Lecture Note: Mathematical Analysis – Bài Giảng: Giải Tích Toán Học

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 16 tháng 5 năm 2025

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Advanced STEM & Beyond*:
URL: https://nqbh.github.io/advanced_STEM/.
Latest version:

- *Lecture Note: Mathematical Analysis – Bài Giảng: Giải Tích Toán Học.*
  PDF: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/lecture/NQBH_mathematical_analysis_lecture.pdf.
  TEX: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/lecture/NQBH_mathematical_analysis_lecture.tex.
- *Slide: Mathematical Analysis – Slide: Giải Tích Toán Học.*
  PDF: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/slide/NQBH_mathematical_analysis_slide.pdf.
  TEX: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/slide/NQBH_mathematical_analysis_slide.tex.
- Codes:
  - C++: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/analysis/C++.
  - Python: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/analysis/Python.

Mục lục

*A scientist- & creative artist wannabe, a mathematics & computer science lecturer of Department of Artificial Intelligence & Data Science (AIDS), School of Technology (SOT), UMT Trường Đại học Quản lý & Công nghệ TP.HCM, Hồ Chí Minh City, Việt Nam.
E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com & hong.nguyenquanba@umt.edu.vn. Website: https://nqbh.github.io/. GitHub: https://github.com/NQBH.

1 Basic Mathematical Analysis – Giải Tích Toán Học Cơ Bản

Resources – Tài nguyên.

1. Đặng Đình Áng. *Nhập Môn Giải Tích.*
2. [Rud76]. Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.*
3. [Tao22a]. Terence Tao. *Analysis I.*
4. [Tao22b]. Terence Tao. *Analysis II.*

Question 1 (Definition of mathematical analysis)**.** *What is mathematical analysis? Cf. mathematical analysis with other types of analysis.*

For answers, see, e.g., [Tao22a, Chap. 1, Sect. 1.1: *What Is Analysis?*, pp. 1–2], Wikipedia/mathematical analysis. For other types of analysis, see, e.g., Wikipedia/analysis.

Question 2 (Motivation of mathematical analysis)**.** *Why do mathematical analysis?*

For answers, see, e.g., [Tao22a, Chap. 1, Sect. 1.2: *Why Do Analysis?*, pp. 2–10]

Example 1 (Division by zero & infinity)**.** *The cancellation law for multiplication $ac = bc \Rightarrow a = b$ does not work when $c = 0$ & $c = \pm\infty$. The cancellation law for addition $a + c = b + c \Rightarrow a = b$.*

Example 2 (Cancellation properties)**.**

See, e.g., Wikipedia/cancellation property.

Example 3 (Geometric series – Chuỗi hình học)**.** *When does the geometric series $G(a) \coloneqq \sum_{i=0}^\infty \frac{1}{a^i}$ converge? When does $G(a)$ diverge?*

1.1 Numbers – Các loại số

Trong chương trình Toán phổ thông, học sinh đã được học: số tự nhiên ở chương trình Toán 6 [Thá+23a; Thá+23b], & số hữu tỷ & số thực ở chương trình Toán 7,

1.2 Notations & conventions – Ký hiệu & quy ước

Đặt tập hợp các đa thức (polynomial) 1 biến với hệ số nguyên, hệ số hữu tỷ, hệ số thực, hệ số phức lần lượt cho bởi:

$$\mathbb{Z}[x] \coloneqq \left\{\sum_{i=0}^n a_ix^i; n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{Z},\ \forall i = 0,\ldots,n,\ a_n \neq 0\right\},$$
$$\mathbb{Q}[x] \coloneqq \left\{\sum_{i=0}^n a_ix^i; n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{Q},\ \forall i = 0,\ldots,n,\ a_n \neq 0\right\},$$
$$\mathbb{R}[x] \coloneqq \left\{\sum_{i=0}^n a_ix^i; n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{R},\ \forall i = 0,\ldots,n,\ a_n \neq 0\right\},$$
$$\mathbb{C}[x] \coloneqq \left\{\sum_{i=0}^n a_ix^i; n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{C},\ \forall i = 0,\ldots,n,\ a_n \neq 0\right\}.$$

Ta có quan hệ hiển nhiên $\mathbb{N}[x] \subset \mathbb{Z}[x] \subset \mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$. Tổng quát, với $\mathbb{F}$ là 1 trường bất kỳ, tập hợp các đa thức 1 biến với hệ số thuộc trường $\mathbb{F}$ (e.g., $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) cho bởi:

$$\mathbb{F}[x] \coloneqq \left\{\sum_{i=0}^n a_ix^i; n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{F},\ \forall i = 0,\ldots,n,\ a_n \neq 0\right\}.$$

Tập xác định của đa thức có thể là toàn bộ trường số thực $\mathbb{R}$ hoặc trường số phức $\mathbb{C}$, i.e., $D_P = \mathrm{dom}(P) = \mathbb{R}$ or $D_P = \mathrm{dom}(P) = \mathbb{C}$, tùy vào trường $\mathbb{F}$ của các hệ số & mục đích sử dụng đa thức.

Problem 1 (Cf: Calculus vs. Mathematical Analysis). *Distinguish & compare Calculus vs. Mathematical Analysis.*

Analysis is more pure mathematics. Calculus is more applied mathematics.

Problem 2 (Examples & counterexamples in mathematical analysis – Ví dụ & phản ví dụ trong phân tích toán học). *Find, from simple to advanced, examples & counterexamples to each mathematical concepts & mathematical results, including lemmas, propositions, theorems, & consequences.*

– Tìm các ví dụ & phản ví dụ từ đơn giản đến nâng cao cho mỗi khái niệm toán học & kết quả toán học, bao gồm các bổ đề, mệnh đề, định lý, & hệ quả.

Problem 3 (Python `SymPy`). *Study* `SymPy` *to support calculus & mathematical analysis.*

Definition 1 (Neighborhood, [WS10], p. 6). *The set of all points x s.t. $|x-a|<\delta$, where $\delta>0$, is called a δ* neighborhood *of the point a. The set of all points x s.t. $0<|x-a|<\delta$, in which $x=a$ is excluded, is called a* deleted δ neighborhood *of a or an open ball of radius δ about a.*

Theorem 1 (Bolzano–Weierstrass theorem). *Every bounded infinite set has at least 1 limit point.*

Definition 2 (Algebraic- & transcendental numbers – số đại số & số siêu việt). *A number $x\in\mathbb{R}$ which is a solution to the* polynomial equation

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \tag{1}$$

where $n\in\mathbb{N}^\star$, called the degree *of the equation, $a_i\in\mathbb{Z}$, $\forall i=0,1,\ldots,n$, $a_n\neq 0$, is called an* algebraic number. *A number which cannot be expressed as a solution of any polynomial equation with integer coefficients is called a* transcendental number.

Theorem 2 (Common transcendental numbers). *π, e are transcendental.*

Theorem 3 (Countability of sets of algebraic- & transcendental numbers). *(i) The set of algebraic numbers is a countably infinite set. (ii) The set of transcendental numbers is noncountably infinite.*

2 Sequence – Dãy Số

- **sequence** [n] /ˈsiːkwəns/ 1. [countable] *sequence (of sth)* a set of events, actions, numbers, etc. which have a particular order & which lead to a particular result; 2. [countable, uncountable] the order that events, actions, etc. happen in or should happen in; 3. [countable] a part of a film that deals with 1 subject or topic or consists of 1 scene. [v] 1. *sequence sth* (specialist) to arrange things into a sequence; 2. *sequence sth* (biology) to identify the order in which a set of genes or parts of molecules are arranged.

Resources – Tài nguyên.

1. [Rud76]. Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. Chap. 3: Numerical Sequences & Series.
2. [Tao22a]. Terence Tao. *Analysis I*.
3. [Tao22b]. Terence Tao. *Analysis II*.
4. [WS10]. Robert Wrede, Murray R. Spiegel. *Advanced Calculus*. 3e. Schaum's Outline Series. Chap. 2: Sequences.

