Lecture Note: Mathematical Analysis & Numerical Analysis
Bài Giảng: Giải Tích Toán Học & Giải Tích Số

Nguyễn Quản Bá Hồng[1]

Ngày 1 tháng 6 năm 2025

[1]A scientist- & creative artist wannabe, a mathematics & computer science lecturer of Department of Artificial Intelligence & Data Science (AIDS), School of Technology (SOT), UMT Trường Đại học Quản lý & Công nghệ TP.HCM, Hồ Chí Minh City, Việt Nam.
E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com & hong.nguyenquanba@umt.edu.vn. Website: https://nqbh.github.io/. GitHub: https://github.com/NQBH.

Mục lục

Preface

Abstract

This text is a part of the series *Some Topics in Advanced STEM & Beyond*:

URL: https://nqbh.github.io/advanced_STEM/.

Latest version:

- *Lecture Note: Mathematical Analysis & Numerical Analysis – Bài Giảng: Giải Tích Toán Học & Giải Tích Số.*

  PDF: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/lecture/NQBH_mathematical_analysis_lecture.pdf.

  TEX: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/lecture/NQBH_mathematical_analysis_lecture.tex.

- *Slide: Mathematical Analysis – Slide: Giải Tích Toán Học.*

  PDF: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/slide/NQBH_mathematical_analysis_slide.pdf.

  TEX: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/slide/NQBH_mathematical_analysis_slide.tex.

- Codes:
  - C++: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/analysis/C++.
  - Python: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/analysis/Python.

Phần I

Mathematical Analysis – Giải Tích Toán Học

Chương 1

Basic Mathematical Analysis – Giải Tích Toán Học Cơ Bản

Contents

Resources – Tài nguyên.

1. Đặng Đình Áng. *Nhập Môn Giải Tích.*
2. [Rud76]. Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.*
3. [Tao22a]. Terence Tao. *Analysis I.*
4. [Tao22b]. Terence Tao. *Analysis II.*

Question 1 (Definition of mathematical analysis)**.** *What is mathematical analysis? Cf. mathematical analysis with other types of analysis.*

For answers, see, e.g., [Tao22a, Chap. 1, Sect. 1.1: *What Is Analysis?*, pp. 1–2], Wikipedia/mathematical analysis. For other types of analysis, see, e.g., Wikipedia/analysis.

Question 2 (Motivation of mathematical analysis)**.** *Why do mathematical analysis?*

For answers, see, e.g., [Tao22a, Chap. 1, Sect. 1.2: *Why Do Analysis?*, pp. 2–10]

Example 1 (Division by zero & infinity)**.** *The cancellation law for multiplication $ac = bc \Rightarrow a = b$ does not work when $c = 0$ & $c = \pm\infty$. The cancellation law for addition $a + c = b + c \Rightarrow a = b$.*

Example 2 (Cancellation properties)**.**

See, e.g., Wikipedia/cancellation property.

Example 3 (Geometric series – Chuỗi hình học)**.** *When does the geometric series $G(a) \coloneqq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{a^i}$ converge? When does $G(a)$ diverge?*

1.1 Numbers – Các loại số

Trong chương trình Toán phổ thông, học sinh đã được học: số tự nhiên ở chương trình Toán 6 [Thá+23a; Thá+23b], & số hữu tỷ & số thực ở chương trình Toán 7,

1.2 Notations & conventions – Ký hiệu & quy ước

Đặt tập hợp các đa thức (polynomial) 1 biến với hệ số nguyên, hệ số hữu tỷ, hệ số thực, hệ số phức lần lượt cho bởi:

$$\mathbb{Z}[x] \coloneqq \left\{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i; n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{Z},\ \forall i = 0, \ldots, n,\ a_n \neq 0\right\},$$
$$\mathbb{Q}[x] \coloneqq \left\{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i; n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{Q},\ \forall i = 0, \ldots, n,\ a_n \neq 0\right\},$$

$$\mathbb{R}[x] := \left\{\sum_{i=0}^n a_i x^i; n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{R},\ \forall i = 0, \ldots, n,\ a_n \neq 0\right\},$$

$$\mathbb{C}[x] := \left\{\sum_{i=0}^n a_i x^i; n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{C},\ \forall i = 0, \ldots, n,\ a_n \neq 0\right\}.$$

Ta có quan hệ hiển nhiên $\mathbb{N}[x] \subset \mathbb{Z}[x] \subset \mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$. Tổng quát, với $\mathbb{F}$ là 1 trường bất kỳ, tập hợp các đa thức 1 biến với hệ số thuộc trường $\mathbb{F}$ (e.g., $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) cho bởi:

$$\mathbb{F}[x] := \left\{\sum_{i=0}^n a_i x^i; n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{F},\ \forall i = 0, \ldots, n,\ a_n \neq 0\right\}.$$

Tập xác định của đa thức có thể là toàn bộ trường số thực $\mathbb{R}$ hoặc trường số phức $\mathbb{C}$, i.e., $D_P = \mathrm{dom}(P) = \mathbb{R}$ or $D_P = \mathrm{dom}(P) = \mathbb{C}$, tùy vào trường $\mathbb{F}$ của các hệ số & mục đích sử dụng đa thức.

Problem 1 (Cf: Calculus vs. Mathematical Analysis)**.** *Distinguish & compare Calculus vs. Mathematical Analysis.*

Analysis is more pure mathematics. Calculus is more applied mathematics.

Problem 2 (Examples & counterexamples in mathematical analysis – Ví dụ & phản ví dụ trong phân tích toán học)**.** *Find, from simple to advanced, examples & counterexamples to each mathematical concepts & mathematical results, including lemmas, propositions, theorems, & consequences.*

– Tìm các ví dụ & phản ví dụ từ đơn giản đến nâng cao cho mỗi khái niệm toán học & kết quả toán học, bao gồm các bổ đề, mệnh đề, định lý, & hệ quả.

Problem 3 (Python `SymPy`)**.** *Study* `SymPy` *to support calculus & mathematical analysis.*

Definition 1 (Neighborhood, [WS10], p. 6)**.** *The set of all points x s.t. $|x - a| < \delta$, where $\delta > 0$, is called a δ* neighborhood *of the point a. The set of all points x s.t. $0 < |x - a| < \delta$, in which $x = a$ is excluded, is called a* deleted δ neighborhood *of a or an open ball of radius δ about a.*

Theorem 1 (Bolzano–Weierstrass theorem)**.** *Every bounded infinite set has at least 1 limit point.*

Definition 2 (Algebraic- & transcendental numbers – số đại số & số siêu việt)**.** *A number $x \in \mathbb{R}$ which is a solution to the* polynomial equation

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \tag{1.1}$$

where $n \in \mathbb{N}^\star$, called the degree *of the equation, $a_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i = 0, 1, \ldots, n$, $a_n \neq 0$, is called an* algebraic number*. A number which cannot be expressed as a solution of any polynomial equation with integer coefficients is called a* transcendental number*.*

Theorem 2 (Common transcendental numbers)**.** *π, e are transcendental.*

Theorem 3 (Countability of sets of algebraic- & transcendental numbers)**.** *(i) The set of algebraic numbers is a countably infinite set. (ii) The set of transcendental numbers is noncountably infinite.*

Chương 2

Sequence – Dãy Số

Contents

- **sequence** [n] /ˈsiːkwəns/ 1. [countable] *sequence (of sth)* a set of events, actions, numbers, etc. which have a particular order & which lead to a particular result; 2. [countable, uncountable] the order that events, actions, etc. happen in or should happen in; 3. [countable] a part of a film that deals with 1 subject or topic or consists of 1 scene. [v] 1. *sequence sth* (specialist) to arrange things into a sequence; 2. *sequence sth* (biology) to identify the order in which a set of genes or parts of molecules are arranged.

Resources – Tài nguyên.

1. [Rud76]. Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. Chap. 3: Numerical Sequences & Series.
2. [Tao22a]. Terence Tao. *Analysis I*.
3. [Tao22b]. Terence Tao. *Analysis II*.
4. [WS10]. Robert Wrede, Murray R. Spiegel. *Advanced Calculus*. 3e. Schaum's Outline Series. Chap. 2: Sequences.

This section deals primarily with sequences of real- & complex numbers, sequences in Euclidean spaces, or even in metric spaces. – Phần này chủ yếu đề cập đến các dãy số thực & phức, các dãy trong không gian Euclid hoặc thậm chí trong không gian metric.

2.1 Definition of a sequence – Định nghĩa của dãy số

Definition 3 (Numerical sequence – dãy số, [WS10], p. 25)**.** *A* sequence *is a set of numbers $u_1, u_2, \ldots$ in a definite order of arrangement (i.e., a* correspondence *with the natural numbers or a subset thereof) & formed according to a definite rule. Each number in the sequence is called a* term*; u_n is called the* nth term*. The sequence is called* finite *or* infinite *according as there are or are not a finite number of terms. The sequence $u_1, u_2, \ldots$ is also designated briefly by $\{u_n\}$.*

Có thể hiểu khái niệm dãy (sequence) ở đây 1 cách tổng quát hơn là 1 dãy các đối tượng Toán học hoặc Tin học, e.g., dãy số phức $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ là 1 dãy gồm các số $a_n \in \mathbb{C}$, $\forall n = 1, 2, \ldots$, dãy các hàm số thực $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ là 1 dãy gồm các hàm số $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\forall n = 1, 2, \ldots$, hay dãy các dãy $\{\{a_{m,n}\}_{n=1}^\infty\}_{m=1}^\infty$ tức 1 dãy gồm các phần tử của dãy lại là các dãy số $\{a_{m,n}\}_{n=1}^\infty$, $\forall m = 1, 2, \ldots$ Trước hết, ta tập trung là khái niệm dãy đơn giản nhất: dãy số – numerical sequence, trước khi đến với khái niệm *hội tụ đều* của dãy hàm (uniform convergence of sequences of functions).

2.2 Convergent- & divergent sequences – Dãy số hội tụ & dãy số phân kỳ

Definition 4 (Limit of a sequence, [WS10], p. 25)**.** *A number $l \in \mathbb{R}$ is called the* limit *of an infinite sequence $u_1, u_2, \ldots$ if for any positive number ϵ we can find a positive number N depending on ϵ s.t. $|u_n - l| < \epsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > N$. In such case we write $\lim_{n\to\infty} u_n = l$.*

Definition 5 (Convergent sequences, [Rud76], Def. 3.1, p. 47)**.** *A sequence $\{p_n\}$ in a metric space X is said to* converge *if there is a point $p \in X$ with the following property: For every $\varepsilon > 0$ there is an integer N_ε such that $n \ge N_\varepsilon = N(\varepsilon)$ implies that $d(p_n, p) < \varepsilon$. (Here d denotes the* distance *in X.) In this case we also say that $\{p_n\}$ converges to p, or that p is the* limit *of $\{p_n\}$, & we write $p_n \to p$, or $p_n \to p$ as $n \to \infty$, or $\lim_{n\to\infty} p_n = p$. If $\{p_n\}$ does not converge, it is said to* diverge.

Remark 1. *Định nghĩa 5 về dãy hội tụ trong các không gian metric không chỉ phụ thuộc vào bản thân dãy $\{p_n\}$ mà còn vào chính không gian metric X. Nhân tiện, vì ở đây đang xét không gian metric mà mỗi phần tử của nó được coi là 1 điểm (point), nên thành phần của dãy số được ký hiệu là p_n để ám chỉ bản chất của mỗi phần tử của dãy là 1 điểm trong không gian metric tổng quát X. Nếu $X = \mathbb{R}$ hoặc $X = \mathbb{C}$ thì mỗi điểm trên trục số thực hoặc 1 số phức $z = a + bi$ tương ứng với điểm (a, b) trên mặt phẳng phức $\mathbb{R}^2$, khi đó ký hiệu p_n có thể được thay bởi các ký hiệu quen thuộc hơn cho số (numerals), e.g., $a_n, x_n, \ldots$*

In cases of possible ambiguity, we can be more precise & specify "convergent in X" rather than "convergent".
– Trong trường hợp có thể có sự mơ hồ, chúng ta có thể chính xác hơn & cụ thể hơn "hội tụ trong X" thay vì "hội tụ".

Definition 6 (Range of a sequence, bounded sequence)**.** *The set of all points p_n, $n = 1, 2, \ldots$, is the* range *of $\{p_n\}$. The range of a sequence may be a finite set, or it may be infinite. The sequence $\{p_n\}$ is said to be* bounded *if its range is bounded.*

Problem 4. *Prove: (a) If $s_n = \frac{1}{n}$, then $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$; the range is infinite, & the sequence is bounded. (b) If $s_n = n^2$, the sequence $\{s_n\}$ is unbounded, is divergent, & has infinite range. (c) If $s_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$, the sequence $\{s_n\}$ converges to 1, is bounded, & has infinite range. (d) If $s_n = i^n$, the sequence $\{s_n\}$ is divergent, is bounded, & has finite range. (e) If $s_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, then $\{s_n\}$ converges to 1, is bounded, & has finite range. (f) Find similar examples.*

Theorem 4 (Some important properties of convergent sequences in metric spaces, [Rud76], Thm. 3.2, p. 48)**.** *Let $\{p_n\}$ be a sequence in a metric space X.*

(a) $\{p_n\}$ converges to $p \in X$ iff every neighborhood of p contains all but finitely many of the terms of $\{p_n\}$.

(b) (Uniqueness of limit) *If $p \in X, p' \in X$, & if $\{p_n\}$ converges to p & to p', then $p' = p$.*

(c) If $\{p_n\}$ converges, then $\{p_n\}$ is bounded.

(d) If $E \subset X$ & if p is a limit point of E, then there is a sequence $\{p_n\}$ in E such that $p = \lim_{n\to\infty} p_n$.

For sequences in Euclidean spaces $\mathbb{R}^d$, we can study the relation between convergence & the algebraic operations.

Theorem 5 (Algebraic operations on limit of sequences of complex numbers, [Rud76], Thm. 3.3, p. 49)**.** *Suppose $\{a_n\}, \{b_n\}$ are complex sequences, & $\lim_{n\to\infty} a_n = a$,$\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Then:*

(a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$.

(b) $\lim_{n\to\infty} ca_n = ca$, $\lim_{n\to\infty}(c + a_n) = c + \lim_{n\to\infty} a_n = c + a$, $\forall c \in \mathbb{C}$.

(c) $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n = ab$.

(d) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a}$, provided $a_n \ne 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, & $a \ne 0$.

Theorem 6 (Algebraic operations on limit of sequences in Euclidean spaces, [Rud76], Thm. 3.4, p. 50)**.**

(a) Suppose $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^d$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, & $\mathbf{x}_n = (x_{1,n}, \ldots, x_{d,n})$. Then $\{\mathbf{x}_n\}$ converges to $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ iff $\lim_{n\to\infty} x_{i,n} = x_i$, $\forall i = 1, \ldots, k$.

(b) Suppose $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^\infty, \{\mathbf{y}_n\}_{n=1}^\infty$ are sequences in $\mathbb{R}^d$, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ is a sequence of reals, & $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}, \mathbf{y}_n \to \mathbf{y}, a_n \to a$. Then

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n = \mathbf{x} + \mathbf{y},\ \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n \cdot \mathbf{y}_n = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y},\ \lim_{n\to\infty} a_n\mathbf{x}_n = a\mathbf{x}.$$

Bài toán 1 ([Quỳ+20b], 1.)**.** *Tìm 5 số hạng đầu của dãy số: (a) $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ với $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. (b) $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ với $u_1 = 1, u_2 = -2, u_{n+1} = u_n - 2u_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. (c) Dãy $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ các hợp số nguyên dương theo thứ tự tăng dần.*

Bài toán 2 ([Quỳ+20b], 2.)**.** *Cho dãy số $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ xác định bởi $u_0 = 2, u_1 = 5, u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Chứng minh, bằng phương pháp quy nạp Toán học, $u_n = 2^n + 3^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$.*

Bài toán 3 ([Quỳ+20b], 3.)**.** *Cho ΔABC đều có cạnh bằng 4. Trên cạnh BC lấy điểm A_1 sao $CA_1 = 1$. Gọi B_1 là hình chiếu của A_1 trên CA, C_1 là hình chiếu của B_1 trên AB, A_2 là hình chiếu của C_1 trên BC, B_2 là hình chiếu của A_2 trên $CA, \ldots$ & cứ thế tiếp tục. Đặt $u_n = CA_n$. Cho dãy số $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ bởi hệ thức truy hồi.*

Bài toán 4 ([Quỳ+20b], 4.)**.** *Xét tính tăng, giảm, bị chặn trên, bị chặn dưới, bị chặn của dãy số $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ với: (a) $u_n = n^3 - 3n^2 + 5n - 7$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. (b) $u_n = \dfrac{n+1}{3^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. (c) $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$.*

Bài toán 5 ([Quỳ+20b], 5.). *Xét 2 dãy số $\{u_n\}_{n=1}^\infty$, $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ xác định bởi*

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}^\star.$$

Chứng minh: (a) $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ tăng, $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ giảm. (b) $\{u_n\}_{n=1}^\infty$, $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ đều bị chặn.

Bài toán 6 ([Quỳ+20b], 6.). *Cho dãy số $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ xác định bởi $u_1 = 1, u_{n+1} = u_n + (n+1)2^n$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. Chứng minh: (a) $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ tăng. (b) $u_n = 1+(n-1)2^n$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$.*

Chứng minh. (a) $u_{n+1}-u_n = (n+1)2^n > 0$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$, nên $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ tăng. □

Bài toán 7 ([Quỳ+20b], 7.). *Cho dãy số $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ xác định bởi $u_1 = 1, u_2 = 2, u_{n+1} = au_n - u_{n-1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$, $n\ge 2$. Chứng minh: (a) Với $a=\sqrt{3}$ thì $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ tuần hoàn. (b) Với $a=\frac{3}{2}$ thì $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ không tuần hoàn.*

2.2.1 Arithmetic progression – Cấp số cộng

Resources – Tài nguyên.

1. Wikipedia/arithmetic progression.
2. [Thá+25b]. Đỗ Đức Thái, Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, Phạm Minh Phương. *Toán 11 Tập 1. Cánh Diều.*
3. [Thá+25a]. Đỗ Đức Thái, Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, Phạm Minh Phương. *Bài Tập Toán 11 Tập 1. Cánh Diều.*

An *arithmetic progression* or *arithmetic sequence* is a sequence of numbers (real or complex) such that the difference from any succeeding term to its preceding term remains constant throughout the sequence. The constant difference is called *common difference* of that arithmetic progression.

– 1 *cấp số cộng* hoặc *dãy số cộng* là 1 dãy số (thực hoặc phức) sao cho hiệu số từ bất kỳ số hạng tiếp theo nào đến số hạng trước nó vẫn không đổi trong suốt dãy số. Hiệu số không đổi được gọi là *công sai*, i.e., hiệu số chung của cấp số cộng đó.

