

# Vietnamese Mathematical Olympiad for High School- & College Students

## Olympic Toán Học Học Sinh & Sinh Viên Toàn Quốc (VMC)

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 17 tháng 2 năm 2025

### Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Advanced STEM & Beyond*:

URL: [https://nqbh.github.io/advanced\\_STEM/](https://nqbh.github.io/advanced_STEM/).

Latest version:

- *Vietnamese Mathematical Olympiad for High School- & College Students (VMC) – Olympic Toán Học Học Sinh & Sinh Viên Toàn Quốc.*

PDF: URL: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/blob/main/VMC/NQBH\\_VMC.pdf](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/VMC/NQBH_VMC.pdf).

TEX: URL: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/blob/main/VMC/NQBH\\_VMC.tex](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/VMC/NQBH_VMC.tex).

- Codes:

- C/C++ code:

- Python code: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/tree/main/VMC/Python](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/Python).

## Mục lục

<b>1 Preliminaries – Kiến thức chuẩn bị</b>	<b>2</b>
<b>2 Algebra – Đại Số</b>	<b>2</b>
2.1 Matrix – Ma trận	2
2.1.1 Determinant of a matrix – Định thức của ma trận	2
2.1.2 Rank of a matrix – Hạng của ma trận	4
2.1.3 System of linear equations & Cramer rule – Hệ phương trình tuyến tính & quy tắc Cramer	4
2.1.4 System of linear equations & Gauss elimination method – Hệ phương trình tuyến tính & phương pháp khử Gauss	4
2.1.5 Cấu trúc nghiệm của hệ phương trình tuyến tính	5
2.2 Vector space – Không gian vector	7
<b>3 Analysis – Giải Tích</b>	<b>9</b>
3.1 Sequence – Dãy số	9
3.1.1 Tính tổng riêng phần	10
3.1.2 Xác định công thức tổng quát của dãy số	10
3.1.3 Convergent- & divergence sequences – Dãy số hội tụ & dãy số phân kỳ	11
3.1.4 Series – Chuỗi	11
3.1.5 Problems	11
3.2 Integral – Tích phân	11
3.2.1 Recurrent integrals – Các tích phân dạng truy hồi	12
3.2.2 Mean-value theorems – Các định lý giá trị trung bình	12
3.2.3 Integral inequalities – Bất đẳng thức tích phân	12
<b>4 Miscellaneous</b>	<b>12</b>
4.1 Contributors	12
<b>Tài liệu</b>	<b>13</b>

---

\*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com). Bến Tre City, Việt Nam.

# 1 Preliminaries – Kiến thức chuẩn bị

## Resources – Tài nguyên.

1. [Khã09]. PHAN HUY KHẢI. *Các Chuyên Đề Số Học Bồi Dưỡng Học Sinh Giỏi Toán Trung Học. Chuyên Đề 2: Số Học & Dây Số*.
2. VMS – HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM. *Kỷ Yếu Kỳ Thi Olympic Toán Học Sinh Viên–Học Sinh Lần 28*.
3. VMS – HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM. *Kỷ Yếu Kỳ Thi Olympic Toán Học Sinh Viên–Học Sinh Lần 29*. Huế, 2–8.4.2023.

# 2 Algebra – Đại Số

## Resources – Tài nguyên.

1. BÙI XUÂN HẢI, TRẦN NGỌC HỘI, TRỊNH THANH ĐÈO, LÊ VĂN LUYỆN. *Đại Số Tuyến Tính & Ứng Dụng. Tập 1*. HCMUS.
2. [Hoa06]. LÊ TUẤN HOA. *Đại Số Tuyến Tính Qua Các Ví Dụ & Bài Tập*.
3. [Hm22]. NGUYỄN HỮU VIỆT HƯNG. *Đại Số Tuyến Tính*. HNUS.
4. [TB97; TB22]. LLOYD N. TREFETHEN, DAVID BAU III. *Numerical Linear Algebra*.
5. [Tru02]. NGÔ VIỆT TRUNG. *Giáo Trình Đại Số Tuyến Tính*.
6. [Tsu+23]. MAKOTO TSUKADA, YUJI KOBAYASHI, HIROSHI KANEKO, SIN-EI TAKAHASI, KIYOSHI SHIRAYANAGI, MASATO NOGUCHI. *Linear Algebra with Python: Theory & Applications*.

1 (Symbolic computation software/languages/libraries for Linear Algebra). Tương tự như phần mềm MATLAB <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>, tìm các phần mềm, ngôn ngữ, hoặc thư viện của các ngôn ngữ quen thuộc như Python (thư viện SymPy <https://www.sympy.org/en/index.html>), C/C++ để thực hành symbolic computation.

## 2.1 Matrix – Ma trận

### 2.1.1 Determinant of a matrix – Định thức của ma trận

**Định nghĩa 1.** Định thức của 1 ma trận  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  với các yếu tố trong trường  $\mathbb{F}$ , được ký hiệu bởi  $\det A$  hoặc  $|A|$ , là phần tử  $\det A := \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$  của trường  $\mathbb{F}$ . Nếu  $A$  là 1 ma trận vuông cỡ  $n$  thì  $\det A$  được gọi là 1 định thức cỡ  $n$ . Tổng ở vế phải của đẳng thức này có tất cả  $|S_n| = n!$  số hạng.

**Ví dụ 1.** (a) Định thức cỡ 1:  $\det(a) = a, \forall a \in \mathbb{F}$ . (b) Định thức cỡ 2:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

(c) Định thức cỡ 3:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}.$$

Trên thực tế, không trực tiếp dùng định nghĩa để tính các định thức cỡ  $n > 3$  vì việc này quá phức tạp.

Gọi  $\mathbf{a}_j \in \mathbb{F}^n$  là vector cột thứ  $j$  của ma trận  $A$ , & coi  $\det A$  là 1 hàm của  $n$  vector  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ . Viết  $\det A = \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ .

**Định lý 1** (3 tính chất cơ bản của định thức). (i) (Multilinear – Đa tuyến tính) Định thức của ma trận là 1 hàm tuyến tính với mỗi cột (resp., hàng) của nó, khi cố định các cột (resp., hàng) khác, i.e.:

$$\det(\mathbf{a}_1, \dots, a\mathbf{a}_j + b\mathbf{b}_j, \dots, \mathbf{a}_n) = a \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) + b \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{b}_j, \dots, \mathbf{a}_n), \forall a, b \in \mathbb{F}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{F}^n, j = 1, \dots, n.$$

(ii) (Thay phiên) Nếu ma trận vuông  $A$  có 2 cột (resp., hàng) bằng nhau thì  $\det A = 0$ . (iii) (Chuẩn hóa) Định thức của ma trận đơn vị bằng 1:  $\det I_n = 1$ . (iv) Định thức là hàm duy nhất trên các ma trận vuông có 3 tính chất (i)–(iii).

**Hệ quả 1** ([Hm22], Hệ quả 2.3, p. 137). (i) (Tính phản đối xứng của định thức) Nếu đổi chỗ 2 cột (resp., hàng) của 1 ma trận thì định thức của nó đổi dấu:

$$\det(\dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots) = -\det(\dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots).$$

(ii) Nếu các vector cột (resp., vector hàng) của 1 ma trận phụ thuộc tuyến tính thì định thức của ma trận bằng 0. Nói riêng, nếu ma trận có 1 cột (resp., hàng) bằng 0 thì định thức của nó bằng 0. (iii) Nếu thêm vào 1 cột (resp., hàng) của ma trận 1 tổ hợp tuyến tính của các cột (resp., hàng) khác thì định thức của nó không thay đổi.

