Vietnamese Mathematical Olympiad for High School- & College Students Olympic Toán Học Học Sinh & Sinh Viên Toàn Quốc (VMC)

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 31 tháng 1 năm 2025

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Advanced STEM & Beyond*:
URL: https://nqbh.github.io/advanced_STEM/.
Latest version:

- *Vietnamese Mathematical Olympiad for High School- & College Students (VMC) – Olympic Toán Học Học Sinh & Sinh Viên Toàn Quốc.*

  PDF: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/VMC/NQBH_VMC.pdf.

  TEX: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/VMC/NQBH_VMC.tex.

Mục lục

1 Preliminaries – Kiến thức chuẩn bị 1

2 Algebra – Đại Số 1
2.1 Matrix – Ma trận 2
2.2 Vector space – Không gian vector 2

3 Analysis – Giải Tích 3
3.1 Sequence – Dãy số 3
3.2 Integral – Tích phân 4

4 Miscellaneous 4

Tài liệu 4

1 Preliminaries – Kiến thức chuẩn bị

Resources – Tài nguyên.

1. [Khả09]. Phan Huy Khải. *Các Chuyên Đề Số Học Bồi Dưỡng Học Sinh Giỏi Toán Trung Học. Chuyên Đề 2: Số Học & Dãy Số.*

2. VMS – Hội Toán Học Việt Nam. *Kỷ Yếu Kỳ Thi Olympic Toán Học Sinh Viên–Học Sinh Lần 28.*

3. VMS – Hội Toán Học Việt Nam. *Kỷ Yếu Kỳ Thi Olympic Toán Học Sinh Viên–Học Sinh Lần 29.* Huế, 2–8.4.2023.

2 Algebra – Đại Số

Resources – Tài nguyên.

1. Lê Tuấn Hoa. *Đại Số Tuyến Tính Qua Các Ví Dụ & Bài Tập.*

2. [Hưn22]. Nguyễn Hữu Việt Hưng. *Đại Số Tuyến Tính.*

3. Ngô Việt Trung. *Giáo Trình Đại Số Tuyến Tính.*

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com. Bến Tre City, Việt Nam.

2.1 Matrix – Ma trận

2.2 Vector space – Không gian vector

Giả sử V, W: 2 không gian vector trên trường $\mathbb{F}$ (see [Hưn22, Chap. 2, §2: Ánh xạ tuyến tính, pp. 100–110]).

Định nghĩa 1 (Ánh xạ tuyến tính)**.** *Ánh xạ $f : V \to W$ được gọi là 1* ánh xạ tuyến tính *(hoặc rõ hơn là 1* ánh xạ $\mathbb{F}$-tuyến tính*), nếu*

$$f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta),\ \forall \alpha,\beta \in V, \tag{1}$$
$$f(a\alpha) = af(\alpha),\ \forall a \in \mathbb{F}. \tag{2}$$

Ánh xạ tuyến tính cũng được gọi là đồng cấu tuyến tính*, hay* đồng cấu *cho đơn giản.*

2 điều kiện trong định nghĩa ánh xạ tuyến tính $\Leftrightarrow$ điều kiện:

$$f(\alpha a + \beta b) = af(\alpha) + bf(\beta),\ \forall \alpha,\beta \in V,\ \forall a,b \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Định lý 1 (Tính chất cơ bản của ánh xạ tuyến tính)**.** *Giả sử $f : V \to W$ là 1 ánh xạ tuyến tính. Khi đó: (i) $f(0) = 0$. (ii) $f(-\alpha) = -f(\alpha)$, $\forall \alpha \in V$. (iii)*

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_i\alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i f(\alpha_i),\ \forall a_i \in \mathbb{F},\ \forall \alpha_i \in V, \forall i = 1,\ldots,n. \tag{4}$$

Ví dụ 1 (Ánh xạ tuyến tính cơ bản)**.**

(i) Ánh xạ không $0 : V \to W$, $0(\alpha) = 0$, $\forall \alpha \in V$. Thế còn ánh xạ hằng $C : V \to W$, $C(\alpha) = C$, $\forall \alpha \in V$ với $C \in \mathbb{F}$ cho trước?

