

Lời Giải Đề Thi Giữa Kỳ Tổ Hợp & Lý Thuyết Đồ Thị Hè 2025

Midterm Exam Solution: Combinatorics & Graph Theory Summer 2025

Giảng viên ra đề: Nguyễn Quân Bá Hồng

Ngày 3 tháng 7 năm 2025

Tóm tắt nội dung

Yêu cầu Bắt Buộc

- Được phép sử dụng tài liệu giấy (sách, báo, tập/nháp viết tay, khăn giấy, giấy súc, etc.) không giới hạn.
- Cấm sử dụng thiết bị điện tử (trừ máy tính bỏ túi không có tích hợp AIs), AI tools (Gemini, ChatGPT, Grok, etc.). Nếu phát hiện 0 điểm ngay lần đầu tiên & thu bài – không có bất cứ cảnh cáo nào.
- Nếu làm không được, viết định nghĩa sẽ được +0.25 điểm. Trong mỗi bài, nếu không làm được ý trước thì vẫn có thể sử dụng kết quả các ý trước để làm ý sau của bài toán.
- Thời gian thi: 2.5 hours. Có thể nộp bài sớm nếu tự sinh viên muốn hoặc bị giảng viên bắt. Nộp bài sớm vẫn phải ngồi lại phòng thi, không được về sớm, để chiêm nghiệm về thái độ học tập, làm việc của bản thân & đặc biệt về cuộc đời.
- Nếu phát hiện đề sai rồi sửa lại được đề & làm đúng thì sẽ được cộng thêm nhiều điểm.
- Đề thi tổng cộng $\Sigma = 25$ điểm. Điểm dư **grade** -= 10 sẽ được cộng vào các cột khác, đặc biệt là đồ án cuối kỳ tương đối nặng, của các môn học mà giảng viên dạy.

Đề Thi Chính Thức

Bài 1 (Mở rộng đề thi THPTQG Toán 2025). ($\Sigma = 1$ điểm) Có $m \in \mathbb{N}^*$ ngăn trong 1 giá để sách được đánh số thứ tự $1, 2, \dots, m$ & $n \in \mathbb{N}^*$ quyển sách khác nhau. Xếp n quyển sách này vào m ngăn đó, các quyển sách được xếp thẳng đứng thành 1 hàng ngang với gáy sách quay ra ngoài ở mỗi ngăn. Khi đã xếp xong n quyển sách, 2 cách xếp được gọi là giống nhau nếu chúng thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện sau: (i) Với từng ngăn, số lượng quyển sách ở ngăn đó là như nhau trong cả 2 cách xếp. (ii) Với từng ngăn, thứ tự từ trái sang phải của các quyển sách được xếp là như nhau trong cả 2 cách xếp. Đếm số cách xếp đôi một khác nhau nếu: (a) (0.5 điểm) Mỗi ngăn có ít nhất 1 quyển sách. (b) (0.5 điểm) Mỗi ngăn có thể không có quyển nào.

Giải. Đánh số n quyển sách bởi $1, 2, \dots, n$. Xếp các quyển sách của các ngăn liên tiếp nhau theo thứ tự ngăn 1 đến ngăn n sẽ được 1 hoán vị của $[n]$, có $P_n = n!$ hoán vị như vậy. Gọi $x_i \in \mathbb{N}$ là số sách ngăn thứ i , $\forall i \in [m]$, có $\sum_{i=1}^m x_i = n$

(a) Vì mỗi ngăn sách phải khác rỗng nên $x_i \in \mathbb{N}^*$, suy ra , với mỗi hoán vị, theo bài toán chia kẹo Euler phiên bản mỗi đĩa trẻ đều có kẹo, sẽ có $\binom{n-1}{m-1}$ cách. Theo quy tắc nhân, số cách xếp sách đôi một khác nhau bằng $n! \binom{n-1}{m-1}$.

