Lecture Note: Mathematical Analysis – Bài Giảng: Giải Tích Toán Học

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 16 tháng 5 năm 2025

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Advanced STEM & Beyond*:
URL: https://nqbh.github.io/advanced_STEM/.
Latest version:

- *Lecture Note: Mathematical Analysis – Bài Giảng: Giải Tích Toán Học.*
  PDF: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/lecture/NQBH_mathematical_analysis_lecture.pdf.
  TEX: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/lecture/NQBH_mathematical_analysis_lecture.tex.
- *Slide: Mathematical Analysis – Slide: Giải Tích Toán Học.*
  PDF: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/slide/NQBH_mathematical_analysis_slide.pdf.
  TEX: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/slide/NQBH_mathematical_analysis_slide.tex.
- Codes:
  - C++: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/analysis/C++.
  - Python: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/analysis/Python.

Mục lục

1 Basic Mathematical Analysis – Giải Tích Toán Học Cơ Bản . . . 2
1.1 Numbers – Các loại số . . . 2
1.2 Notations & conventions – Ký hiệu & quy ước . . . 2

2 Sequence – Dãy Số . . . 3
2.1 Definition of a sequence – Định nghĩa của dãy số . . . 4
2.2 Convergent- & divergent sequences – Dãy số hội tụ & dãy số phân kỳ . . . 4
2.3 Subsequences – Dãy con . . . 6
2.4 Limit of sequences – Giới hạn của dãy số . . . 6
2.5 Cauchy sequences – Dãy Cauchy . . . 13
2.6 Sequences with SymPy . . . 13
2.6.1 Sequence Base . . . 13
2.7 Problems: Sequences . . . 14

3 Function – Hàm Số . . . 16
3.1 Limit of function – Giới hạn hàm số . . . 16
3.2 Continuous function – Hàm số liên tục . . . 17
3.3 Problems: Function . . . 18

4 Continuity – Sự Liên Tục . . . 19

5 Series – Chuỗi Số . . . 19

6 Derivative & Differentiability – Đạo Hàm & Tính Khả Vi . . . 19
6.1 Định nghĩa đạo hàm. Ý nghĩa hình học của đạo hàm . . . 19

7 Differentiation Rules – Các Quy Tắc Tính Đạo Hàm . . . 20

*A scientist- & creative artist wannabe, a mathematics & computer science lecturer of Department of Artificial Intelligence & Data Science (AIDS), School of Technology (SOT), UMT Trường Đại học Quản lý & Công nghệ TP.HCM, Hồ Chí Minh City, Việt Nam.
E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com & hong.nguyenquanba@umt.edu.vn. Website: https://nqbh.github.io/. GitHub: https://github.com/NQBH.

8 Các định lý giá trị trung bình . . . **20**

9 2nd-Order Derivative – Đạo Hàm Cấp 2 . . . **21**

10 Vi Phân & Đạo Hàm Cấp Cao . . . **21**

11 Miscellaneous . . . **21**

12 Integral – Tích Phân . . . **23**
12.1 SymPy/`integrals` module . . . 25
12.2 Leibniz integral rule – Quy tắc tích phân Leibniz . . . 25

13 Functional Equation – Phương Trình Hàm . . . **25**

14 Fourier transform – Biến đổi Fourier . . . **26**
14.1 Discrete Fourier transform – Biến đổi Fourier rời rạc . . . 26

15 Miscellaneous . . . **26**
15.1 Contributors . . . 26
15.2 See also . . . 26

Tài liệu . . . **27**

1 Basic Mathematical Analysis – Giải Tích Toán Học Cơ Bản

Resources – Tài nguyên.

1. ĐẶNG ĐÌNH ÁNG. *Nhập Môn Giải Tích.*
2. [Rud76]. WALTER RUDIN. *Principles of Mathematical Analysis.*
3. [Tao22a]. TERENCE TAO. *Analysis I.*
4. [Tao22b]. TERENCE TAO. *Analysis II.*

Question 1 (Definition of mathematical analysis)**.** *What is mathematical analysis? Cf. mathematical analysis with other types of analysis.*

For answers, see, e.g., [Tao22a, Chap. 1, Sect. 1.1: *What Is Analysis?*, pp. 1–2], Wikipedia/mathematical analysis. For other types of analysis, see, e.g., Wikipedia/analysis.

Question 2 (Motivation of mathematical analysis)**.** *Why do mathematical analysis?*

For answers, see, e.g., [Tao22a, Chap. 1, Sect. 1.2: *Why Do Analysis?*, pp. 2–10]

Example 1 (Division by zero & infinity)**.** *The cancellation law for multiplication $ac = bc \Rightarrow a = b$ does not work when $c = 0$ & $c = \pm\infty$. The cancellation law for addition $a + c = b + c \Rightarrow a = b$.*

Example 2 (Cancellation properties)**.**

See, e.g., Wikipedia/cancellation property.

Example 3 (Geometric series – Chuỗi hình học)**.** *When does the geometric series $G(a) \coloneqq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{a^i}$ converge? When does $G(a)$ diverge?*

1.1 Numbers – Các loại số

Trong chương trình Toán phổ thông, học sinh đã được học: số tự nhiên ở chương trình Toán 6 [Thá+23a; Thá+23b], & số hữu tỷ & số thực ở chương trình Toán 7,

1.2 Notations & conventions – Ký hiệu & quy ước

Đặt tập hợp các đa thức (polynomial) 1 biến với hệ số nguyên, hệ số hữu tỷ, hệ số thực, hệ số phức lần lượt cho bởi:

$$\mathbb{Z}[x] \coloneqq \left\{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i; n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{Z},\ \forall i = 0, \ldots, n,\ a_n \neq 0\right\},$$

$$\mathbb{Q}[x] \coloneqq \left\{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i; n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{Q},\ \forall i = 0, \ldots, n,\ a_n \neq 0\right\},$$

$$\mathbb{R}[x] := \left\{\sum_{i=0}^n a_ix^i; n\in\mathbb{N},\ a_i\in\mathbb{R},\ \forall i=0,\ldots,n,\ a_n\neq 0\right\},$$
$$\mathbb{C}[x] := \left\{\sum_{i=0}^n a_ix^i; n\in\mathbb{N},\ a_i\in\mathbb{C},\ \forall i=0,\ldots,n,\ a_n\neq 0\right\}.$$

Ta có quan hệ hiển nhiên $\mathbb{N}[x]\subset\mathbb{Z}[x]\subset\mathbb{Q}[x]\subset\mathbb{R}[x]\subset\mathbb{C}[x]$. Tổng quát, với $\mathbb{F}$ là 1 trường bất kỳ, tập hợp các đa thức 1 biến với hệ số thuộc trường $\mathbb{F}$ (e.g., $\mathbb{Z},\mathbb{Z}_p,\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$) cho bởi:

$$\mathbb{F}[x] := \left\{\sum_{i=0}^n a_ix^i; n\in\mathbb{N},\ a_i\in\mathbb{F},\ \forall i=0,\ldots,n,\ a_n\neq 0\right\}.$$

Tập xác định của đa thức có thể là toàn bộ trường số thực $\mathbb{R}$ hoặc trường số phức $\mathbb{C}$, i.e., $D_P=\operatorname{dom}(P)=\mathbb{R}$ or $D_P=\operatorname{dom}(P)=\mathbb{C}$, tùy vào trường $\mathbb{F}$ của các hệ số & mục đích sử dụng đa thức.

Problem 1 (Cf: Calculus vs. Mathematical Analysis). *Distinguish & compare Calculus vs. Mathematical Analysis.*

Analysis is more pure mathematics. Calculus is more applied mathematics.

Problem 2 (Examples & counterexamples in mathematical analysis – Ví dụ & phản ví dụ trong phân tích toán học). *Find, from simple to advanced, examples & counterexamples to each mathematical concepts & mathematical results, including lemmas, propositions, theorems, & consequences.*

– Tìm các ví dụ & phản ví dụ từ đơn giản đến nâng cao cho mỗi khái niệm toán học & kết quả toán học, bao gồm các bổ đề, mệnh đề, định lý, & hệ quả.

Problem 3 (Python `SymPy`). *Study* `SymPy` *to support calculus & mathematical analysis.*

Definition 1 (Neighborhood, [WS10], p. 6). *The set of all points x s.t. $|x-a|<\delta$, where $\delta>0$, is called a δ* neighborhood *of the point a. The set of all points x s.t. $0<|x-a|<\delta$, in which $x=a$ is excluded, is called a* deleted δ neighborhood *of a or an open ball of radius δ about a.*

Theorem 1 (Bolzano–Weierstrass theorem). *Every bounded infinite set has at least 1 limit point.*

Definition 2 (Algebraic- & transcendental numbers – số đại số & số siêu việt). *A number $x\in\mathbb{R}$ which is a solution to the* polynomial equation

$$\sum_{i=0}^n a_ix^i = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0, \tag{1}$$

where $n\in\mathbb{N}^\star$, called the degree *of the equation, $a_i\in\mathbb{Z}$, $\forall i=0,1,\ldots,n$, $a_n\neq 0$, is called an* algebraic number. *A number which cannot be expressed as a solution of any polynomial equation with integer coefficients is called a* transcendental number.

Theorem 2 (Common transcendental numbers). *π, e are transcendental.*

Theorem 3 (Countability of sets of algebraic- & transcendental numbers). *(i) The set of algebraic numbers is a countably infinite set. (ii) The set of transcendental numbers is noncountably infinite.*

2 Sequence – Dãy Số

- **sequence** [n] /ˈsiːkwəns/ 1. [countable] *sequence (of sth)* a set of events, actions, numbers, etc. which have a particular order & which lead to a particular result; 2. [countable, uncountable] the order that events, actions, etc. happen in or should happen in; 3. [countable] a part of a film that deals with 1 subject or topic or consists of 1 scene. [v] 1. *sequence sth* (specialist) to arrange things into a sequence; 2. *sequence sth* (biology) to identify the order in which a set of genes or parts of molecules are arranged.

Resources – Tài nguyên.

1. [Rud76]. Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* Chap. 3: Numerical Sequences & Series.
2. [Tao22a]. Terence Tao. *Analysis I.*
3. [Tao22b]. Terence Tao. *Analysis II.*
4. [WS10]. Robert Wrede, Murray R. Spiegel. *Advanced Calculus.* 3e. Schaum's Outline Series. Chap. 2: Sequences.

This section deals primarily with sequences of real- & complex numbers, sequences in Euclidean spaces, or even in metric spaces.

– Phần này chủ yếu đề cập đến các dãy số thực & phức, các dãy trong không gian Euclid hoặc thậm chí trong không gian metric.

2.1 Definition of a sequence – Định nghĩa của dãy số

Definition 3 (Numerical sequence – dãy số, [WS10], p. 25)**.** *A* sequence *is a set of numbers $u_1, u_2, \ldots$ in a definite order of arrangement (i.e., a* correspondence *with the natural numbers or a subset thereof) & formed according to a definite rule. Each number in the sequence is called a* term*; u_n is called the* nth term. *The sequence is called* finite *or* infinite *according as there are or are not a finite number of terms. The sequence $u_1, u_2, \ldots$ is also designated briefly by $\{u_n\}$.*

Có thể hiểu khái niệm dãy (sequence) ở đây 1 cách tổng quát hơn là 1 dãy các đối tượng Toán học hoặc Tin học, e.g., dãy số phức $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ là 1 dãy gồm các số $a_n \in \mathbb{C}$, $\forall n = 1, 2, \ldots$, dãy các hàm số thực $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ là 1 dãy gồm các hàm số $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\forall n = 1, 2, \ldots$, hay dãy các dãy $\{\{a_{m,n}\}_{n=1}^\infty\}_{m=1}^\infty$ tức 1 dãy gồm các phần tử của dãy lại là các dãy số $\{a_{m,n}\}_{n=1}^\infty$, $\forall m = 1, 2, \ldots$ Trước hết, ta tập trung là khái niệm dãy đơn giản nhất: dãy số – numerical sequence, trước khi đến với khái niệm *hội tụ đều* của dãy hàm (uniform convergence of sequences of functions).

2.2 Convergent- & divergent sequences – Dãy số hội tụ & dãy số phân kỳ

Definition 4 (Limit of a sequence, [WS10], p. 25)**.** *A number $l \in \mathbb{R}$ is called the* limit *of an infinite sequence $u_1, u_2, \ldots$ if for any positive number ϵ we can find a positive number N depending on ϵ s.t. $|u_n - l| < \epsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > N$. In such case we write $\lim_{n\to\infty} u_n = l$.*

Definition 5 (Convergent sequences, [Rud76], Def. 3.1, p. 47)**.** *A sequence $\{p_n\}$ in a metric space X is said to* converge *if there is a point $p \in X$ with the following property: For every $\varepsilon > 0$ there is an integer N_ε such that $n \geq N_\varepsilon = N(\varepsilon)$ implies that $d(p_n, p) < \varepsilon$. (Here d denotes the* distance *in X.) In this case we also say that $\{p_n\}$ converges to p, or that p is the* limit *of $\{p_n\}$, & we write $p_n \to p$, or $p_n \to p$ as $n \to \infty$, or $\lim_{n\to\infty} p_n = p$. If $\{p_n\}$ does not converge, it is said to* diverge.

Remark 1. *Định nghĩa 5 về dãy hội tụ trong các không gian metric không chỉ phụ thuộc vào bản thân dãy $\{p_n\}$ mà còn vào chính không gian metric X. Nhân tiện, vì ở đây đang xét không gian metric mà mỗi phần tử của nó được coi là 1 điểm (point), nên thành phần của dãy số được ký hiệu là p_n để ám chỉ bản chất của mỗi phần tử của dãy là 1 điểm trong không gian metric tổng quát X. Nếu $X = \mathbb{R}$ hoặc $X = \mathbb{C}$ thì mỗi điểm trên trục số thực hoặc 1 số phức $z = a + bi$ tương ứng với điểm (a, b) trên mặt phẳng phức $\mathbb{R}^2$, khi đó ký hiệu p_n có thể được thay bởi các ký hiệu quen thuộc hơn cho số (numerals), e.g., $a_n, x_n, \ldots$*

In cases of possible ambiguity, we can be more precise & specify "convergent in X" rather than "convergent".
– Trong trường hợp có thể có sự mơ hồ, chúng ta có thể chính xác hơn & cụ thể hơn "hội tụ trong X" thay vì "hội tụ".

Definition 6 (Range of a sequence, bounded sequence)**.** *The set of all points p_n, $n = 1, 2, \ldots$, is the* range *of $\{p_n\}$. The range of a sequence may be a finite set, or it may be infinite. The sequence $\{p_n\}$ is said to be* bounded *if its range is bounded.*

Problem 4. *Prove: (a) If $s_n = \frac{1}{n}$, then $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$; the range is infinite, & the sequence is bounded. (b) If $s_n = n^2$, the sequence $\{s_n\}$ is unbounded, is divergent, & has infinite range. (c) If $s_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$, the sequence $\{s_n\}$ converges to 1, is bounded, & has infinite range. (d) If $s_n = i^n$, the sequence $\{s_n\}$ is divergent, is bounded, & has finite range. (e) If $s_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, then $\{s_n\}$ converges to 1, is bounded, & has finite range. (f) Find similar examples.*

Theorem 4 (Some important properties of convergent sequences in metric spaces, [Rud76], Thm. 3.2, p. 48)**.** *Let $\{p_n\}$ be a sequence in a metric space X.*

(a) $\{p_n\}$ converges to $p \in X$ iff every neighborhood of p contains all but finitely many of the terms of $\{p_n\}$.

(b) (Uniqueness of limit) *If $p \in X, p' \in X$, & if $\{p_n\}$ converges to p & to p', then $p' = p$.*

(c) If $\{p_n\}$ converges, then $\{p_n\}$ is bounded.

(d) If $E \subset X$ & if p is a limit point of E, then there is a sequence $\{p_n\}$ in E such that $p = \lim_{n\to\infty} p_n$.

