BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUẢN LÝ VÀ CÔNG NGHỆ THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
KHOA CÔNG NGHỆ

BÁO CÁO BÀI TẬP

TỔ HỢP VÀ LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ & GIẢI TÍCH

Giảng viên hướng dẫn: ThS. Nguyễn Quản Bá Hồng
Sinh viên thực hiện: Phan Vĩnh Tiến – 2201700177 – IT2207A

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH, NGÀY 13 THÁNG 5 NĂM 2025

Mục lục

Phần I

Tổ hợp và Lý thuyết đồ thị

1 Tổ hợp cơ bản

1.1 Nguyên lý bù trừ

Bài toán 1. Với $n \in \mathbb{Z}^+$, xét $A_i\,(i = 1,\,2,\,\ldots,\,n)$ là n tập hợp hữu hạn bất kỳ.

(a) Chứng minh rằng
$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\substack{T\subseteq\{1,2,\ldots,n\}\\ T\neq\varnothing}} (-1)^{|T|+1}\left|\bigcap_{i\in T} A_i\right|.$$

(b) Chứng minh rằng khi lấy tổng $m < n$ hạng tử đầu tiên của vế phải, nếu m chẵn thì ta có chặn dưới và nếu m lẻ thì ta có chặn trên của $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$.

Lời giải.

(a) Trường hợp $n = 1,\,2$, đẳng thức dễ dàng chứng minh.

Giả sử đẳng thức đúng đến $n = N$, tức ta đã có
$$\left|\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right| = \sum_{\substack{T\subseteq\{1,2,\ldots,N\}\\ T\neq\varnothing}} (-1)^{|T|+1}\left|\bigcap_{i\in T} A_i\right|.$$

Ta cần chứng minh đẳng thức cũng đúng với $n = N + 1$, tức cần chứng minh
$$\left|\bigcup_{i=1}^{N+1} A_i\right| = \sum_{\substack{T\subseteq\{1,2,\ldots,N+1\}\\ T\neq\varnothing}} (-1)^{|T|+1}\left|\bigcap_{i\in T} A_i\right|.$$

Thật vậy, áp dụng $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ và giả thiết quy nạp, ta được
$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{N+1} A_i\right| &= \left|\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right| + |A_{N+1}| - \left|A_{N+1}\cap\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right)\right|\\ &= \sum_{\substack{T\subseteq\{1,2,\ldots,N\}\\ T\neq\varnothing}} (-1)^{|T|+1}\left|\bigcap_{i\in T} A_i\right| + |A_{N+1}| - \left|\bigcup_{i=1}^{N}(A_{N+1}\cap A_i)\right|\end{aligned}$$

Nhận xét rằng tập con khác rỗng của $\{1,\,2,\,\ldots,\,N+1\}$ gồm hai loại:

- các tập con của $\{1, 2, \ldots, N\}$, ký hiệu $S_1, S_2, \ldots, S_m$ (không có phần tử thứ $N+1$);
- tập $\{N+1\}$ và các tập $\{N+1\} \cup S_i$ (có phần tử thứ $N+1$).

Suy ra

$$\sum_{\substack{T \subseteq \{1,2,\ldots,N+1\} \\ T \neq \varnothing}} (-1)^{|T|+1} \left| \bigcap_{i \in T} A_i \right| = \sum_{\substack{T \subseteq \{1,2,\ldots,N\} \\ T \neq \varnothing}} (-1)^{|T|+1} \left| \bigcap_{i \in T} A_i \right| + |A_{N+1}| + \sum_{\substack{T \subseteq \{N+1\} \cup S_i \\ T \neq \varnothing}} (-1)^{|T|+1} \left| \bigcap_{i \in T} A_i \right|.$$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\left| \bigcup_{i=1}^{N} (A_{N+1} \cap A_i) \right| = -\left(\sum_{\substack{T \subseteq \{N+1\} \cup S_i \\ T \neq \varnothing}} (-1)^{|T|+1} \left| \bigcap_{i \in T} A_i \right| \right).$$

Thật vậy, tiếp tục áp dụng giả thiết quy nạp cho vế trái ta được

$$\begin{aligned}
\left| \bigcup_{i=1}^{N} (A_{N+1} \cap A_i) \right| &= \sum_{\substack{T \subseteq \{1,2,\ldots,N\} \\ T \neq \varnothing}} (-1)^{|T|+1} \left| \bigcap_{i \in T} (A_{N+1} \cap A_i) \right| \\
&= -\left(\sum_{\substack{T \subseteq \{1,2,\ldots,N\} \\ T \neq \varnothing}} (-1)^{|T|+2} \left| \left(\bigcap_{i \in T} A_i \right) \cap A_{N+1} \right| \right) \\
&= -\left(\sum_{\substack{T' \subseteq \{N+1\} \cup S_i \\ T' \neq \varnothing}} (-1)^{|T'|+1} \left| \bigcap_{i \in T'} A_i \right| \right).
\end{aligned}$$

Như vậy đẳng thức cũng đúng với $n = N+1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, ta có điều phải chứng minh.

