

Vietnamese Mathematical Olympiad for High School- & College Students

Olympic Toán Học Học Sinh & Sinh Viên Toàn Quốc (VMC)

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 9 tháng 1 năm 2025

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Advanced STEM & Beyond*:

URL: https://nqbh.github.io/advanced_STEM/.

Latest version:

- *Vietnamese Mathematical Olympiad for High School- & College Students (VMC) – Olympic Toán Học Học Sinh & Sinh Viên Toàn Quốc.*

PDF: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/VMC/NQBH_VMC.pdf.

TEX: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/VMC/NQBH_VMC.tex.

Mục lục

1 Preliminaries – Kiến thức chuẩn bị	1
2 Algebra – Đại Số	1
2.1 Matrix – Ma trận	2
2.2 Vector space – Không gian vector	2
3 Analysis – Giải Tích	2
3.1 Sequence – Dãy số	2
3.2 Integral – Tích phân	2
4 Miscellaneous	2
Tài liệu	2

1 Preliminaries – Kiến thức chuẩn bị

Resources – Tài nguyên.

1. [Khả09]. PHAN HUY KHẢI. *Các Chuyên Đề Số Học Bồi Dưỡng Học Sinh Giỏi Toán Trung Học. Chuyên Đề 2: Số Học & Dãy Số.*
2. VMS – HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM. *Kỷ Yếu Kỳ Thi Olympic Toán Học Học Sinh Viên–Học Sinh Lần 28.*
3. VMS – HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM. *Kỷ Yếu Kỳ Thi Olympic Toán Học Học Sinh Viên–Học Sinh Lần 29.* Huế, 2–8.4.2023.

2 Algebra – Đại Số

Resources – Tài nguyên.

1. LÊ TUẤN HOA. *Đại Số Tuyến Tính Qua Các Ví Dụ & Bài Tập.*
2. [Hum22]. NGUYỄN HỮU VIỆT HƯNG. *Đại Số Tuyến Tính.*
3. NGÔ VIỆT TRUNG. *Giáo Trình Đại Số Tuyến Tính.*

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com. Bến Tre City, Việt Nam.

2.1 Matrix – Ma trận

2.2 Vector space – Không gian vector

1 (VMC2023A1). Ký hiệu $\mathbb{R}[X]_{2023}$ là \mathbb{R} -không gian vector các đa thức 1 biến với bậc ≤ 2023 . Cho f là ánh xạ đặt tương ứng mỗi đa thức với đạo hàm cấp 2 của nó: $f: \mathbb{R}[X]_{2023} \rightarrow \mathbb{R}[X]_{2023}, p(X) \mapsto p''(X)$. Đặt $g = f \circ f \circ \dots \circ f$ (870 lần) là ánh xạ hợp của 870 lần ánh xạ f . (a) Chứng minh g là 1 ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}[X]_{2023}$ vào chính nó. (b) Tìm số chiều & 1 cơ sở của không gian ảnh $\text{Im } g$ & của không gian hạt nhân $\text{Ker } g$.

2 (VMC2023A2). Cho $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ thỏa $x^4 - 2x^3 - 1 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta)$. (a) Chứng minh $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ đôi một khác nhau. (b) Chứng minh $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3, \delta^3$ đôi một khác nhau. (c) Tính $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3$. (d)* Mở rộng bài toán cho các đa thức khác.

Lemma 1 (Điều kiện cần & đủ của nghiệm bội của đa thức). Cho $m, n \in \mathbb{R}, m \leq n, P(x) \in \mathbb{R}[x], \deg P = n. x = x_0 \in \mathbb{R}$ là 1 nghiệm bội m của $P(x)$ khi & chỉ khi $P(x_0) = P'(x_0) = P''(x_0) = \dots = P^{(m)}(x_0) = 0$.