For sequences in Euclidean spaces $\mathbb{R}^d$, we can study the relation between convergence & the algebraic operations.

Theorem 5 (Algebraic operations on limit of sequences of complex numbers, [Rud76], Thm. 3.3, p. 49)**.** *Suppose $\{a_n\}, \{b_n\}$ are complex sequences, & $\lim_{n\to\infty} a_n = a$,$\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Then:*

(a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$.

(b) $\lim_{n\to\infty} ca_n = ca$, $\lim_{n\to\infty}(c + a_n) = c + \lim_{n\to\infty} a_n = c + a$, $\forall c \in \mathbb{C}$.

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n = ab$.

(d) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a}$, provided $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, & $a \neq 0$.

Theorem 6 (Algebraic operations on limit of sequences in Euclidean spaces, [Rud76], Thm. 3.4, p. 50)**.**

(a) Suppose $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^d$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, & $\mathbf{x}_n = (x_{1,n}, \ldots, x_{d,n})$. Then $\{\mathbf{x}_n\}$ converges to $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ iff $\lim_{n\to\infty} x_{i,n} = x_i$, $\forall i = 1, \ldots, k$.

(b) Suppose $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^\infty, \{\mathbf{y}_n\}_{n=1}^\infty$ are sequences in $\mathbb{R}^d$, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ is a sequence of reals, & $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}, \mathbf{y}_n \to \mathbf{y}, a_n \to a$. Then

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n = \mathbf{x} + \mathbf{y},\ \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n \cdot \mathbf{y}_n = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y},\ \lim_{n\to\infty} a_n \mathbf{x}_n = a\mathbf{x}.$$

Bài toán 1 ([Quỳ+20b], 1.). *Tìm 5 số hạng đầu của dãy số: (a)* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *với* $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. *(b)* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *với* $u_1 = 1, u_2 = -2, u_{n+1} = u_n - 2u_{n-1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$. *(c) Dãy* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *các hợp số nguyên dương theo thứ tự tăng dần.*

Bài toán 2 ([Quỳ+20b], 2.). *Cho dãy số* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *xác định bởi* $u_0 = 2, u_1 = 5, u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. *Chứng minh, bằng phương pháp quy nạp Toán học,* $u_n = 2^n + 3^n$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$.

Bài toán 3 ([Quỳ+20b], 3.). *Cho* ΔABC *đều có cạnh bằng* 4. *Trên cạnh* BC *lấy điểm* A_1 *sao* $CA_1 = 1$. *Gọi* B_1 *là hình chiếu của* A_1 *trên* CA, C_1 *là hình chiếu của* B_1 *trên* AB, A_2 *là hình chiếu của* C_1 *trên* BC, B_2 *là hình chiếu của* A_2 *trên* $CA,\ldots$ *& cứ thế tiếp tục. Đặt* $u_n = CA_n$. *Cho dãy số* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *bởi hệ thức truy hồi.*

Bài toán 4 ([Quỳ+20b], 4.). *Xét tính tăng, giảm, bị chặn trên, bị chặn dưới, bị chặn của dãy số* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *với: (a)* $u_n = n^3 - 3n^2 + 5n - 7$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. *(b)* $u_n = \dfrac{n+1}{3^n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. *(c)* $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$.

Bài toán 5 ([Quỳ+20b], 5.). *Xét 2 dãy số* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$, $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ *xác định bởi*

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}^\star.$$

Chứng minh: (a) $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *tăng,* $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ *giảm. (b)* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$, $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ *đều bị chặn.*

Bài toán 6 ([Quỳ+20b], 6.). *Cho dãy số* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *xác định bởi* $u_1 = 1, u_{n+1} = u_n + (n+1)2^n$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. *Chứng minh: (a)* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *tăng. (b)* $u_n = 1 + (n-1)2^n$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$.

Bài toán 7 ([Quỳ+20b], 7.). *Cho dãy số* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *xác định bởi* $u_1 = 1, u_2 = 2, u_{n+1} = au_n - u_{n-1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$, $n\ge 2$. *Chứng minh: (a) Với* $a = \sqrt{3}$ *thì* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *tuần hoàn. (b) Với* $a = \frac{3}{2}$ *thì* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *không tuần hoàn.*

Bài toán 8 ([Quỳ+20b], 8.). *(a) Cho cấp số cộng* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *có* $u_{13} = 31, u_{31} = -13$. *Tìm số hạng tổng quát của cấp số đó. (b) Cho cấp số cộng* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *có* $u_m = a, u_n = b$, *với* $m,n\in\mathbb{N}$, $m\ne n$, $a,b\in\mathbb{C}$. *Tìm số hạng tổng quát của cấp số đó.*

Bài toán 9 ([Quỳ+20b], 9.). *Số đo 3 góc của 1 tam giác vuông lập thành 1 cấp số cộng. TÌm số đo 3 góc đó.*

Bài toán 10 ([Quỳ+20b], 10.). *(a) Tổng của số hạng thứ* 3 *& số hạng thứ* 9 *của 1 cấp số cộng bằng* 8. *Tính tổng của* 11 *số hạng đầu tiên của cấp số đó. (b) Tổng của số hạng thứ m & số hạng thứ n của 1 cấp số cộng bằng a, với* $m,n\in\mathbb{N}$, $m\ne n$, $a\in\mathbb{C}$. *Tính tổng của* $N\in\mathbb{N}$ *số hạng đầu tiên của cấp số đó.*

Bài toán 11 ([Quỳ+20b], 11.). *Gọi* S_n *là tổng* $n\in\mathbb{N}^\star$ *số hạng đầu tiên của 1 cấp số cộng. Biết* $m,n\in\mathbb{N}^\star$, $m\ne n$ *thỏa* $S_m = S_n$. *Chứng minh* $S_{m+n} = 0$.

Bài toán 12 ([Quỳ+20b], 12.). *Chu kỳ bán rã của nguyên tố phóng xạ poloni* 210 *là* 138 *ngày, i.e., sau* 138 *ngày, khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn 1 nửa. Tính khối lượng còn lại của* 20 *gram poloni* 210 *sau* 7314 *ngày (khoảng* 20 *năm).*

Bài toán 13 ([Quỳ+20b], 13.). *Tính: (a) Tổng tất cả các số hạng của 1 cấp số nhân có* 100 *số hạng với số hạng đầu là* 1, *công bội là* $\frac{1}{2}$. *(b) Tổng tất cả các số hạng của 1 cấp số nhân biết số hạng đầu bằng* 18, *số hạng thứ 2 bằng* 54 *& số hạng cuối bằng* 39366.

Bài toán 14 ([Quỳ+20b], 14.). *Số hạng thứ 2, số hạng đầu, & số hạng thứ 3 của 1 cấp số cộng với công sai* $\ne 0$ *theo thứ tự đó lập thành 1 cấp số nhân. Tìm công bội của cấp số nhân đó.*

Bài toán 15 ([Quỳ+20b], 15.). *Tìm số hạng tổng quát & tính tổng* 100 *số hạng đầu tiên của dãy số* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *xác định bởi* $u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$.

Bài toán 16 ([Quỳ+20b], 16.). *Tìm công thức cho số hạng tổng quát của dãy số xác định bởi* $a_1 = a, a_{n+1} = qa_n + d\alpha^n$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$, $\alpha\ne q$.

Bài toán 17 ([Quỳ+20b], 17.). *Gọi* F_n *là số hạng thứ n của dãy Fibonacci, xác định bởi* $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. *Chứng minh: (a)* $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. *(b)* $F_{m+n+1} = F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n$, $\forall m,n\in\mathbb{N}$. *(c)* $F_{3n} = F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3$, $\forall m,n\in\mathbb{N}$.

Bài toán 18 ([Quỳ+20b], 18.). *Dãy Lucas là dãy số xá định bởi* $L_1 = 1, L_2 = 3, L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. *Tìm công thức tổng quát cho* L_n.

Bài toán 19 ([Quỳ+20b], 19.). *Giả sử* F_n, L_n *tương ứng là số hạng thứ n của dãy Fibonnaci & dãy Lucas. Chứng minh* $F_{2n} = F_nL_n$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$.

Bài toán 20 ([Quỳ+20b], 20.). *Lập dãy số Farey bậc* 9, *bậc* 10.

Bài toán 21 ([Quỳ+20b], 21.). *Chứng minh nếu* $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}$ *là 2 phân số với* $ad - bc = 1$, $d\ge b$ *thì* $\dfrac{c}{d} < \dfrac{a}{b}$ *&* $\dfrac{c}{d}, \dfrac{a}{b}$ *là 2 số hạng liên tiếp trong dãy số Farey bậc d.*

Bài toán 22 ([Quỳ+20b], 22.). *Số hạng thứ 3, thứ 4, thứ 7, & cuối cùng của 1 cấp số cộng không hằng lập thành 1 cấp số nhân. Tìm số số hạng của cấp số này.*

Bài toán 23 ([Quỳ+20b], 23.). *Số hạng thứ 4 của 1 cấp số cộng bằng* 4. *Tìm* GTNN *của tổng các tích đôi một của 3 số hạng đầu.*

Bài toán 24 ([Quỳ+20b], 24.). *2 cấp số cộng có cùng số phần tử. Tỷ lệ giữ số hạng cuối của cấp số đầu & số hạng đầu của cấp số thứ 2 bằng tỷ lệ giữa số hạng cuối của cấp số thứ 2 & số hạng đầu của cấp số thứ nhất & bằng* 4. *Tỷ lệ giữa tổng các số hạng của cấp số thứ nhất & tổng các số hạng của cấp số thứ 2 bằng* 2. *Tìm tỷ lệ giữa các công sai của 2 cấp số.*

Bài toán 25 ([Quỳ+20b], 25.). *3 số lập thành 1 cấp số nhân. Nếu ta trừ số hạng thứ 3 cho* 4 *thì ta được 1 cấp số cộng. Nếu lại trừ các số hạng thứ 2 & thứ 3 của cấp số cộng thu được cho* 1, *ta lại được 1 cấp số nhân. Tìm 3 số ban đầu.*

Bài toán 26 ([Quỳ+20b], 26.). *Tính tổng: (a)* $\sum_{i=1}^n \dfrac{1}{i(i+1)}$. *(b)* $\sum_{i=1}^n i(i+1)$. *(c)* $\sum_{i=1}^n \dfrac{i}{2^i}$.

Bài toán 27 ([Quỳ+20b], 27.). *Tìm đa thức* $P(x)$ *thỏa* $P(x) - P(x-1) = x^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *Từ đó lập công thức tính tổng* $S_n^{(3)} = \sum_{i=1}^n i^3$.

Bài toán 28 ([Quỳ+20b], 28.). *Cho dãy số thực* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *xác định bởi* $x_0 = 1, x_{n+1} = 2 + \sqrt{x_n} - 2\sqrt{1+\sqrt{x_n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Xác định dãy* $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ *bởi công thức* $y_n = \sum_{i=1}^n x_i 2^i$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Tìm công thức tổng quát của dãy* $\{y_n\}_{n=1}^\infty$.

Bài toán 29 ([Quỳ+20b], 29.). *2 dãy số nguyên* $\{a_n\}_{n=0}^\infty, \{b_n\}_{n=0}^\infty$ *được xác định bởi:*

$$\begin{aligned} a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n, \\ b_0 = 1,\ b_1 = 2,\ b_{n+2} = 4b_{n+1} - b_n. \end{aligned}$$

Chứng minh $b_n^2 = 3a_n^2 + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$.

Bài toán 30 ([Quỳ+20b], 30.). *Cho dãy số* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *xác định bởi* $x_1 = \dfrac{2}{3}, x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2(2n+1)x_n + 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Tính tổng của: (a)* 2010 *số hạng đầu tiên của* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. *(b)* $n \in \mathbb{N}^\star$ *số hạng đầu tiên của* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$.

Bài toán 31 ([Quỳ+20b], 31.). *Tính: (a)* $\sum_{i=1}^{101} \dfrac{a_i^3}{1 - 3a_i + 3a_i^2}$ *với* $a_n = \dfrac{n}{101}$. *(b)* $\sum_{i=1}^n \dfrac{a_i^3}{1-3a_i+3a_i^2}$ *với* $a_i = \dfrac{i}{n}$.

Bài toán 32 ([Quỳ+20b], 32.). *Cho dãy số* $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ *xác định bởi* $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}$. *Chứng minh* $\sum_{i=1}^n a_i < 1$, $n \in \mathbb{N}^\star$.

Bài toán 33 ([Quỳ+20b], 33.). *Cho dãy số* $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ *xác định bởi* $x_0 = x_1 = 1, n(n+1)x_{n+1} = n(n-1)x_n - (n-2)x_{n-1}$. *Tìm* $\sum_{i=0}^n \dfrac{x_i}{x_{i+1}}$.

Bài toán 34 ([Quỳ+20b], 34.). *Cho dãy số* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *xác định bởi* $x_1 = 2, x_{n+1} = \dfrac{2+x_n}{1-2x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Chứng minh: (a)* $x_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *(b)* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *không tuần hoàn.*

2.3 Subsequences – Dãy con

Definition 7. *Given a sequence* $\{p_n\}_{n=1}^\infty$*, consider a sequence* $\{n_k\}$ *of positive integers, s.t.* $n_1 < n_2 < \cdots$. *Then the sequence* $\{p_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ *is called a* subsequence *of* $\{p_n\}_{n=1}^\infty$. *If* $\{p_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ *converges, its limit is called a* subsequential limit *of* $\{p_n\}_{n=1}^\infty$.

Problem 5. *Prove that* $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ *converges to* p *iff every subsequence of* $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ *converges to* p.

Theorem 7 ([Rud76], Thm. 3.6, p. 50).

(a) If $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ *is a sequence in a compact metric space* X*, then some subsequence of* $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ *converges to a point of* X.

(b) Every bounded sequence in $\mathbb{R}^d$ *contains a convergent subsequence.*

Theorem 8 ([Rud76], Thm. 3.7, p. 52). *The subsequential limits of a sequence* $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ *in a metric space* X *form a closed subset of* X.

2.4 Limit of sequences – Giới hạn của dãy số

Định nghĩa 1 (Dãy số thực có giới hạn 0, [Thá+25], p. 60). *Dãy số thực* $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ *có giới hạn* 0 *khi* n *dần tới dương vô cực nếu* $|u_n|$ *có thể nhỏ hơn 1 số dương bé tùy ý, kể từ 1 số hạng nào đó trở đi, ký hiệu* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Notation. Ngoài ký hiệu, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, ta cũng sử dụng các ký hiệu: $\lim u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to \infty$.

Nhận xét 1. *Nếu* u_n *ngày càng gần tới* 0 *khi* n *ngày càng lớn thì* $\lim u_n = 0$.

Định nghĩa 2 (Dãy số thực có giới hạn 0 theo ngôn ngữ ε-δ)**.** *1 dãy số thực $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ có giới hạn 0 nếu & chỉ nếu với mọi số nguyên dương ε, tồn tại 1 số nguyên dương $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star$ để $|u_n| < \varepsilon$ kể từ chỉ số N_ε đó trở đi:*

$$\forall \varepsilon \in (0,\infty),\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star,\ |u_n| < \varepsilon,\ \forall n \geq N_\varepsilon,$$

hay tương đương:

$$\forall \varepsilon \in (0,\infty),\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star,\ n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |u_n| < \varepsilon.$$

Remark 2 (Optimal/smallest/best indices – Các chỉ số tối ưu/nhỏ nhất/tốt nhất)**.** *Định nghĩa 2 chỉ yêu cầu tồn tại $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star$ đủ lớn với mỗi $\varepsilon \in (0,\infty)$. Tuy nhiên nếu tìm được chỉ số $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star$ tối ưu, i.e., chỉ số nhỏ nhất trong các chỉ số N_ε thỏa mãn, i.e.:*

$$N_\varepsilon^{\rm opt} := \min\{N_\varepsilon \in \mathbb{N}; |u_n| < \varepsilon,\ \forall n \geq N_\varepsilon\} = \min\{N_\varepsilon \in \mathbb{N}; n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |u_n| < \varepsilon\}.$$

thì ta có thể sử dụng ký hiệu $N_\varepsilon^{\rm opt}$ để chỉ rõ tính tối ưu (i.e., nhỏ nhất, chặt/ngặt nhất) của N_ε.

