Thuật toán tối ưu
Bài tập lần 2

Đoàn Trần Nguyên Tùng
MSSV: 1411352

Ngày 28 tháng 5 năm 2018

Bài 1: Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + 5y^2) + x + y \tag{1}$$

(a) Chứng minh f là hàm lồi.

(b) Tìm cực tiểu (x^*, y^*) của f trên $\mathbb{R}^2$.

(c) Bằng thuật toán hướng giảm nhanh nhất với hướng soát chính xác, xuất phát từ điểm $(x_0, y_0) = (0, 0)$, hãy trình bày bước lặp đầu tiên.

(d) Bằng thuật toán hướng giảm nhanh nhất với hướng soát chính xác, xuất phát từ điểm $(x_0, y_0) = (0, 0)$, ta được một dãy $\{(x_k, y_k)\}$. Hãy tìm số k nhỏ nhất sao cho

$$|f(x_k, y_k) - f(x^*, y^*)| \leq 10^{-2} \tag{2}$$

Giải:
(a) Ta tính được

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} x + 1 \\ 5y + 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

và

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Các trị riêng của $\nabla^2 f(x, y)$ là

$$\begin{cases} \lambda_1 & = 1 \\ \lambda_2 & = 5 \end{cases} \tag{5}$$

Ta thấy các trị riêng này đều dương ngặt với mọi (x, y) trên miền $\mathbb{R}^2$, do đó f là hàm lồi ngặt.

(b) Do f là hàm lồi nên (x^*, y^*) là điểm đạt cực tiểu của f khi và chỉ khi $\nabla f(x^*, y^*) = 0$.
Xét hệ $\nabla f(x^*, y^*) = 0$, ta có

$$\begin{cases} x^* + 1 & = 0 \\ 5y^* + 1 & = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Giải hệ này ta được

$$(x^*, y^*) = \left(-1, -\frac{1}{5}\right) \tag{7}$$

(c) Ta chọn được hướng giảm

$$d_0 = -\nabla f(x_0, y_0)^\top = -\begin{bmatrix} x_0 + 1 \\ 5y_0 + 1 \end{bmatrix}^\top = -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^\top = -(1,1) \tag{8}$$

Ta sẽ tìm bước nhảy t_0 sao cho

$$\begin{align} f((x_0, y_0) + t_0 d_0) &= f(x_0 - t_0, y_0 - t_0) \tag{9} \\ &= \frac{1}{2}((x_0 - t_0)^2 + 5(y_0 - t_0)^2) + (x_0 - t_0) + (y_0 - t_0) \tag{10} \\ &= \frac{1}{2}((0 - t_0)^2 + 5(0 - t_0)^2) + (0 - t_0) + (0 - t_0) \tag{11} \\ &= \frac{1}{2}(t_0^2 + 5t_0^2) - t_0 - t_0 \tag{12} \\ &= 3t_0^2 - 2t_0 \tag{13} \end{align}$$

đạt cực tiểu.
Lấy đạo hàm $f((x_0, y_0) + t_0 d_0)$ theo t_0, ta được

$$\begin{align} \frac{d}{dt_0} f((x_0, y_0) + t_0 d_0) &= \frac{d}{dt_0}(3t_0^2 - 2t_0) \tag{14} \\ &= 6t_0 - 2 \tag{15} \end{align}$$

Lấy đạo hàm bậc 2 của $f((x_0, y_0) + t_0 d_0)$ theo t_0, ta được

$$\begin{align} \frac{d^2}{dt_0^2} f((x_0, y_0) + t_0 d_0) &= \frac{d}{dt_0}(6t_0 - 2) \tag{16} \\ &= 6 \tag{17} \end{align}$$

Ta thấy $\frac{d^2}{dt_0^2} f((x_0, y_0) + t_0 d_0) = 6 > 0$ với mọi t_0. Suy ra $f((x_0, y_0) + t_0 d_0)$ là hàm lồi ngặt.
Do đó, t_0 để $f((x_0, y_0) + t_0 d_0)$ đạt cực tiểu khi và chỉ khi

$$\frac{d}{dt_0} f((x_0, y_0) + t_0 d_0) = 0 \tag{18}$$

Tức là

$$6t_0 - 2 = 0 \tag{19}$$

Giải ra ta được

$$t_0 = \frac{1}{3} \tag{20}$$

Vậy sau bước lặp đầu tiên của thuật toán hướng giảm nhanh nhất với hướng soát chính xác, ta thu được

$$\begin{align} (x_1, y_1) &= (x_0, y_0) + t_0 d_0 \tag{21} \\ &= (0,0) - \frac{1}{3}(1,1) \tag{22} \\ &= -\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \tag{23} \end{align}$$

(d) Giả sử ta có kết quả của bước lặp thứ n là (x_n, y_n). Để tiếp tục bước $n+1$, ta chọn hướng giảm

$$d_n = -\nabla f(x_n, y_n)^\top = -\begin{bmatrix} x_n + 1 \\ 5y_n + 1 \end{bmatrix}^\top = -(x_n + 1, 5y_n + 1) \tag{24}$$

Ta sẽ tìm bước nhảy t_n sao cho

$$f((x_n,y_n)+t_nd_n) = f(x_n - t_n(x_n+1), y_n - t_n(5y_n+1)) \tag{25}$$
$$= \frac{1}{2}(x_n - t_n(x_n+1))^2 + 5(y_n - t_n(5y_n+1))^2) \tag{26}$$
$$+ (x_n - t_n(x_n+1)) + (y_n - t_n(5y_n+1)) \tag{27}$$
$$= \frac{1}{2}(x_n - t_n(x_n+1))^2 + 5(y_n - t_n(5y_n+1))^2) \tag{28}$$
$$+ x_n + y_n - t_n(x_n + 5y_n + 2) \tag{29}$$

Lấy đạo hàm $f((x_n,y_n)+t_nd_n)$ theo t_n, ta được

$$\frac{d}{dt_n}f((x_n,y_n)+t_nd_n) = -(x_n+1)(x_n - t_n(x_n+1)) - 5(5y_n+1)(y_n - t_n(5y_n+1)) \tag{30}$$
$$- x_n - 5y_n - 2 \tag{31}$$

Lấy đạo hàm bậc 2 của $f((x_n,y_n)+t_nd_n)$ theo t_n, ta được

$$\frac{d^2}{dt_n^2}f((x_n,y_n)+t_nd_n) = (x_n+1)^2 + 5(5y_n+1)^2 \tag{32}$$

Ta thấy $\frac{d^2}{dt_n^2}f((x_n,y_n)+t_nd_n) \geq 0$ với mọi t_n. Suy ra $f((x_n,y_n)+t_nd_n)$ là hàm lồi.
Do đó, t_n để $f((x_n,y_n)+t_nd_n)$ đạt cực tiểu khi và chỉ khi

$$\frac{d}{dt_n}f((x_n,y_n)+t_nd_n) = 0 \tag{33}$$

Tức là

$$-(x_n+1)(x_n - t_n(x_n+1)) - 5(5y_n+1)(y_n - t_n(5y_n+1)) - x_n - 5y_n - 2 = 0 \tag{34}$$

Giải ra ta được

$$t_n = \frac{x_n(x_n+1) + 5y_n(5y_n+1) + x_n + 5y_n + 2}{(x_n+1)^2 + 5(5y_n+1)^2} \tag{35}$$

Để ý rằng ta cần tránh trường hợp $(x_n,y_n) = \left(-1, -\frac{1}{5}\right)$
Thực hiện bước tiếp theo của thuật toán hướng giảm nhanh nhất với hướng soát chính xác, ta thu được

$$(x_{n+1},y_{n+1}) = (x_n,y_n) + t_nd_n \tag{36}$$

Ta sẽ dùng Matlab để chạy thuật toán này. Đặt các hàm

```
function fn = f(x,y)
fn = (x^2 + 5*y^2)/2 + x + y;
```

```
function dn = d(x,y)
dn = -[x+1;5*y+1];
```

```
function tn = t(x,y)
tn = (x*(x+1)+5*y*(5*y+1) + x + 5*y + 2)/((x+1)^2 + 5*(5*y+1)^2);
```

và chạy

```
e = 1e-2;
x0 = [0;0];
x1 = x0 + t(x0(1),x0(2))*d(x0(1),x0(2));
k=1;
while (abs(f(x1(1),x1(2))-f(-1,-1/5))>e)
x0 = x1;
x1 = x0 + t(x0(1),x0(2))*d(x0(1),x0(2));
k=k+1;
end
fprintf('k = %d',k);
```

Ta sẽ thu được $k = 6$ là số k nhỏ nhất sao cho

$$|f(x_k, y_k) - f(x^*, y^*)| \leq 10^{-2} \tag{37}$$

Bài 2: Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - c^\top x \tag{38}$$

Trong đó $A = \text{diag}(1, 5, 25)$ là ma trận đường chéo và $c = [-1, -1, -1]^\top$

(a) Chứng minh f là hàm lồi.

(b) Tìm cực tiểu (x^*, y^*) của f trên $\mathbb{R}^3$.

(c) Bằng thuật toán hướng giảm nhanh nhất với hướng soát chính xác, xuất phát từ điểm $x_0 = [0, 0, 0]^\top$, hãy trình bày bước lặp đầu tiên.

Giải:
(a) Cho

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{39}$$

Ta có thể viết $f(x)$ lại là

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}x^\top Ax - c^\top x && (40)\\ &= \frac{1}{2}[x_1 \;\; x_2 \;\; x_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [1 \;\; 1 \;\; 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} && (41)\\ &= \frac{1}{2}\left(x_1^2 + 5x_2^2 + 25x_3^2\right) + x_1 + x_2 + x_3 && (42) \end{aligned}$$

Ta tính được gradient của f là

$$\begin{aligned} \nabla f(x) &= \begin{bmatrix} x_1 + 1 \\ 5x_2 + 1 \\ 25x_3 + 1 \end{bmatrix} && (43)\\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} && (44)\\ &= Ax - c && (45) \end{aligned}$$

Ta cũng tính được ma trận Hess của f là

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix} = A \tag{46}$$

Ta thấy $\nabla^2 f(x) = A$ có các trị riêng là

$$\begin{cases} \lambda_1 & = 1 \\ \lambda_2 & = 5 \\ \lambda_3 & = 25 \end{cases} \tag{47}$$

Do các trị riêng này đều dương ngặt với mọi $x \in \mathbb{R}^3$ nên f là hàm lồi ngặt.
(b) Do f là hàm lồi nên x^* là điểm đạt cực tiểu của f khi và chỉ khi $\nabla f(x^*) = 0$
Ta có

$$\nabla f(x^*) = 0 \Leftrightarrow Ax^* - c = 0 \tag{48}$$

Giải ra ta được

$$x^* = A^{-1}c = -\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{25} \end{bmatrix} \tag{49}$$

(c) Ta chọn hướng giảm

$$d_0 = -\nabla f(x_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -c \tag{50}$$

Ta sẽ tìm bước nhảy $t_0 \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{aligned} f(x_0 + t_0 d_0) &= \frac{1}{2}(x_0 + t_0 d_0)^\top A(x_0 + t_0 d_0) - c^\top (x_0 + t_0 d_0) && (51) \\ &= \frac{t_0^2}{2} d_0^\top A d_0 - t_0 c^\top d_0 && (52) \\ &= \frac{t_0^2}{2} c^\top A c + t_0 c^\top c && (53) \\ &= \frac{t_0^2}{2}(1 + 5 + 25) + 3t_0 && (54) \\ &= \frac{31}{2} t_0^2 + 3t_0 && (55) \end{aligned}$$