Các tính chất của định thức đối với các hàng cũng tương tự các tính chất của định thức đối với các cột. 1 phương pháp tính định thức có hiệu quả là ứng dụng các tính chất đó để biến đổi ma trận thành 1 ma trận tam giác có cùng định thức.

**Định nghĩa 2** (Ma trận tam giác). *Ma trận  $A$  được gọi là 1 ma trận tam giác trên nếu nó có dạng*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

trong đó  $a_{ij} = 0$  với  $i > j$ . Tương tự,  $A$  được gọi là 1 ma trận tam giác dưới nếu  $a_{ij} = 0$  với  $i < j$ . Ma trận tam giác trên & ma trận tam giác dưới được gọi chung là ma trận tam giác.

**Định lý 2** (Định thức của ma trận tam giác). *Nếu  $A$  là 1 ma trận tam giác cỡ  $n$  thì  $\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$ .*

**Định lý 3** ([Hum22], Định lý 5.1, p. 147). *Giả sử  $A, B \in M(n \times n, \mathbb{F})$ . Khi đó: (i)  $\det(AB) = \det A \det B$ . (ii)  $A$  khả nghịch  $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ . Hơn nữa,  $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = \frac{1}{\det A}$ , hay  $\det A \det(A^{-1}) = 1$ . (iii) Định thức của ma trận chuyển vị:  $\det(A^T) = \det A$ ,  $\forall A \in M(n \times n, \mathbb{F})$ .*

Theo định lý này, tất cả các tính chất của định thức đối với các cột của nó vẫn đúng đối với các hàng của nó. E.g., định thức là 1 hàm đa tuyến tính, thay phiên, & chuẩn hóa đối với các hàng của nó, ...

**2** (Tính  $\det A$  bằng cách hạ cấp). *Tính định thức cỡ  $n$  thông qua các định thức nhỏ hơn.*

Cho  $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{F})$  &  $k \in \mathbb{N}$  thỏa  $1 \leq k < n$ . Xét 2 bộ chỉ số  $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ ,  $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$ . Các phần tử nằm trên giao của  $k$  hàng  $i_1, \dots, i_k$  &  $k$  cột  $j_1, \dots, j_k$  của ma trận  $A$  lập nên 1 ma trận cỡ  $k$ , được gọi là 1 *ma trận con cỡ  $k$*  của  $A$ , & định thức của ma trận con đó, được ký hiệu là  $D_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k}$ , được gọi là 1 *định thức con cỡ  $k$*  của  $A$ .

Nếu xóa tất cả các hàng  $i_1, \dots, i_k$  & các cột  $j_1, \dots, j_k$  thì phần còn lại của ma trận  $A$  lập nên 1 ma trận vuông cỡ  $n - k$ , mà định thức của nó được ký hiệu là  $\overline{D}_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k}$  & được gọi là *định thức bù* của  $D_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k}$ . Gọi  $(-1)^{s(I, J)} \overline{D}_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k}$  là *phần bù đại số* của  $D_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k}$  (trong định thức của  $A$ ), với  $s(I, J) := \sum_{n=1}^k i_n + j_n = (i_1 + \cdots + i_k) + (j_1 + \cdots + j_k)$ .

**Định lý 4** (Khai triển Laplace, [Hum22], Định lý 5.3, pp. 148–149). *Giả sử đã chọn ra  $k$  cột (resp.,  $k$  hàng) trong 1 định thức cỡ  $n$  ( $1 \leq k < n$ ). Khi đó, định thức đã cho bằng tổng của tất cả các tích của các định thức con cỡ  $k$  lấy ra từ  $k$  cột (resp.,  $k$  hàng) đã chọn với phần bù đại số của chúng. Nói rõ hơn: (i) Công thức khai triển định thức theo  $k$  cột  $j_1 < \cdots < j_k$ :*

$$\det A = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} (-1)^{s(I, J)} D_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k} \overline{D}_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k}.$$

(ii) Công thức khai triển định thức theo  $k$  hàng  $i_1 < \cdots < i_k$ :

$$\det A = \sum_{j_1 < \cdots < j_k} (-1)^{s(I, J)} D_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k} \overline{D}_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k}.$$

**3** (Định thức Vandermonde). *Tính định thức Vandermonde*

$$D_n := \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Hint. Làm cho hầu hết các phần tử của hàng cuối của  $D_n$  trở thành 0 bằng cách lấy cột thứ  $n - 1$  nhân với  $-x_n$  rồi cộng vào cột  $n$ , rồi lấy cột thứ  $n - 2$  nhân với  $-x_n$  rồi cộng vào cột  $n - 1$ , ..., cuối cùng lấy cột thứ nhất nhân với  $-x_n$  rồi cộng vào cột 2, i.e.,  $\mathbf{c}_i = \mathbf{c}_i + (-x_n)\mathbf{c}_{i-1} = \mathbf{c}_i - x_n\mathbf{c}_{i-1}$  với  $i = n, n - 1, \dots, 2$  (chạy lùi). Khai triển Laplace theo hàng thứ  $n$ , đưa các thừa số chung của mỗi hàng ra ngoài dấu định thức, được công thức truy toán/hồi:  $D_n = (x_n - x_1)(x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1})D_{n-1} = \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i)D_{n-1}$ . Quy nạp với  $D_1 = 1$  được:  $D_n = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$ .

1 ứng dụng quan trọng của khai triển Laplace là công thức tính ma trận nghịch đảo:

**Định lý 5** (Công thức tính ma trận nghịch đảo, [Hum22], Định lý 5.4, p. 152). *(i) Nếu ma trận vuông  $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{F})$  có định thức khác 0 thì  $A$  khả nghịch &*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix},$$

với  $\tilde{a}_{ij}$  là phần bù đại số của  $a_{ij}$  trong định thức của  $A$ . (ii) Ma trận phụ hợp (adjugate matrix) của  $A$  được định nghĩa bởi:

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix},$$

thì  $A \text{adj}(A) = \text{adj}(A)A = \det A I_n$ , (i) viết lại thành  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A)$ .

For more properties of adjugate matrix, see, e.g., [Wikipedia/adjugate matrix](#).



(iii) Cộng vào 1 phương trình 1 tổ hợp tuyến tính của các phương trình khác trong hệ.

((i)–(iii) được gọi là các phép biến đổi sơ cấp), trên 1 hệ phương trình tuyến tính, thì ta nhận được 1 hệ phương trình tuyến tính tương đương với hệ ban đầu.

Xét 1 hệ phương trình tuyến tính tổng quát (1). Gọi  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  là ma trận các hệ số &

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

là ma trận các hệ số mở rộng của hệ phương trình (1). Giả sử có 1 hệ số nào đó  $a_{ij} \neq 0$ . W.l.o.g. (nếu cần, đổi chỗ các phương trình & đánh số lại các ẩn) có thể coi  $a_{11} \neq 0$ . Khi đó, nhân phương trình thứ nhất với  $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$  rồi cộng vào phương trình thứ  $i$  ( $i = 2, \dots, m$ ), nhận được hệ phương trình tương đương. Lặp lại lập luận trên đối với hệ còn gồm  $n - 1$  phương trình cuối với các ẩn  $x_2, \dots, x_n$ . Sau 1 số bước hữu hạn, nhận được 1 hệ tương đương với ma trận mở rộng có dạng  $(\bar{A}|\bar{b})$  với  $\bar{A}$  là 1 ma trận dạng bậc thang.

