Finite Volume Method
Practical Assignment 1

Nguyễn An Thịnh
MSSV: 1411289

25th March 2017

Cho phương trình sau trên miền $\Omega = (0, 1)$:

$$-u"(x) = f(x), x \in \Omega \quad (*)$$

1) Với điều kiện biên Dirichlet:

$$u(0) = a, u(1) = b$$

a) Giải pt (*) với lưới đều, control point là trung điểm của control volume:

Vì control point là trung điểm của volume, đồng thời bài toán được giải trên lưới đều nên $x_{i+\frac{1}{2}}$ là trung điểm của $[x_{i+1}, x_i]$.
Ta có thể xấp xỉ:

$$u'(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{|D_{i+\frac{1}{2}}|} + 0(h^2)$$

Thiết lập hệ phương trình tuyến tính như bình thường, trừ tại vị trí 2 biên:

$$\alpha_1 u_0 + \beta_1 u_1 + \gamma_1 u_2 = f_1$$

$$\Leftrightarrow \beta_1 u_1 + \gamma_1 u_2 = f_1 - \alpha_1 a$$

Tương tự:

$$\alpha_N u_{N-1} \beta_N u_N = f_N - \gamma_1 b$$

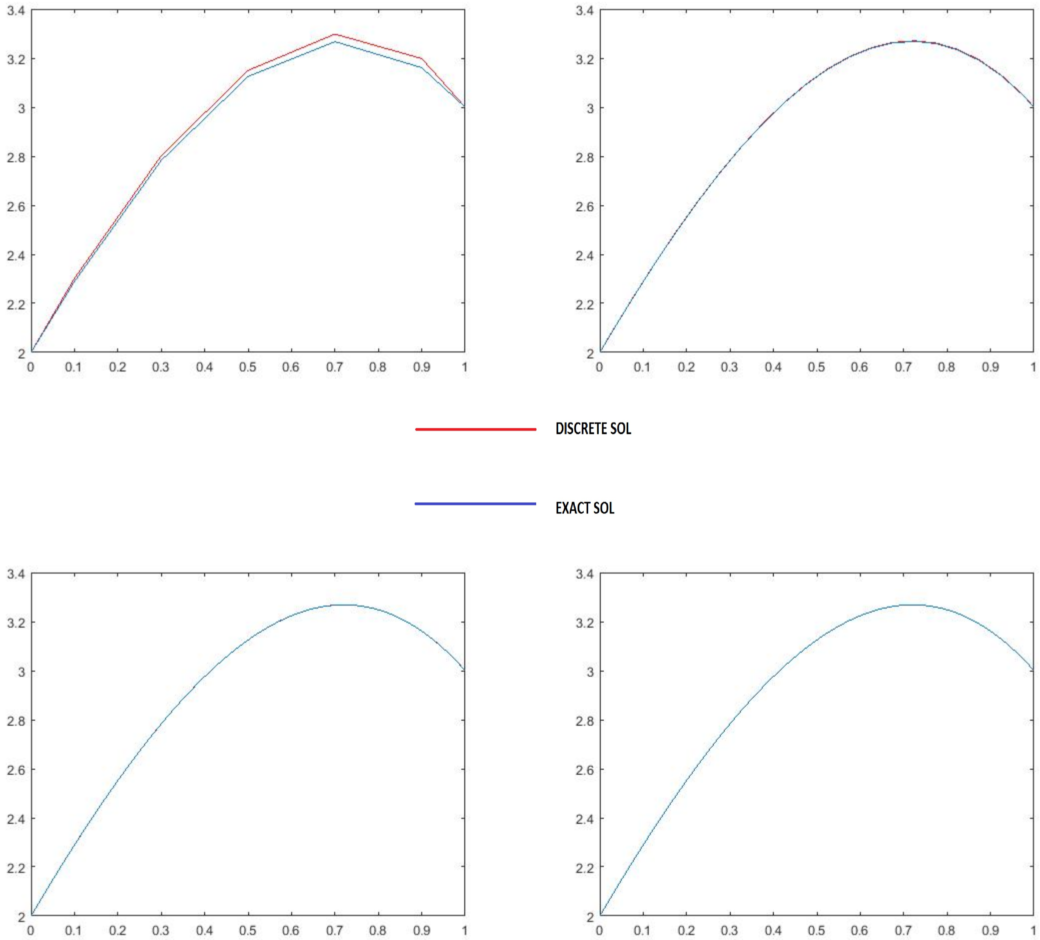
Vậy ta chỉ cần thay đổi phần tử thứ 1 và N của F.

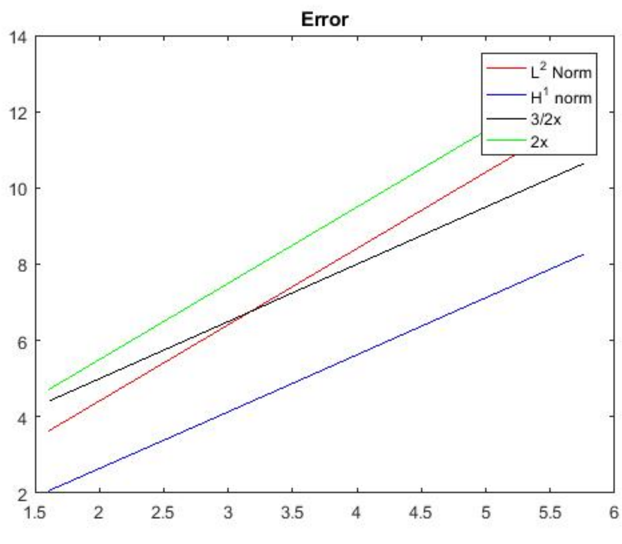
Ví dụ:
(Kết quả bắt đầu với N = 5, các kết quả tiếp theo có số điểm chia gấp 4 kết quả trước.)