đạt cực tiểu.
Lấy đạo hàm của $f(x_0 + t_0 d_0)$ theo t_0, ta được

$$\frac{d}{dt_0} f(x_0 + t_0 d_0) = 31t_0 + 3 \tag{56}$$

Lấy đạo hàm cấp 2 của $f(x_0 + t_0 d_0)$ theo t_0, ta được

$$\frac{d^2}{dt_0^2} f(x_0 + t_0 d_0) = 31 \tag{57}$$

Ta thấy $\frac{d^2}{dt_0^2} f(x_0 + t_0 d_0) = 31 > 0$ với mọi t_0 nên f là hàm lồi.
Do f là hàm lồi nên t_0 là điểm đạt cựctiểu của $f(x_0 + t_0 d_0)$ khi và chỉ khi

$$\frac{d}{dt_0} f(x_0 + t_0 d_0) = 0 \tag{58}$$

Tức là

$$31t_0 + 3 = 0 \tag{59}$$

Giải ra ta được

$$t_0 = -\frac{3}{31} \tag{60}$$

Vậy sau bước lặp đầu tiên của thuật toán hướng giảm nhanh nhất với hướng soát chính xác, ta thu được

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + t_0 d_0 && (61) \\ &= t_0 d_0 && (62) \\ &= -\frac{3}{31}(-c) && (63) \\ &= \frac{3}{31} c && (64) \\ &= -\frac{3}{31} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} && (65) \end{aligned}$$

Bài 3: Cho 2 ánh xạ $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x,y) = (x-y+1)^2 + (2x-y)^2 \tag{66}$$
$$g(x,y) = (x+y)^2 + (-2x+y+1)^2 \tag{67}$$

(a) Chứng minh f, g là các hàm lồi

(b) Tìm các cực tiểu của f, g trên $\mathbb{R}^2$

(c) Bằng thuật toán hướng giảm nhanh nhất với hướng soát chính xác, xuất phát từ điểm $(x_0, y_0) = (0, 0)$, giá trị của hàm f hay hàm g sẽ hội tụ về giá trị tối ưu nhanh hơn ?

Giải:
(a)
• Ta tính được

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 10x - 6y + 2 \\ -6x + 4y - 2 \end{bmatrix} \tag{68}$$

và

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \tag{69}$$

Ta thấy $\nabla^2 f(x,y)$ có các trị riêng là

$$\begin{cases} \lambda_{f,1} & = 7 - 3\sqrt{5} \\ \lambda_{f,2} & = 7 + 3\sqrt{5} \end{cases} \tag{70}$$

Các trị riêng này đều dương ngặt. Do đó, f là hàm lồi ngặt.
• Tương tự, ta tính được

$$\nabla g(x,y) = \begin{bmatrix} 10x - 2y - 4 \\ -2x + 4y + 2 \end{bmatrix} \tag{71}$$

và

$$\nabla^2 g(x,y) = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \tag{72}$$

Ta thấy $\nabla^2 g(x,y)$ có các trị riêng là

$$\begin{cases} \lambda_{g,1} & = 7 - \sqrt{13} \\ \lambda_{g,2} & = 7 + \sqrt{13} \end{cases} \tag{73}$$

Các trị riêng này đều dương ngặt. Do đó, g là hàm lồi ngặt.
(b)
• Do f là hàm lồi nên $(x^{f,*}, y^{f,*})$ llà điểm đạt cực tiểu của f khi và chỉ khi

$$\nabla f(x^{f,*}, y^{f,*}) = 0 \tag{74}$$

Giải hệ này ta được

$$(x^{f,*}, y^{f,*}) = (1, 2) \tag{75}$$

• Do g là hàm lồi nên $(x^{g,*}, y^{g,*})$ llà điểm đạt cực tiểu của g khi và chỉ khi

$$\nabla g(x^{g,*}, y^{g,*}) = 0 \tag{76}$$

Giải hệ này ta được

$$(x^{g,*}, y^{g,*}) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \tag{77}$$

(c)
• Bằng thuật toán hướng giảm nhanh nhất với hướng soát chính xác, xuất phát từ điểm $(x_0, y_0) = (0, 0)$, ta có

$$\begin{cases} f \in C^2(\mathbb{R}^2) \\ \nabla^2 f(x^{f,*}, y^{f,*}) \text{ xác định dương} \\ (x_{f,k}, y_{f,k}) \xrightarrow[\text{exact line search}]{\text{steepest descent}} (x^{f,*}, y^{f,*}) \end{cases} \tag{78}$$

Theo **Định lý 3.2.1** trong giáo trình, ta có

$$|f(x_{f,k+1}, y_{f,k+1}) - f(x^{f,*}, y^{f,*})| \leq \left[\frac{M_f - m_f}{M_f + m_f}\right]^2 |f(x_{f,k}, y_{f,k}) - f(x^{f,*}, y^{f,*})| \tag{79}$$

Với M_f và m_f lần lượt là trị riêng lớn nhất và nhỏ nhất của $\nabla^2 f(x^{f,*}, y^{f,*})$. Cụ thể, ta tính được

$$\left[\frac{M_f - m_f}{M_f + m_f}\right]^2 = \left[\frac{(7 + 3\sqrt{5}) - (7 - 3\sqrt{5})}{(7 + 3\sqrt{5}) + (7 - 3\sqrt{5})}\right]^2 \tag{80}$$

$$= \left[\frac{6\sqrt{5}}{14}\right]^2 \tag{81}$$

$$= \frac{45}{49} \tag{82}$$

• Tương tự, khi sử dụng thuật toán này với g và sử dụng **Định lý 3.2.1**, ta có

$$|g(x_{g,k+1}, y_{g,k+1}) - g(x^{g,*}, y^{g,*})| \leq \left[\frac{M_g - m_g}{M_g + m_g}\right]^2 |g(x_{g,k}, y_{g,k}) - g(x^{g,*}, y^{g,*})| \tag{83}$$

Với M_g và m_g lần lượt là trị riêng lớn nhất và nhỏ nhất của $\nabla^2 g(x^{g,*}, y^{g,*})$. Cụ thể, ta tính được

$$\left[\frac{M_g - m_g}{M_g + m_g}\right]^2 = \left[\frac{(7 + \sqrt{13}) - (7 - \sqrt{13})}{(7 + \sqrt{13}) + (7 - \sqrt{13})}\right]^2 \tag{84}$$

$$= \left[\frac{2\sqrt{13}}{14}\right]^2 \tag{85}$$

$$= \frac{13}{49} \tag{86}$$

Từ đây, do $\frac{13}{49} < \frac{45}{49}$, ta *dự đoán* thuật toán hội tụ nhanh hơn đối với hàm g.

Bài 4: Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{a}{2}y^2 \tag{87}$$

Với $a \geq 1$.
Bằng thuật toán hướng giảm nhanh nhất với hướng soát chính xác, xuất phát từ điểm $(x_0, y_0) = (a, 1)$, bằng phương pháp quy nạp hãy chứng minh bước lặp thứ k sẽ là

$$(x_k, y_k) = \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^k \left(a, (-1)^k\right) \tag{88}$$

Giải:
Ta tính được

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ ay \end{bmatrix} \tag{89}$$

và

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \tag{90}$$

Giả sử ta có kết quả của bước lặp thứ n là (x_n, y_n). Để tiếp tục bước $n + 1$, ta chọn hướng giảm

$$d_n = -\nabla f(x_n, y_n)^\top = -\begin{bmatrix} x_n \\ ay_n \end{bmatrix}^\top = -(x_n, ay_n) \tag{91}$$

Ta sẽ tìm bước nhảy t_n sao cho

$$f((x_n, y_n) + t_n d_n) = f(x_n - t_n x_n, y_n - at_n y_n) \tag{92}$$

$$= \frac{1}{2}(x_n - t_n x_n)^2 + \frac{a}{2}(y_n - at_n y_n)^2 \tag{93}$$

Lấy đạo hàm $f((x_n, y_n) + t_n d_n)$ theo t_n, ta được

$$\frac{d}{dt_n} f((x_n, y_n) + t_n d_n) = -x_n(x_n - t_n x_n) - a^2 y_n(y_n - at_n y_n) \tag{94}$$

Lấy đạo hàm bậc 2 của $f((x_n, y_n) + t_n d_n)$ theo t_n, ta được

$$\frac{d^2}{dt_n^2} f((x_n, y_n) + t_n d_n) = x_n^2 + a^3 y_n^2 \tag{95}$$

Ta thấy $\frac{d^2}{dt_n^2} f((x_n, y_n) + t_n d_n) \geq 0$ với mọi t_n. Suy ra $f((x_n, y_n) + t_n d_n)$ là hàm lồi.
Do đó, t_n để $f((x_n, y_n) + t_n d_n)$ đạt cực tiểu khi và chỉ khi

$$\frac{d}{dt_n} f((x_n, y_n) + t_n d_n) = 0 \tag{96}$$

Tức là

$$-x_n(x_n - t_n x_n) - a^2 y_n(y_n - at_n y_n) = 0 \tag{97}$$

Giải ra ta được

$$t_n = \frac{x_n^2 + a^2 y_n^2}{x_n^2 + a^3 y_n^2} \tag{98}$$

Để ý rằng ta cần tránh trường hợp $x_n = y_n = 0$
Thực hiện bước tiếp theo của thuật toán hướng giảm nhanh nhất với hướng soát chính xác, ta thu được

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n, y_n) + t_n d_n \tag{99}$$

Xuất phát từ $(x_0, y_0) = (a, 1)$, ta có hướng giảm

$$d_0 = -(a, a) \tag{100}$$

và bước giảm

$$t_0 = \frac{2a^2}{a^2 + a^3} = \frac{2}{1+a} \tag{101}$$

Từ đó ta có bước tiếp theo là

$$\begin{aligned}
(x_1, y_1) =& (x_0, y_0) + t_0 d_0 & (102)\\
=& (a, 1) - \frac{2}{1+a}(a, a) & (103)\\
=& \left(\frac{a(a-1)}{a+1}, \frac{-(a-1)}{a+1}\right) & (104)\\
=& \frac{a-1}{a+1}(a, -1) & (105)
\end{aligned}$$

Tương tự, với bước tiếp theo, ta có hướng soát

$$d_1 = -\frac{a-1}{a+1}(a, -a) \tag{106}$$

và bước soát

$$t_1 = \frac{2a^2}{a^2 + a^3} = \frac{2}{1+a} \tag{107}$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned}
(x_2, y_2) =& (x_1, y_1) + t_1 d_1 & (108)\\
=& \frac{a-1}{a+1}(a, -1) - \frac{2}{1+a}\frac{a-1}{a+1}(a, -a) & (109)\\
=& \frac{a-1}{a+1}\left((a, -1) - \frac{2}{1+a}(a, -a)\right) & (110)\\
=& \frac{a-1}{a+1}\left(\frac{a(a-1)}{a+1}, \frac{a-1}{a+1}\right) & (111)\\
=& \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2 (a, 1) & (112)
\end{aligned}$$

• Ta đặt giả thiết quy nạp

$$(x_k, y_k) = \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^k \left(a, (-1)^k\right) \tag{113}$$

với $k \geq 0$.
• Ta cần chứng minh

$$(x_{k+1}, y_{k+1}) = \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{k+1} \left(a, (-1)^{k+1}\right) \tag{114}$$