Tương ứng với các phép biến đổi sơ cấp trên hệ phương trình tuyến tính là các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận:

1. Đổi chỗ 2 hàng (hoặc 2 cột) của ma trận.
2. Nhân 1 hàng (hoặc 1 cột) của ma trận với 1 vô hướng khác 0.
3. Cộng vào 1 hàng (hoặc 1 cột) 1 tổ hợp tuyến tính của các hàng (resp., các cột) khác.

Vì các phép biến đổi sơ cấp không làm thay đổi hạng của ma trận (why?) nên dẫn tới 1 cách tính hạng của ma trận giàu tính thực hành: Mỗi ma trận  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  sau 1 số hữu hạn phép biến đổi sơ cấp đều có thể đưa về 1 ma trận dạng tam giác trên, số dòng có chứa phần tử  $\neq 0$  bằng rank  $A$ .

**Remark 1** (Ứng dụng của phương pháp khử Gauss để tìm ma trận nghịch đảo). Để tìm nghịch đảo (nếu có) của ma trận  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , lập ma trận  $n \times 2n$ :  $(A, I_n)$ . Dùng 2 loại phép biến đổi hàng:

(r1) Nhân 1 hàng với 1 vô hướng khác 0,

(r2) Cộng vào 1 hàng 1 tổ hợp tuyến tính của các hàng khác,

để đưa ma trận  $(A, I_n)$  về dạng  $(I_n, B)$ . Khi đó,  $B = A^{-1}$ . Ma trận  $A$  không có nghịch đảo  $\Leftrightarrow$  ma trận  $(A, I_n)$  không thể đưa về ma trận dạng  $(I_n, B)$  bằng 2 loại phép biến đổi hàng (r1) & (r2).

### 2.1.5 Cấu trúc nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

See, e.g., [Hum22, Chap. 3, §9: Cấu trúc nghiệm của hệ phương trình tuyến tính, pp. 163–165].

Xét các hệ phương trình tuyến tính thuần nhất & không thuần nhất liên kết với nhau  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  &  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  (2), với  $A = (a_{ij})_{m \times n} \in M(m \times n, \mathbb{F})$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^m$  (cả 2 hệ phương trình đều gồm  $m$  phương trình &  $n$  ẩn).

**Định lý 9** ([Hum22], Định lý 9.1, p. 163). Tập hợp  $L$  tất cả các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  là 1 không gian vector con của  $\mathbb{F}^n$ , có số chiều thỏa mãn hệ thức  $\dim L = n - \text{rank } A$ .

$L := \text{Ker } \tilde{A}$  với  $\tilde{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ ,  $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ , i.e.,  $L$  là hạt nhân/hạch của ánh xạ tuyến tính  $\tilde{A}$ .

**Định lý 10** ([Hum22], Định lý 9.2, p. 164). Giả sử  $L$  là không gian vector con gồm các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , &  $\mathbf{x}^0$  là 1 nghiệm của hệ  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Khi đó tập hợp các nghiệm của hệ  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  là  $\mathbf{x}^0 + L = \{\mathbf{x}^0 + \mathbf{a} | \mathbf{a} \in L\}$ .

**Định nghĩa 6** (Nghiệm riêng & nghiệm tổng quát của hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất). Với các giả thiết của định lý trên,  $\mathbf{x}^0$  được gọi là 1 nghiệm riêng của hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Còn  $\mathbf{x}^0 + \mathbf{a}$  với  $\mathbf{a} \in L$ , được gọi là nghiệm tổng quát của hệ phương trình đó.

**Định lý 11** ([Hum22], Định lý 9.4: Tiêu chuẩn Kronecker–Capelli, p. 164). Hệ phương trình tuyến tính  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  có nghiệm  $\Leftrightarrow \text{rank } A = \text{rank } \bar{A}$  với  $\bar{A} = (A|\mathbf{b})$  là ma trận các hệ số mở rộng của hệ.

4 (VMC2023B1). (a) Cho  $x \in \mathbb{R}$ . Tính  $\det A$  theo  $x$  với

$$A = \begin{pmatrix} x & 2022 & 2023 \\ 2022 & 2023 & x \\ 2023 & x & 2022 \end{pmatrix}.$$

(b) Tìm  $x \in \mathbb{R}$  để  $\text{rank } A < 3$ . Tính  $\text{rank } A$  với  $x$  vừa tìm được.

Hint. Tổng mỗi dòng & mỗi cột của ma trận  $A$  đều bằng  $x + 2022 + 2023$ .

*Giải.* (a) Đặt  $a := 2022$ . Cộng hàng 2 & hàng 3 vào hàng 1 được:

$$\begin{vmatrix} x & a & a+1 \\ a & a+1 & x \\ a+1 & x & a \end{vmatrix} = (x+2a+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & x \\ a+1 & x & a \end{vmatrix} = (x+2a+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & x-a \\ a+1 & x-a-1 & -1 \end{vmatrix} = (x+2a+1) \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & x-a-1 & \\ & & & -1 \end{vmatrix} \\ = (x+2a+1)[-1 - (x-a)(x-a-1)] = -(x+2a+1)(x^2 - (2a+1)x + a^2 + a + 1) = -(x+4045)(x^2 - 4045x + 4090507).$$

(b)  $\text{rank } A < 3 \Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow (x+4045)(x^2 - 4045x + 4090507) \Leftrightarrow x = -4045$  vì  $\Delta = (2a+1)^2 - 4(a^2 + a + 1) = -3 < 0$  nên vô nghiệm thực. Khi  $x = -4045$ ,  $\text{rank } A$  bằng hạng của ma trận

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2022 & 2023 & -4045 \\ 2023 & -4045 & 2022 \end{pmatrix}$$

Vậy  $\text{rank } A = 2$  khi  $x = -4045$ . □

**Nhận xét 1.** (i) Việc đặt  $a := 2022$  giúp thấy được cấu trúc chung của ma trận, không bị ảnh hưởng bởi các tính toán số cụ thể, đặc biệt giúp đơn giản hóa việc tính biệt thức  $\Delta$  để chứng minh nhân tử phương trình bậc 2 trong  $\det A$  vô nghiệm thực. (ii) Có thể tính  $\det A$  bằng thư viện SymPy của Python bằng cách chạy:

```
from sympy.matrices import Matrix, eye, zeros, ones, diag, GramSchmidt
from sympy import factor

# VMC2023B1
from sympy.abc import x, a
A = Matrix([[x, a, a + 1], [a, a + 1, x], [a + 1, x, a]])
detA = A.det()
print(detA)
print(factor(detA))
```

để thu được:

$$\begin{aligned} & -2a^3 + 3a^2x - 3a^2 + 3ax - 3a - x^3 - 1 \\ & - (2a + x + 1)(a^2 - 2ax + a + x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

i.e.,  $\det A = -(x+2a+1)(x^2 - (2a+1)x + a^2 + a + 1)$  như đã tính.

