Vietnamese Mathematical Olympiad for High School- & College Students Olympic Toán Học Học Sinh & Sinh Viên Toàn Quốc (VMC)

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 29 tháng 3 năm 2025

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Advanced STEM & Beyond*:
URL: https://nqbh.github.io/advanced_STEM/.
Latest version:

- *Vietnamese Mathematical Olympiad for High School- & College Students (VMC) – Olympic Toán Học Học Sinh & Sinh Viên Toàn Quốc.*

  PDF: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/VMC/NQBH_VMC.pdf.

  TEX: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/VMC/NQBH_VMC.tex.
- Codes:
  - C++ code: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/C++.
  - Python code: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/Python.
- Resource: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/resource.
- Figures: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/figure.

Mục lục

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com, hong.nguyenquanba@umt.edu.vn. Bến Tre City, Việt Nam.

Preliminaries – Kiến thức chuẩn bị

Resources – Tài nguyên.

1. [Khả09]. Phan Huy Khải. *Các Chuyên Đề Số Học Bồi Dưỡng Học Sinh Giỏi Toán Trung Học. Chuyên Đề 2: Số Học & Dãy Số.*

2. [VMS23]. VMS – Hội Toán Học Việt Nam. *Kỷ Yếu Kỳ Thi Olympic Toán Học Sinh Viên–Học Sinh Lần 29.* Huế, 2–8.4.2023.

3. [VMS24]. VMS – Hội Toán Học Việt Nam. *Kỷ Yếu Kỳ Thi Olympic Toán Học Sinh Viên–Học Sinh Lần 30.* Đà Nẵng 8–13.4.2024.

Critical-thinking questions:

Question 1 (Generalization; main ideas of a solution/proof)**.** *What are main ideas of a solution or a proof of a problem that can be used to generalize the original problem?*

Question 2 (Link[1])**.** *Can we draw some link(s) between different problems? Even they are in different categories: algebra, analysis, & combinatorics.*

Remark 1 (Repeat & mathematical induction – Lặp & quy nạp toán học)**.** *Nếu bài toán có chứa $n \in \mathbb{N}^\star$ tổng quát hoặc chứa số tự nhiên của năm ra đề, e.g., 2025, thì đưa* 2025 *về $n \in \mathbb{N}^\star$, rồi sử dụng các kỹ thuật toán học để đưa về phép lặp, hoặc sử dụng phương pháp quy nạp toán học (method mathematical induction).*

Notation – Ký hiệu

- $\lfloor x \rfloor, \{x\}$ lần lượt được gọi là *phần nguyên & phần lẻ* (integer- & fractional parts) của $x \in \mathbb{R}$, see, e.g., Wikipedia/floor & ceiling functions, Wikipedia/fractional part.
- $x_+ \coloneqq \max\{x, 0\}$, $x_- \coloneqq \max\{-x, 0\} = -\min\{x, 0\}$ lần lượt được gọi là *phần dương & phần âm* (positive- & negative parts) của $x \in \mathbb{R}$.
- s.t.: abbreviation of 'such that'.
- w.l.o.g.: abbreviation of 'without loss of generality'.

1 Trigonometry – Lượng Giác

Phần này dùng để tóm tắt lại các công thức lượng giác cần thiết cho các bài toán Olympic ở 3 phần chính là Sect. 3: Algebra – Đại Số, Sect. 4: Analysis – Giải Tích, & Sect. 5.

[1] Watch, e.g., IMDb/Shi Guang Dai Li Ren ⋆ Link Click (2021–).

1.1 Trigonometric identities – Đẳng thức lượng giác

See, e.g., Wikipedia/list of trigonometric identities.

1.1.1 Multiple-angle formulae

Double-angle formulae. Formulae for twice an angle.

$$\begin{aligned}
\sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta = (\sin\theta+\cos\theta)^2 - 1 = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta},\\
\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta},\\
\tan 2\theta &= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta},\\
\cot 2\theta &= \frac{\cot^2\theta - 1}{2\cot\theta} = \frac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta},\\
\sec 2\theta &= \frac{\sec^2\theta}{2-\sec^2\theta} = \frac{1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta},\\
\csc 2\theta &= \frac{\sec\theta\csc\theta}{2} = \frac{1+\tan^2\theta}{2\tan\theta}.
\end{aligned}$$

Triple-angle formulae. Formulae for triple an angle:

$$\begin{aligned}
\sin 3\theta &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 4\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right),\\
\cos 3\theta &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 4\cos\theta\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right),\\
\tan 3\theta &= \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta} = \tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right),\\
\cot 3\theta &= \frac{3\cot\theta - \cot^3\theta}{1-3\cot^2\theta},\\
\sec 3\theta &= \frac{\sec^3\theta}{4-3\sec^2\theta},\\
\csc 3\theta &= \frac{\csc^3\theta}{3\csc^2\theta - 4}.
\end{aligned}$$

Multiple-angle formulae.

2 Complex Number $\mathbb{C}$ – Số Phức $\mathbb{C}$

See, e.g., Wikipedia/complex number.

2.1 Fundamental theorem of algebra

The fundamental theorem of algebra (FTA), of Carl Friedrich Gauss & Jean le Rond d'Alembert:

Theorem 1 (Fundamental theorem of algebra)**.** *For any complex numbers $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, the equation $\sum_{i=0}^n a_i z^i = 0$ has at least 1 complex solution z, provided that at least 1 of the higher coefficients $a_1, \ldots, a_n$ is nonzero.*

This property does not hold for the field of rational numbers $\mathbb{Q}$ (e.g., the polynomial $x^2 - 2$ does not have a rational root, because $\sqrt{2}$ is irrational) nor the real numbers $\mathbb{R}$ (e.g., the polynomial $x^2 + 4$ does not have a real root, because the square of x is positive for any real number x).

Remark 2 (Proofs of FTA)**.** *Although the fundamental theorem of algebra is belong to Algebra, its proofs usually are based on modern tools of Complex Analysis!*

Because of Theorem 1, $\mathbb{C}$ is called an algebraically closed field. It is a cornerstone of various applications of complex numbers. There are various proofs of this theorem, by either analytic methods e.g. Liouville's theorem, or topological ones e.g. the winding number, or a proof combining Galois theory & the fact that any real polynomial of *odd* degree at ≥ 1 real root.

2.2 Root of unity – Căn nguyên thủy

In mathematics, a *root of unity*, occasionally called *de Moivre number*, is any complex number that yields 1 when raised raised to some power $n \in \mathbb{N}^\star$. Roots of unity are used in many branches of mathematics, & are especially important in number theory, the theory of group characters, & the discrete Fourier transform.

Definition 1 (Root of unity – Căn nguyên thủy)**.** *An* nth root of unity*, where $n \in \mathbb{N}^\star$, is a number z satisfying the equation $z^n = 1$.*

3 Algebra – Đại Số

Resources – Tài nguyên.

1. Bùi Xuân Hải, Trần Ngọc Hội, Trịnh Thanh Đèo, Lê Văn Luyện. *Đại Số Tuyến Tính & Ứng Dụng. Tập 1.* HCMUS.
2. [Hoa06]. Lê Tuấn Hoa. *Đại Số Tuyến Tính Qua Các Ví Dụ & Bài Tập.*
3. [Hư22]. Nguyễn Hữu Việt Hưng. *Đại Số Tuyến Tính.* HNUS.
4. [TB97; TB22]. Lloyd N. Trefethen, David Bau III. *Numerical Linear Algebra.*
5. [Tru02]. Ngô Việt Trung. *Giáo Trình Đại Số Tuyến Tính.*
6. [Tsu+23]. Makoto Tsukada, Yuji Kobayashi, Hiroshi Kaneko, Sin-Ei Takahasi, Kiyoshi Shirayanagi, Masato Noguchi. *Linear Algebra with Python: Theory & Applications.*

Bài toán 1 (Symbolic computation software/languages/libraries for Linear Algebra)**.** *Tương tự như phần mềm* MATLAB *https://www.mathworks.com/products/matlab.html, tìm các phần mềm, ngôn ngữ, hoặc thư viện của các ngôn ngữ quen thuộc như* Python *(thư viện* SymPy *https://www.sympy.org/en/index.html),* C/C++ *để thực hành symbolic computation.*

3.1 Matrix – Ma trận

3.1.1 Determinant of a matrix – Định thức của ma trận

Định nghĩa 1. Định thức *của 1 ma trận* $A = (a_{ij})_{n\times n}$ *với các yếu tố trong trường* $\mathbb{F}$*, được ký hiệu bởi* $\det A$ *hoặc* $|A|$*, là phần tử* $\det A \coloneqq \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}$ *của trường* $\mathbb{F}$*. Nếu* A *là 1 ma trận vuông cỡ* n *thì* $\det A$ *được gọi là 1* định thức cỡ n*. Tổng ở vế phải của đẳng thức này có tất cả* $|S_n| = n!$ *số hạng.*

Ví dụ 1. *(a) Định thức cỡ 1:* $\det(a) = a$, $\forall a\in\mathbb{F}$*. (b) Định thức cỡ 2:*

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

(c) Định thức cỡ 3:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}.$$

Trên thực tế, không trực tiếp dùng định nghĩa để tính các định thức cỡ $n > 3$ vì việc này quá phức tạp.

Gọi $\mathbf{a}_j \in \mathbb{F}^n$ là vector cột thứ j của ma trận A, & coi $\det A$ là 1 hàm của n vector $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$. Viết $\det A = \det(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n)$.

Định lý 1 (3 tính chất cơ bản của định thức)**.** *(i)* (Multilinear – Đa tuyến tính) *Định thức của ma trận là 1 hàm tuyến tính với mỗi cột (resp., hàng) của nó, khi cố định các cột (resp., hàng) khác, i.e.:*

$$\det(\mathbf{a}_1,\ldots,a\mathbf{a}_j+b\mathbf{b}_j,\ldots,\mathbf{a}_n) = a\det(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_j,\ldots,\mathbf{a}_n)+b\det(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{b}_j,\ldots,\mathbf{a}_n),\ \forall a,b\in\mathbb{F},\ \mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_j,\mathbf{b}_j,\ldots,\mathbf{a}_n\in\mathbb{F}^n,\ j=1,\ldots,n.$$

(ii) (Thay phiên) *Nếu ma trận vuông* A *có 2 cột (resp., hàng) bằng nhau thì* $\det A = 0$*. (iii)* (Chuẩn hóa) *Định thức của ma trận đơn vị bằng* 1*:* $\det I_n = 1$*. (iv) Định thức là hàm duy nhất trên các ma trận vuông có 3 tính chất (i)–(iii).*

Hệ quả 1 ([Hư22], Hệ quả 2.3, p. 137)**.** *(i)* (Tính phản đối xứng của định thức) *Nếu đổi chỗ 2 cột (resp., hàng) của 1 ma trận thì định thức của nó đổi dấu:*

$$\det(\ldots,\mathbf{a}_i,\ldots,\mathbf{a}_j,\ldots) = -\det(\ldots,\mathbf{a}_j,\ldots,\mathbf{a}_i,\ldots).$$

(ii) Nếu các vector cột (resp., vector hàng) của 1 ma trận phụ thuộc tuyến tính thì định thức của ma trận bằng 0*. Nói riêng, nếu ma trận có 1 cột (resp., hàng) bằng* 0 *thì định thức của nó bằng* 0*. (iii) Nếu thêm vào 1 cột (resp., hàng) của ma trận 1 tổ hợp tuyến tính của các cột (resp., hàng) khác thì định thức của nó không thay đổi.*

Các tính chất của định thức đối với các hàng cũng tương tự các tính chất của định thức đối với các cột. 1 phương pháp tính định thúc có hiệu quả là ứng dụng các tính chất đó để biến đổi ma trận thành 1 ma trận tam giác có cùng định thức.

Định nghĩa 2 (Ma trận tam giác)**.** *Ma trận* A *được gọi là 1* ma trận tam giác trên *nếu nó có dạng*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix},$$

trong đó $a_{ij} = 0$ *với* $i > j$*. Tương tự,* A *được gọi là 1* ma trận tam giác dưới *nếu* $a_{ij} = 0$ *với* $i < j$*. Ma trận tam giác trên & ma trận tam giác dưới được gọi chung là* ma trận tam giác*.*

Định lý 2 (Định thức của ma trận tam giác). *Nếu A là 1 ma trận tam giác cỡ n thì* $\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

Định lý 3 ([Hưn22], Định lý 5.1, p. 147). *Giả sử $A, B \in M(n \times n, \mathbb{F})$. Khi đó: (i)* $\det(AB) = \det A \det B$. *(ii) A khả nghịch* $\Leftrightarrow \det A \neq 0$. *Hơn nữa,* $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$, *hay* $\det A \det(A^{-1}) = 1$. *(iii) Định thức của ma trận chuyển vị:* $\det(A^\top) = \det A$, $\forall A \in M(n \times n, \mathbb{F})$.

Theo định lý này, tất cả các tính chất của định thức đối với các cột của nó vẫn đúng đối với các hàng của nó. E.g., định thức là 1 hàm đa tuyến tính, thay phiên, & chuẩn hóa đối với các hàng của nó, ...

Bài toán 2 (Tính $\det A$ bằng cách hạ cấp). *Tính định thức cỡ n thông qua các định thức nhỏ hơn.*

Cho $A = (a_{ij}) \in M(n\times n, \mathbb{F})$ & $k \in \mathbb{N}$ thỏa $1 \le k < n$. Xét 2 bộ chỉ số $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$, $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n$. Các phần tử nằm trên giao của k hàng $i_1, \ldots, i_k$ & k cột $j_1, \ldots, j_k$ của ma trận A lập nên 1 ma trận cỡ k, được gọi là 1 *ma trận con cỡ k của A*, & định thức của ma trận con đó, được ký hiệu là $D_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}$, được gọi là 1 *định thức con cỡ k của A*.

Nếu xóa tất cả các hàng $i_1, \ldots, i_k$ & các cột $j_1, \ldots, j_k$ thì phần còn lại của ma trận A lập nên 1 ma trận vuông cỡ $n-k$, mà định thức của nó được ký hiệu là $\overline{D}_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}$ & được gọi là *định t hức con bù* của $D_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}$. Gọi $(-1)^{s(I,J)}\overline{D}_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}$ là *phần bù đại số* của $D_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}$ (trong định thức của A), với $s(I,J) \coloneqq \sum_{n=1}^k i_n + j_n = (i_1 + \cdots + i_k) + (j_1 + \cdots + j_k)$.

Định lý 4 (Khai triển Laplace, [Hưn22], Định lý 5.3, pp. 148–149). *Giả sử đã chọn ra k cột (resp., k hàng) trong 1 định thức cỡ n ($1 \le k < n$). Khi đó, định thức đã cho bằng tổng của tất cả các tích của các định thức con cỡ k lấy ra từ k cột (resp., k hàng) đã chọn với phần bù đại số của chúng. Nói rõ hơn: (i) Công thức khai triển định thức theo k cột $j_1 < \cdots < j_k$:*

$$\det A = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} (-1)^{(s(I,J))} D_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k} \overline{D}_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}.$$

(ii) Công thức khai triển định thức theo k hàng $i_1 < \cdots < i_k$:

$$\det A = \sum_{j_1 < \cdots < j_k} (-1)^{(s(I,J))} D_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k} \overline{D}_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}.$$

Bài toán 3 (Định thức Vandermonde). *Tính định thức Vandermonde*

$$D_n \coloneqq \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Hint. Làm cho hầu hết các phần tử của hàng cuối của D_n trở thành 0 bằng cách lấy cột thứ $n-1$ nhân với $-x_n$ rồi cột vào cột n, rồi lấy cột thứ $n-2$ nhân với $-x_n$ rồi cộng vào cột $n-1$, ..., cuối cùng lấy cột thứ nhất nhân với $-x_n$ rồi cộng vào cột 2, i.e., $\mathbf{c}_i = \mathbf{c}_i + (-x_n)\mathbf{c}_{i-1} = \mathbf{c}_i - x_n\mathbf{c}_{i-1}$ với $i = n, n-1, \ldots, 2$ (chạy lui). Khai triển Laplace theo hàng thứ n, đưa các thừa số chung của mỗi hàng ra ngoài dấu định thức, được công thức truy toán/hồi: $D_n = (x_n - x_1)(x_n - x_2)\cdots(x_n - x_{n-1})D_{n-1} = \prod_{i=1}^{n-1}(x_n - x_i)D_{n-1}$. Quy nạp với $D_1 = 1$ được

$$D_n = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j),\ \forall n \in \mathbb{N}^\star. \tag{Vandermonde}$$

1 ứng dụng quan trọng của khai triển Laplace là công thức tính ma trận nghịch đảo:

Định lý 5 (Công thức tính ma trận nghịch đảo, [Hưn22], Định lý 5.4, p. 152). *(i) Nếu ma trận vuông $A = (a_{ij}) \in M(n\times n, \mathbb{F})$ có định thức khác 0 thì A khả nghịch &*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix},$$

với $\tilde{a}_{ij}$ là phần bù đại số của a_{ij} trong định thức của A. (ii) Ma trận phụ hợp *(adjugate matrix) của A được định nghĩa bởi:*

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix},$$

thì $A\mathrm{adj}(A) = \mathrm{adj}(A)A = \det A I_n$, *(i) viết lại thành* $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\mathrm{adj}(A)$.

For more properties of adjugate matrix, see, e.g., Wikipedia/adjugate matrix.

Bài toán 4 ([VMS24], 2.6, p. 26, ĐH Trà Vinh)**.** *Cho $A \in M_n(\mathbb{K})$. Chứng minh: (a) Nếu $A^{-1} = A$ thì $|\det(I-A)|(|\det(I-A)|-2^n) = 0$. (b) Nếu $A^{-1} = 4A$ thì $|\det(A^{2k+1}-A)| = \left(\frac{4^k-1}{2^{2k+1}}\right)^n$, $\forall k \in \mathbb{N}^\star$. (c) Mở rộng bài toán cho các ma trận $A \in M_n(\mathbb{K})$ thỏa mãn $A^{-1} = aA$ với $a \in \mathbb{R}$ & $a \in \mathbb{C}$.*

Bài toán 5 ([VMS24], 2.7, p. 27, ĐH Trà Vinh)**.** *Giả sử có cac số tự nhiên mà mỗi số gồm 3 chữ số dạng $\overline{a_1a_2a_3} \vdots 13, \overline{b_1b_2b_3} \vdots 13, \overline{c_1c_2c_3} \vdots 13$. Chứng minh*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \vdots 13.$$

3.1.2 Rank of a matrix – Hạng của ma trận

Hạng của 1 ma trận là hạng của hệ vector cột (hoặc hệ vector hàng) của nó. Định lý sau cho phép tính hạng của ma trận thông qua định thức:

Định lý 6 (Công thức tính hạng của ma trận, [Hưn22], Định lý 6.1, p. 153, Hệ quả 6.2, p. 154)**.** *(i) Giả sử A là 1 ma trận m hàng n cột, với các yếu tố trong trường $\mathbb{F}$. Khi đó, hạng của ma trận A bằng cỡ lớn nhất của các định thức con khác 0 của A. Nói rõ hơn,* rank $A = r$ *nếu có 1 định thức con cỡ r của A khác* 0*, & mọi định thức con cỡ $> r$ (nếu có) của A đều bằng* 0*. (ii) Hạng của 1 ma trận bằng hạng của hệ các vector hàng của nó.*

Quan hệ giữa định thức & hạng:

$$\forall A \in M(\mathbb{F}, n\times n),\ \det A \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rank} A = n,\ \det A = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rank} A < n.$$

3.1.3 System of linear equations & Cramer rule – Hệ phương trình tuyến tính & quy tắc Cramer

Định nghĩa 3. *1 hệ thống có dạng*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

trong đó $a_{ij}, b_i \in \mathbb{F}$ là các phần tử cho trước, được gọi là 1 hệ phương trình tuyến tính *gồm $m \in \mathbb{N}^\star$ phương trình với $n \in \mathbb{N}^\star$ ẩn $x_1, \ldots, x_n$. Ký hiệu*

$$A = (a_{ij})_{m\times n},\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Khi đó, hệ phương trình (1) *có thể được viết dưới dạng phương trình vector:*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{2}$$

1 nghiệm *của hệ này là 1 vector $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{F}^n$ để $A\mathbf{x}^0 = \mathbf{b}$. 1 hệ phương trình có ít nhất 1 nghiệm được gọi là 1* hệ phương trình tương thích. *Hệ phương trình $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ được gọi là* hệ phương trình tuyến tính thuần nhất *liên kết với hệ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.*

Cảm nhận: Hệ phương trình tuyến tính (2) có nghiệm duy nhất nếu số phương trình của hệ bằng số ẩn, & không có phương trình nào của hệ là "hệ quả" của các phương trình khác (i.e., tổ hợp tuyến tính của các phương trình khác).

Định nghĩa 4 (Hệ không suy biến/Cramer, [Hưn22], Định nghĩa 7.1, p. 156)**.** *Hệ phương trình tuyến tính* (2) *được gọi là 1* hệ không suy biến *(hay 1* hệ Cramer*) nếu nó có số phương trình bằng số ẩn (i.e., nếu A là 1 ma trận vuông) & nếu* $\det A \neq 0$.

Định lý 7 (Tính giải được duy nhất của hệ Cramer, [Hưn22], Định lý 7.2, p. 156)**.** *Hệ phương trình tuyến tính không suy biến* (2) *có 1 nghiệm duy nhất, được tính bằng công thức*

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A},\ j = 1, \ldots, n,$$

với A_j là ma trận nhận được từ ma trận A bằng cách thay cột thứ j bởi cột hệ số tự do $\mathbf{b}$.