This section deals primarily with sequences of real- & complex numbers, sequences in Euclidean spaces, or even in metric spaces.

– Phần này chủ yếu đề cập đến các dãy số thực & phức, các dãy trong không gian Euclid hoặc thậm chí trong không gian metric.

2.1 Definition of a sequence – Định nghĩa của dãy số

Definition 3 (Numerical sequence – dãy số, [WS10], p. 25). *A* sequence *is a set of numbers $u_1,u_2,\ldots$ in a definite order of arrangement (i.e., a* correspondence *with the natural numbers or a subset thereof) & formed according to a definite rule. Each number in the sequence is called a* term*; u_n is called the* nth term. *The sequence is called* finite *or* infinite *according as there are or are not a finite number of terms. The sequence $u_1,u_2,\ldots$ is also designated briefly by $\{u_n\}$.*

Có thể hiểu khái niệm dãy (sequence) ở đây 1 cách tổng quát hơn là 1 dãy các đối tượng Toán học hoặc Tin học, e.g., dãy số phức $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ là 1 dãy gồm các số $a_n\in\mathbb{C}$, $\forall n=1,2,\ldots$, dãy các hàm số thực $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ là 1 dãy gồm các hàm số $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\forall n=1,2,\ldots$, hay dãy các dãy $\{\{a_{m,n}\}_{n=1}^\infty\}_{m=1}^\infty$ tức 1 dãy gồm các phần tử của dãy lại là các dãy số $\{a_{m,n}\}_{n=1}^\infty$, $\forall m=1,2,\ldots$ Trước hết, ta tập trung là khái niệm dãy đơn giản nhất: dãy số – numerical sequence, trước khi đến với khái niệm *hội tụ đều* của dãy hàm (uniform convergence of sequences of functions).

2.2 Convergent- & divergent sequences – Dãy số hội tụ & dãy số phân kỳ

Definition 4 (Limit of a sequence, [WS10], p. 25). *A number $l \in \mathbb{R}$ is called the* limit *of an infinite sequence $u_1, u_2, \ldots$ if for any positive number ϵ we can find a positive number N depending on ϵ s.t. $|u_n - l| < \epsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > N$. In such case we write $\lim_{n\to\infty} u_n = l$.*

Definition 5 (Convergent sequences, [Rud76], Def. 3.1, p. 47). *A sequence $\{p_n\}$ in a metric space X is said to* converge *if there is a point $p \in X$ with the following property: For every $\varepsilon > 0$ there is an integer N such that $n \ge N$ implies that $d(p_n, p) < \varepsilon$. (Here d denotes the* distance *in X.) In this case we also say that $\{p_n\}$ converges to p, or that p is the* limit *of $\{p_n\}$, & we write $p_n \to p$, or $p_n \to p$ as $n \to \infty$, or $\lim_{n\to\infty} p_n = p$. If $\{p_n\}$ does not converge, it is said to* diverge.

Remark 1. *Định nghĩa 5 về dãy hội tụ trong các không gian metric không chỉ phụ thuộc vào bản thân dãy $\{p_n\}$ mà còn vào chính không gian metric X. Nhân tiện, vì ở đây đang xét không gian metric mà mỗi phần tử của nó được coi là 1 điểm (point), nên thành phần của dãy số được ký hiệu là p_n để ám chỉ bản chất của mỗi phần tử của dãy là 1 điểm trong không gian metric tổng quát X. Nếu $X = \mathbb{R}$ hoặc $X = \mathbb{C}$ thì mỗi điểm trên trục số thực hoặc 1 số phức $z = a + bi$ tương ứng với điểm (a, b) trên mặt phẳng phức $\mathbb{R}^2$, khi đó ký hiệu p_n có thể được thay bởi các ký hiệu quen thuộc hơn cho số (numerals), e.g., $a_n, x_n, \ldots$*

In cases of possible ambiguity, we can be more precise & specify "convergent in X" rather than "convergent".
– Trong trường hợp có thể có sự mơ hồ, chúng ta có thể chính xác hơn & cụ thể hơn "hội tụ trong X" thay vì "hội tụ".

Definition 6 (Range of a sequence, bounded sequence). *The set of all points p_n, $n = 1, 2, \ldots$, is the* range *of $\{p_n\}$. The range of a sequence may be a finite set, or it may be infinite. The sequence $\{p_n\}$ is said to be* bounded *if its range is bounded.*

Problem 4. *Prove: (a) If $s_n = \frac{1}{n}$, then $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$; the range is infinite, & the sequence is bounded. (b) If $s_n = n^2$, the sequence $\{s_n\}$ is unbounded, is divergent, & has infinite range. (c) If $s_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$, the sequence $\{s_n\}$ converges to 1, is bounded, & has infinite range. (d) If $s_n = i^n$, the sequence $\{s_n\}$ is divergent, is bounded, & has finite range. (e) If $s_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, then $\{s_n\}$ converges to 1, is bounded, & has finite range. (f) Find similar examples.*

Theorem 4 (Some important properties of convergent sequences in metric spaces, [Rud76], Thm. 3.2, p. 48). *Let $\{p_n\}$ be a sequence in a metric space X.*

(a) $\{p_n\}$ converges to $p \in X$ iff every neighborhood of p contains all but finitely many of the terms of $\{p_n\}$.

(b) (Uniqueness of limit) *If $p \in X, p' \in X$, & if $\{p_n\}$ converges to p & to p', then $p' = p$.*

(c) If $\{p_n\}$ converges, then $\{p_n\}$ is bounded.

(d) If $E \subset X$ & if p is a limit point of E, then there is a sequence $\{p_n\}$ in E such that $p = \lim_{n\to\infty} p_n$.

For sequences in Euclidean spaces $\mathbb{R}^d$, we can study the relation between convergence & the algebraic operations.

Theorem 5 (Algebraic operations on limit of sequences of complex numbers, [Rud76], Thm. 3.3, p. 49). *Suppose $\{a_n\}, \{b_n\}$ are complex sequences, & $\lim_{n\to\infty} a_n = a$,$\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Then:*

(a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$.

(b) $\lim_{n\to\infty} ca_n = ca$, $\lim_{n\to\infty}(c + a_n) = c + \lim_{n\to\infty} a_n = c + a$, $\forall c \in \mathbb{C}$.

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n = ab$.

(d) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a}$, provided $a_n \ne 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, & $a \ne 0$.

Theorem 6 (Algebraic operations on limit of sequences in Euclidean spaces, [Rud76], Thm. 3.4, p. 50).

(a) Suppose $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^d$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, & $\mathbf{x}_n = (x_{1,n}, \ldots, x_{d,n})$. Then $\{\mathbf{x}_n\}$ converges to $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ iff $\lim_{n\to\infty} x_{i,n} = x_i$, $\forall i = 1, \ldots, k$.

(b) Suppose $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^\infty, \{\mathbf{y}_n\}_{n=1}^\infty$ are sequences in $\mathbb{R}^d$, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ is a sequence of reals, & $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}, \mathbf{y}_n \to \mathbf{y}, a_n \to a$. Then

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n = \mathbf{x} + \mathbf{y},\ \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n \cdot \mathbf{y}_n = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y},\ \lim_{n\to\infty} a_n \mathbf{x}_n = a\mathbf{x}.$$

2.3 Subsequences – Dãy con

Definition 7. *Given a sequence $\{p_n\}_{n=1}^\infty$, consider a sequence $\{n_k\}$ of positive integers, s.t. $n_1 < n_2 < \cdots$. Then the sequence $\{p_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ is called a* subsequence *of $\{p_n\}_{n=1}^\infty$. If $\{p_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ converges, its limit is called a* subsequential limit *of $\{p_n\}_{n=1}^\infty$.*

Problem 5. *Prove that $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ converges to p iff every subsequence of $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ converges to p.*

Theorem 7 ([Rud76], Thm. 3.6, p. 50).

