ÔN TẬP LÝ THUYẾT QUY HOẠCH PHI TUYẾN 2017-2018

Bài 1. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{if} \quad (x;y) \neq (0;0), \\ 0 & \text{if} \quad (x;y) = (0;0). \end{cases}$$

(a) Hàm số trên có khả vi theo hướng tại $x_0 = (0;0)$?

(b) Hàm số trên có khả vi Gâteaux tại $x_0 = (0;0)$?

Bài 2. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^4+y^2} & \text{if} \quad (x;y) \neq (0;0), \\ 0 & \text{if} \quad (x;y) = (0;0). \end{cases}$$

(a) Hàm số trên có khả vi theo hướng tại $x_0 = (0;0)$?

(b) Hàm số trên có khả vi Gâteaux tại $x_0 = (0;0)$?

(c) Hàm số trên có khả vi Fréchet tại $x_0 = (0;0)$?

Bài 3. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ được xác định bởi

$$f(x,y) = (x^3, y^2)$$

Xét $x = (0;0)$ và $y = (1;1)$. Hỏi có tồn tại $z \in [x;y] = \{tx + (1-t)y | \, t \in [0;1]\}$ để

$$f(y) - f(x) = \nabla f(z)(y-x)$$

Tập tiếp xúc cấp 1, cấp 2

Cho X là một không gian định chuẩn, $M \subset X$ và $x_0 \in X$.

(a) Nón tiếp xúc (contingent cone, tangent cone, Bouligand cone) của M tại x_0 được xác định như sau

$$T(M, x_0) = \{u \in X | \, \exists t_n \to 0^+, \exists u_n \to u, x_0 + t_n u_n \in M, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

(b) Tập tiếp xúc cấp 2 của M tại x_0 theo hướng u được xác định như sau

$$T^2(M, x_0, u) = \{w \in X | \, \exists t_n \to 0^+, \exists w_n \to w, x_0 + t_n u + \frac{1}{2} t_n^2 w_n \in M, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

(c) Nón tiếp xúc cấp 2 tiệm cận của M tại x_0 theo hướng u được xác định như sau

$$T^{''}(M, x_0, u) = \{w \in X | \, \exists (t_n, r_n) \to (0^+, 0^+) : \frac{t_n}{r_n} \to 0, \exists w_n \to w,$$

$$x_0 + t_n u + \frac{1}{2} t_n r_n w_n \in M, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Bài 4. Cho $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \, x_1 + x_2^2 \leq 0\}$ và $x_0 = (0, 0)$.

(a) Tính $T(M, x_0)$

(b) Xét $u = (0; 1)$, hãy tính $T^2(M, x_0, u)$ và $T^{''}(M, x_0, u)$.

Bài 5. Cho $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \, x_1^3 - x_2^2 = 0\}$ và $x_0 = (0, 0)$.

(a) Tính $T(M, x_0)$

(b) Xét $u = (1; 0)$, hãy tính $T^2(M, x_0, u)$ và $T^{''}(M, x_0, u)$

Bài tập sau đây cho ta một số tính chất về nón tiếp xúc cấp 1.

Bài 6. Cho X là một không gian định chuẩn, $M \subset X$ và $x_0 \in X$.

(i) Nếu $T(M, x_0) \neq \emptyset$ thì $x_0 \in \overline{M}$ (trong đó $\overline{M}$ là bao đóng của tập M).

(ii) $T(M, x_0)$ là một nón đóng.

(iii) $T(M, x_0) \subset \overline{\text{cone}(M - x_0)}$.

Hơn nữa, nếu M là tập lồi thì

(iv) $T(M, x_0) = \overline{\text{cone}(M - x_0)}$, và do đó $T(M, x_0)$ là tập lồi.

(v) $T(M, x_0) = \{v \in X | \ \forall t_n \to 0^+, \forall v_n \to v, x_0 + t_n v_n \in M, \forall n \in \mathbb{N}\}$.

Bài tập sau đây cho ta một số tính chất cơ bản về tập tiếp xúc cấp 2.

Bài 7. Cho X là một không gian định chuẩn, $M \subset X$ và $x_0, u \in X$.

(i) Nếu $u \notin T(M, x_0)$ thì $T^2(M, x_0, u)$ và $T^{''}(M, x_0, u)$ là các tập rỗng.

(ii) $T^2(M, x_0, 0) = T^{''}(M, x_0, 0) = T(M, x_0)$.

(iii) $T^{''}(M, x_0)$ là một nón, trong khi $T^2(M, x_0, u)$ không phải là nón.

(iv) Nếu X là không gian hữu hạn chiều và $u \in T(M, x_0)$ thì

$$T^2(M, x_0, u) \cup T^{''}(M, x_0, u) \neq \emptyset.$$

Lý thuyết các điều kiện tối ưu

Sau đây, chúng ta bàn về lý thuyết các điều kiện tối ưu cho bài toán sau

$$\text{(P)} \quad \text{Min } f(x) \quad s.t. \quad x \in \Omega.$$

Trong đó $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ và $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Định nghĩa nghiệm

Xét bài toán (P), $m \in \mathbb{N}^*$.

(i) $x_0 \in \Omega$ được gọi là cực tiểu địa phương của (P) nếu tồn tại một lân cận U của x_0 sao cho

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in U \cap \Omega.$$

(ii) $x_0 \in \Omega$ được gọi là cực tiểu chặt cấp m địa phương của (P) nếu tồn tại một lân cận U của x_0 và một số thực dương α sao cho

$$f(x) \geq f(x_0) + \alpha\|x - x_0\|^m, \quad \forall x \in U \cap \Omega.$$

Định lý 1: Điều kiện cần tối ưu cấp 1

Nếu x_0 là cực tiểu địa phương của (P) thì $\forall u \in T(\Omega, x_0), \langle \nabla f(x_0), u \rangle \geq 0$.