1)

$$f(x) = 6x + 2$$

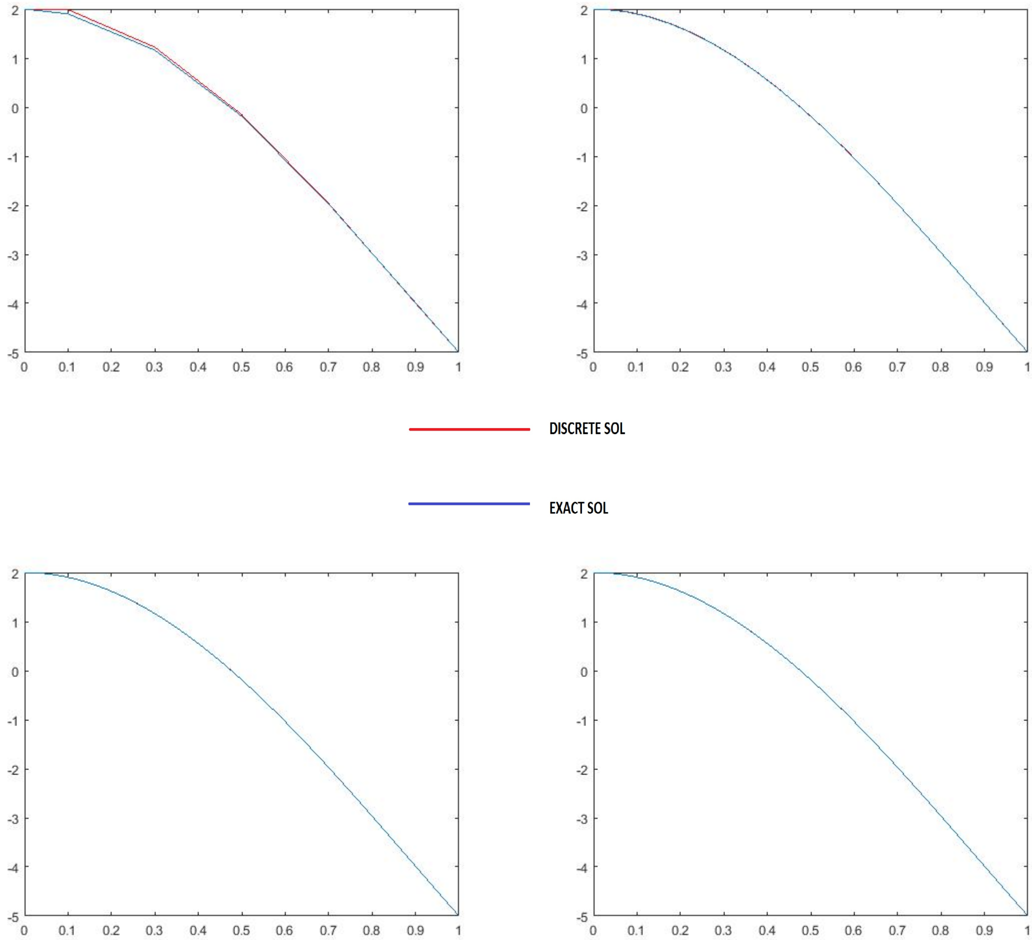
$$u(x) = (x + 2)(1 + x - x^2)$$

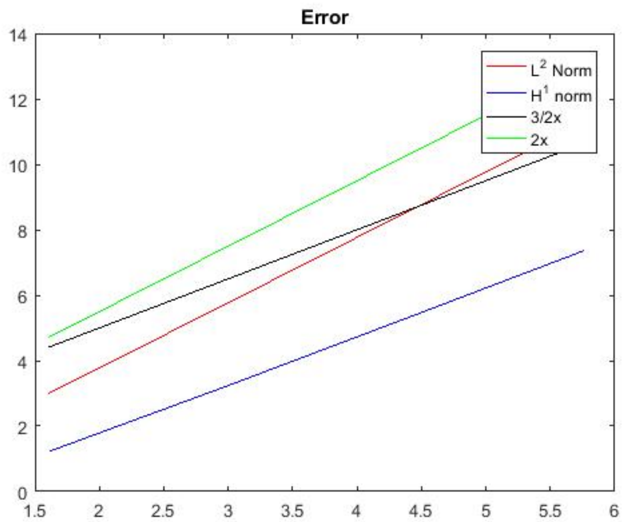




2)

$$f(x) = -(12x^2 + 12x - 20)$$
$$u(x) = x^4 + 2x^3 - 10x^2 + 2$$





b) Giải phương trình trong trường hợp control point xác định bởi:

$$x_i = \frac{2x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}}}{3}$$

Trong trường hợp này nếu sử dụng cách xấp xỉ: $u'(x)$ như trước thì độ chính xác của xấp xỉ sẽ bị giảm xuống $0(h)$.