If the initial term of an arithmetic progression is a_1 & the common difference of successive members is $d\in\mathbb{C}$, then the nth term of the sequence $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ is given by

$$a_n = a_1 + (n-1)d,\ \forall n\in\mathbb{N}^\star.$$

A finite portion of an arithmetic progression is called a *finite arithmetic progression* & sometimes just called an *arithmetic progression*. The sum of a finite arithmetic progression is called an *arithmetic series*:

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n(a_1+a_2)}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}^\star.$$

Chứng minh. We can prove by mathematical induction: $a_i + a_{n-i} = a_1 + a_n$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$, hence $2S_n = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=n}^1 a_i = \sum_{i=1}^n (a_i + a_{n-i}) = \sum_{i=1}^n (a_1+a_n) = n(a_1+a_n) \Rightarrow S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. □

– Nếu số hạng đầu của 1 cấp số cộng là a_1 & hiệu chung của các phần tử liên tiếp là $d\in\mathbb{C}$, thì số hạng thứ n của dãy $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ được cho bởi

$$a_n = a_1 + (n-1)d,\ \forall n\in\mathbb{N}^\star.$$

Một phần hữu hạn của 1 cấp số cộng được gọi là *cấp số cộng hữu hạn* & đôi khi chỉ được gọi là *cấp số cộng*. Tổng của 1 cấp số cộng hữu hạn được gọi là *cấp số cộng*:

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n(a_1+a_2)}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}^\star.$$

Bài toán 8 ([Quỳ+20b], 8.). *(a) Cho cấp số cộng $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ có $u_{13} = 31, u_{31} = -13$. Tìm số hạng tổng quát của cấp số đó. (b) Cho cấp số cộng $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ có $u_m = a, u_n = b$, với $m,n\in\mathbb{N}$, $m\ne n$, $a,b\in\mathbb{C}$. Tìm số hạng tổng quát của cấp số đó.*

Giải. (a) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} u_1 + 12d = u_{13} = 31,\\ u_1 + 30d = -13\end{cases} \Leftarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{181}{3},\\ d = -\dfrac{22}{9}.\end{cases} \Rightarrow u_n = \frac{181}{3} - \frac{22}{9}(n-1) = \frac{565}{9} - \frac{22}{9}n,\ \forall n\in\mathbb{N}^\star.$$

(b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} u_1 + (m-1)d = u_m = a,\\ u_1 + (n-1)d = u_n = b,\end{cases} \Leftarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{a-b-an+bm}{m-n},\\ d = \dfrac{a-b}{m-n}.\end{cases}$$

Suy ra
$$u_k = \frac{a-b-an+bm}{m-n} + (k-1)\frac{a-b}{m-n} = \frac{(a-b)k-an+bm}{m-n},\ \forall k \in \mathbb{N}^\star.$$
(Kiểm tra lại: $u_m = \dfrac{(a-b)m-an+bm}{m-n} = \dfrac{a(m-n)}{m-n} = a, u_n = \dfrac{(a-b)n-an+bm}{m-n} = \dfrac{b(m-n)}{m-n} = b$.) □

Bài toán 9 ([Quỳ+20b], 9.). *Số đo 3 góc của 1 tam giác vuông lập thành 1 cấp số cộng. Tìm số đo 3 góc đó.*

Giải. ΔABC vuông tại A, $\widehat{B} > \widehat{C}$, giải hệ phương trình $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$, $\widehat{A} + \widehat{C} = 90^\circ + \widehat{C} = 2\widehat{B}$ được $\widehat{B} = 60^\circ, \widehat{C} = 30^\circ$. □

Bài toán 10 (Mở rộng [Quỳ+20b], 9.). *(a) Tìm điều kiện để số đo 3 góc của 1 tam giác lập thành 1 cấp số cộng. (b) Cho $n \in \mathbb{N}, n \ge 3$. Tìm điều kiện để số đo n góc của 1 đa giác lồi lập thành 1 cấp số cộng. Suy ra cho tứ giác lồi.*

Giải. (a) Gọi $a, a+d, a+2d$ là 3 góc của tam giác thỏa giả thiết, có $a+(a+d)+(a+2d) = 180^\circ \Leftrightarrow a+d = 60^\circ$. Cho $a = d = 30^\circ$ thu được bài toán trước. (b) Gọi $\{a+id\}_{i=0}^{n-1}$ là n góc của đa giác lồi n cạnh thỏa giả thiết, có $\sum_{i=0}^{n-1} a+id = na + \dfrac{n(n-1)}{2}d = (n-2)180^\circ$. Với tứ giác lồi, cho $n = 4$ được $4a+6d = 2\cdot 180^\circ \Leftrightarrow 2a+3d = 180^\circ$. □

Bài toán 11 ([Quỳ+20b], 10.). *(a) Tổng của số hạng thứ 3 & số hạng thứ 9 của 1 cấp số cộng bằng 8. Tính tổng của 11 số hạng đầu tiên của cấp số đó. (b) Tổng của số hạng thứ m & số hạng thứ n của 1 cấp số cộng bằng a, với $m, n \in \mathbb{N}$, $m \ne n$, $a \in \mathbb{C}$. Tính tổng của $N \in \mathbb{N}$ số hạng đầu tiên của cấp số đó.*

Bài toán 12 ([Quỳ+20b], 11.). *Gọi S_n là tổng $n \in \mathbb{N}^\star$ số hạng đầu tiên của 1 cấp số cộng. Biết $m, n \in \mathbb{N}^\star$, $m \ne n$ thỏa $S_m = S_n$. Chứng minh $S_{m+n} = 0$.*

Bài toán 13 ([Quỳ+20b], 12.). *Chu kỳ bán rã của nguyên tố phóng xạ poloni 210 là 138 ngày, i.e., sau 138 ngày, khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn 1 nửa. Tính khối lượng còn lại của 20 gram poloni 210 sau 7314 ngày (khoảng 20 năm).*

Giải. Gọi $t_{1/2} \in \mathbb{N}^\star$ (ngày) là chu kỳ bán rã (half-life) của 1 chất, $m_0 \in (0,\infty)$ (g) là khối lượng ban đầu (initial mass) của poloni. Sau $n \in \mathbb{N}$ ngày, khối lượng còn lại (remaining mass) của poloni bằng
$$m(m_0, t_{1/2}, n) = m_0 2^{-\frac{n}{t_{1/2}}},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$
Áp dụng cho poloni với $m_0 = 20$ g, $t_{1/2} = 138$ ngày, $n = 7314$ ngày: $m(20, 138, 7314) = 20\cdot 2^{-\frac{7314}{138}} = 20\cdot 2^{53} = \frac{5}{2^{51}}$ g. □

Về chu kỳ bán rã, see, e.g., Wikipedia/half-life, or Wikipedia/chu kỳ bán rã.

2.2.2 Geometric progression – Cấp số nhân

Resources – Tài nguyên.

1. Wikipedia/geometric progression.

Bài toán 14 ([Quỳ+20b], 13.). *Tính: (a) Tổng tất cả các số hạng của 1 cấp số nhân có 100 số hạng với số hạng đầu là 1, công bội là $\frac{1}{2}$. (b) Tổng tất cả các số hạng của 1 cấp số nhân biết số hạng đầu bằng 18, số hạng thứ 2 bằng 54 & số hạng cuối bằng 39366.*

Giải. (a) $S_{100} = u_1 \cdot \dfrac{1-q^{100}}{1-q} = 2(1-2^{-100}) = 2 - \dfrac{1}{2^{99}}$. (b) $q = \dfrac{u_2}{u_1} = 3$. $u_n = u_1 q^{n-1} = 18\cdot 3^{n-1} = 39366 \Rightarrow n = 8$. $S_8 = u_1 \cdot \dfrac{1-q^8}{1-q} = 18\cdot\dfrac{1-3^8}{1-3} = 59040$. □

Bài toán 15 (Mở rộng [Quỳ+20b], 13.). *Tính: (a) Tổng tất cả các số hạng của 1 cấp số nhân có $n \in \mathbb{N}^\star$ số hạng với số hạng đầu là $u_1 \in \mathbb{R}$, công bội là $q \in \mathbb{R}^\star$. (b) Tổng tất cả các số hạng của 1 cấp số nhân biết số hạng đầu bằng $u_1 = a \in \mathbb{R}$, số hạng thứ 2 bằng $u_2 \in \mathbb{R}$ & số hạng cuối bằng $u_n \in \mathbb{R}$.*

Bài toán 16 ([Quỳ+20b], 14.). *Số hạng thứ 2, số hạng đầu, & số hạng thứ 3 của 1 cấp số cộng với công sai $\ne 0$ theo thứ tự đó lập thành 1 cấp số nhân. Tìm công bội của cấp số nhân đó.*

Giải. Gọi u_1, u_2, u_3 lần lượt là 3 số hạng đầu tiên của cấp số cộng thì $u_1^2 = u_2u_3 \Leftrightarrow u_1^2 = (u_1+d)(u_1+2d) \Leftrightarrow u_1 = -\frac{2d}{3} \Rightarrow u_2 = \frac{d}{3} \Rightarrow q = \frac{u_1}{u_2} = -\frac{2d}{3} : \frac{d}{3} = -2$. □

Bài toán 17 ([Quỳ+20b], 15.). *Tìm số hạng tổng quát & tính tổng $n \in \mathbb{N}^\star$ số hạng đầu tiên của dãy số $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ xác định bởi $u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$.*

Giải. Đặt $v_n := u_n - 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$ thì $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ nên $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ là 1 cấp số nhân với $v_1 = u_1 - 2 = 1 - 2 = -1$ & công bội $q = \frac{1}{2}$, suy ra $v_n = -\frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow u_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, nên

$$S_n = \sum_{i=1}^n u_i = S_n = \sum_{i=1}^n 2 - \frac{1}{2^{i-1}} = 2n - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} = 2n - \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2n - 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 2(n-1) + \frac{1}{2^{n-1}},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

(Công thức truy hồi của dãy tổng $\{S_n\}_{n=1}^\infty$: $S_1 = u_1 = 1$, $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = S_n + 2 - \frac{1}{2^n}$.) □

Bài toán 18 ([Quỳ+20b], 16.). *Tìm công thức cho số hạng tổng quát của dãy số xác định bởi* $a_1 = a, a_{n+1} = qa_n + d\alpha^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\alpha \neq q$.

Giải. Đặt $v_n := a_n + \dfrac{d}{q-\alpha}\alpha^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\Rightarrow v_{n+1} = qv_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, i.e., $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ là 1 cấp số nhân với số hạng đầu $v_1 = a + \dfrac{d\alpha}{q-\alpha}$ & công bội q, suy ra $v_n = v_1 q^{n-1} = \left(a + \dfrac{d\alpha}{q-\alpha}\right)q^{n-1} \Rightarrow a_n = \left(a + \dfrac{d\alpha}{q-\alpha}\right)q^{n-1} - \dfrac{d}{q-\alpha}\alpha^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. □

Bài toán 19 ([Quỳ+20b], 17.). *Gọi F_n là số hạng thứ n của dãy Fibonacci, xác định bởi $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Chứng minh: (a) $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. (b) $F_{m+n+1} = F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$. (c) $F_{3n} = F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$.*

Bài toán 20 ([Quỳ+20b], 18.). *Dãy Lucas là dãy số xá định bởi $L_1 = 1, L_2 = 3, L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Tìm công thức tổng quát cho L_n.*

Bài toán 21 ([Quỳ+20b], 19.). *Giả sử F_n, L_n tương ứng là số hạng thứ n của dãy Fibonnaci & dãy Lucas. Chứng minh $F_{2n} = F_nL_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$.*

Bài toán 22 ([Quỳ+20b], 20.). *Lập dãy số Farey bậc* 9, *bậc* 10.

Bài toán 23 ([Quỳ+20b], 21.). *Chứng minh nếu $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}$ là 2 phân số với $ad - bc = 1$, $d \geq b$ thì $\dfrac{c}{d} < \dfrac{a}{b}$ & $\dfrac{c}{d}, \dfrac{a}{b}$ là 2 số hạng liên tiếp trong dãy số Farey bậc d.*

Bài toán 24 ([Quỳ+20b], 22.). *Số hạng thứ 3, thứ 4, thứ 7, & cuối cùng của 1 cấp số cộng không hằng lập thành 1 cấp số nhân. Tìm số số hạng của cấp số này.*

Bài toán 25 ([Quỳ+20b], 23.). *Số hạng thứ 4 của 1 cấp số cộng bằng* 4. *Tìm* GTNN *của tổng các tích đôi 1 của 3 số hạng đầu.*

Bài toán 26 ([Quỳ+20b], 24.). *2 cấp số cộng có cùng số phần tử. Tỷ lệ giữ số hạng cuối của cấp số đầu & số hạng đầu của cấp số thứ 2 bằng tỷ lệ giữa số hạng cuối của cấp số thứ 2 & số hạng đầu của cấp số thứ nhất & bằng* 4. *Tỷ lệ giữa tổng các số hạng của cấp số thứ nhất & tổng các số hạng của cấp số thứ 2 bằng* 2. *Tìm tỷ lệ giữa các công sai của 2 cấp số.*

Bài toán 27 ([Quỳ+20b], 25.). *3 số lập thành 1 cấp số nhân. Nếu ta trừ số hạng thứ 3 cho* 4 *thì ta được 1 cấp số cộng. Nếu lại trừ các số hạng thứ 2 & thứ 3 của cấp số cộng thu được cho* 1, *ta lại được 1 cấp số nhân. Tìm 3 số ban đầu.*

Bài toán 28 ([Quỳ+20b], 26.). *Tính tổng: (a) $\sum_{i=1}^n \dfrac{1}{i(i+1)}$. (b) $\sum_{i=1}^n i(i+1)$. (c) $\sum_{i=1}^n \dfrac{i}{2^i}$.*

Bài toán 29 ([Quỳ+20b], 27.). *Tìm đa thức $P(x)$ thỏa $P(x) - P(x-1) = x^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Từ đó lập công thức tính tổng $S_n^{(3)} = \sum_{i=1}^n i^3$.*

Bài toán 30 ([Quỳ+20b], 28.). *Cho dãy số thực $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ xác định bởi $x_0 = 1, x_{n+1} = 2 + \sqrt{x_n} - 2\sqrt{1 + \sqrt{x_n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Xác định dãy $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ bởi công thức $y_n = \sum_{i=1}^n x_i 2^i$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Tìm công thức tổng quát của dãy $\{y_n\}_{n=1}^\infty$.*

Bài toán 31 ([Quỳ+20b], 29.). *2 dãy số nguyên $\{a_n\}_{n=0}^\infty, \{b_n\}_{n=0}^\infty$ được xác định bởi:*

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n,$$
$$b_0 = 1,\ b_1 = 2,\ b_{n+2} = 4b_{n+1} - b_n.$$

Chứng minh $b_n^2 = 3a_n^2 + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$.

Bài toán 32 ([Quỳ+20b], 30.). *Cho dãy số $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ xác định bởi $x_1 = \dfrac{2}{3}, x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2(2n+1)x_n + 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Tính tổng của: (a)* 2010 *số hạng đầu tiên của $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. (b) $n \in \mathbb{N}^\star$ số hạng đầu tiên của $\{x_n\}_{n=1}^\infty$.*

Bài toán 33 ([Quỳ+20b], 31.). *Tính: (a) $\sum_{i=1}^{101} \dfrac{a_i^3}{1 - 3a_i + 3a_i^2}$ với $a_n = \dfrac{n}{101}$. (b) $\sum_{i=1}^n \dfrac{a_i^3}{1 - 3a_i + 3a_i^2}$ với $a_i = \dfrac{i}{n}$.*

Bài toán 34 ([Quỳ+20b], 32.). *Cho dãy số $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ xác định bởi $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}$. Chứng minh $\sum_{i=1}^n a_i < 1$, $n \in \mathbb{N}^\star$.*

Bài toán 35 ([Quỳ+20b], 33.). *Cho dãy số* $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ *xác định bởi* $x_0 = x_1 = 1, n(n+1)x_{n+1} = n(n-1)x_n - (n-2)x_{n-1}$. *Tìm* $\sum_{i=0}^n \frac{x_i}{x_{i+1}}$.

Bài toán 36 ([Quỳ+20b], 34.). *Cho dãy số* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *xác định bởi* $x_1 = 2, x_{n+1} = \dfrac{2+x_n}{1-2x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Chứng minh: (a)* $x_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *(b)* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *không tuần hoàn.*

2.3 Subsequences – Dãy con

Definition 7. *Given a sequence* $\{p_n\}_{n=1}^\infty$*, consider a sequence* $\{n_k\}$ *of positive integers, s.t.* $n_1 < n_2 < \cdots$. *Then the sequence* $\{p_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ *is called a* subsequence *of* $\{p_n\}_{n=1}^\infty$. *If* $\{p_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ *converges, its limit is called a* subsequential limit *of* $\{p_n\}_{n=1}^\infty$.

Problem 5. *Prove that* $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ *converges to* p *iff every subsequence of* $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ *converges to* p.

Theorem 7 ([Rud76], Thm. 3.6, p. 50).

(a) If $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ *is a sequence in a compact metric space* X*, then some subsequence of* $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ *converges to a point of* X.

(b) Every bounded sequence in $\mathbb{R}^d$ *contains a convergent subsequence.*

Theorem 8 ([Rud76], Thm. 3.7, p. 52). *The subsequential limits of a sequence* $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ *in a metric space* X *form a closed subset of* X.

2.4 Limit of sequences – Giới hạn của dãy số

Định nghĩa 1 (Dãy số thực có giới hạn 0, [Thá+25b], p. 60). *Dãy số thực* $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ *có giới hạn* 0 *khi* n *dần tới dương vô cực nếu* $|u_n|$ *có thể nhỏ hơn 1 số dương bé tùy ý, kể từ 1 số hạng nào đó trở đi, ký hiệu* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Notation. Ngoài ký hiệu, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, ta cũng sử dụng các ký hiệu: $\lim u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to \infty$.

Nhận xét 1. *Nếu* u_n *ngày càng gần tới* 0 *khi* n *ngày càng lớn thì* $\lim u_n = 0$.

Định nghĩa 2 (Dãy số thực có giới hạn 0 theo ngôn ngữ ε-δ). *1 dãy số thực* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *có giới hạn* 0 *nếu & chỉ nếu với mọi số nguyên dương* ε*, tồn tại 1 số nguyên dương* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star$ *để* $|u_n| < \varepsilon$ *kể từ chỉ số* N_ε *đó trở đi:*

$$\forall \varepsilon \in (0,\infty),\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star,\ |u_n| < \varepsilon,\ \forall n \geq N_\varepsilon,$$

hay tương đương:

$$\forall \varepsilon \in (0,\infty),\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star,\ n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |u_n| < \varepsilon.$$

Remark 2 (Optimal/smallest/best indices – Các chỉ số tối ưu/nhỏ nhất/tốt nhất). *Định nghĩa 2 chỉ yêu cầu tồn tại* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star$ *đủ lớn với mỗi* $\varepsilon \in (0,\infty)$. *Tuy nhiên nếu tìm được chỉ số* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star$ *tối ưu, i.e., chỉ số nhỏ nhất trong các chỉ số* N_ε *thỏa mãn, i.e.:*

$$N_\varepsilon^{\rm opt} \coloneqq \min\{N_\varepsilon \in \mathbb{N}; |u_n| < \varepsilon,\ \forall n \geq N_\varepsilon\} = \min\{N_\varepsilon \in \mathbb{N}; n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |u_n| < \varepsilon\}.$$

thì ta có thể sử dụng ký hiệu $N_\varepsilon^{\rm opt}$ *để chỉ rõ tính tối ưu (i.e., nhỏ nhất, chặt/ngặt nhất) của* N_ε.

Remark 3 (Ceil- vs. floor functions).

$$\lceil x\rceil = \begin{cases} \lfloor x\rfloor & \text{if } x \in \mathbb{Z},\\ \lfloor x\rfloor + 1 & \text{if } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}.\end{cases} = \lfloor x\rfloor + \chi_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}}(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 37 ([Thá+25b], p. 60). *Chứng minh* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ *& chỉ ra* $N_\varepsilon^{\rm opt}$ *với* $\varepsilon = 0.1, 0.01, 10^{-n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$*, & với* $\varepsilon > 0$ *bất kỳ: (a)* $u_n = 0$. *(b)* $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. *(c)* $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. *(d)* $u_n = -\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. *(e)* $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *(f)* $u_n = \dfrac{a\epsilon_n}{n^b}$ *với* $\{\epsilon_n\}_{n=1}^\infty \subset \{\pm 1\}$, $a \in \mathbb{R}, b \in (0,\infty)$.

Chứng minh. (a) Lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ, có $|u_n| = |0| = 0 < \varepsilon$, $\forall n \geq 1$. Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ ε-δ, suy ra $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Ta có thể chọn $N_\varepsilon \coloneqq N_\varepsilon^{\rm opt} = 1$, $\forall \varepsilon > 0$, nên $N_{0.1}^{\rm opt} = N_{0.01}^{\rm opt} = N_{10^{-n}}^{\rm opt} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ, có $|u_n| = \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$, nên $|u_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow N_\varepsilon^{\rm opt} = \left\lfloor\dfrac{1}{\varepsilon}\right\rfloor + 1$, nên nếu chọn $N_\varepsilon \coloneqq N_\varepsilon^{\rm opt} = \left\lfloor\dfrac{1}{\varepsilon}\right\rfloor + 1$ thì $|u_n| < \varepsilon$, $\forall n \geq N_\varepsilon$. Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ ε-δ, suy ra $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

(c) Lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ, có $|u_n| = \left|\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, nên $|u_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n} > \dfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow N_\varepsilon^{\rm opt} = \left\lfloor\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right\rfloor + 1$, nên nếu chọn $N_\varepsilon \coloneqq N_\varepsilon^{\rm opt} = \left\lfloor\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right\rfloor + 1$ thì $|u_n| < \varepsilon$, $\forall n \geq N_\varepsilon$. Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ ε-δ, suy ra $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

(d) Lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ, có $|u_n| = \left|-\frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}}$, nên $|u_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow N_\varepsilon^{\rm opt} = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$, nên nếu chọn $N_\varepsilon := N_\varepsilon^{\rm opt} = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$ thì $|u_n| < \varepsilon$, $\forall n \ge N_\varepsilon$. Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ ε-δ, suy ra $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

(e) Lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ, có $|u_n| = \left|\frac{a\epsilon_n}{n^b}\right| = \frac{|a|}{n^b}$, nên $|u_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{|a|}{n^b} < \varepsilon \Leftrightarrow n^b > \frac{|a|}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \left(\frac{|a|}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{b}} \Rightarrow N_\varepsilon^{\rm opt} = \left\lfloor \left(\frac{|a|}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{b}} \right\rfloor + 1$, nên nếu chọn $N_\varepsilon := N_\varepsilon^{\rm opt} = \left\lfloor \left(\frac{|a|}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{b}} \right\rfloor + 1$ thì $|u_n| < \varepsilon$, $\forall n \ge N_\varepsilon$. Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ ε-δ, suy ra $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. □

Remark 4 (Dấu của số hạng của dãy số có giới hạn 0)**.** *Đối với bài toán chứng minh dãy $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ có $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ thì dấu của từng số hạng u_n của dãy $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ không quan trọng lắm, i.e., $\operatorname{sgn} u_n$ không làm ảnh hưởng tới bất đẳng thức $|u_n| < \varepsilon$ trong định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ ε-δ vì sau khi lấy giá trị tuyệt đối, $|u_n| \ge 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$.*

Bài toán 38. *(a) Chứng minh $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$. (b) Viết chương trình* C/C++, Python *để tính $N_\varepsilon^{\rm opt}$ với $\varepsilon \in (0,\infty)$ được nhập từ bàn phím.*

Bài toán 39. *(a) Chứng minh $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. (b) Viết chương trình* C/C++, Python *để tính $N_\varepsilon^{\rm opt}$ với $\varepsilon \in (0,\infty)$ được nhập từ bàn phím.*

Bài toán 40. *Cho dãy $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ có $\lim_{n\to\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$. Chứng minh $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$ với $v_n = u_n - u_{n-1}$. (b) $\lim_{n\to\infty} u_n - u_{n-1} = 0$ có suy ra được $\lim_{n\to\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ không?*

Định nghĩa 3 (Dãy số thực có giới hạn hữu hạn, [Thá+25b], p. 61)**.** *Dãy số thực $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ có giới hạn hữu là $l \in \mathbb{R}$ khi n dần tới dương vô cực nếu $\lim_{n\to\infty}(u_n - l) = 0$, ký hiệu $\lim_{n\to\infty} u_n = L$.*

Notation. Ngoài ký hiệu $\lim_{n\to\infty} u_n = l$, ta cũng sử dụng các ký hiệu $\lim u_n = L$ hay $u_n \to l$ khi $n \to \infty$.

