KỶ YẾU

KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN-HỌC SINH LẦN THỨ 31

Thành phố Hồ Chí Minh, 31/3-5/4/2025

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

VMS

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SÀI GÒN

ĐẠI HỌC SÀI GÒN
SGU
SAIGON UNIVERSITY

HỘI TOÁN HỌC
VIỆT NAM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
SÀI GÒN

KỶ YẾU

KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC
SINH VIÊN-HỌC SINH LẦN THỨ 31

BIÊN TẬP

Ngô Quốc Anh
Trường ĐH Khoa học Tự nhiên-ĐHQG Hà Nội
Đào Phương Bắc
Trường ĐH Khoa học Tự nhiên-ĐHQG Hà Nội
Đoàn Trung Cường
Hội Toán học Việt Nam & Viện Toán học
Nguyễn Thị Khuyên
Viện Toán học

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH - 2025

GIỚI THIỆU

Kỳ thi Olympic Toán học Sinh viên - Học sinh lần thứ 31 dành cho sinh viên các trường đại học và học sinh phổ thông các trường chuyên trong cả nước đã diễn ra trong tháng 3 và tháng 4 năm 2025. Phần thi dành cho học sinh phổ thông được thực hiện trực tuyến và phần thi của sinh viên đại học đã diễn ra tại Trường đại học Sài Gòn trong thời gian 31/3-5/4/2025. Quyển kỷ yếu này chủ yếu dành để lưu lại thông tin của kỳ thi, bao gồm đề thi chính thức, và tập hợp các bài đề xuất của các trường tham dự kỳ thi với mong muốn cung cấp thêm một tài liệu tham khảo cho những người quan tâm. Do thời gian biên tập khá ngắn nên ngoài một số bài được biên tập tương đối kỹ càng, có một số bài chúng tôi giữ nguyên cách trình bày như đề xuất, công tác biên tập trong trường hợp đó là đánh máy lại, kiểm tra tính chính xác về nội dung và chính tả.

Nhóm biên tập

Mục lục

Phần I

KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN-HỌC SINH LẦN THỨ 31

Thông tin về kỳ thi

Thông tin chung

Hằng năm, kỳ thi Olympic Toán học Sinh viên-Học sinh do Hội Toán học Việt Nam tổ chức đã trở thành một sự kiện thường niên đầy ý nghĩa để sinh viên các trường đại học, học viện và học sinh các trường trung học hội tụ, giao lưu và tranh tài trong lĩnh vực toán học. Kỳ thi góp phần nâng cao chất lượng dạy và học toán, thúc đẩy niềm say mê toán học và phong trào học tập của sinh viên và học sinh, đồng thời góp phần phát hiện, bồi dưỡng các tài năng toán học. Kỳ thi đã thu hút sự tham gia của đông đảo sinh viên và học sinh yêu thích môn Toán, nhận được sự ủng hộ tuyệt vời của các giảng viên giảng dạy môn Toán ở các trường đại học và các thầy cô giáo dạy phổ thông, cũng như sự ủng hộ của các trường đại học, các trường trung học trên cả nước.

GS.TSKH. Vũ Hoàng Linh, Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam, phát biểu tại Lễ bế mạc kỳ thi.
Nguồn: Trường ĐH Sài Gòn

Kỳ thi Olympic Toán học Sinh viên-Học sinh năm 2025 được Hội Toán học Việt Nam và Trường Đại học Sài Gòn phối hợp tổ chức dưới sự bảo trợ của Liên hiệp các hội Khoa học và Kỹ thuật Việt Nam và TW Hội Sinh viên Việt Nam. Phần thi dành cho Khối THPT đã diễn ra từ ngày 8-9/3 theo hình thức trực tuyến và Phần thi dành cho khối đại học được tổ chức tại Trường Đại học Sài Gòn trong tuần này, từ 31/3 – 5/4.

Khối phổ thông

Năm 2025, 40 trường phổ thông đã tham gia kỳ thi, tổng cộng có 430 học sinh, tăng so với năm 2024. Ngoài các trường chuyên công lập, năm nay rất mừng có sự tham gia của một số trường chất lượng cao thuộc khối tư thục.

Trong hai ngày 8-9/3/2025, các học sinh đã làm hai bài thi về Hình học và Tổ hợp. Ban Tổ chức đã mời các nhà khoa học và các thầy cô giáo có nhiều uy tín giảng dạy ở các trường phổ thông tham gia công tác ra đề và chấm thi. Công tác coi thi và chấm thi đã nhận được sự hỗ trợ hiệu quả của Trường đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQG Hà Nội và Viện Toán học - Viện Hàn lâm KHCN Việt Nam.

Theo truyền thống của kỳ thi, số giải chính thức được trao cho không quá 50% số thí sinh, tương tự như tỷ lệ của kỳ thi Olympic Toán quốc tế và một số kỳ thi khác. Cụ thể, Ban tổ chức đã quyết định trao 214 giải chính thức, gồm 33 Giải Nhất, 76 Giải Nhì, 105 Giải Ba. Ngoài ra có 42 học sinh có thành tích tốt đã được trao giải khuyến khích.

PGS.TS. Đoàn Trung Cường, Phó chủ tịch kiêm Tổng thư ký Hội Toán học Việt Nam, Trưởng ban Tổ chức kỳ thi, trao huy chương cho học sinh đạt giải. *Nguồn: Trường ĐH Sài Gòn*

Khối đại học

Năm nay khối đại học thi sớm hơn so với một số năm gần đây để tránh Lễ giỗ Tổ Hùng Vương và tránh việc tổ chức gần ngày lễ 30/4, có thể sẽ khó khăn cho các đoàn trong việc đi lại và đặt khách sạn. Tổng cộng có 90 trường đại học, học viện đã tham gia với 749 lượt thí sinh thi hai môn Đại số và Giải tích, chia thành hai bảng A, B.

Năm 2025 có một thay đổi khá lớn là một số quy chế của kỳ thi được điều chỉnh theo Quyết định 3566/QĐ-BGDĐT ngày 15/11/2024 của Bộ Giáo dục và Đào tạo về việc công nhận các kỳ thi olympic ở bậc đại học. Ví dụ Ban Tổ chức kỳ thi năm nay chỉ nhận đăng ký theo đoàn của các trường và không nhận đăng ký của một số sinh viên mà trường của em đó không thành lập đội tuyển.

Về kết quả, điểm cao nhất của môn Đại số bảng A là 28/30, bảng B là 25,5/30; Môn Giải tích bảng A là 26/30 và bảng B là 30/30. Nhìn chung điểm bảng A phân hoá khá mạnh, trong khi bảng B tương đối tập trung ở mức thấp. Nhiều thí sinh đã thể hiện tư duy độc lập, cách giải sáng tạo, năng lực vận dụng toán học vào giải quyết các bài toán thực tiễn.

Tối ngày 3/4/2025, Ban Tổ chức và trưởng đoàn của 90 đoàn tham dự Olympic Toán học Sinh viên-Học sinh năm 2025 đã họp, trao đổi về kết quả chung và thống nhất các mức điểm để trao giải Nhất, Nhì, Ba cho hai bảng A, B. Năm nay khả năng được giải chính thức khó hơn năm trước do tổng số giải không vượt quá 40% tổng số thí sinh, theo quy định trong Quyết định 3566/QĐ-BGDĐT. Như vậy so với những năm trước, tổng số giải chính thức giảm khoảng 20%.

Căn cứ theo mức điểm đã được cuộc họp các trưởng đoàn thống nhất, Ban Tổ chức quyết định trao tổng cộng 300 giải chính thức và 73 giải khuyến khích cho các thí sinh đạt kết quả cao trong kỳ thi, trong đó:

- Môn Đại số:
  - Bảng A: 11 Giải nhất, 19 Giải nhì, 29 Giải 3, 10 Giải Khuyến khích.
  - Bảng B: 17 Giải nhất, 29 Giải nhì, 53 Giải 3, 18 Giải Khuyến khích.
- Môn Giải tích:
  - Bảng A: 09 Giải nhất, 20 Giải nhì, 25 Giải 3, 18 Giải Khuyến khích.
  - Bảng B: 18 Giải nhất, 27 Giải nhì, 43 Giải 3, 27 Giải Khuyến khích.

Tổng hợp, bảng A có 20 giải Nhất, 39 giải Nhì, 54 giải Ba; Bảng B có 35 giải Nhất, 56 giải Nhì, 96 giải Ba.

GS.TSKH. Vũ Hoàng Linh-Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam và đ/c Trần Thu Hà-Phó chủ tịch Trung ương Hội Sinh viên Việt Nam trao huy chương vàng và Bằng khen Trung ương Hội Sinh viên Việt Nam cho các sinh viên đạt giải nhất. *Nguồn: Trường ĐH Sài Gòn*

Trong các thí sinh đạt giải Nhất có 6 thí sinh có thành tích đặc biệt, là thủ khoa một môn hoặc nhất cả hai môn trong một bảng, giảm đáng kể so với năm 2024.

Bà Trần Thị Diệu Thúy - Phó Chủ tịch UBND Thành phố Hồ Chí Minh, và GS.TSKH. Vũ Hoàng Linh trao hoa và Bằng khen của Hội Toán học Việt Nam cho sáu sinh viên xuất sắc. *Nguồn: Trường ĐH Sài Gòn*

Một số trường có thành tích cao:

- Bảng A: Trường Đại học Sư phạm Tp. Hồ Chí Minh, Trường Đại học Bách khoa-ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh, Đại học Bách Khoa Hà Nội.
- Bảng B: Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông.

Trong thời gian tổ chức kỳ thi, Ban Tổ chức đã tổ chức một số hoạt động bên lề:

- Hai bài giảng về Hình học và Tổ hợp cho học sinh trên toàn quốc đã thu hút khoảng 500 học sinh và giáo viên các trường phổ thông đăng ký tham gia theo hình thức trực tuyến.
- Tọa đàm: "Toán học – Nền tảng cho nghề nghiệp thời đại AI: Từ học tập đến ứng dụng" tại Trường Đại học Sài Gòn vào ngày 4/4/2025, thu hút khoảng 300 sinh viên và giảng viên của các đoàn tham gia kỳ thi năm nay cũng như các trường trong khu vực Tp. Hồ Chí Minh.

Kỳ thi Olympic Toán học Sinh viên-Học sinh năm 2026 sẽ được tổ chức tại Trường đại học Quy Nhơn.

PGS.TS. Phạm Hoàng Quân - Hiệu trưởng Trường Đại học Sài Gòn trao cờ luân lưu đăng cai Kỳ thi Olympic Toán học Sinh viên và Học sinh lần thứ 32 cho PGS.TS. Đoàn Đức Tùng - Hiệu trưởng Trường Đại học Quy Nhơn. *Nguồn: Trường ĐH Sài Gòn*

Bài phát biểu của PGS.TS. Phạm Hoàng Quân - Hiệu trưởng Trường ĐH Sài Gòn tại Lễ Khai mạc

Kính thưa quý vị đại biểu, quý Thầy, Cô giáo và các em sinh viên thân mến!
Đầu tiên, thay mặt đội ngũ sư phạm Nhà trường, tôi xin gửi lời chúc sức khoẻ, lời chào trân trọng và nồng nhiệt đến toàn thể quý vị đại biểu, quý Thầy, Cô giáo và các em sinh viên đã đến tham dự Lễ Khai mạc Kỳ thi Olympic Toán Sinh viên và Học sinh lần thứ 31 tại Trường Đại học Sài Gòn ngày hôm nay.
Kính thưa quý vị đại biểu, các em sinh viên thân mến!
Toán học đã ra đời cách đây hàng nghìn năm, có nguồn gốc từ nhiều nền văn hóa khác nhau với quá trình phát triển bắt nguồn từ Số đếm đến Hình học, Đại số và dần hình thành nên các lĩnh vực Toán học thuần túy và Toán học Ứng dụng ngày nay. Toán học Việt Nam cũng không nằm ngoài sự phát triển đó. Học sinh Việt Nam tham dự các kỳ thi Olympic Toán học quốc tế luôn đạt thành tích đáng tự hào, trong đó có nhiều thí sinh đã trưởng thành từ các Kỳ thi Olympic Toán học Sinh viên và Học sinh hằng năm do Hội Toán học Việt Nam tổ chức.

PGS.TS. Phạm Hoàng Quân, Hiệu trưởng Trường Đại học Sài Gòn, Phó chủ tịch Hội Toán học Việt Nam, phát biểu khai mạc kỳ thi. *Nguồn: Trường ĐH Sài Gòn*

Kỳ thi là hoạt động thường niên được các thế hệ sinh viên, học sinh, các thầy cô giáo yêu mến Toán học cả nước chờ đón. Kỳ thi năm nay càng có ý nghĩa đặc biệt hơn sau hơn 20 năm kể từ khi trường Đại học Bách khoa Thành phố Hồ Chí Minh đăng cai tổ chức vào năm 2003, Trường Đại học Sài Gòn rất vinh dự được đăng cai tổ chức Kỳ thi Olympic Toán Sinh viên và Học sinh lần thứ 31 trong không khí cả nước hân hoan chào mừng kỷ niệm 50 năm Ngày giải phóng miền Nam, thống nhất đất nước (30/4/1975-30/4/2025). Đặc biệt hơn nữa, ngày 30/3 vừa qua, Chủ tịch UBND Thành phố Hồ Chí Minh xếp hạng Trường Đại học Sài Gòn là di tích kiến trúc nghệ thuật cấp thành phố.

Kính thưa quý vị đại biểu, các em sinh viên thân mến!

Sự kiện hôm nay là một minh chứng rõ nét cho tài năng và tinh thần cầu thị, ham học hỏi của thế hệ trẻ Việt Nam, 649 thí sinh đại diện cho hàng trăm ngàn sinh viên Việt Nam năng động, sáng tạo đến từ 90 trường Đại học, Học viện trên cả nước đã hội tụ tại Trường Đại học Sài Gòn ngày hôm nay, tạo nên một không khí học thuật sôi động và đầy hứng khởi.

Nhân đây, tôi cũng chân thành cảm ơn sự quan tâm chỉ đạo của lãnh đạo Thành ủy, UBND Thành phố Hồ Chí Minh; các đơn vị tài trợ đã ủng hộ, đồng hành cùng Ban Tổ chức kỳ thi. Cảm ơn Hội Toán học Việt Nam, Trung ương Hội Sinh viên Việt Nam, đã tin tưởng chọn Trường Đại học Sài Gòn là đơn vị đăng cai tổ chức Kỳ thi năm nay.

Mong rằng quý Thầy, Cô giáo và các em sinh viên tham gia Kỳ thi tại Trường Đại học Sài Gòn sẽ có những trải nghiệm bổ ích, những kỷ niệm đẹp, từ đó bồi đắp thêm cho niềm đam mê Toán học và không ngừng nỗ lực để đóng góp nhiều hơn nữa cho sự phát triển của đất nước.

Thay mặt tập thể sư phạm nhà trường, tôi kính chúc quý vị đại biểu, quý Thầy, Cô giáo và các em sinh viên luôn mạnh khỏe, hạnh phúc và thành công; Đặc biệt, Thầy gửi lời chúc đến các bạn sinh viên bình tĩnh, tự tin, thể hiện hết mình và đạt kết quả cao nhất trong Kỳ thi năm nay. Chúc Kỳ thi Olympic Toán học Sinh viên và Học sinh lần thứ 31 diễn ra thành công tốt đẹp.

Xin trân trọng cảm ơn và kính chào.

MỘT SỐ HÌNH ẢNH

PGS.TS. Đoàn Trung Cường - Phó Chủ tịch kiêm Tổng thư ký Hội Toán học VN, Trưởng Ban Tổ chức kỳ thi phát biểu khai mạc. *Nguồn: Trường ĐH Sài Gòn*

PGS.TS. Lê Văn Hiện - Đại diện Ban Giám khảo tuyên thệ trước Ban Tổ chức và các thí sinh. *Nguồn: Trường ĐH Sài Gòn*

Văn nghệ chào mừng do giảng viên, sinh viên Trường ĐH Sài Gòn trình diễn.
Nguồn: Trường ĐH Sài Gòn

Các đoàn nhận cờ lưu niệm trong Lễ khai mạc. *Nguồn: Trường ĐH Sài Gòn*

PGS.TS. Lê Văn Hiện - Phó trưởng ban Tổ chức kỳ thi - công bố Quyết định khen thưởng. *Nguồn: Trường ĐH Sài Gòn*

PGS.TS. Ngô Quốc Anh - Thành viên Ban Giám khảo, PGS.TS. Kiều Phương Chi - Trưởng khoa Toán Ứng dụng, Trường Đại học Sài Gòn, Thành viên Ban Tổ chức trao huy chương đồng cho các sinh viên đạt giải ba. *Nguồn: Trường ĐH Sài Gòn*

Bà Đinh Thị Thanh Thủy - Phó Chánh Văn phòng UBND Thành phố Hồ Chí Minh, ông Nguyễn Bảo Quốc - Phó giám đốc Sở Giáo dục và Đào tạo Tp. Hồ Chí Minh trao huy chương đồng cho các sinh viên đạt giải ba. *Nguồn: Trường ĐH Sài Gòn*

PGS.TS. Lê Văn Hiện - Phó Trưởng ban Tổ chức, PGS.TS. Đào Phương Bắc - Thành viên Ban Giám khảo trao huy chương đồng cho các sinh viên đạt giải ba. *Nguồn: Trường ĐH Sài Gòn*

Thiếu tướng Lê Anh Tuấn - Phó Giám đốc Học viện Kỹ thuật Quân sự, PGS. TS. Lê Tuấn Anh - Chủ Tịch Hội đồng Trường Đại học Thủ Dầu Một trao huy chương đồng cho các sinh viên đạt giải ba. *Nguồn: Trường ĐH Sài Gòn*

GS.TSKH. Vũ Hoàng Linh và PGS.TS. Đoàn Trung Cường trao huy chương bạc cho các sinh viên đạt giải nhì. *Nguồn: Trường ĐH Sài Gòn*

TS. Phương Phú Công - Trưởng phòng Quản lý thi, Cục Quản lý Chất lượng, PGS.TS. Đoàn Đức Tùng - Hiệu trưởng Trường đại học Quy Nhơn trao huy chương bạc cho các sinh viên đạt giải nhì. *Nguồn: Trường ĐH Sài Gòn*

GS.TSKH. Ngô Việt Trung, nguyên Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam, và PGS.TS. Phạm Hoàng Quân, Hiệu trưởng Trường đại học Sài Gòn, Phó chủ tịch Hội Toán học Việt Nam, trao huy chương vàng và Bằng khen của Trung ương Hội Sinh viên Việt Nam cho các sinh viên đạt Giải Nhất. *Nguồn: Trường ĐH Sài Gòn*

Phần II

ĐỀ THI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

1 ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút.

1.1 BẢNG A

Bài 1. Cho a là một số thực, $M(a)$ là ma trận phụ thuộc vào a:

$$M(a) = \begin{pmatrix} a & 2023 & 2024 & 2025 \\ 2025 & 2024 & 2023 & a \\ 2024 & 2025 & a & 2023 \\ 2023 & a & 2025 & 2024 \end{pmatrix}.$$

(a) Tính hạng của ma trận $M(a)$ khi $a = 2022$.

(b) Tính định thức của ma trận $M(a)$ theo a.

(c) Xét hệ phương trình tuyến tính $M(a)\cdot X = 0$, trong đó $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ là vectơ cột gồm các tọa độ x_1, x_2, x_3, x_4 đều là số thực.

  (c1) Tìm số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $M(a) \cdot X = 0$ khi $a = 2022$.

  (c2) Khi nào hệ phương trình $M(a) \cdot X = 0$ chỉ có hữu hạn nghiệm? Tại sao?

Bài 2. Giả sử ban đầu học sinh các trường phổ thông ở Quận 1 chỉ mua bánh mỳ của Công ty A. Sau đó Công ty B cũng tham gia vào việc cung cấp bánh mỳ cho thị trường này. Nghiên cứu cho thấy sau mỗi quý (3 tháng) có 30% khách hàng của Công ty A chuyển sang dùng sản phẩm của Công ty B, số còn lại vẫn dùng của Công ty A. Đồng thời có 40% khách hàng của Công ty B chuyển sang dùng của Công ty A, số còn lại vẫn dùng của Công ty B.

(a) Hỏi sau 18 tháng kể từ khi Công ty B tham gia vào thị trường, tỉ lệ khách hàng (trên tổng số học sinh của toàn Quận 1) mua bánh mỳ của mỗi công ty tương ứng là bao nhiêu?

(b) Giám đốc Công ty A quyết định sẽ ngừng kinh doanh mặt hàng bánh mỳ nếu tỉ lệ số khách hàng của họ (trên tổng số) ít hơn 50%. Hỏi với số liệu như trên, Công ty A có thời điểm nào cần quyết định ngừng kinh doanh mặt hàng này hay không? Tại sao?

Bài 3. Điền các số $1, 2, 3, \ldots, 9$ vào các ô đơn vị của một bảng 3×3, mỗi ô một số khác nhau. Xét 6 số có 3 chữ số được tạo thành từ các hàng (đọc từ trái qua phải) và các cột (đọc từ trên xuống dưới).

(a) Hỏi có thể điền sao cho 6 số nhận được đều chia hết cho 9 hay không? Tại sao?

(b) Gọi M là số lớn nhất trong 6 số nhận được bằng một cách điền bất kỳ. Tìm giá trị nhỏ nhất của M.

Bài 4.

(a) Xét đa thức $Q(x) = x^2 - 1$. Chứng minh rằng có vô số đa thức $P(x)$ bậc 2 với hệ số bậc cao nhất bằng 1, sao cho đa thức $P(Q(x))$ có 4 nghiệm thực phân biệt và chúng lập thành một cấp số cộng.

(b) Xét đa thức $T(x) = x^3 - 3x$. Chứng minh rằng không tồn tại đa thức $S(x)$ có bậc 3 sao cho đa thức $S(T(x))$ có 9 nghiệm thực phân biệt và chúng lập thành một cấp số cộng.

Bài 5. Ma trận vuông A cấp 2025 với các phần tử là số thực, được gọi là một *ma trận tốt* nếu vết của A^2 (tổng các phần tử trên đường chéo chính của ma trận A^2) bằng 8100, và mọi ma trận vuông cùng cấp B với các phần tử thực đều viết được dưới dạng $B = B_1 + B_2$, trong đó $AB_1 = B_1A$, $AB_2 = -B_2A$. Giả sử A là một ma trận tốt bất kỳ cấp 2025.

(a) Xác định tất cả các ma trận A^2.

(b) Xác định tất cả các giá trị của $\det(A - I_{2025})$, trong đó I_{2025} là ma trận đơn vị cấp 2025.

1.2 BẢNG B

Bài 1. Bốn xí nghiệp nước sạch có nhiệm vụ cung cấp nước sinh hoạt cho một thành phố. Nếu hoạt động bình thường thì tổng sản lượng hàng ngày của bốn xí nghiệp đúng bằng nhu cầu hàng ngày của cả thành phố. Nếu vào một ngày nào đó, một xí nghiệp cần thực hiện công tác bảo dưỡng sửa chữa hệ thống sản xuất theo định kỳ thì sản lượng hàng ngày của xí nghiệp đó hạ xuống mức 50% và nếu ba xí nghiệp còn lại được sắp xếp theo sản lượng hàng ngày từ cao xuống thấp thì các xí nghiệp này phải tăng sản lượng tương ứng theo các mức 20%, 15%, 10%. Trong những ngày như vậy, nếu tổng sản lượng bị thiếu hụt thì lượng thiếu hụt (tính theo $1000m^3$) sẽ là 28 hoặc 112; nếu tổng sản lượng dư thừa thì lượng dư thừa (tính theo $1000m^3$) sẽ là 24 hoặc 72. Hãy xác định sản lượng hàng ngày của từng xí nghiệp và nhu cầu nước sinh hoạt hàng ngày của toàn thành phố.

Bài 2. Cho a là một số thực, $M(a)$ là ma trận phụ thuộc vào a:

$$M(a) = \begin{pmatrix} a & 2023 & 2024 & 2025 \\ 2025 & 2024 & 2023 & a \\ 2024 & 2025 & a & 2023 \\ 2023 & a & 2025 & 2024 \end{pmatrix}.$$

(a) Tính hạng của ma trận $M(a)$ khi $a = 2022$.

(b) Tính định thức của ma trận $M(a)$ theo a.

(c) Xét hệ phương trình tuyến tính $M(a) \cdot X = 0$, trong đó $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ là vectơ cột gồm các tọa độ x_1, x_2, x_3, x_4 đều là số thực.

   (c1) Tìm số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $M(a) \cdot X = 0$ khi $a = 2022$.

   (c2) Khi nào hệ phương trình $M(a) \cdot X = 0$ chỉ có hữu hạn nghiệm? Tại sao?

Bài 3. Giả sử ban đầu học sinh các trường phổ thông ở Quận 1 chỉ mua bánh mỳ của Công ty A. Sau đó Công ty B cũng tham gia vào việc cung cấp bánh mỳ cho thị trường này. Nghiên cứu cho thấy sau mỗi quý (3 tháng) có 30% khách hàng của Công ty A chuyển sang dùng sản phẩm của Công ty B, số còn lại vẫn dùng của Công ty A. Đồng thời có 40% khách hàng của Công ty B chuyển sang dùng của Công ty A, số còn lại vẫn dùng của Công ty B.

(a) Hỏi sau 18 tháng kể từ khi Công ty B tham gia vào thị trường, tỉ lệ khách hàng (trên tổng số học sinh của toàn Quận 1) mua bánh mỳ của mỗi công ty tương ứng là bao nhiêu?