(ii) Ánh xạ đồng nhất (identity mapping) $\mathrm{id}_V : V \to V$, $\mathrm{id}_V(\alpha) = \alpha$, $\forall \alpha \in V$.

(iii) Đạo hàm hình thức

$$\frac{d}{dX} : \mathbb{F}[X] \to \mathbb{F}[X],\ \frac{d}{dX}\sum_{i=0}^n a_iX^i = \sum_{i=1}^n ia_iX^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1}(i+1)a_{i+1}X^i. \tag{5}$$

(iv) Tích phân hình thức

$$\int \mathrm{d}X : \mathbb{F}[X] \to \mathbb{F}[X],\ \int \sum_{i=0}^n a_iX^i\,\mathrm{d}X = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+1}X^{i+1}. \tag{6}$$

(v) Giả sử $A = (a_{ij}) \in M(m\times n, \mathbb{F})$,

$$\widetilde{A} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{7}$$

.

(vi) Các phép chiếu

$$\mathrm{pr}_i : V_1 \times V_2 \to V_i,\ \mathrm{pr}_i(v_1,v_2) = v_i,\ \forall i = 1,2, \tag{8}$$

hay tổng quát hơn với $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$:

$$\mathrm{pr}_i : \bigtimes_{i=1}^n V_i = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n,\ \mathrm{pr}_i(v_1,\ldots,v_n) = v_i,\ \forall i = 1,\ldots,n. \tag{9}$$

See also, e.g., Wikipedia/linear map.

Hạt nhân & ảnh của 1 đồng cấu là 2 không gian vector đặc biệt quan trọng với việc khảo sát đồng cấu đó, see, e.g., [Hưn22, Chap. 2, §3: Hạt nhân & ảnh của đồng cấu, pp. 110–116].

Định nghĩa 2 (Hạt nhân/hạch & ảnh của đồng cấu)**.** *Giả sử $f : V \to W$ là 1 đồng cấu.*

(a) $\mathrm{Ker}(f) \coloneqq f^{-1}(0) = \{x \in V | f(x) = 0\} \subset V$ *được gọi là* hạt nhân *(hay* hạch*) của f. Số chiều của* $\mathrm{Ker}(f)$ *được gọi là* số khuyết *của f.*

(b) $\mathrm{Im}(f) \coloneqq f(V) = \{f(x) | x \in V\} \subset W$ *được gọi là* ảnh *của f. Số chiều của* $\mathrm{Im}(f)$ *được gọi là* hạng *của f & được ký hiệu là* $\mathrm{rank}(f)$.

Định lý 2 (Điều kiện cần & đủ để 1 đồng cấu là 1 toàn cấu)**.** *Đồng cấu $f : V \to W$ là 1 toàn cấu $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(f) = \dim W$.*

Định lý 3 (Điều kiện cần & đủ để 1 đồng cấu là 1 đơn cấu)**.** *Đối với đồng cấu $f : V \to W$ các điều kiện sau là tương đương:*

(i) f là 1 đơn cấu.

(ii) $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

(iii) Ảnh bởi f của mỗi hệ vector độc lập tuyến tính là 1 hệ vector độc lập tuyến tính.

(iv) Ảnh bởi f của mỗi cơ sở của V là 1 hệ vector độc lập tuyến tính.

(v) Ảnh bởi f của 1 cơ sở nào đó của V là 1 hệ vector độc lập tuyến tính.

(vi) $\operatorname{rank}(f) = \dim V$.