Sử dụng (91) ta có hướng soát

$$
\begin{aligned}
d_k =& - (x_k, ay_k) && (115)\\
=& - \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^k \left(a, (-1)^k a\right) && (116)
\end{aligned}
$$

Sử dụng (98) ta có bước soát

$$
\begin{aligned}
t_k =& \frac{x_k^2 + a^2 y_k^2}{x_k^2 + a^3 y_k^2} && (117)\\
=& \frac{a^2 + a^2(-1)^{2k}}{a^2 + a^3(-1)^{2k}} && (118)\\
=& \frac{a^2 + a^2}{a^2 + a^3} && (119)\\
=& \frac{2}{1+a} && (120)
\end{aligned}
$$

Sử dụng (99) ta có

$$
\begin{aligned}
(x_{k+1}, y_{k+1}) =& (x_k, y_k) + t_k d_k && (121)\\
=& \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^k \left(a, (-1)^k\right) - \frac{2}{1+a} \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^k \left(a, (-1)^k a\right) && (122)\\
=& \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^k \left[\left(a, (-1)^k\right) - \frac{2}{1+a} \left(a, (-1)^k a\right)\right] && (123)\\
=& \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^k \left(\frac{a(a-1)}{a+1}, \frac{(-1)^k(a+1) - 2a(-1)^k}{a+1}\right) && (124)\\
=& \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^k \left(\frac{a(a-1)}{a+1}, \frac{(-1)^k(1-a)}{a+1}\right) && (125)\\
=& \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^k \left(\frac{a(a-1)}{a+1}, \frac{(-1)^{k+1}(a-1)}{a+1}\right) && (126)\\
=& \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{k+1} \left(a, (-1)^{k+1}\right) && (127)
\end{aligned}
$$

Vậy ta có điều cần chứng minh.

Bài 5: Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(-2x + y)^2 + y^4 \tag{128}$$

Xác định hướng Newton tại điểm $(1, 2)$
Giải:
Ta tính được

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 4x - 2y \\ -2x + y + 4y^3 \end{bmatrix} \tag{129}$$

và

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 12 * y^2 + 1 \end{bmatrix} \tag{130}$$

Ta có thể tìm hướng giảm $d(x, y)$ tại (x, y) bằng cách giải hệ

$$\nabla^2 f(x, y) d(x, y)^\top = \nabla f(x, y) \tag{131}$$

Giải ra ta được

$$d(x, y)^\top = \begin{bmatrix} x - \dfrac{y}{3} \\ \dfrac{y}{3} \end{bmatrix} \tag{132}$$

hay

$$d(x, y) = \left(x - \frac{y}{3}, \frac{y}{3}\right) \tag{133}$$

Như vậy, ta điểm $(1, 2)$, ta có hướng giảm

$$d(1, 2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \tag{134}$$

Bài 6: Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x,y) = (x-y)^2 + (2x+y-3)^2 \tag{135}$$

(a) Chứng minh f là hàm lồi

(b) Tìm cực tiểu (x^*, y^*) của f trên $\mathbb{R}^2$

(c) Bằng thuật toán Newton, xuất phát từ điểm $(x_0, y_0) = (0,0)$, hãy trình bày bước lặp đầu tiên để được (x_1, y_1). Có nhận xét gì về điểm (x_1, y_1)

Giải:
(a) Ta tính được

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 10x + 2y - 12 \\ 2x + 4y - 6 \end{bmatrix} \tag{136}$$

và

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \tag{137}$$

Các trị riêng của $\nabla^2 f(x,y)$ là

$$\begin{cases} \lambda_1 & = 7 - \sqrt{13} \\ \lambda_2 & = 7 + \sqrt{13} \end{cases} \tag{138}$$

Ta thấy các trị riêng này đều dương ngặt với mọi (x,y) trên miền $\mathbb{R}^2$, do đó f là hàm lồi ngặt.

(b) Do f là hàm lồi nên (x^*, y^*) là điểm đạt cực tiểu của f khi và chỉ khi $\nabla f(x^*, y^*) = 0$.
Xét hệ $\nabla f(x^*, y^*) = 0$, ta có

$$\begin{cases} 10x^* + 2y^* - 12 & = 0 \\ 2x^* + 4y^* - 6 & = 0 \end{cases} \tag{139}$$

Giải hệ này ta được

$$(x^*, y^*) = (1,1) \tag{140}$$

(c) Gọi $d(x,y)$ là hướng giảm của thuật toán Newton tại điểm (x,y), ta có thể tìm $d(x,y)^\top$ bằng cách giải hệ

$$\nabla^2 f(x,y) d(x,y)^\top = -\nabla f(x^*, y^*) \tag{141}$$

Giải ra ta được

$$d(x,y)^\top = \begin{bmatrix} 1-x \\ 1-y \end{bmatrix} \tag{142}$$

hay

$$d(x,y) = (1-x, 1-y) \tag{143}$$

Xuất phát từ điểm $(x_0, y_0) = (0,0)$, ta có hướng giảm

$$\begin{aligned} d_0 &= d(x_0, y_0) \tag{144} \\ &= (1-0, 1-0) \tag{145} \\ &= (1,1) \tag{146} \end{aligned}$$

Ta có bước tiếp theo của thuật toán Newton là

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= (x_0, y_0) + d_0 \tag{147} \\ &= (0,0) + (1,1) \tag{148} \\ &= (1,1) \tag{149} \end{aligned}$$

Để ý thấy $(x_1, y_1) = (x^*, y^*)$, tức là ta chỉ cần 1 bước lặp của thuật toán Newton để đạt nghiệm chính xác.

Bài 7: Bằng thuật toán pure Newton (hướng soát t = 1),với điểm xuất phát tự chọn, hãy xây dựng một dãy lặp $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ để tìm cực tiểu của bài toán

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\text{Min}}\, f(x) \tag{150}$$

với

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 \tag{151}$$

Hãy cho biết x_k có hội tụ toàn phương về điểm cực tiểu hay không.
Giải: Ta tính được

$$\nabla f(x) = x^3 \tag{152}$$

và

$$\nabla^2 f(x) = 3x^2 \tag{153}$$

Do $\nabla^2 f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên f là hàm lồi.
Khi đó, x^* là điểm cực tiểu của f khi và chỉ khi $\nabla f(x) = 0$. Giải ra ta được

$$x^* = 0 \tag{154}$$

Đây là cực tiểu duy nhất của f.
Ta có hướng giảm pure Newton tại điểm x là

$$d(x) = -\nabla f(x) = -x^3 \tag{155}$$

Giả sử ta có bước lặp x_n, bước tiếp theo của thuật toán pure Newton là

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + d_n && (156)\\ &= x_n + d(x_n) && (157)\\ &= x_n - x_n^3 && (158)\\ &= x_n(1 - x_n^2) && (159) \end{aligned}$$

Theo định nghĩa, ta nói $x_n \to x^*$ theo tốc độ toàn phương nếu tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C\,|x_n - x^*|^2 \tag{160}$$

Đối với bài toán của chúng ta, (160) có thể được viết lại là

$$|x_{n+1}| \leq C\,|x_n|^2 \tag{161}$$

Từ đây ta thấy với $x_n \neq 0$,

$$C \geq \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|^2} = \frac{|x_n - x_n^3|}{|x_n|^2} = \left|\frac{x_{n+1}}{x_n^2}\right| = \left|\frac{x_n - x_n^3}{x_n^2}\right| = \left|x_n - \frac{1}{x_n}\right| \tag{162}$$

Đặt hàm $h : \mathbb{R}\{0\} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$h(x) = \frac{x^3 - x}{x^2} = x - \frac{1}{x} \tag{163}$$

Ta tính được

$$\nabla h(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0,\ \ \forall x \in (0, +\infty) \tag{164}$$

Từ đó ta suy ra được h đồng biến trên $(0, +\infty)$.

Từ (162) có

$$C \geq |h(x_n)| \tag{165}$$

Để ý thấy $h(1) = 0$, nên ta suy ra được $x - \dfrac{1}{x} > 0$ với mọi $x > 1$.
Từ đó, nếu ta có dãy con $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ sao cho $x_{n_k} > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+$ và $\lim\limits_{k \to +\infty} x_{n_k} = +\infty$ thì ta cũng sẽ có

$$|h(x_{n_k})| = h(x_{n_k}) \to +\infty \text{ khi } k \to +\infty \tag{166}$$

Khi đó, ta kết luận được C không tồn tại.
Chọn điểm xuất phát là $x_0 = 2$, ta có

$$x_1 = x_0(1 - x_0^2) = 2(1 - 2^2) = -6 \tag{167}$$
$$x_2 = x_1(1 - x_1^2) = -6(1 - (-6)^2) = 210 \tag{168}$$
$$x_3 = x_2(1 - x_2^2) = 210(1 - 210^2) = -9260790 \tag{169}$$
$$x_4 = x_3(1 - x_3^2) = -9260790(1 - 9260790^2) = 794226015149981696000 \tag{170}$$

Với mọi $n \in \mathbb{Z}_+$, ta thấy

$$1 - x_n^2 < 0 \tag{171}$$

Mà

$$x_{n+1} = x_n(1 - x_n^2) \tag{172}$$

Nên ta có x_n đổi dấu sau mỗi bước lặp.
Do $x_0 = 2 > 0$ nên

$$x_{2n} > 0 \tag{173}$$

Do $1 - x_n^2 < -1$ nên

$$|x_{n+1}| = |x_n(1 - x_n^2)| = |x_n||1 - x_n^2| > |x_n| \tag{174}$$

Từ đó ta chọn được dãy con $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ xác định bởi

$$x_{n_k} = x_{2k} \tag{175}$$

Dãy này luôn dương và tăng dần sau mỗi bước lặp.
Như vậy, ta có thể kết luận C không tồn tại, tức là thuật toán này không hội tụ toàn phương về nghiệm.

Bài 8: Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 2x^3 + x^4 \tag{176}$$

(a) Tìm tất cả các điểm tới hạn của f trên $\mathbb{R}^2$

(b) Bằng thuật toán pure Newton, xuất phát từ điểm $(x_0, y_0) = (-1, 0)$, hãy trình bày bước lặp đầu tiên để được (x_1, y_1)

Giải:
(a) Ta tính được

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 4x^3 + 6x^2 + 4x - 2y \\ 2y - 2x \end{bmatrix} \tag{177}$$

Để tìm các điểm tới hạn của f, ta sẽ giải hệ $\nabla f(x, y) = 0$. Ta có

$$\begin{cases} 4x^3 + 6x^2 + 4x - 2y & = 0 \\ 2y - 2x & = 0 \end{cases} \tag{178}$$

Từ dòng 2 của (178), ta suy ra được

$$x = y \tag{179}$$

Thế lại vào dòng 1, ta được

$$4x^3 + 6x^2 + 2x = 0 \tag{180}$$

Giải ra ta được

$$\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -\dfrac{1}{2} \\ x = 0 \end{array}\right. \tag{181}$$

Như vậy, ta có các điểm tới hạn là

$$\begin{cases} (x_{c,1}, y_{c,1}) = (-1, -1) \\ (x_{c,2}, y_{c,2}) = \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right) \\ (x_{c,3}, y_{c,3}) = (0, 0) \end{cases} \tag{182}$$

(b) Ta có hướng giảm của thuật toán pure Newton tại (x, y) là

$$\begin{align} d(x, y) &= - \nabla f(x, y)^\top \tag{183} \\ &= - \begin{bmatrix} 4x^3 + 6x^2 + 4x - 2y \\ 2y - 2x \end{bmatrix}^\top \tag{184} \\ &= \left(4x^3 + 6x^2 + 4x - 2y, 2y - 2x\right) \tag{185} \end{align}$$

Tại điểm $(x_0, y_0) = (-1, 0)$, ta có

$$\begin{align} d_0 =& d(x_0, y_0) \tag{186} \\ =& (-4 + 6 - 4, 2) \tag{187} \\ =& (-2, 2) \tag{188} \end{align}$$

Qua một bước lặp của thuật toán pure Newton, ta có

$$\begin{align} (x_1, y_1) =& (x_0, y_0) + d_0 \tag{189} \\ =& (-1, 0) + (-2, 2) \tag{190} \\ =& (-3, 2) \tag{191} \end{align}$$

Bài 9: Xét bài toán sau

$$\underset{2x_1-x_2-1\leq 0}{\text{Min}}\ x_1^2+x_2^2 \tag{192}$$

(a) Chứng minh (192) là bài toán lồi, điều kiện Slater thỏa.