5 (VMC2023B2). Giả sử  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  là ánh xạ tuyến tính cho bởi:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + \lambda x_2 - x_3 + 2x_4, 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 + 5x_4, x_1 + 10x_2 - 6x_3 + x_4),$$

với  $\lambda \in \mathbb{R}$ : tham số. (a) Với  $\lambda = 3$ , tìm: (a1) 1 cơ sở  $\mathcal{B}$  số chiều của không gian hạt nhân  $\text{Ker}(f)$ . (a2) 1 cơ sở  $\mathcal{C}$  số chiều của không gian ảnh  $\text{Im}(f)$ .

6 (VMC2024A1B1). Cho  $a \in \mathbb{R}$ ,  $A$  là 1 ma trận phụ thuộc vào  $a$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & a+2 & 0 \\ a+3 & 1 & 0 & a+2 \\ a+2 & 0 & 1 & a+1 \\ 0 & a+2 & a+3 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

(a) Tìm  $\text{rank } A$  khi  $a = -1$ . (b) Tìm tất cả  $a \in \mathbb{R}$  để  $\det A > 0$ . (c) Biện luận số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính  $AX = 0$  theo  $a$  với  $X = [x, y, z, t]^T$ .

Chứng minh. (a) Khi  $a = -1$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Biến đổi sơ cấp trên dòng, được  $\text{rank } A = 3$ . (b) Dùng công thức tính định thức ma trận để thu được  $\det A = -4a^2 - 16a - 12 = -4(a+1)(a+3)$ , nên  $\det A > 0 \Leftrightarrow -4(a+1)(a+3) > 0 \Leftrightarrow a \in (-3, -1)$ . (c) Nếu  $a = -1$ ,  $\text{rank } A = 3 \Rightarrow \dim L = 4 - \text{rank } A = 4 - 3 = 1$ . Nếu  $a = -3$ , tính được  $\text{rank } A = 3$ , nên  $\dim L = 4 - \text{rank } A = 4 - 3 = 1$ . Nếu  $a \notin \{-1, -3\}$  thì  $\det A = -4(a+1)(a+3) \neq 0 \Rightarrow \text{rank } A = 4 \Rightarrow \dim L = 4 - \text{rank } A = 4 - 4 = 0$ . □

**Nhận xét 2.** Run

```
# VMC2024A1B1
Aa = np.matrix([[1,0,1,0], [2,1,0,1], [1,0,1,0], [0,1,2,1]])
print(np.linalg.matrix_rank(Aa))
A = Matrix([[1,a + 1,a + 2,0],[a + 3,1,0,a + 2],[a + 2,0,1,a + 1],[0,a + 2,a + 3,1]])
detA = A.det()
print(detA)
print(factor(detA))
```

to obtain

```
3
-4*a**2 - 16*a - 12
-4*(a + 1)*(a + 3)
```

7 (VMC2023B4). Với mỗi ma trận vuông  $A$  có phần tử là các số phức, định nghĩa:

$$e^A := \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \frac{A^n}{n!}.$$

Quy ước  $0! = 1, A^0 = I$ , ma trận giới hạn ở vế phải có phần tử là giới hạn của phần tử tương ứng của các ma trận tổng  $S_k = \sum_{n=0}^k \frac{A^n}{n!}$ . Ma trận giới hạn này luôn tồn tại. (a) Với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

tìm 1 ma trận khả nghịch  $C$  để  $C^{-1}AC$  là ma trận đường chéo. (b) Tìm các phần tử của ma trận  $e^A$  với  $A$  là ma trận cho ở (a).

8 (VMC2023A4). Với mỗi ma trận vuông  $A$  có phần tử là các số phức, định nghĩa

$$\sin A = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}. \quad (5)$$

(Ở đây ma trận giới hạn có phần tử là giới hạn của phần tử tương ứng của các ma trận tổng  $S_k = \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}$ . Ma trận giới hạn này luôn tồn tại.) (a) Tìm các phần tử của ma trận  $\sin A$  với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

(b) Cho  $x, y \in \mathbb{R}$  bất kỳ, tìm các phần tử của ma trận  $\sin A$  với

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \quad (7)$$

theo  $x, y$ . (c) Tồn tại hay không 1 ma trận vuông  $A$  cấp 2 với phần tử là các số thực sao cho

$$\sin A = \begin{pmatrix} 1 & 2023 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}? \quad (8)$$

9 (VMC2023A5). Ký hiệu  $P_n$  là tập hợp tất cả các ma trận khả nghịch  $A$  cấp  $n$  sao cho các phần tử của  $A$  &  $A^{-1}$  đều bằng 0 hoặc 1. (a) Với  $n = 3$ , tìm tất cả các ma trận thuộc  $P_3$ . (b) Tính số phần tử của  $P_n$  với  $n \in \mathbb{N}^*$  tùy ý.

Chứng minh. (a) Đặt  $A = (a_{ij})_{3 \times 3}, A^{-1} = (b_{ij})_{3 \times 3}$ , kết hợp với  $A, A^{-1}$  đều khả nghịch, có mỗi hàng & mỗi cột đều có ít nhất 1 số 1. Có  $1 = a_{k1}b_{1k} + a_{k2}b_{2k} + a_{k3}b_{3k}$  với  $k = 1, 2, 3$ , nên tồn tại duy nhất  $m \in \{1, 2, 3\}$  để  $a_{km} = b_{mk} = 1$ .  $\square$

## 2.2 Vector space – Không gian vector

Giả sử  $V, W$ : 2 không gian vector trên trường  $\mathbb{F}$  (see, e.g., [Hum22, Chap. 2, §2: Ánh xạ tuyến tính, pp. 100–110]).

**Định nghĩa 7** (Ánh xạ tuyến tính). Ánh xạ  $f : V \rightarrow W$  được gọi là 1 ánh xạ tuyến tính (hoặc rõ hơn là 1 ánh xạ  $\mathbb{F}$ -tuyến tính), nếu

$$f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in V, \quad (9)$$

$$f(a\alpha) = af(\alpha), \quad \forall a \in \mathbb{F}. \quad (10)$$

Ánh xạ tuyến tính cũng được gọi là đồng cấu tuyến tính, hay đồng cấu cho đơn giản.



2 điều kiện trong định nghĩa ánh xạ tuyến tính  $\Leftrightarrow$  điều kiện:

$$f(\alpha + \beta) = af(\alpha) + bf(\beta), \forall \alpha, \beta \in V, \forall a, b \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

**Định lý 12** (Tính chất cơ bản của ánh xạ tuyến tính). *Giả sử  $f : V \rightarrow W$  là 1 ánh xạ tuyến tính. Khi đó: (i)  $f(0) = 0$ . (ii)  $f(-\alpha) = -f(\alpha)$ ,  $\forall \alpha \in V$ . (iii)*

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i f(\alpha_i), \forall a_i \in \mathbb{F}, \forall \alpha_i \in V, \forall i = 1, \dots, n. \quad (12)$$

**Ví dụ 2** (Ánh xạ tuyến tính cơ bản).

(i) Ánh xạ không  $0 : V \rightarrow W$ ,  $0(\alpha) = 0$ ,  $\forall \alpha \in V$ . Thế còn ánh xạ hằng  $C : V \rightarrow W$ ,  $C(\alpha) = C$ ,  $\forall \alpha \in V$  với  $C \in \mathbb{F}$  cho trước?

(ii) Ánh xạ đồng nhất (identity mapping)  $\text{id}_V : V \rightarrow V$ ,  $\text{id}_V(\alpha) = \alpha$ ,  $\forall \alpha \in V$ .

