PHƯƠNG PHÁP SỐ TRONG ĐSTT

BÀI TẬP TUẦN 1

Nguyễn An Thịnh ***MSSSV: 1411289***

Bài tập 1: *Cho ma trận A* $\in \boldsymbol{R}_{mxn}$. *Chứng minh column_rank(A) = row_rank(A)*

Xét ma trận $A = [a_1|a_2|\dots|a_n] = \begin{bmatrix} a'_1 \\ \hline \dots \\ \hline a'_m \end{bmatrix}$

(I) Giả sử $\dim < \{a_1, a_{2,\dots,} a_n\} > = r$

Gọi $\{b_1, b_{2,\dots,} b_r\}$ là 1 cơ sở của không gian nói trên.

Với mỗi i ∈ $\overline{1,n}$, a_i là 1 tổ hợp tuyến tính của $\{b_1, b_{2,\dots,} b_r\}$, tức là :

$$a_i = \sum_{k=1}^{r} b_k c_{ki}$$

Hay $a_i = [b_1|b_2|\dots|b_r].[\,c_i]$ (với mỗi i ∈ $\overline{1,n}$)

Suy ra: A = $[a_1|a_2|\dots|a_n] = [b_1|b_2|\dots|b_r].[c_1|c_2|\dots|c_n]$

Trong đó: $[b_1|b_2|\dots|b_r] = \begin{bmatrix} b'_1 \\ \hline \dots \\ \hline b'_m \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}_{mxr}$

$[c_1|c_2|\dots|c_n] = \begin{bmatrix} c'_1 \\ \hline \dots \\ \hline c'_r \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}_{rxn}$

Như vậy: $A^T = [a'^T_1|a'^T_2|\dots|a'^T_m] = [c_1|c_2|\dots|c_n]^T.[b_1|b_2|\dots|b_r]^T$

$$= [c'^T_1|c'^T_2|\dots|c'^T_r].[b'^T_1|b'^T_2|\dots|b'^T_m]$$

Suy ra: $a'^T_i = [c'^T_1|c'^T_2|\dots|c'^T_r].[\,b'^T_i]$ (với mỗi i ∈ $\overline{1,m}$)

Vậy mỗi vectơ a'^T_i là 1 tổ hợp tuyến tính của $\{c'^T_1, c'^T_2, \dots, c'^T_r\}$

Suy ra: $\dim < \{a'^T_1, a'^T_2, \dots, a'^T_m\} > \le r$ **(1)**

(II) Giả sử $\dim < \{a'^T_1, a'^T_2, \dots, a'^T_m\} > \; = \; l$

Gọi $\{x_1, x_{2,\dots,} x_l\}$ là 1 cơ sở của không gian nói trên.

Với mỗi i ∈ $\overline{1,m}$, a'^T_i là 1 tổ hợp tuyến tính của $\{x_1, x_{2,\dots,} x_l\}$, tức là :

$$a'^T_i = \sum_{k=1}^{l} x_k . y_{ki}$$

Hay $a'^T_i = [x_1|x_2| \dots |x_r].[\,y_i]$ (với mỗi i ∈ $\overline{1,m}$)

Suy ra: $A^T = [a'^T_1|a'^T_2| \dots |a'^T_m] = [x_1|x_2| \dots |x_l].[y_1|y_2| \dots |y_m]$

Trong đó: $[x_1|x_2| \dots |x_l] = \begin{bmatrix} \underline{x'_1} \\ \underline{\dots} \\ x'_n \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R_{nxl}}$

$$[y_1|y_2| \dots |y_m] = \begin{bmatrix} \underline{y'_1} \\ \underline{\dots} \\ y'_l \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R_{lxm}}$$

Như vậy: A = $[a_1|a_2| \dots |a_n] = [y_1|y_2| \dots |y_m]^{\,T}.[x_1|x_2| \dots |x_l]^T$

$$= [y'^T_1|y'^T_2| \dots |y'^T_l].[x'^T_1|x'^T_2| \dots |x'^T_n]$$

Suy ra: $a_i = [y'^T_1|y'^T_2| \dots |y'^T_l].[\,x'^T_1]$ (với mỗi i ∈ $\overline{1,n}$)

