PHÂN TÍCH BÀI TẬP TUẦN 2

TÍNH GIỚI HẠN DÃY SỐ NGÔN NGỮ $\varepsilon - \delta$

Giới hạn hữu hạn

Định nghĩa. Một dãy số thực $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ có giới hạn hữu hạn là $\ell \in \mathbb{R}$ nếu và chỉ nếu với mọi số dương ε, tồn tại số nguyên dương $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star$ để $|u_n - \ell| < \varepsilon$ kể từ chỉ số N_ε đó trở đi, tức là

$$\forall \varepsilon \in (0, \infty),\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star:\ |u_n - \ell| < \varepsilon,\ \forall n \geq N_\varepsilon,$$

khi đó ký hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$.

Lưu ý.

- Ta chỉ cần tìm một chỉ số N_ε đủ lớn thỏa mãn là được. Tuy nhiên, đối với một số bài toán yêu cầu tìm chỉ số N_ε tối ưu, ta phải tìm chỉ số nhỏ nhất trong các chỉ số N_ε thỏa mãn, ký hiệu là $N_\varepsilon^{\text{opt}}$.
- Khi thực hiện các phép biến đổi, cần đặc biệt lưu ý về dấu của bất đẳng thức (ví dụ, nhân/chia cả hai vế với số dương thì dấu không đổi, nhân/chia cả hai vế với số âm thì đổi dấu).

Phương pháp giải.

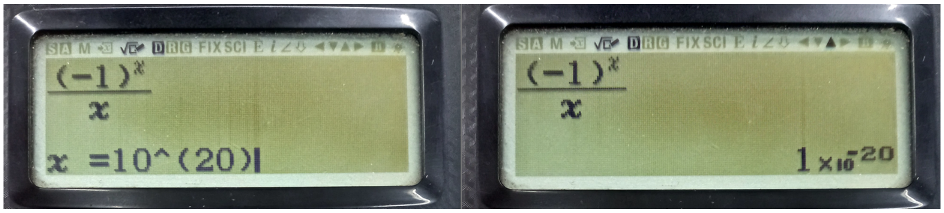
- Bước 1: Tính nhẩm/Nháp/Dùng máy tính để tìm giới hạn của dãy số đã cho, gọi là ℓ (bước này làm ngoài nháp).
- Bước 2: Lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ, xét bất đẳng thức $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
- Bước 3: Dùng các phép biến đổi, cố gắng đưa về $n > \alpha_\varepsilon$ (tức là cần đưa về bất đẳng thức mà n lớn hơn một đại lượng nào đó).
- Bước 4: Khi đó chọn $N_\varepsilon^{\text{opt}} = \lfloor \alpha_\varepsilon \rfloor + 1$.

Ví dụ 1. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ với $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Phân tích.

- Bước 1: Sử dụng máy tính cầm tay CASIO, nhập biểu thức của u_n vào, sau đó `CALC` nhập giá trị n lớn (chẳng hạn 10^{20}, vì $n \to \infty$; nếu máy tính hiển thị kết quả là `Math ERROR` thì khả năng giá trị nhập vào đang quá lớn, cần giảm từ từ số mũ lại). Khi đó ta dự đoán được $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ (do $1 \cdot 10^{-20}$ là một số cực nhỏ nên nếu ta tăng giá trị nhập vào thì kết quả sẽ càng nhỏ hơn, dẫn đến tiến về 0). Như vậy dự đoán được $\ell = 0$.



– Bước 2: Lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ, xét $|u_n - 0| < \varepsilon \iff \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon$.

– Bước 3: Bất đẳng thức trên tương đương với $\dfrac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ (do $|(-1)^n| = 1$). Như vậy $\alpha_\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon}$.

– Bước 4: Do đó nếu chọn $N_\varepsilon^{\text{opt}} = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ thì $|u_n - 0| < \varepsilon$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} = 0$.

