Combinatorics & Graph Theory Homework

Class: Combinatorics & Graph Theory

Lecturer: M.Sc. Nguyễn Quản Bá Hồng

Semester: Summer 2025

Student Name: Nguyễn Ngọc Thạch

Student ID: 2201700077

University of Management and Technology Ho Chi Minh City

Ngày 22 tháng 5 năm 2025

1 Basic Combinatorics – Tổ Hợp Cơ Bản

1.1 Problems on counting

Bài toán 1 (+0.5) *Cho $n \in N^\star$, $k \in N$, $0 \le k \le n$. Viết chương trình* C/C++, Pascal, Python *để tính & cho biết giá trị nhỏ nhất của n gặp lỗi overflow: (a) $P_n = n!$. (b) A_n^k. (c) C_n^k. (d) Số Catalan thứ n.*

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
// Tính và phát hiện overflow khi nhân hai số unsigned long long
bool safeMul(unsigned long long a, unsigned long long b, unsigned long long &res) {
    if (b != 0 && a > ULLONG_MAX / b) return false;
    res = a * b;
    return true;
}

// (a) Tính n! với kiểm tra overflow
bool factorial(unsigned int n, unsigned long long &res) {
    res = 1;
    for (unsigned int i = 1; i <= n; ++i) {
        if (!safeMul(res, i, res)) return false;
    }
    return true;
}

// (b) Tính A_n^k = n! / (n-k)! bằng nhân dãy k số từ n-k+1 đến n
bool perm(unsigned int n, unsigned int k, unsigned long long &res) {
    res = 1;
    for (unsigned int i = n - k + 1; i <= n; ++i) {
        if (!safeMul(res, i, res)) return false;
    }
    return true;
}

// (c) Tính C_n^k = A_n^k / k! bằng công thức cộng dồn
bool comb(unsigned int n, unsigned int k, unsigned long long &res) {
    if (k > n) { res = 0; return true; }
    if (k > n - k) k = n - k;
    res = 1;
    for (unsigned int i = 1; i <= k; ++i) {
        // res = res * (n - k + i) / i
        unsigned long long num;
        if (!safeMul(res, n - k + i, num)) return false;
        res = num / i;
    }
    return true;
}

// (d) Tính số Catalan thứ n: C_n = C_{n-1} * 2*(2n-1)/(n+1)
bool catalan(unsigned int n, unsigned long long &res) {
    res = 1; // C_0 = 1
    for (unsigned int i = 1; i <= n; ++i) {
        unsigned long long mul = 2ULL * (2ULL * i - 1ULL);
        unsigned long long num;
        if (!safeMul(res, mul, num)) return false;
        unsigned long long den = i + 1;
        res = num / den;
    }
    return true;
}
```

```
int main() {
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(nullptr);

    unsigned long long value;
    unsigned int k;

    cout << "Nhap k (0 <= k <= n): ";
    cin >> k;

    // (a) Tìm n! overflow
    for (unsigned int n = 1; ; ++n) {
        if (!factorial(n, value)) {
            cout << "(a) n! bi overflow tai n = " << n << "\n";
            break;
        }
    }

    // (b) Tìm A_n^k overflow
    if (k == 0) {
        cout << "(b) A_n^0 luon bang 1, khong bao gio overflow\n";
    } else {
        for (unsigned int n = k; ; ++n) {
            if (!perm(n, k, value)) {
                cout << "(b) A_" << n << "^" << k << " bi overflow tai n = " << n << "\n";
                break;
            }
        }
    }

    // (c) Tìm C_n^k overflow
    for (unsigned int n = 0; ; ++n) {
        if (!comb(n, k, value)) {
            cout << "(c) C_" << n << "^" << k << " bi overflow tai n = " << n << "\n";
            break;
        }
    }

    // (d) Tìm Catalan_n overflow
    for (unsigned int n = 1; ; ++n) {
        if (!catalan(n, value)) {
            cout << "(d) Catalan_" << n << " bi overflow tai n = " << n << "\n";
            break;
        }
    }

