Bài tập Phương pháp số trong ĐSTT (Tuần 2)

Nguyễn An Thịnh ***<u>1411289</u>***

<u>Bài 1:</u> *Ma trận A là ma trận tam giác, chứng minh nếu A cũng là ma trận unita thì A sẽ là một ma trận chéo.*

Cho A là 1 ma trận tam giác trên (trường hợp tam giác dưới tương tự), tức là a_{ij} = 0, với mọi i > j
Giả sử nếu A cũng là ma trận unita

Ta có: A*A = I_n

Suy ra: $(A^*A)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^*.a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{ki}.a_{kj} = \delta_{ij}$

Xét $(A^*A)_{1,1} = \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{k1}.a_{k1} = 1$

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} |a_{k1}| = 1$

$\Leftrightarrow |a_{11}| = 1$

Với mọi i ≠ 1, ta có:

$(A^*A)_{i,1} = \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{ki}.a_{k1} = \delta_{i1} = 0$

$\Leftrightarrow \bar{a}_{1i}.a_{11} + \underbrace{\bar{a}_{2i}.a_{21} + \cdots + \bar{a}_{ni}.a_{n1}}_{0} = 0$

$\Leftrightarrow \bar{a}_{1i}.a_{11} = 0 \Leftrightarrow \bar{a}_{1i} = 0$ (vì $a_{11} \neq 0$)

Suy ra $a_{1i} = 0$, Với mọi i ≠ 1 (1)

Như vậy dòng thứ 1 của A chỉ có duy nhất a_{11} khác 0.

Giả sử m dòng đầu của ma trận A chỉ có tương ứng $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}$ khác 0
Ta chứng minh dòng thứ m+1 cũng chỉ có $a_{(m+1)(m+1)}$ khác 0.

Xét $(A^*A)_{(m+1),(m+1)} = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{k(m+1)}.a_{k(m+1)} = 1$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |a_{k(m+1)}| = 1$

$\Leftrightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{m} |a_{k(m+1)}|}_{0} + |a_{(m+1)(m+1)}| + \underbrace{\sum_{k=m+2}^{n} |a_{k(m+1)}|}_{0} = 1$

$\Leftrightarrow |a_{(m+1)(m+1)}| = 1$

Với mọi i ≠ m+1, ta có:

$$(A^*A)_{i,m+1} = \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{ki}.a_{k(m+1)} = \delta_{i(m+1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\bar{a}_{1i}.a_{1(m+1)} + \cdots + \bar{a}_{mi}.a_{m(m+1)}}_{0} + \bar{a}_{(m+1)i}.a_{(m+1)(m+1)} + \underbrace{\sum_{k=m+2}^{n} \bar{a}_{ki}.a_{k(m+1)}}_{0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{a}_{(m+1)i}.a_{(m+1)(m+1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{a}_{(m+1)i} = 0 \quad (\text{vì } a_{(m+1)(m+1)} \neq 0)$$

Suy ra $a_{(m+1)i} = 0$, với mọi i ≠ m+1

Sử dụng quy nạp kết hợp với điều kiện ban đầu (1), ta suy ra a_{ij} = 0, với mọi i ≠ j

Vậy A là ma trận chéo

Bài 2: *Ta có định lý Pythagore cho họ trực giao n vectơ:*

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

($x_1, x_2, \ldots, x_n$ *đôi một trực giao)*

a) *Chứng minh cho trường hợp n = 2:*

$$\|x_1 + x_2\|^2 = (x_1 + x_2)^*(x_1 + x_2)$$
$$= (x_1{}^* + x_2{}^*)(x_1 + x_2)$$
$$= x_1{}^*x_1 + x_1{}^*x_2 + x_2{}^*x_2 + x_2{}^*x_1$$
$$= x_1{}^*x_1 + x_2{}^*x_2 \ (\text{vì } x_1{}^*x_2 = x_1{}^*x_2 = 0)$$
$$= \|x_1\| + \|x_2\|$$

b) *Chứng minh cho trường hợp tổng quát:*

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^* \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^*\right) \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i{}^* x_i \quad + \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} x_i{}^* x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i{}^* x_i \quad (\text{vì } x_i{}^* x_j = 0, \text{với mọi } i \neq j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

<u>Bài 3:</u> *Cho A* $\in \boldsymbol{C}^{mxm}$ *là một ma trận Hermit.*

a) Chứng minh mọi trị riêng của A đều là số thực

Xét λ là một trị riêng của A, và x là vectơ riêng ứng với λ, ta sẽ có:

$Ax = \lambda x$

Lấy liên hợp Hermit 2 vế ta có:

$x^* A^* = \bar{\lambda} x^*$

$\Leftrightarrow x^* A = \bar{\lambda} x^*$ (vì $A^* = A$)

$\Rightarrow x^* A x = \bar{\lambda} x^* x$

$\Rightarrow x^* \lambda x = \bar{\lambda} x^* x$

$\Rightarrow \lambda \|x\|^2 = \bar{\lambda} \|x\|^2$

$\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$ (vì $x \neq 0$)

Vậy λ là số thực.

b) Chứng minh nếu x, y lần lượt là vectơ riêng của 2 trị riêng phân biệt thì x và y trực giao

λ_1 và λ_2 là 2 trị riêng phân biệt của A, đồng thời x và y lần lượt là 2 vectơ riêng tương ứng

Ta có: $x^* (Ay) = x^* \lambda_2 y$

$\Leftrightarrow x^* A^* y = \lambda_2 x^* y$ ($A^* = A$)

$\Leftrightarrow (Ax)^* y = \lambda_2 x^* y$

$\Leftrightarrow \bar{\lambda}_1 x^* y = \lambda_2 x^* y$

$\Leftrightarrow \lambda_1 x^* y = \lambda_2 x^* y$ (theo (a) thì λ_1 là số thực)

$\Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) x^* y = 0$

$\Leftrightarrow x^* y = 0$ (vì $\lambda_1 \neq \lambda_2$)

Vậy x và y trực giao

<u>Bài 4:</u> *Trị riêng của một ma trận unita có đặc điểm gì?*

Xét λ là 1 trị riêng của ma trận A, với A là một ma trận unita , x là vectơ riêng ứng với λ

Ta có: $Ax = \lambda x$

⇨ $A^* Ax = A^* \lambda x$

⇨ $x = \lambda A^* x$ ($A^* A = I_n$)

⇨ $\frac{1}{\lambda} x = A^* x$

Ta lại có: $x^* A^* x = x^* (A^* x)$

⇔ $(Ax)^* x = x^* \frac{1}{\lambda} x$

⇔ $(\lambda x)^* x = \frac{1}{\lambda} x^* x$

⇔ $\bar{\lambda} x^* x = \frac{1}{\lambda} x^* x$

⇔ $(\bar{\lambda} - \frac{1}{\lambda}) \|x\|^2 = 0$

⇔ $\bar{\lambda} - \frac{1}{\lambda} = 0$ (vì $x \neq 0$)

Suy ra: $\bar{\lambda}\lambda = 1$ ⇔ $|\lambda| = 1$

Kết luận trị riêng của một ma trận unita luôn có độ lớn bằng 1