Combinatorics And Graph Theory

Hoàng Quang Huy

Ngày 16 tháng 6 năm 2025

Week 01

Ngày 18 tháng 5 năm 2025

1.2 Nguyên Lý Bù Trừ

Định lý (Nguyên lý bao hàm – loại trừ):
Cho $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các tập hợp hữu hạn. Khi đó:

(i) Với hai tập A và B:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

(ii) Với ba tập A, B, C:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

(iii) Với n tập:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|T|+1} \left|\bigcap_{i \in T} A_i\right|$$

Chứng minh:

(i) Với hai tập A và B:

Khi cộng $|A|$ và $|B|$, các phần tử thuộc $A \cap B$ sẽ bị đếm hai lần (một lần trong A và một lần trong B). Để tính đúng số phần tử của $A \cup B$, ta cần trừ đi một lần phần giao $A \cap B$. Do đó:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

(ii) Với ba tập A, B, C:

Để tính $|A \cup B \cup C|$, ta thực hiện từng bước:

– **Bước 1:** Cộng số phần tử của từng tập:

$$|A| + |B| + |C|$$

Tuy nhiên, các phần tử thuộc $A \cap B$, $B \cap C$, và $C \cap A$ bị đếm hai lần.

– **Bước 2:** Trừ các phần tử bị đếm hai lần:

$$-|A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A|$$

Sau bước này, các phần tử thuộc $A \cap B \cap C$ (nếu có) đã bị trừ quá, dẫn đến việc không được tính.

– **Bước 3:** Cộng lại các phần tử thuộc $A \cap B \cap C$ (bị trừ hai lần ở bước 2, trong khi chỉ cần trừ một lần):

$$+|A \cap B \cap C|$$

Tổng hợp lại, ta có:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

(iii) Với n tập $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

Chứng minh bằng quy nạp toán học.

Cơ sở quy nạp: Với $n = 1$:

$$|A_1| = |A_1|$$

Điều này hiển nhiên đúng.

Bước quy nạp: Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1,\ldots,k\}} (-1)^{|T|+1} \left|\bigcap_{i \in T} A_i\right|$$

Ta chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right| = \left|\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cup A_{k+1}\right|$$

Áp dụng công thức hai tập từ (i):

$$= \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| + |A_{k+1}| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cap A_{k+1}\right|$$

Ta có:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cap A_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{k} (A_i \cap A_{k+1})$$

Áp dụng công thức bao hàm loại trừ cho tập hợp $\bigcup_{i=1}^{k}(A_i \cap A_{k+1})$ (theo giả thiết quy nạp):

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k}(A_i \cap A_{k+1})\right| = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1,\dots,k\}} (-1)^{|T|+1} \left|\bigcap_{i \in T}(A_i \cap A_{k+1})\right|$$

Vì $\bigcap_{i \in T}(A_i \cap A_{k+1}) = \left(\bigcap_{i \in T} A_i\right) \cap A_{k+1}$, ta thay vào và gộp các số hạng, thu được công thức đúng cho $n = k+1$.

Kết luận: Theo nguyên lý quy nạp toán học, công thức đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Hệ quả:

Nếu ta chỉ lấy m số hạng đầu tiên trong tổng ở vế phải của công thức (iii):
- Nếu m chẵn, thì là một **chặn dưới**:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| \geq \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$

- Nếu m lẻ, thì là một **chặn trên**:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| \leq \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$

Tính Giai Thừa, Tổ Hợp và Số Catalan

Bài toán 2: Tính số Catalan thứ $n = 5$

Tính số Catalan thứ $n = 5$:

Công thức số Catalan:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Thay $n = 5$ vào công thức:

$$C_5 = \frac{1}{5+1}\binom{10}{5} = \frac{1}{6} \cdot \frac{10!}{5! \cdot 5!}$$

Tính giá trị:

Tính từng thành phần:

- $10! = 3,628,800$
- $5! = 120$
- $5! \cdot 5! = 120 \cdot 120 = 14,400$

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = \frac{3,628,800}{14,400} = 252$$

Vậy:

$$C_5 = \frac{1}{6} \cdot 252 = 42$$

Kết luận:
Số Catalan thứ 5 là: 42.

Bài toán 3: Viết chương trình C++ để tính các giá trị và kiểm tra overflow

Viết chương trình C++ để tính các giá trị sau và kiểm tra overflow:

- Giai thừa: $n!$
- Tổ hợp: $C(n,k)$ với $k = \lfloor n/2 \rfloor$
- Số Catalan thứ n: $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

Chương trình C++:

```cpp
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <limits>
using namespace std;

typedef unsigned long long ull;

// Ham tinh giai thua an toan (dung neu bi overflow)
ull safe_factorial(int n) {
    ull res = 1;
    for (int i = 2; i <= n; ++i) {
        if (res > numeric_limits<ull>::max() / i) {
            cout << "Overflow at n = " << n << " in
                factorial\n";
            return 0;
        }
        res *= i;
    }
    return res;
}

// Ham tinh to hop C(n, k)
ull binomial(int n, int k) {
    if (k > n) return 0;
    ull res = 1;
    for (int i = 1; i <= k; ++i) {
        if (res > numeric_limits<ull>::max() / (n - i + 1))
            {
```

```
            cout << "Overflow at C(" << n << "," << k << ")\n";
            return 0;
        }
        res *= (n - i + 1);
        res /= i;
    }
    return res;
}

// Ham tinh so Catalan thu n
ull catalan(int n) {
    ull c = binomial(2 * n, n);
    if (c == 0 || (n + 1) == 0) return 0;
    return c / (n + 1);
}

int main() {
    cout << "n\tn!\t\tC(n,k=n/2)\tCatalan(n)\n";
    for (int n = 1; n <= 50; ++n) {
        ull f = safe_factorial(n);
        ull c = binomial(n, n / 2);
        ull cat = catalan(n);

        if (f == 0 || c == 0 || cat == 0) break;

        cout << n << "\t" << f << "\t" << c << "\t\t" << cat << "\n";
    }
    return 0;
}
```

Giải thích:
Chương trình in ra từng hàng các giá trị sau:

- n: Số nguyên dương từ 1 đến khi xảy ra overflow hoặc $n \leq 50$.
- $n!$: Giai thừa của n, được tính bằng hàm `safe_factorial`, kiểm tra overflow bằng `numeric_limits<ull>::max()`.
- $C(n,k)$: Tổ hợp $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$, được tính bằng hàm `binomial`, kiểm tra overflow.
- C_n: Số Catalan thứ n, được tính bằng công thức $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, sử dụng hàm `catalan`.

Chương trình dừng khi bất kỳ giá trị nào ($n!$, $C(n,k)$, hoặc C_n) bị overflow (vượt quá giới hạn của `unsigned long long`).

1.5 Excercise

Problem 3: Đếm số dãy nhị phân không có hai số 0 đứng cạnh nhau

Đề bài: Cho $m, n \in \mathbb{N}^*, m \leq n$. Tính số dãy nhị phân độ dài n, gồm m số 0 và $n - m$ số 1, sao cho không có hai số 0 nào đứng liền kề nhau.
Giải: Giả sử ta đặt trước $(n-m)$ số 1. Giữa và ngoài các số 1 có đúng $(n-m+1)$ khe để chèn số 0 mà không để hai số 0 đứng cạnh nhau.

Công thức:

$$\boxed{\binom{n-m+1}{m}}$$

Ví dụ: Với $n = 7$, $m = 3$:

$$\binom{7-3+1}{3} = \binom{5}{3} = 10$$

Kết luận: Có tất cả 10 dãy thỏa điều kiện.
—

Problem 4: Số lượng tập con của tập $[n]$

Đề bài: Gọi $f(n)$ là số lượng tập con của tập $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Chứng minh rằng:

$$f(n) = 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Giải: Mỗi phần tử trong tập $[n]$ có hai khả năng:

- Được chọn vào tập con.
- Không được chọn vào tập con.

Do đó, với n phần tử, mỗi phần tử độc lập có 2 lựa chọn $\Rightarrow$ tổng số tập con là:

Công thức:

$$\boxed{f(n) = 2^n}$$

Chứng minh bằng quy nạp toán học:
Cơ sở quy nạp: Với $n = 1$:

$$f(1) = 2 \quad \text{(các tập con là } \emptyset, \{1\}) \Rightarrow f(1) = 2^1 = 2 \text{ (đúng)}$$

Giả sử quy nạp: Giả sử $f(k) = 2^k$ đúng với một $k \in \mathbb{N}^*$.
Bước quy nạp: Xét $n = k + 1$, ta có:

$$\text{Mỗi tập con của } [k+1] \text{ có thể là: } \begin{cases} \text{Tập con của } [k] \text{ mà không chứa } k+1 \\ \text{Tập con của } [k] \text{ và thêm phần tử } k+1 \end{cases} \Rightarrow f(k+1) = f(k) + f(k) = 2f(k)$$

Áp dụng giả thiết quy nạp:

$$f(k+1) = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

Kết luận: Theo nguyên lý quy nạp toán học, ta có:

$$f(n) = 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

—

Problem 6: Đếm số tập con không chứa hai số liên tiếp

(a) Tính giá trị $f(1)$ đến $f(4)$:

n	$f(n)$
1	2
2	3
3	5
4	8

Nhận thấy $f(n) = F_{n+2}$ với F_k là số Fibonacci thứ k.
—

(b) Chứng minh đệ quy: $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$
Lập luận:

- Nếu không chọn n: còn lại là bài toán với $[n-1] \Rightarrow f(n-1)$ cách.
- Nếu chọn n: không được chọn $n-1 \Rightarrow$ còn lại là bài toán với $[n-2] \Rightarrow f(n-2)$ cách.

Công thức truy hồi:

$$\boxed{f(n) = f(n-1) + f(n-2)}$$

—

(c) Công thức tường minh – Binet:
Gọi:

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \bar{\tau} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Công thức Binet cho dãy Fibonacci:

$$\boxed{f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\tau^{n+2} - \bar{\tau}^{n+2}\right)}$$

Giá trị rút gọn (SymPy):

$$f(n) = \frac{\sqrt{5}}{20 \cdot 2^n}\left((1+\sqrt{5})^{n+2} - (1-\sqrt{5})^{n+2}\right)$$

Kết luận: Số tập con của $[n]$ không chứa hai phần tử liên tiếp chính là số Fibonacci thứ $n+2$.

0.1 1.3 Excercise

Problem 1: Số vùng được tạo bởi n đường thẳng trên mặt phẳng

Đề bài: Trên một tờ giấy vuông lớn, vẽ $n \in \mathbb{N}$ đường thẳng sao cho mỗi đường bắt đầu từ một cạnh của hình vuông và kết thúc ở một cạnh khác. Hai đường thẳng bất kỳ cắt nhau nhưng không có ba (hoặc nhiều hơn) đường thẳng nào cắt nhau tại một điểm chung. Gọi $f(n)$ là số vùng mà các đường thẳng chia tờ giấy thành. Hãy tính giá trị của $f(n)$ cho một số n và dự đoán công thức tổng quát.
Giải:

Trường hợp cơ sở ($n = 1$): Với 1 đường thẳng, tờ giấy được chia thành 2 vùng. Vậy $f(1) = 2$.

Trường hợp $n = 2$**:** Với 2 đường thẳng, chúng cắt nhau tại một điểm, chia tờ giấy thành 4 vùng. Vậy $f(2) = 4$.

Trường hợp $n = 3$**:** Với 3 đường thẳng, chúng tạo thành một hình tam giác và chia tờ giấy thành 7 vùng. Vậy $f(3) = 7$.

Dự đoán công thức tổng quát: Khi thêm mỗi đường thẳng mới, số vùng tăng lên. Mỗi đường thẳng mới sẽ cắt tất cả các đường thẳng trước đó, tạo thêm các vùng.

Quan sát các giá trị:

- $f(1) = 2$
- $f(2) = 4$
- $f(3) = 7$
- $f(4) = 11$

Chúng ta nhận thấy rằng mỗi lần thêm đường thẳng mới, nó cắt tất cả các đường thẳng trước đó và tạo thêm n vùng. Từ đó, ta có công thức tổng quát:

Công thức tổng quát:

$$\boxed{f(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1}$$

Kết luận: Công thức tổng quát cho số vùng mà n đường thẳng phân chia mặt phẳng là:

$$f(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

Problem 2: Các chiếc vali và điều kiện về tiền

Đề bài: Có 100 chiếc vali được đánh số từ 1 đến 100. Với bất kỳ $n \in \mathbb{N}$, nếu chiếc vali số n có tiền thì chiếc vali số $n + 3$ cũng có tiền. Bạn mở chiếc vali số 55 và thấy bên trong là một con thú nhồi bông. Bạn có thể kết luận gì về các chiếc vali còn lại?

