

# Lecture Note: Mathematical Analysis – Bài Giảng: Giải Tích Toán Học

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 23 tháng 5 năm 2025

## Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Advanced STEM & Beyond*:

URL: [https://nqbh.github.io/advanced\\_STEM/](https://nqbh.github.io/advanced_STEM/).

Latest version:

- *Lecture Note: Mathematical Analysis – Bài Giảng: Giải Tích Toán Học.*

PDF: URL: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/blob/main/analysis/lecture/NQBH\\_mathematical\\_analysis\\_lecture.pdf](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/lecture/NQBH_mathematical_analysis_lecture.pdf).

TeX: URL: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/blob/main/analysis/lecture/NQBH\\_mathematical\\_analysis\\_lecture.tex](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/lecture/NQBH_mathematical_analysis_lecture.tex).

- *Slide: Mathematical Analysis – Slide: Giải Tích Toán Học.*

PDF: URL: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/blob/main/analysis/slide/NQBH\\_mathematical\\_analysis\\_slide.pdf](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/slide/NQBH_mathematical_analysis_slide.pdf).

TeX: URL: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/blob/main/analysis/slide/NQBH\\_mathematical\\_analysis\\_slide.tex](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/slide/NQBH_mathematical_analysis_slide.tex).

- Codes:

- C++: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/tree/main/analysis/C++](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/analysis/C++).

- Python: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/tree/main/analysis/Python](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/analysis/Python).

## Mục lục

<b>1 Basic Mathematical Analysis – Giải Tích Toán Học Cơ Bản</b>	<b>2</b>
1.1 Numbers – Các loại số	2
1.2 Notations & conventions – Ký hiệu & quy ước	3
<b>2 Sequence – Dãy Số</b>	<b>3</b>
2.1 Definition of a sequence – Định nghĩa của dãy số	4
2.2 Convergent- & divergent sequences – Dãy số hội tụ & dãy số phân kỳ	4
2.3 Subsequences – Dãy con	6
2.4 Limit of sequences – Giới hạn của dãy số	7
2.5 Cauchy sequences – Dãy Cauchy	13
2.6 Sequences with SymPy	13
2.6.1 Sequence Base	14
2.7 Problems: Sequences	14
<b>3 Function – Hàm Số</b>	<b>17</b>
3.1 Limit of function – Giới hạn hàm số	17
3.2 Continuous function – Hàm số liên tục	19
3.3 Problem: Function – Bài tập: Hàm số	20
<b>4 Continuity – Sự Liên Tục</b>	<b>21</b>
<b>5 Series – Chuỗi Số</b>	<b>21</b>
<b>6 Derivative &amp; Differentiability – Đạo Hàm &amp; Tính Khả Vi</b>	<b>21</b>
6.1 Định nghĩa đạo hàm. Ý nghĩa hình học của đạo hàm	21
6.2 L'Hôpital's rule – Quy tắc l'Hôpital	21
<b>7 Differentiation Rules – Các Quy Tắc Tính Đạo Hàm</b>	<b>22</b>

\*A scientist- & creative artist wannabe, a mathematics & computer science lecturer of Department of Artificial Intelligence & Data Science (AIDS), School of Technology (SOT), UMT Trường Đại học Quản lý & Công nghệ TP.HCM, Hồ Chí Minh City, Việt Nam.  
E-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com) & [hong.nguyenquanba@umt.edu.vn](mailto:hong.nguyenquanba@umt.edu.vn). Website: <https://nqbh.github.io/>. GitHub: <https://github.com/NQBH>.

8	Các định lý giá trị trung bình	23
9	2nd-Order Derivative – Đạo Hàm Cấp 2	23
10	Vị Phân & Đạo Hàm Cấp Cao	23
11	Miscellaneous	24
12	Integral – Tích Phân	26
12.1	SymPy/integrals module	27
12.2	Leibniz integral rule – Quy tắc tích phân Leibniz	28
13	Functional Equation – Phương Trình Hàm	28
14	Introduction to Ordinary Differential Equations (ODEs) – Nhập Môn Phương Trình Vi Phân Đạo Hàm Thường	28
15	Introduction to Partial Differential Equations (PDEs) – Nhập Môn Phương Trình Vi Phân Đạo Hàm Riêng	28
16	Introduction to Differential Geometry – Nhập Môn Hình Học Vi Phân	29
17	Introduction to Functional Analysis – Nhập Môn Giải Tích Hàm	29
18	Fourier transform – Biến đổi Fourier	29
18.1	Discrete Fourier transform – Biến đổi Fourier rời rạc	29
19	Miscellaneous	29
19.1	Contributors	29
19.2	See also	30
	Tài liệu	30

# 1 Basic Mathematical Analysis – Giải Tích Toán Học Cơ Bản

## Resources – Tài nguyên.

1. DẶNG ĐÌNH ÁNG. *Nhập Môn Giải Tích*.
2. [Rud76]. WALTER RUDIN. *Principles of Mathematical Analysis*.
3. [Tao22a]. TERENCE TAO. *Analysis I*.
4. [Tao22b]. TERENCE TAO. *Analysis II*.

**Question 1** (Definition of mathematical analysis). *What is mathematical analysis? Cf. mathematical analysis with other types of analysis.*

For answers, see, e.g., [Tao22a, Chap. 1, Sect. 1.1: *What Is Analysis?*, pp. 1–2], [Wikipedia/mathematical analysis](#). For other types of analysis, see, e.g., [Wikipedia/analysis](#).

**Question 2** (Motivation of mathematical analysis). *Why do mathematical analysis?*

For answers, see, e.g., [Tao22a, Chap. 1, Sect. 1.2: *Why Do Analysis?*, pp. 2–10]

**Example 1** (Division by zero & infinity). *The cancellation law for multiplication  $ac = bc \Rightarrow a = b$  does not work when  $c = 0$  &  $c = \pm\infty$ . The cancellation law for addition  $a + c = b + c \Rightarrow a = b$ .*

**Example 2** (Cancellation properties).

See, e.g., [Wikipedia/cancellation property](#).

**Example 3** (Geometric series – Chuỗi hình học). *When does the geometric series  $G(a) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{a^i}$  converge? When does  $G(a)$  diverge?*

## 1.1 Numbers – Các loại số

Trong chương trình Toán phổ thông, học sinh đã được học: số tự nhiên ở chương trình Toán 6 [Thá+23a; Thá+23b], & số hữu tỷ & số thực ở chương trình Toán 7,

## 1.2 Notations & conventions – Ký hiệu & quy ước

Đặt tập hợp các đa thức (polynomial) 1 biến với hệ số nguyên, hệ số hữu tỷ, hệ số thực, hệ số phức lần lượt cho bởi:

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[x] &:= \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i; n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Z}, \forall i = 0, \dots, n, a_n \neq 0 \right\}, \\ \mathbb{Q}[x] &:= \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i; n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Q}, \forall i = 0, \dots, n, a_n \neq 0 \right\}, \\ \mathbb{R}[x] &:= \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i; n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 0, \dots, n, a_n \neq 0 \right\}, \\ \mathbb{C}[x] &:= \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i; n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{C}, \forall i = 0, \dots, n, a_n \neq 0 \right\}.\end{aligned}$$

Ta có quan hệ hiển nhiên  $\mathbb{N}[x] \subset \mathbb{Z}[x] \subset \mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$ . Tổng quát, với  $\mathbb{F}$  là 1 trường bất kỳ, tập hợp các đa thức 1 biến với hệ số thuộc trường  $\mathbb{F}$  (e.g.,  $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ) cho bởi:

$$\mathbb{F}[x] := \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i; n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{F}, \forall i = 0, \dots, n, a_n \neq 0 \right\}.$$

Tập xác định của đa thức có thể là toàn bộ trường số thực  $\mathbb{R}$  hoặc trường số phức  $\mathbb{C}$ , i.e.,  $D_P = \text{dom}(P) = \mathbb{R}$  or  $D_P = \text{dom}(P) = \mathbb{C}$ , tùy vào trường  $\mathbb{F}$  của các hệ số & mục đích sử dụng đa thức.

**Problem 1** (Cf: Calculus vs. Mathematical Analysis). *Distinguish & compare Calculus vs. Mathematical Analysis.*

Analysis is more pure mathematics. Calculus is more applied mathematics.

**Problem 2** (Examples & counterexamples in mathematical analysis – Ví dụ & phản ví dụ trong phân tích toán học). *Find, from simple to advanced, examples & counterexamples to each mathematical concepts & mathematical results, including lemmas, propositions, theorems, & consequences.*

– *Tìm các ví dụ & phản ví dụ từ đơn giản đến nâng cao cho mỗi khái niệm toán học & kết quả toán học, bao gồm các bổ đề, mệnh đề, định lý, & hệ quả.*

**Problem 3** (Python SymPy). *Study SymPy to support calculus & mathematical analysis.*

**Definition 1** (Neighborhood, [WS10], p. 6). *The set of all points  $x$  s.t.  $|x - a| < \delta$ , where  $\delta > 0$ , is called a  $\delta$  neighborhood of the point  $a$ . The set of all points  $x$  s.t.  $0 < |x - a| < \delta$ , in which  $x = a$  is excluded, is called a deleted  $\delta$  neighborhood of  $a$  or an open ball of radius  $\delta$  about  $a$ .*

**Theorem 1** (Bolzano–Weierstrass theorem). *Every bounded infinite set has at least 1 limit point.*

**Definition 2** (Algebraic- & transcendental numbers – số đại số & số siêu việt). *A number  $x \in \mathbb{R}$  which is a solution to the polynomial equation*

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \quad (1)$$

*where  $n \in \mathbb{N}^*$ , called the degree of the equation,  $a_i \in \mathbb{Z}, \forall i = 0, 1, \dots, n, a_n \neq 0$ , is called an algebraic number. A number which cannot be expressed as a solution of any polynomial equation with integer coefficients is called a transcendental number.*

**Theorem 2** (Common transcendental numbers).  *$\pi, e$  are transcendental.*

**Theorem 3** (Countability of sets of algebraic- & transcendental numbers). *(i) The set of algebraic numbers is a countably infinite set. (ii) The set of transcendental numbers is noncountably infinite.*

## 2 Sequence – Dãy Số

- **sequence** [n] /'si:kwəns/. 1. [countable] *sequence (of sth)* a set of events, actions, numbers, etc. which have a particular order & which lead to a particular result; 2. [countable, uncountable] the order that events, actions, etc. happen in or should happen in; 3. [countable] a part of a film that deals with 1 subject or topic or consists of 1 scene. [v] 1. *sequence sth* (specialist) to arrange things into a sequence; 2. *sequence sth* (biology) to identify the order in which a set of genes or parts of molecules are arranged.

**Resources – Tài nguyên.**

1. [Rud76]. WALTER RUDIN. *Principles of Mathematical Analysis*. Chap. 3: Numerical Sequences & Series.
2. [Tao22a]. TERENCE TAO. *Analysis I*.

3. [Tao22b]. TERENCE TAO. *Analysis II*.

4. [WS10]. ROBERT WREDE, MURRAY R. SPIEGEL. *Advanced Calculus*. 3e. Schaum's Outline Series. Chap. 2: Sequences.

This section deals primarily with sequences of real- & complex numbers, sequences in Euclidean spaces, or even in metric spaces.

– Phần này chủ yếu đề cập đến các dãy số thực & phức, các dãy trong không gian Euclid hoặc thậm chí trong không gian metric.

## 2.1 Definition of a sequence – Định nghĩa của dãy số

**Definition 3** (Numerical sequence – dãy số, [WS10], p. 25). *A sequence is a set of numbers  $u_1, u_2, \dots$  in a definite order of arrangement (i.e., a correspondence with the natural numbers or a subset thereof)  $\mathcal{E}$  formed according to a definite rule. Each number in the sequence is called a term;  $u_n$  is called the  $n$ th term. The sequence is called finite or infinite according as there are or are not a finite number of terms. The sequence  $u_1, u_2, \dots$  is also designated briefly by  $\{u_n\}$ .*

Có thể hiểu khái niệm dãy (sequence) ở đây 1 cách tổng quát hơn là 1 dãy các đối tượng Toán học hoặc Tin học, e.g., dãy số phức  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  là 1 dãy gồm các số  $a_n \in \mathbb{C}$ ,  $\forall n = 1, 2, \dots$ , dãy các hàm số thực  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  là 1 dãy gồm các hàm số  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\forall n = 1, 2, \dots$ , hay dãy các dãy  $\{\{a_{m,n}\}_{n=1}^{\infty}\}_{m=1}^{\infty}$  tức 1 dãy gồm các phần tử của dãy lại là các dãy số  $\{a_{m,n}\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\forall m = 1, 2, \dots$ . Trước hết, ta tập trung là khái niệm dãy đơn giản nhất: dãy số – numerical sequence, trước khi đến với khái niệm *hội tụ đều* của dãy hàm (uniform convergence of sequences of functions).

## 2.2 Convergent- & divergent sequences – Dãy số hội tụ & dãy số phân kỳ

**Definition 4** (Limit of a sequence, [WS10], p. 25). *A number  $l \in \mathbb{R}$  is called the limit of an infinite sequence  $u_1, u_2, \dots$  if for any positive number  $\epsilon$  we can find a positive number  $N$  depending on  $\epsilon$  s.t.  $|u_n - l| < \epsilon$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n > N$ . In such case we write  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$ .*

**Definition 5** (Convergent sequences, [Rud76], Def. 3.1, p. 47). *A sequence  $\{p_n\}$  in a metric space  $X$  is said to converge if there is a point  $p \in X$  with the following property: For every  $\epsilon > 0$  there is an integer  $N_\epsilon$  such that  $n \geq N_\epsilon = N(\epsilon)$  implies that  $d(p_n, p) < \epsilon$ . (Here  $d$  denotes the distance in  $X$ .) In this case we also say that  $\{p_n\}$  converges to  $p$ , or that  $p$  is the limit of  $\{p_n\}$ ,  $\mathcal{E}$  we write  $p_n \rightarrow p$ , or  $p_n \rightarrow p$  as  $n \rightarrow \infty$ , or  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$ . If  $\{p_n\}$  does not converge, it is said to diverge.*

**Remark 1.** Định nghĩa 5 về dãy hội tụ trong các không gian metric không chỉ phụ thuộc vào bản thân dãy  $\{p_n\}$  mà còn vào chính không gian metric  $X$ . Nhân tiện, vì ở đây đang xét không gian metric mà mỗi phần tử của nó được coi là 1 điểm (point), nên thành phần của dãy số được ký hiệu là  $p_n$  để ám chỉ bản chất của mỗi phần tử của dãy là 1 điểm trong không gian metric tổng quát  $X$ . Nếu  $X = \mathbb{R}$  hoặc  $X = \mathbb{C}$  thì mỗi điểm trên trục số thực hoặc 1 số phức  $z = a + bi$  tương ứng với điểm  $(a, b)$  trên mặt phẳng phức  $\mathbb{R}^2$ , khi đó ký hiệu  $p_n$  có thể được thay bởi các ký hiệu quen thuộc hơn cho số (numerals), e.g.,  $a_n, x_n, \dots$ .

In cases of possible ambiguity, we can be more precise & specify “convergent in  $X$ ” rather than “convergent”.

– Trong trường hợp có thể có sự mơ hồ, chúng ta có thể chính xác hơn & cụ thể hơn “hội tụ trong  $X$ ” thay vì “hội tụ”.

**Definition 6** (Range of a sequence, bounded sequence). *The set of all points  $p_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , is the range of  $\{p_n\}$ . The range of a sequence may be a finite set, or it may be infinite. The sequence  $\{p_n\}$  is said to be bounded if its range is bounded.*

**Problem 4.** *Prove: (a) If  $s_n = \frac{1}{n}$ , then  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$ ; the range is infinite,  $\mathcal{E}$  the sequence is bounded. (b) If  $s_n = n^2$ , the sequence  $\{s_n\}$  is unbounded, is divergent,  $\mathcal{E}$  has infinite range. (c) If  $s_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ , the sequence  $\{s_n\}$  converges to 1, is bounded,  $\mathcal{E}$  has infinite range. (d) If  $s_n = i^n$ , the sequence  $\{s_n\}$  is divergent, is bounded,  $\mathcal{E}$  has finite range. (e) If  $s_n = 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , then  $\{s_n\}$  converges to 1, is bounded,  $\mathcal{E}$  has finite range. (f) Find similar examples.*

**Theorem 4** (Some important properties of convergent sequences in metric spaces, [Rud76], Thm. 3.2, p. 48). *Let  $\{p_n\}$  be a sequence in a metric space  $X$ .*

(a)  $\{p_n\}$  converges to  $p \in X$  iff every neighborhood of  $p$  contains all but finitely many of the terms of  $\{p_n\}$ .

(b) (Uniqueness of limit) If  $p \in X, p' \in X$ ,  $\mathcal{E}$  if  $\{p_n\}$  converges to  $p$   $\mathcal{E}$  to  $p'$ , then  $p' = p$ .

(c) If  $\{p_n\}$  converges, then  $\{p_n\}$  is bounded.

(d) If  $E \subset X$   $\mathcal{E}$  if  $p$  is a limit point of  $E$ , then there is a sequence  $\{p_n\}$  in  $E$  such that  $p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ .

For sequences in Euclidean spaces  $\mathbb{R}^d$ , we can study the relation between convergence & the algebraic operations.

**Theorem 5** (Algebraic operations on limit of sequences of complex numbers, [Rud76], Thm. 3.3, p. 49). *Suppose  $\{a_n\}, \{b_n\}$  are complex sequences,  $\mathcal{E} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ . Then:*

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a + b$ .

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = ca$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (c + a_n) = c + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c + a$ ,  $\forall c \in \mathbb{C}$ .

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = ab$ .

