

# Disjoint Set Union (DSU) – Hợp Tập Hợp Rời Rạc

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 22 tháng 8 năm 2025

## Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Advanced STEM & Beyond*:

URL: [https://nqbh.github.io/advanced\\_STEM/](https://nqbh.github.io/advanced_STEM/).

Latest version:

- *Disjoint Set Union (DSU) – Hợp Tập Hợp Rời Rạc*.

PDF: URL: [.pdf](#).

T<sub>E</sub>X: URL: [.tex](#).

- .

PDF: URL: [.pdf](#).

T<sub>E</sub>X: URL: [.tex](#).

## Mục lục

<b>1 Introduction to Disjoint Set Union – Nhập Môn Hợp Tập Hợp Rời Rạc</b>	<b>1</b>
1.1 Cấu trúc dữ liệu Disjoint Set Union	2
<b>2 Miscellaneous</b>	<b>2</b>

## 1 Introduction to Disjoint Set Union – Nhập Môn Hợp Tập Hợp Rời Rạc

### Resources – Tài nguyên.

1. [Algorithms for Competitive Programming/disjoint set union](#).

2. BENJAMIN QI, ANDREW WANG, NATHAN GONG, MICHAEL CAO. [USACO Guide/Disjoint Set Union](#).

**Abstract.** The Disjoint Set Union (DSU) data structure, which allows you to add edges to a graph & test whether 2 vertices of a graph are connected.

– Cấu trúc dữ liệu Disjoint Set Union (DSU), cho phép bạn thêm các cạnh vào đồ thị & kiểm tra xem 2 đỉnh của đồ thị có được kết nối hay không.

3. NGÔ QUANG NHẬT. [VNOI Wiki/Disjoint Set Union](#).

4. [Wikipedia/disjoint-set data structure](#).

Disjoint Set Union (abbr., DSU) là 1 cấu trúc dữ liệu hữu dụng, thường xuất hiện trong các kỳ thi Lập trình Thi Đấu, & có thể được dùng để quản lý 1 cách hiệu 1 tập hợp của các tập hợp.

**Bài toán 1.** Cho 1 đồ thị  $G = (V, E)$  có  $|V| = n \in \mathbb{N}^*$  đỉnh, ban đầu không có cạnh nào,  $E = \emptyset$ . Ta cần xử lý 2 loại truy vấn:

1. Thêm 1 cạnh giữa 2 đỉnh  $x, y \in V$  trong đồ thị, i.e.,  $E = E \cup \{\{x, y\}\}$  nếu  $G$  là đồ thị vô hướng &  $E = E \cup \{(x, y)\}$  nếu  $G$  là đồ thị có hướng.
2. In ra **yes** nếu như 2 đỉnh  $x, y$  nằm trong cùng 1 thành phần liên thông. In ra **no** nếu ngược lại.

\*A scientist- & creative artist wannabe, a mathematics & computer science lecturer of Department of Artificial Intelligence & Data Science (AIDS), School of Technology (SOT), UMT Trường Đại học Quản lý & Công nghệ TP.HCM, Hồ Chí Minh City, Việt Nam.

E-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com) & [hong.nguyenquanba@umt.edu.vn](mailto:hong.nguyenquanba@umt.edu.vn). Website: <https://nqbh.github.io/>. GitHub: <https://github.com/NQBH>.

## 1.1 Cấu trúc dữ liệu Disjoint Set Union

Cho tiện, ta đánh số  $n$  đỉnh của đồ thị  $G$  bởi  $1, 2, \dots, n$  (trường hợp  $n$  đỉnh được dán nhãn bởi  $v_1, v_2, \dots, v_n$  hoàn toàn tương tự vì ta có thể làm việc trên chỉ số  $i$  của  $v_i$ ), khi đó  $V = [n]$ . Giả sử  $G$  có  $c := \text{num\_connected\_component} \in \mathbb{N}^*$  (số thành phần liên thông)  $C_1, C_2, \dots, C_c$  với  $\{C_i\}_{i=1}^c$  là 1 phân hoạch của  $V = [n]$ , i.e.:

$$\bigcup_{i=1}^c C_i = [n], \quad C_i \cap C_j = \emptyset, \quad \forall i, j \in [c], \quad i \neq j.$$

Nếu ta coi mỗi đỉnh của đồ thị  $G = (V, E)$  là 1 phần tử & mỗi thành phần liên thông (connected component) trong đồ thị là 1 tập hợp, truy vấn 1 sẽ trở thành gộp 2 tập hợp lần lượt chứa phần tử  $x, y$  thành 1 tập hợp mới & truy vấn 2 trở thành việc hỏi 2 phần tử  $x, y$  có nằm trong cùng 1 tập hợp không.

Để tiện tính toán & lý luận về mặt toán học cho riêng cấu trúc dữ liệu DSU, sau đây là 1 định nghĩa cá nhân của tác giả [NQBH], hoàn toàn không chính thống trong Lý thuyết Đồ thị:

**Định nghĩa 1** (Chỉ số thành phần liên thông). *Gọi  $C(i) \subset [n]$  là thành phần liên thông của  $G = (V, E)$  chứa đỉnh  $i \in [n]$  & gọi chỉ số của thành phần liên thông chứa đỉnh  $i$  là  $\text{cid}(i)$ , i.e.,  $i \in C_{\text{cid}(i)} \equiv C(i)$ .*

## 2 Miscellaneous