3.1.4 System of linear equations & Gauss elimination method – Hệ phương trình tuyến tính & phương pháp khử Gauss

Phương pháp Cramer chỉ áp dụng cho được (range of applicability) cho các hệ phương trình tuyến tính không suy biến (nói riêng, các hệ này có số phương trình bằng số ẩn) (why? vì nếu hệ suy biến, tức hoặc ma trận A không vuông, khi đó $\det A$ không có nghĩa, hoặc $\det A = 0$, khi đó công thức nghiệm cho bởi quy tắc Cramer không xác định vì mẫu số bằng 0). Nhưng rất nhiề hệ phương trình tuyến tính ta gặp, đặc biệt là trong thực tế, lại suy biến. Phương pháp khử Gauss (Gauss elimination method) có ưu điểm là có thể áp dụng cho hệ phương trình tuyến tính tùy ý. Nhược điểm của phương pháp khử Gauss là không đưa ra đuọc thông tin nào về nghiệm của hệ phương trình trước khi giải xong hệ đó.

Về mặt trực giác, phương pháp Cramer mang tính chất toán học để xác định được cấu trúc nghiệm của hệ phương trình tuyến tính không suy biến hơn, còn phương pháp khử Gauss mang tính chất của 1 thuật toán, 1 quy trình hơn là 1 phương pháp toán dùng để xác định cấu trúc nghiệm của hệ phương trình tuyến tính.

Định nghĩa 5. *2 hệ phương trình được gọi là* tương đương *nếu nghiệm của hệ này cũng là nghiệm của hệ kia & ngược lại, i.e., 2 hệ phương trình có cùng tập nghiệm.*

Định lý 8 (3 phép biến đổi sơ cấp)**.** *Nếu ta áp dụng các phép biến đổi sau:*

(i) Đổi chỗ 2 phương trình của hệ.

(ii) Nhân 1 phương trình của hệ với 1 vô hướng khác 0 *thuộc trường* $\mathbb{F}$.

(iii) Cộng vào 1 phương trình 1 tổ hợp tuyến tính của các phương trình khác trong hệ.

((i)–(iii) được gọi là các phép biến đổi sơ cấp*), trên 1 hệ phương trình tuyến tính, thì ta nhận được 1 hệ phương trình tuyến tính tương đương với hệ ban đầu.*

Xét 1 hệ phương trình tuyến tính tổng quát (1). Gọi $A = (a_{ij})_{m\times n}$ là *ma trận các hệ số* &

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

là *ma trận các hệ số mở rộng* của hệ phương trình (1). Giả sử có 1 hê số nào đó $a_{ij} \neq 0$. W.l.o.g. (nếu cần, đổi chỗ các phương trình & đánh số lại các ẩn) có thể coi $a_{11} \neq 0$. Khi đó, nhân phương trình thứ nhất với $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ rồi cộng vào phương trình thứ i ($i = 2,\ldots,m$), nhận được hệ phương trình tương đương. Lặp lại lập luận trên đối với hệ còn gồm $n-1$ phương trình cuối với các ẩn $x_2,\ldots,x_n$. Sau 1 số bước hữu hạn, nhận được 1 hệ tương đương với ma trận mở rộng có dạng $(\overline{A}|\overline{b})$ với $\overline{A}$ là 1 ma trận dạng bậc thang.

Tương ứng với các phép biến đổi sơ cấp trên hệ phương trình tuyến tính là các phép *biến đổi sơ cấp* trên ma trận:

1. Đổi chỗ 2 hàng (hoặc 2 cột) của ma trận.
2. Nhân 1 hàng (hoặc 1 cột) của ma trận với 1 vô hướng khác 0.
3. Cộng vào 1 hàng (hoặc 1 cột) 1 tổ hợp tuyến tính của các hàng (resp., các cột) khác.

Vì các phép biến đổi sơ cấp không làm thay đổi hạng của ma trận (why?) nên dẫn tới 1 cách tính hạng của ma trận giàu tính thực hành: Mỗi ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ sau 1 số hữu hạn phép biến đổi sơ cấp đều có thể đưa về 1 ma trận dạng tam giác trên, số dòng có chứa phần tử $\neq 0$ bằng $\operatorname{rank} A$.

Remark 3 (Ứng dụng của phương pháp khử Gauss để tìm ma trận nghịch đảo)**.** *Để tìm nghịch đảo (nếu có) của ma trận* $A = (a_{ij})_{n\times n}$, *lập ma trận* $n\times 2n$: (A, I_n). *Dùng 2 loại phép biến đổi hàng:*

(r1) Nhân 1 hàng với 1 vô hướng khác 0,

(r2) Cộng vào 1 hàng 1 tổ hợp tuyến tính của các hàng khác,

để đưa ma trận (A, I_n) *về dạng* (I_n, B). *Khi đó,* $B = A^{-1}$. *Ma trận* A *không có nghịch đảo* $\Leftrightarrow$ *ma trận* (A, I_n) *không thể đưa về ma trận dạng* (I_n, B) *bằng 2 loại phép biến đổi hàng (r1) & (r2).*

3.1.5 Cấu trúc nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

See, e.g., [Hưn22, Chap. 3, §9: Cấu trúc nghiệm của hệ phương trình tuyến tính, pp. 163–165].

Xét các hệ phương trình tuyến tính thuần nhất & không thuần nhất liên kết với nhau $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ & $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (2), với $A = (a_{ij})_{m\times n} \in M(m\times n, \mathbb{F}), \mathbf{b} \in \mathbb{F}^m$ (cả 2 hệ phương trình đều gồm m phương trình & n ẩn).

Định lý 9 ([Hưn22], Định lý 9.1, p. 163)**.** *Tập hợp L tất cả các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất* $Ax = 0$ *là 1 không gian vector con của* $\mathbb{F}^n$, *có số chiều thỏa mãn hệ thức* $\dim L = n - \operatorname{rank} A$.

$L \coloneqq \operatorname{Ker} \tilde{A}$ với $\tilde{A} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, i.e., L là hạt nhân/hạch của ánh xạ tuyến tính $\tilde{A}$.

Định lý 10 ([Hưn22], Định lý 9.2, p. 164)**.** *Giả sử L là không gian vector con gồm các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, *&* $\mathbf{x}^0$ *là 1 nghiệm của hệ* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. *Khi đó tập hợp các nghiệm của hệ* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *là* $\mathbf{x}^0 + L = \{\mathbf{x}^0 + \mathbf{a} | \mathbf{a} \in L\}$.

Định nghĩa 6 (Nghiệm riêng & nghiệm tổng quát của hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất)**.** *Với các giả thiết của định lý trên,* $\mathbf{x}^0$ *được gọi là 1* nghiệm riêng *của hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. *Còn* $\mathbf{x}^0 + \mathbf{a}$ *với* $\mathbf{a} \in L$, *được gọi là* nghiệm tổng quát *của hệ phương trình đó.*

Định lý 11 ([Hưn22], Định lý 9.4: Tiêu chuẩn Kronecker–Capelli, p. 164)**.** *Hệ phương trình tuyến tính* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *có nghiệm* $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A}$ *với* $\overline{A} = (A|\mathbf{b})$ *là ma trận các hệ số mở rộng của hệ.*

Bài toán 6 (VMC2023B1)**.** *(a) Cho $x \in \mathbb{R}$. Tính* $\det A$ *theo x với*

$$A = \begin{pmatrix} x & 2022 & 2023 \\ 2022 & 2023 & x \\ 2023 & x & 2022 \end{pmatrix}.$$

(b) Tìm $x \in \mathbb{R}$ để $\operatorname{rank} A < 3$. *Tính* $\operatorname{rank} A$ *với x vừa tìm được.*

Hint. Tổng mỗi dòng & mỗi cột của ma trận A đều bằng $x + 2022 + 2023$.

Giải. (a) Đặt $a \coloneqq 2022$. Cộng hàng 2 & hàng 3 vào hàng 1 được:

$$\begin{vmatrix} x & a & a+1 \\ a & a+1 & x \\ a+1 & x & a \end{vmatrix} = (x+2a+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & x \\ a+1 & x & a \end{vmatrix} = (x+2a+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & x-a \\ a+1 & x-a-1 & -1 \end{vmatrix} = (x+2a+1)\begin{vmatrix} 1 & x-a \\ x-a-1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= (x+2a+1)[-1-(x-a)(x-a-1)] = -(x+2a+1)(x^2-(2a+1)x+a^2+a+1) = -(x+4045)(x^2-4045x+4090507).$$

(b) $\operatorname{rank} A < 3 \Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow (x+4045)(x^2-4045x+4090507) \Leftrightarrow x = -4045$ vì $\Delta = (2a+1)^2 - 4(a^2+a+1) = -3 < 0$ nên vô nghiệm thực. Khi $x = -4045$, $\operatorname{rank} A$ bằng hạng của ma trận

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2022 & 2023 & -4045 \\ 2023 & -4045 & 2022 \end{pmatrix}$$

Vậy $\operatorname{rank} A = 2$ khi $x = -4045$. □

Nhận xét 1. *(i) Việc đặt $a \coloneqq 2022$ giúp thấy được cấu trúc chung của ma trận, không bị ảnh hưởng bởi các tính toán số cụ thể, đặc biệt giúp đơn giản hóa việc tính biệt thức Δ để chứng minh nhân tử phương trình bậc 2 trong* $\det A$ *vô nghiệm thực. (ii) Có thể tính* $\det A$ *bằng thư viện* `SymPy` *của Python bằng cách chạy:*

```
from sympy.matrices import Matrix, eye, zeros, ones, diag, GramSchmidt
from sympy import factor

# VMC2023B1
from sympy.abc import x, a
A = Matrix([[x, a, a + 1], [a, a + 1, x], [a + 1, x, a]])
detA = A.det()
print(detA)
print(factor(detA))
```

để thu được:

```
-2*a**3 + 3*a**2*x - 3*a**2 + 3*a*x - 3*a - x**3 - 1
-(2*a + x + 1)*(a**2 - 2*a*x + a + x**2 - x + 1)
```

i.e., $\det A = -(x+2a+1)(x^2-(2a+1)x+a^2+a+1)$ *như đã tính.*

Bài toán 7 (VMC2023B2)**.** *Giả sử $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ là ánh xạ tuyến tính cho bởi:*

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + \lambda x_2 - x_3 + 2x_4, 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 + 5x_4, x_1 + 10x_2 - 6x_3 + x_4),$$

với $\lambda \in \mathbb{R}$: tham số. (a) Với $\lambda = 3$, tìm: (a1) 1 cơ sở & số chiều của không gian hạt nhân Ker. *(a2) 1 cơ sở & số chiều của không gian ảnh* $\operatorname{Im}(f)$. *(b) Tìm* $\dim \operatorname{Im} f$ *theo λ.*

Giải. Ánh xạ tuyến tính f có ma trận trong cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$ & $\mathbb{R}^3$ là:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Với $\lambda = 3$, hạt nhân $\operatorname{Ker} f$ là không gian nghiệm của phương trình thuần nhất với ma trận hệ số:

$$A(3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix},$$

Dùng phép biến đổi sơ cấp trên dùng suy ra $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ với 1 cơ sở $(-8,5,7,0),(-17,1,0,7)$. Suy ra $\dim \operatorname{Im} f = n - \dim \operatorname{Ker} f = 4-2 = 2$. Vì mỗi vector thuộc $\operatorname{Im} f$ là 1 tổ hợp tuyến tính của các vector cột của $A(3)$ nên ảnh của ánh xạ f là không gian cong sinh bởi các vector cột. Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng cho $A^\top$ suy ra 1 cơ sở của $operatornameImf$ là $(1,2,1),(0,1,-1)$. (b) $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} A(\lambda)$. Dùng phép biến đổi sơ cấp dòng thu được:

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & -21 & \lambda+12 & 3 \\ 0 & 0 & \dfrac{(\lambda+5)(\lambda-3)}{21} & \dfrac{\lambda-3}{7} \end{pmatrix}.$$

Suy ra $\operatorname{rank} A = 2$ nếu $\lambda = 3$ & $\operatorname{rank} A = 3$ nếu $\lambda \neq 3$. Vậy

$$\dim \operatorname{Im} f = \begin{cases} 2 & \text{if } \lambda = 3, \\ 3 & \text{if } \lambda \neq 3. \end{cases}$$

□

Remark 4. *Câu (b) có thể dùng phép biến đổi sơ cấp trên dòng cho $A^\top$ vì $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^\top$.*

Bài toán 8 (VMC2024A1B1)**.** *Cho $a \in \mathbb{R}$, A là 1 ma trận phụ thuộc vào a:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & a+2 & 0 \\ a+3 & 1 & 0 & a+2 \\ a+2 & 0 & 1 & a+1 \\ 0 & a+2 & a+3 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

(a) Tìm $\operatorname{rank} A$ khi $a = -1$. (b) Tìm tất cả $a \in \mathbb{R}$ để $\det A > 0$. (c) Biện luận số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $AX = 0$ theo a với $X = [x,y,z,t]^\top$.

Chứng minh. (a) Khi $a = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Biến đổi sơ cấp trên dòng, đươc $\operatorname{rank} A = 3$. (b) Dùng công thức tính định thức ma trận để thu được $\det A = -4a^2 - 16a - 12 = -4(a+1)(a+3)$, nên $\det A > 0 \Leftrightarrow -4(a+1)(a+3) > 0 \Leftrightarrow a \in (-3,-1)$. (c) Nếu $a = -1$, $\operatorname{rank} A = 3 \Rightarrow \dim L = 4 - \operatorname{rank} A = 4 - 3 = 1$. Nếu $a = -3$, tính được $\operatorname{rank} A = 3$, nên $\dim L = 4 - \operatorname{rank} A = 4 - 3 = 1$. Nếu $a \notin \{-1,-3\}$ thì $\det A = -4(a+1)(a+3) \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rank} A = 4 \Rightarrow \dim L = 4 - \operatorname{rank} A = 4 - 4 = 0$. □

Nhận xét 2. *Run*

```
# VMC2024A1B1
Aa = np.matrix([[1,0,1,0], [2,1,0,1], [1,0,1,0], [0,1,2,1]])
print(np.linalg.matrix_rank(Aa))
A = Matrix([[1,a + 1,a + 2,0],[a + 3,1,0,a + 2],[a + 2,0,1,a + 1],[0,a + 2,a + 3,1]])
detA = A.det()
print(detA)
print(factor(detA))
```

to obtain

```
3
-4*a**2 - 16*a - 12
-4*(a + 1)*(a + 3)
```

Bài toán 9 (VMC2023B4)**.** *Với mỗi ma trận vuông A có phần tử là các số phức, định nghĩa:*

$$e^A := \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{A^n}{n!}.$$

Quy ước $0! = 1, A^0 = I$, ma trận giới hạn ở vế phải có phần tử là giới hạn của phần tử tương ứng của các ma trận tổng $S_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{A^n}{n!}$. Ma trận giới hạn này luôn tồn tại. (a) Với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

tìm 1 ma trận khả nghịch C để $C^{-1}AC$ là ma trận đường chéo. (b) Tìm các phần tử của ma trận e^A với A là ma trận cho ở (a).

Bài toán 10 (VMC2023A4)**.** *Với mỗi ma trận vuông A có phần tử là các số phức, định nghĩa*

$$\sin A = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}. \tag{5}$$

(Ở đây ma trận giới hạn có phần tử là giới hạn của phần tử tương ứng của các ma trận tổng $S_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}$ *. Ma trận giới hạn này luôn tồn tại.) (a) Tìm các phần tử của ma trận* $\sin A$ *với*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

(b) Cho $x, y \in \mathbb{R}$ *bất kỳ, tìm các phần tử của ma trận* $\sin A$ *với*

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \tag{7}$$

theo x, y*. (c) Tồn tại hay không 1 ma trận vuông A cấp 2 với phần tử là các số thực sao cho*

$$\sin A = \begin{pmatrix} 1 & 2023 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}? \tag{8}$$

Bài toán 11 (VMC2023A5)**.** *Ký hiệu* P_n *là tập hợp tất cả các ma trận khả nghịch A cấp n sao cho các phần tử của A & A^{-1} đều bằng 0 hoặc 1. (a) Với* $n = 3$*, tìm tất cả các ma trận thuộc* P_3*. (b) Tính số phần tử của* P_n *với* $n \in \mathbb{N}^\star$ *tùy ý.*

Chứng minh. (a) Đặt $A = (a_{ij})_{3\times 3}, A^{-1} = (b_{ij})_{3\times 3}$, kết hợp với A, A_{-1} đều khả nghịch, có mỗi hàng & mỗi cột đều có ít nhất 1 số 1. Có $1 = a_{k1}b_{1k} + a_{k2}b_{2k} + a_{k3}b_{3k}$ với $k = 1, 2, 3$, nên tồn tại duy nhất $m \in \{1, 2, 3\}$ để $a_{km} = b_{mk} = 1$. □

3.2 Vector space – Không gian vector

Giả sử V, W: 2 không gian vector trên trường $\mathbb{F}$ (see, e.g., [Hưn22, Chap. 2, §2: Ánh xạ tuyến tính, pp. 100–110]).

Định nghĩa 7 (Ánh xạ tuyến tính)**.** *Ánh xạ* $f : V \to W$ *được gọi là 1* ánh xạ tuyến tính *(hoặc rõ hơn là 1* ánh xạ $\mathbb{F}$-tuyến tính*), nếu*

$$f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta),\ \forall \alpha, \beta \in V, \tag{9}$$

$$f(a\alpha) = af(\alpha),\ \forall a \in \mathbb{F}. \tag{10}$$

Ánh xạ tuyến tính cũng được gọi là đồng cấu tuyến tính*, hay* đồng cấu *cho đơn giản.*

2 điều kiện trong định nghĩa ánh xạ tuyến tính ⇔ điều kiện:

$$f(\alpha a + \beta b) = af(\alpha) + bf(\beta),\ \forall \alpha, \beta \in V,\ \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Định lý 12 (Tính chất cơ bản của ánh xạ tuyến tính)**.** *Giả sử* $f : V \to W$ *là 1 ánh xạ tuyến tính. Khi đó: (i)* $f(0) = 0$*. (ii)* $f(-\alpha) = -f(\alpha)$, $\forall \alpha \in V$*. (iii)*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(\alpha_i),\ \forall a_i \in \mathbb{F},\ \forall \alpha_i \in V, \forall i = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Ví dụ 2 (Ánh xạ tuyến tính cơ bản)**.**

(i) Ánh xạ không $0 : V \to W$, $0(\alpha) = 0$, $\forall \alpha \in V$*. Thế còn ánh xạ hằng* $C : V \to W$, $C(\alpha) = C$, $\forall \alpha \in V$ *với* $C \in \mathbb{F}$ *cho trước?*

(ii) Ánh xạ đồng nhất (identity mapping) $\mathrm{id}_V : V \to V$, $\mathrm{id}_V(\alpha) = \alpha$, $\forall \alpha \in V$*.*

(iii) Đạo hàm hình thức

$$\frac{d}{dX} : \mathbb{F}[X] \to \mathbb{F}[X],\ \frac{d}{dX}\sum_{i=0}^{n} a_i X^i = \sum_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)a_{i+1}X^i. \tag{13}$$

(iv) Tích phân hình thức

$$\int \mathrm{d}X : \mathbb{F}[X] \to \mathbb{F}[X],\ \int \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \,\mathrm{d}X = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} X^{i+1}. \tag{14}$$

(v) Giả sử $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{F})$*,*

$$\widetilde{A} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m,\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{15}$$

.

(vi) Các phép chiếu

$$\mathrm{pr}_i : V_1 \times V_2 \to V_i,\ \mathrm{pr}_i(v_1, v_2) = v_i,\ \forall i = 1, 2, \tag{16}$$

hay tổng quát hơn với $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$:

$$\mathrm{pr}_i : \bigtimes_{i=1}^{n} V_i = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n,\ \mathrm{pr}_i(v_1, \ldots, v_n) = v_i,\ \forall i = 1, \ldots, n. \tag{17}$$

See also, e.g., Wikipedia/linear map.

Hạt nhân & ảnh của 1 đồng cấu là 2 không gian vector đặc biệt quan trọng với việc khảo sát đồng cấu đó, see, e.g., [Hưn22, Chap. 2, §3: Hạt nhân & ảnh của đồng cấu, pp. 110–116].

Định nghĩa 8 (Hạt nhân/hạch & ảnh của đồng cấu)**.** *Giả sử $f : V \to W$ là 1 đồng cấu.*

(a) $\mathrm{Ker}(f) \coloneqq f^{-1}(0) = \{x \in V | f(x) = 0\} \subset V$ *được gọi là* hạt nhân *(hay* hạch*) của f. Số chiều của* $\mathrm{Ker}(f)$ *được gọi là* số khuyết *của f.*

(b) $\mathrm{Im}(f) \coloneqq f(V) = \{f(x) | x \in V\} \subset W$ *được gọi là* ảnh *của f. Số chiều của* $\mathrm{Im}(f)$ *được gọi là* hạng *của f & được ký hiệu là* $\mathrm{rank}(f)$.

Định lý 13 (Điều kiện cần & đủ để 1 đồng cấu là 1 toàn cấu)**.** *Đồng cấu $f : V \to W$ là 1 toàn cấu* $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(f) = \dim W$.

Định lý 14 (Điều kiện cần & đủ để 1 đồng cấu là 1 đơn cấu)**.** *Đối với đồng cấu $f : V \to W$ các điều kiện sau là tương đương:*

(i) f là 1 đơn cấu.

(ii) $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

(iii) Ảnh bởi f của mỗi hệ vector độc lập tuyến tính là 1 hệ vector độc lập tuyến tính.

(iv) Ảnh bởi f của mỗi cơ sở của V là 1 hệ vector độc lập tuyến tính.

(v) Ảnh bởi f của 1 cơ sở nào đó của V là 1 hệ vector độc lập tuyến tính.

(vi) $\mathrm{rank}(f) = \dim V$.

