

# Lecture Note: Mathematical Analysis – Bài Giảng: Giải Tích Toán Học

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 1 tháng 5 năm 2025

## Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Advanced STEM & Beyond*:

URL: [https://nqbh.github.io/advanced\\_STEM/](https://nqbh.github.io/advanced_STEM/).

Latest version:

- *Lecture Note: Mathematical Analysis – Bài Giảng: Giải Tích Toán Học.*

PDF: URL: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/blob/main/analysis/lecture/NQBH\\_mathematical\\_analysis\\_lecture.pdf](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/lecture/NQBH_mathematical_analysis_lecture.pdf).

TeX: URL: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/blob/main/analysis/lecture/NQBH\\_mathematical\\_analysis\\_lecture.tex](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/lecture/NQBH_mathematical_analysis_lecture.tex).

- *Slide: Mathematical Analysis – Slide: Giải Tích Toán Học.*

PDF: URL: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/blob/main/analysis/slide/NQBH\\_mathematical\\_analysis\\_slide.pdf](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/slide/NQBH_mathematical_analysis_slide.pdf).

TeX: URL: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/blob/main/analysis/slide/NQBH\\_mathematical\\_analysis\\_slide.tex](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/slide/NQBH_mathematical_analysis_slide.tex).

- Codes:

- C++: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/tree/main/analysis/C++](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/analysis/C++).

- Python: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/tree/main/analysis/Python](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/analysis/Python).

## Mục lục

<b>1 Basic Mathematical Analysis – Giải Tích Toán Học Cơ Bản</b>	<b>2</b>
1.1 Numbers – Các loại số	2
1.2 Notations & conventions – Ký hiệu & quy ước	2
<b>2 Sequence – Dãy Số</b>	<b>3</b>
<b>3 Function – Hàm Số</b>	<b>5</b>
<b>4 Continuity – Sự Liên Tục</b>	<b>6</b>
<b>5 Series – Chuỗi Số</b>	<b>6</b>
<b>6 Derivative &amp; Differentiability – Đạo Hàm &amp; Tính Khả Vi</b>	<b>6</b>
<b>7 Integral – Tích Phân</b>	<b>8</b>
7.1 SymPy/integrals module	10
7.2 Leibniz integral rule – Quy tắc tích phân Leibniz	10
<b>8 Functional Equation – Phương Trình Hàm</b>	<b>10</b>
<b>9 Fourier transform – Biến đổi Fourier</b>	<b>11</b>
9.1 Discrete Fourier transform – Biến đổi Fourier rời rạc	11
<b>10 Miscellaneous</b>	<b>11</b>
10.1 See also	11
<b>Tài liệu</b>	<b>12</b>

---

\*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com), [hong.nguyenquanba@umt.edu.vn](mailto:hong.nguyenquanba@umt.edu.vn). Bến Tre City, Việt Nam.

# 1 Basic Mathematical Analysis – Giải Tích Toán Học Cơ Bản

## Resources – Tài nguyên.

1. DẶNG ĐÌNH ÁNG. *Nhập Môn Giải Tích*.
2. [Rud76]. WALTER RUDIN. *Principles of Mathematical Analysis*.
3. [Tao22a]. TERENCE TAO. *Analysis I*.
4. [Tao22b]. TERENCE TAO. *Analysis II*.

**Question 1** (Definition of mathematical analysis). *What is mathematical analysis? Cf. mathematical analysis with other types of analysis.*

For answers, see, e.g., [Tao22a, Chap. 1, Sect. 1.1: *What Is Analysis?*, pp. 1–2], [Wikipedia/mathematical analysis](#). For other types of analysis, see, e.g., [Wikipedia/analysis](#).

**Question 2** (Motivation of mathematical analysis). *Why do mathematical analysis?*

For answers, see, e.g., [Tao22a, Chap. 1, Sect. 1.2: *Why Do Analysis?*, pp. 2–10]

**Example 1** (Division by zero & infinity). *The cancellation law for multiplication  $ac = bc \Rightarrow a = b$  does not work when  $c = 0$  &  $c = \pm\infty$ . The cancellation law for addition  $a + c = b + c \Rightarrow a = b$ .*

**Example 2** (Cancellation properties).

See, e.g., [Wikipedia/cancellation property](#).

**Example 3** (Geometric series – Chuỗi hình học). *When does the geometric series  $G(a) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{a^i}$  converge? When does  $G(a)$  diverge?*

## 1.1 Numbers – Các loại số

Trong chương trình Toán phổ thông, học sinh đã được học: số tự nhiên ở chương trình Toán 6 [Thá+23a; Thá+23b], & số hữu tỷ & số thực ở chương trình Toán 7,

## 1.2 Notations & conventions – Ký hiệu & quy ước

Đặt tập hợp các đa thức (polynomial) 1 biến với hệ số nguyên, hệ số hữu tỷ, hệ số thực, hệ số phức lần lượt cho bởi:

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[x] &:= \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i; n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Z}, \forall i = 0, \dots, n, a_n \neq 0 \right\}, \\ \mathbb{Q}[x] &:= \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i; n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Q}, \forall i = 0, \dots, n, a_n \neq 0 \right\}, \\ \mathbb{R}[x] &:= \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i; n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 0, \dots, n, a_n \neq 0 \right\}, \\ \mathbb{C}[x] &:= \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i; n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{C}, \forall i = 0, \dots, n, a_n \neq 0 \right\}.\end{aligned}$$

Ta có quan hệ hiển nhiên  $\mathbb{N}[x] \subset \mathbb{Z}[x] \subset \mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$ . Tổng quát, với  $\mathbb{F}$  là 1 trường bất kỳ, tập hợp các đa thức 1 biến với hệ số thuộc trường  $\mathbb{F}$  (e.g.,  $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ) cho bởi:

$$\mathbb{F}[x] := \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i; n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{F}, \forall i = 0, \dots, n, a_n \neq 0 \right\}.$$

Tập xác định của đa thức có thể là toàn bộ trường số thực  $\mathbb{R}$  hoặc trường số phức  $\mathbb{C}$ , i.e.,  $D_P = \text{dom}(P) = \mathbb{R}$  or  $D_P = \text{dom}(P) = \mathbb{C}$ , tùy vào trường  $\mathbb{F}$  của các hệ số & mục đích sử dụng đa thức.