    return 0;
}
```

1.2 Euler candy problem – Bài toán chia kẹo Euler

Bài toán 2 (Euler candy problem – Bài toán chia kẹo Euler) *Cho $m, n \in N^\star$. Xét phương trình nghiệm nguyên*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = m. \tag{1}$$

(a) Đếm số nghiệm nguyên dương của phương trình. (b) Đếm số nghiệm nguyên không âm của phương trình. (c) Đếm số nghiệm nguyên của phương trình

$$\sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i = p \ s.t. \ \begin{cases} x_i \geq 1, \ \forall i \in [m], \\ y_i \geq 0, \ \forall i \in [n], \end{cases}$$

(d) Đếm số nghiệm nguyên của phương trình

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = m \ s.t. \ x_i \geq m_i, \ \forall i \in [n].$$

(e) Đếm số nghiệm nguyên của phương trình

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = m \ s.t. \ m_i \leq x_i \leq M_i, \ \forall i \in [n].$$

Đếm nghiệm bằng phương pháp "stars and bars" và bao hàm–loại trừ
Gọi $m, n \in N^\star$. Ta xét từng mục:

(a) Nghiệm nguyên dương của $\sum_{i=1}^{n} x_i = m$.
Khi $x_i \geq 1$, đặt $x_i' = x_i - 1 \geq 0$. Khi đó

$$\sum_{i=1}^{n} x_i' \ = \ m - n,$$

với $x_i' \geq 0$. Số nghiệm không âm của tổng này là

$$\binom{(m-n)+(n)-1}{n-1} = \binom{m-1}{n-1}.$$

(b) Nghiệm nguyên không âm của $\sum_{i=1}^{n} x_i = m$.
Khi $x_i \geq 0$, ta áp dụng công thức stars and bars trực tiếp:

$$\binom{m+n-1}{n-1}.$$

(c) Nghiệm của

$$\sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{j=1}^{n} y_j = p \quad \text{với } x_i \geq 1, \ y_j \geq 0.$$

Đặt $x_i' = x_i - 1 \geq 0$. Khi đó

$$\sum_{i=1}^{m} x_i' + \sum_{j=1}^{n} y_j = p - m,$$

tổng có $m + n$ biến không âm. Do đó số nghiệm là

$$\binom{(p-m)+(m+n)-1}{(m+n)-1} = \binom{p+n-1}{m+n-1}.$$

(d) Nghiệm của

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = m \quad \text{với } x_i \geq m_i \ (\forall i).$$

Đặt $x_i' = x_i - m_i \geq 0$. Khi đó $\sum x_i' = m - \sum_{i=1}^{n} m_i =: M'$. Số nghiệm không âm là

$$\binom{M'+n-1}{n-1} = \binom{m - \sum_i m_i + n - 1}{n-1}.$$

(e) Nghiệm của

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = m \quad \text{với } m_i \leq x_i \leq M_i \ (\forall i).$$

Đặt $x_i' = x_i - m_i \geq 0$ và $U_i = M_i - m_i$. Khi đó $\sum x_i' = m - \sum_i m_i =: M'$ với $0 \leq x_i' \leq U_i$. Áp dụng bao hàm–loại trừ, số nghiệm là

$$\sum_{S \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|S|} \binom{M' - \sum_{i \in S}(U_i + 1) + n - 1}{n-1},$$

với quy ước $\binom{a}{b} = 0$ nếu $a < b$ hoặc $b < 0$.

1.3 Method of mathematical induction & recurrence – Phương pháp quy nạp toán học & truy hồi/đệ quy

Bài toán 3 *Chứng minh: (a)* (Tổng của n số nguyên dương đầu tiên, n số nguyên lẻ đầu tiên, n số nguyên dương chẵn đầu tiên) $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2$, $\sum_{i=1}^n 2i = n(n+1)$, $\forall n \in N^\star$. *(b)* (Tổng bình phương của n số nguyên dương đầu tiên, n số nguyên lẻ đầu tiên, n số nguyên dương chẵn đầu tiên) $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{i=1}(2i-1)^2, \sum_{i=1}^n (2i)^2$, $\forall n \in N^\star$. *(c)* $\sum_{i=1}^n i^3 = (\sum_{i=1}^n i)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $\forall n \in N^\star$. *(d) Tìm cách tính* $S(n,k) \sum_{i=1}^n i^k$, $\forall n,k \in N^\star$. *(e) Tính* , $\forall n \in N^\star$. *(f) Tính* $\sum_{i=1}(2i-1)^3, \sum_{i=1}^n (2i)^3$, $\forall n \in N^\star$. *(g)* $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$, $\forall n \in N^\star$. *(h)* $\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}} = \sqrt{n+1} - 1$, $\forall n \in N^\star$. *(i)* $\prod_{i=1}^n \frac{i^3-1}{i^3+1} = \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$, $\forall n \in N^\star$.

(a) Chứng minh bằng quy nạp cho ba công thức:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2, \quad \sum_{i=1}^n 2i = n(n+1).$$

Cơ sở: Với $n = 1$,

$$\sum_{i=1}^1 i = 1 = \frac{1\cdot 2}{2}, \quad \sum_{i=1}^1 (2i-1) = 1 = 1^2, \quad \sum_{i=1}^1 2i = 2 = 1\cdot 2.$$

Giả thiết quy nạp: Giả sử với $n = k$ đã có

$$\sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^k (2i-1) = k^2, \quad \sum_{i=1}^k 2i = k(k+1).$$

Bước chứng minh: Với $n = k+1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i &= \sum_{i=1}^k i + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2},\\
\sum_{i=1}^{k+1} (2i-1) &= \sum_{i=1}^k (2i-1) + [2(k+1)-1] = k^2 + (2k+1) = (k+1)^2,\\
\sum_{i=1}^{k+1} 2i &= \sum_{i=1}^k 2i + 2(k+1) = k(k+1) + 2(k+1) = (k+1)(k+2).
\end{aligned}$$

Do đó ba công thức đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp, chúng đúng với mọi $n \in N^\star$.
(b) Sử dụng hai công thức đã chứng minh ở phần (a) cùng tổng bình phương, ta có:
(i) Tổng bình phương n số nguyên dương đầu tiên:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Cơ sở: Với $n = 1$,

$$\sum_{i=1}^1 i^2 = 1 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$$

Giả thiết quy nạp: Giả sử với một số $k \in N^\star$, công thức sau đúng:

$$\sum_{i=1}^k i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Bước chứng minh: Với $n = k+1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \sum_{i=1}^k i^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k(2k+1)+6(k+1))}{6}\\
&= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}
\end{aligned}$$

(ii) Tổng bình phương n số nguyên lẻ đầu tiên:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = \sum_{i=1}^{n}(4i^2-4i+1) = 4\sum_{i=1}^{n} i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} i + n$$
$$= 4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

(iii) Tổng bình phương n số nguyên dương chẵn đầu tiên:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i)^2 = 4\sum_{i=1}^{n} i^2 = 4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}.$$

(c) Áp dụng kết quả phần (a), ta có

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \Big(\sum_{i=1}^{n} i\Big)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

(d)

$$S(n,k)\ \sum_{i=1}^{n} i^k,$$

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main() {
    long long n;
    int k;
    cin >> n >> k;
    unsigned long long S = 0;
    for (long long i = 1; i <= n; ++i) {
        unsigned long long term = 1;
        for (int j = 0; j < k; ++j) {
            term *= i;      // tính i^k
        }
        S += term;          // cộng vào tổng
    }
    cout << S << "\n";
    return 0;
}
```

(f) Tính

$$\sum_{i=1}(2i-1)^3, \sum_{i=1}^{n}(2i)^3, \forall n \in N^\star$$

Sử dụng kết quả đã có:

$$(2i-1)^3 = 8i^3 - 12i^2 + 6i - 1,$$

và $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$. Khi đó

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3 = 8\sum i^3 - 12\sum i^2 + 6\sum i - \sum 1 = 2n^2(n+1)^2 - 2n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1) - n = n^2(2n^2-1).$$

$$\sum_{i=1}^{n}(2i)^3 = 8\sum_{i=1}^{n} i^3 = 8\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 2\,n^2(n+1)^2.$$

(g) Tính

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Ta viết phân thức thành hiệu:

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}.$$

Do đó

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\Big) = \big(1 - \tfrac{1}{2}\big) + \big(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\big) + \cdots + \big(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}\big).$$