1 (VMC2023A1)**.** *Ký hiệu $\mathbb{R}[X]_{2023}$ là $\mathbb{R}$-không gian vector các đa thức 1 biến với bậc ≤ 2023. Cho f là ánh xạ đặt tương ứng mỗi đa thức với đạo hàm cấp 2 của nó: $f : \mathbb{R}[X]_{2023} \to \mathbb{R}[X]_{2023}$, $p(X) \mapsto p''(X)$. Đặt $g = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (870 lần) là ánh xạ hợp của 870 lần ánh xạ f. (a) Chứng minh g là 1 ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}[X]_{2023}$ vào chính nó. (b) Tìm số chiều & 1 cơ sở của không gian ảnh $\operatorname{Im} g$ & của không gian hạt nhân $\operatorname{Ker} g$.*

Chứng minh. (a) Có $f(\alpha p(X) + \beta q(X)) = (\alpha p(X) + \beta q(X))'' = \alpha p''(X) + \beta q''(X) = \alpha f(p(X)) + \beta f(q(X))$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall p(X), q(X) \in \mathbb{R}[X]_{2023}$, nên ánh xạ f là ánh xạ tuyến tính, nên hợp thành của $n \in \mathbb{N}^\star$ lần của ánh xạ f, i.e., $f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n lần) cũng là 1 ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}[X]_{2023}$ vào chính nó. Nói riêng, g là 1 ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}[X]_{2023}$ vào chính nó. (b) Ảnh của g được sinh bởi các vector $g(1), g(X), \ldots, g(X^{2023})$ (vì $(1, X, X^2, \ldots, X^{2023})$ là 1 cơ sở của khong gian vector $\mathbb{R}[X]_{2023}$ các đa thức $p(X)$ có $\deg p \le 2023$. Nhận thấy

$$g(X^k) = \begin{cases} 0 & \text{if } k < 1740, \\ k(k-1)\cdots(k-1739)X^{k-1740} & \text{if } k \ge 1740, \end{cases}$$

nên 1 cơ sở của $\operatorname{Im} g$ là $(1, X, X^2, \ldots, X^{283})$, nên $\dim \operatorname{Im} g = 284$.

Với $p(X) \in \mathbb{R}[X]_{2023}$ bất kỳ, $p(X)$ sẽ có dạng $p(X) = \sum_{i=1}^{2023} a_i X^i = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_{2023} X^{2023}$, thì $g(p)$ có dạng

$$g(p)(X) = \sum_{i=1}^{283} b_i X^i = b_0 + b_1 X + \cdots + b_{283} X^{283}.$$

Đa thức $p(X) \in \ker g \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{283} b_i X^i = 0 \Leftrightarrow a_i = 0, \forall i = 1740, \ldots, 2023$, nên 1 cơ sở của $\ker g$ là $(1, X, X^2, \ldots, X^{1739})$ & $\dim \ker g = 1740$. □

2 (Mở rộng VMC2023A1)**.** *Liệu thay các giả thiết trong VMC2023A1 thì bài toán còn đúng/giải được không? (a) Thay* 2023, 870 *bởi $n, m \in \mathbb{N}^\star$. (b) Thay ánh xạ đạo hàm cấp 2 bởi ánh xạ đạo hàm cấp $k \in \mathbb{N}^\star$ hoặc tích phân $\int \mathrm{d}x$, tích phân bộ $\int\int \cdots \int \mathrm{d}x$.*

3. *Cho $n \in \mathbb{N}^\star$, V là 1 không gian vector, $f : V \to V$ là 1 ánh xạ tuyến tính. Chứng minh $g_n \coloneqq f \circ f \circ \cdots f$ (n lần) cũng là 1 ánh xạ tuyến tính từ V vào chính nó.*

4 (VMC2023A2)**.** *Cho $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ thỏa $x^4 - 2x^3 - 1 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$. (a) Chứng minh $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ đôi một khác nhau. (b) Chứng minh $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3, \delta^3$ đôi một khác nhau. (c) Tính $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3$. (d)* Mở rộng bài toán cho các đa thức khác.*

Lemma 1 (Điều kiện cần & đủ của nghiệm bội của đa thức)**.** *Cho $m, n \in \mathbb{R}, m \le n$, $P(x) \in \mathbb{R}[x], \deg P = n$. $x = x_0 \in \mathbb{R}$ là 1 nghiệm bội m của $P(x)$ khi & chỉ khi $P(x_0) = P'(x_0) = P''(x_0) = \cdots = P^{(m)}(x_0) = 0$.*