**Problem 1** (Cf: Calculus vs. Mathematical Analysis). *Distinguish & compare Calculus vs. Mathematical Analysis.*

Analysis is more pure mathematics. Calculus is more applied mathematics.

**Problem 2** (Examples & counterexamples in mathematical analysis – Ví dụ & phản ví dụ trong phân tích toán học). *Find, from simple to advanced, examples & counterexamples to each mathematical concepts & mathematical results, including lemmas, propositions, theorems, & consequences.*

– Tìm các ví dụ & phản ví dụ từ đơn giản đến nâng cao cho mỗi khái niệm toán học & kết quả toán học, bao gồm các bổ đề, mệnh đề, định lý, & hệ quả.

**Problem 3** (Python SymPy). *Study SymPy to support calculus & mathematical analysis.*

**Definition 1** (Neighborhood, [WS10], p. 6). *The set of all points  $x$  s.t.  $|x - a| < \delta$ , where  $\delta > 0$ , is called a  $\delta$  neighborhood of the point  $a$ . The set of all points  $x$  s.t.  $0 < |x - a| < \delta$ , in which  $x = a$  is excluded, is called a deleted  $\delta$  neighborhood of  $a$  or an open ball of radius  $\delta$  about  $a$ .*

**Theorem 1** (Bolzano–Weierstrass theorem). *Every bounded infinite set has at least 1 limit point.*

**Definition 2** (Algebraic- & transcendental numbers – số đại số & số siêu việt). *A number  $x \in \mathbb{R}$  which is a solution to the polynomial equation*

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \quad (1)$$

*where  $n \in \mathbb{N}^*$ , called the degree of the equation,  $a_i \in \mathbb{Z}$ ,  $\forall i = 0, 1, \dots, n$ ,  $a_n \neq 0$ , is called an algebraic number. A number which cannot be expressed as a solution of any polynomial equation with integer coefficients is called a transcendental number.*

**Theorem 2** (Common transcendental numbers).  *$\pi, e$  are transcendental.*

**Theorem 3** (Countability of sets of algebraic- & transcendental numbers). *(i) The set of algebraic numbers is a countably infinite set. (ii) The set of transcendental numbers is noncountably infinite.*

## 2 Sequence – Dãy Số

**Definition 3** (Sequence, [WS10], p. 25). *A sequence is a set of numbers  $u_1, u_2, \dots$  in a definite order of arrangement (i.e., a correspondence with the natural numbers or a subset thereof) & formed according to a definite rule. Each number in the sequence is called a term;  $u_n$  is called the  $n$ th term. The sequence is called finite or infinite according as there are or are not a finite number of terms. The sequence  $u_1, u_2, \dots$  is also designated briefly by  $\{u_n\}$ .*

**Definition 4** (Limit of a sequence, [WS10], p. 25). *A number  $l \in \mathbb{R}$  is called the limit of an infinite sequence  $u_1, u_2, \dots$  if for any positive number  $\epsilon$  we can find a positive number  $N$  depending on  $\epsilon$  s.t.  $|u_n - l| < \epsilon$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n > N$ . In such case we write  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ .*

**Bài toán 1** ([VMS23], 1.1, p. 30, HCMUT). *Cho  $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  thỏa  $f'(x) < 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Xét dãy số  $\{a_n\}$ :*

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

*(a) Nếu  $f(x) > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , tính  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ . (b) Nếu  $f(2023) = 0$  &  $f \in C^2(\mathbb{R})$  thỏa  $f''(x) > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , tính  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ .*

**Bài toán 2** ([VMS23], 1.2, p. 30, VNUHCM UIT). *Cho dãy số  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  thỏa*

$$\begin{cases} u_0 \geq -2, \\ u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

*(a) Chứng minh  $\{u_n\}$  có giới hạn hữu hạn. Tính  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ . (b) Cho 2 dãy  $\{v_n\}_{n=1}^\infty, \{w_n\}_{n=1}^\infty$  đặt bởi*

$$\begin{cases} v_n = 4^n |u_n - 2|, \\ w_n = \frac{u_1 u_2 \cdots u_n}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

*Tính  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$ .*

**Bài toán 3** ([VMS23], 1.3, p. 30, DH Đồng Tháp). *Xét dãy số  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  đặt bởi*

$$u_1 = \frac{3}{2}, \quad u_n = 1 + \frac{1}{2} \arctan u_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

*Chứng minh  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  hội tụ.*

**Bài toán 4** ([VMS23], 1.4, p. 31, DH Đồng Tháp). *Cho dãy số  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  đặt bởi*

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{n^2 - 1}{a_n} + 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

*(a) Chứng minh  $n \leq a_n \leq n + 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . (b) Đặt  $S_n^{(3)} := \sum_{i=1}^n a_i^3$ . Tính  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n^{(3)}}{n^4}$ .*

**Bài toán 5** ([VMS23], 1.5, p. 31, DHGTVT). Cho dãy số  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  đặt bởi

$$a_1 > 0, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  giảm & tính  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ .

**Bài toán 6** ([VMS23], 1.6, p. 31, ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). Cho dãy số  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  đặt bởi

$$\begin{cases} u_0 = 0, \quad u_1 = \beta, \\ u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

(a) Tìm công thức số hạng tổng quát của  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ . (b) Tính  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

**Bài toán 7** ([VMS23], 1.7, p. 31, ĐHKH, Thái Nguyên). Cho dãy số  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  đặt bởi

$$x_n = \sum_{i=1}^n \frac{i}{(i+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tính  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{2023} x_i^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{2023}^n}$ .

**Bài toán 8** ([VMS23], 1.8, p. 31, ĐH Mở-Địa chất). Tính

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\prod_{i=1}^n i^{i^{2021}}\right)^{\frac{1}{n^{2022}}}}{n^{\frac{1}{2022}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(1^{1^{2021}} \cdot 2^{2^{2021}} \cdots n^{n^{2021}}\right)^{\frac{1}{n^{2022}}}}{n^{\frac{1}{2022}}}.$$

**Bài toán 9** ([VMS23], 1.9, pp. 31–32, ĐHSPTN2). Cho dãy số  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  đặt bởi

$$x_1 \in (0, 1), \quad x_{n+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 + x_i), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(a) Chứng minh dãy  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  có giới hạn hữu hạn. (b) Chứng minh  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(x_n - x_{n+1})}{x_n^2} = \frac{1}{2}$ .