Ta thay đổi:

$$u(x_{i+1}) - u(x_i) = (x_{i+1} - x_i)u'(x_{i+\frac{1}{2}}) + [(x_{i+1} - x_{i+\frac{1}{2}})^2 - (x_i - x_{i+\frac{1}{2}})^2]\frac{u"(x_{i+\frac{1}{2}})}{2!} + 0(h^3)$$

$$u(x_{i+1}) - u(x_i) = |D_{i+\frac{1}{2}}|u'(x_{i+\frac{1}{2}}) - (\frac{|T_{i+1}|^2}{9} - \frac{4|T_i|^2}{9})\frac{f(x_{i+\frac{1}{2}})}{2!} + 0(h^3)$$

Như vậy:

$$u'(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{|D_{i+\frac{1}{2}}|} + \frac{|T_{i+1}|^2 - 4|T_i|^2}{18|D_{i+\frac{1}{2}}|}f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 0(h^2)$$

Ta sẽ có:

$$\alpha_i u_{i-1} + \beta_i u_i + \gamma_i u_{i+1} = f_i + \frac{|T_{i+1}|^2 - 4|T_i|^2}{18|D_{i+\frac{1}{2}}||T_i|}f(x_{i+\frac{1}{2}}) - \frac{|T_i|^2 - 4|T_{i-1}|^2}{18|D_{i-\frac{1}{2}}||T_i|}f(x_{i-\frac{1}{2}})$$

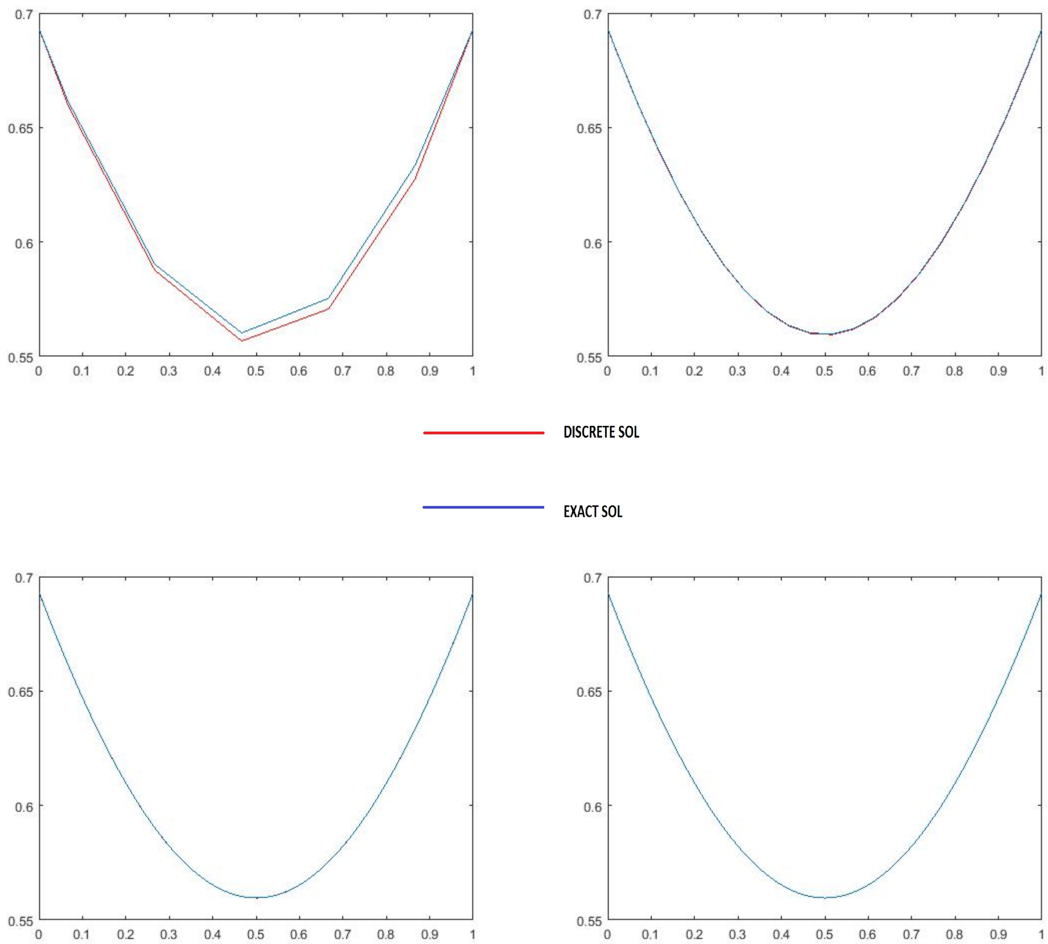
Ta sử dụng chương trình câu (a), rồi thay đổi các phần tử của F như trên.

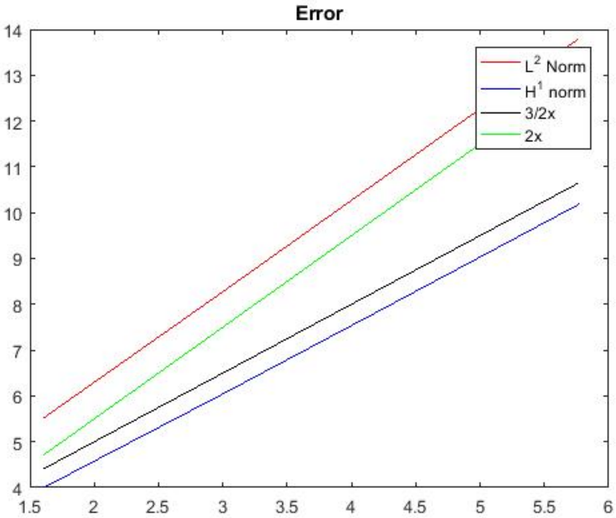
Ví dụ:
(Kết quả bắt đầu với N = 5, các kết quả tiếp theo có số điểm chia gấp 4 kết quả trước.)