Bài toán 12 (VMC2023A1)**.** *Ký hiệu $\mathbb{R}[X]_{2023}$ là $\mathbb{R}$-không gian vector các đa thức 1 biến với bậc ≤ 2023. Cho f là ánh xạ đặt tương ứng mỗi đa thức với đạo hàm cấp 2 của nó: $f : \mathbb{R}[X]_{2023} \to \mathbb{R}[X]_{2023}$, $p(X) \mapsto p''(X)$. Đặt $g = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (870 lần) là ánh xạ hợp của 870 lần ánh xạ f. (a) Chứng minh g là 1 ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}[X]_{2023}$ vào chính nó. (b) Tìm số chiều & 1 cơ sở của không gian ảnh $\mathrm{Im}\, g$ & của không gian hạt nhân $\mathrm{Ker}\, g$.*

Chứng minh. (a) Có $f(\alpha p(X) + \beta q(X)) = (\alpha p(X) + \beta q(X))'' = \alpha p''(X) + \beta q''(X) = \alpha f(p(X)) + \beta f(q(X))$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall p(X), q(X) \in \mathbb{R}[X]_{2023}$, nên ánh xạ f là ánh xạ tuyến tính, nên hợp thành của $n \in \mathbb{N}^\star$ lần của ánh xạ f, i.e., $f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n lần) cũng là 1 ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}[X]_{2023}$ vào chính nó. Nói riêng, g là 1 ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}[X]_{2023}$ vào chính nó. (b) Ảnh của g được sinh bởi các vector $g(1), g(X), \ldots, g(X^{2023})$ (vì $(1, X, X^2, \ldots, X^{2023})$ là 1 cơ sở của khong gian vector $\mathbb{R}[X]_{2023}$ các đa thức $p(X)$ có $\deg p \le 2023$. Nhận thấy

$$g(X^k) = \begin{cases} 0 & \text{if } k < 1740, \\ k(k-1)\cdots(k-1739)X^{k-1740} & \text{if } k \ge 1740, \end{cases}$$

nên 1 cơ sở của $\mathrm{Im}\, g$ là $(1, X, X^2, \ldots, X^{283})$, nên $\dim \mathrm{Im}\, g = 284$.

Với $p(X) \in \mathbb{R}[X]_{2023}$ bất kỳ, $p(X)$ sẽ có dạng $p(X) = \sum_{i=1}^{2023} a_i X^i = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_{2023} X^{2023}$, thì $g(p)$ có dạng

$$g(p)(X) = \sum_{i=1}^{283} b_i X^i = b_0 + b_1 X + \cdots + b_{283} X^{283}.$$

Đa thức $p(X) \in \ker g \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{283} b_i X^i = 0 \Leftrightarrow a_i = 0, \forall i = 1740, \ldots, 2023$, nên 1 cơ sở của $\ker g$ là $(1, X, X^2, \ldots, X^{1739})$ & $\dim \ker g = 1740$. □

Bài toán 13 (Mở rộng VMC2023A1)**.** *Liệu thay các giả thiết trong VMC2023A1 thì bài toán còn đúng/giải được không? (a) Thay $2023, 870$ bởi $n, m \in \mathbb{N}^\star$. (b) Thay ánh xạ đạo hàm cấp 2 bởi ánh xạ đạo hàm cấp $k \in \mathbb{N}^\star$ hoặc tích phân $\int \mathrm{d}x$, tích phân bội $k \in \mathbb{N}^\star$ $\int\int \cdots \int \mathrm{d}x$ (k dấu tích phân).*

Bài toán 14. *Cho $n \in \mathbb{N}^\star$, V là 1 không gian vector, $f : V \to V$ là 1 ánh xạ tuyến tính. Chứng minh $g_n \coloneqq f \circ f \circ \cdots f$ (n lần) cũng là 1 ánh xạ tuyến tính từ V vào chính nó.*

Bài toán 15 (VMC2023A2)**.** *(a) 1 thành phố có 2 nhà máy: nhà máy điện (E) & nhà máy nước (W). Để nhà máy (E) sản xuất điện thì nó cần nguyên liệu đầu vào là điện do chính nó sản xuất trước đó & nước của nhà máy (W). Tương tự, để nhà máy (W) sản xuất nước thì nó cần đến nước do chính nó sản xuất cũng như điện của nhà máy (E). Cụ thể:*

- *Để sản xuất được lượng điện tương đương 1 đồng, nhà máy (E) cần lượng điện tương đương 0.3 đồng mà nó sản xuất được trước đó & lượng nước tương đương 0.1 đồng từ nhà máy (W);*

- *Để sản xuất được lượng nước tương đương 1 đồng, nhà máy (W) cần lượng điện tương đương 0.2 đồng từ nhà máy (E) & lượng nước tương đương 0.4 đồng do chính nó sản xuất trước đó.*

Chính quyền thành phố yêu cầu 2 nhà máy trên cung cấp đến được với người dân lượng điện tương đương 12 tỷ đồng & lương nước tương đương 8 tỷ đồng. Hỏi thực tế mỗi nhà máy cần sản xuất tổng cộng lượng điện & lượng nước tương đương với bao nhiêu tỷ đồng để cung cấp đủ nhu cầu của người dân?

(b) Cho $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ là ma trận thỏa mãn các phần tử đều là số thực không âm & tổng các phần tử trên mỗi cột của A đều < 1. Với $\mathbf{d} = (d_1, d_2)^\top$ là 1 vector tùy ý, chứng minh tồn tại duy nhất 1 vector cột $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top$ sao cho $\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{d}$.

Bài toán 16 (VMC2023A3)**.** *Cho $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ thỏa $x^4 - 2x^3 - 1 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$. (a) Chứng minh $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ đôi một khác nhau. (b) Chứng minh $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3, \delta^3$ đôi một khác nhau. (c) Tính $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3$. (d)* Mở rộng bài toán cho các đa thức khác.*

Lemma 1 (Điều kiện cần & đủ của nghiệm bội của đa thức)**.** *Cho $m, n \in \mathbb{R}, m \le n$, $P(x) \in \mathbb{R}[x], \deg P = n$. $x = x_0 \in \mathbb{R}$ là 1 nghiệm bội m của $P(x)$ khi & chỉ khi $P(x_0) = P'(x_0) = P''(x_0) = \cdots = P^{(m)}(x_0) = 0$.*

Chứng minh. Giả sử $x = x_0 \in \mathbb{R}$ là 1 nghiệm bội m của $P(x)$, thì $P(x)$ sẽ có dạng $P(x) = (x-x_0)^m g(x)$ với $g(x) \in \mathbb{R}[x], \deg g = \deg P - m = n - m \ge 0$. Tính các đạo hàm $P'(x), P''(x), \ldots, P^{(m)}(x)$ (có thể sử dụng quy tắc Leibniz tổng quát để tính đạo hàm, see, e.g., Wikipedia/general Leibniz rule) để suy ra kết luận. □

Hint. (a) Đặt $P(x) = x^4 - 2x^3 - 1$, có $P'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x-3$ chỉ có 2 nghiệm $x = 0$ (bội 2) & $x = \frac{3}{2}$ (bội 1), mà $P(0) = -1 \ne 0, P(\frac{3}{2}) = -\frac{43}{16} \ne 0$ nên $0, \frac{3}{2}$ đều không phải là nghiệm của $P(x)$, suy ra các nghiệm $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ của $P(x)$ là phân biệt. (b) □

Bài toán 17 (Đại học Đồng Tháp)**.** *Cho dãy các không gian vector hữu hạn chiều trên trường $\mathbb{K}$ & các ánh xạ tuyến tính $0 \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \xrightarrow{f_n} 0$ thỏa $\operatorname{Im} f_i = \operatorname{Ker} f_{i+1}$, $\forall i = 0, 1, \ldots, n-1$. Chứng minh $\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \dim V_i = \dim V_1 - \dim V_2 + \dim V_3 - \cdots + (-1)^{n-1} \dim V_n = 0$.*

Định nghĩa 9 (Tổng đan dấu của dãy số)**.** *Cho dãy số $(a_n)_{n=1}^\infty$, tổng đan dấu thứ n của (a_n) được định nghĩa bởi công thức $S_{\pm,n} \coloneqq \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_i$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$.*

3.3 Miscellaneous Linear Algebra Problems

Bài toán 18 ([VMS24], 1.1., p. 25, ĐH CNTT)**.** *Cho $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ thỏa mãn $A^{2024} = B^{2023} = I$, $AB = BA$. Chứng minh $A + B + I$ khả nghịch.*

Hint. Sử dụng kết quả "Nếu hệ phương trình tuyến tính $AX = 0$ chỉ có nghiệm tầm thường $X = 0$ thì ma trận A khả nghịch".

Chứng minh. Xét hệ phương trình tuyến tính $(A+B+I)X = 0$ hay $(B+I)X = -AX$, thì $-A^2X = A(B+I)X = (AB+A)X = (BA+A)X = (B+I)AX = -(B+I)^2X$, quy nạp được $(B+I)^nX = (-1)^nA^nX$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Vì $A^{2024} = I$ nên $(B+I)^{2024}X = (-1)^{2024}A^{2024}X = X$, i.e., $((B+I)^{2024} - I)X = 0$. Vì $B^{2023} = I$ nên $(B^{2023} - I)X = 0$. 2 đa thức $P(x) = (x+1)^{2024} - 1, Q(x) = x^{2023} - 1$ lần lượt có 2 tập nghiệm $\left\{-1 + \cos\dfrac{2k\pi}{2024} + i\sin\dfrac{2k\pi}{2024}; k = 0, 1, \ldots, 2023\right\} = \left\{-1 + \cos\dfrac{k\pi}{1012} + i\sin\dfrac{k\pi}{1012}; k = 0, 1, \ldots, 2023\right\}$ & $\left\{\cos\dfrac{2k\pi}{2023} + i\sin\dfrac{2k\pi}{2023}; k = 0, 1, \ldots, 2022\right\}$, nên $P(x), Q(x)$ không có nghiệm chung, suy ra $P(x), Q(x)$ là 2 đa thức nguyên tố cùng nhau, nên tồn tại 2 đa thức $R, S \in \mathbb{R}[x]$ thỏa $R(x)P(x) + S(x)Q(x) = 1$. Khi đó $X = (R(B)P(B) + S(B)Q(B))X = R(B)P(B)X + S(B)Q(B)X = R(B)(P(B)X) + S(B)(Q(B)X) = 0$, nên hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $(A+B+I)X = 0$ chỉ có nghiệm tầm thường $X = 0$, suy ra $A + B + I$ khả nghịch. □

Bài toán 19 (Mở rộng [VMS24], 1.1., p. 25, ĐH CNTT)**.** *Cho $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ thỏa mãn $A^a = B^b = I$, với $a, b \in \mathbb{N}^\star$, $AB = BA$. (a) Với điều kiện nào của a, b thì $A + B + I$ khả nghịch. (b) Mở rộng cho việc xét tính khả nghịch của ma trận $\alpha A + \beta B + \gamma$ khả nghịch với $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ hoặc $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$.*

Chứng minh. (a) Xét hệ phương trình tuyến tính $(A+B+I)X = 0$, có $(B+I)X = -AX$ & $(A+I)X = -BX$, thì $-A^2X = A(B+I)X = (AB+A)X = (BA+A)X = (B+I)AX = -(B+I)^2X$ & $-B^2X = B(A+I)X = (BA+B)X = (AB+B)X = (A+I)BX = -(A+I)^2X$, quy nạp được $(B+I)^nX = (-1)^nA^nX$ & $(A+I)^nX = (-1)^nB^nX$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Vì $A^a = I$ nên *** □

Định nghĩa 10 (Ma trận đồng dạng)**.** *2 ma trận vuông A, B cùng cỡ $n \times n$ được gọi là* đồng dạng *nếu & chỉ nếu tồn tại 1 ma trận khả nghịch P cỡ $n \times n$ thỏa $B = P^{-1}AP$.*

Ý nghĩa của sự đồng dạng của các ma trận. Các ma trận đồng dạng biểu diễn cùng 1 ánh xạ tuyến tính dưới 2 cơ sở (có thể) khác nhau, với P là ma trận chuyển cơ sở, see, e.g., Wikipedia/ma trận đồng dạng.

Bài toán 20 ([VMS24], 1.2., p. 25, ĐH CNTT)**.** *Cho $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ & đặt các ma trận khối*

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix},\ N = \begin{bmatrix} A+B & 0_n \\ 0_n & A-B \end{bmatrix},\ P = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix},\ Q = \begin{bmatrix} A+iB & 0_n \\ 0_n & A-iB \end{bmatrix},$$

với $i^2 = -1$. Chứng minh M đồng dạng với N & P đồng dạng với Q.

Bài toán 21 ([VMS24], 1.3., p. 25, ĐH CNTT). *Tìm tất cả $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa*

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Bài toán 22 ([VMS24], 5.3., p. 29, ĐH CNTT). *Cho ánh xạ $\varphi : P_2[x] \to P_2[x]$ xác định bởi*

$$\varphi(p(x)) = (7a_0 - 12a_1 - 2a_2) + (3a_0 - 4a_1)x - (2a_0 + 2a_2)x^2,\ \forall p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

(a) Chứng minh φ là 1 toán tử tuyến tính, xác định ma trận A tương ứng của φ đối với cơ sở $\{1, x, x^2\}$ của $P_2[x]$. (b) Tìm giá trị riêng, vector riêng của A & xét xem A có chéo hóa được hay không. Nếu được, chéo hóa A & tìm ma trận chuyển T cùng với ma trận T^{-1} tương ứng, sao cho $T^{-1}AT$ là ma trận đường chéo. (c) Cho $p(x) = -1 - 2x + 3x^2$. Tính $\varphi^{2024}(p(x))$.

Bài toán 23 ([VMS24], 5.4., p. 29, ĐH Ngoại Thương). *Cho ma trận*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Tìm các giá trị riêng của ma trận A. (b) Tìm các giá trị riêng của ma trận $20A^5 - 2A^2 + 4I$.

Bài toán 24 ([VMS24], 6.5., p. 30, ĐH Trà Vinh). *Cho ánh xạ tuyến tính $f : P_2(x) \to P_2(x)$ xác định bởi*

$$f(1 + x^2) = 4 + x + 5x^2,\ f(1 + 2x + 3x^2) = 10 + 13x + 23x^2,\ f(-x + x^2) = -1 - 2x - 3x^2.$$

(a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $P_2(x)$. (b) Tìm $m \in \mathbb{R}$ để $v = 1 + mx - 5x^2 \notin \operatorname{Im} f$.

4 Analysis – Giải Tích

4.1 Sequence – Dãy số

Resources – Tài nguyên.

1. [Chu24a]. Nguyễn Tài Chung. *Bồi Dưỡng Học Sinh Giỏi Chuyên Khảo Dãy Số.*
2. [Khả09]. Phan Huy Khải. *Các Chuyên Đề Số Học Bồi Dưỡng Học Sinh Giỏi Toán Trung Học. Chuyên Đề 2: Số Học & Dãy Số.*
3. [Quố+24]. Văn Phú Quốc, Trương Hồ Thiên Long, Đỗ Hữu Đạt, Đinh Ngọc Nam. *Bài Tập Giải Tích Olympic Toán Sinh Viên & Học Sinh.* Chap. 1: Dãy Số Thực & Giới Hạn.
4. [Tao22a]. Terence Tao. *Analysis I.* 4e.
5. [Tao22b]. Terence Tao. *Analysis II.* 4e.

Bài toán 25 (General recursive sequences – Dãy truy hồi tổng quát). *Cho dãy số $(u_n)_{n=1}^\infty$ được xác định bởi công thức truy hồi*

$$\boxed{u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_{n-m}),\ \forall m, n \in \mathbb{N}^\star,\ m < n.} \tag{18}$$

hay tương đương:

$$\boxed{u_{n+m} = f(u_{n+m-1}, u_{n+m-2}, \ldots, u_n),\ \forall m, n \in \mathbb{N}^\star.}$$

Tìm các tính chất tổng quát của dãy theo 1 số dạng đặc biệt của hàm f để lập thành các mệnh đề & định lý, rồi chứng minh chúng.

Vài phương pháp phổ biến để giải bài toán dãy số.

- Tìm cách xác định công thức số hạng tổng quát của dãy số: Thử vài trường hợp đầu để dự đoán công thức chính xác rồi chứng minh bằng quy nạp toán học. See Remake 1.
- Sử dụng phương trình đặc trưng (characteristic equation) của lý thuyết dãy số.

4.1.1 Some special sequences: theorems – Vài dãy số đặc biệt: các định lý

Question 3 (Extension from $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ or even further?). *Các kết quả cho các dãy số được xét sau đây có còn đúng với giá trị ban đầu & các hệ số thuộc trường số phức $\mathbb{C}$ hoặc các tập số khác rộng hơn thay vì trường số thực $\mathbb{R}$ hay không?*

For answers, see, e.g.:

- Quora/Is common difference in an arithmetic progression always a real number? Can it be any number real or imaginary?.
- Math StackExchange/Arithmetic progression with complex common difference?

Định nghĩa 11 (Arithmetic sequence – Cấp số cộng). *Cho dãy số (u_n) xác định bởi*

$$\begin{cases} u_1 \in \mathbb{C}, \\ u_{n+1} = u_n + d, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star, \end{cases} \tag{csc}$$

với $u_1, d \in \mathbb{C}$ là 2 hằng số cho trước, được gọi là cấp số cộng, *trong đó u_1 được gọi là* số hạng đầu tiên, *d được gọi là* công sai.

Định lý 15 (Điều kiện cần & đủ để 3 số phức lập thành 1 cấp số cộng). *$a, b, c \in \mathbb{C}$ theo thứ tự lập thành 1 cấp số cộng $\Leftrightarrow 2b = a + c \Leftrightarrow b$ là trung bình cộng của a, c.*

Chứng minh. $a, b, c \in \mathbb{C}$ theo thứ tự lập thành 1 cấp số cộng $\Leftrightarrow \exists d \in \mathbb{C}$ s.t. $b = a + d, c = b + d \Leftrightarrow a + c = a + (b + d) = b + (a + d) = b + b = 2b$. □

Định lý 16 (Properties of arithmetic sequences – Các tính chất của cấp số cộng). *Cho (u_n) là cấp số cộng cho bởi (csc). Khi đó, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$: (i) $u_n = u_1 + (n-1)d$. (ii) $2u_{n+1} = u_n + u_{n+2}$, hay u_{n+1} là trung bình cộng của u_n, u_{n+2}. (iii) Tổng của n số hạng đầu tiên: $S_n \coloneqq \sum_{i=1}^n u_i = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2} = \dfrac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$.*

Bài toán 26 (Dãy truy hồi tựa cấp số cộng). *Cho trước dãy số (v_n), dãy số (u_n) xác định bởi*

$$\begin{cases} u_1 \in \mathbb{C}, \\ u_{n+1} = u_n + v_n, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star. \end{cases}$$

(a) Tìm các tính chất của dãy (u_n). (b) Nếu tồn tại hàm f sao cho $v_n = f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, viết các tính chất vừa thu được theo hàm f thay vì theo (v_n).

Giải. (a) Tương tự Định lý 16, từ định nghĩa của dãy số (u_n), suy ra $u_n = u_{n-1} + v_{n-1} = u_{n-2} + v_{n-2} + v_{n-1} = \cdots = u_1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1} = u_1 + \sum_{i=1}^{n-1} v_i$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, nên $S_n = \sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^n \left(u_1 + \sum_{j=1}^{i-1} v_j\right) = nu_1 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} v_j = nu_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)v_i$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Có $u_{n+2} = u_{n+1} + v_{n+1}, u_{n+1} = u_n + v_n$, nên $v_n u_{n+2} = v_n u_{n+1} + v_n v_{n+1}, v_{n+1} u_{n+1} = v_{n+1} u_n + v_n v_{n+1}$, trừ 2 đẳng thức cuối, vế theo vế, được: $v_n u_{n+2} + v_{n+1} u_n = (v_n + v_{n+1}) u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, & nếu $v_n + v_{n+1} \ne 0$ thì đẳng thức cuối tương đương với $u_{n+1} = \dfrac{v_n}{v_n + v_{n+1}} u_{n+2} + \dfrac{v_{n+1}}{v_n + v_{n+1}} u_n$. □

Định nghĩa 12 (Geometric sequence – Cấp số nhân). *Cho dãy số (u_n) xác định bởi*

$$\begin{cases} u_1 \in \mathbb{C}, \\ u_{n+1} = qu_n, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star, \end{cases} \tag{csn}$$

với $u_1, q \in \mathbb{C}$ là 2 hằng số cho trước, được gọi là cấp số nhân, *trong đó α được gọi là* số hạng đầu tiên, *q được gọi là* công bội.

Định lý 17 (Điều kiện cần & đủ để 3 số phức lập thành 1 cấp số nhân). *$a, b, c \in \mathbb{C}^\star$ theo thứ tự lập thành 1 cấp số nhân $\Leftrightarrow b^2 = ac > 0$.*

Chứng minh. $a, b, c \in \mathbb{C}^\star$ theo thứ tự lập thành 1 cấp số nhân $\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{C}$ s.t. $b = qa, c = qb \Leftrightarrow ac = a(qb) = (aq)b = bb = b^2$. □

Định lý 18 (Properties of geometric sequences – Các tính chất của cấp số nhân). *Cho (u_n) là cấp số nhân cho bởi (csn). Khi đó, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$: (i) $u_n = u_1 q^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. (ii) $u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2}$. (iii) Tổng của n số hạng đầu tiên: $S_n \coloneqq \sum_{i=1}^n u_i = u_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$, $\forall q \in \mathbb{C} \backslash \{1\}$. (iv) Tích của n số hạng đầu tiên: $P_n \coloneqq \prod_{i=1}^n u_i = u_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$.*

Chứng minh. (i) Sử dụng phương pháp quy nạp toán học hoặc phép lặp: $u_n = qu_{n-1} = q^2 u_{n-2} = \cdots = q^{n-1} u_1$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. (ii) $u_n u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}}{q} q u_{n+1} = u_{n+1}^2$. (iii) Vì $u_i = q^{i-1} u_1$ nên $S_n \coloneqq \sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^n q^{i-1} u_1 = u_1 \sum_{i=1}^n q^{i-1} = u_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$, $\forall q \in \mathbb{C} \backslash \{1\}$. (iv) Vì $u_i = q^{i-1} u_1$ nên $P_n \coloneqq \prod_{i=1}^n u_i = \prod_{i=1}^n u_1 q^{i-1} = u_1^n \prod_{i=1}^n q^{i-1} = u_1^n q^{\sum_{i=1}^n (i-1)} = u_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$. □

Bài toán 27 (Dãy truy hồi tựa cấp số nhân)**.** *Cho trước dãy số (v_n), dãy số (u_n) xác định bởi*

$$\begin{cases} u_1 \in \mathbb{C}, \\ u_{n+1} = u_n v_n, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star. \end{cases}$$

(a) Tìm các tính chất của dãy (u_n). (b) Nếu tồn tại hàm f sao cho $v_n = f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, viết các tính chất vừa thu được theo hàm f thay vì theo (v_n).

