

# Lecture Note: Mathematical Analysis – Bài Giảng: Giải Tích Toán Học

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 21 tháng 3 năm 2025

## Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Advanced STEM & Beyond*:

URL: [https://nqbh.github.io/advanced\\_STEM/](https://nqbh.github.io/advanced_STEM/).

Latest version:

- *Lecture Note: Mathematical Analysis – Bài Giảng: Giải Tích Toán Học.*

PDF: URL: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/blob/main/analysis/lecture/NQBH\\_mathematical\\_analysis\\_lecture.pdf](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/lecture/NQBH_mathematical_analysis_lecture.pdf).

TeX: URL: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/blob/main/analysis/lecture/NQBH\\_mathematical\\_analysis\\_lecture.tex](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/lecture/NQBH_mathematical_analysis_lecture.tex).

- *Slide: Mathematical Analysis – Slide: Giải Tích Toán Học.*

PDF: URL: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/blob/main/analysis/slide/NQBH\\_mathematical\\_analysis\\_slide.pdf](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/slide/NQBH_mathematical_analysis_slide.pdf).

TeX: URL: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/blob/main/analysis/slide/NQBH\\_mathematical\\_analysis\\_slide.tex](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/slide/NQBH_mathematical_analysis_slide.tex).

- Codes:

◦ C++: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/tree/main/analysis/C++](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/analysis/C++).

◦ Python: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/tree/main/analysis/Python](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/analysis/Python).

## Mục lục

<b>1 Basic Mathematical Analysis – Giải Tích Toán Học Cơ Bản</b>	<b>1</b>
1.1 Notations & conventions – Ký hiệu & quy ước	2
<b>2 Continuity – Sự Liên Tục</b>	<b>2</b>
<b>3 Derivative – Đạo Hàm</b>	<b>2</b>
<b>4 Integral – Tích Phân</b>	<b>2</b>
4.1 SymPy/integrals module	2
<b>5 Miscellaneous</b>	<b>3</b>
5.1 See also	3
<b>Tài liệu</b>	<b>3</b>

## 1 Basic Mathematical Analysis – Giải Tích Toán Học Cơ Bản

### Resources – Tài nguyên.

1. ĐẶNG ĐÌNH ÁNG. *Nhập Môn Giải Tích*.
2. [Rud76]. WALTER RUDIN. *Principles of Mathematical Analysis*.
3. [Tao22a]. TERENCE TAO. *Analysis I*.
4. [Tao22b]. TERENCE TAO. *Analysis II*.

**Question 1** (Definition of mathematical analysis). *What is mathematical analysis? Cf. mathematical analysis with other types of analysis.*

---

\*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com), [hong.nguyenquanba@umt.edu.vn](mailto:hong.nguyenquanba@umt.edu.vn). Bến Tre City, Việt Nam.

For answers, see, e.g., [Tao22a, Chap. 1, Sect. 1.1: *What Is Analysis?*, pp. 1–2], [Wikipedia/mathematical analysis](#). For other types of analysis, see, e.g., [Wikipedia/analysis](#).

**Question 2** (Motivation of mathematical analysis). *Why do mathematical analysis?*

For answers, see, e.g., [Tao22a, Chap. 1, Sect. 1.2: *Why Do Analysis?*, pp. 2–10]

**Example 1** (Division by zero & infinity). *The cancellation law for multiplication  $ac = bc \Rightarrow a = b$  does not work when  $c = 0$  &  $c = \pm\infty$ . The cancellation law for addition  $a + c = b + c \Rightarrow a = b$ .*

**Example 2** (Cancellation properties).

See, e.g., [Wikipedia/cancellation property](#).

**Example 3** (Geometric series – Chuỗi hình học). *When does the geometric series  $G(a) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{a^i}$  converge? When does  $G(a)$  diverge?*

## 1.1 Notations & conventions – Ký hiệu & quy ước

Đặt tập hợp các đa thức (polynomial) 1 biến với hệ số nguyên, hệ số hữu tỷ, hệ số thực, hệ số phức lần lượt cho bởi:

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[x] &:= \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i; n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Z}, \forall i = 0, \dots, n, a_n \neq 0 \right\}, \\ \mathbb{Q}[x] &:= \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i; n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Q}, \forall i = 0, \dots, n, a_n \neq 0 \right\}, \\ \mathbb{R}[x] &:= \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i; n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 0, \dots, n, a_n \neq 0 \right\}, \\ \mathbb{C}[x] &:= \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i; n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{C}, \forall i = 0, \dots, n, a_n \neq 0 \right\}.\end{aligned}$$

Ta có quan hệ hiển nhiên  $\mathbb{N}[x] \subset \mathbb{Z}[x] \subset \mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$ . Tổng quát, với  $\mathbb{F}$  là 1 trường bất kỳ, tập hợp các đa thức 1 biến với hệ số thuộc trường  $\mathbb{F}$  (e.g.,  $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ) cho bởi:

$$\mathbb{F}[x] := \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i; n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{F}, \forall i = 0, \dots, n, a_n \neq 0 \right\}.$$

Tập xác định của đa thức có thể là toàn bộ trường số thực  $\mathbb{R}$  hoặc trường số phức  $\mathbb{C}$ , i.e.,  $D_P = \text{dom}(P) = \mathbb{R}$  or  $D_P = \text{dom}(P) = \mathbb{C}$ , tùy vào trường  $\mathbb{F}$  của các hệ số & mục đích sử dụng đa thức.