Remark 3 (Ceil- vs. floor functions)**.**

$$\lceil x\rceil = \begin{cases} \lfloor x\rfloor & \text{if } x \in \mathbb{Z},\\ \lfloor x\rfloor + 1 & \text{if } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}. \end{cases} = \lfloor x\rfloor + \chi_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}}(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 35 ([Thá+25], p. 60)**.** *Chứng minh $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ & chỉ ra $N_\varepsilon^{\rm opt}$ với $\varepsilon = 0.1, 0.01, 10^{-n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, & với $\varepsilon > 0$ bất kỳ: (a) $u_n = 0$. (b) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. (c) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. (d) $u_n = -\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. (e) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (f) $u_n = \dfrac{a\epsilon_n}{n^b}$ với $\{\epsilon_n\}_{n=1}^\infty \subset \{\pm 1\}$, $a \in \mathbb{R}, b \in (0,\infty)$.*

Chứng minh. (a) Lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ, có $|u_n| = |0| = 0 < \varepsilon$, $\forall n \geq 1$. Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ ε-δ, suy ra $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Ta có thể chọn $N_\varepsilon := N_\varepsilon^{\rm opt} = 1$, $\forall \varepsilon > 0$, nên $N_{0.1}^{\rm opt} = N_{0.01}^{\rm opt} = N_{10^{-n}}^{\rm opt} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ, có $|u_n| = \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$, nên $|u_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow N_\varepsilon^{\rm opt} = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon}\right\rfloor + 1$, nên nếu chọn $N_\varepsilon := N_\varepsilon^{\rm opt} = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon}\right\rfloor + 1$ thì $|u_n| < \varepsilon$, $\forall n \geq N_\varepsilon$. Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ ε-δ, suy ra $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

(c) Lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ, có $|u_n| = \left|\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, nên $|u_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n} > \dfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow N_\varepsilon^{\rm opt} = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon^2}\right\rfloor + 1$, nên nếu chọn $N_\varepsilon := N_\varepsilon^{\rm opt} = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon^2}\right\rfloor + 1$ thì $|u_n| < \varepsilon$, $\forall n \geq N_\varepsilon$. Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ ε-δ, suy ra $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

(d) Lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ, có $|u_n| = \left|-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, nên $|u_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n} > \dfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow N_\varepsilon^{\rm opt} = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon^2}\right\rfloor + 1$, nên nếu chọn $N_\varepsilon := N_\varepsilon^{\rm opt} = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon^2}\right\rfloor + 1$ thì $|u_n| < \varepsilon$, $\forall n \geq N_\varepsilon$. Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ ε-δ, suy ra $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

(e) Lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ, có $|u_n| = \left|\dfrac{a\epsilon_n}{n^b}\right| = \dfrac{|a|}{n^b}$, nên $|u_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{|a|}{n^b} < \varepsilon \Leftrightarrow n^b > \dfrac{|a|}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \left(\dfrac{|a|}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{b}} \Rightarrow N_\varepsilon^{\rm opt} = \left\lfloor \left(\dfrac{|a|}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{b}}\right\rfloor + 1$, nên nếu chọn $N_\varepsilon := N_\varepsilon^{\rm opt} = \left\lfloor \left(\dfrac{|a|}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{b}}\right\rfloor + 1$ thì $|u_n| < \varepsilon$, $\forall n \geq N_\varepsilon$. Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ ε-δ, suy ra $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. □

Remark 4 (Dấu của số hạng của dãy số có giới hạn 0)**.** *Đối với bài toán chứng minh dãy $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ có $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ thì dấu của từng số hạng u_n của dãy $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ không quan trọng lắm, i.e., $\operatorname{sgn} u_n$ không làm ảnh hưởng tới bất đẳng thức $|u_n| < \varepsilon$ trong định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ ε-δ vì sau khi lấy giá trị tuyệt đối, $|u_n| \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$.*

Bài toán 36. *(a) Chứng minh $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$. (b) Viết chương trình* C/C++, Python *để tính $N_\varepsilon^{\rm opt}$ với $\varepsilon \in (0,\infty)$ được nhập từ bàn phím.*

Bài toán 37. *(a) Chứng minh $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$. (b) Viết chương trình* C/C++, Python *để tính $N_\varepsilon^{\rm opt}$ với $\varepsilon \in (0,\infty)$ được nhập từ bàn phím.*

Bài toán 38. *Cho dãy $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ có $\lim_{n\to\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$. Chứng minh $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$ với $v_n = u_n - u_{n-1}$. (b) $\lim_{n\to\infty} u_n - u_{n-1} = 0$ có suy ra được $\lim_{n\to\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ không?*

Định nghĩa 3 (Dãy số thực có giới hạn hữu hạn, [Thá+25], p. 61)**.** *Dãy số thực $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ có giới hạn hữu là $l \in \mathbb{R}$ khi n dần tới dương vô cực nếu $\lim_{n\to\infty}(u_n - l) = 0$, ký hiệu $\lim_{n\to\infty} u_n = L$.*

Notation. Ngoài ký hiệu $\lim_{n\to\infty} u_n = l$, ta cũng sử dụng các ký hiệu $\lim u_n = L$ hay $u_n \to l$ khi $n \to \infty$.

Nhận xét 2. *Nếu u_n ngày càng gần tới l khi n ngày càng lớn thì $\lim u_n = l$.*

Định nghĩa 4 (Dãy số thực có giới hạn thực theo ngôn ngữ ε-δ)**.** *1 dãy số thực $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ có giới hạn hữu hạn là $l \in \mathbb{R}$ nếu & chỉ nếu với mọi số nguyên dương ε, tồn tại 1 số nguyên dương $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star$ để $|u_n - l| < \varepsilon$ kể từ chỉ số N_ε đó trở đi:*

$$\forall \varepsilon \in (0, \infty),\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star,\ |u_n| < \varepsilon,\ \forall n \ge N_\varepsilon,$$

hay tương đương:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star,\ n \ge N_\varepsilon \Rightarrow |u_n| < \varepsilon.$$

Remark 5 (Optimal/smallest/best indices – Các chỉ số tối ưu/nhỏ nhất/tốt nhất)**.** *Định nghĩa 2 chỉ yêu cầu tồn tại $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star$ đủ lớn với mỗi $\varepsilon \in (0, \infty)$. Tuy nhiên nếu tìm được chỉ số $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star$ tối ưu, i.e., chỉ số nhỏ nhất trong các chỉ số N_ε thỏa mãn, i.e.:*

$$N_\varepsilon^{\rm opt} := \min\{N_\varepsilon \in \mathbb{N}; |u_n| < \varepsilon,\ \forall n \ge N_\varepsilon\} = \min\{N_\varepsilon \in \mathbb{N}; n \ge N_\varepsilon \Rightarrow |u_n| < \varepsilon\}.$$

thì ta có thể sử dụng ký hiệu $N_\varepsilon^{\rm opt}$ để chỉ rõ tính tối ưu (i.e., nhỏ nhất, chặt/ngặt nhất) của N_ε.

Bài toán 39. *Tính $\lim_{n\to\infty} u_n$ với: (a) $u_n = c \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. (b) $u_n = \dfrac{an+b}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, với $a, b \in \mathbb{R}$. (c) $u_n = \dfrac{an+b}{cn+d}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ thỏa $cn + d \ne 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$.*

Chứng minh. (a) Lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ, có $|u_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$, $\forall n \ge 1$, suy ra $N_\varepsilon^{\rm opt} = 1$, $\forall \varepsilon \in (0, \infty)$. Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ ε-δ, suy ra $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

(b) Lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ, có $|u_n - a| = \left|\dfrac{an+b}{n} - a\right| = \left|\dfrac{b}{n}\right| = \dfrac{|b|}{n}$, nên $|u_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{|b|}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \dfrac{|b|}{\varepsilon} \Rightarrow N_\varepsilon^{\rm opt} = \left\lfloor \dfrac{|b|}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, nên nếu chọn $N_\varepsilon := N_\varepsilon^{\rm opt} = \left\lfloor \dfrac{|b|}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ thì $|u_n| < \varepsilon$, $\forall n \ge N_\varepsilon$. Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ ε-δ, suy ra $\lim_{n\to\infty} u_n = a$. □

Bài toán 40 (Programming: Compute $N_\varepsilon^{\rm opt}$)**.** *Cho $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ có giới hạn $\lim_{n\to\infty} u_n = L$. Viết chương trình* C/C++, Python, *với $\varepsilon \in (0, \infty)$ được nhập từ bàn phím, output N_ε: (a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. (b) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ & $u_n = -\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. (c) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.*

Python: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/Python/limit.py.

```
from math import sqrt

def ua(n):
    return (-1)**n / n

def ub(n):
    return 1 / sqrt(n)

def uc(n):
    return -1 / sqrt(n)

def ud(n):
    return (-1)**n / sqrt(n)

MAX_LOOP = 100000
epsilon = float(input())

for i in range(1, MAX_LOOP + 1):
    if abs(ua(i)) < epsilon:
        print(i) # N_epsilon
        break

for i in range(1, MAX_LOOP + 1):
    if abs(ub(i)) < epsilon:
        print(i) # N_epsilon
        break

for i in range(1, MAX_LOOP + 1):
    if abs(uc(i)) < epsilon:
        print(i) # N_epsilon
        break

for i in range(1, MAX_LOOP + 1):
    if abs(ud(i)) < epsilon:
        print(i) # N_epsilon
        break
```

C++:

- NLDK's C++ script to compute $N_\varepsilon^{\rm opt}$:

  URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/C%2B%2B/NLDK_limit.cpp.

```
#include<bits/stdc++.h>
#define Sanic_speed ios_base::sync_with_stdio(false);cin.tie(NULL);cout.tie(NULL);
#define el "\n";
#define fre(i, a, b) for(int i = a; i <= b; ++i)
using namespace std;

double long qa(int n) {
    return (pow(-1, n)/n);
}
double long qb(int n) {
    double long deno = sqrt(n);
    return (1/deno);
}
double long qc(int n) {
    double long deno = sqrt(n);
    return (-1/deno);
}
double long qd(int n) {
    double long deno = sqrt(n);
    return (pow(-1, n)/deno);
}

void solve() {
    double long epsilon;
    cin >> epsilon;
    int maxN = 100000;
    fre(i, 1 ,maxN) {
        if (abs(qa(i)) < epsilon) {
            cout << "a) " << i << el
            break;
        }
    }
    fre(i, 1 ,maxN) {
        if (abs(qb(i)) < epsilon) {
            cout << "b) " << i << el
            break;
        }
    }
    fre(i, 1 ,maxN) {
        if (abs(qc(i)) < epsilon) {
            cout << "c) " << i << el
            break;
        }
    }
    fre(i, 1 ,maxN) {
        if (abs(qd(i)) < epsilon) {
            cout << "d) " << i << el
            break;
        }
    }
}

int main() {
    Sanic_speed
    int t = 1;// cin >> t;
    while(t > 0) {
     solve();
     --t;
    }
```

```
}
```

Tính giới hạn:

Bài toán 41 ([Quỳ+20b], 1.). *(a)* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. *(b)* $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$. *(c)* $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+2}$. *(d) Mở rộng bài toán.*

Bài toán 42 ([Quỳ+20b], 2.). *(a)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2n^2-1}{n^2+n}}$. *(b)* $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{1+2^n+3^n}$. *(c)* $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n i}{n^2}$.

Bài toán 43 ([Quỳ+20b], 3.). *Chứng minh: (a)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$. *(b)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Hint. Sử dụng định lý kẹp.

Bài toán 44 ([Quỳ+20b], 4.). *Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn* $0.(1428571)$ *dưới dạng phân số.*

Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0.a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-m}(b_1 b_2\ldots b_p)}$ dưới dạng phân số. Viết chương trình C/C++, Pascal, Python để mô phỏng.

Bài toán 45.

Bài toán 46 ([Quỳ+20b], 5.). *(a)* $\lim_{n\to\infty} 2^n - 3^n$. *(b)* $\lim_{n\to\infty} n + \sin n$. *(c)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^3+3n+1}$. *(d) Mở rộng bài toán.*

Bài toán 47 ([Quỳ+20b], 6.). *(a)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n+1} - n$. *(b)* $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

Bài toán 48 ([Quỳ+20b], 7.). *Cho* $\Delta A_0B_0C_0$ *đều cạnh* $a \in (0,\infty)$. $\Delta A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ *có 3 đỉnh là trung điểm của* $\Delta A_nB_nC_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Gọi* P_n, S_n *lần lượt là chu vi & diện tích* $\Delta A_nB_nC_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Tính: (a)* $\lim_{n\to\infty} p_n, \lim_{n\to\infty} S_n$. *(b)* $\sum_{i=0}^\infty p_i, \sum_{i=0}^\infty S_i$.

Bài toán 49 ([Quỳ+20a], 22., p. 47). *Tính* $\lim_{n\to\infty} u_n$ *với* $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)}$.

Bài toán 50 ([Quỳ+20a], 23., p. 47). *Tính* $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{i}}{n\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

Hint. sử dụng định lý kẹp & đánh giá:

$$\frac{3\sqrt{n}}{2} < (n+1)\sqrt{n+1} - n\sqrt{n} < \frac{3\sqrt{n+1}}{2}.$$

Bài toán 51 ([Quỳ+20a], 24., p. 48). *Chứng minh dãy số* $x_n = \cos n$ *không có giới hạn khi* $n \to \infty$.

Hint. Chứng minh phản chứng.

Bài toán 52. $\lim_{n\to\infty} x_n$ *với* $x_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)}$.

Chứng minh. $x_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$ as $n \to \infty$ nên $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. □

Bài toán 53. $\lim_{n\to\infty} \frac{4^n - 5^{-n}}{3^n - 2^{2n} - 5n^6}$.

Bài toán 54. $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(3n^2-2n)}{n^9+3n^2}$.

Bài toán 55. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-3}{2n+5}\right)^{\frac{n^2+1}{n+1}}$.

Bài toán 56. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+(-1)^n}$.

Bài toán 57. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{\frac{1+n}{2-\sqrt{n}}}$.

Bài toán 58. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-1}{5n+2}\right)^n$.

Bài toán 59. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{\frac{1+n}{2-n^2}}$.

Bài toán 60. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^2+4^n}{n+5^n}}$.

Bài toán 61. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{5n+1}{n^{10}+2n}}$.

Bài toán 62. $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+1}{n^2-1}\right)^{\frac{1}{n-2}}$.

Bài toán 63. $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-1}{n^2+1}\right)^{1-n}$.

Bài toán 64. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

Bài toán 65. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

Bài toán 66. $\lim_{n\to\infty} u_n$ *với* $u_n = \sum_{i=1}^n \dfrac{1}{(2i-1)(2i+1)}$.

Bài toán 67. $\lim_{n\to\infty} u_n$ *với* $u_1 = \sqrt{3}, u_{n+1} = \sqrt{3+u_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$.

Bài toán 68 ([Hùn+23], VD1, p. 86)**.** *Cho dãy số* $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ *Chứng minh dãy* (a_n) *có giới hạn là* 1.

Bài toán 69 ([Hùn+23], VD2, p. 87)**.** *Chứng minh* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Bài toán 70 ([Hùn+23], VD3, p. 87)**.** *Chứng minh* $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ *nếu* $0 < |q| < 1$.

Bài toán 71 ([Hùn+23], VD4, p. 87)**.** *Chứng minh dãy* $u_n = (-1)^n$ *phân kỳ.*

Bài toán 72 ([Hùn+23], VD5, p. 88)**.** *Tìm* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^3+3n+1}{2n^3-1}$.