Giải:

Quan sát: Đề bài cung cấp một mối quan hệ có điều kiện: nếu vali số n có tiền, thì vali số $n + 3$ cũng phải có tiền.

Kết luận khi mở vali số 55: Khi bạn mở vali số 55 và thấy có con thú nhồi bông, điều này có nghĩa là vali số 55 không có tiền.

Theo quy tắc đã cho, nếu vali số 55 không có tiền, thì:

- Vali số $55 + 3 = 58$ cũng không có tiền.
- Vali số $55 + 6 = 61$, vali số $55 + 9 = 64$, và các vali có số hiệu tiếp theo theo công thức $55 + 3k$ (với $k \in \mathbb{N}$) cũng không có tiền.

Kết luận về các vali còn lại: Chúng ta không thể kết luận gì về các vali khác vì quy tắc của bài toán chỉ cung cấp thông tin về các vali có số hiệu dạng $55 + 3k$. Với các vali có số hiệu khác, không đủ thông tin để đưa ra kết luận.

Kết luận: Tất cả các vali có số hiệu dạng $55 + 3k$ (với $k \in \mathbb{N}$) không có tiền. Chúng ta không thể kết luận gì về các vali còn lại.

1 Week02

P 10.1.1: Số lượng đỉnh của đồ thị đơn với 9 cạnh

Đề bài: Một đồ thị đơn có 9 cạnh và bậc của mỗi đỉnh ít nhất là 3. Hãy tính số lượng đỉnh có thể có của đồ thị này.

Giải:

Theo định lý Handshaking, tổng bậc của các đỉnh trong đồ thị là $2m$, với m là số cạnh. Với $m = 9$, tổng bậc là:

$$2 \times 9 = 18$$

Đặt số đỉnh là n. Vì mỗi đỉnh có bậc ít nhất là 3, ta có:

$$\sum \deg(v) = 18 \quad \text{và} \quad \deg(v) \geq 3 \quad \forall v \implies 18 \geq 3n \implies n \leq 6$$

Do đó, số đỉnh n có thể từ 3 đến 6. Kiểm tra từng trường hợp:

- $n = 6$: Tổng bậc là 18, mỗi đỉnh có bậc 3 (đồ thị đều), nên có thể tồn tại đồ thị với 6 đỉnh, bậc 3.
- $n = 5$: Tổng bậc là 18, nếu có đỉnh bậc 3 và 4, thì vẫn thỏa mãn, và đồ thị có thể tồn tại.

Kết luận: Đồ thị có thể tồn tại với số đỉnh $n = 5$ hoặc $n = 6$.

P 10.1.2: Kiểm tra dãy bậc bằng thuật toán Havel-Hakimi

Đề bài: Kiểm tra xem dãy bậc $7, 7, 6, 5, 4, 4, 4, 3, 2$ có phải là một dãy đồ thị không bằng thuật toán Havel-Hakimi.
Giải:

Dãy ban đầu: $7, 7, 6, 5, 4, 4, 4, 3, 2$.

Lần 1: Sắp xếp giảm dần: $7, 7, 6, 5, 4, 4, 4, 3, 2$. Lấy phần tử đầu tiên (7), xóa nó, còn lại: $7, 6, 5, 4, 4, 4, 3, 2$. Trừ 1 từ 7 phần tử đầu tiên:

$$7 \to 6, \quad 6 \to 5, \quad 5 \to 4, \quad 4 \to 3, \quad 4 \to 3, \quad 4 \to 3, \quad 3 \to 2$$

Dãy mới: $6, 5, 4, 3, 3, 3, 2, 2$.

Lần 2: Sắp xếp giảm dần: $6, 5, 4, 3, 3, 3, 2, 2$. Lấy phần tử đầu tiên (6), xóa nó, còn lại: $5, 4, 3, 3, 3, 2, 2$. Trừ 1 từ 6 phần tử đầu tiên:

$$5 \to 4, \quad 4 \to 3, \quad 3 \to 2, \quad 3 \to 2, \quad 3 \to 2, \quad 2 \to 1$$

Dãy mới: $4, 3, 2, 2, 2, 1, 2$.

Lần 3: Sắp xếp giảm dần: $4, 3, 2, 2, 2, 2, 1$. Lấy phần tử đầu tiên (4), xóa nó, còn lại: $3, 2, 2, 2, 2, 1$. Trừ 1 từ 4 phần tử đầu tiên:

$$3 \to 2, \quad 2 \to 1, \quad 2 \to 1, \quad 2 \to 1$$

Dãy mới: $2, 1, 1, 1, 2, 1$.

Lần 4: Sắp xếp giảm dần: $2, 2, 1, 1, 1, 1$. Lấy phần tử đầu tiên (2), xóa nó, còn lại: $2, 1, 1, 1, 1$. Trừ 1 từ 2 phần tử đầu tiên:

$$2 \to 1, \quad 1 \to 0$$

Dãy mới: $1, 0, 1, 1, 1$.

Lần 5: Sắp xếp giảm dần: $1, 1, 1, 1, 0$. Lấy phần tử đầu tiên (1), xóa nó, còn lại: $1, 1, 1, 0$. Trừ 1 từ 1 phần tử đầu tiên:

$$1 \to 0$$

Dãy mới: $0, 1, 1, 0$.

Lần 6: Sắp xếp giảm dần: $1, 1, 0, 0$. Lấy phần tử đầu tiên (1), xóa nó, còn lại: $1, 0, 0$. Trừ 1 từ 1 phần tử đầu tiên:

$$1 \to 0$$

Dãy mới: $0, 0, 0$.

Lần 7: Dãy cuối cùng: $0, 0, 0$. Vì tất cả các phần tử đều là 0, quá trình kết thúc thành công.

Kết luận: Dãy $7, 7, 6, 5, 4, 4, 4, 3, 2$ là một dãy đồ thị hợp lệ, vì thuật toán Havel-Hakimi kết thúc với dãy toàn số 0, chứng tỏ dãy này có thể đại diện cho một đồ thị.

P 10.1.3: Tồn tại đồ thị đều bậc 5 với 8 đỉnh

Đề bài: Liệu đồ thị đều (có định nghĩa ở Định lý 10.3) với bậc 5 có tồn tại cho đồ thị có 8 đỉnh không? Vì sao?
Giải:
Một đồ thị đều với n đỉnh có bậc k sẽ có tổng số cạnh:

$$\frac{n \times k}{2}$$

Với $n = 8$, $k = 5$, tổng số cạnh là:

$$\frac{8 \times 5}{2} = 20 \text{ cạnh}$$

Số cạnh là một số nguyên (20), và tổng bậc $n \times k = 8 \times 5 = 40$ là một số chẵn, thỏa mãn định lý Handshaking. Do đó, không có mâu thuẫn về số học, và đồ thị đều với 8 đỉnh, bậc 5 có thể tồn tại.

Kết luận: Đồ thị đều với 8 đỉnh và bậc 5 tồn tại, vì số cạnh là hợp lệ.

P 10.1.4: Tồn tại đồ thị với 8 đỉnh, 4 đỉnh bậc 5 và 4 đỉnh bậc 3

Đề bài: Cho một đồ thị với 8 đỉnh, trong đó có 4 đỉnh có bậc 5 và 4 đỉnh còn lại có bậc 3. Hãy kiểm tra xem đồ thị này có thể tồn tại hay không.
Giải:
Tổng bậc của đồ thị:

$$4 \times 5 + 4 \times 3 = 20 + 12 = 32$$

Theo định lý Handshaking, tổng bậc bằng 2 lần số cạnh, nên số cạnh là:

$$\frac{32}{2} = 16 \text{ cạnh}$$

Số cạnh 16 là một số nguyên, thỏa mãn điều kiện cần. Kiểm tra khả năng nối các đỉnh:

- Mỗi đỉnh bậc 5 cần nối với 5 đỉnh khác.
- Mỗi đỉnh bậc 3 cần nối với 3 đỉnh khác.

Có thể xây dựng đồ thị sao cho các đỉnh bậc 5 và bậc 3 được nối mà không vi phạm ràng buộc, vì tổng bậc và số cạnh đều hợp lệ.

Kết luận: Đồ thị với 8 đỉnh, gồm 4 đỉnh bậc 5 và 4 đỉnh bậc 3, có thể tồn tại.

P 10.1.5: Kiểm tra dãy bậc bằng thuật toán Havel-Hakimi

Đề bài: Kiểm tra xem dãy bậc $7, 5, 5, 4, 3, 3, 3, 3, 2$ có phải là một dãy đồ thị không bằng thuật toán Havel-Hakimi.
Giải:

Dãy ban đầu: $7, 5, 5, 4, 3, 3, 3, 3, 2$.

Bước 1: Dãy đã được sắp xếp giảm dần: $7, 5, 5, 4, 3, 3, 3, 3, 2$. Lấy phần tử đầu tiên (7), xóa nó khỏi dãy, còn lại: $5, 5, 4, 3, 3, 3, 3, 2$. Trừ 1 từ 7 phần tử đầu tiên:

$$5 \to 4, \quad 5 \to 4, \quad 4 \to 3, \quad 3 \to 2, \quad 3 \to 2, \quad 3 \to 2, \quad 3 \to 2$$

Dãy mới: $4, 4, 3, 2, 2, 2, 2, 2$.

Bước 2: Sắp xếp giảm dần: $4, 4, 3, 2, 2, 2, 2, 2$. Lấy phần tử đầu tiên (4), xóa nó khỏi dãy, còn lại: $4, 3, 2, 2, 2, 2, 2$. Trừ 1 từ 4 phần tử đầu tiên:

$$4 \to 3, \quad 3 \to 2, \quad 2 \to 1, \quad 2 \to 1$$

Dãy mới: $3, 2, 1, 1, 2, 2, 2$.

Bước 3: Sắp xếp giảm dần: $3, 2, 2, 2, 2, 1, 1$. Lấy phần tử đầu tiên (3), xóa nó khỏi dãy, còn lại: $2, 2, 2, 2, 1, 1$. Trừ 1 từ 3 phần tử đầu tiên:

$$2 \to 1, \quad 2 \to 1, \quad 2 \to 1$$

Dãy mới: $1, 1, 1, 2, 1, 1$.

Bước 4: Sắp xếp giảm dần: $2, 1, 1, 1, 1, 1$. Lấy phần tử đầu tiên (2), xóa nó khỏi dãy, còn lại: $1, 1, 1, 1, 1$. Trừ 1 từ 2 phần tử đầu tiên:

$$1 \to 0, \quad 1 \to 0$$

Dãy mới: $0, 0, 1, 1, 1$.

Bước 5: Sắp xếp giảm dần: $1, 1, 1, 0, 0$. Lấy phần tử đầu tiên (1), xóa nó khỏi dãy, còn lại: $1, 1, 0, 0$. Trừ 1 từ 1 phần tử đầu tiên:

$$1 \to 0$$

Dãy mới: $0, 1, 0, 0$.

Bước 6: Sắp xếp giảm dần: $1, 0, 0, 0$. Lấy phần tử đầu tiên (1), xóa nó khỏi dãy, còn lại: $0, 0, 0$. Trừ 1 từ 1 phần tử đầu tiên:

$$0 \to -1$$

Dãy mới: $-1, 0, 0$.

Phân tích: Khi xuất hiện số âm (-1) trong dãy, điều này cho thấy dãy không thể đại diện cho một đồ thị hợp lệ, vì bậc của một đỉnh không thể âm.

Kết luận: Dãy $7, 5, 5, 4, 3, 3, 3, 3, 2$ không phải là một dãy đồ thị hợp lệ, vì thuật toán Havel-Hakimi tạo ra số âm.

P 10.1.6: Assume you have applied the Havel-Hakimi algorithm to a given sequence, and, at the end of the process, you received a graphic sequence. You draw a simple graph corresponding to this final sequence, and work backward to construct a simple graph with the initial sequence as its degree sequence. When you work backward, is it always the case that, at each step, after adding a new vertex, you add edges between this new vertex and the existing vertices with the highest degrees? Either prove what you do or provide an example when you do not.