**Problem 1** (Cf: Calculus vs. Mathematical Analysis). *Distinguish & compare Calculus vs. Mathematical Analysis.*

Analysis is more pure mathematics. Calculus is more applied mathematics.

**Problem 2** (Examples & counterexamples in mathematical analysis – Ví dụ & phản ví dụ trong phân tích toán học). *Find, from simple to advanced, examples & counterexamples to each mathematical concepts & mathematical results, including lemmas, propositions, theorems, & consequences.*

– *Tìm các ví dụ & phản ví dụ từ đơn giản đến nâng cao cho mỗi khái niệm toán học & kết quả toán học, bao gồm các bổ đề, mệnh đề, định lý, & hệ quả.*

**Problem 3** (Python SymPy). *Study SymPy to support calculus & mathematical analysis.*

## 2 Continuity – Sự Liên Tục

**Definition 1** ([Tao22a], Def. 6.1.1, p. 109: distance between 2 reals). *Given  $x, y \in \mathbb{R}$ , their distance  $d(x, y)$  is defined to be  $d(x, y) := |x - y| \in [0, \infty)$ .*

**Definition 2** ([Tao22a], Def. 6.1.2, p. 109:  $\varepsilon$ -close reals). *Let  $\varepsilon > 0$  be a real number.  $x, y \in \mathbb{R}$  is said to be  $\varepsilon$ -close iff  $d(x, y) \leq \varepsilon$ .*

## 3 Derivative – Đạo Hàm

## 4 Integral – Tích Phân

### 4.1 SymPy/integrals module

See <https://docs.sympy.org/latest/modules/integrals/integrals.html>. The `integrals` module in SymPy implements methods to calculate definite & indefinite integrals of expressions. Principal method in this module is `integrate()`:

- `integrate(f, x)` returns the indefinite integral  $\int f dx$
- `integrate(f, (x, a, v))` returns the definite integral  $\int_a^b f dx$ .

**Problem 4** (Integration of elementary functions). Use SymPy to compute definite- & indefinite integrals of elementary functions as many as possible.

**Problem 5** (Integration of nonelementary functions). Use SymPy to compute definite- & indefinite integrals of nonelementary functions as many as possible.

**Example 4** (Integral of error function). The indefinite integral of the nonelementary function  $e^{-x^2} \operatorname{erf}(x)$ , where  $\operatorname{erf}(x)$  is the error function, is given by

$$\int e^{-x^2} \operatorname{erf}(x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \operatorname{erf}(x).$$

Run the following Python code:

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
print(integrate(exp(-x**2)*erf(x), x))
```

to obtain the following output:

```
sqrt(pi)*erf(x)**2/4
```

For more information about the error function, see, e.g., [Wikipedia/error function](#).

## 5 Miscellaneous

### 5.1 See also

1. [Str20]. STEVEN STROGATZ. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe*.
2. [Str24]. STEVEN STROGATZ. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe – Sức Mạnh Vô Hạn: Giải Tích Toán Khám Phá Bí Mật Của Vũ Trụ Như Thế Nào?*.

Nhận xét. 1 quyển sách hay về thường thức về lịch sử phát triển của Giải tích Toán học & các ý tưởng cơ bản nhất của Giải tích. Khuyến khích đọc thử, cũng như các tác phẩm thường thức Khoa học Tự nhiên nói chung & Toán học nói riêng khác của tác giả STEVEN STROGATZ.

3. *Vietnamese Mathematical Olympiad for High School- & College Students (VMC) – Olympic Toán Học Học Sinh & Sinh Viên Toàn Quốc*.

PDF: URL: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/blob/main/VMC/NQBH\\_VMC.pdf](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/VMC/NQBH_VMC.pdf).

TEX: URL: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/blob/main/VMC/NQBH\\_VMC.tex](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/VMC/NQBH_VMC.tex).

- Codes:
  - C++ code: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/tree/main/VMC/C++](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/C++).
  - Python code: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/tree/main/VMC/Python](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/Python).
- Resource: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/tree/main/VMC/resource](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/resource).
- Figures: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/tree/main/VMC/figure](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/figure).

## Tài liệu

- [Rud76] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*. Third. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 1976, pp. x+342.
- [Str20] Steven Strogatz. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe*. Mariner Books, 2020, p. 400.
- [Str24] Steven Strogatz. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe – Sức Mạnh Vô Hạn: Giải Tích Toán Khám Phá Bí Mật Của Vũ Trụ Như Thế Nào?* Phạm Văn Thiều dịch. Nhà Xuất Bản Trẻ, 2024, p. 486.
- [Tao22a] Terence Tao. *Analysis I*. Vol. 37. Texts and Readings in Mathematics. Fourth edition [of 2195040]. Hindustan Book Agency, New Delhi, [2022] ©2022, pp. xvi+355. ISBN: 978-81-951961-9-7.
- [Tao22b] Terence Tao. *Analysis II*. Vol. 38. Texts and Readings in Mathematics. Fourth edition [of 2195041]. Springer, Singapore; Hindustan Book Agency, New Delhi, [2022] ©2022, pp. xvii+195. ISBN: 978-9-81197-284-3. DOI: [10.1007/978-981-19-7284-3](https://doi.org/10.1007/978-981-19-7284-3). URL: <https://doi.org/10.1007/978-981-19-7284-3>.