(b) Giám đốc Công ty A quyết định sẽ ngừng kinh doanh mặt hàng bánh mỳ nếu tỉ lệ số khách hàng của họ (trên tổng số) ít hơn 50%. Hỏi với số liệu như trên, Công ty A có thời điểm nào cần quyết định ngừng kinh doanh mặt hàng này hay không? Tại sao?

Bài 4. Điền các số $1, 2, 3, \ldots, 9$ vào các ô đơn vị của một bảng 3×3, mỗi ô một số khác nhau. Xét 6 số có 3 chữ số được tạo thành từ các hàng (đọc từ trái qua phải) và các cột (đọc từ trên xuống dưới).

(a) Hỏi có thể điền sao cho 6 số nhận được đều chia hết cho 9 hay không? Tại sao?

(b) Gọi M là số lớn nhất trong 6 số nhận được bằng một cách điền bất kỳ. Tìm giá trị nhỏ nhất của M.

Bài 5.

(a) Xét đa thức $Q(x) = x^2 - 1$. Chứng minh rằng có vô số đa thức $P(x)$ bậc 2 với hệ số bậc cao nhất bằng 1, sao cho đa thức $P(Q(x))$ có 4 nghiệm thực phân biệt và chúng lập thành một cấp số cộng.

(b) Xét đa thức $T(x) = x^3 - 3x$. Chứng minh rằng không tồn tại đa thức $S(x)$ có bậc 3 sao cho đa thức $S(T(x))$ có 9 nghiệm thực phân biệt và chúng lập thành một cấp số cộng.

2 GIẢI TÍCH

Thời gian làm bài: 180 phút.

2.1 BẢNG A

Bài 1. Cho $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ là một dãy số thực được xác định bởi

$$a_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\pi}{(k+1)^2}\right) = \left(1 - \frac{\pi}{2^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{\pi}{(n+1)^2}\right) \quad \text{với } n \geq 1.$$

(a) Chứng minh rằng dãy số $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ hội tụ.

(b) Giới hạn của dãy số $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ có bằng 0 được không? Vì sao?

Bài 2. Cho $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ là một hàm số được xác định bởi

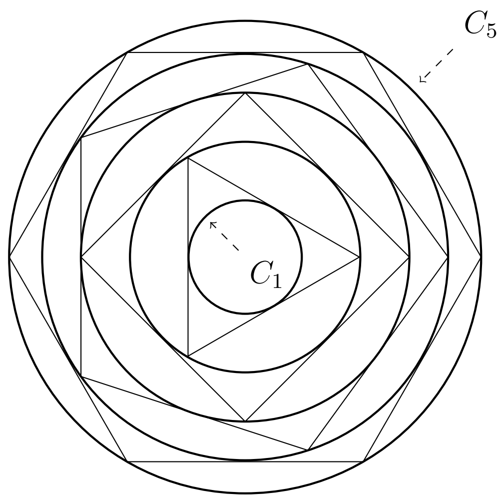
$$f(x) = \left(\frac{30^x + 4^x + 2025^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} \quad \text{với } x > 0.$$

Khảo sát tính đơn điệu của hàm f trên $(0, +\infty)$.

Bài 3.

Hình bên thể hiện một dãy các hình phẳng lồng nhau bắt đầu bởi đường tròn đơn vị được ký hiệu C_1. Dãy này được xây dựng như sau.

Ở bước thứ nhất trước tiên ta dựng một tam giác đều ngoại tiếp đường tròn đơn vị C_1, sau đó ta dựng đường tròn C_2 ngoại tiếp tam giác đều này. Ở bước thứ hai ta lần lượt dựng một tứ giác đều ngoại tiếp đường tròn C_2 và dựng đường tròn C_3 ngoại tiếp tứ giác này. Ta lặp lại quá trình trên, tức là ở bước thứ n ta lần lượt dựng $(n+2)$-giác đều ngoại tiếp đường tròn C_n vừa dựng ở bước trước đó (là bước thứ $n-1$) và dựng đường tròn C_{n+1} ngoại tiếp $(n+2)$-giác đều đó.



Gọi r_n là bán kính của đường tròn C_n.

(a) Lập công thức liên hệ giữa r_{n+1} và r_n với $n \geq 1$.

(b) Chứng minh rằng dãy $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ có giới hạn hữu hạn. Kết quả này nói lên điều gì?

Bài 4. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm số có đạo hàm tại mọi điểm và $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy các số tự nhiên tăng ngặt.

(a) Cho ví dụ về một hàm f mà $f'(x) = 0$ khi và chỉ khi $x \in \{a_1, a_2, ...\}$.

(b) Chứng minh rằng nếu hàm f có tính chất $f'(x) = 0$ khi $x \notin \{a_1, a_2, ...\}$ thì f là hàm hằng.

(c) Có tồn tại hay không hàm f mà $f'(x) = 0$ khi và chỉ khi $x \in \mathbb{Q}$? (Nếu câu trả lời là "không", hãy chứng minh; nếu câu trả lời là "có", hãy chỉ ra một ví dụ về một hàm f thỏa mãn yêu cầu.)

Bài 5. Cho $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ là hàm số liên tục trên $[0, 1]$.

(a) Chứng minh rằng tồn tại một điểm $c \in (0, 1)$ sao cho

$$\int_0^1 f dx = f(c).$$

(b) Chứng minh rằng tồn tại hai điểm phân biệt $a, b \in (0, 1)$ sao cho

$$\Big(\int_0^1 f dx\Big)^2 = f(a)f(b).$$

(c) Cho trước số tự nhiên $n \geq 3$, có tồn tại hay không n điểm phân biệt $a_i \in (0, 1)$ với $1 \leq i \leq n$ sao cho

$$\Big(\int_0^1 f dx\Big)^n = f(a_1)f(a_2)\cdots f(a_n)?$$

(Nếu câu trả lời là "có", hãy chứng minh; nếu câu trả lời là "không", hãy chỉ ra một ví dụ về một hàm f và một giá trị n nhưng không thỏa mãn yêu cầu.)

2.2 BẢNG B

Bài 1. Cho $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ là một dãy số thực được xác định bởi

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} \Big(1 - \frac{\pi}{(k+1)^2}\Big) = \Big(1 - \frac{\pi}{2^2}\Big) \cdots \Big(1 - \frac{\pi}{(n+1)^2}\Big) \quad \text{với } n \geq 1.$$

(a) Chứng minh rằng dãy số $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ hội tụ.

(b) Giới hạn của dãy số $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ có bằng 0 được không? Vì sao?

Bài 2. Cho $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ là một hàm số được xác định bởi

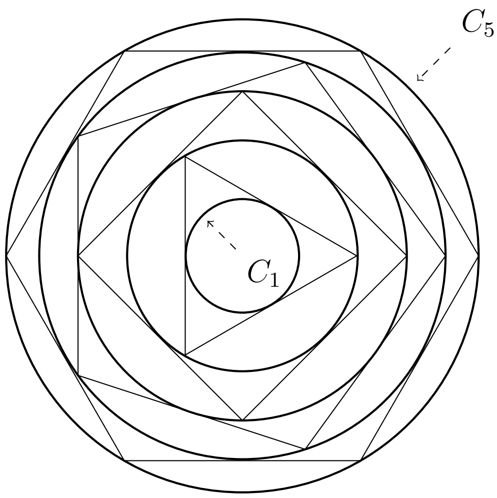
$$f(x) = \left(\frac{30^x + 4^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \quad \text{với } x > 0.$$

Khảo sát tính đơn điệu của hàm f trên $(0, +\infty)$.

Bài 3.

Hình bên thể hiện một dãy các hình phẳng lồng nhau bắt đầu bởi đường tròn đơn vị được ký hiệu C_1. Dãy này được xây dựng như sau.

Ở bước thứ nhất trước tiên ta dựng một tam giác đều ngoại tiếp đường tròn đơn vị C_1, sau đó ta dựng đường tròn C_2 ngoại tiếp tam giác đều này. Ở bước thứ hai ta lần lượt dựng một tứ giác đều ngoại tiếp đường tròn C_2 và dựng đường tròn C_3 ngoại tiếp tứ giác này. Ta lặp lại quá trình trên, tức là ở bước thứ n ta lần lượt dựng $(n+2)$-giác đều ngoại tiếp đường tròn C_n vừa dựng ở bước trước đó (là bước thứ $n-1$) và dựng đường tròn C_{n+1} ngoại tiếp $(n+2)$-giác đều đó.



Gọi r_n là bán kính của đường tròn C_n.

(a) Lập biểu thức liên hệ giữa r_{n+1} và r_n với $n \geq 1$.

(b) Chứng tỏ rằng dãy $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ có giới hạn hữu hạn. Kết quả này nói lên điều gì?

Bài 4. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm số liên tục tại mọi điểm và $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy các số tự nhiên đơn điệu tăng ngặt.

(a) Cho ví dụ về một hàm f có tính chất $f(x) = 0$ khi và chỉ khi $x \in \{a_1, a_2, ...\}$.

(b) Chứng tỏ rằng nếu hàm f có tính chất $f(x) = 0$ khi $x \notin \{a_1, a_2, ...\}$ thì f là hàm hằng.

(c) Nếu $f(x) = 0$ với mọi $x \notin \mathbb{Q}$ thì f có là hàm hằng không? (Nếu câu trả lời là "có", hãy chứng minh; nếu câu trả lời là "không", hãy chỉ ra một ví dụ về một hàm f khác hằng thỏa mãn yêu cầu.)

Bài 5. Cho $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ là hàm số liên tục trên $[0, 1]$.

(a) Chứng tỏ rằng tồn tại một điểm $c \in [0, 1]$ sao cho

$$\int_0^1 f dx = f(c).$$

(b) Trong trường hợp hàm f được xác định bởi

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e} + e^x} \quad \text{với } x \in [0, 1]$$

và e là cơ số của lôgarit tự nhiên, hãy xác định một giá trị của c thỏa mãn yêu cầu như trong ý (a).

(c) Hàm f cần thỏa mãn điều kiện gì để luôn tồn tại $c \in [0, 1]$ thỏa mãn đồng thời

$$\int_0^1 f dx = f(c) \quad \text{và} \quad \int_0^1 f^2 dx = f^2(c)?$$

3 PHỔ THÔNG

Thời gian làm bài: 180 phút.

3.1 NGÀY 1 - Hình học

Thí sinh được sử dụng kết quả của các câu trước trong chứng minh của câu sau. Nếu một câu được chứng minh không dựa vào kết quả của các câu trước thì có thể dùng để chứng minh các câu trước.

A. Một số hệ thức lượng đặc biệt trong tam giác

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có

$$a = b\cos C + c\cos B.$$

Bài 2. Cho tam giác ABC. Gọi D, E, F tương ứng là chân các đường cao hạ từ A, B, C; gọi X, Y, Z tương ứng là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng luôn có cách đặt các dấu $+$ hoặc $-$ sao cho hệ thức sau đây là đúng:

$$\frac{DX}{DA} \pm \frac{EY}{EB} \pm \frac{FZ}{FC} = 0.$$

Bài 3 (Định lý Cosin mở rộng)**.** Cho tam giác ABC và một điểm P trong mặt phẳng. Dựng hình bình hành $PBDC$. Đặt $\alpha = \angle BPC$, $\theta = \angle PAD$. Chứng minh rằng

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2PB \cdot PC\cos\alpha - 2PA \cdot AD\cos\theta.$$

Bài 4. Cho đa giác lồi $\mathcal{A} = A_1A_2\ldots A_n$. Với $i = 1, \ldots, n$, ký hiệu góc trong ở đỉnh A_i của $\mathcal{A}$ là α_i. Chứng minh rằng với mọi điểm P nằm bên trong $\mathcal{A}$ ta có

$$PA_1\cos\frac{\alpha_1}{2} + PA_2\cos\frac{\alpha_2}{2} + \ldots + PA_n\cos\frac{\alpha_n}{2} \geq s,$$

trong đó s ký hiệu nửa chu vi của $\mathcal{A}$.

B. Một số hệ thức lượng và bất đẳng thức trong tứ giác

Trong các bài tập 5, 6, 7 và 8 ta ký hiệu $ABCD$ là một tứ giác lồi.

Bài 5. Dựng điểm P bên trong tứ giác $ABCD$ sao cho các tam giác APB và ADC đồng dạng. Chứng minh rằng độ dài các đoạn thẳng PB, PD và BD tương ứng tỷ lệ với $CD \cdot AB$, $BC \cdot AD$ và $BD \cdot AC$.

Bài 6. Ký hiệu θ là tổng hai góc đối diện bất kỳ của tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng

$$AC^2 \cdot BD^2 = AB^2 \cdot CD^2 + AD^2 \cdot BC^2 - 2AB \cdot CD \cdot AD \cdot BC \cos\theta.$$

Bài 7. Đặt $\alpha = |\angle ADB - \angle ACB| = |\angle DAC - \angle DBC|$ và $\beta = |\angle ABD - \angle ACD| = |\angle BAC - \angle BDC|$. Chứng minh rằng

$$AC \cdot BD = AD \cdot BC \cos\alpha + AB \cdot CD \cos\beta.$$

Bài 8. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình chữ nhật khi và chỉ khi

$$(AB + CD)^2 + (AD + BC)^2 = (AC + BD)^2.$$

C. Ứng dụng của một số hệ thức lượng

Bài 9. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp ω tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại D, E, F. Lấy một điểm P trên đường thẳng đi qua D và vuông góc với BC. Gọi Q và R tương ứng là giao điểm của PC và PB với EF. Gọi K và L tương ứng là hình chiếu của R và Q trên đường thẳng BC. Các đường thẳng DQ và DR cắt lại ω tại các điểm M và N. Gọi S là giao điểm của KM và LN. Chứng minh rằng DS đi qua trung điểm của đoạn thẳng QR.

Bài 10. Cho tam giác ABC. Gọi D và E tương ứng là trung điểm của AB và CD. Giả sử $\angle ACD = 2\angle DEB$. Chứng minh rằng $2\angle AED = \angle DCB + 180°$.

Bài 11. Cho hình chữ nhật $ABCD$ và một điểm P nằm trong mặt phẳng. Gọi X, Y, Z, W, S và T tương ứng là hình chiếu vuông góc của P trên các đường thẳng AB, BC, CD, DA, AC và BD. Các đường trung trực của XY và WZ cắt nhau tại Q. Các đường trung trực của YZ và XW cắt nhau tại R. Chứng minh rằng QR song song với ST.

3.2 NGÀY 2 - Tổ hợp

Thí sinh được sử dụng kết quả của các câu trước trong chứng minh của câu sau. Nếu một câu được chứng minh không dựa vào kết quả của các câu trước thì có thể dùng để chứng minh các câu trước.

Trong đề thi này, (F_n) ký hiệu dãy số Fibonacci, định nghĩa như sau: $F_1 = 1, F_2 = 2, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$. Ta gọi F_n là số Fibonacci thứ n và 2 số F_n và F_{n+1} là 2 số Fibonacci liên tiếp.

A. Trò chơi Zeckendorf: phiên bản 1 người

Trò chơi Zeckendorf (phiên bản 1 người) ứng với số nguyên n ($n > 2$) là trò chơi sau đây. Ban đầu, trên bảng có n số 1 (tương ứng với n số F_1). Sau đó, ở mỗi lượt, người chơi có thể thực hiện 1 trong các thao tác sau, mà ta sẽ gọi là *thao tác* P:

1. Nếu trên bảng có 2 số Fibonacci liên tiếp là F_{i-1} và F_i, người chơi có thể xóa 2 số đó đi và viết lên bảng F_{i+1}.
2. Nếu trên bảng có 2 số Fibonacci giống nhau F_i, F_i :
   (a) Với $i = 1$, người chơi có thể xóa 2 số F_1 và viết lên bảng F_2;
   (b) Với $i = 2$, người chơi có thể xóa 2 số F_2 và viết lên bảng F_1 và F_3;
   (c) Với $i \geq 3$, người chơi có thể xóa 2 số F_i và viết lên bảng F_{i-2} và F_{i+1}.

Trò chơi kết thúc khi người chơi không còn thực hiện được thao tác nào nữa.

Bài 1. Xét trò chơi Zeckendorf ứng với một số nguyên $n > 2$. Chứng minh rằng:
a) Tổng các số trên bảng bằng n ở mọi thời điểm.
b) Tổng bình phương của các số trên bảng không giảm sau mỗi lượt chơi.
c) Trò chơi luôn kết thúc sau một số hữu hạn thao tác.

Bài 2. Xét $n = 6$. Nêu ví dụ về trò chơi Zeckendorf ứng với $n = 6$ kết thúc sau:
a) 4 thao tác;
b) 5 thao tác.

Bài 3. Chứng minh rằng mỗi số nguyên $n > 2$ đều có thể biểu diễn một cách duy nhất thành tổng của các số Fibonacci đôi một phân biệt và không liên tiếp. Ta gọi bộ các số Fibonacci trong tổng đó là *biểu diễn Zeckendorf của* n.

Bài 4. Chứng minh rằng, với mọi cách chơi, trạng thái kết thúc của trò chơi Zeckendorf ứng với n là duy nhất và chính là biểu diễn Zeckendorf của n.

Trong các bài toán 5, 6 và 7, ta ký hiệu x_n là số thao tác được thực hiện trong một trò chơi Zeckendorf ứng với n.

Bài 5. Chứng minh rằng với mọi $n \geq 4$, x_n có thể nhận cả giá trị chẵn và giá trị lẻ.

Bài 6. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n > 2$ thì

$$n - Z(n) \leq x_n,$$

trong đó $Z(n)$ là số các số hạng trong biểu diễn Zeckendorf của n. Hơn nữa, hãy chỉ ra rằng dấu "=" có thể xảy ra.

Bài 7. Chứng minh rằng

$$x_n \leq \ell.n < \left[\log_\phi(\sqrt{5}n + 1)\right].n,$$

trong đó ℓ là số nguyên dương lớn nhất sao cho $F_\ell \leq n$ và $\phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

B. Trò chơi Zeckendorf: phiên bản 2 người

Trò chơi Zeckendorf cho 2 người ứng với số nguyên dương n diễn ra như sau. Ban đầu, trên bảng có n số 1 (tương ứng với n số F_1). Hai người chơi A và B luân phiên chơi, với A đi trước. Mỗi lần, người đến lượt thực hiện một thao tác P như được mô tả trong phần trên. Trò chơi kết thúc khi một người đến lượt chơi nhưng không thể thực hiện thao tác hợp lệ nào nữa (người thua cuộc); người còn lại là người thắng cuộc.

Bài 8. Xét trò chơi Zeckendorf cho hai người ứng với $n = 6$. Hãy chỉ ra một chiến lược thắng cuộc của B.

Bài 9. Chứng minh rằng với mọi $n > 9$, người chơi B có chiến lược thắng cuộc trong trò chơi Zeckendorf ứng với n.

CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: ĐẠI SỐ

Bài 1 (ĐH Công nghệ thông tin TP HCM). Cho ánh xạ $\varphi : P_2[x] \to P_2[x]$ như sau

$$\varphi(a_0+a_1x+a_2x^2) = (-5a_0+4a_1-a_2)+(-2a_0+a_1+a_2)x+(10a_0-10a_1+6a_0)x^2.$$

a. Chứng minh rằng φ là một toán tử tuyến tính; xác định ma trận A tương ứng của φ đối với cơ sở $\{1, x, x^2\}$.
b. Tìm các giá trị riêng và vectơ riêng của A và xem xét A có chéo hoá được không?
Nếu A chéo hoá được, hãy tìm ma trận T sao cho $T^{-1}AT$ là ma trận đường chéo.
c. Cho $p(x) = 3+6x+7x^2$. Hãy tính $\varphi^{2025}(p(x))$ trong đó $\varphi^{2025} = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{\text{2025 lần}}$.

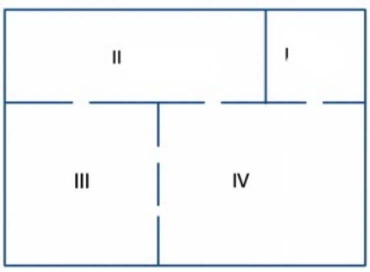
Bài 2 (ĐH Công nghệ thông tin TP HCM). (a) Có tồn tại hay không ma trận $A \in M_3(\mathbb{R})$ thỏa mãn $\operatorname{trace} A = 0, A^2 + A^T = I_3$?
(b) Tìm tất cả các ma trận thực X, vuông, cấp 2, thỏa mãn:

$$X^3 - 3X^2 + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 0_2.$$

Bài 3 (ĐH Công nghệ thông tin TP HCM). (a) Cho n, m là các số nguyên dương. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để đa thức $x^m + x^n + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ là $mn - 2$ chia hết cho 3.
(b) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ có hệ số nguyên sao cho

$$P(P'(x)) = P'(P(x)), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 4 (ĐH Công nghệ thông tin TP HCM). Một mê cung có 4 phòng và một con chuột được bỏ vào phòng số 3. Mỗi lần con chuột di chuyển từ phòng này sang phòng khác. Giả sử xác suất di chuyển từ phòng này sang phòng khác tỉ lệ thuận với số cửa giữa các phòng.



a. Tính xác suất con chuột ở phòng số 1 sau 2 lần di chuyển.
b. Sau 3 lần di chuyển, khả năng lớn nhất con chuột đang ở phòng nào?

Bài 5 (ĐH Công nghệ thông tin TP HCM). Có bao nhiêu cách chọn 2025 viên bi gồm bốn loại bi đỏ, cam, vàng, lục thoả mãn các điều kiện sau?

1. Số bi đỏ là chẵn.
2. Số bi cam chia hết cho 7.
3. Số bi vàng có không quá 6.
4. Số bi lục có không quá 1.

Bài 6 (Nguyễn Huy Hoàng - Trường Đại học Giao thông Vận tải).

(a) Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} x & 2 & x & 2 \\ 2 & x & 2 & x \\ x & x & -1 & -1 \\ -1 & -1 & x & x \end{pmatrix}.$$

Hãy tìm x để ma trận A có hạng lớn nhất.

(b) Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n sao cho tổng tất cả các phần tử trên mỗi cột của A luôn bằng 2; tổng tất cả các phần tử trên mỗi cột của B luôn bằng 3. Đặt $M = (AB)^{2025} - 12A^{2023}B^{2024}$. Hãy tính $\det M$.

Bài 7 (Nguyễn Huy Hoàng - Trường Đại học Giao thông Vận tải). Người ta xây dựng một hồ nuôi cá Koi lớn và chia thành 4 ô A, B, C, D như hình vẽ:

A	B
D	C

Ngày đầu tiên trong mỗi ô A, B, C, D của hồ cá có một số lượng cá Koi. Sáng ngày thứ hai, người ta mở các cửa nối các ô tiếp giáp với nhau trong 2 giờ (hai ô tiếp giáp nhau luôn có cửa kết nối chúng). Sau 2 giờ được mở thì các cửa bị đóng lại và khi đó ở mỗi ô có 40% lượng cá Koi của ngày hôm trước vẫn ở lại ô đó và 60% còn lại đã được chia đều thành các phần bằng nhau và mỗi phần đã bơi sang một ô tiếp giáp (số phần được chia ra bằng số lượng ô tiếp giáp). Quy luật này được lặp lại 2 lần nữa ở ngày thứ ba và ngày thứ tư. Chiều ngày thứ tư, số cá Koi ở ô C nhiều hơn ô A 40 con; nhiều hơn ô B 1852 con và nhiều hơn ô C 1788 con. Hãy xác định số cá Koi ở ô C vào chiều ngày thứ hai.

Bài 8 (Nguyễn Huy Hoàng - Trường Đại học Giao thông Vận tải). Cho M, N, P là ba không gian con phân biệt của không gian tuyến tính $\mathbb{R}^{2025}$ sao cho

$$\dim M = \dim N = \dim P = 2024; \quad \dim(M \cap N) = \dim(N \cap P) = 2022$$

và $(M \cap N) \neq (M \cap P)$. Chứng minh rằng $\dim(M \cap N \cap P) = 2021$.

Bài 9 (Nguyễn Huy Hoàng - Trường Đại học Giao thông Vận tải)**.** Cho đa thức $P(x) = x^{2024} + 8x^{2004} - 127.2^{1005}$.

i) Chứng minh rằng đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x) = x^2 - 2x + 2$.

ii) Hãy xác định phần dư thu được khi chia đa thức $P(x)$ cho đa thức $T(x) = x^4 - x^2 + 2x + 2$.

Bài 10 (Nguyễn Huy Hoàng - Trường Đại học Giao thông Vận tải)**.** Một khu đô thị mới có mặt bằng là một hình chữ nhật lớn. Người ta chia khu đất thành 72 ô giống nhau, các ô tạo thành 6 hàng ngang và 12 hàng dọc. Trên mỗi ô người ta đã xây xong một căn nhà và chuẩn bị mở bán. Đội công tác của chính quyền quyết định lựa chọn 4 căn nhà trong đó để kiểm tra các tiêu chuẩn về phòng cháy chữa cháy. Có bao nhiêu cách lựa chọn để:

i) Bốn căn nhà được chọn tạo thành các đỉnh của một hình chữ nhật có các cặp cạnh đối nằm trên hai hàng ngang và nằm trên hai hàng dọc.

ii) Trong bốn căn nhà được chọn, không có hai căn nhà nào nằm trên cùng một hàng ngang hay nằm trên cùng một hàng dọc.

Bài 11 (Trường Đại học Đồng Tháp)**.** Tính A^n trong đó

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bài 12 (Trường Đại học Đồng Tháp)**.** Cho A là ma trận vuông thực có hạng bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất số thực λ sao cho $A^2 = \lambda A$.