(d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$ , provided  $a_n \neq 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{E} a \neq 0$ .

**Theorem 6** (Algebraic operations on limit of sequences in Euclidean spaces, [Rud76], Thm. 3.4, p. 50).

(a) Suppose  $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^d$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , &  $\mathbf{x}_n = (x_{1,n}, \dots, x_{d,n})$ . Then  $\{\mathbf{x}_n\}$  converges to  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  iff  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{i,n} = x_i$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$ .

(b) Suppose  $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^\infty, \{\mathbf{y}_n\}_{n=1}^\infty$  are sequences in  $\mathbb{R}^d$ ,  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  is a sequence of reals, &  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{y}_n \rightarrow \mathbf{y}, a_n \rightarrow a$ . Then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n = \mathbf{x} + \mathbf{y}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n \cdot \mathbf{y}_n = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \mathbf{x}_n = a \mathbf{x}.$$

**Bài toán 1** ([Quỳ+20b], 1.). Tìm 5 số hạng đầu của dãy số: (a)  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  với  $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . (b)  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  với  $u_1 = 1, u_2 = -2, u_{n+1} = u_n - 2u_{n-1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ . (c) Dãy  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  các hợp số nguyên dương theo thứ tự tăng dần.

**Bài toán 2** ([Quỳ+20b], 2.). Cho dãy số  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  xác định bởi  $u_0 = 2, u_1 = 5, u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Chứng minh, bằng phương pháp quy nạp Toán học,  $u_n = 2^n + 3^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

**Bài toán 3** ([Quỳ+20b], 3.). Cho  $\triangle ABC$  đều có cạnh bằng 4. Trên cạnh  $BC$  lấy điểm  $A_1$  sao  $CA_1 = 1$ . Gọi  $B_1$  là hình chiếu của  $A_1$  trên  $CA$ ,  $C_1$  là hình chiếu của  $B_1$  trên  $AB$ ,  $A_2$  là hình chiếu của  $C_1$  trên  $BC$ ,  $B_2$  là hình chiếu của  $A_2$  trên  $CA$ , ... & cứ thế tiếp tục. Đặt  $u_n = CA_n$ . Cho dãy số  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  bởi hệ thức truy hồi.

**Bài toán 4** ([Quỳ+20b], 4.). Xét tính tăng, giảm, bị chặn trên, bị chặn dưới, bị chặn của dãy số  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  với: (a)  $u_n = n^3 - 3n^2 + 5n - 7$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . (b)  $u_n = \frac{n+1}{3^n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . (c)  $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

**Bài toán 5** ([Quỳ+20b], 5.). Xét 2 dãy số  $\{u_n\}_{n=1}^\infty, \{v_n\}_{n=1}^\infty$  xác định bởi

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh: (a)  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  tăng,  $\{v_n\}_{n=1}^\infty$  giảm. (b)  $\{u_n\}_{n=1}^\infty, \{v_n\}_{n=1}^\infty$  đều bị chặn.

**Bài toán 6** ([Quỳ+20b], 6.). Cho dãy số  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  xác định bởi  $u_1 = 1, u_{n+1} = u_n + (n+1)2^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Chứng minh: (a)  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  tăng. (b)  $u_n = 1 + (n-1)2^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

**Bài toán 7** ([Quỳ+20b], 7.). Cho dãy số  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  xác định bởi  $u_1 = 1, u_2 = 2, u_{n+1} = au_n - u_{n-1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$ . Chứng minh: (a) Với  $a = \sqrt{3}$  thì  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  tuân hoàn. (b) Với  $a = \frac{3}{2}$  thì  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  không tuân hoàn.

**Bài toán 8** ([Quỳ+20b], 8.). (a) Cho cấp số cộng  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  có  $u_{13} = 31, u_{31} = -13$ . Tìm số hạng tổng quát của cấp số đó. (b) Cho cấp số cộng  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  có  $u_m = a, u_n = b$ , với  $m, n \in \mathbb{N}, m \neq n, a, b \in \mathbb{C}$ . Tìm số hạng tổng quát của cấp số đó.

**Bài toán 9** ([Quỳ+20b], 9.). Số đo 3 góc của 1 tam giác vuông lập thành 1 cấp số cộng. Tìm số đo 3 góc đó.

**Bài toán 10** ([Quỳ+20b], 10.). (a) Tổng của số hạng thứ 3 & số hạng thứ 9 của 1 cấp số cộng bằng 8. Tính tổng của 11 số hạng đầu tiên của cấp số đó. (b) Tổng của số hạng thứ  $m$  & số hạng thứ  $n$  của 1 cấp số cộng bằng  $a$ , với  $m, n \in \mathbb{N}, m \neq n, a \in \mathbb{C}$ . Tính tổng của  $N \in \mathbb{N}$  số hạng đầu tiên của cấp số đó.

**Bài toán 11** ([Quỳ+20b], 11.). Gọi  $S_n$  là tổng  $n \in \mathbb{N}^*$  số hạng đầu tiên của 1 cấp số cộng. Biết  $m, n \in \mathbb{N}^*, m \neq n$  thỏa  $S_m = S_n$ . Chứng minh  $S_{m+n} = 0$ .

**Bài toán 12** ([Quỳ+20b], 12.). Chu kỳ bán rã của nguyên tố phóng xạ poloni 210 là 138 ngày, i.e., sau 138 ngày, khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn 1 nửa. Tính khối lượng còn lại của 20 gram poloni 210 sau 7314 ngày (khoảng 20 năm).

**Bài toán 13** ([Quỳ+20b], 13.). Tính: (a) Tổng tất cả các số hạng của 1 cấp số nhân có 100 số hạng với số hạng đầu là 1, công bội là  $\frac{1}{2}$ . (b) Tổng tất cả các số hạng của 1 cấp số nhân biết số hạng đầu bằng 18, số hạng thứ 2 bằng 54 & số hạng cuối bằng 39366.

**Bài toán 14** ([Quỳ+20b], 14.). Số hạng thứ 2, số hạng đầu, & số hạng thứ 3 của 1 cấp số cộng với công sai  $\neq 0$  theo thứ tự đó lập thành 1 cấp số nhân. Tìm công bội của cấp số nhân đó.

**Bài toán 15** ([Quỳ+20b], 15.). Tìm số hạng tổng quát & tính tổng 100 số hạng đầu tiên của dãy số  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  xác định bởi  $u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

**Bài toán 16** ([Quỳ+20b], 16.). Tìm công thức cho số hạng tổng quát của dãy số xác định bởi  $a_1 = a, a_{n+1} = qa_n + \alpha^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha \neq q$ .

**Bài toán 17** ([Quỳ+20b], 17.). Gọi  $F_n$  là số hạng thứ  $n$  của dãy Fibonacci, xác định bởi  $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Chứng minh: (a)  $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . (b)  $F_{m+n+1} = F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{N}$ . (c)  $F_{3n} = F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{N}$ .

**Bài toán 18** ([Quỳ+20b], 18.). Dãy Lucas là dãy số xác định bởi  $L_1 = 1, L_2 = 3, L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Tìm công thức tổng quát cho  $L_n$ .

**Bài toán 19** ([Quỳ+20b], 19.). Giả sử  $F_n, L_n$  tương ứng là số hạng thứ  $n$  của dãy Fibonacci & dãy Lucas. Chứng minh  $F_{2n} = F_n L_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

**Bài toán 20** ([Quỳ+20b], 20.). Lập dãy số Farey bậc 9, bậc 10.

**Bài toán 21** ([Quỳ+20b], 21.). Chứng minh nếu  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  là 2 phân số với  $ad - bc = 1, d \geq b$  thì  $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$  &  $\frac{c}{d}, \frac{a}{b}$  là 2 số hạng liên tiếp trong dãy số Farey bậc  $d$ .

**Bài toán 22** ([Quỳ+20b], 22.). Số hạng thứ 3, thứ 4, thứ 7, & cuối cùng của 1 cấp số cộng không hằng lập thành 1 cấp số nhân. Tìm số số hạng của cấp số này.

**Bài toán 23** ([Quỳ+20b], 23.). Số hạng thứ 4 của 1 cấp số cộng bằng 4. Tìm GTNN của tổng các tích đôi một của 3 số hạng đầu.

**Bài toán 24** ([Quỳ+20b], 24.). 2 cấp số cộng có cùng số phần tử. Tỷ lệ giữa số hạng cuối của cấp số đầu & số hạng đầu của cấp số thứ 2 bằng tỷ lệ giữa số hạng cuối của cấp số thứ 2 & số hạng đầu của cấp số thứ nhất & bằng 4. Tỷ lệ giữa tổng các số hạng của cấp số thứ nhất & tổng các số hạng của cấp số thứ 2 bằng 2. Tìm tỷ lệ giữa các công sai của 2 cấp số.

**Bài toán 25** ([Quỳ+20b], 25.). 3 số lập thành 1 cấp số nhân. Nếu ta trừ số hạng thứ 3 cho 4 thì ta được 1 cấp số cộng. Nếu lại trừ các số hạng thứ 2 & thứ 3 của cấp số cộng thu được cho 1, ta lại được 1 cấp số nhân. Tìm 3 số ban đầu.

**Bài toán 26** ([Quỳ+20b], 26.). Tính tổng: (a)  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)}$ . (b)  $\sum_{i=1}^n i(i+1)$ . (c)  $\sum_{i=1}^n \frac{i}{2^i}$ .

**Bài toán 27** ([Quỳ+20b], 27.). Tìm đa thức  $P(x)$  thỏa  $P(x) - P(x-1) = x^3, \forall x \in \mathbb{R}$ . Từ đó lập công thức tính tổng  $S_n^{(3)} = \sum_{i=1}^n i^3$ .

**Bài toán 28** ([Quỳ+20b], 28.). Cho dãy số thực  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  xác định bởi  $x_0 = 1, x_{n+1} = 2 + \sqrt{x_n} - 2\sqrt{1 + \sqrt{x_n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Xác định dãy  $\{y_n\}_{n=1}^\infty$  bởi công thức  $y_n = \sum_{i=1}^n x_i 2^i, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Tìm công thức tổng quát của dãy  $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ .

**Bài toán 29** ([Quỳ+20b], 29.). 2 dãy số nguyên  $\{a_n\}_{n=0}^\infty, \{b_n\}_{n=0}^\infty$  được xác định bởi:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n, \\ b_0 &= 1, \quad b_1 = 2, \quad b_{n+2} = 4b_{n+1} - b_n. \end{aligned}$$

Chứng minh  $b_n^2 = 3a_n^2 + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

**Bài toán 30** ([Quỳ+20b], 30.). Cho dãy số  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  xác định bởi  $x_1 = \frac{2}{3}, x_{n+1} = \frac{x_n}{2(2n+1)x_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Tính tổng của: (a) 2010 số hạng đầu tiên của  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ . (b)  $n \in \mathbb{N}^*$  số hạng đầu tiên của  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ .

**Bài toán 31** ([Quỳ+20b], 31.). Tính: (a)  $\sum_{i=1}^{101} \frac{a_i^3}{1 - 3a_i + 3a_i^2}$  với  $a_n = \frac{n}{101}$ . (b)  $\sum_{i=1}^n \frac{a_i^3}{1 - 3a_i + 3a_i^2}$  với  $a_i = \frac{i}{n}$ .

**Bài toán 32** ([Quỳ+20b], 32.). Cho dãy số  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  xác định bởi  $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}$ . Chứng minh  $\sum_{i=1}^n a_i < 1, n \in \mathbb{N}^*$ .

**Bài toán 33** ([Quỳ+20b], 33.). Cho dãy số  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  xác định bởi  $x_0 = x_1 = 1, n(n+1)x_{n+1} = n(n-1)x_n - (n-2)x_{n-1}$ . Tìm  $\sum_{i=0}^n \frac{x_i}{x_{i+1}}$ .

**Bài toán 34** ([Quỳ+20b], 34.). Cho dãy số  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  xác định bởi  $x_1 = 2, x_{n+1} = \frac{2 + x_n}{1 - 2x_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Chứng minh: (a)  $x_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . (b)  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  không tuần hoàn.

## 2.3 Subsequences – Dãy con

**Definition 7.** Given a sequence  $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ , consider a sequence  $\{n_k\}$  of positive integers, s.t.  $n_1 < n_2 < \dots$ . Then the sequence  $\{p_{n_i}\}_{i=1}^\infty$  is called a subsequence of  $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ . If  $\{p_{n_i}\}_{i=1}^\infty$  converges, its limit is called a subsequential limit of  $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ .

**Problem 5.** Prove that  $\{p_n\}_{n=1}^\infty$  converges to  $p$  iff every subsequence of  $\{p_n\}_{n=1}^\infty$  converges to  $p$ .

**Theorem 7** ([Rud76], Thm. 3.6, p. 50).

- (a) If  $\{p_n\}_{n=1}^\infty$  is a sequence in a compact metric space  $X$ , then some subsequence of  $\{p_n\}_{n=1}^\infty$  converges to a point of  $X$ .
- (b) Every bounded sequence in  $\mathbb{R}^d$  contains a convergent subsequence.

**Theorem 8** ([Rud76], Thm. 3.7, p. 52). The subsequential limits of a sequence  $\{p_n\}_{n=1}^\infty$  in a metric space  $X$  form a closed subset of  $X$ .



## 2.4 Limit of sequences – Giới hạn của dãy số

**Định nghĩa 1** (Dãy số thực có giới hạn 0, [Thá+25], p. 60). *Dãy số thực  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$  có giới hạn 0 khi  $n$  dần tới dương vô cực nếu  $|u_n|$  có thể nhỏ hơn 1 số dương bé tùy ý, kể từ 1 số hạng nào đó trở đi, ký hiệu  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .*

**Notation.** Ngoài ký hiệu,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , ta cũng sử dụng các ký hiệu:  $\lim u_n = 0$  hay  $u_n \rightarrow 0$  khi  $n \rightarrow \infty$ .

**Nhận xét 1.** Nếu  $u_n$  ngày càng gần tới 0 khi  $n$  ngày càng lớn thì  $\lim u_n = 0$ .

**Định nghĩa 2** (Dãy số thực có giới hạn 0 theo ngôn ngữ  $\varepsilon$ - $\delta$ ). *1 dãy số thực  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  có giới hạn 0 nếu & chỉ nếu với mọi số nguyên dương  $\varepsilon$ , tồn tại 1 số nguyên dương  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  để  $|u_n| < \varepsilon$  kể từ chỉ số  $N_\varepsilon$  đó trở đi:*

$$\forall \varepsilon \in (0, \infty), \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*, |u_n| < \varepsilon, \forall n \geq N_\varepsilon,$$

hay tương đương:

$$\forall \varepsilon \in (0, \infty), \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*, n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |u_n| < \varepsilon.$$

**Remark 2** (Optimal/smallest/best indices – Các chỉ số tối ưu/nhỏ nhất/tốt nhất). *Định nghĩa 2 chỉ yêu cầu tồn tại  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  đủ lớn với mỗi  $\varepsilon \in (0, \infty)$ . Tuy nhiên nếu tìm được chỉ số  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  tối ưu, i.e., chỉ số nhỏ nhất trong các chỉ số  $N_\varepsilon$  thỏa mãn, i.e.:*

$$N_\varepsilon^{\text{opt}} := \min\{N_\varepsilon \in \mathbb{N}; |u_n| < \varepsilon, \forall n \geq N_\varepsilon\} = \min\{N_\varepsilon \in \mathbb{N}; n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |u_n| < \varepsilon\}.$$

thì ta có thể sử dụng ký hiệu  $N_\varepsilon^{\text{opt}}$  để chỉ rõ tính tối ưu (i.e., nhỏ nhất, chặt/ngắt nhất) của  $N_\varepsilon$ .