Bài toán 73 ([Hùn+23], VD6, p. 88)**.** *Tìm* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^4+2n^3+7n^2+8n+9}{2n^4+3n^3+n+10}$.

Bài toán 74 ([Hùn+23], VD7, p. 88)**.** *Tìm* $\lim_{n\to\infty}(n - \sqrt[3]{n} - \sqrt{n})$.

Bài toán 75 ([Hùn+23], VD1, p. 89)**.** *Tìm* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n}$.

Bài toán 76 ([Hùn+23], VD2, p. 89)**.** *Chứng minh nếu* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ *thì* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bài toán 77 ([Hùn+23], VD3, p. 89)**.** *Chứng minh* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Bài toán 78 ([Hùn+23], VD4, p. 89)**.** *Cho dãy số nguyên dương* (u_n) *thỏa mãn* $u_n > u_{n-1}u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. *Tính giới hạn* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \dfrac{i}{u_i} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{1}{u_1} + \dfrac{2}{u_2} + \cdots + \dfrac{n}{u_n}\right)$.

Bài toán 79 ([Hùn+23], VD5, p. 90)**.** *Tính* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} \sum_{i=2}^n i \cos \dfrac{\pi}{i}$.

Bài toán 80 ([Hùn+23], VD1, p. 90)**.** *Cho dãy số* (u_n) *được xác định theo công thức* $u_n = f(u_{n-1})$. *Giả sử* $u_n \in [a, b]$ *với mọi chỉ số* n *&* f *là hàm tăng trên* $[a, b]$. *Chứng minh: (a) Nếu* $u_1 \le u_2$ *thì* (u_n) *là dãy tăng. (b) Nếu* $u_1 \ge u_2$ *thì* (u_n) *là dãy giảm. (c) Nếu hàm* f *bị chặn thì* (u_n) *hội tụ.*

Bài toán 81 ([Hùn+23], VD2, p. 90)**.** *Cho dãy* (u_n) *được xác định bởi* $u_n = \dfrac{1}{3}\left(2u_{n-1} + \dfrac{1}{u_{n-1}^2}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, $u_1 > 0$. *Chứng minh dãy* (u_n) *hội tụ & tìm giới hạn của dãy.*

Bài toán 82 ([Hùn+23], VD3, p. 91)**.** *Tìm* u_1 *để dãy* $u_n = u_{n-1}^2 + 3u_{n-1} + 1$ *hội tụ.*

Bài toán 83 ([Hùn+23], VD4, p. 92)**.** *Chứng minh tồn tại* $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Bài toán 84 (Số Napier e)**.** *Đặt* $e \coloneqq \lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. *Chứng minh: (a)* $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *(b)* $\dfrac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$, *trong đó* $\ln x$ *là logarith cơ số* e *của* x.

Bài toán 85 ([Hùn+23], VD5, p. 91). *Chứng minh dãy* $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \ln n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ *có giới hạn hữu hạn.*

Lưu ý 1. $C = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \ln n = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ *được gọi là* hằng số Euler.

Bài toán 86 ([Hùn+23], VD1, p. 92). *Chứng minh không tồn tại* $\lim_{n\to\infty} \cos\frac{n\pi}{2}$.

Bài toán 87 ([Hùn+23], VD2, p. 92). *Cho hàm* $f : [0, +\infty) \to (0, b)$ *liên tục & nghịch biến. Giả sử hệ phương trình*

$$\begin{cases} y = f(x), \\ x = f(y), \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất $x = y = q$. *Chứng minh dãy* $u_n = f(u_{n-1})$ *hội tụ tới* q *với* $u_1 > 0$.

Bài toán 88 ([Hùn+23], VD3, p. 93). *Cho dãy số* $u_n = 1 + \frac{2}{1 + u_{n-1}}$, $u_1 > 0$. *Chứng minh dãy hội tụ & tìm giới hạn.*

Bài toán 89 ([Hùn+23], VD1, p. 93). *Cho dãy* $a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Chứng minh dãy này hội tụ.*

Bài toán 90 ([Hùn+23], VD2, p. 93). *Cho dãy* $a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Chứng minh dãy này phân kỳ.*

Bài toán 91 ([Hùn+23], VD3, p. 94). *Chứng minh* $\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$, $\forall p \in \mathbb{N}$.

Bài toán 92 ([Hùn+23], VD1, p. 94). *Khảo sát sự hội tụ của* dãy Héron (u_n) *được xác định bởi* $u_1 = 1$, $u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n-1} + \frac{2}{u_{n-1}}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$.

Bài toán 93 ([Hùn+23], VD2, p. 95). *Cho dãy số* (x_n) *thỏa mãn* $|x_{n+1} - a| \le \alpha|x_n - a|$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *trong đó* $a \in \mathbb{R}$ *&* $0 < \alpha < 1$. *Chứng minh dãy số* (x_n) *hội tụ về* a.

Bài toán 94 ([Hùn+23], VD3, p. 95). *Cho dãy số* (x_n) *xác định bởi* $x_1 = a \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = \cos x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Chứng minh* (x_n) *hội tụ.*

Bài toán 95 ([Hùn+23], VD4, p. 95, Canada 1985). *Dãy số* (x_n) *thỏa mãn* $1 < x_1 < 2$ *&* $x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{1}{2}x_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Chứng minh* (x_n) *hội tụ. Tìm* $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Bài toán 96 ([Hùn+23], VD5, p. 95, VMO2023). *Xét dãy số* (a_n) *thỏa mãn* $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \sqrt[3]{3a_{n+1} - a_n}$ *&* $0 \le a_n \le 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Chứng minh dãy* (a_n) *có giới hạn hữu hạn.*

Bài toán 97 ([Hùn+23], VD6, p. 96, VMO2022). *Cho dãy số* (u_n) *xác định bởi* $u_1 = 6$, $u_{n+1} = 2 + \sqrt{u_n + 4}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Chứng minh dãy* (u_n) *có giới hạn hữu hạn.*

Bài toán 98 ([Hùn+23], VD7, p. 96, VMO2019). *Cho dãy số* (x_n) *xác định bởi* $x_1 = 1$ *&* $x_{n+1} = x_n + 3\sqrt{x_n} + \frac{n}{\sqrt{x_n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *(a) Chứng minh* $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{x_n} = 0$. *(b) Tính giới hạn* $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{x_n}$.

Bài toán 99 ([Hùn+23], VD1, p. 97, VMO1984). *Dãy số* (u_n) *được xác định như sau:* $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}$. *Dãy số* (v_n) *được xác định như sau:* $v_n = \sum_{i=1}^n \operatorname{arccot} u_i$. *Tìm giới hạn* $\lim_{n\to\infty} v_n$.

Bài toán 100 ([Hùn+23], VD2, p. 97, VMO1988). *Dãy số* (u_n) *bị chặn thỏa mãn điều kiện* $u_n + u_{n+1} \ge 2u_{n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$ *có nhất thiết hội tụ không?*

Bài toán 101 ([Hùn+23], VD3, p. 98, Olympic 30.4 lần V). *Cho* $x_k = \sum_{i=1}^k \frac{i}{(i+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{k}{(k+1)!}$. *Tính* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{1999} x_i^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{1999}^n}$.

Bài toán 102 ([Hùn+23], VD4, p. 98, VMO2013A). *Gọi* F *là tập hợp tất cả các hàm số* $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ *thỏa mãn* $f(3x) \ge f(f(2x)) + x$, $\forall x > 0$. *Tìm hằng số* A *lớn nhất để* $f(x) \ge Ax$, $\forall f \in F$, $\forall x > 0$.

Bài toán 103 ([Hùn+23], VD5, p. 98, Hải Dương 2019–2020). *Cho dãy số thực* (x_n) *thỏa mãn* $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_{n+1} = \frac{3x_n}{2x_n + 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Tìm số hạng tổng quát của dãy số & tính giới hạn của dãy số đó.*

Bài toán 104 ([Hùn+23], VD6, p. 99, Hải Dương 2015–2016). *Cho dãy số* (u_n) *thỏa mãn* $u_1 = -1$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$ *& dãy số* (v_n) *thỏa mãn* $u_n v_n - u_n + 2v_n + 2 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Tính* v_{2015} *&* $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Bài toán 105 ([Hùn+23], VD7, p. 99, Hải Dương 2013–2014)**.** *Cho dãy số* (u_n) *thỏa mãn* $u_1 = \frac{5}{2}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 - u_n + 2$*. Tính* $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i}$.

Bài toán 106 ([Hùn+23], VD1, p. 99)**.** *Cho dãy số* (u_n) *được xác định:* u_1, $u_n = \alpha u_{n-1} + \beta$*. Biện luận theo tham số* α, β *giá trị giới hạn của dãy số.*

Bài toán 107 ([Hùn+23], VD1, p. 100)**.** *Cho* (u_n) *là dãy số hội tụ &* $\lim_{n\to\infty} u_n = u$*. Khi đó, dãy trung bình cộng* $v_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n u_i$ *cũng hội tụ &* $\lim_{n\to\infty} v_n = u$.

Bài toán 108 ([Hùn+23], VD2, p. 100)**.** *Giả sử* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$*. Chứng minh* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_ib_{n+1-i} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} = ab$*. Từ đó, suy ra* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$.

Bài toán 109 ([Hùn+23], VD3, p. 101)**.** *Giả sử* $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$*. Chứng minh nếu* $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$ *thì* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = a$.

2.5 Cauchy sequences – Dãy Cauchy

Definition 8 ([Rud76], Def. 3.8, p. 52)**.** *A sequence* $\{p_n\}$ *in a metric space* X *is said to be a* Cauchy sequence *if for every* $\epsilon > 0$ *there is an integer* N *s.t.* $d_X(p_n, p_m) < \epsilon$ *if* $n \ge N$ *&* $m \ge N$.

Briefly:

$$\{p_n\} \text{ is a Cauchy sequence in a metric space } X \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \text{ s.t. } \min\{m,n\} \ge N_\varepsilon \Rightarrow d_X(p_n, p_m) < \varepsilon,$$

or equivalently,

$$\{p_n\} \text{ is a Cauchy sequence in a metric space } X \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \text{ s.t. } d_X(p_n, p_m) < \varepsilon,\ \forall m \ge N_\varepsilon,\ \forall n \ge N_\varepsilon.$$

Definition 9. *Let* E *be a subset of a metric space* X*, & let* S *be the set of all real numbers of the form* $d(p,q)$*, with* $p \in E, q \in E$*. The sup of* S *is called the* diameter *of* E.

Problem 6 ([Rud76], p. 48, +1)**.** *(a) Prove that the sequence* $\{\frac{1}{n}\}$ *converges in* $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ *(to* 0*), but fails to converge in the set of all positive real numbers, with* $d(x,y) \coloneqq |x-y|$, $\forall x, y \in X$*. (b) Find similar or more advanced examples.*

2.6 Sequences with `SymPy`

A sequence is a finite or infinite lazily evaluated list.

```
sympy.series.sequences.sequence(seq, limits=None)
```

returns appropriate `sequence object`.

Explanation: If `seq` is a SymPy sequence, returns `SeqPer` object otherwise returns `SeqFormula` object. E.g.:

```
from sympy import sequence
from sympy.abc import n
sequence(n**2, (n, 0, 5))
# output: SeqFormula(n**2, (n, 0, 5))
sequence((1, 2, 3), (n, 0, 5))
# output: SeqPer((1, 2, 3), (n, 0, 5))
```

2.6.1 Sequence Base

`class sympy.series.sequences.SeqBase(*args)`: Base class for sequences.

- `coeff(pt)`: returns the coefficient at point `pt`.
- `coeff_mul(other)`: should be used when `other` is not a sequence. Should be defined to define custom behavior.

  ```
  from sympy import SeqFormula
  from sympy.abc import n
  SeqFormula(n**2).coeff_mul(2)
  # output: SeqFormula(2*n**2, (n, 0, oo))
  ```

  `*` defines multiplication of sequences with sequences only.
- `find_linear_recurrence(n, d = None, gfvar = None, )`: Finds the shortest linear recurrence that satisfies the 1st n terms of sequence of order $\le \frac{n}{2}$ if possible. If `d` is specified, find shortest linear recurrence of order $\le \min\{d, \frac{n}{2}\}$ if possible. Returns list of coefficients `[b(1), b(2), ...]` corresponding to recurrence relation `x(n) = b(1)*x(n - 1) + b(2)*x(n - 2) + ...`. Return `[]` if no recurrence is found. If `gfvar` is specified, also returns ordinary generating function as a function of `gfvar`.

2.7 Problems: Sequences

Bài toán 110. *Tính* $\lim_{n\to\infty}\dfrac{an+b}{cn+d}$ *theo* $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $(c,d)\neq(0,0)$.

Bài toán 111. *Tính* $\lim_{n\to\infty}\dfrac{an^2+bn+c}{dn^2+en+f}$ *theo* $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$, $(d,e,f)\neq(0,0,0)$.

Bài toán 112. *Tính* $\lim_{n\to\infty}\dfrac{P(n)}{Q(n)}$ *với: (a)* $P,Q\in\mathbb{R}[x]$, $Q\not\equiv 0$. *(b)* $P,Q\in\mathbb{C}[x]$, $Q\not\equiv 0$.

Bài toán 113. *Cho* $a,b,c,d,\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$. *Tính: (a)* $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a+b\alpha^n}{c+d\alpha^n}$. *(b)* $\lim_{n\to\infty}\dfrac{an+b\alpha^n}{cn+d\alpha^n}$. *(c)* $\lim_{n\to\infty}\dfrac{an^2+b\alpha^n}{cn^2+d\alpha^n}$. *(d)* $\lim_{n\to\infty}\dfrac{P(x)+a\alpha^n}{Q(x)+b\alpha^n}$ *với* $P,Q\in\mathbb{R}[x]$.

Bài toán 114 ([VMS23], 1.1, p. 30, HCMUT)**.** *Cho* $f\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *thỏa* $f'(x)<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. *Xét dãy số* $\{a_n\}$*:*

$$\begin{cases} a_1=1,\\ a_{n+1}=a_n-\dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}, & \forall n\in\mathbb{N}^\star.\end{cases}$$

(a) Nếu $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, *tính* $\lim_{n\to\infty}a_n$. *(b) Nếu* $f(2023)=0$ *&* $f\in C^2(\mathbb{R})$ *thỏa* $f''(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, *tính* $\lim_{n\to\infty}a_n$.

Bài toán 115 ([VMS23], 1.2, p. 30, VNUHCM UIT)**.** *Cho dãy số* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *thỏa*

$$\begin{cases} u_0\ge -2,\\ u_n=\sqrt{2+u_{n-1}}, & \forall n\in\mathbb{N}^\star.\end{cases}$$

(a) Chứng minh $\{u_n\}$ *có giới hạn hữu hạn. Tính* $\lim_{n\to\infty}u_n$. *(b) Cho 2 dãy* $\{v_n\}_{n=1}^\infty,\{w_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$\begin{cases} v_n=4^n|u_n-2|,\\ w_n=\dfrac{u_1u_2\cdots u_n}{2^n}, & \forall n\in\mathbb{N}^\star.\end{cases}$$

Tính $\lim_{n\to\infty}v_n,\lim_{n\to\infty}w_n$.

Bài toán 116 ([VMS23], 1.3, p. 30, ĐH Đồng Tháp)**.** *Xét dãy số* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$u_1=\frac{3}{2},\ u_n=1+\frac{1}{2}\arctan u_{n-1},\ \forall n\in\mathbb{N}^\star.$$

Chứng minh $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *hội tụ.*

Bài toán 117 ([VMS23], 1.4, p. 31, ĐH Đồng Tháp)**.** *Cho dãy số* $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{n^2-1}{a_n}+2,\ \forall n\in\mathbb{N}^\star.$$

(a) Chứng minh $n\le a_n\le n+1$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. *(b) Đặt* $S_n^{(3)}\coloneqq\sum_{i=1}^n a_i^3$. *Tính* $\lim_{n\to\infty}\dfrac{S_n^{(3)}}{n^4}$.