Nhận xét 2. *Nếu u_n ngày càng gần tới l khi n ngày càng lớn thì $\lim u_n = l$.*

Định nghĩa 4 (Dãy số thực có giới hạn thực theo ngôn ngữ ε-δ)**.** *1 dãy số thực $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ có giới hạn hữu hạn là $l \in \mathbb{R}$ nếu & chỉ nếu với mọi số nguyên dương ε, tồn tại 1 số nguyên dương $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star$ để $|u_n - l| < \varepsilon$ kể từ chỉ số N_ε đó trở đi:*

$$\forall \varepsilon \in (0,\infty),\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star,\ |u_n| < \varepsilon,\ \forall n \ge N_\varepsilon,$$

hay tương đương:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star,\ n \ge N_\varepsilon \Rightarrow |u_n| < \varepsilon.$$

Remark 5 (Optimal/smallest/best indices – Các chỉ số tối ưu/nhỏ nhất/tốt nhất)**.** *Định nghĩa 2 chỉ yêu cầu tồn tại $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star$ đủ lớn với mỗi $\varepsilon \in (0,\infty)$. Tuy nhiên nếu tìm được chỉ số $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star$ tối ưu, i.e., chỉ số nhỏ nhất trong các chỉ số N_ε thỏa mãn, i.e.:*

$$N_\varepsilon^{\rm opt} := \min\{N_\varepsilon \in \mathbb{N}; |u_n| < \varepsilon,\ \forall n \ge N_\varepsilon\} = \min\{N_\varepsilon \in \mathbb{N}; n \ge N_\varepsilon \Rightarrow |u_n| < \varepsilon\}.$$

thì ta có thể sử dụng ký hiệu $N_\varepsilon^{\rm opt}$ để chỉ rõ tính tối ưu (i.e., nhỏ nhất, chặt/ngặt nhất) của N_ε.

Bài toán 41. *Tính $\lim_{n\to\infty} u_n$ với: (a) $u_n = c \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. (b) $u_n = \frac{an+b}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, với $a, b \in \mathbb{R}$. (c) $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ thỏa $cn + d \ne 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$.*

Chứng minh. (a) Lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ, có $|u_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$, $\forall n \ge 1$, suy ra $N_\varepsilon^{\rm opt} = 1$, $\forall \varepsilon \in (0,\infty)$. Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ ε-δ, suy ra $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

(b) Lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ, có $|u_n - a| = \left|\frac{an+b}{n} - a\right| = \left|\frac{b}{n}\right| = \frac{|b|}{n}$, nên $|u_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{|b|}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{|b|}{\varepsilon} \Rightarrow N_\varepsilon^{\rm opt} = \left\lfloor \frac{|b|}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, nên nếu chọn $N_\varepsilon := N_\varepsilon^{\rm opt} = \left\lfloor \frac{|b|}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ thì $|u_n| < \varepsilon$, $\forall n \ge N_\varepsilon$. Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ ε-δ, suy ra $\lim_{n\to\infty} u_n = a$. □

Bài toán 42 (Programming: Compute $N_\varepsilon^{\rm opt}$)**.** *Cho $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ có giới hạn $\lim_{n\to\infty} u_n = L$. Viết chương trình* C/C++, Python, *với $\varepsilon \in (0,\infty)$ được nhập từ bàn phím, output N_ε: (a) $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. (b) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ & $u_n = -\frac{1}{\sqrt{n}}$. (c) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.*

Python: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/Python/limit.py.

```
from math import sqrt

def ua(n):
    return (-1)**n / n
```

```
def ub(n):
    return 1 / sqrt(n)

def uc(n):
    return -1 / sqrt(n)

def ud(n):
    return (-1)**n / sqrt(n)

MAX_LOOP = 100000
epsilon = float(input())

for i in range(1, MAX_LOOP + 1):
    if abs(ua(i)) < epsilon:
        print(i) # N_epsilon
        break

for i in range(1, MAX_LOOP + 1):
    if abs(ub(i)) < epsilon:
        print(i) # N_epsilon
        break

for i in range(1, MAX_LOOP + 1):
    if abs(uc(i)) < epsilon:
        print(i) # N_epsilon
        break

for i in range(1, MAX_LOOP + 1):
    if abs(ud(i)) < epsilon:
        print(i) # N_epsilon
        break
```

C++:

- NLDK's C++ script to compute $N_\varepsilon^{\rm opt}$:

  URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/C%2B%2B/NLDK_limit.cpp.

```
#include<bits/stdc++.h>
#define Sanic_speed ios_base::sync_with_stdio(false);cin.tie(NULL);cout.tie(NULL);
#define el "\n";
#define fre(i, a, b) for(int i = a; i <= b; ++i)
using namespace std;

double long qa(int n) {
    return (pow(-1, n)/n);
}
double long qb(int n) {
    double long deno = sqrt(n);
    return (1/deno);
}
double long qc(int n) {
    double long deno = sqrt(n);
    return (-1/deno);
}
double long qd(int n) {
    double long deno = sqrt(n);
    return (pow(-1, n)/deno);
}

void solve() {
    double long epsilon;
    cin >> epsilon;
    int maxN = 100000;
    fre(i, 1 ,maxN) {
```

```
        if (abs(qa(i)) < epsilon) {
            cout << "a) " << i << el
            break;
        }
    }
    fre(i, 1 ,maxN) {
        if (abs(qb(i)) < epsilon) {
            cout << "b) " << i << el
            break;
        }
    }
    fre(i, 1 ,maxN) {
        if (abs(qc(i)) < epsilon) {
            cout << "c) " << i << el
            break;
        }
    }
    fre(i, 1 ,maxN) {
        if (abs(qd(i)) < epsilon) {
            cout << "d) " << i << el
            break;
        }
    }
}

int main() {
    Sanic_speed
    int t = 1;// cin >> t;
    while(t > 0) {
     solve();
     --t;
    }
}
```

Tính giới hạn:

Bài toán 43 ([Quỳ+20b], 1.). *(a)* $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$. *(b)* $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$. *(c)* $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{2n+2}$. *(d) Mở rộng bài toán.*

Bài toán 44 ([Quỳ+20b], 2.). *(a)* $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{2n^2-1}{n^2+n}}$. *(b)* $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{1+2^n+3^n}$. *(c)* $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sum_{i=1}^n i}{n^2}$.

Bài toán 45 ([Quỳ+20b], 3.). *Chứng minh: (a)* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$. *(b)* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

Hint. Sử dụng định lý kẹp.

Bài toán 46 ([Quỳ+20b], 4.). *Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn* $0.(1428571)$ *dưới dạng phân số.*

Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $\overline{a_na_{n-1}\dots a_1a_0.a_{-1}a_{-2}\dots a_{-m}(b_1b_2\dots b_p)}$ dưới dạng phân số. Viết chương trình C/C++, Pascal, Python để mô phỏng.

Bài toán 47.

Bài toán 48 ([Quỳ+20b], 5.). *(a)* $\lim_{n\to\infty}2^n-3^n$. *(b)* $\lim_{n\to\infty}n+\sin n$. *(c)* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^3+3n+1}$. *(d) Mở rộng bài toán.*

Bài toán 49 ([Quỳ+20b], 6.). *(a)* $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n+1}-n$. *(b)* $\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

Bài toán 50 ([Quỳ+20b], 7.). *Cho* $\Delta A_0B_0C_0$ *đều cạnh* $a\in(0,\infty)$. $\Delta A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ *có 3 đỉnh là trung điểm của* $\Delta A_nB_nC_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. *Gọi* P_n, S_n *lần lượt là chu vi & diện tích* $\Delta A_nB_nC_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. *Tính: (a)* $\lim_{n\to\infty}p_n, \lim_{n\to\infty}S_n$. *(b)* $\sum_{i=0}^\infty p_i, \sum_{i=0}^\infty S_i$.

Bài toán 51 ([Quỳ+20a], 22., p. 47). *Tính* $\lim_{n\to\infty}u_n$ *với* $u_n=\sum_{i=1}^n\dfrac{1}{i(i+1)}$.

Bài toán 52 ([Quỳ+20a], 23., p. 47). *Tính* $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sum_{i=1}^n\sqrt{i}}{n\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

Hint. sử dụng định lý kẹp & đánh giá:

$$\frac{3\sqrt{n}}{2}<(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}<\frac{3\sqrt{n+1}}{2}.$$

Bài toán 53 ([Quỳ+20a], 24., p. 48)**.** *Chứng minh dãy số* $x_n = \cos n$ *không có giới hạn khi* $n \to \infty$*.*

Hint. Chứng minh phản chứng.

Bài toán 54. $\lim_{n\to\infty} x_n$ *với* $x_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)}$.

Chứng minh. $x_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$ as $n \to \infty$ nên $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. □

Bài toán 55. $\lim_{n\to\infty} \frac{4^n - 5^{-n}}{3^n - 2^{2n} - 5n^6}$.

Bài toán 56. $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(3n^2 - 2n)}{n^9 + 3n^2}$.

Bài toán 57. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-3}{2n+5}\right)^{\frac{n^2+1}{n+1}}$.

Bài toán 58. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n + (-1)^n}$.

Bài toán 59. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{\frac{1+n}{2-\sqrt{n}}}$.

Bài toán 60. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-1}{5n+2}\right)^n$.

Bài toán 61. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{\frac{1+n}{2-n^2}}$.

Bài toán 62. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+4^n}{n+5^n}}$.

Bài toán 63. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{5n+1}{n^{10}+2n}}$.

Bài toán 64. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{n^2-1}\right)^{\frac{1}{n-2}}$.

Bài toán 65. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n^2+1}\right)^{1-n}$.

Bài toán 66. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

Bài toán 67. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

Bài toán 68. $\lim_{n\to\infty} u_n$ *với* $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$.

Bài toán 69. $\lim_{n\to\infty} u_n$ *với* $u_1 = \sqrt{3}, u_{n+1} = \sqrt{3+u_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$.

Bài toán 70 ([Hùn+23], VD1, p. 86)**.** *Cho dãy số* $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ *Chứng minh dãy* (a_n) *có giới hạn là* 1.

Bài toán 71 ([Hùn+23], VD2, p. 87)**.** *Chứng minh* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Bài toán 72 ([Hùn+23], VD3, p. 87)**.** *Chứng minh* $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ *nếu* $0 < |q| < 1$.

Bài toán 73 ([Hùn+23], VD4, p. 87)**.** *Chứng minh dãy* $u_n = (-1)^n$ *phân kỳ.*

Bài toán 74 ([Hùn+23], VD5, p. 88)**.** *Tìm* $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3n+1}{2n^3-1}$.

Bài toán 75 ([Hùn+23], VD6, p. 88)**.** *Tìm* $\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+2n^3+7n^2+8n+9}{2n^4+3n^3+n+10}$.

Bài toán 76 ([Hùn+23], VD7, p. 88)**.** *Tìm* $\lim_{n\to\infty}(n - \sqrt[3]{n} - \sqrt{n})$.

Bài toán 77 ([Hùn+23], VD1, p. 89). *Tìm* $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}$.

Bài toán 78 ([Hùn+23], VD2, p. 89). *Chứng minh nếu* $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$ *thì* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bài toán 79 ([Hùn+23], VD3, p. 89). *Chứng minh* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.

Bài toán 80 ([Hùn+23], VD4, p. 89). *Cho dãy số nguyên dương* (u_n) *thỏa mãn* $u_n > u_{n-1}u_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$. *Tính giới hạn* $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n\dfrac{i}{u_i} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{2}{u_2}+\cdots+\dfrac{n}{u_n}\right)$.

Bài toán 81 ([Hùn+23], VD5, p. 90). *Tính* $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum_{i=2}^n i\cos\dfrac{\pi}{i}$.

Bài toán 82 ([Hùn+23], VD1, p. 90). *Cho dãy số* (u_n) *được xác định theo công thức* $u_n = f(u_{n-1})$. *Giả sử* $u_n\in[a,b]$ *với mọi chỉ số* n *&* f *là hàm tăng trên* $[a,b]$. *Chứng minh: (a) Nếu* $u_1\le u_2$ *thì* (u_n) *là dãy tăng. (b) Nếu* $u_1\ge u_2$ *thì* (u_n) *là dãy giảm. (c) Nếu hàm* f *bị chặn thì* (u_n) *hội tụ.*

Bài toán 83 ([Hùn+23], VD2, p. 90). *Cho dãy* (u_n) *được xác định bởi* $u_n = \dfrac{1}{3}\left(2u_{n-1}+\dfrac{1}{u_{n-1}^2}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$, $u_1>0$. *Chứng minh dãy* (u_n) *hội tụ & tìm giới hạn của dãy.*

Bài toán 84 ([Hùn+23], VD3, p. 91). *Tìm* u_1 *để dãy* $u_n = u_{n-1}^2 + 3u_{n-1} + 1$ *hội tụ.*

Bài toán 85 ([Hùn+23], VD4, p. 92). *Chứng minh tồn tại* $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Bài toán 86 (Số Napier e). *Đặt* $e \coloneqq \lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. *Chứng minh: (a)* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. *(b)* $\dfrac{1}{n+1} < \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$, *trong đó* $\ln x$ *là logarith cơ số* e *của* x.

Bài toán 87 ([Hùn+23], VD5, p. 91). *Chứng minh dãy* $u_n = \sum_{i=1}^n\dfrac{1}{i} - \ln n = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$ *có giới hạn hữu hạn.*

Lưu ý 1. $C = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\dfrac{1}{i}-\ln n = \lim_{n\to\infty} 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$ *được gọi là* hằng số Euler.

Bài toán 88 ([Hùn+23], VD1, p. 92). *Chứng minh không tồn tại* $\lim_{n\to\infty}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

Bài toán 89 ([Hùn+23], VD2, p. 92). *Cho hàm* $f:[0,+\infty)\to(0,b)$ *liên tục & nghịch biến. Giả sử hệ phương trình*

$$\begin{cases} y = f(x),\\ x = f(y),\end{cases}$$

có nghiệm duy nhất $x=y=q$. *Chứng minh dãy* $u_n = f(u_{n-1})$ *hội tụ tới* q *với* $u_1>0$.

Bài toán 90 ([Hùn+23], VD3, p. 93). *Cho dãy số* $u_n = 1+\dfrac{2}{1+u_{n-1}}$, $u_1>0$. *Chứng minh dãy hội tụ & tìm giới hạn.*

Bài toán 91 ([Hùn+23], VD1, p. 93). *Cho dãy* $a_n = \sum_{i=1}^n\dfrac{1}{i^2} = 1+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. *Chứng minh dãy này hội tụ.*

Bài toán 92 ([Hùn+23], VD2, p. 93). *Cho dãy* $a_n = \sum_{i=1}^n\dfrac{1}{i} = 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. *Chứng minh dãy này phân kỳ.*

Bài toán 93 ([Hùn+23], VD3, p. 94). *Chứng minh* $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{p+1}$, $\forall p\in\mathbb{N}$.

Bài toán 94 ([Hùn+23], VD1, p. 94). *Khảo sát sự hội tụ của* dãy Héron (u_n) *được xác định bởi* $u_1=1$, $u_n = \dfrac{1}{2}\left(u_{n-1}+\dfrac{2}{u_{n-1}}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$.

Bài toán 95 ([Hùn+23], VD2, p. 95). *Cho dãy số* (x_n) *thỏa mãn* $|x_{n+1}-a|\le\alpha|x_n-a|$, $\forall n\in\mathbb{N}$, *trong đó* $a\in\mathbb{R}$ *&* $0<\alpha<1$. *Chứng minh dãy số* (x_n) *hội tụ về* a.

Bài toán 96 ([Hùn+23], VD3, p. 95). *Cho dãy số* (x_n) *xác định bởi* $x_1 = a\in\mathbb{R}$, $x_{n+1} = \cos x_n$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. *Chứng minh* (x_n) *hội tụ.*

Bài toán 97 ([Hùn+23], VD4, p. 95, Canada 1985). *Dãy số* (x_n) *thỏa mãn* $1<x_1<2$ *&* $x_{n+1} = 1+x_n-\dfrac{1}{2}x_n^2$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. *Chứng minh* (x_n) *hội tụ. Tìm* $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Bài toán 98 ([Hùn+23], VD5, p. 95, VMO2023). *Xét dãy số* (a_n) *thỏa mãn* $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \sqrt[3]{3a_{n+1} - a_n}$ *&* $0 \le a_n \le 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Chứng minh dãy* (a_n) *có giới hạn hữu hạn.*

Bài toán 99 ([Hùn+23], VD6, p. 96, VMO2022). *Cho dãy số* (u_n) *xác định bởi* $u_1 = 6$, $u_{n+1} = 2 + \sqrt{u_n + 4}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Chứng minh dãy* (u_n) *có giới hạn hữu hạn.*

Bài toán 100 ([Hùn+23], VD7, p. 96, VMO2019). *Cho dãy số* (x_n) *xác định bởi* $x_1 = 1$ *&* $x_{n+1} = x_n + 3\sqrt{x_n} + \frac{n}{\sqrt{x_n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *(a) Chứng minh* $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{x_n} = 0$. *(b) Tính giới hạn* $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{x_n}$.

Bài toán 101 ([Hùn+23], VD1, p. 97, VMO1984). *Dãy số* (u_n) *được xác định như sau:* $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}$. *Dãy số* (v_n) *được xác định như sau:* $v_n = \sum_{i=1}^n \operatorname{arccot} u_i$. *Tìm giới hạn* $\lim_{n\to\infty} v_n$.

Bài toán 102 ([Hùn+23], VD2, p. 97, VMO1988). *Dãy số* (u_n) *bị chặn thỏa mãn điều kiện* $u_n + u_{n+1} \ge 2u_{n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$ *có nhất thiết hội tụ không?*

Bài toán 103 ([Hùn+23], VD3, p. 98, Olympic 30.4 lần V). *Cho* $x_k = \sum_{i=1}^k \frac{i}{(i+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{k}{(k+1)!}$. *Tính* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{1999} x_i^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{1999}^n}$.

Bài toán 104 ([Hùn+23], VD4, p. 98, VMO2013A). *Gọi* F *là tập hợp tất cả các hàm số* $f : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ *thỏa mãn* $f(3x) \ge f(f(2x)) + x$, $\forall x > 0$. *Tìm hằng số* A *lớn nhất để* $f(x) \ge Ax$, $\forall f \in F$, $\forall x > 0$.

Bài toán 105 ([Hùn+23], VD5, p. 98, Hải Dương 2019–2020). *Cho dãy số thực* (x_n) *thỏa mãn* $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_{n+1} = \frac{3x_n}{2x_n + 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Tìm số hạng tổng quát của dãy số & tính giới hạn của dãy số đó.*

Bài toán 106 ([Hùn+23], VD6, p. 99, Hải Dương 2015–2016). *Cho dãy số* (u_n) *thỏa mãn* $u_1 = -1$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$ *& dãy số* (v_n) *thỏa mãn* $u_nv_n - u_n + 2v_n + 2 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Tính* v_{2015} *&* $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Bài toán 107 ([Hùn+23], VD7, p. 99, Hải Dương 2013–2014). *Cho dãy số* (u_n) *thỏa mãn* $u_1 = \frac{5}{2}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 - u_n + 2$. *Tính* $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i}$.

Bài toán 108 ([Hùn+23], VD1, p. 99). *Cho dãy số* (u_n) *được xác định:* u_1, $u_n = \alpha u_{n-1} + \beta$. *Biện luận theo tham số* α, β *giá trị giới hạn của dãy số.*

Bài toán 109 ([Hùn+23], VD1, p. 100). *Cho* (u_n) *là dãy số hội tụ &* $\lim_{n\to\infty} u_n = u$. *Khi đó, dãy trung bình cộng* $v_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n u_i$ *cũng hội tụ &* $\lim_{n\to\infty} v_n = u$.

Bài toán 110 ([Hùn+23], VD2, p. 100). *Giả sử* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. *Chứng minh* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_ib_{n+1-i} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} = ab$. *Từ đó, suy ra* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$.

Bài toán 111 ([Hùn+23], VD3, p. 101). *Giả sử* $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Chứng minh nếu* $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$ *thì* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = a$.

2.5 Cauchy sequences – Dãy Cauchy

Definition 8 ([Rud76], Def. 3.8, p. 52). *A sequence* $\{p_n\}$ *in a metric space* X *is said to be a* Cauchy sequence *if for every* $\epsilon > 0$ *there is an integer* N *s.t.* $d_X(p_n, p_m) < \epsilon$ *if* $n \ge N$ *&* $m \ge N$.