Các hạng trung gian hầu hết triệt tiêu nhau, chỉ còn lại

$$1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

(h) Tính

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}} = \sqrt{n+1} - 1.$$

Với mỗi i, ta nhân tử liền kề:

$$\frac{1}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}} = \frac{\sqrt{i+1} - \sqrt{i}}{(\sqrt{i+1} - \sqrt{i})(\sqrt{i} + \sqrt{i+1})} = \sqrt{i+1} - \sqrt{i}.$$

Do đó

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}} = \sum_{i=1}^{n} (\sqrt{i+1} - \sqrt{i}) = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Các hạng trung gian triệt tiêu, chỉ còn

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{1} = \sqrt{n+1} - 1.$$

1.4 Hoán vị & tổ hợp

Bài toán 4 (Simultaneous coin toss – Gieo các đồng xu đồng thời) *Cho $n, k \in N^\star$, $k \le n$. Tung đồng thời n đồng xu đồng chất ngẫu nhiên. Tính xác suất lý thuyết của sự kiện: (a) Toàn bộ đều là mặt sấp (ngửa). (b) Có đúng k lần xuất hiện mặt sấp (ngửa). (c) Có ít nhất k lần xuất hiện mặt sấp (ngửa).*

(a) Toàn bộ đều là mặt sấp (hoặc ngửa):
Vì mỗi đồng xu có 2 khả năng, nên số kết quả là 2^n. Chỉ có 1 kết quả toàn sấp (hoặc toàn ngửa), nên xác suất là:

$$P = \frac{1}{2^n}.$$

(b) Có đúng k lần xuất hiện mặt sấp (hoặc ngửa):
Số cách chọn k đồng xu trong n để xuất hiện mặt sấp là $\binom{n}{k}$. Xác suất là:

$$P = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}.$$

(c) Có ít nhất k lần xuất hiện mặt sấp (hoặc ngửa):
Tổng số trường hợp có từ k đến n mặt sấp là:

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i},$$

nên xác suất là:

$$P = \frac{1}{2^n} \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i}.$$

Bài toán 5 (Consecutive 2 dice rolls – Gieo 2 xúc xắc lần lượt) *Gieo lần lượt 2 con xúc xắc. Tính xác suất lý thuyết của sự kiện: (a) 2 mặt có cùng số chấm, khác số chấm. (b) Số chấm 2 mặt có cùng tính chẵn lẻ, khác tính chẵn lẻ. (c) Số chấm 2 mặt đều là số nguyên tố, đều là hợp số, có ít nhất 1 số nguyên tố, có ít nhất 1 hợp số. (d) Số chấm 1 mặt là ước (bội) của số chấm trên mặt còn lại. (e) Tổng số chấm 2 mặt bằng $n \in N$.*

(a) Có 6 trường hợp 2 mặt cùng số chấm: $(1,1), \ldots, (6,6) \Rightarrow P = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.
Tổng số cặp khác số chấm là $36 - 6 = 30 \Rightarrow P = \dfrac{30}{36} = \dfrac{5}{6}$.

(b) Các số chẵn: $2, 4, 6$; số lẻ: $1, 3, 5$.
Số cặp cùng tính chẵn lẻ: $3 \times 3 + 3 \times 3 = 18 \Rightarrow P = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.
Số cặp khác tính chẵn lẻ: $36 - 18 = 18 \Rightarrow P = \frac{1}{2}$.

(c) Các số nguyên tố trên mặt xúc xắc: $2, 3, 5$ (3 số).
Các hợp số trên mặt xúc xắc: $4, 6$ (2 số).
Số 1 không phải là nguyên tố cũng không phải là hợp số.
Các cặp không chứa số nguyên tố nào gồm chỉ các số thuộc tập $\{1, 4, 6\}$.
Ta liệt kê các cặp không chứa số nguyên tố:

$$(1, 1), (1, 4), (1, 6), (4, 1), (4, 4), (4, 6), (6, 1), (6, 4), (6, 6)$$

Có 9 cặp không chứa số nguyên tố $\Rightarrow$ số cặp chứa ít nhất một số nguyên tố là $36 - 9 = 27$.
$\Rightarrow P = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$.
Các cặp không chứa hợp số gồm chỉ các số thuộc tập $\{1, 2, 3, 5\}$
Ta liệt kê các cặp chỉ chứa số trong tập này:

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 5)$$

Có 16 cặp không chứa hợp số $\Rightarrow$ số cặp chứa ít nhất một hợp số là $36 - 16 = 20$.
$\Rightarrow P = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$.

(d) Xét các cặp (a, b) mà a chia hết cho b hoặc b chia hết cho a:
Các cặp thỏa: $(1, x)$ và $(x, 1)$ với $x = 1..6$: 11 cặp (trừ $(1, 1)$ lặp).
Thêm: $(2, 4), (4, 2), (2, 6), (6, 2), (3, 6), (6, 3), (3, 3), (2, 2), (4, 4), (6, 6) \Rightarrow$ tổng 17 cặp.
$\Rightarrow P = \frac{17}{36}$.

(e) Tổng các cặp từ 2 đến 12. Với $n \in [2, 12]$:

$$P(n) = \frac{\#\text{cặp } (a, b) \in [1, 6]^2 \text{ sao cho } a + b = n}{36}.$$

Cụ thể:

$$P(2) = \frac{1}{36}, \quad P(3) = \frac{2}{36}, \quad P(4) = \frac{3}{36},$$
$$P(5) = \frac{4}{36}, \quad P(6) = \frac{5}{36}, \quad P(7) = \frac{6}{36},$$
$$P(8) = \frac{5}{36}, \quad P(9) = \frac{4}{36}, \quad P(10) = \frac{3}{36},$$
$$P(11) = \frac{2}{36}, \quad P(12) = \frac{1}{36}.$$

Bài toán 6 (Simultaneous 2 dice rolls – Gieo 2 xúc xắc đồng thời) *Gieo đồng thời 2 con xúc xắc. Tính xác suất lý thuyết của sự kiện: (a) 2 mặt có cùng số chấm, khác số chấm. (b) Số chấm 2 mặt có cùng tính chẵn lẻ, khác tính chẵn lẻ. (c) Số chấm 2 mặt đều là số nguyên tố, đều là hợp số, có ít nhất 1 số nguyên tố, có ít nhất 1 hợp số. (d) Số chấm 1 mặt là ước (bội) của số chấm trên mặt còn lại. (e) Tổng số chấm 2 mặt bằng* $n \in N$.