Định lý 2: Điều kiện đủ tối ưu cấp 1

(i) Nếu f là hàm lồi, Ω là tập lồi và với mọi $u \in T(\Omega, x_0), \langle \nabla f(x_0), u \rangle \geq 0$, thì x_0 là cực tiểu của (P).

(ii) Nếu với mọi $u \in T(\Omega, x_0)$ với $\|u\| = 1$ ta có $\langle \nabla f(x_0), u \rangle > 0$ thì x_0 là cực tiểu chặt cấp 1 địa phương của (P).

Sau đây là một số bài tập vận dụng điều kiện tối ưu cấp 1.

Bài 8. Ferma's rule

Dựa vào định lý 1, hãy chứng minh kết quả sau đây:

Nếu x_0 là cực tiểu địa phương của (P) và $x_0 \in \text{int}\Omega$ thì $\nabla f(x_0) = 0$.

Áp dụng: Tìm các ứng viên nghiệm cho các bài toán sau

(a) (P) $\quad \text{Min } x^2 + 3y^2 - 2xy - 4x - 8y \quad s.t. \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) (P) $\quad \text{Min } xyze^{-x-y-z} \quad s.t. \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Bài 9. Xét bài toán sau

$$(\text{P}) \quad \text{Min } x^2 - y \quad s.t. \quad (x, y) \in \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x + y^3 \geq 0\}.$$

(a) Tính nón tiếp xúc của Ω tại $x_0 = (0, 0)$?

(b) Áp dụng điều kiện cần tối ưu cấp 1, có thể kiểm chứng $x_0 = (0, 0)$ có là cực tiểu địa phương của (P) hay không?

Bài 10. Xét bài toán sau

$$(\text{P}) \quad \text{Min } x + y^2 \quad s.t. \quad (x, y) \in \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x - \sqrt{|y|} = 0\}.$$

(a) Tính nón tiếp xúc của Ω tại $x_0 = (0, 0)$?

(b) Áp dụng điều kiện đủ tối ưu cấp 1, chứng minh x_0 là cực tiểu chặt cấp 1 địa phương của (P).

(c) Dùng định nghĩa kiểm chứng x_0 là cực tiểu chặt cấp 1 địa phương của (P).

Khi xét đến các điều kiện cần tối ưu cấp 2, nghĩa là ứng viên nghiệm đã thỏa điều kiện cần tối ưu cấp 1, khi đó ta sẽ xét trên các hướng tới hạn u thỏa

$$\langle \nabla f(x_0), u \rangle = 0.$$

Định lý 3: Điều kiện cần tối ưu cấp 2

Nếu x_0 là cực tiểu địa phương của (P) và u thỏa $\langle \nabla f(x_0), u \rangle = 0$, khi đó ta có:

(i) với mọi $w \in T^2(\Omega, x_0, u)$, $\langle \nabla f(x_0), w \rangle + \nabla^2 f(x_0)(u, u) \geq 0$;

(ii) với mọi $w \in T''(\Omega, x_0, u)$, $\langle \nabla f(x_0), w \rangle \geq 0$.

Định lý 4: Điều kiện đủ tối ưu cấp 2

Nếu với mọi $u \in T(\Omega, x_0)$ với $\|u\| = 1$ ta có

(i) với mọi $w \in T^2(\Omega, x_0, u)$, $\langle \nabla f(x_0), w \rangle + \nabla^2 f(x_0)(u, u) > 0$;

(ii) với mọi $w \in T''(\Omega, x_0, u)$ với $\|w\| = 1$, $\langle \nabla f(x_0), w \rangle > 0$;

thì x_0 là cực tiểu chặt cấp 2 địa phương của (P).

Sau đây là một số bài tập vận dụng điều kiện tối ưu cấp 2.

Bài 11. Xét bài toán sau

$$\text{(P)} \quad \text{Min } x^3 - y^2 \quad s.t. \quad (x, y) \in \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ xy \geq 0\}.$$

(a) Tính nón tiếp xúc của Ω tại $x_0 = (0, 0)$?

(b) Áp dụng điều kiện cần tối ưu cấp 1, có thể kiểm chứng $x_0 = (0, 0)$ có là cực tiểu địa phương của (P) hay không?

(c) Áp dụng điều kiện cần tối ưu cấp 2, có thể kiểm chứng $x_0 = (0,0)$ có là cực tiểu địa phương của (P) hay không?

Bài 12. Xét bài toán sau

$$\text{(P)} \quad \text{Min } y^2 + x^3 \quad s.t. \quad (x,y) \in \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, x - y^2 \geq 0\}.$$

(a) Tính nón tiếp xúc của Ω tại $x_0 = (0,0)$?

(b) Chứng minh x_0 thỏa điều kiện cần tối ưu cấp 1.

(c) Dùng định nghĩa chứng minh x_0 không phải là cực tiểu chặt cấp 1 địa phương của (P).

(d) Dùng định nghĩa kiểm chứng x_0 có phải là cực tiểu chặt cấp 2 địa phương của (P).

(e) Áp dụng điều kiện đủ tối ưu cấp 2, kiểm chứng $x_0 = (0,0)$ có là cực tiểu chặt cấp 2 địa phương của (P) hay không?

Chúc các bạn ôn tập tốt và thi thật tốt nhé .