**Remark 3** (Ceil- vs. floor functions).

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & \text{if } x \in \mathbb{Z}, \\ \lfloor x \rfloor + 1 & \text{if } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases} = \lfloor x \rfloor + \chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}}(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Bài toán 35** ([Thá+25], p. 60). *Chứng minh  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  & chỉ ra  $N_\varepsilon^{\text{opt}}$  với  $\varepsilon = 0.1, 0.01, 10^{-n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , & với  $\varepsilon > 0$  bất kỳ: (a)  $u_n = 0$ . (b)  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ . (c)  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ . (d)  $u_n = -\frac{1}{\sqrt{n}}$ . (e)  $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  (f)  $u_n = \frac{a\varepsilon_n}{n^b}$  với  $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{\pm 1\}$ ,  $a \in \mathbb{R}, b \in (0, \infty)$ .*

*Chứng minh.* (a) Lấy  $\varepsilon > 0$  bất kỳ, có  $|u_n| = |0| = 0 < \varepsilon$ ,  $\forall n \geq 1$ . Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ  $\varepsilon$ - $\delta$ , suy ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ . Ta có thể chọn  $N_\varepsilon := N_\varepsilon^{\text{opt}} = 1$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , nên  $N_{0.1}^{\text{opt}} = N_{0.01}^{\text{opt}} = N_{10^{-n}}^{\text{opt}} = 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

(b) Lấy  $\varepsilon > 0$  bất kỳ, có  $|u_n| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$ , nên  $|u_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow N_\varepsilon^{\text{opt}} = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ , nên nếu chọn  $N_\varepsilon := N_\varepsilon^{\text{opt}} = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$  thì  $|u_n| < \varepsilon$ ,  $\forall n \geq N_\varepsilon$ . Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ  $\varepsilon$ - $\delta$ , suy ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

(c) Lấy  $\varepsilon > 0$  bất kỳ, có  $|u_n| = \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ , nên  $|u_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow N_\varepsilon^{\text{opt}} = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil + 1$ , nên nếu chọn  $N_\varepsilon := N_\varepsilon^{\text{opt}} = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil + 1$  thì  $|u_n| < \varepsilon$ ,  $\forall n \geq N_\varepsilon$ . Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ  $\varepsilon$ - $\delta$ , suy ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

(d) Lấy  $\varepsilon > 0$  bất kỳ, có  $|u_n| = \left| -\frac{1}{\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ , nên  $|u_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow N_\varepsilon^{\text{opt}} = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil + 1$ , nên nếu chọn  $N_\varepsilon := N_\varepsilon^{\text{opt}} = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil + 1$  thì  $|u_n| < \varepsilon$ ,  $\forall n \geq N_\varepsilon$ . Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ  $\varepsilon$ - $\delta$ , suy ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

(e) Lấy  $\varepsilon > 0$  bất kỳ, có  $|u_n| = \left| \frac{a\varepsilon_n}{n^b} \right| = \frac{|a|}{n^b}$ , nên  $|u_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{|a|}{n^b} < \varepsilon \Leftrightarrow n^b > \frac{|a|}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \left( \frac{|a|}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{b}} \Rightarrow N_\varepsilon^{\text{opt}} = \left\lceil \left( \frac{|a|}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{b}} \right\rceil + 1$ , nên nếu chọn  $N_\varepsilon := N_\varepsilon^{\text{opt}} = \left\lceil \left( \frac{|a|}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{b}} \right\rceil + 1$  thì  $|u_n| < \varepsilon$ ,  $\forall n \geq N_\varepsilon$ . Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ  $\varepsilon$ - $\delta$ , suy ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .  $\square$

**Remark 4** (Dấu của số hạng của dãy số có giới hạn 0). *Đối với bài toán chứng minh dãy  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  có  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  thì dấu của từng số hạng  $u_n$  của dãy  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  không quan trọng lắm, i.e., sgn  $u_n$  không làm ảnh hưởng tới bất đẳng thức  $|u_n| < \varepsilon$  trong định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ  $\varepsilon$ - $\delta$  vì sau khi lấy giá trị tuyệt đối,  $|u_n| \geq 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .*

**Bài toán 36.** (a) Chứng minh  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ . (b) Viết chương trình C/C++, Python để tính  $N_\varepsilon^{\text{opt}}$  với  $\varepsilon \in (0, \infty)$  được nhập từ bàn phím.

**Bài toán 37.** (a) Chứng minh  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ . (b) Viết chương trình C/C++, Python để tính  $N_\varepsilon^{\text{opt}}$  với  $\varepsilon \in (0, \infty)$  được nhập từ bàn phím.

**Bài toán 38.** Cho dãy  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  có  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ . Chứng minh  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$  với  $v_n = u_n - u_{n-1}$ . (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n - u_{n-1} = 0$  có suy ra được  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l \in \mathbb{R}$  không?

**Định nghĩa 3** (Dãy số thực có giới hạn hữu hạn, [Thá+25], p. 61). Dãy số thực  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$  có giới hạn hữu hạn là  $l \in \mathbb{R}$  khi  $n$  dần tới dương vô cực nếu  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - l) = 0$ , ký hiệu  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L$ .

Notation. Ngoài ký hiệu  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$ , ta cũng sử dụng các ký hiệu  $\lim u_n = L$  hay  $u_n \rightarrow l$  khi  $n \rightarrow \infty$ .

**Nhận xét 2.** Nếu  $u_n$  ngày càng gần tới  $l$  khi  $n$  ngày càng lớn thì  $\lim u_n = l$ .

**Định nghĩa 4** (Dãy số thực có giới hạn thực theo ngôn ngữ  $\varepsilon$ - $\delta$ ). 1 dãy số thực  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  có giới hạn hữu hạn là  $l \in \mathbb{R}$  nếu & chỉ nếu với mọi số nguyên dương  $\varepsilon$ , tồn tại 1 số nguyên dương  $N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}^*$  để  $|u_n - l| < \varepsilon$  kể từ chỉ số  $N_{\varepsilon}$  đó trở đi:

$$\forall \varepsilon \in (0, \infty), \exists N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}^*, |u_n| < \varepsilon, \forall n \geq N_{\varepsilon},$$

hay tương đương:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}^*, n \geq N_{\varepsilon} \Rightarrow |u_n| < \varepsilon.$$

**Remark 5** (Optimal/smallest/best indices – Các chỉ số tối ưu/nhỏ nhất/tốt nhất). Định nghĩa 2 chỉ yêu cầu tồn tại  $N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}^*$  đủ lớn với mỗi  $\varepsilon \in (0, \infty)$ . Tuy nhiên nếu tìm được chỉ số  $N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}^*$  tối ưu, i.e., chỉ số nhỏ nhất trong các chỉ số  $N_{\varepsilon}$  thỏa mãn, i.e.:

$$N_{\varepsilon}^{\text{opt}} := \min\{N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}; |u_n| < \varepsilon, \forall n \geq N_{\varepsilon}\} = \min\{N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}; n \geq N_{\varepsilon} \Rightarrow |u_n| < \varepsilon\}.$$

thì ta có thể sử dụng ký hiệu  $N_{\varepsilon}^{\text{opt}}$  để chỉ rõ tính tối ưu (i.e., nhỏ nhất, chặt/ngắt nhất) của  $N_{\varepsilon}$ .

**Bài toán 39.** Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  với: (a)  $u_n = c \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . (b)  $u_n = \frac{an+b}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$  với  $a, b \in \mathbb{R}$ . (c)  $u_n = \frac{an+b}{cn+d}, \forall n \in \mathbb{N}^*$  với  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  thỏa  $cn+d \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Chứng minh. (a) Lấy  $\varepsilon > 0$  bất kỳ, có  $|u_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon, \forall n \geq 1$ , suy ra  $N_{\varepsilon}^{\text{opt}} = 1, \forall \varepsilon \in (0, \infty)$ . Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ  $\varepsilon$ - $\delta$ , suy ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

(b) Lấy  $\varepsilon > 0$  bất kỳ, có  $|u_n - a| = \left| \frac{an+b}{n} - a \right| = \left| \frac{b}{n} \right| = \frac{|b|}{n}$ , nên  $|u_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{|b|}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{|b|}{\varepsilon} \Rightarrow N_{\varepsilon}^{\text{opt}} = \left\lfloor \frac{|b|}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ , nên nếu chọn  $N_{\varepsilon} := N_{\varepsilon}^{\text{opt}} = \left\lfloor \frac{|b|}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$  thì  $|u_n| < \varepsilon, \forall n \geq N_{\varepsilon}$ . Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ  $\varepsilon$ - $\delta$ , suy ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$ .  $\square$

**Bài toán 40** (Programming: Compute  $N_{\varepsilon}^{\text{opt}}$ ). Cho  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  có giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L$ . Viết chương trình C/C++, Python, với  $\varepsilon \in (0, \infty)$  được nhập từ bàn phím, output  $N_{\varepsilon}$ : (a)  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ . (b)  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$  &  $u_n = -\frac{1}{\sqrt{n}}$ . (c)  $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ .

Python: URL: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/blob/main/analysis/Python/limit.py](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/Python/limit.py).

```
from math import sqrt
```

```
def ua(n):
    return (-1)**n / n
```

```
def ub(n):
    return 1 / sqrt(n)
```

```
def uc(n):
    return -1 / sqrt(n)
```

```
def ud(n):
    return (-1)**n / sqrt(n)
```

```
MAX_LOOP = 100000
epsilon = float(input())
```

```
for i in range(1, MAX_LOOP + 1):
    if abs(ua(i)) < epsilon:
        print(i) # N_epsilon
        break
```

```
for i in range(1, MAX_LOOP + 1):
    if abs(ub(i)) < epsilon:
        print(i) # N_epsilon
        break
```



```

for i in range(1, MAX_LOOP + 1):
    if abs(uc(i)) < epsilon:
        print(i) # N_epsilon
        break

```

```

for i in range(1, MAX_LOOP + 1):
    if abs(ud(i)) < epsilon:
        print(i) # N_epsilon
        break

```

C++:

- NLDK's C++ script to compute  $N_{\epsilon}^{\text{opt}}$ :

URL: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/blob/main/analysis/C%2B%2B/NLDK\\_limit.cpp](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/C%2B%2B/NLDK_limit.cpp).

```

#include<bits/stdc++.h>
#define Sanic_speed ios_base::sync_with_stdio(false);cin.tie(NULL);cout.tie(NULL);
#define el "\n";
#define fre(i, a, b) for(int i = a; i <= b; ++i)
using namespace std;

double long qa(int n) {
    return (pow(-1, n)/n);
}
double long qb(int n) {
    double long deno = sqrt(n);
    return (1/deno);
}
double long qc(int n) {
    double long deno = sqrt(n);
    return (-1/deno);
}
double long qd(int n) {
    double long deno = sqrt(n);
    return (pow(-1, n)/deno);
}

void solve() {
    double long epsilon;
    cin >> epsilon;
    int maxN = 100000;
    fre(i, 1, maxN) {
        if (abs(qa(i)) < epsilon) {
            cout << "a) " << i << el
            break;
        }
    }
    fre(i, 1, maxN) {
        if (abs(qb(i)) < epsilon) {
            cout << "b) " << i << el
            break;
        }
    }
    fre(i, 1, maxN) {
        if (abs(qc(i)) < epsilon) {
            cout << "c) " << i << el
            break;
        }
    }
    fre(i, 1, maxN) {
        if (abs(qd(i)) < epsilon) {
            cout << "d) " << i << el
            break;
        }
    }
}

```

```

    }
}

int main() {
    Sanic_speed
    int t = 1; // cin >> t;
    while(t > 0) {
        solve();
        --t;
    }
}

```

Tính giới hạn:

**Bài toán 41** ([Quỳ+20b], 1.). (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n+1)}$ . (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ . (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+2}$ . (d) Mở rộng bài toán.

**Bài toán 42** ([Quỳ+20b], 2.). (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2n^2-1}{n^2+n}}$ . (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{1+2^n+3^n}$ . (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n i}{n^2}$ .

**Bài toán 43** ([Quỳ+20b], 3.). Chứng minh: (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$ . (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

Hint. Sử dụng định lý kẹp.

**Bài toán 44** ([Quỳ+20b], 4.). Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn 0.(1428571) dưới dạng phân số.

Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn  $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m} (b_1 b_2 \dots b_p)}$  dưới dạng phân số. Viết chương trình C/C++, Pascal, Python để mô phỏng.

**Bài toán 45.**

**Bài toán 46** ([Quỳ+20b], 5.). (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n - 3^n$ . (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n + \sin n$ . (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n^3 + 3n + 1}$ . (d) Mở rộng bài toán.

**Bài toán 47** ([Quỳ+20b], 6.). (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n + 1} - n$ . (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ .

**Bài toán 48** ([Quỳ+20b], 7.). Cho  $\Delta A_0 B_0 C_0$  đều cạnh  $a \in (0, \infty)$ .  $\Delta A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1}$  có 3 đỉnh là trung điểm của  $\Delta A_n B_n C_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Gọi  $P_n, S_n$  lần lượt là chu vi & diện tích  $\Delta A_n B_n C_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Tính: (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n, \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ . (b)  $\sum_{i=0}^{\infty} p_i, \sum_{i=0}^{\infty} S_i$ .

**Bài toán 49** ([Quỳ+20a], 22., p. 47). Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  với  $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)}$ .

**Bài toán 50** ([Quỳ+20a], 23., p. 47). Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{i}}{n\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ .

Hint. sử dụng định lý kẹp & đánh giá:

$$\frac{3\sqrt{n}}{2} < (n+1)\sqrt{n+1} - n\sqrt{n} < \frac{3\sqrt{n+1}}{2}.$$

**Bài toán 51** ([Quỳ+20a], 24., p. 48). Chứng minh dãy số  $x_n = \cos n$  không có giới hạn khi  $n \rightarrow \infty$ .

Hint. Chứng minh phản chứng.

**Bài toán 52.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  với  $x_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)}$ .

Chứng minh.  $x_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$  as  $n \rightarrow \infty$  nên  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ . □

**Bài toán 53.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 5^{-n}}{3^n - 2^{2n} - 5n^6}$ .

**Bài toán 54.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(3n^2 - 2n)}{n^9 + 3n^2}$ .

**Bài toán 55.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n-3}{2n+5} \right)^{\frac{n^2+1}{n+1}}$ .

**Bài toán 56.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n + (-1)^n}$ .

**Bài toán 57.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-2}{n+2} \right)^{\frac{1+n}{2-\sqrt{n}}}.$

**Bài toán 58.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n-1}{5n+2} \right)^n.$

**Bài toán 59.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n+2} \right)^{\frac{1+n}{2-n^2}}.$

**Bài toán 60.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+4^n}{n+5^n}}.$

**Bài toán 61.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{5n+1}{n^{10}+2n}}.$

**Bài toán 62.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+1}{n^2-1} \right)^{\frac{1}{n-2}}.$

**Bài toán 63.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-1}{n^2+1} \right)^{1-n}.$

**Bài toán 64.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}.$

**Bài toán 65.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$

**Bài toán 66.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  với  $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}.$

**Bài toán 67.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  với  $u_1 = \sqrt{3}, u_{n+1} = \sqrt{3+u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

**Bài toán 68** ([Hùn+23], VD1, p. 86). Cho dãy số  $a_n = \frac{n}{n+1}, n = 1, 2, \dots$  Chứng minh dãy  $(a_n)$  có giới hạn là 1.

**Bài toán 69** ([Hùn+23], VD2, p. 87). Chứng minh  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$

**Bài toán 70** ([Hùn+23], VD3, p. 87). Chứng minh  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$  nếu  $0 < |q| < 1.$

**Bài toán 71** ([Hùn+23], VD4, p. 87). Chứng minh dãy  $u_n = (-1)^n$  phân kỳ.

**Bài toán 72** ([Hùn+23], VD5, p. 88). Tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+3n+1}{2n^3-1}.$

**Bài toán 73** ([Hùn+23], VD6, p. 88). Tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4+2n^3+7n^2+8n+9}{2n^4+3n^3+n+10}.$

**Bài toán 74** ([Hùn+23], VD7, p. 88). Tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt[3]{n} - \sqrt{n}).$

**Bài toán 75** ([Hùn+23], VD1, p. 89). Tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}.$

**Bài toán 76** ([Hùn+23], VD2, p. 89). Chứng minh nếu  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$  thì  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$

**Bài toán 77** ([Hùn+23], VD3, p. 89). Chứng minh  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

**Bài toán 78** ([Hùn+23], VD4, p. 89). Cho dãy số nguyên dương  $(u_n)$  thỏa mãn  $u_n > u_{n-1}u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$  Tính giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{i}{u_i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left( \frac{1}{u_1} + \frac{2}{u_2} + \dots + \frac{n}{u_n} \right).$

**Bài toán 79** ([Hùn+23], VD5, p. 90). Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^n i \cos \frac{\pi}{i}.$

**Bài toán 80** ([Hùn+23], VD1, p. 90). Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định theo công thức  $u_n = f(u_{n-1}).$  Giả sử  $u_n \in [a, b]$  với mọi chỉ số  $n$  &  $f$  là hàm tăng trên  $[a, b].$  Chứng minh: (a) Nếu  $u_1 \leq u_2$  thì  $(u_n)$  là dãy tăng. (b) Nếu  $u_1 \geq u_2$  thì  $(u_n)$  là dãy giảm. (c) Nếu hàm  $f$  bị chặn thì  $(u_n)$  hội tụ.

**Bài toán 81** ([Hùn+23], VD2, p. 90). Cho dãy  $(u_n)$  được xác định bởi  $u_n = \frac{1}{3} \left( 2u_{n-1} + \frac{1}{u_{n-1}^2} \right), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, u_1 > 0.$  Chứng minh dãy  $(u_n)$  hội tụ & tìm giới hạn của dãy.

**Bài toán 82** ([Hùn+23], VD3, p. 91). Tìm  $u_1$  để dãy  $u_n = u_{n-1}^2 + 3u_{n-1} + 1$  hội tụ.

**Bài toán 83** ([Hùn+23], VD4, p. 92). Chứng minh tồn tại  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

**Bài toán 84** (Số Napier  $e$ ). Đặt  $e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Chứng minh: (a)  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . (b)  $\frac{1}{n+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ , trong đó  $\ln x$  là logarithm cơ số  $e$  của  $x$ .

**Bài toán 85** ([Hùn+23], VD5, p. 91). Chứng minh dãy  $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \ln n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$  có giới hạn hữu hạn.

**Lưu ý 1.**  $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \ln n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$  được gọi là hằng số Euler.

**Bài toán 86** ([Hùn+23], VD1, p. 92). Chứng minh không tồn tại  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{n\pi}{2}$ .

**Bài toán 87** ([Hùn+23], VD2, p. 92). Cho hàm  $f: [0, +\infty) \rightarrow (0, b)$  liên tục & nghịch biến. Giả sử hệ phương trình

$$\begin{cases} y = f(x), \\ x = f(y), \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất  $x = y = q$ . Chứng minh dãy  $u_n = f(u_{n-1})$  hội tụ tới  $q$  với  $u_1 > 0$ .

**Bài toán 88** ([Hùn+23], VD3, p. 93). Cho dãy số  $u_n = 1 + \frac{2}{1 + u_{n-1}}$ ,  $u_1 > 0$ . Chứng minh dãy hội tụ & tìm giới hạn.

**Bài toán 89** ([Hùn+23], VD1, p. 93). Cho dãy  $a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Chứng minh dãy này hội tụ.

**Bài toán 90** ([Hùn+23], VD2, p. 93). Cho dãy  $a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Chứng minh dãy này phân kỳ.

**Bài toán 91** ([Hùn+23], VD3, p. 94). Chứng minh  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$ ,  $\forall p \in \mathbb{N}$ .