Tổng số khả năng: $6 \times 6 = 36$.

(a)
- Cùng số chấm (cặp (a, a)): 6 trường hợp $\Rightarrow P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
- Khác số chấm: $36 - 6 = 30$ trường hợp $\Rightarrow P = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$.

(b)
- Số chấm chẵn: $\{2, 4, 6\}$; lẻ: $\{1, 3, 5\}$.
- Cùng tính chẵn lẻ: (chẵn,chẵn) và (lẻ,lẻ).
  * Chẵn–chẵn: $3 \times 3 = 9$
  * Lẻ–lẻ: $3 \times 3 = 9$

$\Rightarrow$ Tổng cùng tính: $9 + 9 = 18 \Rightarrow P = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

- Khác tính: $36 - 18 = 18 \Rightarrow P = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

(c)
- Nguyên tố: $\{2, 3, 5\}$ (3 số), hợp số: $\{4, 6\}$ (2 số), 1 không xét là nguyên tố hay hợp số.
- Đều nguyên tố: $3 \times 3 = 9 \Rightarrow P = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.
- Đều hợp số: $2 \times 2 = 4 \Rightarrow P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.
- Ít nhất 1 nguyên tố: loại các cặp chỉ chứa số không nguyên tố $\{1, 4, 6\}$:

  Cặp không nguyên tố: $(1, 1), (1, 4), (1, 6), (4, 1), (4, 4), (4, 6), (6, 1), (6, 4), (6, 6) \Rightarrow 9$.

  $\Rightarrow P = \frac{36 - 9}{36} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$.
- Ít nhất 1 hợp số: loại các cặp chỉ từ $\{1, 2, 3, 5\}$ (không có hợp số):

  Cặp không hợp số: $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5$

  $\Rightarrow P = \frac{36 - 16}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$.

(d) Ta đếm số cặp (a, b) sao cho $a \mid b$ hoặc $b \mid a$:

$$
\begin{aligned}
&(1, x) : x = 1 \to 6 \Rightarrow 6 \\
&(x, 1) : x = 2 \to 6 \Rightarrow 5 \quad \text{(trừ trùng (1,1))} \\
&(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (6, 2) : 5 \\
&(3, 3), (3, 6), (6, 3) : 3 \\
&(4, 4), (6, 6) : 2 \\
&(5, 5) : 1
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Tổng: $6 + 5 + 5 + 3 + 2 + 1 = 22$.

$\Rightarrow P = \frac{22}{36} = \frac{11}{18}$.

(e) Tổng có thể từ 2 đến 12.
Với mỗi $n \in [2, 12]$, số cách:

$$
\begin{aligned}
&n = 2 \Rightarrow 1 \text{ cách} : (1, 1) \\
&n = 3 \Rightarrow 2 : (1, 2), (2, 1) \\
&n = 4 \Rightarrow 3 : (1, 3), (2, 2), (3, 1) \\
&n = 5 \Rightarrow 4 \\
&\ldots \\
&n = 7 \Rightarrow 6 \\
&n = 8 \Rightarrow 5 \\
&\ldots \\
&n = 12 \Rightarrow 1
\end{aligned}
$$

Cụ thể, số cách là:

Tổng	Số cách
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6
8	5
9	4
10	3
11	2
12	1

Xác suất: $\frac{\text{số cách}}{36}$ với mỗi tổng n.

Bài toán 7 (Consecutive n dice rolls – Gieo n xúc xắc lần lượt) *Gieo lần lượt $n \in N^\star$ con xúc xắc. Tính xác suất lý thuyết của sự kiện: (a) n mặt có cùng số chấm. (b) n mặt có khác số chấm. (c) Số chấm n mặt có cùng tính chẵn lẻ. (d) Số chấm 1 mặt là ước (bội) của số chấm trên các mặt còn lại. (e) Tổng số chấm n mặt bằng $a \in N$.*

Gọi Ω là không gian mẫu gồm tất cả bộ số có n phần tử, mỗi phần tử từ 1 đến 6, thứ tự quan trọng (vì gieo lần lượt). Khi đó $|\Omega| = 6^n$.

(a) n mặt có cùng số chấm: dạng $(x, x, \ldots, x)$ với $x \in \{1, \ldots, 6\}$.
$\Rightarrow$ Có 6 bộ. Vậy:

$$P = \frac{6}{6^n} = \frac{1}{6^{n-1}}.$$

(b) n mặt có khác số chấm: chọn n số khác nhau từ $\{1, \ldots, 6\}$.
Nếu $n > 6$, không thể chọn n số khác nhau $\Rightarrow P = 0$.
Nếu $n \le 6$, số hoán vị các số khác nhau là $P(6, n) = 6 \cdot 5 \cdots (6 - n + 1)$.
$\Rightarrow P = \dfrac{P(6,n)}{6^n}$.

(c) Số chấm n mặt có cùng tính chẵn lẻ.
Chẵn: $\{2, 4, 6\}$ (3 số), lẻ: $\{1, 3, 5\}$ (3 số).
Có 2 lựa chọn: tất cả là chẵn hoặc tất cả là lẻ. Với mỗi loại, mỗi mặt có 3 khả năng:

$$P = \frac{2 \cdot 3^n}{6^n} = \frac{1}{3^{n-1}}.$$

Bài toán 8 (Simultaneous n dice rolls – Gieo n xúc xắc đồng thời) *Gieo đồng thời $n \in N^\star$ con xúc xắc. Tính xác suất lý thuyết của sự kiện: (a) n mặt có cùng số chấm. (b) n mặt có khác số chấm. (c) Số chấm n mặt có cùng tính chẵn lẻ. (d) Số chấm 1 mặt là ước (bội) của số chấm trên các mặt còn lại. (e) Tổng số chấm n mặt bằng $a \in N$.*

Gọi Ω là không gian mẫu gồm tất cả bộ số có n phần tử, mỗi phần tử từ 1 đến 6. Khi đó $|\Omega| = 6^n$.