1)

$$f(x) = \frac{(2x-1)^2}{(x^2-x+2)^2} - \frac{2}{x^2-x+2}$$

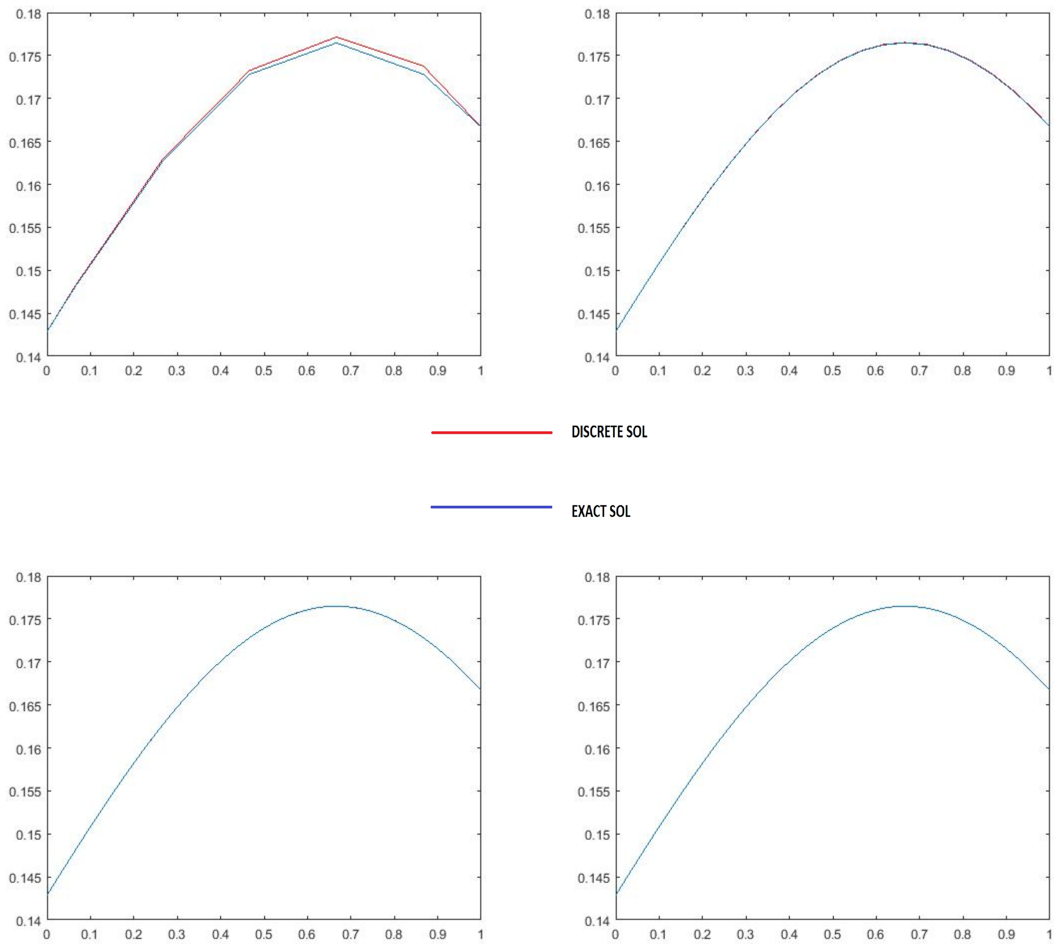
$$u(x) = log(x^2 - x + 2)$$

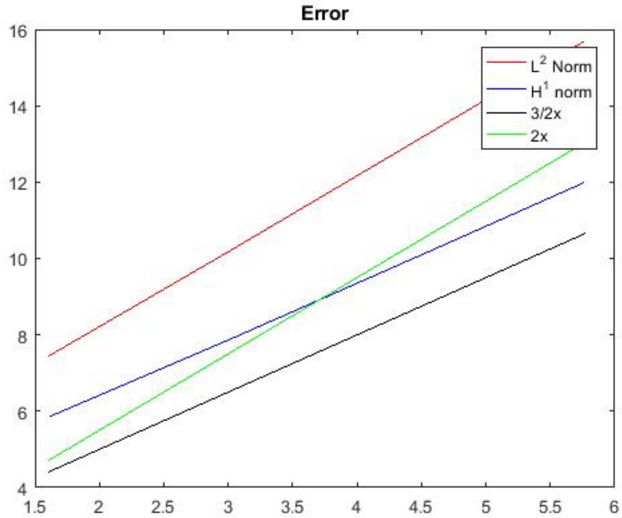




2)

$$f(x) = \frac{6}{(3x^2 - 4x + 7)^2} - \frac{4(6x-4)^2}{(3x^2 - 4x + 7)^3}$$
$$u(x) = \frac{1}{3x^2 - 4x + 7}$$





