

Lecture Note: Mathematical Analysis – Bài Giảng: Giải Tích Toán Học

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 30 tháng 4 năm 2025

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Advanced STEM & Beyond*:

URL: https://nqbh.github.io/advanced_STEM/.

Latest version:

- *Lecture Note: Mathematical Analysis – Bài Giảng: Giải Tích Toán Học.*

PDF: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/lecture/NQBH_mathematical_analysis_lecture.pdf.

TeX: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/lecture/NQBH_mathematical_analysis_lecture.tex.

- *Slide: Mathematical Analysis – Slide: Giải Tích Toán Học.*

PDF: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/slide/NQBH_mathematical_analysis_slide.pdf.

TeX: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/slide/NQBH_mathematical_analysis_slide.tex.

- Codes:

- C++: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/analysis/C++.

- Python: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/analysis/Python.

Mục lục

1 Basic Mathematical Analysis – Giải Tích Toán Học Cơ Bản	2
1.1 Numbers – Các loại số	2
1.2 Notations & conventions – Ký hiệu & quy ước	2
2 Sequence – Dãy Số	3
3 Function – Hàm Số	3
4 Continuity – Sự Liên Tục	3
5 Series – Chuỗi Số	4
6 Derivative & Differentiability – Đạo Hàm & Tính Khả Vi	4
7 Integral – Tích Phân	5
7.1 SymPy/integrals module	6
7.2 Leibniz integral rule – Quy tắc tích phân Leibniz	6
8 Functional Equation – Phương Trình Hàm	6
9 Fourier transform – Biến đổi Fourier	6
9.1 Discrete Fourier transform – Biến đổi Fourier rời rạc	6
10 Miscellaneous	7
10.1 See also	7
Tài liệu	7

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com, hong.nguyenquanba@umt.edu.vn. Bến Tre City, Việt Nam.

1 Basic Mathematical Analysis – Giải Tích Toán Học Cơ Bản

Resources – Tài nguyên.

1. DẶNG ĐÌNH ÁNG. *Nhập Môn Giải Tích*.
2. [Rud76]. WALTER RUDIN. *Principles of Mathematical Analysis*.
3. [Tao22a]. TERENCE TAO. *Analysis I*.
4. [Tao22b]. TERENCE TAO. *Analysis II*.

Question 1 (Definition of mathematical analysis). *What is mathematical analysis? Cf. mathematical analysis with other types of analysis.*

For answers, see, e.g., [Tao22a, Chap. 1, Sect. 1.1: *What Is Analysis?*, pp. 1–2], [Wikipedia/mathematical analysis](#). For other types of analysis, see, e.g., [Wikipedia/analysis](#).

Question 2 (Motivation of mathematical analysis). *Why do mathematical analysis?*

For answers, see, e.g., [Tao22a, Chap. 1, Sect. 1.2: *Why Do Analysis?*, pp. 2–10]

Example 1 (Division by zero & infinity). *The cancellation law for multiplication $ac = bc \Rightarrow a = b$ does not work when $c = 0$ & $c = \pm\infty$. The cancellation law for addition $a + c = b + c \Rightarrow a = b$.*

Example 2 (Cancellation properties).

See, e.g., [Wikipedia/cancellation property](#).

Example 3 (Geometric series – Chuỗi hình học). *When does the geometric series $G(a) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{a^i}$ converge? When does $G(a)$ diverge?*

1.1 Numbers – Các loại số

Trong chương trình Toán phổ thông, học sinh đã được học: số tự nhiên ở chương trình Toán 6 [Thá+23a; Thá+23b], & số hữu tỷ & số thực ở chương trình Toán 7,

1.2 Notations & conventions – Ký hiệu & quy ước

Đặt tập hợp các đa thức (polynomial) 1 biến với hệ số nguyên, hệ số hữu tỷ, hệ số thực, hệ số phức lần lượt cho bởi:

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[x] &:= \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i; n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Z}, \forall i = 0, \dots, n, a_n \neq 0 \right\}, \\ \mathbb{Q}[x] &:= \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i; n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Q}, \forall i = 0, \dots, n, a_n \neq 0 \right\}, \\ \mathbb{R}[x] &:= \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i; n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 0, \dots, n, a_n \neq 0 \right\}, \\ \mathbb{C}[x] &:= \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i; n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{C}, \forall i = 0, \dots, n, a_n \neq 0 \right\}.\end{aligned}$$