Định lý 19 (Bolzano–Weierstrass)**.** *Mọi dãy số bị chặn đều có thể trích ra 1 dãy con hội tụ.*

Định nghĩa 13 (Dãy truy hồi cấp 1 với hệ số hằng số)**.** *Dãy số (u_n) có dạng*

$$\begin{cases} u_1 \in \mathbb{C}, \\ u_{n+1} = au_n + b, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star, \end{cases} \tag{19}$$

được gọi là dãy truy hồi cấp 1 với hệ số hằng số $a, b \in \mathbb{R}$.

Định lý 20. *Cho dãy truy hồi cấp 1 (u_n) có dạng (19). (i) Nếu $a = 1$ thì (u_n) là cấp số cộng với công sai b & thỏa mãn Định lý 16. (ii) Nếu $a \neq 1$ thì $u_n = Aa^n + b$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$.*

Hint. Dùng các kỹ thuật tách để đưa công thức $u_{n+1} = au_n + b$ về dạng của cấp số cộng, cấp số nhân, hoặc dãy số tựa cấp số cộng, tựa cấp số nhân, e.g.: tìm $c \in \mathbb{R}$ để $u_{n+1} = au_n + b \Leftrightarrow u_{n+1} - c = a(u_n - c)$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, rồi đặt $v_n \coloneqq u_n - c$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, để thu được cấp số nhân với công bội $q = a$: $v_{n+1} = av_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$ rồi áp dụng Định lý 18; hoặc $u_{n+1} = au_n + b \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{a^{n+1}} = \frac{u_n}{a^n} + \frac{b}{a^{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, rồi đặt $v_n \coloneqq \frac{u_n}{a^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$ để thu được cấp số cộng với công sai $d = \frac{b}{a^{n+1}}$: $v_{n+1} = v_n + \frac{b}{a^{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$ rồi áp dụng Định lý 16.

Chứng minh. (i) Nếu $a = 1$, (19) trở thành $u_{n+1} = u_n + b$, $\forall n \in \mathbb{N}$, áp dụng Định lý 16 với công sai $d = b$ để thu được kết quả. (ii) Nếu $a \neq 1$, $u_{n+1} = au_n + b = a\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a} \Leftrightarrow u_{n+1} - \frac{b}{1-a} = a\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right)$. Đặt $v_n \coloneqq u_n - \frac{b}{1-a}$ được $v_{n+1} = av_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, là 1 cấp số nhân với công bội a & giá trị đầu $v_1 = u_1 - \frac{b}{1-a}$ nên theo Định lý 18 được: $v_n = v_1 a^{n-1} = \left(u_1 - \frac{b}{1-a}\right)a^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, nên $u_n = v_n + \frac{b}{1-a} = \left(u_1 - \frac{b}{1-a}\right)a^{n-1} + \frac{b}{1-a} = \left(u_1 - \frac{b}{1-a}\right)a^{n-1} + \frac{b}{1-a}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Đặt $S_n^u = \sum_{i=1}^n u_i, S_n^v = \sum_{i=1}^n v_i$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, được:

$$S_n^u = \sum_{i=1}^n \left(v_i + \frac{b}{1-a}\right) = \sum_{i=1}^n v_i + \frac{bn}{1-a} = S_n^v + \frac{bn}{1-a} = v_1\frac{1-a^n}{1-a} + \frac{bn}{1-a} = \left(u_1 - \frac{b}{1-a}\right)\frac{1-a^n}{1-a} + \frac{bn}{1-a}, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

□

Định nghĩa 14 (Dãy truy hồi cấp 2 với hệ số hằng số)**.** *Dãy số (u_n) có dạng*

$$\begin{cases} u_1, u_2 \in \mathbb{C}, \\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star, \end{cases} \tag{20}$$

được gọi là dãy truy hồi cấp 2 với hệ số hằng số $a, b \in \mathbb{R}$. *Phương trình bậc 2 $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$ được gọi là* phương trình đặc trưng *của dãy (u_n).*

Định lý 21. *Cho dãy truy hồi cấp 2 (u_n) cho bởi (20).*

(i) Nếu phương trình đặc trưng của (u_n) có 2 nghiệm thực phân biệt $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ thì tồn tại $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sao cho $u_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$.

(ii) Nếu phương trình đặc trưng của (u_n) có nghiệm thực kép $\lambda \in \mathbb{R}$ thì tồn tại $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sao cho $u_n = (\alpha + \beta n)\lambda^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$.

(iii) Nếu phương trình đặc trưng của (u_n) có nghiệm phức $\lambda \in \mathbb{C}$, đặt $\tan\varphi = \frac{\Im\lambda}{\Re\lambda}$, $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, thì $\lambda = |\lambda|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ & tồn tại $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sao cho $u_n = |\lambda|^n(\alpha\cos n\varphi + \beta\sin n\varphi)$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$.

Bài toán 28 (Dãy truy hồi cấp 1 dạng $u_{n+1} = f(u_n, n)$)**.** *Tìm điều kiện của hàm f để tồn tại hàm φ để có thể đưa dãy số (u_n) cho bởi $u_{n+1} = f(u_n, n)$ về dạng*

$$\varphi(u_n) = f(\varphi(u_n)) \text{ hoặc } \varphi(u_n) = f(\varphi(u_n), n), \ \forall n \in \mathbb{N}^\star,$$

để có thể đặt dãy phụ (v_n) xác định bởi $v_n \coloneqq \varphi(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$ để thu được 1 dãy truy hồi mới theo v_n đơn giản hơn dãy (u_n).

Bài toán 29 (Dãy truy hồi cấp 2 dạng $u_{n+1} = f(u_n, u_{n-1}, n)$)**.** *Tìm điều kiện của hàm f để tồn tại hàm φ để có thể đưa dãy số (u_n) cho bởi $u_{n+1} = f(u_n, u_{n-1}, n)$ về dạng*

$$\varphi(u_n) + \varphi(u_{n-1}) = f(\varphi(u_n), \varphi(u_{n-1})) \text{ hoặc } \varphi(u_n) + \varphi(u_{n-1}) = f(\varphi(u_n), \varphi(u_{n-1}), n), \ \forall n \in \mathbb{N}^\star,$$

để có thể đặt dãy phụ (v_n) xác định bởi $v_n \coloneqq \varphi(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$ để thu được 1 dãy truy hồi mới theo v_n đơn giản hơn dãy (u_n).

Bài toán 30 ([Chu24a], 1., p. 3). *(a) Cho dãy số* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *được cho bởi* $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Tìm số hạng tổng quát của* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. *(b) Mở rộng cho dãy số* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *được cho bởi* $x_1 = \alpha \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *(c) Mở rộng cho dãy số* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *được cho bởi* $x_1 = \alpha \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = \sqrt{ax_n + b}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *(d) Sử dụng công thức nhân đôi của các hàm lượng giác khác, mở rộng bài toán để tìm công thức tổng quát của các dãy số tương ứng.*

Chứng minh. (a) Sử dụng công thức nhân đôi của hàm cos: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Leftrightarrow 2|\cos x| = \sqrt{2(1 + \cos 2x)}$ để chứng minh $x_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, bằng phương pháp quy nạp toán học. □

Bài toán 31 ([Chu24a], 2., p. 4). *(a) Tìm số hạng tổng quát của* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *xác định bởi công thức* $x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}$ *với* $n \in \mathbb{N}^\star$ *dấu căn. (b) Cho* $a \in [0, \infty)$. *Tìm số hạng tổng quát của* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *xác định bởi công thức* $x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}}$ *với* $n \in \mathbb{N}^\star$ *dấu căn.*

Bài toán 32 ([Chu24a], 3., p. 4, Olympic 30.4.2003). *(a) Cho dãy số* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *được cho bởi* $u_1 = \sqrt{3}, u_{n+1} = \dfrac{u_n + \sqrt{2} - 1}{1 + (1 - \sqrt{2})u_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Tìm số hạng tổng quát của* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$. *(b) Mở rộng bài toán tương ứng với các mở rộng của bài toán trước, e.g., tìm số hạng tổng quát của dãy* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *xác định bởi*

4.1.2 Partial sums of a sequence – Các tổng riêng phần của dãy số

Định nghĩa 15 (Tổng riêng phần, tổng riêng phần bình phương, lập phương, nghịch đảo, & bậc k của dãy số). *Cho dãy* $(u_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$, *đặt* $S_n \coloneqq \sum_{i=1}^n u_i$ *là tổng riêng phần thứ* n *của dãy* (u_n), $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, *&* $S_{m,n} \coloneqq \sum_{i=m}^n u_i$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^\star$, $m \le n$*; đặt* $S_n^k \coloneqq \sum_{i=1}^n u_i^k$ *tổng riêng phần bậc* k *thứ* n *của dãy* (u_n), $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\forall k \in \mathbb{R}$, *&* $S_{m,n}^k \coloneqq \sum_{i=m}^n u_i^k$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^\star$, $m \le n$, $\forall k \in \mathbb{R}$.

Question 4. *Có thể định nghĩa tổng riêng phần bậc* $k \in \mathbb{C}$ *của dãy* $(u_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ *không?*

Answer. Theo Giải Tích Phức (Complex Analysis), see, e.g., Wikipedia/complex analysis, $f(a) = a^b$ với $a, b \in \mathbb{C}$ có thể là 1 hàm đa trị, nên chưa thể định nghĩa 1 cách duy nhất & well-posed tổng riêng phần bậc $k \in \mathbb{C}$ của dãy $(u_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ được. □

Định lý 22 (Tổng triệt tiêu liên tiếp chỉ còn đầu cuối). *Nếu dãy* (u_n) *xác định bởi* $u_n = f(n) - f(n-1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, *thì* $S_n = f(n) - f(0)$, $S_{m,n} = f(n) - f(m-1)$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^\star$. *Hơn nữa, nếu* $L \coloneqq \lim_{n\to\infty} f(n)$ *tồn tại thì* $\lim_{n\to\infty} S_n = L - f(0)$, $\lim_{n\to\infty} S_{m,n} = L - f(m-1)$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Chứng minh. Hiển nhiên vì $S_n = \sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^n f(i) - f(i-1) = f(n) - f(0)$, & $S_{m,n} = \sum_{i=m}^n u_i = \sum_{i=m}^n f(i) - f(i-1) = f(n) - f(m-1)$ (hoặc có thể tính $S_{m,n}$ theo S_n như sau: $S_{m,n} = S_n - S_{m-1} = f(n) - f(0) - (f(m-1) - f(0)) = f(n) - f(m-1)$). Các ý theo sau là các hệ quả của 2 điều này. □

Bài toán 33 ([Quố+24], 1.1, p. 14). *Cho dãy số* (u_n) *xác định bởi* $u_n = \arctan\frac{1}{2n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Tính* $S_n, S_{m,n}, \lim_{n\to\infty} S_n, \lim_{n\to\infty} S_{m,n}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^\star, m \le n$.

Giải. $u_n = \arctan\frac{2}{4n^2} = \arctan\frac{(2n+1) - (2n-1)}{1 + (2n+1)(2n-1)} = \arctan(2n+1) - \arctan(2n-1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Áp dụng Định lý 22 cho $f(n) = \arctan(2n+1)$ được $S_n = f(n) - f(0) = \arctan(2n+1) - \arctan 1 = \arctan(2n+1) - \frac{\pi}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $S_{m,n} = f(n) - f(m-1) = \arctan(2n+1) - \arctan(2m-1)$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^\star$, $m \le n$. Vì $\lim_{n\to\infty}(2n+1) = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty}\arctan(2n+1) = \frac{\pi}{2}$, nên $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi}{2} - f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$, $\lim_{n\to\infty} S_{m,n} = \frac{\pi}{4} - \arctan(2m-1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. □

Remark 5 (Limit of arctan of a convergent sequence). *Với hàm* $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $x \mapsto \arctan x$. *Liên hệ giữa giới hạn của 1 dãy số* $(a_n)_{n=1}^\infty$ *với giới hạn của dãy số* $(\arctan a_n)_{n=1}^\infty$*:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\arctan a_n = \frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\arctan a_n = -\frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\arctan a_n = \arctan L \in \mathbb{R}.$$

Định lý 23. *Cho dãy* (u_n) *xác định bởi* $u_n = \arctan\dfrac{f(n) - f(n-1)}{1 + f(n-1)f(n)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$ *với* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *là 1 hàm số nào đó sao cho* u_n *xác định* $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Khi đó,* $S_n = \arctan f(n) - \arctan f(0)$, $S_{m,n} = \arctan f(n) - \arctan f(m-1)$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^\star$. *Hơn nữa, nếu* $L \coloneqq \lim_{n\to\infty}\arctan f(n)$ *tồn tại thì* $\lim_{n\to\infty} S_n = L - \arctan f(0)$, $\lim_{n\to\infty} S_{m,n} = L - \arctan f(m-1)$, $\forall m \in \mathbb{N}^\star$.

Chứng minh. Áp dụng Định lý 22 cho $F(n) \coloneqq \arctan f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. □

Remark 6 (Related trigonometrical formula)**.** *See, e.g., Wikipedia/list of trigonometric identities:*

$$\arcsin x \pm \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}),$$
$$\arccos x \pm \arccos y = \arccos\left(xy \mp \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right),$$
$$\arctan x \pm \arctan y = \arctan \frac{x \pm y}{1 \mp xy},$$
$$\operatorname{arccot} x \pm \operatorname{arccot} y = \operatorname{arccot} \frac{xy \mp 1}{y \pm x}.$$

Tương tự, ta chứng minh được:

Định lý 24. *Cho dãy (u_n) xác định bởi*

$$u_n = \arcsin\left(f(n)\sqrt{1-f(n-1)^2} - f(n-1)\sqrt{1-f(n)^2}\right),\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,$$

với $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ là 1 hàm số nào đó sao cho u_n xác định $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Khi đó, $S_n = \arcsin f(n) - \arcsin f(0)$, $S_{m,n} = \arcsin f(n) - \arcsin f(m-1)$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^\star$. Hơn nữa, nếu $L \coloneqq \lim_{n\to\infty} \arcsin f(n)$ tồn tại thì $\lim_{n\to\infty} S_n = L - \arcsin f(0)$, $\lim_{n\to\infty} S_{m,n} = L - \arcsin f(m-1)$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Chứng minh. Áp dụng Định lý 22 cho $F(n) \coloneqq \arcsin f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. □

Định lý 25. *Cho dãy (u_n) xác định bởi*

$$u_n = \arccos\left(f(n)f(n-1) + \sqrt{(1-f(n-1)^2)(1-f(n)^2)}\right),\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,$$

với $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ là 1 hàm số nào đó sao cho u_n xác định $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Khi đó, $S_n = \arccos f(n) - \arccos f(0)$, $S_{m,n} = \arccos f(n) - \arccos f(m-1)$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^\star$. Hơn nữa, nếu $L \coloneqq \lim_{n\to\infty} \arccos f(n)$ tồn tại thì $\lim_{n\to\infty} S_n = L - \arccos f(0)$, $\lim_{n\to\infty} S_{m,n} = L - \arccos f(m-1)$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Chứng minh. Áp dụng Định lý 22 cho $F(n) \coloneqq \arccos f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. □

Định lý 26. *Cho dãy (u_n) xác định bởi*

$$u_n = \operatorname{arccot} \frac{f(n)f(n-1)+1}{f(n-1)-f(n)},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,$$

với $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ là 1 hàm số nào đó sao cho u_n xác định $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Khi đó, $S_n = \operatorname{arccot} f(n) - \operatorname{arccot} f(0)$, $S_{m,n} = \operatorname{arccot} f(n) - \operatorname{arccot} f(m-1)$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^\star$. Hơn nữa, nếu $L \coloneqq \lim_{n\to\infty} \operatorname{arccot} f(n)$ tồn tại thì $\lim_{n\to\infty} S_n = L - \operatorname{arccot} f(0)$, $\lim_{n\to\infty} S_{m,n} = L - \operatorname{arccot} f(m-1)$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Chứng minh. Áp dụng Định lý 22 cho $F(n) \coloneqq \operatorname{arccot} f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. □

Remark 7 (Limit of arccot of a convergent sequence)**.** *Với hàm $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$, $x \mapsto \operatorname{arccot} x$. Liên hệ giữa giới hạn của 1 dãy số $(a_n)_{n=1}^\infty$ với giới hạn của dãy số $(\operatorname{arccot} a_n)_{n=1}^\infty$:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \arctan a_n = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \arctan a_n = \pi,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \arctan a_n = \operatorname{arccot} L \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 34 ([Quố+24], 1.2, p. 14)**.** *Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = (n^2+1)n!$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Tính $S_n, S_{m,n}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^\star, m \le n$.*

Giải. $u_n = n(n+1)! - (n-1)n!$. Áp dụng Định lý 22 cho $f(n) = n(n+1)!$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, được $S_n = n(n+1)!$, $S_{m,n} = n(n+1)! - (m-1)m!$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^\star, m \le n$. (Hiển nhiên $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{m,n} = +\infty$ vì $\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} n(n+1)! = +\infty$.) □

Bài toán 35 ([Quố+24], 1.3, p. 15)**.** *Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Tính $S_n, S_{m,n}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^\star, m \le n$.*

Giải. $u_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{2}} - \sqrt{\dfrac{n-1}{2}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. [*unfinished*] □

Bài toán 36. *Mở rộng Định lý 22 cho các giả thiết sau thay cho giả thiết gốc "dãy (u_n) xác định bởi $u_n = f(n) - f(n-1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$": (i) $u_n = f(n+1) - f(n-1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. (ii) $u_n = f(n+2) - f(n-2)$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. (iii) $u_n = f(n+k) - f(n-k)$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, với $k \in \mathbb{N}^\star$ cho trước. (iv) $u_n = \sum_{i=0}^k (-1)^i f(n-i)$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, với $k \in \mathbb{N}^\star$ cho trước. (v) $u_n = \sum_{i=0}^k (-1)^{a(n,i)} b(n,i) f(n-i)$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, với $k \in \mathbb{N}^\star$ cho trước.*

Nhận xét 3 (Relation to Dynamic Programming in Competitive Programming). *2 công thức $u_n = \sum_{i=0}^k (-1)^i f(n-i)$, $u_n = \sum_{i=0}^k (-1)^{a(n,i)} b(n,i) f(n-i)$, của bài toán này & các mở rộng có thể liên quan đến quy hoạch động (dynamic programming, abbr., DP) trong lập trình thi đấu (competitive programming, abbr., CP).*

Bài toán 37 ([Quố+24], 1.4, p. 15). *Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \sqrt{1 + \left(\frac{n+1}{n}\right)^2} + \sqrt{\frac{1}{n^2} - 2\left(\frac{1}{n} - 1\right)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Tính $S_n^{-1}, S_{m,n}^{-1}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^\star, m \le n$.*

Bài toán 38 ([Quố+24], 1.5, p. 16). *Cho dãy số (u_n) xác định bởi*

$$u_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n^3} + \sqrt[4]{n^3+n^2} + \sqrt[4]{n^3+2n^2+n} + \sqrt[4]{n^3+3n^2+3n+1}},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Tính $S_n, S_{m,n}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^\star, m \le n$.

Hint. $u_n = \sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$.

4.1.3 Xác định công thức tổng quát của dãy số

Bài toán 39 ([Quố+24], 1.6, p. 17). *Cho dãy số (u_n) xác định bởi*

$$\begin{cases} u_0 = 3,\ u_1 = 4, \\ (n+1)(n+2)u_n = 4(n+1)(n+3)u_{n-1} - 4(n+2)(n+3)u_{n-2},\ \forall n \ge 2. \end{cases}$$

Tính u_n.

Hint. Đặt $v_n \coloneqq \dfrac{u_n}{n+3}$.

Bài toán 40 ([Quố+24], 1.7, p. 17). *Cho dãy số (u_n) xác định bởi*

$$\begin{cases} u_2 = 2, \\ u_{n+1} = \dfrac{2023u_n + 2022}{2022u_n + 2023},\ \forall n \ge 1. \end{cases}$$

Tính u_n.

4.1.4 Convergent- & divergence sequences – Dãy số hội tụ & dãy số phân kỳ

Definition 2 (Monotone sequence – dãy đơn điệu). *A sequence is said to be* monotone *if it is either increasing or decreasing.*

Proposition 1 (Monotone bounded sequences converge, [Tao22a], Prop. 6.3.8, p. 119). *Let $(a_n)_{n=m}^\infty$ be a sequence of real numbers which has some finite upper bound $M \in \mathbb{R}$, & which is also increasing, i.e., $a_{n+1} \ge a_n$, $\forall n \ge m$. Then $(a_n)_{n=m}^\infty$ is convergent, & in fact $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup(a_n)_{n=m}^\infty \le M$. Similarly, if a sequence $(a_n)_{n=m}^\infty$ is bounded below by $m \in \mathbb{R}$ & decreasing, i.e., $a_{n+1} \le a_n$, $\forall n \ge m$, then it is convergent, & the limit is equal to the infimum: $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf(a_n)_{n=m}^\infty \ge M$.*

Combine Prop. 1 with the following result

Proposition 2 ([Tao22a], Corollary 6.1.17, p. 113). *Every convergent sequence of real numbers is bounded.*

to obtain

Proposition 3. *A monotone sequence converges iff it is bounded.*

Bài toán 41. *Tìm điều kiện của các hàm số để các dãy $(a_n)_{n=0}^\infty$ xác định hội tụ, phân kỳ: (a) $a_n = \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$. (b) $a_n = \int_0^{a(x)} f(x)\,\mathrm{d}x$. (c) $a_n = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x)\,\mathrm{d}x$. (d) $\int_{a(x;m)}^{b(x;m)} f(x;m)\,\mathrm{d}x$ với tham số $m \in \mathbb{R}$.*

4.1.5 Series – Chuỗi

4.1.6 Problems: Sequence

Bài toán 42 (VMC2023B). *Cho $(u_n)_{n=1}^\infty$ là dãy số được xác định bởi $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{4^k}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. (a) Tìm tất cả $n \in \mathbb{N}^\star$ thỏa $u_n > \frac{5}{4}$. (b) Chứng minh $u_n \le 2023$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. (c) Chứng minh dãy số $(u_n)_{n=1}^\infty$ hội tụ.*

Chứng minh. (a) $u_{n+1} = \left(1 + \dfrac{1}{4^{n+1}}\right) u_n > u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, suy ra (u_n) đơn điệu tăng, mà $u_1 = \frac{5}{4}$ nên $u_n > \frac{5}{4} \Leftrightarrow n \ge 2$. (b) □

Remark 8. *Gặp phải dãy số $(u_n)_{n=1}^\infty$ có công thức mỗi số hạng là 1 tích thì thử tính $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ xem có đơn giản hóa được không. Gặp phải dãy số $(u_n)_{n=1}^\infty$ có công thức mỗi số hạng là 1 tổng thì thử tính $u_{n+1} - u_n$ xem có đơn giản hóa được không.*

Bài toán 43 (Recursive sequence vs. ANN). *Tìm mối liên hệ giữa các dãy số cho bởi công thức truy hồi (recursive sequences) & mạng lưới nơ-ron nhân tạo (artificial neural networks, abbr., ANNs).*

4.2 Real-Valued Function – Hàm Số Giá Trị Thực

4.2.1 Darboux's theorem & Darboux functions

In mathematics, Darboux*'s theorem* is a theorem in real analysis, named after Jean Gaston Darboux. It states that every function that results from the differenetiation of another function has the *intermediate value property*: the image of an interval is also an interval.