**Bài toán 92** ([Hùn+23], VD1, p. 94). Khảo sát sự hội tụ của dãy Héron  $(u_n)$  được xác định bởi  $u_1 = 1$ ,  $u_n = \frac{1}{2} \left(u_{n-1} + \frac{2}{u_{n-1}}\right)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

**Bài toán 93** ([Hùn+23], VD2, p. 95). Cho dãy số  $(x_n)$  thỏa mãn  $|x_{n+1} - a| \leq \alpha |x_n - a|$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , trong đó  $a \in \mathbb{R}$  &  $0 < \alpha < 1$ . Chứng minh dãy số  $(x_n)$  hội tụ về  $a$ .

**Bài toán 94** ([Hùn+23], VD3, p. 95). Cho dãy số  $(x_n)$  xác định bởi  $x_1 = a \in \mathbb{R}$ ,  $x_{n+1} = \cos x_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Chứng minh  $(x_n)$  hội tụ.

**Bài toán 95** ([Hùn+23], VD4, p. 95, Canada 1985). Dãy số  $(x_n)$  thỏa mãn  $1 < x_1 < 2$  &  $x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{1}{2}x_n^2$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Chứng minh  $(x_n)$  hội tụ. Tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**Bài toán 96** ([Hùn+23], VD5, p. 95, VMO2023). Xét dãy số  $(a_n)$  thỏa mãn  $a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $a_{n+1} = \sqrt[3]{3a_{n+1} - a_n}$  &  $0 \leq a_n \leq 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Chứng minh dãy  $(a_n)$  có giới hạn hữu hạn.

**Bài toán 97** ([Hùn+23], VD6, p. 96, VMO2022). Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $u_1 = 6$ ,  $u_{n+1} = 2 + \sqrt{u_n + 4}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Chứng minh dãy  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn.

**Bài toán 98** ([Hùn+23], VD7, p. 96, VMO2019). Cho dãy số  $(x_n)$  xác định bởi  $x_1 = 1$  &  $x_{n+1} = x_n + 3\sqrt{x_n} + \frac{n}{\sqrt{x_n}}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

(a) Chứng minh  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x_n} = 0$ . (b) Tính giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{x_n}$ .

**Bài toán 99** ([Hùn+23], VD1, p. 97, VMO1984). Dãy số  $(u_n)$  được xác định như sau:  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = 2$ ,  $u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}$ . Dãy số  $(v_n)$  được xác định như sau:  $v_n = \sum_{i=1}^n \operatorname{arccot} u_i$ . Tìm giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ .

**Bài toán 100** ([Hùn+23], VD2, p. 97, VMO1988). Dãy số  $(u_n)$  bị chặn thỏa mãn điều kiện  $u_n + u_{n+1} \geq 2u_{n+2}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  có nhất thiết hội tụ không?

**Bài toán 101** ([Hùn+23], VD3, p. 98, Olympic 30.4 lần V). Cho  $x_k = \sum_{i=1}^k \frac{i}{(i+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{k}{(k+1)!}$ . Tính

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{1999} x_i^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{1999}^n}.$$

**Bài toán 102** ([Hùn+23], VD4, p. 98, VMO2013A). Gọi  $F$  là tập hợp tất cả các hàm số  $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  thỏa mãn  $f(3x) \geq f(f(2x)) + x, \forall x > 0$ . Tìm hằng số  $A$  lớn nhất để  $f(x) \geq Ax, \forall f \in F, \forall x > 0$ .

**Bài toán 103** ([Hùn+23], VD5, p. 98, Hải Dương 2019–2020). Cho dãy số thực  $(x_n)$  thỏa mãn  $x_1 = \frac{1}{6}, x_{n+1} = \frac{3x_n}{2x_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Tìm số hạng tổng quát của dãy số & tính giới hạn của dãy số đó.

**Bài toán 104** ([Hùn+23], VD6, p. 99, Hải Dương 2015–2016). Cho dãy số  $(u_n)$  thỏa mãn  $u_1 = -1, u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$  & dãy số  $(v_n)$  thỏa mãn  $u_n v_n - u_n + 2v_n + 2 = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Tính  $v_{2015}$  &  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

**Bài toán 105** ([Hùn+23], VD7, p. 99, Hải Dương 2013–2014). Cho dãy số  $(u_n)$  thỏa mãn  $u_1 = \frac{5}{2}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 - u_n + 2$ . Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i}$ .

**Bài toán 106** ([Hùn+23], VD1, p. 99). Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định:  $u_1, u_n = \alpha u_{n-1} + \beta$ . Biện luận theo tham số  $\alpha, \beta$  giá trị giới hạn của dãy số.

**Bài toán 107** ([Hùn+23], VD1, p. 100). Cho  $(u_n)$  là dãy số hội tụ &  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ . Khi đó, dãy trung bình cộng  $v_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i$  cũng hội tụ &  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = u$ .

**Bài toán 108** ([Hùn+23], VD2, p. 100). Giả sử  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ . Chứng minh  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i b_{n+1-i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1}{n} = ab$ . Từ đó, suy ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$ .

**Bài toán 109** ([Hùn+23], VD3, p. 101). Giả sử  $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Chứng minh nếu  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$  thì  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = a$ .

## 2.5 Cauchy sequences – Dãy Cauchy

**Definition 8** ([Rud76], Def. 3.8, p. 52). A sequence  $\{p_n\}$  in a metric space  $X$  is said to be a Cauchy sequence if for every  $\epsilon > 0$  there is an integer  $N$  s.t.  $d_X(p_n, p_m) < \epsilon$  if  $n \geq N$  &  $m \geq N$ .

Briefly:

$$\{p_n\} \text{ is a Cauchy sequence in a metric space } X \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \text{ s.t. } \min\{m, n\} \geq N_\epsilon \Rightarrow d_X(p_n, p_m) < \epsilon,$$

or equivalently,

$$\{p_n\} \text{ is a Cauchy sequence in a metric space } X \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \text{ s.t. } d_X(p_n, p_m) < \epsilon, \forall m \geq N_\epsilon, \forall n \geq N_\epsilon.$$

**Definition 9.** Let  $E$  be a subset of a metric space  $X$ , & let  $S$  be the set of all real numbers of the form  $d(p, q)$ , with  $p \in E, q \in E$ . The sup of  $S$  is called the diameter of  $E$ .

**Problem 6** ([Rud76], p. 48, +1). (a) Prove that the sequence  $\{\frac{1}{n}\}$  converges in  $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$  (to 0), but fails to converge in the set of all positive real numbers, with  $d(x, y) := |x - y|, \forall x, y \in X$ . (b) Find similar or more advanced examples.

## 2.6 Sequences with SymPy

A sequence is a finite or infinite lazily evaluated list.

```
sympy.series.sequences.sequence(seq, limits=None)
```

returns appropriate `sequence` object.

*Explanation:* If `seq` is a SymPy sequence, returns `SeqPer` object otherwise returns `SeqFormula` object. E.g.:

```
from sympy import sequence
from sympy.abc import n
sequence(n**2, (n, 0, 5))
# output: SeqFormula(n**2, (n, 0, 5))
sequence((1, 2, 3), (n, 0, 5))
# output: SeqPer((1, 2, 3), (n, 0, 5))
```

## 2.6.1 Sequence Base

`class sympy.series.sequences.SeqBase(*args):` Base class for sequences.

- `coeff(pt)`: returns the coefficient at point `pt`.
- `coeff_mul(other)`: should be used when `other` is not a sequence. Should be defined to define custom behavior.

```
from sympy import SeqFormula
from sympy.abc import n
SeqFormula(n**2).coeff_mul(2)
# output: SeqFormula(2*n**2, (n, 0, oo))
```

\* defines multiplication of sequences with sequences only.

- `find_linear_recurrence(n, d = None, gfvar = None, )`: Finds the shortest linear recurrence that satisfies the 1st  $n$  terms of sequence of order  $\leq \frac{n}{2}$  if possible. If `d` is specified, find shortest linear recurrence of order  $\leq \min\{d, \frac{n}{2}\}$  if possible. Returns list of coefficients `[b(1), b(2), ...]` corresponding to recurrence relation  $x(n) = b(1)*x(n-1) + b(2)*x(n-2) + \dots$ . Return `[]` if no recurrence is found. If `gfvar` is specified, also returns ordinary generating function as a function of `gfvar`.

## 2.7 Problems: Sequences

**Bài toán 110.** Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+b}{cn+d}$  theo  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $(c, d) \neq (0, 0)$ .

**Bài toán 111.** Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2+bn+c}{dn^2+en+f}$  theo  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ ,  $(d, e, f) \neq (0, 0, 0)$ .

**Bài toán 112.** Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$  với: (a)  $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ ,  $Q \not\equiv 0$ . (b)  $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ ,  $Q \not\equiv 0$ .

**Bài toán 113.** Cho  $a, b, c, d, \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ . Tính: (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a+b\alpha^n}{c+d\alpha^n}$ . (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+b\alpha^n}{cn+d\alpha^n}$ . (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2+b\alpha^n}{cn^2+d\alpha^n}$ . (d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(x)+a\alpha^n}{Q(x)+b\alpha^n}$  với  $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ .

**Bài toán 114** ([Quỳ+20b], 1.). Cho dãy số  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  thỏa  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$ . Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sqrt[3]{3n} = 1$ .

**Bài toán 115** ([Quỳ+20b], 2.). Cho dãy số  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  thỏa  $a_1 \in (0, 1)$ ,  $a_{n+1} = a_n - a_n^2$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Chứng minh  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 1$ .

**Bài toán 116** ([Quỳ+20b], 3.). Cho dãy số  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  thỏa  $x_0 = 2$ ,  $x_{n+1} = \frac{2x_n+1}{x_n+2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Tính  $[\sum_{i=1}^n x_i]$ .

**Bài toán 117** ([Quỳ+20b], 4.). Chứng minh  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left( \sqrt{1 + \frac{i}{n^2}} - 1 \right) = \frac{1}{4}$ .

**Bài toán 118** ([Quỳ+20b], 5.). Cho dãy số  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  xác định bởi  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 2$ ,  $x_{n+2} = 2^{-x_n} + \frac{1}{2}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Chứng minh  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}$  & tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**Bài toán 119** ([Quỳ+20b], 6.). Xét tính hội tụ của dãy theo giá trị của  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} x_1 = a \neq -1, \\ x_{n+1} = \frac{3\sqrt{2x_n^2+2}-2}{2x_n+\sqrt{2x_n^2+2}}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

**Bài toán 120** ([Quỳ+20b], 7.). Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Xét hàm số  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ,  $f: \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{a}{c}\right\}$  & dãy  $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$  thỏa  $u_0 = a \in \mathbb{R}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . (a) Chứng minh  $f(x)$  là 1 song ánh & dãy  $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$  đã cho xác định khi & chỉ khi  $a \neq v_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , trong đó  $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$  được xác định bởi  $v_0 = -\frac{d}{c}$ ,  $v_{n+1} = f^{-1}(v_n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  (lưu ý: dãy  $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$  có thể không xác định kể từ 1 chỉ số nào đó). (b) Đặt  $\Delta := (a-d)^2 + 4bc$ . Biện luận theo  $\Delta$  sự hội tụ của dãy  $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ .

**Bài toán 121** ([Quỳ+20b], 8.). Cho  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  là dãy bị chặn thỏa  $F_{n+2}a_{n+2} \leq F_{n+1}a_{n+1} + F_n a_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Chứng minh  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  hội tụ.

**Bài toán 122** ([Quỳ+20b], 9.). Dãy  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  được xác định bởi  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}$ . Chứng minh dãy số  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  hội tụ & tìm giới hạn của dãy số đó.



**Bài toán 123** ([Quỳ+20b], 10.). Cho  $a, b, A, B \in (0, \infty)$ . Xét dãy số  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  xác định bởi  $x_1 = a, x_2 = b, x_{n+2} = A\sqrt[3]{x_{n+1}^2} + B\sqrt[3]{x_n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Chứng minh  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  & tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**Bài toán 124** ([Quỳ+20b], 11.). Tìm  $a \in \mathbb{R}$  để dãy  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  xác định bởi:

$$x_0 = a, x_{n+1} = \frac{4x_n^5 + x_n^2 - x_n - 1}{5x_n^4 + x_n}, \forall n \in \mathbb{N},$$

hội tụ.

**Bài toán 125** ([Quỳ+20b], 12.). Cho  $a, b, c \in (0, \infty)$  & 3 dãy số  $\{a_n\}_{n=0}^\infty, \{b_n\}_{n=0}^\infty, \{c_n\}_{n=0}^\infty$  được xác định bởi:

$$a_0 = a, b_0 = b, c_0 = c, a_{n+1} = a_n + \frac{2}{b_n + c_n}, b_{n+1} = b_n + \frac{2}{c_n + a_n}, c_{n+1} = c_n + \frac{2}{a_n + b_n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$ .

**Bài toán 126** ([Quỳ+20b], 13.). Cho  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ . Chứng minh phương trình  $x^n = x + 1$  có 1 nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là  $x_n$ . (a) Chứng minh  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ . (b) Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1)$ .

**Bài toán 127** ([Quỳ+20b], 14.). Cho  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ . Chứng minh phương trình  $x^n = x^2 + x + 1$  có 1 nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là  $x_n$ . Tìm  $a \in \mathbb{R}$  để giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^a(x_n - x_{n+1})$  tồn tại, hữu hạn, &  $\neq 0$ .

**Bài toán 128** ([Quỳ+20b], 15.). Cho dãy số  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  thỏa  $a_1 = 5, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Chứng minh  $45 < a_{1000} < 45.1$ .

**Bài toán 129** ([Quỳ+20b], 16.). Cho dãy số  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  xác định bởi

$$u_1 = 1, u_2 = 2, u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Đặt  $x_n := \frac{u_{n+1}}{u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**Bài toán 130** ([Quỳ+20b], 17.). Cho dãy số  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  thỏa  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} + u_{2n+1} = 2010, \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} + u_{2n-1} = 2011$ . Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{2n}}{u_{2n+1}}$ .

**Bài toán 131** ([Quỳ+20b], 18.). Cho dãy số  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  xác định bởi  $u_1 = u_2 = 1, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 5u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Chứng minh  $\forall a \in (\sqrt{5}, \infty), \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{a^n} = 0$ .

**Bài toán 132** ([Quỳ+20b], 19.). Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}}$ .

**Bài toán 133** ([Quỳ+20b], 20.). Cho dãy số  $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset [1, \infty)$  thỏa  $u_{m+n} \leq u_m u_n$ . Đặt  $v_n := \frac{\ln u_n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Chứng minh  $\{v_n\}_{n=1}^\infty$  hội tụ.

**Bài toán 134** ([Quỳ+20b], 21.). Cho dãy số dương  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  thỏa  $a_1 > 0, a_{n+1}^p \geq \sum_{i=1}^n a_i, \forall n \in \mathbb{N}^*,$  với  $p \in (0, 2)$  cho trước. Chứng minh tồn tại  $c > 0$  để  $a_n > nc, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

**Bài toán 135** ([Quỳ+20b], 22.). Khảo sát sự hội tụ của dãy  $u_0 = a \in \mathbb{R}, u_{n+1} = \sqrt[3]{7u_n - 6}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Bài toán 136** ([Quỳ+20b], 23.). Cho  $\alpha \in (0, 2)$ . Tính giới hạn của dãy  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  đặt bởi  $u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + (1 - \alpha)u_n, \forall n \in \mathbb{N}$ , theo 2 giá trị  $u_0, u_1$  cho trước.

**Bài toán 137** ([Quỳ+20b], 24.). Cho  $a \in (1, \infty)$ . Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^{n+1}} \sum_{i=1}^n \frac{a^i}{i}$ .

**Bài toán 138** ([Quỳ+20b], 25.). Tìm  $a \in \mathbb{R}$  để dãy số  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  được xác định bởi  $x_0 = \sqrt{1996}, x_{n+1} = \frac{a}{x_n^2 + 1}, \forall n \in \mathbb{N}$ , có giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \in \mathbb{R}$ .

**Bài toán 139** ([Quỳ+20b], 26.). Cho dãy số thực  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  thỏa  $e^{a_n} + na_n = 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Chứng minh  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - na_n) = 1$ .

**Bài toán 140** ([Quỳ+20b], 27.). Cho dãy số thực  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset (0, \infty)$  được xác định bởi  $x_1 = 1, x_2 = 9, x_3 = 9, x_4 = 1, x_{n+4} = \sqrt[4]{x_n x_{n+1} x_{n+2} x_{n+3}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Chứng minh dãy này có giới hạn hữu hạn & tính giới hạn đó.

**Bài toán 141** ([VMS23], 1.1, p. 30, HCMUT). Cho  $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  thỏa  $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Xét dãy số  $\{a_n\}$ :

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

(a) Nếu  $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . (b) Nếu  $f(2023) = 0$  &  $f \in C^2(\mathbb{R})$  thỏa  $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

**Bài toán 142** ([VMS23], 1.2, p. 30, VNUHCM UIT). Cho dãy số  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  thỏa

$$\begin{cases} u_0 \geq -2, \\ u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

(a) Chứng minh  $\{u_n\}$  có giới hạn hữu hạn. Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ . (b) Cho 2 dãy  $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}, \{w_n\}_{n=1}^{\infty}$  đặt bởi

$$\begin{cases} v_n = 4^n |u_n - 2|, \\ w_n = \frac{u_1 u_2 \cdots u_n}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n, \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$ .

**Bài toán 143** ([VMS23], 1.3, p. 30, ĐH Đồng Tháp). Xét dãy số  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  đặt bởi

$$u_1 = \frac{3}{2}, \quad u_n = 1 + \frac{1}{2} \arctan u_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  hội tụ.

**Bài toán 144** ([VMS23], 1.4, p. 31, ĐH Đồng Tháp). Cho dãy số  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  đặt bởi

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{n^2 - 1}{a_n} + 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(a) Chứng minh  $n \leq a_n \leq n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . (b) Đặt  $S_n^{(3)} := \sum_{i=1}^n a_i^3$ . Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^{(3)}}{n^4}$ .

