Lecture Note: Combinatorics & Graph Theory
Bài Giảng: Tổ Hợp & Lý Thuyết Đồ Thị

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 18 tháng 3 năm 2025

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Advanced STEM & Beyond*:
URL: https://nqbh.github.io/advanced_STEM/.
Latest version:

- *Lecture Note: Combinatorics & Graph Theory – Bài Giảng: Tổ Hợp & Lý Thuyết Đồ Thị.*
  PDF: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/combinatorics/lecture/NQBH_combinatorics_graph_theory_lecture.pdf.
  TEX: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/combinatorics/lecture/NQBH_combinatorics_graph_theory_lecture.tex.
- *Slide: Combinatorics & Graph Theory – Slide Bài Giảng: Tổ Hợp & Lý Thuyết Đồ Thị.*
  PDF: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/combinatorics/slide/NQBH_combinatorics_graph_theory_slide.pdf.
  TEX: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/combinatorics/slide/NQBH_combinatorics_graph_theory_slide.tex.
- Codes:
  - C/C++: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/combinatorics/C++.
  - Python: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/combinatorics/Python.

Mục lục

1 Basic Combinatorics – Tổ Hợp Cơ Bản **1**
1.1 Mathematical induction & recurrence – Quy nạp & truy hồi 1
1.2 Pigeonhole principle & Ramsey theory – Nguyên lý chuồng bồ câu & lý thuyết Ramsey 1
1.3 Counting rules & Stirling number of type 1 & type 2 1
1.4 Hoán vị & tổ hợp 1
1.5 Hệ số nhị thức & đa thức 3
1.6 Phân vùng số nguyên & nguyên tắc loại suy 3

2 Graph Theory – Lý Thuyết Đồ Thị **3**

3 Posets, Kết Nối, Lưới Boolean **4**

4 Miscellaneous **4**

Tài liệu **4**

1 Basic Combinatorics – Tổ Hợp Cơ Bản

1.1 Mathematical induction & recurrence – Quy nạp & truy hồi

1.2 Pigeonhole principle & Ramsey theory – Nguyên lý chuồng bồ câu & lý thuyết Ramsey

1.3 Counting rules & Stirling number of type 1 & type 2

1.4 Hoán vị & tổ hợp

1 (Consecutive coin toss – Gieo các đồng xu liên tiếp). *Cho $n, k \in \mathbb{N}^\star$, $k \le n$. Tung 1 đồng xu đồng chất ngẫu nhiên n lần. Tính xác suất lý thuyết của sự kiện: (a) Toàn bộ đều là mặt sấp (ngửa). (b) Có đúng k lần xuất hiện mặt sấp (ngửa). (c) Có ít nhất k lần xuất hiện mặt sấp (ngửa). (d) Có đúng k lần xuất hiện mặt sấp (ngửa) liên tiếp nhau. (e) Có ít nhất k lần xuất hiện mặt sấp (ngửa) liên tiếp nhau.*

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com, hong.nguyenquanba@umt.edu.vn. Bến Tre City, Việt Nam.

Giải. Gọi $X_i \in \{S, N\}$ là biến cố ngẫu nhiên biểu diễn mặt đồng xu trong lần tung thứ i, $\forall i = 1, \ldots, n$. Không gian mẫu: $|\Omega| = \prod_{i=1}^n 2 = 2^n$. (a) Vì chỉ có 1 trường hợp thuận lợi là $(S, S, \ldots, S)$ nên $\mathbb{P}(X_i = S,\ \forall i = 1, \ldots, n) = \mathbb{P}(|\{i; X_i = S\}| = n) = \frac{1}{2^n}$. Tương tự, vì chỉ có 1 trường hợp thuận lợi là $(N, N, \ldots, N)$ nên $\mathbb{P}(X_i = N,\ \forall i = 1, \ldots, n) = \mathbb{P}(|\{i; X_i = N\}| = n) = \frac{1}{2^n}$. (b) $\mathbb{P}(|\{i; X_i = S\}| = k) = \mathbb{P}(|\{i; X_i = N\}| = k) = \frac{C_n^k}{2^n}$, $\forall k = 0, \ldots, n$. (c) $\mathbb{P}(|\{i; X_i = S\}| \geq k) = \mathbb{P}(|\{i; X_i = N\}| \geq k) = \frac{C_n^k + C_n^{k+1} + \cdots + C_n^n}{2^n} = \frac{\sum_{i=k}^n C_n^i}{2^n}$, $\forall k = 0, \ldots, n$. (d) $\mathbb{P} = \frac{n-k+1}{2^n}$. (e) $\mathbb{P} = \frac{\sum_{i=k}^n (n-i+1)}{2^n} = \frac{(n+1)(n-k+1) - \frac{(n+k)(n-k+1)}{2}}{2^n}$. □