(b) Bằng điều kiện KKT, tìm nghiệm tối ưu $\boldsymbol{x}^*$ của (192).

(c) Xây dựng bài toán hàm chắn cho bài toán (254), tìm nghiệm $\bar{\boldsymbol{x}}(t)$ của bài toán hàm chắn. Chứng minh $\bar{\boldsymbol{x}}(t) \to \boldsymbol{x}^*$ khi $t \to 0^+$

Giải:
(a) Đặt

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 \tag{193}$$

Ta tính được

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \tag{194}$$

và

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{195}$$

Ta thấy $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ là ma trận xác định dương do $\boldsymbol{x}^\top \nabla^2 f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} = 2x_1^2 + 2x_2^2 > 0$ với mọi $\boldsymbol{x} \neq 0$. Do đó, f là hàm lồi ngặt.
Đặt

$$g(\boldsymbol{x}) = 2x_1 - x_2 - 1 \tag{196}$$

Ta tính được

$$\nabla g(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{197}$$

và

$$\nabla^2 g(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{198}$$

Ta thấy $\nabla^2 g(\boldsymbol{x})$ là ma trận nửa xác định dương do $\boldsymbol{x}^\top \nabla^2 g(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} = 0 \geq 0$ với mọi $\boldsymbol{x} \neq 0$. Do đó, g là hàm lồi.
Do f và g lồi nên (192) là bài toán lồi.
Đặt

$$\Omega = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^2;\ \ g(\boldsymbol{z}) \leq 0\} \tag{199}$$

là miền tìm nghiệm của bài toán.
Chọn $\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, ta có

$$g(\hat{\boldsymbol{x}}) = 2(-1) - 1 - 1 \tag{200}$$
$$= -4 \tag{201}$$
$$< 0 \tag{202}$$

Do đó, điều kiện Slater được thỏa.

(b) Ta có hàm Lagrange

$$L(\boldsymbol{x},\lambda) = f(\boldsymbol{x}) + \lambda g(\boldsymbol{x}) \tag{203}$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + \lambda(2x_1 - x_2 - 1) \tag{204}$$

Ta tính được

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}^*,\lambda) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2\lambda \\ 2x_2 - \lambda \end{bmatrix} \tag{205}$$

Do (192) là bài toán lồi và điều kiện Slater được thỏa nên $\boldsymbol{x}^*$ là nghiệm của (192) khi và chỉ khi hệ KKT được thỏa.
Hệ KKT cần thỏa là

$$\begin{cases} \nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}^*,\lambda) = 0 \\ \lambda \geq 0 \\ \lambda g(\boldsymbol{x}^*) = 0 \\ g(\boldsymbol{x}^*) \leq 0 \end{cases} \tag{206}$$

(206) có thể được viết lại là

$$\begin{cases} 2x_1^* + 2\lambda = 0 \\ 2x_2^* - \lambda = 0 \\ \lambda \geq 0 \\ \lambda\left(2x_1^* - x_2^* - 1\right) = 0 \\ 2x_1^* - x_2^* - 1 \leq 0 \end{cases} \tag{207}$$

Từ dòng 4 của (207), ta có 2 trường hợp sau
• **Trường hợp 1:** $\lambda = 0$
Khi đó dòng 4 của (207) được thỏa mãn và dòng 1, 2 trở thành

$$\begin{cases} 2x_1^* = 0 \\ 2x_2^* = 0 \end{cases} \tag{208}$$

Giải ra ta được

$$\begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 0 \end{cases} \tag{209}$$

Thay vào dòng 5 của (207), ta thấy

$$2x_1^* - x_2^* - 1 = 0 - 0 - 1 \tag{210}$$
$$= -1 \tag{211}$$
$$< 0 \tag{212}$$

Như vậy,

$$\boldsymbol{x}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{213}$$

là một nghiệm của bài toán (192).

• **Trường hợp 2:** $2x_1^* - x_2^* - 1 = 0$
Dòng 5 của (207) được thỏa.

Ta có

$$x_2^* = 2x_1^* - 1 \tag{214}$$

Từ dòng 2 của (207), ta có

$$\begin{aligned}\lambda =& 2x_2^* && (215)\\ =& 2(2x_1^* - 1) && (216)\\ =& 4x_1^* - 2 && (217)\end{aligned}$$

Thay vào dòng 1 của (207), ta được

$$\begin{aligned} & 2x_1^* + 2\lambda = 0\\ \Leftrightarrow\quad & 2x_1^* + 2(4x_1^* - 2) = 0\\ \Leftrightarrow\quad & 2x_1^* + 8x_1^* - 4 = 0\\ \Leftrightarrow\quad & 10x_1^* - 4 = 0\\ \Leftrightarrow\quad & x_1^* = \frac{2}{5}\end{aligned} \tag{218}$$

Từ đó ta tính được

$$\begin{aligned}x_2^* =& 2x_1^* - 1 && (219)\\ =& 2\frac{2}{5} - 1 && (220)\\ =& -\frac{1}{5} && (221)\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}\lambda =& 4x_1^* - 2 && (222)\\ =& 4\frac{2}{5} - 2 && (223)\\ =& -\frac{2}{5} && (224)\\ <& 0 && (225)\end{aligned}$$

Như vậy ta không nhận nghiệm này, tức là bài toán có nghiệm duy nhất

$$\boldsymbol{x}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{226}$$

(c) Ta có hàm chắn Logarithm

$$\begin{aligned}B(\boldsymbol{x}, t) =& f(\boldsymbol{x}) - t\ln(-g(\boldsymbol{x})) && (227)\\ =& x_1^2 + x_2^2 - t\ln\left(-(2x_1 - x_2 - 1)\right) && (228)\end{aligned}$$

• Do g là hàm lồi nên với mọi $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ và $s \in [0, 1]$, ta có

$$g(s\boldsymbol{x} + (1-s)\boldsymbol{y}) \le sg(\boldsymbol{x}) + (1-s)\boldsymbol{y} \tag{229}$$

Nhân 2 vế của bất đẳng thức (229), ta được

$$-g(s\boldsymbol{x} + (1-s)\boldsymbol{y}) \ge -sg(\boldsymbol{x}) - (1-s)g(\boldsymbol{y}) \tag{230}$$

Hay viết cách khác là

$$-g(s\boldsymbol{x} + (1-s)\boldsymbol{y}) \ge s(-g(\boldsymbol{x})) + (1-s)(-g(\boldsymbol{y})) \tag{231}$$

Từ đó ta suy ra được $-g$ là hàm lõm. Tương tự, nếu h là hàm lõm thì ta cũng chứng minh được $-h$ là hàm lồi.
• Ta đã có $-\ln$ là hàm lồi (ở bài tập lần 1), do điều vừa chứng minh, ta suy ra được ln là hàm lõm.
• Ta có ln là hàm đơn điệu tăng.
Ta cũng có $-g(\boldsymbol{z}) \geq 0 \ \forall \boldsymbol{z} \in \Omega$ và bất đẳng thức (231) nên với mọi $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ và $s \in [0,1]$ (thỏa $-g(s\boldsymbol{x} + (1-s)\boldsymbol{y}) > 0$?), ta có

$$\ln\left(-g(s\boldsymbol{x} + (1-s)\boldsymbol{y})\right) \geq \ln\left(s(-g(\boldsymbol{x})) + (1-s)(-g(\boldsymbol{y}))\right) \tag{232}$$

Do ln lõm nên ta có

$$\ln\left(s(-g(\boldsymbol{x})) + (1-s)(-g(\boldsymbol{y}))\right) \geq s\ln\left(-g(\boldsymbol{x})\right) + (1-s)\ln\left(-g(\boldsymbol{y})\right) \tag{233}$$

Như vậy, ta có

$$\ln\left(-g(s\boldsymbol{x} + (1-s)\boldsymbol{y})\right) \geq s\ln\left(-g(\boldsymbol{x})\right) + (1-s)\ln\left(-g(\boldsymbol{y})\right) \tag{234}$$

Từ đó ta suy ra được $\ln(-g)$ là hàm lõm và $-\ln(-g)$ là hàm lồi.
• Ta cũng chứng minh được $-t\ln(-g)$ là hàm lồi (do $t \in [0,1]$). và do f cũng là hàm lồi nên ta chứng minh được hàm chắn

$$B(\boldsymbol{x}, t) = f(\boldsymbol{x}) - t\ln(-g(\boldsymbol{x})) \tag{235}$$

là hàm lồi, với $t \in [0,1]$ được cố định.
• Xét bài toán

$$\operatorname*{Min}_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2} B(\boldsymbol{x}, t) \tag{236}$$

Ta tính được

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} B(\boldsymbol{x}, t) = \begin{bmatrix} 2x_1 + \dfrac{2t}{-2x_1 + x_2 + 1} \\ 2x_2 - \dfrac{t}{-2x_1 + x_2 + 1} \end{bmatrix} \tag{237}$$

Xét hệ $\nabla_{\boldsymbol{x}} B(\boldsymbol{x}, t) = \mathbf{0}$, ta có

$$\begin{cases} 2x_1 + \dfrac{2t}{-2x_1 + x_2 + 1} &= 0 \\ 2x_2 - \dfrac{t}{-2x_1 + x_2 + 1} &= 0 \end{cases} \tag{238}$$

Cộng 2 dòng của (238), ta được

$$2x_1 + 2x_2 = 0 \tag{239}$$

Từ đó suy ra được

$$x_2 = -x_1 \tag{240}$$

Thế vào dòng 1 của (238), ta được

$$\begin{aligned} 2x_1 + \frac{2t}{-3x_1 + 1} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad \frac{2x_1(-3x_1 + 1) + 2t}{-3x_1 + 1} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad -6x_1^2 + 2x_1 + 2t &= 0 \end{aligned} \tag{241}$$

Giải ra ta được

$$\left[\begin{array}{ll} x_1 = \dfrac{1+\sqrt{12t+1}}{6}, & x_2 = -\dfrac{1+\sqrt{12t+1}}{6} \\ x_1 = \dfrac{1-\sqrt{12t+1}}{6}, & x_2 = -\dfrac{1-\sqrt{12t+1}}{6} \end{array}\right. \tag{242}$$

Ta sẽ so các kết quả ở (242) với điều kiện $g(\boldsymbol{x}^*) < 0$.
Cụ thể, với dòng 1 của (242), ta có

$$\begin{align} 2x_1 - x_2 - 1 =& 3x_1 - 1 \tag{243} \\ =& \frac{3+3\sqrt{12t+1}}{6} \tag{244} \\ =& \frac{1+\sqrt{12t+1}}{2} \tag{245} \\ >& 0 \tag{246} \end{align}$$

Vậy ta loại trường hợp dòng 1.
Với dòng 2 của (242), ta có

$$\begin{align} 2x_1 - x_2 - 1 =& 3x_1 - 1 \tag{247} \\ =& \frac{3-3\sqrt{12t+1}}{6} \tag{248} \\ =& \frac{1-\sqrt{12t+1}}{2} \tag{249} \\ <& 0 \tag{250} \end{align}$$

Vậy ta nhận trường hợp dòng 2, tức là

$$\bar{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{1-\sqrt{12t+1}}{6} \\ -\dfrac{1-\sqrt{12t+1}}{6} \end{bmatrix} \tag{251}$$

Khi cho $t \to 0^+$, ta có

$$\bar{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{1-\sqrt{12t+1}}{6} \\ -\dfrac{1-\sqrt{12t+1}}{6} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \dfrac{1-\sqrt{0+1}}{6} \\ -\dfrac{1-\sqrt{0+1}}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{252}$$

Vậy,

$$\boldsymbol{x}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{253}$$

là nghiệm cần tìm của bài toán.