(a) If $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ is a sequence in a compact metric space X, then some subsequence of $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ converges to a point of X.

(b) Every bounded sequence in $\mathbb{R}^d$ contains a convergent subsequence.

Theorem 8 ([Rud76], Thm. 3.7, p. 52). *The subsequential limits of a sequence $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ in a metric space X form a closed subset of X.*

2.4 Limit of sequences – Giới hạn của dãy số

Định nghĩa 1 (Dãy số thực có giới hạn 0, [Thá+25], p. 60)**.** *Dãy số thực* $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ *có giới hạn 0 khi n dần tới dương vô cực nếu* $|u_n|$ *có thể nhỏ hơn 1 số dương bé tùy ý, kể từ 1 số hạng nào đó trở đi, ký hiệu* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Notation. Ngoài ký hiệu, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, ta cũng sử dụng các ký hiệu: $\lim u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to \infty$.

Nhận xét 1. *Nếu* u_n *ngày càng gần tới 0 khi n ngày càng lớn thì* $\lim u_n = 0$.

Định nghĩa 2 (Dãy số thực có giới hạn 0 theo ngôn ngữ ε-δ)**.** *1 dãy số thực* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *có giới hạn 0 nếu & chỉ nếu với mọi số nguyên dương* ε*, tồn tại 1 số nguyên dương* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star$ *để* $|u_n| < \varepsilon$ *kể từ chỉ số* N_ε *đó trở đi:*

$$\forall\varepsilon \in (0,\infty),\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star,\ |u_n| < \varepsilon,\ \forall n \ge N_\varepsilon,$$

hay tương đương:

$$\forall\varepsilon \in (0,\infty),\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star,\ n \ge N_\varepsilon \Rightarrow |u_n| < \varepsilon.$$

Remark 2 (Optimal/smallest/best indices – Các chỉ số tối ưu/nhỏ nhất/tốt nhất)**.** *Định nghĩa 2 chỉ yêu cầu tồn tại* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star$ *đủ lớn với mỗi* $\varepsilon \in (0,\infty)$*. Tuy nhiên nếu tìm được chỉ số* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star$ *tối ưu, i.e., chỉ số nhỏ nhất trong các chỉ số* N_ε *thỏa mãn, i.e.:*

$$N_\varepsilon^{\rm opt} \coloneqq \min\{N_\varepsilon \in \mathbb{N}; |u_n| < \varepsilon,\ \forall n \ge N_\varepsilon\} = \min\{N_\varepsilon \in \mathbb{N}; n \ge N_\varepsilon \Rightarrow |u_n| < \varepsilon\}.$$

thì ta có thể sử dụng ký hiệu $N_\varepsilon^{\rm opt}$ *để chỉ rõ tính tối ưu (i.e., nhỏ nhất, chặt/ngặt nhất) của* N_ε.

Remark 3 (Ceil- vs. floor functions)**.**

$$\lceil x\rceil = \begin{cases} \lfloor x\rfloor & \text{if } x \in \mathbb{Z},\\ \lfloor x\rfloor + 1 & \text{if } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}.\end{cases} = \lfloor x\rfloor + \chi_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}}(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 1 ([Thá+25], p. 60)**.** *Chứng minh* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ *& chỉ ra* $N_\varepsilon^{\rm opt}$ *với* $\varepsilon = 0.1, 0.01, 10^{-n}, \forall n \in \mathbb{N}$*, & với* $\varepsilon > 0$ *bất kỳ: (a)* $u_n = 0$*. (b)* $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$*. (c)* $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$*. (d)* $u_n = -\frac{1}{\sqrt{n}}$*. (e)* $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *(f)* $u_n = \frac{a\epsilon_n}{n^b}$ *với* $\{\epsilon_n\}_{n=1}^\infty \subset \{\pm 1\}$, $a \in \mathbb{R}, b \in (0,\infty)$.

Chứng minh. (a) Lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ, có $|u_n| = |0| = 0 < \varepsilon$, $\forall n \ge 1$. Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ ε-δ, suy ra $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Ta có thể chọn $N_\varepsilon \coloneqq N_\varepsilon^{\rm opt} = 1$, $\forall\varepsilon > 0$, nên $N_{0.1}^{\rm opt} = N_{0.01}^{\rm opt} = N_{10^{-n}}^{\rm opt} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ, có $|u_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$, nên $|u_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow N_\varepsilon^{\rm opt} = \left\lfloor\frac{1}{\varepsilon}\right\rfloor + 1$, nên nếu chọn $N_\varepsilon \coloneqq N_\varepsilon^{\rm opt} = \left\lfloor\frac{1}{\varepsilon}\right\rfloor + 1$ thì $|u_n| < \varepsilon$, $\forall n \ge N_\varepsilon$. Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ ε-δ, suy ra $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

(c) Lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ, có $|u_n| = \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}}$, nên $|u_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow N_\varepsilon^{\rm opt} = \left\lfloor\frac{1}{\varepsilon^2}\right\rfloor + 1$, nên nếu chọn $N_\varepsilon \coloneqq N_\varepsilon^{\rm opt} = \left\lfloor\frac{1}{\varepsilon^2}\right\rfloor + 1$ thì $|u_n| < \varepsilon$, $\forall n \ge N_\varepsilon$. Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ ε-δ, suy ra $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

(d) Lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ, có $|u_n| = \left|-\frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}}$, nên $|u_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow N_\varepsilon^{\rm opt} = \left\lfloor\frac{1}{\varepsilon^2}\right\rfloor + 1$, nên nếu chọn $N_\varepsilon \coloneqq N_\varepsilon^{\rm opt} = \left\lfloor\frac{1}{\varepsilon^2}\right\rfloor + 1$ thì $|u_n| < \varepsilon$, $\forall n \ge N_\varepsilon$. Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ ε-δ, suy ra $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

(e) Lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ, có $|u_n| = \left|\frac{a\epsilon_n}{n^b}\right| = \frac{|a|}{n^b}$, nên $|u_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{|a|}{n^b} < \varepsilon \Leftrightarrow n^b > \frac{|a|}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \left(\frac{|a|}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{b}} \Rightarrow N_\varepsilon^{\rm opt} = \left\lfloor\left(\frac{|a|}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{b}}\right\rfloor + 1$, nên nếu chọn $N_\varepsilon \coloneqq N_\varepsilon^{\rm opt} = \left\lfloor\left(\frac{|a|}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{b}}\right\rfloor + 1$ thì $|u_n| < \varepsilon$, $\forall n \ge N_\varepsilon$. Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ ε-δ, suy ra $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. □

Remark 4 (Dấu của số hạng của dãy số có giới hạn 0)**.** *Đối với bài toán chứng minh dãy* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *có* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ *thì dấu của từng số hạng* u_n *của dãy* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *không quan trọng lắm, i.e.,* $\operatorname{sgn} u_n$ *không làm ảnh hưởng tới bất đẳng thức* $|u_n| < \varepsilon$ *trong định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ* ε-δ *vì sau khi lấy giá trị tuyệt đối,* $|u_n| \ge 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$.

Bài toán 2. *(a) Chứng minh* $\lim \frac{1}{2^n} = 0$*. (b) Viết chương trình* C/C++, Python *để tính* $N_\varepsilon^{\rm opt}$ *với* $\varepsilon \in (0,\infty)$ *được nhập từ bàn phím.*

Bài toán 3. *(a) Chứng minh* $\lim \frac{n}{n+1} = 1$*. (b) Viết chương trình* C/C++, Python *để tính* $N_\varepsilon^{\rm opt}$ *với* $\varepsilon \in (0,\infty)$ *được nhập từ bàn phím.*

Bài toán 4. *Cho dãy* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *có* $\lim_{n\to\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$*. Chứng minh* $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$ *với* $v_n = u_n - u_{n-1}$*. (b)* $\lim_{n\to\infty} u_n - u_{n-1} = 0$ *có suy ra được* $\lim_{n\to\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ *không?*

Định nghĩa 3 (Dãy số thực có giới hạn hữu hạn, [Thá+25], p. 61)**.** *Dãy số thực* $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ *có giới hạn hữu là* $l \in \mathbb{R}$ *khi* n *dần tới dương vô cực nếu* $\lim_{n\to\infty}(u_n - l) = 0$*, ký hiệu* $\lim_{n\to\infty} u_n = L$*.*

Notation. Ngoài ký hiệu $\lim_{n\to\infty} u_n = l$, ta cũng sử dụng các ký hiệu $\lim u_n = L$ hay $u_n \to l$ khi $n \to \infty$.