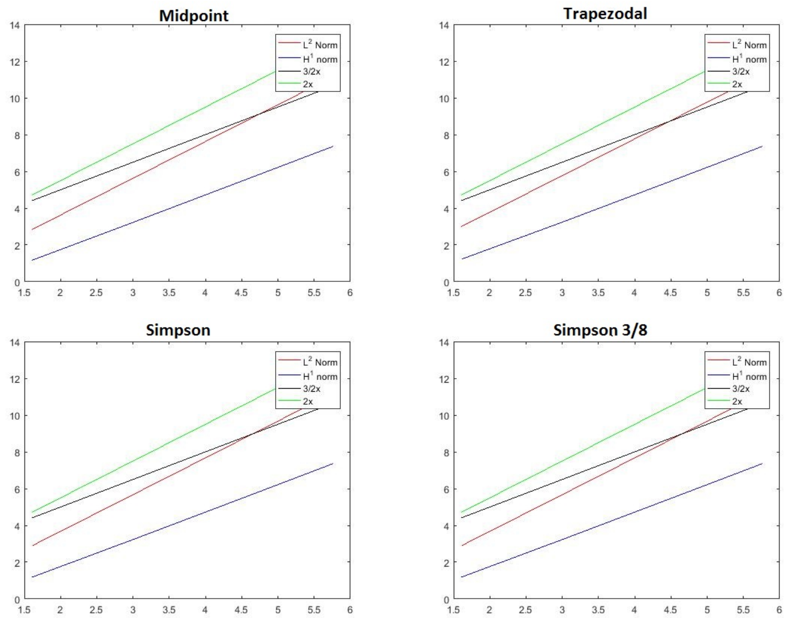
c) Có thể xấp xỉ giá trị trung bình của f trên T_i như thế nào, so sánh các cách đó:

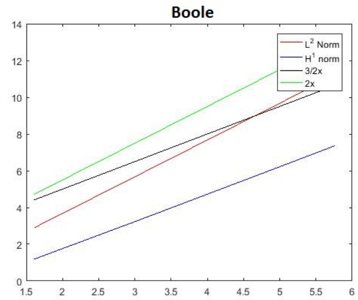
Trong chương trình đã viết, đã sử dụng các cách xấp xỉ tích phân sau:
-Midpoint rule
-Trapezoidal rule
-Simpson's rule
-Simpson's 3/8 rule
-Boole's rule
Các phương pháp trên có độ chuẩn xác tăng dần từ trên xuống dưới

Áp dụng từng cách cho bài toán sau:

$$f(x) = -(12x^2 + 12x - 20)$$

$$u(x) = x^4 + 2x^3 - 10x^2 + 2$$





Trong trường hợp này có thể thấy không có sai khác đáng kể giữa các cách xấp xỉ tích phân.

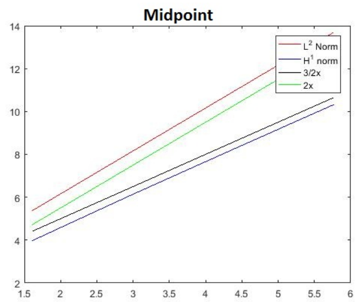
So sánh thông qua global error (Chuẩn L^2):

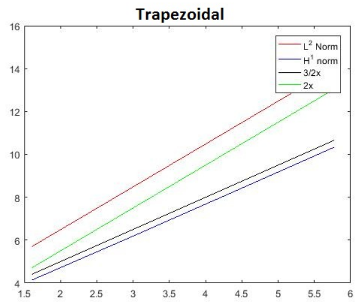
	Midpoint	Trapezoidal	Simpson	Simpson's 3/8	Boole
N = 5	0.13	0.1112	0.1234	0.1234	0.1234
N = 20	0.0163	0.0141	0.0155	0.0155	0.0155
N = 80	0.0020	0.0018	0.0019	0.0019	0.0019

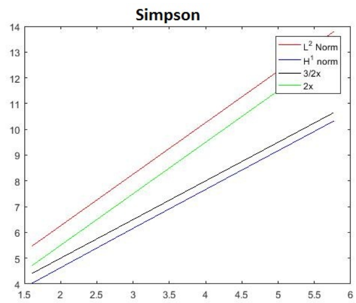
Áp dụng từng cách cho một bài toán khác:

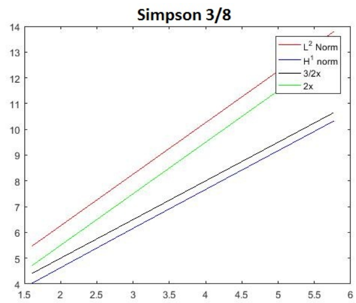
$$f(x) = \frac{(2x-1)^2}{(x^2-x+2)^2} - \frac{2}{x^2-x+2}$$

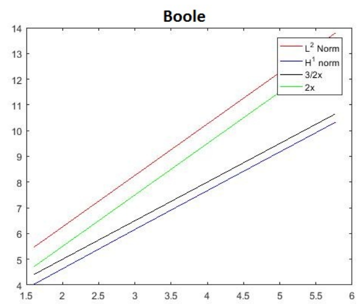
$$u(x) = log(x^2 - x + 2)$$











	Midpoint	Trapezoidal	Simpson	Simpson's 3/8	Boole
N = 5	0.0104	0.0074	0.0094	0.0094	0.0094
N = 20	0.0013	$9.3296.10^{-4}$	0.0012	0.0012	0.0012
N = 80	$1.6076.10^{-4}$	$1.1667.10^{-4}$	$1.4575.10^{-4}$	$1.4575.10^{-4}$	$1.4575.10^{-4}$

d) Giải phương trình (*) trên lưới không đều:
Ta chọn lưới như sau:

$$x_{\frac{1}{2}} = 0, \quad x_{i+\frac{1}{2}} = 1 - cos\frac{\pi i}{2N}$$

Trong trường hợp lưới không đều, tất cả các điểm mốc ban đầu không thể nằm giữa các control point, vậy nên cách xấp xỉ u' của 1(a) sẽ có độ chuẩn xác là $0(h)$.
Ta có thể xấp xỉ như 1(b) để đạt tới $0(h^2)$.