Bài 13 (Trường Đại học Đồng Tháp)**.** Chứng minh công thức Vandermond:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_i - a_j).$$

Bài 14 (Trường Đại học Đồng Tháp)**.** Chứng minh rằng hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

trong đó $a_{ij} = -a_{ji}$ với mọi $1 \le i, j \le n$ và n lẻ, có nghiệm khác 0.

Bài 15 (Trường Đại học Đồng Tháp)**.** Cô Duyên có 12 quả cam cho 3 đứa trẻ An, Bình, Chi. Hỏi cô Duyên có bao nhiêu cách phân phối 12 quả cam sao cho An có ít nhất 4 quả, Bình và Chi mỗi người đều có ít nhất 2 quả, nhưng Chi không được nhiều hơn 5 quả?

Bài 16 (Trường Đại học Đồng Tháp)**.** Có bao nhiêu tập con của tập hợp gồm $2 \cdot 2025$ số nguyên dương đầu tiên sao cho trong đó không tồn tại hai số a, b mà $a + b = 4051$?

Bài 17 (Khổng Chí Nguyện - Trường Đại học Tân Trào)**.** Với $m \in \mathbb{R}$ là tham số, cho ma trận

$$A(m) = \begin{pmatrix} -3 & -2m+2 & -2m-2 \\ -2 & -m+2 & -m-1 \\ 2 & 2m-2 & 2m+1 \end{pmatrix}.$$

a) Xác định điều kiện của m để $A(m)$ là chéo hóa được.
b) Xác định dạng chéo hóa của $A(1)$ (nếu có).
c) Chứng minh rằng $A(-1)^{304} = I$, trong đó I là ma trận đơn vị cấp 3.

Bài 18 (Vũ Đức Tiến - Trường Đại học Hải Phòng)**.** Cho ma trận thực vuông cấp 3 phụ thuộc tham số m:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & m \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Tìm m để ma trận A là nghiệm của đa thức $p(x) = x^3 - x^2 - x - 2$.
b) Với giá trị m tìm được ở trên, tìm dư trong phép chia $f(x) = x^{2025} - 2x^{2024} + 1$ cho đa thức $p(x)$, từ đó tìm ma trận $f(A)$.

Bài 19 (Vũ Đức Tiến - Trường Đại học Hải Phòng)**.** Ký hiệu V là tập các đa thức có dạng $p(x) = cx^2 + bx + a$, với $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\int_0^1 p(x)dx = 0.$$

a) Chứng minh V là không gian con của $\mathbb{R}_2[x]$. Tìm số chiều và một cơ sở của V.
b) Tìm các không gian con bù của V trong $\mathbb{R}_2[x]$.

CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: GIẢI TÍCH

Bài 1 (Trường Đại học Đồng Tháp)**.** Luật bình phương nghịch đảo phát biểu rằng: *mỗi sự gia tăng khoảng cách từ nguồn cho ra kết quả giảm độ sáng theo tỷ lệ nghịch với bình phương của sự gia tăng khoảng cách*. Sử dụng luật bình phương nghịch đảo, hãy giải quyết bài toán sau:
Một người đứng ở khoảng giữa hai bóng đèn pha cách nhau 9 (mét). Độ sáng của hai đèn pha lần lượt là I_1, I_2. Người này định tìm vị trí có độ sáng thấp nhất ở giữa hai đèn pha. Biết rằng độ sáng $I_1 = 8I_2$. Tìm vị trí tốt nhất theo mong muốn của người này.

Bài 2 (Trường Đại học Đồng Tháp)**.** Một người thợ cần làm một thùng chứa hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông từ 2 loại vật liệu khác nhau. Vật liệu làm mặt đáy giá $5\$/m^2$, trong khi vật liệu làm năm mặt còn lại có giá $1\$/m^2$. Biết rằng người thợ chỉ có $75\$$ để mua vật liệu làm thùng chứa đó. Hãy giúp người thợ thiết kế thùng chứa có thể tích tối đa có thể đạt được.

Bài 3 (Trường Đại học Đồng Tháp)**.** Cho dãy số thực $\{u_n\}$ xác định bởi:

$$u_1 = \frac{2024}{2025}, \quad u_{n+1} = 2^{u_n} - u_n, \ \text{ với } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Chứng minh rằng dãy số $\{u_n\}$ hội tụ và tính $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Bài 4 (Trường Đại học Đồng Tháp)**.** Đặt $S_n(x) = \sin x + \sin(2x) + ... + \sin(nx),\ x \in \mathbb{R}, n = 1, 2, 3, ...$ Tính

$$I = \int_0^\pi \frac{S_{2025}(x)}{\sin x} dx.$$

Bài 5 (Trường Đại học Đồng Tháp)**.** Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi $u_1 = \dfrac{1}{2}$ và $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Đặt

$$S_n = \frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \cdots + \frac{u_n}{n}.$$

(a) Tìm giá trị n nhỏ nhất để $S_n \geq \dfrac{2024}{2025}$.

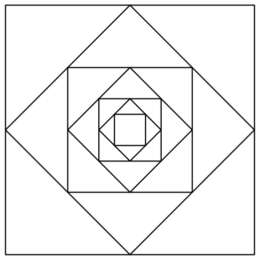
(b) Tính giới hạn $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{S_1^n + S_2^n + \cdots + S_{2025}^n}$.

Bài 6 (Trường Đại học Đồng Tháp). Cho hàm số f xác định bởi $f(x) = \begin{cases} ax^3+b & \text{nếu } |x|\le 1; \\ \dfrac{2025\sin(x-1)}{|x-1|} & \text{nếu } |x|>1. \end{cases}$ Tìm a, b để f khả vi trên $\mathbb{R}$.

Bài 7 (Trường Đại học Giao thông vận tải). Cho dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện $x_1 = 2025$, $x_{n+1} = \sqrt{5} + \dfrac{2x_n}{\sqrt{x_n^2-4}}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dãy số (x_n) hội tụ và tính giới hạn của dãy số đó.

Bài 8 (Trường Đại học Giao thông vận tải).

Từ hình vuông đầu tiên có cạnh bằng 1 (đơn vị độ dài), nối các trung điểm của bốn cạnh để có hình vuông thứ hai. Tiếp tục nối các trung điểm của bốn cạnh của hình vuông thứ hai để được hình vuông thứ ba. Cứ tiếp tục làm như thế, nhận được một dãy hình vuông (xem Hình 1).

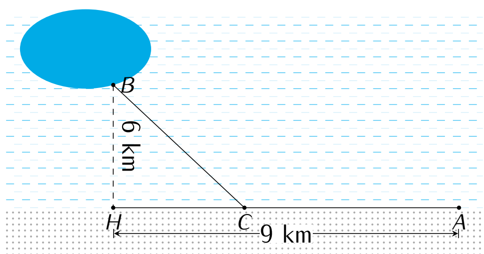


Hình 1

a) Kí hiệu a_n là diện tích của hình vuông thứ n và S_n là tổng diện tích của n hình vuông đầu tiên. Viết công thức tính a_n, S_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ và tìm $\lim S_n$ (giới hạn này nếu có được gọi là tổng diện tích của các hình vuông).

b) Kí hiệu p_n là chu vi của hình vuông thứ n và Q_n là tổng chu vi của n hình vuông đầu tiên. Viết công thức tính p_n và Q_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ và tìm $\lim Q_n$ (giới hạn này nếu có được gọi là tổng chu vi của các hình vuông).

Bài 9 (Trường Đại học Giao thông vận tải).
Một công ty muốn làm một đường ống dẫn từ vị trí A trên bờ biển đến vị trí B trên hòn đảo. Khoảng cách từ điểm B đến bờ biển là $BH = 6$ km (Hình 2). Giá tiền để xây dựng đường ống trên bờ là $5\,000$ USD mỗi kilômét và giá tiền xây dựng đường ống trên biển là $13\,000$ USD mỗi kilômét, biết rằng $AH = 9$ km.



Hình 2

Xác định vị trí điểm C (cách vị trí A một khoảng bao nhiêu) để khi lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ACB thì chi phí công ty bỏ ra là thấp nhất.

Bài 10 (Trường Đại học Giao thông vận tải). Một hãng điện tử trung bình bán được 1000 ti vi màn hình phẳng mỗi tuần với giá 14 triệu đồng một chiếc.

Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 500 nghìn đồng, số lượng ti vi bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 ti vi mỗi tuần. Nếu hàm chi phí hằng tuần là $C(x) = 12000 - 3x$ (triệu đồng), trong đó x là số ti vi bán ra trong tuần, nhà sản xuất nên đặt giá bán như thế nào để lợi nhuận là lớn nhất (đơn vị tính: triệu đồng)?

Bài 11 (Trường Đại học Giao thông vận tải)**.**

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{nếu } x \neq 0, \\ a & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$

a) Tìm a để hàm số liên tục tại $x = 0$.

b) Với a vừa tìm được, hãy tính $f'(x)$.

c) Xét tính liên tục của hàm số $f'(x)$.

Bài 12 (Trường Đại học Giao thông vận tải)**.** Giả sử hàm số $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng

a) $f(nx) = nf(x)$, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

b) f liên tục tại một điểm khi và chỉ khi f liên tục trên $\mathbb{R}$.

c) f liên tục khi và chỉ khi $f(x) = ax$ với $a \in \mathbb{R}$.

Bài 13 (Trường Đại học Giao thông vận tải)**.**

a) Cho hàm $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ liên tục. Chứng minh rằng

$$\int\limits_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

b) Tính tích phân

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \sin^2 x} dx.$$

Bài 14 (Trường Đại học Công nghệ thông tin - ĐH Quốc gia Tp. HCM)**.** Tính giới hạn:

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k^4 + 10k^3 + 35k^2 + 50k + 23}{(k+4)!}.$$

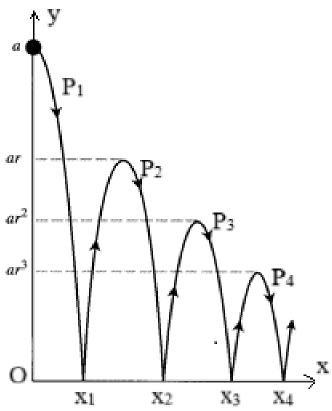
Bài 15 (Trường Đại học Công nghệ thông tin - ĐH Quốc gia Tp. HCM)**.** Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ và thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho

$$(1-c)f(c) + c\int_0^c f(x)dx = 0.$$

Bài 16 (Trường Đại học Công nghệ thông tin - ĐH Quốc gia Tp. HCM)**.** Với mỗi $x \geq 0$, gọi $z = z(x)$ là nghiệm dương của phương trình $z^4 + xz^2 = 2025$. Tính $\displaystyle\int_0^{2024} z^3 dx$.

Bài 17 (Trường Đại học Công nghệ thông tin - ĐH Quốc gia Tp. HCM)**.** Cho dãy số $\{x_n\}$ với $x_1 = a > 1, x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1, n \geq 1$. Chứng minh chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x_n}$ hội tụ và tính tổng.

Bài 18 (Trường Đại học Công nghệ thông tin - ĐH Quốc gia Tp. HCM)**.** Quỹ đạo chuyển động trong hệ trục tọa độ Oxy của một quả bóng là các đường parabol $(P_n), n = 1, 2\ldots$ được cho như hình dưới ($a > 0, 0 < r < 1$). Giả sử thời điểm thả quả bóng ở độ cao a là đỉnh của (P_1). Tại các thời điểm quả bóng chạm sàn, quả bóng nảy đối xứng qua trục thẳng đứng tại điểm đó. Gọi $x_n (n = 1, 2, \ldots)$ là hoành độ các điểm quả bóng chạm sàn, $x_1 = b > 0$. Tìm phương trình của các parabol $(P_n), n = 1, 2\ldots$ và tính $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.



Phần III

HƯỚNG DẪN GIẢI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

1 ĐẠI SỐ

1.1 BẢNG A

Bài 1. (a) Với $a = 2022$ dùng biến đổi sơ cấp hàng ta được ma trận trở thành

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8091 & 4047 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do đó hạng của ma trận bằng 3.

(b) Ký hiệu C_j là cột thứ j của ma trận $M(a)$. Nhận thấy với $a = 2022$, thì $C_1 + C_4 = C_2 + C_3$.
Với $a = 2024$, thì $C_1 + C_3 = C_2 + C_4$.
Với $a = 2026$, thì $C_1 + C_2 = C_3 + C_4$.
Với $a = -(2023 + 2024 + 2025) = -6072$, thì $C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0$.
Do đó $\det M(a)$ bằng 0 với a nhận một trong các giá trị nói trên. Mặt khác $\det M(a)$ là đa thức bậc 4, hệ số đầu bằng -1, nên ta có:

$$\det M(a) = -(a - 2022)(a - 2024)(a - 2026)(a + 6072).$$

(c) Nếu $a = 2022$, thì theo phần (a) hạng của ma trận $M(a)$ bằng 3. Do đó số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình $M(a) \cdot X = 0$ bằng $4 - 3 = 1$.
Hệ phương trình có hữu hạn nghiệm khi và chỉ khi số chiều của không gian nghiệm bằng 0, khi và chỉ khi hạng của ma trận bằng 4. Điều này tương đương $\det M(a) \neq 0$. Do đó các số thỏa mãn là $a \notin \{2022, 2024, 2026, -6072\}$.

Bài 2. (a) Giả sử a_n, b_n là tỉ lệ khách hàng (trên tổng số) ở chu kỳ thứ n. Thế thì $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, và

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,7a_n + 0,4b_n, \\ b_{n+1} = 0,3a_n + 0,6b_n. \end{cases} \tag{1}$$

Do đó

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix},$$

với

$$X = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Sau khi chéo hóa ma trận này ta được

$$X = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = X^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{3}{10}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{7} + \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^n \\ \frac{3}{7} - \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^n \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2}$$

Đổi 18 tháng bằng 6 quý. Do đó tỉ lệ khách hàng sử dụng sản phẩm của Công ty A và Công ty B tương ứng là:

$$\begin{pmatrix} a_6 \\ b_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} + \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^6 \\ \\ \frac{3}{7} - \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4002187}{7000000} \\ \\ \frac{2997813}{7000000} \end{pmatrix}.$$

Vậy tỉ lệ khách hàng của Công ty A xấp xỉ $57,17\%$; của Công ty B xấp xỉ 42.82%.

(b) Từ công thức (6), ta có a_n là dãy giảm, b_n là dãy tăng và hội tụ:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} + \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^n \\ \\ \frac{3}{7} - \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}.$$

Do đó tỉ lệ khách hàng sử dụng sản phẩm của Công ty A luôn lớn hơn $\frac{4}{7}$. Vì $\frac{4}{7} > \frac{50}{100}$, nên Công ty A không cần phải thay đổi mặt hàng.

Nhận xét. Có thể thấy $a_n > \frac{4}{7}$ với mọi n như sau:
Từ điều kiện (5), luôn có $a_n + b_n = 1$, nên $a_{n+1} = 0,4 + 0,3a_n$. Do đó nếu $a_n > \frac{4}{7}$, thì

$$a_{n+1} > 0,4 + 0,3 \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{7}.$$

Do đó từ nguyên lý quy nạp ta có kết luận.

Bài 3. (a) Có thể thực hiện được, chẳng hạn:

3	5	1
4	6	8
2	7	9

(b) Đáp số: $\min M = \boxed{523}$.
Xét một cách điền:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Ta nhận được 6 số $\overline{abc}, \overline{def}, \overline{ghi}, \overline{adg}, \overline{beg}, \overline{cfi}$. Theo giả thiết a, d, g, b, c là các chữ số phân biệt, do đó số lớn nhất trong chúng ≥ 5. Hơn nữa, dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $\{a, b, c, d, g\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và $\{e, f, h, i\} = \{6, 7, 8, 9\}$, hay bảng 2×2 ở góc dưới cùng bên phải của bảng phải được điền các chữ số $6, 7, 8, 9$ theo một thứ tự nào đó.
Nếu chữ số 5 được điền ở cùng hàng hoặc cùng cột với hai ô của bảng 2×2 nói trên thì $M \geq 567$.
Nếu 5 được điền ở ô góc trên cùng bên trái, nghĩa là $a = 5$ thì số lớn nhất trong 6 số bằng $\overline{5bc}$ hoặc $\overline{5dg}$. Nếu $b \geq 3$ hoặc $d \geq 3$ thì $M \geq 531$. Nếu không $\{b, d\} = \{1, 2\}$; khi này $\{c, g\} = \{3, 4\}$. Ta dễ dàng kiểm tra được $M \geq 523$ và dấu bằng đạt được khi $b = 2$, $c = 3$, $d = 1, g = 4$ hoặc $b = 1, c = 4, d = 2, g = 4$. Chẳng hạn với cách điền:

5	2	3
1	6	7
4	8	9

Nhận xét. Có $2 \times 4! = 48$ cách điền để $M = 523$.

Bài 4. (a) Xét đa thức $P(x)$ có bậc 2 với hệ số cao nhất bằng 1 sao cho $P(Q(x))$ có bậc 4 và các nghiệm của nó là $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ tạo thành một cấp số cộng. Suy ra $Q(x_i) = \alpha$ hoặc $Q(x_i) = \beta$ với $\alpha \leq \beta$ là các nghiệm của P. Mỗi phương trình có tối đa 2 nghiệm do đó, chúng phải có đúng 2 nghiệm và $\alpha < \beta$. Dễ thấy, $\beta > \alpha > -1$ và $x_1 = -\sqrt{\beta+1}, x_2 = -\sqrt{\alpha+1}, x_3 = \sqrt{\alpha+1}, x_4 = \sqrt{\beta+1}$. Điều kiện cần và đủ để chúng tạo thành một cấp số cộng là $\sqrt{\beta+1} - \sqrt{\alpha+1} = 2\sqrt{\alpha+1}$, hay $\beta = 9\alpha + 8$. Như vậy, các đa thức P cần tìm là $P(x) = (x-r)(x-9r-8)$ với $r > -1$. Nói riêng, có vô số đa thức như vậy.

(b) Giả sử $S(x)$ là một đa thức bậc 3 có tính chất yêu cầu. Không giảm tổng quát, giả sử S có hệ số cao nhất bằng 1. Tương tự như trên, các nghiệm của $S(T(x)) = 0$ chính là các nghiệm của phương trình $T(x) = \alpha, T(x) = \beta, T(x) = \gamma$, trong đó $\alpha < \beta < \gamma$ là 3 nghiệm của $S(x)$.
Chú ý rằng $T'(x) = 3x^2 - 3$ có các nghiệm là -1 và 1. Suy ra $T(x)$ tăng trên khoảng $(-\infty, -1)$, giảm trên $(-1, 1)$ và tăng trên $(1, +\infty)$.
Suy ra để phương trình $T(x) = \delta$ có đủ 3 nghiệm thì δ phải nằm trong khoảng $(T(1), T(-1))$, hay $(-2, 2)$ và khi đó $T(x) = \delta$ có 1 nghiệm trong mỗi khoảng $(-\infty, -1), (-1, 1)$ và $(1, +\infty)$. Từ đó, suy ra, vì $\alpha < \beta < \gamma$ nên nếu $x_1 < x_2 < \ldots < x_9$ là các nghiệm của $S(T(x))$ thì

- x_1, x_6, x_7 là nghiệm của $T(x) = \alpha$;
- x_2, x_5, x_8 là nghiệm của $T(x) = \beta$;
- x_3, x_4, x_9 là nghiệm của $T(x) = \gamma$;

Suy ra $T(x_6) - T(x_1) = T(x_8) - T(x_2) = T(x_9) - T(x_3) = 0$. Như vậy, nếu đặt $d = x_7 - x_1 = x_8 - x_2 = x_9 - x_3$ thì $T(x+d) - T(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt là x_1, x_2, x_3. Tuy nhiên,

$$T(x+d) - T(x) = (x+d)^3 - 3(x+d) - (x^3 - 3x) = 3dx^2 + 3d^2x + d^3 - 3d$$

là một đa thức bậc 2, không thể có 3 nghiệm phân biệt. Điều này vô lý. Do đó điều giả sử là sai và ta có điều cần chứng minh.

Bài 5. (a): Đầu tiên, ta chỉ ra A^2 giao hoán với mọi ma trận vuông cùng cấp, ký hiệu bởi B. Thật vậy,

$$\begin{cases} AB_1 = B_1A, \\ AB_2 = -B_2A, \end{cases}$$

với một phân tích $B = B_1 + B_2$ nào đó của B. Thế thì

$$\begin{cases} A^2B_1 = (AB_1)A = (B_1A)A = B_1A^2, \\ A^2B_2 = A(-B_2A) = (B_1A)A = B_2A^2. \end{cases}$$

Do đó $A^2B = BA^2$, hay A^2 giao hoán với mọi ma trận vuông B cùng cấp.
Vì A giao hoán với mọi ma trận vuông cùng cấp, nên $A^2 = aI_{2025}$. Mặt khác $\mathrm{Tr}(A^2) = 8100$ nên $a = 4$. Vậy $A^2 = 4I_{2025}$.

Giá trị này đạt được vì lấy $A = 2I_{2025}$, và với B tùy ý, chỉ cần chọn phân tích $B = B + O$ (O ký hiệu cho ma trận không), suy ra $A = 2I_{2025}$ là một ma trận tốt. Khi đó $A^2 = 4I_{2025}$.

(b): Vì phương trình chỉ có nghiệm đơn nên đa thức cực tiểu của A chỉ gồm các nghiệm đơn, nên A chéo hóa được, hay tồn tại C sao cho

$$C^{-1}AC = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_{2025}). \tag{3}$$

(Ở đây $\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_{2025})$ là ma trận chéo với các phần tử trên đường chéo lần lượt là $a_1, \ldots, a_{2025}$.)
Cũng có thể lập luận trực tiếp việc A chéo hóa được như sau: vì $A^2 = 4I_n$, nên với $B = \frac{1}{2}A$, thì $B^2 = I_n$, suy ra với $C = \frac{1}{2}(B + I_n)$, thì $C^2 = C$. Ma trận C là ma trận của phép chiếu. Thế thì $\mathbf{R}^n = \operatorname{Ker}(C) \oplus \operatorname{Im}(C)$ và ma trận C chéo hóa được thành ma trận chéo với các phần tử trên đường chéo bằng 0 hoặc 1.
Vì $A^2 = 4I_{2025}$, nên $a_1^2 = \cdots = a_{2025}^2 = 4$, hay

$$a_1, \ldots, a_{2025} \in \{\pm 2\}.$$

Từ đó suy ra

$$a_1 - 1, \ldots, a_{2025} - 1 \in \{1, -3\}. \tag{4}$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$A - I_{2025} = C\operatorname{diag}(a_1 - 1, \ldots, a_{2013} - 1)C^{-1},$$

hay $\det(A - I_{2025}) = (-3)^m$, với $m \in \{0, 1, 2, \ldots, 2025\}$.

Bây giờ ta chỉ ra với $m \in \{0, 1, 2, \ldots, 2025\}$ là số cho trước, tồn tại một ma trận tốt A thỏa mãn $\det(A - I_{2025}) = (-3)^m$. Chọn ma trận A có dạng

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 2I_{2025-m} & O \\ \hline O & -2I_m \end{array}\right).$$

Thế thì mọi ma trận B đều tách được thành hai phần $B = B_1 + B_2$ trong đó

$$B_1 = \left(\begin{array}{c|c} * & O \\ \hline O & * \end{array}\right), B_2 = \left(\begin{array}{c|c} O & * \\ \hline * & O \end{array}\right),$$

thỏa mãn điều kiện $AB_1 = B_1A$ và $AB_2 = B_2A$. (Ở đây các khối của B_1, B_2 cùng cấp với các khối của A.) Khi đó A là ma trận tốt và

$$A - I_{2025} = \left(\begin{array}{c|c} I_{2025-m} & O \\ \hline O & -3I_m \end{array}\right),$$

nên $\det(A - I_{2025}) = (-3)^m$. Vậy tất cả các số cần tìm là $(-3)^m$ trong đó $m \in \{0, 1, 2, \ldots, 2025\}$.

1.2 BẢNG B

Bài 1. Ký hiệu sản lượng của các xí nghiệp là $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4$, và x_5 là nhu cầu nước sinh hoạt hàng ngày của toàn thành phố. Thế thì ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 0,5x_1 + 1,2x_2 + 1,15x_3 + 1,1x_4 - x_5 = -112, \\ 1,2x_1 + 0,5x_2 + 1,15x_3 + 1,1x_4 - x_5 = -28, \\ 1,2x_1 + 1,15x_2 + 0,5x_3 + 1,1x_4 - x_5 = 24, \\ 1,2x_1 + 1,15x_2 + 1,1x_3 + 0,5x_4 - x_5 = 72. \end{cases}$$

Dùng phương pháp khử Gauss suy ra

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (600, 480, 400, 320, 1800).$$

Do đó sản lượng hàng ngày của từng xí nghiệp lần lượt là 600 ngàn, 480 ngàn, 320 ngàn mét khối. Nhu cầu nước sinh hoạt của toàn thành phố là $1,8$ triệu mét khối.

Bài 2. (a) Với $a = 2022$ dùng biến đổi sơ cấp hàng ta được ma trận trở thành

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8091 & 4047 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do đó hạng của ma trận bằng 3.