(b) Đặt $P(n, k) = (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \left| \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} \right|$ đẳng thức vừa chứng minh có thể được viết lại

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \left| \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} \right| = \sum_{k=1}^{n} P(n, k).$$

Ta sẽ chứng minh với mọi $m \in \mathbb{Z}^+$, $m < n$ thì

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| \le \sum_{k=1}^{m} P(n, k) \text{ nếu } m \text{ lẻ và } \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| \ge \sum_{k=1}^{m} P(n, k) \text{ nếu } m \text{ chẵn}$$

bằng phương pháp quy nạp toán học.

Trường hợp $n = 1$, mệnh đề hiển nhiên đúng. Giả sử mệnh đề đúng đến $n = N$, tức ta đã có

$$\left|\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right| \leq \sum_{k=1}^{m} P(N,\, k) \text{ nếu } m \text{ lẻ và } \left|\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right| \geq \sum_{k=1}^{m} P(N,\, k) \text{ nếu } m \text{ chẵn.}$$

Ta cần phải chứng minh mệnh đề cũng đúng với $n = N + 1$, tức cần chứng minh

$$\left|\bigcup_{i=1}^{N+1} A_i\right| \leq \sum_{k=1}^{m} P(N+1,\, k) \text{ nếu } m \text{ lẻ và } \left|\bigcup_{i=1}^{N+1} A_i\right| \geq \sum_{k=1}^{m} P(N+1,\, k) \text{ nếu } m \text{ chẵn.}$$

Thật vậy, áp dụng $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, ta được

$$\left|\bigcup_{i=1}^{N+1} A_i\right| = |A_{N+1}| + \left|\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right| - \left|\bigcup_{i=1}^{N} (A_{N+1} \cap A_i)\right|.$$

Xét trường hợp m chẵn, trường hợp m lẻ việc chứng minh hoàn toàn tương tự. Khi m chẵn thì $m-1$ lẻ, áp dụng giả thiết quy nạp ta có

$$\left|\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right| \geq \sum_{k=1}^{m} P(N,\, k) \text{ và } \left|\bigcup_{i=1}^{N} (A_{N+1} \cap A_i)\right| \leq \sum_{k=1}^{m-1} Q(N,\, k),$$

với $Q(N,\, k) = (-1)^{k+1} \displaystyle\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq N} \left|\bigcap_{j=1}^{k} (A_{N+1} \cap A_{i_j})\right| = (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq N} \left|A_{N+1} \cap \left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)\right|$.
Suy ra

$$\left|\bigcup_{i=1}^{N+1} A_i\right| \geq |A_{N+1}| + \sum_{k=1}^{m} P(N,\, k) - \sum_{k=1}^{m-1} Q(N,\, k) = |A_{N+1}| + P(N,\, 1) + \sum_{k=2}^{m} \left(P(N,\, k) - Q(N,\, k-1)\right).$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}
P(N+1,\, k) &= (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq N+1} \left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right| \\
&= (-1)^{k+1} \left(\left(\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq N} + \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k = N+1}\right) \left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|\right) \\
&= (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq N} \left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right| + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{k-1} \leq N} \left|\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} A_{i_j}\right) \cap A_{N+1}\right| \\
&= P(N,\, k) - Q(N,\, k-1)
\end{aligned}$$

và

$$|A_{N+1}| + P(N,\, 1) = |A_{N+1}| + \sum_{1 \leq i \leq N} |A_i| = \sum_{1 \leq i \leq N+1} |A_i| = P(N+1,\, 1).$$

Do đó $\left|\bigcup_{i=1}^{N+1} A_i\right| \geq P(N+1,\, 1) + \sum_{k=2}^{m} P(N+1,\, k) = \sum_{k=1}^{m} P(N+1,\, k)$. Như vậy đối với trường hợp m chẵn, mệnh đề cũng đúng với $n = N+1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, mệnh đề đúng với mọi n nguyên dương. Hoàn tất chứng minh.

1.2 Nguyên lý quy nạp

1.3 Lý thuyết tập hợp

Bài toán 2. Cho tập hợp $A \subset \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời

(i) $Z \subset A$;

(ii) $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in A$;

(iii) $x + y \in A$, $xy \in A$ với mọi $x,\, y \in A$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \in A$.

