Matrix Multiplication & Fast Doubling Techniques in Competitive Programming

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 12 tháng 12 năm 2025

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Advanced STEM & Beyond*:
URL: https://nqbh.github.io/advanced_STEM/.
Latest version:

- .
  PDF: URL: .pdf.
  TeX: URL: .tex.
- .
  PDF: URL: .pdf.
  TeX: URL: .tex.

Mục lục

1 Introduction

Resources – Tài nguyên.

1. Benjamin Qi, Harshini Rayasam, Neo Wang, Peng Bai. USACO Guide/matrix exponentatiation.
2. CodeForces/lazyneuron/a complete guide on matrix exponentiation.
3.

Problem 1 (CSES Problem Set/Fibonacci numbers). *The Fibonacci numbers can be defined as follows:*

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_n = F_{n-2} + F_{n-1},\ \forall n \in \mathbb{N},\, n \geq 2. \tag{1}$$

Calculate the value of F_n for a given n.

Input. *The only input line has an integer n.*

Output. *Print the value of $F_n \mod (10^9 + 7)$.*

Constraints. $0 \leq n \leq 10^{18}$.

Solution. Đặt

$$A \coloneqq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}),$$

ta chứng minh

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star. \tag{2}$$

Trường hợp cơ sở hiển nhiên đúng:

$$A^1 = A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix}.$$

*A scientist- & creative artist wannabe, a mathematics & computer science lecturer of Department of Artificial Intelligence & Data Science (AIDS), School of Technology (SOT), UMT Trường Đại học Quản lý & Công nghệ TP.HCM, Hồ Chí Minh City, Việt Nam.
E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com & hong.nguyenquanba@umt.edu.vn. Website: https://nqbh.github.io/. GitHub: https://github.com/NQBH.

Bước chuyển quy nạp từ n sang $n+1$:

$$A^{n+1} = AA^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1} + F_n & F_n + F_{n-1} \\ F_{n+1} & F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{bmatrix},$$

suy ra (2) đúng theo nguyên lý quy nạp toán học.

C++ implementation.

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
using ll = long long;
using Matrix = array<array<ll, 2>, 2>;
const ll MOD = 1e9 + 7;

Matrix mul(Matrix a, Matrix b) {
    Matrix res = {{{0, 0}, {0, 0}}};
    for (int i = 0; i < 2; ++i)
        for (int j = 0; j < 2; ++j)
            for (int k = 0; k < 2; ++k) {
                res[i][j] += a[i][k] * b[k][j];
                res[i][j] %= MOD;
            }
    return res;
}

int main() {
    ios_base::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(nullptr);
    ll n;
    cin >> n;
    Matrix base = {{{1, 0}, {0, 1}}}, m = {{{1, 1}, {1, 0}}};
    for (; n > 0; n /= 2, m = mul(m, m))
        if (n & 1) base = mul(base, m);
    cout << base[0][1];
}
```

□

Ta có thể mở rộng bài toán này bằng cách mở rộng (1) cho dãy dãy $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ được định nghĩa bởi công thức truy hồi:

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_n = af_{n-1} + f_{n-2},\ \forall n \in \mathbb{N},\, n \geq 2,$$

bằng cách đặt

$$A := \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

thì chứng minh được bằng quy nạp

Bài toán 1. *Cho 1 quan hệ hồi quy tuyến tính có dạng*

$$f_n = \sum_{i=1}^{k} c_i f_{n-i},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq k.$$

2 Miscellaneous