(b) Ký hiệu C_j là cột thứ j của ma trận $M(a)$. Nhận thấy với $a = 2022$, thì $C_1 + C_4 = C_2 + C_3$.
Với $a = 2024$, thì $C_1 + C_3 = C_2 + C_4$.
Với $a = 2026$, thì $C_1 + C_2 = C_3 + C_4$.
Với $a = -(2023 + 2024 + 2025) = -6072$, thì $C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0$.
Do đó $\det M(a)$ bằng 0 với a nhận một trong các giá trị nói trên. Mặt khác $\det M(a)$ là đa thức bậc 4, hệ số đầu bằng -1, nên ta có:

$$\det M(a) = -(a - 2022)(a - 2024)(a - 2026)(a + 6072).$$

(c) Nếu $a = 2022$, thì theo phần (a) hạng của ma trận $M(a)$ bằng 3. Do đó số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình $M(a) \cdot X = 0$ bằng $4 - 3 = 1$.
Hệ phương trình có hữu hạn nghiệm khi và chỉ khi số chiều của không gian nghiệm bằng 0, khi và chỉ khi hạng của ma trận bằng 4. Điều này tương đương $\det M(a) \neq 0$. Do đó các số thỏa mãn là $a \notin \{2022, 2024, 2026, -6072\}$.

Bài 3. (a) Giả sử a_n, b_n là tỉ lệ khách hàng (trên tổng số) ở chu kỳ thứ n. Thế thì $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, và

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,7a_n + 0,4b_n, \\ b_{n+1} = 0,3a_n + 0,6b_n. \end{cases} \tag{5}$$

Do đó

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix},$$

với

$$X = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Sau khi chéo hóa ma trận này ta được

$$X = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = X^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{3}{10}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{7} + \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^n \\ \frac{3}{7} - \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^n \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6}$$

Đổi 18 tháng bằng 6 quý. Do đó tỉ lệ khách hàng sử dụng sản phẩm của Công ty A và Công ty B tương ứng là:

$$\begin{pmatrix} a_6 \\ b_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} + \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^6 \\ \\ \frac{3}{7} - \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4002187}{7000000} \\ \\ \frac{2997813}{7000000} \end{pmatrix}.$$

Vậy tỉ lệ khách hàng của Công ty A xấp xỉ $57,17\%$; của Công ty B xấp xỉ 42.82%.

(b) Từ công thức (6), ta có a_n là dãy giảm, b_n là dãy tăng và hội tụ:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} + \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^n \\ \\ \frac{3}{7} - \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}.$$

Do đó tỉ lệ khách hàng sử dụng sản phẩm của Công ty A luôn lớn hơn $\frac{4}{7}$. Vì $\frac{4}{7} > \frac{50}{100}$, nên Công ty A không cần phải thay đổi mặt hàng.

Nhận xét. Có thể thấy $a_n > \frac{4}{7}$ với mọi n như sau:

Từ điều kiện (5), luôn có $a_n + b_n = 1$, nên $a_{n+1} = 0,4 + 0,3a_n$. Do đó nếu $a_n > \frac{4}{7}$, thì

$$a_{n+1} > 0,4 + 0,3 \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{7}.$$

Do đó từ nguyên lý quy nạp ta có kết luận.

Bài 4. (a) Có thể thực hiện được, chẳng hạn:

3	5	1
4	6	8
2	7	9

(b) Đáp số: $\min M = \boxed{523}$.
Xét một cách điền:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Ta nhận được 6 số $\overline{abc}, \overline{def}, \overline{ghi}, \overline{adg}, \overline{beg}, \overline{cfi}$. Theo giả thiết a, d, g, b, c là các chữ số phân biệt, do đó số lớn nhất trong chúng ≥ 5. Hơn nữa, dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $\{a, b, c, d, g\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và $\{e, f, h, i\} = \{6, 7, 8, 9\}$, hay bảng 2×2 ở góc dưới cùng bên phải của bảng phải được điền các chữ số $6, 7, 8, 9$ theo một thứ tự nào đó.
Nếu chữ số 5 được điền ở cùng hàng hoặc cùng cột với hai ô của bảng 2×2 nói trên thì $M \geq 567$.
Nếu 5 được điền ở ô góc trên cùng bên trái, nghĩa là $a = 5$ thì số lớn nhất trong 6 số bằng $\overline{5bc}$ hoặc $\overline{5dg}$. Nếu $b \geq 3$ hoặc $d \geq 3$ thì $M \geq 531$. Nếu không $\{b, d\} = \{1, 2\}$; khi này $\{c, g\} = \{3, 4\}$. Ta dễ dàng kiểm tra được $M \geq 523$ và dấu bằng đạt được khi $b = 2$, $c = 3$, $d = 1, g = 4$ hoặc $b = 1, c = 4, d = 2, g = 4$. Chẳng hạn với cách điền:

5	2	3
1	6	7
4	8	9

Nhận xét. Có $2 \times 4! = 48$ cách điền để $M = 523$.

Bài 5. (a) Xét đa thức $P(x)$ có bậc 2 với hệ số cao nhất bằng 1 sao cho $P(Q(x))$ có bậc 4 và các nghiệm của nó là $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ tạo thành một cấp số cộng. Suy ra $Q(x_i) = \alpha$ hoặc $Q(x_i) = \beta$ với $\alpha \leq \beta$ là các nghiệm của P. Mỗi phương trình có tối đa 2 nghiệm do đó, chúng phải có đúng 2 nghiệm và $\alpha < \beta$. Dễ thấy, $\beta > \alpha > -1$ và $x_1 = -\sqrt{\beta+1}, x_2 = -\sqrt{\alpha+1}, x_3 = \sqrt{\alpha+1}, x_4 = \sqrt{\beta+1}$. Điều kiện cần và đủ để chúng tạo thành một cấp số cộng là $\sqrt{\beta+1} - \sqrt{\alpha+1} = 2\sqrt{\alpha+1}$, hay $\beta = 9\alpha + 8$. Như vậy, các đa thức P cần tìm là $P(x) = (x-r)(x-9r-8)$ với $r > -1$. Nói riêng, có vô số đa thức như vậy.

(b) Giả sử $S(x)$ là một đa thức bậc 3 có tính chất yêu cầu. Không giảm tổng quát, giả sử S có hệ số cao nhất bằng 1. Tương tự như trên, các nghiệm của $S(T(x)) = 0$ chính là các nghiệm của phương trình $T(x) = \alpha, T(x) = \beta, T(x) = \gamma$, trong đó $\alpha < \beta < \gamma$ là 3 nghiệm của $S(x)$.
Chú ý rằng $T'(x) = 3x^2 - 3$ có các nghiệm là -1 và 1. Suy ra $T(x)$ tăng trên khoảng $(-\infty, -1)$, giảm trên $(-1, 1)$ và tăng trên $(1, +\infty)$.
Suy ra để phương trình $T(x) = \delta$ có đủ 3 nghiệm thì δ phải nằm trong khoảng $(T(1), T(-1))$, hay $(-2, 2)$ và khi đó $T(x) = \delta$ có 1 nghiệm trong mỗi khoảng $(-\infty, -1), (-1, 1)$ và $(1, +\infty)$. Từ đó, suy ra, vì $\alpha < \beta < \gamma$ nên nếu $x_1 < x_2 < \ldots < x_9$ là các nghiệm của $S(T(x))$ thì

- x_1, x_6, x_7 là nghiệm của $T(x) = \alpha$;
- x_2, x_5, x_8 là nghiệm của $T(x) = \beta$;
- x_3, x_4, x_9 là nghiệm của $T(x) = \gamma$;

Suy ra $T(x_6) - T(x_1) = T(x_8) - T(x_2) = T(x_9) - T(x_3) = 0$. Như vậy, nếu đặt $d = x_7 - x_1 = x_8 - x_2 = x_9 - x_3$ thì $T(x+d) - T(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt là x_1, x_2, x_3. Tuy nhiên,

$$T(x+d) - T(x) = (x+d)^3 - 3(x+d) - (x^3 - 3x) = 3dx^2 + 3d^2x + d^3 - 3d$$

là một đa thức bậc 2, không thể có 3 nghiệm phân biệt. Điều này vô lý. Do đó điều giả sử là sai và ta có điều cần chứng minh.

2 GIẢI TÍCH

2.1 BẢNG A

Bài 1. a) Dễ thấy $(a_n)_n$ là một dãy số dương và có

$$a_{n+1} = a_n\Big(1 - \frac{\pi}{(n+2)^2}\Big) < a_n.$$

Do đó $(a_n)_n$ là dãy đơn điệu giảm (ngặt). Vậy $(a_n)_n$ là dãy hội tụ.
b) Để ý rằng

$$1 - \frac{\pi}{k^2} > 1 - \frac{4}{k^2} \quad \text{với } k > 0.$$

Vậy với $n \geq 2$ ta có đánh giá

$$\begin{aligned}
a_n = \prod_{k=1}^{n}\Big(1 - \frac{\pi}{(k+1)^2}\Big) &= \Big(1-\frac{\pi}{4}\Big)\Big(1-\frac{\pi}{9}\Big)\prod_{k=3}^{n}\Big(1 - \frac{\pi}{(k+1)^2}\Big)\\
&> \Big(1-\frac{\pi}{4}\Big)\Big(1-\frac{\pi}{9}\Big)\prod_{k=3}^{n}\Big(1 - \frac{4}{(k+1)^2}\Big)\\
&= \Big(1-\frac{\pi}{4}\Big)\Big(1-\frac{\pi}{9}\Big)\prod_{k=3}^{n}\frac{(k-1)(k+3)}{(k+1)^2}\\
&= \Big(1-\frac{\pi}{4}\Big)\Big(1-\frac{\pi}{9}\Big)\frac{3(n+2)(n+3)}{10n(n+1)}\\
&> \frac{3}{10}\Big(1-\frac{\pi}{4}\Big)\Big(1-\frac{\pi}{9}\Big)\\
&> 0.
\end{aligned}$$

Vậy giới hạn của dãy $(a_n)_n$ là một số dương.

Bài 2. Ta sẽ chứng minh hàm $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ được cho bởi

$$g(x) = \ln f(x) = \frac{1}{x}\ln\Big(\frac{30^x + 4^x + 2025^x}{3}\Big) \quad \text{với } x > 0$$

là đơn điệu tăng ngặt. Nếu chứng minh được điều này thì ta suy ra hàm f đang xét cũng đơn điệu tăng ngặt. Dễ thấy

$$g(x) = \frac{1}{x}\ln\Big(\frac{2025^x\big(1 + \big(\frac{30}{2025}\big)^x + \big(\frac{4}{2025}\big)^x\big)}{3}\Big) = \ln 2025 + \frac{1}{x}\ln\Big(\frac{1 + a^x + b^x}{3}\Big),$$

với $a = 2/135$ và $b = 4/2025$. Khi đó $a, b \in (0, 1)$ và

$$g(x) = \ln 2025 + \frac{1}{x}\ln\Big(\frac{1 + a^x + b^x}{3}\Big) \quad \text{với } x > 0.$$

Ta có

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}\ln\Big(\frac{1+a^x+b^x}{3}\Big) + \frac{1}{x}\frac{a^x\ln a + b^x\ln b}{1+a^x+b^x}$$
$$= \frac{1}{x^2}\Big(\frac{x(a^x\ln a + b^x\ln b)}{1+a^x+b^x} - \ln\Big(\frac{1+a^x+b^x}{3}\Big)\Big).$$

Ta sẽ chứng minh $g' > 0$ trên $(0,+\infty)$. Thật vậy xét hàm $h : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ được cho bởi

$$h(x) = \frac{x(a^x\ln a + b^x\ln b)}{1+a^x+b^x} - \ln\Big(\frac{1+a^x+b^x}{3}\Big).$$

Ta có

$$h'(x) = \frac{x[a^x(\ln a)^2 + a^xb^x(\ln a - \ln b)^2 + b^x(\ln b)^2]}{(1+a^x+b^x)^2} > 0$$

với $x > 0$. Để ý $h(0) = 0$. Do đó theo định lý Lagrange với mỗi $x > 0$ tồn tại $\theta_x \in (0,x)$ sao cho

$$h(x) = h(0) + xh'(\theta_x) = xh'(\theta_x) > 0.$$

Vậy $h(x) > 0$ khi $x > 0$. Do đó $g(x) > 0$ khi $x > 0$. Vậy g là hàm đơn điệu tăng ngặt trên $(0,+\infty)$.

Nhận xét. Ta có thể chứng minh $h > 0$ trên $(0,+\infty)$ bằng cách sử dụng bất đẳng thức cho hàm lồi. Thật vậy, đặt

$$\alpha = \frac{a^x}{1+a^x+b^x}, \quad \beta = \frac{b^x}{1+a^x+b^x}, \quad \gamma = \frac{1}{1+a^x+b^x}.$$

Khi đó $0 < \alpha,\beta,\gamma < 1$ và $\alpha+\beta+\gamma = 1$. Hàm $\varphi : t \mapsto t\ln t$ là lồi trên $(0,+\infty)$ nên

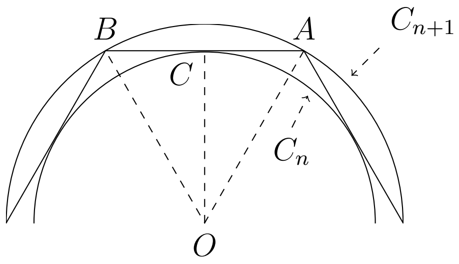
$$\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)+\varphi(\gamma) \geq 3\varphi\big(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\big) = \ln\frac{1}{3}.$$

Dễ thấy $h(x) = \alpha\ln a^x + \beta\ln b^x - \ln(1+a^x+b^x) + \ln 3 = \varphi(\alpha)+\varphi(\beta)+\varphi(\gamma) - \ln\frac{1}{3} \geq 0$. Dấu đẳng thức không xảy ra vì $x > 0$.

Bài 3.

a) Gọi A và B lần lượt là hai đỉnh liên tiếp của $(n+2)$-giác lần lượt nội tiếp và ngoại tiếp bởi các đường tròn C_{n+1} và C_n với $n \geq 1$. Gọi O là điểm gốc $(0,0)$. Khi đó góc AOB có số đo là

$$\widehat{AOB} = \frac{2\pi}{n+2}.$$



Gọi C là trung điểm của đoạn thẳng AB. Không khó để thấy đường tròn C_n tiếp xúc với đoạn thẳng AB tại điểm C.

Do đó các góc AOC và BOC có số đo là

$$\widehat{AOC} = \widehat{BOC} = \frac{\pi}{n+2}.$$

Xét tam giác AOC vuông tại C. Ta thấy

$$\cos \widehat{AOC} = \frac{OC}{OA}.$$

Vậy

$$r_{n+1} = \frac{r_n}{\cos \frac{\pi}{n+2}} \quad \text{với } n \geq 1.$$

b) Từ công thức liên hệ giữa r_{n+1} và r_n và do $r_1 = 1$ ta thu được

$$r_n = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3} \cdots \cos \frac{\pi}{n+1}} \quad \text{với } n \geq 2.$$

Để ý rằng

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \quad \text{với } x \geq 0.$$

Do đó

$$\cos \frac{\pi}{k} \geq 1 - \frac{\pi^2}{2k^2} \geq 1 - \frac{9}{k^2} \quad \text{với } k > 0.$$

Vậy với $n \geq 2$ ta có đánh giá

$$\begin{aligned}
\cos \frac{\pi}{3} \prod_{k=4}^{n+1} \cos \frac{\pi}{k} \geq \cos \frac{\pi}{3} \prod_{k=4}^{n+1} \left(1 - \frac{9}{k^2}\right) &= \cos \frac{\pi}{3} \prod_{k=4}^{n+1} \frac{(k-3)(k+3)}{k^2} \\
&= \cos \frac{\pi}{3} \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{20(n-1)n(n+1)} \\
&> \frac{1}{20} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{40}.
\end{aligned}$$

Vậy $r_n < 40$ với mọi $n \geq 2$. Để ý rằng dãy $(r_n)_n$ là đơn điệu tăng nên nó có giới hạn hữu hạn. Kết quả này cho ta biết hình phẳng được tạonằm trong hình tròn tâm tại điểm $(0,0)$ và bán kính 40.[1]

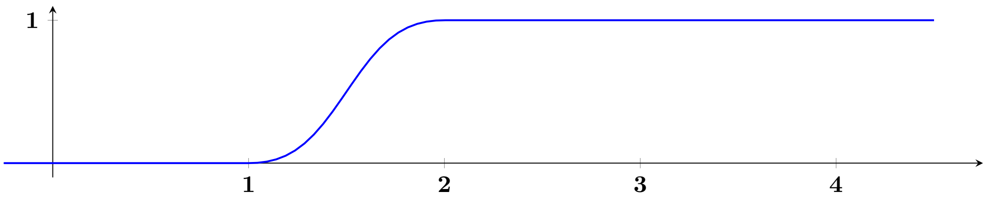
Bài 4. a) Từ giả thiết ta có $0 \leq a_1 < a_2 < \cdots$. Xét hàm $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được cho bởi

$$\phi(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x \geq 0, \\ 0 & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

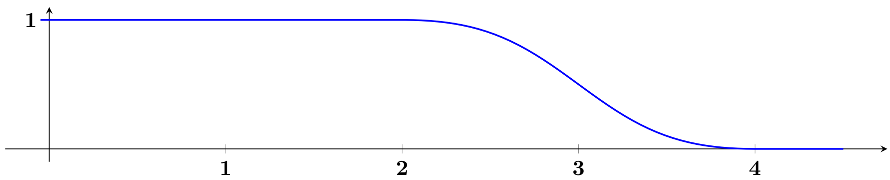
Rõ ràng ϕ là hàm khả vi trên $\mathbb{R}$. Cuối cùng ta định nghĩa hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bởi

$$\begin{aligned} f(x) =& \phi(a_1 - x) \\ &+ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\phi(x - a_{3n+1})}{\phi(x - a_{3n+1}) + \phi(a_{3n+2} - x)} \frac{\phi(a_{3n+3} - x)}{\phi(x - a_{3n+2}) + \phi(a_{3n+3} - x)}. \end{aligned}$$

Nhận xét. Minh họa thành phần $\frac{\phi(x-1)}{\phi(x-1)+\phi(2-x)}$ trong biểu thức của f.

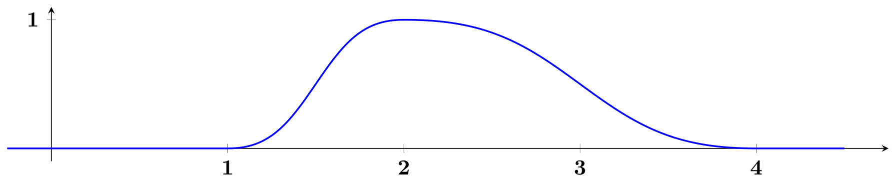


Minh họa thành phần $\frac{\phi(4-x)}{\phi(x-2)+\phi(4-x)}$ trong biểu thức của f.



Minh họa $\frac{\phi(x-1)}{\phi(x-1)+\phi(2-x)} \frac{\phi(4-x)}{\phi(x-2)+\phi(4-x)}$ tương ứng với bộ ba điểm $\{1, 2, 4\}$.

1. Giới hạn của dãy $(r_n)_n$ liên quan đến hằng số Kepler–Bouwkamp được đặt tên theo Johannes Kepler và Christoffel Bouwkamp, và cũng có liên quan đến hàm Riemann zeta. Bằng cách xét n đủ lớn có thể thấy giới hạn này xấp xỉ 0,1149987719657837. Tuy nhiên, giá trị chính xác của hằng số này hiện vẫn chưa được biết.



b) Từ giả thiết ta có $0 \le a_1 < a_2 < \cdots$. Hơn nữa, không khó để thấy f là hàm hằng trên $(-\infty, a_1)$. Bằng cách sử dụng định lý Lagrange trên khoảng $[a_1 - 1, a_1]$ ta biết rằng

$$f(a_1) = f(a_1 - 1) + f'(\xi) = f(a_1 - 1)$$

với $\xi \in (a_1 - 1, a_1)$ nào đó. Vậy f là hàm hằng trên $(-\infty, a_1]$. Lặp lại lý luận trên cho mọi khoảng $[a_1, a]$ với $a \in (a_1, a_2]$ ta suy ra f là hàm hằng trên $[a_1, a_2]$, và do đó f là hàm hằng trên $(-\infty, a_2]$. Lý luận tương tự ta chứng minh được f là hàm hằng trên $(-\infty, a_3]$. Vậy f là hàm hằng trên $\mathbb{R}$.
Nhận xét. Ở chứng minh trên ta cần tính tăng ngặt của dãy $(a_n)_n$ mặc dù giả thiết này có thể giảm nhẹ. Thật vậy nếu $f'(a_n) \neq 0$ với n nào đó, thì theo định lý Darboux về giá trị trung gian của đạo hàm trên $[a_n - 1, a_n + 1]$ hàm f' nhận mọi giá trị nằm giữa 0 và $f'(a_n)$. Tuy nhiên, đây là điều vô lý vì trên khoảng $[a_n - 1, a_n + 1]$ hàm f' chỉ nhận nhiều nhất là đếm được các giá trị khác nhau nằm thuộc tập hợp $\{0\} \cup \{f'(a_m) : m \ge 1\}$.
c) Ta chứng minh không tồn tại hàm khả vi f. Thật vậy, với mỗi số nguyên $n, m \ge 1$ ta ký hiệu

$$L(n,m) = \bigcap_{k \ge n} \Big\{x : k\Big(f(x + \frac{1}{k}) - f(x)\Big) \ge \frac{1}{m}\Big\}$$

và

$$U(n,m) = \bigcap_{k \ge n} \Big\{x : k\Big(f(x + \frac{1}{k}) - f(x)\Big) \le -\frac{1}{m}\Big\}.$$

Do f là hàm khả vi (nên liên tục) và do đó $L(n,m)$ và $U(n,m)$ là các tập đóng. Đặt

$$B(n,m) = \mathbb{R} \setminus \big(L(n,m) \cup U(n,m)\big).$$

Khi đó $B(n,m)$ là một tập mở. Ta chứng minh

$$\{x : f'(x) = 0\} = \bigcap_{n,m \ge 1} B(n,m).$$

Thật vậy tại x mà $f'(x) = 0$, từ định nghĩa đạo hàm ta phải có $x \notin L(n,m) \cup U(n,m)$ với n và m nào đó. Vậy $\{x : f'(x) = 0\} \subset \bigcap_{n,m \ge 1} B(n,m)$. Ngược lại nếu $x \in B(n,m)$ với mọi $m, n \geq 1$ thì

$$\left|\frac{f(x+1/k)-f(x)}{1/k}\right| \leq \frac{1}{m} \quad \text{với mọi } m \geq 1, k \geq n.$$

Lần lượt lấy giới hạn khi $k \to +\infty$ và khi $m \to +\infty$ ta thu được $f'(x) = 0$. Với mỗi $p \in \mathbb{Q}$ ta đặt $R_p = \mathbb{R} \setminus \{p\}$. Khi đó R_p là một tập mở và có

$$\Big(\bigcap_{p\in\mathbb{Q}} R_p\Big)\bigcap\Big(\bigcap_{n,m\geq 1} B(n,m)\Big) = (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\bigcap\mathbb{Q} = \emptyset.$$

Tuy nhiên, ta sẽ chứng minh

$$\Big(\bigcap_{p\in\mathbb{Q}} R_p\Big)\bigcap\Big(\bigcap_{n,m\geq 1} B(n,m)\Big) \neq \emptyset,$$ [2]

và vì vậy ta sẽ có điều vô lý. Thật vậy, để thuận tiện ta ký hiệu lại tất cả các tập R_p với $p \in \mathbb{Q}$ và $B(n,m)$ với $m, n \geq 1$ bởi O_k với $k \geq 1$. Ta sẽ chứng minh $\bigcap_{k\geq 1} O_k \neq \emptyset$. Thật vậy, do $O_1 \neq \emptyset$ là một tập mở nên ta tìm được x_1 và $r_1 \in (0, 2^{-1})$ đủ bé sao cho khoảng đóng

$$[x_1 - r_1, x_1 + r_1] \subset O_1.$$

Để ý rằng khoảng mở này chứa vô số số hữu tỉ, nên

$$[x_1 - r_1, x_1 + r_1] \cap O_2 \neq \emptyset.$$

Do U_2 là tập mở nên ta tìm được x_2 và $r_2 \in (0, 2^{-2})$ đủ bé sao cho khoảng đóng

$$[x_2 - r_2, x_2 + r_2] \subset O_2 \cap (x_1 - r_1, x_1 + r_1).$$

Lặp lại lý luận trên cho O_3, O_4, v.v. ta tìm được một dãy các khoảng đóng lồng nhau $[x_n - r_n, x_n + r_n]$ với $r_n \in (0, 2^{-n})$. Nói riêng với $m \geq n \geq 1$ bất kỳ ta luôn có

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - r_n| \leq 2^{-n}.$$

Vậy $(x_n)_n$ là một dãy Cauchy nên $(x_n)_n$ hội tụ đến x_∞ nào đó. Rõ ràng $x_\infty \in \bigcap_{n\geq 1} O_n$.

Bài 5. a) Do f là hàm số liên tục trên $[0,1]$ nên hàm F được cho bởi tích phân

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

2. Thực tế vế trái là một tập trù mật trong $\mathbb{R}$ nhưng ta không cần khẳng định rất mạnh này.

là xác định trên $[0, 1]$. Ngoài ra do f liên tục trong $(0, 1)$ nên F khả vi trong $(0, 1)$. Vậy theo định lý Lagrange, tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho

$$F(1) - F(0) = F'(c),$$

tức là $\int_0^1 f dx = f(c)$.

b) Bằng cách sử dụng hàm F như ý trên đẳng thức cần chứng minh trở thành $\big(F'(c)\big)^2 = F'(a)F'(b)$ trong đó a, b là các số thực phân biệt trong $(0, 1)$ cần phải xác định. Xét 2 trường hợp.