Lời giải.

Vì $\sqrt{2}+\sqrt{3} \in A$, theo (iii) ta có $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 \in A \iff 5 + 2\sqrt{6} \in A \iff 2\sqrt{6} \in A$.

Suy ra $2\sqrt{6}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) \in A$ hay $4\sqrt{3} + 6\sqrt{2} \in A$. Kéo theo $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{2} = 5(\sqrt{3}+\sqrt{2}) - (4\sqrt{3}+6\sqrt{2}) \in A$.

1.4 Quy tắc đếm

Bài toán 3. Cho $n \in \mathbb{Z}^+$. Chứng minh rằng số cách khác nhau để đặt đúng đắn n dấu ngoặc mở và n dấu ngoặc đóng bằng số Catalan thứ n

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$

Lời giải.

Bài toán 4. Cho $m,\, n \in \mathbb{Z}^+$, $2m \leq n$. Đếm số các dãy $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n$ chứa m số 0 và $n-m$ số 1, thỏa mãn không có hai phần tử nào kề nhau đều là số 0.

Lời giải.

Xếp m số 0 thành hàng ngang, khi đó sẽ có $m+1$ khoảng trống (ở giữa có $m-1$ khoảng trống và 2 khoảng trống ở hai đầu). Đến đây chèn các số 1 vào $m+1$ khoảng trống đó, có tất cả $\dbinom{n-m}{m+1}$ cách, cũng là số các dãy $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n$ cần tìm.

Bài toán 5. Đặt $f(n)$ là số tập con của $[n]$. Chứng minh rằng $f(n) = 2^n$ với mọi n nguyên dương.

Lời giải.
Trường hợp $n = 1$, có hai tập con của $[1]$ là $\varnothing$, $\{1\}$ nên $f(1) = 2^1$.
Giả sử mệnh đề đúng tới $n = N$, tức ta đã có $f(N) = 2^N$. Xét các tập con của $[N+1]$, có hai loại

- các tập con của $[N]$ (không chứa phần tử $N+1$), có 2^N tập;
- các tập hợp là hợp của $\{N+1\}$ và từng tập con của $[N]$, cũng có 2^N tập.

Như vậy $f(N+1) = 2^N + 2^N = 2^{N+1}$ nên mệnh đề cũng đúng với $n = N+1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 6. Giả sử rằng $n \in \mathbb{Z}^+$, $(n \geq 2)$ người đưa n chiếc mũ của họ cho mỗi người kiểm tra mũ. Đặt $f(n)$ là số cách trả lại các chiếc mũ, sao cho mỗi người có đúng 1 mũ và không ai nhận lại mũ của họ lúc ban đầu.

(a) Chứng minh rằng $f(n) = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$ với mọi n nguyên dương.

(b) Chứng minh rằng $f(n)$ là số nguyên gần nhất với $\frac{n!}{\mathrm{e}}$.

Lời giải.

Bài toán 7. Cho số nguyên dương n. Đặt $f(n)$ là số các tập con của $[n]$ không chứa bất kỳ hai số nguyên dương liên tiếp nào.

(a) Tính $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$.

(b) Chứng minh rằng $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ với mọi n nguyên dương, $n \geq 3$.

(c) Chứng minh rằng $f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\tau^{n+2} - \overline{\tau}^{n+2}\right)$, với $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\overline{\tau} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

2 Nhị thức Newton

2.1 Nhị thức Newton

2.2 Đẳng thức tổ hợp

2.3 Hàm sinh

Bài toán 8. Xét $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi

$$a_0 = 1 \text{ và } \sum_{i=0}^{n} a_i a_{n-i} = 1, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

(a) Gọi $F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ là hàm sinh của dãy $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Chứng minh rằng $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

(b) Chứng minh rằng $a_n = \dfrac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n \cdot n!}$.

Lời giải.

(a) Ta có $F^2(x) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i a_{n-i}\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1-x^n}{1-x} = \dfrac{1}{1-x}$. Suy ra $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

(b) Ta có $F(x) = (1-x)^{-1/2}$, $F'(x) = \dfrac{1}{2}(1-x)^{-3/2}$, $F''(x) = \dfrac{1 \cdot 3}{2^2}(1-x)^{-5/2}$, từ đó quy nạp được

$$F^{(n)}(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n}(1-x)^{-(2n+1)/2}, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Áp dụng khai triển Maclaurin, ta có

$$F(x) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}x + \frac{F''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots.$$

So sánh hệ số của x^n, suy ra

$$a_n = \frac{F^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n \cdot n!}, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

3 Lý thuyết đồ thị

3.1 Dãy graphic

Bài toán 9 (P.10.1.16 - Sha22)**.** Xét đồ thị đơn G có 94 đỉnh. Giả sử rằng tất cả các đỉnh của G đều có bậc là số lẻ. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất ba đỉnh có cùng bậc.