Ta có quan hệ hiển nhiên $\mathbb{N}[x] \subset \mathbb{Z}[x] \subset \mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$. Tổng quát, với \mathbb{F} là 1 trường bất kỳ, tập hợp các đa thức 1 biến với hệ số thuộc trường \mathbb{F} (e.g., $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) cho bởi:

$$\mathbb{F}[x] := \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i; n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{F}, \forall i = 0, \dots, n, a_n \neq 0 \right\}.$$

Tập xác định của đa thức có thể là toàn bộ trường số thực \mathbb{R} hoặc trường số phức \mathbb{C} , i.e., $D_P = \text{dom}(P) = \mathbb{R}$ or $D_P = \text{dom}(P) = \mathbb{C}$, tùy vào trường \mathbb{F} của các hệ số & mục đích sử dụng đa thức.

Problem 1 (Cf: Calculus vs. Mathematical Analysis). *Distinguish & compare Calculus vs. Mathematical Analysis.*

Analysis is more pure mathematics. Calculus is more applied mathematics.

Problem 2 (Examples & counterexamples in mathematical analysis – Ví dụ & phản ví dụ trong phân tích toán học). *Find, from simple to advanced, examples & counterexamples to each mathematical concepts & mathematical results, including lemmas, propositions, theorems, & consequences.*

– Tìm các ví dụ & phản ví dụ từ đơn giản đến nâng cao cho mỗi khái niệm toán học & kết quả toán học, bao gồm các bổ đề, mệnh đề, định lý, & hệ quả.

Problem 3 (Python SymPy). *Study SymPy to support calculus & mathematical analysis.*

Definition 1 (Neighborhood, [WS10], p. 6). *The set of all points x s.t. $|x - a| < \delta$, where $\delta > 0$, is called a δ neighborhood of the point a . The set of all points x s.t. $0 < |x - a| < \delta$, in which $x = a$ is excluded, is called a deleted δ neighborhood of a or an open ball of radius δ about a .*

Theorem 1 (Bolzano–Weierstrass theorem). *Every bounded infinite set has at least 1 limit point.*

Definition 2 (Algebraic- & transcendental numbers – số đại số & số siêu việt). *A number $x \in \mathbb{R}$ which is a solution to the polynomial equation*

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \quad (1)$$

where $n \in \mathbb{N}^*$, called the degree of the equation, $a_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i = 0, 1, \dots, n$, $a_n \neq 0$, is called an algebraic number. A number which cannot be expressed as a solution of any polynomial equation with integer coefficients is called a transcendental number.

Theorem 2 (Common transcendental numbers). π, e are transcendental.

Theorem 3 (Countability of sets of algebraic- & transcendental numbers). (i) *The set of algebraic numbers is a countably infinite set.* (ii) *The set of transcendental numbers is noncountably infinite.*

2 Sequence – Dãy Số

Definition 3 (Sequence, [WS10], p. 25). *A sequence is a set of numbers u_1, u_2, \dots in a definite order of arrangement (i.e., a correspondence with the natural numbers or a subset thereof) & formed according to a definite rule. Each number in the sequence is called a term; u_n is called the n th term. The sequence is called finite or infinite according as there are or are not a finite number of terms. The sequence u_1, u_2, \dots is also designated briefly by $\{u_n\}$.*

Definition 4 (Limit of a sequence, [WS10], p. 25). *A number $l \in \mathbb{R}$ is called the limit of an infinite sequence u_1, u_2, \dots if for any positive number ϵ we can find a positive number N depending on ϵ s.t. $|u_n - l| < \epsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > N$. In such case we write $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.*

Bài toán 1 ([VMS24], p. 32, 1.1, VNUHCM UIT). *Cho $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Xét dãy số*

$$\begin{cases} x_0 = a, & x_1 = b, \\ x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}x_{n-1} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right). \end{cases}$$

Chứng minh $\{x_n\}$ hội tụ.