Bài 10: Xét bài toán sau

$$\operatorname*{Min}_{x_1^2+x_2^2\leq 1} x_1 - x_2 \tag{254}$$

(a) Chứng minh (254) là bài toán lồi, điều kiện Slater thỏa.

(b) Bằng điều kiện KKT, tìm nghiệm tối ưu $\boldsymbol{x}^*$ của (254).

(c) Xây dựng bài toán hàm chắn cho bài toán (254), tìm nghiệm $\bar{\boldsymbol{x}}(t)$ của bài toán hàm chắn. Chứng minh $\bar{\boldsymbol{x}}(t) \to \boldsymbol{x}^*$ khi $t \to 0^+$

Giải:
(a) Đặt

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1 - x_2 \tag{255}$$

Ta tính được

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{256}$$

và

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{257}$$

Ta thấy $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ là ma trận nửa xác định dương do $\boldsymbol{x}^\top \nabla^2 f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} = 0 \geq 0$ với mọi $\boldsymbol{x} \neq 0$. Do đó, f là hàm lồi.
Đặt

$$g(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \tag{258}$$

Ta tính được

$$\nabla g(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \tag{259}$$

và

$$\nabla^2 g(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{260}$$

Ta thấy $\nabla^2 g(\boldsymbol{x})$ là ma trận xác định dương do $\boldsymbol{x}^\top \nabla^2 g(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} = 2x_1^2 + 2x_2^2 > 0$ với mọi $\boldsymbol{x} \neq 0$. Do đó, g là hàm lồi ngặt.
Do f và g lồi nên (254) là bài toán lồi.
Đặt

$$\Omega = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^2;\ \ g(\boldsymbol{z}) \leq 0\} \tag{261}$$

là miền tìm nghiệm của bài toán.
Chọn $\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, ta có

$$g(\hat{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 1 \tag{262}$$

$$= -\frac{1}{2} \tag{263}$$

$$< 0 \tag{264}$$

Do đó, điều kiện Slater được thỏa.

(b) Ta có hàm Lagrange

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{x}, \lambda) =& f(\boldsymbol{x}) + \lambda g(\boldsymbol{x}) && (265) \\ =& x_1 - x_2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1) && (266) \end{aligned}$$

Ta tính được

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda x_1 + 1 \\ 2\lambda x_2 - 1 \end{bmatrix} \tag{267}$$

Do (254) là bài toán lồi và điều kiện Slater được thỏa nên $\boldsymbol{x}$ là nghiệm của (254) khi và chỉ khi hệ KKT được thỏa.
Hệ KKT cần thỏa là

$$\begin{cases} \nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \lambda) =& 0 \\ \lambda \geq& 0 \\ \lambda g(\boldsymbol{x}) =& 0 \\ g(\boldsymbol{x}) \leq& 0 \end{cases} \tag{268}$$

(268) có thể được viết lại là

$$\begin{cases} 2\lambda x_1 + 1 =& 0 \\ 2\lambda x_2 - 1 =& 0 \\ \lambda \geq& 0 \\ \lambda \left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right) =& 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq& 0 \end{cases} \tag{269}$$

Từ dòng 4 của (269), ta có 2 trường hợp sau
• **Trường hợp 1:** $\lambda = 0$
Khi đó dòng 4 của (269) được thỏa mãn và dòng 1, 2 trở thành

$$\begin{cases} 1 =& 0 \\ -1 =& 0 \end{cases} \tag{270}$$

Điều này vô lý, do đó ta loại trường hợp này.
• **Trường hợp 2:** $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$
Dòng 5 của (269) được thỏa.
Ta có

$$\left[\begin{aligned} x_1 =& \sqrt{1 - x_2^2} \\ x_1 =& -\sqrt{1 - x_2^2} \end{aligned}\right. \tag{271}$$

Từ dòng 2, dòng 3 của (269) và $\lambda \neq 0$, ta có

$$x_2 = \frac{1}{2\lambda} > 0 \tag{272}$$

Khi đó ta có

$$\left[\begin{aligned} x_1 =& \sqrt{1 - \frac{1}{4\lambda^2}} = \sqrt{\frac{4\lambda^2 - 1}{4\lambda^2}} = \frac{\sqrt{4\lambda^2 - 1}}{2\lambda} \\ x_1 =& -\sqrt{1 - \frac{1}{4\lambda^2}} = -\sqrt{\frac{4\lambda^2 - 1}{4\lambda^2}} = -\frac{\sqrt{4\lambda^2 - 1}}{2\lambda} \end{aligned}\right. \tag{273}$$

Thay dòng 1 của (273) vào dòng 1 của (269), ta có

$$\begin{aligned} 2\lambda x_1 + 1 =& 0 \\ \Leftrightarrow \quad 2\lambda\frac{\sqrt{4\lambda^2-1}}{2\lambda} + 1 =& 0 \\ \Leftrightarrow \quad \sqrt{4\lambda^2-1} + 1 =& 0 \end{aligned} \tag{274}$$

Hệ này vô nghiệm, vậy loại dòng 1 của (273).
Thay dòng 2 của (273) vào dòng 1 của (269), ta có

$$\begin{aligned} 2\lambda x_1 + 1 =& 0 \\ \Leftrightarrow \quad -2\lambda\frac{\sqrt{4\lambda^2-1}}{2\lambda} + 1 =& 0 \\ \Leftrightarrow \quad \sqrt{4\lambda^2-1} =& 1 \end{aligned} \tag{275}$$

Giải ra ta được

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{276}$$

Như vậy, ta có

$$\boldsymbol{x}^* = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \tag{277}$$

là nghiệm cần tìm.

(c) Ta có hàm chắn Logarithm

$$B(\boldsymbol{x}, t) = f(\boldsymbol{x}) - t\ln(-g(\boldsymbol{x})) \tag{278}$$

$$= x_1 - x_2 - t\ln\big(-(x_1^2 + x_2^2 - 1)\big) \tag{279}$$

Xét bài toán

$$\underset{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2}{\text{Min}}\, B(\boldsymbol{x}, t) \tag{280}$$

Ta tính được

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} B(\boldsymbol{x}, t) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2tx_1}{x_1^2 + x_2^2 - 1} \\ -1 - \frac{2tx_2}{x_1^2 + x_2^2 - 1} \end{bmatrix} \tag{281}$$

Xét hệ $\nabla_{\boldsymbol{x}} B(\boldsymbol{x}, t) = \mathbf{0}$, ta có

$$\begin{cases} 1 - \frac{2tx_1}{x_1^2 + x_2^2 - 1} = 0 \\ -1 - \frac{2tx_2}{x_1^2 + x_2^2 - 1} = 0 \end{cases} \tag{282}$$

Cộng 2 dòng của (282), ta được

$$\frac{2t(x_1 + x_2)}{x_1^2 + x_2^2 - 1} = 0 \tag{283}$$

Từ đó suy ra được

$$x_2 = -x_1 \tag{284}$$

Thế vào dòng 1 của (282), ta được

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2tx_1}{2x_1^2-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow \qquad \frac{2tx_1}{2x_1^2-1} &= 1 \\ \Leftrightarrow \quad 2x_1^2 - 2tx_1 - 1 &= 0 \end{aligned} \tag{285}$$

Giải ra ta được

$$\left[\begin{array}{llll} x_1 = & \dfrac{t+\sqrt{t^2+2}}{2}, & x_2 = & -\dfrac{t+\sqrt{t^2+2}}{2} \\ x_1 = & \dfrac{t-\sqrt{t^2+2}}{2}, & x_2 = & -\dfrac{t-\sqrt{t^2+2}}{2} \end{array}\right. \tag{286}$$

Ta sẽ so các kết quả ở (286) với điều kiện $g(\boldsymbol{x}^*) < 0$.
Cụ thể, với dòng 1 của (286), ta có

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - 1 &= 2x_1^2 - 1 && (287) \\ &= 2\left(\frac{t+\sqrt{t^2+2}}{2}\right)^2 - 1 && (288) \\ &= \frac{2t^2 + 2t\sqrt{t^2+2} + 2}{2} - 1 && (289) \\ &= \frac{2t^2 + 2t\sqrt{t^2+2}}{2} && (290) \\ &> 0 && (291) \end{aligned}$$

với $t > 0$,Vậy ta loại trường hợp dòng 1.
với dòng 2 của (286), ta có

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - 1 &= 2x_1^2 - 1 && (292) \\ &= 2\left(\frac{t-\sqrt{t^2+2}}{2}\right)^2 - 1 && (293) \\ &= \frac{2t^2 - 2t\sqrt{t^2+2} + 2}{2} - 1 && (294) \\ &= \frac{2t^2 - 2t\sqrt{t^2+2}}{2} && (295) \\ &= t(t - \sqrt{t^2+2}) && (296) \\ &< 0 && (297) \end{aligned}$$

với $t > 0$ do $t \leq |t| = \sqrt{t^2} < \sqrt{t^2+2}$
Vậy ta nhận trường hợp dòng 2, tức là

$$\bar{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{1-\sqrt{12t+1}}{6} \\ -\dfrac{1-\sqrt{12t+1}}{6} \end{bmatrix} \tag{298}$$

Khi cho $t \to 0^+$, ta có

$$\bar{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{t-\sqrt{t^2+2}}{2} \\ -\dfrac{t-\sqrt{t^2+2}}{2} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \dfrac{0-\sqrt{0+2}}{2} \\ -\dfrac{0-\sqrt{0+2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}^* \tag{299}$$

Vậy,

$$\bar{\boldsymbol{x}}(t) \to \boldsymbol{x}^* = 0 \tag{300}$$

khi $t \to 0^+$

Bài 11: Xét bài toán sau

$$\underset{\substack{x \geq 0 \\ 1-x \geq 0}}{\text{Min}} \ x \tag{301}$$

(a) Chứng minh (301) là bài toán lồi, điều kiện Slater thỏa.

(b) Bằng điều kiện KKT, tìm nghiệm tối ưu x^* của (301).