Lời giải. Lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ, có $|u_n| = \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$, nên $|u_n| < \varepsilon \iff \dfrac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Suy ra $N_\varepsilon^{\text{opt}} = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, nên nếu chọn $N_\varepsilon := N_\varepsilon^{\text{opt}} = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ thì $|u_n| < \varepsilon$, $\forall n \geq N_\varepsilon$. Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ $\varepsilon - \delta$, suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Ví dụ 2. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ với $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi

$$u_n = \frac{n+2}{n+5},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Phân tích. Sử dụng máy tính cầm tay CASIO, dự đoán được $\ell = 1$.

Lời giải. Lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ, có $|u_n - 1| = \left|\dfrac{n+2}{n+5} - 1\right| = \dfrac{3}{n+5}$, nên $|u_n - 1| < \varepsilon \iff \dfrac{3}{n+5} < \varepsilon \iff n + 5 > \dfrac{3}{\varepsilon} \iff n > \dfrac{3}{\varepsilon} - 5$. Suy ra $N_\varepsilon^{\text{opt}} = \left\lfloor \dfrac{3}{\varepsilon} - 5 \right\rfloor + 1$, nên nếu chọn $N_\varepsilon := N_\varepsilon^{\text{opt}} = \left\lfloor \dfrac{3}{\varepsilon} - 5 \right\rfloor + 1$ thì $|u_n - 1| < \varepsilon$, $\forall n \geq N_\varepsilon$. Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ $\varepsilon - \delta$, suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Ví dụ 3. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ với $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi

$$u_n = \frac{1}{3^n - 1},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Phân tích. Sử dụng máy tính cầm tay CASIO, dự đoán được $\ell = 0$ (lưu ý hàm mũ tăng rất nhanh nên khi `CALC` thì chỉ cần nhập giá trị nhỏ, khoảng 100 chẳng hạn).

Lời giải. Lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ, có $|u_n| = \left|\dfrac{1}{3^n - 1}\right| = \dfrac{1}{3^n - 1}$, nên $|u_n| < \varepsilon \iff \dfrac{1}{3^n - 1} < \varepsilon \iff 3^n - 1 > \dfrac{1}{\varepsilon} \iff 3^n > \dfrac{1}{\varepsilon} + 1 \iff n > \log_3\left(\dfrac{1}{\varepsilon} + 1\right)$. Suy ra $N_\varepsilon^{\text{opt}} = \left\lfloor \log_3\left(\dfrac{1}{\varepsilon} + 1\right) \right\rfloor + 1$, nên nếu chọn $N_\varepsilon := N_\varepsilon^{\text{opt}} = \left\lfloor \log_3\left(\dfrac{1}{\varepsilon} + 1\right) \right\rfloor + 1$ thì $|u_n| < \varepsilon$, $\forall n \geq N_\varepsilon$. Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ $\varepsilon - \delta$, suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Ví dụ 4. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ với $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi

$$u_n = \frac{1 - 2n}{\sqrt{n^2 + 2}},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Phân tích.

- Sử dụng máy tính cầm tay CASIO, dự đoán được $\ell = -2$.

- Tuy nhiên, khi xử lý $|u_n - (-2)| = \left|\dfrac{1-2n}{\sqrt{n^2+2}} + 2\right| = \dfrac{\left|1-2n+2\sqrt{n^2+2}\right|}{\sqrt{n^2+2}}$, ta bị gặp khó khăn trong việc tách riêng n ra để đưa về dạng $n > \alpha_\varepsilon$. Để giải quyết vấn đề này, ta sẽ thực hiện so sánh, làm trội để đưa về biểu thức gọn hơn. Tức là cần tìm một biểu thức lớn hơn biểu thức trên, nhưng vẫn đủ nhỏ so với ε. Vì đã làm trội biểu thức nên chúng ta sẽ không tìm được chỉ số N_ε tối ưu. Lưu ý rằng ở những điểm làm trội, thì phải sử dụng dấu $\Longleftarrow$ thay vì $\Longleftrightarrow$.