Nhận xét 2. *Nếu* u_n *ngày càng gần tới* l *khi* n *ngày càng lớn thì* $\lim u_n = l$*.*

Định nghĩa 4 (Dãy số thực có giới hạn thực theo ngôn ngữ ε-δ)**.** *1 dãy số thực* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *có giới hạn hữu hạn là* $l \in \mathbb{R}$ *nếu & chỉ nếu với mọi số nguyên dương* ε*, tồn tại 1 số nguyên dương* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star$ *để* $|u_n - l| < \varepsilon$ *kể từ chỉ số* N_ε *đó trở đi:*

$$\forall\varepsilon \in (0,\infty),\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star,\ |u_n| < \varepsilon,\ \forall n \ge N_\varepsilon,$$

hay tương đương:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star,\ n \ge N_\varepsilon \Rightarrow |u_n| < \varepsilon.$$

Remark 5 (Optimal/smallest/best indices – Các chỉ số tối ưu/nhỏ nhất/tốt nhất)**.** *Định nghĩa 2 chỉ yêu cầu tồn tại* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star$ *đủ lớn với mỗi* $\varepsilon \in (0,\infty)$*. Tuy nhiên nếu tìm được chỉ số* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star$ *tối ưu, i.e., chỉ số nhỏ nhất trong các chỉ số* N_ε *thỏa mãn, i.e.:*

$$N_\varepsilon^{\rm opt} := \min\{N_\varepsilon \in \mathbb{N}; |u_n| < \varepsilon,\ \forall n \ge N_\varepsilon\} = \min\{N_\varepsilon \in \mathbb{N}; n \ge N_\varepsilon \Rightarrow |u_n| < \varepsilon\}.$$

thì ta có thể sử dụng ký hiệu $N_\varepsilon^{\rm opt}$ *để chỉ rõ tính tối ưu (i.e., nhỏ nhất, chặt/ngặt nhất) của* N_ε*.*

Bài toán 5. *Tính* $\lim_{n\to\infty} u_n$ *với: (a)* $u_n = c \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$*. (b)* $u_n = \dfrac{an+b}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$*, với* $a, b \in \mathbb{R}$*. (c)* $u_n = \dfrac{an+b}{cn+d}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$ *với* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *thỏa* $cn + d \ne 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$*.*

Chứng minh. (a) Lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ, có $|u_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$, $\forall n \ge 1$, suy ra $N_\varepsilon^{\rm opt} = 1$, $\forall\varepsilon \in (0,\infty)$. Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ ε-δ, suy ra $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

(b) Lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ, có $|u_n - a| = \left|\dfrac{an+b}{n} - a\right| = \left|\dfrac{b}{n}\right| = \dfrac{|b|}{n}$, nên $|u_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{|b|}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \dfrac{|b|}{\varepsilon} \Rightarrow N_\varepsilon^{\rm opt} = \left\lfloor\dfrac{|b|}{\varepsilon}\right\rfloor + 1$, nên nếu chọn $N_\varepsilon := N_\varepsilon^{\rm opt} = \left\lfloor\dfrac{|b|}{\varepsilon}\right\rfloor + 1$ thì $|u_n| < \varepsilon$, $\forall n \ge N_\varepsilon$. Theo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ ε-δ, suy ra $\lim_{n\to\infty} u_n = a$. □

Bài toán 6 (Programming: Compute $N_\varepsilon^{\rm opt}$)**.** *Cho* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *có giới hạn* $\lim_{n\to\infty} u_n = L$*. Viết chương trình* C/C++, Python*, với* $\varepsilon \in (0,\infty)$ *được nhập từ bàn phím, output* N_ε*: (a)* $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$*. (b)* $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ *&* $u_n = -\dfrac{1}{\sqrt{n}}$*. (c)* $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$*.*

Python: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/Python/limit.py.

```
from math import sqrt

def ua(n):
    return (-1)**n / n

def ub(n):
    return 1 / sqrt(n)

def uc(n):
    return -1 / sqrt(n)

def ud(n):
    return (-1)**n / sqrt(n)

MAX_LOOP = 100000
epsilon = float(input())

for i in range(1, MAX_LOOP + 1):
    if abs(ua(i)) < epsilon:
        print(i) # N_epsilon
        break

for i in range(1, MAX_LOOP + 1):
    if abs(ub(i)) < epsilon:
        print(i) # N_epsilon
        break

for i in range(1, MAX_LOOP + 1):
    if abs(uc(i)) < epsilon:
```

```
        print(i) # N_epsilon
        break

for i in range(1, MAX_LOOP + 1):
    if abs(ud(i)) < epsilon:
        print(i) # N_epsilon
        break
```

C++:

- NLDK's C++ script to compute $N_\varepsilon^{\rm opt}$:
  URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/C%2B%2B/NLDK_limit.cpp.

```
#include<bits/stdc++.h>
#define Sanic_speed ios_base::sync_with_stdio(false);cin.tie(NULL);cout.tie(NULL);
#define el "\n";
#define fre(i, a, b) for(int i = a; i <= b; ++i)
using namespace std;

double long qa(int n) {
    return (pow(-1, n)/n);
}
double long qb(int n) {
    double long deno = sqrt(n);
    return (1/deno);
}
double long qc(int n) {
    double long deno = sqrt(n);
    return (-1/deno);
}
double long qd(int n) {
    double long deno = sqrt(n);
    return (pow(-1, n)/deno);
}

void solve() {
    double long epsilon;
    cin >> epsilon;
    int maxN = 100000;
    fre(i, 1 ,maxN) {
        if (abs(qa(i)) < epsilon) {
            cout << "a) " << i << el
            break;
        }
    }
    fre(i, 1 ,maxN) {
        if (abs(qb(i)) < epsilon) {
            cout << "b) " << i << el
            break;
        }
    }
    fre(i, 1 ,maxN) {
        if (abs(qc(i)) < epsilon) {
            cout << "c) " << i << el
            break;
        }
    }
    fre(i, 1 ,maxN) {
        if (abs(qd(i)) < epsilon) {
            cout << "d) " << i << el
            break;
        }
    }
}
```

```
int main() {
    Sanic_speed
    int t = 1;// cin >> t;
    while(t > 0) {
     solve();
     --t;
    }
}
```

Tính giới hạn:

Bài toán 7 ([Quỳ+20b], 1.). *(a)* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$. *(b)* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$. *(c)* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{2n+2}$. *(d) Mở rộng bài toán.*

Bài toán 8 ([Quỳ+20b], 2.). *(a)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{2n^2-1}{n^2+n}}$. *(b)* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{1+2^n+3^n}$. *(c)* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{i=1}^n i}{n^2}$.

Bài toán 9 ([Quỳ+20b], 3.). *Chứng minh: (a)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$. *(b)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Hint. Sử dụng định lý kẹp.

Bài toán 10 ([Quỳ+20b], 4.). *Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn* $0.(1428571)$ *dưới dạng phân số.*

Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $\overline{a_na_{n-1}\ldots a_1a_0.a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-m}(b_1b_2\ldots b_p)}$ dưới dạng phân số. Viết chương trình C/C++, Pascal, Python để mô phỏng.

Bài toán 11.