(iii) Đạo hàm hình thức

$$\frac{d}{dX} : \mathbb{F}[X] \rightarrow \mathbb{F}[X], \quad \frac{d}{dX} \sum_{i=0}^n a_i X^i = \sum_{i=1}^n i a_i X^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) a_{i+1} X^i. \quad (13)$$

(iv) Tích phân hình thức

$$\int dX : \mathbb{F}[X] \rightarrow \mathbb{F}[X], \quad \int \sum_{i=0}^n a_i X^i dX = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+1} X^{i+1}. \quad (14)$$

(v) Giả sử  $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{F})$ ,

$$\tilde{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (15)$$

(vi) Các phép chiếu

$$\text{pr}_i : V_1 \times V_2 \rightarrow V_i, \quad \text{pr}_i(v_1, v_2) = v_i, \quad \forall i = 1, 2, \quad (16)$$

hay tổng quát hơn với  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ :

$$\text{pr}_i : \bigtimes_{i=1}^n V_i = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n, \quad \text{pr}_i(v_1, \dots, v_n) = v_i, \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (17)$$

See also, e.g., [Wikipedia/linear map](#).

Hạt nhân & ảnh của 1 đồng cấu là 2 không gian vector đặc biệt quan trọng với việc khảo sát đồng cấu đó, see, e.g., [Hum22, Chap. 2, §3: Hạt nhân & ảnh của đồng cấu, pp. 110–116].

**Định nghĩa 8** (Hạt nhân/hạch & ảnh của đồng cấu). *Giả sử  $f : V \rightarrow W$  là 1 đồng cấu.*

(a)  $\text{Ker}(f) := f^{-1}(0) = \{x \in V | f(x) = 0\} \subset V$  được gọi là hạt nhân (hay hạch) của  $f$ . Số chiều của  $\text{Ker}(f)$  được gọi là số khuyết của  $f$ .

(b)  $\text{Im}(f) := f(V) = \{f(x) | x \in V\} \subset W$  được gọi là ảnh của  $f$ . Số chiều của  $\text{Im}(f)$  được gọi là hạng của  $f$  & được ký hiệu là  $\text{rank}(f)$ .

**Định lý 13** (Điều kiện cần & đủ để 1 đồng cấu là 1 toàn cấu). *Đồng cấu  $f : V \rightarrow W$  là 1 toàn cấu  $\Leftrightarrow \text{rank}(f) = \dim W$ .*

**Định lý 14** (Điều kiện cần & đủ để 1 đồng cấu là 1 đơn cấu). *Đối với đồng cấu  $f : V \rightarrow W$  các điều kiện sau là tương đương:*

(i)  $f$  là 1 đơn cấu.

(ii)  $\text{Ker}(f) = \{0\}$ .

(iii) Ảnh bởi  $f$  của mỗi hệ vector độc lập tuyến tính là 1 hệ vector độc lập tuyến tính.

(iv) Ảnh bởi  $f$  của mỗi cơ sở của  $V$  là 1 hệ vector độc lập tuyến tính.

(v) Ảnh bởi  $f$  của 1 cơ sở nào đó của  $V$  là 1 hệ vector độc lập tuyến tính.

(vi)  $\text{rank}(f) = \dim V$ .

**10** (VMC2023A1). Ký hiệu  $\mathbb{R}[X]_{2023}$  là  $\mathbb{R}$ -không gian vector các đa thức 1 biến với bậc  $\leq 2023$ . Cho  $f$  là ánh xạ đặt tương ứng mỗi đa thức với đạo hàm cấp 2 của nó:  $f : \mathbb{R}[X]_{2023} \rightarrow \mathbb{R}[X]_{2023}$ ,  $p(X) \mapsto p''(X)$ . Đặt  $g = f \circ f \circ \dots \circ f$  (870 lần) là ánh xạ hợp của 870 lần ánh xạ  $f$ . (a) Chứng minh  $g$  là 1 ánh xạ tuyến tính từ  $\mathbb{R}[X]_{2023}$  vào chính nó. (b) Tìm số chiều & 1 cơ sở của không gian ảnh  $\text{Im } g$  & của không gian hạt nhân  $\text{Ker } g$ .



*Chứng minh.* (a) Có  $f(\alpha p(X) + \beta q(X)) = (\alpha p(X) + \beta q(X))'' = \alpha p''(X) + \beta q''(X) = \alpha f(p(X)) + \beta f(q(X))$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\forall p(X), q(X) \in \mathbb{R}[X]_{2023}$ , nên ánh xạ  $f$  là ánh xạ tuyến tính, nên hợp thành của  $n \in \mathbb{N}^*$  lần của ánh xạ  $f$ , i.e.,  $f \circ f \circ \dots \circ f$  ( $n$  lần) cũng là 1 ánh xạ tuyến tính từ  $\mathbb{R}[X]_{2023}$  vào chính nó. Nói riêng,  $g$  là 1 ánh xạ tuyến tính từ  $\mathbb{R}[X]_{2023}$  vào chính nó. (b) Ánh của  $g$  được sinh bởi các vector  $g(1), g(X), \dots, g(X^{2023})$  (vì  $(1, X, X^2, \dots, X^{2023})$  là 1 cơ sở của không gian vector  $\mathbb{R}[X]_{2023}$  các đa thức  $p(X)$  có  $\deg p \leq 2023$ ). Nhận thấy

$$g(X^k) = \begin{cases} 0 & \text{if } k < 1740, \\ k(k-1) \dots (k-1739)X^{k-1740} & \text{if } k \geq 1740, \end{cases}$$

nên 1 cơ sở của  $\text{Im } g$  là  $(1, X, X^2, \dots, X^{283})$ , nên  $\dim \text{Im } g = 284$ .

Với  $p(X) \in \mathbb{R}[X]_{2023}$  bất kỳ,  $p(X)$  sẽ có dạng  $p(X) = \sum_{i=1}^{2023} a_i X^i = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_{2023} X^{2023}$ , thì  $g(p)$  có dạng

$$g(p)(X) = \sum_{i=1}^{283} b_i X^i = b_0 + b_1 X + \dots + b_{283} X^{283}.$$

Đa thức  $p(X) \in \ker g \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{283} b_i X^i = 0 \Leftrightarrow a_i = 0, \forall i = 1740, \dots, 2023$ , nên 1 cơ sở của  $\ker g$  là  $(1, X, X^2, \dots, X^{1739})$  &  $\dim \ker g = 1740$ .  $\square$

**11 (Mở rộng VMC2023A1).** *Liệu thay các giả thiết trong VMC2023A1 thì bài toán còn đúng/giải được không? (a) Thay 2023, 870 bởi  $n, m \in \mathbb{N}^*$ . (b) Thay ánh xạ đạo hàm cấp 2 bởi ánh xạ đạo hàm cấp  $k \in \mathbb{N}^*$  hoặc tích phân  $\int dx$ , tích phân bội  $k \in \mathbb{N}^*$   $\int \dots \int dx$  ( $k$  dấu tích phân).*

**12.** Cho  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $V$  là 1 không gian vector,  $f: V \rightarrow V$  là 1 ánh xạ tuyến tính. Chứng minh  $g_n := f \circ f \circ \dots \circ f$  ( $n$  lần) cũng là 1 ánh xạ tuyến tính từ  $V$  vào chính nó.