Bài toán 118 ([VMS23], 1.5, p. 31, ĐHGTVT)**.** *Cho dãy số* $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$a_1>0,\ a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n^2-a_n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}^\star.$$

Chứng minh $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ *giảm & tính* $\lim_{n\to\infty}a_n$.

Bài toán 119 ([VMS23], 1.6, p. 31, ĐH Hùng Vương, Phú Thọ)**.** *Cho dãy số* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$\begin{cases} u_0=0,\ u_1=\beta,\\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+u_{n-1}}{2}, & \forall n\in\mathbb{N}^\star.\end{cases}$$

(a) Tìm công thức số hạng tổng quát của $\{u_n\}_{n=1}^\infty$. *(b) Tính* $\lim_{n\to\infty}u_n$.

Bài toán 120 ([VMS23], 1.7, p. 31, ĐHKH, Thái Nguyên)**.** *Cho dãy số* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$x_n=\sum_{i=1}^n\frac{i}{(i+1)!}=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!},\ \forall n\in\mathbb{N}^\star.$$

Tính $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{i=1}^{2023}x_i^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1^n+x_2^n+\cdots+x_{2023}^n}$.

Bài toán 121 ([VMS23], 1.8, p. 31, ĐH Mỏ–Địa chất)**.** *Tính*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\prod_{i=1}^n i^{i^{2021}}\right)^{\frac{1}{n^{2022}}}}{n^{\frac{1}{2022}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1^{1^{2021}}\cdot 2^{2^{2021}}\cdots n^{n^{2021}}\right)^{\frac{1}{n^{2022}}}}{n^{\frac{1}{2022}}}.$$

Bài toán 122 ([VMS23], 1.9, pp. 31–32, ĐHSPHN2)**.** *Cho dãy số* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$x_1\in(0,1),\ x_{n+1}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(1+x_i),\ \forall n\in\mathbb{N}^\star.$$

(a) Chứng minh dãy $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *có giới hạn hữu hạn. (b) Chứng minh* $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n(x_n-x_{n+1})}{x_n^2}=\dfrac{1}{2}$.

Bài toán 123 ([VMS23], 1.10, p. 32, ĐH Trà Vinh)**.** *Cho dãy số* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$a_1=a_2=1,\ a_{n+2}=\frac{1}{a_{n+1}}+a_n,\ \forall n\in\mathbb{N}^\star.$$

Tính x_{2022}.

Bài toán 124 ([VMS23], 1.11, p. 32, ĐH Trà Vinh)**.** *Cho 2 dãy số* $\{x_n\}_{n=1}^\infty,\{y_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$x_1=y_1=\sqrt{3},\ x_{n+1}=x_n+\sqrt{1+x_n^2},\ y_{n+1}=\frac{1}{1+\sqrt{1+y_n^2}},\ \forall n\in\mathbb{N}^\star.$$

Chứng minh $x_ny_n\in(2,3)$, $\forall n\ge 2$ *&* $\lim_{n\to\infty}y_n=0$.

Bài toán 125 ([VMS23], 1.11, p. 32, ĐH Vinh)**.** *Cho dãy số* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$x_n=\prod_{i=1}^n\left(1+\frac{1}{2^i}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right),\ \forall n\in\mathbb{N}^\star.$$

(a) Tìm tất cả $n\in\mathbb{N}^\star$ *thỏa* $x_n>\frac{15}{8}$. *(b) Chứng minh* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *hội tụ.*

Bài toán 126 ([VMS24], p. 32, 1.1, VNUHCM UIT)**.** *Cho* $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. *Xét dãy số*

$$\begin{cases} x_0=a,\ x_1=b,\\ x_{n+1}=x_n+\dfrac{1}{2}x_{n-1}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right).\end{cases}$$

Chứng minh $\{x_n\}$ *hội tụ.*

Bài toán 127 ([VMS24], p. 32, 1.2, ĐH Đồng Tháp)**.** *Cho dãy số* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$u_n=\sum_{i=1}^n\frac{i}{(i+1)!}=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!},\ \forall n\in\mathbb{N}^\star.$$

(a) Tìm $n\in\mathbb{N}$ *lớn nhất để* $u_n<\dfrac{2023}{2024}$. *(b) Tính giới hạn* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{i=1}^{2024}u_i^n}=\sqrt[n]{u_1^n+u_2^n+\cdots+u_{2024}^n}$.

Bài toán 128 ([VMS24], p. 32, 1.3, ĐHGTVT)**.** *Cho dãy số* $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ *thỏa* $\frac{1}{2}<a_n<1$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. *Dãy số* $\{x_n\}$ *đặt bởi*

$$x_1=a_1,\ x_{n+1}=\frac{2(a_{n+1}+x_n)-1}{1+2a_{n+1}x_n},\ \forall n\in\mathbb{N}^\star.$$

(a) Chứng minh dãy số $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *tăng & bị chặn trên. (b) Tìm* $\lim_{n\to\infty}x_n$.

Bài toán 129 ([VMS24], p. 33, 1.4, ĐH Vinh)**.** *Cho dãy số* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$\begin{cases} x_1=2024,\\ x_{n+1}=\dfrac{x_n^2}{3\lfloor x_n\rfloor+4},\ \forall n\in\mathbb{N}^\star.\end{cases}$$

(a) Chứng minh $x_8<1$. *(b) Chứng minh* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *hội tụ & tìm giới hạn.*

3 Function – Hàm Số

3.1 Limit of function – Giới hạn hàm số

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta_\varepsilon > 0,\ |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

hay tương đương với:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta_\varepsilon > 0,\ |f(x) - l| < \varepsilon,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| < \delta_\varepsilon.$$

Bài toán 130 ([Quỳ+20b], 8.). *Áp dụng định nghĩa giới hạn của hàm số, tính giới hạn: (a)* $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x + 1}$. *(b)* $\lim_{x\to 2} \sqrt{x + 2}$.

Chứng minh. (a) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} = \lim_{x\to -1} \dfrac{(x + 1)(x - 4)}{x + 1} = \lim_{x\to -1}(x - 4)$. Chứng minh $\lim_{x\to -1}(x - 4) = -5$: Xét $\varepsilon > 0$ bất kỳ, xét bất phương trình $|x - 4 - (-5)| < \varepsilon \Leftrightarrow |x + 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - (-1)| < \varepsilon$. Theo định nghĩa giới hạn của hàm số, suy ra $\lim_{x\to -1}(x - 4) = -5$.

(b) Xét $\varepsilon > 0$ bất kỳ, xét bất phương trình $|\sqrt{x + 2} - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow 2 - \varepsilon < \sqrt{x + 2} < 2 + \varepsilon \Leftrightarrow 4 - 4\varepsilon + \varepsilon^2 < x + 2 < 4 + 4\varepsilon + \varepsilon^2 \Leftrightarrow -4\varepsilon + \varepsilon^2 < x - 2 < 4\varepsilon + \varepsilon^2$. Nếu chọn $\delta_\varepsilon = \min\{|-4\varepsilon + \varepsilon^2|, |4\varepsilon + \varepsilon^2|\} = 4\varepsilon - \varepsilon^2$ thì $|x - 2| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x + 2} - 2| < \varepsilon$, nên theo định nghĩa giới hạn của hàm số, $\lim_{x\to 2} \sqrt{x + 2} = 2$. □

Bài toán 131. *Viết chương trình* C/C++, Pascal, Python *để tính giới hạn* $\lim_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to x_0} \dfrac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{i=0}^n b_i x^i}$.

Input. *Dòng 1 chứa* $x_0 \in \overline{R} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, m, n. *Dòng 2 chứa* $a_0, a_1, \ldots, a_m$. *Dòng 3 chứa* $b_0, b_1, \ldots, b_n$.

Output. *Giới hạn* $\lim_{x\to x_0} \dfrac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{i=0}^n b_i x^i} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Sample.

Bài toán 132. *Viết chương trình* C/C++, Pascal, Python *để tính giới hạn* $\lim_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to x_0} \dfrac{\sum_{i=0}^m a_i x^{\alpha_i}}{\sum_{i=0}^n b_i x^{\beta_i}}$.

Input. *Dòng 1 chứa* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, m, n. *Dòng 2 chứa* $a_0, a_1, \ldots, a_m$. *Dòng 3 chứa* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$. *Dòng 4 chứa* $b_0, b_1, \ldots, b_n$. *Dòng 5 chứa* $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$.

Output. *Giới hạn* $\lim_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to x_0} \dfrac{\sum_{i=0}^m a_i x^{\alpha_i}}{\sum_{i=0}^n b_i x^{\beta_i}}$.

Sample.

Bài toán 133 ([Quỳ+20b], 9.). *Cho hàm số* $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ *& 2 dãy số* $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty$*:*

$$x_n = \frac{1}{2n\pi},\ y_n = \frac{1}{(2n + 1)\frac{\pi}{2}}.$$

(a) Tìm giới hạn của 4 dãy số $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty, \{f(x_n)\}_{n=1}^\infty, \{f(y_n)\}_{n=1}^\infty$. *(b) Tồn tại hay không giới hạn* $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$*?*

Chứng minh. (a) $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n\pi} = 0$, $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}} = 0$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \cos 2n\pi = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$, $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \cos(2n + 1)\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$.

(b) Ta có 2 dãy $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty$ cùng tiến về 0 nhưng $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1 \neq 0 = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$, suy ra không tồn tại $\lim_{x\to 0} f(x)$. □

Bài toán 134 ([Quỳ+20b], 10.). *Tính: (a)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$. *(b)* $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$. *(c)* $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$.

Bài toán 135 ([Quỳ+20b], 11.). *Tính: (a)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1 + x)(1 + 2x)(1 + 3x) - 1}{x}$. *(b)* $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}$. *(c)* $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(1 + x)(1 + 2x)(1 + 3x)(1 + 4x)(1 + 5x)}{(2x + 3)^5}$. *(d)* $\lim_{x\to 2} \sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{x^3 - 3x - 2}}$. *(e)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + 2x} - \sqrt[3]{1 + 3x}}{x}$. *(f)* $\lim_{x\to 1} \dfrac{3}{1 - \sqrt{x}} - \dfrac{3}{1 - \sqrt[3]{x}}$.

Bài toán 136 ([Quỳ+20b], 12.). *Cho hàm số*

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3 & \text{if } x\le 2,\\ 4x-3 & \text{if } x>2.\end{cases}$$

Tính $\lim_{x\to 2^+} f(x), \lim_{x\to 2^-} f(x), \lim_{x\to 2} f(x)$.

Bài toán 137 ([Quỳ+20b], 13.). *Tính: (a)* $\lim_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$. *(b)* $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$. *(c)* $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$.

Bài toán 138 ([Quỳ+20b], 14.). *Tính: (a)* $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x$. *(b)* $\lim_{x\to 1}(x-1)\log_x 2$. *(c)* $\lim_{x\to 2}\dfrac{2^x-x^2}{x-2}$.

3.2 Continuous function – Hàm số liên tục

Bài toán 139 ([Quỳ+20b], 15.). *Chứng minh: (a) 2 hàm số* $f(x)=x^3-x+2, g(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$ *liên tục tại mọi điểm* $x\in\mathbb{R}$. *(b) Hàm số*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{if } x\ne 2,\\ 3 & \text{if } x=2,\end{cases}$$

liên tục tại điểm $x=2$. *(c) Hàm số*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{if } x\ne 1,\\ 2 & \text{if } x=1,\end{cases}$$

gián đoạn tại điểm $x=1$.

Bài toán 140 ([Quỳ+20b], 16.). *Chứng minh: (a) Hàm số* $f(x)=(x^2-2)^2+2$ *liên tục trên* $\mathbb{R}$. *(b) Hàm số* $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *liên tục trên* $(-1,1)$. *(c) Hàm số* $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ *liên tục trên* $[-2,2]$. *(d) Hàm số* $f(x)=\sqrt{2x-1}$ *liên tục trên* $[\frac{1}{2},\infty)$.

Bài toán 141 ([Quỳ+20b], 17.). *Sử dụng bất đẳng thức* $|\sin x|\le|x|$, $\forall x\in\mathbb{R}$, *chứng minh tính liên tục của hàm số* $y=\cos x$ *tại điểm* $x=x_0$ *bất kỳ.*

Bài toán 142 ([Quỳ+20b], 18.). *Tìm tất cả các điểm gián đoạn của hàm số: (a)* $y=\dfrac{1+x}{1+x^3}$. *(b)* $y=\sqrt{\dfrac{1-\cos\pi x}{4-x^2}}$. *(c)* $y=x-\lfloor x\rfloor$. *(d)* $y=\dfrac{1}{\ln x}$.

Bài toán 143 ([Quỳ+20b], 19.). *(a) Chứng minh phương trình bậc 3* $x^3+ax^2+bx+c=0$ *luôn có ít nhất 1 nghiệm thực* $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$. *(b) Mở rộng bài toán.*

Bài toán 144 ([Quỳ+20b], 20.). *Tìm tất cả* $m\in\mathbb{R}$ *để phương trình* $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=m$ *có nghiệm.*

Bài toán 145 ([Quỳ+20b], 21.). *Giải bất phương trình* $\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{7-x}>2$.

Bài toán 146 ([Quỳ+20a], 25., p. 48). *Tính* $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}+x$.

Bài toán 147 ([Quỳ+20a], 26., p. 48). *Tính* $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

Bài toán 148 ([Quỳ+20a], 27., p. 48). *Sử dụng giới hạn đặc biệt* $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$, *chứng minh hàm số* $y=e^x\in C(\mathbb{R})$.

Bài toán 149 ([Quỳ+20a], 28., p. 48). *Tìm tất cả* $m\in\mathbb{R}$ *để hàm số*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x} & \text{if } x<2,\\ mx+m+1 & \text{if } x\ge 2,\end{cases}\in C(\mathbb{R}).$$

Bài toán 150 ([Quỳ+20a], 29., p. 48). *Tìm tất cả hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *liên tục tại điểm* 0 *& thỏa* $f(3x)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Bài toán 151 ([Quỳ+20a], 30., p. 48). *Tìm tất cả hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *liên tục tại điểm* 0 *& thỏa* $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Bài toán 152 ([Quỳ+20a], 31., p. 48). *Tìm ví dụ về 1 hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa* f *gián đoạn tại mọi điểm thuộc* $\mathbb{R}$ *nhưng* $f\circ f$ *liên tục tại mọi điểm thuộc* $\mathbb{R}$.

Bài toán 153 ([Quỳ+20a], 32., p. 48)**.** *Chứng minh parabol* $(P): y = x^2 - 2x$ *&* *ellipse* $(E): \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ *cắt nhau tại 4 điểm phân biệt nằm trên 1 đường tròn.*

Bài toán 154 ([Quỳ+20a], 33., p. 48)**.** *Cho* $f :\in C([0,1],[0,1])$*. Chứng minh tồn tại điểm* $x_0 \in [0,1]$ *thỏa* $f(x_0) = x_0$*.*

Bài toán 155 ([Quỳ+20a], 34., p. 48)**.** *Dùng phương pháp chia đôi, tìm nghiệm của phương trình* $x^5 + x + 1 = 0$ *với độ chính xác* 0.1*.*

Xem code C/C++ của bài toán này ở [Thư+21].