Bài toán 12 ([Quỳ+20b], 5.). *(a)* $\lim_{n\to\infty} 2^n - 3^n$. *(b)* $\lim_{n\to\infty} n + \sin n$. *(c)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^3+3n+1}$. *(d) Mở rộng bài toán.*

Bài toán 13 ([Quỳ+20b], 6.). *(a)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n+1} - n$. *(b)* $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

Bài toán 14 ([Quỳ+20b], 7.). *Cho* $\Delta A_0B_0C_0$ *đều cạnh* $a \in (0,\infty)$. $\Delta A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ *có 3 đỉnh là trung điểm của* $\Delta A_nB_nC_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Gọi* P_n, S_n *lần lượt là chu vi & diện tích* $\Delta A_nB_nC_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Tính: (a)* $\lim_{n\to\infty} p_n, \lim_{n\to\infty} S_n$. *(b)* $\sum_{i=0}^\infty p_i, \sum_{i=0}^\infty S_i$.

Bài toán 15 ([Quỳ+20a], 22., p. 47). *Tính* $\lim_{n\to\infty} u_n$ *với* $u_n = \sum_{i=1}^n \dfrac{1}{i(i+1)}$.

Bài toán 16 ([Quỳ+20a], 23., p. 47). *Tính* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{i=1}^n \sqrt{i}}{n\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

Hint. sử dụng định lý kẹp & đánh giá:

$$\frac{3\sqrt{n}}{2} < (n+1)\sqrt{n+1} - n\sqrt{n} < \frac{3\sqrt{n+1}}{2}.$$

Bài toán 17 ([Quỳ+20a], 24., p. 48). *Chứng minh dãy số* $x_n = \cos n$ *không có giới hạn khi* $n \to \infty$.

Hint. Chứng minh phản chứng.

Bài toán 18. $\lim_{n\to\infty} x_n$ *với* $x_n = \sum_{i=1}^n \dfrac{1}{i(i+1)}$.

Chứng minh. $x_n = \sum_{i=1}^n \dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{i+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1} \to 1$ as $n \to \infty$ nên $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. □

Bài toán 19. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{4^n - 5^{-n}}{3^n - 2^{2n} - 5n^6}$.

Bài toán 20. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln(3n^2-2n)}{n^9+3n^2}$.

Bài toán 21. $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n-3}{2n+5}\right)^{\dfrac{n^2+1}{n+1}}$.

Bài toán 22. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+(-1)^n}$.

Bài toán 23. $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-2}{n+2}\right)^{\dfrac{1+n}{2-\sqrt{n}}}$.

Bài toán 24. $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n-1}{5n+2}\right)^n$.

Bài toán 25. $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{\dfrac{1+n}{2-n^2}}$.

Bài toán 26. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^2+4^n}{n+5^n}}$.

Bài toán 27. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{5n+1}{n^{10}+2n}}$.

Bài toán 28. $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+1}{n^2-1}\right)^{\dfrac{1}{n-2}}$.

Bài toán 29. $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-1}{n^2+1}\right)^{1-n}$.

Bài toán 30. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

Bài toán 31. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

Bài toán 32. $\lim_{n\to\infty} u_n$ *với* $u_n = \sum_{i=1}^n \dfrac{1}{(2i-1)(2i+1)}$.

Bài toán 33. $\lim_{n\to\infty} u_n$ *với* $u_1 = \sqrt{3}, u_{n+1} = \sqrt{3+u_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$.

Bài toán 34 ([Hùn+23], VD1, p. 86)**.** *Cho dãy số* $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ *Chứng minh dãy* (a_n) *có giới hạn là* 1.

Bài toán 35 ([Hùn+23], VD2, p. 87)**.** *Chứng minh* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Bài toán 36 ([Hùn+23], VD3, p. 87)**.** *Chứng minh* $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ *nếu* $0 < |q| < 1$.

Bài toán 37 ([Hùn+23], VD4, p. 87)**.** *Chứng minh dãy* $u_n = (-1)^n$ *phân kỳ.*

Bài toán 38 ([Hùn+23], VD5, p. 88)**.** *Tìm* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^3+3n+1}{2n^3-1}$.

Bài toán 39 ([Hùn+23], VD6, p. 88)**.** *Tìm* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^4+2n^3+7n^2+8n+9}{2n^4+3n^3+n+10}$.

Bài toán 40 ([Hùn+23], VD7, p. 88)**.** *Tìm* $\lim_{n\to\infty}(n - \sqrt[3]{n} - \sqrt{n})$.

Bài toán 41 ([Hùn+23], VD1, p. 89)**.** *Tìm* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n}$.

Bài toán 42 ([Hùn+23], VD2, p. 89)**.** *Chứng minh nếu* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ *thì* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bài toán 43 ([Hùn+23], VD3, p. 89)**.** *Chứng minh* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Bài toán 44 ([Hùn+23], VD4, p. 89)**.** *Cho dãy số nguyên dương* (u_n) *thỏa mãn* $u_n > u_{n-1}u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. *Tính giới hạn* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \dfrac{i}{u_i} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{1}{u_1} + \dfrac{2}{u_2} + \cdots + \dfrac{n}{u_n}\right)$.

Bài toán 45 ([Hùn+23], VD5, p. 90)**.** *Tính* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} \sum_{i=2}^n i\cos\dfrac{\pi}{i}$.

Bài toán 46 ([Hùn+23], VD1, p. 90)**.** *Cho dãy số* (u_n) *được xác định theo công thức* $u_n = f(u_{n-1})$. *Giả sử* $u_n \in [a,b]$ *với mọi chỉ số* n *&* f *là hàm tăng trên* $[a,b]$. *Chứng minh: (a) Nếu* $u_1 \le u_2$ *thì* (u_n) *là dãy tăng. (b) Nếu* $u_1 \ge u_2$ *thì* (u_n) *là dãy giảm. (c) Nếu hàm* f *bị chặn thì* (u_n) *hội tụ.*

Bài toán 47 ([Hùn+23], VD2, p. 90)**.** *Cho dãy* (u_n) *được xác định bởi* $u_n = \dfrac{1}{3}\left(2u_{n-1} + \dfrac{1}{u_{n-1}^2}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, $u_1 > 0$. *Chứng minh dãy* (u_n) *hội tụ & tìm giới hạn của dãy.*

Bài toán 48 ([Hùn+23], VD3, p. 91)**.** *Tìm* u_1 *để dãy* $u_n = u_{n-1}^2 + 3u_{n-1} + 1$ *hội tụ.*

Bài toán 49 ([Hùn+23], VD4, p. 92)**.** *Chứng minh tồn tại* $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Bài toán 50 (Số Napier e)**.** *Đặt* $e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. *Chứng minh: (a)* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. *(b)* $\dfrac{1}{n+1} < \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$, *trong đó* $\ln x$ *là logarith cơ số e của* x.

Bài toán 51 ([Hùn+23], VD5, p. 91)**.** *Chứng minh dãy* $u_n = \sum_{i=1}^n \dfrac{1}{i} - \ln n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln n$ *có giới hạn hữu hạn.*

Lưu ý 1. $C = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \dfrac{1}{i} - \ln n = \lim_{n\to\infty} 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln n$ *được gọi là* hằng số Euler.

Bài toán 52 ([Hùn+23], VD1, p. 92)**.** *Chứng minh không tồn tại* $\lim_{n\to\infty}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

Bài toán 53 ([Hùn+23], VD2, p. 92)**.** *Cho hàm* $f:[0,+\infty)\to(0,b)$ *liên tục & nghịch biến. Giả sử hệ phương trình*

$$\begin{cases} y = f(x),\\ x = f(y),\end{cases}$$

có nghiệm duy nhất $x = y = q$. *Chứng minh dãy* $u_n = f(u_{n-1})$ *hội tụ tới* q *với* $u_1 > 0$.