(a) n mặt có cùng số chấm: tất cả các mặt là $(x, x, \ldots, x)$ với $x \in \{1, \ldots, 6\} \Rightarrow 6$ trường hợp.
$\Rightarrow P = \dfrac{6}{6^n} = \dfrac{1}{6^{n-1}}$.

(b) n mặt có khác số chấm: chọn n số khác nhau từ $\{1, \ldots, 6\}$.
Nếu $n > 6$, không thể chọn n số khác nhau $\Rightarrow P = 0$.
Nếu $n \le 6$, số hoán vị các số khác nhau là $P(6, n) = 6 \cdot 5 \cdots (6 - n + 1)$.
$\Rightarrow P = \dfrac{P(6,n)}{6^n}$.

(c) Các số đều chẵn hoặc đều lẻ.
Số chẵn: $\{2, 4, 6\}$ (3 số), lẻ: $\{1, 3, 5\}$ (3 số).
Số bộ có cùng tính chẵn lẻ: chọn 1 trong 2 loại, sau đó chọn mỗi mặt là 1 trong 3 giá trị đó:
$\Rightarrow$ Tổng số tổ hợp cùng chẵn lẻ: $2 \cdot 3^n \Rightarrow P = \dfrac{2 \cdot 3^n}{6^n} = \dfrac{1}{3^{n-1}}$.

2 Nhị thức Newton & đa thức

2.1 Combinatorial identities – Đẳng thức tổ hợp

2.1.1 Pascal's rule – Quy tắc Pascal

Bài toán 9 *Chứng minh $\sum_{i=1}^n iC_n^i = n2^{n-1}$, $\forall n \in N^\star$ bằng 4 cách: (a) Sử dụng phương pháp quy nạp toán học. (b) Biến đổi số hạng tổng quát nhờ đẳng thức Pascal. (c) Xét khai triển $(1+x)^n$ rồi lấy đạo hàm 2 vế. (d) Lý luận tổ hợp.*

Ta sẽ chứng minh đẳng thức $\sum_{i=1}^{n} i \cdot \binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}$ theo 4 cách.

(a) Quy nạp toán học.

Cơ sở: Với $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{1} i \cdot \binom{1}{i} = 1 \cdot \binom{1}{1} = 1 = 1 \cdot 2^0.$$

Mệnh đề đúng với $n = 1$.

Giả thiết quy nạp: Giả sử đúng với $n = k$, tức là:

$$\sum_{i=1}^{k} i \cdot \binom{k}{i} = k \cdot 2^{k-1}.$$

Bước quy nạp: Xét $n = k + 1$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i \cdot \binom{k+1}{i} = \sum_{i=1}^{k+1} i \cdot \left[\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}\right] = \sum_{i=1}^{k+1} i \cdot \binom{k}{i} + \sum_{i=1}^{k+1} i \cdot \binom{k}{i-1}.$$

Đổi chỉ số tổng thứ hai: đặt $j = i - 1$, ta được:

$$= \sum_{i=1}^{k} i \cdot \binom{k}{i} + \sum_{j=0}^{k} (j+1) \cdot \binom{k}{j} = \sum_{i=1}^{k} i \cdot \binom{k}{i} + \sum_{j=0}^{k} j \cdot \binom{k}{j} + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}.$$

Sử dụng giả thiết quy nạp và các tổng quen thuộc:

$$= k \cdot 2^{k-1} + k \cdot 2^{k-1} + 2^k = 2k \cdot 2^{k-1} + 2^k = (k+1) \cdot 2^k.$$

Vậy mệnh đề đúng với $n = k + 1$, suy ra đúng với mọi n.

(b) Biến đổi tổng:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot \binom{n}{i} = \sum_{i=1}^{n} n \cdot \binom{n-1}{i-1} \quad (\text{do } i \cdot \binom{n}{i} = n \cdot \binom{n-1}{i-1}).$$

$$= n \cdot \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} = n \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = n \cdot 2^{n-1}.$$

3 Generating function – Hàm sinh

Bài toán 10 *(a) Đếm số cách chọn ra 15 \$ từ 20 người nếu 19 người đầu, mỗi người có thể đưa ra nhiều nhất 1 \$, người thứ 20 có thể đưa ra 1 \$, 5 \$, hoặc không \$ nào. (b) Đếm số cách chọn ra $m \in N^\star$ \$ từ $n \in N^\star$ người nếu $k \in N$ người đầu, mỗi người có thể đưa ra nhiều nhất a \$, $n - k \in N$ người sau có thể đưa ra $b_1, b_2, \ldots,$ hoặc b_l \$ với $b_i \in N$, $\forall i \in [l]$, $b_i \neq b_j$, $\forall i, j \in [l]$, $i \neq j$.*

a) We wish to count the number of solutions to

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{19} + x_{20} = 15,$$

where

$$x_i \in \{0, 1\} \quad (1 \leq i \leq 19), \qquad x_{20} \in \{0, 1, 5\}.$$

For each of the first 19 people, the contribution to the total can be either 0 or 1 dollar. The ordinary generating function for one such person is

$$1 + x,$$

because "choose 0" contributes the term 1 and "choose 1" contributes the term x. Since the 19 people make independent choices, their combined generating function is

$$(1 + x)^{19}.$$

For the 20th person, the contribution can be 0, 1, or 5 dollars, so their generating function is

$$1 + x + x^5.$$

Multiplying these two captures all joint possibilities:

$$G(x) \;=\; (1+x)^{19}\,\bigl(1+x+x^5\bigr).$$

By the standard theory, the coefficient of x^{15} in $G(x)$ equals the number of ways to total 15 dollars.