When f is continously differentiable, $f \in C^1([a,b])$, Darboux's theorem is a consequence of the intermediate value theorem. But even when f' is *not* continuous, Darboux's theorem places a severe restriction on what it can be.

Theorem 2 (Darboux)**.** *Let I be a closed interval, $f : I \to \mathbb{R}$ be a real-valued differentiable function. Then f' has* intermediate value property*: If $a, b \in I$, $a < b$, then for every y between $f'(a), f'(b)$, there exists an $x \in [a,b]$ s.t. $f'(x) = y$.*

For proofs, see, e.g., Wikipedia/Darboux's theorem, where the 1st proof is based on the extreme value theorem & the 2nd one is based on combining the mean value theorem & the intermediate value theorem.

Definition 3. *A* Darboux function *is a real-valued function f which has the intermediate value property: for any 2 values $a, b \in D_f$ (domain of f), & any y between $f(a), f(b)$, there is some c between a, b with $f(c) = y$.*

Denote by Darboux$([a,b])$ the set of all Darboux functions on the interval $[a,b]$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$:

$$\text{Darboux}([a,b]) \coloneqq \{f : [a,b] \to \mathbb{R}; f \text{ is a Darboux function}\},\ \forall a, b \in \mathbb{R},\ a < b.$$

By the intermediate value theorem:

Theorem 3 (Continuity $\Rightarrow$ Darboux)**.** *Every continuous function on a real interval is a Darboux function.*

$$f \in C([a,b]) \Rightarrow f \in \text{Darboux}([a,b]),\ \forall a, b \in \mathbb{R},\ a < b.$$

Darboux's contribution:

Theorem 4 (Darboux $\not\Rightarrow$ continuity)**.** *There are discontinuous Darboux functions.*

Theorem 5 (Essential discontinuities of Darboux functions)**.** *Every discontinuity of a Darboux function is essential, i.e., at any point of discontinuity, at least 1 of the left hand & right hand limits does not exist.*

By Darboux's theorem:

Theorem 6. *The derivative of any differentiable function is a Darboux function.*

Example 1. *The topologist's sine curve function*

$$x \mapsto \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & \text{for } x \neq 0, \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

is an example of a Darboux function that is discontinuous at 1 point.

Example 2. *The Conway base 13 function is an example of a Darboux function that is nowhere continuous.*

For more information about Darboux's theorem, see, e.g., Encyclopedia of Mathematics/Darboux theorem.

4.3 Limit & Continuity of Functions – Giới Hạn & Tính Liên Tục của Hàm Số

Bài toán 44 ([Quố+24], 2.1., p. 108)**.** *Tính* $\lim_{x\to 0} x^2 \left(1 + 2 + \cdots + \left\lfloor \dfrac{1}{|x|} \right\rfloor\right)$.

Ans. $\frac{1}{2}$.

Bài toán 45 ([Quố+24], 2.2., p. 108)**.** *(a) Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm đơn điệu thỏa $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(2x)}{f(x)} = 1$. Chứng minh $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(kx)}{f(x)} = 1$, $\forall k \in (0, \infty)$. (b) Mở rộng cho $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(ax)}{f(x)} = 1$ với $a \in \mathbb{R}$.*

4.4 Derivative – Đạo Hàm

Bài toán 46 ([Quố+24], 3.1., p. 146)**.** *(a) Cho hàm số $f(x) = \prod_{i=1}^{2023}(x - i)$. Tính $f'(1)$. (b) Cho $n \in \mathbb{N}^\star$, $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \ldots, n$, $f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i)$. Tính $f'(a_i)$, $\forall i = 1, \ldots, n$. (c) Áp dụng để tính $f'(a_i)$ với f cho ở (b), $\forall i = 1, \ldots, n$ với $a_i = i$, $\forall i = 1, \ldots, n$.*

Giải. (a) $f'(1) = 2022!$. (b) $f \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow f \in C^\infty(\mathbb{R})$[2]. Có $f(a_i) = \prod_{j=1}^n (a_i - a_j) = 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$ nên

$$f'(a_i) = \lim_{x \to a_i} \frac{f(x) - f(a_i)}{x - a_i} = \lim_{x \to a_i} \frac{\prod_{j=1}^n (x - a_j)}{x - a_i} = \prod_{j=1,\, j \neq i}^n (x - a_j) = \prod_{j=1,\, j \neq i}^n (a_i - a_j),\ \forall i = 1, \ldots, n. \tag{21}$$

(c) Khi $a_i = i$, $\forall i = 1, \ldots, n$:

$$f'(i) = \prod_{j=1,\, j \neq i}^n (i - j) = \prod_{j=1}^{i-1} (i - j) \prod_{i+1}^n (i - j) = (i-1)(i-2)\cdots 1(-1)(-2)\cdots(i-n) = (-1)^{n-i}(i-1)!(n-i)!,\ \forall i = 1, \ldots, n.$$

Nói riêng, $f'(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$, $f'(2) = (-1)^{n-2}(n-2)!$, $f'(n) = (n-1)!$. $\square$

Remark 9. *Công thức (21) gợi liên tưởng đến định thức Vandermonde (Vandermonde).*

Bài toán 47 ([Quố+24], 3.2., p. 146)**.** *(a) Chứng minh: $|a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx| \le |\sin x|$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow |a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \le 1$. (b) Chứng minh nếu $|a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx| \le |g(x)|$, $\forall x \in \mathbb{R}$, & hàm g thỏa $L := \lim_{x \to 0} \left|\frac{g(x)}{x}\right|$ tồn tại & $L < \infty$ thì $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \le L$.*

Bài toán 48 (Trigonometrical series – chuỗi lượng giác)**.** *Khảo sát hàm số: (a) $S(x) = \sum_{i=0}^n a_i \sin ix$, $C(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cos ix$, $T(x) = \sum_{i=0}^n a_i \tan ix$, $CT(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cot ix$.*

Bài toán 49 ([Quố+24], 3.3., p. 147)**.** *(a) Giả sử $f(0) = 0$, f khả vi tại 0. Tính $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x}{i}\right)$. (b) Mở rộng cho $f(0) = a \in \mathbb{R}$.*

Bài toán 50 ([Quố+24], 3.4., p. 147)**.** *Cho f là hàm khả vi tại $a \in \mathbb{R}$ & xét 2 dãy $(x_n), (y_n)$ cùng hội tụ về a sao cho $x_n < a < y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Chứng minh $\lim_{n \to \infty} \dfrac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = f'(a)$.*

Bài toán 51 ([Quố+24], 3.5., p. 148)**.** *(a) Cho*

$$f(x) = \begin{cases} x^{2023} \sin \dfrac{1}{x} & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0, \end{cases}$$

& $g(x)$ khả vi tại $x = 0$. Chứng minh $g \circ f$ có đạo hàm bằng 0 tại $x = 0$. (b) Mở rộng 2023 thành $n \in \mathbb{N}^\star$.

Bài toán 52 ([Quố+24], 3.6., p. 149)**.** *Cho $f(x)$ là hàm số có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2023$. Chứng minh*

$$\lim_{n \to \infty} n \left[f\left(\frac{1 + 2023n}{n} \right) - f(2023) \right] = f'(2023).$$

(b) Mở rộng 2023 thành $n \in \mathbb{N}^\star$.

Bài toán 53 ([Quố+24], 3.7., p. 149)**.** *Cho f khả vi trên $[a, b]$ & thỏa: (a) $f(a) = f(b) = 0$. (b) $f'(a) = f'(a^+) > 0$, $f'(b) = f'(b^-) > 0$. Chứng minh tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) \le 0$.*

Bài toán 54 ([Quố+24], 3.8., p. 149)**.** *Giả sử f có đạo hàm trên 1 khoảng chứa $[0, 1]$, $f'(0) > 0, f'(1) < 0$. Chứng minh tồn tại $x_0 \in (0, 1)$: $f(x) \le f(x_0)$, $\forall x \in [0, 1]$.*

Bài toán 55 ([Quố+24], 3.9., p. 150)**.** *Cho hàm f xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(0) = 0$, $f(x) \ge |\sin x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh đạo hàm của f tại 0 không tồn tại.*

4.4.1 Higher derivative – Đạo hàm cấp cao

Main tool: Mathematical induction & general Leibniz rule, see, e.g., Wikipedia/general Leibniz rule:

Theorem 7 (General Leibniz rule)**.** *Let $n \in \mathbb{N}^\star$.*

(i) If f, g are n-times differentiable functions, then the product fg is also n-times differentiable & its nth derivative is given by

$$(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} \text{ where } \binom{n}{i} = C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!},$$

& $f^{(i)}$ denotes the ith derivative of f, & in particular $f^{(0)} = f$. In particular, when $n = 2$,

$$(fg)''(x) = \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} f^{(2-i)}(x) g^{(i)}(x) = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x).$$

[2]I.e.: Bất kỳ hàm đa thức 1 biến với hệ số thực nào cũng liên tục khả vi vô hạn lần.

(ii) Let $f_1, \ldots, f_m$ be $m \in \mathbb{N}^\star$ differentiable function. Then

$$\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)^{(n)} = \sum_{\sum_{i=1}^m k_i = n} \binom{n}{k_1, \ldots, k_m} \prod_{1 \le t \le m} f_t^{(k_t)},$$

where the sum extends over all m-tuples $(k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{N}^m$ with $\sum_{i=1}^m k_i = n$, &

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_m} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^m k_i!} = \frac{n!}{k_1! \cdots k_m!}$$

are the multinomial coefficients.

Bài toán 56 ([Quố+24], 3.10., p. 150)**.** *Chứng minh $f(x) = \arctan x$ thỏa phương trình:*

$$(1 + x^2) f^{(n)}(x) + 2(n-1) x f^{(n-1)}(x) + (n-2)(n-1) f^{(n-2)}(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \ge 2.$$

Bài toán 57 ([Quố+24], 3.11., p. 151)**.** *Cho f là hàm khả vi đến cấp n trên $(0, \infty)$. Chứng minh*

$$\frac{1}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n \left(x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)}, \ \forall x \in (0, \infty).$$

Bài toán 58 ([Quố+24], 3.12., p. 152)**.** *Cho f khả vi trên (a, b) sao cho $f'(x) = g(f(x))$, $\forall x \in (a, b)$, trong đó $g \in C^\infty((a, b))$. Chứng minh $f \in C^\infty((a, b))$.*

4.4.2 Mean-valued theorems – Các định lý giá trị trung bình

Định lý 27 (Fermat)**.** *Cho $f(x)$ xác định trên (a, b). Nếu $f(x)$ đạt cực trị tại x_0 & khả vi tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.*

Định lý 28 (Rolle)**.** *Giả sử $f(x)$ xác định & liên tục trên $[a, b]$ hữu hạn, khả vi trên (a, b) & $f(a) = f(b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.*

Định lý 29 (Lagrange)**.** *Cho $f(x)$ xác định & liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b). Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

Định lý 30 (Cauchy)**.** *Cho $f(x), g(x)$ liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b), $g'(x) \ne 0$, $\forall x \in (a, b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.*

Định lý 31 (Darboux)**.** *Nếu hàm số $f(x)$ khả vi trên (a, b), $\alpha, \beta \in (a, b)$ thì $f'(x)$ nhận mọi giá trị trung gian giữa $f'(\alpha)$ & $f'(\beta)$.*

I.e.,

$$(\min\{f'(\alpha), f'(\beta)\}, \max\{f'(\alpha), f'(\beta)\}) \subset f'((a, b)), \ \forall f(x) \text{ differentiable on } (a, b), \ \forall \alpha, \beta \in (a, b).$$

Bài toán 59 ([Quố+24], 3.14., p. 152)**.** *Cho $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ là 1 hàm khả vi có đạo hàm liên tục & không âm ($f' \ge 0$). Chứng minh tồn tại $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $(f(x_0))^2 + (f'(x_0))^2 \le 1$.*

4.5 Integral – Tích phân

Cho $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ký hiệu: $R([a, b])$: tập hợp các hàm khả tích Riemann trên đoạn $[a, b]$. $L^1([a, b])$: tập hợp các hàm khả tích Lebesgue trên đoạn $[a, b]$.

Bài toán 60. *(a) Cho $f \in C(\mathbb{R})$ là hàm chẵn. Tìm điều kiện cần & đủ của hàm $g \in C(\mathbb{R})$ để $\int_{-a}^a f(x) g(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^a f(x) \, \mathrm{d}x$, $\forall a \in \mathbb{R}$. (b) Câu hỏi tương tự với f là hàm lẻ. (c) Cho $f \in C(\mathbb{R})$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ $T_f \in (0, \infty)$. Tìm điều kiện cần & đủ của hàm $g \in C(\mathbb{R})$ để $\int_{-nT_f}^{nT_f} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^{T_f} f(x) \, \mathrm{d}x$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. (d) Mở rộng cho các hàm $f \in C(\mathbb{R})$ vừa chẵn vừa lẻ (trivial), vừa chẵn vừa tuần hoàn, & vừa lẻ vừa tuần hoàn & tìm các ví dụ cụ thể tương ứng.*

Question 5 (Sum $\leftrightarrows$ Product)**.** *Làm sao để chuyển 1 tổng thành 1 tích? Làm sao chuyển 1 tích thành 1 tổng?*

Answer. Chuyển tổng thành tích: $e^{a+b} = e^a e^b$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Tổng quát:

$$e^{\sum_{i=1}^n a_i} = \prod_{i=1}^n e^{a_i}, \ \forall a_i \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star, \ \forall i = 1, \ldots, n.$$

Chuyển tích thành tổng: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\forall a, b \in (0, \infty)$. Tổng quát:

$$\ln \prod_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n \ln a_i, \ \forall a_i \in (0, \infty), \ \forall n \in \mathbb{N}^\star, \ \forall i = 1, \ldots, n.$$

Note: Có thể thay $\ln x$ bởi $\log x, \log_a x$ với $a \in (0, \infty)$ bất kỳ. □

See also:

- *Problem: Exponentiation & Logarithm – Bài Tập: Hàm Số Mũ & Hàm Số Logarith.*

  PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_11/exponentiati logarithm/problem/NQBH_exponentiation_logarithm_problem.pdf.

  TEX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_11/exponentiati logarithm/problem/NQBH_exponentiation_logarithm_problem.tex.

- *Problem & Solution: Exponentiation & Logarithm – Bài Tập & Lời Giải: Hàm Số Mũ & Hàm Số Logarith.*

  PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_11/exponentiati logarithm/solution/NQBH_exponentiation_logarithm_solution.pdf.

  TEX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_11/exponentiati logarithm/solution/NQBH_exponentiation_logarithm_solution.tex.

Bài toán 61 ([Quố+24], 4.1., p. 195)**.** *(a) Chứng minh*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)}=e^{\int_0^1\ln f(x)\,\mathrm{d}x},\ \forall f\in C([0,1];(0,\infty)).$$

(b) Mở rộng cho $f\in C([a,b];(0,\infty))$ với $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$.

Bài toán 62 ([Quố+24], 4.2., p. 196)**.** *(a) Chứng minh*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{1}{i}\sin\frac{i\pi}{n+1}>0.$$

(b) Mở rộng cho các hàm $\cos x,\tan x,\cot x,\sinh x,\cosh x,\tanh x,\coth x,\ldots$.

Bài toán 63 ([Quố+24], 4.3., p. 196)**.** *Tính $L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\frac{2}{3}}+\frac{1}{n+\frac{8}{3}}+\cdots+\frac{1}{n+\frac{6n-4}{3}}\right)$.*

Hint. $L=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ln\sqrt{3}$.

Bài toán 64 ([Quố+24], 4.4., p. 197)**.** *Chứng minh*

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)=\frac{f(1)-f(0)}{2},\ \forall f\in C^1([0,1]).$$

Bài toán 65 ([Quố+24], 4.5., p. 198)**.** *Chứng minh $f(x)=\lfloor x\rfloor\in R([a,b])$ & tính $\int_a^b\lfloor x\rfloor\,\mathrm{d}x$.*

Bài toán 66 ([Quố+24], 4.6., p. 198)**.** *Cho $f\in R([0,1])$ thỏa $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x>0$. Chứng minh tồn tại đoạn $[a,b]\subset[0,1]$ thỏa $f(x)>0$, $\forall x\in[a,b]$.*

Bài toán 67 ([Quố+24], 4.7., p. 199)**.** *Cho $f(x)$ xác định trên $[a,b]$. (a) Nếu $|f(x)|\in R([a,b])$ thì liệu $f(x)\in R([a,b])$? (b) Nếu $f^{2022}(x)\in R([a,b])$ thì liệu $f(x)\in R([a,b])$? (c) Mở rộng (b) cho $n\in\mathbb{N}$.*

Bài toán 68 ([Quố+24], 4.8., p. 199)**.** *Chứng minh $f\in R([0,1])$ & tính $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ với*

$$f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{p}{n}\right)^2 & \text{if } x\in\left[\dfrac{p}{n},\dfrac{p+1}{n}\right),\ p=\overline{0,n-1},\\ 1 & \text{if } x=1.\end{cases}\quad x\in[0,1],\ n\in\mathbb{N}.$$

Ans. $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$.

4.5.1 Recurrent integrals – Các tích phân dạng truy hồi

Bài toán 69. *Giả sử cần tính tích phân có dạng $I_n(f):=\int_{a(n)}^{b(n)}f(x,n)\,\mathrm{d}x$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. Tìm vài trường hợp & các điều kiện cần & đủ tương ứng với các trường hợp đó của 3 hàm a,b,f để có thể thu được công thức truy hồi cho tích phân I_n:*

$$I_n(f)=F(I_{n-1}(f),I_{n-2}(f),\ldots,I_{n-m}(f)),\ \forall n\in\mathbb{N}^\star,$$

với $m\in\mathbb{N}^\star$, $m\le n$ thích hợp.

Bài toán 70. *(a) Tính tích phân $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{(1+a^x)\sin x}\,\mathrm{d}x$. (b) Mở rộng cho các hàm $\cos nx,\tan nx,\cot nx,\sinh nx,\cosh nx,\tanh nx,\coth nx,\ldots$*

4.5.2 Mean-value theorems – Các định lý giá trị trung bình

Định nghĩa 16 (Mean value of an integrable function – Giá trị trung bình của hàm khả tích)**.** *Với* $f \in R([a,b])$*, đại lượng* $\overline{f} := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *được gọi là* giá trị trung bình *của* f *trên đoạn* $[a,b]$*. Tổng quát hơn nếu* $f : X \to \mathbb{R}$ *khả tích Riemann trên 1 tập* $X \subset \mathbb{R}^d$*, ký hiệu* $f \in R(X)$*, đại lượng* $\overline{f} := \frac{1}{|X|}\int_X f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ *được gọi là* giá trị trung bình *của* f *trên tập* X*, trong đó* $|X|$ *là độ đo hoặc thể tích của tập* X*, i.e.,* $|X| = \mathrm{Vol}(X) = m_d(X)$*,* Vol*: volume – thể tích, còn* m_d*: d-dimensional Lebesgue measure – độ đo Lebesgue d chiều trên không gian Euclid d chiều* $\mathbb{R}^d$*.*

1 bài toán tối ưu liên quan đến giá trị trung bình:

$$\boxed{\min_{a\in\mathbb{R}} \|f - a\|_{L^p(\mathbb{R})} \text{ i.e. } \min_{a\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f-a|^p\,\mathrm{d}x.}$$

Ý nghĩa toán học. Nếu lấy khoảng cách là hàm $\|\cdot\|_{L^p}$ thì tìm hàm hằng gần nhất với hàm $f \in L^p$. Với $p = 2$ thì đây là bài toán tối thiểu bình phương, least-square problem thường gặp trong Machine Learning.