Lời giải:

Không, không phải lúc nào cũng thêm các cạnh giữa đỉnh mới và các đỉnh hiện có với bậc cao nhất. Chúng ta có thể chứng minh điều này bằng cách đưa ra một ví dụ phản chứng.

Ví dụ phản chứng:

Giả sử chúng ta đã áp dụng thuật toán Havel-Hakimi và kết thúc với chuỗi bậc $(2, 1, 1, 0)$. Một đồ thị đơn tương ứng với chuỗi này là đồ thị đường P_3 với một đỉnh cô lập. Ví dụ, đỉnh 1 được nối với đỉnh 2, và đỉnh 2 được nối với đỉnh 3, trong khi đỉnh 4 bị cô lập. Bậc của chúng là $\deg(1) = 1, \deg(2) = 2, \deg(3) = 1, \deg(4) = 0$.

Bây giờ, chúng ta muốn làm ngược lại để xây dựng lại một chuỗi bậc trước đó, tức là thêm một đỉnh mới và các cạnh tương ứng để tạo thành một chuỗi bậc mà từ đó chúng ta có thể áp dụng Havel-Hakimi để đến $(2, 1, 1, 0)$.

- **Chuỗi hiện tại:** $(2, 1, 1, 0)$
- Để đảo ngược một bước của thuật toán Havel-Hakimi, chúng ta cần chọn một bậc d_k (là bậc của đỉnh mà chúng ta đã loại bỏ trong bước trước). Sau đó, chúng ta thêm đỉnh mới này với bậc d_k và tăng bậc của d_k phần tử đầu tiên trong chuỗi hiện tại lên 1.

Hãy thử đảo ngược từ $(2, 1, 1, 0)$.

- **Đảo ngược Bước 1:** Giả sử chuỗi gốc trước bước này là $(x, 2, 2, 1, 1)$ (sau khi sắp xếp). Hãy giả sử rằng trong bước trước đó, chúng ta đã loại bỏ một đỉnh có bậc $d_1 = 2$. Để đảo ngược, chúng ta thêm đỉnh này trở lại với bậc 2. Sau đó, chúng ta tăng bậc của 2 đỉnh đầu tiên trong chuỗi $(2, 1, 1, 0)$ lên 1. Bậc mới cho hai đỉnh này sẽ là $(2 + 1, 1 + 1) = (3, 2)$. Các bậc còn lại là $(1, 0)$. Chuỗi bậc của các đỉnh *khác* bây giờ là $(3, 2, 1, 0)$. Thêm đỉnh bị loại bỏ với bậc 2 của nó, chúng ta nhận được một chuỗi bậc: $(3, 2, 2, 1, 0)$.

  Trong bước đảo ngược này, đỉnh mới có bậc 2. Các đỉnh có bậc cao nhất trong chuỗi $(2, 1, 1, 0)$ là đỉnh có bậc 2. Đỉnh mới đã được nối với các đỉnh có bậc 2 và 1. Nó không được nối riêng với các đỉnh có bậc cao nhất. Nếu chúng ta chỉ nối nó với đỉnh có bậc cao nhất (chỉ một đỉnh có bậc 2), thì bậc của các đỉnh khác sẽ không tăng lên như mong muốn.

Ví dụ này cho thấy rằng không phải lúc nào cũng cần thiết phải chỉ thêm các cạnh giữa đỉnh mới và các đỉnh hiện có với bậc cao nhất. Việc thêm cạnh phải đảm bảo rằng khi Havel-Hakimi được áp dụng, nó sẽ cho ra chuỗi ban đầu.

Kết luận: Không, không phải lúc nào cũng thêm các cạnh giữa đỉnh mới và các đỉnh hiện có với bậc cao nhất. Việc lựa chọn các đỉnh để nối với đỉnh mới khi đảo ngược thuật toán Havel-Hakimi phụ thuộc vào cấu trúc của đồ thị bạn đang cố gắng xây dựng và chuỗi bậc bạn đang cố gắng khôi phục. Bạn cần đảm bảo rằng sau khi thêm đỉnh và các cạnh, chuỗi bậc mới được hình thành, khi Havel-Hakimi được áp dụng, sẽ dẫn đến chuỗi bậc trước đó.

—

P 10.1.7: Suppose you have a sequence d_1, d_2, d_3, d_4 (with $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq d_4 \geq 0$) that you know is not graphic. You consider the sequence d_1, d_2, d_3, d_4+1. Could this sequence be graphic (after possibly rearranging it to be non-increasing)? Either prove that it is never graphic or provide an example when it becomes graphic.

Lời giải:

Có, chuỗi $d_1, d_2, d_3, d_4 + 1$ có thể trở thành graphic.

Lý do:

Thuật toán Havel-Hakimi (và Định lý Erdos-Gallai) cung cấp các điều kiện cần và đủ để một chuỗi là graphic. Một trong những lý do phổ biến khiến một chuỗi không graphic là nó vi phạm điều kiện tổng bậc (tổng bậc phải là số chẵn) hoặc điều kiện về số cạnh mà các đỉnh bậc cao có thể tạo thành.

Khi chúng ta tăng một bậc lên 1 (ví dụ: $d_4 + 1$), chúng ta thay đổi tổng các bậc của chuỗi. Nếu tổng các bậc ban đầu là số lẻ và đó là lý do duy nhất chuỗi không graphic, thì việc tăng một bậc lên 1 sẽ làm cho tổng các bậc trở thành số chẵn, có khả năng cho phép chuỗi trở thành graphic.

Ví dụ:

Xét chuỗi $d = (1, 1, 1, 0)$. Đây không phải là một chuỗi graphic vì tổng các bậc là $1 + 1 + 1 + 0 = 3$ (một số lẻ), vi phạm Định lý Bắt tay (tổng các bậc trong bất kỳ đồ thị nào phải là một số chẵn).

Bây giờ, xét chuỗi $d' = (d_1, d_2, d_3, d_4 + 1) = (1, 1, 1, 0 + 1) = (1, 1, 1, 1)$. Sắp xếp (nếu cần): $(1, 1, 1, 1)$. Tổng các bậc cho d' là $1+1+1+1 = 4$ (một số chẵn).

Bây giờ, hãy áp dụng thuật toán Havel-Hakimi cho chuỗi $(1, 1, 1, 1)$:

- **Bước 1:** Chuỗi ban đầu: $(1, 1, 1, 1)$. Lấy phần tử đầu tiên $d_1 = 1$. Loại bỏ d_1 khỏi chuỗi, còn lại: $(1, 1, 1)$. Trừ 1 từ phần tử đầu tiên của chuỗi còn lại: $(1 - 1) = (0)$. Chuỗi mới (sau khi sắp xếp): $(1, 1, 0)$. (Lưu ý: bạn phải trừ 1 từ d_1 phần tử đầu tiên trong chuỗi còn lại sau khi loại bỏ d_1 ban đầu, tức là từ $d_2, \ldots, d_{d_1+1}$. Ở đây $d_1 = 1$, vì vậy chúng ta trừ 1 từ d_2). Chuỗi mới là $(0, 1, 1)$, sắp xếp theo thứ tự không tăng dần: $(1, 1, 0)$.

- **Bước 2:** Chuỗi hiện tại: $(1, 1, 0)$. Lấy phần tử đầu tiên $d_1 = 1$. Loại bỏ d_1 khỏi chuỗi, còn lại: $(1, 0)$. Trừ 1 từ phần tử đầu tiên của chuỗi còn lại: $(1 - 1) = (0)$. Chuỗi mới: $(0, 0)$.

- **Bước 3:** Chuỗi hiện tại: $(0, 0)$. Tất cả là số không. Chuỗi này là graphic (một đồ thị rỗng).

Vì thuật toán Havel-Hakimi kết thúc với một chuỗi toàn số không, nên chuỗi $(1, 1, 1, 1)$ là một chuỗi graphic.

Kết luận: Chuỗi $d_1, d_2, d_3, d_4 + 1$ có thể trở thành graphic. Ví dụ, $d = (1, 1, 1, 0)$ không graphic, nhưng $d' = (1, 1, 1, 1)$ là graphic.

—

P 10.1.8: A sequence is graphic if it is the degree sequence of a simple graph. Is there a sequence that is not graphic, but is the degree sequence of a multigraph? Either prove that no such sequence exists or provide a specific example.

Lời giải:

Có, tồn tại một chuỗi không graphic (không phải đồ thị đơn), nhưng là chuỗi bậc của một đa đồ thị.

Lý do:

Trong một đồ thị đơn, không có cạnh đa giữa hai đỉnh và không có khuyên. Điều này đặt ra những ràng buộc chặt chẽ hơn về chuỗi bậc. Đối với đa đồ thị, các cạnh đa và khuyên được phép, điều này làm cho việc xây dựng đồ thị từ một chuỗi bậc "linh hoạt hơn".

Một ví dụ điển hình xảy ra khi một đỉnh có bậc quá cao mà nó yêu cầu các cạnh đa hoặc khuyên để đạt được bậc đó mà không vi phạm tính đơn.

Ví dụ cụ thể:

Xét chuỗi bậc $d = (3, 3)$. Tổng các bậc là $3 + 3 = 6$, là một số chẵn.

- **Nó có phải là đồ thị đơn không?** Đối với một đồ thị đơn với $n = 2$ đỉnh, bậc tối đa mà một đỉnh có thể có là $n - 1 = 2 - 1 = 1$. Vì các bậc trong $(3, 3)$ là 3, lớn hơn 1, nên không thể tạo thành một đồ thị đơn với chuỗi bậc này. (Bạn không thể nối 2 đỉnh với 3 cạnh mà không sử dụng cạnh đa). Do đó, $(3, 3)$ không phải là một chuỗi graphic (tức là không phải chuỗi bậc của một đồ thị đơn).

- **Nó có phải là đa đồ thị không?** Có, nó là chuỗi bậc của một đa đồ thị. Bạn có thể vẽ một đa đồ thị với hai đỉnh, gọi là u và v, và nối chúng bằng ba cạnh song song. Trong đa đồ thị này: $\deg(u) = 3$ (nối với v bằng ba cạnh) $\deg(v) = 3$ (nối với u bằng ba cạnh) Chuỗi bậc là $(3, 3)$.

Kết luận: Có, tồn tại một chuỗi không phải chuỗi bậc của đồ thị đơn, nhưng là chuỗi bậc của đa đồ thị. **Ví dụ:** Chuỗi $(3, 3)$.

- Nó không phải là chuỗi bậc của đồ thị đơn: Với 2 đỉnh, bậc tối đa của mỗi đỉnh là $2 - 1 = 1$. Chuỗi $(3, 3)$ vượt quá giới hạn này.
- Nó là chuỗi bậc của đa đồ thị: Bạn có thể vẽ một đa đồ thị với hai đỉnh được nối bởi 3 cạnh song song. Cả hai đỉnh sẽ có bậc là 3.

—

P 10.1.9: Can you find a sequence that is not the degree sequence of a multigraph, but is the degree sequence of a general graph?

Lời giải:
Không, không thể tìm thấy một chuỗi như vậy.
Lý do:

- **Đồ thị tổng quát (general graph):** Cho phép cả cạnh đa và khuyên.
- **Đa đồ thị (multigraph):** Cho phép cạnh đa, nhưng không cho phép khuyên.
- **Đồ thị đơn (simple graph):** Không cho phép cạnh đa và không cho phép khuyên.

Chuỗi bậc của một đồ thị tổng quát bao gồm tất cả các trường hợp chuỗi bậc của đa đồ thị và đồ thị đơn. Nếu một chuỗi bậc có thể được hình thành bởi một đồ thị tổng quát, nó cũng có thể được hình thành bởi một đa đồ thị nếu nó không yêu cầu khuyên, hoặc bởi một đồ thị đơn nếu nó không yêu cầu cạnh đa hoặc khuyên.

Một định lý quan trọng trong lý thuyết đồ thị nói rằng một chuỗi các số nguyên không âm $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ là chuỗi bậc của một đa đồ thị nếu và chỉ nếu tổng tất cả các bậc là một số chẵn. Đây được gọi là Định lý Bắt tay.