Bài toán 2 ([VMS24], p. 32, 1.2, DH Đồng Tháp). *Cho dãy số $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ đặt bởi*

$$u_n = \sum_{i=1}^n \frac{i}{(i+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(a) *Tìm $n \in \mathbb{N}$ lớn nhất để $u_n < \frac{2023}{2024}$.* (b) *Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{2024} u_i^n} = \sqrt[n]{u_1^n + u_2^n + \cdots + u_{2024}^n}$.*

Bài toán 3 ([VMS24], p. 32, 1.3, DHGTVT). *Cho dãy số $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ thỏa $\frac{1}{2} < a_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Dãy số $\{x_n\}$ đặt bởi*

$$x_1 = a_1, \quad x_{n+1} = \frac{2(a_{n+1} + x_n) - 1}{1 + 2a_{n+1}x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(a) *Chứng minh dãy số $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ tăng & bị chặn trên.* (b) *Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.*

Bài toán 4 ([VMS24], p. 33, 1.4, DH Vinh). *Cho dãy số $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ đặt bởi*

$$\begin{cases} x_1 = 2024, \\ x_{n+1} = \frac{x_n^2}{3[x_n] + 4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

(a) *Chứng minh $x_8 < 1$.* (b) *Chứng minh $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ hội tụ & tìm giới hạn.*

3 Function – Hàm Số

4 Continuity – Sự Liên Tục

Definition 5 ([Tao22a], Def. 6.1.1, p. 109: distance between 2 reals). *Given $x, y \in \mathbb{R}$, their distance $d(x, y)$ is defined to be $d(x, y) := |x - y| \in [0, \infty)$.*

Definition 6 ([Tao22a], Def. 6.1.2, p. 109: ϵ -close reals). *Let $\epsilon > 0$ be a real number. $x, y \in \mathbb{R}$ is said to be ϵ -close iff $d(x, y) \leq \epsilon$.*

5 Series – Chuỗi Số

Bài toán 5 ([VMS24], p. 33, 2.1, DHCNTT TpHCM). *Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\beta \sin^2 l\alpha}{1 + \beta \sin^2 k\alpha}, \quad \alpha \notin \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \beta > 0.$$

6 Derivative & Differentiability – Đạo Hàm & Tính Khả Vi

Bài toán 6 ([VMS24], p. 33, 3.1, VNUHCM UIT). *Cho f là hàm số thực trên $(0, \infty)$. Giả sử*

$$f(x^\alpha) = f(x) \sin^2 \alpha + f(1) \cos^2 \alpha, \quad \forall x \in (0, \infty), \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh f khả vi tại 1.

Bài toán 7 ([VMS24], p. 34, 3.2, DH Đồng Tháp). *(a) Chứng minh với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, phương trình $2x = \sqrt{x+n} + \sqrt{x+n+1}$ có nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là x_n . (b) Tính $a := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}}, b := \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n - a\sqrt{n}$.*

Bài toán 8 ([VMS24], p. 34, 3.3, DH Đồng Tháp). *Cho*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left| \cos \frac{\pi}{x} \right| & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

Chứng minh f khả vi tại 0 nhưng f không khả vi tại các điểm $x_n := \frac{2}{2n+1}$ với $n \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 9 ([VMS24], p. 34, 3.4, DH Đồng Tháp). *Giả sử f khả vi liên tục trên $(0, \infty)$, $f(0) = 1$. Chứng minh nếu $|f(x)| \leq e^{-x}$, $\forall x \geq 0$ thì tồn tại $x_0 > 0$ để $f'(x_0) = -e^{-x_0}$.*

Bài toán 10 ([VMS24], p. 34, 3.5, DHGTVT). *Cho $a \in \mathbb{R}, b \in (0, \infty)$. Hàm f xác định trên $[-1, 1]$, được cho bởi*

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin x^{-b} & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

(a) Tìm tất cả các giá trị của a để hàm f liên tục trên $[-1, 1]$. (b) Tìm tất cả các giá trị của a để tồn tại $f'(0)$. (c) Tìm điều kiện của a, b để tồn tại $f''(0)$.

Bài toán 11 ([VMS24], p. 35, 3.7, HUS). *Cho $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số được xác định bởi công thức*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{if } x \leq 0, \\ be^x + x & \text{if } x > 0, \end{cases}$$

với $a, b \in \mathbb{R}$: tham số. Xác định a, b để f có nguyên hàm trên \mathbb{R} .

Bài toán 12 ([VMS24], p. 35, 3.8, DH Vinh). *Cho hàm $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ thỏa $f_{2024}(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ với*

$$\begin{cases} f_{n+1}(x) = f(f_n(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ f_1(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Chứng minh $f_2(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 13 ([VMS24], p. 35, 3.9, DH Vinh). *Cho hàm*

$$f(x) = \left(\frac{2023^x + 2024^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}, \quad x > 0.$$

(a) Tìm $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. (b) Chứng minh f là hàm số đơn điệu tăng trên $(0, +\infty)$.