2 (Simultaneous coin toss – Gieo các đồng xu đồng thời)**.** *Cho $n, k \in \mathbb{N}^\star$, $k \leq n$. Tung đồng thời n đồng xu đồng chất ngẫu nhiên. Tính xác suất lý thuyết của sự kiện: (a) Toàn bộ đều là mặt sấp (ngửa). (b) Có đúng k lần xuất hiện mặt sấp (ngửa). (c) Có ít nhất k lần xuất hiện mặt sấp (ngửa).*

Giải. Gọi X là biến cố ngẫu nhiên chỉ số mặt S xuất hiện khi tung đồng thời n đồng xu. (a) $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{n+1}$. (b) $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n+1}$ □

3 (Consecutive 2 dice rolls – Gieo 2 xúc xắc lần lượt)**.** *Gieo lần lượt 2 con xúc xắc. Tính xác suất lý thuyết của sự kiện: (a) 2 mặt có cùng số chấm, khác số chấm. (b) Số chấm 2 mặt có cùng tính chẵn lẻ, khác tính chẵn lẻ. (c) Số chấm 2 mặt đều là số nguyên tố, đều là hợp số, có ít nhất 1 số nguyên tố, có ít nhất 1 hợp số. (d) Số chấm 1 mặt là ước (bội) của số chấm trên mặt còn lại. (e) Tổng số chấm 2 mặt bằng $n \in \mathbb{N}$.*

Ans. (e) $f(n) = (\min\{n-1, 6\} - \max\{n-6, 1\} + 1)\mathbf{1}_{n \in \{2,3,\ldots,12\}}$.

4 (Simultaneous 2 dice rolls – Gieo 2 xúc xắc đồng thời)**.** *Gieo đồng thời 2 con xúc xắc. Tính xác suất lý thuyết của sự kiện: (a) 2 mặt có cùng số chấm, khác số chấm. (b) Số chấm 2 mặt có cùng tính chẵn lẻ, khác tính chẵn lẻ. (c) Số chấm 2 mặt đều là số nguyên tố, đều là hợp số, có ít nhất 1 số nguyên tố, có ít nhất 1 hợp số. (d) Số chấm 1 mặt là ước (bội) của số chấm trên mặt còn lại. (e) Tổng số chấm 2 mặt bằng $n \in \mathbb{N}$.*

5 (Consecutive n dice rolls – Gieo n xúc xắc lần lượt)**.** *Gieo lần lượt $n \in \mathbb{N}^\star$ con xúc xắc. Tính xác suất lý thuyết của sự kiện: (a) n mặt có cùng số chấm. (b) n mặt có khác số chấm. (c) Số chấm n mặt có cùng tính chẵn lẻ. (d) Số chấm 1 mặt là ước (bội) của số chấm trên các mặt còn lại. (e) Tổng số chấm n mặt bằng $a \in \mathbb{N}$.*

6 (Simultaneous n dice rolls – Gieo n xúc xắc đồng thời)**.** *Gieo đồng thời $n \in \mathbb{N}^\star$ con xúc xắc. Tính xác suất lý thuyết của sự kiện: (a) n mặt có cùng số chấm. (b) n mặt có khác số chấm. (c) Số chấm n mặt có cùng tính chẵn lẻ. (d) Số chấm 1 mặt là ước (bội) của số chấm trên các mặt còn lại. (e) Tổng số chấm n mặt bằng $a \in \mathbb{N}$.*

7 (Squares & rectangles with same perimeter – Hình vuông & hình chữ nhật cùng chu vi)**.** *Cho $n \in \mathbb{N}^\star$. Viết n thành tổng 2 số: $n = a + b$. Tính xác suất để a, b cùng là độ dài cạnh của 1 hình vuông, xác suất để a, b là độ dài 2 cạnh của 1 hình chữ nhật nếu: (a) $a, b \in \mathbb{N}^\star$. (b) $a, b \in \mathbb{N}$.*

