BÀI TẬP PPS TRONG ĐSTT

Nguyễn An Thịnh ***<u>1411289</u>***

<u>BT1:</u> **(5.3)**

a) Xét khai triển SVD của A:

$$A = U\sum V*$$

(U, V là các ma trận unita)

Để xác định khai triển SVD của A, trước tiên ta cần tìm các singular value của A.

Như đã biết bình phương các singular value của A bằng độ lớn các trị riêng tương ứng của ma trận AA*

Ta có:

$$\mathrm{AA*} = \begin{bmatrix} 125 & 75 \\ 75 & 125 \end{bmatrix}$$

Đa thức đặc trưng của AA*:

$$\rho(\lambda) = (125 - \lambda)^2 - 75^2$$

Giải phương trình $\rho(\lambda) = 0$, ta có các trị riêng của AA*: $\lambda_1 = 200$, $\lambda_2 = 50$

Vậy các singular value của A là: $\sigma_1 = 2\sqrt{10}$, $\sigma_2 = 5\sqrt{2}$

Như vậy:

$$\sum = \begin{bmatrix} 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 5\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Để tìm U và V, trước hết ta chú ý điều sau:

$$A = U\sum V*$$
$$\Rightarrow A*A = (U\sum V*)*(U\sum V*)$$
$$\Rightarrow A*A* = V\sum*\sum V*$$
$$\Rightarrow A*AV = V\sum\sum*$$
$$\Rightarrow A*Av_i = \sigma_i^2 v_i$$

Như vậy để tìm cột đầu tiên của V ta cần giải hệ pt sau:

$$A*Av_1 = \sigma_1^2 v_1$$
$$A*Av_2 = \sigma_2^2 v_2$$

Cụ thể ta có:

$$\begin{bmatrix} 104 & -72 \\ -72 & 146 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 200 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 104 & -72 \\ -72 & 146 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 50 \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Để tối thiểu hoá số dấu -, ta sẽ chọn:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Từ đây ta sẽ tìm U thông qua V, cụ thể:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\sigma_1} A v_1 \\ &= \frac{1}{10\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ -10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{\sigma_2} A v_2 \\ &= \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ -10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vậy ta có khai triển SVD:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 5\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

b)

Singular value:

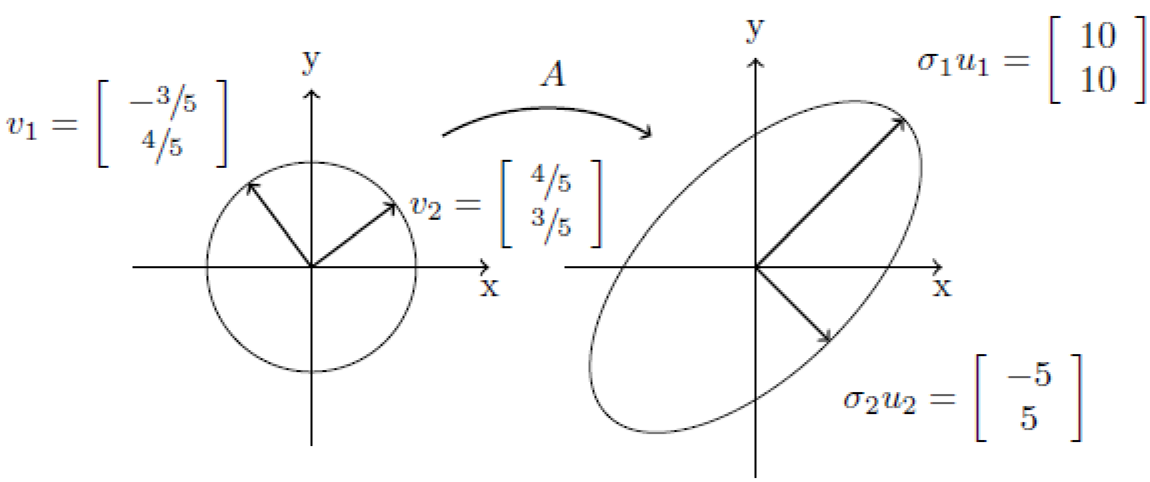
$$\sigma_1 = 10\sqrt{2},\ \sigma_2 = 5\sqrt{2}$$

Singular vector bên trái:

$$u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad u_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Singular vector bên phải:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$



c) Gọi a_1, a_2 là 2 cột của A, $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ là 2 dòng của A