Chứng minh. Giả sử $x = x_0 \in \mathbb{R}$ là 1 nghiệm bội m của $P(x)$, thì $P(x)$ sẽ có dạng $P(x) = (x - x_0)^m g(x)$ với $g(x) \in \mathbb{R}[x], \deg g = \deg P - m = n - m \ge 0$. Tính các đạo hàm $P'(x), P''(x), \ldots, P^{(m)}(x)$ (có thể sử dụng quy tắc Leibniz tổng quát để tính đạo hàm, see, e.g., Wikipedia/general Leibniz rule) để suy ra kết luận. □

Hint. (a) Đặt $P(x) = x^4 - 2x^3 - 1$, có $P'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3$ chỉ có 2 nghiệm $x = 0$ (bội 2) & $x = \frac{3}{2}$ (bội 1), mà $P(0) = -1 \ne 0, P(\frac{3}{2}) = -\frac{43}{16} \ne 0$ nên $0, \frac{3}{2}$ đều không phải là nghiệm của $P(x)$, suy ra các nghiệm $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ của $P(x)$ là phân biệt. (b) □

3 Analysis – Giải Tích

3.1 Sequence – Dãy số

Resources – Tài nguyên.

1. [Khả09]. Phan Huy Khải. *Các Chuyên Đề Số Học Bồi Dưỡng Học Sinh Giỏi Toán Trung Học. Chuyên Đề 2: Số Học & Dãy Số.*

5 (General recursive sequences – Dãy truy hồi tổng quát)**.** *Cho dãy số $(u_n)_{n=1}^\infty$ được xác định bởi công thức truy hồi*

$$\boxed{u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_{n-m}),\ \forall m, n \in \mathbb{N}^\star,\ m < n.} \tag{10}$$

Tìm các tính chất tổng quát của dãy theo 1 số dạng đặc biệt của hàm f để lập thành các mệnh đề & định lý, rồi chứng minh chúng.

Vài phương pháp phổ biến để giải bài toán dãy số.

- Tìm cách xác định công thức số hạng tổng quát của dãy số: Thử vài trường hợp đầu để dự đoán công thức chính xác rồi chứng minh bằng quy nạp toán học.
- Sử dụng phương trình đặc trưng của lý thuyết dãy số.

6 (VMC2023B)**.** *Cho* $(u_n)_{n=1}^\infty$ *là dãy số được xác định bởi* $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{4^k}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *(a) Tìm tất cả* $n \in \mathbb{N}^\star$ *thỏa* $u_n > \frac{5}{4}$. *(b) Chứng minh* $u_n \le 2023$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *(c) Chứng minh dãy số* $(u_n)_{n=1}^\infty$ *hội tụ.*

Chứng minh. (a) $u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{4^{n+1}}\right) u_n > u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, suy ra (u_n) đơn điệu tăng, mà $u_1 = \frac{5}{4}$ nên $u_n > \frac{5}{4} \Leftrightarrow n \ge 2$. (b) □

Remark 1. *Gặp phải dãy số* $(u_n)_{n=1}^\infty$ *có công thức mỗi số hạng là 1 tích thì thử tính* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *xem có đơn giản hóa được không. Gặp phải dãy số* $(u_n)_{n=1}^\infty$ *có công thức mỗi số hạng là 1 tổng thì thử tính* $u_{n+1} - u_n$ *xem có đơn giản hóa được không.*

7 (Recursive sequence vs. ANN)**.** *Tìm mối liên hệ giữa các dãy số cho bởi công thức truy hồi (recursive sequences) & mạng lưới nơ-ron nhân tạo (artificial neural networks, abbr., ANNs).*

3.2 Integral – Tích phân

4 Miscellaneous

Tài liệu

[Hưn22] Nguyễn Hữu Việt Hưng. *Đại Số Tuyến Tính*. Tái bản lần thứ 4. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2022, p. 335.

[Khả09] Phan Huy Khải. *Các Chuyên Đề Số Học Bồi Dưỡng Học Sinh Giỏi Toán Trung Học. Chuyên Đề 2: Số Học & Dãy Số*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục, 2009, p. 260.