Bài toán 54 ([Hùn+23], VD3, p. 93)**.** *Cho dãy số* $u_n = 1 + \dfrac{2}{1+u_{n-1}}$, $u_1 > 0$. *Chứng minh dãy hội tụ & tìm giới hạn.*

Bài toán 55 ([Hùn+23], VD1, p. 93)**.** *Cho dãy* $a_n = \sum_{i=1}^n \dfrac{1}{i^2} = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. *Chứng minh dãy này hội tụ.*

Bài toán 56 ([Hùn+23], VD2, p. 93)**.** *Cho dãy* $a_n = \sum_{i=1}^n \dfrac{1}{i} = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. *Chứng minh dãy này phân kỳ.*

Bài toán 57 ([Hùn+23], VD3, p. 94)**.** *Chứng minh* $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{p+1}$, $\forall p\in\mathbb{N}$.

Bài toán 58 ([Hùn+23], VD1, p. 94)**.** *Khảo sát sự hội tụ của* dãy Héron (u_n) *được xác định bởi* $u_1 = 1$, $u_n = \dfrac{1}{2}\left(u_{n-1} + \dfrac{2}{u_{n-1}}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$.

Bài toán 59 ([Hùn+23], VD2, p. 95)**.** *Cho dãy số* (x_n) *thỏa mãn* $|x_{n+1}-a| \le \alpha|x_n - a|$, $\forall n\in\mathbb{N}$, *trong đó* $a\in\mathbb{R}$ *&* $0<\alpha<1$. *Chứng minh dãy số* (x_n) *hội tụ về* a.

Bài toán 60 ([Hùn+23], VD3, p. 95)**.** *Cho dãy số* (x_n) *xác định bởi* $x_1 = a\in\mathbb{R}$, $x_{n+1} = \cos x_n$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. *Chứng minh* (x_n) *hội tụ.*

Bài toán 61 ([Hùn+23], VD4, p. 95, Canada 1985)**.** *Dãy số* (x_n) *thỏa mãn* $1 < x_1 < 2$ *&* $x_{n+1} = 1 + x_n - \dfrac{1}{2}x_n^2$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. *Chứng minh* (x_n) *hội tụ. Tìm* $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Bài toán 62 ([Hùn+23], VD5, p. 95, VMO2023)**.** *Xét dãy số* (a_n) *thỏa mãn* $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_{n+1} = \sqrt[3]{3a_{n+1} - a_n}$ *&* $0\le a_n\le 1$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. *Chứng minh dãy* (a_n) *có giới hạn hữu hạn.*

Bài toán 63 ([Hùn+23], VD6, p. 96, VMO2022)**.** *Cho dãy số* (u_n) *xác định bởi* $u_1 = 6$, $u_{n+1} = 2 + \sqrt{u_n + 4}$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. *Chứng minh dãy* (u_n) *có giới hạn hữu hạn.*

Bài toán 64 ([Hùn+23], VD7, p. 96, VMO2019)**.** *Cho dãy số* (x_n) *xác định bởi* $x_1 = 1$ *&* $x_{n+1} = x_n + 3\sqrt{x_n} + \dfrac{n}{\sqrt{x_n}}$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. *(a) Chứng minh* $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{x_n} = 0$. *(b) Tính giới hạn* $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{x_n}$.

Bài toán 65 ([Hùn+23], VD1, p. 97, VMO1984)**.** *Dãy số* (u_n) *được xác định như sau:* $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}$. *Dãy số* (v_n) *được xác định như sau:* $v_n = \sum_{i=1}^n \operatorname{arccot} u_i$. *Tìm giới hạn* $\lim_{n\to\infty} v_n$.

Bài toán 66 ([Hùn+23], VD2, p. 97, VMO1988)**.** *Dãy số* (u_n) *bị chặn thỏa mãn điều kiện* $u_n + u_{n+1} \ge 2u_{n+2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$ *có nhất thiết hội tụ không?*

Bài toán 67 ([Hùn+23], VD3, p. 98, Olympic 30.4 lần V)**.** *Cho* $x_k = \sum_{i=1}^k \dfrac{i}{(i+1)!} = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \cdots + \dfrac{k}{(k+1)!}$. *Tính* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{i=1}^{1999} x_i^n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{1999}^n}$.

Bài toán 68 ([Hùn+23], VD4, p. 98, VMO2013A). *Gọi F là tập hợp tất cả các hàm số $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ thỏa mãn $f(3x)\ge f(f(2x))+x$, $\forall x>0$. Tìm hằng số A lớn nhất để $f(x)\ge Ax$, $\forall f\in F$, $\forall x>0$.*

Bài toán 69 ([Hùn+23], VD5, p. 98, Hải Dương 2019–2020). *Cho dãy số thực (x_n) thỏa mãn $x_1=\frac{1}{6}$, $x_{n+1}=\frac{3x_n}{2x_n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. Tìm số hạng tổng quát của dãy số & tính giới hạn của dãy số đó.*

Bài toán 70 ([Hùn+23], VD6, p. 99, Hải Dương 2015–2016). *Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1=-1$, $u_{n+1}=\frac{u_n}{2}+\frac{2}{u_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$ & dãy số (v_n) thỏa mãn $u_nv_n-u_n+2v_n+2=0$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. Tính v_{2015} & $\lim_{n\to\infty}u_n$.*

Bài toán 71 ([Hùn+23], VD7, p. 99, Hải Dương 2013–2014). *Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1=\frac{5}{2}$, $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n^2-u_n+2$. Tính $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{1}{u_i}$.*

Bài toán 72 ([Hùn+23], VD1, p. 99). *Cho dãy số (u_n) được xác định: u_1, $u_n=\alpha u_{n-1}+\beta$. Biện luận theo tham số α,β giá trị giới hạn của dãy số.*

Bài toán 73 ([Hùn+23], VD1, p. 100). *Cho (u_n) là dãy số hội tụ & $\lim_{n\to\infty}u_n=u$. Khi đó, dãy trung bình cộng $v_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n u_i$ cũng hội tụ & $\lim_{n\to\infty}v_n=u$.*

Bài toán 74 ([Hùn+23], VD2, p. 100). *Giả sử $\lim_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim_{n\to\infty}b_n=b$. Chứng minh $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_ib_{n+1-i}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab$. Từ đó, suy ra $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.*

Bài toán 75 ([Hùn+23], VD3, p. 101). *Giả sử $a_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. Chứng minh nếu $\lim_{n\to\infty}a_n=a>0$ thì $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.*

2.5 Cauchy sequences – Dãy Cauchy

Definition 8 ([Rud76], Def. 3.8, p. 52). *A sequence $\{p_n\}$ in a metric space X is said to be a* Cauchy sequence *if for every $\epsilon>0$ there is an integer N s.t. $d_X(p_n,p_m)<\epsilon$ if $n\ge N$ & $m\ge N$.*

Briefly:

$$\{p_n\}\text{ is a Cauchy sequence in a metric space }X\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N_\varepsilon\text{ s.t. }\min\{m,n\}\ge N_\varepsilon\Rightarrow d_X(p_n,p_m)<\varepsilon,$$

or equivalently,

$$\{p_n\}\text{ is a Cauchy sequence in a metric space }X\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N_\varepsilon\text{ s.t. }d_X(p_n,p_m)<\varepsilon,\ \forall m\ge N_\varepsilon,\forall n\ge N_\varepsilon.$$

Definition 9. *Let E be a subset of a metric space X, & let S be the set of all real numbers of the form $d(p,q)$, with $p\in E,q\in E$. The sup of S is called the* diameter *of E.*

Problem 6 ([Rud76], p. 48, +1). *(a) Prove that the sequence $\{\frac{1}{n}\}$ converges in $\mathbb{R}=\mathbb{R}^1$ (to 0), but fails to converge in the set of all positive real numbers, with $d(x,y)\coloneqq|x-y|$, $\forall x,y\in X$. (b) Find similar or more advanced examples.*

2.6 Sequences with SymPy

A sequence is a finite or infinite lazily evaluated list.

```
sympy.series.sequences.sequence(seq, limits=None)
```

returns appropriate `sequence object`.