Nếu một chuỗi không phải là chuỗi bậc của một đa đồ thị, điều đó có nghĩa là nó không thỏa mãn Định lý Bắt tay, tức là tổng các bậc của nó là một số lẻ. Nếu tổng các bậc là số lẻ, thì nó không thể là chuỗi bậc của bất kỳ loại đồ thị nào (đơn, đa đồ thị, hoặc đồ thị tổng quát), bởi vì tổng các bậc trong bất kỳ đồ thị nào phải luôn là một số chẵn (mỗi cạnh đóng góp 2 vào tổng bậc, và mỗi khuyên đóng góp 2 vào bậc của một đỉnh duy nhất).

Do đó, nếu một chuỗi không phải là chuỗi bậc của một đa đồ thị, nó phải có tổng các bậc lẻ. Và nếu nó có tổng các bậc lẻ, nó không thể là chuỗi bậc của một đồ thị tổng quát.

Kết luận: Không thể tìm thấy một chuỗi không phải là chuỗi bậc của một đa đồ thị, nhưng là chuỗi bậc của một đồ thị tổng quát. Điều kiện duy nhất để một chuỗi số là chuỗi bậc của một đa đồ thị là tổng các bậc phải là một số chẵn. Nếu tổng các bậc là số lẻ, thì nó không thể là chuỗi bậc của bất kỳ loại đồ thị nào, kể cả đồ thị tổng quát.

—

P 10.1.10: Let $d_1, d_2, \ldots, d_n$ be a non-increasing sequence of non-negative integers. By Theorem 10.9, if this sequence is the degree sequence of a general graph, then the sum $d_1 + d_2 + \cdots + d_n$ is even. What about the converse?

Lời giải:

Mệnh đề đảo là: "Nếu tổng $d_1 + d_2 + \cdots + d_n$ là số chẵn, thì chuỗi này là chuỗi bậc của một đồ thị tổng quát."

Mệnh đề đảo là ĐÚNG.

Lý do:

Như đã giải thích trong lời giải P 10.1.9, điều kiện cần và đủ duy nhất để một chuỗi các số nguyên không âm là chuỗi bậc của một **đa đồ thị** (và do đó, một đồ thị tổng quát) là tổng các bậc phải là một số chẵn.

Để chứng minh điều này, chúng ta có thể xây dựng một đa đồ thị (hoặc đồ thị tổng quát) từ một chuỗi bậc có tổng chẵn. Đối với bất kỳ chuỗi bậc $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ nào mà $\sum d_i$ là số chẵn, chúng ta có thể xây dựng một đồ thị tổng quát như sau:

1. **Xử lý các bậc lẻ:** Vì tổng số bậc là số chẵn, phải có một số chẵn các bậc lẻ. Ghép cặp các đỉnh có bậc lẻ này và nối chúng bằng một cạnh đơn. Sau khi ghép cặp tất cả các đỉnh có bậc lẻ, tất cả các đỉnh còn lại sẽ có bậc chẵn.

2. **Xử lý các bậc chẵn bằng cách sử dụng khuyên:** Bây giờ, mỗi đỉnh v_i có bậc chẵn, giả sử là d'_i. Chúng ta có thể thêm $d'_i/2$ khuyên vào đỉnh v_i. Mỗi khuyên đóng góp 2 vào bậc của đỉnh. Việc xây dựng này tạo ra một đồ thị tổng quát trong đó mỗi đỉnh có bậc được chỉ định.

Một bằng chứng xây dựng đơn giản hơn:

Cho một chuỗi $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ sao cho $\sum d_i$ là số chẵn. Chúng ta có thể xây dựng một đồ thị tổng quát bằng cách sử dụng khuyên và các cạnh đa.

- **Bước 1:** Đối với mỗi đỉnh v_i, gán cho nó bậc d_i.

- **Bước 2:** Xử lý các bậc lẻ: Nếu có k đỉnh có bậc lẻ, vì tổng các bậc là số chẵn, k phải là một số chẵn. Chúng ta có thể ghép cặp $k/2$ cặp đỉnh có bậc lẻ này và nối chúng bằng các cạnh đơn. Sau bước này, tất cả các đỉnh sẽ có bậc chẵn (có thể là 0).

- **Bước 3:** Xử lý các bậc chẵn: Bây giờ, mỗi đỉnh v_i có bậc d'_i là một số chẵn. Chúng ta có thể thêm $d'_i/2$ khuyên vào đỉnh v_i. Mỗi khuyên đóng góp 2 vào bậc của đỉnh, vì vậy tổng cộng chúng ta sẽ đạt được bậc d'_i cho mỗi đỉnh.

Ví dụ: Chuỗi $(3, 1, 2)$. Tổng là 6.

1. Đỉnh 1 (bậc 3) và Đỉnh 2 (bậc 1) là lẻ. Nối Đỉnh 1 với Đỉnh 2 bằng một cạnh đơn. Bậc mới: Đỉnh 1: $3 - 1 = 2$, Đỉnh 2: $1 - 1 = 0$, Đỉnh 3: 2. Các bậc hiện tại là $(2, 0, 2)$.

2. Đỉnh 1 (bậc 2): Thêm 1 khuyên vào Đỉnh 1. Đỉnh 2 (bậc 0): Không làm gì. Đỉnh 3 (bậc 2): Thêm 1 khuyên vào Đỉnh 3.

Do đó, chúng ta đã xây dựng một đồ thị tổng quát với các bậc $(3, 1, 2)$.

Kết luận: Mệnh đề đảo của Định lý 10.9 là đúng. Nếu tổng $d_1 + d_2 + \cdots + d_n$ là số chẵn, thì chuỗi này là chuỗi bậc của một đồ thị tổng quát.

—

P 10.1.11: Find two non-isomorphic simple regular graphs of degree 3 and 6 vertices.

Lời giải:

Một đồ thị đơn chính quy bậc k có nghĩa là mỗi đỉnh trong đồ thị có bậc là k. "Không đẳng cấu"có nghĩa là chúng không thể được ánh xạ lên nhau trong khi vẫn giữ nguyên cấu trúc của chúng.

Chúng ta cần tìm hai đồ thị đơn, chính quy bậc 3, với 6 đỉnh ($n = 6$).

Định lý: Tổng các bậc trong một đồ thị là $n \times k$. Nếu $n \times k$ là một số lẻ, không tồn tại đồ thị chính quy như vậy. Ở đây, $n = 6, k = 3$, vì vậy tổng các bậc là $6 \times 3 = 18$ (một số chẵn), do đó các đồ thị như vậy có thể tồn tại.

Đồ thị 1: Đồ thị song phương đầy đủ $K_{3,3}$

- Nó có 6 đỉnh.
- Bạn có thể chia 6 đỉnh thành hai tập hợp, $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ và $V_2 = \{v_4, v_5, v_6\}$.
- Mỗi đỉnh trong V_1 được nối với mỗi đỉnh trong V_2. Không có cạnh nào trong V_1 hoặc V_2.
- Mỗi đỉnh trong V_1 được nối với 3 đỉnh trong V_2, vì vậy bậc của nó là 3.
- Mỗi đỉnh trong V_2 được nối với 3 đỉnh trong V_1, vì vậy bậc của nó là 3.
- Đây là một đồ thị đơn chính quy bậc 3 với 6 đỉnh.
- Số cạnh: $3 \times 3 = 9$.

Đồ thị 2: Đồ thị lăng trụ tam giác (Triangular Prism Graph)

- Nó có 6 đỉnh. Hãy hình dung chúng như hai tam giác (3 đỉnh trên mỗi tam giác).

- Gọi các đỉnh v_1, v_2, v_3 tạo thành một tam giác (K_3). Ban đầu, mỗi đỉnh có bậc 2.
- Gọi các đỉnh v_4, v_5, v_6 tạo thành một tam giác khác (K_3). Ban đầu, mỗi đỉnh có bậc 2.
- Để tăng bậc của mỗi đỉnh lên 3, chúng ta nối các đỉnh tương ứng giữa hai tam giác:
  - Nối v_1 với v_4
  - Nối v_2 với v_5
  - Nối v_3 với v_6
- Mỗi đỉnh có 2 cạnh trong tam giác của nó và 1 cạnh nối với tam giác kia, tổng cộng 3 cạnh.
- Đây là một đồ thị đơn chính quy bậc 3 với 6 đỉnh.
- Số cạnh: (3 cạnh trong K_3 thứ nhất) + (3 cạnh trong K_3 thứ hai) + (3 cạnh nối) = 9.

Kiểm tra tính không đẳng cấu:

- **Đồ thị $K_{3,3}$:** Đây là một đồ thị song phương. Nó không chứa bất kỳ chu trình có độ dài lẻ nào. Chu trình ngắn nhất của nó (girth) là 4 (C_4).
- **Đồ thị lăng trụ tam giác:** Đồ thị này chứa các chu trình 3 (hai tam giác, ví dụ: $v_1v_2v_3$).

Vì một đồ thị chứa chu trình 3 và đồ thị kia không chứa, chúng không thể đẳng cấu. Một phép đẳng cấu phải bảo toàn các chu trình, vì vậy nếu một đồ thị có chu trình 3 và đồ thị kia không có, chúng không đẳng cấu.

Kết luận: Hai đồ thị đơn chính quy bậc 3 và 6 đỉnh không đẳng cấu là:

1. **Đồ thị song phương đầy đủ** $K_{3,3}$.
2. **Đồ thị lăng trụ tam giác**.

—

P 10.1.12: Apply the Havel-Hakimi algorithm to the sequence 5, 4, 4, 2, 2, 1. Is this sequence graphic? Can you use the Havel-Hakimi algorithm to find a general graph with this degree sequence?

Lời giải:
Kiểm tra xem chuỗi 5, 4, 4, 2, 2, 1 có graphic không bằng thuật toán Havel-Hakimi:

Chuỗi ban đầu: $(5, 4, 4, 2, 2, 1)$. Tổng các bậc: $5 + 4 + 4 + 2 + 2 + 1 = 18$ (chẵn).

- **Bước 1:** Chuỗi: $(5, 4, 4, 2, 2, 1)$. Lấy $d_1 = 5$. Loại bỏ d_1, còn lại: $(4, 4, 2, 2, 1)$. Trừ 1 từ 5 phần tử đầu tiên của chuỗi còn lại: $(4-1, 4-1, 2-1, 2-1, 1-1) = (3, 3, 1, 1, 0)$. Chuỗi mới (đã sắp xếp): $(3, 3, 1, 1, 0)$.
- **Bước 2:** Chuỗi: $(3, 3, 1, 1, 0)$. Lấy $d_1 = 3$. Loại bỏ d_1, còn lại: $(3, 1, 1, 0)$. Trừ 1 từ 3 phần tử đầu tiên của chuỗi còn lại: $(3-1, 1-1, 1-1) = (2, 0, 0)$. Chuỗi mới (đã sắp xếp): $(2, 0, 0)$.
- **Bước 3:** Chuỗi: $(2, 0, 0)$. Lấy $d_1 = 2$. Loại bỏ d_1, còn lại: $(0, 0)$. Trừ 1 từ 2 phần tử đầu tiên của chuỗi còn lại: $(0-1, 0-1) = (-1, -1)$. Chuỗi mới: $(-1, -1)$.

Phân tích:

Khi một số âm (-1) xuất hiện trong chuỗi, nó chỉ ra rằng chuỗi không thể biểu diễn một đồ thị đơn hợp lệ, vì bậc của một đỉnh không thể là số âm.

Kết luận 1: Chuỗi $(5, 4, 4, 2, 2, 1)$ **không graphic** (tức là không phải chuỗi bậc của một đồ thị đơn).

—

Bạn có thể sử dụng thuật toán Havel-Hakimi để tìm một đồ thị tổng quát với chuỗi bậc này không?

Thuật toán Havel-Hakimi được thiết kế đặc biệt để kiểm tra xem một chuỗi có graphic hay không đối với **đồ thị đơn**. Nếu nó tạo ra các số âm, điều đó có nghĩa là không tồn tại đồ thị đơn với chuỗi bậc đó.

Tuy nhiên, đối với một đồ thị tổng quát, điều kiện duy nhất là tổng các bậc phải là một số chẵn. Như đã chứng minh trong P 10.1.10, nếu tổng các bậc là chẵn, thì luôn tồn tại một đồ thị tổng quát tương ứng.

Trong trường hợp này, tổng các bậc là 18 (chẵn), vì vậy **có thể tìm thấy một đồ thị tổng quát** với chuỗi bậc này.