**Bài toán 145** ([VMS23], 1.5, p. 31, ĐHGTVT). Cho dãy số  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  đặt bởi

$$a_1 > 0, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  giảm & tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

**Bài toán 146** ([VMS23], 1.6, p. 31, ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). Cho dãy số  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  đặt bởi

$$\begin{cases} u_0 = 0, \quad u_1 = \beta, \\ u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

(a) Tìm công thức số hạng tổng quát của  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ . (b) Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

**Bài toán 147** ([VMS23], 1.7, p. 31, ĐHKH, Thái Nguyên). Cho dãy số  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  đặt bởi

$$x_n = \sum_{i=1}^n \frac{i}{(i+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{2023} x_i^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{2023}^n}$ .

**Bài toán 148** ([VMS23], 1.8, p. 31, ĐH Mỏ-Địa chất). Tính

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\prod_{i=1}^n i^{i^{2021}}\right)^{\frac{1}{n^{2022}}}}{n^{\frac{1}{2022}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1^{1^{2021}} \cdot 2^{2^{2021}} \cdots n^{n^{2021}}\right)^{\frac{1}{n^{2022}}}}{n^{\frac{1}{2022}}}.$$

**Bài toán 149** ([VMS23], 1.9, pp. 31–32, DHSPHN2). Cho dãy số  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  đặt bởi

$$x_1 \in (0, 1), \quad x_{n+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 + x_i), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(a) Chứng minh dãy  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  có giới hạn hữu hạn. (b) Chứng minh  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(x_n - x_{n+1})}{x_n^2} = \frac{1}{2}$ .

**Bài toán 150** ([VMS23], 1.10, p. 32, ĐH Trà Vinh). Cho dãy số  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  đặt bởi

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} + a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tính  $x_{2022}$ .

**Bài toán 151** ([VMS23], 1.11, p. 32, ĐH Trà Vinh). Cho 2 dãy số  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  đặt bởi

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3}, \quad x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + y_n^2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh  $x_n y_n \in (2, 3), \forall n \geq 2$  &  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ .

**Bài toán 152** ([VMS23], 1.11, p. 32, ĐH Vinh). Cho dãy số  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  đặt bởi

$$x_n = \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{2^i}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(a) Tìm tất cả  $n \in \mathbb{N}^*$  thỏa  $x_n > \frac{15}{8}$ . (b) Chứng minh  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  hội tụ.

**Bài toán 153** ([VMS24], p. 32, 1.1, VNUHCM UIT). Cho  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ . Xét dãy số

$$\begin{cases} x_0 = a, \quad x_1 = b, \\ x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}x_{n-1} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right). \end{cases}$$

Chứng minh  $\{x_n\}$  hội tụ.

**Bài toán 154** ([VMS24], p. 32, 1.2, ĐH Đồng Tháp). Cho dãy số  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  đặt bởi

$$u_n = \sum_{i=1}^n \frac{i}{(i+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(a) Tìm  $n \in \mathbb{N}$  lớn nhất để  $u_n < \frac{2023}{2024}$ . (b) Tính giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{2024} u_i^n} = \sqrt[n]{u_1^n + u_2^n + \cdots + u_{2024}^n}$ .

**Bài toán 155** ([VMS24], p. 32, 1.3, DHGTVT). Cho dãy số  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  thỏa  $\frac{1}{2} < a_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Dãy số  $\{x_n\}$  đặt bởi

$$x_1 = a_1, \quad x_{n+1} = \frac{2(a_{n+1} + x_n) - 1}{1 + 2a_{n+1}x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(a) Chứng minh dãy số  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  tăng & bị chặn trên. (b) Tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**Bài toán 156** ([VMS24], p. 33, 1.4, ĐH Vinh). Cho dãy số  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  đặt bởi

$$\begin{cases} x_1 = 2024, \\ x_{n+1} = \frac{x_n^2}{3[x_n] + 4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

(a) Chứng minh  $x_8 < 1$ . (b) Chứng minh  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  hội tụ & tìm giới hạn.

## 3 Function – Hàm Số

### 3.1 Limit of function – Giới hạn hàm số

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

hay tương đương với:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, |f(x) - l| < \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta_\varepsilon.$$

**Bài toán 157** ([Quỳ+20b], 8.). Áp dụng định nghĩa giới hạn của hàm số, tính giới hạn: (a)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1}$ . (b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x + 2}$ .

Chứng minh. (a)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 4)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 4)$ . Chứng minh  $\lim_{x \rightarrow -1} (x - 4) = -5$ : Xét  $\varepsilon > 0$  bất kỳ, xét bất phương trình  $|x - 4 - (-5)| < \varepsilon \Leftrightarrow |x + 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - (-1)| < \varepsilon$ . Theo định nghĩa giới hạn của hàm số, suy ra  $\lim_{x \rightarrow -1} (x - 4) = -5$ .

(b) Xét  $\varepsilon > 0$  bất kỳ, xét bất phương trình  $|\sqrt{x + 2} - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow 2 - \varepsilon < \sqrt{x + 2} < 2 + \varepsilon \Leftrightarrow 4 - 4\varepsilon + \varepsilon^2 < x + 2 < 4 + 4\varepsilon + \varepsilon^2 \Leftrightarrow -4\varepsilon + \varepsilon^2 < x - 2 < 4\varepsilon + \varepsilon^2$ . Nếu chọn  $\delta_\varepsilon = \min\{|-4\varepsilon + \varepsilon^2|, |4\varepsilon + \varepsilon^2|\} = 4\varepsilon - \varepsilon^2$  thì  $|x - 2| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x + 2} - 2| < \varepsilon$ , nên theo định nghĩa giới hạn của hàm số,  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x + 2} = 2$ .  $\square$

**Bài toán 158.** Viết chương trình C/C++, Pascal, Python để tính giới hạn  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{i=0}^n b_i x^i}$ .

Input. Dòng 1 chứa  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $m, n$ . Dòng 2 chứa  $a_0, a_1, \dots, a_m$ . Dòng 3 chứa  $b_0, b_1, \dots, b_n$ .

Output. Giới hạn  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{i=0}^n b_i x^i} \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Sample.

**Bài toán 159.** Viết chương trình C/C++, Pascal, Python để tính giới hạn  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^{\alpha_i}}{\sum_{i=0}^n b_i x^{\beta_i}}$ .

Input. Dòng 1 chứa  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $m, n$ . Dòng 2 chứa  $a_0, a_1, \dots, a_m$ . Dòng 3 chứa  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ . Dòng 4 chứa  $b_0, b_1, \dots, b_n$ . Dòng 5 chứa  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ .

Output. Giới hạn  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^{\alpha_i}}{\sum_{i=0}^n b_i x^{\beta_i}}$ .

Sample.

**Bài toán 160** ([Quỳ+20b], 9.). Cho hàm số  $f(x) = \cos \frac{1}{x}$  và 2 dãy số  $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty$ :

$$x_n = \frac{1}{2n\pi}, \quad y_n = \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}.$$

(a) Tìm giới hạn của 4 dãy số  $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty, \{f(x_n)\}_{n=1}^\infty, \{f(y_n)\}_{n=1}^\infty$ . (b) Tồn tại hay không giới hạn  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ ?

Chứng minh. (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n\pi} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos 2n\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(2n+1)\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$ .

(b) Ta có 2 dãy  $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty$  cùng tiến về 0 nhưng  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1 \neq 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$ , suy ra không tồn tại  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .  $\square$

**Bài toán 161** ([Quỳ+20b], 10.). Tính: (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$ . (b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$ . (c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$ .

Chứng minh. (a) 1. (b)  $\frac{2}{3}$ . (c)  $\frac{1}{2}$ .  $\square$

**Bài toán 162** ([Quỳ+20b], 11.). Tính: (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}$ . (b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}$ .  
(c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x)(1+5x)}{(2x+3)^5}$ . (d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x^3 - 3x - 2}}$ . (e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x}$ .  
(f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{1 - \sqrt{x}} - \frac{3}{1 - \sqrt[3]{x}}$ .

**Bài toán 163** ([Quỳ+20b], 12.). Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{if } x \leq 2, \\ 4x - 3 & \text{if } x > 2. \end{cases}$$

Tính  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

**Bài toán 164** ([Quỳ+20b], 13.). Tính: (a)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$ . (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}$ . (c)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2 \cos x}$ .

**Bài toán 165** ([Quỳ+20b], 14.). Tính: (a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$ . (b)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \log_x 2$ . (c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2}$ .

### 3.2 Continuous function – Hàm số liên tục

**Bài toán 166** ([Quỳ+20b], 15.). Chứng minh: (a) 2 hàm số  $f(x) = x^3 - x + 2, g(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$  liên tục tại mọi điểm  $x \in \mathbb{R}$ . (b) Hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{if } x \neq 2, \\ 3 & \text{if } x = 2, \end{cases}$$

liên tục tại điểm  $x = 2$ . (c) Hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{if } x \neq 1, \\ 2 & \text{if } x = 1, \end{cases}$$

gián đoạn tại điểm  $x = 1$ .

**Bài toán 167** ([Quỳ+20b], 16.). Chứng minh: (a) Hàm số  $f(x) = (x^2 - 2)^2 + 2$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . (b) Hàm số  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$  liên tục trên  $(-1, 1)$ . (c) Hàm số  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$  liên tục trên  $[-2, 2]$ . (d) Hàm số  $f(x) = \sqrt{2x - 1}$  liên tục trên  $[\frac{1}{2}, \infty)$ .

**Bài toán 168** ([Quỳ+20b], 17.). Sử dụng bất đẳng thức  $|\sin x| \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$ , chứng minh tính liên tục của hàm số  $y = \cos x$  tại điểm  $x = x_0$  bất kỳ.

**Bài toán 169** ([Quỳ+20b], 18.). Tìm tất cả các điểm gián đoạn của hàm số: (a)  $y = \frac{1 + x}{1 + x^3}$ . (b)  $y = \sqrt{\frac{1 - \cos \pi x}{4 - x^2}}$ . (c)  $y = x - \lfloor x \rfloor$ . (d)  $y = \frac{1}{\ln x}$ .

**Bài toán 170** ([Quỳ+20b], 19.). (a) Chứng minh phương trình bậc 3  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  luôn có ít nhất 1 nghiệm thực  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ . (b) Mở rộng bài toán.

**Bài toán 171** ([Quỳ+20b], 20.). Tìm tất cả  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình  $\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x} = m$  có nghiệm.

**Bài toán 172** ([Quỳ+20b], 21.). Giải bất phương trình  $\sqrt{x + 1} + \sqrt[3]{7 - x} > 2$ .

**Bài toán 173** ([Quỳ+20a], 25., p. 48). Tính  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x$ .

**Bài toán 174** ([Quỳ+20a], 26., p. 48). Tính  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ .

**Bài toán 175** ([Quỳ+20a], 27., p. 48). Sử dụng giới hạn đặc biệt  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ , chứng minh hàm số  $y = e^x \in C(\mathbb{R})$ .

**Bài toán 176** ([Quỳ+20a], 28., p. 48). Tìm tất cả  $m \in \mathbb{R}$  để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x} & \text{if } x < 2, \\ mx + m + 1 & \text{if } x \geq 2, \end{cases} \in C(\mathbb{R}).$$

**Bài toán 177** ([Quỳ+20a], 29., p. 48). Tìm tất cả hàm số  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  liên tục tại điểm 0 và thỏa  $f(3x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Bài toán 178** ([Quỳ+20a], 30., p. 48). Tìm tất cả hàm số  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  liên tục tại điểm 0 và thỏa  $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

**Bài toán 179** ([Quỳ+20a], 31., p. 48). Tìm ví dụ về 1 hàm số  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa  $f$  gián đoạn tại mọi điểm thuộc  $\mathbb{R}$  nhưng  $f \circ f$  liên tục tại mọi điểm thuộc  $\mathbb{R}$ .

**Bài toán 180** ([Quỳ+20a], 32., p. 48). Chứng minh parabol  $(P) : y = x^2 - 2x$  và ellipse  $(E) : \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$  cắt nhau tại 4 điểm phân biệt nằm trên 1 đường tròn.

**Bài toán 181** ([Quỳ+20a], 33., p. 48). Cho  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . Chứng minh tồn tại điểm  $x_0 \in [0, 1]$  thỏa  $f(x_0) = x_0$ .

**Bài toán 182** ([Quỳ+20a], 34., p. 48). Dùng phương pháp chia đôi, tìm nghiệm của phương trình  $x^5 + x + 1 = 0$  với độ chính xác 0.1.

Xem code C/C++ của bài toán này ở [Thư+21].

### 3.3 Problem: Function – Bài tập: Hàm số

**Bài toán 183** ([VMS23], 3.1, p. 33, HCMUT). (a) Chứng minh tồn tại hàm số  $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  thỏa  $xf''(x) + 2f'(x) = x^{2023}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . (b) Giả sử  $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  thỏa  $xg''(x) + 2g'(x) \geq x^{2023}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Chứng minh  $\int_{-1}^1 x(g(x) + x^{2023}) dx \geq \frac{2}{2025}$ .

**Bài toán 184** ([VMS23], 3.2, p. 33, ĐH Đồng Tháp). Cho hàm  $f(x)x = 2(x-1) - \arctan x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Chứng minh phương trình  $f(x) = 0$  có nghiệm duy nhất là  $a \in (1, \sqrt{3})$ .

**Proposition 1** (Luật bình phương nghịch đảo). Mỗi sự gia tăng khoảng cách từ nguồn cho ra kết quả giảm mức độ âm thanh theo tỷ lệ nghịch với bình phương của sự gia tăng khoảng cách.

**Bài toán 185** ([VMS23], 3.3, pp. 33–34, ĐH Đồng Tháp). Sử dụng luật bình phương nghịch đảo, giải quyết bài toán: 1 người có 1 mảnh đất lớn có chiều dài mặt tiền là  $l$  m ở giữa 2 quán karaoke thường phát ra âm thanh có cường độ lần lượt là  $I_1, I_2$ . Người này định xây 1 ngôi nhà nhỏ trên mảnh đất đó nhưng muốn tìm vị trí sao cho chịu ảnh hưởng của âm thanh từ 2 quán karaoke là ít nhất. Giúp người này nếu biết: (a) Cường độ âm thanh  $I_1 = I_2$ . (b) Cường độ âm thanh  $I_1 = 8I_2$ . (c)  $I_1 = aI_2$  với  $a \in (0, \infty)$  cho trước.

**Bài toán 186** ([VMS23], 3.5, p. 34, ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). Cho hàm

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + \alpha x & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

(a) Tính  $f'(x)$  khi  $x \neq 0$ . (b) Tính  $f'(0)$ . (c) Chứng minh hàm  $f(x)$  không đơn điệu trên mỗi khoảng mở chứa điểm 0.

**Bài toán 187** ([VMS23], 3.6, p. 34, ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). (a) Gia đình bác Nam muốn xây 1 cái bể hình hộp với đáy là hình vuông có thể tích  $V = 10 \text{ m}^3$ . Biết giá thành để xây mỗi  $\text{m}^2$  mặt đáy là  $a = 700000$  đồng & 1 mặt bên là  $b = 500000$  đồng. Để tổng chi phí xây dựng là nhỏ nhất thì bác Nam nên xây bể với kích thước như thế nào? (b) Giải bài toán với  $a, b, V \in (0, \infty)$  bất kỳ.

**Bài toán 188** ([VMS23], 3.7, pp. 34–35, ĐHKH Thái Nguyên). Tìm các hàm liên tục  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \not\equiv 0$ , thỏa

$$f(x+y) = 2023^y f(x) + 2023^x f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Từ đó tính

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{\sin f(x)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{f^{(n)}(0)}.$$

**Bài toán 189** ([VMS23], 3.8, p. 35, ĐH Mỏ-Địa chất). Tính

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\sin x^2 + \sin y^2 + \sin z^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

**Bài toán 190** ([VMS23], 3.9, p. 35, ĐH Mỏ-Địa chất). Gọi  $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$  là 3 nghiệm của phương trình vi phân  $y''' + a(x)y'' + b(x)y'(x)y = 0$  thỏa  $y_1^2(x) + y_2^2(x) + y_3^2(x) = 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Tìm các hằng số  $\alpha, \beta$  để hàm  $z = (y_1'(x))^2 + (y_2'(x))^2 + (y_3'(x))^2$  là nghiệm của phương trình vi phân  $z' + \alpha a(x)z + \beta b(x) = 0$ .

**Bài toán 191** ([VMS23], 3.10, p. 35, ĐH Mỏ-Địa chất). Trên hình ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , tìm tất cả các điểm  $T = (x_0, y_0)$  thỏa: tam giác bị giới hạn bởi các đường thẳng  $x = 0, y = 0$  & tiếp tuyến với ellipse tại điểm  $T$  có diện tích nhỏ nhất.

**Bài toán 192** ([VMS23], 3.11, p. 35, FTU Hà Nội). Chứng minh đa thức  $f(x) = \sum_{i=0}^{2022} (-1)^i \frac{x^i}{i!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2022}}{2022!}$  không có nghiệm thực.

**Bài toán 193** ([VMS23], 3.12, p. 35, ĐHS PHN2). Cho  $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . 1 điểm  $x$  được gọi là 1 điểm mù nếu tồn tại 1 điểm  $y \in \mathbb{R}$  với  $y > x$  sao cho  $f(y) > f(x)$ . Giả sử tất cả các điểm thuộc khoảng mở  $I = (a, b)$  là các điểm mù &  $a, b$  không phải là 2 điểm mù. Chứng minh  $f(a) = f(b)$ .