(c) Xây dựng bài toán hàm chắn cho bài toán (301), tìm nghiệm $\bar{x}(t)$ của bài toán hàm chắn. Chứng minh $\bar{x}(t) \to x^*$ khi $t \to 0^+$

Giải:
(a) Đặt

$$f(x) = x \tag{302}$$

Ta tính được

$$\nabla f(x) = 1 \tag{303}$$

và

$$\nabla^2 f(x) = 0 \tag{304}$$

Ta thấy $\nabla^2 f(x) \geq 0$ nên f là hàm lồi.
Đặt

$$g_1(x) = -x \tag{305}$$

Ta tính được

$$\nabla g_1(x) = -1 \tag{306}$$

và

$$\nabla^2 g_1(x) = 0 \tag{307}$$

Ta thấy $\nabla^2 g_1(x) \geq 0$ nên g_1 là hàm lồi.
Đặt

$$g_2(x) = x - 1 \tag{308}$$

Ta tính được

$$\nabla g_2(x) = 1 \tag{309}$$

và

$$\nabla^2 g_2(x) = 0 \tag{310}$$

Ta thấy $\nabla^2 g_2(x) \geq 0$ nên g_2 là hàm lồi.
Do f, g_1 và g_2 lồi nên (301) là bài toán lồi.
Đặt

$$\Omega = \{z \in \mathbb{R};\ \ g_i(z) \leq 0\ \ \forall i \in \{1, 2\}\} \tag{311}$$

là miền tìm nghiệm của bài toán.
Chọn $\hat{x} = \frac{1}{2}$, ta có

$$g_1(\hat{x}) = -\frac{1}{2} < 0 \tag{312}$$

và

$$g_2(\hat{x}) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0 \tag{313}$$

Do đó, điều kiện Slater được thỏa.

(b) Ta có hàm Lagrange

$$L(x, \boldsymbol{\lambda}) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) \tag{314}$$
$$= x + \lambda_1(-x) + \lambda_2(x-1) \tag{315}$$

Ta tính được

$$\nabla_x L(x, \lambda) = 1 - \lambda_1 + \lambda_2 \tag{316}$$

Do (301) là bài toán lồi và điều kiện Slater được thỏa nên x là nghiệm của (301) khi và chỉ khi hệ KKT được thỏa.
Hệ KKT cần thỏa là

$$\begin{cases} \nabla_x L(x, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \\ \lambda_i \geq 0, \ \ \forall i \in \{1, 2\} \\ \lambda_i g_i(x) = 0, \ \ \forall i \in \{1, 2\} \\ g_i(x) \leq 0, \ \ \forall i \in \{1, 2\} \end{cases} \tag{317}$$

(268) có thể được viết lại là

$$\begin{cases} 1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_i \geq 0, \ \ \forall i \in \{1, 2\} \\ \lambda_1 x = 0 \\ \lambda_2(x-1) = 0 \\ -x \leq 0 \\ x - 1 \leq 0 \end{cases} \tag{318}$$

hay

$$\begin{cases} 1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_i \geq 0, \ \ \forall i \in \{1, 2\} \\ \lambda_1 x = 0 \\ \lambda_2(x-1) = 0 \\ x \in [0, 1] \end{cases} \tag{319}$$

Từ dòng dòng 3 của (319), ta có các trường hợp sau
• **Trường hợp 1:** $\lambda_1 = 0$
Từ dòng 1 của (319) ta suy ra được

$$\lambda_2 = -1 < 0 \tag{320}$$

Vậy ta loại trường hợp này.

• **Trường hợp 2:** $x = 0$
Từ dòng 4 của (319), ta suy ra được

$$\lambda_2 = 0 \geq 0 \tag{321}$$

Từ dòng 1 của (319), ta có

$$\lambda_1 = 1 + \lambda_2 = 1 \geq 0 \tag{322}$$

Vậy ta nhận $x^* = 0$ là một nghiệm của bài toán.

(c) Ta có hàm chắn Logarithm

$$\begin{aligned} B(x,t) =& f(x) - t\ln(-g_1(x)) - t\ln(-g_2(x)) && (323)\\ =& x - t\ln(x) - t\ln(1-x) && (324) \end{aligned}$$

Xét bài toán

$$\underset{x\in\mathbb{R}^2}{\text{Min}}\, B(x,t) \tag{325}$$

Ta tính được

$$\begin{aligned} \nabla_x B(x,t) =& 1 - \frac{t}{x} + \frac{t}{1-x} && (326)\\ =& 1 - \frac{t(1-x)}{x(1-x)} + \frac{tx}{x(1-x)} && (327)\\ =& 1 - \frac{t}{x(1-x)} && (328)\\ =& 1 - \frac{t}{x-x^2} && (329)\\ & && (330) \end{aligned}$$

Xét phương trình $\nabla_{\boldsymbol{x}} B(\boldsymbol{x},t) = 0$, ta có

$$\begin{aligned} 1 - \frac{t}{x-x^2} =& 0\\ \Leftrightarrow \quad \frac{t}{x-x^2} =& 1\\ \Leftrightarrow \quad t =& x - x^2\\ \Leftrightarrow \quad x^2 - x + t =& 0 \end{aligned} \tag{331}$$

Giải ra ta được

$$\left[\begin{aligned} x =& \frac{1+\sqrt{1-4t}}{2}\\ x =& \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2} \end{aligned}\right. \tag{332}$$

Ta thấy

$$0 < \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2} < \frac{1+\sqrt{1-4t}}{2} \tag{333}$$

với $0 < t \leq \dfrac{1}{4}$ nên ta chọn được nghiệm

$$\bar{x}(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2} \tag{334}$$

Khi cho $t \to 0^+$, ta có

$$\bar{x}(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2} \to \frac{1-\sqrt{1-0}}{2} = 0 = x^* \tag{335}$$

Vậy,

$$\bar{x}(t) \to x^* = 0 \tag{336}$$

khi $t \to 0^+$

Bài 12: Xét bài toán sau

$$\underset{\substack{x_1 \geq -1 \\ x_2 \geq 1}}{\text{Min}} \left(x_1 + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{3}{2}\right)^2 \tag{337}$$

(a) Bằng các phương pháp đã biết, hãy tìm nghiệm tối ưu $\boldsymbol{x}^*$ của (337).

(b) Xây dựng bài toán hàm chắn cho bài toán (337), tìm nghiệm $\bar{\boldsymbol{x}}(t)$ của bài toán hàm chắn. Chứng minh $\bar{\boldsymbol{x}}(t) \to \boldsymbol{x}^*$ khi $t \to 0^+$

Giải:
(a) Đặt

$$f(\boldsymbol{x}) = \left(x_1 + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{3}{2}\right)^2 \tag{338}$$

Ta tính được

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3 \\ 2x_2 - 3 \end{bmatrix} \tag{339}$$

và

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{340}$$

Ta thấy $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ là ma trận xác định dương do $\boldsymbol{x}^\top \nabla^2 f(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{x} = 2x_1^2 + 2x_2^2 > 0$ với mọi $\boldsymbol{x} \neq 0$. Do đó, f là hàm lồi ngặt.

Đặt

$$g_1(\boldsymbol{x}) = -x_1 - 1 \tag{341}$$

Ta tính được

$$\nabla g_1(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{342}$$

và

$$\nabla^2 g_1(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{343}$$

Ta thấy $\nabla^2 g_1(\boldsymbol{x})$ là ma trận nửa xác định dương do $\boldsymbol{x}^\top \nabla^2 g_1(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{x} = 0 \geq 0$ với mọi $\boldsymbol{x} \neq 0$. Do đó, g_1 là hàm lồi.

Đặt

$$g_2(\boldsymbol{x}) = -x_2 + 1 \tag{344}$$

Ta tính được

$$\nabla g_2(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{345}$$

và

$$\nabla^2 g_2(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{346}$$

Ta thấy $\nabla^2 g_2(\boldsymbol{x})$ là ma trận nửa xác định dương do $\boldsymbol{x}^\top \nabla^2 g_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} = 0 \geq 0$ với mọi $\boldsymbol{x} \neq 0$. Do đó, g_2 là hàm lồi.
Do f, g_1 và g_2 lồi nên (337) là bài toán lồi.
Đặt

$$\Omega = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^2;\ \ g_i(\boldsymbol{z}) \leq 0\ \ \forall i \in \{1,2\}\} \tag{347}$$

là miền tìm nghiệm của bài toán.
Chọn $\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, ta có

$$g_1(\boldsymbol{x}) = -x_1 - 1 = -3 < 0 \tag{348}$$

và

$$g_2(\boldsymbol{x}) = -x_2 + 1 = -1 < 0 \tag{349}$$

Do đó, điều kiện Slater được thỏa.

Ta có hàm Lagrange

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) =& f(\boldsymbol{x}) + \lambda_1 g_1(\boldsymbol{x}) + \lambda_2 g_2(\boldsymbol{x}) && (350)\\ =& \left(x_1 + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \lambda_1(-x_1 - 1) + \lambda_2(-x_2 + 1) && (351)\\ =& \left(x_1 + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{3}{2}\right)^2 - \lambda_1(x_1 + 1) - \lambda_2(x_2 - 1) && (352) \end{aligned}$$

Ta tính được

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \lambda) = \begin{bmatrix} 2x_1 - \lambda_1 + 3 \\ 2x_2 - \lambda_2 - 3 \end{bmatrix} \tag{353}$$

Do (337) là bài toán lồi và điều kiện Slater được thỏa nên $\boldsymbol{x}$ là nghiệm của (337) khi và chỉ khi hệ KKT được thỏa.
Hệ KKT cần thỏa là

$$\begin{cases} \nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) =0 \\ \lambda_i \geq 0,\ \ \forall i \in \{1,2\} \\ \lambda_i g_i(\boldsymbol{x}) =0,\ \ \forall i \in \{1,2\} \\ g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0,\ \ \forall i \in \{1,2\} \end{cases} \tag{354}$$

(354) có thể được viết lại là

$$\begin{cases} 2x_1 - \lambda_1 + 3 =0 \\ 2x_2 - \lambda_2 - 3 =0 \\ \lambda_i \geq 0,\ \ \forall i \in \{1,2\} \\ \lambda_1(x_1 + 1) =0 \\ \lambda_2(x_2 - 1) =0 \\ x_1 \geq -1 \\ x_2 \geq 1 \end{cases} \tag{355}$$

Từ dòng 5 của (355), ta có 2 trường hợp sau
• **Trường hợp 1:** $\lambda_2 = 0$
Từ dòng 2 của (355), ta có

$$x_2 = \frac{\lambda_2 + 3}{2} = \frac{3}{2} \tag{356}$$

Trường hợp 1.1: $\lambda_1 = 0$
Từ dòng 1 của (355), ta có

$$x_1 = \frac{\lambda_1 - 3}{2} = -\frac{3}{2} < -1 \tag{357}$$

Tức là vi phạm dòng 6 của (355), do đó ta loại trường hợp này.
Trường hợp 1.2: $x_1 = -1$
Từ dòng 1 của (355), ta có

$$\lambda_1 = 2x_1 + 3 = 1 \geq 0 \tag{358}$$

Như vậy, ta nhận

$$\boldsymbol{x}^* = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \tag{359}$$

là một nghiệm.

• **Trường hợp 2:** $x_2 = 1$
Từ dòng 2 cửa (355), ta có

$$\lambda_2 = 2x_2 - 3 = -1 < 0 \tag{360}$$

Điều này vi phạm dòng 3 của (355) nên ta loại trường hợp này.