Bài toán 14 ([VMS24], p. 36, 4.1, HCMUT). *(a) Cho $f \in C^3(\mathbb{R}, [0, +\infty))$ thỏa $\max_{x \in \mathbb{R}} |f'''(x)| \leq 1$. Chứng minh*

$$f''(x) \geq -\sqrt[3]{\frac{3}{2}f(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) Tìm tất cả các hàm số f thỏa mãn điều kiện của (a) thỏa

$$f''(x) = -\sqrt[3]{\frac{3}{2}f(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 15 ([VMS24], p. 36, 4.2, VNUHCM UIT). Cho hàm số $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục trên $[0, 1]$, khả vi trên $(0, 1)$ sao cho $\exists M > 0, \exists c \in [0, 1]$ thỏa $f(c) = 0$ & $|f'(x)| \leq M|f(x)|, \forall x \in (0, 1)$.

$$|f'(x)| \leq M|f(x)|, \forall x \in (0, 1).$$

Chứng minh $f(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$.

Bài toán 16 ([VMS24], p. 36, 4.3, ĐH Đồng Tháp). Cho f khả vi trên \mathbb{R} & f' giảm ngặt trên \mathbb{R} . (a) Chứng minh

$$f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) Chứng minh nếu tồn tại $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. (c) Tìm hàm số g khả vi trên \mathbb{R} & tồn tại $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L$ nhưng $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) \neq 0$.

Bài toán 17 ([VMS24], p. 37, 4.4, ĐHTGTVT). Giả sử V là tập hợp các hàm liên tục $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ & khả vi trên $(0, 1)$ thỏa $f(0) = 0, f(1) = 1$. Xác định các giá trị $\alpha \in \mathbb{R}$ để với mỗi $f \in V$, luôn tồn tại $\xi \in (0, 1)$ thỏa $f(\xi) + \alpha = f'(\alpha)$.

Bài toán 18 ([VMS24], p. 37, 4.5, HUS). Cho $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục trên $[0, 3]$ & khả vi trong $(0, 3)$. Chứng minh tồn tại $c \in (0, 3)$ thỏa $2f'(c) = f(3) - f(2) + f(1) - f(0)$.

Bài toán 19 ([VMS24], p. 37, 4.6, ĐH Mỏ-Địa chất). Giả sử có chuỗi có 2 đầu hướng ra vô cực

$$\cdots + f''(x) + f'(x) + f(x) + \int_0^x f(t) dt + \int_0^x \int_0^t f(s) ds dt + \cdots$$

& hội tụ đều trên khoảng $(-1, 1)$. Chuỗi là biểu diễn của số nào?

Bài toán 20 ([VMS24], p. 37, 4.7, ĐH Vinh). Cho hàm $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ & thỏa $f(x) \leq 2024, \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh tồn tại $x \in \mathbb{R}$ thỏa $f''(x) = 0$.

7 Integral – Tích Phân

Bài toán 21 ([VMS24], p. 37, 5.1, VNUHCM UIT). Cho $\alpha \in (0, \infty)$ & $f \in C([0, 1])$ nghịch biến, $a \in (0, 1)$ thỏa

$$\int_0^a f(t) dt < \frac{a}{2025}, f(0) = \beta > 0.$$

Chứng minh phương trình $f(x) = x^{2024}$ có nghiệm trong $[0, 1]$.

Bài toán 22 ([VMS24], p. 38, 5.2, ĐH Đồng Tháp). Giả sử $f \in C^1([0, 1])$ thỏa $f(0) = 0, 0 \leq f'(x) \leq 1, \forall x \in [0, 1]$. Xét hàm số

$$F(t) = \left(\int_0^t f(x) dx \right)^2 - \int_0^t (f(x))^3 dx, \forall t \in [0, 1].$$

(a) Chứng minh F đồng biến trên $[0, 1]$. (b) Chứng minh

$$\left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 \geq \int_0^1 (f(x))^3 dx.$$

Cho vài ví dụ về hàm f để đẳng thức xảy ra.

Bài toán 23 ([VMS24], p. 38, 5.3, ĐHTGTVT). Cho $f : [0, 1] \rightarrow (0, +\infty)$ là 1 hàm khả tích thỏa $f(x)f(1-x) = 1, \forall x \in [0, 1]$. Chứng minh $\int_0^1 f(x) dx \geq 1$.