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh cho trường hợp tổng quát với đồ thị G có $2n$ đỉnh. Do G là đồ thị đơn nên bậc của mỗi đỉnh sẽ thuộc tập $\{0, 1, 2, \ldots, 2n-1\}$.

Mặt khác, tất cả các đỉnh của G đều có bậc lẻ nên bậc của mỗi đỉnh sẽ thuộc tập $U = \{1, 3, 5, \ldots, 2n-1\}$. Giả sử chỉ có tối đa hai đỉnh có cùng bậc, thì khi đó mỗi phần tử trong U sẽ có đúng 2 đỉnh nhận làm bậc, suy ra dãy bậc của đồ thị G sẽ là

$$2n-1,\ 2n-1,\ 2n-3,\ 2n-3,\ \ldots,\ 3,\ 3,\ 1,\ 1.$$

Áp dụng thuật toán Havel-Hakimi, khi đó dãy

$$2n-2,\ 2n-4,\ 2n-4,\ \ldots,\ 2,\ 2,\ 0,\ 0$$

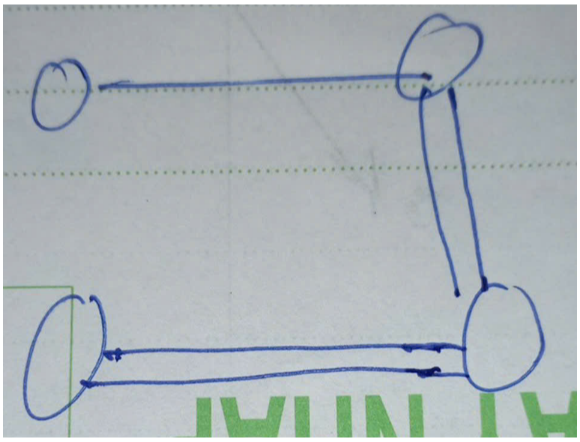
phải là một dãy graphic. Tuy nhiên, không tồn tại đồ thị đơn có $2n-1$ đỉnh thỏa mãn tồn tại một đỉnh có bậc $2n-2$ và một đỉnh có bậc 0. Như vậy, có ít nhất ba đỉnh trong G có cùng bậc.

Bài toán 10 (P.10.1.15 - Sha22)**.** Liệu có tồn tại đồ thị đơn mà các đỉnh có bậc là các số nguyên phân biệt? Câu hỏi tương tự cho đồ thị đa.

Lời giải.

Giả sử tồn tại đồ thị đơn có n đỉnh thỏa mãn các đỉnh có bậc là các số nguyên phân biệt, ký hiệu các đỉnh là $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$. Khi đó bậc của mỗi đỉnh sẽ thuộc tập $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Tập hợp này có n phần tử, mà mỗi đỉnh trong đồ thị phải có bậc là các số nguyên phân biệt nên $\deg(v_i) = i$ với mọi i. Khi đó, đỉnh v_{n-1} có bậc là $n-1$ nên sẽ nối với tất cả các đỉnh còn lại, đỉnh v_0 có bậc là 0 nên không nối với đỉnh nào, điều này mâu thuẫn. Như vậy không tồn tại đồ thị đơn thỏa mãn đề.

Đối với đồ thị đa, câu trả lời là khẳng định. Thật vậy, chẳng hạn xét đồ thị đa có 4 đỉnh như hình bên dưới, khi đó bậc của các đỉnh lần lượt là 1, 2, 3, 4.



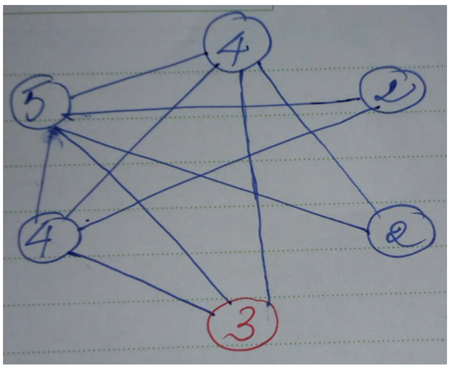
Bài toán 11 (P.10.1.14 - Sha22)**.** Xét đồ thị đơn 6 đỉnh có bậc của năm đỉnh lần lượt là 5, 4, 4, 2, 2. Hỏi bậc của đỉnh thứ sáu có thể nhận những giá trị nào?