**Bài toán 10** ([VMS23], 1.10, p. 32, ĐH Trà Vinh). Cho dãy số  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  đặt bởi

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} + a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tính  $x_{2022}$ .

**Bài toán 11** ([VMS23], 1.11, p. 32, ĐH Trà Vinh). Cho 2 dãy số  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  đặt bởi

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3}, \quad x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + y_n^2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh  $x_n y_n \in (2, 3), \forall n \geq 2$  &  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$ .

**Bài toán 12** ([VMS23], 1.11, p. 32, ĐH Vinh). Cho dãy số  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  đặt bởi

$$x_n = \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{2^i}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(a) Tìm tất cả  $n \in \mathbb{N}^*$  thỏa  $x_n > \frac{15}{8}$ . (b) Chứng minh  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  hội tụ.

**Bài toán 13** ([VMS24], p. 32, 1.1, VNUHCM UIT). Cho  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ . Xét dãy số

$$\begin{cases} x_0 = a, \quad x_1 = b, \\ x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2} x_{n-1} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right). \end{cases}$$

Chứng minh  $\{x_n\}$  hội tụ.

**Bài toán 14** ([VMS24], p. 32, 1.2, ĐH Đồng Tháp). Cho dãy số  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  đặt bởi

$$u_n = \sum_{i=1}^n \frac{i}{(i+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(a) Tìm  $n \in \mathbb{N}$  lớn nhất để  $u_n < \frac{2023}{2024}$ . (b) Tính giới hạn  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{2024} u_i^n} = \sqrt[n]{u_1^n + u_2^n + \cdots + u_{2024}^n}$ .

**Bài toán 15** ([VMS24], p. 32, 1.3, DHGTVT). Cho dãy số  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  thỏa  $\frac{1}{2} < a_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Dãy số  $\{x_n\}$  đặt bởi

$$x_1 = a_1, x_{n+1} = \frac{2(a_{n+1} + x_n) - 1}{1 + 2a_{n+1}x_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(a) Chứng minh dãy số  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  tăng & bị chặn trên. (b) Tìm  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ .

**Bài toán 16** ([VMS24], p. 33, 1.4, DH Vinh). Cho dãy số  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  đặt bởi

$$\begin{cases} x_1 = 2024, \\ x_{n+1} = \frac{x_n^2}{3[x_n] + 4}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

(a) Chứng minh  $x_8 < 1$ . (b) Chứng minh  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  hội tụ & tìm giới hạn.

### 3 Function – Hàm Số

**Bài toán 17** ([VMS23], 3.1, p. 33, HCMUT). (a) Chứng minh tồn tại hàm số  $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  thỏa  $xf''(x) + 2f'(x) = x^{2023}, \forall x \in \mathbb{R}$ . (b) Giả sử  $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  thỏa  $xg''(x) + 2g'(x) \geq x^{2023}, \forall x \in \mathbb{R}$ . Chứng minh  $\int_{-1}^1 x(g(x) + x^{2023}) dx \geq \frac{2}{2025}$ .

**Bài toán 18** ([VMS23], 3.2, p. 33, DH Đồng Tháp). Cho hàm  $f(x)x = 2(x-1) - \arctan x, \forall x \in \mathbb{R}$ . Chứng minh phương trình  $f(x) = 0$  có nghiệm duy nhất là  $a \in (1, \sqrt{3})$ .

**Proposition 1** (Luật bình phương nghịch đảo). Mỗi sự gia tăng khoảng cách từ nguồn cho ra kết quả giảm mức độ âm thanh theo tỷ lệ nghịch với bình phương của sự gia tăng khoảng cách.

**Bài toán 19** ([VMS23], 3.3, pp. 33–34, DH Đồng Tháp). Sử dụng luật bình phương nghịch đảo, giải quyết bài toán: 1 người có 1 mảnh đất lớn có chiều dài mặt tiền là  $l$  m ở giữa 2 quán karaoke thường phát ra âm thanh có cường độ lần lượt là  $I_1, I_2$ . Người này định xây 1 ngôi nhà nhỏ trên mảnh đất đó nhưng muốn tìm vị trí sao cho chịu ảnh hưởng của âm thanh từ 2 quán karaoke là ít nhất. Giúp người này nếu biết: (a) Cường độ âm thanh  $I_1 = I_2$ . (b) Cường độ âm thanh  $I_1 = 8I_2$ . (c)  $I_1 = aI_2$  với  $a \in (0, \infty)$  cho trước.

**Bài toán 20** ([VMS23], 3.5, p. 34, DH Hùng Vương, Phú Thọ). Cho hàm

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + \alpha x & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

(a) Tính  $f'(x)$  khi  $x \neq 0$ . (b) Tính  $f'(0)$ . (c) Chứng minh hàm  $f(x)$  không đơn điệu trên mỗi khoảng mở chứa điểm 0.

**Bài toán 21** ([VMS23], 3.6, p. 34, DH Hùng Vương, Phú Thọ). (a) Gia đình bác Nam muốn xây 1 cái bể hình hộp với đáy là hình vuông có thể tích  $V = 10 \text{ m}^3$ . Biết giá thành để xây mỗi  $\text{m}^2$  mặt đáy là  $a = 700000$  đồng & 1 mặt bên là  $b = 500000$  đồng. Để tổng chi phí xây dựng là nhỏ nhất thì bác Nam nên xây bể với kích thước như thế nào? (b) Giải bài toán với  $a, b, V \in (0, \infty)$  bất kỳ.

**Bài toán 22** ([VMS23], 3.7, pp. 34–35, DHKH Thái Nguyên). Tìm các hàm liên tục  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \neq 0$ , thỏa

$$f(x+y) = 2023^y f(x) + 2023^x f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Từ đó tính

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{\sin f(x)}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{f^{(n)}(0)}.$$

**Bài toán 23** ([VMS23], 3.8, p. 35, DH Mỏ-Địa chất). Tính

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\sin x^2 + \sin y^2 + \sin z^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

**Bài toán 24** ([VMS23], 3.9, p. 35, DH Mỏ-Địa chất). Gọi  $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$  là 3 nghiệm của phương trình vi phân  $y''' + a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$  thỏa  $y_1^2(x) + y_2^2(x) + y_3^2(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ . Tìm các hằng số  $\alpha, \beta$  để hàm  $z = (y_1'(x))^2 + (y_2'(x))^2 + (y_3'(x))^2$  là nghiệm của phương trình vi phân  $z' + \alpha a(x)z + \beta c(x) = 0$ .