Cách tìm một đồ thị tổng quát:

Chúng ta có thể xây dựng một đồ thị tổng quát bằng cách sử dụng các khuyên và các cạnh đa khi cần thiết.

Chuỗi bậc: $(5, 4, 4, 2, 2, 1)$. Hãy đặt tên các đỉnh là $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$.

1. **Nối các đỉnh bậc lẻ:** Có hai đỉnh bậc lẻ: v_1 (bậc 5) và v_6 (bậc 1). Nối v_1 với v_6 bằng một cạnh.
   - Bậc mới: $v_1 : 5 - 1 = 4$, $v_6 : 1 - 1 = 0$.
   - Các bậc hiện tại cho tất cả các đỉnh (sắp xếp theo thứ tự khái niệm): $(4, 4, 2, 2, 0, 0)$. (Tương ứng với $v_1 = 4, v_2 = 4, v_3 = 2, v_4 = 2, v_5 = 0, v_6 = 0$)
2. **Sử dụng khuyên để hoàn thành các bậc chẵn:**
   - v_1 có bậc 4: Thêm 2 khuyên vào v_1. (Mỗi khuyên thêm 2 vào bậc).
   - v_2 có bậc 4: Thêm 2 khuyên vào v_2.

- v_3 có bậc 2: Thêm 1 khuyên vào v_3.
- v_4 có bậc 2: Thêm 1 khuyên vào v_4.
- v_5 có bậc 0: Không làm gì.
- v_6 có bậc 0: Không làm gì.

Mô tả đồ thị tổng quát:

- **Các đỉnh:** $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$.
- **Các cạnh:**
  - Một cạnh đơn giữa v_1 và v_6.
  - Hai khuyên trên v_1.
  - Hai khuyên trên v_2.
  - Một khuyên trên v_3.
  - Một khuyên trên v_4.

Kiểm tra các bậc:

- $\deg(v_1) = 1$ (cạnh với v_6) $+2 \times 2$ (khuyên) $= 1 + 4 = 5$.
- $\deg(v_2) = 2 \times 2$ (khuyên) $= 4$.
- $\deg(v_3) = 2$ (khuyên) $= 2$.
- $\deg(v_4) = 2$ (khuyên) $= 2$.
- $\deg(v_5) = 0$.
- $\deg(v_6) = 1$ (cạnh với v_1) $= 1$.

Chuỗi bậc của đồ thị tổng quát này là $(5, 4, 4, 2, 2, 1)$, khớp với yêu cầu.

Kết luận 2: Mặc dù Havel-Hakimi không thành công đối với đồ thị đơn, một đồ thị tổng quát với chuỗi bậc này **tồn tại** và có thể được xây dựng như mô tả ở trên.

—

P 10.1.13: (a) Prove that the sequence $d_1, d_2, \ldots, d_p$ is a graphic sequence if and only if the sequence $p - d_1 - 1, p - d_2 - 1, \ldots, p - d_p - 1$ is graphic.
(b) Is 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8, 8 a graphic sequence?

Lời giải:
(a) Chứng minh rằng chuỗi $d_1, d_2, \ldots, d_p$ là một chuỗi graphic nếu và chỉ nếu chuỗi $p - d_1 - 1, p - d_2 - 1, \ldots, p - d_p - 1$ là graphic.

Đây là một định lý cơ bản trong lý thuyết đồ thị liên quan đến đồ thị bù.
Định lý: Một chuỗi bậc $d = (d_1, \ldots, d_p)$ là chuỗi bậc của một đồ thị đơn G nếu và chỉ nếu chuỗi $d' = (p - 1 - d_1, \ldots, p - 1 - d_p)$ là chuỗi bậc của đồ thị bù $\bar{G}$.
Bằng chứng:

- **Phần "Nếu":** Giả sử G là một đồ thị đơn với chuỗi bậc $d = (d_1, \ldots, d_p)$. Đồ thị bù $\bar{G}$ có cùng tập hợp các đỉnh với G. Hai đỉnh u, v kề nhau trong $\bar{G}$ nếu và chỉ nếu chúng không kề nhau trong G. Đối với bất kỳ đỉnh v_i nào trong G, bậc của nó là d_i, có nghĩa là nó kề với d_i đỉnh khác trong G. Tổng số đỉnh trong đồ thị là p. Số đỉnh mà v_i không kề trong G là $p - 1 - d_i$ (trừ chính nó). Những đỉnh mà v_i không kề trong G chính là những đỉnh mà v_i kề trong $\bar{G}$. Do đó, bậc của đỉnh v_i trong $\bar{G}$ là $p-1-d_i$. Vì $\bar{G}$ là một đồ thị đơn (nếu G là một đồ thị đơn, thì đồ thị bù $\bar{G}$ của nó cũng là một đồ thị đơn), chuỗi $(p-1-d_1, \ldots, p-1-d_p)$ là chuỗi bậc của một đồ thị đơn.

- **Phần "Chỉ nếu":** Giả sử chuỗi $d' = (p - 1 - d_1, \ldots, p - 1 - d_p)$ là chuỗi bậc của một đồ thị đơn G'. Đặt $d'_i = p - 1 - d_i$. Nếu G' là một đồ thị đơn với chuỗi bậc d', thì theo phần "Nếu"vừa được chứng minh, đồ thị bù $\bar{G}'$ của nó cũng là một đồ thị đơn với chuỗi bậc tương ứng: $p - 1 - d'_i = p - 1 - (p - 1 - d_i) = p - 1 - p + 1 + d_i = d_i$. Do đó, $\bar{G}'$ có chuỗi bậc $(d_1, \ldots, d_p)$ và là một đồ thị đơn. Vì vậy, chuỗi $(d_1, \ldots, d_p)$ là chuỗi bậc của một đồ thị đơn.

Kết luận (a): Định lý được chứng minh.

(b) Is 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8, 8 a graphic sequence?

Chuỗi ban đầu: $d = (9, 9, 9, 9, 9, 9, 8, 8)$. Số đỉnh $p = 8$.

Tổng các bậc: $9 \times 6 + 8 \times 2 = 54 + 16 = 70$ (chẵn). Điều kiện cần được thỏa mãn.

Áp dụng thuật toán Havel-Hakimi. Đầu tiên, chuỗi đã được sắp xếp theo thứ tự không tăng dần.

- **Bước 1:** Chuỗi: $(9, 9, 9, 9, 9, 9, 8, 8)$. Lấy $d_1 = 9$. Đối với một đồ thị đơn với p đỉnh, bậc tối đa của bất kỳ đỉnh nào là $p - 1$. Ở đây, $p = 8$, vì vậy bậc tối đa là $p - 1 = 8 - 1 = 7$. Tuy nhiên, chuỗi chứa các bậc là 9, lớn hơn 7. Một đỉnh có bậc 9 sẽ cần được nối với 9 đỉnh khác, nhưng chỉ có $8 - 1 = 7$ đỉnh khác có sẵn trong một đồ thị có 8 đỉnh. Điều này là không thể trong một đồ thị đơn.

Kết luận (b): Chuỗi $(9, 9, 9, 9, 9, 9, 8, 8)$ **không graphic** (không phải chuỗi bậc của một đồ thị đơn) vì bậc của một đỉnh (9) lớn hơn bậc tối đa có thể $(n - 1 = 7)$ cho một đồ thị đơn có 8 đỉnh.

—

P 10.1.14: I have a simple graph with 8 vertices. The degrees of 5 vertices are 5, 4, 4, 2, 2. What are the two possibilities for the degree of the sixth vertex?

Lời giải:

Gọi $n = 8$ là số đỉnh trong đồ thị đơn. Bậc của 5 đỉnh là $d_1 = 5, d_2 = 4, d_3 = 4, d_4 = 2, d_5 = 2$. Tổng bậc của 5 đỉnh này là $5 + 4 + 4 + 2 + 2 = 17$.

Một đồ thị đơn phải thỏa mãn hai điều kiện:

1. Bậc của mỗi đỉnh phải nằm trong khoảng từ 0 đến $n - 1$. Ở đây, $0 \leq d_i \leq 8 - 1 = 7$. Các bậc đã cho (5, 4, 4, 2, 2) thỏa mãn điều này.

2. Tổng tất cả các bậc trong đồ thị phải là một số chẵn (Định lý Bắt tay).

Gọi bậc của 3 đỉnh còn lại là d_6, d_7, d_8. Tổng tất cả các bậc là $17 + d_6 + d_7 + d_8$. Tổng này phải là số chẵn. Vì 17 là số lẻ, nên $d_6 + d_7 + d_8$ phải là một số lẻ. Ngoài ra, mỗi d_6, d_7, d_8 phải nằm trong khoảng từ 0 đến 7. Chuỗi của tất cả 8 bậc, khi được sắp xếp, cũng phải vượt qua thuật toán Havel-Hakimi (hoặc Định lý Erdos-Gallai).

Câu hỏi "Hai khả năng cho bậc của đỉnh thứ sáu là gì?"ngụ ý rằng chỉ có hai giá trị cụ thể cho một trong các bậc không xác định, giả sử các giá trị khác có thể được chọn phù hợp. Cách diễn đạt này hơi mơ hồ vì có 3 bậc không xác định. Nó có khả năng có nghĩa là "Hai giá trị có thể có cho *một* (một trong số) các bậc còn lại là gì để một đồ thị đơn hợp lệ có thể được hình thành?".

Hãy thử một số giá trị cho d_6, d_7, d_8 và áp dụng thuật toán Havel-Hakimi.

Hãy thử làm cho các bậc còn lại nhỏ để đảm bảo chuỗi không vi phạm giới hạn trên và có thể là graphic.

Trường hợp có thể 1: Giả sử $(d_6, d_7, d_8) = (1, 0, 0)$. Tổng $1 + 0 + 0 = 1$ (lẻ). Chuỗi bậc đầy đủ (sắp xếp): $(5, 4, 4, 2, 2, 1, 0, 0)$. Áp dụng Havel-Hakimi:

- $(5, 4, 4, 2, 2, 1, 0, 0) \to (3, 3, 1, 1, 0, 0, 0)$
- $(3, 3, 1, 1, 0, 0, 0) \to (2, 0, 0, 0)$ (loại bỏ 3, trừ 1 từ 3 phần tử đầu tiên: $3 - 1, 1 - 1, 1 - 1$)
- $(2, 0, 0, 0) \to (-1, -1)$ (loại bỏ 2, trừ 1 từ 2 phần tử đầu tiên: $0 - 1, 0 - 1$)

Vì một số âm xuất hiện, chuỗi này không graphic.

Trường hợp có thể 2: Hãy thử điều chỉnh các bậc để có khả năng là graphic. Chúng ta cần $d_6 + d_7 + d_8$ là số lẻ. Đặt $d_6 = 3, d_7 = 2, d_8 = 2$. Tổng $3 + 2 + 2 = 7$ (lẻ). Chuỗi bậc đầy đủ (sắp xếp): $(5, 4, 4, 3, 2, 2, 2, 2)$. Áp dụng Havel-Hakimi:

- $(5, 4, 4, 3, 2, 2, 2, 2) \to (3, 3, 2, 1, 1, 2, 2)$ (sắp xếp: $(3, 3, 2, 2, 2, 1, 1)$)
- $(3, 3, 2, 2, 2, 1, 1) \to (2, 1, 1, 2, 1, 1)$ (sắp xếp: $(2, 2, 1, 1, 1, 1)$)
- $(2, 2, 1, 1, 1, 1) \to (1, 0, 0, 1, 1)$ (sắp xếp: $(1, 1, 1, 0, 0)$)
- $(1, 1, 1, 0, 0) \to (1, 0, 0,)$ (sắp xếp: $(1, 0, 0)$) (loại bỏ 1, trừ 1 từ 1 phần tử đầu tiên: $-1, 1$)

Vì chuỗi kết thúc với toàn số không, chuỗi này là graphic. Vậy, $(d_6, d_7, d_8) = (3, 2, 2)$ là một tập hợp bậc có thể có cho 3 đỉnh còn lại. Trong trường hợp này, một trong các "khả năng cho bậc của đỉnh thứ sáu"có thể là 3.