(b) Vì mỗi ngăn sách có thể rỗng nên $x_i \in \mathbb{N}$, suy ra , với mỗi hoán vị, theo bài toán chia kẹo Euler phiên bản mỗi đĩa trẻ có thể có kẹo hoặc không, sẽ có $\binom{n+m-1}{m-1}$ cách. Theo quy tắc nhân, số cách xếp sách đôi một khác nhau bằng $n! \binom{n+m-1}{m-1}$. \square

Remark 1 (Đổi giả thiết từ các sách khác nhau \mapsto các quyển sách giống nhau). Nếu n quyển sách giống nhau, e.g., PGS. TS. TRẦN ĐAN THU tặng $n = 50$ quyển [Thư+25] phiên bản mới nhất 2024 vào m ngăn trong 1 giá sách ở văn phòng khoa Công Nghệ được đánh số $1, 2, \dots, m$, e.g., đánh từ trên xuống hoặc từ dưới lên nên các ngăn này khác nhau. Khi đó, đáp số của bài toán sẽ chính là số nghiệm nguyên dương & số nghiệm không âm của bài toán chia kẹo Euler $\sum_{i=1}^m x_i = n$ với x_i là số sách ở ngăn sách thứ i , $\forall i \in [m]$, i.e., $\binom{n-1}{m-1}$, $\binom{n+m-1}{m-1}$, resp.

Bài 2 (Vandermonde's identity – Đẳng thức Vandermonde). ($\Sigma = 2$ điểm) (a) (1 điểm) Chứng minh đẳng thức Vandermonde

$$\sum_{i=0}^r \binom{m}{i} \binom{n}{r-i} = \binom{m+n}{r}, \quad \forall m, n, r \in \mathbb{N}.$$

bằng 2 cách: (i) (0.5 điểm) Phương pháp tổ hợp. (ii) (0.5 điểm) Phương pháp đại số thông qua việc tính hệ số của x^r trong khai triển của $(1+x)^m(1+x)^n$. (b) (1 điểm) Chứng minh đẳng thức Vandermonde tổng quát:

$$\binom{\sum_{i=1}^p n_i}{m} = \sum_{\sum_{i=1}^p k_i = m} \prod_{i=1}^p \binom{n_i}{k_i}, \text{ i.e., } \binom{n_1 + \dots + n_p}{m} = \sum_{k_1 + \dots + k_p = m} \binom{n_1}{k_1} \binom{n_2}{k_2} \dots \binom{n_p}{k_p}.$$

bằng 2 cách: (i) (0.5 điểm) Phương pháp tổ hợp. (ii) (0.5 điểm) Phương pháp đại số.

Chứng minh. (a) (i) Chọn r người từ 1 nhóm người lần lượt có m nam & n nữ.¹ □

Bài 3 (Hockey-stick identity). (2 điểm) Chứng minh đẳng thức Hockey-stick:

$$\sum_{i=r}^n \binom{i}{r} = \sum_{j=0}^{n-r} \binom{j+r}{r} = \sum_{j=0}^{n-r} \binom{j+r}{j} = \binom{n+1}{n-r}, \forall n, r \in \mathbb{N}, n \geq r,$$

bằng 4 cách: (a) (0.5 điểm) Quy nạp. (b) (0.5 điểm) Biến đổi đại số. (c) (0.5 điểm) Phương pháp tổ hợp. (d) (0.5 điểm) Sử dụng hàm sinh bằng cách tính hệ số của x^r trong biểu thức $\sum_{i=r}^n (x+1)^i = (x+1)^r + (x+1)^{r+1} + \dots + (x+1)^n$.