**Bài toán 25** ([VMS23], 3.10, p. 35, DH Mỏ-Địa chất). Trên hình ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , tìm tất cả các điểm  $T = (x_0, y_0)$  thỏa: tam giác bị giới hạn bởi các đường thẳng  $x = 0, y = 0$  & tiếp tuyến với ellipse tại điểm  $T$  có diện tích nhỏ nhất.

**Bài toán 26** ([VMS23], 3.11, p. 35, FTU Hà Nội). Chứng minh đa thức  $f(x) = \sum_{i=0}^{2022} (-1)^i \frac{x^i}{i!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2022}}{2022!}$  không có nghiệm thực.

**Bài toán 27** ([VMS23], 3.12, p. 35, ĐHSPTN2). Cho  $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . 1 điểm  $x$  được gọi là 1 điểm mù nếu tồn tại 1 điểm  $y \in \mathbb{R}$  với  $y > x$  sao cho  $f(y) > f(x)$ . Giả sử tất cả các điểm thuộc khoảng mở  $I = (a, b)$  là các điểm mù &  $a, b$  không phải là 2 điểm mù. Chứng minh  $f(a) = f(b)$ .

**Bài toán 28** ([VMS23], 3.13, p. 36, ĐH Trà Vinh). Chứng minh hàm số  $f(x) = x^{x^x}$  đồng biến trên  $(0, \infty)$  &  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ .

**Bài toán 29** ([VMS23], 3.14, p. 36, ĐH Vinh). Cho hàm

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2} \sin \frac{1}{x^{2023}} & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

(a) Chứng minh hàm số  $f$  liên tục tại  $x = 0$ . (b) Hàm số  $f$  có khả vi tại  $x = 0$  hay không?

**Bài toán 30** ([VMS23], 3.15, p. 36, ĐH Vinh). Cho hàm  $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ , khả vi trên khoảng  $(0, 1)$ , thỏa  $f(0) = 0$ , &  $|f'(x)| \leq 2023|f(x)|$ ,  $\forall x \in (0, 1)$ . Chứng minh  $f(x) = 0$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ .

**Bài toán 31** ([VMS23], 3.16, p. 36, ĐH Vinh). Giả sử hàm  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  khả vi trên khoảng  $(0, \infty)$  & thỏa 2 điều kiện: (i)  $|f(x)| \leq 2023$ ,  $\forall x \in (0, \infty)$ ; (ii)  $f(x)f'(x) \geq 2022 \cos x$ ,  $\forall x \in (0, \infty)$ . Có tồn tại  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  không?

## 4 Continuity – Sự Liên Tục

**Definition 5** ([Tao22a], Def. 6.1.1, p. 109: distance between 2 reals). Given  $x, y \in \mathbb{R}$ , their distance  $d(x, y)$  is defined to be  $d(x, y) := |x - y| \in [0, \infty)$ .

**Definition 6** ([Tao22a], Def. 6.1.2, p. 109:  $\varepsilon$ -close reals). Let  $\varepsilon > 0$  be a real number.  $x, y \in \mathbb{R}$  is said to be  $\varepsilon$ -close iff  $d(x, y) \leq \varepsilon$ .

## 5 Series – Chuỗi Số

**Bài toán 32** ([VMS23], 2.1, p. 32, VNUHCM UIT). Cho dãy số  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, \infty)$  thỏa  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{(2n-1)^2} < 1$ . Chứng minh  $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^k \frac{x_n}{k^3} < 2$ .

**Bài toán 33** ([VMS23], 2.2, p. 32, ĐHTVT). Cho dãy số  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, \infty)$  đặt bởi

$$a_1 > 0, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tính  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

**Bài toán 34** ([VMS23], 2.2, p. 32, ĐH Mỏ-Địa chất). Gọi  $S$  là dãy con của dãy điều hòa  $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$  & có tổng hữu hạn. Gọi  $c(n)$  là số lượng các phần tử của  $S$  có số thứ tự trong dãy mẹ (điều hòa) ban đầu không vượt quá  $n$ . Chứng minh  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c(n)}{n} = 0$ .

**Bài toán 35** ([VMS24], p. 33, 2.1, ĐHCNTT TPHCM). Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\beta \sin^2 l\alpha}{1 + \beta \sin^2 k\alpha}, \quad \alpha \notin \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \quad \beta > 0.$$

## 6 Derivative & Differentiability – Đạo Hàm & Tính Khả Vi

**Bài toán 36** ([VMS23], p. 36, 4.1, VNUHCM UIT). Cho hàm  $f \in C^2(\mathbb{R})$  thỏa  $f(0) = 2$ ,  $f'(0) = -2$ ,  $f(1) = 1$ . Chứng minh tồn tại  $c \in (0, 1)$  thỏa  $f(c)f'(c) + f''(c) = 0$ .

**Bài toán 37** ([VMS23], p. 37, 4.2, ĐH Đồng Tháp). Cho  $f$  khả vi trên  $(a, \infty)$ ,  $\forall a \in (0, \infty)$  &  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ . Chứng minh  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ .

**Bài toán 38** ([VMS23], p. 37, 4.3, ĐH Đồng Tháp). Cho  $f$  là hàm số có đạo hàm  $f'$  đồng biến trên  $[0, 2]$  &  $f(0) = -1$ ,  $f(2) = 1$ . Chứng minh tồn tại  $a, b, c \in [0, 2]$  thỏa  $f'(a)f'(b)f'(c) = 1$ .

**Bài toán 39** ([VMS23], p. 37, 4.4, DHGTVT). Cho  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  thỏa  $f^{(n)}(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$  &  $f^{(n)}(x)x \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in (0, \infty)$ . Chứng minh  $f(x) = 0, \forall x \in (0, \infty)$ .