Chứng minh. Giả sử $x = x_0 \in \mathbb{R}$ là 1 nghiệm bội m của $P(x)$, thì $P(x)$ sẽ có dạng $P(x) = (x - x_0)^m g(x)$ với $g(x) \in \mathbb{R}[x], \deg g = \deg P - m = n - m \geq 0$. Tính các đạo hàm $P'(x), P''(x), \dots, P^{(m)}(x)$ (có thể sử dụng quy tắc Leibniz tổng quát để tính đạo hàm, see, e.g., [Wikipedia/general Leibniz rule](#)) để suy ra kết luận. \square

Hint. (a) Đặt $P(x) = x^4 - 2x^3 - 1$, có $P'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3)$ chỉ có 2 nghiệm $x = 0$ (bội 2) & $x = \frac{3}{2}$ (bội 1), mà $P(0) = -1 \neq 0, P(\frac{3}{2}) = -\frac{43}{16} \neq 0$ nên $0, \frac{3}{2}$ đều không phải là nghiệm của $P(x)$, suy ra các nghiệm $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ của $P(x)$ là phân biệt. (b) \square

3 Analysis – Giải Tích

3.1 Sequence – Dãy số

Resources – Tài nguyên.

1. [Khả09]. PHAN HUY KHẢI. Các Chuyên Đề Số Học Bồi Dưỡng Học Sinh Giỏi Toán Trung Học. Chuyên Đề 2: Số Học & Dãy Số.

3 (General recursive sequences – Dãy truy hồi tổng quát). Cho dãy số $(u_n)_{n=1}^\infty$ được xác định bởi công thức truy hồi

$$u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_{n-m}), \forall m, n \in \mathbb{N}^*, m < n. \quad (1)$$

Tìm các tính chất tổng quát của dãy theo 1 số dạng đặc biệt của hàm f để lập thành các mệnh đề & định lý, rồi chứng minh chúng.

Vài phương pháp phổ biến để giải bài toán dãy số.

- Tìm cách xác định công thức số hạng tổng quát của dãy số: Thử vài trường hợp đầu để dự đoán công thức chính xác rồi chứng minh bằng quy nạp toán học.
- Sử dụng phương trình đặc trưng của lý thuyết dãy số.

4 (VMC2023B). Cho $(u_n)_{n=1}^\infty$ là dãy số được xác định bởi $u_n = \prod_{k=1}^n (1 + \frac{1}{4^k})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. (a) Tìm tất cả $n \in \mathbb{N}^*$ thỏa $u_n > \frac{5}{4}$. (b) Chứng minh $u_n \leq 2023, \forall n \in \mathbb{N}^*$. (c) Chứng minh dãy số $(u_n)_{n=1}^\infty$ hội tụ.

Chứng minh. (a) $u_{n+1} = (1 + \frac{1}{4^{n+1}}) u_n > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, suy ra (u_n) đơn điệu tăng, mà $u_1 = \frac{5}{4}$ nên $u_n > \frac{5}{4} \Leftrightarrow n \geq 2$. (b) \square

Remark 1. Gặp phải dãy số $(u_n)_{n=1}^\infty$ có công thức mỗi số hạng là 1 tích thì thử tính $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ xem có đơn giản hóa được không. Gặp phải dãy số $(u_n)_{n=1}^\infty$ có công thức mỗi số hạng là 1 tổng thì thử tính $u_{n+1} - u_n$ xem có đơn giản hóa được không.

5 (Recursive sequence vs. ANN). Tìm mối liên hệ giữa các dãy số cho bởi công thức truy hồi (recursive sequences) & mạng lưới nơ-ron nhân tạo (artificial neural networks, abbr., ANNs).

3.2 Integral – Tích phân

4 Miscellaneous

Tài liệu

[Hưng22] Nguyễn Hữu Việt Hưng. Đại Số Tuyến Tính. Tái bản lần thứ 4. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2022, p. 335.

[Khả09] Phan Huy Khải. Các Chuyên Đề Số Học Bồi Dưỡng Học Sinh Giỏi Toán Trung Học. Chuyên Đề 2: Số Học & Dãy Số. Nhà Xuất Bản Giáo Dục, 2009, p. 260.