Trường hợp 1. Nếu c là điểm cực trị (toàn cục) của F'. Không mất tính tổng quát giả sử đây là điểm cực đại, tức là

$$F'(x) \le F'(c) = F(1) - F(0) \quad \text{với mọi } x \in (0, 1).$$

Khi đó hàm $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ được cho bởi

$$g(x) = F(x) - F(0) - (F(1) - F(0))x$$

là hàm hằng. Từ đây ta suy ra $F'(x) = F(1)-F(0)$ trên $[0, 1]$ và do đó khẳng định là tầm thường do F' là hàm hằng.

Trường hợp 2. Ở trường hợp còn lại tồn tại $p, q \in (0, 1)$ sao cho

$$F'(p) < F'(c) < F'(q).$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $p < q$. Nếu $F'(c) = 0$ thì khẳng định là tầm thường. Ngược lại không mất tính tổng quát giả sử $F'(c) > 0$. Khi đó ta có thể chọn $\varepsilon > 1$ đủ gần 1 sao cho

$$F'(p) < \frac{F'(c)}{\varepsilon} < F'(c) < \varepsilon F'(c) < F'(q).$$

Sử dụng định lý Darboux ta tìm được a nằm giữa p và c, b nằm giữa q và c sao cho

$$F'(a) = \frac{F'(c)}{\varepsilon}, \quad F'(b) = \varepsilon F'(c).$$

Khi đó các điểm a, b, và c thuộc $(0, 1)$ và đôi một phân biệt vì $\varepsilon > 1$ và $F'(c) \neq 0$. Ngoài ra

$$\Big(\int_0^1 f dx\Big)^2 = (f(c))^2 = (F'(c))^2 = F'(a)F'(b) = f(a)f(b).$$

c) Câu trả lời là "có". Thật vậy nếu $n \ge 3$ là một số chẵn thì ta lặp lại $n/2$ lần cách xây dựng như ở ý (b). Nếu $n \ge 3$ là một số lẻ thì ta chỉ cần bổ sung thêm điểm c từ chứng minh của ý (a) để thu được các điểm phân biệt.

2.2 BẢNG B

Bài 1. a) Dễ thấy $(a_n)_n$ là một dãy số dương và có

$$a_{n+1} = a_n\Big(1 - \frac{\pi}{(n+2)^2}\Big) < a_n.$$

Do đó $(a_n)_n$ là dãy đơn điệu giảm (ngặt). Vậy $(a_n)_n$ là dãy hội tụ.
b) Để ý rằng

$$1 - \frac{\pi}{k^2} > 1 - \frac{4}{k^2} \quad \text{với } k > 0.$$

Vậy với $n \geq 2$ ta có đánh giá

$$\begin{aligned} a_n = \prod_{k=1}^{n}\Big(1 - \frac{\pi}{(k+1)^2}\Big) &= \Big(1 - \frac{\pi}{4}\Big)\Big(1 - \frac{\pi}{9}\Big)\prod_{k=3}^{n}\Big(1 - \frac{\pi}{(k+1)^2}\Big) \\ &> \Big(1 - \frac{\pi}{4}\Big)\Big(1 - \frac{\pi}{9}\Big)\prod_{k=3}^{n}\Big(1 - \frac{4}{(k+1)^2}\Big) \\ &= \Big(1 - \frac{\pi}{4}\Big)\Big(1 - \frac{\pi}{9}\Big)\prod_{k=3}^{n}\frac{(k-1)(k+3)}{(k+1)^2} \\ &= \Big(1 - \frac{\pi}{4}\Big)\Big(1 - \frac{\pi}{9}\Big)\frac{3(n+2)(n+3)}{10n(n+1)} \\ &> \frac{3}{10}\Big(1 - \frac{\pi}{4}\Big)\Big(1 - \frac{\pi}{9}\Big) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Vậy giới hạn của dãy $(a_n)_n$ là một số dương.

Bài 2. Ta sẽ chứng minh hàm $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ được cho bởi

$$g(x) = \ln f(x) = \frac{1}{x}\ln\Big(\frac{30^x + 4^x}{2}\Big) \quad \text{với } x > 0$$

là đơn điệu tăng ngặt. Nếu chứng minh được điều này thì ta suy ra hàm f đang xét cũng đơn điệu tăng ngặt. Dễ thấy

$$g(x) = \frac{1}{x}\ln\Big(\frac{30^x\big(1 + \big(\frac{2}{15}\big)^x\big)}{2}\Big) = \ln 30 + \frac{1}{x}\ln\Big(\frac{1 + (2/15)^x}{2}\Big).$$

Đặt $a = 2/15$. Khi đó $a \in (0, 1)$ và

$$g(x) = \ln 30 + \frac{1}{x}\ln\Big(\frac{1 + a^x}{2}\Big) \quad \text{với } x > 0.$$

Ta có

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}\ln\Big(\frac{1+a^x}{2}\Big) + \frac{1}{x}\frac{a^x \ln a}{1+a^x} = \frac{1}{x^2}\Big(\frac{xa^x\ln a}{1+a^x} - \ln\Big(\frac{1+a^x}{2}\Big)\Big).$$

Ta sẽ chứng minh $g' > 0$ trên $(0,+\infty)$. Thật vậy xét hàm $h : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ được cho bởi

$$h(x) = \frac{xa^x \ln a}{1+a^x} - \ln\Big(\frac{1+a^x}{2}\Big).$$

Ta có h là hàm liên tục trên $[0,+\infty)$ và khả vi trong $(0,+\infty)$. Ngoài ra

$$h'(x) = \frac{xa^x(\ln a)^2}{(1+a^x)^2} > 0 \quad \text{với } x > 0.$$

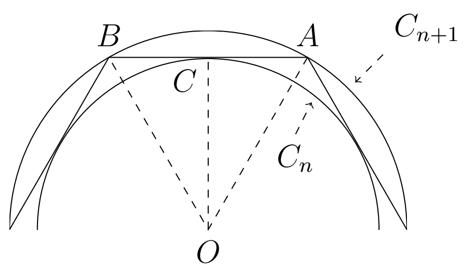
Để ý rằng $h(0) = 0$. Do đó theo định lý Lagrange với mỗi $x > 0$ tồn tại $\theta_x \in (0,x)$ sao cho

$$h(x) = h(0) + xh'(\theta_x) = xh'(\theta_x) > 0.$$

Vậy $h(x) > 0$ khi $x > 0$. Do đó $g(x) > 0$ khi $x > 0$. Vậy g là hàm đơn điệu tăng ngặt trên $(0,+\infty)$.
Nhận xét. Ta có thể chứng minh $h > 0$ trên $(0,+\infty)$ bằng cách sử dụng bất đẳng thức cho hàm lồi.

Bài 3.
a) Gọi A và B lần lượt là hai đỉnh liên tiếp của $(n+2)$-giác lần lượt nội tiếp và ngoại tiếp bởi các đường tròn C_{n+1} và C_n với $n \geq 1$. Gọi O là điểm gốc $(0,0)$. Khi đó góc AOB có số đo là

$$\widehat{AOB} = \frac{2\pi}{n+2}.$$



Gọi C là trung điểm của đoạn thẳng AB. Không khó để thấy đường tròn C_n tiếp xúc với đoạn thẳng AB tại điểm C.
Do đó các góc AOC và BOC có số đo là

$$\widehat{AOC} = \widehat{BOC} = \frac{\pi}{n+2}.$$

Xét tam giác AOC vuông tại C. Ta thấy

$$\cos\widehat{AOC} = \frac{OC}{OA}.$$

Vậy

$$r_{n+1} = \frac{r_n}{\cos \frac{\pi}{n+2}} \quad \text{với } n \geq 1.$$

b) Từ công thức liên hệ giữa r_{n+1} và r_n và do $r_1 = 1$ ta thu được

$$r_n = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3} \cdots \cos \frac{\pi}{n+1}} \quad \text{với } n \geq 2.$$

Để ý rằng

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \quad \text{với } x \geq 0.$$

Do đó

$$\cos \frac{\pi}{k} \geq 1 - \frac{\pi^2}{2k^2} \geq 1 - \frac{9}{k^2} \quad \text{với } k > 0.$$

Vậy với $n \geq 2$ ta có đánh giá

$$\begin{aligned}
\cos \frac{\pi}{3} \prod_{k=4}^{n+1} \cos \frac{\pi}{k} \geq \cos \frac{\pi}{3} \prod_{k=4}^{n+1} \left(1 - \frac{9}{k^2}\right) &= \cos \frac{\pi}{3} \prod_{k=4}^{n+1} \frac{(k-3)(k+3)}{k^2} \\
&= \cos \frac{\pi}{3} \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{20(n-1)n(n+1)} \\
&> \frac{1}{20} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{40}.
\end{aligned}$$

Vậy $r_n < 40$ với mọi $n \geq 2$. Để ý rằng dãy $(r_n)_n$ là đơn điệu tăng nên nó có giới hạn hữu hạn. Kết quả này cho ta biết hình phẳng được tạonằm trong hình tròn tâm tại điểm $(0,0)$ và bán kính 40. [3]

Bài 4. a) Từ giả thiết ta có $0 \leq a_1 < a_2 < \cdots$. Với $x < a_1$ ta chọn hàm $a_1 - x$. Trên các khoảng $[a_{2n+1}, a_{2n+2}]$ với $n \geq 0$ ta chọn hàm dạng

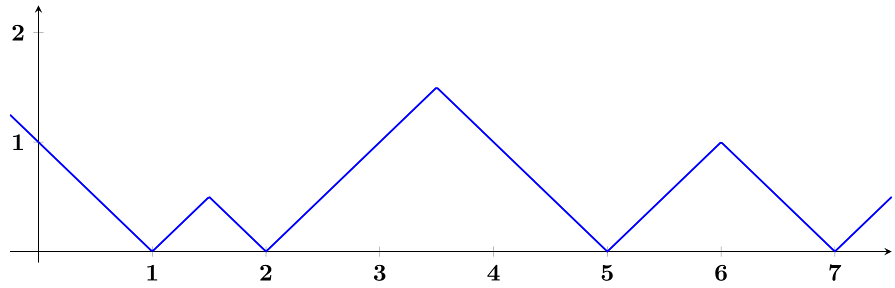
$$\begin{cases} x - a_{2n+1} & \text{nếu } a_{2n+1} \leq x < \dfrac{a_{2n+1} + a_{2n+2}}{2}, \\ a_{2n+2} - x & \text{nếu } \dfrac{a_{2n+1} + a_{2n+2}}{2} < x \leq a_{2n+2}. \end{cases}$$

Với cách xây dựng trên ta thu được một hàm liên tục thỏa mãn yêu cầu. [4]
Nhận xét. Minh họa đồ thị của hàm đã xây dựng trên khi chọn $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 5$, $a_3 = 7$, và $a_4 = 8$.

---

3. Giới hạn của dãy $(r_n)_n$ liên quan đến hằng số Kepler–Bouwkamp được đặt tên theo Johannes Kepler và Christoffel Bouwkamp, và cũng có liên quan đến hàm zeta Riemann. Bằng cách xét n đủ lớn có thể thấy giới hạn này xấp xỉ 0,1149987719657837. Tuy nhiên, giá trị chính xác của hằng số này hiện vẫn chưa được biết.

4. Đây là hàm kiểu “triangle wave”.



b) Ta chỉ cần chứng minh f là hàm hằng trên tất cả các khoảng I_n có dạng

$$I_n := (a_{n-1} + \frac{1}{4}, a_{n+1} - \frac{1}{4}) \quad \text{với } n \geq 1.$$

Tuy nhiên, điều này là hiển nhiên vì f là hàm liên tục.
c) Với $p \in \mathbb{Q}$ bất kỳ tồn tại một dãy các số vô tỉ $r_n \notin \mathbb{Q}$ sao cho $r_n \to p$ khi $n \to +\infty$. Từ tính liên tục của hàm f ta suy ra

$$f(p) = \lim_{n \to +\infty} f(r_n) = 0.$$

Vậy f là hàm hằng trên $\mathbb{R}$.

Bài 5. a) Do f liên tục trên $[0,1]$ nên nó đạt được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $[0,1]$. Ngoài ra tích phân $\int_0^1 f dx$ là tồn tại. Khi đó

$$\min_{[0,1]} f \leq \int_0^1 f dx \leq \max_{[0,1]} f.$$

Theo định lý giá trị trung gian f nhận mọi giá trị giữa $\min_{[0,1]} f$ và $\max_{[0,1]} f$. Vậy tồn tại một điểm $c \in [0,1]$ sao cho

$$\int_0^1 f dx = f(c).$$

Nhận xét. Thực tế ta có khẳng định mạnh hơn là $c \in (0,1)$.
b) Trong trường hợp hàm f được cho bởi

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e} + e^x}, \text{ [5]}$$

ta có

$$\int_0^1 f dx = \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e} + e^x} dx = \frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

5. Đây là hàm kiểu Sigmoid.

Vậy giá trị của $c \in (0,1)$ như trong ý (a) là $1/2$. Do f là hàm đơn điệu trên $[0,1]$ nên giá trị c là duy nhất.
c) Xét f là hàm liên tục thỏa mãn

$$\int_0^1 f dx = f(c), \quad \int_0^1 f^2 dx = f^2(c)$$

với $c \in [0,1]$ nào đó. Khi đó

$$\int_0^1 \Big(f - \int_0^1 f dx\Big)^2 dx = \Big(\int_0^1 f dx\Big)^2 - \int_0^1 f^2 dx = 0.$$

Từ tính liên tục của f ta phải có

$$f - \int_0^1 f dx = 0 \quad \text{trên } [0,1].$$

Vậy f phải là hàm hằng. Kiểm tra lại ta thấy khi f là hàm hằng thì luôn mọi điểm thuộc $[0,1]$ đều thỏa mãn yêu cầu.

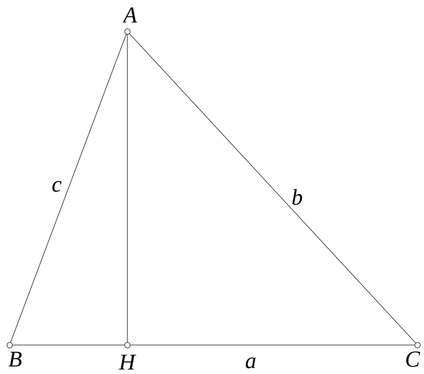
3 PHỔ THÔNG

3.1 NGÀY 1 - Hình học

A. Một số hệ thức lượng đặc biệt trong tam giác

Bài 1. Áp dụng định lý Cosin ta có

$$b\cos C + c\cos B = b\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + c\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{a^2+b^2-c^2+a^2+c^2-b^2}{2a} = a.$$



Chú ý. Sở dĩ định lý trên còn có tên gọi là định lý hình chiếu vì nếu gọi AH là đường cao của tam giác ABC thì ta có hộ dài đại số các hình chiếu là $\overline{HB} = c\cos B$ và $\overline{HC} = -b\cos C$ (ta chọn hướng của trục BC theo $\vec{BC}$), do cạnh a bằng tổng độ dài đại số các hình chiếu. Đó cũng là một chứng minh khác cho định lý này.

Bài 2. Xét các trục BC, CA, AB có hướng là $\vec{BC}, \vec{CA}, \vec{AB}$. Khi đó

$$\frac{2\overline{DX}}{DA} = \frac{\overline{DB}+\overline{DC}}{DA} = \cot B - \cot C.$$

Tương tự

$$\frac{2\overline{EY}}{EB} = \cot C - \cot A,\ \frac{2\overline{FZ}}{FC} = \cot A - \cot B.$$

Từ đó

$$\frac{2\overline{DX}}{DA} + \frac{2\overline{EY}}{EB} + \frac{2\overline{FZ}}{FC}.$$

Vậy khi bỏ độ dài đại số ta thu được kết luận là ta luôn có cách chọn các dấu $+$ hoặc $-$ sao cho

$$\frac{DX}{DA} \pm \frac{EY}{EB} \pm \frac{FZ}{FC} = 0.$$

Chú ý. Có thể giải bài trên nhờ đẳng thức

$$\cot \angle BAX + \cot \angle CYB + \cot \angle AZC = 0.$$

Tuy nhiên khi chuyển về đẳng thức tỷ số độ dài trong đề bài vẫn cần có bước xét dấu của độ dài đại số.

Bài 3. Theo định lý Cosin thì

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC}.$$

Ta có biến đổi

$$\begin{aligned}
\vec{AB} \cdot \vec{AC} &= \left(\vec{PB} - \vec{PA}\right)\left(\vec{PC} - \vec{PA}\right) \\
&= \vec{PB} \cdot \vec{PC} - \vec{PA}\left(\vec{PB} + \vec{PC} - \vec{PA}\right) \\
&= PB \cdot PC\cos\alpha - \vec{PA}\left(\vec{PD} - \vec{PA}\right) \\
&= PB \cdot PC\cos\alpha + \vec{AP} \cdot \vec{AD} \\
&= PB \cdot PC\cos\alpha + PA \cdot AD\cos\theta.
\end{aligned}$$

Từ hai phương trình trên ta thu được

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - 2PB \cdot PC\cos\alpha - 2PA \cdot AD\cos\theta.$$

Chú ý. Nếu P nằm trên đường tròn có tâm là trung điểm BC và đi qua A thì P thỏa mãn $AP \perp AD$, khi đó ta có đẳng thức khá thú vị sau cũng có thể coi là mở rộng định lý Cosin

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2PB \cdot PC\cos\alpha.$$

Bài 4. Áp dụng Bài 1 thì

$$\begin{aligned}
A_1A_2 &= PA_1\cos\angle PA_1A_2 + PA_2\cos\angle PA_2A_1, \\
A_2A_3 &= PA_2\cos\angle PA_2A_3 + PA_3\cos\angle PA_3A_2, \\
&\dots \\
A_nA_1 &= PA_n\cos\angle PA_nA_1 + PA_1\cos\angle PA_1A_n.
\end{aligned}$$

Cộng các đẳng thức trên với nhau ta thu được (coi $A_{n+1} = A_1$ và $A_0 = A_n$)

$$\begin{aligned}
2s &= \sum_{i=1}^{n} PA_i\left(\cos\angle PA_iA_{i+1} + \cos\angle PA_iA_{i-1}\right) \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} PA_i\cos\frac{\angle PA_iA_{i+1} + \angle PA_iA_{i-1}}{2}\cos\frac{\angle PA_iA_{i+1} - \angle PA_iA_{i-1}}{2} \\
&\le 2\sum_{i=1}^{n} PA_i\cos\frac{\alpha_i}{2}.
\end{aligned}$$

Đến đây ta thu được

$$PA_1 \cos \frac{\alpha_1}{2} + PA_2 \cos \frac{\alpha_2}{2} + \cdots + PA_n \cos \frac{\alpha_n}{2} \geq s.$$

Dễ thấy dấu bằng xảy ra nếu đa giác ngoại tiếp và P trùng với tâm nội tiếp đa giác. Kết thúc chứng minh.

B. Một số hệ thức lượng và bất đẳng thức trong tứ giác

Bài 5. Do P nằm trong $ABCD$ nên hai tam giác APD và ABC đồng dạng cùng hướng, hệ quả là hai tam giác APD và ABC cũng đồng dạng cùng hướng. Từ đó ta có các đẳng thức

$$PB \cdot AC = AB \cdot CD,$$

$$PD \cdot AC = AD \cdot BC,$$

$$BD \cdot AC = BD \cdot AC.$$

Từ đó dễ thấy

$$(PB, PD, BD) \sim (AB \cdot CD, AD \cdot BC, BD \cdot AC).$$

Kết thúc chứng minh.
Chú ý. Ý nghĩa của bài tập trên chính là cách dựng tam giác Ptolemy.

Bài 6. Dựng vào trong tứ giác điểm P sao cho hai tam giác APB và ADC đồng dạng. Khi đó $\angle BPD = 360 - \theta$ hoặc $\angle BPD = \theta$. Từ đó áp dụng định lý Cosin vào tam giác BPD ta thu được

$$BD^2 = PB^2 + PD^2 - 2PB \cdot PD \cos \theta.$$

Tuy nhiên theo Bài 5 thì

$$(PB, PD, BD) \sim (AB \cdot CD, AD \cdot BC, BD \cdot AC)$$

do đó

$$AC^2 \cdot BD^2 = AB^2 \cdot CD^2 + AD^2 \cdot BC^2 - 2AB \cdot CD \cdot AD \cdot BC \cos \theta.$$

Kết thúc chứng minh.

Bài 7. Dựng vào trong tứ giác điểm P sao cho hai tam giác APB và ADC đồng dạng. Khi đó

$$\angle PDB = |\angle ADB - \angle ACB| = |\angle DAC - \angle DBC| = \alpha$$

và

$$\angle PBD = |\angle ABD - \angle ACD| = |\angle BAC - \angle BDC| = \beta.$$

Từ đó áp dụng Bài 1 thì

$$BD = PD\cos\alpha + PB\cos\beta.$$

Lại áp dụng Bài 5

$$(PB, PD, BD) \sim (AB \cdot CD, AD \cdot BC, BD \cdot AC)$$

ta suy ra

$$AC \cdot BD = AD \cdot BC\cos\alpha + AB \cdot CD\cos\beta.$$

Đó là điều phải chứng minh.

Bài 8. Gọi E, F là trung điểm AC và BD, theo hệ thức Euler dễ thấy

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 4EF^2 + DB^2 + AC^2 \geq BD^2 + AC^2.$$

Lại theo bất đẳng thức Ptolemy thì

$$2AB \cdot CD + 2AD \cdot BC \geq 2AC \cdot BD.$$

Cộng hai bất đẳng thức trên cho ta

$$(AB + CD)^2 + (AD + BC)^2 \geq (AC + BD)^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi cả hai bất đẳng thức trên có dấu bằng hay khi $ABCD$ là một hình bình hành nội tiếp, nói cách khác $ABCD$ là hình chữ nhật.

C. Ứng dụng của một số hệ thức lượng

Bài 9. Bỏ qua trường hợp đơn giản khi $EF \parallel BC$. Giả sử EF cắt BC tại G. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác PBC với G, Q, R thẳng hàng, ta có

$$\frac{GB}{GC} \cdot \frac{QC}{QP} \cdot \frac{RP}{RB} = 1$$

hay (hệ quả từ định lý Thales)

$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{LC}{LD} \cdot \frac{KD}{KB} = 1$$

hay

$$\frac{LD}{KD} = \frac{DB}{KB} \cdot \frac{LC}{DC} = \frac{DP}{RK} \cdot \frac{QL}{DP} = \frac{QL}{RK}.$$

Từ đó hai tam giác vuông DKR và DLQ đồng dạng. Hệ quả là $\angle RDK = \angle QDL$ hay $MN \parallel KL$. Gọi T là trung điểm của QR. Cũng từ hai tam giác DKR và DLQ đồng dạng, đồng thời áp dụng định lý Ceva dạng lượng giác, ta có

$$\begin{aligned}\frac{\sin\angle QDT}{\sin\angle RDT} \cdot \frac{\sin\angle LND}{\sin\angle LNM} \cdot \frac{\sin\angle KMN}{\sin\angle KMD} &= \frac{DR}{DQ} \cdot \frac{\sin\angle LND}{\sin\angle NLD} \cdot \frac{\sin\angle MKD}{\sin\angle KMD} \\ &= \frac{DR}{DQ} \cdot \frac{DL}{DN} \cdot \frac{DM}{DK} = 1.\end{aligned}$$

Ta thu được DT, KM, LN đồng quy.

Bài 10. Ký hiệu $\angle ACD = \alpha, \angle BCD = \beta, \angle BED = x, \angle AED = y$. Khi đó theo tính chất $\cot$ của trung tuyến, ta có

$$4\cot x = 3\cot\beta - \cot\alpha$$

và

$$4\cot y = 3\cot\alpha - \cot\beta.$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}\alpha = 2x &\iff 4\cot\frac{\alpha}{2} = 4\cot x \\ &\iff 4\cot\frac{\alpha}{2} = 3\cot\beta - \cot\alpha \\ &\iff 4\cot\frac{\alpha}{2} = 3\frac{1-\tan^2\frac{\beta}{2}}{2\tan\frac{\beta}{2}} - \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{2\tan\frac{\alpha}{2}} \\ &\iff \left(3+\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\right)\left(3\tan\frac{\beta}{2} - \tan\frac{\alpha}{2}\right) = 0 \\ &\iff \tan\frac{\alpha}{2} = 3\tan\frac{\beta}{2}.\end{aligned}$$

Tương tự thì

$$\begin{aligned} 2y = 180^\circ + \beta &\iff 4\cot\left(90^\circ + \frac{\beta}{2}\right) = 4\cot y \\ &\iff -4\tan\frac{\beta}{2} = 3\cot\alpha - \cot\beta \\ &\iff -4\tan\frac{\beta}{2} = 3\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{2\tan\frac{\alpha}{2}} - \frac{1-\tan^2\frac{\beta}{2}}{2\tan\frac{\beta}{2}} \\ &\iff \left(1 + 3\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\right)\left(3\tan\frac{\beta}{2} - \tan\frac{\alpha}{2}\right) = 0 \\ &\iff \tan\frac{\alpha}{2} = 3\tan\frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

Vậy từ hai biến đổi trên ta suy ra $\angle ACD = 2\angle DEB$ khi và chỉ khi $2\angle AED = \angle DCB + 180^\circ$. Đó là điều phải chứng minh.