**Bài toán 40** ([VMS23], p. 37, 4.5, DH Hùng Vương, Phú Thọ). Giả sử hàm  $f \in C([1, 2023])$ , khả vi trong khoảng  $(1, 2023)$ , &  $f(2023) = 0$ . Chứng minh tồn tại  $c \in (1, 2023)$  thỏa

$$f'(c) = \frac{2024 - 2023c}{1 - c} f(c).$$

**Bài toán 41** ([VMS23], p. 37, 4.6, ĐHKH Thái Nguyên). Giả sử  $f(x) \in C^\infty([-1, 1])$ ,  $f^{(n)}(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , & tồn tại  $\alpha \in (0, 1)$  thỏa  $\sup_{x \in [-1, 1]} |f^{(n)}(x)| \leq \alpha^n n!, \forall n \in \mathbb{N}$ . Chứng minh  $f(x) \equiv 0$  trên đoạn  $[-1, 1]$ .

**Bài toán 42** ([VMS23], p. 37, 4.7, DHSPHN2). Cho  $f \in C([a, b])$  khả vi trên  $(a, b)$ . Giả sử  $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$ . Chứng minh  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  thỏa  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$  &  $f(x_1)f(x_2) > 0$  thì luôn tồn tại  $c \in (x_1, x_2)$  thỏa

$$\frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = c - \frac{f(c)}{f'(c)}.$$

**Bài toán 43** ([VMS24], p. 33, 3.1, VNUHCM UIT). Cho  $f$  là hàm số thực trên  $(0, \infty)$ . Giả sử

$$f(x^\alpha) = f(x) \sin^2 \alpha + f(1) \cos^2 \alpha, \forall x \in (0, \infty), \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh  $f$  khả vi tại 1.

**Bài toán 44** ([VMS24], p. 34, 3.2, DH Đồng Tháp). (a) Chứng minh với mỗi  $n \in \mathbb{N}^*$ , phương trình  $2x = \sqrt{x+n} + \sqrt{x+n+1}$  có nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là  $x_n$ . (b) Tính  $a := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}}, b := \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n - a\sqrt{n}$ .

**Bài toán 45** ([VMS24], p. 34, 3.3, DH Đồng Tháp). Cho

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left| \cos \frac{\pi}{x} \right| & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

Chứng minh  $f$  khả vi tại 0 nhưng  $f$  không khả vi tại các điểm  $x_n := \frac{2}{2n+1}$  với  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Bài toán 46** ([VMS24], p. 34, 3.4, DH Đồng Tháp). Giả sử  $f$  khả vi liên tục trên  $(0, \infty)$ ,  $f(0) = 1$ . Chứng minh nếu  $|f(x)| \leq e^{-x}, \forall x \geq 0$  thì tồn tại  $x_0 > 0$  để  $f'(x_0) = -e^{-x_0}$ .

**Bài toán 47** ([VMS24], p. 34, 3.5, DHGTVT). Cho  $a \in \mathbb{R}, b \in (0, \infty)$ . Hàm  $f$  xác định trên  $[-1, 1]$ , được cho bởi

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin x^{-b} & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

(a) Tìm tất cả các giá trị của  $a$  để hàm  $f$  liên tục trên  $[-1, 1]$ . (b) Tìm tất cả các giá trị của  $a$  để tồn tại  $f'(0)$ . (c) Tìm điều kiện của  $a, b$  để tồn tại  $f''(0)$ .

**Bài toán 48** ([VMS24], p. 35, 3.7, HUS). Cho  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm số được xác định bởi công thức

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{if } x \leq 0, \\ be^x + x & \text{if } x > 0, \end{cases}$$

với  $a, b \in \mathbb{R}$ : tham số. Xác định  $a, b$  để  $f$  có nguyên hàm trên  $\mathbb{R}$ .

**Bài toán 49** ([VMS24], p. 35, 3.8, DH Vinh). Cho hàm  $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  thỏa  $f_{2024}(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$  với

$$\begin{cases} f_{n+1}(x) = f(f_n(x)), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ f_1(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Chứng minh  $f_2(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Bài toán 50** ([VMS24], p. 35, 3.9, DH Vinh). Cho hàm

$$f(x) = \left( \frac{2023^x + 2024^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}, x > 0.$$

(a) Tìm  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ . (b) Chứng minh  $f$  là hàm số đơn điệu tăng trên  $(0, +\infty)$ .



**Bài toán 51** ([VMS24], p. 36, 4.1, HCMUT). (a) Cho  $f \in C^3(\mathbb{R}, [0, +\infty))$  thỏa  $\max_{x \in \mathbb{R}} |f'''(x)| \leq 1$ . Chứng minh

$$f''(x) \geq -\sqrt[3]{\frac{3}{2}f(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) Tìm tất cả các hàm số  $f$  thỏa mãn điều kiện của (a) thỏa

$$f''(x) = -\sqrt[3]{\frac{3}{2}f(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Bài toán 52** ([VMS24], p. 36, 4.2, VNUHCM UIT). Cho hàm số  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  liên tục trên  $[0, 1]$ , khả vi trên  $(0, 1)$  sao cho  $\exists M > 0, \exists c \in [0, 1]$  thỏa  $f(c) = 0$  & thỏa

$$|f'(x)| \leq M|f(x)|, \quad \forall x \in (0, 1).$$

Chứng minh  $f(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$ .

**Bài toán 53** ([VMS24], p. 36, 4.3, ĐH Đồng Tháp). Cho  $f$  khả vi trên  $\mathbb{R}$  &  $f'$  giảm ngặt trên  $\mathbb{R}$ . (a) Chứng minh

$$f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) Chứng minh nếu tồn tại  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  thì  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ . (c) Tìm hàm số  $g$  khả vi trên  $\mathbb{R}$  & tồn tại  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L$  nhưng  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) \neq 0$ .

**Bài toán 54** ([VMS24], p. 37, 4.4, ĐHGTVT). Giả sử  $V$  là tập hợp các hàm liên tục  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  & khả vi trên  $(0, 1)$  thỏa  $f(0) = 0, f(1) = 1$ . Xác định các giá trị  $\alpha \in \mathbb{R}$  để với mỗi  $f \in V$ , luôn tồn tại  $\xi \in (0, 1)$  thỏa  $f(\xi) + \alpha = f'(\alpha)$ .