Lời giải. Lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ, có $|u_n-(-2)| = \left|\dfrac{1-2n}{\sqrt{n^2+2}} + 2\right| = \dfrac{\left|1-2n+2\sqrt{n^2+2}\right|}{\sqrt{n^2+2}} < \dfrac{1-2n+2\sqrt{n^2+4n+4}}{\sqrt{n^2+2}} = \dfrac{1-2n+2(n+2)}{\sqrt{n^2+2}} = \dfrac{5}{\sqrt{n^2+2}}$, nên $|u_n+2| < \varepsilon \Longleftarrow \dfrac{5}{\sqrt{n^2+2}} < \varepsilon \iff \sqrt{n^2+2} > \dfrac{5}{\varepsilon} \iff n^2+2 > \dfrac{25}{\varepsilon^2} \iff n^2 > \dfrac{25}{\varepsilon^2} - 2 \Longleftarrow n > \sqrt{\dfrac{25}{\varepsilon^2} - 2}$. Suy ra nếu chọn $N_\varepsilon := \left\lfloor \sqrt{\dfrac{25}{\varepsilon^2} - 2} \right\rfloor + 1$ thì $|u_n+2| < \varepsilon,\ \forall n \geq N_\varepsilon$. Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ $\varepsilon - \delta$, suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$.

Ví dụ 5. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ với $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi

$$u_n = \frac{n+1}{3^n},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

- Sử dụng máy tính cầm tay CASIO, dự đoán được $\ell = -2$.

- Trong bài toán này, ta nhận xét rằng $n+1 < 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $n \geq 2$ (có thể chứng minh bằng quy nạp).

Lời giải. Lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ, có $|u_n| = \left|\dfrac{n+1}{3^n}\right| = \dfrac{n+1}{3^n} < \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, nên $|u_n| < \varepsilon \Longleftarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^n < \varepsilon \iff n > \log_{2/3}\varepsilon$. Suy ra nếu chọn $N_\varepsilon := \left\lfloor \log_{2/3}\varepsilon \right\rfloor + 1$ thì $|u_n| < \varepsilon,\ \forall n \geq N_\varepsilon$. Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ $\varepsilon - \delta$, suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Giới hạn vô cực

> **Định nghĩa.** Một dãy số thực $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ có giới hạn là ∞ nếu và chỉ nếu với mọi số dương M, tồn tại số nguyên dương $N_M \in \mathbb{N}^\star$ để $u_n > M$ kể từ chỉ số N_M đó trở đi, tức là
>
> $$\forall M \in (0,\infty),\ \exists N_M \in \mathbb{N}^\star:\ u_n > M,\ \forall n \geq N_M,$$
>
> khi đó ký hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$

Lưu ý.

- Ta chỉ cần tìm một chỉ số N_M đủ lớn thỏa mãn là được. Tuy nhiên, đối với một số bài toán yêu cầu tìm chỉ số N_M tối ưu, ta phải tìm chỉ số nhỏ nhất trong các chỉ số N_M thỏa mãn, ký hiệu là N_M^{opt}.

- Từ định nghĩa trên, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty \iff \lim\limits_{n\to\infty} (-u_n) = \infty$.

Phương pháp giải.

- Bước 1: Tính nhẩm/Nháp/Dùng máy tính để tìm giới hạn của dãy số đã cho (bước này làm ngoài nháp), xét trường hợp ∞ (nếu là trường hợp $-\infty$ thì quy về chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty}(-u_n) = \infty$).
- Bước 2: Lấy $M > 0$ bất kỳ, xét bất đẳng thức $u_n > M$.
- Bước 3: Dùng các phép biến đổi, cố gắng đưa về $n > \alpha_M$ (tức là cần đưa về bất đẳng thức mà n lớn hơn một đại lượng nào đó).
- Bước 4: Khi đó chọn $N_M^{\text{opt}} = \lfloor \alpha_M \rfloor + 1$.

Ví dụ 6. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ với $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi

$$u_n = \sqrt{n + 2025},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Phân tích.