Bài 11. Chọn $P = (0,0)$ làm gốc tọa độ của hệ trục tọa độ Descartes. Giả sử rằng

$$X(0,a), \quad Y(b,0), \quad Z(0,c), \quad W(d,0).$$

Từ đó suy ra

$$A(d,a), \quad B(b,a), \quad C(b,c), \quad D(d,c).$$

Ta có phương trình đường trung trực của các đoạn XY, YZ, ZX, XW lần lượt là:

$$y = \frac{b}{a}x + \frac{a^2-b^2}{2a}, \tag{7}$$

$$y = \frac{b}{c}x + \frac{-b^2+c^2}{2c}, \tag{8}$$

$$y = \frac{d}{c}x + \frac{c^2-d^2}{2c}, \tag{9}$$

$$y = \frac{d}{a}x + \frac{a^2-d^2}{2a}. \tag{10}$$

Vì đường trung trực của XY và WZ cắt nhau tại Q, giải hệ phương trình (7) và (9), ta tìm được tọa độ của Q là:

$$Q = \left(\frac{a^2c - ac^2 + ad^2 - b^2c}{2ad - 2bc}, \frac{a^2d - b^2d - bc^2 + bd^2}{2ad - 2bc}\right). \tag{11}$$

Tương tự, vì đường trung trực của YZ và XW cắt nhau tại R, giải hệ phương trình (8) và (10), ta tìm được tọa độ của R là:

$$R = \left(\frac{a^2c + ab^2 - ac^2 - cd^2}{2ab - 2cd}, \frac{a^2b + b^2d - bd^2 - c^2d}{2ab - 2cd}\right). \tag{12}$$

Từ (11) và (12), ta có:

$$\vec{QR} = R - Q = \left(\frac{-a^3bc + a^3cd + a^2b^2d - a^2bd^2 + abc^3 - ac^3d - b^2c^2d + bc^2d^2}{2a^2bd - 2ab^2c - 2acd^2 + 2bc^2d},\right.$$
$$\left.\frac{-a^2b^2c + a^2cd^2 + ab^3d + ab^2c^2 - abd^3 - ac^2d^2 - b^3cd + bcd^3}{2a^2bd - 2ab^2c - 2acd^2 + 2bc^2d}\right). \quad (13)$$

Gọi M và N lần lượt là trung điểm của XZ và YW, ta có tọa độ của chúng là:

$$M = \frac{A + C}{2} = \left(0, \frac{a + c}{2}\right)$$

và

$$N = \frac{B + D}{2} = \left(\frac{b + d}{2}, 0\right).$$

Do đó,

$$\vec{MN} = N - M = \left(\frac{b + d}{2}, -\frac{a + c}{2}\right). \quad (14)$$

Từ (13) và (14), ta tính được tích vô hướng:

$$\vec{QR} \cdot \vec{MN} = 0,$$

suy ra hai đường thẳng MN và QR vuông góc.
Phương trình đường thẳng AC là:

$$y = \frac{ab - cd}{b - d} + x\frac{-a + c}{b - d}. \quad (15)$$

Khi đó, hình chiếu vuông góc S của P lên AC có tọa độ:

$$S = \left(\frac{a^2b - abc - acd + c^2d}{a^2 - 2ac + b^2 - 2bd + c^2 + d^2}, \frac{ab^2 - abd - bcd + cd^2}{a^2 - 2ac + b^2 - 2bd + c^2 + d^2}\right). \quad (16)$$

Tương tự, phương trình đường thẳng BD là:

$$y = \frac{-ad + bc}{b - d} + x\frac{a - c}{b - d}. \quad (17)$$

Khi đó, hình chiếu vuông góc T của P lên BD có tọa độ:

$$T = \left(\frac{a^2d - abc - acd + bc^2}{a^2 - 2ac + b^2 - 2bd + c^2 + d^2}, \frac{-abd + ad^2 + b^2c - bcd}{a^2 - 2ac + b^2 - 2bd + c^2 + d^2}\right). \quad (18)$$

Từ (16) và (18), ta có:

$$\vec{ST} = T - S = \left(\frac{-a^2b + a^2d + bc^2 - c^2d}{a^2 - 2ac + b^2 - 2bd + c^2 + d^2}, \frac{-ab^2 + ad^2 + b^2c - cd^2}{a^2 - 2ac + b^2 - 2bd + c^2 + d^2}\right). \quad (19)$$

Từ (14) và (19), ta có:

$$\vec{ST} \cdot \vec{MN} = 0,$$

suy ra ST và QR đều vuông góc với MN, do đó $QR \parallel ST$.
Điều phải chứng minh.

3.2 NGÀY 2 - Tổ hợp

A. Trò chơi Zeckendorf: phiên bản 1 người

Trò chơi Zeckendorf (phiên bản 1 người) ứng với số nguyên n ($n > 2$) là trò chơi sau đây. Ban đầu, trên bảng có n số 1 (tương ứng với n số F_1). Sau đó, ở mỗi lượt, người chơi có thể thực hiện 1 trong các thao tác sau, mà ta sẽ gọi là *thao tác* P:

1. Nếu trên bảng có 2 số Fibonacci liên tiếp là F_{i-1} và F_i, người chơi có thể xóa 2 số đó đi và viết lên bảng F_{i+1}.
2. Nếu trên bảng có 2 số Fibonacci giống nhau F_i, F_i :
   (a) Với $i = 1$, người chơi có thể xóa 2 số F_1 và viết lên bảng F_2;
   (b) Với $i = 2$, người chơi có thể xóa 2 số F_2 và viết lên bảng F_1 và F_3;
   (c) Với $i \geq 3$, người chơi có thể xóa 2 số F_i và viết lên bảng F_{i-2} và F_{i+1}.

Trò chơi kết thúc khi người chơi không còn thực hiện được thao tác nào nữa.

Bài 1. Nếu gọi S là tổng bình phương các số trên bảng, dễ dàng kiểm tra được S tăng sau mỗi thao tác. Ngoài ra, theo định nghĩa của dãy Fibonacci và luật chơi, rõ ràng tổng các số trên bảng luôn bằng n. Từ đó suy ra $S \leq n^2$. Từ đây suy ra số thao tác hợp lệ là hữu hạn, hay trò chơi Zeckendorf chắc chắn sẽ kết thúc sau hữu hạn thao tác.

Bài 2. Với $n = 6$, một ví dụ trò chơi Zeckendorf kết thúc sau 4 thao tác là

$$\{1,1,1,1,1,1\} \to \{2,1,1,1,1\} \to \{3,1,1,1\} \to \{3,2,1\} \to \{5,1\}.$$

Một ví dụ trò chơi Zeckendorf kết thúc sau 5 thao tác là

$$\{1,1,1,1,1,1\} \to \{2,1,1,1,1\} \to \{2,2,1,1\} \to \{2,2,2\} \to \{3,2,1\} \to \{5,1\}.$$

Bài 3. Chứng minh sự tồn tại:
Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp.
Với $n = 1, 2, 3, 4, 5$ hoặc n là số Fibonacci, hiển nhiên.
Ngược lại, gọi j là số Fibonacci thỏa mãn $F_j < n < F_{j+1}$. Khi này theo quy nạp, số $a = n - F_j$ tồn tại một biểu diễn thành tổng của các số Fibonacci phân biệt và không liên tiếp, trong đó số Fibonacci lớn nhất không vượt quá F_{j-2} do $a = n - F_j < F_{j+1} - F_j = F_{j-1}$. Ta có điều phải chứng minh.
Chứng minh duy nhất:
Ta sẽ chứng minh bằng phản chứng, giả sử tồn tại số nguyên dương n và 2 tập số nguyên dương phân biệt A, B không chứa 2 số tự nhiên liên tiếp thỏa mãn

$$n = \sum_{a\in A} F_a = \sum_{b\in B} F_b.$$

Giả sử $c \in A; c \notin B$, đặt $D = B \setminus A$. Khi đó ta có

$$F_c \leq \sum_{d\in D} F_d. \quad (*)$$

Chú ý rằng chúng ta có 2 đẳng thức sau của dãy Fibonacci

$$F_1 + F_3 + \cdots + F_{2i-1} + 1 = F_{2i}$$

và

$$F_2 + F_4 + \cdots + F_{2i} + 1 = F_{2i+1}.$$

Mặt khác, trong D không chứa 2 số tự nhiên liên tiếp, cùng với đó $c > d \ \forall d \in D$. Kết hợp với 2 đẳng thức trên, dễ dàng suy ra

$$F_c > \sum_{d\in D} F_d.$$

Mâu thuẫn với $(*)$. Từ đấy ta có điều phải chứng minh.

Bài 4. Ta có một số nhận xét sau

1. Các số trên bảng luôn là các số Fibonacci.
2. Tổng các số trên bảng luôn bằng n.
3. Trò chơi sẽ chỉ kết thúc khi trên bảng không có 2 số Fibonacci nào bằng nhau, cũng như không có 2 số Fibonacci nào liên tiếp.

Do đó, trạng thái kết thúc là một biểu diễn Zeckendorf của n, là duy nhất.

Trong các bài toán 5, 6 và 7, ta ký hiệu x_n là số thao tác được thực hiện trong một trò chơi Zeckendorf ứng với n.

Bài 5. Với 4 số 1 trên bảng, ta có 2 cách thao tác như sau:

$$\{1,1,1,1\} \to \{2,1,1\} \to \{3,1\}$$

hoặc

$$\{1,1,1,1\} \to \{2,1,1\} \to \{2,2\} \to \{3,1\}.$$

Vậy với $n = 4$, x_5 có thể nhận 2 giá trị là 2 hoặc 3.
Với $n > 4$, ta có thể thực hiện một trong hai dãy thao tác trên ban đầu, đều sẽ thay thế 4 số 1 trên bảng bởi 2 số $1, 3$; sau đó thực hiện các thao tác sau giống nhau, khi này có 2 trường hợp của x_n chênh nhau 1, chứng tỏ x_n có thể nhận cả 2 giá trị chẵn và lẻ.

Bài 6. Do trạng thái kết thúc là một biểu diễn Zeckendorf của n, cùng với đó, mỗi thao tác cùng lắm chỉ làm giảm 1 số trên bảng (hoặc giữ nguyên). Do đó

$$x_n \geq n - Z(n).$$

Ta gọi một thao tác là **kết hợp** nếu như đó là thao tác xóa 2 số Fibonacci và viết lên bảng tổng của chúng. Các thao tác còn lại gọi là **phân tách.** Rõ ràng đẳng thức xảy ra khi ta chỉ sử dụng các thao tác kết hợp để đưa về được trạng thái kết thúc của trò chơi.
Cách thực hiện: ta luôn lựa chọn 2 số Fibonacci liên tiếp lớn nhất có thể trên bảng và thực hiện thao tác kết hợp, nếu không, lựa chọn 2 số F_1 để kết hợp. Ta sẽ chứng minh bằng phản chứng rằng trò chơi sẽ đưa về trạng thái kết thúc.
Giả sử tồn tại số nguyên dương $n > 4$ mà cách thực hiện trên không thể đưa về biểu diễn Zeckendorf của n, nói cách khác, khi này trên bảng phải có 2 số Fibonacci bằng nhau và khác 1. Ta xét các trường hợp sau:

1. Trên bảng có 2 số 2. Trường hợp này không thể xảy ra vì nếu trên bảng đã có 1 số 2, ta không thể ghép 2 số 1 để tạo thành số 2 thứ 2 (mâu thuẫn với quy luật thực hiện được nêu ở trên, vì có 1 và 2 là 2 số Fibonacci liên tiếp).
2. Trên bảng có 2 số F_k với $k > 2$. Điều này cũng không thể xảy ra vì nếu trên bảng đã có 1 số F_k, ta không thể tạo ra số F_k thứ hai khi kết hợp 2 số F_{k-1} và F_{k-2}; sẽ mâu thuẫn với cách thực hiện, khi này có cặp số liên tiếp F_{k-1} và F_k lớn hơn.

Mâu thuẫn trên cho ta điều phải chứng minh.
Nhận xét: Ngoài cách chứng minh về sự tồn tại của dấu "=" như trên, ta cũng có thể sử dụng quy nạp với ý tưởng như sau.
Đầu tiên, chứng minh mỗi số $n = F_k$, trò chơi Zeckendorf ứng với n luôn có thể kết thúc sau $F_k - 1$ bước. Thật vậy, chia F_k số 1 ban đầu thành 2 nhóm, một nhóm có F_{k-1} số 1 và nhóm còn lại có F_{k-2} số 1. Sử dụng quy nạp, sau

$F_{k-1} - 1 + F_{k-2} - 1 + 1 = F_k - 1$ thao tác, ta thu được số F_k.
Với n tổng quát, xét biểu diễn Zeckendorf của n là

$$n = F_{a_1} + F_{a_2} + \cdots + F_{a_k}.$$

Ta chia n số 1 ban đầu thành k nhóm, mỗi nhóm có tổng các số 1 bằng các số Fibonacci trong tổng trên, khi này nhóm có F_{a_j} cần $F_{a_j} - 1$ thao tác để thu được F_{a_j}. Do đó, chỉ cần $n - Z(n)$ thao tác, ta thu được trạng thái kết thúc.

Bài 7. Gọi X_i là các số Fibonacci trên bảng sau thao tác thứ i. Khi đó gọi T_i là tổng của các căn của các chỉ số của số Fibonacci trong X_i. Ta dễ dàng kiểm chứng T_i là một đơn biến (giảm dần) sau mỗi thao tác. Chú ý rằng do $n \geq 3$ nên $l \geq 3$.

1. Nếu i là một thao tác kết hợp, khi này số lượng các số trên bảng sẽ giảm một, do đó, số lượng các thao tác kết hợp không vượt quá n.
2. Nếu i là một thao tác chia tách $F_j; F_j$ thành $F_{j+1}; F_{j-2}$ với $j \geq 3$, khi này

$$T_{i-1} - T_i = 2\sqrt{j} - \sqrt{j-2} - \sqrt{j+1} \geq 2\sqrt{\ell - 1} - \sqrt{\ell - 3} - \sqrt{\ell},$$

   trong đó j là chỉ số của số Fibonacci thực hiện chia tách, ℓ là chỉ số lớn nhất của số Fibonacci không vượt quá n.
   Tiếp theo chú ý rằng

$$2\sqrt{\ell - 1} - \sqrt{\ell - 3} - \sqrt{\ell} > \sqrt{\ell - 1} - \sqrt{\ell - 2} > \frac{1}{\ell - 1}.$$

3. Nếu i là một thao tác chia tách $F_2; F_2$ thành $F_3; F_1$, dễ dàng chứng minh số lượng các thao tác loại này không vượt quá số lượng các thao tác kết hợp F_1, F_1 thành F_2 trước đó. Do đó, nếu kết hợp thao tác F_1, F_1 thành F_2 (tại thao tác i_1 nào đó) ta được

$$T_{i_1 - 1} - T_{i_1} + T_{i-1} - T_i = 1 + 1 - \sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 1 - \sqrt{3} > \frac{1}{2} \geq \frac{1}{\ell - 1}.$$

Nhớ rằng $T_0 = n$ và $T_i > 0 \ \forall i$, suy ra số thao tác phân tách không vượt quá $(\ell - 1).n$ thao tác. Từ đây ta thu được

$$x_n \leq \ell.n.$$

Sử dụng công thức Binet, ta có

$$F_\ell = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi^\ell - (-\phi)^{-\ell} \right).$$

Mặt khác $\left|\dfrac{\phi^{-\ell}}{\sqrt{5}}\right| < 1$, nên $\sqrt{5}F_\ell < \phi^\ell - 1$. Lấy ϕ logarithm hai vế, ta được $\log_\phi\left(\sqrt{5}F_\ell + 1\right) > \ell$. Suy ra

$$\ell.n < \log_\phi(\sqrt{5}n + 1).n.$$

Nhận xét: Ngoài cách làm phức tạp trên, bạn Đỗ Nam Vinh, THPT Chuyên ĐHSP Hà Nội đã đưa ra một lời giải đơn giản và đẹp như sau.

Với mỗi số nguyên dương $m \geq 2$ là số Fibonacci, ta gọi chỉ số Fibonacci của m là số k thỏa mãn $F_k = m$. **Trong trường hợp** $m = 1$ **thì ta quy ước chỉ số Fibonacci của nó là** 0**.**
Với mỗi số nguyên $n > 2$, ta kí hiệu $Z(n)$ là số các số hạng trong biểu diễn Zeckendorf của n, và $IZ(n)$ là tổng các chỉ số Fibonacci trong biểu diễn Zeckendorf của n.
Sau bước thứ m của trò chơi, gọi V_m là tổng các chỉ số Fibonacci của các số xuất hiện trên bảng. Ta xét các trường hợp có thể xảy ra trong bước đi thứ $m + 1$:

1. **Trường hợp 1:** Ta xóa đi số F_0, F_2 và thay bởi F_3, khi đó $V_m - V_{m+1} = -1$.
2. **Trường hợp 2:** Ta xóa đi số F_{i-1}, F_i và thay bởi F_{i+1} $(i \geq 3)$, khi đó $V_m - V_{m+1} = i - 2 \geq 1$.
3. **Trường hợp 3:** Ta xóa đi 2 số F_0 và thay bởi F_2, khi đó $V_m - V_{m+1} = -2$.
4. **Trường hợp 4:** Ta xóa đi 2 số F_i và thay bởi F_{i-2} và F_{i+1}, khi đó $V_m - V_{m+1} \geq 1$.

Ta phân hoạch tập hợp $\{1, \ldots, x_n\}$ thành hai tập S_1, S_2 sao cho với mọi $i \in S_1$ thì ở bước thứ i, trường hợp 4 không xảy ra, và với mọi $i \in S_2$ thì ở bước thứ i, trường hợp 4 xảy ra. Lưu ý rằng sau bước thứ i với $i \in S_1$ thì số các số trên bảng giảm đi 1, do đó $|S_1| = n - Z(n)$.
Ta có:

$$\begin{aligned}
-IZ(n) &= V_0 - V_{x_n} \\
&= \sum_{i=1}^{x_n}(V_i - V_{i-1}) \\
&= \sum_{i\in S_1}(V_i - V_{i-1}) + \sum_{i\in S_2}(V_i - V_{i-1}) \\
&\geq (-2)|S_1| + |S_2| \\
&= (-3)|S_1| + x_n.
\end{aligned}$$

Do đó $x_n \leq 3|S_1| - IZ(n) = 3(n - Z(n)) - IZ(n)$. Đến đây ta thu được kết quả rất đẹp và mạnh hơn kết quả của đề bài rất nhiều là

$$x_n < 3n.$$

B. Trò chơi Zeckendorf: phiên bản 2 người

Trò chơi Zeckendorf cho 2 người ứng với số nguyên dương n diễn ra như sau. Ban đầu, trên bảng có n số 1 (tương ứng với n số F_1). Hai người chơi A và B luân phiên chơi, với A đi trước. Mỗi lần, người đến lượt thực hiện một thao tác P như được mô tả trong phần trên. Trò chơi kết thúc khi một người đến lượt chơi nhưng không thể thực hiện thao tác hợp lệ nào nữa (người thua cuộc); người còn lại là người thắng cuộc.

Bài 8. Do tất cả các số ban đầu đều giống nhau, nên ở lượt đầu tiên, A chỉ có duy nhất phương án xóa 2 số 1 và viết số 2 lên bảng. Khi này, B sẽ xóa số 1 và 2 rồi viết số 3 lên bảng. Sau lượt của B, trên bảng còn lại 4 số là $\{3, 1, 1, 1\}$.
Đến lượt mình, A chỉ có duy nhất thao tác hợp lệ là xóa 2 số 1 và viết số 2 lên bảng, B chỉ việc xóa số 2 và 3 rồi viết số 5 lên bảng, trò chơi kết thúc với trạng thải $\{5, 1\}$. B thắng.

Bài 9. Giả sử tồn tại n sao cho người chơi A có chiến lược chắc chắn thắng. Ta kí hiệu 1^n thể hiện trên bảng có n số 1. Lưu ý rằng vì trò chơi chắc chắn kết thúc, nên với cấu hình số tùy ý trên bảng, chắc chắn sẽ có chiến thuật thắng cho duy nhất một người chơi. Ta kí hiệu $\mathcal{W}_1$ là tập các cấu hình chiến thắng cho người đi trước (khi gặp cấu hình đó) và $\mathcal{W}_2$ là tập các cấu hình chiến thắng cho người đi sau.
Từ giả sử ban đầu, rõ ràng

$$\{1^n\} \in \mathcal{W}_1$$

và

$$\{2, 1^{n-2}\} \in \mathcal{W}_2.$$

Tiếp theo đó, B sẽ thực hiện thao tác xóa 1 và 2 để thu được 3. Do đó

$$\{3, 1^{n-3}\} \in \mathcal{W}_1.$$

Do A chỉ có duy nhất 1 nước đi hợp lệ nên

$$\{3, 2, 1^{n-5}\} \in \mathcal{W}_2.$$

Do A có chiến lược chắc chắn thắng, nên mọi cách chơi của B đều sẽ dẫn đến chiến thắng cho A, điều đó có nghĩa là

$$\{5, 1^{n-5}\}; \{3, 3, 1^{n-6}\}; \{3, 2, 2, 1^{n-7}\} \in \mathcal{W}_1.$$

Ta sẽ chỉ xét 2 trường hợp được bôi đỏ để suy ra mâu thuẫn.

1. Trường hợp 1. Nếu B lựa chọn $\{5, 1^{n-5}\}$, và nhớ rằng A chắc chắn thắng với mọi cách chơi của B, nghĩa là
$$\{5, 2, 1^{n-7}\} \in \mathcal{W}_2.$$

2. Trường hợp 2. Nếu B lựa chọn $\{3, 3, 1^{n-6}\}$, A có 2 lựa chọn hợp lệ là
$$\{5, 1^{n-5}\} \text{ và } \{3, 3, 2, 1^{n-8}\}.$$
Tuy nhiên do $\{5, 1^{n-5}\} \in \mathcal{W}_1$, sẽ đem lại chiến thắng cho B, do đó A bắt buộc phải lựa chọn $\{3, 3, 2, 1^{n-8}\}$, nói cách khác
$$\{3, 3, 2, 1^{n-8}\} \in \mathcal{W}_2.$$
Tuy nhiên, đến đây, B lựa chọn kết hợp 2 với 3 thành 5, thì sẽ thu được
$$\{5, 2, 1^{n-7}\} \in \mathcal{W}_1.$$
Điều này mâu thuẫn với khẳng định ở trường hợp 1. Do đó, giả sử ban đầu là sai, hay B có chiến thuật chắc chắn thắng.

CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: ĐẠI SỐ

Bài 1 (ĐH Công nghệ thông tin TP HCM)**.** a. Kiểm tra hai tính chất của φ

$$\varphi(p(x)+q(x)) = \varphi(p(x)) + \varphi(q(x))$$
$$\varphi(kp(x)) = k\varphi(p(x))$$

với mọi $p(x), q(x) \in P_2[x]$ và $k \in \mathbb{R}$.
Ma trận của φ tương ứng với cơ sở $\{1, x, x^2\}$

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 10 & -10 & 6 \end{pmatrix}$$

b. Đa thức đặc trưng của A

$$P_A(\lambda) = (-\lambda+2)(\lambda+1)(\lambda-1).$$

Các giá trị riêng của A là $2, 1, -1$. Suy ra A chéo hoá được vì A là ma trận cấp 3 có 3 giá trị riêng phân biệt.
Các vectơ riêng của A tương ứng với giá trị riêng 2 là $[a, 3a, 5a]^T, a \neq 0$.
Các vectơ riêng của A tương ứng với giá trị riêng 1 là $[a, 2a, 2a]^T, a \neq 0$.
Các vectơ riêng của A tương ứng với giá trị riêng -1 là $[a, a, 0]^T, a \neq 0$.
Ma trận T cần tìm là $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ và $D = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

c. Với $p(x) = 3 + 6x + 7x^2 = [3\ 6\ 7] \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}$. Đặt $V = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$. Khi đó

$$\varphi^{2025}(p(x)) = A^{2025}V = TD^{2025}T^{-1}V = \begin{pmatrix} 2^{2025} \\ 1 + 3.2^{2025} \\ 2 + 5.2^{2025} \end{pmatrix}.$$

Suy ra $\varphi^{2025}(p(x)) = 2^{2025} + (1 + 3.2^{2025})x + (2 + 5.2^{2025})x^2$.

