

Đề Thi Giữa Kỳ Nhập Môn Giải Tích Hè 2025

Introduction to Mathematical Analysis Summer 2025

Ngày 16 tháng 6 năm 2025

Yêu cầu.

1. Được phép sử dụng tài liệu giấy không giới hạn.
2. Cấm sử dụng thiết bị điện tử, AIs. Nếu phát hiện 0 điểm ngay lần đầu tiên & thu bài (không có cảnh cáo).
3. Làm theo yêu cầu. Viết code giấy, nếu sai cú pháp, vẫn chấm nội dung.
4. Nếu làm không được, viết định nghĩa sẽ được +0.25 điểm.
5. Không làm được ý trước, vẫn có thể sử dụng kết quả các ý trước để làm ý sau của bài toán.
6. Thời gian thi: 2 hours.

Bài 1 (Giới hạn của dãy số). (a) (1 điểm) *Tính giới hạn của dãy số $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ được xác định bởi $u_n = e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}$.* (b) (0.5 điểm) *Chứng minh $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$ bằng ngôn ngữ ε .* (c) (1 điểm) *Tìm công thức, viết thuật toán & chương trình C/C++, Python để tính chỉ số tối ưu*

$$N_{\varepsilon}^{\text{opt}} = \min\{N(\varepsilon); |u_n - l| < \varepsilon, \forall n \geq N_{\varepsilon}\}, \forall \varepsilon \in (0, \infty).$$

Bài 2 (Giới hạn của hàm số). (a) (1 điểm) *Tính giới hạn của hàm số $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ với $f(x) = \frac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x - 1}$ tại $x = 1$.* (b) (0.5 điểm) *Chứng minh $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ với giới hạn l tìm được ở câu (a) bằng ngôn ngữ ε - δ .* (c) (1 điểm) *Tìm công thức, viết thuật toán & chương trình C/C++, Python để tính $\delta_{\varepsilon}^{\text{opt}}$ tối ưu*

$$\delta_{\varepsilon}^{\text{opt}}(x_0) := \min\{\delta(x_0, \varepsilon); |x - x_0| < \delta(x_0, \varepsilon) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\}, \forall \varepsilon \in (0, \infty).$$

Bài 3 (Đạo hàm & numerical differentiation). (a) (1 điểm) *Tính đạo hàm $f'(x_0)$ với hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cosh(x^2 - 3x + 1)$.* (b) (1 điểm) *Tìm đạo hàm của hàm $f(x) = \cosh(x^2 - 3x + 1)$ tại điểm $x = 2$ bằng định nghĩa.* (c) (1 điểm) *Xấp xỉ đạo hàm bằng 3 công thức Newton forward, Newton backward, & Stirling.*

Bài 4 (Tích phân & numerical integration). (a) (1 điểm) *Tính nguyên hàm $\int 2^{-x} \tanh 2^{1-x} dx$.* (b) (1 điểm) *Tính tích phân $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}$ dx.* (c) (1.5 điểm) *Xấp xỉ tích phân*

$$\int_{-1}^1 (x+2) \sin(x^2 + 4x - 6) dx,$$

bằng trapezoidal rule:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) \, dx &= \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi) \text{ for some } \xi \in (a, b) \\ &\approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)),\end{aligned}$$

để đánh giá sai số.

Bài 5 (Tổng hợp kiến thức). (3 điểm) Cho 1 dãy số $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ với số hạng được xác định bởi

$$a_n = f(n) + g'(n) + \int_{a(n)}^{b(n)} h(x) \, dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tìm điều kiện để dãy số: (a) hội tụ. (b) bị chặn. (c) ...