**Bài toán 194** ([VMS23], 3.13, p. 36, ĐH Trà Vinh). Chứng minh hàm số  $f(x) = x^{x^x}$  đồng biến trên  $(0, \infty)$  &  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ .

**Bài toán 195** ([VMS23], 3.14, p. 36, ĐH Vinh). Cho hàm

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2} \sin \frac{1}{x^{2023}} & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

(a) Chứng minh hàm số  $f$  liên tục tại  $x = 0$ . (b) Hàm số  $f$  có khả vi tại  $x = 0$  hay không?

**Bài toán 196** ([VMS23], 3.15, p. 36, ĐH Vinh). Cho hàm  $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ , khả vi trên khoảng  $(0, 1)$ , thỏa  $f(0) = 0$ , &  $|f'(x)| \leq 2023|f(x)|$ ,  $\forall x \in (0, 1)$ . Chứng minh  $f(x) = 0$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ .

**Bài toán 197** ([VMS23], 3.16, p. 36, ĐH Vinh). Giả sử hàm  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  khả vi trên khoảng  $(0, \infty)$  & thỏa 2 điều kiện: (i)  $|f(x)| \leq 2023$ ,  $\forall x \in (0, \infty)$ ; (ii)  $f(x)f'(x) \geq 2022 \cos x$ ,  $\forall x \in (0, \infty)$ . Có tồn tại  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  không?



## 4 Continuity – Sự Liên Tục

**Definition 10** ([Tao22a], Def. 6.1.1, p. 109: distance between 2 reals). Given  $x, y \in \mathbb{R}$ , their distance  $d(x, y)$  is defined to be  $d(x, y) := |x - y| \in [0, \infty)$ .

**Definition 11** ([Tao22a], Def. 6.1.2, p. 109:  $\varepsilon$ -close reals). Let  $\varepsilon > 0$  be a real number.  $x, y \in \mathbb{R}$  is said to be  $\varepsilon$ -close iff  $d(x, y) \leq \varepsilon$ .

## 5 Series – Chuỗi Số

**Bài toán 198** ([VMS23], 2.1, p. 32, VNUHCM UIT). Cho dãy số  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset (0, \infty)$  thỏa  $\sum_{n=1}^\infty \frac{x_n}{(2n-1)^2} < 1$ . Chứng minh  $\sum_{k=1}^\infty \sum_{n=1}^k \frac{x_n}{k^3} < 2$ .

**Bài toán 199** ([VMS23], 2.2, p. 32, DHGTVT). Cho dãy số  $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset (0, \infty)$  đặt bởi

$$a_1 > 0, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tính  $\sum_{n=1}^\infty a_n$ .

**Bài toán 200** ([VMS23], 2.2, p. 32, ĐH Mỏ–Địa chất). Gọi  $S$  là dãy con của dãy điều hòa  $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^\infty = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$  có tổng hữu hạn. Gọi  $c(n)$  là số lượng các phần tử của  $S$  có số thứ tự trong dãy mẹ (điều hòa) ban đầu không vượt quá  $n$ . Chứng minh  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c(n)}{n} = 0$ .

**Bài toán 201** ([VMS24], p. 33, 2.1, DHCNTT TpHCM). Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\beta \sin^2 \alpha}{1 + \beta \sin^2 k\alpha}, \quad \alpha \notin \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \quad \beta > 0.$$

## 6 Derivative & Differentiability – Đạo Hàm & Tính Khả Vi

### 6.1 Định nghĩa đạo hàm. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Nếu quỹ đạo chuyển động của 1 vật hay 1 chất điểm được miêu tả bằng hàm số  $\mathbf{x}(t)$  theo thời gian thì vận tốc  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{x}'(t)$  biểu thị độ nhanh chậm của chuyển động tại 1 thời điểm  $t$ .

### 6.2 L'Hôpital's rule – Quy tắc l'Hôpital

**Resources – Tài nguyên.**

1. [Wikipedia/L'Hôpital rule](#).
2. [Rud76]. WALTER RUDIN. *Principles of Mathematical Analysis*. Sect: L'Hospital's rule, pp. 109–110.
3. [Tao22a]. TERENCE TAO. *Analysis I*. Sect. 10.5: L'Hôpital's Rule, pp. 228–229.

*L'Hôpital's rule*, also known as *Bernoulli's rule*, is a mathematical theorem that allows evaluating limits of **indeterminate forms** using derivatives. Application (or repeated application) of the rule often converts an indeterminate form to an expression that can be easily evaluated by substitution. The rule is named after the 17th-century French mathematician **Guillaume de l'Hôpital**. Although the rule is often attributed to de l'Hôpital, the theorem was 1st introduced to him in 1694 by the Swiss mathematician **JOHANN BERNOULLI**.

The following theorem is frequently useful in the evaluation of limits. The differentiation of the numerator & denominator often simplifies the quotient or converts it to a limit that can be directly evaluated by **continuity**.

**Theorem 9** ([Rud76], Thm. 5.13, p. 109, l'Hôpital's rule). Suppose  $f, g$  are real & differentiable in  $(a, b)$ , &  $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ , where  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ . Suppose  $\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow l$  as  $x \rightarrow a$ . If  $f(x) \rightarrow 0$  &  $g(x) \rightarrow 0$  as  $x \rightarrow a$ , or if  $g(x) \rightarrow \infty$  as  $x \rightarrow a$ , then  $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow l$  as  $x \rightarrow a$ . The analogous statement is also true if  $x \rightarrow b$ , or if  $g(x) \rightarrow -\infty$  instead of  $g(x) \rightarrow \infty$ .

**Theorem 10** ([Tao22a], Prop. 10.5.1, p. 228, L'Hôpital's rule I). Let  $X \subset \mathbb{R}$ , let  $f : X \rightarrow \mathbb{R}, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  be functions, & let  $x_0 \in X$  be a limit point of  $X$ . Suppose that  $f(x_0) = g(x_0) = 0$ , that  $f, g$  are both differentiable at  $x_0$ , but  $g'(x_0) \neq 0$ . Then there exists a  $\delta > 0$  such that  $g(x) \neq 0, \forall x \in (X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \setminus \{x_0\}$ , &

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in (X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \setminus \{x_0\}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

**Bài toán 202.** Cho hàm số  $f(x) = \sin x, g(x) = -\frac{1}{2}x$ . Chứng minh hàm số

$$h(x) := \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} & \text{if } x \neq 0, \\ \frac{f'(0)}{g'(0)} = -2 & \text{if } x = 0. \end{cases} \in C(\mathbb{R}).$$

**Problem 7.** Suppose  $f, g$  are complex differentiable functions on  $(0, 1)$ ,  $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0, f'(x) \rightarrow A, g'(x) \rightarrow B$  as  $x \rightarrow 0$ , where  $A, B \in \mathbb{C}$ ,  $B \neq 0$ . Prove that  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ .

Hint.  $\frac{f(x)}{g(x)} = \left( \frac{f(x)}{x} - A \right) \frac{x}{g(x)} + A \frac{x}{g(x)}$  then apply l'Hôpital rule, i.e., Thm. 9 to the real- & imaginary parts of  $\frac{f(x)}{x}, \frac{g(x)}{x}$ .

**Bài toán 203** (Derivative of polynomials – Đạo hàm của các đa thức). Tính đạo hàm của hàm số đa thức

$$P(x; n, \mathbf{a}) := \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad (\text{P})$$

tại  $x = x_0$  bằng định nghĩa, với  $\deg P(x; n, \mathbf{a}) = n \in \mathbb{N}$  & vector chứa các hệ số của đa thức  $P(x; n, \mathbf{a})$  là  $\mathbf{a} := (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^*$ .

**Bài toán 204** (Derivative of rational function – Đạo hàm của phân thức). Tính đạo hàm của hàm số phân thức

$$Q(x; m, n, \mathbf{a}, \mathbf{b}) := \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{i=0}^n b_i x^i} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}, \quad (\text{Q})$$

tại  $x = x_0$  bằng định nghĩa.

**Bài toán 205** (Đạo hàm của căn thức). Tính đạo hàm của hàm số căn thức  $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ , với  $n \in \mathbb{N}^*$ , tại  $x = x_0$  bằng định nghĩa.

Ta có 3 dạng hàm số sơ cấp thường gặp: hàm đa thức  $P(x; n, \mathbf{a}) := \sum_{i=0}^n a_i x^i$ , hàm phân thức  $Q(x; m, n, \mathbf{a}, \mathbf{b}) := \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{i=0}^n b_i x^i}$ , hàm căn thức  $R_n(x) := \sqrt[n]{x}$ .

**Bài toán 206** ([Quỳ+20a], 1., p. 49). Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số tại điểm  $x_0$ : (a)  $y = 2x + 1, x_0 = 2$ . (b)  $y = x^2 + 3x, x_0 = 1$ . (c)  $y = ax + b$  tại  $x = x_0$ . (d)  $y = ax^2 + bx + c$  tại  $x = x_0$ .

**Bài toán 207** ([Quỳ+20a], 2., p. 49). Cho parabol  $y = x^2$  & 2 điểm  $A(2, 4), B(2 + \Delta x, 4 + \Delta y)$  trên parabol đó. (a) Tính hệ số góc của cát tuyến  $AB$  biết  $\Delta x \in \{1, 0.1, 0.01\}$ . (b) Tính hệ số góc của tiếp tuyến của parabol đã cho tại điểm  $A$ . (c) Mở rộng cho parabol  $y = ax^2 + bx + c$  & 2 điểm  $A(x_0, y_0), B(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ .

**Bài toán 208** ([Quỳ+20a], 3., p. 49). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = x^3$  biết: (a) Tiếp tuyến có hoành độ bằng 1. (b) Tiếp điểm của tung độ bằng 8. (c) Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3.

**Bài toán 209** ([Quỳ+20a], 4., p. 49). 1 vật rơi tự do có phương trình chuyển động  $S = \frac{gt^2}{2}$  với  $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$  &  $t$  (s). Tính: (a) Vận tốc trung bình trong khoảng thời gian từ  $t$  đến  $t + \Delta t$  với độ chính xác 0.001, biết  $t = 5$  &  $\Delta t \in \{0.1, 0.001, 0.001\}$ . (b) Vận tốc tại thời điểm  $t = 5$ .

**Bài toán 210** ([Quỳ+20a], 5., p. 49). Tính đạo hàm của hàm số  $y = \sqrt[3]{x}$  trên  $(0, \infty)$ .

**Bài toán 211** ([Quỳ+20a], 6., p. 49). Tính đạo hàm của hàm số  $y = x|x|$  tại điểm  $x_0 = 0$  (nếu có).

**Bài toán 212** ([Quỳ+20a], 7., p. 49). Tính  $f'(x)$  với

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{if } x < 1, \\ x^2 + 2 & \text{if } 1 \leq x \leq 2, \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 & \text{if } x > 2. \end{cases} \quad (2)$$

## 7 Differentiation Rules – Các Quy Tắc Tính Đạo Hàm

**Bài toán 213** ([Quỳ+20a], 8., p. 50). Tính đạo hàm của hàm số: (a)  $y = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 7x + 9$ . (b)  $y = (x - 1)^5(x + 1)^7$ . (c)  $y = \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}$ . (d)  $y = (x + 1)^3(x + 2)^4(x + 3)^5$ .

**Bài toán 214** ([Quỳ+20a], 9., p. 50). Tính đạo hàm của hàm số: (a)  $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ . (b)  $y = \sin x^2 + x \cos x^2$ . (c)  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ . (d)  $y = (x^3 + x^2 + x + 1)e^{x^2+x}$ .

**Bài toán 215** ([Quỳ+20a], 10., p. 50). Tính đạo hàm của hàm số: (a)  $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ . (b)  $y = \frac{\sin x - 1}{\sin x + \cos x}$ .

**Bài toán 216** ([Quỳ+20a], 11., p. 50). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số: (a)  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$  biết hoành độ tiếp điểm là  $x_0 = \frac{1}{2}$ . (b)  $y = \sqrt{x + 2}$  biết tung độ tiếp điểm là  $y_0 = 2$ .

**Bài toán 217** ([Quỳ+20a], 12., p. 50). Chứng minh hàm số  $y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x$  có đạo hàm bằng 0.

**Bài toán 218** ([Quỳ+20a], 13., p. 50). Viết phương trình tiếp tuyến của parabol  $y = x^2$  biết tiếp tuyến đó đi qua điểm  $A(0, -1)$ .

**Bài toán 219** ([Quỳ+20a], 14., p. 50). 1 viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với tốc độ ban đầu  $v_0 = 196$  m/s (bỏ qua sức cản của không khí). Tìm thời điểm tại đó tốc độ của viên đạn bằng 0. Khi đó viên đạn cách mặt đất bao nhiêu m?

## 8 Các định lý giá trị trung bình

**Bài toán 220** ([Quỳ+20a], 15., p. 50). Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $2a + 3b + 6c = 0$ . Chứng minh phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  có ít nhất 1 nghiệm thuộc  $(0, 1)$ .

**Bài toán 221** ([Quỳ+20a], 16., p. 50). Cho  $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$ . Đếm số nghiệm của phương trình  $f'(x) = 0$ .

**Bài toán 222** ([Quỳ+20a], 17., p. 51). Xét hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a, b]$  có đạo hàm trên  $(a, b)$ . Giả sử phương trình  $f(x) = 0$  có đúng 2 nghiệm  $x_1, x_2$  với  $x_1 \neq x_2$ . Chứng minh phương trình  $f'(x) = 0$  có nghiệm, hơn nữa biểu thức  $f'(x)$  phải đổi dấu.

**Bài toán 223** ([Quỳ+20a], 18., p. 51). Chứng minh  $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

**Bài toán 224** ([Quỳ+20a], 19., p. 51). Cho  $0 < a < b$  &  $f$  là 1 hàm liên tục trên  $[a, b]$ , có đạo hàm trên  $(a, b)$ . Chứng minh tồn tại  $c \in (a, b)$  thỏa  $\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(c) - f'(c)$ .

**Bài toán 225** ([Quỳ+20a], 20., p. 51). Tính giới hạn: (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ . (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{\sqrt{1+x} - 1}$ . (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$ .

**Bài toán 226** ([Quỳ+20a], 21., p. 51). Tính giới hạn: (a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ . (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\cot x}$ .

## 9 2nd-Order Derivative – Đạo Hàm Cấp 2

### 10 Vi Phân & Đạo Hàm Cấp Cao

**Bài toán 227** ([Quỳ+20a], 22., p. 51). Tính vi phân của hàm số: (a)  $y = \sqrt{x^2 + a^2}$ . (b)  $y = x \sin x$ . (c)  $y = x^2 + \sin^2 x$ . (d)  $y = e^x \ln x$ .

**Bài toán 228** ([Quỳ+20a], 23., p. 51). Làm tròn đến hàng phần nghìn: (a)  $\frac{1}{0.9995}$ . (b)  $\ln 1.001$ . (c)  $\cos 61^\circ$ .

**Bài toán 229** ([Quỳ+20a], 24., p. 51). Chứng minh nếu  $f, g$  là 2 hàm số có đạo hàm đến cấp 2 thì  $fg$  cũng có đạo hàm đến cấp 2 & có công thức  $(f(x)g(x))'' = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + g''(x)$ .

**Bài toán 230** ([Quỳ+20a], 25., p. 51). Tính đạo hàm: (a)  $f(x) = x^4 - \cos 2x$ , tính  $f^{(4)}(x)$ . (b)  $f(x) = \cos^2 x$ , tính  $f^{(5)}(x)$ . (c)  $f(x) = (x+10)^6$ , tính  $f^{(n)}(x)$ .

**Bài toán 231** ([Quỳ+20a], 26., p. 52). Vận tốc của 1 chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức  $v(t) = 8t + 3t^2$ , với  $t > 0$ ,  $t$  được tính bằng giây s &  $v(t)$  tính bằng m/s. Tính gia tốc của chất điểm: (a) Lúc  $t = 4$ . (b) Lúc vận tốc chuyển động bằng 11.

**Bài toán 232** ([Quỳ+20a], 27., p. 52). Chứng minh  $\forall n \geq 1$ : (a) Nếu  $f(x) = \frac{1}{x}$  thì  $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ . (b) Nếu  $f(x) = \cos x$  thì  $f^{(n)}(x) = \cos \left( x + \frac{n\pi}{2} \right)$ .

**Bài toán 233** ([Quỳ+20a], 28., p. 52). Cho  $f(x) = \sqrt{x}$ . Tính  $f^{(n)}(x)$ .

# Miscellaneous

**Bài toán 234** ([Quỳ+20a], 29., p. 52). Tính  $f'(x)$  với

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{if } x < 1, \\ x^2 + 1 & \text{if } 1 \leq x \leq 2, \\ x^3 - x^2 - 4x + 10 & \text{if } x > 2. \end{cases} \quad (3)$$

**Bài toán 235** ([Quỳ+20a], 30., p. 52). Tính  $f'(x) + f(x) + 2$  nếu  $f(x) = x \sin 2x$ .

**Bài toán 236** ([Quỳ+20a], 31., p. 52). Chứng minh nếu  $f(x) = 3e^{x^2}$  thì  $f'(x) - 2xf(x) + \frac{1}{3}f(0) - f'(0) = 1$ .

**Bài toán 237** ([Quỳ+20a], 32., p. 52). Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong  $y = 4x - x^2$  tại các điểm mà đường cong cắt trục hoành.

**Bài toán 238** ([Quỳ+20a], 33., p. 52). Cho đa thức bậc 4  $P(x)$  thỏa mãn điều kiện  $P(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Chứng minh  $P(x) + P'(x) + P''(x) + P^{(3)}(x) + P^{(4)}(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Bài toán 239** ([Quỳ+20a], 34., p. 53). Áp dụng định lý Rolle cho hàm số  $f(x) = e^x P(x)$  để chứng minh nếu đa thức  $P(x)$  bậc  $n$  có  $n$  nghiệm thực phân biệt thì đa thức  $P(x) + P'(x)$  cũng có  $n$  nghiệm thực phân biệt.