**Bài toán 55** ([VMS24], p. 37, 4.5, HUS). Cho  $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm liên tục trên  $[0, 3]$  & khả vi trong  $(0, 3)$ . Chứng minh tồn tại  $c \in (0, 3)$  thỏa  $2f'(c) = f(3) - f(2) + f(1) - f(0)$ .

**Bài toán 56** ([VMS24], p. 37, 4.6, ĐH Mỏ-Địa chất). Giả sử có chuỗi có 2 đầu hướng ra vô cực

$$\cdots + f''(x) + f'(x) + f(x) + \int_0^x f(t) dt + \int_0^x \int_0^t f(s) ds dt + \cdots$$

& hội tụ đều trên khoảng  $(-1, 1)$ . Chuỗi là biểu diễn của số nào?

**Bài toán 57** ([VMS24], p. 37, 4.7, ĐH Vinh). Cho hàm  $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  & thỏa  $f(x) \leq 2024, \forall x \in \mathbb{R}$ . Chứng minh tồn tại  $x \in \mathbb{R}$  thỏa  $f''(x) = 0$ .

## 7 Integral – Tích Phân

**Bài toán 58** ([VMS23], p. 38, 5.1, VNUHCM UIT). Cho hàm  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  khả vi đến cấp 2 thỏa  $f(0) = 1$  &  $f''(x) + 2f'(x) + f(x) \geq 1, \forall x \in (-1, 1)$ . Tìm GTNN của  $\int_{-1}^1 e^x f(x) dx$ .

**Bài toán 59** ([VMS23], p. 38, 5.2, ĐH Đồng Tháp). Cho hàm  $f : [0, 2023] \rightarrow (0, \infty)$  khả tích &  $f(x)f(2023-x) = 1, \forall x \in [0, 2023]$ . Chứng minh  $\int_0^{2023} f(x) dx \geq 2023$ .

**Bài toán 60** ([VMS23], p. 38, 5.3, ĐHGTVT). Cho hàm  $f \in C([0, 1])$  thỏa  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx$ . Chứng minh tồn tại  $c \in (0, 1)$  thỏa  $cf(c) + 2023 \int_0^c f(x) dx = 0$ .

**Bài toán 61** ([VMS23], p. 38, 5.4, ĐHGTVT). Tính

$$I := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1 + 2023^x) \sin x} dx.$$

**Bài toán 62** ([VMS23], p. 38, 5.5, ĐHGTVT). Cho hàm  $f$  dương, khả tích trên  $[a, b], 0 < m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$ . Chứng minh

$$(b-a)^2 \leq \int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \leq \frac{(m+M)^2}{4mM} (b-a)^2.$$

**Bài toán 63** ([VMS23], p. 39, 5.6, ĐHKH Thái Nguyên). Cho hàm  $h \in C([0, 1])$  thỏa  $\int_0^1 xh(x) dx = \int_0^1 h(x) dx$ . Chứng minh tồn tại  $\beta \in (0, 1)$  thỏa  $\beta h(\beta^2) = \frac{2023}{2} \int_0^{\beta^2} h(x) dx$ .

**Bài toán 64** ([VMS23], p. 39, 5.7, ĐHKH Thái Nguyên). Cho  $f \in C([0, \pi])$  thỏa  $f(0) > 0$  &  $\int_0^{\pi} f(x) dx < 2$ . Chứng minh phương trình  $f(x) = \sin x$  có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng  $(0, \pi)$ .

**Bài toán 65** ([VMS23], p. 39, 5.8, ĐH Mỏ-Địa chất). Cho  $f \in C([0, 1]), g \in C([0, 1], (0, \infty))$  với  $f$  không giảm. Chứng minh

$$\left( \int_0^t f(x)g(x) dx \right) \left( \int_0^1 g(x) dx \right) \leq \left( \int_0^t g(x) dx \right) \left( \int_0^1 f(x)g(x) dx \right), \quad \forall t \in [0, 1].$$



**Bài toán 66** ([VMS23], p. 39, 5.9, ĐH Mở-Địa chất). Cho  $f \in C([0, 1])$  thỏa  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ . Chứng minh tồn tại điểm  $c \in (0, 1)$  thỏa  $\int_0^c xf(x) dx = 0$ .

**Bài toán 67** ([VMS23], p. 39, 5.10, ĐHSPhN2). Gọi  $\mathcal{F}$  là lớp tất cả các hàm khả vi  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  thỏa

$$|f'(x) - f'(y)| \leq 2023|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh

$$(f'(x))^2 < 4046f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Bài toán 68** ([VMS23], p. 40, 5.11, ĐHSPhN2). Giả sử  $f \in C^2([a, b])$  thỏa  $f(a) \neq -f(b)$  &  $\int_a^b f(x) dx = 0$ . Tìm GTNN của

$$A := \frac{(b-a)^3}{(f(a) + f(b))^2} \int_a^b (f''(x))^2 dx.$$

**Bài toán 69** ([VMS23], p. 40, 5.12, ĐH Trà Vinh). Tính

$$I := \int_0^{2\pi} \ln(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}) dx.$$

**Bài toán 70** ([VMS23], p. 40, 5.12, ĐH Vinh). Cho  $f \in C([0, 1])$  thỏa  $xf(y) + yf(x) \leq 1, \forall x, y \in [0, 1]$ . Chứng minh: (a)  $f(x) \leq \frac{1}{2x}, \forall x \in (0, 1]$ . (b)  $\int_0^1 f(x) dx \leq \frac{\pi}{4}$ .

**Bài toán 71** ([VMS24], p. 37, 5.1, VNUHCM UIT). Cho  $\alpha \in (0, \infty)$  &  $f \in C([0, 1])$  nghịch biến,  $a \in (0, 1)$  thỏa

$$\int_0^a f(t) dt < \frac{a}{2025}, \quad f(0) = \beta > 0.$$

Chứng minh phương trình  $f(x) = x^{2024}$  có nghiệm trong  $[0, 1]$ .

**Bài toán 72** ([VMS24], p. 38, 5.2, ĐH Đồng Tháp). Giả sử  $f \in C^1([0, 1])$  thỏa  $f(0) = 0, 0 \leq f'(x) \leq 1, \forall x \in [0, 1]$ . Xét hàm số

$$F(t) = \left( \int_0^t f(x) dx \right)^2 - \int_0^t (f(x))^3 dx, \quad \forall t \in [0, 1].$$

(a) Chứng minh  $F$  đồng biến trên  $[0, 1]$ . (b) Chứng minh

$$\left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2 \geq \int_0^1 (f(x))^3 dx.$$

Cho vài ví dụ về hàm  $f$  để đẳng thức xảy ra.