**13 (VMC2023A2).** (a) 1 thành phố có 2 nhà máy: nhà máy điện ( $E$ ) & nhà máy nước ( $W$ ). Để nhà máy ( $E$ ) sản xuất điện thì nó cần nguyên liệu đầu vào là điện do chính nó sản xuất trước đó & nước của nhà máy ( $W$ ). Tương tự, để nhà máy ( $W$ ) sản xuất nước thì nó cần đến nước do chính nó sản xuất cũng như điện của nhà máy ( $E$ ). Cụ thể:

- Để sản xuất được lượng điện tương đương 1 đồng, nhà máy ( $E$ ) cần lượng điện tương đương 0.3 đồng mà nó sản xuất được trước đó & lượng nước tương đương 0.1 đồng từ nhà máy ( $W$ );
- Để sản xuất được lượng nước tương đương 1 đồng, nhà máy ( $W$ ) cần lượng điện tương đương 0.2 đồng từ nhà máy ( $E$ ) & lượng nước tương đương 0.4 đồng do chính nó sản xuất trước đó.

Chính quyền thành phố yêu cầu 2 nhà máy trên cung cấp đến được với người dân lượng điện tương đương 12 tỷ đồng & lượng nước tương đương 8 tỷ đồng. Hỏi thực tế mỗi nhà máy cần sản xuất tổng cộng lượng điện & lượng nước tương đương với bao nhiêu tỷ đồng để cung cấp đủ nhu cầu của người dân?

(b) Cho  $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$  là ma trận thỏa mãn các phần tử đều là số thực không âm & tổng các phần tử trên mỗi cột của  $A$  đều  $< 1$ . Với  $\mathbf{d} = (d_1, d_2)^\top$  là 1 vector tùy ý, chứng minh tồn tại duy nhất 1 vector cột  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top$  sao cho  $\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{d}$ .

**14 (VMC2023A3).** Cho  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$  thỏa  $x^4 - 2x^3 - 1 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta)$ . (a) Chứng minh  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  đôi một khác nhau. (b) Chứng minh  $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3, \delta^3$  đôi một khác nhau. (c) Tính  $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3$ . (d)\* Mở rộng bài toán cho các đa thức khác.

**Lemma 1** (Điều kiện cần & đủ của nghiệm bội của đa thức). Cho  $m, n \in \mathbb{R}, m \leq n, P(x) \in \mathbb{R}[x], \deg P = n. x = x_0 \in \mathbb{R}$  là 1 nghiệm bội  $m$  của  $P(x)$  khi & chỉ khi  $P(x_0) = P'(x_0) = P''(x_0) = \dots = P^{(m)}(x_0) = 0$ .

*Chứng minh.* Giả sử  $x = x_0 \in \mathbb{R}$  là 1 nghiệm bội  $m$  của  $P(x)$ , thì  $P(x)$  sẽ có dạng  $P(x) = (x - x_0)^m g(x)$  với  $g(x) \in \mathbb{R}[x], \deg g = \deg P - m = n - m \geq 0$ . Tính các đạo hàm  $P'(x), P''(x), \dots, P^{(m)}(x)$  (có thể sử dụng quy tắc Leibniz tổng quát để tính đạo hàm, see, e.g., [Wikipedia/general Leibniz rule](#)) để suy ra kết luận.  $\square$

*Hint.* (a) Đặt  $P(x) = x^4 - 2x^3 - 1$ , có  $P'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3)$  chỉ có 2 nghiệm  $x = 0$  (bội 2) &  $x = \frac{3}{2}$  (bội 1), mà  $P(0) = -1 \neq 0, P(\frac{3}{2}) = -\frac{43}{16} \neq 0$  nên  $0, \frac{3}{2}$  đều không phải là nghiệm của  $P(x)$ , suy ra các nghiệm  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  của  $P(x)$  là phân biệt. (b)  $\square$

## 3 Analysis – Giải Tích

### 3.1 Sequence – Dãy số

**Resources – Tài nguyên.**

1. [\[Khả09\]](#). PHAN HUY KHÁI. *Các Chuyên Đề Số Học Bồi Dưỡng Học Sinh Giỏi Toán Trung Học. Chuyên Đề 2: Số Học & Dãy Số*.
2. [\[Tao22a\]](#). TERENCE TAO. *Analysis I*. 4e.
3. [\[Tao22b\]](#). TERENCE TAO. *Analysis II*. 4e.

**15** (General recursive sequences – Dãy truy hồi tổng quát). Cho dãy số  $(u_n)_{n=1}^{\infty}$  được xác định bởi công thức truy hồi

$$u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_{n-m}), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*, \quad m < n. \quad (18)$$

Tìm các tính chất tổng quát của dãy theo 1 số dạng đặc biệt của hàm  $f$  để lập thành các mệnh đề  $\mathcal{E}$  định lý, rồi chứng minh chúng.

Vài phương pháp phổ biến để giải bài toán dãy số.

- Tìm cách xác định công thức số hạng tổng quát của dãy số: Thử vài trường hợp đầu để dự đoán công thức chính xác rồi chứng minh bằng quy nạp toán học.
- Sử dụng phương trình đặc trưng của lý thuyết dãy số.

### 3.1.1 Tính tổng riêng phần

Cho dãy  $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ , đặt  $S_n := \sum_{i=1}^n u_i$  là tổng riêng phần thứ  $n$  của chuỗi, &  $S_{m,n} := \sum_{i=m}^n u_i$ .

**Định lý 15.** Nếu dãy  $(u_n)$  xác định bởi  $u_n = f(n) - f(n-1)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , thì  $S_n = f(n) - f(0)$ ,  $S_{m,n} = f(n) - f(m-1)$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$ . Hơn nữa, nếu tồn tại  $L := \lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$  thì  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L - f(0)$  &  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{m,n} = L - f(m-1)$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}$ .

*Chứng minh.* Hiển nhiên vì  $S_n = \sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^n f(i) - f(i-1) = f(n) - f(0)$ .  $\square$

**16** ([Quố+24], 1.1, p. 14). Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $u_n = \arctan \frac{1}{2n^2}$ ,  $n \geq 1$ . Tính  $S_n, S_{m,n}$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{N}^*, m \leq n$ .

*Giải.*  $u_n = \arctan \frac{2}{4n^2} = \arctan \frac{(2n+1)-(2n-1)}{1+(2n+1)(2n-1)} = \arctan(2n+1) - \arctan(2n-1) \Rightarrow S_n = \sum_{i=1}^n \arctan(2i+1) - \arctan(2i-1) = \arctan(2n+1) - \arctan 1 = \arctan(2n+1) - \frac{\pi}{4}$ .  $\square$

**Remark 2** (Related trigonometrical formula). See, e.g., [Wikipedia/list of trigonometric identities](#):

$$\begin{aligned} \arcsin x \pm \arcsin y &= \arcsin(x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}), \\ \arccos x \pm \arccos y &= \arccos(xy \mp \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}), \\ \arctan x \pm \arctan y &= \arctan \frac{x \pm y}{1 \mp xy}, \\ \operatorname{arccot} x \pm \operatorname{arccot} y &= \operatorname{arccot} \frac{xy \mp 1}{y \pm x}. \end{aligned}$$

**17** ([Quố+24], 1.2, p. 14). Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $u_n = (n^2 + 1)n!$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Tính  $S_n, S_{m,n}$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{N}^*, m \leq n$ .