Vậy mỗi vectơ a_i là 1 tổ hợp tuyến tính của $\{y'^T_1, y'^T_2, \dots, y'^T_l\}$

Suy ra: $\dim < \{a_1, a_{2,\dots,} a_n\} > \leq \; l$ **(2)**

Từ **(1), (2),** suy ra $\dim < \{a_1, a_{2,\dots,} a_n\} > = \dim < \{a'^T_1, a'^T_2, \dots, a'^T_m\} >$

<u>Bài tập 2:</u> *Chứng minh mọi trị riêng của 1 ma trận đối xứng thực đều là số thực*

Cho A là ma trận thực đối xứng cấp n.

Giả sử λ = a + bi, a, b ∈ **R**, là một trị riêng của A.

Gọi z = x + yi là 1 vectơ riêng ứng với trị riêng λ. (x, y ∈ $\boldsymbol{R^n}$)

Ta có: $Az = \lambda z$

$\Leftrightarrow A(x + yi) = (a + bi)(x + yi)$.

$\Leftrightarrow Ax + iAy = ax - by + i(ay + bx)$

Suy ra: $\begin{cases} Ax = ax - by \\ Ay = ay + bx \end{cases}$

Như vậy: $< Ax, y > \; = < ax - by, y > = a < x, y > -b|y|^2$

Ta lại có: $< Ax, y > \; = < x, Ay > \; = \; < x, ay + bx > = b|x|^2 + a < x, y >$

Suy ra : $a < x, y > -b|y|^2 = b|x|^2 + a < x, y >$

$\Leftrightarrow b(|x|^2 + |y|^2) = 0$

$\Leftrightarrow b = 0 \quad (|x|^2 + |y|^2 \geq 0)$

Vậy trị riêng $\lambda = a$ có giá trị thực.

Bài tập 3: *Nếu A là ma trận đối xứng. Chứng minh A^n đối xứng*

Xét B, C là 2 ma trận đối xứng cấp n. Ta sẽ có:

$$(CB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}.b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} c_{ki}.b_{jk} = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}.c_{ki} = (BC)_{j,i}$$

Cho A là một ma trận đối xứng cấp n , giả sử A^k là ma trận đối xứng (k ≥ 1).

Ta chỉ ra A^{k+1} cũng đối xứng.

$$(A^{k+1})_{i,j} = (A.A^k)_{i,j} = (A^k.A)_{j,i} = (A^{k+1})_{j,i}$$

Vậy A^{k+1} là ma trận đối xứng.

Theo quy nạp ta suy ra A đối xứng thì A^n đối xứng.

Bài tập 4: *Chứng minh: A đối xứng ⇔ <x, Ay> = <Ax, y> (với mọi x,y ∈ $\boldsymbol{R}^n$)*

Xét A = $[a_1|a_2|\ldots|a_n]$ là 1 ma trận đối xứng cấp n và cho x, y ∈ $\boldsymbol{R}^n$.

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i \qquad y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$$

(e_i là vectơ thứ i của cơ sở chính tắc)

Ta có: $< x, Ay > = < \sum_{i=1}^{n} x_i e_i , A(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i) >$

$= < \sum_{i=1}^{n} x_i e_i , \sum_{j=1}^{n} y_j . Ae_j) >$

$= < \sum_{i=1}^{n} x_i e_i , \sum_{j=1}^{n} y_i a_j) >$

$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j < e_i, a_j > = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j a_{ji}$

$< Ax, y > = < A(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) , \sum_{i=1}^{n} y_i e_i) >$

$= < \sum_{i=1}^{n} x_i . Ae_i , \sum_{j=1}^{n} y_i e_j) >$

$= < \sum_{i=1}^{n} x_i a_i , \sum_{j=1}^{n} y_i e_j) >$

$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j < a_i, e_j > = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j a_{ij}$

$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j a_{ji}$

Vậy $< x, Ay > = < Ax, y >$

Giả sử A là ma trận thỏa $< x, Ay > = < Ax, y >$ với mọi x, y $\in \boldsymbol{R}^n$.