**Bài toán 240** ([Quỳ+20a], 35., p. 53). Cho hàm số  $f(x)$  khả vi trên đoạn  $[0, 1]$  &  $f'(0)f'(1) < 0$ . Chứng minh tồn tại  $c \in (0, 1)$  thỏa  $f'(c) = 0$ .

**Bài toán 241** ([Quỳ+20a], 36., p. 53). Giả sử  $f(x)$  là 1 hàm số lẻ & khả vi trên  $\mathbb{R}$ . Chứng minh  $f'(x)$  là 1 hàm số chẵn.

**Bài toán 242** ([Quỳ+20a], 37., p. 53). Tính đạo hàm cấp 100 của hàm số  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ .

**Bài toán 243** ([Quỳ+20a], 38., p. 53). Tính giới hạn: (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{2x^2} x$ . (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{5}{x} 3x$ .

**Bài toán 244** ([Quỳ+20a], 39., p. 53). Chứng minh: (a) (Phương trình dao động điều hòa) Nếu  $y = A \sin(\omega t + \varphi) + B \cos(\omega t + \varphi)$  với  $A, B, \omega, \varphi$  là 4 hằng số thì  $y'' + \omega^2 y = 0$ . (b) Nếu  $y = \sqrt{2x - x^2}$  thì  $y^3 y'' + 1 = 0$ .

**Bài toán 245** ([Quỳ+20a], 40., p. 53, công thức Newton–Leibnitz). Cho  $f, g$  là 2 hàm số có đạo hàm đến cấp  $n$ , chứng minh công thức:  $(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$ .

**Bài toán 246** ([Quỳ+20a], 41., p. 53). Cho hàm số  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ . Tính  $f^{(100)}(0), f^{(101)}(0)$ .

**Bài toán 247** ([VMS23], p. 36, 4.1, VNUHCM UIT). Cho hàm  $f \in C^2(\mathbb{R})$  thỏa  $f(0) = 2, f'(0) = -2, f(1) = 1$ . Chứng minh tồn tại  $c \in (0, 1)$  thỏa  $f(c)f'(c) + f''(c) = 0$ .

**Bài toán 248** ([VMS23], p. 37, 4.2, ĐH Đồng Tháp). Cho  $f$  khả vi trên  $(a, \infty), \forall a \in (0, \infty)$  &  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ . Chứng minh  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ .

**Bài toán 249** ([VMS23], p. 37, 4.3, ĐH Đồng Tháp). Cho  $f$  là hàm số có đạo hàm  $f'$  đồng biến trên  $[0, 2]$  &  $f(0) = -1, f(2) = 1$ . Chứng minh tồn tại  $a, b, c \in [0, 2]$  thỏa  $f'(a)f'(b)f'(c) = 1$ .

**Bài toán 250** ([VMS23], p. 37, 4.4, ĐHTT). Cho  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  thỏa  $f^{(n)}(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$  &  $f^{(n)}(x)x \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in (0, \infty)$ . Chứng minh  $f(x) = 0, \forall x \in (0, \infty)$ .

**Bài toán 251** ([VMS23], p. 37, 4.5, ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). Giả sử hàm  $f \in C([1, 2023])$ , khả vi trong khoảng  $(1, 2023)$ , &  $f(2023) = 0$ . Chứng minh tồn tại  $c \in (1, 2023)$  thỏa

$$f'(c) = \frac{2024 - 2023c}{1 - c} f(c).$$

**Bài toán 252** ([VMS23], p. 37, 4.6, ĐHKH Thái Nguyên). Giả sử  $f(x) \in C^\infty([-1, 1])$ ,  $f^{(n)}(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , & tồn tại  $\alpha \in (0, 1)$  thỏa  $\sup_{x \in [-1, 1]} |f^{(n)}(x)| \leq \alpha^n n!, \forall n \in \mathbb{N}$ . Chứng minh  $f(x) \equiv 0$  trên đoạn  $[-1, 1]$ .

**Bài toán 253** ([VMS23], p. 37, 4.7, ĐHSPTN2). Cho  $f \in C([a, b])$  khả vi trên  $(a, b)$ . Giả sử  $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$ . Chứng minh  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  thỏa  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$  &  $f(x_1)f(x_2) > 0$  thì luôn tồn tại  $c \in (x_1, x_2)$  thỏa

$$\frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = c - \frac{f(c)}{f'(c)}.$$

**Bài toán 254** ([VMS24], p. 33, 3.1, VNUHCM UIT). Cho  $f$  là hàm số thực trên  $(0, \infty)$ . Giả sử

$$f(x^\alpha) = f(x) \sin^2 \alpha + f(1) \cos^2 \alpha, \forall x \in (0, \infty), \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh  $f$  khả vi tại 1.

**Bài toán 255** ([VMS24], p. 34, 3.2, ĐH Đồng Tháp). (a) Chứng minh với mỗi  $n \in \mathbb{N}^*$ , phương trình  $2x = \sqrt{x+n} + \sqrt{x+n+1}$  có nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là  $x_n$ . (b) Tính  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}}$ ,  $b := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - a\sqrt{n}$ .

**Bài toán 256** ([VMS24], p. 34, 3.3, ĐH Đồng Tháp). Cho

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left| \cos \frac{\pi}{x} \right| & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

Chứng minh  $f$  khả vi tại 0 nhưng  $f$  không khả vi tại các điểm  $x_n := \frac{2}{2n+1}$  với  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Bài toán 257** ([VMS24], p. 34, 3.4, ĐH Đồng Tháp). Giả sử  $f$  khả vi liên tục trên  $(0, \infty)$ ,  $f(0) = 1$ . Chứng minh nếu  $|f(x)| \leq e^{-x}$ ,  $\forall x \geq 0$  thì tồn tại  $x_0 > 0$  để  $f'(x_0) = -e^{-x_0}$ .

**Bài toán 258** ([VMS24], p. 34, 3.5, ĐHGTVT). Cho  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in (0, \infty)$ . Hàm  $f$  xác định trên  $[-1, 1]$ , được cho bởi

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin x^{-b} & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

(a) Tìm tất cả các giá trị của  $a$  để hàm  $f$  liên tục trên  $[-1, 1]$ . (b) Tìm tất cả các giá trị của  $a$  để tồn tại  $f'(0)$ . (c) Tìm điều kiện của  $a, b$  để tồn tại  $f''(0)$ .

**Bài toán 259** ([VMS24], p. 35, 3.7, HUS). Cho  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm số được xác định bởi công thức

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{if } x \leq 0, \\ be^x + x & \text{if } x > 0, \end{cases}$$

với  $a, b \in \mathbb{R}$ : tham số. Xác định  $a, b$  để  $f$  có nguyên hàm trên  $\mathbb{R}$ .

**Bài toán 260** ([VMS24], p. 35, 3.8, ĐH Vinh). Cho hàm  $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  thỏa  $f_{2024}(x) = x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  với

$$\begin{cases} f_{n+1}(x) = f(f_n(x)), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ f_1(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Chứng minh  $f_2(x) = x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

**Bài toán 261** ([VMS24], p. 35, 3.9, ĐH Vinh). Cho hàm

$$f(x) = \left( \frac{2023^x + 2024^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}, \quad x > 0.$$

(a) Tìm  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ . (b) Chứng minh  $f$  là hàm số đơn điệu tăng trên  $(0, +\infty)$ .

**Bài toán 262** ([VMS24], p. 36, 4.1, HCMUT). (a) Cho  $f \in C^3(\mathbb{R}, [0, +\infty))$  thỏa  $\max_{x \in \mathbb{R}} |f'''(x)| \leq 1$ . Chứng minh

$$f''(x) \geq -\sqrt[3]{\frac{3}{2}f(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) Tìm tất cả các hàm số  $f$  thỏa mãn điều kiện của (a) thỏa

$$f''(x) = -\sqrt[3]{\frac{3}{2}f(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Bài toán 263** ([VMS24], p. 36, 4.2, VNUHCM UIT). Cho hàm số  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  liên tục trên  $[0, 1]$ , khả vi trên  $(0, 1)$  sao cho  $\exists M > 0$ ,  $\exists c \in [0, 1]$  thỏa  $f(c) = 0$  & \[

$$|f'(x)| \leq M|f(x)|, \quad \forall x \in (0, 1).$$

Chứng minh  $f(x) = 0$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ .

**Bài toán 264** ([VMS24], p. 36, 4.3, ĐH Đồng Tháp). Cho  $f$  khả vi trên  $\mathbb{R}$  &  $f'$  giảm ngặt trên  $\mathbb{R}$ . (a) Chứng minh

$$f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) Chứng minh nếu tồn tại  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  thì  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ . (c) Tìm hàm số  $g$  khả vi trên  $\mathbb{R}$  & tồn tại  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L$  nhưng  $\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) \neq 0$ .

**Bài toán 265** ([VMS24], p. 37, 4.4, ĐHGTVT). Giả sử  $V$  là tập hợp các hàm liên tục  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  và khả vi trên  $(0, 1)$  thỏa  $f(0) = 0, f(1) = 1$ . Xác định các giá trị  $\alpha \in \mathbb{R}$  để với mỗi  $f \in V$ , luôn tồn tại  $\xi \in (0, 1)$  thỏa  $f(\xi) + \alpha = f'(\alpha)$ .

**Bài toán 266** ([VMS24], p. 37, 4.5, HUS). Cho  $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm liên tục trên  $[0, 3]$  và khả vi trong  $(0, 3)$ . Chứng minh tồn tại  $c \in (0, 3)$  thỏa  $2f'(c) = f(3) - f(2) + f(1) - f(0)$ .

**Bài toán 267** ([VMS24], p. 37, 4.6, ĐH Mỏ-Địa chất). Giả sử có chuỗi có 2 đầu hướng ra vô cực

$$\cdots + f''(x) + f'(x) + f(x) + \int_0^x f(t) dt + \int_0^x \int_0^t f(s) ds dt + \cdots$$

thì hội tụ đều trên khoảng  $(-1, 1)$ . Chuỗi là biểu diễn của số nào?

**Bài toán 268** ([VMS24], p. 37, 4.7, ĐH Vinh). Cho hàm  $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  và thỏa  $f(x) \leq 2024, \forall x \in \mathbb{R}$ . Chứng minh tồn tại  $x \in \mathbb{R}$  thỏa  $f''(x) = 0$ .

## 12 Integral – Tích Phân

**Bài toán 269** ([VMS23], p. 38, 5.1, VNUHCM UIT). Cho hàm  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  khả vi đến cấp 2 thỏa  $f(0) = 1$  và  $f''(x) + 2f'(x) + f(x) \geq 1, \forall x \in (-1, 1)$ . Tìm GTNN của  $\int_{-1}^1 e^x f(x) dx$ .

**Bài toán 270** ([VMS23], p. 38, 5.2, ĐH Đồng Tháp). Cho hàm  $f : [0, 2023] \rightarrow (0, \infty)$  khả tích và  $f(x)f(2023 - x) = 1, \forall x \in [0, 2023]$ . Chứng minh  $\int_0^{2023} f(x) dx \geq 2023$ .

**Bài toán 271** ([VMS23], p. 38, 5.3, ĐHGTVT). Cho hàm  $f \in C([0, 1])$  thỏa  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx$ . Chứng minh tồn tại  $c \in (0, 1)$  thỏa  $cf(c) + 2023 \int_0^c f(x) dx = 0$ .

**Bài toán 272** ([VMS23], p. 38, 5.4, ĐHGTVT). Tính

$$I := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1 + 2023^x) \sin x} dx.$$

**Bài toán 273** ([VMS23], p. 38, 5.5, ĐHGTVT). Cho hàm  $f$  dương, khả tích trên  $[a, b]$ ,  $0 < m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$ . Chứng minh

$$(b - a)^2 \leq \int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \leq \frac{(m + M)^2}{4mM} (b - a)^2.$$

**Bài toán 274** ([VMS23], p. 39, 5.6, ĐHKH Thái Nguyên). Cho hàm  $h \in C([0, 1])$  thỏa  $\int_0^1 xh(x) dx = \int_0^1 h(x) dx$ . Chứng minh tồn tại  $\beta \in (0, 1)$  thỏa  $\beta h(\beta^2) = \frac{2023}{2} \int_0^{\beta^2} h(x) dx$ .

**Bài toán 275** ([VMS23], p. 39, 5.7, ĐHKH Thái Nguyên). Cho  $f \in C([0, \pi])$  thỏa  $f(0) > 0$  và  $\int_0^{\pi} f(x) dx < 2$ . Chứng minh phương trình  $f(x) = \sin x$  có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng  $(0, \pi)$ .

**Bài toán 276** ([VMS23], p. 39, 5.8, ĐH Mỏ-Địa chất). Cho  $f \in C([0, 1]), g \in C([0, 1], (0, \infty))$  với  $f$  không giảm. Chứng minh

$$\left( \int_0^t f(x)g(x) dx \right) \left( \int_0^1 g(x) dx \right) \leq \left( \int_0^t g(x) dx \right) \left( \int_0^1 f(x)g(x) dx \right), \forall t \in [0, 1].$$

**Bài toán 277** ([VMS23], p. 39, 5.9, ĐH Mỏ-Địa chất). Cho  $f \in C([0, 1])$  thỏa  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ . Chứng minh tồn tại điểm  $c \in (0, 1)$  thỏa  $\int_0^c xf(x) dx = 0$ .

**Bài toán 278** ([VMS23], p. 39, 5.10, ĐHSPhN2). Gọi  $\mathcal{F}$  là lớp tất cả các hàm khả vi  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  thỏa

$$|f'(x) - f'(y)| \leq 2023|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh

$$(f'(x))^2 < 4046f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Bài toán 279** ([VMS23], p. 40, 5.11, ĐHSPhN2). Giả sử  $f \in C^2([a, b])$  thỏa  $f(a) \neq -f(b)$  và  $\int_a^b f(x) dx = 0$ . Tìm GTNN của

$$A := \frac{(b - a)^3}{(f(a) + f(b))^2} \int_a^b (f''(x))^2 dx.$$

**Bài toán 280** ([VMS23], p. 40, 5.12, ĐH Trà Vinh). Tính

$$I := \int_0^{2\pi} \ln(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}) dx.$$



**Bài toán 281** ([VMS23], p. 40, 5.12, ĐH Vinh). Cho  $f \in C([0, 1])$  thỏa  $xf(y) + yf(x) \leq 1, \forall x, y \in [0, 1]$ . Chứng minh: (a)  $f(x) \leq \frac{1}{2x}, \forall x \in (0, 1]$ . (b)  $\int_0^1 f(x) dx \leq \frac{\pi}{4}$ .

**Bài toán 282** ([VMS24], p. 37, 5.1, VNUHCM UIT). Cho  $\alpha \in (0, \infty)$  &  $f \in C([0, 1])$  nghịch biến,  $a \in (0, 1)$  thỏa

$$\int_0^a f(t) dt < \frac{a}{2025}, \quad f(0) = \beta > 0.$$

Chứng minh phương trình  $f(x) = x^{2024}$  có nghiệm trong  $[0, 1]$ .

**Bài toán 283** ([VMS24], p. 38, 5.2, ĐH Đồng Tháp). Giả sử  $f \in C^1([0, 1])$  thỏa  $f(0) = 0, 0 \leq f'(x) \leq 1, \forall x \in [0, 1]$ . Xét hàm số

$$F(t) = \left( \int_0^t f(x) dx \right)^2 - \int_0^t (f(x))^3 dx, \quad \forall t \in [0, 1].$$

(a) Chứng minh  $F$  đồng biến trên  $[0, 1]$ . (b) Chứng minh

$$\left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2 \geq \int_0^1 (f(x))^3 dx.$$

Cho vài ví dụ về hàm  $f$  để đẳng thức xảy ra.

**Bài toán 284** ([VMS24], p. 38, 5.3, ĐHGTVT). Cho  $f: [0, 1] \rightarrow (0, +\infty)$  là 1 hàm khả tích thỏa  $f(x)f(1-x) = 1, \forall x \in [0, 1]$ . Chứng minh  $\int_0^1 f(x) dx \geq 1$ .

**Bài toán 285** ([VMS24], p. 38, 5.4, HUS). Cho  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm khả tích trên  $[0, 1]$  & liên tục trên  $(0, 1)$ . Chứng minh tồn tại  $a, b \in (0, 1)$  phân biệt sao cho

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

**Bài toán 286** ([VMS24], p. 38, 5.5, ĐH Mở-Địa chất). Tính tích phân

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2+t^2 \leq 1} e^{x^2+y^2-z^2-t^2} dx dy dz dt.$$

**Bài toán 287** ([VMS24], p. 38, 5.6, ĐH Vinh). Chứng minh

$$\frac{9}{8\pi} < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 dx < \frac{3}{2\pi}.$$

## 12.1 SymPy/integrals module

See <https://docs.sympy.org/latest/modules/integrals/integrals.html>. The `integrals` module in SymPy implements methods to calculate definite & indefinite integrals of expressions. Principal method in this module is `integrate()`:

- `integrate(f, x)` returns the indefinite integral  $\int f dx$
- `integrate(f, (x, a, v))` returns the definite integral  $\int_a^b f dx$ .

**Problem 8** (Integration of elementary functions). Use SymPy to compute definite- & indefinite integrals of elementary functions as many as possible.

**Problem 9** (Integration of nonelementary functions). Use SymPy to compute definite- & indefinite integrals of nonelementary functions as many as possible.