Bài toán 71 ([Quố+24], 4.9., p. 200)**.** *Cho* $f \in C([a,b])$ *thỏa* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$*. Chứng minh tồn tại* $c \in (a,b)$ *thỏa* $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)$*.*

Bài toán 72 ([Quố+24], 4.10., p. 200)**.** *Cho* $f, g \in C([a,b])$*. Chứng minh tồn tại* $c \in (a,b)$ *thỏa* $g(c)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$*.*

Bài toán 73 ([Quố+24], 4.11., p. 201)**.** *Cho* $f, g \in C([a,b])$*. Chứng minh tồn tại* $c \in (a,b)$ *thỏa* $g(c)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_c^b g(x)\,\mathrm{d}x$*.*

Bài toán 74 ([Quố+24], 4.12., p. 201)**.** *Cho* $f \in C^2([0,1])$*. Chứng minh tồn tại* $c \in (0,1)$ *thỏa* $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = f(0) + \frac{1}{2}f'(0) + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}f''(c)$*.*

Bài toán 75 ([Quố+24], 4.13., p. 202)**.** *Cho* $f \in C([a,b])$*. Đặt* $\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$*. Chứng minh* $\int_a^b |f(x) - \overline{f}|^2\,\mathrm{d}x \le \int_a^b |f(x) - t|^2\,\mathrm{d}x$*,* $\forall t \in \mathbb{R}$*, i.e.,* $\overline{f}$ *là nghiệm của bài toán tối ưu:*

$$\min_{t\in\mathbb{R}} \int_a^b |f(x) - t|^2\,\mathrm{d}x.$$

4.5.3 Integral inequalities – Bất đẳng thức tích phân

Bài toán 76 ([Quố+24], 4.14., p. 202)**.** *Chứng minh:*

$$\left(\int_a^b f(x)\sin x\,\mathrm{d}x\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\cos x\,\mathrm{d}x\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bài toán 77 ([Quố+24], 4.15., p. 203)**.** *Chứng minh:*

$$(b-a)^2 \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{f(x)},\ \forall f \in R([a,b],(0,\infty)).$$

Hơn nữa, nếu $0 < m \le f(x) \le M$ *thì*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \le \frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2.$$

4.6 Some Analytical Properties of Polynomials – Vài Tính Chất Giải Tích của Đa Thức

Đặt tập hợp các đa thức (polynomial) 1 biến với hệ số nguyên, hệ số hữu tỷ, hệ số thực, hệ số phức lần lượt cho bởi:

$$\mathbb{Z}[x] := \left\{\sum_{i=0}^n a_i x^i; n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{Z},\ \forall i = 0,\ldots,n,\ a_n \ne 0\right\},$$

$$\mathbb{Q}[x] := \left\{\sum_{i=0}^n a_i x^i; n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{Q},\ \forall i = 0,\ldots,n,\ a_n \ne 0\right\},$$

$$\mathbb{R}[x] := \left\{\sum_{i=0}^n a_i x^i; n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{R},\ \forall i = 0,\ldots,n,\ a_n \ne 0\right\},$$

$$\mathbb{C}[x] := \left\{\sum_{i=0}^n a_i x^i; n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{C},\ \forall i = 0,\ldots,n,\ a_n \ne 0\right\}.$$

Ta có quan hệ hiển nhiên $\mathbb{N}[x] \subset \mathbb{Z}[x] \subset \mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$. Tổng quát, với $\mathbb{F}$ là 1 trường bất kỳ, tập hợp các đa thức 1 biến với hệ số thuộc trường $\mathbb{F}$ (e.g., $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) cho bởi:

$$\mathbb{F}[x] \coloneqq \left\{\sum_{i=0}^n a_i x^i; n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{F},\ \forall i = 0, \ldots, n,\ a_n \neq 0\right\}.$$

Tập xác định của đa thức có thể là toàn bộ trường số thực $\mathbb{R}$ hoặc trường số phức $\mathbb{C}$, i.e., $D_P = \mathrm{dom}(P) = \mathbb{R}$ or $D_P = \mathrm{dom}(P) = \mathbb{C}$, tùy vào trường $\mathbb{F}$ của các hệ số & mục đích sử dụng đa thức.

Định nghĩa 17 (Nghiệm bội của đa thức)**.** *$x_0 \in \mathbb{R}$ được gọi là* nghiệm bội *(multiple root) của đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ nếu & chỉ nếu*

$$\begin{cases} f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0, \\ f^{(k)}(x_0) \neq 0. \end{cases}$$

Hệ quả 2. *Với mọi $P \in \mathbb{R}[x]$. Nếu các nghiệm của phương trình $P'(x) = 0$ không là nghiệm của phương trình $P(x) = 0$ thì $P(x)$ không có nghiệm bội.*

Định lý 32 (Some basic properties of polynomials – Vài tính chất cơ bản của đa thức)**.** *Cho $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $a_n \neq 0$, $\deg P = n$. Khi đó:*

(i) (Continuity of polynomials – Tính liên tục của hàm đa thức) *$P(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.*

(ii) (Limits of polynomials – Các giới hạn của hàm đa thức) *Giới hạn khi $x \to \pm\infty$ được cho bởi:*

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty & \text{if } a_n > 0, \\ -\infty & \text{if } a_n < 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty & \text{if } (a_n > 0 \wedge n \,\vdots\, 2) \vee (a_n < 0 \wedge n \not\vdots\, 2), \\ -\infty & \text{if } (a_n > 0 \wedge n \not\vdots\, 2) \vee (a_n < 0 \wedge n \,\vdots\, 2), \end{cases} = \begin{cases} +\infty & \text{if } a_n(-1)^n > 0, \\ -\infty & \text{if } a_n(-1)^n < 0. \end{cases}$$

(iii) Nếu có $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $P(a)P(b) < 0$ thì $P(x)$ có ít nhất 1 nghiệm $x_0 \in (a, b)$.

(iv) (Derivatives of polynomials – Đạo hàm của đa thức) *Với mọi $k \in \mathbb{N}^\star$, đạo hàm cấp k $P^{(k)}(x)$ của đa thức $P(x)$ có bậc* $\deg P^{(k)}(x) = (\deg P(x) - k)_+ = (n-k)_+$ *với $x_+ \coloneqq \max\{x, 0\}$, $\forall x \in \mathbb{R}p$, & có thể biểu dưới dạng:*

$$\begin{aligned}
P'(x) &= \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1}, \\
P''(x) &= \sum_{i=2}^n i(i-1) a_i x^{i-2}, \\
P'''(x) &= \sum_{i=2}^n i(i-1)(i-2) a_i x^{i-3}, \\
P^{(4)}(x) &= \sum_{i=3}^n i(i-1)(i-2)(i-3) a_i x^{i-4}, \\
&\cdots \\
P^{(n-1)}(x) &= \prod_{j=0}^{n-2} (n-1-j) a_{n-1} + \prod_{j=0}^{n-1} (n-j) a_n x, \\
P^{(n)}(x) &= a_n n!, \\
P^{(n+1)}(x) &= P^{(n+2)}(x) = \cdots = 0.
\end{aligned}$$

Tổng quát,

$$P^{(k)}(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=k}^n i(i-1)(i-2)\cdots(i-k+1) a_i x^{i-k} = \sum_{i=k}^n \prod_{j=0}^{k-1} (i-j) a_i x^{i-k}, & \forall k = 1, \ldots, n, \\ 0 & \text{if } k \geq n+1. \end{cases}$$

(v) (Antiderivative of polynomials – Nguyên hàm của đa thức) *$P(x)$ có nguyên hàm là*

$$\int P(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+1} x^{i+1} + C = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_{i-1}}{i} x^i + C,\ C \in \mathbb{R}:\ const.$$

(vi) (Multiple root – Nghiệm bội của đa thức) *$P(x)$ có nghiệm $x_0 \in \mathbb{R}$ bội $m \in [2, \deg P] \cap \mathbb{N}$ khi & chỉ khi $P(x)$ có dạng $P(x) = (x - x_0)^m G(x)$ với $G(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg G = \deg P - m = n - m$. Hơn nữa, nếu $P(x)$ có nghiệm bội $m \in [2, \deg P] \cap \mathbb{N}$ thì $P'(x)$ có nghiệm bội $m-1$, $P''(x)$ có nghiệm bội $m-2$, …, $P^{(k)}$ có nghiệm bội $m-k$, $\forall k = 0, 1, \ldots, m-2$.*

Định lý 33 (Quadratic polynomial – Tam thức bậc 2 ax^2+bx+c).

Định lý 34 (Cubic polynomial – Đa thức bậc 3). *Cho đa thức bậc 3 $P(x)\in\mathbb{R}[x]$, $\deg P=3$. (i) Nếu $P'(x)\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ hoặc $P'(x)\le 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ thì $P(x)$ có duy nhất 1 nghiệm. (ii) Nếu phương trình $P'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt thì đồ thị hàm số có 2 cực trị $y_{\min},y_{\max}$. Hơn nữa,*

- *Nếu $y_{\min}y_{\max}>0$ thì phương trình $P(x)=0$ chỉ có 1 nghiệm.*
- *Nếu $y_{\min}y_{\max}=0$ thì phương trình $P(x)=0$ có 2 nghiệm gồm 1 nghiệm đơn & 1 nghiệm kép.*
- *Nếu $y_{\min}y_{\max}<0$ thì phương trình $P(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt.*

Bài toán 78. *Cho $P(x)\in\mathbb{R}[x]$, $k\in[2,\deg P]\cap\mathbb{N}$. Nếu $P'(x)$ có nghiệm bội $k-1$ thì có suy ra được $P(x)$ có nghiệm bội k không (2 nghiệm bội đó không nhất thiết trùng nhau)?*

Bài toán 79 (Multiple antiderivative of polynomials). *Tìm công thức của nguyên hàm bội $m\in\mathbb{N}^\star$ của $P(x)\in\mathbb{R}[x]$, i.e., $\iint\cdots\int P(x)\,\mathrm{d}x$ với m dấu tích phân.*

Bài toán 80 (Mean-value- & expansion theorems for polynomials). *Áp dụng các định lý giá trị trung bình, khai triển Taylor, quy tắc L'Hospital cho $P(x)\in\mathbb{R}[x]$.*

Bài toán 81 ([Quố+24]). *(a) Liệu có tồn tại 2 đa thức $f(x),g(x)\in\mathbb{R}[x]$ thỏa*

$$\frac{f(n)}{g(n)}=\sum_{i=1}^n\frac{1}{i},\ \forall n\in\mathbb{N}^\star.$$

(b) Cho dãy số (a_n) thỏa $\sum_{i=1}^\infty a_i=\infty$ & $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i=0$. Liệu có tồn tại 2 đa thức $f(x),g(x)\in\mathbb{R}[x]$ thỏa

$$\frac{f(n)}{g(n)}=\sum_{i=1}^n a_i,\ \forall n\in\mathbb{N}^\star.$$

Bài toán 82 ([Chu24b], 1., pp. 5–6). *Chứng minh nếu đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thỏa $P(x)=P(x+a)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, với $a\in\mathbb{R}^\star$ là 1 hằng số, thì $P(x)\equiv c\in\mathbb{R}$ là 1 hằng số tùy ý.*

Hint. Chứng minh đa thức $Q(x)\coloneqq P(x)-a_0$ có vô số nghiệm na, $\forall n\in\mathbb{N}$, nên $Q(x)\equiv 0$.

4.7 Analytical Number Theory

Bài toán 83 ([Quố+24], 6.1., p. 253). *Cho $a,b,c,d\in\mathbb{N}^\star$ đôi một khác nhau & số nguyên tố p thỏa $a^p+b^p=c^p+d^p$. Chứng minh $|a-c|+|b-d|\ge p$.*

Hint. Sử dụng định lý Fermat nhỏ được $a+b\equiv c+d \mod p$ rồi xét 2 trường hợp: $a+b\ne c+d$ (sử dụng bất đẳng thức $|x|+|y|\ge|x+y|$ với $x=a-c,y=b-d$) & trường hợp $a+b=c+d$ (áp dụng định lý Lagrange cho hàm $f(x)=x^p$ trên $[\min\{a,c\},\max\{a,c\}],[\min\{b,d\},\max\{b,d\}]$) để suy ra điều vô lý; hoặc sử dụng $x^p|_c^a=x^p|_b^d\Leftrightarrow\int_c^a x^{p-1}\,\mathrm{d}x=\int_b^d x^{p-1}\,\mathrm{d}x$: vô lý).

Nhận xét 4. *Sử dụng định lý Fermat nhỏ, được: với mọi số nguyên tố p: $a^p\equiv a \mod p$, suy ra*

$$\sum_{i=1}^m a_i^p=\sum_{i=1}^n b_i^p\Rightarrow\sum_{i=1}^m a_i=\sum_{i=1}^n b_i \mod p,\ \forall a_i,b_j\in\mathbb{Z},\ \forall i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n.$$

Bài toán 84 ([Quố+24], 6.2., p. 253). *(a) Với $n\in\mathbb{N}^\star$, ký hiệu ước nguyên tố lớn nhất của n^2+2020 là $p(n)$. Chứng minh tồn tại vô số $k\in\mathbb{N}^\star$ thỏa $k>p(k)\sqrt{p(k)}=p(k)^{\frac{3}{2}}$. (b) Có thể mở rộng 2020 thành số nào để kết luận bài toán vẫn đúng?*

Comment. Đây là 1 bài toán mang nặng tính xây dựng dãy số thỏa mãn yêu cầu.
Bổ đề sau có thể có ích trong việc liên hệ 1 số tính chất của các số nguyên tố dạng $4k+1$ với các số nguyên tố dạng $4k+3$.

Lemma 2 (An algebraic identity). $1+a(4a+3)^2=(a+1)(4a+1)^2$, $\forall a\in\mathbb{R}$.

5 Combinatorics – Tổ Hợp

Bài toán 85 (Consecutive coin toss – Gieo các đồng xu liên tiếp). *Cho $n,k\in\mathbb{N}^\star$, $k\le n$. Tung 1 đồng xu đồng chất ngẫu nhiên n lần. Tính xác suất lý thuyết của sự kiện: (a) Toàn bộ đều là mặt sấp (ngửa). (b) Có đúng k lần xuất hiện mặt sấp (ngửa). (c) Có ít nhất k lần xuất hiện mặt sấp (ngửa). (d) Có đúng k lần xuất hiện mặt sấp (ngửa) liên tiếp nhau. (e) Có ít nhất k lần xuất hiện mặt sấp (ngửa) liên tiếp nhau.*

Giải. Gọi $X_i \in \{S, N\}$ là biến cố ngẫu nhiên biểu diễn mặt đồng xu trong lần tung thứ i, $\forall i = 1, \ldots, n$. Không gian mẫu: $|\Omega| = \prod_{i=1}^n 2 = 2^n$. (a) Vì chỉ có 1 trường hợp thuận lợi là $(S, S, \ldots, S)$ nên $\mathbb{P}(X_i = S,\ \forall i = 1, \ldots, n) = \mathbb{P}(|\{i; X_i = S\}| = n) = \frac{1}{2^n}$. Tương tự, vì chỉ có 1 trường hợp thuận lợi là $(N, N, \ldots, N)$ nên $\mathbb{P}(X_i = N,\ \forall i = 1, \ldots, n) = \mathbb{P}(|\{i; X_i = N\}| = n) = \frac{1}{2^n}$. (b) $\mathbb{P}(|\{i; X_i = S\}| = k) = \mathbb{P}(|\{i; X_i = N\}| = k) = \frac{C_n^k}{2^n}$, $\forall k = 0, \ldots, n$. (c) $\mathbb{P}(|\{i; X_i = S\}| \ge k) = \mathbb{P}(|\{i; X_i = N\}| \ge k) = \frac{C_n^k + C_n^{k+1} + \cdots + C_n^n}{2^n} = \frac{\sum_{i=k}^n C_n^i}{2^n}$, $\forall k = 0, \ldots, n$. (d) $\mathbb{P} = \frac{n-k+1}{2^n}$. (e) $\mathbb{P} = \frac{\sum_{i=k}^n (n-i+1)}{2^n} = \frac{(n+1)(n-k+1) - \frac{(n+k)(n-k+1)}{2}}{2^n}$. □

Bài toán 86 (Simultaneous coin toss – Gieo các đồng xu đồng thời)**.** *Cho $n, k \in \mathbb{N}^\star$, $k \le n$. Tung đồng thời n đồng xu đồng chất ngẫu nhiên. Tính xác suất lý thuyết của sự kiện: (a) Toàn bộ đều là mặt sấp (ngửa). (b) Có đúng k lần xuất hiện mặt sấp (ngửa). (c) Có ít nhất k lần xuất hiện mặt sấp (ngửa).*

Giải. Gọi X là biến cố ngẫu nhiên chỉ số mặt S xuất hiện khi tung đồng thời n đồng xu. (a) $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{n+1}$. (b) $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n+1}$ □

Bài toán 87 (Consecutive 2 dice rolls – Gieo 2 xúc xắc lần lượt)**.** *Gieo lần lượt 2 con xúc xắc. Tính xác suất lý thuyết của sự kiện: (a) 2 mặt có cùng số chấm, khác số chấm. (b) Số chấm 2 mặt có cùng tính chẵn lẻ, khác tính chẵn lẻ. (c) Số chấm 2 mặt đều là số nguyên tố, đều là hợp số, có ít nhất 1 số nguyên tố, có ít nhất 1 hợp số. (d) Số chấm 1 mặt là ước (bội) của số chấm trên mặt còn lại. (e) Tổng số chấm 2 mặt bằng $n \in \mathbb{N}$.*

Ans. (e) $f(n) = (\min\{n-1, 6\} - \max\{n-6, 1\} + 1)\mathbf{1}_{n \in \{2,3,\ldots,12\}}$.

Bài toán 88 (Simultaneous 2 dice rolls – Gieo 2 xúc xắc đồng thời)**.** *Gieo đồng thời 2 con xúc xắc. Tính xác suất lý thuyết của sự kiện: (a) 2 mặt có cùng số chấm, khác số chấm. (b) Số chấm 2 mặt có cùng tính chẵn lẻ, khác tính chẵn lẻ. (c) Số chấm 2 mặt đều là số nguyên tố, đều là hợp số, có ít nhất 1 số nguyên tố, có ít nhất 1 hợp số. (d) Số chấm 1 mặt là ước (bội) của số chấm trên mặt còn lại. (e) Tổng số chấm 2 mặt bằng $n \in \mathbb{N}$.*

Bài toán 89 (Consecutive n dice rolls – Gieo n xúc xắc lần lượt)**.** *Gieo lần lượt $n \in \mathbb{N}^\star$ con xúc xắc. Tính xác suất lý thuyết của sự kiện: (a) n mặt có cùng số chấm. (b) n mặt có khác số chấm. (c) Số chấm n mặt có cùng tính chẵn lẻ. (d) Số chấm 1 mặt là ước (bội) của số chấm trên các mặt còn lại. (e) Tổng số chấm n mặt bằng $a \in \mathbb{N}$.*

Bài toán 90 (Simultaneous n dice rolls – Gieo n xúc xắc đồng thời)**.** *Gieo đồng thời $n \in \mathbb{N}^\star$ con xúc xắc. Tính xác suất lý thuyết của sự kiện: (a) n mặt có cùng số chấm. (b) n mặt có khác số chấm. (c) Số chấm n mặt có cùng tính chẵn lẻ. (d) Số chấm 1 mặt là ước (bội) của số chấm trên các mặt còn lại. (e) Tổng số chấm n mặt bằng $a \in \mathbb{N}$.*

Bài toán 91 (Squares & rectangles with same perimeter – Hình vuông & hình chữ nhật cùng chu vi)**.** *Cho $n \in \mathbb{N}^\star$. Viết n thành tổng 2 số: $n = a + b$. Tính xác suất để a, b cùng là độ dài cạnh của 1 hình vuông, xác suất để a, b là độ dài 2 cạnh của 1 hình chữ nhật nếu: (a) $a, b \in \mathbb{N}^\star$. (b) $a, b \in \mathbb{N}$.*

Bài toán 92 (Squares & rectangles with same area – hình vuông & hình chữ nhật cùng diện tích)**.** *Cho $a \in \mathbb{N}^\star, a \ge 2$ có phân tích thừa số nguyên tố $a = \prod_{i=1}^n p_i^{a_i} = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n}$ với p_i là số nguyên tố, $a_i \in \mathbb{N}^\star$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. (a) Viết ngẫu nhiên a thành tích của 2 số: $a = bc$. Tính xác suất để b, c là độ dài 2 cạnh của 1 hình chữ nhật, xác suất để b, c cùng là độ dài cạnh của 1 hình vuông nếu: (i) $b, c \in \mathbb{N}$. (ii) $b, c \in \mathbb{Z}$. (b) Lấy ngẫu nhiên 2 số $b, c \in \text{Ư}(a)$. Tính xác suất để phân số $\frac{b}{c}$: (i) tối giản. (ii) không tối giản.*

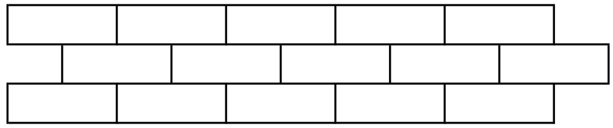
Definition 4 (Prime-counting function)**.** *The* prime-counting function *is the function counting the number of prime numbers less than or equal to some real number x, denoted by $\pi(x) \coloneqq |\{p \in \mathbb{N}^\star | p \text{ is a prime}, \ p \le x\}|$.*

Định nghĩa 18 (Hàm đếm số số nguyên tố)**.** Hàm đếm số số nguyên tố *là hàm đếm số số nguyên tố nhỏ hơn hoặc bằng $x \in \mathbb{R}$, ký hiệu là $\pi(x) \coloneqq |\{p \in \mathbb{N}^\star | p \text{ là số nguyên tố}, \ p \le x\}|$.*

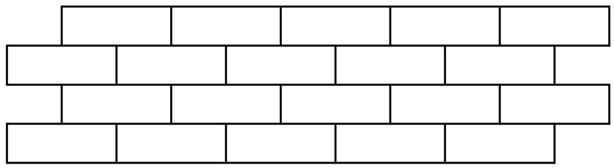
Bài toán 93 (Prime, composite – số nguyên tố, hợp số)**.** *Cho $m, n, k \in \mathbb{N}^\star$. Đặt $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ là tập hợp n số nguyên dương đầu tiên, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. (a) Lấy m số từ A_n. Tính xác suất để m số này cùng chẵn, cùng lẻ, có ít nhất 1 số chẵn, có ít nhất 1 số lẻ, có đúng k số chẵn, có đúng k số lẻ, có ít nhất k số chẵn, có ít nhất k số lẻ. (b) Lấy m số phân biệt từ A_n. Tính xác suất để m số này đều là số nguyên tố, đều là hợp số, có đúng k số nguyên tố, có đúng k hợp số, có ít nhất 1 số nguyên tố, có ít nhất 1 hợp số, có ít nhất k số nguyên tố, có ít nhất k hợp số. (c) Viết chương trình* Pascal, Python C/C++ *để mô phỏng việc tính các xác suất đó.*

Bài toán 94 (Odd, even – chẵn, lẻ)**.** *Cho $a, b \in \mathbb{Z}, a < b$, $n, k \in \mathbb{N}^\star, n \ge 2, k \le n$. Đặt $A = [a, b] \cap \mathbb{Z} = \{a, a+1, a+2, \ldots, b-1, b\}$. (a) Lấy 2 số từ tập A. Xét 2 trường hợp phân biệt, không nhất thiết phân biệt. Tính xác suất để 2 số này cùng tính chẵn lẻ, khác tính chẵn lẻ. (b) Lấy n số từ tập A. Tính xác suất để n số này đều chẵn, đều lẻ, cùng tính chẵn lẻ, có đúng k số chẵn, k số lẻ, có ít nhất k số chẵn, k số lẻ. (c) Viết chương trình* Pascal, Python C/C++ *để mô phỏng việc tính các xác suất đó.*

Bài toán 95 (VMC2024B4)**.** *(a) Đếm số cách chọn ra 3 viên gạch, mỗi viên từ 1 hàng trong 3×5 viên gạch xếp xen kẽ, sao cho không có 2 viên gạch nào được lấy ra nằm kề nhau (2 viên gạch được gọi là kề nhau nếu có chung 1 phần của 1 cạnh).*



(b) Đếm số cách chọn ra 4 viên gạch, mỗi viên từ 1 hàng trong 4×5 viên gạch xếp xen kẽ, sao cho không có 2 viên gạch nào được lấy ra nằm kề nhau.