Briefly:

$$\{p_n\} \text{ is a Cauchy sequence in a metric space } X \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \text{ s.t. } \min\{m,n\} \ge N_\varepsilon \Rightarrow d_X(p_n, p_m) < \varepsilon,$$

or equivalently,

$$\{p_n\} \text{ is a Cauchy sequence in a metric space } X \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \text{ s.t. } d_X(p_n, p_m) < \varepsilon,\ \forall m \ge N_\varepsilon,\ \forall n \ge N_\varepsilon.$$

Definition 9. *Let* E *be a subset of a metric space* X, *& let* S *be the set of all real numbers of the form* $d(p,q)$, *with* $p \in E, q \in E$. *The sup of* S *is called the* diameter *of* E.

Problem 6 ([Rud76], p. 48, +1). *(a) Prove that the sequence* $\{\frac{1}{n}\}$ *converges in* $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ *(to 0), but fails to converge in the set of all positive real numbers, with* $d(x,y) := |x - y|$, $\forall x, y \in X$. *(b) Find similar or more advanced examples.*

2.6 Sequences with SymPy

A sequence is a finite or infinite lazily evaluated list.

```
sympy.series.sequences.sequence(seq, limits=None)
```

returns appropriate `sequence object`.

Explanation: If `seq` is a SymPy sequence, returns `SeqPer` object otherwise returns `SeqFormula` object. E.g.:

```
from sympy import sequence
from sympy.abc import n
sequence(n**2, (n, 0, 5))
# output: SeqFormula(n**2, (n, 0, 5))
sequence((1, 2, 3), (n, 0, 5))
# output: SeqPer((1, 2, 3), (n, 0, 5))
```

2.6.1 Sequence Base

`class sympy.series.sequences.SeqBase(*args)`: Base class for sequences.

- `coeff(pt)`: returns the coefficient at point `pt`.
- `coeff_mul(other)`: should be used when `other` is not a sequence. Should be defined to define custom behavior.

  ```
  from sympy import SeqFormula
  from sympy.abc import n
  SeqFormula(n**2).coeff_mul(2)
  # output: SeqFormula(2*n**2, (n, 0, oo))
  ```

  `*` defines multiplication of sequences with sequences only.
- `find_linear_recurrence(n, d = None, gfvar = None, )`: Finds the shortest linear recurrence that satisfies the 1st n terms of sequence of order $\le \frac{n}{2}$ if possible. If `d` is specified, find shortest linear recurrence of order $\le \min\{d, \frac{n}{2}\}$ if possible. Returns list of coefficients `[b(1), b(2), ...]` corresponding to recurrence relation `x(n) = b(1)*x(n - 1) + b(2)*x(n - 2) + ...`. Return `[]` if no recurrence is found. If `gfvar` is specified, also returns ordinary generating function as a function of `gfvar`.

2.7 Problems: Sequences

Bài toán 112. *Tính* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{an+b}{cn+d}$ *theo* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(c, d) \neq (0, 0)$.

Bài toán 113. *Tính* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{an^2+bn+c}{dn^2+en+f}$ *theo* $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, $(d, e, f) \neq (0, 0, 0)$.

Bài toán 114. *Tính* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ *với: (a)* $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $Q \not\equiv 0$. *(b)* $P, Q \in \mathbb{C}[x]$, $Q \not\equiv 0$.

Bài toán 115. *Cho* $a, b, c, d, \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. *Tính: (a)* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a+b\alpha^n}{c+d\alpha^n}$. *(b)* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{an+b\alpha^n}{cn+d\alpha^n}$. *(c)* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{an^2+b\alpha^n}{cn^2+d\alpha^n}$. *(d)* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{P(x)+a\alpha^n}{Q(x)+b\alpha^n}$ *với* $P, Q \in \mathbb{R}[x]$.

Bài toán 116 ([Quỳ+20b], 1.)**.** *Cho dãy số* $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ *thỏa* $\lim_{n\to\infty} a_n \sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$. *Tính* $\lim_{n\to\infty} a_n \sqrt[3]{3n} = 1$.

Bài toán 117 ([Quỳ+20b], 2.)**.** *Cho dãy số* $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ *thỏa* $a_1 \in (0, 1), a_{n+1} = a_n - a_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Chứng minh* $\lim_{n\to\infty} na_n = 1$.

Bài toán 118 ([Quỳ+20b], 3.)**.** *Cho dãy số* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *thỏa* $x_0 = 2, x_{n+1} = \dfrac{2x_n+1}{x_n+2}$, $n \in \mathbb{N}$. *Tính* $\lfloor \sum_{i=1}^n x_i \rfloor$.

Bài toán 119 ([Quỳ+20b], 4.)**.** *Chứng minh* $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{1+\dfrac{i}{n^2}} - 1\right) = \dfrac{1}{4}$.

Bài toán 120 ([Quỳ+20b], 5.)**.** *Cho dãy số* $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ *xác định bởi* $x_0 = 0, x_1 = 2, x_{n+2} = 2^{-x_n} + \dfrac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Chứng minh* $\exists \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$ *& tính* $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Bài toán 121 ([Quỳ+20b], 6.). *Xét tính hội tụ của dãy theo giá trị của $a \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} x_1 = a \neq -1, \\ x_{n+1} = \dfrac{3\sqrt{2x_n^2+2}-2}{2x_n+\sqrt{2x_n^2+2}}, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star. \end{cases}$$

Bài toán 122 ([Quỳ+20b], 7.). *Cho $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Xét hàm số $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $f: \mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{d}{c}\right\} \to \mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{a}{c}\right\}$ & dãy $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ thỏa $u_0 = a \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (a) Chứng minh $f(x)$ là 1 song ánh & dãy $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ đã cho xác định khi & chỉ khi $a \neq v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, trong đó $\{v_n\}_{n=0}^\infty$ được xác định bởi $v_0 = -\dfrac{d}{c}, v_{n+1} = f^{-1}(v_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (lưu ý: dãy $\{v_n\}_{n=0}^\infty$ có thể không xác định kể từ 1 chỉ số nào đó). (b) Đặt $\Delta \coloneqq (a-d)^2 + 4bc$. Biện luận theo Δ sự hội tụ của dãy $\{u_n\}_{n=0}^\infty$.*

Bài toán 123 ([Quỳ+20b], 8.). *Cho $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ là dãy bị chặn thỏa $F_{n+2}a_{n+2} \leq F_{n+1}a_{n+1} + F_n a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Chứng minh $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ hội tụ.*

Bài toán 124 ([Quỳ+20b], 9.). *Dãy $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ được xác định bởi $a_1 > 0, a_2 > 0, a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}$. Chứng minh dãy số $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ hội tụ & tìm giới hạn của dãy số đó.*

Bài toán 125 ([Quỳ+20b], 10.). *Cho $a, b, A, B \in (0, \infty)$. Xét dãy số $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ xác định bởi $x_1 = a, x_2 = b, x_{n+2} = A\sqrt[3]{x_{n+1}^2} + B\sqrt[3]{x_n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Chứng minh $\exists \lim_{n\to\infty} x_n$ & tính $\lim_{n\to\infty} x_n$.*

Bài toán 126 ([Quỳ+20b], 11.). *Tìm $a \in \mathbb{R}$ để dãy $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ xác định bởi:*

$$x_0 = a, \ x_{n+1} = \frac{4x_n^5 + x_n^2 - x_n - 1}{5x_n^4 + x_n}, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

hội tụ.

Bài toán 127 ([Quỳ+20b], 12.). *Cho $a, b, c \in (0, \infty)$ & 3 dãy số $\{a_n\}_{n=0}^\infty, \{b_n\}_{n=0}^\infty, \{c_n\}_{n=0}^\infty$ được xác định bởi:*

$$a_0 = a, \ b_0 = b, \ c_0 = c, \ a_{n+1} = a_n + \frac{2}{b_n + c_n}, \ b_{n+1} = b_n + \frac{2}{c_n + a_n}, \ c_{n+1} = c_n + \frac{2}{a_n + b_n}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \infty$.

Bài toán 128 ([Quỳ+20b], 13.). *Cho $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Chứng minh phương trình $x^n = x + 1$ có 1 nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là x_n. (a) Chứng minh $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. (b) Tính $\lim_{n\to\infty} n(x_n - 1)$.*

Bài toán 129 ([Quỳ+20b], 14.). *Cho $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Chứng minh phương trình $x^n = x^2 + x + 1$ có 1 nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là x_n. Tìm $a \in \mathbb{R}$ để giới hạn $\lim_{n\to\infty} n^a(x_n - x_{n+1})$ tồn tại, hữu hạn, & $\neq 0$.*

Bài toán 130 ([Quỳ+20b], 15.). *Cho dãy số $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ thỏa $a_1 = 5, a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Chứng minh $45 < a_{1000} < 45.1$.*

Bài toán 131 ([Quỳ+20b], 16.). *Cho dãy số $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ xác định bởi*

$$u_1 = 1, \ u_2 = 2, \ u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Đặt $x_n \coloneqq \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Tính $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Bài toán 132 ([Quỳ+20b], 17.). *Cho dãy số $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ thỏa $\lim_{n\to\infty} u_{2n} + u_{2n+1} = 2010, \lim_{n\to\infty} u_{2n} + u_{2n-1} = 2011$. Tính $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_{2n}}{u_{2n+1}}$.*

Bài toán 133 ([Quỳ+20b], 18.). *Cho dãy số $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ xác định bởi $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 5u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Chứng minh $\forall a \in (\sqrt{5}, \infty)$, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{a^n} = 0$.*

Bài toán 134 ([Quỳ+20b], 19.). *Tính $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \dfrac{1}{\sqrt{i}}$.*

Bài toán 135 ([Quỳ+20b], 20.). *Cho dãy số $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset [1, \infty)$ thỏa $u_{m+n} \leq u_m u_n$. Đặt $v_n \coloneqq \dfrac{\ln u_n}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Chứng minh $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ hội tụ.*

Bài toán 136 ([Quỳ+20b], 21.). *Cho dãy số dương $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ thỏa $a_1 > 0, a_{n+1}^p \geq \sum_{i=1}^n a_i$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, với $p \in (0, 2)$ cho trước. Chứng minh tồn tại $c > 0$ để $a_n > nc$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$.*

Bài toán 137 ([Quỳ+20b], 22.). *Khảo sát sự hội tụ của dãy $u_0 = a \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = \sqrt[3]{7u_n - 6}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Bài toán 138 ([Quỳ+20b], 23.). *Cho* $\alpha \in (0,2)$. *Tính giới hạn của dãy* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi* $u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + (1-\alpha)u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *theo 2 giá trị* u_0, u_1 *cho trước.*

Bài toán 139 ([Quỳ+20b], 24.). *Cho* $a \in (1,\infty)$. *Tính* $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^{n+1}} \sum_{i=1}^n \frac{a^i}{i}$.

Bài toán 140 ([Quỳ+20b], 25.). *Tìm* $a \in \mathbb{R}$ *để dãy số* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *được xác định bởi* $x\_0 = \sqrt{1996}, x_{n+1} = \frac{a}{x_n^2+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *có giới hạn* $\lim_{n\to\infty} u_n \in \mathbb{R}$.

Bài toán 141 ([Quỳ+20b], 26.). *Cho dãy số thực* $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ *thỏa* $e^{a_n} + na_n = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Chứng minh* $\lim_{n\to\infty} n(1-na_n) = 1$.

Bài toán 142 ([Quỳ+20b], 27.). *Cho dãy số thực* $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset (0,\infty)$ *được xác định bởi* $x_1 = 1, x_2 = 9, x_3 = 9, x_4 = 1, x_{n+4} = \sqrt[4]{x_n x_{n+1} x_{n+2} x_{n+3}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Chứng minh dãy này có giới hạn hữu hạn & tính giới hạn đó.*

Bài toán 143 ([VMS23], 1.1, p. 30, HCMUT). *Cho* $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *thỏa* $f'(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *Xét dãy số* $\{a_n\}$*:*

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star. \end{cases}$$

(a) Nếu $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, *tính* $\lim_{n\to\infty} a_n$. *(b) Nếu* $f(2023) = 0$ *&* $f \in C^2(\mathbb{R})$ *thỏa* $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, *tính* $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Bài toán 144 ([VMS23], 1.2, p. 30, VNUHCM UIT). *Cho dãy số* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *thỏa*

$$\begin{cases} u_0 \ge -2, \\ u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star. \end{cases}$$

(a) Chứng minh $\{u_n\}$ *có giới hạn hữu hạn. Tính* $\lim_{n\to\infty} u_n$. *(b) Cho 2 dãy* $\{v_n\}_{n=1}^\infty, \{w_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$\begin{cases} v_n = 4^n|u_n - 2|, \\ w_n = \dfrac{u_1 u_2 \cdots u_n}{2^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star. \end{cases}$$

Tính $\lim_{n\to\infty} v_n, \lim_{n\to\infty} w_n$.

Bài toán 145 ([VMS23], 1.3, p. 30, ĐH Đồng Tháp). *Xét dãy số* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$u_1 = \frac{3}{2}, \ u_n = 1 + \frac{1}{2}\arctan u_{n-1}, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Chứng minh $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *hội tụ.*

Bài toán 146 ([VMS23], 1.4, p. 31, ĐH Đồng Tháp). *Cho dãy số* $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$a_1 = 1, \ a_{n+1} = \frac{n^2-1}{a_n} + 2, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

(a) Chứng minh $n \le a_n \le n+1$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *(b) Đặt* $S_n^{(3)} \coloneqq \sum_{i=1}^n a_i^3$. *Tính* $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(3)}}{n^4}$.

Bài toán 147 ([VMS23], 1.5, p. 31, ĐHGTVT). *Cho dãy số* $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$a_1 > 0, \ a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Chứng minh $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ *giảm & tính* $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Bài toán 148 ([VMS23], 1.6, p. 31, ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). *Cho dãy số* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$\begin{cases} u_0 = 0, \ u_1 = \beta, \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_{n-1}}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star. \end{cases}$$

(a) Tìm công thức số hạng tổng quát của $\{u_n\}_{n=1}^\infty$. *(b) Tính* $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Bài toán 149 ([VMS23], 1.7, p. 31, ĐHKH, Thái Nguyên). *Cho dãy số* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$x_n = \sum_{i=1}^n \frac{i}{(i+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Tính $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{2023} x_i^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{2023}^n}$.

Bài toán 150 ([VMS23], 1.8, p. 31, ĐH Mỏ–Địa chất)**.** *Tính*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\prod_{i=1}^n i^{i^{2021}}\right)^{\frac{1}{n^{2022}}}}{n^{\frac{1}{2022}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1^{1^{2021}}\cdot 2^{2^{2021}}\cdots n^{n^{2021}}\right)^{\frac{1}{n^{2022}}}}{n^{\frac{1}{2022}}}.$$

Bài toán 151 ([VMS23], 1.9, pp. 31–32, ĐHSPHN2)**.** *Cho dãy số* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$x_1\in(0,1),\ x_{n+1}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\ln(1+x_i),\ \forall n\in\mathbb{N}^\star.$$

(a) Chứng minh dãy $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *có giới hạn hữu hạn. (b) Chứng minh* $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n(x_n-x_{n+1})}{x_n^2}=\dfrac{1}{2}$.

Bài toán 152 ([VMS23], 1.10, p. 32, ĐH Trà Vinh)**.** *Cho dãy số* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$a_1=a_2=1,\ a_{n+2}=\frac{1}{a_{n+1}}+a_n,\ \forall n\in\mathbb{N}^\star.$$

Tính x_{2022}.

Bài toán 153 ([VMS23], 1.11, p. 32, ĐH Trà Vinh)**.** *Cho 2 dãy số* $\{x_n\}_{n=1}^\infty,\{y_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$x_1=y_1=\sqrt{3},\ x_{n+1}=x_n+\sqrt{1+x_n^2},\ y_{n+1}=\frac{1}{1+\sqrt{1+y_n^2}},\ \forall n\in\mathbb{N}^\star.$$

Chứng minh $x_ny_n\in(2,3)$, $\forall n\ge 2$ *&* $\lim_{n\to\infty}y_n=0$.

Bài toán 154 ([VMS23], 1.11, p. 32, ĐH Vinh)**.** *Cho dãy số* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$x_n=\prod_{i=1}^n\left(1+\frac{1}{2^i}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right),\ \forall n\in\mathbb{N}^\star.$$

(a) Tìm tất cả $n\in\mathbb{N}^\star$ *thỏa* $x_n>\frac{15}{8}$. *(b) Chứng minh* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *hội tụ.*

Bài toán 155 ([VMS24], p. 32, 1.1, VNUHCM UIT)**.** *Cho* $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. *Xét dãy số*

$$\begin{cases}x_0=a,\ x_1=b,\\ x_{n+1}=x_n+\dfrac{1}{2}x_{n-1}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right).\end{cases}$$

Chứng minh $\{x_n\}$ *hội tụ.*

Bài toán 156 ([VMS24], p. 32, 1.2, ĐH Đồng Tháp)**.** *Cho dãy số* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$u_n=\sum_{i=1}^n\frac{i}{(i+1)!}=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!},\ \forall n\in\mathbb{N}^\star.$$

(a) Tìm $n\in\mathbb{N}$ *lớn nhất để* $u_n<\dfrac{2023}{2024}$. *(b) Tính giới hạn* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{i=1}^{2024}u_i^n}=\sqrt[n]{u_1^n+u_2^n+\cdots+u_{2024}^n}$.

Bài toán 157 ([VMS24], p. 32, 1.3, ĐHGTVT)**.** *Cho dãy số* $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ *thỏa* $\frac{1}{2}<a_n<1$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. *Dãy số* $\{x_n\}$ *đặt bởi*

$$x_1=a_1,\ x_{n+1}=\frac{2(a_{n+1}+x_n)-1}{1+2a_{n+1}x_n},\ \forall n\in\mathbb{N}^\star.$$

(a) Chứng minh dãy số $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *tăng & bị chặn trên. (b) Tìm* $\lim_{n\to\infty}x_n$.

Bài toán 158 ([VMS24], p. 33, 1.4, ĐH Vinh)**.** *Cho dãy số* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$\begin{cases}x_1=2024,\\ x_{n+1}=\dfrac{x_n^2}{3\lfloor x_n\rfloor+4},\ \forall n\in\mathbb{N}^\star.\end{cases}$$

(a) Chứng minh $x_8<1$. *(b) Chứng minh* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *hội tụ & tìm giới hạn.*

Chương 3

Function – Hàm Số

Contents

3.1 Limit of function – Giới hạn hàm số

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta_\varepsilon > 0,\ |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

hay tương đương với:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta_\varepsilon > 0,\ |f(x) - l| < \varepsilon,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| < \delta_\varepsilon.$$

Bài toán 159 ([Quỳ+20b], 8.)**.** *Áp dụng định nghĩa giới hạn của hàm số, tính giới hạn: (a)* $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x+1}$*. (b)* $\lim_{x\to 2} \sqrt{x+2}$.

Chứng minh. (a) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x+1} = \lim_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x-4)}{x+1} = \lim_{x\to -1}(x-4)$. Chứng minh $\lim_{x\to -1}(x-4) = -5$: Xét $\varepsilon > 0$ bất kỳ, xét bất phương trình $|x - 4 - (-5)| < \varepsilon \Leftrightarrow |x+1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - (-1)| < \varepsilon$. Theo định nghĩa giới hạn của hàm số, suy ra $\lim_{x\to -1}(x-4) = -5$.

(b) Xét $\varepsilon > 0$ bất kỳ, xét bất phương trình $|\sqrt{x+2} - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow 2 - \varepsilon < \sqrt{x+2} < 2 + \varepsilon \Leftrightarrow 4 - 4\varepsilon + \varepsilon^2 < x + 2 < 4 + 4\varepsilon + \varepsilon^2 \Leftrightarrow -4\varepsilon + \varepsilon^2 < x - 2 < 4\varepsilon + \varepsilon^2$. Nếu chọn $\delta_\varepsilon = \min\{|-4\varepsilon + \varepsilon^2|, |4\varepsilon + \varepsilon^2|\} = 4\varepsilon - \varepsilon^2$ thì $|x - 2| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x+2} - 2| < \varepsilon$, nên theo định nghĩa giới hạn của hàm số, $\lim_{x\to 2} \sqrt{x+2} = 2$. $\square$

Bài toán 160. *Viết chương trình* C/C++, Pascal, Python *để tính giới hạn* $\lim_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to x_0} \dfrac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{i=0}^n b_i x^i}$.

Input. *Dòng 1 chứa* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, m, n. *Dòng 2 chứa* $a_0, a_1, \ldots, a_m$. *Dòng 3 chứa* $b_0, b_1, \ldots, b_n$.

Output. *Giới hạn* $\lim_{x\to x_0} \dfrac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{i=0}^n b_i x^i} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Sample.

Bài toán 161. *Viết chương trình* C/C++, Pascal, Python *để tính giới hạn* $\lim_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to x_0} \dfrac{\sum_{i=0}^m a_i x^{\alpha_i}}{\sum_{i=0}^n b_i x^{\beta_i}}$.

Input. *Dòng 1 chứa* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, m, n. *Dòng 2 chứa* $a_0, a_1, \ldots, a_m$. *Dòng 3 chứa* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$. *Dòng 4 chứa* $b_0, b_1, \ldots, b_n$. *Dòng 5 chứa* $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n \mathbb{R}$.

Output. *Giới hạn* $\lim_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to x_0} \dfrac{\sum_{i=0}^m a_i x^{\alpha_i}}{\sum_{i=0}^n b_i x^{\beta_i}}$.

Sample.