Bài toán 24 ([VMS24], p. 38, 5.4, HUS). Cho $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm khả tích trên $[0, 1]$ & liên tục trên $(0, 1)$. Chứng minh tồn tại $a, b \in (0, 1)$ phân biệt sao cho

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Bài toán 25 ([VMS24], p. 38, 5.5, ĐH Mỏ-Địa chất). Tính tích phân

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2+t^2 \leq 1} e^{x^2+y^2-z^2-t^2} dx dy dz dt.$$

Bài toán 26 ([VMS24], p. 38, 5.6, ĐH Vinh). Chứng minh

$$\frac{9}{8\pi} < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx < \frac{3}{2\pi}.$$

7.1 SymPy/integrals module

See <https://docs.sympy.org/latest/modules/integrals/integrals.html>. The `integrals` module in SymPy implements methods to calculate definite & indefinite integrals of expressions. Principal method in this module is `integrate()`:

- `integrate(f, x)` returns the indefinite integral $\int f dx$
- `integrate(f, (x, a, v))` returns the definite integral $\int_a^b f dx$.

Problem 4 (Integration of elementary functions). *Use SymPy to compute definite- & indefinite integrals of elementary functions as many as possible.*

Problem 5 (Integration of nonelementary functions). *Use SymPy to compute definite- & indefinite integrals of nonelementary functions as many as possible.*

Example 4 (Integral of error function). *The indefinite integral of the nonelementary function $e^{-x^2} \operatorname{erf}(x)$, where $\operatorname{erf}(x)$ is the error function, is given by*

$$\int e^{-x^2} \operatorname{erf}(x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \operatorname{erf}(x).$$

Run the following Python code:

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
print(integrate(exp(-x**2)*erf(x), x))
```

to obtain the following output:

```
sqrt(pi)*erf(x)**2/4
```

For more information about the error function, see, e.g., [Wikipedia/error function](#).

7.2 Leibniz integral rule – Quy tắc tích phân Leibniz

In [calculus](#), the *Leibniz integral rule* for differentiation under the integral sign, named after [GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ](#).

Theorem 4 (Leibniz integral rule – Quy tắc tích phân Leibniz). *For an integral of the form $\int_{a(x)}^{b(x)} f(t, x) dt$ where $a(x), b(x) \in \mathbb{R}$ & the integrands are functions dependent on x , the derivative of this integral is expressible as*

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t, x) dt \right) = f(b(x), x) \frac{d}{dx} b(x) - f(a(x), x) \frac{d}{dx} a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \partial_x f(t, x) dt, \quad (\text{Lintr})$$

where the [partial derivative](#) $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ indicates that inside the integral, only the variation of $f(t, x)$ with x is considered in taking the derivative.

8 Functional Equation – Phương Trình Hàm

Bài toán 27 ([[VMS24](#)], p. 38, 6.1, HUS). *Cho $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ là 1 hàm khả vi thỏa $(f'(x))^2 - 3f'(x) + 2 = 0, \forall x \in (0, 1)$. Tìm f . (b) [HM] Mở rộng bài toán cho dạng phương trình hàm phức tạp hơn.*

9 Fourier transform – Biến đổi Fourier

Resources – Tài nguyên.

1. [[Tao12](#)]. TERENCE TAO. *Higher Order Fourier Analysis*.

9.1 Discrete Fourier transform – Biến đổi Fourier rời rạc

See, e.g., [Wikipedia/discrete Fourier transform](#). In mathematics, the *discrete Fourier transform* (DFT) converts a finite sequence of equally-spaced [samples](#) of a function into a same-length sequence of equally-spaced samples of the [discrete-time Fourier transform](#) (DTFT), which is a complex-valued function of frequency. The interval at which the DTFT is sampled is the reciprocal of the duration of the input sequence.

Definition 7 (Discrete Fourier transform). *The discrete Fourier transform transforms a [sequence](#) of N complex numbers $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=0}^{N-1} := x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$ into another sequence of complex numbers, $\mathbf{X} = \{X_n\}_{n=0}^{N-1} := X_0, X_1, \dots, X_{N-1}$ defined by*

$$X_k := \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi \frac{k}{N} n}. \quad (\text{dFt})$$

The transform is sometimes denoted by the symbol \mathcal{F} , as in $\mathbf{X} = \mathcal{F}\{\mathbf{x}\}$ or $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ or $\mathcal{F}\mathbf{x}$.

10 Miscellaneous

10.1 See also

1. [Str20]. STEVEN STROGATZ. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe*.
2. [Str24]. STEVEN STROGATZ. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe – Sức Mạnh Vô Hạn: Giải Tích Toán Khám Phá Bí Mật Của Vũ Trụ Như Thế Nào?*.
Nhận xét. 1 quyển sách hay về thường thức về lịch sử phát triển của Giải tích Toán học & các ý tưởng cơ bản nhất của Giải tích. Khuyến khích đọc thử, cũng như các tác phẩm thường thức Khoa học Tự nhiên nói chung & Toán học nói riêng khác của tác giả STEVEN STROGATZ.
3. TS. HUỖNH QUANG VŨ. *Các Bài Giảng Giải Tích*. <https://sites.google.com/view/hqv/teaching>.
 - Bộ Môn Giải Tích, Khoa Toán - Tin học, Faculty of Mathematics & Computer Science, HCMUS. *Giáo Trình Vi Tích Phân 1*.
 - Bộ Môn Giải Tích, Khoa Toán - Tin học, Faculty of Mathematics & Computer Science, HCMUS. *Giáo Trình Vi Tích Phân 2*.
4. *Vietnamese Mathematical Olympiad for High School- & College Students (VMC) – Olympic Toán Học Học Sinh & Sinh Viên Toàn Quốc*.
PDF: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/VMC/NQBH_VMC.pdf.
T_EX: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/VMC/NQBH_VMC.tex.
 - Codes:
 - C++ code: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/C++.
 - Python code: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/Python.
 - Resource: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/resource.
 - Figures: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/figure.
5. *Olympic Tin Học Sinh Viên OLP & ICPC*.
PDF: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/OLP_ICPC/NQBH_OLP_ICPC.pdf.
T_EX: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/OLP_ICPC/NQBH_OLP_ICPC.tex.
 - Codes:
 - C: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/OLP_ICPC/C.
 - C++: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/OLP_ICPC/C++.
 - Python: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/OLP_ICPC/Python.

Tài liệu

- [Rud76] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*. Third. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 1976, pp. x+342.
- [Str20] Steven Strogatz. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe*. Mariner Books, 2020, p. 400.
- [Str24] Steven Strogatz. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe – Sức Mạnh Vô Hạn: Giải Tích Toán Khám Phá Bí Mật Của Vũ Trụ Như Thế Nào?* Phạm Văn Thiều dịch. Nhà Xuất Bản Trẻ, 2024, p. 486.
- [Tao12] Terence Tao. *Higher order Fourier analysis*. Vol. 142. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012, pp. x+187. ISBN: 978-0-8218-8986-2. DOI: [10.1090/gsm/142](https://doi.org/10.1090/gsm/142). URL: <https://doi.org/10.1090/gsm/142>.
- [Tao22a] Terence Tao. *Analysis I*. Vol. 37. Texts and Readings in Mathematics. Fourth edition [of 2195040]. Hindustan Book Agency, New Delhi, [2022] ©2022, pp. xvi+355. ISBN: 978-81-951961-9-7.
- [Tao22b] Terence Tao. *Analysis II*. Vol. 38. Texts and Readings in Mathematics. Fourth edition [of 2195041]. Springer, Singapore; Hindustan Book Agency, New Delhi, [2022] ©2022, pp. xvii+195. ISBN: 978-9-81197-284-3. DOI: [10.1007/978-981-19-7284-3](https://doi.org/10.1007/978-981-19-7284-3). URL: <https://doi.org/10.1007/978-981-19-7284-3>.
- [Thá+23a] Đỗ Đức Thái, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang. *Toán 6 Tập 1*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2023, p. 128.
- [Thá+23b] Đỗ Đức Thái, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang. *Toán 6 Tập 2*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2023, p. 108.
- [VMS24] Hội Toán Học Việt Nam VMS. *Kỷ Yếu Kỳ Thi Olympic Toán Học Sinh Viên-Học Sinh Lần Thứ 30*. Đà Nẵng 8–13/4/2024. VMS, 2024, p. 112.
- [WS10] Robert Wrede and Murray R. Spiegel. *Advanced Calculus*. 3rd edition. Schaum's Outline Series. McGraw Hill, 2010, p. 456. ISBN: 978-0071623667.