We write

$$G(x) = (1+x)^{19}(1+x+x^5) = (1+x)^{19} \;+\; x\,(1+x)^{19} \;+\; x^5\,(1+x)^{19}.$$

Here the notation

$$[x^m]\,H(x)$$

means "the coefficient of x^m in the power series $H(x)$." In particular

$$[x^{15}]\,G(x) = [x^{15}]\bigl((1+x)^{19}\bigr) \;+\; [x^{15}]\bigl(x\,(1+x)^{19}\bigr) \;+\; [x^{15}]\bigl(x^5\,(1+x)^{19}\bigr).$$

Since multiplying by x^k shifts every exponent up by k, we have

$$[x^{15}]\bigl(x\,(1+x)^{19}\bigr) = [x^{14}]\bigl((1+x)^{19}\bigr), \quad [x^{15}]\bigl(x^5\,(1+x)^{19}\bigr) = [x^{10}]\bigl((1+x)^{19}\bigr).$$

Finally, by the binomial theorem,

$$[x^r](1+x)^{19} = \binom{19}{r},$$

so

$$[x^{15}]\,G(x) = \binom{19}{15} + \binom{19}{14} + \binom{19}{10}.$$

Compute the three binomial coefficients:

$$\binom{19}{4} = 3876, \quad \binom{19}{5} = 11628, \quad \binom{19}{10} = 92378.$$

Adding gives

$$3876 + 11628 + 92378 \;=\; 107882.$$

Thus, there are 107,882 ways to collect a total of \$15 under the given constraints.

b) Label the people $1, 2, \ldots, n$, and let

$$x_i = \begin{cases} \text{an integer in } [0,a], & 1 \le i \le k, \\ \text{one of the values } b_1, b_2, \ldots, b_l, & k+1 \le i \le n. \end{cases}$$

We wish to count the number of solutions to

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \;=\; m.$$

For each of the first k people, the contribution–generating function is

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^a \;=\; \frac{1 - x^{\,a+1}}{1-x}.$$

For each of the remaining $n-k$ people,

$$x_i \in \{b_1, b_2, \ldots, b_l\} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{GF} = x^{b_1} + x^{b_2} + \cdots + x^{b_l}.$$

By independence, the GF for all n people is the product

$$G(x) = \Bigl(1 + x + \cdots + x^a\Bigr)^k \;\times\; \Bigl(x^{b_1} + x^{b_2} + \cdots + x^{b_l}\Bigr)^{n-k}.$$

Thus, the number of ways to total \$$m$ is exactly the coefficient of x^m in $G(x)$:

$$\#\{\,x_1 + \cdots + x_n = m\} \;=\; [x^m]\,G(x) \;=\; [x^m]\,\Bigl(\tfrac{1-x^{a+1}}{1-x}\Bigr)^k\,\bigl(x^{b_1} + \cdots + x^{b_l}\bigr)^{n-k}.$$

4 Graph Theory – Lý Thuyết Đồ Thị

4.1 Trees & graphs: Some basic concepts – Cây & đồ thị: Vài khái niệm cơ bản

4.1.1 Graphic sequences

Problem 1 *Is there a simple graph with 4 vertices s.t. the degrees of the vertices are* $3, 2, 1, 1$. *What if the degrees were* $2, 2, 1, 1$*?*

We will determine whether a simple graph exists with the given degree sequences by using the **Havel–Hakimi algorithm**, which simplifies a degree sequence step-by-step.

Case 1: Degree sequence $(3, 2, 1, 1)$.

First, sort the degrees in non-increasing order: $(3, 2, 1, 1)$.

Take the first degree 3 and remove it. Subtract 1 from the next 3 degrees:

$$(2, 1, 1) \to (1, 0, 0)$$

Now sort: $(1, 0, 0)$

Take 1, subtract 1 from the next 1 degree:

$$(0, 0) \to (-1, 0)$$

This sequence contains a negative number, so it's **not graphical**.

Conclusion: No simple graph exists with degree sequence $(3, 2, 1, 1)$.

Case 2: Degree sequence $(2, 2, 1, 1)$

Sort: $(2, 2, 1, 1)$

Take 2, subtract 1 from next 2 entries:

$$(2, 1, 1) \to (1, 0, 1)$$

Sort: $(1, 1, 0)$

Take 1, subtract 1 from next 1 entry:

$$(1, 0) \to (0, 0)$$

All degrees are $0 \Rightarrow$ **graphical**.

Conclusion: A simple graph does exist with degree sequence $(2, 2, 1, 1)$.

Problem 2 *Which of the following sequences are graphic? (a)* $7, 5, 5, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 2$. *(b)* $1, 1, 1$. *(c)* $5, 5, 4, 3, 3, 2, 2, 1$. *(d)* $7, 5, 5, 4, 3, 2, 2, 0$. *(e)* $6, 6, 6, 6, 4, 3, 3, 0$. *(f)* $7, 6, 5, 5, 4, 4, 4, 2, 1$.

We apply the **Havel–Hakimi algorithm** to each sequence.

(a) $(7, 5, 5, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 2)$

Sort: $(7, 5, 5, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 2)$

Remove 7, subtract from next 7: $(4, 4, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 2) \to$ Sort: $(4, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2)$

Remove 4, subtract from next 4: $(3, 2, 2, 1, 2, 2, 2) \to$ Sort: $(3, 2, 2, 2, 2, 2, 1)$

Remove 3, subtract from next 3: $(1, 1, 1, 2, 2, 1) \to$ Sort: $(2, 2, 1, 1, 1, 1)$

Remove 2, subtract from next 2: $(1, 0, 1, 1, 1) \to$ Sort: $(1, 1, 1, 1, 0)$

Remove 1, subtract from next 1: $(0, 1, 1, 0) \to$ Sort: $(1, 1, 0, 0)$

Remove 1, subtract from next 1: $(0, 0, 0)$

$\Rightarrow$ **Graphic**

(b) $(1, 1, 1)$

Sort: $(1, 1, 1)$

Remove 1, subtract from next 1: $(0, 1) \to$ Sort: $(1, 0)$

Remove 1, subtract from next 1: $(-1) \to$ **Not graphic**

(c) $(5, 5, 4, 3, 3, 2, 2, 1)$

Sort: $(5, 5, 4, 3, 3, 2, 2, 1)$

Remove 5, subtract from next 5: $(4, 3, 2, 2, 1, 2, 1) \to$ Sort: $(4, 3, 2, 2, 2, 1, 1)$