Lời giải.

Theo định lý Euler, bậc của đỉnh còn lại phải là số lẻ, nên phải thuộc $\{1, 3, 5\}$.

Trường hợp 1. Bậc của đỉnh còn lại bằng 5. Khi đó, dãy bậc của đồ thị là 5, 5, 4, 4, 2, 2, là một dãy graphic. Theo thuật toán Havel-Hakimi, dãy 4, 3, 3, 1, 1 và 2, 2, 0, 0 cũng là các dãy graphic. Tuy nhiên, không tồn tại đồ thị đơn 4 đỉnh có dãy bậc là 2, 2, 0, 0; vì có hai đỉnh không nối với đỉnh nào, nên trong hai đỉnh còn lại chỉ có thể có bậc cao nhất bằng 1. Do đó bậc của đỉnh còn lại của đồ thị đã cho không thể bằng 5.

Trường hợp 2. Bậc của đỉnh còn lại bằng 3. Chẳng hạn, đồ thị như bên dưới thỏa mãn.



Trường hợp 3. Bậc của đỉnh còn lại bằng 1. Khi đó, dãy bậc của đồ thị là 5, 4, 4, 2, 2, 1, là một dãy graphic. Theo thuật toán Havel-Hakimi, dãy 3, 3, 1, 1, 0 và 2, 0, 0, 0 cũng là các dãy graphic. Tuy nhiên, hiển nhiên không tồn tại đồ thị đơn 4 đỉnh có dãy bậc 2, 0, 0, 0. Do đó bậc của đỉnh còn lại của đồ thị đã cho không thể bằng 1.

Như vậy bậc của đỉnh còn lại của đồ thị đã cho chỉ có thể là 3.

Bài toán 12 (P.10.1.13 - Sha22)**.** (a) Chứng minh rằng nếu dãy $d_1, d_2, \ldots, d_p$ là một dãy graphic khi và chỉ khi dãy $p - d_p - 1, \ldots, p - d_2 - 1, p - d_1 - 1$ cũng là một dãy graphic.

(b) Hỏi dãy 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8, 8, 8 có phải là một dãy graphic không?

Lời giải.

(a)

(b) Áp dụng tính chất ở ý (a), dãy 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8, 8, 8 là một dãy graphic khi và chỉ khi dãy 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 là một dãy graphic. Theo thuật toán Havel-Hakimi, điều đó tương đương với 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 cũng là một dãy graphic; điều này đúng vì tồn tại đồ thị có dãy bậc là dãy này, chẳng hạn xét đồ thị 10 đỉnh trong đó các đỉnh được chia thành 5 cặp, mỗi đỉnh trong một cặp nối với nhau (hay nói cách khác là 5 đoạn thẳng rời nhau).

Phần II

Giải tích

1 Dãy số

1.1 Giới hạn dãy số

Bài toán 1. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{an+b}{cn+d}$ theo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(c, d) \neq (0, 0)$.

Lời giải.
Không mất tính tổng quát, giả sử $c > 0$. Ta có

$$\left|\frac{an+b}{cn+d} - \frac{a}{c}\right| = \left|\frac{acn+be-acn-ad}{c(cn+d)}\right| = \left|\frac{bc-ad}{c(cn+d)}\right|.$$

Lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ, ta có $\left|\dfrac{an+b}{cn+d} - \dfrac{a}{c}\right| < \varepsilon \iff \left|\dfrac{bc-ad}{c(cn+d)}\right| < \varepsilon \iff |c(cn+d)| > \dfrac{|bc-ad|}{\varepsilon} \iff |cn+d| > \dfrac{|bc-ad|}{c\varepsilon} \Longleftarrow cn+d > \dfrac{|bc-ad|}{c\varepsilon} \Longleftarrow n > \dfrac{|bc-ad|}{\varepsilon} - \dfrac{d}{c}$.

Suy ra nếu chọn $N_\varepsilon = \left\lfloor \dfrac{|bc-ad|}{\varepsilon} - \dfrac{d}{c} \right\rfloor + 1$ thì $\left|\dfrac{an+b}{cn+d} - \dfrac{a}{c}\right| < \varepsilon$ với mọi $n \geq N_\varepsilon$. Theo định nghĩa suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{an+b}{cn+d} = \dfrac{a}{c}$.

Bài toán 2. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ với

(a) $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $Q \not\equiv 0$;

(b) $P, Q \in \mathbb{C}[x]$, $Q \not\equiv 0$.

Lời giải.