- Bước 1: Sử dụng máy tính cầm tay CASIO, dự đoán được $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$.
- Bước 2: Lấy $M > 0$ bất kỳ, xét $u_n > M \iff \sqrt{n+2025} > M$.
- Bước 3: Bất đẳng thức trên tương đương với $n + 2025 > M^2 \iff n > M^2 - 2025$. Như vậy $\alpha_M = M^2 - 2025$.
- Bước 4: Do đó nếu chọn $N_M^{\text{opt}} = \lfloor M^2 - 2025 \rfloor + 1$ thì $u_n > M$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$.

Lời giải. Lấy $M > 0$ bất kỳ, có $u_n > M \iff \sqrt{n+2025} > M \iff n+2025 > M^2 \iff n > M^2 - 2025$. Suy ra $N_M^{\text{opt}} = \lfloor M^2 - 2025 \rfloor + 1$, nên nếu chọn $N_M := N_M^{\text{opt}} = \lfloor M^2 - 2025 \rfloor + 1$ thì $u_n > M,\ \forall n \geq N_M$. Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ $\varepsilon - \delta$, suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \infty$.

Ví dụ 7. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ với $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi

$$u_n = \frac{1-n^2}{n},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Phân tích.

- Bước 1: Sử dụng máy tính cầm tay CASIO, dự đoán được $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$ nên ta sẽ chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty}(-u_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-1}{n} = \infty$.
- Bước 2: Lấy $M > 0$ bất kỳ, xét $-u_n > M \iff \dfrac{n^2-1}{n} > M$.
- Bước 3: Bất đẳng thức trên tương đương với $n^2 - 1 > Mn \iff \left[\begin{array}{l} n > \dfrac{M+\sqrt{M^2+4}}{2} \\ n < \dfrac{M-\sqrt{M^2+4}}{2} \end{array}\right.$, ở đây $\dfrac{M \pm \sqrt{M^2+4}}{2}$ là hai nghiệm của phương trình $n^2 - Mn - 1 = 0$. Như vậy $\alpha_M = \dfrac{M+\sqrt{M^2+4}}{2}$.

– Bước 4: Do đó nếu chọn $N_M^{\text{opt}} = \left\lfloor \dfrac{M + \sqrt{M^2+4}}{2} \right\rfloor + 1$ thì $-u_n > M$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} -u_n = \infty$, kéo theo $\lim\limits_{n\to\infty} -u_n = -\infty$.

Lời giải. Lấy $M > 0$ bất kỳ, có $-u_n > M \iff \dfrac{n^2-1}{n} > M \iff n^2 - 1 > Mn \iff \left[\begin{array}{l} n > \dfrac{M+\sqrt{M^2+4}}{2} \\ n < \dfrac{M-\sqrt{M^2+4}}{2} \end{array}\right.$. Suy ra $N_M^{\text{opt}} = \left\lfloor \dfrac{M+\sqrt{M^2+4}}{2} \right\rfloor + 1$, nên nếu chọn $N_M \coloneqq N_M^{\text{opt}} = \left\lfloor \dfrac{M+\sqrt{M^2+4}}{2} \right\rfloor + 1$ thì $u_n > M,\ \forall n \geq N_M$. Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ $\varepsilon - \delta$, suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} -u_n = \infty$, kéo theo $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Bài tập rèn luyện

Bài toán 1. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ với $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi

$$u_n = \frac{1}{n^{2025}}, \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Bài toán 2. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ với $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi

$$u_n = \frac{1}{n(n+3)}, \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Bài toán 3. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ với $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi

$$u_n = \frac{\sqrt{n+2024}}{n+2025}, \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Bài toán 4. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ với $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi

$$u_n = \frac{\sin n}{n^3}, \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Bài toán 5. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ với $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi

$$u_n = \frac{n+1}{\sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Bài toán 6. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ với $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi

$$u_n = \frac{n^3+n}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Tài liệu tham khảo

[1] James Stewart. *Calculus: Early Transcendentals*. 9th edition. Brooks Cole, 2020.

[2] Nguyễn Quản Bá Hồng. *Bài giảng: Giải tích Toán học*. 2025.