8 (Squares & rectangles with same area – hình vuông & hình chữ nhật cùng diện tích)**.** *Cho $a \in \mathbb{N}^\star, a \geq 2$ có phân tích thừa số nguyên tố $a = \prod_{i=1}^n p_i^{a_i} = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n}$ với p_i là số nguyên tố, $a_i \in \mathbb{N}^\star$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. (a) Viết ngẫu nhiên a thành tích của 2 số: $a = bc$. Tính xác suất để b, c là độ dài 2 cạnh của 1 hình chữ nhật, xác suất để b, c cùng là độ dài cạnh của 1 hình vuông nếu: (i) $b, c \in \mathbb{N}$. (ii) $b, c \in \mathbb{Z}$. (b) Lấy ngẫu nhiên 2 số $b, c \in \text{U}(a)$. Tính xác suất để phân số $\frac{b}{c}$: (i) tối giản. (ii) không tối giản.*

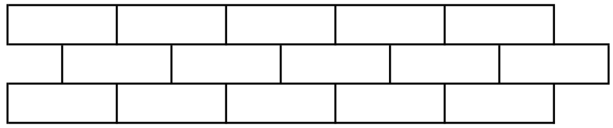
Definition 1 (Prime-counting function)**.** *The* prime-counting function *is the function counting the number of prime numbers less than or equal to some real number x, denoted by $\pi(x) \coloneqq |\{p \in \mathbb{N}^\star | p \text{ is a prime},\ p \leq x\}|$.*

Định nghĩa 1 (Hàm đếm số số nguyên tố)**.** Hàm đếm số số nguyên tố *là hàm đếm số số nguyên tố nhỏ hơn hoặc bằng $x \in \mathbb{R}$, ký hiệu là $\pi(x) \coloneqq |\{p \in \mathbb{N}^\star | p \text{ là số nguyên tố},\ p \leq x\}|$.*

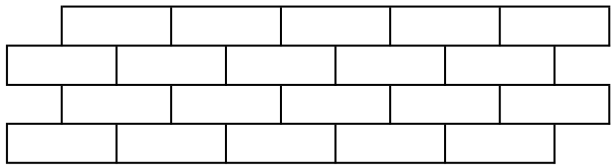
9 (Prime, composite – số nguyên tố, hợp số)**.** *Cho $m, n, k \in \mathbb{N}^\star$. Đặt $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ là tập hợp n số nguyên dương đầu tiên, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. (a) Lấy m số từ A_n. Tính xác suất để m số này cùng chẵn, cùng lẻ, có ít nhất 1 số chẵn, có ít nhất 1 số lẻ, có đúng k số chẵn, có đúng k số lẻ, có ít nhất k số chẵn, có ít nhất k số lẻ. (b) Lấy m số phân biệt từ A_n. Tính xác suất để m số này đều là số nguyên tố, đều là hợp số, có đúng k số nguyên tố, có đúng k hợp số, có ít nhất 1 số nguyên tố, có ít nhất 1 hợp số, có ít nhất k số nguyên tố, có ít nhất k hợp số. (c) Viết chương trình* Pascal, Python C/C++ *để mô phỏng việc tính các xác suất đó.*

10 (Odd, even – chẵn, lẻ)**.** *Cho $a, b \in \mathbb{Z}, a < b$, $n, k \in \mathbb{N}^\star, n \geq 2, k \leq n$. Đặt $A = [a, b] \cap \mathbb{Z} = \{a, a+1, a+2, \ldots, b-1, b\}$. (a) Lấy 2 số từ tập A. Xét 2 trường hợp phân biệt, không nhất thiết phân biệt. Tính xác suất để 2 số này cùng tính chẵn lẻ, khác tính chẵn lẻ. (b) Lấy n số từ tập A. Tính xác suất để n số này đều chẵn, đều lẻ, cùng tính chẵn lẻ, có đúng k số chẵn, k số lẻ, có ít nhất k số chẵn, k số lẻ. (c) Viết chương trình* Pascal, Python C/C++ *để mô phỏng việc tính các xác suất đó.*

11 (VMC2024B4)**.** *(a) Đếm số cách chọn ra 3 viên gạch, mỗi viên từ 1 hàng trong 3×5 viên gạch xếp xen kẽ, sao cho không có 2 viên gạch nào được lấy ra nằm kề nhau (2 viên gạch được gọi là kề nhau nếu có chung 1 phần của 1 cạnh).*



(b) Đếm số cách chọn ra 4 viên gạch, mỗi viên từ 1 hàng trong 4×5 viên gạch xếp xen kẽ, sao cho không có 2 viên gạch nào được lấy ra nằm kề nhau.