Nếu lấy control point như 1(a):

$$\alpha_i u_{i-1} + \beta_i u_i + \gamma_i u_{i+1} = f_i + \frac{|T_{i+1}|^2 - |T_i|^2}{8|D_{i+\frac{1}{2}}||T_i|} f(x_{i+\frac{1}{2}}) - \frac{|T_i|^2 - |T_{i-1}|^2}{8|D_{i-\frac{1}{2}}||T_i|} f(x_{i-\frac{1}{2}})$$

Nếu lấy control point như 1(b):

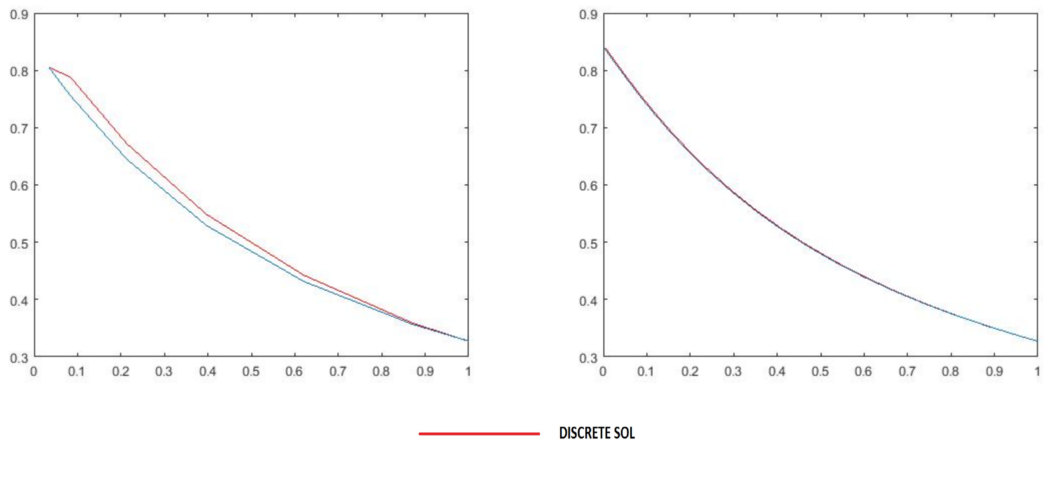
$$\alpha_i u_{i-1} + \beta_i u_i + \gamma_i u_{i+1} = f_i + \frac{|T_{i+1}|^2 - 4|T_i|^2}{18|D_{i+\frac{1}{2}}||T_i|} f(x_{i+\frac{1}{2}}) - \frac{|T_i|^2 - 4|T_{i-1}|^2}{18|D_{i-\frac{1}{2}}||T_i|} f(x_{i-\frac{1}{2}})$$

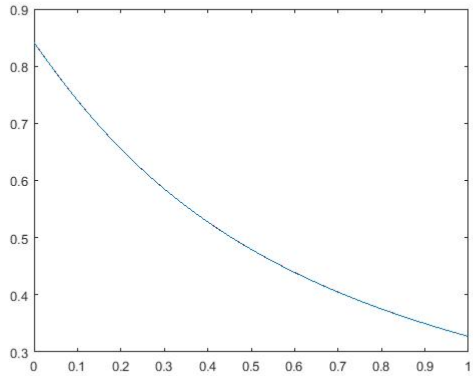
Ví dụ:
(Kết quả bắt đầu với N = 5, các kết quả tiếp theo có số điểm chia gấp 4 kết quả trước.)

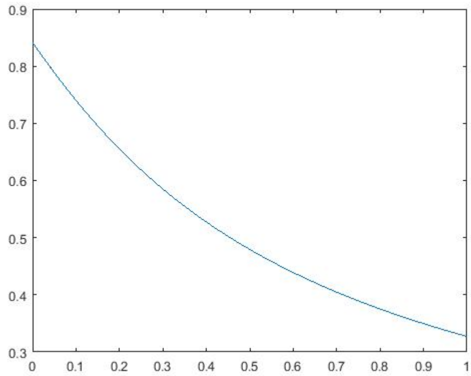
1)

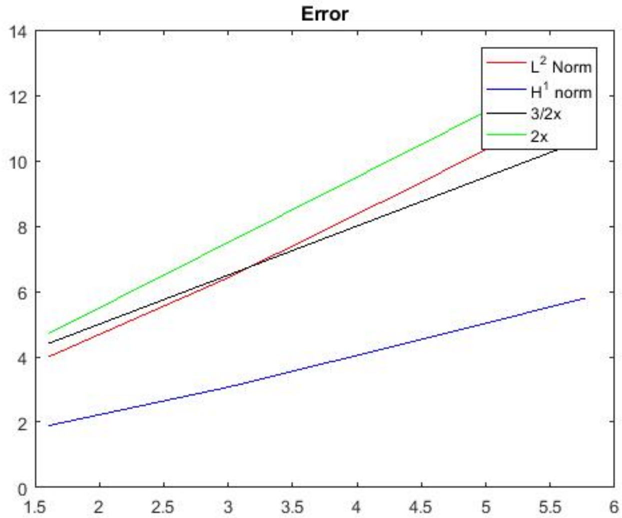
$$f(x) = \frac{4sin(\frac{1}{2x+1})}{(2x+1)^4} - \frac{8cos(\frac{1}{2x+1})}{(2x+1)^3}$$