Bài toán 162 ([Quỳ+20b], 9.). *Cho hàm số* $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ *& 2 dãy số* $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty$*:*

$$x_n = \frac{1}{2n\pi},\ y_n = \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}.$$

(a) Tìm giới hạn của 4 dãy số $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty, \{f(x_n)\}_{n=1}^\infty, \{f(y_n)\}_{n=1}^\infty$*. (b) Tồn tại hay không giới hạn* $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$*?*

Chứng minh. (a) $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n\pi} = 0$, $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}} = 0$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}\cos 2n\pi = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$, $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty}\cos(2n+1)\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$.

(b) Ta có 2 dãy $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty$ cùng tiến về 0 nhưng $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1 \neq 0 = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$, suy ra không tồn tại $\lim_{x\to 0} f(x)$. □

Bài toán 163 ([Quỳ+20b], 10.). *Tính: (a)* $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$*. (b)* $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$*. (c)* $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$*.*

Chứng minh. (a) 1. (b) $\frac{2}{3}$. (c) $\frac{1}{2}$. □

Bài toán 164 ([Quỳ+20b], 11.). *Tính: (a)* $\lim_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$*. (b)* $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$*. (c)* $\lim_{x\to\infty}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x)(1+5x)}{(2x+3)^5}$*. (d)* $\lim_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^3-3x-2}}$*. (e)* $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x}$*. (f)* $\lim_{x\to 1}\dfrac{3}{1-\sqrt{x}} - \dfrac{3}{1-\sqrt[3]{x}}$*.*

Bài toán 165 ([Quỳ+20b], 12.). *Cho hàm số*

$$f(x) = \begin{cases} x^2-2x+3 & \text{if } x \le 2,\\ 4x-3 & \text{if } x > 2.\end{cases}$$

Tính $\lim_{x\to 2^+} f(x), \lim_{x\to 2^-} f(x), \lim_{x\to 2} f(x)$*.*

Bài toán 166 ([Quỳ+20b], 13.). *Tính: (a)* $\lim_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$*. (b)* $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$*. (c)* $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$*.*

Bài toán 167 ([Quỳ+20b], 14.). *Tính: (a)* $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x$*. (b)* $\lim_{x\to 1}(x-1)\log_x 2$*. (c)* $\lim_{x\to 2}\dfrac{2^x-x^2}{x-2}$*.*

3.2 Continuous function – Hàm số liên tục

Bài toán 168 ([Quỳ+20b], 15.). *Chứng minh: (a) 2 hàm số* $f(x) = x^3-x+2, g(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$ *liên tục tại mọi điểm* $x\in\mathbb{R}$*. (b) Hàm số*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{if } x \neq 2,\\ 3 & \text{if } x = 2,\end{cases}$$

liên tục tại điểm $x = 2$*. (c) Hàm số*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{if } x \neq 1,\\ 2 & \text{if } x = 1,\end{cases}$$

gián đoạn tại điểm $x = 1$*.*

Bài toán 169 ([Quỳ+20b], 16.). *Chứng minh: (a) Hàm số* $f(x) = (x^2-2)^2+2$ *liên tục trên* $\mathbb{R}$*. (b) Hàm số* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *liên tục trên* $(-1,1)$*. (c) Hàm số* $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ *liên tục trên* $[-2,2]$*. (d) Hàm số* $f(x) = \sqrt{2x-1}$ *liên tục trên* $[\frac{1}{2},\infty)$*.*

Bài toán 170 ([Quỳ+20b], 17.). *Sử dụng bất đẳng thức* $|\sin x| \le |x|, \forall x\in\mathbb{R}$*, chứng minh tính liên tục của hàm số* $y = \cos x$ *tại điểm* $x = x_0$ *bất kỳ.*

Bài toán 171 ([Quỳ+20b], 18.). *Tìm tất cả các điểm gián đoạn của hàm số: (a)* $y = \dfrac{1+x}{1+x^3}$*. (b)* $y = \sqrt{\dfrac{1-\cos\pi x}{4-x^2}}$*. (c)* $y = x - \lfloor x\rfloor$*. (d)* $y = \dfrac{1}{\ln x}$*.*

Bài toán 172 ([Quỳ+20b], 19.). *(a) Chứng minh phương trình bậc 3* $x^3+ax^2+bx+c = 0$ *luôn có ít nhất 1 nghiệm thực* $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$*. (b) Mở rộng bài toán.*

Bài toán 173 ([Quỳ+20b], 20.). *Tìm tất cả* $m \in \mathbb{R}$ *để phương trình* $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = m$ *có nghiệm.*

Bài toán 174 ([Quỳ+20b], 21.). *Giải bất phương trình* $\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{7-x} > 2$.

Bài toán 175 ([Quỳ+20a], 25., p. 48). *Tính* $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1} + x$.

Bài toán 176 ([Quỳ+20a], 26., p. 48). *Tính* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

Bài toán 177 ([Quỳ+20a], 27., p. 48). *Sử dụng giới hạn đặc biệt* $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, *chứng minh hàm số* $y = e^x \in C(\mathbb{R})$.

Bài toán 178 ([Quỳ+20a], 28., p. 48). *Tìm tất cả* $m \in \mathbb{R}$ *để hàm số*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x} & \text{if } x < 2, \\ mx + m + 1 & \text{if } x \ge 2, \end{cases} \in C(\mathbb{R}).$$

Bài toán 179 ([Quỳ+20a], 29., p. 48). *Tìm tất cả hàm số* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *liên tục tại điểm* 0 *& thỏa* $f(3x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 180 ([Quỳ+20a], 30., p. 48). *Tìm tất cả hàm số* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *liên tục tại điểm* 0 *& thỏa* $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Bài toán 181 ([Quỳ+20a], 31., p. 48). *Tìm ví dụ về 1 hàm số* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *thỏa* f *gián đoạn tại mọi điểm thuộc* $\mathbb{R}$ *nhưng* $f \circ f$ *liên tục tại mọi điểm thuộc* $\mathbb{R}$.

Bài toán 182 ([Quỳ+20a], 32., p. 48). *Chứng minh parabol* $(P) : y = x^2 - 2x$ *& ellipse* $(E) : \dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1$ *cắt nhau tại 4 điểm phân biệt nằm trên 1 đường tròn.*

Bài toán 183 ([Quỳ+20a], 33., p. 48). *Cho* $f :\in C([0,1],[0,1])$. *Chứng minh tồn tại điểm* $x_0 \in [0,1]$ *thỏa* $f(x_0) = x_0$.

Bài toán 184 ([Quỳ+20a], 34., p. 48). *Dùng phương pháp chia đôi, tìm nghiệm của phương trình* $x^5 + x + 1 = 0$ *với độ chính xác* 0.1.

Xem code C/C++ của bài toán này ở [Thư+21].

3.3 Problem: Function – Bài tập: Hàm số

Bài toán 185 ([VMS23], 3.1, p. 33, HCMUT). *(a) Chứng minh tồn tại hàm số* $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *thỏa* $xf''(x) + 2f'(x) = x^{2023}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *(b) Giả sử* $g \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *thỏa* $xg''(x) + 2g'(x) \ge x^{2023}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *Chứng minh* $\int_{-1}^1 x(g(x) + x^{2023})\,\mathrm{d}x \ge \dfrac{2}{2025}$.

Bài toán 186 ([VMS23], 3.2, p. 33, ĐH Đồng Tháp). *Cho hàm* $f(x)x = 2(x-1) - \arctan x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *Chứng minh phương trình* $f(x) = 0$ *có nghiệm duy nhất là* $a \in (1, \sqrt{3})$.

Proposition 1 (Luật bình phương nghịch đảo). *Mỗi sự gia tăng khoảng cách từ nguồn cho ra kết quả giảm mức độ âm thanh theo tỷ lệ nghịch với bình phương của sự gia tăng khoảng cách.*

Bài toán 187 ([VMS23], 3.3, pp. 33–34, ĐH Đồng Tháp). *Sử dụng luật bình phương nghịch đảo, giải quyết bài toán: 1 người có 1 mảnh đất lớn có chiều dài mặt tiền là* l m *ở giữa 2 quán karaoke thường phát ra âm thanh có cường độ lần lượt là* I_1, I_2. *Người này định xây 1 ngôi nhà nhỏ trên mảnh đất đó nhưng muốn tìm vị trí sao cho chịu ảnh hưởng của âm thanh từ 2 quán karaoke là ít nhất. Giúp người này nếu biết: (a) Cường độ âm thanh* $I_1 = I_2$. *(b) Cường độ âm thanh* $I_1 = 8I_2$. *(c)* $I_1 = aI_2$ *với* $a \in (0,\infty)$ *cho trước.*

Bài toán 188 ([VMS23], 3.5, p. 34, ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). *Cho hàm*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} + \alpha x & \text{if } x \ne 0, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

(a) Tính $f'(x)$ *khi* $x \ne 0$. *(b) Tính* $f'(0)$. *(c) Chứng minh hàm* $f(x)$ *không đơn điệu trên mỗi khoảng mở chứa điểm* 0.

Bài toán 189 ([VMS23], 3.6, p. 34, ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). *(a) Gia đình bác Nam muốn xây 1 cái bể hình hộp với đáy là hình vuông có thể tích* $V = 10$ m^3. *Biết giá thành để xây mỗi* m^2 *mặt đáy là* $a = 700000$ *đồng & 1 mặt bên là* $b = 500000$ *đồng. Để tổng chi phí xây dựng là nhỏ nhất thì bác Nam nên xây bể với kích thước như thế nào? (b) Giải bài toán với* $a, b, V \in (0,\infty)$ *bất kỳ.*

Bài toán 190 ([VMS23], 3.7, pp. 34–35, ĐHKH Thái Nguyên). *Tìm các hàm liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\not\equiv 0$, thỏa*

$$f(x+y)=2023^y f(x)+2023^x f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Từ đó tính

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{\sin f(x)},\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{f^{(n)}(0)}.$$

Bài toán 191 ([VMS23], 3.8, p. 35, ĐH Mỏ–Địa chất). *Tính*

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{\sin x^2+\sin y^2+\sin z^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

Bài toán 192 ([VMS23], 3.9, p. 35, ĐH Mỏ–Địa chất). *Gọi $y_1(x),y_2(x),y_3(x)$ là 3 nghiệm của phương trình vi phân $y'''+a(x)y''+b(x)y'c(x)y=0$ thỏa $y_1^2(x)+y_2^2(x)+y_3^2(x)=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tìm các hằng số α,β để hàm $z=(y_1'(x))^2+(y_2'(x))^2+(y_3'(x))^2$ là nghiệm của phương trình vi phân $z'+\alpha a(x)z+\beta c(x)=0$.*

Bài toán 193 ([VMS23], 3.10, p. 35, ĐH Mỏ–Địa chất). *Trên hình ellipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, tìm tất cả các điểm $T=(x_0,y_0)$ thỏa: tam giác bị giới hạn bởi các đường thẳng $x=0,y=0$ & tiếp tuyến với ellipse tại điểm T có diện tích nhỏ nhất.*

Bài toán 194 ([VMS23], 3.11, p. 35, FTU Hà Nội). *Chứng minh đa thức $f(x)=\sum_{i=0}^{2022}(-1)^i\frac{x^i}{i!}=1-x+\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^{2022}}{2022!}$ không có nghiệm thực.*

Bài toán 195 ([VMS23], 3.12, p. 35, ĐHSPHN2). *Cho $f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. 1 điểm x được gọi là 1* điểm mù *nếu tồn tại 1 điểm $y\in\mathbb{R}$ với $y>x$ sao cho $f(y)>f(x)$. Giả sử tất cả các điểm thuộc khoảng mở $I=(a,b)$ là các điểm mù & a,b không phải là 2 điểm mù. Chứng minh $f(a)=f(b)$.*

Bài toán 196 ([VMS23], 3.13, p. 36, ĐH Trà Vinh). *Chứng minh hàm số $f(x)=x^{x^x}$ đồng biến trên $(0,\infty)$ & $\lim_{x\to 0^+}f(x)=0$.*

Bài toán 197 ([VMS23], 3.14, p. 36, ĐH Vinh). *Cho hàm*

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^2}\sin\dfrac{1}{x^{2023}} & \text{if } x\neq 0,\\ 0 & \text{if } x=0.\end{cases}$$

(a) Chứng minh hàm số f liên tục tại $x=0$. (b) Hàm số f có khả vi tại $x=0$ hay không?

Bài toán 198 ([VMS23], 3.15, p. 36, ĐH Vinh). *Cho hàm $f\in C([0,1],\mathbb{R})$, khả vi trên khoảng $(0,1)$, thỏa $f(0)=0$, & $|f'(x)|\le 2023|f(x)|$, $\forall x\in(0,1)$. Chứng minh $f(x)=0$, $\forall x\in[0,1]$.*

Bài toán 199 ([VMS23], 3.16, p. 36, ĐH Vinh). *Giả sử hàm $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ khả vi trên khoảng $(0,\infty)$ & thỏa 2 điều kiện: (i) $|f(x)|\le 2023$, $\forall x\in(0,\infty)$; (ii) $f(x)f'(x)\ge 2022\cos x$, $\forall x\in(0,\infty)$. Có tồn tại $\lim_{x\to\infty}f(x)$ không?*

Chương 4

Continuity – Sự Liên Tục

Definition 10 ([Tao22a], Def. 6.1.1, p. 109: distance between 2 reals)**.** *Given $x, y \in \mathbb{R}$, their distance $d(x, y)$ is defined to be $d(x, y) \coloneqq |x - y| \in [0, \infty)$.*

Definition 11 ([Tao22a], Def. 6.1.2, p. 109: ε-close reals)**.** *Let $\varepsilon > 0$ be a real number. $x, y \in \mathbb{R}$ is said to be* ε-close *iff $d(x, y) \leq \varepsilon$.*

Chương 5

Series – Chuỗi Số

Bài toán 200 ([VMS23], 2.1, p. 32, VNUHCM UIT). *Cho dãy số* $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset (0,\infty)$ *thỏa* $\sum_{n=1}^\infty \frac{x_n}{(2n-1)^2} < 1$. *Chứng minh* $\sum_{k=1} \sum_{n=1}^k \frac{x_n}{k^3} < 2$.

Bài toán 201 ([VMS23], 2.2, p. 32, ĐHGTVT). *Cho dãy số* $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset (0,\infty)$ *đặt bởi*

$$a_1 > 0,\ a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Tính $\sum_{n=1}^\infty a_n$.

Bài toán 202 ([VMS23], 2.2, p. 32, ĐH Mỏ–Địa chất). *Gọi* S *là dãy con của dãy điều hòa* $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^\infty = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ *& có tổng hữu hạn. Gọi* $c(n)$ *là số lượng các phần tử của* S *có số thứ tự trong dãy mẹ (điều hòa) ban đầu không vượt quá* n. *Chứng minh* $\lim_{n\to\infty} \frac{c(n)}{n} = 0$.

Bài toán 203 ([VMS24], p. 33, 2.1, ĐHCNTT TpHCM). *Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\beta \sin^2 l\alpha}{1 + \beta \sin^2 k\alpha},\ \alpha \notin \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\},\ \beta > 0.$$

Chương 6

Derivative & Differentiability – Đạo Hàm & Tính Khả Vi

Contents

6.1 Định nghĩa đạo hàm. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Resources – Tài nguyên.

1. Wikipedia/derivative.

In mathematics, the *derivative* is a fundamental tool that quantifies the sensitivity to change of a function's output w.r.t. its input. The derivative of a function of a single variable at a chosen input value, when it exists, is the slope of the tangent line to the graph of the function at that point. The tangent line is the best linear approximation of the function near that input value. For this reason, the derivative is often described as the *instantaneous rate of change*, the ratio of the instantaneous change in the dependent variable to that of the independent variable. The process of finding a derivative is called *differentiation*.

– Trong toán học, *đạo hàm* là 1 công cụ cơ bản định lượng độ nhạy với sự thay đổi của đầu ra của 1 hàm so với đầu vào của nó. Đạo hàm của 1 hàm của 1 biến duy nhất tại 1 giá trị đầu vào đã chọn, khi nó tồn tại, là độ dốc của đường tiếp tuyến với đồ thị của hàm tại điểm đó. Đường tiếp tuyến là phép xấp xỉ tuyến tính tốt nhất của hàm gần giá trị đầu vào đó. Vì lý do này, đạo hàm thường được mô tả là *tốc độ thay đổi tức thời*, tỷ lệ giữa sự thay đổi tức thời của biến phụ thuộc với biến độc lập. Quá trình tìm đạo hàm được gọi là *phép vi phân*.

There are multiple different notations for differentiation. Leibniz notation, named after GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ, is represented as the ratio of 2 differentials, whereas *prime notation* is written by adding a prime mark. Higher order notations represent repeated differentiation, & they are usually denoted in Leibniz notation by adding superscripts to the differentials, & in prime notation by adding additional prime marks. The higher order derivatives can be applied in physics, e.g., while the 1st derivative of the position of a moving object w.r.t. time is the object's velocity, how the position changes as time advances, the 2nd derivative is the object's acceleration, how the velocity changes as time advances.

– Có nhiều ký hiệu khác nhau cho phép tính vi phân. Ký hiệu Leibniz, được đặt theo tên của Gottfried Wilhelm Leibniz, được biểu diễn dưới dạng tỷ số của hai phép tính vi phân, trong khi ký hiệu nguyên tố được viết bằng cách thêm 1 dấu nguyên tố. Ký hiệu bậc cao hơn biểu diễn phép tính vi phân lặp lại và chúng thường được biểu diễn trong ký hiệu Leibniz bằng cách thêm các chữ số mũ vào các phép tính vi phân, và trong ký hiệu nguyên tố bằng cách thêm các dấu nguyên tố bổ sung. Các đạo hàm bậc cao hơn có thể được áp dụng trong vật lý; ví dụ, trong khi đạo hàm bậc nhất của vị trí của 1 vật chuyển động theo thời gian là vận tốc của vật, cách vị trí thay đổi khi thời gian trôi qua, thì đạo hàm bậc hai là gia tốc của vật, cách vận tốc thay đổi khi thời gian trôi qua.

Derivatives can be generalized to functions of several real variables. In this case, the derivative is reinterpreted as a linear transformation whose graph is (after an appropriate translation) the best linear approximation to the graph of the original function. The Jacobian matrix is the matrix that represents this linear transformation w.r.t. the basis given by the choice of independent & dependent variables. It can be calculated in terms of the partial derivatives w.r.t. the independent variables. For a real-valued function of several variables, the Jacobian matrix reduces to the gradient vector.

Nếu quỹ đạo chuyển động của 1 vật hay 1 chất điểm được miêu tả bằng hàm số $\mathbf{x}(t)$ theo thời gian thì vận tốc $\mathbf{v}(t) = \mathbf{x}'(t)$ biểu thị độ nhanh chậm của chuyển động tại 1 thời điểm t.

6.1.1 Definition of derivative as a limit – Định nghĩa đạo hàm như 1 giới hạn

Definition 12 (ε-δ definition of derivative)**.** *A function of a real variable $f(x)$ is differentiable at a point a of its domain, if its domain contains an open interval containing a, & the limit*

$$l = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

exists. I.e., for every positive real number $\varepsilon \in (0,\infty)$, there exists a positive real number $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0,\infty)$ s.t., for every $h \neq 0$ s.t. $|h| < \delta$ then $f(a+h)$ is defined, &

$$\left|\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - l\right| < \varepsilon.$$

If the function f is differentiable at a, i.e., if the limit l exists, then this limit is called the *derivative* of f at a. Multiple notations for the derivative exist. The derivative of f at a can be denoted $f'(a)$, read as "f prime of a"; or it can be denoted $\frac{df}{dx}(a)$, read as "the derivative of f w.r.t. x at a" or "df by (or over) dx at a". If f is a function that has a derivative at every point in its domain, then a function can be defined by mapping every point x to the value of the derivative of f at x. This function is written f' & is called the *derivative function* or the *derivative of* f. The function f sometimes has a derivative at most, but not all, points of its domain. The function whose value at a equals $f'(a)$ whenever $f'(a)$ is defined & elsewhere is undefined is also called the derivative of f. It is still a function, but its domain may be smaller than the domain of f.

– Nếu hàm f khả vi tại a, tức là nếu giới hạn l tồn tại, thì giới hạn này được gọi là *đạo hàm* của f tại a. Có nhiều ký hiệu cho đạo hàm. Đạo hàm của f tại a có thể được ký hiệu là $f'(a)$, đọc là "f phẩy của a"; hoặc có thể được ký hiệu là $\frac{df}{dx}(a)$, đọc là "đạo hàm của f theo x tại a" hoặc "df theo (hoặc trên) dx tại a". Nếu f là hàm có đạo hàm tại mọi điểm trong tập xác định của nó, thì hàm có thể được định nghĩa bằng cách ánh xạ mọi điểm x tới giá trị của đạo hàm của f tại x. Hàm này được ký hiệu là f' & được gọi là *đạo hàm hàm* hoặc *đạo hàm của* f. Hàm f đôi khi có đạo hàm tại nhiều nhất, nhưng không phải tất cả, các điểm của tập xác định của nó. Hàm có giá trị tại a bằng $f'(a)$ bất cứ khi nào $f'(a)$ được xác định & ở nơi khác không xác định cũng được gọi là đạo hàm của f. Nó vẫn là 1 hàm, nhưng tập xác định của nó có thể nhỏ hơn tập xác định của f.