Bài 2 (ĐH Công nghệ thông tin TP HCM)**.** a. Giả sử tồn tại ma trận A vuông cấp 3 thoả mãn yêu cầu. Theo đề bài $A^T = I_3 - A^2$, suy ra $A = I - (A^2)^T = I - (A^T)^2 = 2A^2 - A^4$. Như vậy, $A^4 - 2A^2 + A = 0$ hay A là nghiệm của đa thức $p(x) = x^4 - 2x^2 + x$. Đa thức $p(x)$ có các nghiệm là $0, 1, \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Đa thức tối tiểu của A là ước của $p(x)$, do đó các giá trị riêng của A cũng là các ước của $p(x)$. Mặt khác, vì vết của ma trận là tổng của các giá trị riêng nên tổng các giá trị riêng của A bằng 0. Do đó, các giá trị riêng của A đều bằng 0. Điều này dẫn đến các giá trị riêng của A^2 cũng bằng 0. Khi đó

$$0 = \mathrm{trace}(A) = \mathrm{trace}(A^T) = \mathrm{trace}(I - A^2) = 3 \text{ (vô lý)}.$$

Như vậy, không tồn tại ma trận A thoả yêu cầu.
b. Từ giả thiết, ta có

$$X^3 - 3X^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Suy ra $\det(X) = 0$ hoặc $\det(X - 3I) = 0$.
Trường hợp 1. $\det(X) = 0$ và đặt $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Khi đó $ad - bc = 0$ và đặt $t = \mathrm{trace} X = a + d$. Mặt khác, đa thức đặt trưng của X có dạng

$$\lambda^2 - t\lambda + \det X = \lambda^2 - (a + d)\lambda.$$

Theo định lý Caley-Hamilton, $X^2 - (a + d)X = 0$ hay $X^2 = (a + d)X$. Thay vào đề bài ta được

$$t(t - 3)X = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Lấy vết của hai vế ta được

$$t^2(t - 3) = -4.$$

Suy ra $t_1 = -1, t_2 = 2$. Từ đó, ta tìm được các ma trận

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trường hợp 2. $\det(A - 3I) = 0$. Suy ra 3 là một giá trị riêng của A. Hơn nữa, ta có

$$X^3 - 3X^2 + 4I = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Khi đó $\det(X + I)(X - 2I)^2 = 0$ suy ra $\det(X + I) = 0$ hoặc $\det(X - 2I) = 0$. Nếu $\det(X + I) = 0$ thì -1 là một giá trị riêng của X. Suy ra đa thức đặc trưng của X là

$$P_X(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 3).$$

Từ định lý Caley-Hamilton, ta được $X^2 - 2X - 3I = 0$. Kết hợp với giả thiết, ta được

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nếu $\det(X-2I)=0$ thì 2 là một giá trị riêng của X. Suy ra đa thức đặc trưng của X là

$$P_X(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-3).$$

Từ định lý Caley-Hamilton, ta được $X^2-5X+6I=0$. Kết hợp với giả thiết, ta được $X_4=\begin{pmatrix}5/2 & -1/2\\ -1/2 & 5/2\end{pmatrix}$.

Bài 3 (ĐH Công nghệ thông tin TP HCM)**.** a. Ta biểu diễn $m=3k+r$ và $n=3l+s$ với $k,m,l,s\in\mathbb{N}$ và $0\le r,s<3$. Khi đó

$$x^m+x^n+1=x^r(x^{3k}-1)+x^s(x^{3l}-1)+x^r+x^s+1.$$

Đa thức x^m+x^n+1 chia hết cho x^2+x+1 khi và chỉ khi x^r+x^s+1 chi hết cho x^2+x+1. Suy ra $r=2,s=1$ hoặc $r=1,s=2$. Mặt khác,

$$mn-2=3t+rs-2=3t$$

với t là một số tự nhiên nào đó. Như vậy, x^m+x^n+1 chia hết cho x^2+x+1 khi và chỉ khi $mn-2$ chia hết cho 3.
b. Đặt $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ với $a_n\neq 0$.
Trường hợp $n=0$, tức $P(x)=c$ là đa thức hằng. Từ giả thiết, ta tìm được $c=0$.
Trường hợp $n=1$, tức là $P(x)=a_1x+a_0$ và $P'(x)=a_1$. Khi đó $P(P'(x))=a_1^2+a_0$ và $P'(P(x))=a_1$. Suy ra $a_1^2+a_0=a_1$ hay $a_0=a_1-a_1^2$. Như vậy, các đa thức thoả mãn yêu cầu có dạng

$$P(x)=a_1x+(a_1-a_1^2)$$

với $a_1\in\mathbb{R}$.
Trường hợp $n\ge 2$. Hệ số có bậc cao nhất của $P(P'(x))$ và $P'(P(x))$ lần lượt là $a_n(na_n)^n$ và $na_n(a_n)^{n-1}$. Suy ra, ta có $n^na_n=n$. Vì a_n là số nguyên nên $n=1$ và $a_n=1$ (mâu thuẫn).

Bài 4 (ĐH Công nghệ thông tin TP HCM)**.** Đặt ma trận $A=(a_{ij})$ trong đó a_{ij} là xác suất con chuột đi từ phòng i sang phòng j. Dựa vào hình vẽ ta có

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3\\ 1/4 & 1/4 & 2/4 & 0\end{pmatrix}.$$

Đặt $X_i=[a_i\ b_i\ c_i\ d_i]$ là các xác suất con chuột ở các phòng tương ứng sau khi di chuyển lần thứ i. Tại thời điểm ban đầu, ta có $X_0=[0\ 0\ 1\ 0]$ và $X_1=X_0A$

là các xác suất vị trí của con chuột sau khi di chuyển lần thứ nhất. Như vậy, sau lần di chuyển thứ 2, ta được

$$X_2 = X_0A^2 = [1/6 \;\; 1/6 \;\; 1/2 \;\; 1/6].$$

Xác suất con chuột ở phòng 1 là $\frac{1}{6}$.
b. Sau lần di chuyển thứ 3, ta được

$$X_3 = X_2A = [1/24 \;\; 5/24 \;\; 4/24 \;\; 14/24].$$

Như vậy, xác suất con chuột đang ở phòng 4 là lớn nhất.

Bài 5 (ĐH Công nghệ thông tin TP HCM). Gọi $\{a_n\}_{n\geq 0}$ là dãy số biểu diễn cho số cách chia bi đỏ, trong đó a_n tương ứng với có n bi đỏ. Khi đó, ta có hàm sinh thường tương ứng với dãy số $\{a_n\}$ là

$$A = 1 + X^2 + X^4 + \cdots = \frac{1}{1 - X^2}.$$

Gọi $\{b_n\}_{n\geq 0}$ là dãy số biểu diễn cho số cách chia bi cam, trong đó b_n tương ứng với có n bi cam. Khi đó, ta có hàm sinh thường tương ứng với dãy số $\{b_n\}$ là

$$B = 1 + X^7 + X^{14} + \ldots = \frac{1}{1 - X^7}.$$

Gọi $\{c_n\}_{n\geq 0}$ là dãy số biểu diễn cho số cách chia bi vàng, trong đó c_n tương ứng với có n bi vàng. Khi đó, ta có hàm sinh thường tương ứng với dãy số $\{c_n\}$ là

$$C = 1 + X + X^2 + \cdots + X^6 = \frac{1 - X^7}{1 - X}.$$

Gọi $\{d_n\}_{n\geq 0}$ là dãy số biểu diễn cho số cách chia bi lục, trong đó d_n tương ứng với có n bi lục. Khi đó, ta có hàm sinh thường tương ứng với dãy số $\{d_n\}$ là

$$D = 1 + X = \frac{1 - X^2}{1 - X}.$$

Hàm sinh tương ứng với số cách lấy bi thoả mãn 4 điều kiện là

$$E = ABCD = \frac{1}{1 - X^2}\frac{1}{1 - X^7}\frac{1 - X^7}{1 - X}\frac{1 - X^2}{1 - X} = \frac{1}{(1 - X)^2} = \sum_{n\geq 0}(n + 1)X^n.$$

Như vậy, số cách lấy 2025 bi thoả mãn bốn yêu cầu là 2026.

Bài 6 (Nguyễn Huy Hoàng - Trường: Đại học Giao thông Vận tải). a) Áp dụng các biến đổi sơ cấp ta có

$$A = \begin{pmatrix} x & 2 & x & 2 \\ 2 & x & 2 & x \\ x & x & -1 & -1 \\ -1 & -1 & x & x \end{pmatrix} \begin{matrix} H_1 + H_2 - H_3 - H_4 \to H_1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & x & 2 & x \\ x & x & -1 & -1 \\ -1 & -1 & x & x \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ H_2 - \frac{2}{3}H_1 \to H_2 \\ H_3 - \frac{x}{3}H_1 \to H_3 \\ H_4 + \frac{1}{3}H_1 \to H_4 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & x-2 & 0 & x-2 \\ 0 & 0 & -1-x & -1-x \\ 0 & 0 & x+1 & x+1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ H_4 + H_3 \to H_4 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & x-2 & 0 & x-2 \\ 0 & 0 & -1-x & -1-x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta thấy rằng $rank(A)$ có giá trị lớn nhất là 3 và đạt được khi $\begin{cases} x \neq -1, \\ x \neq 2. \end{cases}$

b) Ký hiệu u là véc tơ cột $u = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$. Từ giả thiết ta xác định được $A^T u = 2u$ và $B^T u = 3u$. Sử dụng $A^T u = 2u$ ta có

$$(A^T)^k u = (A^T)^{k-1} A^T u = (A^T)^{k-1}(2u) = 2(A^T)^{k-1} u.$$

Do đó $(A^T)^k u = 2(A^T)^{k-1} u = 2^2 (A^T)^{k-2} u = \dots = 2^k u$ với mọi $k \geqslant 1$.
Tương tự ta chỉ ra được $(B^T)^k u = 3^k u$ với mọi $k \geqslant 1$. Kế tiếp ta có $B^T A^T u = B^T(2u) = 6u$ và cũng chỉ ra được $(B^T A^T)^k u = 6^k u$ với mọi $k \geqslant 1$. Từ các đẳng thức này ta tính được

$$\begin{aligned} M^T u &= \left[(B^T A^T)^{2025} - 12(B^T)^{2024}(A^T)^{2023}\right] u \\ &= (B^T A^T)^{2025} u - 12(B^T)^{2024}(A^T)^{2023} u = 6^{2025} u - 3.2^{2025}(B^T)^{2024} u = 0. \end{aligned}$$

Như vậy, u là một véc tơ riêng của M^T ứng với giá trị riêng $\lambda = 0$ nên $\det M^T = 0$ (Hoặc là: Hệ thuần nhất $M^T x = 0$ có nghiệm không tầm thường là $x = u$ nên $\det M^T = 0$). Do $\det M = \det M^T$ nên $\det M = 0$.

Bài 7 (Nguyễn Huy Hoàng - Trường: Đại học Giao thông Vận tải). Ký hiệu $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ là véc tơ cột mô tả số lượng cá Koi tương ứng ở các ô A, B, C, D trong ngày đầu tiên. Tương tự, ta ký hiệu số lượng cá Koi ở các ô A, B, C, D trong buổi chiều các ngày thứ 2, 3, 4 là các véc tơ cột $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$; $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)^T$; $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$. Theo giả thiết, chiều ngày thứ 2, số lượng cá ở ô A bao gồm 40% số lượng cá của ngày hôm trước của ô đó; 30% số cá ở ô B bơi sang; 20% số cá ở ô C bơi sang; 30% số cá ở ô D bơi sang nên ta có đẳng thức:

$$y_1 = 0,4x_1 + 0,3x_2 + 0,2x_3 + 0,3x_4.$$

Tương tự, ta thu được các đẳng thức

$$\begin{aligned}
y_2 &= 0,2x_1 + 0,4x_2 + 0,2x_3,\\
y_3 &= 0,2x_1 + 0,3x_2 + 0,4x_3 + 0,3x_4,\\
y_4 &= 0,2x_1 + 0,2x_3 + 0,4x_4.
\end{aligned}$$

Các đẳng thức trên được mô tả lại dưới dạng $y = Mx$ với

$$M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,4 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Do quy luật được lặp lại thêm hai lần nữa nên ta có các đẳng thức

$$z = My = M^2x; \quad u = Mz = M^3x.$$

Tính toán trực tiếp ta thu được

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0,304 & 0,3 & 0,296 & 0,3 \\ 0,2 & 0,232 & 0,2 & 0,168 \\ 0,296 & 0,3 & 0,304 & 0,3 \\ 0,2 & 0,168 & 0,2 & 0,232 \end{pmatrix}.$$

Từ các mô tả trên ta suy ra được các đẳng thức

$$\begin{aligned}
u_3 - u_1 &= -0,008x_1 + 0,008x_3,\\
u_3 - u_2 &= 0,096x_1 + 0,068x_2 + 0,104x_3 + 0,132x_4,\\
u_3 - u_4 &= 0,096x_1 + 0,132x_2 + 0,104x_3 + 0,068x_4.
\end{aligned}$$

Ký hiệu m là số cá Koi ở ô C vào chiều thứ 2, tức là $y_3 = m$. Kết hợp với giả thiết $u_3 - u_1 = 40;\ u_3 - u_2 = 1852;\ u_3 - u_4 = 1788$ ta suy ra $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$

là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} -0,008x_1 + 0,008x_3 & = & 40 \\ 0,096x_1 + 0,068x_2 + 0,104x_3 + 0,132x_4 & = & 1852 \\ 0,096x_1 + 0,132x_2 + 0,104x_3 + 0,068x_4 & = & 1788 \\ 0,2x_1 + 0,3x_2 + 0,4x_3 + 0,3x_4 & = & m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_3 & = & 5000 \\ 24x_1 + 17x_2 + 26x_3 + 33x_4 & = & 463000 \\ 24x_1 + 33x_2 + 26x_3 + 17x_4 & = & 447000 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 & = & 10m \end{cases} \tag{1}$$

Do hệ (1) phải có nghiệm, nên bài toán được quy về việc tìm m để cho hệ (1) có nghiệm. Ký hiệu N và $\overline{N}$ tương ứng là ma trận hệ số và ma trận hệ số mở rộng của hệ (1). Sử dụng phép khử Gauss cho hệ (1), ta thực hiện các biến đổi sau:

$$\overline{N} = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & 5000 \\ 24 & 17 & 26 & 33 & 463000 \\ 24 & 33 & 26 & 17 & 447000 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 10m \end{array}\right) \begin{array}{c} H_2 + 24H_1 \to H_2 \\ H_3 + 24H_1 \to H_3 \\ H_4 + 2H_1 \to H_4 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & 5000 \\ 0 & 17 & 50 & 33 & 583000 \\ 0 & 33 & 50 & 17 & 567000 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 10m + 10000 \end{array}\right) \begin{array}{c} 17H_3 - 33H_2 \to H_3 \\ 17H_4 - 3H_2 \to H_4 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & 5000 \\ 0 & 17 & 50 & 33 & 583000 \\ 0 & 0 & -800 & -800 & -960000 \\ 0 & 0 & -48 & -48 & 170m - 1579000 \end{array}\right) 50H_4 - 3H_3 \to H_4$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & 5000 \\ 0 & 17 & 50 & 33 & 583000 \\ 0 & 0 & -800 & -800 & -5760000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8500m - 50150000 \end{array}\right) 50H_4 - 3H_3 \to H_4$$

Hệ (1) có nghiệm khi và chỉ khi $\mathrm{rank}(\overline{N}) = \mathrm{rank} N$. Như vậy, nếu m là giá trị cần tìm thì

$$8500m - 50150000 \quad \Leftrightarrow \quad m = 5900.$$

Bài 8 (Nguyễn Huy Hoàng - Trường: Đại học Giao thông Vận tải)**.** Xét quan hệ của $M \cap N$ và P. Ta có tất cả hai trường hợp phải xem xét: thứ nhất là $M \cap N \subset P$; thứ hai là $M \cap N \not\subset P$.

Nếu trường hợp thứ nhất xảy ra $M \cap N \subset P$ thì kết hợp với $M \cap N \subset M$ ta suy ra $M \cap N \subset M \cap P$. Kết hợp điều này với $(M \cap N) \neq (M \cap P)$ ta có

$\dim(M\cap P) > \dim(M\cap N) = 2022 \Rightarrow \dim(M\cap P) \geqslant 2023$. Từ $(M\cap P) \subset M$ ta lại có $\dim(M\cap P) \leqslant \dim M = 2023$. Kết hợp hai kết quả trên ta nhận được $\dim(M \cap P) = \dim M = 2023 \Rightarrow (M \cap P) = M$. Kế tiếp từ $(M \cap P) \subset P$ và $\dim(M \cap P) = \dim P = 2023$ ta cũng suy ra được $(M \cap P) = P$. Như vậy $M = (M \cap P) = P$, nhưng điều này trái với giả thiết là M, P là các không gian con phân biệt (loại).

Nếu trường hợp thứ hai xảy ra $M \cap N \not\subset P$. Ở trường hợp này ta có $P \neq (M\cap N) + P$. Từ đó và $P \subset (M\cap N) + P$ ta suy ra được $\dim((M\cap N) + P) > \dim P = 2023$. Sử dụng $(M \cap N) + P \subset \mathbb{R}^{2025}$ ta có $\dim((M \cap N) + P) \leqslant 2025$. Ở đây ta chia ra hai trường hợp nhỏ $\dim((M \cap N) + P) = 2025$ và $\dim((M \cap N) + P) = 2024$.

Nếu $\dim((M\cap N)+P) = 2025$ thì $(M\cap N)+P = \mathbb{R}^{2025}$. Sử dụng $(M\cap N) \subset N$ ta suy ra $(M\cap N) + P \subset N + P$. Các bao hàm thức $\mathbb{R}^{2025} = ((M\cap N) + P) \subset N + P \subset \mathbb{R}^{2025}$ cho thấy rằng $N + P = \mathbb{R}^{2025} \Rightarrow \dim(N + P) = 2025$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}\dim(N \cap P) &= \dim N + \dim P - \dim(N + P)\\ &= 2023 + 2023 - 2025\\ &= 2021 \neq 2022 \text{ (loại)}.\end{aligned}$$

Vậy tình huống duy nhất có thể xảy ra là $\dim((M \cap N) + P) = 2024$. Do đó

$$\begin{aligned}\dim(M \cap N \cap P) &= \dim(M \cap N) + \dim P - \dim((M \cap N) + P)\\ &= 2022 + 2023 - 2024 = 2021.\end{aligned}$$

Bài 9 (Nguyễn Huy Hoàng - Trường Đại học Giao thông Vận tải). a) Do $(1 \pm i)^4 = (\pm 2i)^2 = -4$ nên ta có

$$P(1\pm i) = (1\pm i)^{2024} + 8(1\pm i)^{2004} - 127.2^{1005} = (-4)^{506} + 8.(-4)^{501} - 127.2^{1005} = 0.$$

Vì $P(x)$ nhận $x = 1 \pm i$ là các nghiệm nên $P(x)$ chia hết cho $Q(x) = (x - 1 - i)(x - 1 + i)$.

b) Đặt $P(x) = Q(x)u(x)$. Từ câu (a) ta suy ra $u(x)$ là đa thức có bậc 2022. Tiếp theo, ta có

$$T(x) = (x + 1)^2 Q(x).$$

Do đó, nếu ký hiệu $v(x)$ và $ax+b$ tương ứng là thương và phần dư nhận được khi chia đa thức $u(x)$ cho $(x + 1)^2$ thì ta có đẳng thức:

$$P(x) = v(x)T(x) + (x^2 - 2x + 2)(ax + b). \tag{1}$$

Từ đây, ta suy ra phần dư thu được khi chia đa thức $P(x)$ cho đa thức $T(x) = x^4 - x^2 + 2x + 2$ là $R(x) = (x^2 - 2x + 2)(ax + b)$ với a, b cần được xác định. Sử dụng (1) và $T(x)$ là bội của $(x+1)^2$ ta tính được $P(-1) = -5a+5b$; $P'(-1) = 9a-4b$. Mặt khác sử dụng giả thiết ta tính được $P(-1) = 9 - 127.2^{1005}$; $P'(-1) = -18056$. Từ đây ta giải ra được $a = -\dfrac{127.2^{1007}+90244}{25}$; $b = -\dfrac{1143.2^{1005}+90199}{25}$.

Như vậy, trong phép chia $P(x)$ cho $T(x)$, phần dư nhận được là

$$R(x) = -\frac{1}{25}(x^2-2x+2)\Big[(127.2^{1007}+90244)x + 1143.2^{1005}+90199\Big].$$

Bài 10 (Nguyễn Huy Hoàng - Trường: Đại học Giao thông Vận tải). i) Ta có $C_6^2 = 15$ cách lựa chọn một cặp hàng ngang làm 2 cạnh hình chữ nhật và có $C_{12}^2 = 66$ cách lựa chọn một cặp hàng dọc làm 2 cạnh hình chữ nhật. Do đó số cách chọn 4 căn nhà theo yêu cầu là $15 \times 66 = 990$ cách.

ii) Nếu đánh số 4 căn nhà được chọn thì ta có thể chọn như sau: Có $6\times 12 = 72$ cách chọn căn nhà đầu tiên. Để chọn căn thứ hai theo đúng yêu cầu ta có 5 cách chọn hàng ngang và 11 cách chọn hàng dọc chứa nó. Do đó ta có 55 cách chọn căn thứ 2. Tương tự, ta có $4\times 10 = 40$ cách chọn căn thứ 3; có $3\times 9 = 27$ cách chọn căn thứ 4. Tuy nhiên mỗi cách chọn ra 4 căn nhà ta có tất cả $4! = 24$ cách đánh số khác nhau. Như vậy số cách chọn theo yêu cầu là:

$$\frac{72\times 55\times 40\times 27}{24} = 178200\,(\text{cách}).$$

Bài 11 (Trường Đại học Đồng Tháp). Ta có :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Áp dụng nhị thức Newton để tính A^n.

Bài 12 (Trường Đại học Đồng Tháp). Vì A có hạng bằng 1, tồn tại véc-tơ không đổi **v** sao cho mọi dòng của A là bội của **v**. Tức là, A có dạng:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{v} \\ \lambda_2\mathbf{v} \\ \dots \\ \lambda_n\mathbf{v} \end{bmatrix}$$

Khi nhân hai lần A, ta có:

$$A^2 = \lambda A,$$

với $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$. Tính duy nhất của λ là rõ ràng.

Bài 13 (Trường Đại học Đồng Tháp)**.** Định thức của ma trận Vandermonde được tính bằng công thức:

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i).$$

Chứng minh bằng quy nạp hoặc khai triển định thức theo cột đầu tiên.

Bài 14 (Trường Đại học Đồng Tháp)**.** Ta có $a_{ij} = -a_{ji}$ nên A là ma trận phản đối xứng. Khi n lẻ, $\det(A) = 0$, suy ra hệ có nghiệm không tầm thường.

Bài 15 (Trường Đại học Đồng Tháp)**.** Đặt x_1, x_2, x_3 lần lượt là số quả của An, Bình, Chi. Ta cần đếm số nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12$$

với $x_1 \ge 4$, $x_2 \ge 2$, $x_3 \ge 2$, và $x_3 \le 5$. Đặt $y_1 = x_1 - 4$, $y_2 = x_2 - 2$, $y_3 = x_3 - 2$, khi đó:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 4.$$

Tính số nghiệm bằng công thức tổ hợp:

$$\text{Tổng số cách} = C_{3-1}^{4+3-1} - (\text{trừ các trường hợp } x_3 > 5).$$

Bài 16 (Trường Đại học Đồng Tháp)**.** Tìm số nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$a + b = 4051.$$

Dùng công thức tổ hợp:

$$C_1^{4050} = 4050.$$

Bài 17 (Khổng Chí Nguyện - Trường Đại học Tân Trào)**.** a) Ta có $\det(A(m) - \lambda I) = -(\lambda^2 - 1)(\lambda - m)$.
- Nếu $m \neq \pm 1$ thì $A(m)$ có 3 giá trị riêng phân biệt nên ma trận $A(m)$ là chéo hoá được.
- Nếu $m = \pm 1$ thì ta sẽ xác định số các véc tơ trị riêng tương ứng với mỗi giá trị cụ thể của m. Ký hiệu $x = [x_1\ x_2\ x_3]^T, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.
TH1. Nếu $m = 1$, thì $A(1)$ có hai giá trị riêng phân biệt $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$.
- Với $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, hệ phương trình $(A(1) - I)x = 0$ có nghiệm là

$$x = a(1; 0; -1) + b(0; 1; 0),\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Suy ra, có 2 véc tơ riêng $\vec{\alpha}_1 = (1; 0; -1), \vec{\alpha}_2 = (0; 1; 0)$.
- Với $\lambda^3 = -1$, hệ phương trình $(A(1) + I)x = 0$ có nghiệm là

$$x = c(2; 1; -1),\ c \in \mathbb{R}.$$

Suy ra, có 1 véc tơ riêng $\vec{\alpha}_3 = (2; 1; -1)$.
Vậy $A(1)$ có 3 véc tơ riêng, do đó $A(1)$ chéo hoá được.
TH2. Nếu $m = -1$, thì $A(-1)$ có hai giá trị riêng phân biệt $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$.
- Với $\lambda_1 = 1$, hệ phương trình $(A(-1) - I)x = 0$ có nghiệm là

$$x = a(1; 1; -1), \; a \in \mathbb{R}.$$

Suy ra, có 1 véc tơ riêng $\vec{\alpha}_1 = (1; 1; -1)$.
- Với $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, hệ phương trình $(A(1) + I)x = 0$ có nghiệm là

$$x = b(2; 1; 0) + c(0; 0; 1), \; b, c \in \mathbb{R}.$$

Suy ra, có 2 véc tơ riêng $\vec{\alpha}_2 = (2; 1; 0), \; \vec{\alpha}_3 = (0; 0; 1)$.
Vậy $A(-1)$ có 3 véc tơ riêng, do đó $A(-1)$ chéo hoá được.
Kết luận. $A(m)$ là chéo hoá được với mọi $m \in \mathbb{R}$.
b) Theo a), ta có $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Vậy dạng chéo của ma trận $A(1)$ là $D = T^{-1}A(1)T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.
c) Theo a) Ta có $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.
Dạng chéo hoá của $A(-1)$ là

$$D = T^{-1}A(-1)T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to A(-1) = TDT^{-1}.$$

Suy ra

$$A(-1)^{304} = TD^{304}T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Bài 18 (Vũ Đức Tiến - Trường Đại học Hải Phòng). a) Ta có:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2m-3 & 3m & -2m-8 \\ 4 & 3 & 3m+8 \\ 5 & 4 & 2m+7 \end{bmatrix};$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} -m-7 & -5m-12 & 2m^2+m-8 \\ 6m+13 & 9m+17 & 7m+14 \\ 4m+11 & 6m+13 & 7m+15 \end{bmatrix}.$$

Suy ra

$$p(A) = A^3 - A^2 - A - 2I_3 = \begin{bmatrix} -3m-3 & -8m-8 & 2m^2+2m \\ 6m+6 & 9m+9 & 4m+4 \\ 4m+4 & 6m+6 & 5m+5 \end{bmatrix}.$$

Vậy $p(A) = O$ khi $m = -1$.
b) Ta có:

$$f(x) = p(x)q(x) + ax^2 + bx + c.$$

Nghiệm của đa thức $p(x)$ là $\alpha = 2, \beta = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \bar{\beta} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
- Thay $\alpha = 2$ vào hai vế của (1), ta được: $4a + 2b + c = 1$.
- Thay β vào hai vế của (1), ta được $f(\beta) = a\beta^2 + b\beta + c$.
Ta có $\beta = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, suy ra

$$\beta^{2025} = 1; \beta^{2024} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; \beta^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Từ $f(\beta) = a\beta^2 + b\beta + c \Leftrightarrow \beta^{2025} - 2\beta^{2024} + 1 = a\beta^2 + b\beta + c$, ta có:

$$\begin{aligned} 1 + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 1 &= a\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + b\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + c \\ &\Leftrightarrow 3 + \sqrt{3}i = c - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(b-a)i. \\ &\Rightarrow \begin{cases} -a - b + 2c = 6 \\ -a + b = 2 \quad \Rightarrow a = -1, b = 1, c = 3. \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Do đó $f(A) = A^{2025} - 2A^{2024} + I_3 = -A^2 + A + 3I_3 = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Bài 19 (Vũ Đức Tiến - Trường Đại học Hải Phòng). a) Ta có $0 \in V$ vì

$$\int_0^1 0dx = 0,$$

do đó $V \neq \varnothing$ và $V \subset \mathbb{R}_2[x]$. Với $p(x), q(x) \in V$, và $k, l \in \mathbb{R}$, ta có $kp(x) + lp(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ và

$$\int_0^1 [kp(x) + lq(x)]dx = k\int_0^1 p(x)dx + l\int_0^1 q(x)dx = 0.$$

Dẫn đến

$$kp(x) + lq(x) \in V.$$

Vậy V là không gian véctơ con của $\mathbb{R}_2[x]$.
Với $p(x) = cx^2 + bx + a \in V$,

$$\int_0^1 \left(cx^2 + bx + a\right) = 0$$

tương đương với

$$\left(\frac{c}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + ax\right)\Big|_0^1 = 0,$$

hay

$$a = -\frac{c}{3} - \frac{b}{2}.$$

Do đó

$$p(x) = cx^2 + bx - \frac{c}{3} - \frac{b}{2} = c\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) + b\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Vậy một cơ sở của V là $\left\{p_1(x) = x^2 - \frac{1}{3}; p_2(x) = x - \frac{1}{2}\right\}$, suy ra $\dim V = 2$.
b) Gọi V' là không gian con bù của V trong $\mathbb{R}_2[x]$, ta có

$$\dim V + \dim V' = 3 \Rightarrow \dim V' = 1.$$

Vậy V' được sinh bởi đa thức $q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \neq 0$. Ta có:

$$q(x) = \alpha\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) + \beta\left(x - \frac{1}{2}\right) + \gamma + \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2}.$$

Vì $V \cap V' = \{0\}$ nên đa thức $q(x)$ không là tổ hợp tuyến tính của $p_1(x), p_2(x)$, suy ra

$$\gamma + \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} \neq 0.$$

Vậy các phần bù của V trong $\mathbb{R}_2[x]$ được sinh bởi $q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, với $\gamma + \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} \neq 0$.

CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: GIẢI TÍCH

Bài 1 (Trường Đại học Đồng Tháp)**.** Gọi x là khoảng cách từ vị trí đứng đến nguồn sáng I_1. Áp dụng luật bình phương nghịch đảo, ta thấy rằng, độ sáng tại vị trí đứng là:

$$f(x) = \frac{I_1}{x^2} + \frac{I_2}{(\ell - x)^2} \text{ với } 0 < x < \ell.$$

Khi đó

$$f'(x) = \frac{2[I_2 x^3 - I_1(\ell - x)^3]}{x^3(\ell - x)^3}.$$

Do đó ta có

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\ell}{1 + \sqrt[3]{1 + \frac{I_2}{I_1}}}.$$

Hơn nữa, ta cũng có $f''(x) = \dfrac{6I_1}{x^4} + \dfrac{6I_2}{(\ell - x)^4}$. Điều này suy ra rằng $x_0 := \dfrac{\ell}{1 + \sqrt[3]{1 + \frac{I_2}{I_1}}}$ là cực tiểu của $f(x)$. So sánh $f(x_0)$ với $\lim_{x \to 0} f(x)$ và $\lim_{x \to \ell} f(x)$ ta kết luận $f(x_0)$ là giá trị nhỏ nhất của f trên $(0, \ell)$.

Vì $I_1 = 8I_2$ nên $x_0 = \dfrac{2\ell}{3}$. Khi đó người này đứng cách nguồn sáng I_1 khoảng cách bằng $\dfrac{2\ell}{3}$.

Bài 2 (Trường Đại học Đồng Tháp)**.** Gọi $x(m)$ là độ dài chiều dài (cũng là chiều rộng) của thùng chứa; $h(m)$ là chiều cao của thùng chứa. Chi phí nguyên liệu cho thùng chưa là:

$$5x^2 + 5xh.$$

Do đó ta có:

$$5x^2 + 5xh = 75 \Leftrightarrow h = \frac{15 - x^2}{x}.$$

Vì $x, h > 0$ nên ta có: $0 < x < \sqrt{15}$. Hàm thể tích thùng chứa là:

$$V = hx^2 = 15x - x^3.$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm $f(x) = 15x - x^3$ với $x \in (0, \sqrt{15})$.

Bài 3 (Trường Đại học Đồng Tháp). - Chứng minh $0 < f(x) = 2^x - x < 1$ với mọi $x \in (0, 1)$. Từ đó, suy ra dãy $\{u_n\}$ bị chặn.
- Chứng minh dãy $\{u_n\}$ đơn điệu tăng từ đó suy ra dãy $\{u_n\}$ hội tụ.
- Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$. Khi đó, $2\ell = 2^\ell$. Chứng minh phương trình này có nghiệm dương duy nhất $\ell = 1$. Từ đó suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

Bài 4 (Trường Đại học Đồng Tháp). Chứng minh rằng: $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{\sin x} dx = I_{n-2}$, với mọi $n = 2, 3, ...$ Ta đó, $I_n = I_0 = 0$ (nếu n chẵn) và $I_n = I_1 = \pi$ (nếu n lẻ).
Vậy $S_{2025} = 1013\pi$.

Bài 5 (Trường Đại học Đồng Tháp). a) Từ $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$, ta có $\dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{u_n} + 1$ hay dãy $\left\{\dfrac{1}{u_n}\right\}$ là cấp số cộng có số hạng đầu tiên: $\dfrac{1}{u_1} = 2$ và $d = 11$. Suy ra $\dfrac{1}{u_n} = 2 + (n-1).1 = n + 1$. Do đó, $u_n = \dfrac{1}{n+1}, n = 1, 2, ...$
Từ đó, $\dfrac{u_n}{n} = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. Khi đó, tính được $S_n = \dfrac{n}{n+1}$. Suy ra, n nhỏ nhất để $S_n \geq \dfrac{2024}{2025}$ là $n = 2024$.
b) Đặt $H_n = \sqrt[n]{S_1^n + S_2^n + \cdots + S_{2025}^n}$. Ta có

$$S_{2025} \leq H_n \leq \sqrt[n]{2025} S_{2025}.$$

Khi $n \to \infty$, ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = S_{2025} = \dfrac{2025}{2026}$.

Bài 6 (Trường Đại học Đồng Tháp). Ta viết f về dạng:

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + b & \text{nếu} \quad -1 \leq x \leq 1; \\ \dfrac{2025\sin(x-1)}{x-1} & \text{nếu} \quad x > 1 \\ \dfrac{-2025\sin(x-1)}{x-1} & \text{nếu} \quad x < -1. \end{cases}$$

Để $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $f(x)$ chỉ cần liên tục tại $x = -1$ và $x = 1$.
Tại $x = 1$,, ta có $f(1) = a + b$ và

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{2025\sin(x-1)}{x-1} = 2025,$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} (ax^3 + b) = a + b.$$

Do đó, f liên tục tại $x = 1$ khi $a + b = 2025$.
Tại $x = -1$, ta có $f(-1) = -a + b$,

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (ax^3 + b) = -a + b,$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{-2025 \sin(x-1)}{x-1} = -2025 \sin(2)/2,$$

Do đó, f liên tục tại $x = -1$ khi $-a + b = -2025 \sin(2)/2$.
Khi đó, f liên tục trên $\mathbb{R}$ khi a, b thỏa mãn $a + b = 2025$ và $-a + b = -2025 \sin(2)/2$. Từ đó, suy ra a, b cần tìm.

Bài 7 (Trường Đại học Giao thông vận tải)**.** Nhận thấy $x_{n+1} = \sqrt{5} + \dfrac{2x_n}{\sqrt{x_n^2 - 4}} > \sqrt{5} + \dfrac{2x_n}{x_n} = 2 + \sqrt{5}$ và kết hợp quy nạp theo n ta được:

$$x_n > 2 + \sqrt{5}, \forall n \geq 1.$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{5} + \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - 4}}$ với $x > 2 + \sqrt{5}$, ta có:

$$f'(x) = -\frac{8}{(x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 4}} < 0, \forall x > 2 + \sqrt{5}$$

Suy ra: $|f'(x)| = \dfrac{8}{(x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 4}} < \dfrac{8}{(5 + 4\sqrt{5})\sqrt{5 + 4\sqrt{5}}} < \dfrac{1}{2}, \forall x > 2 + \sqrt{5}.$
Sử dụng định lý Lagrange, ta suy ra được dãy (x_n) là dãy Cauchy, do đó nó hội tụ tới giá trị $a \geq 2 + \sqrt{5}$.
Từ giải thiết, cho $n \to +\infty$ ta được:

$$a = \sqrt{5} + \frac{2a}{\sqrt{a^2 - 4}}$$

Giải phương trình trên cho ta $a = 2\sqrt{5}$.

Bài 8 (Trường Đại học Giao thông vận tải)**.**

a) Ta có hình vuông thứ nhất có cạnh bằng 1, hình vuông thứ hai có cạnh bằng $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Hình vuông thứ ba có cạnh bằng $\dfrac{1}{2}$.

Suy ra hình vuông thứ n có cạnh bằng $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$.

Diện tích của hình vuông thứ n là $a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Tổng diện tích của n hình vuông đầu tiên là tổng của cấp số nhân có số hạng đầu $a_1 = 1$ và công bội $q = \frac{1}{2}$ nên

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right].$$

$\lim S_n = \lim 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 2\left[\lim 1 - \lim\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 2.$

b) Hình vuông thứ nhất có chu vi bằng 4, hình vuông thứ 2 có chu vi là $2\sqrt{2}$, hình vuông thứ 3 có chu vi là 2.

Suy ra hình vuông thứ n có chu vi bằng $p_n = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$. Tổng chu vi của n hình vuông đầu tiên là tổng của cấp số nhân có số hạng đầu $p_1 = 4$ và công bội $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ nên

$$Q_n = \frac{p_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{4\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(8+4\sqrt{2}\right)\left[1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right].$$

$\lim Q_n = \left(8+4\sqrt{2}\right)\lim\left[1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right] = \left(8+4\sqrt{2}\right)(1-0) = 8+4\sqrt{2}.$

Bài 9 (Trường Đại học Giao thông vận tải). Đặt $AC = x$, với $x \in [0,9]$. Khi đó $BC = \sqrt{BH^2+HC^2} = \sqrt{6^2+(9-x)^2}$.

Tổng chi phí công ty bỏ ra để lắp ống dẫn dẫn theo đường gấp khúc ACB là

$$C(x) = 5000x + 13000\sqrt{6^2+(9-x)^2} = 1000\left(5x+13\sqrt{6^2+(9-x)^2}\right).$$

Do đó, chi phí công ty bỏ ra là thấp nhất khi $f(x) = 5x+13\sqrt{6^2+(9-x)^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có $f'(x) = 5 + \frac{13(x-9)}{\sqrt{36+(9-x)^2}}$.

Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5\sqrt{36+(9-x)^2} = 13(x-9) \Leftrightarrow x = \frac{13}{2}$.

Ta có $f(0) = 13\sqrt{117}$, $f\left(\dfrac{13}{2}\right) = 117$ và $f(9) = 123$.

Từ đó, chi phí công ty bỏ ra thấp nhất khi $x = \dfrac{13}{2} = 6{,}5$.

Vậy với $AC = 6{,}5$ km khi lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ACB thì chi phí công ty bỏ ra là thấp nhất.

Bài 10 (Trường Đại học Giao thông vận tải). Gọi p (triệu đồng) là giá của mỗi ti vi, x là số ti vi.
Khi đó ta cần xác định hàm cầu $p = p(x)$.
Theo giả thiết tốc độ thay đổi của x tỉ lệ với tốc độ thay đổi của p nên hàm số $p = p(x)$ là hàm số bậc nhất.
Do đó $p(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$.
Theo đề ta có $x_1 = 1000$ thì $p_1 = 14$; $x_2 = 1100$ thì $p_2 = 13{,}5$.
Khi đó phương trình đường thẳng $p(x) = ax + b$ đi qua hai điểm $(1000; 14)$ và $(1100; 13{,}5)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 1000a + b = 14 \\ 1100a + b = 13{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{200} \\ b = 19. \end{cases}$$

Vậy $p = -\dfrac{1}{200}x + 19$.
Khi đó, doanh thu từ bán x ti vi là

$$R(x) = x \cdot p(x) = x\left(-\frac{1}{200}x + 19\right) = -\frac{1}{200}x^2 + 19x.$$

Khi đó tổng lợi nhuận từ bán x ti vi là

$$P(x) = R(x) - C(x) = -\frac{1}{200}x^2 + 19x - (12000 - 3x) = -\frac{1}{200}x^2 + 22x - 12000.$$

Bài toán trở thành tìm x để $P(x)$ lớn nhất.
Có $P'(x) = -\dfrac{1}{100}x + 22 = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{100}x + 22 = 0 \Leftrightarrow x = 2200$.
Bảng biến thiên

x	0		2200		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	12200	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy số ti vi bán ra trong 1 tuần là 2200 chiếc thì lợi nhuận đạt giá trị lớn nhất.
Tức là mỗi tuần bán thêm 1200 chiếc thì số tiền phải giảm giá $\frac{1200 \cdot 500}{100} =$ 6000 nghìn đồng (tức là 6 triệu đồng).
Vậy phải để giá bán là $14 - 6 = 8$ triệu đồng.

Bài 11 (Trường Đại học Giao thông vận tải).

a) Ta có $0 \leq \left|x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| \leq x^2, \forall x \neq 0$.
Mà $\lim\limits_{x\to 0} 0 = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ nên $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0 = f(0) = a$.
Vậy hàm số liên tục tại $x = 0$ khi $a = 0$.

b) Với $a = 0$.
— Với $x \neq 0$ ta có $f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$.
— Tại $x = 0$, ta có $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x^2} = 0$.
Vậy $f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$

c) Hàm số $f'(x)$ là hàm sơ cấp và xác định tại mọi $x \neq 0$ nên hàm số liên tục tại mọi $x \neq 0$.
Tại $x = 0$, ta có $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x \sin\frac{1}{x^2}\right) = 0$, còn $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}\right)$ không tồn tại, do đó $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ không tồn tại và hàm số $f'(x)$ không liên tục tại $x = 0$.

Bài 12 (Trường Đại học Giao thông vận tải).

a) Ta có $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$. Do đó $f(0) = 0$.
Với mọi $x \in \mathbb{R}$ và với mọi $n \in \mathbb{N}$,
$f(2x) = f(x + x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$.
$f(3x) = f(2x + x) = f(2x) + f(x) = 2f(x) + f(x) = 3f(x)$,
Bằng quy nạp, ta có $f(nx) = (n - 1)f(x) + f(x) = nf(x)$.
Ngoài ra, $f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$ nên $f(-x) = -f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Do đó $f(nx) = nf(x)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$ và $x \in \mathbb{R}$.

b) Giả sử f liên tục tại một điểm c cố định, suy ra $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$, nghĩa là với $\epsilon > 0$ bé tùy ý, tồn tại $\delta > 0$ sao cho nếu $|x - c| < \delta$ thì $|f(x) - f(c)| < \epsilon$.
Khi đó, với mọi $x_0 \in \mathbb{R}$ và $|x - x_0| < \delta$ thì $|(x - x_0 + c) - c| < \delta$, suy ra $\epsilon > |f(x - x_0 + c) - f(c)| = |f(x - x_0) + f(c) - f(c)| = |f(x - x_0)| = |f(x) - f(x_0)|$.

Vậy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ với mọi $x_0 \in \mathbb{R}$. Hay f liên tục trên $\mathbb{R}$.
Chiều ngược lại là hiển nhiên.

c) Giả sử f liên tục trên R và $f(1) = a$ với $a \in \mathbb{R}$.
Với $n \in \mathbb{Z}$, ta có $f(n) = f(n \cdot 1) = nf(1) = na$.
Với $x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, trong đó $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Z}$ thì $f(qx) = f(p) = pa$ và $f(qx) = qf(x)$ nên $f(x) = \dfrac{1}{q} f(qx) = \dfrac{p}{q} \cdot a = ax$.
Ta đã chứng minh được $f(x) = ax$ với mọi $x \in \mathbb{Q}$ và f liên tục trên R.
Vì $\mathbb{Q}$ là trù mật trên $\mathbb{R}$, nghĩa là với $x \in \mathbb{R}$ thì $x = \lim\limits_{n\to+\infty} q_n$ với $q_n \in \mathbb{Q}$ và $f(q_n) = q_n a$. Do đó,

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to+\infty} q_n\right) = \lim_{n\to+\infty} f(q_n) = \lim_{n\to+\infty} aq_n = ax.$$

Vậy $f(x) = ax$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Ngược lại nếu $f(x) = ax$ thì f liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 13 (Trường Đại học Giao thông vận tải).

a) Đặt $t = \pi - x$, ta có $dx = -dt$ và $\sin(x) = \sin(\pi - t) = \sin t$
$I = \int\limits_0^\pi x f(\sin x) dx = -\int\limits_\pi^0 (\pi - t) f(\sin t) dt = \pi \int\limits_0^\pi f(\sin t) dt - \int\limits_0^\pi t f(\sin t) dt.$
Vậy $\int\limits_0^\pi x f(\sin x) dx = \dfrac{\pi}{2} \int\limits_0^\pi f(\sin x) dx.$

b) Áp dụng kết quả của câu a, ta có

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}dx &= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x - 2}dx \\ &= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\cos x - \sqrt{2}}{\cos x + \sqrt{2}}\right|\Bigg|_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \ln\left|\frac{-1-\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}\right| - \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \ln\left|\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right| \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \ln\left(\sqrt{2}+1\right).\end{aligned}$$

Bài 14 (Trường Đại học Công nghệ thông tin - ĐH Quốc gia TP HCM)**.** Ta có $k^4 + 10k^3 + 35k^2 + 50k + 23 = (k+1)(k+2)(k+3)(k+4) - 1$, do đó

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^4 + 10k^3 + 35k^2 + 50k + 23}{(k+4)!} = \sum_{k=0}^{n} (\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+4)!})$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{(n+!)!} - \frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+3)!} - \frac{1}{(n+4)!}.$$

Vậy $\ell = \frac{8}{3}$.

Bài 15 (Trường Đại học Công nghệ thông tin - ĐH Quốc gia TP HCM)**.** Đặt $g(x) = x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$, thì $g'(x) = \int_0^x f(t)dt$. Từ giả thiết, ta có $g(0) = g(1) = 0$, do đó theo Định lý Rolle, tồn tại số $\alpha \in (0,1)$ sao cho $g'(\alpha) = 0$, tức là $\int_0^\alpha f(t)dt = 0$.

Xét $h(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}\int_0^x f(t)dt, x \in [0,\alpha]$ thì $h'(x) = \frac{e^{-x}}{(1-x)^2}\Big(x\int_0^x f(t)dt + (1-x)f(x)\Big)$ và $h(0) = h(\alpha) = 0$. Do đó theo Định lý Rolle, tồn tại $c \in (0,\alpha) \subset (0,1)$ thỏa mãn $h'(c) = 0$, hay

$$(1-c)f(c) + c\int_0^c f(x)dx = 0.$$

Bài 16 (Trường Đại học Công nghệ thông tin - ĐH Quốc gia TP HCM)**.** Với mỗi $x \geq 0$, phương trình bậc hai $t^2 + xt - 2025 = 0$ luôn có đúng một nghiệm dương, do đó phương trình $z^4 + xz^2 = 2025$ có đúng một nghiệm dương $z = z(x)$.

Vì $f(z) = z^4 + xz^2$ có $f'(z) = 4z^3 + x > 0$ nên theo định lý hàm ẩn thì hàm $z(x)$ khả vi. Từ phương trình $z^4 + xz^2 = 2025$, lấy đạo hàm 2 vế theo biến x, ta được

$$4z'z^3 + 2xz'z + z^2 = 0 \Rightarrow z' = \frac{-z}{4z^2 + 2xz} < 0 \quad \text{(do } z > 0\text{)}.$$

Vậy $z(x)$ là hàm giảm chặt, do đó có hàm ngược $x = x(z)$. Từ phương trình $z^4 + xz^2 = 2025 \Rightarrow x = -z^2 + \frac{2025}{z^2} \Rightarrow x' = -2z - \frac{4050}{z^3}$.

Tương ứng ta có với $x = 0 \to z = 3\sqrt{5}$ và $x = 2024 \to z = 1$, do đó

$$\int_0^{2024} z^3 dx = \int_{3\sqrt{5}}^{1} z^3(-2z - \frac{4050}{z^3})dz = \int_1^{3\sqrt{5}} (2z^4 + 4050)dz$$
$$= \frac{2}{5}(6075\sqrt{5} - 1) + 4050(3\sqrt{5} - 1).$$

Bài 17 (Trường Đại học Công nghệ thông tin - ĐH Quốc gia TP HCM)**.** Từ giả thiết ta có $x_{n+1} - x_n = (x_n - 1)^2 \geq 0, \forall n \geq 1$, suy ra dãy $\{x_n\}$ dương và tăng, do đó dãy $\{\frac{1}{x_n}\}$ dương và giảm. Vậy tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = c \geq 0$. Nếu $c \neq 0$ ta suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{c}$, thay vào công thức trong giả thiết ta suy ra $c = 1$. Điều này mâu thuẫn vì $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1 < a = x_1 < x_2 < \ldots$. Vậy $c = 0$, do đó dãy $\{\frac{1}{x_n}\}$ thỏa mãn điều kiện của Định lý Leibniz nên chuỗi đã cho hội tụ. Ngoài ra, ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Từ công thức giả thiết ta có

$$\begin{aligned} x_{n+1} - 1 = x_n(x_n - 1) \Rightarrow \frac{1}{x_{n+1} - 1} &= \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_n - 1} \\ \Rightarrow \frac{1}{x_n - 1} &= \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1} - 1}, \forall n \geq 1, \end{aligned}$$

do đó

$$\begin{aligned} \frac{1}{a-1} = \frac{1}{x_1 - 1} &= \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2 - 1} = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3 - 1} \\ &= \ldots = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{x_n} + \frac{(-1)^N}{x_{N+1} - 1}. \end{aligned}$$

Cho $N \to +\infty$, ta được $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x_n} = \frac{1}{a-1}$.

Bài 18 (Trường Đại học Công nghệ thông tin - ĐH Quốc gia TP HCM)**.** Từ giả thiết suy ra phương trình $(P_1) : y = a - \frac{a}{b^2}x^2$. Ta có $y' = -\frac{2a}{b^2}x \Rightarrow y'(x_1) = y'(b) = -\frac{2a}{b}$ là hệ số góc của tiếp tuyến của (P_1) tại x_1. Do quả bóng nảy đối xứng qua trục thẳng đứng tại x_1 nên hệ số góc của tiếp tuyến của (P_2) tại x_1 bằng $\frac{2a}{b}$. Do tính đối xứng của các parabol (P_n) nên ta có hệ số góc của các tiếp tuyến của (P_n) tại x_{n-1} đều bằng $\frac{2a}{b}, \forall n = 2, 3, \ldots$

Từ giả thiết ta có phương trình của các (P_n) có dạng: $y = ar^{n-1} - t_n(x - \frac{x_{n-1} + x_n}{2})^2, n = 2, 3, \ldots$ Bằng quy nạp ta chứng minh được

$$\begin{cases} t_n = \dfrac{a}{b^2 r^{n-1}}, \\ x_n = x_{n-1} + 2br^{n-1} = b(1 + 2r + \cdots + 2r^{n-1}) \\ \qquad\qquad\qquad\quad = -b + 2b\displaystyle\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = -b + \dfrac{2b(1 - r^n)}{1 - r}, \forall n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Do đó, phương trình của các parabol có dạng

$$(P_n) : y = ar^{n-1} - \frac{a}{b^2 r^{n-1}}(x - \bar{x}_n)^2$$

với

$$\bar{x}_n = \frac{x_{n-1} + x_n}{2} = \frac{b(1+r)(1-r^{n-1})}{1-r}, n = 1, 2, \ldots$$

và $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = -b + \dfrac{2b}{1-r} = \dfrac{b(1+r)}{1-r}$.