(c) Cho $m, n \in \mathbb{N}^\star$. Đếm số cách chọn ra m viên gạch, mỗi viên từ 1 hàng trong $m \times n$ viên gạch xếp xen kẽ, sao cho không có 2 viên gạch nào được lấy ra nằm kề nhau. (d) Cho $m, n, k \in \mathbb{N}^\star$. Đếm số cách chọn ra k viên gạch, không nhất thiết mỗi viên từ 1 hàng trong $m \times n$ viên gạch xếp xen kẽ, sao cho không có 2 viên gạch nào được lấy ra nằm kề nhau. (e*) Mở rộng cho trường hợp $m \times n$ với số gạch mỗi hàng có thể khác nhau, cụ thể là hàng i chứa $a_i \in \mathbb{N}^\star$ viên gạch, $\forall i = 1, \ldots, m$ với 2 trường hợp: (i) Mỗi viên từ 1 hàng. (ii) Lấy $k \in \mathbb{N}^\star$ viên gạch, mỗi hàng có thể lấy nhiều viên.

Nhận xét 5 (Left-right symmetry – Đối xứng trái phải)**.** *Nếu số viên gạch của mỗi hàng bằng nhau & được sắp xen kẽ như (a) & (b), thì thứ tự viên gạch đầu tiên từ bên trái của mỗi hàng lồi ra hay thụt vào không quan trọng, vì có thể lấy đối xứng gương trái–phải để chuyển đổi 2 trường hợp đó. Cũng chú ý đến tính đối xứng trên–dưới (top-bottom symmetry).*

Chứng minh. Số cách chọn gạch từ 3 hàng, mỗi hàng n viên gạch: $(n-1)(n-2)^2 + (n-1)^2 = (n-1)(n^2-3n+3)$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $n \geq 2$. Số cách chọn gạch từ 4 hàng, mỗi hàng $n \in \mathbb{N}^\star$ viên gạch: $(n^2-3n+3)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $n \geq 2$. □

- C++ codes:
  - (DKAK): `https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/VMC/C++/brick_DPAK.cpp`.
  - (NLDK): `https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/VMC/C++/brick_NLDK.cpp`.

5.1 Pascal's rule – Quy tắc Pascal

In mathematics, *Pascal's rule* (or *Pascal's formula*) is a combinatorial identity about binomial coefficients. The binomial coefficients are the numbers that appear in Pascal's triangle.

Theorem 8 (Pascal's rule)**.** *One has*

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k, \ \textit{i.e.}, \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}, \ \forall n, k \in \mathbb{N}^\star, \tag{Pasr}$$

where $\binom{n}{k}$ is the binomial coefficient, namely the coefficient of the x^k term in the expansion of $(1+x)^n$. There is no restriction on the relative sizes of n, k; in particular, (Pasr) *remains valid when $n < k$ since $\binom{n}{k} = 0$ whenever $n < k$.*

Together with the boundary conditions $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, Pascal's rule determines that

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \ \forall n, k \in \mathbb{N}, \ 0 \leq k \leq n.$$

In this sense, Pascal's rule is the recurrence relation that defines the binomial coefficients.

Problem 1. *Prove Pascal's rule* (Pasr)*.*

For a combinatorial- & an algebraic proofs of Pascal's rule, see, e.g., Wikipedia/Pascal's rule.

A combinatorial proof of Pascal's rule when $n \in \mathbb{N}^\star$. $\binom{n}{k}$ equals the number of subsets with k elements from a set with n elements. Suppose 1 particular element is uniquely labeled X in a set with n elements. To construct a subset of k elements containing X, include X & choose $k-1$ elements from the remaining $n-1$ elements in the set. There are $\binom{n-1}{k-1}$ such subsets. To construct a subset of k elements not containing X, choose k elements from the remaining $n-1$ elements in the set. There are $\binom{n-1}{k}$ such subsets. Every subset of k elements either contains X or not. The total number of subsets with k elements in a set of n elements is the sum of the number of subsets containing X & the number of subsets that do not contain X, $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. This equals $\binom{n}{k}$, hence (Pasr) holds. □

1st algebraic proof of Pascal's rule when $n \in \mathbb{N}^\star$.

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = (n-1)!\left(\frac{1}{k!(n-1-k)!}+\frac{1}{(k-1)!(n-k)!}\right)\\ &= (n-1)!\left(\frac{n-k}{k!(n-k)!}+\frac{k}{n!(n-k)!}\right) = (n-1)!\frac{n}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

□

2nd algebraic proof of Pascal's rule when $n \in \mathbb{C}$. An alternative algebraic proof using the alternative definition of binomial coefficients $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$, which is used as the extended definition of the binomial coefficient when $n \in \mathbb{C}$, hence (Pasr) holds more generally for $n \in \mathbb{C}$. □

Pascal's rule can be generalized to multinomial coefficients.

Theorem 9 (Generalized Pascal's rule)**.** *For any $p \in \mathbb{N}$, $p \ge 2$, $k_1,\ldots,k_p \in \mathbb{N}$, $n = \sum_{i=1}^p k_i \ge 1$,*

$$\binom{n-1}{k_1-1,k_2,k_3,\ldots,k_p}+\binom{n-1}{k_1,k_2-1,k_3,\ldots,k_p}+\cdots+\binom{n-1}{k_1,k_2,k_3,\ldots,k_p-1}=\binom{n-1}{k_1,k_2,k_3,\ldots,k_p}, \tag{gPasr}$$

where $\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_p}$ is the coefficient of the $\prod_{i=1}^p x_i^{k_i}$ term in the expansion of $\left(\sum_{i=1}^p x_i\right)^n$.

Problem 2. *Prove generalized Pascal's rule (gPasr) in both combinatorial & algebraic ways.*

6 Miscellaneous

6.1 Selected VMC problems

Problem 3 (VMC1993, Day 2, Problem 3)**.** *Let $p(x)$ be a nonconstant polynomial with real coefficients. Prove that if the system of equations*

$$\begin{cases}\int\limits_0^x p(t)\sin t dt = 0\\ \int\limits_0^x p(t)\cos t dt = 0\end{cases} \tag{22}$$

has real roots then the number of real roots must be finite.

Hint. Let

$$\begin{aligned}U_k &= \int\limits_0^x p^{(k)}(t)\sin t dt\\ V_k &= \int\limits_0^x p^{(k)}(t)\cos t dt\end{aligned} \tag{23}$$

Suppose that $\deg p = n$, then we have $U_k = 0, V_k = 0, \forall k > n$. Use integration by parts formula, get

$$\begin{cases}U_k = -p^{(k)}(t)\cos t\Big|_0^x + \int\limits_0^x p^{(k+1)}(t)\cos t dt\\ V_k = p^{(k)}(t)\sin t\Big|_0^x - \int\limits_0^x p^{(k+1)}(t)\sin t dt\end{cases} \tag{24}$$

Deduce that

$$\begin{cases}U_k = -p^{(k)}(t)\cos t\Big|_0^x + V_{k+1}\\ V_k = p^{(k)}(t)\sin t\Big|_0^x - U_{k+1}\end{cases} \tag{25}$$

$$\begin{cases}U_k = -p^{(k)}(t)\cos t\Big|_0^x + p^{(k+1)}(t)\sin t\Big|_0^x - U_{k+2}\\ V_k = p^{(k)}(t)\sin t\Big|_0^x + p^{(k+1)}(t)\cos t\Big|_0^x - V_{k+2}\end{cases}, \forall k \in \mathbb{N} \tag{26}$$

$$\begin{cases}U_0 = -\sum\limits_{k=0}^{2k\le n} p^{(2k)}(t)\cos t\Big|_0^x + \sum\limits_{k=0}^{2k+1\le n} p^{(2k+1)}(t)\sin t\Big|_0^x\\ V_k = \sum\limits_{k=0}^{2k\le n} p^{(2k)}(t)\sin t\Big|_0^x + \sum\limits_{k=0}^{2k+1\le n} p^{(2k+1)}(t)\cos t\Big|_0^x\end{cases} \tag{27}$$

Put

$$\left\{\begin{array}{l} p_1\left(t\right)=\sum\limits_{k=0}^{2k\le n}p^{(2k)}\left(t\right)\\ p_2\left(t\right)=\sum\limits_{k=0}^{2k+1\le n}p^{(2k+1)}\left(t\right)\end{array}\right. \tag{28}$$

Consider the case n is even (the case n odd is similar). Since n is even, easy to get $\deg p_1 = n, \deg p_2 = n-1$. Rewrite the formula (24) in the form

$$\left\{\begin{array}{l} U_0=-p_1\left(t\right)\cos t|_0^x+p_2\left(t\right)\sin t|_0^x\\ V_0=p_1\left(t\right)\sin t|_0^x+p_2\left(t\right)\cos t|_0^x\end{array}\right. \tag{29}$$

Call X is the solution of the given system of equations

$$\left\{\begin{array}{l} U_0=0\\ V_0=0\end{array}\right. \tag{30}$$

For $\forall x\in X$ we have

$$\left\{\begin{array}{l} -p_1\left(t\right)\cos t|_0^x+p_2\left(t\right)\sin t|_0^x=0\\ p_1\left(t\right)\sin t|_0^x+p_2\left(t\right)\cos t|_0^x=0\end{array}\right. \tag{31}$$

Put $p_1\left(0\right)=a, p_2\left(0\right)=b$. Then

$$\left\{\begin{array}{l} p_2\left(x\right)\sin x-p_1\left(x\right)\cos x=-a\\ p_2\left(x\right)\cos x+p_1\left(x\right)\sin x=b\end{array}\right. \tag{32}$$

Deduce that

$$\left(p_2\left(x\right)\sin x-p_1\left(x\right)\cos x\right)^2+\left(p_2\left(x\right)\cos x+p_1\left(x\right)\sin x\right)^2=a^2+b^2 \tag{33}$$

Hence

$$p_1^2\left(x\right)+p_2^2\left(x\right)-\left(a^2+b^2\right)=0 \tag{34}$$

Call Y is the set of solutions of poynomial

$$Q\left(x\right)=p_1^2\left(x\right)+p_2^2\left(x\right)-\left(a^2+b^2\right) \tag{35}$$

Deduce that $X\subset Y$. Since $\deg Q\left(x\right)=2n$, $|X|\le|Y|\le 2n$, that means X has finite elements. □

Hint 2. Rewrite the system of equations in the form

$$F\left(x\right):=\int\limits_0^x p\left(t\right)e^{it}dt=0 \tag{36}$$

We have

$$F'\left(x\right)=p\left(x\right)e^{it} \tag{37}$$

so the equation $F'\left(x\right)=0$ has finite solutions. Deduce that the equation $F\left(x\right)=0$ has finite solutions.

Problem 4 (VMC1994, Algebra, Problem 6)**.** *Let $A\in\mathcal{M}_2\left(K\right)$ for which $A^2=A$. Prove that the necessary and sufficient condition for $AX-XA=0_2$ (where $X\in\mathcal{M}_2\left(K\right)$) is that there exists a $X_0\in\mathcal{M}_2\left(K\right)$ for which*

$$X=AX_0+X_0A-X_0$$

Hint. $X_0=2AX-X$.

Problem 5 (VMC1994, Analysis, Problem 3b)**.** *Let a function $f(x)$ which is differentiable on $[a,b]$ and $\forall x\in[a,b], |f'(x)|\le|f(x)|$. Prove that*

$$f\left(x\right)=0,\forall x\in[a,b] \tag{38}$$

Hint. Suppose that x_0 is the solution of the equation $f(x)=0$ for $x_0\in[a,b]$. Use Taylor's expansion of f with x_0, get

$$f\left(x\right)=f\left(x_0\right)+f'\left(c\right)\left(x-x_0\right)=f'\left(c\right)\left(x-x_0\right) \tag{39}$$

Consider the close interval $G := \left[x_0 - \frac{1}{2}, x_0 + \frac{1}{2}\right] \cap [a,b]$. Since $f(x)$ is differentiable in $[a,b]$, $f(x)$ has maximum in G. Suppose that

$$|f(x_m)| = \max_{x \in G} |f(x)|, x_m \in G \tag{40}$$

Deduce that

$$|f(x_m)| = |f'(c_m)| |x_m - x_0| \le |f(c_m)| |x_m - x_0| \le \frac{1}{2} |f(c_m)| \le \frac{1}{2} |f(x_m)| \tag{41}$$

So $f(x) = 0, \forall x \in G$. We have proved that
If for a point x in $[a,b]$ for which $f(x) = 0$, then $f(x) = 0$ in the neighborhood of x with radius $\frac{1}{2}$.
By considering different points x_0 for which $f(x_0) = 0$, tends to a and b, after finite steps, we have $f(x) = 0, \forall x \in [a,b]$.

Problem 6 (VMC1995, Algebra, Problem 5)**.** *Let $A = (a_{ij})_{n \times n}$ $(n > 1)$ have rank r. Consider $A^* = (A_{ij})$ where A_{ij} is cofactor of element a_{ij} in A. Find the rank of A^*.*

Hint. Divide into 3 cases

- **Case $r \le n-2$.** A_{ij} is the determinant of $(n-1) \times (n-1)$ matrix have rank $\le n-2$, so $A_{ij} = 0, \forall i,j$ and $A^* = 0$. Deduce that $rank A^* = 0$. In addition, $\det A = 0, AA^* = 0$.
- **Case $r = n-1$.** A have a sub-determinant degree $n-1$ is nonzero, so $A^* \ne 0$. Deduce that $rank A^* \ge 1$. Conclude that $rank A^* = 1$. (?)
- **Case $r = n$.** $\det A \ne 0$. Since $A^t A^* = |A| E$, $|A^*| \ne 0$ and $rank(A^*) = n$.

Three case are true. Done.

Problem 7 (VMC 1995, Analysis, Problem 5)**.** *Let a continuous function $f(x)$ on $[a,b]$. Prove that*

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x)| = \lim_{p \to \infty} \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{42}$$

Hint. Since $f(x)$ is continuous on the compact set $[a,b]$ so $\exists c \in [a,b]$ for which

$$|f(c)| = \max_{x \in [0,1]} |f(x)| = M \tag{43}$$

Suppose that $a < c < b$, have

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{44}$$

Then

$$\left(\int_{c-\delta}^{c+\delta} \left(M - \frac{\varepsilon}{4}\right) dx \right)^{\frac{1}{n}} < \left(\int_{c-\delta}^{c+\delta} |f^n(x)| dx \right)^{\frac{1}{n}} \tag{45}$$

$$< \left(\int_a^b |f^n(x)| dx \right)^{\frac{1}{n}} \tag{46}$$

$$< \left(\int_a^b M^n dx \right)^{\frac{1}{n}} \tag{47}$$

hence

$$(2\delta)^{\frac{1}{n}} \left(M - \frac{\varepsilon}{4}\right) < \left(\int_a^b |f^n(x)| dx \right)^{\frac{1}{n}} < M(b-a)^{\frac{1}{n}} \tag{48}$$

Have

$$\lim_{n \to \infty} (2\delta)^{\frac{1}{n}} = 1, \lim_{n \to \infty} (b-a)^{\frac{1}{n}} = 1 \tag{49}$$

so

$$\left(\int_a^b |f^n(x)|dx\right)^{\frac{1}{n}} = M \tag{50}$$

The case $c = a$, we have

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{51}$$

then we proceeds similarly the first case. The case $c = b$ is similar, too.

Problem 8 (VMC1998, Algebra, Problem 3). *Suppose that A is $n+1 \times n+2$ matrix defined by*

$$A = \begin{pmatrix} C_0^0 & C_1^0 & C_2^0 & \cdots & C_n^0 & C_{n+1}^0 \\ 0 & C_1^1 & C_2^1 & \cdots & C_n^1 & C_{n+1}^1 \\ 0 & 0 & C_2^2 & \cdots & C_n^2 & C_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_n^n & C_{n+1}^n \end{pmatrix} \tag{52}$$

where $C_n^k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ (the left one is used in Vietnam, the right is used internationally).
Call D_k is the determinant which is obtained from A by deleting the k-th column ($k = 1, 2, ..., n+2$).
Prove that $D_k = C_{n+1}^{k-1}$

Hint. Add the last row

$$1, x, x^2, \ldots, x^{n+1} \tag{53}$$

to matrix A, we obtain the square matrix degree $n+2$. Call D_{n+2} is the determinant of the 'new matrix'. Transform D_{n+2}: Take the k-th, multiply with -1, then add to $k+1$-th column, for each $k = n+1, n, \ldots, 1$, we obtain

$$D_{n+2} = (x-1) D_{n+1} = \cdots = (x-1)^{n+1} \tag{54}$$

Deduce that

$$D_{n+2} = \sum_{k=1}^{n+2} (-1)^{n-k} C_{n+1}^{k-1} x^{k-1} \tag{55}$$

On the other hand, if we expand D_{n+2} respect to the last row, we have

$$D_{n+2} = \sum_{k=1}^{n+2} (-1)^{n-k} D_k x^{k-1} \tag{56}$$

Conclude that $D_k = C_{n+1}^{k-1}$.

Problem 9 (VMC 1998, Analysis, Problem 1). *Let $f(x) \in C^1([0,1])$ and $f(0) = 0$. Prove that*

$$\int_0^1 |f(t) f'(t)|dt \le \frac{1}{2}\int_0^1 (f'(t))^2 dt \tag{57}$$

Hint. Consider

$$F(x) = \int_0^x |f(t)| |f'(t)|dt \tag{58}$$

$$G(x) = \frac{x}{2}\int_0^x (f'(t))^2 dt \tag{59}$$

Then

$$F'(x) = |f(x)| |f'(x)| \tag{60}$$

$$G'(x) = \frac{x}{2}(f'(x))^2 + \frac{1}{2}\int_0^x (f'(t))^2 dt \tag{61}$$

On the other hand

$$f(x)=\int\limits_0^x f'(t)dt, \forall x\in[0,1] \tag{62}$$

Use Cauchy inequality

$$|f(x)|=\left|\int\limits_0^x f'(t)dt\right|\le\left(\int\limits_0^x dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_0^x (f'(t))^2dt\right)^{\frac{1}{2}} \tag{63}$$

Then

$$|f(x)f'(x)|\le\sqrt{x}\left(\int\limits_0^x (f'(t))^2dt\right)^{\frac{1}{2}}|f'(x)| \tag{64}$$

Deduce that

$$|f(x)f'(x)|\le\frac{1}{2}\int\limits_0^x (f'(t))^2dt+\frac{x}{2}(f'(x))^2 \tag{65}$$

That means

$$F'(x)\le G'(x), \forall x\in[0,1] \tag{66}$$

$$F(1)-F(0)\le G(1)-G(0) \tag{67}$$

and

$$\left|\int\limits_0^1 f(t)f'(t)dt\right|\le\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (f'(t))^2dt \tag{68}$$

Problem 10 (VMC2000, Algebra, Problem 4)**.** *Let A be a square matrix degree n which has all elements in the main diagonal equal to* 0*, and other elements are equal to* 1 *or* 2000*.*
Prove that $rankA=n$ or $rankA=n-1$.

Hint. Consider the matrix $B\in\mathcal{M}_n$ which has all elements equals to 1. Then

$$A-B=\{c_{ij}\}, c_{ij}\in\{-1,0,1999\} \tag{69}$$

Then

$$\det(A-B)=(-1)^n\,(\mathrm{mod}1999) \tag{70}$$

Deduce that $\det(A-B)\neq0$ and $n=rank\,(A-B)\le rankA+rank\,(-B)=rankA+1$.