The ratio in the definition of the derivative is the slope of the line through 2 points on the graph of the function f, specially the points $(a, f(a))$ & $(a+h, f(a+h))$. As h is made smaller, these points grow closer together, & the slope of this line approaches the limiting value, the slope of the tangent to the graph of f at a. I.e., the derivative is the slope of the tangent.

– Tỷ lệ trong định nghĩa của đạo hàm là độ dốc của đường thẳng qua 2 điểm trên đồ thị của hàm số f, đặc biệt là các điểm $(a, f(a))$ & $(a+h, f(a+h))$. Khi h nhỏ hơn, các điểm này sẽ gần nhau hơn, & độ dốc của đường thẳng này tiến tới giá trị giới hạn, độ dốc của tiếp tuyến với đồ thị của f tại a. I.e., đạo hàm là độ dốc của tiếp tuyến.

6.1.1.1 Definition of derivative using infinitesimals – Định nghĩa đạo hàm sử dụng vô cùng nhỏ

1 way to think of the derivative $\frac{df}{dx}(a)$ is as the ratio of an infinitesimal change in the output of the function f to an infinitesimal change in its input. In order to make this intuition rigorous, a system of rules for manipulating infinitesimal quantities is required. The system of hyperreal numbers is a way of treating infinite & infinitesimal quantities. The hyperreals are an extension of the real numbers that contain numbers greater than anything of the form $1+1+\cdots+1$ for any finite number of terms. Such numbers are infinite, & their reciprocals are infinitesimals. The application if hyperreal numbers to the foundations of calculus is called nonstandard analysis. This provides a way to define the basic concepts of calculus such as the derivative & integral in terms of infinitesimals, thereby giving a precise meaning to the d in the Leibniz notation. Thus, the derivative of $f(x)$ becomes

$$f'(x) = \mathrm{st}\left(\frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}\right)$$

for an arbitrary infinitesimal dx, where st denotes the standard part function, which "rounds off" each finite hyperreal to the nearest real.

6.1.2 Continuity & differentiability – Liên tục & khả vi

If f is differentiable at a, then f must also be continuous at a. E.g., choose a point a & let f be the step function

$$\mathrm{step}(x; a, a_l, a_r) = \begin{cases} a_l & \text{if } x < a,\\ a_r & \text{if } x \geq a.\end{cases} \text{ for } a \in \mathbb{R}, a_l, a_r \in \mathbb{C}, a_l \neq a_r.$$

Remark 6. *This step function is very common in the mathematical analysis of hyperbolic Partial Differential Equations (abbr., hyperbolic PDEs), especially in the shock waves & rarefaction waves – solutions of Riemann problem.*

– Hàm bước này rất phổ biến trong phân tích toán học của Phương trình đạo hàm riêng hypebolic (viết tắt là PDE hypebolic), đặc biệt là trong sóng xung kích & sóng loãng – các nghiệm của bài toán Riemann.

The function $\mathrm{step}(x; a, a_l, a_r)$ cannot have a derivative at a. If $h < 0$, then $a+h$ is on the low part of the step, so the secant line from a to $a+h$ is very steep; as h tends to 0, the slope tends to ∞. If $h > 0$, then $a+h$ is on the high part of the step, so the secant line from a to $a+h$ has slope 0. Consequently, the secant lines do not approach any single slope, so the limit of the difference quotient does not exist. However, even if a function is continuous at a point, it may not be differentiable there.

– Hàm step$(x; a, a_l, a_r)$ không thể có đạo hàm tại a. Nếu $h < 0$, thì $a + h$ nằm ở phần thấp của bậc, do đó đường cắt từ a đến $a + h$ rất dốc; khi h tiến tới 0, độ dốc tiến tới ∞. Nếu $h > 0$, thì $a + h$ nằm ở phần cao của bậc, do đó đường cắt từ a đến $a + h$ có độ dốc 0. Do đó, các đường cắt không tiến tới bất kỳ độ dốc đơn nào, do đó giới hạn của thương hiệu không tồn tại. Tuy nhiên, ngay cả khi 1 hàm liên tục tại 1 điểm, thì nó có thể không khả vi tại đó.

Problem 7. *Prove that the absolute value function given by $f(x) = |x|$ is continuous at $x = 0$, but it is not differentiable there.*

Chứng minh. If $h > 0$, then the slope of the secant line from 0 to h is 1. If $h < 0$, then the slope of the secant line from 0 to h is -1. This can be seen graphically as a "kink" or a "cusp" in the graph at $x = 0$. □

Problem 8. *Investigate the continuity & differentiability of functions: (a) $x^a|x|$, $a > 0$. (b) $x^a|x|$, $a < 0$. (c) $x^a|x|^b$ for $a, b \in \mathbb{R}$.*

Even a function with a smooth graph is not differentiable at a point where its tangent is vertical, e.g.:
– Ngay cả 1 hàm số có đồ thị trơn cũng không khả vi tại điểm mà tiếp tuyến của nó thẳng đứng, e.g.:

Problem 9. *Prove that the function $f(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ is continuous on the whole $\mathbb{R}$ but not differentiable at $x = 0$.*

In summary, a function that has a derivative is continuous, but there are continuous functions that do not have a derivative.
– Tóm lại, 1 hàm số có đạo hàm là hàm số liên tục, nhưng có những hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.
Most functions that occur in practice have derivatives at all points or almost every point. Early in the history of calculus, many mathematicians assumed that a continuous function was differentiable at most points. Under mild conditions (e.g., if the function is a monotone or a Lipschitz function), this is true. However, in 1872, Weierstrass found the 1st example of a function, called the Weierstrass function, that is continuous everywhere but differentiable nowhere. In 1931, Stefan Banach proved that the set of functions that have a derivative at some point is a meager set in the space of all continuous functions. Informally, this means that hardly any random continuous functions have a derivative at even 1 point.

– Hầu hết các hàm xuất hiện trong thực tế đều có đạo hàm tại mọi điểm hoặc hầu như mọi điểm. Vào đầu lịch sử phép tính, nhiều nhà toán học cho rằng một hàm liên tục có thể vi phân tại hầu hết các điểm. Trong điều kiện nhẹ nhàng (ví dụ, nếu hàm là hàm đơn điệu hoặc hàm Lipschitz), điều này là đúng. Tuy nhiên, vào năm 1872, Weierstrass đã tìm thấy ví dụ đầu tiên về một hàm, được gọi là hàm Weierstrass, liên tục ở mọi nơi nhưng không thể vi phân ở bất kỳ đâu. Vào năm 1931, Stefan Banach đã chứng minh rằng tập hợp các hàm có đạo hàm tại một điểm nào đó là một tập hợp ít ỏi trong không gian của tất cả các hàm liên tục. Nói một cách không chính thức, điều này có nghĩa là hầu như không có hàm liên tục ngẫu nhiên nào có đạo hàm tại 1 điểm.

6.1.3 Notation for differentiation – Ký hiệu cho phép lấy đạo hàm

Resources – Tài nguyên.

1. Wikipedia/notation for differentiation.

1 common way of writing the derivative of a function is Leibniz notation, introduced by Gottfried Wilhelm Leibniz in 1675, which denotes a derivative as the quotient of 2 differentials e.g. dx, dy. It is still common used when the equation $y = f(x)$ is viewed as a functional relationship between dependent & independent variables. The 1st derivative is denoted by $\frac{dy}{dx}$, read as "the derivative of y w.r.t. x". This derivative can alternately be treated as the application of a differential operator to a function, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$. Higher derivatives are expressed using the notation $\frac{d^n y}{dx^n}$ for the nth derivative of $y = f(x)$. These are abbreviations for multiple applications of the

6.2 L'Hôspital's rule – Quy tắc l'Hôspital

Resources – Tài nguyên.

1. Wikipedia/L'Hôspital rule.
2. [Rud76]. Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. Sect: L'Hospital's rule, pp. 109–110.
3. [Tao22a]. Terence Tao. *Analysis I*. Sect. 10.5: L'Hôspital's Rule, pp. 228–229.

L'Hôpital's rule, also known as *Bernoulli's rule*. is a mathematical theorem that allows evaluating limits of indeterminate forms using derivatives. Application (or repeated application) of the rule often converts an indeterminate form to an expression that can be easily evaluated by substitution. The rule is named after the 17th-century French mathematician Guillaume de l'Hôpital. Although the rule is often attributed to de l'Hôpital, the theorem was 1st introduced to him in 1694 by the Swiss mathematician Johann Bernoulli.

The following theorem is frequently useful in the evaluation of limits. The differentiation of the numerator & denominator often simplifies the quotient or converts it to a limit that can be directly evaluated by continuity.

Theorem 9 ([Rud76], Thm. 5.13, p. 109, l'Hôspital's rule)**.** *suppose f, g are real & differentiable in (a, b), & $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$, where $-\infty \le a < b \le \infty$. Suppose $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to l$ as $x \to a$. If $f(x) \to 0$ & $g(x) \to 0$ as $x \to a$, or if $g(x) \to \infty$ as $x \to a$, then $\frac{f(x)}{g(x)} \to l$ as $x \to a$. The analogous statement is also true if $x \to b$, or if $g(x) \to -\infty$ instead of $g(x) \to \infty$.*

Theorem 10 ([Tao22a], Prop. 10.5.1, p. 228, L'Hôspital's rule I). *Let $X \subset \mathbb{R}$, let $f : X \to \mathbb{R}, g : X \to \mathbb{R}$ be functions, & let $x_0 \in X$ be a limit point of X. Suppose that $f(x_0) = g(x_0) = 0$, that f, g are both differentiable at x_0, but $g'(x_0) \neq 0$. Then there exists a $\delta > 0$ such that $g(x) \neq 0$, $\forall x \in (X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta))\backslash\{x_0\}$, &*

$$\lim_{x \to x_0,\ x \in (X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta))\backslash\{x_0\}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Bài toán 204. *Cho hàm số $f(x) = \sin x, g(x) = -\frac{1}{2}x$. Chứng minh hàm số*

$$h(x) \coloneqq \begin{cases} \dfrac{f(x)}{g(x)} & \text{if } x \neq 0, \\ \dfrac{f'(0)}{g'(0)} = -2 & \text{if } x = 0. \end{cases} \in C(\mathbb{R}).$$

Problem 10. *Suppose f, g are complex differentiable functions on $(0, 1)$, $f(x) \to 0, g(x) \to 0, f'(x) \to A, g'(x) \to B$ as $x \to 0$, where $A, B \in \mathbb{C}$, $B \neq 0$. Prove that $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.*

Hint. $\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f(x)}{x} - A\right)\frac{x}{g(x)} + A\frac{x}{g(x)}$ then apply l'Hôspital rule, i.e., Thm. 9 to the real- & imaginary parts of $\frac{f(x)}{x}, \frac{g(x)}{x}$.

6.2.1 Problems: Derivative – Bài tập: Đạo hàm

Bài toán 205. *Tính đạo hàm bằng định nghĩa $\forall x_0 \in \mathbb{C}$: (a) $(x)'|_{x=x_0}$. (b) $(x^2)'|_{x=x_0}$. (c) $(x^n)'|_{x=x_0}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (d) $(x^{-n})'|_{x=x_0}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (e) $(\sqrt{x})'|_{x=x_0}$. (f) $(\sqrt[3]{x})'|_{x=x_0}$. (g) $(\sqrt[n]{x})'|_{x=x_0}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (h) $(\sqrt[n]{x^m})|_{x=x_0}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$. (i) $(x^a)'|_{x=x_0}$, $\forall a \in \mathbb{R}$.*

Bài toán 206 (Derivative of polynomials – Đạo hàm của các đa thức)**.** *Tính đạo hàm của hàm số đa thức*

$$P(x; n, \mathbf{a}) \coloneqq \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{P}$$

tại $x = x_0$ bằng định nghĩa, với $\deg P(x; n, \mathbf{a}) = n \in \mathbb{N}$ & vector chứa các hệ số của đa thức $P(x; n, \mathbf{a})$ là $\mathbf{a} \coloneqq (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\star$.

Bài toán 207 (Derivative of rational function – Đạo hàm của phân thức)**.** *Tính đạo hàm của hàm số phân thức*

$$Q(x; m, n, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \coloneqq \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i x^i}{\sum_{i=0}^{n} b_i x^i} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}, \tag{Q}$$

tại $x = x_0$ bằng định nghĩa.

Bài toán 208 (Đạo hàm của căn thức)**.** *Tính đạo hàm của hàm số căn thức $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, với $n \in \mathbb{N}^\star$, tại $x = x_0$ bằng định nghĩa.*

Ta có 3 dạng hàm số sơ cấp thường gặp: hàm đa thức $P(x; n, \mathbf{a}) \coloneqq \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, hàm phân thức $Q(x; m, n, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \coloneqq \dfrac{\sum_{i=0}^{m} a_i x^i}{\sum_{i=0}^{n} b_i x^i}$, hàm căn thức $R_n(x) \coloneqq \sqrt[n]{x}$.

Bài toán 209 ([Quỳ+20a], 1., p. 49)**.** *Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số tại điểm x_0: (a) $y = 2x + 1, x_0 = 2$. (b) $y = x^2 + 3x, x_0 = 1$. (c) $y = ax + b$ tại $x = x_0$. (d) $y = ax^2 + bx + c$ tại $x = x_0$.*

Bài toán 210 ([Quỳ+20a], 2., p. 49)**.** *Cho parabol $y = x^2$ & 2 điểm $A(2, 4), B(2 + \Delta x, 4 + \Delta y)$ trên parabol đó. (a) Tính hệ số góc của cát tuyến AB biết $\Delta x \in \{1, 0.1, 0.01\}$. (b) Tính hệ số góc của tiếp tuyến của parabol đã cho tại điểm A. (c) Mở rộng cho parabol $y = ax^2 + bx + c$ & 2 điểm $A(x_0, y_0), B(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.*

Bài toán 211 ([Quỳ+20a], 3., p. 49)**.** *Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$ biết: (a) Tiếp tuyến có hoành độ bằng 1. (b) Tiếp điểm của tung độ bằng 8. (c) Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3.*

Bài toán 212 ([Quỳ+20a], 4., p. 49)**.** *1 vật rơi tự do có phương trình chuyển động $S = \frac{gt^2}{2}$ với $g \approx 9.8\mathrm{m/s}^2$ & t (s). Tính: (a) Vận tốc trung bình trong khoảng thời gian từ t đến $t + \Delta t$ với độ chính xác 0.001, biết $t = 5$ & $\Delta t \in \{0.1, 0.001, 0.001\}$. (b) Vận tốc tại thời điểm $t = 5$.*

Bài toán 213 ([Quỳ+20a], 5., p. 49)**.** *Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x}$ trên $(0, \infty)$.*

Bài toán 214 ([Quỳ+20a], 6., p. 49)**.** *Tính đạo hàm của hàm số $y = x|x|$ tại điểm $x_0 = 0$ (nếu có).*

Bài toán 215 ([Quỳ+20a], 7., p. 49)**.** *Tính $f'(x)$ với*

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{if } x < 1, \\ x^2 + 2 & \text{if } 1 \leq x \leq 2, \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 & \text{if } x > 2. \end{cases} \tag{6.1}$$

6.3 Differentiation Rules – Các Quy Tắc Tính Đạo Hàm

Bài toán 216 ([Quỳ+20a], 8., p. 50)**.** *Tính đạo hàm của hàm số: (a)* $y = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 7x + 9$. *(b)* $y = (x-1)^5(x+1)^7$. *(c)* $y = \dfrac{x^2+1}{x^4+1}$. *(d)* $y = (x+1)^3(x+2)^4(x+3)^5$.

Bài toán 217 ([Quỳ+20a], 9., p. 50)**.** *Tính đạo hàm của hàm số: (a)* $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$. *(b)* $y = \sin x^2 + x\cos x^2$. *(c)* $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. *(d)* $y = (x^3 + x^2 + x + 1)e^{x^2+x}$.

Bài toán 218 ([Quỳ+20a], 10., p. 50)**.** *Tính đạo hàm của hàm số: (a)* $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$. *(b)* $y = \dfrac{\sin x - 1}{\sin x + \cos x}$.

Bài toán 219 ([Quỳ+20a], 11., p. 50)**.** *Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số: (a)* $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ *biết hoành độ tiếp điểm là* $x_0 = \frac{1}{2}$. *(b)* $y = \sqrt{x+2}$ *biết tung độ tiếp điểm là* $y_0 = 2$.

Bài toán 220 ([Quỳ+20a], 12., p. 50)**.** *Chứng minh hàm số* $y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x$ *có đạo hàm bằng* 0.

Bài toán 221 ([Quỳ+20a], 13., p. 50)**.** *Viết phương trình tiếp tuyến của parabol* $y = x^2$ *biết tiếp tuyến đó đi qua điểm* $A(0,-1)$.

Bài toán 222 ([Quỳ+20a], 14., p. 50)**.** *1 viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với tốc độ ban đầu* $v_0 = 196$ m/s *(bỏ qua sức cản của không khí). Tìm thời điểm tại đó tốc độ của viên đạn bằng* 0. *Khi đó viên đạn cách mặt đất bao nhiêu* m*?*

Chương 7

Các định lý giá trị trung bình

Bài toán 223 ([Quỳ+20a], 15., p. 50)**.** *Cho* $a, b, c \in \mathbb{R}, 2a + 3b + 6c = 0$*. Chứng minh phương trình* $ax^2 + bx + c = 0$ *có ít nhất 1 nghiệm thuộc* $(0, 1)$*.*

Bài toán 224 ([Quỳ+20a], 16., p. 50)**.** *Cho* $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$*. Đếm số nghiệm của phương trình* $f'(x) = 0$*.*

Bài toán 225 ([Quỳ+20a], 17., p. 51)**.** *Xét hàm số* $f(x)$ *liên tục trên đoạn* $[a, b]$ *có đạo hàm trên* (a, b)*. Giả sử phương trình* $f(x) = 0$ *có đúng 2 nghiệm* x_1, x_2 *với* $x_1 \neq x_2$*. Chứng minh phương trình* $f'(x) = 0$ *có nghiệm, hơn nữa biểu thức* $f'(x)$ *phải đổi dấu.*

Bài toán 226 ([Quỳ+20a], 18., p. 51)**.** *Chứng minh* $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$*.*

Bài toán 227 ([Quỳ+20a], 19., p. 51)**.** *Cho* $0 < a < b$ *&* f *là 1 hàm liên tục trên* $[a, b]$*, có đạo hàm trên* (a, b)*. Chứng minh tồn tại* $c \in (a, b)$ *thỏa* $\dfrac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(c) - f'(c)$*.*

Bài toán 228 ([Quỳ+20a], 20., p. 51)**.** *Tính giới hạn: (a)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$*. (b)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+x} - 1}{\sqrt[n]{1+x} - 1}$*. (c)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x \sin x}$*.*

Bài toán 229 ([Quỳ+20a], 21., p. 51)**.** *Tính giới hạn: (a)* $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$*. (b)* $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\cot x}$*.*

Chương 8

2nd-Order Derivative – Đạo Hàm Cấp 2

Chương 9

Vi Phân & Đạo Hàm Cấp Cao

Bài toán 230 ([Quỳ+20a], 22., p. 51)**.** *Tính vi phân của hàm số: (a)* $y = \sqrt{x^2 + a^2}$*. (b)* $y = x \sin x$*. (c)* $y = x^2 + \sin^2 x$*. (d)* $y = e^x \ln x$*.*

Bài toán 231 ([Quỳ+20a], 23., p. 51)**.** *Làm tròn đến hàng phần nghìn: (a)* $\dfrac{1}{0.9995}$*. (b)* $\ln 1.001$*. (c)* $\cos 61°$*.*

Bài toán 232 ([Quỳ+20a], 24., p. 51)**.** *Chứng minh nếu* f, g *là 2 hàm số có đạo hàm đến cấp 2 thì* fg *cũng có đạo hàm đến cấp 2 & có công thức* $(f(x)g(x))'' = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + g''(x)$*.*

Bài toán 233 ([Quỳ+20a], 25., p. 51)**.** *Tính đạo hàm: (a)* $f(x) = x^4 - \cos 2x$*, tính* $f^{(4)}(x)$*. (b)* $f(x) = \cos^2 x$*, tính* $f^{(5)}(x)$*. (c)* $f(x) = (x + 10)^6$*, tính* $f^{(n)}(x)$*.*

Bài toán 234 ([Quỳ+20a], 26., p. 52)**.** *Vận tốc của 1 chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức* $v(t) = 8t + 3t^2$*, với* $t > 0$*,* t *được tính bằng giây* s *&* $v(t)$ *tính bằng* $\mathrm{m/s}$*. Tính gia tốc của chất điểm: (a) Lúc* $t = 4$*. (b) Lúc vận tốc chuyển động bằng* 11*.*

Bài toán 235 ([Quỳ+20a], 27., p. 52)**.** *Chứng minh* $\forall n \geq 1$*: (a) Nếu* $f(x) = \frac{1}{x}$ *thì* $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$*. (b) Nếu* $f(x) = \cos x$ *thì* $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$*.*

Bài toán 236 ([Quỳ+20a], 28., p. 52)**.** *Cho* $f(x) = \sqrt{x}$*. Tính* $f^{(n)}(x)$*.*

Chương 10

Miscellaneous

Bài toán 237 ([Quỳ+20a], 29., p. 52)**.** *Tính $f'(x)$ với*

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{if } x<1,\\ x^2+1 & \text{if } 1\le x\le 2,\\ x^3-x^2-4x+10 & \text{if } x>2.\end{cases} \tag{10.1}$$