3.3 Problems: Function

Bài toán 156 ([VMS23], 3.1, p. 33, HCMUT)**.** *(a) Chứng minh tồn tại hàm số* $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *thỏa* $xf''(x) + 2f'(x) = x^{2023}$*,* $\forall x \in \mathbb{R}$*. (b) Giả sử* $g \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *thỏa* $xg''(x) + 2g'(x) \ge x^{2023}$*,* $\forall x \in \mathbb{R}$*. Chứng minh* $\int_{-1}^1 x(g(x) + x^{2023})\,\mathrm{d}x \ge \frac{2}{2025}$*.*

Bài toán 157 ([VMS23], 3.2, p. 33, ĐH Đồng Tháp)**.** *Cho hàm* $f(x)x = 2(x-1) - \arctan x$*,* $\forall x \in \mathbb{R}$*. Chứng minh phương trình* $f(x) = 0$ *có nghiệm duy nhất là* $a \in (1, \sqrt{3})$*.*

Proposition 1 (Luật bình phương nghịch đảo)**.** *Mỗi sự gia tăng khoảng cách từ nguồn cho ra kết quả giảm mức độ âm thanh theo tỷ lệ nghịch với bình phương của sự gia tăng khoảng cách.*

Bài toán 158 ([VMS23], 3.3, pp. 33–34, ĐH Đồng Tháp)**.** *Sử dụng luật bình phương nghịch đảo, giải quyết bài toán: 1 người có 1 mảnh đất lớn có chiều dài mặt tiền là* l m *ở giữa 2 quán karaoke thường phát ra âm thanh có cường độ lần lượt là* I_1, I_2*. Người này định xây 1 ngôi nhà nhỏ trên mảnh đất đó nhưng muốn tìm vị trí sao cho chịu ảnh hưởng của âm thanh từ 2 quán karaoke là ít nhất. Giúp người này nếu biết: (a) Cường độ âm thanh* $I_1 = I_2$*. (b) Cường độ âm thanh* $I_1 = 8I_2$*. (c)* $I_1 = aI_2$ *với* $a \in (0,\infty)$ *cho trước.*

Bài toán 159 ([VMS23], 3.5, p. 34, ĐH Hùng Vương, Phú Thọ)**.** *Cho hàm*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} + \alpha x & \text{if } x \ne 0, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

(a) Tính $f'(x)$ *khi* $x \ne 0$*. (b) Tính* $f'(0)$*. (c) Chứng minh hàm* $f(x)$ *không đơn điệu trên mỗi khoảng mở chứa điểm* 0*.*

Bài toán 160 ([VMS23], 3.6, p. 34, ĐH Hùng Vương, Phú Thọ)**.** *(a) Gia đình bác Nam muốn xây 1 cái bể hình hộp với đáy là hình vuông có thể tích* $V = 10$ m^3*. Biết giá thành để xây mỗi* m^2 *mặt đáy là* $a = 700000$ *đồng & 1 mặt bên là* $b = 500000$ *đồng. Để tổng chi phí xây dựng là nhỏ nhất thì bác Nam nên xây bể với kích thước như thế nào? (b) Giải bài toán với* $a, b, V \in (0,\infty)$ *bất kỳ.*

Bài toán 161 ([VMS23], 3.7, pp. 34–35, ĐHKH Thái Nguyên)**.** *Tìm các hàm liên tục* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $f \not\equiv 0$*, thỏa*

$$f(x+y) = 2023^y f(x) + 2023^x f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Từ đó tính

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{\sin f(x)}, \ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{f^{(n)}(0)}.$$

Bài toán 162 ([VMS23], 3.8, p. 35, ĐH Mỏ–Địa chất)**.** *Tính*

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin x^2 + \sin y^2 + \sin z^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Bài toán 163 ([VMS23], 3.9, p. 35, ĐH Mỏ–Địa chất)**.** *Gọi* $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ *là 3 nghiệm của phương trình vi phân* $y''' + a(x)y'' + b(x)y'c(x)y = 0$ *thỏa* $y_1^2(x) + y_2^2(x) + y_3^2(x) = 1$*,* $\forall x \in \mathbb{R}$*. Tìm các hằng số* α, β *để hàm* $z = (y_1'(x))^2 + (y_2'(x))^2 + (y_3'(x))^2$ *là nghiệm của phương trình vi phân* $z' + \alpha a(x) z + \beta c(x) = 0$*.*

Bài toán 164 ([VMS23], 3.10, p. 35, ĐH Mỏ–Địa chất)**.** *Trên hình ellipse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$*, tìm tất cả các điểm* $T = (x_0, y_0)$ *thỏa: tam giác bị giới hạn bởi các đường thẳng* $x = 0, y = 0$ *& tiếp tuyến với ellipse tại điểm* T *có diện tích nhỏ nhất.*

Bài toán 165 ([VMS23], 3.11, p. 35, FTU Hà Nội)**.** *Chứng minh đa thức* $f(x) = \sum_{i=0}^{2022} (-1)^i \frac{x^i}{i!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2022}}{2022!}$ *không có nghiệm thực.*

Bài toán 166 ([VMS23], 3.12, p. 35, ĐHSPHN2)**.** *Cho* $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$*,* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a < b$*. 1 điểm* x *được gọi là 1* điểm mù *nếu tồn tại 1 điểm* $y \in \mathbb{R}$ *với* $y > x$ *sao cho* $f(y) > f(x)$*. Giả sử tất cả các điểm thuộc khoảng mở* $I = (a,b)$ *là các điểm mù & a, b không phải là 2 điểm mù. Chứng minh* $f(a) = f(b)$*.*

Bài toán 167 ([VMS23], 3.13, p. 36, ĐH Trà Vinh). *Chứng minh hàm số $f(x) = x^{x^x}$ đồng biến trên $(0,\infty)$ & $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$.*

Bài toán 168 ([VMS23], 3.14, p. 36, ĐH Vinh). *Cho hàm*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2}\sin\dfrac{1}{x^{2023}} & \text{if } x \neq 0,\\ 0 & \text{if } x = 0.\end{cases}$$

(a) Chứng minh hàm số f liên tục tại $x = 0$. (b) Hàm số f có khả vi tại $x = 0$ hay không?

Bài toán 169 ([VMS23], 3.15, p. 36, ĐH Vinh). *Cho hàm $f \in C([0,1],\mathbb{R})$, khả vi trên khoảng $(0,1)$, thỏa $f(0) = 0$, & $|f'(x)| \le 2023|f(x)|$, $\forall x \in (0,1)$. Chứng minh $f(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$.*

Bài toán 170 ([VMS23], 3.16, p. 36, ĐH Vinh). *Giả sử hàm $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ khả vi trên khoảng $(0,\infty)$ & thỏa 2 điều kiện: (i) $|f(x)| \le 2023$, $\forall x \in (0,\infty)$; (ii) $f(x)f'(x) \ge 2022\cos x$, $\forall x \in (0,\infty)$. Có tồn tại $\lim_{x\to\infty} f(x)$ không?*

4 Continuity – Sự Liên Tục

Definition 10 ([Tao22a], Def. 6.1.1, p. 109: distance between 2 reals). *Given $x, y \in \mathbb{R}$, their distance $d(x,y)$ is defined to be $d(x,y) \coloneqq |x-y| \in [0,\infty)$.*

Definition 11 ([Tao22a], Def. 6.1.2, p. 109: ε-close reals). *Let $\varepsilon > 0$ be a real number. $x, y \in \mathbb{R}$ is said to be* ε-close *iff $d(x,y) \le \varepsilon$.*

5 Series – Chuỗi Số

Bài toán 171 ([VMS23], 2.1, p. 32, VNUHCM UIT). *Cho dãy số $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset (0,\infty)$ thỏa $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{x_n}{(2n-1)^2} < 1$. Chứng minh $\sum_{k=1}\sum_{n=1}^k \dfrac{x_n}{k^3} < 2$.*

Bài toán 172 ([VMS23], 2.2, p. 32, ĐHGTVT). *Cho dãy số $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset (0,\infty)$ đặt bởi*

$$a_1 > 0,\ a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Tính $\sum_{n=1}^\infty a_n$.

Bài toán 173 ([VMS23], 2.2, p. 32, ĐH Mỏ–Địa chất). *Gọi S là dãy con của dãy điều hòa $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^\infty = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ & có tổng hữu hạn. Gọi $c(n)$ là số lượng các phần tử của S có số thứ tự trong dãy mẹ (điều hòa) ban đầu không vượt quá n. Chứng minh $\lim_{n\to\infty} \dfrac{c(n)}{n} = 0$.*

Bài toán 174 ([VMS24], p. 33, 2.1, ĐHCNTT TpHCM). *Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\beta\sin^2 l\alpha}{1 + \beta\sin^2 k\alpha},\ \alpha \notin \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\},\ \beta > 0.$$

6 Derivative & Differentiability – Đạo Hàm & Tính Khả Vi

6.1 Định nghĩa đạo hàm. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Nếu quỹ đạo chuyển động của 1 vật hay 1 chất điểm được miêu tả bằng hàm số $\mathbf{x}(t)$ theo thời gian thì vận tốc $\mathbf{v}(t) = \mathbf{x}'(t)$ biểu thị độ nhanh chậm của chuyển động tại 1 thời điểm t.

Bài toán 175 (Derivative of polynomials – Đạo hàm của các đa thức). *Tính đạo hàm của hàm số đa thức*

$$P(x;n,\mathbf{a}) \coloneqq \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{P}$$

tại $x = x_0$ bằng định nghĩa, với $\deg P(x;n,\mathbf{a}) = n \in \mathbb{N}$ & vector chứa các hệ số của đa thức $P(x;n,\mathbf{a})$ là $\mathbf{a} \coloneqq (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\star$.

Bài toán 176 (Derivative of rational function – Đạo hàm của phân thức). *Tính đạo hàm của hàm số phân thức*

$$Q(x;m,n,\mathbf{a},\mathbf{b}) \coloneqq \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{i=0}^n b_i x^i} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}, \tag{Q}$$

tại $x = x_0$ bằng định nghĩa.

Bài toán 177 (Đạo hàm của căn thức)**.** *Tính đạo hàm của hàm số căn thức $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, với $n \in \mathbb{N}^\star$, tại $x = x_0$ bằng định nghĩa.*

Ta có 3 dạng hàm số sơ cấp thường gặp: hàm đa thức $P(x; n, \mathbf{a}) \coloneqq \sum_{i=0}^n a_i x^i$, hàm phân thức $Q(x; m, n, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \coloneqq \dfrac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{i=0}^n b_i x^i}$, hàm căn thức $R_n(x) \coloneqq \sqrt[n]{x}$.

Bài toán 178 ([Quỳ+20a], 1., p. 49)**.** *Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số tại điểm x_0: (a) $y = 2x + 1, x_0 = 2$. (b) $y = x^2 + 3x, x_0 = 1$. (c) $y = ax + b$ tại $x = x_0$. (d) $y = ax^2 + bx + c$ tại $x = x_0$.*

Bài toán 179 ([Quỳ+20a], 2., p. 49)**.** *Cho parabol $y = x^2$ & 2 điểm $A(2, 4), B(2 + \Delta x, 4 + \Delta y)$ trên parabol đó. (a) Tính hệ số góc của cát tuyến AB biết $\Delta x \in \{1, 0.1, 0.01\}$. (b) Tính hệ số góc của tiếp tuyến của parabol đã cho tại điểm A. (c) Mở rộng cho parabol $y = ax^2 + bx + c$ & 2 điểm $A(x_0, y_0), B(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.*

Bài toán 180 ([Quỳ+20a], 3., p. 49)**.** *Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$ biết: (a) Tiếp tuyến có hoành độ bằng 1. (b) Tiếp điểm của tung độ bằng 8. (c) Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3.*

Bài toán 181 ([Quỳ+20a], 4., p. 49)**.** *1 vật rơi tự do có phương trình chuyển động $S = \frac{gt^2}{2}$ với $g \approx 9.8\text{m/s}^2$ & t (s). Tính: (a) Vận tốc trung bình trong khoảng thời gian từ t đến $t + \Delta t$ với độ chính xác 0.001, biết $t = 5$ & $\Delta t \in \{0.1, 0.001, 0.001\}$. (b) Vận tốc tại thời điểm $t = 5$.*

Bài toán 182 ([Quỳ+20a], 5., p. 49)**.** *Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x}$ trên $(0, \infty)$.*

Bài toán 183 ([Quỳ+20a], 6., p. 49)**.** *Tính đạo hàm của hàm số $y = x|x|$ tại điểm $x_0 = 0$ (nếu có).*

Bài toán 184 ([Quỳ+20a], 7., p. 49)**.** *Tính $f'(x)$ với*

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{if } x < 1, \\ x^2 + 2 & \text{if } 1 \le x \le 2, \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 & \text{if } x > 2. \end{cases} \tag{2}$$

7 Differentiation Rules – Các Quy Tắc Tính Đạo Hàm

Bài toán 185 ([Quỳ+20a], 8., p. 50)**.** *Tính đạo hàm của hàm số: (a) $y = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 7x + 9$. (b) $y = (x - 1)^5(x + 1)^7$. (c) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^4 + 1}$. (d) $y = (x + 1)^3(x + 2)^4(x + 3)^5$.*

Bài toán 186 ([Quỳ+20a], 9., p. 50)**.** *Tính đạo hàm của hàm số: (a) $y = \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$. (b) $y = \sin x^2 + x\cos x^2$. (c) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. (d) $y = (x^3 + x^2 + x + 1)e^{x^2 + x}$.*

Bài toán 187 ([Quỳ+20a], 10., p. 50)**.** *Tính đạo hàm của hàm số: (a) $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$. (b) $y = \dfrac{\sin x - 1}{\sin x + \cos x}$.*

Bài toán 188 ([Quỳ+20a], 11., p. 50)**.** *Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số: (a) $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ biết hoành độ tiếp điểm là $x_0 = \frac{1}{2}$. (b) $y = \sqrt{x + 2}$ biết tung độ tiếp điểm là $y_0 = 2$.*

Bài toán 189 ([Quỳ+20a], 12., p. 50)**.** *Chứng minh hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x$ có đạo hàm bằng 0.*

Bài toán 190 ([Quỳ+20a], 13., p. 50)**.** *Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ biết tiếp tuyến đó đi qua điểm $A(0, -1)$.*

Bài toán 191 ([Quỳ+20a], 14., p. 50)**.** *1 viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với tốc độ ban đầu $v_0 = 196$ m/s (bỏ qua sức cản của không khí). Tìm thời điểm tại đó tốc độ của viên đạn bằng 0. Khi đó viên đạn cách mặt đất bao nhiêu m?*

8 Các định lý giá trị trung bình

Bài toán 192 ([Quỳ+20a], 15., p. 50)**.** *Cho $a, b, c \in \mathbb{R}, 2a + 3b + 6c = 0$. Chứng minh phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(0, 1)$.*

Bài toán 193 ([Quỳ+20a], 16., p. 50)**.** *Cho $f(x) = x(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)(x - 6)$. Đếm số nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$.*

Bài toán 194 ([Quỳ+20a], 17., p. 51)**.** *Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ có đạo hàm trên (a, b). Giả sử phương trình $f(x) = 0$ có đúng 2 nghiệm x_1, x_2 với $x_1 \neq x_2$. Chứng minh phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm, hơn nữa biểu thức $f'(x)$ phải đổi dấu.*

Bài toán 195 ([Quỳ+20a], 18., p. 51). *Chứng minh* $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$.

Bài toán 196 ([Quỳ+20a], 19., p. 51). *Cho* $0 < a < b$ *&* f *là 1 hàm liên tục trên* $[a,b]$, *có đạo hàm trên* (a,b). *Chứng minh tồn tại* $c \in (a,b)$ *thỏa* $\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b} = f(c) - f'(c)$.

Bài toán 197 ([Quỳ+20a], 20., p. 51). *Tính giới hạn: (a)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$. *(b)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+x}-1}{\sqrt[n]{1+x}-1}$. *(c)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x \sin x}$.

Bài toán 198 ([Quỳ+20a], 21., p. 51). *Tính giới hạn: (a)* $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$. *(b)* $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\cot x}$.

9 2nd-Order Derivative – Đạo Hàm Cấp 2

10 Vi Phân & Đạo Hàm Cấp Cao

Bài toán 199 ([Quỳ+20a], 22., p. 51). *Tính vi phân của hàm số: (a)* $y = \sqrt{x^2+a^2}$. *(b)* $y = x \sin x$. *(c)* $y = x^2 + \sin^2 x$. *(d)* $y = e^x \ln x$.