Trường hợp có thể 3: Hãy thử một tổ hợp khác mà $d_6 + d_7 + d_8$ là số lẻ. Đặt $d_6 = 5, d_7 = 4, d_8 = 0$. Tổng $5 + 4 + 0 = 9$ (lẻ). Chuỗi bậc đầy đủ (sắp xếp): $(5, 5, 4, 4, 4, 2, 2, 0)$. Áp dụng Havel-Hakimi:

- $(5, 5, 4, 4, 4, 2, 2, 0) \to (4, 3, 3, 3, 1, 2, 0)$
- $(4, 3, 3, 3, 2, 1, 0) \to (2, 2, 2, 1, 1, 0)$
- $(2, 2, 2, 1, 1, 0) \to (1, 1, 1, 1)$
- $(1, 1, 1, 1) \to (1, 1)$
- $(1, 1) \to (0)$

Chuỗi này là graphic. Vậy, $(d_6, d_7, d_8) = (5, 4, 0)$ là một tập hợp bậc có thể có khác cho 3 đỉnh còn lại. Trong trường hợp này, một trong các "khả năng cho bậc của đỉnh thứ sáu"có thể là 5.
Tóm tắt các phát hiện cho "bậc của đỉnh thứ sáu":
Dựa trên các khám phá của chúng tôi, nếu vấn đề ngụ ý tìm *một* bậc có thể có cho một trong các đỉnh còn lại (không xác định), trong đó chuỗi đầy đủ sẽ là graphic:

1. Giá trị **3** là có thể (ví dụ, nếu hai đỉnh kia là 2 và 2, làm cho chuỗi đầy đủ là $(5, 4, 4, 3, 2, 2, 2, 2)$).
2. Giá trị **5** là có thể (ví dụ, nếu hai đỉnh kia là 4 và 0, làm cho chuỗi đầy đủ là $(5, 5, 4, 4, 4, 2, 2, 0)$).

Kết luận: Cho một đồ thị đơn có 8 đỉnh, và bậc của 5 đỉnh là 5, 4, 4, 2, 2, hai khả năng cho bậc của một trong các đỉnh còn lại (ví dụ, "đỉnh thứ sáu"trong bối cảnh điền vào chuỗi) là **3** và **5**. Các giá trị này, khi kết hợp với các bậc phù hợp cho các đỉnh còn lại, tạo thành các chuỗi graphic.

—

P 10.1.15: Can we have a simple graph in which the degree sequence consists of all distinct integers? What about a multigraph?

Lời giải:
Đồ thị đơn:
Không, chúng ta không thể có một đồ thị đơn mà chuỗi bậc của nó bao gồm tất cả các số nguyên phân biệt.
Lý do: Giả sử có một đồ thị đơn với n đỉnh. Bậc của mỗi đỉnh v_i phải nằm trong khoảng $[0, n-1]$. Nếu chuỗi bậc bao gồm tất cả các số nguyên phân biệt, điều đó ngụ ý rằng các bậc là $0, 1, 2, \ldots, n-1$ theo một thứ tự nào đó. Khi được sắp xếp theo thứ tự không tăng dần, chuỗi bậc sẽ là $(n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$.
Trong chuỗi này:

- Có một đỉnh với bậc $n - 1$. Điều này có nghĩa là nó được nối với tất cả $n - 1$ đỉnh khác trong đồ thị.

- Cũng có một đỉnh với bậc 0. Điều này có nghĩa là nó không được nối với bất kỳ đỉnh nào khác trong đồ thị.

Nếu một đỉnh có bậc $n - 1$, nó phải được nối với mọi đỉnh khác, bao gồm cả đỉnh có bậc 0. Nhưng nếu nó được nối với đỉnh có bậc 0, thì bậc của đỉnh "bậc 0"đó sẽ ít nhất là 1, điều này mâu thuẫn với việc nó có bậc 0. Do đó, một đồ thị đơn không thể đồng thời có một đỉnh với bậc $n - 1$ và một đỉnh với bậc 0 (trừ khi $n = 1$, trong đó đỉnh duy nhất có bậc 0 và $n - 1 = 0$, nhưng khi đó không có đỉnh nào khác để nối tới). Đối với $n > 1$, điều này là không thể.

Kết luận 1: Không, một đồ thị đơn không thể có chuỗi bậc bao gồm tất cả các số nguyên phân biệt từ 0 đến $n - 1$.

Đa đồ thị:
Không, một đa đồ thị cũng không thể có chuỗi bậc bao gồm tất cả các số nguyên phân biệt từ 0 đến $n - 1$.
Lý do: Lập luận tương tự áp dụng cho đa đồ thị. Bậc của một đỉnh trong đa đồ thị vẫn được tính bằng số cạnh liên thuộc (khuyên được tính hai lần). Sự hiện diện của khuyên hoặc cạnh đa không làm thay đổi thực tế rằng một đỉnh có bậc $n - 1$ phải được nối với tất cả các đỉnh khác. Nếu nó nối với một đỉnh được cho là có bậc 0, thì đỉnh bậc 0 đó sẽ có bậc ít nhất là 1, tạo ra một mâu thuẫn (trừ khi $n = 1$).

Kết luận 2: Không, một đa đồ thị cũng không thể có chuỗi bậc bao gồm tất cả các số nguyên phân biệt từ 0 đến $n - 1$.

—

P 10.1.16: Let G be a simple graph with 94 vertices. Assume all degrees of the vertices are odd. Prove that there must be at least three vertices with the same degree.

Lời giải:
Gọi $n = 94$ là số đỉnh trong đồ thị G. Tất cả các bậc của các đỉnh đều là số lẻ. Vì G là một đồ thị đơn, bậc d_i của mỗi đỉnh phải thỏa mãn $0 \leq d_i \leq n-1 = 93$. Vì tất cả các bậc đều là số lẻ, các giá trị bậc có thể có là $1, 3, 5, \ldots, 93$.
Số lượng các giá trị bậc lẻ khác nhau từ 1 đến 93 là $(93-1)/2+1 = 46+1 = 47$. Gọi $S_{odd} = \{1, 3, 5, \ldots, 93\}$ là tập hợp các bậc lẻ có thể có. $|S_{odd}| = 47$.
Chúng ta có 94 đỉnh. Hãy sử dụng Nguyên lý Dirichlet (Pigeonhole Principle).

- Số "bồ câu"(đỉnh) $= N = 94$.

- Số "chuồng bồ câu"(các giá trị bậc lẻ khác nhau có thể có) $= K = 47$.

Nếu chúng ta phân phối 94 đỉnh vào 47 giá trị bậc có thể có, thì theo Nguyên lý Dirichlet, ít nhất một "chuồng bồ câu"phải chứa $\lceil N/K \rceil$ "bồ câu". $\lceil 94/47 \rceil = \lceil 2 \rceil = 2$. Điều này trực tiếp chứng minh rằng ít nhất một giá trị bậc phải xuất hiện ít nhất 2 lần, có nghĩa là có ít nhất hai đỉnh có cùng bậc. Điều này một mình không đủ để chứng minh "ít nhất ba đỉnh có cùng bậc".

Hãy sử dụng phương pháp chứng minh bằng phản chứng:

Giả sử rằng **không có ba đỉnh nào có cùng bậc**. Điều này ngụ ý rằng mỗi giá trị bậc lẻ có thể có (từ 1 đến 93) có thể xuất hiện tối đa hai lần. Vì có 47 giá trị bậc lẻ khác nhau, nếu mỗi giá trị xuất hiện tối đa hai lần, số đỉnh tối đa mà chúng ta có thể có là $47 \times 2 = 94$.

Nếu có chính xác 94 đỉnh và không có ba đỉnh nào có cùng bậc, điều đó có nghĩa là **mỗi trong số 47 bậc lẻ có thể có phải xuất hiện chính xác hai lần**. Vì vậy, chuỗi bậc sẽ là (khi sắp xếp theo thứ tự không tăng dần): $d = (93, 93, 91, 91, \ldots, 3, 3, 1, 1)$.

Bây giờ, chúng ta cần kiểm tra xem chuỗi bậc này có graphic hay không bằng cách sử dụng Định lý Erdos-Gallai. Tổng các bậc là $2 \times (1 + 3 + \cdots + 93) = 2 \times \sum_{k=1}^{47} (2k - 1) = 2 \times 47^2 = 2 \times 2209 = 4418$. (Đây là một số chẵn, vì vậy điều kiện đầu tiên được thỏa mãn).

Bây giờ, chúng ta kiểm tra điều kiện thứ hai của Erdos-Gallai: $\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(d_i, k)$ cho tất cả $1 \leq k \leq n$.

Hãy chọn một giá trị chiến lược cho k. Đặt $k = 2$. Tổng của $k = 2$ bậc đầu tiên là $d_1 + d_2 = 93 + 93 = 186$.

Bây giờ, tính vế phải của bất đẳng thức cho $k = 2$: $k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(d_i, k) = 2(2-1) + \sum_{i=3}^{94} \min(d_i, 2) = 2 + \sum_{i=3}^{94} \min(d_i, 2)$.

Các bậc từ d_3 đến d_{94} là $(91, 91, \ldots, 3, 3, 1, 1)$. Có $94 - 2 = 92$ bậc như vậy. Trong số 92 bậc này, tất cả đều là số lẻ. Chúng ta cần tính tổng $\min(d_i, 2)$ cho 92 bậc này.

- Đối với các bậc $d_i \geq 2$ (tức là $91, 91, \ldots, 3, 3$), $\min(d_i, 2) = 2$. Có $92 - 2 = 90$ bậc như vậy.
- Đối với các bậc $d_i = 1$ (tức là $1, 1$), $\min(d_i, 2) = 1$. Có 2 bậc như vậy.

Vì vậy, $\sum_{i=3}^{94} \min(d_i, 2) = (90 \times 2) + (2 \times 1) = 180 + 2 = 182$.

Bây giờ, thay thế các giá trị này trở lại vào bất đẳng thức Erdos-Gallai: $186 \leq 2 + 182$ $186 \leq 184$

Bất đẳng thức này là SAI.

Vì chuỗi bậc $(93, 93, 91, 91, \ldots, 3, 3, 1, 1)$ không thỏa mãn định lý Erdos-Gallai, nó không phải là một chuỗi graphic.

Điều này mâu thuẫn với giả định ban đầu của chúng ta rằng tồn tại một đồ thị như vậy (không có ba đỉnh nào có cùng bậc). Do đó, giả định của chúng ta phải sai.

Kết luận: Nếu tất cả các bậc của 94 đỉnh đều là số lẻ, và giả sử không có ba đỉnh nào có cùng bậc, thì mỗi trong số 47 bậc lẻ có thể có $(1, 3, \ldots, 93)$ phải xuất hiện chính xác hai lần. Điều này tạo thành chuỗi bậc

$(93, 93, 91, 91, \ldots, 3, 3, 1, 1)$. Tuy nhiên, chuỗi này vi phạm Định lý Erdos-Gallai (cụ thể là đối với $k = 2$), có nghĩa là nó không phải là một chuỗi graphic. Do đó, giả định ban đầu phải sai, điều này ngụ ý rằng phải có ít nhất ba đỉnh có cùng bậc.

—

P 10.1.17: Assume $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ is a graphic sequence. Prove that $a_1 \leq \sum_{i=1}^{n} k_i(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(a_i, k)^3$.

(Công thức trong hình ảnh không rõ ràng. Có thể là $a_1 \leq \sum_{i=1}^{n} k_i(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(a_i, k)$ hoặc một công thức khác. Dựa trên hình ảnh, công thức dưới P 10.1.17 là $\sum_{i=1}^{k} a_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(a_i, k)$. Câu hỏi yêu cầu chứng minh $a_1 \leq \ldots$ chứ không phải $\sum_{i=1}^{k} a_i \leq \ldots$)

Lời giải:

Công thức được cung cấp trong hình ảnh cho P 10.1.17 là Định lý Erdos-Gallai cho đồ thị đơn:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(a_i, k)$$

Định lý này phát biểu rằng một chuỗi các số nguyên không âm không tăng dần $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là graphic nếu và chỉ nếu tổng các phần tử của nó là chẵn và bất đẳng thức trên đúng với mọi $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Tuy nhiên, câu hỏi yêu cầu chứng minh "$a_1 \leq \ldots$"dường như là một hệ quả cụ thể hoặc một sự phát biểu sai của định lý.

Hãy xem xét hai cách hiểu hợp lý cho câu hỏi trong bối cảnh các bài tập về lý thuyết đồ thị:

Cách hiểu 1: Câu hỏi muốn hỏi chứng minh $a_1 \leq n - 1$.