(b) Ta có hàm chắn Logarithm

$$\begin{aligned} B(\boldsymbol{x}, t) =& f(\boldsymbol{x}) - t\ln(-g_1(\boldsymbol{x})) - t\ln(-g_2(\boldsymbol{x})) && (361) \\ =& \left(x_1 + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{3}{2}\right)^2 - t\ln(x_1 + 1) - t\ln(x_2 - 1) && (362) \end{aligned}$$

Xét bài toán

$$\underset{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2}{\text{Min}}\, B(\boldsymbol{x}, t) \tag{363}$$

Ta tính được

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} B(\boldsymbol{x}, t) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3 - \dfrac{t}{x_1 + 1} \\ 2x_2 - 3 - \dfrac{t}{x_2 - 1} \end{bmatrix} \tag{364}$$

Xét hệ $\nabla_{\boldsymbol{x}} B(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{0}$, ta có

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x_1 + 3 - \dfrac{t}{x_1 + 1} &= 0 \\ 2x_2 - 3 - \dfrac{t}{x_2 - 1} &= 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \dfrac{(2x_1 + 3)(x_1 + 1) - t}{x_1 + 1} &= 0 \\ \dfrac{(2x_2 - 3)(x_2 - 1) - t}{x_2 - 1} &= 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (2x_1 + 3)(x_1 + 1) - t &= 0 \\ (2x_2 - 3)(x_2 - 1) - t &= 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x_1^2 + 5x_1 + 3 - t &= 0 \\ 2x_2^2 - 5x_2 + 3 - t &= 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{365}$$

Giải ra ta được

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-5+\sqrt{8t+1}}{4} \\ x_1 = \dfrac{-5-\sqrt{8t+1}}{4} \end{array}\right. \tag{366}$$

và

$$\left[\begin{array}{l} x_2 = \dfrac{5+\sqrt{8t+1}}{4} \\ x_2 = \dfrac{5-\sqrt{8t+1}}{4} \end{array}\right. \tag{367}$$

Với $t > 0$, ta có

$$\frac{-5+\sqrt{8t+1}}{4} > -1 \tag{368}$$

và

$$\frac{-5-\sqrt{8t+1}}{4} < \frac{-3}{2} < -1 \tag{369}$$

Sử dụng điều kiện điều kiện $x_1 > -1$, ta nhận trường hợp

$$x_1 = \frac{-5+\sqrt{8t+1}}{4} \tag{370}$$

Tương tự, ta có

$$\frac{5+\sqrt{8t+1}}{4} > 1 \tag{371}$$

và

$$\frac{5-\sqrt{8t+1}}{4} < 1 \tag{372}$$

Sử dụng điều kiện điều kiện $x_2 > 1$, ta nhận trường hợp

$$x_2 = \frac{5+\sqrt{8t+1}}{4} \tag{373}$$

Khi cho $t \to 0^+$, ta có

$$\bar{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{-5+\sqrt{8t+1}}{4} \\ \dfrac{5+\sqrt{8t+1}}{4} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \dfrac{-5+\sqrt{0+1}}{4} \\ \dfrac{5+\sqrt{0+1}}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \dfrac{3}{2} \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}^* \tag{374}$$

Vậy,

$$\bar{\boldsymbol{x}}(t) \to \boldsymbol{x}^* = 0 \tag{375}$$

khi $t \to 0^+$

Bài 13: Xét bài toán sau

$$\underset{\substack{-x_1^2+x_2\geq 0\\ x_1\geq 0}}{\text{Min}} \quad x_1 + x_2 \tag{376}$$

(a) Bằng các phương pháp đã biết, hãy tìm nghiệm tối ưu $\boldsymbol{x}^*$ của (376).

(b) Xây dựng bài toán hàm chắn cho bài toán (376), tìm nghiệm $\bar{\boldsymbol{x}}(t)$ của bài toán hàm chắn. Chứng minh $\bar{\boldsymbol{x}}(t) \to \boldsymbol{x}^*$ khi $t \to 0^+$

Giải:
(a) Đặt

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2 \tag{377}$$

Ta tính được

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{378}$$

và

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{379}$$

Ta thấy $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ là ma trận nửa xác định dương do $\boldsymbol{x}^\top \nabla^2 f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} = 0 \geq 0$ với mọi $\boldsymbol{x} \neq 0$. Do đó, f là hàm lồi.

Đặt

$$g_1(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - x_2 \tag{380}$$

Ta tính được

$$\nabla g_1(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{381}$$

và

$$\nabla^2 g_1(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{382}$$

Ta thấy $\nabla^2 g_1(\boldsymbol{x})$ là ma trận nửa xác định dương do $\boldsymbol{x}^\top \nabla^2 g_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} = 2x_1^2 \geq 0$ với mọi $\boldsymbol{x} \neq 0$. Do đó, g_1 là hàm lồi.

Đặt

$$g_2(\boldsymbol{x}) = -x_1 \tag{383}$$

Ta tính được

$$\nabla g_2(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{384}$$

và

$$\nabla^2 g_2(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{385}$$

Ta thấy $\nabla^2 g_2(\boldsymbol{x})$ là ma trận nửa xác định dương do $\boldsymbol{x}^\top \nabla^2 g_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} = 0 \geq 0$ với mọi $\boldsymbol{x} \neq 0$. Do đó, g_2 là hàm lồi.

Do f, g_1 và g_2 lồi nên (376) là bài toán lồi.
Đặt

$$\Omega = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^2;\ \ g_i(\boldsymbol{z}) \leq 0 \ \ \forall i \in \{1, 2\}\} \tag{386}$$

là miền tìm nghiệm của bài toán.
Chọn $\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, ta có

$$g_1(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} < 0 \tag{387}$$

và

$$g_2(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4} < 0 \tag{388}$$

Do đó, điều kiện Slater được thỏa.

Ta có hàm Lagrange

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) + \lambda_1 g_1(\boldsymbol{x}) + \lambda_2 g_2(\boldsymbol{x}) \tag{389}$$

$$= x_1 + x_2 + \lambda_1(x_1^2 - x_2) - \lambda_2 x_1 \tag{390}$$

Ta tính được

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 + 1 \\ 1 - \lambda_1 \end{bmatrix} \tag{391}$$

Do (376) là bài toán lồi và điều kiện Slater được thỏa nên $\boldsymbol{x}$ là nghiệm của (376) khi và chỉ khi hệ KKT được thỏa.
Hệ KKT cần thỏa là

$$\begin{cases} \nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \\ \lambda_i \geq 0, \ \ \forall i \in \{1, 2\} \\ \lambda_i g_i(\boldsymbol{x}) = 0, \ \ \forall i \in \{1, 2\} \\ g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, \ \ \forall i \in \{1, 2\} \end{cases} \tag{392}$$

(392) có thể được viết lại là

$$\begin{cases} 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 + 1 = 0 \\ 1 - \lambda_1 = 0 \\ \lambda_i \geq 0, \ \ \forall i \in \{1, 2\} \\ \lambda_1(x_1^2 - x_2) = 0 \\ \lambda_2 x_1 = 0 \\ x_1^2 - x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 0 \end{cases} \tag{393}$$

Từ dòng 2 của (393), ta có

$$\lambda_1 = 1 > 0 \tag{394}$$

Từ dòng 5 của (393), ta có 2 trường hợp sau
• **Trường hợp 1:** $\lambda_2 = 0$
Từ dòng 1 của (393), ta có

$$x_1 = \frac{\lambda_2 - 1}{2\lambda_1} = -\frac{1}{2} < 0 \tag{395}$$

Điều này mâu thuẫn với điều kiện $x_1 \geq 0$, do đó ta loại trường hợp này.

• **Trường hợp 2:** $x_1 = 0$
Từ dòng 2 cửa (393), ta có

$$\lambda_2 = 1 > 0 \tag{396}$$

Từ dòng 4 của (393), ta có

$$x_2 = x_1^2 = 0 \tag{397}$$

Ta có

$$x_1^2 - x_2 = 0 \leq 0 \tag{398}$$

Vậy,

$$\boldsymbol{x}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{399}$$

là nghiệm của bài toán.

(b) Ta có hàm chắn Logarithm

$$\begin{aligned} B(\boldsymbol{x}, t) =& f(\boldsymbol{x}) - t\ln(-g_1(\boldsymbol{x})) - t\ln(-g_2(\boldsymbol{x})) && (400) \\ =& x_1 + x_2 - t\ln(-x_1^2 + x_2) - t\ln(x_1) && (401) \end{aligned}$$

Xét bài toán

$$\underset{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2}{\text{Min}}\, B(\boldsymbol{x}, t) \tag{402}$$

Ta tính được

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} B(\boldsymbol{x}, t) = \begin{bmatrix} \dfrac{2tx_1}{-x_1^2 + x_2} - \dfrac{t}{x_1} + 1 \\ -\dfrac{t}{-x_1^2 + x_2} + 1 \end{bmatrix} \tag{403}$$

Xét hệ $\nabla_{\boldsymbol{x}} B(\boldsymbol{x}, t) = \mathbf{0}$, ta có

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \dfrac{2tx_1}{-x_1^2 + x_2} - \dfrac{t}{x_1} + 1 =0 \\ -\dfrac{t}{-x_1^2 + x_2} + 1 =0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -\dfrac{2tx_1}{-x_1^2 + x_2} + \dfrac{t}{x_1} =1 \\ \dfrac{t}{-x_1^2 + x_2} =1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \dfrac{2tx_1^2}{x_1(x_1^2 - x_2)} + \dfrac{t(x_1^2 - x_2)}{x_1(x_1^2 - x_2)} =1 \\ t = -x_1^2 + x_2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \dfrac{2tx_1^2 + t(x_1^2 - x_2)}{x_1(x_1^2 - x_2)} =1 \\ t = -x_1^2 + x_2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2tx_1^2 + t(x_1^2 - x_2) =x_1(x_1^2 - x_2) \\ t = -x_1^2 + x_2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2tx_1^2 + x_1(-x_1^2 + x_2) - t(-x_1^2 + x_2) =0 \\ t = -x_1^2 + x_2 \end{cases} \end{aligned} \tag{404}$$

Thay dòng 2 vào dòng 1 của hệ (404), ta được

$$2tx_1^2 + tx_1 - t^2 = 0 \tag{405}$$

Giải ra ta được

$$\left[\begin{aligned} x_1 &= \frac{-1+\sqrt{8t+1}}{4} \\ x_1 &= \frac{-1-\sqrt{8t+1}}{4} \end{aligned}\right. \tag{406}$$

Với $t > 0$, ta có

$$\frac{-1-\sqrt{8t+1}}{4} < \frac{-1-\sqrt{0+1}}{4} = -\frac{1}{2} < 0 \tag{407}$$

Sử dụng điều kiện điều kiện $x_1 > 0$, ta loại trường hợp

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{8t+1}}{4} \tag{408}$$

và nhận trường hợp

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{8t+1}}{4} \tag{409}$$

Khi cho $t \to 0^+$, ta có

$$-x_1^2 + x_2 \to 0^+ \tag{410}$$

Tức là

$$\lim_{t\to 0^+} (-x_1^2 + x_2) = 0 \tag{411}$$

Từ đó suy ra

$$\lim_{t\to 0^+} x_2 = \lim_{t\to 0^+} x_1^2 \tag{412}$$

Ngoài ra, khi đó ta cũng có

$$\bar{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{-1+\sqrt{8t+1}}{4} \\ x_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \dfrac{-1+\sqrt{0+1}}{4} \\ \left(\dfrac{-1+\sqrt{0+1}}{4}\right)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}^* \tag{413}$$

Vậy,

$$\bar{\boldsymbol{x}}(t) \to \boldsymbol{x}^* = 0 \tag{414}$$

khi $t \to 0^+$

Bài 14: Xét bài toán sau

$$\underset{1-x_1^2-x_1x_2=0}{\text{Min}} \; x_1^2 + x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 \tag{415}$$

(a) Chứng minh điều kiện Mangasarian-Fromovit thỏa.