Sử dụng các tính chất đã có, ta có thể tính các chuẩn của A:

$$\|A\|_1 = \max\|a_j\|_1 = \|a_2\|_1 = 16$$

$$\|A\|_2 = \sigma_1 = 10\sqrt{2}$$

$$\|A\|_\infty = \max\|\bar{a}_j\|_1 = \|\bar{a}_2\|_1 = 15$$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = 5\sqrt{10}$$

d) Ta có:

$$A = U\Sigma V^\intercal$$

Suy ra:

$$A^{-1} = (U\Sigma V^\intercal)^{-1} = (U\Sigma V^{-1})^{-1} = V\Sigma^{-1}U^\intercal = \begin{bmatrix} 1/20 & -11/100 \\ 1/10 & -1/50 \end{bmatrix}$$

e) Đa thức đặc trưng của A:

$$\rho(\lambda) = (-2-\lambda)(5-\lambda) + 110$$

Giải phương trình $\rho(\lambda) = 0$, ta có các trị riêng: $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{391}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{391}}{2}$,

f) Ta có:

$$\det \mathrm{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 100$$

Kiểm tra, ta thấy:

$$\det \mathrm{A} = \lambda_1\lambda_2 = \sigma_1\sigma_2$$

BT 2) (5.4)

Giả sử khai triển theo trị riêng của M là: $M = QVQ^{-1}$

Gọi $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ là các singular value của A, khi đó ta có:

$$\begin{cases} Av_i = \sigma_i u_i \\ A^* u_i = \sigma_i v_i \end{cases}, \forall i \in \overline{1,m}$$

Ta để ý thấy với mọi i ∈ $\overline{1,m}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ u_i \end{bmatrix} = \sigma_i \begin{bmatrix} v_i \\ u_i \end{bmatrix}$$

(1)

$$\begin{bmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ -u_i \end{bmatrix} = -\sigma_i \begin{bmatrix} v_i \\ -u_i \end{bmatrix}$$

Như vậy nếu σ_i là 1 singular value của A, thì $\pm\sigma_i$ là 2 trị riêng của M
Nói cách khác $\pm\sigma_1, \pm\sigma_2, \ldots, \pm\sigma_m$ chính là tất cả các trị riêng của ma trận M

Qua (1) ta cũng thấy rằng $\begin{bmatrix} v_i \\ u_i \end{bmatrix}$ là vectơ riêng ứng với σ_i, và $\begin{bmatrix} v_i \\ -u_i \end{bmatrix}$ là vectơ riêng ứng với $-\sigma_i$,

Ta đặt ra $V = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & -\Sigma \end{bmatrix}$ là ma trận bao gồm các trị riêng $\pm\sigma_i$

Như vậy ma trận bao gồm các thành phần vector riêng sẽ được xác định tương tự dạng sau:

$$Q = \begin{bmatrix} V & -V \\ U & U \end{bmatrix}$$

Ta thấy:

$$Q^* = \begin{bmatrix} V^* & U^* \\ -V^* & U^* \end{bmatrix}$$

$$QQ^* = \begin{bmatrix} V & -V \\ U & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^* & U^* \\ -V^* & U^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2I_m & 0 \\ 0 & 2I_m \end{bmatrix} = 2I_{2m}$$

(U, V là các ma trận unita)

Như vậy: $Q.\frac{1}{2}Q^* = I_{2m}$
Suy ra Q là 1 ma trận khả nghịch

Vậy ta có khai triển của M là: $M = QVQ^{-1}$

(với $Q^{-1} = \frac{1}{2}Q^*$)

BT3) Cho A là 1 ma trận Hermitian, Chứng minh rằng tồn tại ma trận Q unita sao cho:

$$A = Q\Sigma Q^*$$

Xét khai triển SVD của A:

$$A = U\Sigma V^*$$

(U, V là các ma trận unita)

A là ma trận Hermitian, tức là A = A*, vậy nên ta sẽ có:

$$AA^* = A^2 = U\Sigma V^* V\Sigma U^* = U\Sigma^2 U^* = U\Sigma^2 U^{-1}$$

Vì Σ là 1 ma trận chéo với toàn giá trị dương nên ta có thể dễ dàng tìm được A:

$$\begin{aligned} A &= U\Sigma U^{-1} \\ &= U\Sigma U^* \end{aligned}$$

(Đây là điều cần chứng minh Q ở đây chính bằng U)