Bài 4 (Pascal's rule & generalized Pascal's rule). (2.5 điểm) Chứng minh: (a) Công thức Pascal $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$ bằng 2 cách: (i) (0.5 điểm) Biến đổi đại số. (ii) (0.5 điểm) Phương pháp tổ hợp. (b) (0.5 điểm) Tìm công thức cho hệ số của $\prod_{i=1}^m x_i^{k_i} = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$ trong khai triển của $(\sum_{i=1}^m x_i)^n = (x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n$. (c) (1 điểm) Đặt hệ số ở câu (b) là $c(m, n, k_1, k_2, \dots, k_m)$, viết lại đẳng thức ở câu (a) với $m = 2$ theo ký hiệu này. Chứng minh quy tắc Pascal tổng quát:

$$\begin{aligned} & c(m, n-1, k_1-1, k_2, k_3, \dots, k_m) + c(m, n-1, k_1, k_2-1, k_3, \dots, k_m) + \dots + c(m, n-1, k_1, k_2, k_3, \dots, k_m-1) \\ &= c(m, n, k_1, k_2, \dots, k_m), \forall m \in \mathbb{N}, m \geq 2, k_i \in \mathbb{N}^*, \forall i \in [m], \sum_{i=1}^m k_i = n. \end{aligned}$$

Bài 5 (Euler candy problem – Bài toán chia kẹo Euler). ($\Sigma = 3$ điểm) (a) (0.5 điểm) Phát biểu 2 phiên bản của bài toán chia kẹo Euler (stars & bars). (b) (1.5 điểm) Đếm số nghiệm nguyên của phương trình $\sum_{i=1}^m x_i = n$ với điều kiện: (i) (0.25 điểm) $x_i \geq 0, \forall i \in [m]$. (ii) (0.25 điểm) $x_i \geq 1, \forall i \in [m]$. (iii) (0.5 điểm) $x_i \geq 2, \forall i \in [m]$. (iv) (0.5 điểm) $x_i \not\geq 2, \forall i \in [m]$. (c) (1 điểm) Gọi $a(m, n), b(m, n), c(m, n), d(m, n)$ là số nghiệm nguyên tương ứng ở 4 ý trước, thiết lập các công thức truy hồi cho chúng.

Bài 6 (Count number of monic monomials – Đếm số đơn thức hệ số 1). ($\Sigma = 2$ điểm) 1 đơn thức hệ số 1 (monic) của $n \in \mathbb{N}^*$ biến x_1, x_2, \dots, x_n là 1 biểu thức toán học có dạng $\prod_{i=1}^n x_i^{a_i} = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$ với $a_i \in \mathbb{N}, \forall i \in [n]$, & bậc $d = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Đếm: (a) (0.5 điểm) Số đơn thức hệ số 1 bậc d của n biến x_1, x_2, \dots, x_n . (b) (0.5 điểm) Số đơn thức hệ số 1 bậc $\leq d$ của n biến x_1, x_2, \dots, x_n . (c) (1 điểm) Gọi $a(n, d), b(n, d)$ là số đơn thức thỏa mãn ở 2 câu trước, thiết lập các công thức truy hồi cho chúng.

Bài 7 (Mở rộng [Sha22], P1.3.4, p. 22). ($\Sigma = 7$ điểm) Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Xét 1 dải bìa cứng $1 \times n$. Chúng ta có 1 số lượng lớn m loại mảnh có kích thước $\{1 \times i\}_{i=2}^{m+1} = 1 \times 2, 1 \times 3, \dots, 1 \times (m+1)$. Cho $f(n)$ là số cách ta có thể lát cho dải bìa cứng bằng các mảnh của mình. (a) (0.5 điểm) Tính $f(1), f(2), f(3), \dots, f(10)$. (b) (0.5 điểm) Chứng minh công thức truy hồi cho $f(n)$: $f(n) = \sum_{i=2}^{m+1} f(n-i), \forall n \in \mathbb{N}^*$. (c) (1 điểm) Làm lại 2 ý trước nếu m loại mảnh đổi thành $1 \times 1, 1 \times 2, \dots, 1 \times m$ cho $g(n)$ là số cách lát thỏa mãn. (d) (5 điểm) Gọi $f(m, n), g(m, n)$ lần lượt là số cách ta có thể lát cho dải bìa cứng $m \times n$ bằng m loại mảnh có kích thước $\{1 \times i\}_{i=2}^{m+1}, \{1 \times i\}_{i=1}^m$. (i) (0.5 điểm) Tính $f(2, 2), f(3, 2), f(4, 2), f(5, 2)$. (ii) (1 điểm) Thiết lập công thức truy hồi cho $f(n, 2) = f(2, n), g(n, 2) = g(2, n)$. (iii) (3.5 điểm) Thiết lập công thức truy hồi cho $f(m, n), g(m, n)$.