Remove 4: $(2, 1, 1, 1, 1, 1) \to$ Sort: $(2, 1, 1, 1, 1, 1)$

Remove 2: $(0, 0, 1, 1, 1) \to$ Sort: $(1, 1, 1, 0, 0)$

Remove 1: $(0, 1, 0, 0) \to$ Sort: $(1, 0, 0, 0)$

Remove 1: $(-1, 0, 0)$
$\Rightarrow$ **Not graphic**

(d) $(7, 5, 5, 4, 3, 2, 2, 0)$
Sort: $(7, 5, 5, 4, 3, 2, 2, 0)$
Remove 7, subtract from next 7: $(4, 4, 3, 2, 1, 1, -1) \rightarrow$ There's -1
$\Rightarrow$ **Not graphic**

(e) $(6, 6, 6, 6, 4, 3, 3, 0)$
Sort: $(6, 6, 6, 6, 4, 3, 3, 0)$
Remove 6, subtract from next 6: $(5, 5, 5, 3, 2, 2, 0) \rightarrow$ Sort: $(5, 5, 5, 3, 2, 2, 0)$
Remove 5: $(4, 4, 2, 1, 1, 0) \rightarrow$ Sort: $(4, 4, 2, 1, 1, 0)$
Remove 4: $(3, 1, 0, 0, 0) \rightarrow$ Sort: $(3, 1, 0, 0, 0)$
Remove 3: $(0, -1, -1, 0)$
$\Rightarrow$ **Not graphic**

(f) $(7, 6, 5, 5, 4, 4, 4, 2, 1)$
Sort: $(7, 6, 5, 5, 4, 4, 4, 2, 1)$
Remove 7, subtract from next 7: $(5, 4, 4, 3, 3, 3, 1, 1) \rightarrow$ Sort: $(5, 4, 4, 3, 3, 3, 1, 1)$
Remove 5: $(3, 3, 2, 2, 2, 1, 1) \rightarrow$ Sort: $(3, 3, 2, 2, 2, 1, 1)$
Remove 3: $(2, 1, 1, 2, 1, 1) \rightarrow$ Sort: $(2, 2, 1, 1, 1, 1)$
Remove 2: $(1, 0, 1, 1, 1) \rightarrow$ Sort: $(1, 1, 1, 1, 0)$
Remove 1: $(0, 1, 1, 0) \rightarrow$ Sort: $(1, 1, 0, 0)$
Remove 1: $(0, 0, 0) \Rightarrow$ **Graphic**

Problem 3 *A simple graph G has 9 edges & the degree of each vertex is at least 3. What are the possibilities for the number of vertices? Give an example, for each possibility.*

Let $G = (V, E)$ be a simple graph with $|E| = 9$ and each vertex has degree at least 3. Let $n = |V|$ be the number of vertices.

In any graph,

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| = 18.$$

Also, since each vertex has degree at least 3, we have:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) \geq 3n.$$

Thus:

$$18 \geq 3n \Rightarrow n \leq 6.$$

So $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, but each vertex must have degree at least 3, so $n \geq 3$. Let's test each possibility:

- $n = 6$: We can have all degrees equal to 3: $[3, 3, 3, 3, 3, 3]$. Total degree $= 18$, total edges $= 9$. Possible. **Example:** A 6-cycle with all vertices connected to their second neighbor (i.e. a circulant graph $C_6(1, 2)$).
- $n = 5$: Each degree at least 3. Total degree ≥ 15. We need $\sum \deg = 18$, so possible degree sequences: $[4, 4, 3, 3, 4]$, etc. Try: $[4, 4, 4, 3, 3]$ (sum $= 18$). Possible. **Example:** Connect high-degree vertices to low-degree ones symmetrically.
- $n = 4$: Each degree at least $3 \rightarrow$ total degree ≥ 12, but we need exactly 18. Not possible, since $3 \cdot 4 = 12 < 18$ and maximum possible is $4 \cdot 3 = 12$.
- $n < 4$: Not possible since minimum degree is 3, and $n = 3$ implies total degree at least $3 \cdot 3 = 9 < 18$.

Conclusion: The possible values for n are $n = 5$ or 6.

Problem 4 (P10.1.2., p. 367) *Is $7, 7, 6, 5, 4, 4, 4, 3, 2$ a graphic sequence?*

Remove 7, subtract from next 7: $(6, 5, 4, 3, 3, 3, 2, 2) \rightarrow$ Sort: $(6, 5, 4, 3, 3, 3, 2, 2)$
Remove 6: $(4, 3, 2, 2, 2, 1, 2) \rightarrow$ Sort: $(4, 3, 2, 2, 2, 2, 1)$
Remove 4: $(2, 1, 1, 1, 2, 1) \rightarrow$ Sort: $(2, 2, 1, 1, 1, 1)$
Remove 2: $(1, 0, 1, 1, 1) \rightarrow$ Sort: $(1, 1, 1, 1, 0)$
Remove 1: $(0, 1, 1, 0) \rightarrow$ Sort: $(1, 1, 0, 0)$
Remove 1: $(0, 0, 0) \Rightarrow$ **Graphic**

Problem 5 *Is there a simple regular graph of degree* 5 *with* 8 *vertices? Why?*

In a d-regular simple graph with n vertices, the sum of all degrees must be even because it equals $2e$, where e is the number of edges.

Here, each vertex has degree 5 and there are 8 vertices:

$$\sum \deg(v) = 8 \times 5 = 40$$

This is even, so the degree sum condition is satisfied.

In a simple graph, the maximum degree of any vertex is at most $n-1$. Here, $5 \leq 7$, so the degree bound is satisfied.

So all numerical conditions are satisfied.

Construction: Try to construct a 5-regular graph on 8 vertices.

Let $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_7\}$.

Connect each v_i to $v_{i\pm1}, v_{i\pm2}, v_{i\pm4}$ (indices mod 8). Each v_i has degree 6.

To reduce to degree 5, remove one connection from each vertex (e.g., remove all (v_i, v_{i+4})). Now each vertex has degree 5 and the graph is still simple.

Problem 6 *Is there a simple graph on* 8 *vertices where half of the degrees are* 5 *& the other half are* 3*?*

Let the vertices be $v_1, v_2, \ldots, v_8$. Suppose:

$$\deg(v_1) = \deg(v_2) = \deg(v_3) = \deg(v_4) = 5, \quad \deg(v_5) = \deg(v_6) = \deg(v_7) = \deg(v_8) = 3$$

Compute the total degree:

$$\sum \deg(v) = 4 \times 5 + 4 \times 3 = 20 + 12 = 32$$

Since the sum of degrees must be even (equal to $2e$ for some integer e), this condition is satisfied.