*Giải.*  $u_n = n(n+1)! - (n-1)n! \Rightarrow S_n = \sum_{i=1}^n i(i+1)! - (i-1)i! = n(n+1)!$ .  $\square$

**18** ([Quố+24], 1.3, p. 15). Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n^2 - 1}}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Tính  $S_n, S_{m,n}$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{N}^*, m \leq n$ .

Hint.  $u_n = \sqrt{\frac{n+1}{2}} - \sqrt{\frac{n-1}{2}}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

**19** ([Quố+24], 1.4, p. 15). Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $u_n = \sqrt{1 + \left(\frac{n+1}{n}\right)^2} + \sqrt{\frac{1}{n^2} - 2\left(\frac{1}{n} - 1\right)}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Tính  $S_n, S_{m,n}$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{N}^*, m \leq n$ .

### 3.1.2 Xác định công thức tổng quát của dãy số

**20** ([Quố+24], 1.6, p. 17). Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi

$$\begin{cases} u_0 = 3, u_1 = 4, \\ (n+1)(n+2)u_n = 4(n+1)(n+3)u_{n-1} - 4(n+2)(n+3)u_{n-2}, \quad \forall n \geq 2. \end{cases}$$

Tính  $u_n$ .

Hint. Đặt  $v_n := \frac{u_n}{n+3}$ .

**21** ([Quố+24], 1.7, p. 17). Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi

$$\begin{cases} u_2 = 2, \\ u_{n+1} = \frac{2023u_n + 2022}{2022u_n + 2023}, \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Tính  $u_n$ .

### 3.1.3 Convergent- & divergence sequences – Dãy số hội tụ & dãy số phân kỳ

**Definition 1** (Monotone sequence – dãy đơn điệu). *A sequence is said to be monotone if it is either increasing or decreasing.*

**Proposition 1** (Monotone bounded sequences converge, [Tao22a], Prop. 6.3.8, p. 119). *Let  $(a_n)_{n=m}^\infty$  be a sequence of real numbers which has some finite upper bound  $M \in \mathbb{R}$ , & which is also increasing, i.e.,  $a_{n+1} \geq a_n, \forall n \geq m$ . Then  $(a_n)_{n=m}^\infty$  is convergent, & in fact  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup(a_n)_{n=m}^\infty \leq M$ . Similarly, if a sequence  $(a_n)_{n=m}^\infty$  is bounded below by  $m \in \mathbb{R}$  & decreasing, i.e.,  $a_{n+1} \leq a_n, \forall n \geq m$ , then it is convergent, & the limit is equal to the infimum:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf(a_n)_{n=m}^\infty \geq m$ .*

Combine Prop. 1 with the following result

**Proposition 2** ([Tao22a], Corollary 6.1.17, p. 113). *Every convergent sequence of real numbers is bounded.*

to obtain

**Proposition 3.** *A monotone sequence converges iff it is bounded.*

**22.** *Tìm điều kiện của các hàm số để các dãy  $(a_n)_{n=0}^\infty$  xác định hội tụ, phân kỳ: (a)  $a_n = \int_0^n f(x) dx$ . (b)  $a_n = \int_0^{a(x)} f(x) dx$ . (c)  $a_n = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x) dx$ . (d)  $\int_{a(x;m)}^{b(x;m)} f(x; m) dx$  với tham số  $m \in \mathbb{R}$ .*

### 3.1.4 Series – Chuỗi

#### 3.1.5 Problems

**23** (VMC2023B). *Cho  $(u_n)_{n=1}^\infty$  là dãy số được xác định bởi  $u_n = \prod_{k=1}^n (1 + \frac{1}{4^k})$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . (a) Tìm tất cả  $n \in \mathbb{N}^*$  thỏa  $u_n > \frac{5}{4}$ . (b) Chứng minh  $u_n \leq 2023$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . (c) Chứng minh dãy số  $(u_n)_{n=1}^\infty$  hội tụ.*

*Chứng minh.* (a)  $u_{n+1} = (1 + \frac{1}{4^{n+1}}) u_n > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ , suy ra  $(u_n)$  đơn điệu tăng, mà  $u_1 = \frac{5}{4}$  nên  $u_n > \frac{5}{4} \Leftrightarrow n \geq 2$ . (b)  $\square$

**Remark 3.** *Gặp phải dãy số  $(u_n)_{n=1}^\infty$  có công thức mỗi số hạng là 1 tích thì thử tính  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  xem có đơn giản hóa được không. Gặp phải dãy số  $(u_n)_{n=1}^\infty$  có công thức mỗi số hạng là 1 tổng thì thử tính  $u_{n+1} - u_n$  xem có đơn giản hóa được không.*

**24** (Recursive sequence vs. ANN). *Tìm mối liên hệ giữa các dãy số cho bởi công thức truy hồi (recursive sequences) & mạng lưới nơ-ron nhân tạo (artificial neural networks, abbr., ANNs).*

## 3.2 Integral – Tích phân

Cho  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Ký hiệu:  $R([a, b])$ : tập hợp các hàm khả tích Riemann trên đoạn  $[a, b]$ .  $L^1([a, b])$ : tập hợp các hàm khả tích Lebesgue trên đoạn  $[a, b]$ .

**25.** (a) *Cho  $f \in C(\mathbb{R})$  là hàm chẵn. Tìm điều kiện cần & đủ của hàm  $g \in C(\mathbb{R})$  để  $\int_{-a}^a f(x)g(x) dx = \int_0^a f(x) dx, \forall a \in \mathbb{R}$ . (b) Câu hỏi tương tự với  $f$  là hàm lẻ. (c) Cho  $f \in C(\mathbb{R})$  là hàm tuần hoàn với chu kỳ  $T_f \in (0, \infty)$ . Tìm điều kiện cần & đủ của hàm  $g \in C(\mathbb{R})$  để  $\int_{-nT_f}^{nT_f} f(x)g(x) dx = \int_0^{T_f} f(x) dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . (d) Mở rộng cho các hàm  $f \in C(\mathbb{R})$  vừa chẵn vừa lẻ (trivial), vừa chẵn vừa tuần hoàn, & vừa lẻ vừa tuần hoàn & tìm các ví dụ cụ thể tương ứng.*

**Question 1** (Sum  $\Leftrightarrow$  Product). *Làm sao để chuyển 1 tổng thành 1 tích? Làm sao chuyển 1 tích thành 1 tổng?*

**26** ([Quố+24], 4.1., p. 195). (a) *Chứng minh*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)} = e^{\int_0^1 \ln f(x) dx}, \quad \forall f \in C([0, 1]; (0, \infty)).$$

(b) *Mở rộng cho  $f \in C([a, b]; (0, \infty))$  với  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ .*

**27** ([Quố+24], 4.2., p. 196). (a) *Chứng minh*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \sin \frac{i\pi}{n+1} > 0.$$

(b) *Mở rộng cho các hàm  $\cos x, \tan x, \cot x, \sinh x, \cosh x, \tanh x, \coth x, \dots$*

**28** ([Quố+24], 4.3., p. 196). *Tính  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+\frac{2}{3}} + \frac{1}{n+\frac{8}{3}} + \dots + \frac{1}{n+\frac{6n-4}{3}} \right)$ .*

*Hint.*  $L = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{dx}{1+x} = \ln \sqrt{3}$ .