Explanation: If `seq` is a SymPy sequence, returns `SeqPer` object otherwise returns `SeqFormula` object. E.g.:

```
from sympy import sequence
from sympy.abc import n
sequence(n**2, (n, 0, 5))
# output: SeqFormula(n**2, (n, 0, 5))
sequence((1, 2, 3), (n, 0, 5))
# output: SeqPer((1, 2, 3), (n, 0, 5))
```

2.6.1 Sequence Base

`class sympy.series.sequences.SeqBase(*args)`: Base class for sequences.

- `coeff(pt)`: returns the coefficient at point `pt`.
- `coeff_mul(other)`: should be used when `other` is not a sequence. Should be defined to define custom behavior.

```
from sympy import SeqFormula
from sympy.abc import n
SeqFormula(n**2).coeff_mul(2)
# output: SeqFormula(2*n**2, (n, 0, oo))
```

`*` defines multiplication of sequences with sequences only.

- `find_linear_recurrence(n, d = None, gfvar = None, )`: Finds the shortest linear recurrence that satisfies the 1st n terms of sequence of order $\le \frac{n}{2}$ if possible. If `d` is specified, find shortest linear recurrence of order $\le \min\{d, \frac{n}{2}\}$ if possible. Returns list of coefficients `[b(1), b(2), ...]` corresponding to recurrence relation `x(n) = b(1)*x(n - 1) + b(2)*x(n - 2) + ...`. Return `[]` if no recurrence is found. If `gfvar` is specified, also returns ordinary generating function as a function of `gfvar`.

2.7 Problems: Sequences

Bài toán 76. *Tính* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{an+b}{cn+d}$ *theo* $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $(c,d) \neq (0,0)$.

Bài toán 77. *Tính* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{an^2+bn+c}{dn^2+en+f}$ *theo* $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$, $(d,e,f) \neq (0,0,0)$.

Bài toán 78. *Tính* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ *với: (a)* $P,Q \in \mathbb{R}[x]$, $Q \not\equiv 0$. *(b)* $P,Q \in \mathbb{C}[x]$, $Q \not\equiv 0$.

Bài toán 79. *Cho* $a,b,c,d,\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. *Tính: (a)* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a+b\alpha^n}{c+d\alpha^n}$. *(b)* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{an+b\alpha^n}{cn+d\alpha^n}$. *(c)* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{an^2+b\alpha^n}{cn^2+d\alpha^n}$. *(d)* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{P(x)+a\alpha^n}{Q(x)+b\alpha^n}$ *với* $P,Q \in \mathbb{R}[x]$.

Bài toán 80 ([VMS23], 1.1, p. 30, HCMUT)**.** *Cho* $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *thỏa* $f'(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *Xét dãy số* $\{a_n\}$*:*

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star. \end{cases}$$

(a) Nếu $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, *tính* $\lim_{n\to\infty} a_n$. *(b) Nếu* $f(2023) = 0$ *&* $f \in C^2(\mathbb{R})$ *thỏa* $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, *tính* $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Bài toán 81 ([VMS23], 1.2, p. 30, VNUHCM UIT)**.** *Cho dãy số* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *thỏa*

$$\begin{cases} u_0 \ge -2, \\ u_n = \sqrt{2+u_{n-1}}, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star. \end{cases}$$

(a) Chứng minh $\{u_n\}$ *có giới hạn hữu hạn. Tính* $\lim_{n\to\infty} u_n$. *(b) Cho 2 dãy* $\{v_n\}_{n=1}^\infty, \{w_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$\begin{cases} v_n = 4^n|u_n - 2|, \\ w_n = \dfrac{u_1u_2\cdots u_n}{2^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star. \end{cases}$$

Tính $\lim_{n\to\infty} v_n, \lim_{n\to\infty} w_n$.

Bài toán 82 ([VMS23], 1.3, p. 30, ĐH Đồng Tháp)**.** *Xét dãy số* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$u_1 = \frac{3}{2}, \ u_n = 1 + \frac{1}{2}\arctan u_{n-1}, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Chứng minh $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *hội tụ.*

Bài toán 83 ([VMS23], 1.4, p. 31, ĐH Đồng Tháp)**.** *Cho dãy số* $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$a_1 = 1, \ a_{n+1} = \frac{n^2-1}{a_n} + 2, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

(a) Chứng minh $n \le a_n \le n+1$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *(b) Đặt* $S_n^{(3)} \coloneqq \sum_{i=1}^n a_i^3$. *Tính* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{S_n^{(3)}}{n^4}$.

Bài toán 84 ([VMS23], 1.5, p. 31, ĐHGTVT). *Cho dãy số* $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$a_1 > 0,\ a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Chứng minh $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ *giảm & tính* $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Bài toán 85 ([VMS23], 1.6, p. 31, ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). *Cho dãy số* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = \beta, \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_{n-1}}{2},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star. \end{cases}$$

(a) Tìm công thức số hạng tổng quát của $\{u_n\}_{n=1}^\infty$. *(b) Tính* $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Bài toán 86 ([VMS23], 1.7, p. 31, ĐHKH, Thái Nguyên). *Cho dãy số* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$x_n = \sum_{i=1}^n \frac{i}{(i+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Tính $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{2023} x_i^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{2023}^n}$.

Bài toán 87 ([VMS23], 1.8, p. 31, ĐH Mỏ–Địa chất). *Tính*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\prod_{i=1}^n i^{i^{2021}}\right)^{\frac{1}{n^{2022}}}}{n^{\frac{1}{2022}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1^{1^{2021}} \cdot 2^{2^{2021}} \cdots n^{n^{2021}}\right)^{\frac{1}{n^{2022}}}}{n^{\frac{1}{2022}}}.$$

Bài toán 88 ([VMS23], 1.9, pp. 31–32, ĐHSPHN2). *Cho dãy số* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$x_1 \in (0,1),\ x_{n+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(1 + x_i),\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

(a) Chứng minh dãy $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *có giới hạn hữu hạn. (b) Chứng minh* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n(x_n - x_{n+1})}{x_n^2} = \dfrac{1}{2}$.

Bài toán 89 ([VMS23], 1.10, p. 32, ĐH Trà Vinh). *Cho dãy số* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$a_1 = a_2 = 1,\ a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} + a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Tính x_{2022}.

Bài toán 90 ([VMS23], 1.11, p. 32, ĐH Trà Vinh). *Cho 2 dãy số* $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3},\ x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2},\ y_{n+1} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + y_n^2}},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Chứng minh $x_n y_n \in (2,3)$, $\forall n \geq 2$ *&* $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$.

Bài toán 91 ([VMS23], 1.11, p. 32, ĐH Vinh). *Cho dãy số* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$x_n = \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{2^i}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{2^n}\right),\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

(a) Tìm tất cả $n \in \mathbb{N}^\star$ *thỏa* $x_n > \frac{15}{8}$. *(b) Chứng minh* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *hội tụ.*

Bài toán 92 ([VMS24], p. 32, 1.1, VNUHCM UIT). *Cho* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Xét dãy số*

$$\begin{cases} x_0 = a,\ x_1 = b, \\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{2} x_{n-1}\left(1 - \cos\dfrac{\pi}{n}\right). \end{cases}$$

Chứng minh $\{x_n\}$ *hội tụ.*

Bài toán 93 ([VMS24], p. 32, 1.2, ĐH Đồng Tháp). *Cho dãy số* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$u_n = \sum_{i=1}^n \frac{i}{(i+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

(a) Tìm $n \in \mathbb{N}$ *lớn nhất để* $u_n < \dfrac{2023}{2024}$. *(b) Tính giới hạn* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{2024} u_i^n} = \sqrt[n]{u_1^n + u_2^n + \cdots + u_{2024}^n}$.