(c) Cho $m, n \in \mathbb{N}^\star$. Đếm số cách chọn ra m viên gạch, mỗi viên từ 1 hàng trong $m \times n$ viên gạch xếp xen kẽ, sao cho không có 2 viên gạch nào được lấy ra nằm kề nhau. (d) Cho $m, n, k \in \mathbb{N}^\star$. Đếm số cách chọn ra k viên gạch, không nhất thiết mỗi viên từ 1 hàng trong $m \times n$ viên gạch xếp xen kẽ, sao cho không có 2 viên gạch nào được lấy ra nằm kề nhau. (e*) Mở rộng cho trường hợp $m \times n$ với số gạch mỗi hàng có thể khác nhau, cụ thể là hàng i chứa $a_i \in \mathbb{N}^\star$ viên gạch, $\forall i = 1, \ldots, m$ với 2 trường hợp: (i) Mỗi viên từ 1 hàng. (ii) Lấy $k \in \mathbb{N}^\star$ viên gạch, mỗi hàng có thể lấy nhiều viên.

Nhận xét 1 (Left-right symmetry – Đối xứng trái phải)**.** *Nếu số viên gạch của mỗi hàng bằng nhau & được sắp xen kẽ như (a) & (b), thì thứ tự viên gạch đầu tiên từ bên trái của mỗi hàng lồi ra hay thụt vào không quan trọng, vì có thể lấy đối xứng gương trái–phải để chuyển đổi 2 trường hợp đó. Cũng chú ý đến tính đối xứng trên–dưới (top-bottom symmetry).*

Chứng minh. Số cách chọn gạch từ 3 hàng, mỗi hàng n viên gạch: $(n-1)(n-2)^2 + (n-1)^2 = (n-1)(n^2 - 3n + 3)$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $n \geq 2$. Số cách chọn gạch từ 4 hàng, mỗi hàng $n \in \mathbb{N}^\star$ viên gạch: $(n^2 - 3n + 3)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $n \geq 2$. □

- C++ codes:
  - (DKAK): https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/VMC/C++/brick_DPAK.cpp.
  - (NLDK): https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/VMC/C++/brick_NLDK.cpp.

1.5 Hệ số nhị thức & đa thức

1.6 Phân vùng số nguyên & nguyên tắc loại suy

2 Graph Theory – Lý Thuyết Đồ Thị

Resources – Tài nguyên.

1. [AD10]. Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu. *Problems From the Book*. Chap. 6: *Some Classical Problems in Extremal Graph Theory – Vài Bài Toán Cổ Điển trong Lý Thuyết Đồ Thị Cực Trị*, pp. 119–136.

Denote by $d(V), C(V)$ the number, & the set of vertices adjacent to a vertex V, respectively. A graph is said to have a *complete k-subgraph* if there are k vertices any 2 of which are connected. A graph is said to be *k-free* if it does not contain a complete k-subgraph.

Lemma 1 ([AD10], Example 1, p. 121, Zarankiewicz's lemma)**.** *If G is a k-free graph, then there exists a vertex having degree at most $\left\lfloor \frac{k-2}{k-1} n \right\rfloor$.*

Zarankiewicz's lemma is the main step in the proof of Turan's theorem – a famous classical result about k-free graphs.

Theorem 1 ([AD10], Example 2, p. 123, Turan's theorem)**.** *The greatest number of edges of a k-free graph with n vertices is*

$$\frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2 - r^2}{2} + \binom{r}{2},$$

where r is the remainder left by n when divided to $k-1$.