Bài toán 200 ([Quỳ+20a], 23., p. 51). *Làm tròn đến hàng phần nghìn: (a)* $\dfrac{1}{0.9995}$. *(b)* $\ln 1.001$. *(c)* $\cos 61°$.

Bài toán 201 ([Quỳ+20a], 24., p. 51). *Chứng minh nếu* f,g *là 2 hàm số có đạo hàm đến cấp 2 thì* fg *cũng có đạo hàm đến cấp 2 & có công thức* $(f(x)g(x))'' = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + g''(x)$.

Bài toán 202 ([Quỳ+20a], 25., p. 51). *Tính đạo hàm: (a)* $f(x) = x^4 - \cos 2x$, *tính* $f^{(4)}(x)$. *(b)* $f(x) = \cos^2 x$, *tính* $f^{(5)}(x)$. *(c)* $f(x) = (x+10)^6$, *tính* $f^{(n)}(x)$.

Bài toán 203 ([Quỳ+20a], 26., p. 52). *Vận tốc của 1 chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức* $v(t) = 8t + 3t^2$, *với* $t > 0$, t *được tính bằng giây* s *&* $v(t)$ *tính bằng* m/s. *Tính gia tốc của chất điểm: (a) Lúc* $t = 4$. *(b) Lúc vận tốc chuyển động bằng* 11.

Bài toán 204 ([Quỳ+20a], 27., p. 52). *Chứng minh* $\forall n \ge 1$: *(a) Nếu* $f(x) = \frac{1}{x}$ *thì* $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$. *(b) Nếu* $f(x) = \cos x$ *thì* $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

Bài toán 205 ([Quỳ+20a], 28., p. 52). *Cho* $f(x) = \sqrt{x}$. *Tính* $f^{(n)}(x)$.

11 Miscellaneous

Bài toán 206 ([Quỳ+20a], 29., p. 52). *Tính* $f'(x)$ *với*

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{if } x < 1, \\ x^2+1 & \text{if } 1 \le x \le 2, \\ x^3 - x^2 - 4x + 10 & \text{if } x > 2. \end{cases} \tag{3}$$

Bài toán 207 ([Quỳ+20a], 30., p. 52). *Tính* $f'(x) + f(x) + 2$ *nếu* $f(x) = x \sin 2x$.

Bài toán 208 ([Quỳ+20a], 31., p. 52). *Chứng minh nếu* $f(x) = 3e^{x^2}$ *thì* $f'(x) - 2xf(x) + \frac{1}{3}f(0) - f'(0) = 1$.

Bài toán 209 ([Quỳ+20a], 32., p. 52). *Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong* $y = 4x - x^2$ *tại các điểm mà đường cong cắt trục hoành.*

Bài toán 210 ([Quỳ+20a], 33., p. 52). *Cho đa thức bậc 4* $P(x)$ *thỏa mãn điều kiện* $P(x) \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *Chứng minh* $P(x) + P'(x) + P''(x) + P^{(3)}(x) + P^{(4)}(x) \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 211 ([Quỳ+20a], 34., p. 53). *Áp dụng định lý Rolle cho hàm số* $f(x) = e^x P(x)$ *để chứng minh nếu đa thức* $P(x)$ *bậc* n *có* n *nghiệm thực phân biệt thì đa thức* $P(x) + P'(x)$ *cũng có* n *nghiệm thực phân biệt.*

Bài toán 212 ([Quỳ+20a], 35., p. 53). *Cho hàm số* $f(x)$ *khả vi trên đoạn* $[0,1]$ *&* $f'(0)f'(1) < 0$. *Chứng minh tồn tại* $c \in (0,1)$ *thỏa* $f'(c) = 0$.

Bài toán 213 ([Quỳ+20a], 36., p. 53). *Giả sử* $f(x)$ *là 1 hàm số lẻ & khả vi trên* $\mathbb{R}$. *Chứng minh* $f'(x)$ *là 1 hàm số chẵn.*

Bài toán 214 ([Quỳ+20a], 37., p. 53). *Tính đạo hàm cấp* 100 *của hàm số* $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$.

Bài toán 215 ([Quỳ+20a], 38., p. 53). *Tính giới hạn: (a)* $\lim_{x\to 0} \cos^{\frac{1}{2x^2}} x$. *(b)* $\lim_{x\to 0} \cos^{\frac{5}{x}} 3x$.

Bài toán 216 ([Quỳ+20a], 39., p. 53)**.** *Chứng minh: (a)* (Phương trình dao động điều hòa) *Nếu* $y = A\sin(\omega t+\varphi)+B\cos(\omega t+\varphi)$ *với* A, B, ω, φ *là 4 hằng số thì* $y'' + \omega^2 y = 0$*. (b) Nếu* $y = \sqrt{2x - x^2}$ *thì* $y^3y'' + 1 = 0$*.*

Bài toán 217 ([Quỳ+20a], 40., p. 53, công thức Newton–Leibnitz)**.** *Cho* f, g *là 2 hàm số có đạo hàm đến cấp* n*, chứng minh công thức:* $(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$*.*

Bài toán 218 ([Quỳ+20a], 41., p. 53)**.** *Cho hàm số* $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$*. Tính* $f^{(100)}(0), f^{(101)}(0)$*.*

Bài toán 219 ([VMS23], p. 36, 4.1, VNUHCM UIT)**.** *Cho hàm* $f \in C^2(\mathbb{R})$ *thỏa* $f(0) = 2$*,* $f'(0) = -2$*,* $f(1) = 1$*. Chứng minh tồn tại* $c \in (0, 1)$ *thỏa* $f(c)f'(c) + f''(c) = 0$*.*

Bài toán 220 ([VMS23], p. 37, 4.2, ĐH Đồng Tháp)**.** *Cho* f *khả vi trên* (a, ∞)*,* $\forall a \in (0, \infty)$ *&* $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$*. Chứng minh* $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$*.*

Bài toán 221 ([VMS23], p. 37, 4.3, ĐH Đồng Tháp)**.** *Cho* f *là hàm số có đạo hàm* f' *đồng biến trên* $[0, 2]$ *&* $f(0) = -1, f(2) = 1$*. Chứng minh tồn tại* $a, b, c \in [0, 2]$ *thỏa* $f'(a)f'(b)f'(c) = 1$*.*

Bài toán 222 ([VMS23], p. 37, 4.4, ĐHGTVT)**.** *Cho* $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ *thỏa* $f^{(n)}(0) = 0$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$ *&* $f^{(n)}(x)x \ge 0$*,* $\forall k \in \mathbb{N}^\star$*,* $\forall x \in (0, \infty)$*. Chứng minh* $f(x) = 0$*,* $\forall x \in (0, \infty)$*.*

Bài toán 223 ([VMS23], p. 37, 4.5, ĐH Hùng Vương, Phú Thọ)**.** *Giả sử hàm* $f \in C([1, 2023])$*, khả vi trong khoảng* $(1, 2023)$*, &* $f(2023) = 0$*. Chứng minh tồn tại* $c \in (1, 2023)$ *thỏa*

$$f'(c) = \frac{2024 - 2023c}{1 - c} f(c).$$

Bài toán 224 ([VMS23], p. 37, 4.6, ĐHKH Thái Nguyên)**.** *Giả sử* $f(x) \in C^\infty([-1, 1])$*,* $f^{(n)}(0) = 0$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*, & tồn tại* $\alpha \in (0, 1)$ *thỏa* $\sup_{x\in[-1,1]} |f^{(n)}(x)| \le \alpha^n n!$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*. Chứng minh* $f(x) \equiv 0$ *trên đoạn* $[-1, 1]$*.*

Bài toán 225 ([VMS23], p. 37, 4.7, ĐHSPHN2)**.** *Cho* $f \in C([a, b])$ *khả vi trên* (a, b)*. Giả sử* $f'(x) > 0$*,* $\forall x \in (a, b)$*. Chứng minh* $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *thỏa* $a \le x_1 < x_2 \le b$ *&* $f(x_1)f(x_2) > 0$ *thì luôn tồn tại* $c \in (x_1, x_2)$ *thỏa*

$$\frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = c - \frac{f(c)}{f'(c)}.$$

Bài toán 226 ([VMS24], p. 33, 3.1, VNUHCM UIT)**.** *Cho* f *là hàm số thực trên* $(0, \infty)$*. Giả sử*

$$f(x^\alpha) = f(x)\sin^2\alpha + f(1)\cos^2\alpha,\ \forall x \in (0, \infty),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh f *khả vi tại* 1*.*

Bài toán 227 ([VMS24], p. 34, 3.2, ĐH Đồng Tháp)**.** *(a) Chứng minh với mỗi* $n \in \mathbb{N}^\star$*, phương trình* $2x = \sqrt{x+n} + \sqrt{x+n+1}$ *có nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là* x_n*. (b) Tính* $a := \lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\sqrt{n}}, b := \lim_{n\to\infty} x_n - a\sqrt{n}$*.*

Bài toán 228 ([VMS24], p. 34, 3.3, ĐH Đồng Tháp)**.** *Cho*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left|\cos \dfrac{\pi}{x}\right| & \text{if } x \ne 0, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

Chứng minh f *khả vi tại* 0 *nhưng* f *không khả vi tại các điểm* $x_n := \dfrac{2}{2n+1}$ *với* $n \in \mathbb{Z}$*.*

Bài toán 229 ([VMS24], p. 34, 3.4, ĐH Đồng Tháp)**.** *Giả sử* f *khả vi liên tục trên* $(0, \infty)$*,* $f(0) = 1$*. Chứng minh nếu* $|f(x)| \le e^{-x}$*,* $\forall x \ge 0$ *thì tồn tại* $x_0 > 0$ *để* $f'(x_0) = -e^{-x_0}$*.*

Bài toán 230 ([VMS24], p. 34, 3.5, ĐHGTVT)**.** *Cho* $a \in \mathbb{R}$*,* $b \in (0, \infty)$*. Hàm* f *xác định trên* $[-1, 1]$*, được cho bởi*

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin x^{-b} & \text{if } x \ne 0, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

(a) Tìm tất cả các giá trị của a *để hàm* f *liên tục trên* $[-1, 1]$*. (b) Tìm tất cả các giá trị của* a *để tồn tại* $f'(0)$*. (c) Tìm điều kiện của* a, b *để tồn tại* $f''(0)$*.*

Bài toán 231 ([VMS24], p. 35, 3.7, HUS)**.** *Cho* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *là hàm số được xác định bởi công thức*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{if } x \le 0, \\ be^x + x & \text{if } x > 0, \end{cases}$$

với $a, b \in \mathbb{R}$*: tham số. Xác định* a, b *để* f *có nguyên hàm trên* $\mathbb{R}$*.*

Bài toán 232 ([VMS24], p. 35, 3.8, ĐH Vinh). *Cho hàm $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ thỏa $f_{2024}(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ với*

$$\begin{cases} f_{n+1}(x) = f(f_n(x)), \ \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^\star, \\ f_1(x) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Chứng minh $f_2(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 233 ([VMS24], p. 35, 3.9, ĐH Vinh). *Cho hàm*

$$f(x) = \left(\frac{2023^x + 2024^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}, \ x > 0.$$

(a) Tìm $\lim_{x \to 0^+} f(x)$. (b) Chứng minh f là hàm số đơn điệu tăng trên $(0, +\infty)$.

Bài toán 234 ([VMS24], p. 36, 4.1, HCMUT). *(a) Cho $f \in C^3(\mathbb{R}, [0, +\infty))$ thỏa $\max_{x \in \mathbb{R}} |f'''(x)| \le 1$. Chứng minh*

$$f''(x) \ge -\sqrt[3]{\frac{3}{2} f(x)}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) Tìm tất cả các hàm số f thỏa mãn điều kiện của (a) thỏa

$$f''(x) = -\sqrt[3]{\frac{3}{2} f(x)}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 235 ([VMS24], p. 36, 4.2, VNUHCM UIT). *Cho hàm số $f : [0, 1] \to \mathbb{R})$ liên tục trên $[0, 1]$, khả vi trên $(0, 1)$ sao cho $\exists M > 0$, $\exists c \in [0, 1]$ thỏa $f(c) = 0$ &*

$$|f'(x)| \le M|f(x)|, \ \forall x \in (0, 1).$$

Chứng minh $f(x) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$.

Bài toán 236 ([VMS24], p. 36, 4.3, ĐH Đồng Tháp). *Cho f khả vi trên $\mathbb{R}$ & f' giảm ngặt trên $\mathbb{R}$. (a) Chứng minh*

$$f(x + 1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x - 1), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) Chứng minh nếu tồn tại $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ thì $\lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$. (c) Tìm hàm số g khả vi trên $\mathbb{R}$ & tồn tại $\lim_{x \to \infty} g(x) = L$ nhưng $\lim_{x \to \infty} g'(x) \ne 0$.

Bài toán 237 ([VMS24], p. 37, 4.4, ĐHGTVT). *Giả sử V là tập hợp các hàm liên tục $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ & khả vi trên $(0, 1)$ thỏa $f(0) = 0, f(1) = 1$. Xác định các giá trị $\alpha \in \mathbb{R}$ để với mỗi $f \in V$, luôn tồn tại $\xi \in (0, 1)$ thỏa $f(\xi) + \alpha = f'(\alpha)$.*

Bài toán 238 ([VMS24], p. 37, 4.5, HUS). *Cho $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục trên $[0, 3]$ & khả vi trong $(0, 3)$. Chứng minh tồn tại $c \in (0, 3)$ thỏa $2f'(c) = f(3) - f(2) + f(1) - f(0)$.*

Bài toán 239 ([VMS24], p. 37, 4.6, ĐH Mỏ–Địa chất). *Giả sử có chuỗi có 2 đầu hướng ra vô cực*

$$\cdots + f''(x) + f'(x) + f(x) + \int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t + \int_0^x \int_0^t f(s) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t + \cdots$$

& hội tụ đều trên khoảng $(-1, 1)$. Chuỗi là biểu diễn của số nào?