**Example 4** (Integral of error function). The indefinite integral of the nonelementary function  $e^{-x^2} \operatorname{erf}(x)$ , where  $\operatorname{erf}(x)$  is the error function, is given by

$$\int e^{-x^2} \operatorname{erf}(x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \operatorname{erf}(x).$$

Run the following Python code:

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
print(integrate(exp(-x**2)*erf(x), x))
```

to obtain the following output:

```
sqrt(pi)*erf(x)**2/4
```

For more information about the error function, see, e.g., [Wikipedia/error function](#).

## 12.2 Leibniz integral rule – Quy tắc tích phân Leibniz

In **calculus**, the *Leibniz integral rule* for differentiation under the integral sign, named after **GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ**.

**Theorem 11** (Leibniz integral rule – Quy tắc tích phân Leibniz). *For an integral of the form  $\int_{a(x)}^{b(x)} f(t, x) dt$  where  $a(x), b(x) \in \mathbb{R}$  & the integrands are functions dependent on  $x$ , the derivative of this integral is expressible as*

$$\frac{d}{dx} \left( \int_{a(x)}^{b(x)} f(t, x) dt \right) = f(b(x), x) \frac{d}{dx} b(x) - f(a(x), x) \frac{d}{dx} a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \partial_x f(t, x) dt, \quad (\text{Lintr})$$

where the **partial derivative**  $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$  indicates that inside the integral, only the variation of  $f(t, x)$  with  $x$  is considered in taking the derivative.

## 13 Functional Equation – Phương Trình Hàm

**Bài toán 288** ([VMS23], 6.1, p. 40, VNUHCM UIT). *Tìm tất cả các hàm số  $f \in C^2(\mathbb{R}, (0, \infty))$  thỏa*

$$f''(x)f(x) \geq 2(f'(x))^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Bài toán 289** ([VMS23], 6.2, p. 40, ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). *Tìm tất cả các hàm số  $f \in C(\mathbb{R})$  thỏa  $f(1) = 2023$  &  $f(x+y) = 2023^x f(y) + 2023^y f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$ .*

**Bài toán 290** ([VMS23], 6.3, p. 40, ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). *Tìm tất cả các hàm số  $f(x) \in C^1([0, 1])$  có  $f(1) = f(0)$  & thỏa*

$$\int_0^1 \left( \frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 dx \leq 1.$$

**Bài toán 291** ([VMS23], 6.4, p. 41, ĐH Mỏ-Địa chất). *Cho  $r, s \in \mathbb{Q}$ . Tìm tất cả các hàm số  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  thỏa*

$$f(x + f(y)) = f(x + r) + y + s, \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

**Bài toán 292** ([VMS23], 6.5, p. 41, FTU Hà Nội). *Tìm tất cả các hàm số thực  $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  thỏa*

$$f(x + f(y)) = xf \left( 1 + f \left( \frac{y}{x} \right) \right), \quad \forall x, y \in (0, \infty).$$

**Bài toán 293** ([VMS23], 6.6, p. 41, ĐH Trà Vinh). *Tìm tất cả các hàm số  $f(x)$  thỏa*

$$f \left( \frac{x+1}{x-1} \right) = 2f(x) + \frac{3}{x-1}, \quad \forall x \neq 1.$$

**Bài toán 294** ([VMS23], 6.7, p. 41, ĐH Trà Vinh). *Tìm tất cả các hàm số  $f(x) \in C^1([0, 1])$  thỏa  $f(1) = ef(0)$  &*

$$\int_0^1 \left( \frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 dx \leq 1.$$

**Bài toán 295** ([VMS24], p. 38, 6.1, HUS). *Cho  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  là 1 hàm khả vi thỏa  $(f'(x))^2 - 3f'(x) + 2 = 0, \forall x \in (0, 1)$ . Tìm  $f$ . (b) Mở rộng bài toán cho dạng phương trình hàm phức tạp hơn.*

## 14 Introduction to Ordinary Differential Equations (ODEs) – Nhập Môn Phương Trình Vi Phân Đạo Hàm Thường

**Resources – Tài nguyên.**

1. [Tes12]. GERALD TESCHL. *Ordinary Differential Equations & Dynamical Systems*.

Lecture Notes chi tiết hơn về ODEs sẽ được viết riêng. Phần này chỉ giới thiệu những khái niệm cơ bản của ODEs.

## 15 Introduction to Partial Differential Equations (PDEs) – Nhập Môn Phương Trình Vi Phân Đạo Hàm Riêng

**Resources – Tài nguyên.**

1. [AK16]. CUNG THẾ ANH, TRẦN ĐÌNH KẾ. *Nửa Nhóm Các Toán Tử Tuyến Tính & Ứng Dụng*.

2. [DZ88]. PAUL DUCHATEAU, DAVID W. ZACHMANN. *Schaum's Outlines of Theory and Problems of Partial Differential Equations*.
3. [Eva10]. LAWRENCE C. EVANS. *Partial Differential Equations*.
4. [Kla00]. SERGIU KLAINERMAN. *PDE as a unified subject*.
5. [Tay11]. MICHAEL E. TAYLOR. *PDEs III: Nonlinear Equations*.

Lecture Notes chi tiết hơn về PDEs sẽ được viết riêng. Phần này chỉ giới thiệu những khái niệm cơ bản của PDEs.

## 16 Introduction to Differential Geometry – Nhập Môn Hình Học Vi Phân

### Resources – Tài nguyên.

1. [Car16]. MANFREDO P. DO CARMO. *Differential Geometry of Curves & Surfaces*.
2. [Küh15]. WOLFGANG KÜHNEL. *Differential Geometry: Curves – Surfaces – Manifolds*.
3. [Wal15]. SHAWN W. WALKER. *The Shapes of Things*.

Lecture Notes chi tiết hơn về Hình Học Vi Phân sẽ được viết riêng. Phần này chỉ giới thiệu những khái niệm cơ bản của Hình Học Vi Phân.

## 17 Introduction to Functional Analysis – Nhập Môn Giải Tích Hàm

### Resources – Tài nguyên.

1. [Alt16]. HANS WILHELM ALT. *Linear Functional Analysis*.
2. [Bre11]. HAÏM BREZIS. *Functional Analysis, Sobolev Spaces & PDEs*.
3. [TTV24]. ĐINH NGỌC THANH, BÙI LÊ TRỌNG THANH, HUỖNH QUANG VŨ. *Bài Giảng Giải Tích Hàm*. HCMUS.

Lecture Notes chi tiết hơn về Giải Tích Hàm sẽ được viết riêng. Phần này chỉ giới thiệu những khái niệm cơ bản của Giải Tích Hàm.

## 18 Fourier transform – Biến đổi Fourier

### Resources – Tài nguyên.

1. [Tao12]. TERENCE TAO. *Higher Order Fourier Analysis*.

### 18.1 Discrete Fourier transform – Biến đổi Fourier rời rạc

See, e.g., [Wikipedia/discrete Fourier transform](#). In mathematics, the *discrete Fourier transform (DFT)* converts a finite sequence of equally-spaced **samples** of a function into a same-length sequence of equally-spaced samples of the **discrete-time Fourier transform (DTFT)**, which is a complex-valued function of frequency. The interval at which the DTFT is sampled is the reciprocal of the duration of the input sequence.

**Definition 12** (Discrete Fourier transform). *The discrete Fourier transform transforms a **sequence** of  $N$  complex numbers  $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=0}^{N-1} := x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$  into another sequence of complex numbers,  $\mathbf{X} = \{X_n\}_{n=0}^{N-1} := X_0, X_1, \dots, X_{N-1}$  defined by*

$$X_k := \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi \frac{k}{N} n}. \quad (\text{dFt})$$

*The transform is sometimes denoted by the symbol  $\mathcal{F}$ , as in  $\mathbf{X} = \mathcal{F}\{\mathbf{x}\}$  or  $\mathcal{F}(\mathbf{x})$  or  $\mathcal{F}\mathbf{x}$ .*

## 19 Miscellaneous

### 19.1 Contributors

1. VÕ NGỌC TRÂM ANH [VNTA]. Code C/C++.
2. NGUYỄN LÊ ĐĂNG KHOA [NLDK]. Code C/C++.
3. PHAN VINH TIẾN [PVT]. Proofs of some results in Mathematical Analysis.

## 19.2 See also

1. [Str20]. STEVEN STROGATZ. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe*.
2. [Str24]. STEVEN STROGATZ. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe – Sức Mạnh Vô Hạn: Giải Tích Toán Khám Phá Bí Mật Của Vũ Trụ Như Thế Nào?*  
Nhận xét. 1 quyển sách hay về thường thức về lịch sử phát triển của Giải tích Toán học & các ý tưởng cơ bản nhất của Giải tích. Khuyến khích đọc thử, cũng như các tác phẩm thường thức Khoa học Tự nhiên nói chung & Toán học nói riêng khác của tác giả STEVEN STROGATZ.
3. TS. HUỖNH QUANG VŨ. *Các Bài Giảng Giải Tích*. <https://sites.google.com/view/hquv/teaching>.
  - Bộ Môn Giải Tích, Khoa Toán - Tin học, Faculty of Mathematics & Computer Science, HCMUS. *Giáo Trình Vi Tích Phân 1*.
  - Bộ Môn Giải Tích, Khoa Toán - Tin học, Faculty of Mathematics & Computer Science, HCMUS. *Giáo Trình Vi Tích Phân 2*.
4. *Vietnamese Mathematical Olympiad for High School- & College Students (VMC) – Olympic Toán Học Học Sinh & Sinh Viên Toàn Quốc*.  
PDF: URL: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/blob/main/VMC/NQBH\\_VMC.pdf](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/VMC/NQBH_VMC.pdf).  
TEX: URL: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/blob/main/VMC/NQBH\\_VMC.tex](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/VMC/NQBH_VMC.tex).
  - Codes:
    - C++ code: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/tree/main/VMC/C++](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/C++).
    - Python code: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/tree/main/VMC/Python](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/Python).
  - Resource: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/tree/main/VMC/resource](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/resource).
  - Figures: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/tree/main/VMC/figure](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/figure).
5. *Olympic Tin Học Sinh Viên OLP & ICPC*.  
PDF: URL: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/blob/main/OLP\\_ICPC/NQBH\\_OLP\\_ICPC.pdf](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/OLP_ICPC/NQBH_OLP_ICPC.pdf).  
TEX: URL: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/blob/main/OLP\\_ICPC/NQBH\\_OLP\\_ICPC.tex](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/OLP_ICPC/NQBH_OLP_ICPC.tex).
  - Codes:
    - C: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/tree/main/OLP\\_ICPC/C](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/OLP_ICPC/C).
    - C++: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/tree/main/OLP\\_ICPC/C++](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/OLP_ICPC/C++).
    - Python: [https://github.com/NQBH/advanced\\_STEM\\_beyond/tree/main/OLP\\_ICPC/Python](https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/OLP_ICPC/Python).

## Tài liệu

- [AK16] Cung Thế Anh and Trần Đình Kế. *Nửa Nhóm Các Toán Tử Tuyến Tính & Ứng Dụng*. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2016, p. 222.
- [Alt16] Hans Wilhelm Alt. *Linear functional analysis*. Universitext. An application-oriented introduction, Translated from the German edition by Robert Nürnberg. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2016, pp. xii+435. ISBN: 978-1-4471-7279-6; 978-1-4471-7280-2. DOI: [10.1007/978-1-4471-7280-2](https://doi.org/10.1007/978-1-4471-7280-2). URL: <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-7280-2>.
- [Bre11] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011, pp. xiv+599. ISBN: 978-0-387-70913-0.
- [Car16] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves & surfaces*. Revised & updated second edition of [MR0394451]. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016, pp. xvi+510. ISBN: 978-0-486-80699-0; 0-486-80699-5.
- [DZ88] Paul DuChateau and David W. Zachmann. *Schaum's Outlines of Theory and Problems of Partial Differential Equations*. Schaum's Outline Series. McGraw-Hill Book Company, 1988, p. 241.
- [Eva10] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. Second. Vol. 19. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010, pp. xxii+749. ISBN: 978-0-8218-4974-3. DOI: [10.1090/gsm/019](https://doi.org/10.1090/gsm/019). URL: <https://doi.org/10.1090/gsm/019>.
- [Hùn+23] Trần Quang Hùng, Lê Thị Việt Anh, Phạm Việt Hải, Khiếu Thị Hương, Tạ Công Sơn, Nguyễn Xuân Thọ, Ninh Văn Thu, and Phạm Đình Tùng. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 11 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 176.
- [Kla00] Sergiu Klainerman. “PDE as a unified subject”. In: Special Volume, Part I. GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999). 2000, pp. 279–315. DOI: [10.1007/978-3-0346-0422-2\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-0346-0422-2_10). URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-0346-0422-2\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-0346-0422-2_10).

- [Küh15] Wolfgang Kühnel. *Differential geometry*. Vol. 77. Student Mathematical Library. Curves—surfaces—manifolds, Third edition [of MR1882174], Translated from the 2013 German edition by Bruce Hunt, with corrections and additions by the author. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015, pp. xii+402. ISBN: 978-1-4704-2320-9. DOI: [10.1090/stml/077](https://doi.org/10.1090/stml/077). URL: <https://doi.org/10.1090/stml/077>.
- [Quỳ+20a] Đoàn Quỳnh, Trần Nam Dũng, Nguyễn Vũ Lương, and Đặng Hùng Thắng. *Tài Liệu Chuyên Toán Bài Tập Đại Số & Giải Tích 11*. Tái bản lần 9. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2020, p. 248.
- [Quỳ+20b] Đoàn Quỳnh, Trần Nam Dũng, Nguyễn Vũ Lương, and Đặng Hùng Thắng. *Tài Liệu Chuyên Toán Đại Số & Giải Tích 11*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2020, p. 327.
- [Rud76] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*. Third. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 1976, pp. x+342.
- [Str20] Steven Strogatz. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe*. Mariner Books, 2020, p. 400.
- [Str24] Steven Strogatz. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe – Sức Mạnh Vô Hạn: Giải Tích Toán Khám Phá Bí Mật Của Vũ Trụ Như Thế Nào?* Phạm Văn Thiều dịch. Nhà Xuất Bản Trẻ, 2024, p. 486.
- [Tao12] Terence Tao. *Higher order Fourier analysis*. Vol. 142. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012, pp. x+187. ISBN: 978-0-8218-8986-2. DOI: [10.1090/gsm/142](https://doi.org/10.1090/gsm/142). URL: <https://doi.org/10.1090/gsm/142>.
- [Tao22a] Terence Tao. *Analysis I*. Vol. 37. Texts and Readings in Mathematics. Fourth edition [of 2195040]. Hindustan Book Agency, New Delhi, [2022] ©2022, pp. xvi+355. ISBN: 978-81-951961-9-7.
- [Tao22b] Terence Tao. *Analysis II*. Vol. 38. Texts and Readings in Mathematics. Fourth edition [of 2195041]. Springer, Singapore; Hindustan Book Agency, New Delhi, [2022] ©2022, pp. xvii+195. ISBN: 978-9-81197-284-3. DOI: [10.1007/978-981-19-7284-3](https://doi.org/10.1007/978-981-19-7284-3). URL: <https://doi.org/10.1007/978-981-19-7284-3>.
- [Tay11] Michael E. Taylor. *Partial differential equations III. Nonlinear equations*. Second. Vol. 117. Applied Mathematical Sciences. Springer, New York, 2011, pp. xxii+715. ISBN: 978-1-4419-7048-0. DOI: [10.1007/978-1-4419-7049-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7049-7). URL: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7049-7>.
- [Tes12] Gerald Teschl. *Ordinary differential equations and dynamical systems*. Vol. 140. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012, pp. xii+356. ISBN: 978-0-8218-8328-0. DOI: [10.1090/gsm/140](https://doi.org/10.1090/gsm/140). URL: <https://doi.org/10.1090/gsm/140>.
- [Thá+23a] Đỗ Đức Thái, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang. *Toán 6 Tập 1*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2023, p. 128.
- [Thá+23b] Đỗ Đức Thái, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang. *Toán 6 Tập 2*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2023, p. 108.
- [Thá+25] Đỗ Đức Thái, Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Minh Phương. *Toán 11 Tập 1*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2025, p. 123.
- [Thư+21] Trần Đan Thư, Nguyễn Thanh Phương, Đinh Bá Tiến, and Trần Minh Triết. *Nhập Môn Lập Trình*. Nhà Xuất Bản Khoa Học & Kỹ Thuật, 2021, p. 427.
- [TTV24] Đinh Ngọc Thanh, Bùi Lê Trọng Thanh, and Huỳnh Quang Vũ. *Bài Giảng Giải Tích Hàm*. HCMUS, 2024, p. 114.
- [VMS23] Hội Toán Học Việt Nam VMS. *Kỷ Yếu Kỳ Thi Olympic Toán Học Sinh Viên–Học Sinh Lần Thứ 29*. Huế 2–8/4/2023. VMS, 2023, p. 141.
- [VMS24] Hội Toán Học Việt Nam VMS. *Kỷ Yếu Kỳ Thi Olympic Toán Học Sinh Viên–Học Sinh Lần Thứ 30*. Đà Nẵng 8–13/4/2024. VMS, 2024, p. 112.
- [Wal15] Shawn W. Walker. *The shapes of things*. Vol. 28. Advances in Design and Control. A practical guide to differential geometry and the shape derivative. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2015, pp. ix+154. ISBN: 978-1-611973-95-2. DOI: [10.1137/1.9781611973969.ch1](https://doi.org/10.1137/1.9781611973969.ch1). URL: <https://doi.org/10.1137/1.9781611973969.ch1>.
- [WS10] Robert Wrede and Murray R. Spiegel. *Advanced Calculus*. 3rd edition. Schaum’s Outline Series. McGraw Hill, 2010, p. 456. ISBN: 978-0071623667.