Ta có: $< e_i, Ae_j > = < Ae_i, e_j >$

$\Leftrightarrow < e_i, a_j > = < a_i, e_j >$

$\Leftrightarrow a_{ji} = a_{ij}$

Vậy A là ma trận đối xứng.

Bài tập 5: *Cho ma trận* $M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$ $(A \in \boldsymbol{R_{mxm}} , C \in \boldsymbol{R_{nxn}} , B \in \boldsymbol{R_{mxn}})$

Chứng minh M khả nghịch và tìm M^{-1}.

Xét ma trận $M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$

$(A \in \boldsymbol{R_{mxm}} , C \in \boldsymbol{R_{nxn}} , B \in \boldsymbol{R_{mxn}})$

Vì A khả nghịch nên nếu ta đưa m dòng đầu tiên của M về dạng bậc thang thì sẽ không có dòng 0 nào.

Tương tự C khả nghịch nên khi đưa n dòng dưới về dạng bậc thang cũng sẽ không có dòng 0.

Vậy rank(M) = m + n nên M khả nghịch.

Đặt $M^{-1} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ D' & C' \end{bmatrix}$ $(A' \in \boldsymbol{R_{mxm}} , C' \in \boldsymbol{R_{nxn}} , B' \in \boldsymbol{R_{mxn}} , D' \in \boldsymbol{R_{nxm}})$

Ta có: $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A' & B' \\ D' & C' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$

Suy ra: $\begin{cases} A.A' + BD' = I_m \\ AB' + BC' = 0 \\ CD' = 0 \\ CC' = I_n \end{cases}$

Ta tìm được: $\begin{cases} A' = A^{-1} \\ C' = C^{-1} \\ D' = 0 \\ B' = -A^{-1}BC^{-1} \end{cases}$

Vậy $M^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix}$

<u>Bài tập 6:</u> *Chứng minh hoặc cho phản ví dụ*

I) *Tích 2 ma trận đường chéo là 1 ma trận đường chéo*

Cho A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) là 2 ma trận chéo cấp n ($a_{ij} = b_{ij} = 0$, nếu i ≠ j)

Với i ≠ j, ta có

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj} = \sum_{1=k\neq i}^{n} a_{ik}.b_{kj} + a_{ii}.b_{ij} = \sum_{1=k\neq i}^{n} 0.b_{kj} + a_{ii}.0 = 0$$

Vậy $(AB)_{i,j} = 0, nếu\ i \neq j$, suy ra AB là ma trận chéo.

II) *Tích 2 ma trận tam giác trên là 1 ma trận tam giác trên*

Cho A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) là 2 ma trận tam giác trên cấp n

($a_{ij} = b_{ij} = 0$, nếu i > j)

Với i > j, ta có

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj} = \sum_{k=1}^{j} a_{ik}.b_{kj} + \sum_{h=j+1}^{n} a_{ih}.b_{hj}$$

$$= \sum_{k=1}^{j} 0.b_{kj} + \sum_{h=j+1}^{n} a_{ih}.0 = 0$$

Vậy $(AB)_{i,j} = 0, nếu\ i > j$, suy ra AB là ma trận tam giác trên

III) *Tích 2 ma đối xứng là 1 ma trận đối xứng*

Cho A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) là 2 ma đối xứng cấp n.

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}.b_{jk} = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}.a_{ki} = (BA)_{j,i}$$

Vậy tích AB đối xứng chỉ nếu AB = BA hay A, B giao hoán

Xét ví dụ sau: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Ta thấy: $AB = \begin{bmatrix} 8 & 11 \\ 13 & 18 \end{bmatrix}$ không đối xứng