(b) Giải hệ KKT, tìm các ứng viên nghiệm.

(c) Tìm nghiệm của bài toán trên.

Giải:
(a) Đặt

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 \tag{416}$$

và

$$h(\boldsymbol{x}) = 1 - x_1^2 - x_1x_2 \tag{417}$$

Ta tính được

$$\nabla h(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -2x_1 - x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \tag{418}$$

Giả sử $\nabla h(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$, ta có

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \tag{419}$$

Giải ra ta được

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \tag{420}$$

Thế vào điều kiện $h(\boldsymbol{x}) = 1 - x_1^2 - x_1x_2 = 0$, ta có

$$1 = 0 \tag{421}$$

Điều này vô lý, do đó

$$\nabla h(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0} \tag{422}$$

Tức là ta có $\{\nabla h(\boldsymbol{x})\}$ độc lập tuyến tính. Để ý rằng bài toán này chỉ có một hàm hạn chế đẳng thức h.
Với

$$\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{423}$$

Ta có

$$\nabla h(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{d} = \mathbf{0} \tag{424}$$

Như vậy, điều kiện Mangasarian–Fromovitz được thỏa.

(b) Ta có hàm Lagrange

$$L(\boldsymbol{x}, \mu) = f(\boldsymbol{x}) + \mu h(\boldsymbol{x}) \tag{425}$$

$$= x_1^2 + x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \mu(1 - x_1^2 - x_1x_2) \tag{426}$$

Ta tính được

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \mu) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 - \mu(2x_1 + x_2) \\ x_1 + x_2 - \mu x_1 \end{bmatrix} \tag{427}$$

và

$$\nabla^2_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \mu) = \begin{bmatrix} 2 - 2\mu & 1 - \mu \\ 1 - \mu & 1 \end{bmatrix} \tag{428}$$

Do điều kiện Mangasarian–Fromovitz được thỏa nên $\boldsymbol{x}$ là nghiệm của (415) khi và chỉ $\boldsymbol{x}$ là nghiệm của bài toán

$$\underset{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2}{\text{Min}}\ \nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \mu) \tag{429}$$

Xét hệ $\nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \mu) = \mathbf{0}$,

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - \mu(2x_1 + x_2) = 0 \\ x_1 + x_2 - \mu x_1 = 0 \end{cases} \tag{430}$$

Hệ này có thể được viết lại là

$$\begin{cases} (2 - 2\mu)x_1 + (1 - \mu)x_2 = 0 \\ (1 - \mu)x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \tag{431}$$

hay ở dạng dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} 2 - 2\mu & 1 - \mu \\ 1 - \mu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \nabla^2_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \mu)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{432}$$

Ở đây ta có 2 trường hợp.
Trường hợp 1: $\mu \neq 1$
Khi đó, ma trận $\nabla^2_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \mu)$ có hạng đầy đủ và hệ (432) có nghiệm duy nhất

$$\boldsymbol{x}^{*,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{433}$$

Trường hợp 2: $\mu = 1$
Khi đó từ (431) ta có

$$x_2 = 0 \tag{434}$$

Thế vào điều kiện $h(\boldsymbol{x}) = 0$ ta có

$$x_1^2 = 1 \tag{435}$$

Giải ra ta được

$$\left[\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_1 &= -1 \end{aligned}\right. \tag{436}$$

Vậy ta có các ứng viên nghiệm là

$$\boldsymbol{x}^{*,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{437}$$

$$\boldsymbol{x}^{*,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{438}$$

$$\boldsymbol{x}^{*,3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{439}$$

(c) Thế vào điều kiện $h(\boldsymbol{x}^{*,1}) = 0$, ta có

$$1 = 0 \tag{440}$$

Điều này vô lý, do đó, ta loại$\boldsymbol{x}^{*,1}$.
Để ý là ta đã có $h(\boldsymbol{x}^{*,2}) = h(\boldsymbol{x}^{*,3}) = 0$.
Với $\mu = 1$, ta thấy

$$\nabla_{\boldsymbol{x}}^2 L(\boldsymbol{x}, \mu) = \begin{bmatrix} 2-2\mu & 1-\mu \\ 1-\mu & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{441}$$

là ma trận nửa xác định dương do $\boldsymbol{x}^\top \nabla_{\boldsymbol{x}}^2 L(\boldsymbol{x}, 1)\boldsymbol{x} = x_2^2 \geq 0$ với mọi $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$. Do đó L là hàm lồi. Khi đó $\boldsymbol{x}^*$ là điểm cực tiểu của L khi và chỉ khi $\nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}^*, 1) = 0$. Ta thấy $\boldsymbol{x}^{*,2}$ và $\boldsymbol{x}^{*,2}$ đều thỏa điểu kiện này.
Ngoài ra, khi ta thế $\boldsymbol{x}^{*,1}$ và $\boldsymbol{x}^{*,2}$ vào f, ta được

$$f(\boldsymbol{x}^{*,1}) = 1 \tag{442}$$

và

$$f(\boldsymbol{x}^{*,2}) = 1 \tag{443}$$

Ta thấy $f(\boldsymbol{x}^{*,1}) = f(\boldsymbol{x}^{*,2})$ nên việc bài toán có 2 điểm cực tiểu là hợp lý.
Vậy, bài toán có 2 nghiệm là

$$\boldsymbol{x}^{*,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{444}$$

$$\boldsymbol{x}^{*,3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{445}$$

Bài 15: Xét bài toán sau

$$\underset{\substack{x_1^2+x_2^2\leq 2\\ x_1+x_2\geq 0}}{\text{Min}} \quad x_1x_2 \tag{446}$$

(a) Giải hệ KKT, tìm các ứng viên nghiệm.

(b) Tìm nghiệm của bài toán trên.

Giải:
(a) Đặt

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1x_2 \tag{447}$$
$$g_1(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 2 \tag{448}$$
$$g_2(\boldsymbol{x}) = -x_1 - x_2 \tag{449}$$

và

$$\Omega = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^2;\ \ g_i(\boldsymbol{z}) \leq 0\ \ \forall i \in \{1,2\}\} \tag{450}$$

Ta có hàm Lagrange

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) = \lambda_0 f(\boldsymbol{x}) + \lambda_1 g_1(\boldsymbol{x}) + \lambda_2 g_2(\boldsymbol{x}) \tag{451}$$
$$= \lambda_0 x_1x_2 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) + \lambda_2(-x_1 - x_2) \tag{452}$$
$$= \lambda_0 x_1x_2 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) - \lambda_2(x_1 + x_2) \tag{453}$$

Ta tính được

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x},\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda_1x_1 + \lambda_0x_2 - \lambda_2 \\ \lambda_0x_1 + 2\lambda_1x_2 - \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{454}$$

và

$$\nabla^2_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x},\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 & \lambda_0 \\ \lambda_0 & 2\lambda_1 \end{bmatrix} \tag{455}$$

Ta có hệ KKT

$$\begin{cases} \nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) = 0 \\ \lambda_i \geq 0,\ \ \forall i \in \{0,1,2\} \\ \lambda_i g_i(\boldsymbol{x}) = 0,\ \ \forall i \in \{1,2\} \\ g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0,\ \ \forall i \in \{1,2\} \end{cases} \tag{456}$$

Hệ (456) có thể được viết lại là

$$\begin{cases} 2\lambda_1x_1 + \lambda_0x_2 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_0x_1 + 2\lambda_1x_2 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_i \geq 0,\ \ \forall i \in \{0,1,2\} \\ \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) = 0 \\ \lambda_2(x_1 + x_2) = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{457}$$

Từ dòng 5 của (457), ta có các trường hợp sau.
• Trường hợp 1: $\lambda_2 = 0$

Khi đó, từ dòng 1 và 2 của (457), ta có thể giải ra được

$$x_1 = x_2 = 0 \tag{458}$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} g_1(\boldsymbol{x}) =& x_1^2 + x_2^2 - 2 && (459)\\ =& 0 + 0 - 2 && (460)\\ =& -2 && (461) \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} g_2(\boldsymbol{x}) =& -x_1 - x_2 && (462)\\ =& -0 - 0 && (463)\\ =& 0 && (464) \end{aligned}$$

Tức là điều kiện $g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0$ với $i = 1, 2$ được thỏa.
Thế vào dòng 4 của (457), ta cũng có

$$\lambda_1 = 0 \tag{465}$$

Ta có thể chọn thêm hằng số $\lambda_0 > 0$ mà không vi phạm dòng nào của (457).
Vậy,

$$\boldsymbol{x}^{*,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{466}$$

là một ứng viên nghiệm của bài toán.

• Trường hợp 2: $x_1 + x_2 = 0$
Khi đó, do $x_1 = -x_2$ nên ta có

$$x_1^2 = x_2^2 = 1 \tag{467}$$

Giải ra ta được

$$\begin{cases} x_1 =& 1 \\ x_2 =& -1 \end{cases} \tag{468}$$

hoặc

$$\begin{cases} x_1 =& -1 \\ x_2 =& 1 \end{cases} \tag{469}$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} g_1(\boldsymbol{x}) =& x_1^2 + x_2^2 - 2 && (470)\\ =& 1 + 1 - 2 && (471)\\ =& 0 && (472) \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} g_2(\boldsymbol{x}) =& -x_1 - x_2 && (473)\\ =& -x_1 + x_1 && (474)\\ =& 0 && (475) \end{aligned}$$

Tức là điều kiện $g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0$ với $i = 1, 2$ được thỏa với 2 kết quả $\boldsymbol{x}$ vừa giải.

Ta cũng có thể chọn các hằng số $\lambda_0, \lambda_1 \geq 0$ thỏa $(\lambda_0, \lambda_1) \neq (0, 0)$ mà không vi phạm dòng nào của (457).
Như vậy. ta có thêm 2 ứng viên nghiệm

$$\boldsymbol{x}^{*,2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{476}$$

và

$$\boldsymbol{x}^{*,3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{477}$$

(b)
• Ta có

$$f(\boldsymbol{x}^{*,1}) = 0 \tag{478}$$
$$f(\boldsymbol{x}^{*,2}) = -1 \tag{479}$$
$$f(\boldsymbol{x}^{*,3}) = -1 \tag{480}$$

Ta thấy $\boldsymbol{x}^{*,1}$ không là cực tiểu của f do $f(\boldsymbol{x}^{*,1}) < f(\boldsymbol{x}^{*,2})$.
Bên cạnh đó, ta cũng có thể tính được các trị riêng của $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^{*,1})$ là -1 và 1. Điều này có nghĩa $\boldsymbol{x}^{*,1}$ là điểm yên ngựa của f.
Như vậy, ta có các nghiệm là

$$\boldsymbol{x}^{*,2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{481}$$

và

$$\boldsymbol{x}^{*,3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{482}$$