Bài 8 (Stirling numbers – Số Stirling). ($\Sigma = 1$ điểm) (a) (0.5 điểm, [Sha22, P6.1.13]) Tìm & chứng minh công thức dạng

$$\left[\begin{matrix} n \\ n-2 \end{matrix} \right] = \binom{n}{*} + * \binom{n}{*}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

(b) (0.5 điểm, [Sha22, P6.2.7]) Tìm & chứng minh công thức dạng

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ n-2 \end{matrix} \right\} = \binom{n}{*} + * \binom{n}{*}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Bài 9 (Euler's theorem/handshaking lemma & Havel–Hakimi algorithm). ($\Sigma = 1.5$ điểm) (a) (0.5 điểm) Phát biểu định lý Euler & định lý về thuật toán Havel–Hakimi. 2 định lý này áp dụng cho các loại đồ thị nào? (b) (0.5 điểm) [Sha22, P10.1.13, p. 368] Chứng minh 1 dãy d_1, d_2, \dots, d_n là 1 graphic sequence khi & chỉ khi dãy $n-d_n-1, \dots, n-d_2-1, n-d_1-1$ là graphic; áp dụng kiểm tra 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8, 8 có phải là graphic sequence không. (c) (0.5 điểm) Sử dụng thuật toán Havel–Hakimi để tra các dãy 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8, 8, 8 có phải là graphic sequence hay không.

Bài 10 (Vai đồ thị đơn đặc biệt [Val21]). ($\Sigma = 3$ điểm) (a) (0.5 điểm) Chứng minh số cạnh tối đa của 1 đồ thị đơn có $n \in \mathbb{N}^*$ đỉnh bằng $\frac{1}{2}n(n-1)$. Khi đẳng thức xảy ra, đồ thị đơn hữu hạn đó được gọi là đồ thị gì? Viết định nghĩa, vẽ, tìm số cạnh & dãy bậc của đồ thị đó. (b) (0.5 điểm) Viết định nghĩa, vẽ, tìm số cạnh & dãy bậc của đồ thị đường đi – path graph P_n . (c) Viết định nghĩa, vẽ, tìm số cạnh & dãy bậc của đồ thị chu trình – cycle graph C_n . (d) Viết định nghĩa, vẽ, tìm số cạnh & dãy bậc của đồ thị bánh xe – wheel graph W_{n+1} . (e) (0.5 điểm) Viết định nghĩa, vẽ, tìm số cạnh & dãy bậc khả dĩ của đồ thị chính quy – regular graph. (f) (0.5 điểm) Tìm số cạnh & dãy bậc của đồ thị 2 phía đầy đủ – complete bipartite graph $K_{m,n}$.

¹We only consider binary gender, i.e., the concept that there are only two genders: male & female, in this context.

Tài liệu

- [Sha22] Shahriar Shahriari. *An invitation to combinatorics*. Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, Cambridge, 2022, pp. xv+613. ISBN: 978-1-108-47654-6.
- [Thu+25] Trần Đan Thư, Nguyễn Thanh Phương, Đinh Bá Tiến, and Trần Minh Triết. *Nhập Môn Lập Trình*. Nhà Xuất Bản Khoa Học & Kỹ Thuật, 2025, p. 427.
- [Val21] Gabriel Valiente. *Algorithms on trees and graphs—with Python code*. Texts in Computer Science. Second edition [of 1926815]. Springer, Cham, [2021] ©2021, pp. xv+386. ISBN: 978-3-303-81884-5; 978-3-303-81885-2. DOI: [10.1007/978-3-030-81885-2](https://doi.org/10.1007/978-3-030-81885-2). URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-81885-2>.