Bài toán 238 ([Quỳ+20a], 30., p. 52)**.** *Tính $f'(x)+f(x)+2$ nếu $f(x)=x\sin 2x$.*

Bài toán 239 ([Quỳ+20a], 31., p. 52)**.** *Chứng minh nếu $f(x)=3e^{x^2}$ thì $f'(x)-2xf(x)+\frac{1}{3}f(0)-f'(0)=1$.*

Bài toán 240 ([Quỳ+20a], 32., p. 52)**.** *Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y=4x-x^2$ tại các điểm mà đường cong cắt trục hoành.*

Bài toán 241 ([Quỳ+20a], 33., p. 52)**.** *Cho đa thức bậc 4 $P(x)$ thỏa mãn điều kiện $P(x)\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Chứng minh $P(x)+P'(x)+P''(x)+P^{(3)}(x)+P^{(4)}(x)\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.*

Bài toán 242 ([Quỳ+20a], 34., p. 53)**.** *Áp dụng định lý Rolle cho hàm số $f(x)=e^xP(x)$ để chứng minh nếu đa thức $P(x)$ bậc n có n nghiệm thực phân biệt thì đa thức $P(x)+P'(x)$ cũng có n nghiệm thực phân biệt.*

Bài toán 243 ([Quỳ+20a], 35., p. 53)**.** *Cho hàm số $f(x)$ khả vi trên đoạn $[0,1]$ & $f'(0)f'(1)<0$. Chứng minh tồn tại $c\in(0,1)$ thỏa $f'(c)=0$.*

Bài toán 244 ([Quỳ+20a], 36., p. 53)**.** *Giả sử $f(x)$ là 1 hàm số lẻ & khả vi trên $\mathbb{R}$. Chứng minh $f'(x)$ là 1 hàm số chẵn.*

Bài toán 245 ([Quỳ+20a], 37., p. 53)**.** *Tính đạo hàm cấp 100 của hàm số $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$.*

Bài toán 246 ([Quỳ+20a], 38., p. 53)**.** *Tính giới hạn: (a) $\lim_{x\to 0}\cos^{\frac{1}{2x^2}}x$. (b) $\lim_{x\to 0}\cos^{\frac{5}{x}}3x$.*

Bài toán 247 ([Quỳ+20a], 39., p. 53)**.** *Chứng minh: (a)* (Phương trình dao động điều hòa) *Nếu $y=A\sin(\omega t+\varphi)+B\cos(\omega t+\varphi)$ với A,B,ω,φ là 4 hằng số thì $y''+\omega^2y=0$. (b) Nếu $y=\sqrt{2x-x^2}$ thì $y^3y''+1=0$.*

Bài toán 248 ([Quỳ+20a], 40., p. 53, công thức Newton–Leibnitz)**.** *Cho f,g là 2 hàm số có đạo hàm đến cấp n, chứng minh công thức: $(f(x)g(x))^{(n)}=\sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$.*

Bài toán 249 ([Quỳ+20a], 41., p. 53)**.** *Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$. Tính $f^{(100)}(0),f^{(101)}(0)$.*

Bài toán 250 ([VMS23], p. 36, 4.1, VNUHCM UIT)**.** *Cho hàm $f\in C^2(\mathbb{R})$ thỏa $f(0)=2$, $f'(0)=-2$, $f(1)=1$. Chứng minh tồn tại $c\in(0,1)$ thỏa $f(c)f'(c)+f''(c)=0$.*

Bài toán 251 ([VMS23], p. 37, 4.2, ĐH Đồng Tháp)**.** *Cho f khả vi trên (a,∞), $\forall a\in(0,\infty)$ & $\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$. Chứng minh $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.*

Bài toán 252 ([VMS23], p. 37, 4.3, ĐH Đồng Tháp)**.** *Cho f là hàm số có đạo hàm f' đồng biến trên $[0,2]$ & $f(0)=-1,f(2)=1$. Chứng minh tồn tại $a,b,c\in[0,2]$ thỏa $f'(a)f'(b)f'(c)=1$.*

Bài toán 253 ([VMS23], p. 37, 4.4, ĐHGTVT)**.** *Cho $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ thỏa $f^{(n)}(0)=0$, $\forall n\in\mathbb{N}$ & $f^{(n)}(x)x\ge 0$, $\forall k\in\mathbb{N}^\star$, $\forall x\in(0,\infty)$. Chứng minh $f(x)=0$, $\forall x\in(0,\infty)$.*

Bài toán 254 ([VMS23], p. 37, 4.5, ĐH Hùng Vương, Phú Thọ)**.** *Giả sử hàm $f\in C([1,2023])$, khả vi trong khoảng $(1,2023)$, & $f(2023)=0$. Chứng minh tồn tại $c\in(1,2023)$ thỏa*

$$f'(c)=\frac{2024-2023c}{1-c}f(c).$$

Bài toán 255 ([VMS23], p. 37, 4.6, ĐHKH Thái Nguyên). *Giả sử* $f(x) \in C^\infty([-1,1])$, $f^{(n)}(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *& tồn tại* $\alpha \in (0,1)$ *thỏa* $\sup_{x\in[-1,1]} |f^{(n)}(x)| \le \alpha^n n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Chứng minh* $f(x) \equiv 0$ *trên đoạn* $[-1,1]$.

Bài toán 256 ([VMS23], p. 37, 4.7, ĐHSPHN2). *Cho* $f \in C([a,b])$ *khả vi trên* (a,b). *Giả sử* $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a,b)$. *Chứng minh* $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *thỏa* $a \le x_1 < x_2 \le b$ *&* $f(x_1)f(x_2) > 0$ *thì luôn tồn tại* $c \in (x_1, x_2)$ *thỏa*

$$\frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = c - \frac{f(c)}{f'(c)}.$$

Bài toán 257 ([VMS24], p. 33, 3.1, VNUHCM UIT). *Cho* f *là hàm số thực trên* $(0,\infty)$. *Giả sử*

$$f(x^\alpha) = f(x)\sin^2\alpha + f(1)\cos^2\alpha,\ \ \forall x \in (0,\infty),\ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh f *khả vi tại* 1.

Bài toán 258 ([VMS24], p. 34, 3.2, ĐH Đồng Tháp). *(a) Chứng minh với mỗi* $n \in \mathbb{N}^\star$, *phương trình* $2x = \sqrt{x+n} + \sqrt{x+n+1}$ *có nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là* x_n. *(b) Tính* $a := \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}}, b := \lim_{n\to\infty} x_n - a\sqrt{n}$.

Bài toán 259 ([VMS24], p. 34, 3.3, ĐH Đồng Tháp). *Cho*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right| & \text{if } x \neq 0,\\ 0 & \text{if } x = 0.\end{cases}$$

Chứng minh f *khả vi tại* 0 *nhưng* f *không khả vi tại các điểm* $x_n := \dfrac{2}{2n+1}$ *với* $n \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 260 ([VMS24], p. 34, 3.4, ĐH Đồng Tháp). *Giả sử* f *khả vi liên tục trên* $(0,\infty)$, $f(0) = 1$. *Chứng minh nếu* $|f(x)| \le e^{-x}$, $\forall x \ge 0$ *thì tồn tại* $x_0 > 0$ *để* $f'(x_0) = -e^{-x_0}$.

Bài toán 261 ([VMS24], p. 34, 3.5, ĐHGTVT). *Cho* $a \in \mathbb{R}$, $b \in (0,\infty)$. *Hàm* f *xác định trên* $[-1,1]$, *được cho bởi*

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin x^{-b} & \text{if } x \neq 0,\\ 0 & \text{if } x = 0.\end{cases}$$

(a) Tìm tất cả các giá trị của a *để hàm* f *liên tục trên* $[-1,1]$. *(b) Tìm tất cả các giá trị của* a *để tồn tại* $f'(0)$. *(c) Tìm điều kiện của* a, b *để tồn tại* $f''(0)$.

Bài toán 262 ([VMS24], p. 35, 3.7, HUS). *Cho* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *là hàm số được xác định bởi công thức*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{if } x \le 0,\\ be^x + x & \text{if } x > 0,\end{cases}$$

với $a, b \in \mathbb{R}$: *tham số. Xác định* a, b *để* f *có nguyên hàm trên* $\mathbb{R}$.

Bài toán 263 ([VMS24], p. 35, 3.8, ĐH Vinh). *Cho hàm* $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *thỏa* $f_{2024}(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ *với*

$$\begin{cases} f_{n+1}(x) = f(f_n(x)),\ \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^\star,\\ \quad f_1(x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\end{cases}$$

Chứng minh $f_2(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 264 ([VMS24], p. 35, 3.9, ĐH Vinh). *Cho hàm*

$$f(x) = \left(\frac{2023^x + 2024^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}},\ \ x > 0.$$

(a) Tìm $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. *(b) Chứng minh* f *là hàm số đơn điệu tăng trên* $(0,+\infty)$.

Bài toán 265 ([VMS24], p. 36, 4.1, HCMUT). *(a) Cho* $f \in C^3(\mathbb{R},[0,+\infty))$ *thỏa* $\max_{x\in\mathbb{R}} |f'''(x)| \le 1$. *Chứng minh*

$$f''(x) \ge -\sqrt[3]{\frac{3}{2}f(x)},\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) Tìm tất cả các hàm số f *thỏa mãn điều kiện của (a) thỏa*

$$f''(x) = -\sqrt[3]{\frac{3}{2}f(x)},\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 266 ([VMS24], p. 36, 4.2, VNUHCM UIT). *Cho hàm số $f:[0,1]\to\mathbb{R})$ liên tục trên $[0,1]$, khả vi trên $(0,1)$ sao cho $\exists M>0$, $\exists c\in[0,1]$ thỏa $f(c)=0$ &*

$$|f'(x)|\le M|f(x)|,\ \forall x\in(0,1).$$

Chứng minh $f(x)=0$, $\forall x\in[0,1]$.

Bài toán 267 ([VMS24], p. 36, 4.3, ĐH Đồng Tháp). *Cho f khả vi trên $\mathbb{R}$ & f' giảm ngặt trên $\mathbb{R}$. (a) Chứng minh*

$$f(x+1)-f(x)<f'(x)<f(x)-f(x-1),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

(b) Chứng minh nếu tồn tại $\lim_{x\to\infty}f(x)=L$ thì $\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$. (c) Tìm hàm số g khả vi trên $\mathbb{R}$ & tồn tại $\lim_{x\to\infty}g(x)=L$ nhưng $\lim_{x\to\infty}g'(x)\neq 0$.

Bài toán 268 ([VMS24], p. 37, 4.4, ĐHGTVT). *Giả sử V là tập hợp các hàm liên tục $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ & khả vi trên $(0,1)$ thỏa $f(0)=0, f(1)=1$. Xác định các giá trị $\alpha\in\mathbb{R}$ để với mỗi $f\in V$, luôn tồn tại $\xi\in(0,1)$ thỏa $f(\xi)+\alpha=f'(\alpha)$.*

Bài toán 269 ([VMS24], p. 37, 4.5, HUS). *Cho $f:[0,3]\to\mathbb{R}$ là hàm liên tục trên $[0,3]$ & khả vi trong $(0,3)$. Chứng minh tồn tại $c\in(0,3)$ thỏa $2f'(c)=f(3)-f(2)+f(1)-f(0)$.*

Bài toán 270 ([VMS24], p. 37, 4.6, ĐH Mỏ–Địa chất). *Giả sử có chuỗi có 2 đầu hướng ra vô cực*

$$\cdots+f''(x)+f'(x)+f(x)+\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t+\cdots$$

& hội tụ đều trên khoảng $(-1,1)$. Chuỗi là biểu diễn của số nào?

Bài toán 271 ([VMS24], p. 37, 4.7, ĐH Vinh). *Cho hàm $f\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ & thỏa $f(x)\le 2024$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Chứng minh tồn tại $x\in\mathbb{R}$ thỏa $f''(x)=0$.*

Chương 11

Integral – Tích Phân

Contents

Bài toán 272 ([VMS23], p. 38, 5.1, VNUHCM UIT). *Cho hàm $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ khả vi đến cấp 2 thỏa $f(0)=1$ & $f''(x)+2f'(x)+f(x)\ge 1$, $\forall x\in(-1,1)$. Tìm* GTNN *của* $\int_{-1}^1 e^x f(x)\,\mathrm{d}x$.

Bài toán 273 ([VMS23], p. 38, 5.2, ĐH Đồng Tháp). *Cho hàm $f:[0,2023]\to(0,\infty)$ khả tích & $f(x)f(2023-x)=1$, $\forall x\in[0,2023]$. Chứng minh* $\int_0^{2023} f(x)\,\mathrm{d}x\ge 2023$.

Bài toán 274 ([VMS23], p. 38, 5.3, ĐHGTVT). *Cho hàm $f\in C([0,1])$ thỏa $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$. Chứng minh tồn tại $c\in(0,1)$ thỏa* $cf(c)+2023\int_0^c f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

Bài toán 275 ([VMS23], p. 38, 5.4, ĐHGTVT). *Tính*

$$I:=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{(1+2023^x)\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

Bài toán 276 ([VMS23], p. 38, 5.5, ĐHGTVT). *Cho hàm f dương, khả tích trên $[a,b]$, $0<m\le f(x)\le M$, $\forall x\in[a,b]$. Chứng minh*

$$(b-a)^2\le\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\le\frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2.$$

Bài toán 277 ([VMS23], p. 39, 5.6, ĐHKH Thái Nguyên). *Cho hàm $h\in C([0,1])$ thỏa $\int_0^1 xh(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x$. Chứng minh tồn tại $\beta\in(0,1)$ thỏa* $\beta h(\beta^2)=\frac{2023}{2}\int_0^{\beta^2} h(x)\,\mathrm{d}x$.

Bài toán 278 ([VMS23], p. 39, 5.7, ĐHKH Thái Nguyên). *Cho $f\in C([0,\pi])$ thỏa $f(0)>0$ & $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x<2$. Chứng minh phương trình $f(x)=\sin x$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(0,\pi)$.*

Bài toán 279 ([VMS23], p. 39, 5.8, ĐH Mỏ–Địa chất). *Cho $f\in C([0,1]), g\in C([0,1],(0,\infty))$ với f không giảm. Chứng minh*

$$\left(\int_0^t f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right)\le\left(\int_0^t g(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right),\ \forall t\in[0,1].$$

Bài toán 280 ([VMS23], p. 39, 5.9, ĐH Mỏ–Địa chất). *Cho $f\in C([0,1])$ thỏa $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$. Chứng minh tồn tại điểm $c\in(0,1)$ thỏa* $\int_0^c xf(x)\,\mathrm{d}x=0$.

Bài toán 281 ([VMS23], p. 39, 5.10, ĐHSPHN2). *Gọi $\mathcal{F}$ là lớp tất cả các hàm khả vi $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ thỏa*

$$|f'(x)-f'(y)|\le 2023|x-y|,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Chứng minh

$$(f'(x))^2<4046f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 282 ([VMS23], p. 40, 5.11, ĐHSPHN2). *Giả sử $f\in C^2([a,b])$ thỏa $f(a)\ne -f(b)$ & $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$. Tìm* GTNN *của*

$$A:=\frac{(b-a)^3}{(f(a)+f(b))^2}\int_a^b (f''(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

Bài toán 283 ([VMS23], p. 40, 5.12, ĐH Trà Vinh)**.** *Tính*

$$I := \int_0^{2\pi} \ln(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x})\,\mathrm{d}x.$$

Bài toán 284 ([VMS23], p. 40, 5.12, ĐH Vinh)**.** *Cho $f \in C([0,1])$ thỏa $xf(y) + yf(x) \le 1$, $\forall x, y \in [0,1]$. Chứng minh: (a) $f(x) \le \frac{1}{2x}$, $\forall x \in (0,1]$. (b) $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{\pi}{4}$.*

Bài toán 285 ([VMS24], p. 37, 5.1, VNUHCM UIT)**.** *Cho $\alpha \in (0,\infty)$ & $f \in C([0,1])$ nghịch biến, $a \in (0,1)$ thỏa*

$$\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t < \frac{a}{2025},\ f(0) = \beta > 0.$$

Chứng minh phương trình $f(x) = x^{2024}$ có nghiệm trong $[0,1]$.

Bài toán 286 ([VMS24], p. 38, 5.2, ĐH Đồng Tháp)**.** *Giả sử $f \in C^1([0,1])$ thỏa $f(0) = 0$, $0 \le f'(x) \le 1$, $\forall x \in [0,1]$. Xét hàm số*

$$F(t) = \left(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 - \int_0^t (f(x))^3\,\mathrm{d}x,\ \forall t \in [0,1].$$

(a) Chứng minh F đồng biến trên $[0,1]$. (b) Chứng minh

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \ge \int_0^1 (f(x))^3\,\mathrm{d}x.$$

Cho vài ví dụ về hàm f để đẳng thức xảy ra.

Bài toán 287 ([VMS24], p. 38, 5.3, ĐHGTVT)**.** *Cho $f : [0,1] \to (0,+\infty)$ là 1 hàm khả tích thỏa $f(x)f(1-x) = 1$, $\forall x \in [0,1]$. Chứng minh $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \ge 1$.*

Bài toán 288 ([VMS24], p. 38, 5.4, HUS)**.** *Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ là hàm khả tích trên $[0,1]$ & liên tục trên $(0,1)$. Chứng minh tồn tại $a, b \in (0,1)$ phân biệt sao cho*

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Bài toán 289 ([VMS24], p. 38, 5.5, ĐH Mỏ–Địa chất)**.** *Tính tích phân*

$$\iiiint_{x^2+y^2+z^2+t^2 \le 1} e^{x^2+y^2-z^2-t^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t.$$

Bài toán 290 ([VMS24], p. 38, 5.6, ĐH Vinh)**.** *Chứng minh*

$$\frac{9}{8\pi} < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x < \frac{3}{2\pi}.$$

11.1 SymPy/`integrals` module

See https://docs.sympy.org/latest/modules/integrals/integrals.html. The `integrals` module in `SymPy` implements methods to calculate definite & indefinite integrals of expressions. Principal method in this module is `integrate()`:

- `integrate(f, x)` returns the indefinite integral $\int f\,\mathrm{d}x$
- `integrate(f, (x, a, v))` returns the definite integral $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$.

Problem 11 (Integration of elementary functions)**.** *Use* `SymPy` *to compute definite- & indefinite integrals of elementary functions as many as possible.*

Problem 12 (Integration of nonelementary functions)**.** *Use* `SymPy` *to compute definite- & indefinite integrals of nonelementary functions as many as possible.*

Example 4 (Integral of error function)**.** *The indefinite integral of the nonelementary function $e^{-x^2}\operatorname{erf}(x)$, where $\operatorname{erf}(x)$ is the* error function*, is given by*

$$\int e^{-x^2}\operatorname{erf}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\operatorname{erf}(x).$$

Run the following Python code:

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
print(integrate(exp(-x**2)*erf(x), x))
```

to obtain the following output:

```
sqrt(pi)*erf(x)**2/4
```

For more information about the error function, see, e.g., Wikipedia/error function.

11.2 Leibniz integral rule – Quy tắc tích phân Leibniz

In calculus, the *Leibniz integral rule* for differentiation under the integral sign, named after GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ.

Theorem 11 (Leibniz integral rule – Quy tắc tích phân Leibniz)**.** *For an integral of the form* $\int_{a(x)}^{b(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t$ *where* $a(x), b(x) \in \mathbb{R}$ *& the integrands are functions dependent on* x*, the derivative of this integral is expressible as*

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t\right) = f(b(x),x)\frac{d}{dx}b(x) - f(a(x),x)\frac{d}{dx}a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \partial_x f(t,x)\,\mathrm{d}t, \tag{Lintr}$$

where the partial derivative $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ *indicates that inside the integral, only the variation of* $f(t,x)$ *with* x *is considered in taking the derivative.*

Chương 12

Functional Equation – Phương Trình Hàm

Bài toán 291 ([VMS23], 6.1, p. 40, VNUHCM UIT)**.** *Tìm tất cả các hàm số* $f \in C^2(\mathbb{R}, (0,\infty))$ *thỏa*

$$f''(x)f(x) \ge 2(f'(x))^2,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 292 ([VMS23], 6.2, p. 40, ĐH Hùng Vương, Phú Thọ)**.** *Tìm tất cả các hàm số* $f \in C(\mathbb{R})$ *thỏa* $f(1) = 2023$ *&* $f(x+y) = 2023^x f(y) + 2023^y f(x)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Bài toán 293 ([VMS23], 6.3, p. 40, ĐH Hùng Vương, Phú Thọ)**.** *Tìm tất cả các hàm số* $f(x) \in C^1([0,1])$ *có* $f(1) = f(0$ *& thỏa*

$$\int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 \mathrm{d}x \le 1.$$

Bài toán 294 ([VMS23], 6.4, p. 41, ĐH Mỏ–Địa chất)**.** *Cho* $r, s \in \mathbb{Q}$*. Tìm tất cả các hàm số* $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ *thỏa*

$$f(x + f(y)) = f(x + r) + y + s,\ \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

Bài toán 295 ([VMS23], 6.5, p. 41, FTU Hà Nội)**.** *Tìm tất cả các hàm số thực* $f: (0,\infty) \to (0,\infty)$ *thỏa*

$$f(x + f(y)) = xf\left(1 + f\left(\frac{y}{x}\right)\right),\ \forall x, y \in (0,\infty).$$

Bài toán 296 ([VMS23], 6.6, p. 41, ĐH Trà Vinh)**.** *Tìm tất cả các hàm số* $f(x)$ *thỏa*

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2f(x) + \frac{3}{x-1},\ \forall x \ne 1.$$

Bài toán 297 ([VMS23], 6.7, p. 41, ĐH Trà Vinh)**.** *Tìm tất cả các hàm số* $f(x) \in C^1([0,1])$ *thỏa* $f(1) = ef(0)$ *&*

$$\int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 \mathrm{d}x \le 1.$$

Bài toán 298 ([VMS24], p. 38, 6.1, HUS)**.** *Cho* $f: (0,1) \to \mathbb{R}$ *là 1 hàm khả vi thỏa* $(f'(x))^2 - 3f'(x) + 2 = 0$, $\forall x \in (0,1)$*. Tìm* f*. (b) Mở rộng bài toán cho dạng phương trình hàm phức tạp hơn.*

Phần II

Numerical Analysis – Giải Tích Số

Chương 13

Basic Numerical Analysis – Giải Tích Số Cơ Bản

Contents

Resources – Tài nguyên.

1. [AH09]. Kendall Atkinson, Weimin Han. *Theoretical Numerical Analysis*. 3e.
2. [BFB15]. Richard L. Burden, J. Douglas Faires, Annette M. Burden. 8e.
3. [IK94]. Eugene Isaacson, Herbert Bishop Keller. *Analysis of Numerical Methods*.
4. [Sch89]. Francis Scheid. *Schaum's Outline of Numerical Analysis*. 2e.

13.1 Some Basic Concepts – Vài Khái Niệm Cơ Bản

13.1.1 Algorithms – Thuật Toán

"The objective of numerical analysis is to solve complex numerical problems using only the simplest operations of arithmetic, to develop & evaluate methods for computing numerical results from given data. The methods of computation are called *algorithms*." – [Sch89, p. 1]

– Mục tiêu của phân tích số là giải quyết các vấn đề số phức tạp chỉ bằng các phép toán số học đơn giản nhất, để phát triển & đánh giá các phương pháp tính toán kết quả số từ dữ liệu đã cho. Các phương pháp tính toán được gọi là *thuật toán*.

"Our efforts will be focused on the search for algorithms. For some problem no satisfactory algorithm has yet been found, while for others there are several & we must choose among them. There are various reasons for choosing 1 algorithm over another, 2 obvious criteria being *speed & accuracy*. Speed is clearly an advantage, though for problems of modest size this advantage is almost eliminated by the power of the computer. For larger scale problems speed is still a major factor, & a slow algorithm may have to be rejected as impractical. However, other things being equal, the faster method surely gets the nod." – [Sch89, p. 1]

– Nỗ lực của chúng tôi sẽ tập trung vào việc tìm kiếm các thuật toán. Đối với 1 số vấn đề, chưa có thuật toán nào thỏa đáng được tìm thấy, trong khi đối với những vấn đề khác, có 1 số & chúng ta phải lựa chọn trong số chúng. Có nhiều lý do để chọn 1 thuật toán hơn thuật toán khác, 2 tiêu chí rõ ràng là *tốc độ & độ chính xác*. Tốc độ rõ ràng là 1 lợi thế, mặc dù đối với các vấn đề có quy mô khiêm tốn, lợi thế này gần như bị loại bỏ bởi sức mạnh của máy tính. Đối với các vấn đề quy mô lớn hơn, tốc độ vẫn là 1 yếu tố chính, & 1 thuật toán chậm có thể phải bị loại bỏ vì không thực tế. Tuy nhiên, các yếu tố khác đều như nhau, phương pháp nhanh hơn chắc chắn sẽ được chấp nhận.

Problem 13 ([Sch89], Ex. 1.1, p. 1, approximate square root)**.** *Use the sequence* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *defined by*

$$x_0 = 1,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

to approximate $\sqrt{a}$ *with* $a \in (0,\infty)$ *to* $m \in \mathbb{N}^\star$ *decimal places.*

Problem 14 (Approximate nth root)**.** *Find algorithms to approximate* $\sqrt[n]{a}$ *with* $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^\star$ *given. Investigate accuracy & efficiencies of these algorithms.*

Problem 15 (Approximate real-order root of complexes, R)**.** *Find algorithms to approximate* $\sqrt[n]{a}$ *with* $a \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{R}$ *given. Investigate accuracy & efficiencies of these algorithms.*

Remark 7. *More than 1 algorithm, using only 4 basic operations of arithmetic* $\pm, \cdot, :$*, exists.*

13.1.2 Error – Sai Số

"The numerical optimist asks how accurate the computed results; the numerical pessimist asks how much error has been introduced. The 2 questions are, of course, 1 & the same. Only rarely will the given data be exact, since it often originates in measurement process. So there is probably error in the input information. & usually the algorithm itself introduces error, perhaps unavoidable roundoffs. The output information will then contain error from both of these sources." – [Sch89, p. 1]

– Người lạc quan về số học hỏi kết quả tính toán chính xác đến mức nào; người bi quan về số học hỏi có bao nhiêu lỗi đã được đưa vào. Tất nhiên, 2 câu hỏi là 1 & giống nhau. Chỉ hiếm khi dữ liệu được đưa ra là chính xác, vì nó thường bắt nguồn từ quá trình đo lường. Vì vậy, có thể có lỗi trong thông tin đầu vào. & thường thì chính thuật toán sẽ đưa ra lỗi, có lẽ là làm tròn không thể tránh khỏi. Thông tin đầu ra sau đó sẽ chứa lỗi từ cả hai nguồn này.

Problem 16 ([Sch89], 1.1., p. 4)**.** *Calculate the value of the polynomial $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 4$ for the argument $x = 3$. Count each of 4 elementary operations.*

Bài toán 299 (Evaluate value of polynomials with real coefficients – Tính giá trị đa thức hệ số thực)**.** *Viết chương trình* C/C++, Pascal, Python *để tính giá trị $P(x_0)$ của đa thức $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ (i.e., $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 0, 1, \ldots, n$) tại $x = x_0 \in \mathbb{R}$. Đếm số phép $\pm, \cdot, :$ đã thực hiện.*

Input. *Dòng 1 lần lượt chứa $n = \deg P \in \mathbb{N}$ là bậc (degree) của đa thức $P(x)$ & $x_0 \in \mathbb{R}$. Dòng 2 chứa $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$.*

Output. *Giá trị $P(x_0)$. Số lần thực hiện phép $\pm, \cdot, :$.*

Bài toán 300 (Evaluate value of polynomials with complex coefficients – Tính giá trị đa thức hệ số phức)**.** *Viết chương trình* C/C++, Pascal, Python *để tính giá trị $P(x_0)$ của đa thức $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{C}[x]$ (i.e., $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a_i \in \mathbb{C}$, $\forall i = 0, 1, \ldots, n$) tại $x = x_0 \in \mathbb{C}$. Đếm số phép $\pm, \cdot, :$ đã thực hiện.*

Input. *Dòng 1 lần lượt chứa $n = \deg P \in \mathbb{N}$ là bậc (degree) của đa thức $P(x)$ & 2 số $a, b \in \mathbb{R}$ lần lượt là phần thực & phần ảo của $x_0 \in \mathbb{C}$, i.e., $a = \Re x_0, b = \Im x_0$. Dòng 2 chứa $n+1$ phần thực $\Re a_n, \Re a_{n-1}, \ldots, \Re a_1, \Re a_0$ của $n+1$ số phức $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$. Dòng 3 chứa phần ảo của $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$.*

Output. *Giá trị $P(x_0)$ theo format $\Re P(x_0) + i\Im P(x_0)$. Số lần thực hiện phép $\pm, \cdot, :$.*

Problem 17 ([Sch89], 1.2., p. 5)**.** *Define the error of an approximation.*

Solution.. The tradition definition is: true value = approximation + error. □

Problem 18 ([Sch89], 1.3., p. 5)**.** *What is relative error?*

Phần III

Introduction to Ordinary Differential Equations (ODEs) – Nhập Môn Phương Trình Vi Phân Đạo Hàm Thường

Contents

Resources – Tài nguyên.

1. [Tes12]. GERALD TESCHL. *Ordinary Differential Equations & Dynamical Systems.*

Lecture Notes chi tiết hơn về ODEs sẽ được viết riêng. Phần này chỉ giới thiệu những khái niệm cơ bản của ODEs.

Phần IV

Introduction to Partial Differential Equations (PDEs) – Nhập Môn Phương Trình Vi Phân Đạo Hàm Riêng

Contents

Resources – Tài nguyên.

1. [AK16]. Cung Thế Anh, Trần Đình Kế. *Nửa Nhóm Các Toán Tử Tuyến Tính & Ứng Dụng.*
2. [DZ88]. Paul DuChateau, David W. Zachmann. *Schaum's Outlines of Theory and Problems of Partial Differential Equations.*
3. [Eva10]. Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations.*
4. [Kla00]. Sergiu Klainerman. *PDE as a unified subject.*
5. [Tay11]. Michael E. Taylor. *PDEs III: Nonlinear Equations.*

Lecture Notes chi tiết hơn về PDEs sẽ được viết riêng. Phần này chỉ giới thiệu những khái niệm cơ bản của PDEs.

Phần V

Introduction to Differential Geometry – Nhập Môn Hình Học Vi Phân

Contents

Resources – Tài nguyên.

1. [Car16]. Manfredo P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves & Surfaces.*
2. [Küh15]. Wolfgang Kühnel. *Differential Geometry: Curves – Surfaces – Manifolds.*
3. [Wal15]. Shawn W. Walker. *The Shapes of Things.*

Lecture Notes chi tiết hơn về Hình Học Vi Phân sẽ được viết riêng. Phần này chỉ giới thiệu những khái niệm cơ bản của Hình Học Vi Phân.

Phần VI

Introduction to Functional Analysis – Nhập Môn Giải Tích Hàm

Contents

Resources – Tài nguyên.

1. [Alt16]. Hans Wilhelm Alt. *Linear Functional Analysis*.
2. [Bre11]. Haïm Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces & PDEs*.
3. [TTV24]. Đinh Ngọc Thanh, Bùi Lê Trọng Thanh, Huỳnh Quang Vũ. *Bài Giảng Giải Tích Hàm*. HCMUS.

Lecture Notes chi tiết hơn về Giải Tích Hàm sẽ được viết riêng. Phần này chỉ giới thiệu những khái niệm cơ bản của Giải Tích Hàm.

Phần VII

Fourier Transform – Biến Đổi Fourier

Contents

Resources – Tài nguyên.

1. [Tao12]. TERENCE TAO. *Higher Order Fourier Analysis*.

13.2 Discrete Fourier transform – Biến đổi Fourier rời rạc

See, e.g., Wikipedia/discrete Fourier transform. In mathematics, the *discrete Fourier transform (DFT)* converts a finite sequence of equally-spaced samples of a function into a same-length sequence of equally-spaced samples of the discrete-time Fourier transform (DTFT), which is a complex-valued function of frequency. The interval at which the DTFT is sampled is the reciprocal of the duration of the input sequence.

Definition 13 (Discrete Fourier transform)**.** *The* discrete Fourier transform *transforms a sequence of N complex numbers $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=0}^{N-1} \coloneqq x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$ into another sequence of complex numbers, $\mathbf{X} = \{X_n\}_{n=0}^{N-1} \coloneqq X_0, X_1, \ldots, X_{N-1}$ defined by*

$$X_k \coloneqq \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi \frac{k}{N} n}. \tag{dFt}$$

The transform is sometimes denoted by the symbol $\mathcal{F}$, as in $\mathbf{X} = \mathcal{F}\{\mathbf{x}\}$ or $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ or $\mathcal{F}\mathbf{x}$.

Chương 14

Miscellaneous

Contents

14.1 Contributors

1. Võ Ngọc Trâm Anh [VNTA]. Code C/C++.
2. Nguyễn Lê Đăng Khoa [NLDK]. Code C/C++.
3. Phan Vĩnh Tiến [PVT]. Proofs of some results in Mathematical Analysis.

14.2 See also

1. [Str20]. Steven Strogatz. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe.*
2. [Str24]. Steven Strogatz. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe – Sức Mạnh Vô Hạn: Giải Tích Toán Khám Phá Bí Mật Của Vũ Trụ Như Thế Nào?.*

   Nhận xét. 1 quyển sách hay về thường thức về lịch sử phát triển của Giải tích Toán học & các ý tưởng cơ bản nhất của Giải tích. Khuyến khích đọc thử, cũng như các tác phẩm thường thức Khoa học Tự nhiên nói chung & Toán học nói riêng khác của tác giả Steven Strogatz.
3. TS. Huỳnh Quang Vũ. *Các Bài Giảng Giải Tích.* https://sites.google.com/view/hqvu/teaching.
   - Bộ Môn Giải Tích, Khoa Toán - Tin học, Faculty of Mathematics & Computer Science, HCMUS. *Giáo Trình Vi Tích Phân 1.*
   - Bộ Môn Giải Tích, Khoa Toán - Tin học, Faculty of Mathematics & Computer Science, HCMUS. *Giáo Trình Vi Tích Phân 2.*
4. *Vietnamese Mathematical Olympiad for High School- & College Students (VMC) – Olympic Toán Học Học Sinh & Sinh Viên Toàn Quốc.*

   PDF: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/VMC/NQBH_VMC.pdf.

   TEX: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/VMC/NQBH_VMC.tex.
   - Codes:
     - C++ code: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/C++.
     - Python code: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/Python.
   - Resource: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/resource.
   - Figures: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/figure.
5. *Olympic Tin Học Sinh Viên OLP & ICPC.*

   PDF: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/OLP_ICPC/NQBH_OLP_ICPC.pdf.

   TEX: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/OLP_ICPC/NQBH_OLP_ICPC.tex.
   - Codes:
     - C: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/OLP_ICPC/C.
     - C++: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/OLP_ICPC/C++.
     - Python: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/OLP_ICPC/Python.

Tài liệu tham khảo

[AH09] Kendall Atkinson and Weimin Han. *Theoretical numerical analysis.* 3rd Edition. Vol. 39. Texts in Applied Mathematics. A functional analysis framework. Springer, Dordrecht, 2009, pp. xvi+625. ISBN: 978-1-4419-0457-7. DOI: 10.1007/978-1-4419-0458-4. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0458-4.

[AK16] Cung Thế Anh and Trần Đình Kế. *Nửa Nhóm Các Toán Tử Tuyến Tính & Ứng Dụng.* Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2016, p. 222.

[Alt16] Hans Wilhelm Alt. *Linear functional analysis.* Universitext. An application-oriented introduction, Translated from the German edition by Robert Nürnberg. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2016, pp. xii+435. ISBN: 978-1-4471-7279-6; 978-1-4471-7280-2. DOI: 10.1007/978-1-4471-7280-2. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4471-7280-2.

[BFB15] Richard L. Burden, J. Douglas Faires, and Annette M. Burden. *Numerical Analysis.* 10th. Cengage learning, 2015, pp. xvi+896.

[Bre11] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext. Springer, New York, 2011, pp. xiv+599. ISBN: 978-0-387-70913-0.

[Car16] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves & surfaces.* Revised & updated second edition of [MR0394451]. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016, pp. xvi+510. ISBN: 978-0-486-80699-0; 0-486-80699-5.

[DZ88] Paul DuChateau and David W. Zachmann. *Schaum's Outlines of Theory and Problems of Partial Differential Equations.* Schaum's Outline Series. McGraw-Hill Book Company, 1988, p. 241.

[Eva10] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations.* Second. Vol. 19. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010, pp. xxii+749. ISBN: 978-0-8218-4974-3. DOI: 10.1090/gsm/019. URL: https://doi.org/10.1090/gsm/019.

[Hùn+23] Trần Quang Hùng, Lê Thị Việt Anh, Phạm Việt Hải, Khiếu Thị Hương, Tạ Công Sơn, Nguyễn Xuân Thọ, Ninh Văn Thu, and Phạm Đình Tùng. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 11 Tập 1.* Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 176.

[IK94] Eugene Isaacson and Herbert Bishop Keller. *Analysis of numerical methods.* Corrected reprint of the 1966 original [Wiley, New York; MR0201039 (34 #924)]. Dover Publications, Inc., New York, 1994, pp. xvi+541. ISBN: 0-486-68029-0.

[Kla00] Sergiu Klainerman. "PDE as a unified subject". In: Special Volume, Part I. GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999). 2000, pp. 279–315. DOI: 10.1007/978-3-0346-0422-2_10. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-0346-0422-2_10.

[Küh15] Wolfgang Kühnel. *Differential geometry.* Vol. 77. Student Mathematical Library. Curves—surfaces—manifolds, Third edition [of MR1882174], Translated from the 2013 German edition by Bruce Hunt, with corrections and additions by the author. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015, pp. xii+402. ISBN: 978-1-4704-2320-9. DOI: 10.1090/stml/077. URL: https://doi.org/10.1090/stml/077.

[Quỳ+20a] Đoàn Quỳnh, Trần Nam Dũng, Nguyễn Vũ Lương, and Đặng Hùng Thắng. *Tài Liệu Chuyên Toán Bài Tập Đại Số & Giải Tích 11.* Tái bản lần 9. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2020, p. 248.

[Quỳ+20b] Đoàn Quỳnh, Trần Nam Dũng, Nguyễn Vũ Lương, and Đặng Hùng Thắng. *Tài Liệu Chuyên Toán Đại Số & Giải Tích 11.* Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2020, p. 327.

[Rud76] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis.* Third. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 1976, pp. x+342.

[Sch89] Francis Scheid. *Schaum's Outline of Numerical Analysis.* 2nd Edition. Schaum's Outline Series. McGraw Hill, 1989, p. 480.

[Str20] Steven Strogatz. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe.* Mariner Books, 2020, p. 400.

[Str24] Steven Strogatz. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe – Sức Mạnh Vô Hạn: Giải Tích Toán Khám Phá Bí Mật Của Vũ Trụ Như Thế Nào?* Phạm Văn Thiều dịch. Nhà Xuất Bản Trẻ, 2024, p. 486.

[Tao12] Terence Tao. *Higher order Fourier analysis.* Vol. 142. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012, pp. x+187. ISBN: 978-0-8218-8986-2. DOI: 10.1090/gsm/142. URL: https://doi.org/10.1090/gsm/142.

[Tao22a] Terence Tao. *Analysis I*. Vol. 37. Texts and Readings in Mathematics. Fourth edition [of 2195040]. Hindustan Book Agency, New Delhi, [2022] ©2022, pp. xvi+355. ISBN: 978-81-951961-9-7.

[Tao22b] Terence Tao. *Analysis II*. Vol. 38. Texts and Readings in Mathematics. Fourth edition [of 2195041]. Springer, Singapore; Hindustan Book Agency, New Delhi, [2022] ©2022, pp. xvii+195. ISBN: 978-9-81197-284-3. DOI: 10.1007/978-981-19-7284-3. URL: https://doi.org/10.1007/978-981-19-7284-3.

[Tay11] Michael E. Taylor. *Partial differential equations III. Nonlinear equations*. Second. Vol. 117. Applied Mathematical Sciences. Springer, New York, 2011, pp. xxii+715. ISBN: 978-1-4419-7048-0. DOI: 10.1007/978-1-4419-7049-7. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7049-7.

[Tes12] Gerald Teschl. *Ordinary differential equations and dynamical systems*. Vol. 140. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012, pp. xii+356. ISBN: 978-0-8218-8328-0. DOI: 10.1090/gsm/140. URL: https://doi.org/10.1090/gsm/140.

[Thá+23a] Đỗ Đức Thái, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang. *Toán 6 Tập 1*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2023, p. 128.

[Thá+23b] Đỗ Đức Thái, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang. *Toán 6 Tập 2*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2023, p. 108.

[Thá+25a] Đỗ Đức Thái, Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Minh Phương. *Bài Tập Toán 11 Tập 1*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2025, p. 131.

[Thá+25b] Đỗ Đức Thái, Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Minh Phương. *Toán 11 Tập 1*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2025, p. 123.

[Thư+21] Trần Đan Thư, Nguyễn Thanh Phương, Đinh Bá Tiến, and Trần Minh Triết. *Nhập Môn Lập Trình*. Nhà Xuất Bản Khoa Học & Kỹ Thuật, 2021, p. 427.

[TTV24] Đinh Ngọc Thanh, Bùi Lê Trọng Thanh, and Huỳnh Quang Vũ. *Bài Giảng Giải Tích Hàm*. HCMUS, 2024, p. 114.

[VMS23] Hội Toán Học Việt Nam VMS. *Kỷ Yếu Kỳ Thi Olympic Toán Học Sinh Viên–Học Sinh Lần Thứ 29*. Huế 2–8/4/2023. VMS, 2023, p. 141.

[VMS24] Hội Toán Học Việt Nam VMS. *Kỷ Yếu Kỳ Thi Olympic Toán Học Sinh Viên–Học Sinh Lần Thứ 30*. Đà Nẵng 8–13/4/2024. VMS, 2024, p. 112.

[Wal15] Shawn W. Walker. *The shapes of things*. Vol. 28. Advances in Design and Control. A practical guide to differential geometry and the shape derivative. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2015, pp. ix+154. ISBN: 978-1-611973-95-2. DOI: 10.1137/1.9781611973969.ch1. URL: https://doi.org/10.1137/1.9781611973969.ch1.

[WS10] Robert Wrede and Murray R. Spiegel. *Advanced Calculus*. 3rd edition. Schaum's Outline Series. McGraw Hill, 2010, p. 456. ISBN: 978-0071623667.