Problem 11 (VMC 2001, Algebra, Problem 4)**.** *Denote $\langle a,b\rangle$ for scalar product of two vectors $a,b\in\mathbb{R}$. Let $a_1,a_2,\dots,a_k\in\mathbb{R}^n$. Put*

$$A=\begin{pmatrix}\langle a_1,a_1\rangle & \langle a_1,a_2\rangle & \cdots & \langle a_1,a_{k-1}\rangle & \langle a_1,a_k\rangle\\ \langle a_2,a_1\rangle & \langle a_2,a_2\rangle & \cdots & \langle a_2,a_{k-1}\rangle & \langle a_2,a_{k-1}\rangle\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \langle a_{k-1},a_1\rangle & \langle a_{k-1},a_2\rangle & \cdots & \langle a_{k-1},a_{k-1}\rangle & \langle a_{k-1},a_k\rangle\\ \langle a_k,a_1\rangle & \langle a_k,a_2\rangle & \cdots & \langle a_k,a_{k-1}\rangle & \langle a_k,a_k\rangle\end{pmatrix} \tag{71}$$

Prove that: (a) $\det A\ge0$*. (b) A is a symmetric matrix and its all eigenvalues are nonzero.*

Hint. **1.** Write a_s as

$$a_s=(a_{s1},a_{s2},\dots,a_{sn}), s=1,2,\dots,k \tag{72}$$

Then

$$A=\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^n a_{1j}^2 & \sum\limits_{j=1}^n a_{1j}a_{2j} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^n a_{1j}a_{kj}\\ \sum\limits_{j=1}^n a_{2j}a_{1j} & \sum\limits_{j=1}^n a_{2j}^2 & \cdots & \sum\limits_{j=1}^n a_{2j}a_{kj}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sum\limits_{j=1}^n a_{kj}a_{1j} & \sum\limits_{j=1}^n a_{kj}a_{2j} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^n a_{kj}^2\end{pmatrix} \tag{73}$$

Deduce that

$$\det A = \sum_{1 \le j_1, j_2, \ldots, j_k \le n} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{kj_k} \begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_k} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{kj_1} & a_{kj_2} & \cdots & a_{kj_k} \end{vmatrix} \tag{74}$$

Let $A_{j_1<j_2<\cdots<j_k}$ are matrices in the right hand side of the expression (74) respect to $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ which is fixed and sorted increasingly. Then, all the terms have the same index set $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ have the sum equals to

$$\begin{aligned} &\sum_{j_1<j_2<\cdots<j_k} (-1)^{inv(j_1<j_2<\cdots<j_k)} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{kj_k} \det\left(A_{j_1<j_2<\cdots<j_k}\right) \\ &= \left(\det\left(A_{j_1<j_2<\cdots<j_k}\right)\right)^2 \end{aligned} \tag{75}$$

From the expression (74), we obtain

$$\det A = \sum_{1 \le j_1<j_2<\cdots<j_k \le n} \left(\det\left(A_{j_1<j_2<\cdots<j_k}\right)\right)^2 \ge 0 \tag{76}$$

2. Scalar product is a symmetric bi-linear form, that means $\langle a_i, a_j \rangle = \langle a_j, a_i \rangle$. So, A is symmetric matrix and all its eigenvalues are real. By the proof above, all sub-determinants of A are nonzero. Therefore, the characteristic polynomial of A has the form

$$P_A(t) = (-1)^k t^k + (-1)^{k-1} a_1 t^{k-1} + \cdots - a_{k-1} t + a_k \tag{77}$$

where coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_k$ are nonzero. Deduce that $P_A(t) > 0$ when $t < 0$. So all eigenvalues of A are nonzero.

Problem 12 (VMC2001, Analysis, Problem 4)**.** *Given f is defined on $\mathbb{R}$ and have 2-th derivative on $\mathbb{R}$ satisfying $f(x) + f''(x) \ge 0, \forall x \in R$. Prove*

$$f(x) + f(x+\pi) \ge 0, \forall x \in R \tag{78}$$

Hint. For each fixed $x \in \mathbb{R}$, consider the function

$$g(y) = f'(y) \sin(y-x) - f(y) \cos(y-x) \tag{79}$$

Have

$$g'(y) = \left[f''(y) + f(y)\right] \sin(y-x) \ge 0, \forall y \in [x, x+\pi] \tag{80}$$

Deduce that $g(y)$ is monotonically increasing on $[x, x+\pi]$. So $g(x) \le g(x+\pi)$, that means $f(x) + f(x+\pi) \ge 0$.

Problem 13 (VMC2003, Algebra, Problem 7)**.** *Given a real coefficients polynomial $P(x)$ have degree n $(n \ge 1)$ have m real roots. Prove that the polynomial*

$$Q(x) = \left(x^2+1\right) P(x) + P'(x) \tag{81}$$

has at least m real roots.

Hint. Consider the function

$$f(x) = e^{\frac{x^3}{3}+x} P(x) \tag{82}$$

The set of real roots of $f(x) = 0$ and the set of real roots of $P(x)$ is the same. By Rolle theorem, the equation

$$f'(x) = e^{\frac{x^3}{3}+x} \left[P(x) + \left(x^2+1\right) P'(x)\right] = 0 \tag{83}$$

has at least $m-1$ real roots, or the equation

$$P'(x) + \left(x^2+1\right) P(x) = 0 \tag{84}$$

has as least $m-1$ real roots. Consider two cases

- **Case 1.** m **is even.** If n is odd then $P(x)$ has at least $m+1$ real roots, absurd. So, n must be even. Then

  $$P'(x) + \left(x^2+1\right) P(x) \tag{85}$$

  has degree equal to $n+2$ (even number) and has $m-1$ (odd number) real roots. Deduce that this polynomial must have at least $(m-1)+1 = m$ real roots.

- **Case 2. m is odd.** If n is even then $P(x)$ has at least $m+1$ real roots, absurd. So n must be odd. Then

$$P'(x) + \left(x^2+1\right) P(x) \tag{86}$$

has degree $n+2$ (odd number) and has $m-1$ (even number) real roots. Deduce that this polynomial must have at least $(m-1)+1=m$ real roots.

In both cases, we have desired result.

Problem 14 (VMC 2004, Analysis, Problem 5). *Let $P(x), Q(x), R(x)$ are real coefficients polynomials which have degree $3, 2, 3$ respectively, satisfying the condition*

$$(P(x))^2 + (Q(x))^2 = (R(x))^2 \tag{87}$$

How many real roots which the polynomial

$$T(x) = P(x)\, Q(x)\, R(x) \tag{88}$$

has at least (including repetition roots)?

Hint. Without loss of generality (w.l.o.g.), we can suppose that the coefficients respect of the maximal degree terms of polynomials P, Q, R are positive. Firstly, we prove that $Q(x)$ always have 2 real roots. We have $Q^2 = (R-P)(R+P)$. Since $\det P = \det R = 3$, $\det(R+P) = 3$. Since $\deg Q^2 = 4$, $\deg(R-P) = 1$. Therefore, Q^2 has real roots, so Q also has real roots. Since $\deg Q = 2$, Q has exactly 2 roots. Next, we prove that $P(x)$ always have 3 real roots. We have $P^2 = (R-Q)(R+Q)$. Since $\deg(R-Q) = \deg(R+Q) = 3$, $(R-Q)$ and $(R+Q)$ have real roots. If these two roots is distinct, P has 2 distinct real roots and the third root of P is also real. If $(R-Q)$ and $(R+Q)$ have a common real root $x=a$ then $x=a$ is root of R and Q. So,

$$R(x) = (x-a)\, R_1(x) \tag{89}$$
$$Q(x) = (x-a)\, Q_1(x) \tag{90}$$
$$P(x) = (x-a)\, P_1(x) \tag{91}$$

Put these formula into $P^2 = (R-Q)(R+Q)$, we get $P_1^2 = R_1^2 - Q_1^2$, where P_1, R_1 is quadratic, Q_1 is linear. We have

$$Q_1^2 = (R_1 - P_1)(R_1 + P_1) \tag{92}$$

Since Q_1^2 is quadratic and R_1+P_1 is quadratic, R_1-P_1 is constant polynomial. So, if $P_1(x) = ax^2+bx+c, (a>0), Q_1(x) = dx+e$, then $R_1(x) = ax^2+bx+c+k$ and

$$k\left[R_1(x) + P_1(x)\right] = (dx+e)^2 \tag{93}$$

Hence $k>0$. Take $x = -\frac{e}{d}$ in (93), we obtain

$$R_1\left(-\frac{e}{d}\right) + P_1\left(-\frac{e}{d}\right) = 0 \tag{94}$$

so $P_1\left(-\frac{e}{d}\right) = -\frac{k}{2} < 0$. Therefore, quadratic $P_1(x)$ has 2 real roots and $P(x)$ has 3 real roots.
Since P has 3 real roots, Q has 2 real roots and R is cubic (has at least 1 real root), the number of roots of $T(x)$ is larger or equal to 6. For example, if we choose

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + 2x \tag{95}$$
$$Q(x) = 2\left(x^2+2x+1\right) \tag{96}$$
$$R(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2 \tag{97}$$

then $P^2 + Q^2 = R^2$ and PQR has exactly 6 real roots.

Problem 15 (VMC 2005, Analysis, Problem 4). *Let f be a continuous function on $[0,1]$ satisfying the condition*

$$\int_x^1 f(t)dt \geq \frac{1-x^2}{2}, \forall x \in [0,1] \tag{98}$$

Prove that

$$\int_0^1 (f(x))^2 dx \geq \int_0^1 x f(x) dx \tag{99}$$

Hint. We have

$$0 \le \int\limits_0^1 (f(x) - x)^2 dx = \int\limits_0^1 (f(x))^2 dx - 2\int\limits_0^1 x f(x) dx + \frac{1}{3} \tag{100}$$

Hence

$$\int\limits_0^1 (f(x))^2 dx \ge 2\int\limits_0^1 x f(x) dx - \frac{1}{3} \tag{101}$$

Put

$$A = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_x^1 f(t) dt \right) dx \tag{102}$$

We have

$$A = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_x^1 f(t) dt \right) dx \ge \int\limits_0^1 \frac{1 - x^2}{2} dx = \frac{1}{3} \tag{103}$$

On the other hand

$$A = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_x^1 f(t) dt \right) dx = x \int\limits_0^1 f(t) dt \Bigg|_0^1 + \int\limits_0^1 x f(x) dx = \int\limits_0^1 x f(x) dx \tag{104}$$

Therefore

$$\int\limits_0^1 x f(x) dx \ge \frac{1}{3} \tag{105}$$

(101) and (105)complete the proof.

Problem 16 (VMC2005, Analysis, Problem 5)**.** *Let $f(x)$ be a function which has continuous 2-th derivative on $\mathbb{R}$, satisfying the condition $f(\alpha) = f(\beta) = a$. Prove that*

$$\max_{x \in [\alpha,\beta]} \{f''(x)\} \ge \frac{8(a - b)}{(\alpha - \beta)^2} \tag{106}$$

where $b = \min\limits_{x \in [\alpha,\beta]} \{f(x)\}$.

Hint. Since f is continuous on compact set $[\alpha, \beta]$, f attains its minimum on $[\alpha, \beta]$, that means there exists a $c \in (\alpha, \beta)$ for which $f'(c) = 0$ and $f(c) = \min\limits_{x \in [\alpha,\beta]} \{f(x)\} = b$. Use the Taylor expanding of function $f(x)$ respect to c

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(\theta(x))}{2}(x - c)^2 \tag{107}$$

Take $x = \alpha$ and $x = \beta$ into the above equality, we obtain

$$a = b + \frac{f''(\theta(\alpha))}{2}(\alpha - c)^2 \tag{108}$$

$$a = b + \frac{f''(\theta(\beta))}{2}(\beta - c)^2 \tag{109}$$

I.e.,

$$\begin{array}{l} f''(\theta(\alpha)) = \frac{2(a-b)}{(\alpha-c)^2} \\ f''(\theta(\beta)) = \frac{2(a-b)}{(\beta-c)^2} \end{array} \tag{110}$$

Multiply two inequalities, we obtain

$$f''(\theta(\alpha)) f''(\theta(\beta)) = \frac{4(a - b)^2}{(\alpha - c)^2(\beta - c)^2} \ge \frac{64(a - b)^2}{(\alpha - \beta)^2} \tag{111}$$

This inequality completes our proof.

6.2 Training problems

Problem 17. *Suppose that functional equation*

$$f\left(ax+y\right)=Af\left(x\right)+f\left(y\right),\left(aA\neq 0\right),\forall x,y\in\mathbb{R} \tag{112}$$

has non-constant solution. Prove that if a (or A) is algebraic number with minimal polynomial $P_a(t)$ (respectively, $P_A(t)$, then A is algebraic number and

$$P_a\left(t\right)\equiv P_A\left(t\right) \tag{113}$$

Hint. $f(0)=0$ and $f(ax)=Af(x)$ and by induction:

$$f\left(a^k x\right)=A^k f\left(x\right),k\in\mathbb{N} \tag{114}$$

Suppose that

$$P_a\left(t\right)=t^n+\sum_{i=0}^{n-1}r_i t^i,\left(r_0,\ldots,r_{n-1}\in\mathbb{Q}\right) \tag{115}$$

Then, by (114)

$$f\left[\left(a^n+\sum_{i=0}^{n-1}r_i a^i\right)x\right]=f\left(a^n x\right)+\sum_{i=0}^{n-1}r_i f\left(a^i x\right) \tag{116}$$

$$=\left(A^n+\sum_{i=0}^{n-1}r_i A^i\right)f\left(x\right) \tag{117}$$

Since $f(x)$ is non-constant,

$$A^n+\sum_{i=0}^{n-1}r_i A^i=0 \tag{118}$$

Hence A is algebraic number. Deduce that $P_a(t)$ is divisor of $P_A(t)$ and since $P_A(t)$ is minimal polynomial, we obtain

$$P_a\left(t\right)\equiv P_A\left(t\right). \tag{119}$$

Conversely, if A is algebraic number satisfy (118) then do the reverse process, we obtain

$$a^n+\sum_{i=0}^{n-1}r_i a^i=0 \tag{120}$$

hence (113).

Problem 18. *Do there exist functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ and $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, where g is periodically function satisfying*

$$x^3=f\left(\lfloor x\rfloor\right)+g\left(\lfloor x\rfloor\right),\forall x\in\mathbb{R} \tag{121}$$

Hint. Suppose for the contrary, f and g satisfy all above conditions. Let $T>0$ denote the periodic of g. We have

$$\left(x+T\right)^3=f\left(\lfloor x+T\rfloor\right)+g\left(\lfloor x+T\rfloor\right) \tag{122}$$

Hence

$$f\left(\lfloor x+T\rfloor\right)-f\left(\lfloor x\rfloor\right)\equiv T^3+3T^2x+3Tx^2 \tag{123}$$

For $x\in[0,\lfloor T\rfloor+1-T)$, the LHS of (123) is constant, so it give a quadratic which has infinity roots. Therefore, $T=0$, absurd.

Problem 19. *Let α_1,α_2 and β_1,β_2 satisfy*

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\in\mathbb{Q},\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\leq\frac{\beta_2}{\beta_1} \tag{124}$$

If $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfies

$$\begin{cases} f\left(x+\alpha_1\right)\leq f\left(x\right)+\beta_1 \\ f\left(x+\alpha_2\right)\geq f\left(x\right)+\beta_2 \end{cases},\forall x\in\mathbb{R} \tag{125}$$

then $g\left(x\right)=f\left(x\right)-\frac{\beta_2}{\alpha_1}x$ is periodical function.

6.3 Interpolating polynomial

Problem 20 (Interpolation 1 (Lagrange interpolating polynomial).)**.** *Given $x_1, x_2, \ldots, x_n$ be distinct numbers. Find all polynomials $P(x)$ with $\deg P(x) \le n-1$ satisfying $P(x_k) = a_k \in \mathbb{R}, k = 1, ..., n$ ($a_1, ..., a_n$ are given).*

Hint. The Lagrange interpolating polynomial

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) \frac{\prod\limits_{k=1,k\neq i}^{n} (x - x_k)}{\prod\limits_{k=1,k\neq i}^{n} (x_i - x_k)} \tag{126}$$

Uniqueness is obtained by: *If two polynomials degree less than or equal to $n-1$ have same values at n points, then they are identical.*

Problem 21 (Interpolation 2 (Taylor - Gontcharov expanding or Newton interpolating formula))**.** *Given $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ and $(a_0, a_1, \ldots$ Find all polynomials $P(x)$ with $\deg P(x) \le n$ satisfying*

$$P^{(k)}(x_k) = a_k, k \in \{0, 1, \ldots, n\} \tag{127}$$

Hint. Easy to prove

$$P(x) = P(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} P'(t)dt \tag{128}$$

$$P'(x) = P'(x_1) + \int\limits_{x_1}^{t} P''(t_1)dt_1 \tag{129}$$

$$P''(x) = P''(x_2) + \int\limits_{x_2}^{t_1} P'''(t_2)dt_2 \tag{130}$$

$$\ldots \tag{131}$$

We obtain the desired polynomial

$$P(x) = a_n \int\limits_{x_0}^{x} \int\limits_{x_0}^{t_1} \int\limits_{x_0}^{t_2} \cdots \int\limits_{x_0}^{t_{n-1}} dt_n dt_{n-1} \ldots dt_1 \tag{132}$$

$$+a_{n-1} \int\limits_{x_0}^{x} \int\limits_{x_0}^{t_1} \int\limits_{x_0}^{t_2} \cdots \int\limits_{x_0}^{t_{n-2}} dt_{n-1} \ldots dt_1 + \cdots + a_1 \int\limits_{x_0}^{x} dt_1 + a_0 \tag{133}$$

Problem 22. *Interpolation 3 (Hermite interpolating formula) Given two distinct numbers x_0 and x_1. Find all polynomials $P(x)$ with $\deg P(x) \le n (n \in \mathbb{N}^*)$ satisfying the conditions*

$$P(x_0) = 1 \tag{134}$$

$$P^{(k)}(x_1) = 0, k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \tag{135}$$

Hint.

$$P(x) = \frac{(x - x_1)^n}{(x_0 - x_1)^n} \tag{136}$$

Problem 23 (Interpolation 4 (Hermite interpolating formula))**.** *Given two distinct numbers x_0 and x_1. Find all polynomials $P(x)$ with $\deg P(x) \le n+1 (n \in \mathbb{N}^*)$ satisfying the conditions*

$$P(x_0) = 1, P'(x_0) = 1 \tag{137}$$

$$P^{(k)}(x_1) = 0, k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \tag{138}$$

Hint.

$$P(x) = (x - x_1)^n \left(\frac{(x_0 - x_1 - n)x + (x_0 - x_1)(1 - x_0) + nx_0}{(x_0 - x_1)^{n+1}} \right). \tag{139}$$

6.4 Contributors

1. Võ Ngọc Trâm Anh. Mathematical proofs & solutions.
2. Đặng Phúc An Khang: Computer Science solutions & C++ codes.
3. Nguyễn Lê Anh Khoa: Computer Science solutions & C++ codes.
4. Phan Vĩnh Tiến: Personal report on VMC:

   URL: https://github.com/vinhtienlovemath/PublicDocuments/tree/main/MathematicalOlympiad.

6.5 Donate or Buy Me Some Coffee

Donate (do not "donut") or buy me some coffee via NQBH's bank account information at https://github.com/NQBH/publication/blob/master/bank/NQBH_bank_account_information.

6.6 See also

1. *Olympic Tin Học Sinh Viên OLP & ICPC.*

   PDF: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/OLP_ICPC/NQBH_OLP_ICPC.pdf.

   TEX: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/OLP_ICPC/NQBH_OLP_ICPC.tex.

   - Codes:
     - C: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/OLP_ICPC/C.
     - C++: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/OLP_ICPC/C++.
     - Python: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/OLP_ICPC/Python.

Tài liệu

[Chu24a] Nguyễn Tài Chung. *Bồi Dưỡng Học Sinh Giỏi Chuyên Khảo Dãy Số.* Nhà Xuất Bản Dân Trí, 2024, p. 663.

[Chu24b] Nguyễn Tài Chung. *Phương Trình Hàm Đa Thức.* Tái bản lần 3. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2024, p. 292.

[Hoa06] Lê Tuấn Hoa. *Đại Số Tuyến Tính Qua Các Ví Dụ & Bài Tập.* Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2006, p. 446.

[Hưn22] Nguyễn Hữu Việt Hưng. *Đại Số Tuyến Tính.* Tái bản lần thứ 4. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2022, p. 335.

[Khả09] Phan Huy Khải. *Các Chuyên Đề Số Học Bồi Dưỡng Học Sinh Giỏi Toán Trung Học. Chuyên Đề 2: Số Học & Dãy Số.* Nhà Xuất Bản Giáo Dục, 2009, p. 260.

[Quố+24] Văn Phú Quốc, Trương Hồ Thiên Long, Đỗ Hữu Đạt, and Đinh Ngọc Nam. *Bài Tập Giải Tích Olympic Toán Sinh Viên & Học Sinh.* Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2024, p. 348.

[Tao22a] Terence Tao. *Analysis I.* Vol. 37. Texts and Readings in Mathematics. Fourth edition [of 2195040]. Hindustan Book Agency, New Delhi, [2022] ©2022, pp. xvi+355. ISBN: 978-81-951961-9-7.

[Tao22b] Terence Tao. *Analysis II.* Vol. 38. Texts and Readings in Mathematics. Fourth edition [of 2195041]. Springer, Singapore; Hindustan Book Agency, New Delhi, [2022] ©2022, pp. xvii+195. ISBN: 978-9-81197-284-3. DOI: 10.1007/978-981-19-7284-3. URL: https://doi.org/10.1007/978-981-19-7284-3.

[TB22] Lloyd N. Trefethen and David Bau III. *Numerical linear algebra.* 25th anniversary edition [of 1444820], With a foreword by James G. Nagy. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, [2022] ©2022, pp. xvi+370. ISBN: 978-1-611977-15-8; [9781611977165].

[TB97] Lloyd N. Trefethen and David Bau III. *Numerical linear algebra.* Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1997, pp. xii+361. ISBN: 0-89871-361-7. DOI: 10.1137/1.9780898719574. URL: https://doi.org/10.1137/1.9780898719574.

[Tru02] Ngô Việt Trung. *Giáo Trình Đại Số Tuyến Tính.* In lần 2. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2002, p. 271.

[Tsu+23] Makoto Tsukada, Yuji Kobayashi, Hiroshi Kaneko, Sin-Ei Takahasi, Kiyoshi Shirayanagi, and Masato Noguchi. *Linear Algebra with Python: Theory and Applications.* Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology. Springer, 2023, p. 324.

[VMS23] Hội Toán Học Việt Nam VMS. *Kỷ Yếu Kỳ Thi Olympic Toán Học Sinh Viên–Học Sinh Lần Thứ 29.* Huế 2–8/4/2023. VMS, 2023, p. 141.

[VMS24] Hội Toán Học Việt Nam VMS. *Kỷ Yếu Kỳ Thi Olympic Toán Học Sinh Viên–Học Sinh Lần Thứ 30.* Đà Nẵng 8–13/4/2024. VMS, 2024, p. 112.