Next, verify if the sequence is graphic using the Havel–Hakimi algorithm.

Sequence: $5, 5, 5, 5, 3, 3, 3, 3$

Step 1: Sort: $5, 5, 5, 5, 3, 3, 3, 3$ Take $d = 5$, remove it, subtract 1 from next 5 entries: $\Rightarrow 4, 4, 4, 2, 2, 3, 3$

Step 2: Sort: $4, 4, 4, 3, 3, 2, 2$ Take $d = 4$, remove it, subtract 1 from next 4 entries: $\Rightarrow 3, 3, 2, 2, 2, 2$

Step 3: Sort: $3, 3, 2, 2, 2, 2$ Take $d = 3$, remove it, subtract 1 from next 3 entries: $\Rightarrow 2, 1, 1, 2, 2$

Step 4: Sort: $2, 2, 2, 1, 1$ Take $d = 2$, remove it, subtract 1 from next 2 entries: $\Rightarrow 1, 1, 1, 1$

Step 5: Sort: $1, 1, 1, 1$ Take $d = 1$, remove it, subtract 1 from next 1 entries: $\Rightarrow 0, 1, 1$

Step 6: Sort: $1, 1, 0$ Take $d = 1$, remove it, subtract 1 from next 1 entry: $\Rightarrow 0, 0 \Rightarrow$ **Graphic**

Conclusion: There exists a simple graph with 4 vertices of degree 5 and 4 of degree 3.

Problem 7 *Assume that you applied the Havel–Hakimi algorithm to a given sequence, &, at the end of the process, you arrived at a graphic sequence. You draw a simple graph corresponding to this final sequence, & work your way back to construct a simple graph with the original sequence as its degree sequence. As you work your way back, is it the case that, at every step, after adding a new vertex, you add edges between this new vertex & those existing vertices that have the highest degrees? Either prove that you do or provide an example where you don't.*

Consider the sequence $(3, 3, 1, 1, 1, 1)$. Applying the Havel–Hakimi algorithm:

- Step 1: $(3, 3, 1, 1, 1, 1) \to (2, 0, 0, 1, 1)$
- Step 2: $(2, 1, 1, 0, 0) \to (0, 0, 0, 0)$

This sequence is graphic.

When reconstructing the graph in reverse at step 1, the vertex of degree 3 must be connected to three vertices whose degrees are currently 0. Hence, it is *not* connected to the vertices with the highest current degrees.

Conclusion: The reverse Havel–Hakimi construction does not guarantee that the new vertex connects to vertices with the highest remaining degrees.

Problem 8 *A sequence is graphic if it is the degree sequence of a* simple *graph. Is there a sequence that is not graphic, & yet is the degree sequence of a multigraph? Either prove that there are no such sequences or give a specific example.*

Take this sequence

$$(3, 3, 1, 1)$$

Applying the Havel–Hakimi algorithm:

- Step 1: $(3,3,1,1) \to (2,0,0)$
- Step 2: $(2,0,0) \to (-1,-1)$

This fails Havel–Hakimi and is therefore not graphic. But if we allow parallel edges (i.e. work in the category of multigraphs), one can realize it.

Realization as a multigraph with parallel edges:
Label the vertices A, B, C, D with the required degrees $\deg(A) = 3, \deg(B) = 3, \deg(C) = 1, \deg(D) = 1$. Use:

- *Two* parallel edges between A and B. Now $\deg(A) = 2, \deg(B) = 2$.
- One edge $A - C$. Now $\deg(A) = 3, \deg(C) = 1$.
- One edge $B - D$. Now $\deg(B) = 3, \deg(D) = 1$.

Hence there do exist sequences which are non-graphic for *simple* graphs but are realizable as degrees of a multigraph.

Problem 9 *Can you find a sequence that is* not *the degree sequence of a multigraph, but is the degree sequence of a general graph?*

- A *multigraph* allows parallel edges but *no loops*, so every loop would have to be replaced by two distinct edges.
- A *general graph* may have both parallel edges *and* loops.

Any degree-sequence realizable by a simple graph (or by a multigraph) is obviously realizable by a general graph (just interpret it as a multigraph with zero loops). Equivalently:

$$\{\text{general-graph-degree-sequences}\} \supseteq \{\text{multigraph-degree-sequences}\} \supseteq \{\text{simple-graph-degree-sequences}\}$$

In particular, every sequence that is the degree-sequence of *some* multigraph is automatically realizable by a general graph (just take the same graph). Thus there is *no* sequence which fails to be a multigraph-sequence but succeeds as a general graph sequence

Problem 10 *I have a simple graph with* 6 *vertices. The degrees of* 5 *of the vertices are* 5, 4, 4, 2, 2. *What are the possibilities for the degree of the 6th vertex?*

Let the six degrees be

$$(d_1, \ldots, d_6) = (5, 4, 4, 2, 2, d_6),$$

with $0 \le d_6 \le 5$ and

$$\sum_{i=1}^{6} d_i = 5 + 4 + 4 + 2 + 2 + d_6 = 17 + d_6$$

must be even. Hence d_6 is odd, so

$$d_6 \in \{1, 3, 5\}.$$

We now test each by Havel–Hakimi:

Case $d_6 = 5$**:** (5,5,4,4,2,2)
Remove 5: $(4,3,3,1,1) \to$ Sort: $(4,3,3,1,1)$
Remove 4: $(2,2,0,0) \to$ Sort: $(2,2,0,0)$
Remove 2: $(1,-1,0) \Rightarrow$ **Not graphic**

Case $d_6 = 3$**:** (5,4,4,3,2,2)
Remove 5: $(3,3,2,1,1) \to$ Sort: $(3,3,2,1,1)$
Remove 3: $(2,1,0,1) \to$ Sort: $(2,1,1,0)$
Remove 2: $(0,0,0) \Rightarrow$ **Graphic**

(5,4,4,2,2,1)
Remove 5: $(3,3,1,1,0) \to$ Sort: $(3,3,1,1,0)$
Remove 3: $(2,0,0,0) \Rightarrow$ **Not Graphic**

Therefore the only possibility is

$$d_6 = 3.$$