = f(x) + J(x)h + \frac{1}{2}h^T H(x)h + O(\|h\|^3),$

$$f : R^n \to R$$

$$\begin{cases} J(x) = 0 \\ h^T H(x)h > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x+h) = f(x) + \frac{1}{2}h^T H(x)h > f(x)$$

6.1. Tối ưu không ràng buộc

Tối ưu không ràng buộc

Vd:

$$J(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \; \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right],$$

$$H(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2{}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \ldots\ldots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n{}^2} \end{bmatrix}$$

6.2. Tối ưu có ràng buộc

Tối ưu có ràng buộc

Cực tiểu hàm mục tiêu phi tuyến với ràng buộc đẳng thức phi tuyến

$$\min_x f(x), \quad g(x) = 0$$

$f : R^n \to R,\ g : R^n \to R^m, \mathrm{m} \le \mathrm{n}$

Để x là lời giải của bài toán, cần thỏa

$$-\nabla f(x) = J_g^T(x)\lambda,$$

$J_g(x)$ là ma trận Jacobi của g

λ là vectơ nhân tử Lagrange m chiều

6.2. Tối ưu có ràng buộc

Tối ưu có ràng buộc

Xét hàm Lagrange $L : R^{n+m} \to R$,

$$L(x,\lambda) = f(x) + \lambda^T g(x)$$

$$\nabla L(x,\lambda) = \begin{bmatrix} \nabla_x L(x,\lambda) \\ \nabla_\lambda L(x,\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f(x) + J_g^T(x)\lambda \\ g(x) \end{bmatrix}$$

$$H_L(x,\lambda) = \begin{bmatrix} B(x,\lambda) & J_g^T(x) \\ J_g(x) & O \end{bmatrix}$$

$$B(x,\lambda) = \nabla_{xx} L(x,\lambda) = H_f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i H_{g_i}(x)$$

6.2. Tối ưu có ràng buộc

Tối ưu có ràng buộc

Điểm cực trị của bài toán thỏa

$$\nabla L(x,\lambda) = \begin{bmatrix} \nabla_x L(x,\lambda) \\ \nabla_\lambda L(x,\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f(x) + J_g^T(x)\lambda \\ g(x) \end{bmatrix} = 0$$

Điều kiện đủ để đạt cực tiểu tại x là $B(x,\lambda)$ xác định dương.

6.2. Tối ưu có ràng buộc

Tối ưu có ràng buộc

Vd: cực tiểu hàm dạng toàn phương

$$f(x) = 0.5x_1^2 + 2.5x_2^2$$

Với ràng buộc

$$g(x) = x_1 - x_2 - 1 = 0$$

Hàm Lagrange được xác định bởi

$$L(x,\lambda) = f(x) + \lambda^T g(x) = 0.5x_1^2 + 2.5x_2^2 + \lambda(x_1 - x_2 - 1)$$

6.2. Tối ưu có ràng buộc

Tối ưu có ràng buộc

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 5x_2 \end{bmatrix} \quad và \quad J_g(x) = [1 \quad -1]$$

$$\nabla_x L(x,\lambda) = \nabla f(x) + J_g^T(x)\lambda = \begin{bmatrix} x_1 \\ 5x_2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

6.2. Tối ưu có ràng buộc

Tối ưu có ràng buộc

Điểm cực trị là nghiệm của hệ phương trình

$$x_1 + \lambda = 0,$$

$$5x_2 - \lambda = 0,$$

$$x_1 - x_2 = 1,$$

Dưới dạng ma trận, ta có

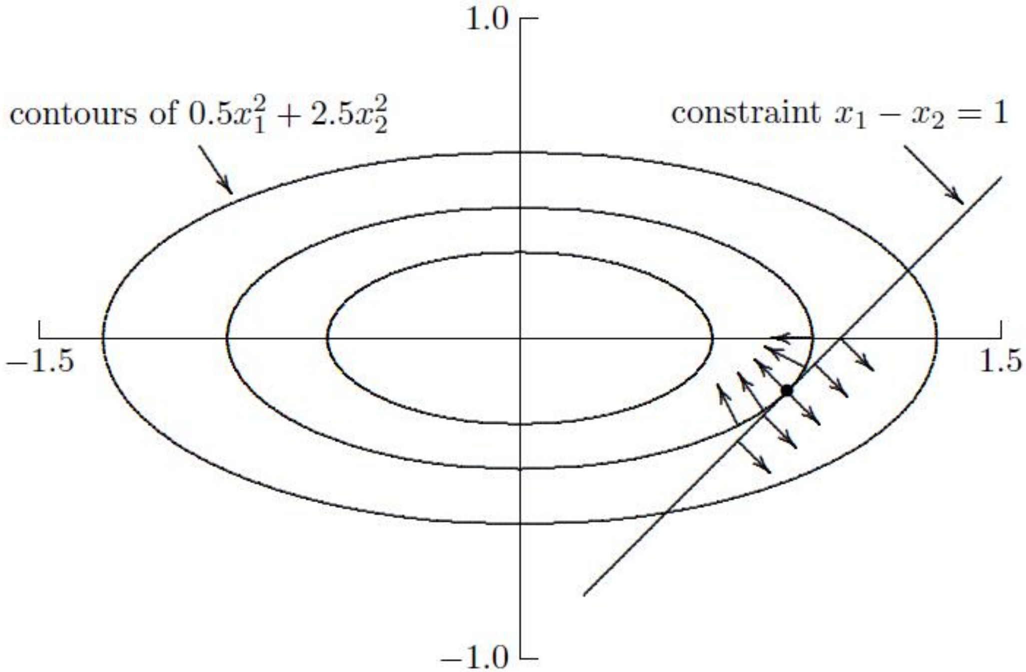
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6.2. Tối ưu có ràng buộc

Tối ưu có ràng buộc

Giải hệ phương trình trên, ta được nghiệm

$$x_1 = 0.833,\ \ x_2 = -0.167,\ \ \lambda = -0.833$$



6.2. Tối ưu có ràng buộc

Tối ưu có ràng buộc

Vd: cực tiểu hàm dạng toàn phương

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

Với ràng buộc

$$g(x,y) = x + y = 10$$

Hàm Lagrange được xác định bởi

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 10)$$

6.2. Tối ưu có ràng buộc

Tối ưu có ràng buộc

Vd: cực tiểu hàm dạng toàn phương

Điều kiện cần để đạt cực trị

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 10 = 0 \Rightarrow -\frac{\lambda}{2}.2 = 10 \Leftrightarrow \lambda = -10$$

Điểm dừng là (5;5;-10)

6.2. Tối ưu có ràng buộc

Tối ưu có ràng buộc

Điều kiện đủ để đạt cực tiểu

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2, \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = 2(dx^2 + dy^2) > 0$$

$$f_{\min} = f(5,5) = 5^2 + 5^2 = 25$$