Định nghĩa 2 ([HT24], Def. 7.2, p. 249, Đỉnh cô lập, lá)**.** *Cho G là 1 đồ thị. Đỉnh có bậc 0 được gọi là* đỉnh cô lập*, đỉnh có bậc 1 được gọi là* lá*.*

Định nghĩa 3 ([HT24], Def. 7.3, p. 249, Đồ thị chính quy)**.** *1 đồ thị được gọi là* chính quy bậc d *hoặc* d-chính quy *nếu mỗi đỉnh có bậc bằng $d \in \mathbb{N}$.*

Định nghĩa 4 ([HT24], Def. 7.3, p. 249, Đỉnh thị khối)**.** *1 đồ thị được gọi là* đồ thị bậc 3 *nếu nó chính quy bậc* 3*, i.e., mỗi đỉnh đồ thị có bậc bằng* 3*.*

Goal 1 (Tính khả dĩ của dãy bậc của đồ thị)**.** *Tìm vài dấu hiệu hoặc vài điều kiện cần & đủ để có thể quyết định liệu 1 dãy số nguyên dương* $(a_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{N}$ *cho trươc có thể thể là dãy bậc của đồ thị mà không phải vẽ biểu đồ.*

Định nghĩa 5 ([HT24], Def. 7.6, p. 249, Dãy bậc của đồ thị, chuỗi đồ thị)**.** Chuỗi bậc *của đồ thị là dãy bậc của các đỉnh của nó theo thứ tự không tăng. 1 dãy số nguyên không âm không tăng được gọi là* đồ thị *nếu tồn tại 1 đồ thị có chuỗi bậc chính xác là dãy số nguyên không âm đó.*

Ví dụ 1 (Sequence $1, 1, \ldots, 1$)**.** $1, 1, 1$ *không phải là 1 dãy đồ thị vì không thể xây dựng 1 đồ thị có 3 đỉnh sao cho tất cả 3 bậc là* 1*. Nhưng* $1, 1$ *&* $1, 1, 1, 1$*, hay nói chung các dãy chỉ toàn số* 1 *với độ dài là 1 số chẵn, i.e.,* $\{1\}_{i=1}^{2n}$*,* $\forall n \in \mathbb{N}^\star$*, là các dãy đồ thị, nhưng bất kỳ dãy chỉ toàn số* 1 *với độ dài là 1 số lẻ, i.e.,* $\{1\}_{i=1}^{2n+1}$*,* $\forall n \in \mathbb{N}^\star$*, thì không phải là 1 dãy đồ thị (why?)*

Định lý 1 (Euler's, [HT24], Thm. 7.9, p. 250)**.** *Cho* $G = (V, E)$ *là đồ thị tổng quát với* $d_1, \ldots, d_{|V|} \in \mathbb{N}$ *là bậc của các đỉnh. Khi đó* $\sum_{i=1}^{|V|} d_i = d_1 + d_2 + \cdots + d_{|V|} = 2|E|$*. Nói riêng, số đỉnh của* G *có bậc lẻ là số chẵn.*

Briefly:

$$d_1, \ldots, d_{|V|} \text{ are degrees of vertices of a graph } G = (V, E) \Rightarrow \sum_{i=1}^{|V|} d_i = 2|E| \Rightarrow |\{i; d_i \not\vdots\, 2\}| \vdots\, 2.$$

Chú ý chiều ngược lại chưa chắc đúng:

Ví dụ 2. *Dãy số* $7, 5, 5, 4, 3, 2, 2, 0$ *không mâu thuẫn với Định lý 1 nhưng nó không phải là đồ thị (why?).*

Question 1. *Có thể suy ra được những hệ quả nào từ đẳng thức* $\sum_{i=1}^{|V|} d_i = 2|E|$*?*

12. *Cho* $G = (V, E)$ *là đồ thị tổng quát với* $d_1, \ldots, d_p \in \mathbb{N}$ *là bậc của các đỉnh. Chứng minh: (i) Bậc cao nhất* $d_{\max} \coloneqq \max_{1 \le i \le p} d_i$ *thỏa* $d_{\max} \ge \dfrac{2|E|}{|V|}$*. (ii)*

3 Posets, Kết Nối, Lưới Boolean

4 Miscellaneous

Tài liệu

[AD10] Titu Andreescu and Gabriel Dospinescu. *Problems from the Book*. 2nd. XYZ Press, 2010, p. 571. ISBN: 978-0979926907.

[HT24] Bùi Việt Hà and Vương Trọng Thanh. *Các Vấn Đề Trong Tổ Hợp*. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2024, p. 429.