Bài toán 240 ([VMS24], p. 37, 4.7, ĐH Vinh). *Cho hàm $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ & thỏa $f(x) \le 2024$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh tồn tại $x \in \mathbb{R}$ thỏa $f''(x) = 0$.*

12 Integral – Tích Phân

Bài toán 241 ([VMS23], p. 38, 5.1, VNUHCM UIT). *Cho hàm $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ khả vi đến cấp 2 thỏa $f(0) = 1$ & $f''(x) + 2f'(x) + f(x) \ge 1$, $\forall x \in (-1, 1)$. Tìm* GTNN *của $\int_{-1}^1 e^x f(x) \, \mathrm{d}x$.*

Bài toán 242 ([VMS23], p. 38, 5.2, ĐH Đồng Tháp). *Cho hàm $f : [0, 2023] \to (0, \infty)$ khả tích & $f(x)f(2023 - x) = 1$, $\forall x \in [0, 2023]$. Chứng minh $\int_0^{2023} f(x) \, \mathrm{d}x \ge 2023$.*

Bài toán 243 ([VMS23], p. 38, 5.3, ĐHGTVT). *Cho hàm $f \in C([0, 1])$ thỏa $\int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x f(x) \, \mathrm{d}x$. Chứng minh tồn tại $c \in (0, 1)$ thỏa $cf(c) + 2023 \int_0^c f(x) \, \mathrm{d}x = 0$.*

Bài toán 244 ([VMS23], p. 38, 5.4, ĐHGTVT). *Tính*

$$I := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1 + 2023^x) \sin x} \, \mathrm{d}x.$$

Bài toán 245 ([VMS23], p. 38, 5.5, ĐHGTVT). *Cho hàm f dương, khả tích trên $[a,b]$, $0 < m \le f(x) \le M$, $\forall x \in [a,b]$. Chứng minh*

$$(b-a)^2 \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \le \frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2.$$

Bài toán 246 ([VMS23], p. 39, 5.6, ĐHKH Thái Nguyên). *Cho hàm $h \in C([0,1])$ thỏa $\int_0^1 xh(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x$. Chứng minh tồn tại $\beta \in (0,1)$ thỏa $\beta h(\beta^2) = \frac{2023}{2}\int_0^{\beta^2} h(x)\,\mathrm{d}x$.*

Bài toán 247 ([VMS23], p. 39, 5.7, ĐHKH Thái Nguyên). *Cho $f \in C([0,\pi])$ thỏa $f(0) > 0$ & $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x < 2$. Chứng minh phương trình $f(x) = \sin x$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(0,\pi)$.*

Bài toán 248 ([VMS23], p. 39, 5.8, ĐH Mỏ–Địa chất). *Cho $f \in C([0,1]), g \in C([0,1],(0,\infty))$ với f không giảm. Chứng minh*

$$\left(\int_0^t f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right) \le \left(\int_0^t g(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right),\ \forall t \in [0,1].$$

Bài toán 249 ([VMS23], p. 39, 5.9, ĐH Mỏ–Địa chất). *Cho $f \in C([0,1])$ thỏa $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Chứng minh tồn tại điểm $c \in (0,1)$ thỏa $\int_0^c xf(x)\,\mathrm{d}x = 0$.*

Bài toán 250 ([VMS23], p. 39, 5.10, ĐHSPHN2). *Gọi $\mathcal{F}$ là lớp tất cả các hàm khả vi $f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ thỏa*

$$|f'(x) - f'(y)| \le 2023|x-y|,\ \forall x,y \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh

$$(f'(x))^2 < 4046f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 251 ([VMS23], p. 40, 5.11, ĐHSPHN2). *Giả sử $f \in C^2([a,b])$ thỏa $f(a) \ne -f(b)$ & $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Tìm* GTNN *của*

$$A := \frac{(b-a)^3}{(f(a)+f(b))^2}\int_a^b (f''(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

Bài toán 252 ([VMS23], p. 40, 5.12, ĐH Trà Vinh). *Tính*

$$I := \int_0^{2\pi} \ln(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x})\,\mathrm{d}x.$$

Bài toán 253 ([VMS23], p. 40, 5.12, ĐH Vinh). *Cho $f \in C([0,1])$ thỏa $xf(y) + yf(x) \le 1$, $\forall x,y \in [0,1]$. Chứng minh: (a) $f(x) \le \frac{1}{2x}$, $\forall x \in (0,1]$. (b) $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{\pi}{4}$.*

Bài toán 254 ([VMS24], p. 37, 5.1, VNUHCM UIT). *Cho $\alpha \in (0,\infty)$ & $f \in C([0,1])$ nghịch biến, $a \in (0,1)$ thỏa*

$$\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t < \frac{a}{2025},\ f(0) = \beta > 0.$$

Chứng minh phương trình $f(x) = x^{2024}$ có nghiệm trong $[0,1]$.

Bài toán 255 ([VMS24], p. 38, 5.2, ĐH Đồng Tháp). *Giả sử $f \in C^1([0,1])$ thỏa $f(0) = 0$, $0 \le f'(x) \le 1$, $\forall x \in [0,1]$. Xét hàm số*

$$F(t) = \left(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 - \int_0^t (f(x))^3\,\mathrm{d}x,\ \forall t \in [0,1].$$

(a) Chứng minh F đồng biến trên $[0,1]$. (b) Chứng minh

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \ge \int_0^1 (f(x))^3\,\mathrm{d}x.$$

Cho vài ví dụ về hàm f để đẳng thức xảy ra.

Bài toán 256 ([VMS24], p. 38, 5.3, ĐHGTVT). *Cho $f : [0,1] \to (0,+\infty)$ là 1 hàm khả tích thỏa $f(x)f(1-x) = 1$, $\forall x \in [0,1]$. Chứng minh $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \ge 1$.*

Bài toán 257 ([VMS24], p. 38, 5.4, HUS). *Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ là hàm khả tích trên $[0,1]$ & liên tục trên $(0,1)$. Chứng minh tồn tại $a,b \in (0,1)$ phân biệt sao cho*

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Bài toán 258 ([VMS24], p. 38, 5.5, ĐH Mỏ–Địa chất). *Tính tích phân*

$$\iiiint_{x^2+y^2+z^2+t^2\le 1} e^{x^2+y^2-z^2-t^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t.$$

Bài toán 259 ([VMS24], p. 38, 5.6, ĐH Vinh). *Chứng minh*

$$\frac{9}{8\pi} < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x < \frac{3}{2\pi}.$$

12.1 SymPy/integrals module

See `https://docs.sympy.org/latest/modules/integrals/integrals.html`. The `integrals` module in `SymPy` implements methods to calculate definite & indefinite integrals of expressions. Principal method in this module is `integrate()`:

- `integrate(f, x)` returns the indefinite integral $\int f\,\mathrm{d}x$
- `integrate(f, (x, a, v))` returns the definite integral $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$.

Problem 7 (Integration of elementary functions)**.** *Use* `SymPy` *to compute definite- & indefinite integrals of elementary functions as many as possible.*

Problem 8 (Integration of nonelementary functions)**.** *Use* `SymPy` *to compute definite- & indefinite integrals of nonelementary functions as many as possible.*

Example 4 (Integral of error function)**.** *The indefinite integral of the nonelementary function* $e^{-x^2}\mathrm{erf}(x)$*, where* $\mathrm{erf}(x)$ *is the* error function*, is given by*

$$\int e^{-x^2}\mathrm{erf}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\mathrm{erf}(x).$$

Run the following Python code:

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
print(integrate(exp(-x**2)*erf(x), x))
```

to obtain the following output:

```
sqrt(pi)*erf(x)**2/4
```

For more information about the error function, see, e.g., Wikipedia/error function.

12.2 Leibniz integral rule – Quy tắc tích phân Leibniz

In calculus, the *Leibniz integral rule* for differentiation under the integral sign, named after Gottfried Wilhelm Leibniz.

Theorem 9 (Leibniz integral rule – Quy tắc tích phân Leibniz)**.** *For an integral of the form* $\int_{a(x)}^{b(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t$ *where* $a(x),b(x)\in\mathbb{R}$ *& the integrands are functions dependent on* x*, the derivative of this integral is expressible as*

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t\right) = f(b(x),x)\frac{d}{dx}b(x) - f(a(x),x)\frac{d}{dx}a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \partial_x f(t,x)\,\mathrm{d}t, \tag{Lintr}$$

where the partial derivative $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ *indicates that inside the integral, only the variation of* $f(t,x)$ *with* x *is considered in taking the derivative.*

13 Functional Equation – Phương Trình Hàm

Bài toán 260 ([VMS23], 6.1, p. 40, VNUHCM UIT)**.** *Tìm tất cả các hàm số* $f\in C^2(\mathbb{R},(0,\infty))$ *thỏa*

$$f''(x)f(x)\ge 2(f'(x))^2,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 261 ([VMS23], 6.2, p. 40, ĐH Hùng Vương, Phú Thọ)**.** *Tìm tất cả các hàm số* $f\in C(\mathbb{R})$ *thỏa* $f(1)=2023$ *&* $f(x+y)=2023^xf(y)+2023^yf(x)$*,* $\forall x,y\in\mathbb{R}$*.*

Bài toán 262 ([VMS23], 6.3, p. 40, ĐH Hùng Vương, Phú Thọ)**.** *Tìm tất cả các hàm số* $f(x)\in C^1([0,1])$ *có* $f(1)=f(0$ *& thỏa*

$$\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2\mathrm{d}x\le 1.$$

Bài toán 263 ([VMS23], 6.4, p. 41, ĐH Mỏ–Địa chất)**.** *Cho* $r,s\in\mathbb{Q}$*. Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ *thỏa*

$$f(x+f(y))=f(x+r)+y+s,\ \forall x,y\in\mathbb{Q}.$$

Bài toán 264 ([VMS23], 6.5, p. 41, FTU Hà Nội)**.** *Tìm tất cả các hàm số thực* $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ *thỏa*

$$f(x+f(y))=xf\left(1+f\left(\frac{y}{x}\right)\right),\ \forall x,y\in(0,\infty).$$

Bài toán 265 ([VMS23], 6.6, p. 41, ĐH Trà Vinh). *Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ thỏa*

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2f(x) + \frac{3}{x-1},\ \forall x \neq 1.$$

Bài toán 266 ([VMS23], 6.7, p. 41, ĐH Trà Vinh). *Tìm tất cả các hàm số $f(x) \in C^1([0,1])$ thỏa $f(1) = ef(0)$ &*

$$\int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 \mathrm{d}x \leq 1.$$

Bài toán 267 ([VMS24], p. 38, 6.1, HUS). *Cho $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ là 1 hàm khả vi thỏa $(f'(x))^2 - 3f'(x) + 2 = 0$, $\forall x \in (0,1)$. Tìm f. (b) Mở rộng bài toán cho dạng phương trình hàm phức tạp hơn.*

14 Fourier transform – Biến đổi Fourier

Resources – Tài nguyên.

1. [Tao12]. Terence Tao. *Higher Order Fourier Analysis.*

14.1 Discrete Fourier transform – Biến đổi Fourier rời rạc

See, e.g., Wikipedia/discrete Fourier transform. In mathematics, the *discrete Fourier transform (DFT)* converts a finite sequence of equally-spaced samples of a function into a same-length sequence of equally-spaced samples of the discrete-time Fourier transform (DTFT), which is a complex-valued function of frequency. The interval at which the DTFT is sampled is the reciprocal of the duration of the input sequence.

Definition 12 (Discrete Fourier transform). *The* discrete Fourier transform *transforms a sequence of N complex numbers $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=0}^{N-1} \coloneqq x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$ into another sequence of complex numbers, $\mathbf{X} = \{X_n\}_{n=0}^{N-1} \coloneqq X_0, X_1, \ldots, X_{N-1}$ defined by*

$$X_k \coloneqq \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi\frac{k}{N}n}. \tag{dFt}$$

The transform is sometimes denoted by the symbol $\mathcal{F}$, as in $\mathbf{X} = \mathcal{F}\{\mathbf{x}\}$ or $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ or $\mathcal{F}\mathbf{x}$.

15 Miscellaneous

15.1 Contributors

1. Võ Ngọc Trâm Anh [VNTA]: Code C/C++.
2. Nguyễn Lê Đăng Khoa [NLDK]: Code C/C++.
3. Phan Vĩnh Tiến [PVT]. Proofs of some results in Mathematical Analysis.

15.2 See also

1. [Str20]. Steven Strogatz. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe.*
2. [Str24]. Steven Strogatz. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe – Sức Mạnh Vô Hạn: Giải Tích Toán Khám Phá Bí Mật Của Vũ Trụ Như Thế Nào?.*

   Nhận xét. 1 quyển sách hay về thường thức về lịch sử phát triển của Giải tích Toán học & các ý tưởng cơ bản nhất của Giải tích. Khuyến khích đọc thử, cũng như các tác phẩm thường thức Khoa học Tự nhiên nói chung & Toán học nói riêng khác của tác giả Steven Strogatz.
3. TS. Huỳnh Quang Vũ. *Các Bài Giảng Giải Tích.* https://sites.google.com/view/hqvu/teaching.
   - Bộ Môn Giải Tích, Khoa Toán - Tin học, Faculty of Mathematics & Computer Science, HCMUS. *Giáo Trình Vi Tích Phân 1.*
   - Bộ Môn Giải Tích, Khoa Toán - Tin học, Faculty of Mathematics & Computer Science, HCMUS. *Giáo Trình Vi Tích Phân 2.*
4. *Vietnamese Mathematical Olympiad for High School- & College Students (VMC) – Olympic Toán Học Học Sinh & Sinh Viên Toàn Quốc.*

   PDF: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/VMC/NQBH_VMC.pdf.

   TEX: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/VMC/NQBH_VMC.tex.

- Codes:
  - C++ code: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/C++.
  - Python code: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/Python.
- Resource: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/resource.
- Figures: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/figure.

5. *Olympic Tin Học Sinh Viên OLP & ICPC.*

   PDF: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/OLP_ICPC/NQBH_OLP_ICPC.pdf.

   TEX: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/OLP_ICPC/NQBH_OLP_ICPC.tex.

- Codes:
  - C: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/OLP_ICPC/C.
  - C++: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/OLP_ICPC/C++.
  - Python: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/OLP_ICPC/Python.

Tài liệu

[Hùn+23] Trần Quang Hùng, Lê Thị Việt Anh, Phạm Việt Hải, Khiếu Thị Hương, Tạ Công Sơn, Nguyễn Xuân Thọ, Ninh Văn Thu, and Phạm Đình Tùng. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 11 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 176.

[Quỳ+20a] Đoàn Quỳnh, Trần Nam Dũng, Nguyễn Vũ Lương, and Đặng Hùng Thắng. *Tài Liệu Chuyên Toán Bài Tập Đại Số & Giải Tích 11*. Tái bản lần 9. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2020, p. 248.

[Quỳ+20b] Đoàn Quỳnh, Trần Nam Dũng, Nguyễn Vũ Lương, and Đặng Hùng Thắng. *Tài Liệu Chuyên Toán Đại Số & Giải Tích 11*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2020, p. 327.

[Rud76] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*. Third. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 1976, pp. x+342.

[Str20] Steven Strogatz. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe*. Mariner Books, 2020, p. 400.

[Str24] Steven Strogatz. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe – Sức Mạnh Vô Hạn: Giải Tích Toán Khám Phá Bí Mật Của Vũ Trụ Như Thế Nào?* Phạm Văn Thiều dịch. Nhà Xuất Bản Trẻ, 2024, p. 486.

[Tao12] Terence Tao. *Higher order Fourier analysis*. Vol. 142. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012, pp. x+187. ISBN: 978-0-8218-8986-2. DOI: 10.1090/gsm/142. URL: https://doi.org/10.1090/gsm/142.

[Tao22a] Terence Tao. *Analysis I*. Vol. 37. Texts and Readings in Mathematics. Fourth edition [of 2195040]. Hindustan Book Agency, New Delhi, [2022] ©2022, pp. xvi+355. ISBN: 978-81-951961-9-7.

[Tao22b] Terence Tao. *Analysis II*. Vol. 38. Texts and Readings in Mathematics. Fourth edition [of 2195041]. Springer, Singapore; Hindustan Book Agency, New Delhi, [2022] ©2022, pp. xvii+195. ISBN: 978-9-81197-284-3. DOI: 10.1007/978-981-19-7284-3. URL: https://doi.org/10.1007/978-981-19-7284-3.

[Thá+23a] Đỗ Đức Thái, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang. *Toán 6 Tập 1*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2023, p. 128.

[Thá+23b] Đỗ Đức Thái, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang. *Toán 6 Tập 2*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2023, p. 108.

[Thá+25] Đỗ Đức Thái, Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Minh Phương. *Toán 11 Tập 1*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2025, p. 123.

[Thư+21] Trần Đan Thư, Nguyễn Thanh Phương, Đinh Bá Tiến, and Trần Minh Triết. *Nhập Môn Lập Trình*. Nhà Xuất Bản Khoa Học & Kỹ Thuật, 2021, p. 427.

[VMS23] Hội Toán Học Việt Nam VMS. *Kỷ Yếu Kỳ Thi Olympic Toán Học Sinh Viên–Học Sinh Lần Thứ 29*. Huế 2–8/4/2023. VMS, 2023, p. 141.

[VMS24] Hội Toán Học Việt Nam VMS. *Kỷ Yếu Kỳ Thi Olympic Toán Học Sinh Viên–Học Sinh Lần Thứ 30*. Đà Nẵng 8–13/4/2024. VMS, 2024, p. 112.

[WS10] Robert Wrede and Murray R. Spiegel. *Advanced Calculus*. 3rd edition. Schaum's Outline Series. McGraw Hill, 2010, p. 456. ISBN: 978-0071623667.