**29** ([Quố+24], 4.4., p. 197). *Chứng minh*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x) dx \right) = \frac{f(1) - f(0)}{2}, \quad \forall f \in C^1([0, 1]).$$

**30** ([Quố+24], 4.5., p. 198). Chứng minh  $f(x) = \lfloor x \rfloor \in R([a, b])$  & tính  $\int_a^b \lfloor x \rfloor dx$ .

**31** ([Quố+24], 4.6., p. 198). Cho  $f \in R([0, 1])$  thỏa  $\int_0^1 f(x) dx > 0$ . Chứng minh tồn tại đoạn  $[a, b] \subset [0, 1]$  thỏa  $f(x) > 0, \forall x \in [a, b]$ .

**32** ([Quố+24], 4.7., p. 199). Cho  $f(x)$  xác định trên  $[a, b]$ . (a) Nếu  $|f(x)| \in R([a, b])$  thì liệu  $f(x) \in R([a, b])$ ? (b) Nếu  $f^{2022}(x) \in R([a, b])$  thì liệu  $f(x) \in R([a, b])$ ? (c) Mở rộng (b) cho  $n \in \mathbb{N}$ .

**33** ([Quố+24], 4.8., p. 199). Chứng minh  $f \in R([0, 1])$  & tính  $\int_0^1 f(x) dx$  với

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{p}{n}\right)^2 & \text{if } x \in \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right), p = \overline{0, n-1}, \\ 1 & \text{if } x = 1. \end{cases} \quad x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}.$$

Ans.  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}.$

### 3.2.1 Recurrent integrals – Các tích phân dạng truy hồi

**34.** Giả sử cần tính tích phân có dạng  $I_n(f) := \int_{a(n)}^{b(n)} f(x, n) dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Tìm vài trường hợp & các điều kiện cần & đủ tương ứng với các trường hợp đó của 3 hàm  $a, b, f$  để có thể thu được công thức truy hồi cho tích phân  $I_n$ :

$$I_n(f) = F(I_{n-1}(f), I_{n-2}(f), \dots, I_{n-m}(f)), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

với  $m \in \mathbb{N}^*, m \leq n$  thích hợp.

**35.** (a) Tính tích phân  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1+a^x)\sin x} dx$ . (b) Mở rộng cho các hàm  $\cos nx, \tan nx, \cot nx, \sinh nx, \cosh nx, \tanh nx, \coth nx, \dots$

### 3.2.2 Mean-value theorems – Các định lý giá trị trung bình

**36** ([Quố+24], 4.9., p. 200). Cho  $f \in C([a, b])$  thỏa  $\int_a^b f(x) dx = 0$ . Chứng minh tồn tại  $c \in (a, b)$  thỏa  $\int_a^c f(x) dx = f(c)$ .

**37** ([Quố+24], 4.10., p. 200). Cho  $f, g \in C([a, b])$ . Chứng minh tồn tại  $c \in (a, b)$  thỏa  $g(c) \int_a^b f(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$ .

**38** ([Quố+24], 4.11., p. 201). Cho  $f, g \in C([a, b])$ . Chứng minh tồn tại  $c \in (a, b)$  thỏa  $g(c) \int_a^c f(x) dx = f(c) \int_c^b g(x) dx$ .

**39** ([Quố+24], 4.12., p. 201). Cho  $f \in C^2([0, 1])$ . Chứng minh tồn tại  $c \in (0, 1)$  thỏa  $\int_0^1 f(x) dx = f(0) + \frac{1}{2}f'(0) + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}f''(c)$ .

**40** ([Quố+24], 4.13., p. 202). Cho  $f \in C([a, b])$ . Đặt  $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ . Chứng minh  $\int_a^b |f(x) - \bar{f}|^2 dx \leq \int_a^b |f(x) - t|^2 dx, \forall t \in \mathbb{R}$ , i.e.,  $\bar{f}$  là nghiệm của bài toán tối ưu:

$$\min_{t \in \mathbb{R}} \int_a^b |f(x) - t|^2 dx.$$

### 3.2.3 Integral inequalities – Bất đẳng thức tích phân

**41** ([Quố+24], 4.14., p. 202). Chứng minh:

$$\left( \int_a^b f(x) \sin x dx \right)^2 + \left( \int_a^b f(x) \cos x dx \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx.$$

**42** ([Quố+24], 4.15., p. 203). Chứng minh:

$$(b-a)^2 \leq \int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)}, \quad \forall f \in R([a, b], (0, \infty)).$$

Hơn nữa, nếu  $0 < m \leq f(x) \leq M$  thì  $\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \leq \frac{(m+M)^2}{4mM} (b-a)^2$ .

## 4 Miscellaneous

### 4.1 Contributors

1. PHAN VINH TIẾN: <https://github.com/vinhtienlovemath/PublicDocuments/tree/main/MathematicalOlympiad>.

## Tài liệu

- [Hoa06] Lê Tuấn Hoa. *Đại Số Tuyến Tính Qua Các Ví Dụ & Bài Tập*. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2006, p. 446.
- [Hm22] Nguyễn Hữu Việt Hưng. *Đại Số Tuyến Tính*. Tái bản lần thứ 4. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2022, p. 335.
- [Khả09] Phan Huy Khải. *Các Chuyên Đề Số Học Bồi Dưỡng Học Sinh Giỏi Toán Trung Học. Chuyên Đề 2: Số Học & Dây Số*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục, 2009, p. 260.
- [Quố+24] Văn Phú Quốc, Trương Hồ Thiên Long, Đỗ Hữu Đạt, and Đinh Ngọc Nam. *Bài Tập Giải Tích Olympic Toán Sinh Viên & Học Sinh*. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2024, p. 348.
- [Tao22a] Terence Tao. *Analysis I*. Vol. 37. Texts and Readings in Mathematics. Fourth edition [of 2195040]. Hindustan Book Agency, New Delhi, [2022] ©2022, pp. xvi+355. ISBN: 978-81-951961-9-7.
- [Tao22b] Terence Tao. *Analysis II*. Vol. 38. Texts and Readings in Mathematics. Fourth edition [of 2195041]. Springer, Singapore; Hindustan Book Agency, New Delhi, [2022] ©2022, pp. xvii+195. ISBN: 978-9-81197-284-3. DOI: [10.1007/978-981-19-7284-3](https://doi.org/10.1007/978-981-19-7284-3). URL: <https://doi.org/10.1007/978-981-19-7284-3>.
- [TB22] Lloyd N. Trefethen and David Bau III. *Numerical linear algebra*. 25th anniversary edition [of 1444820], With a foreword by James G. Nagy. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, [2022] ©2022, pp. xvi+370. ISBN: 978-1-611977-15-8; [9781611977165].
- [TB97] Lloyd N. Trefethen and David Bau III. *Numerical linear algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1997, pp. xii+361. ISBN: 0-89871-361-7. DOI: [10.1137/1.9780898719574](https://doi.org/10.1137/1.9780898719574). URL: <https://doi.org/10.1137/1.9780898719574>.
- [Tru02] Ngô Việt Trung. *Giáo Trình Đại Số Tuyến Tính*. In lần 2. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2002, p. 271.
- [Tsu+23] Makoto Tsukada, Yuji Kobayashi, Hiroshi Kaneko, Sin-Ei Takahasi, Kiyoshi Shirayanagi, and Masato Noguchi. *Linear Algebra with Python: Theory and Applications*. Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology. Springer, 2023, p. 324.