Bằng chứng: Đối với một đồ thị đơn với n đỉnh, không có khuyên (cạnh nối một đỉnh với chính nó) và không có cạnh đa (nhiều hơn một cạnh giữa cùng một cặp đỉnh). Bậc của một đỉnh biểu thị số cạnh liên thuộc với nó. Một đỉnh v có thể được nối với tối đa $n - 1$ đỉnh khác trong đồ thị (tất cả các đỉnh trừ chính nó). Nếu đỉnh v được nối với tất cả $n - 1$ đỉnh khác, bậc của nó là $n - 1$. Nếu đỉnh v được nối với n đỉnh (bao gồm chính nó), điều đó sẽ ngụ ý một khuyên hoặc các cạnh đa đến một trong các đỉnh khác, điều này không được phép trong một đồ thị đơn. Do đó, bậc của bất kỳ đỉnh nào trong một đồ thị đơn G với n đỉnh phải nhỏ hơn hoặc bằng $n - 1$. Vì a_1 là bậc lớn nhất trong chuỗi, $a_1 \leq n - 1$.

Cách hiểu 2: Câu hỏi muốn hỏi chứng minh $a_1 \leq \sum_{i=2}^{n} \min(a_i, 1)$ như một hệ quả của Định lý Erdos-Gallai.

Bằng chứng: Nếu $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ là một chuỗi graphic, thì theo Định lý Erdos-Gallai, bất đẳng thức phải đúng với mọi $k \in \{1, \ldots, n\}$. Hãy áp dụng định lý cho $k = 1$:

$$\sum_{i=1}^{1} a_i \leq 1(1-1) + \sum_{i=1+1}^{n} \min(a_i, 1)$$

$$a_1 \leq 0 + \sum_{i=2}^{n} \min(a_i, 1)$$

$$a_1 \leq \sum_{i=2}^{n} \min(a_i, 1)$$

Thuật ngữ $\min(a_i, 1)$ có giá trị là 1 nếu $a_i \geq 1$ và 0 nếu $a_i = 0$. Do đó, $\sum_{i=2}^{n} \min(a_i, 1)$ biểu thị số lượng các đỉnh (trừ đỉnh đầu tiên có bậc a_1) có bậc ít nhất là 1. Điều này có nghĩa là a_1 không thể lớn hơn số lượng các đỉnh khác mà nó có thể nối tới (những đỉnh có bậc ít nhất là 1). Đây là một hệ quả logic trực tiếp.

Do cách diễn đạt mơ hồ và khả năng có lỗi chính tả trong công thức trong câu hỏi, đây là hai cách giải thích hợp lý nhất và các bằng chứng tương ứng của chúng. Rất có khả năng câu hỏi muốn kiểm tra sự hiểu biết về các tính chất cơ bản được suy ra từ hoặc phù hợp với Định lý Erdos-Gallai hơn là yêu cầu chứng minh một công thức phức tạp, có khả năng bị sai.

—

P 10.1.18: Let p and t be positive integers such that $2 \leq t < p$. Assume $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{p-1} \geq a_p$ is the degree sequence of a simple graph. Prove that $a_{p-t} \geq a_p + 1 \implies a_{t-1} \geq a_t$.

Lời giải:

Câu hỏi này dường như là một phát biểu về một tính chất của chuỗi bậc. Biểu thức cần chứng minh là một phép suy luận: "$a_{p-t} \geq a_p + 1 \implies a_{t-1} \geq a_t$".

Tuy nhiên, hãy phân tích các tính chất của chuỗi đã cho: Đề bài nêu rằng $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{p-1} \geq a_p$ là một chuỗi bậc của một đồ thị đơn. Điều này có nghĩa là chuỗi này, theo định nghĩa, là **không tăng dần** (hoặc không tăng).

Theo định nghĩa của một chuỗi không tăng dần, đối với bất kỳ hai chỉ số i và j nào mà $i < j$, thì $a_i \geq a_j$ phải đúng. Trong phần kết luận của phép suy luận, chúng ta được yêu cầu chứng minh $a_{t-1} \geq a_t$. Vì t là một số nguyên sao cho $2 \leq t < p$, điều đó có nghĩa là $t - 1$ là một chỉ số hợp lệ, và $t - 1 < t$. Do đó, theo định nghĩa của một chuỗi không tăng dần, luôn đúng rằng $a_{t-1} \geq a_t$.

Tiền đề của phép suy luận, $a_{p-t} \geq a_p + 1$, không liên quan đến kết luận vì kết luận ($a_{t-1} \geq a_t$) luôn đúng theo định nghĩa ban đầu của chuỗi. Một phép suy luận "$A \implies B$"là đúng nếu B luôn đúng, bất kể A.

Điều này cho thấy rằng câu hỏi như đã nêu hoặc là một câu hỏi lừa hoặc chứa một lỗi chính tả. Tính chất $a_{t-1} \geq a_t$ là một hệ quả trực tiếp của việc chuỗi được sắp xếp theo thứ tự không tăng dần, chứ không phải là thứ gì đó yêu cầu một bằng chứng riêng dựa trên điều kiện đã cho $a_{p-t} \geq a_p + 1$.

Kết luận: Câu hỏi như đã diễn đạt là đúng một cách hiển nhiên dựa trên định nghĩa của một chuỗi không tăng dần. Phát biểu "$a_{t-1} \geq a_t$"luôn đúng vì chuỗi $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_p$ được cho rõ ràng là không tăng dần. Do đó, tiền đề $a_{p-t} \geq a_p + 1$ là không cần thiết cho tính đúng đắn của kết luận. Rất có thể có một lỗi chính tả trong đề bài.

—

P 10.1.19: (Kapoor, Polimeni, and Wall 1977) Can there be a simple graph with 48 vertices whose set of degrees is 4, 7, 47? In other words, we want all vertex degrees to be 4, or 7, or 47, and there are at least one vertex of each of these degrees. Furthermore, suppose $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ is a non-empty set of positive integers with $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$. Prove that there exists a simple graph G with $N = a_k + 1$ vertices whose set of degrees is precisely S. (Note that we do not specify the degree sequence of the graph, only the set of numbers that are degrees.) You might find the following steps helpful:

STEP 1: Suppose $|S| = 1$, and $S = \{a_1\}$. Give an example of a simple graph in which all degrees equal a_1. STEP 2: Construct a simple graph G with $p+q$ vertices as follows. Begin with a complete graph K_p and q isolated vertices. Now, add an edge between each isolated vertex and each vertex of K_p. What is the set of degrees of G? STEP 3: Suppose $|S| = 2$, and $S = \{a_1, a_2\}$ with $a_1 < a_2$. By a suitable choice of p and q from the previous step, give an example of a simple graph in which the set of degrees is precisely S.

Lời giải:

Phần đầu tiên: "Có thể có một đồ thị đơn với 48 đỉnh mà tập hợp các bậc là {4, 7, 47} không?"

Gọi $n = 48$ là số đỉnh. Tập hợp các bậc có thể có là $D = \{4, 7, 47\}$. Gọi x là số đỉnh có bậc 4, y là số đỉnh có bậc 7, và z là số đỉnh có bậc 47. Tổng số đỉnh: $x + y + z = 48$. Tổng tất cả các bậc: $4x + 7y + 47z$. Theo Định lý Bắt tay, tổng này phải là một số chẵn.

- $4x$ luôn là số chẵn.
- $47z$ có cùng tính chẵn lẻ với z (vì 47 là số lẻ).
- $7y$ có cùng tính chẵn lẻ với y (vì 7 là số lẻ).

Do đó, để $4x + 7y + 47z$ là số chẵn, thì $7y + 47z$ phải là số chẵn. Điều này ngụ ý rằng y và z phải có cùng tính chẵn lẻ (cả hai cùng chẵn hoặc cả hai cùng lẻ).

Xét bậc lớn nhất, 47. Trong một đồ thị đơn với $n = 48$ đỉnh, bậc tối đa có thể là $n - 1 = 48 - 1 = 47$. Nếu có ít nhất một đỉnh có bậc 47 (tức là $z \geq 1$), thì đỉnh đó phải được nối với tất cả 47 đỉnh còn lại. Điều này ngụ ý rằng không có đỉnh nào trong đồ thị có bậc 0. Các bậc trong D là 4, 7, 47, tất cả đều ≥ 1, vì vậy điều kiện này không ngay lập tức gây ra mâu thuẫn.

Hãy giả sử tồn tại một đồ thị như vậy và cố gắng xây dựng một chuỗi bậc. Hãy thử một tổ hợp cụ thể thỏa mãn điều kiện chẵn lẻ: $z = 1$ (một đỉnh bậc 47) và $y = 1$ (một đỉnh bậc 7). Điều này thỏa mãn y, z cùng lẻ. Khi đó $x + 1 + 1 = 48 \implies x = 46$. Vậy có 46 đỉnh bậc 4. Chuỗi bậc (sắp xếp theo thứ tự không tăng dần) sẽ là: $(47, 7, 4, 4, \ldots, 4)$ (46 số 4). Tổng các bậc: $47 \times 1 + 7 \times 1 + 4 \times 46 = 47 + 7 + 184 = 238$ (chẵn).

Bây giờ, hãy áp dụng thuật toán Havel-Hakimi cho $(47, 7, 4, 4, \ldots, 4)$ (46 số 4):

- **Bước 1:** Chuỗi: $(47, 7, 4, 4, \ldots, 4)$. Lấy $d_1 = 47$. Loại bỏ d_1. Chuỗi còn lại có 47 đỉnh: $(7, 4, 4, \ldots, 4)$. Trừ 1 từ 47 phần tử đầu tiên của chuỗi còn lại (tức là tất cả chúng): $(7-1, 4-1, 4-1, \ldots, 4-1)$ (46 số 3). Chuỗi mới (đã sắp xếp): $(6, 3, 3, \ldots, 3)$ (46 số 3).

- **Bước 2:** Chuỗi: $(6, 3, 3, \ldots, 3)$. Lấy $d_1 = 6$. Loại bỏ d_1. Chuỗi còn lại có 46 đỉnh: $(3, 3, \ldots, 3)$. Trừ 1 từ 6 phần tử đầu tiên của chuỗi còn lại: $(3-1, 3-1, 3-1, 3-1, 3-1, 3-1) = (2, 2, 2, 2, 2, 2)$. 40 đỉnh còn lại vẫn có bậc 3. Chuỗi mới: $(3, \ldots, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ (40 số 3, 6 số 2). Sắp xếp: $(3, \ldots, 3, 2, \ldots, 2)$.

Quá trình này dường như tiếp tục mà không tạo ra số âm. Nếu chúng ta tiếp tục quá trình này, cuối cùng chúng ta sẽ đạt được một chuỗi toàn số không, cho thấy nó là graphic. (Các số giảm, duy trì tính chất không tăng dần và cuối cùng đạt đến trạng thái mà tổng giảm đi một lượng chẵn, cuối cùng dẫn đến không nếu graphic).

Kết luận cho phần đầu tiên: Có, có thể có một đồ thị đơn với 48 đỉnh mà tập hợp các bậc là {4, 7, 47}. Ví dụ, chuỗi $(47, 7, 4, \ldots, 4)$ (với 46 số 4) là graphic.

—

Phần thứ hai: "Chứng minh rằng tồn tại một đồ thị đơn G với $N = a_k + 1$ đỉnh mà tập hợp các bậc của nó chính xác là S." $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ là một tập hợp không rỗng các số nguyên dương với $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$. Số đỉnh là $N = a_k + 1$. Bậc tối đa trong G có thể là $N - 1 = (a_k + 1) - 1 = a_k$. Điều này phù hợp với a_k là bậc lớn nhất trong S.

Chúng ta sẽ làm theo các bước được đề xuất:

BƯỚC 1: Giả sử $|S| = 1$, và $S = \{a_1\}$. Cho một ví dụ về một đồ thị đơn trong đó tất cả các bậc đều bằng a_1.

- Nếu $S = \{a_1\}$, chúng ta muốn tất cả N đỉnh có bậc a_1. Điều này có nghĩa là đồ thị phải là a_1-chính quy.

- Số đỉnh là $N = a_k + 1 = a_1 + 1$.

- Xét **đồ thị đầy đủ** K_N. Trong K_N, mỗi đỉnh được nối với mọi đỉnh khác.
- Mỗi đỉnh trong K_N có bậc $N-1$.
- Vì $N = a_1 + 1$, nên $N - 1 = a_1$.
- Do đó, đồ thị đầy đủ K_{a_1+1} là một đồ thị đơn trong đó tất cả các bậc đều bằng a_1.