$$u(x) = sin(\frac{1}{2x+1})$$



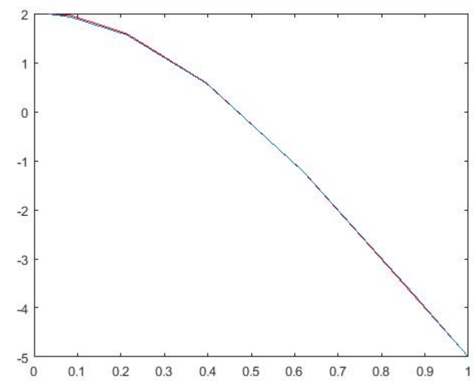


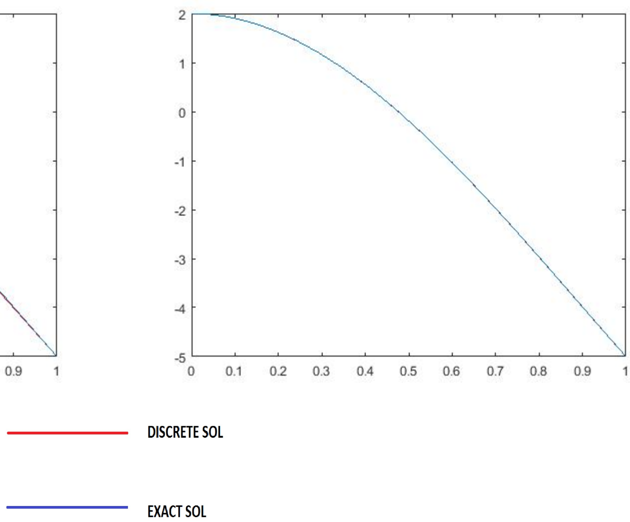


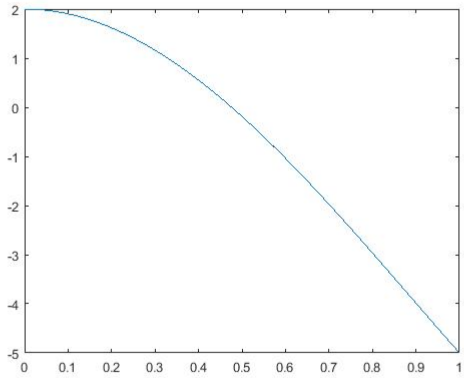


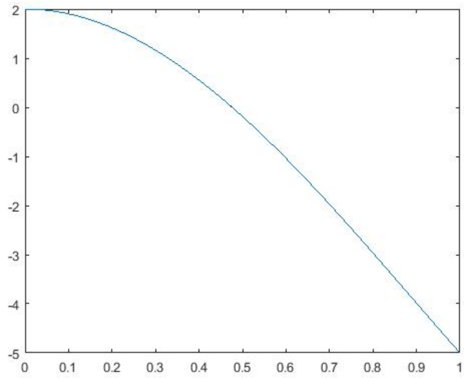
2)

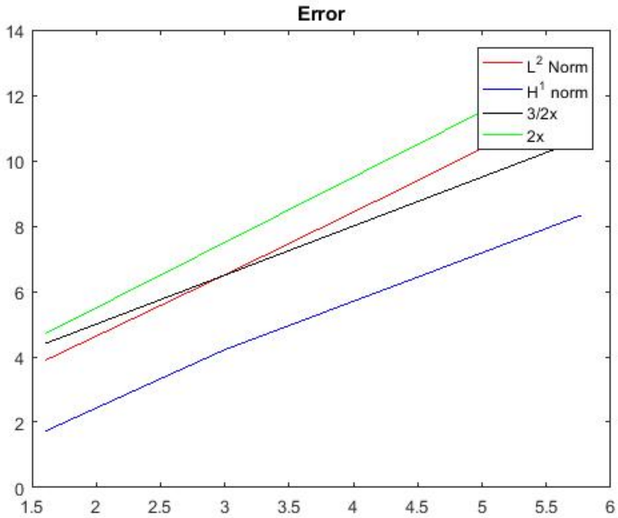
$$f(x) = -(12x^2 + 12x - 20)$$
$$u(x) = x^4 + 2x^3 - 10x^2 + 2$$











2) Giải phương trình (*) với điều kiện biên Neuman:

$$u'(0) = u'(1) = 0; \quad \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 u(x)dx = 0$$

Ta có:

$$u(x_1) = u(x_0) + (x_1 - x_0)u'(x_0) + 0(h^2)$$
$$\Rightarrow u_0 = u_1 + 0(h^2)$$

$$u(x_N) = u(x_{N+1}) + (x_N - x_{N+1})u'(x_{N+1}) + 0(h^2)$$
$$\Rightarrow u_{N+1} = u_N + 0(h^2)$$

Ta có ma trận A mới:

$$\begin{bmatrix} (\alpha+\beta)u_1 & \gamma u_2 & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & \\ .. & ... & ... & \alpha u_{N-1} & (\beta+\gamma)u_N \end{bmatrix}$$