**Bài toán 73** ([VMS24], p. 38, 5.3, ĐHGTVT). Cho  $f: [0, 1] \rightarrow (0, +\infty)$  là 1 hàm khả tích thỏa  $f(x)f(1-x) = 1, \forall x \in [0, 1]$ . Chứng minh  $\int_0^1 f(x) dx \geq 1$ .

**Bài toán 74** ([VMS24], p. 38, 5.4, HUS). Cho  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm khả tích trên  $[0, 1]$  & liên tục trên  $(0, 1)$ . Chứng minh tồn tại  $a, b \in (0, 1)$  phân biệt sao cho

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

**Bài toán 75** ([VMS24], p. 38, 5.5, ĐH Mở-Địa chất). Tính tích phân

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2+t^2 \leq 1} e^{x^2+y^2-z^2-t^2} dx dy dz dt.$$

**Bài toán 76** ([VMS24], p. 38, 5.6, ĐH Vinh). Chứng minh

$$\frac{9}{8\pi} < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 dx < \frac{3}{2\pi}.$$

## 7.1 SymPy/integrals module

See <https://docs.sympy.org/latest/modules/integrals/integrals.html>. The `integrals` module in SymPy implements methods to calculate definite & indefinite integrals of expressions. Principal method in this module is `integrate()`:

- `integrate(f, x)` returns the indefinite integral  $\int f dx$
- `integrate(f, (x, a, v))` returns the definite integral  $\int_a^b f dx$ .

**Problem 4** (Integration of elementary functions). *Use SymPy to compute definite- & indefinite integrals of elementary functions as many as possible.*

**Problem 5** (Integration of nonelementary functions). *Use SymPy to compute definite- & indefinite integrals of nonelementary functions as many as possible.*

**Example 4** (Integral of error function). *The indefinite integral of the nonelementary function  $e^{-x^2} \operatorname{erf}(x)$ , where  $\operatorname{erf}(x)$  is the error function, is given by*

$$\int e^{-x^2} \operatorname{erf}(x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \operatorname{erf}(x).$$

Run the following Python code:

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
print(integrate(exp(-x**2)*erf(x), x))
```

to obtain the following output:

```
sqrt(pi)*erf(x)**2/4
```

For more information about the error function, see, e.g., [Wikipedia/error function](#).

## 7.2 Leibniz integral rule – Quy tắc tích phân Leibniz

In [calculus](#), the *Leibniz integral rule* for differentiation under the integral sign, named after [GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ](#).

**Theorem 4** (Leibniz integral rule – Quy tắc tích phân Leibniz). *For an integral of the form  $\int_{a(x)}^{b(x)} f(t, x) dt$  where  $a(x), b(x) \in \mathbb{R}$  & the integrands are functions dependent on  $x$ , the derivative of this integral is expressible as*

$$\frac{d}{dx} \left( \int_{a(x)}^{b(x)} f(t, x) dt \right) = f(b(x), x) \frac{d}{dx} b(x) - f(a(x), x) \frac{d}{dx} a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \partial_x f(t, x) dt, \quad (\text{Lintr})$$

where the [partial derivative](#)  $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$  indicates that inside the integral, only the variation of  $f(t, x)$  with  $x$  is considered in taking the derivative.

## 8 Functional Equation – Phương Trình Hàm

**Bài toán 77** ([[VMS23](#)], 6.1, p. 40, VNUHCM UIT). *Tìm tất cả các hàm số  $f \in C^2(\mathbb{R}, (0, \infty))$  thỏa*

$$f''(x)f(x) \geq 2(f'(x))^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Bài toán 78** ([[VMS23](#)], 6.2, p. 40, ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). *Tìm tất cả các hàm số  $f \in C(\mathbb{R})$  thỏa  $f(1) = 2023$  &  $f(x+y) = 2023^x f(y) + 2023^y f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$ .*

**Bài toán 79** ([[VMS23](#)], 6.3, p. 40, ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). *Tìm tất cả các hàm số  $f(x) \in C^1([0, 1])$  có  $f(1) = f(0)$  & thỏa*

$$\int_0^1 \left( \frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 dx \leq 1.$$

**Bài toán 80** ([[VMS23](#)], 6.4, p. 41, ĐH Mỏ-Địa chất). *Cho  $r, s \in \mathbb{Q}$ . Tìm tất cả các hàm số  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  thỏa*

$$f(x + f(y)) = f(x + r) + y + s, \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

**Bài toán 81** ([[VMS23](#)], 6.5, p. 41, FTU Hà Nội). *Tìm tất cả các hàm số thực  $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  thỏa*

$$f(x + f(y)) = xf \left( 1 + f \left( \frac{y}{x} \right) \right), \quad \forall x, y \in (0, \infty).$$

**Bài toán 82** ([VMS23], 6.6, p. 41, DH Trà Vinh). *Tìm tất cả các hàm số  $f(x)$  thỏa*

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2f(x) + \frac{3}{x-1}, \quad \forall x \neq 1.$$

**Bài toán 83** ([VMS23], 6.7, p. 41, DH Trà Vinh). *Tìm tất cả các hàm số  $f(x) \in C^1([0, 1])$  thỏa  $f(1) = ef(0)$  &*

$$\int_0^1 \left( \frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 dx \leq 1.$$

**Bài toán 84** ([VMS24], p. 38, 6.1, HUS). *Cho  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  là 1 hàm khả vi thỏa  $(f'(x))^2 - 3f'(x) + 2 = 0, \forall x \in (0, 1)$ . Tìm  $f$ . (b) [HM] Mở rộng bài toán cho dạng phương trình hàm phức tạp hơn.*

## 9 Fourier transform – Biến đổi Fourier

**Resources – Tài nguyên.**

1. [Tao12]. TERENCE TAO. *Higher Order Fourier Analysis*.

### 9.1 Discrete Fourier transform – Biến đổi Fourier rời rạc

See, e.g., [Wikipedia/discrete Fourier transform](#). In mathematics, the *discrete Fourier transform (DFT)* converts a finite sequence of equally-spaced **samples** of a function into a same-length sequence of equally-spaced samples of the **discrete-time Fourier transform (DTFT)**, which is a complex-valued function of frequency. The interval at which the DTFT is sampled is the reciprocal of the duration of the input sequence.

**Definition 7** (Discrete Fourier transform). *The discrete Fourier transform transforms a **sequence** of  $N$  complex numbers  $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=0}^{N-1} := x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$  into another sequence of complex numbers,  $\mathbf{X} = \{X_n\}_{n=0}^{N-1} := X_0, X_1, \dots, X_{N-1}$  defined by*

$$X_k := \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi \frac{k}{N}n}. \quad (\text{dFt})$$

*The transform is sometimes denoted by the symbol  $\mathcal{F}$ , as in  $\mathbf{X} = \mathcal{F}\{\mathbf{x}\}$  or  $\mathcal{F}(\mathbf{x})$  or  $\mathcal{F}\mathbf{x}$ .*

## 10 Miscellaneous

### 10.1 See also

1. [Str20]. STEVEN STROGATZ. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe*.
2. [Str24]. STEVEN STROGATZ. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe – Sức Mạnh Vô Hạn: Giải Tích Toán Khám Phá Bí Mật Của Vũ Trụ Như Thế Nào?*.

**Nhận xét.** 1 quyển sách hay về thường thức về lịch sử phát triển của Giải tích Toán học & các ý tưởng cơ bản nhất của Giải tích. Khuyến khích đọc thử, cũng như các tác phẩm thường thức Khoa học Tự nhiên nói chung & Toán học nói riêng khác của tác giả STEVEN STROGATZ.

3. TS. HUỖNH QUANG VŨ. *Các Bài Giảng Giải Tích*. <https://sites.google.com/view/hquv/teaching>.
  - Bộ Môn Giải Tích, Khoa Toán - Tin học, Faculty of Mathematics & Computer Science, HCMUS. [Giáo Trình Vi Tích Phân 1](#).
  - Bộ Môn Giải Tích, Khoa Toán - Tin học, Faculty of Mathematics & Computer Science, HCMUS. [Giáo Trình Vi Tích Phân 2](#).
4. *Vietnamese Mathematical Olympiad for High School- & College Students (VMC) – Olympic Toán Học Học Sinh & Sinh Viên Toàn Quốc*.  
 PDF: URL: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/blob/main/VMC/NQBH\\_VMC.pdf](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/VMC/NQBH_VMC.pdf).  
 T<sub>E</sub>X: URL: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/blob/main/VMC/NQBH\\_VMC.tex](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/VMC/NQBH_VMC.tex).
  - Codes:
    - C++ code: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/tree/main/VMC/C++](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/C++).
    - Python code: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/tree/main/VMC/Python](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/Python).
  - Resource: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/tree/main/VMC/resource](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/resource).
  - Figures: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/tree/main/VMC/figure](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/figure).

## 5. Olympic Tin Học Sinh Viên OLP & ICPC.

PDF: URL: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/blob/main/OLP\\_ICPC/NQBH\\_OLP\\_ICPC.pdf](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/OLP_ICPC/NQBH_OLP_ICPC.pdf).

TEX: URL: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/blob/main/OLP\\_ICPC/NQBH\\_OLP\\_ICPC.tex](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/OLP_ICPC/NQBH_OLP_ICPC.tex).

- Codes:

- C: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/tree/main/OLP\\_ICPC/C](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/OLP_ICPC/C).

- C++: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/tree/main/OLP\\_ICPC/C++](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/OLP_ICPC/C++).

- Python: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/tree/main/OLP\\_ICPC/Python](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/OLP_ICPC/Python).

## Tài liệu

- [Rud76] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*. Third. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 1976, pp. x+342.
- [Str20] Steven Strogatz. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe*. Mariner Books, 2020, p. 400.
- [Str24] Steven Strogatz. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe – Sức Mạnh Vô Hạn: Giải Tích Toán Khám Phá Bí Mật Của Vũ Trụ Như Thế Nào?* Phạm Văn Thiều dịch. Nhà Xuất Bản Trẻ, 2024, p. 486.
- [Tao12] Terence Tao. *Higher order Fourier analysis*. Vol. 142. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012, pp. x+187. ISBN: 978-0-8218-8986-2. DOI: [10.1090/gsm/142](https://doi.org/10.1090/gsm/142). URL: <https://doi.org/10.1090/gsm/142>.
- [Tao22a] Terence Tao. *Analysis I*. Vol. 37. Texts and Readings in Mathematics. Fourth edition [of 2195040]. Hindustan Book Agency, New Delhi, [2022] ©2022, pp. xvi+355. ISBN: 978-81-951961-9-7.
- [Tao22b] Terence Tao. *Analysis II*. Vol. 38. Texts and Readings in Mathematics. Fourth edition [of 2195041]. Springer, Singapore; Hindustan Book Agency, New Delhi, [2022] ©2022, pp. xvii+195. ISBN: 978-9-81197-284-3. DOI: [10.1007/978-981-19-7284-3](https://doi.org/10.1007/978-981-19-7284-3). URL: <https://doi.org/10.1007/978-981-19-7284-3>.
- [Thá+23a] Đỗ Đức Thái, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang. *Toán 6 Tập 1*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2023, p. 128.
- [Thá+23b] Đỗ Đức Thái, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang. *Toán 6 Tập 2*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2023, p. 108.
- [VMS23] Hội Toán Học Việt Nam VMS. *Kỷ Yếu Kỳ Thi Olympic Toán Học Sinh Viên–Học Sinh Lần Thứ 29*. Huế 2–8/4/2023. VMS, 2023, p. 141.
- [VMS24] Hội Toán Học Việt Nam VMS. *Kỷ Yếu Kỳ Thi Olympic Toán Học Sinh Viên–Học Sinh Lần Thứ 30*. Đà Nẵng 8–13/4/2024. VMS, 2024, p. 112.
- [WS10] Robert Wrede and Murray R. Spiegel. *Advanced Calculus*. 3rd edition. Schaum’s Outline Series. McGraw Hill, 2010, p. 456. ISBN: 978-0071623667.