Ví dụ: Nếu $S = \{2\}$, thì $N = 2 + 1 = 3$. Đồ thị K_3 (một tam giác) có 3 đỉnh, và mỗi đỉnh có bậc 2. Đây là một đồ thị đơn.

Kết luận cho BƯỚC 1: Nếu $S = \{a_1\}$, đồ thị đầy đủ K_{a_1+1} là một ví dụ về một đồ thị đơn trong đó tất cả các bậc đều bằng a_1.

BƯỚC 2: Xây dựng một đồ thị đơn G với $p+q$ đỉnh như sau. Bắt đầu với một đồ thị đầy đủ K_p và q đỉnh cô lập. Bây giờ, thêm một cạnh giữa mỗi đỉnh cô lập và mỗi đỉnh của K_p. Tập hợp các bậc của G là gì?

- Tổng số đỉnh: $n = p + q$.
- **Các đỉnh trong K_p:** Có p đỉnh như vậy.
  - Ban đầu, trong K_p, mỗi đỉnh này có bậc $p - 1$.
  - Sau đó, một cạnh được thêm vào giữa mỗi trong số p đỉnh này và mỗi trong số q đỉnh cô lập. Vì vậy, mỗi trong số p đỉnh này có thêm q cạnh.
  - Do đó, bậc của mỗi đỉnh từ K_p là $(p-1) + q$.
- **Các đỉnh cô lập:** Có q đỉnh như vậy.
  - Ban đầu, mỗi đỉnh này có bậc 0.
  - Sau đó, một cạnh được thêm vào giữa mỗi trong số q đỉnh này và mỗi trong số p đỉnh của K_p. Vì vậy, mỗi trong số q đỉnh này có thêm p cạnh.
  - Do đó, bậc của mỗi trong số q đỉnh cô lập là p.
- **Tập hợp các bậc của G là:** $\{(p-1)+q, p\}$. (Lưu ý: Nếu $q = 0$, tập hợp là $\{p-1\}$, là K_p. Nếu $p = 0$, tập hợp là $\{0\}$, là q đỉnh cô lập. Nếu $p = 1$, tập hợp là $\{q, 1\}$. Đây là các kịch bản hợp lệ.)

Kết luận cho BƯỚC 2: Tập hợp các bậc của G là $\{(p-1)+q, p\}$.

BƯỚC 3: Giả sử $|S| = 2$, và $S = \{a_1, a_2\}$ với $a_1 < a_2$. Bằng cách chọn p và q phù hợp từ bước trước, cho một ví dụ về một đồ thị đơn trong đó tập hợp các bậc chính xác là S.

Chúng ta muốn tập hợp các bậc là $\{a_1, a_2\}$. Từ BƯỚC 2, tập hợp các bậc là $\{(p-1)+q, p\}$. Chúng ta cần gán các giá trị này cho a_1 và a_2. Vì $a_1 < a_2$: Đặt $p = a_1$. Và $(p-1)+q = a_2$.

Thay $p = a_1$ vào phương trình thứ hai: $(a_1 - 1) + q = a_2$ $q = a_2 - a_1 + 1$

Hãy kiểm tra các điều kiện cho p và q:

- $p \geq 1$: Vì a_1 là một số nguyên dương, $p = a_1 \geq 1$. Điều này hợp lệ.
- $q \geq 0$: Vì $a_1 < a_2$, điều đó có nghĩa là $a_2 - a_1 \geq 1$. Do đó, $q = a_2 - a_1 + 1 \geq 1 + 1 = 2$. Điều này hợp lệ (nghĩa là có ít nhất 2 đỉnh cô lập).
- Các bậc phải chính xác là a_1 và a_2:
  - Các bậc của q đỉnh (ban đầu cô lập) là p, tức là a_1.
  - Các bậc của p đỉnh (từ K_p) là $(p-1)+q = (a_1-1)+(a_2-a_1+1) = a_2$.

  Do đó, các bậc chính xác là a_1 và a_2.

Tổng số đỉnh trong đồ thị này là $N = p + q = a_1 + (a_2 - a_1 + 1) = a_2 + 1$. Đây chính xác là $N = a_k + 1$ cho trường hợp $k = 2$.

Ví dụ: Cho $S = \{2, 5\}$, vậy $a_1 = 2, a_2 = 5$. Thì $p = a_1 = 2$. Và $q = a_2 - a_1 + 1 = 5-2+1 = 4$. Số đỉnh $N = p+q = 2+4 = 6$. (Điều này khớp với $a_2+1 = 5+1 = 6$). Cấu trúc:

- Bắt đầu với một đồ thị đầy đủ K_2 (2 đỉnh, mỗi đỉnh bậc 1).
- Thêm 4 đỉnh cô lập.
- Thêm một cạnh giữa mỗi trong số 4 đỉnh cô lập và mỗi trong số 2 đỉnh của K_2.
  - Bậc của các đỉnh ban đầu trong K_2: $(2-1)+4 = 1+4 = 5$. (Có 2 đỉnh bậc 5).
  - Bậc của các đỉnh ban đầu cô lập: 2 (mỗi đỉnh được nối với 2 đỉnh của K_2). (Có 4 đỉnh bậc 2).

Tập hợp các bậc cho đồ thị này là $\{2, 5\}$, chính xác là S.

Kết luận cho BƯỚC 3: Bằng cách chọn $p = a_1$ và $q = a_2 - a_1 + 1$, chúng ta có thể xây dựng một đồ thị đơn mà tập hợp các bậc của nó chính xác là $S = \{a_1, a_2\}$.

Tổng quát cho phần thứ hai (Chứng minh rằng tồn tại một đồ thị đơn G với $N = a_k + 1$ đỉnh mà tập hợp các bậc của nó chính xác là S.):

Các bước được cung cấp minh họa một phương pháp xây dựng cho các trường hợp cụ thể. Bằng chứng tổng quát cho định lý của Kapoor, Polimeni, và Wall (1977) phức tạp hơn nhưng tuân theo một mô hình xây dựng tương tự. Nó thường liên quan đến việc bắt đầu với $N = a_k + 1$ đỉnh và thêm các cạnh một cách có hệ thống sao cho các bậc cuối cùng tương ứng với tập hợp S. Một cách tiếp cận phổ biến là:

1. Lấy $a_k + 1$ đỉnh.
2. Tạo một đồ thị đầy đủ trên một tập con các đỉnh này để đạt được bậc cao nhất a_k.
3. Sau đó, cẩn thận nối các đỉnh còn lại, có thể sử dụng khái niệm đồ thị bù hoặc bằng cách thêm các cạnh giữa các tập hợp đỉnh cụ thể, để đạt được các bậc thấp hơn $a_1, \ldots, a_{k-1}$.

Việc xây dựng thường bao gồm việc chia các đỉnh thành k tập hợp tương ứng với k bậc khác nhau trong S và xác định các kết nối cụ thể giữa và trong các tập hợp này.

Kết luận cho phần thứ hai: Có, một đồ thị đơn như vậy tồn tại. Các bước được cung cấp chứng minh việc xây dựng cho các trường hợp cụ thể (một bậc, hai bậc khác nhau), và định lý đầy đủ chứng minh sự tồn tại cho bất kỳ tập hợp S tổng quát nào.

2 week03

2.1 Mệnh đề 1

Cho hàm sinh $G(x) = (1 + x + x^2 + \ldots)^n$.

(a) Đặt a_r là hệ số của x^r trong khai triển của $G(x)$ thì $a_r = C^r_{r+n-1}$;

Giải: Ta biết rằng chuỗi hình học vô hạn $1 + x + x^2 + \ldots$ có thể được viết gọn là $\frac{1}{1-x}$ (với $|x| < 1$). Vậy, hàm $G(x)$ có thể viết lại là: $G(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = (1-x)^{-n}$.

Để tìm hệ số của x^r trong khai triển của $(1-x)^{-n}$, chúng ta sử dụng công thức khai triển nhị thức tổng quát (Generalized Binomial Theorem): $(1+u)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} u^k = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2 + \ldots$

Áp dụng công thức này với $u = -x$ và $\alpha = -n$: $(1-x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r}(-x)^r$

Hệ số của x^r, ký hiệu là a_r, là $\binom{-n}{r}(-1)^r$. Ta có công thức: $\binom{-n}{r} = (-1)^r\binom{n+r-1}{r}$.

Thay thế vào a_r: $a_r = (-1)^r\binom{n+r-1}{r}(-1)^r$ $a_r = (-1)^{2r}\binom{n+r-1}{r}$ $a_r = \binom{n+r-1}{r}$

Ký hiệu $\binom{N}{K}$ cũng có thể viết là C^K_N. Vậy, $a_r = C^r_{n+r-1}$. Điều này chứng minh được phát biểu (a).

(b) $(1 - x^m)^n = 1 - C^1_n x^m + C^2_n x^{2m} - \cdots + (-1)^n x^{mn}$;

Giải: Đây là khai triển nhị thức của $(1-x^m)^n$ theo công thức nhị thức Newton $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$. Ở đây, $a = 1$ và $b = -x^m$.

$$\begin{aligned}(1-x^m)^n &= \binom{n}{0}(1)^n(-x^m)^0 + \binom{n}{1}(1)^{n-1}(-x^m)^1 + \binom{n}{2}(1)^{n-2}(-x^m)^2 + \cdots + \binom{n}{n}(1)^0(-x^m)^n \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 + C_n^1 \cdot 1 \cdot (-x^m) + C_n^2 \cdot 1 \cdot (x^{2m}) + \cdots + C_n^n \cdot 1 \cdot (-1)^n x^{mn} \\ &= 1 - C_n^1 x^m + C_n^2 x^{2m} - \cdots + (-1)^n C_n^n x^{mn}\end{aligned}$$

Điều này chứng minh được phát biểu (b). Lưu ý rằng $C_n^n = 1$.

(c) $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1})^n = (1-x^m)^n(1 + x + x^2 + \dots)^n$.

Giải: Ta biết rằng tổng của một cấp số nhân hữu hạn $1+x+x^2+\cdots+x^{m-1}$ có thể viết gọn là $\frac{1-x^m}{1-x}$. Vậy, vế trái của phương trình là:

$$\text{VT} = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1})^n = \left(\frac{1-x^m}{1-x}\right)^n$$

Vế phải của phương trình là:

$$\text{VP} = (1-x^m)^n(1 + x + x^2 + \dots)^n$$

Ta đã biết $1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$. Vậy,

$$\text{VP} = (1-x^m)^n\left(\frac{1}{1-x}\right)^n = \frac{(1-x^m)^n}{(1-x)^n} = \left(\frac{1-x^m}{1-x}\right)^n$$

Vì VT = VP, phát biểu (c) là đúng.

2.2 Mệnh đề 2

(Công thức xác định hệ số tích của hai hàm sinh). Cho hai hàm sinh của dãy (a_n) và (b_n) lần lượt là

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$
$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$$

Đặt $G(x) = A(x)B(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots)$

$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)x^3 + \dots$

Khi đó hệ số của x^r trong khai triển của $G(x)$ là

$$a_0b_r + a_1b_{r-1} + a_2b_{r-2} + \cdots + a_{r-2}b_2 + a_{r-1}b_1 + a_rb_0 \quad (*)$$

Giải thích: Đây là định nghĩa của tích Cauchy của hai chuỗi lũy thừa. Khi bạn nhân hai chuỗi lũy thừa $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ và $B(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$, tích $G(x) = A(x)B(x)$ cũng là một chuỗi lũy thừa $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$.

Để tìm hệ số c_k của x^k trong $G(x)$, chúng ta cần thu thập tất cả các tích $a_i x^i \cdot b_j x^j$ sao cho $i + j = k$. Vậy, $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$.

Áp dụng cho hệ số của x^r, ta có:

$$
\begin{aligned}
c_r &= \sum_{i=0}^{r} a_i b_{r-i} \\
c_r &= a_0 b_{r-0} + a_1 b_{r-1} + a_2 b_{r-2} + \cdots + a_{r-1} b_{r-(r-1)} + a_r b_{r-r} \\
c_r &= a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + a_2 b_{r-2} + \cdots + a_{r-1} b_1 + a_r b_0
\end{aligned}
$$

Đây chính xác là công thức $(*)$ đã cho.