Tuy nhiên, vì ma trận A suy biến nên ta cần có thêm điều kiện $\int_0^1 u(x)dx = 0$
Xấp xỉ $\int_0^1 u(x)dx$ với lưới control point đã thiết lập:

$$\int_0^1 u(x)dx \approx \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N+1}(x_{i+1} - x_i)(u_{i+1} - u_i)$$

$$= \frac{x_1 - x_0}{2}u_0 + \sum_{i=1}^{N} \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2}u_i + \frac{x_{N+1} - x_N}{2}u_{N+1}$$

$$\approx \frac{x_2 + x_1 - 2x_0}{2}u_0 + \sum_{i=2}^{N-1} \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2}u_i + \frac{2x_{N+1} - x_N - x_{N-1}}{2}u_N$$

Như vậy, ta thêm dòng thứ N+1 vào A:

$$\begin{bmatrix} \frac{x_2+x_1-2x_0}{2} & \frac{x_3-x_1}{2} & \dots & \frac{x_{N-1}-x_{N-2}}{2} & \frac{2x_{N+1}-x_N-x_{N-1}}{2} \end{bmatrix}$$

Và thêm phần tử thứ N+1 vào F: $\int_0^1 u(x)dx = 0$

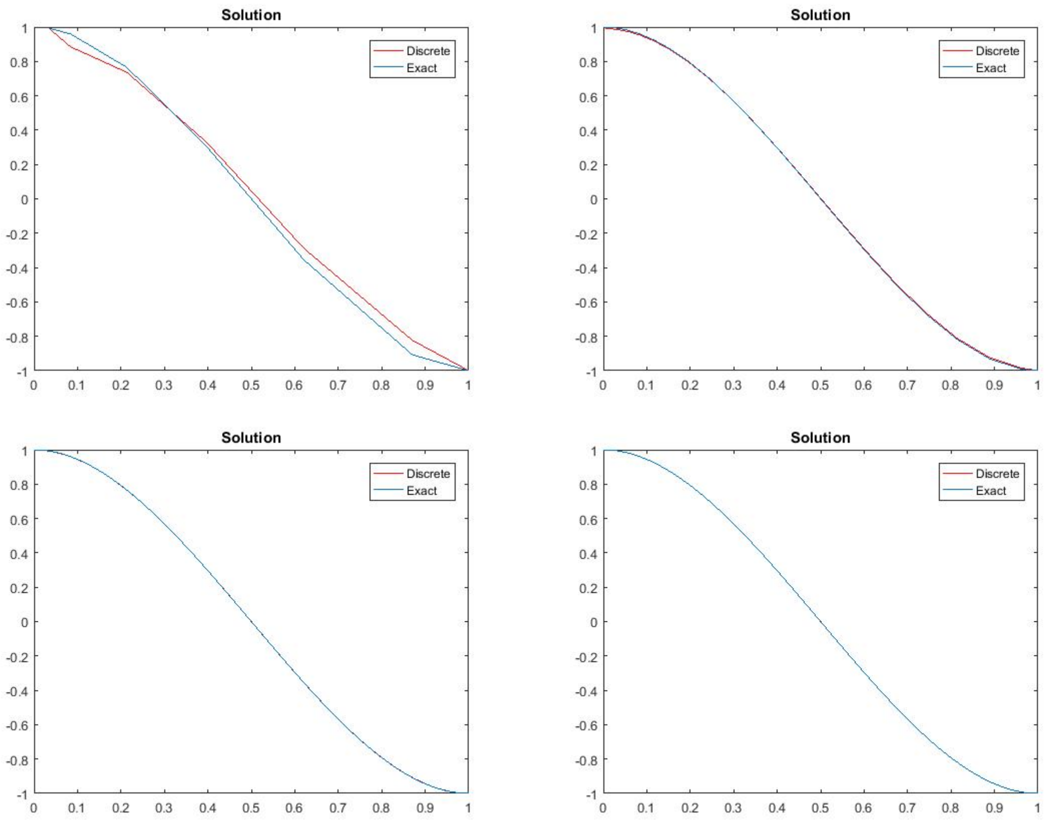
Ví dụ:

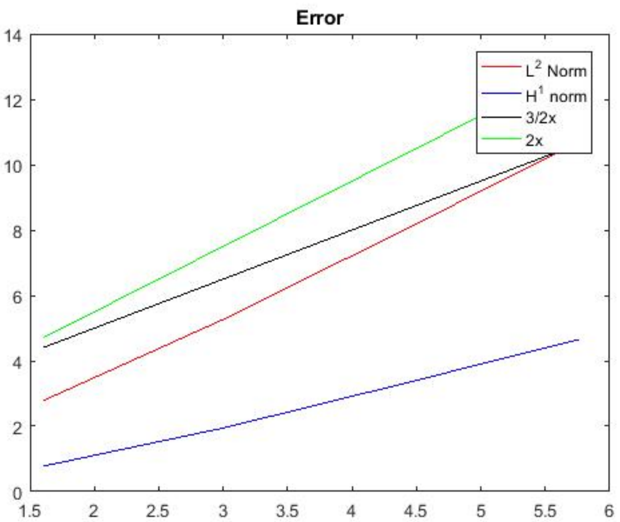
(Kết quả bắt đầu với N = 5, các kết quả tiếp theo có số điểm chia gấp 4 kết quả trước.)

1)

$$f(x) - 24x + 12$$

$$u(x) = -6x^2 + 4x^3 + 1$$




Error
L^2 Norm
H^1 norm
3/2x
2x
0
2
4
6
8
10
12
14
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6