Bài toán 94 ([VMS24], p. 32, 1.3, ĐHGTVT)**.** *Cho dãy số* $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ *thỏa* $\frac{1}{2} < a_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$*. Dãy số* $\{x_n\}$ *đặt bởi*

$$x_1 = a_1,\ x_{n+1} = \frac{2(a_{n+1} + x_n) - 1}{1 + 2a_{n+1}x_n},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

(a) Chứng minh dãy số $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *tăng & bị chặn trên. (b) Tìm* $\lim_{n\to\infty} x_n$*.*

Bài toán 95 ([VMS24], p. 33, 1.4, ĐH Vinh)**.** *Cho dãy số* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$\begin{cases} x_1 = 2024, \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{3\lfloor x_n \rfloor + 4}, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star. \end{cases}$$

(a) Chứng minh $x_8 < 1$*. (b) Chứng minh* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *hội tụ & tìm giới hạn.*

3 Function – Hàm Số

3.1 Limit of Function

Bài toán 96 ([Quỳ+20b], 8.)**.** *Áp dụng định nghĩa giới hạn của hàm số, tính giới hạn: (a)* $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x+1}$*. (b)* $\lim_{x\to 2} \sqrt{x+2}$*.*

Bài toán 97 ([Quỳ+20b], 9.)**.** *Cho hàm số* $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ *& 2 dãy số* $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty$*:*

$$x_n = \frac{1}{2n\pi},\ y_n = \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}.$$

(a) Tìm giới hạn của 4 dãy số $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty, \{f(x_n\}_{n=1}^\infty, \{f(y_n)\}_{n=1}^\infty$*. (b) Tồn tại hay không giới hạn* $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$*?*

Bài toán 98 ([Quỳ+20b], 10.)**.** *Tính: (a)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$*. (b)* $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$*. (c)* $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$*.*

Bài toán 99 ([Quỳ+20b], 11.)**.** *Tính: (a)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)(11+2x)(1+3x)-1}{x}$*. (b)* $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$*. (c)* $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(1+x)(1+2x)(1}{(2}$ *(d)* $\lim_{x\to 2} \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^3-3x-2}}$*. (e)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x}$*. (f)* $\lim_{x\to 1} \dfrac{3}{1-\sqrt{x}} - \dfrac{3}{1-\sqrt[3]{x}}$*.*

Bài toán 100 ([Quỳ+20b], 12.)**.** *Cho hàm số*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \textit{if } x \le 2, \\ 4x - 3 & \textit{if } x > 2. \end{cases}$$

Tính $\lim_{x\to 2^+} f(x), \lim_{x\to 2^-} f(x), \lim_{x\to 2} f(x)$*.*

Bài toán 101 ([Quỳ+20b], 13.)**.** *Tính: (a)* $\lim_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x-a}$*. (b)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$*. (c)* $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$*.*

Bài toán 102 ([Quỳ+20b], 14.)**.** *Tính: (a)* $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x$*. (b)* $\lim_{x\to 1}(x-1)\log_x 2$*. (c)* $\lim_{x\to 2} \dfrac{2^x - x^2}{x-2}$*.*

3.2 Continuous function – Hàm số liên tục

Bài toán 103 ([Quỳ+20b], 15.)**.** *Chứng minh: (a) 2 hàm số* $f(x) = x^3 - x + 2, g(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$ *liên tục tại mọi điểm* $x \in \mathbb{R}$*. (b) Hàm số*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \textit{if } x \ne 2, \\ 3 & \textit{if } x = 2, \end{cases}$$

liên tục tại điểm $x = 2$*. (c) Hàm số*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & \textit{if } x \ne 1, \\ 2 & \textit{if } x = 1, \end{cases}$$

gián đoạn tại điểm $x = 1$*.*

Bài toán 104 ([Quỳ+20b], 16.). *Chứng minh: (a) Hàm số* $f(x) = (x^2-2)^2+2$ *liên tục trên* $\mathbb{R}$. *(b) Hàm số* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *liên tục trên* $(-1,1)$. *(c) Hàm số* $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ *liên tục trên* $[-2,2]$. *(d) Hàm số* $f(x) = \sqrt{2x-1}$ *liên tục trên* $[\frac{1}{2},\infty)$.

Bài toán 105 ([Quỳ+20b], 17.). *Sử dụng bất đẳng thức* $|\sin x| \le |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$, *chứng minh tính liên tục của hàm số* $y = \cos x$ *tại điểm* $x = x_0$ *bất kỳ.*

Bài toán 106 ([Quỳ+20b], 18.). *Tìm tất cả các điểm gián đoạn của hàm số: (a)* $y = \dfrac{1+x}{1+x^3}$. *(b)* $y = \sqrt{\dfrac{1-\cos \pi x}{4-x^2}}$. *(c)* $y = x - \lfloor x \rfloor$. *(d)* $y = \dfrac{1}{\ln x}$.

Bài toán 107 ([Quỳ+20b], 19.). *(a) Chứng minh phương trình bậc 3* $x^3+ax^2+bx+c=0$ *luôn có ít nhất 1 nghiệm thực* $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$. *(b) Mở rộng bài toán.*

Bài toán 108 ([Quỳ+20b], 20.). *Tìm tất cả* $m \in \mathbb{R}$ *để phương trình* $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = m$ *có nghiệm.*

Bài toán 109 ([Quỳ+20b], 21.). *Giải bất phương trình* $\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{7-x} > 2$.

Bài toán 110 ([Quỳ+20a], 25., p. 48). *Tính* $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1} + x$.

Bài toán 111 ([Quỳ+20a], 26., p. 48). *Tính* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

Bài toán 112 ([Quỳ+20a], 27., p. 48). *Sử dụng giới hạn đặc biệt* $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$, *chứng minh hàm số* $y = e^x \in C(\mathbb{R})$.

Bài toán 113 ([Quỳ+20a], 28., p. 48). *Tìm tất cả* $m \in \mathbb{R}$ *để hàm số*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x} & \text{if } x < 2, \\ mx+m+1 & \text{if } x \ge 2, \end{cases} \in C(\mathbb{R}).$$

Bài toán 114 ([Quỳ+20a], 29., p. 48). *Tìm tất cả hàm số* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *liên tục tại điểm* 0 *&* *thỏa* $f(3x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 115 ([Quỳ+20a], 30., p. 48). *Tìm tất cả hàm số* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *liên tục tại điểm* 0 *& thỏa* $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Bài toán 116 ([Quỳ+20a], 31., p. 48). *Tìm ví dụ về 1 hàm số* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *thỏa* f *gián đoạn tại mọi điểm thuộc* $\mathbb{R}$ *nhưng* $f \circ f$ *liên tục tại mọi điểm thuộc* $\mathbb{R}$.

Bài toán 117 ([Quỳ+20a], 32., p. 48). *Chứng minh parabol* $(P) : y = x^2 - 2x$ *& ellipse* $(E) : \dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1$ *cắt nhau tại 4 điểm phân biệt nằm trên 1 đường tròn.*

Bài toán 118 ([Quỳ+20a], 33., p. 48). *Cho* $f :\in C([0,1],[0,1])$. *Chứng minh tồn tại điểm* $x_0 \in [0,1]$ *thỏa* $f(x_0) = x_0$.

Bài toán 119 ([Quỳ+20a], 34., p. 48). *Dùng phương pháp chia đôi, tìm nghiệm của phương trình* $x^5+x+1=0$ *với độ chính xác* 0.1.

Xem code C/C++ của bài toán này ở [Thư+21].

3.3 Problems: Function

Bài toán 120 ([VMS23], 3.1, p. 33, HCMUT). *(a) Chứng minh tồn tại hàm số* $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *thỏa* $xf''(x) + 2f'(x) = x^{2023}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *(b) Giả sử* $g \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *thỏa* $xg''(x) + 2g'(x) \ge x^{2023}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *Chứng minh* $\int_{-1}^1 x(g(x)+x^{2023})\,\mathrm{d}x \ge \dfrac{2}{2025}$.

Bài toán 121 ([VMS23], 3.2, p. 33, ĐH Đồng Tháp). *Cho hàm* $f(x)x = 2(x-1) - \arctan x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *Chứng minh phương trình* $f(x) = 0$ *có nghiệm duy nhất là* $a \in (1,\sqrt{3})$.

Proposition 1 (Luật bình phương nghịch đảo). *Mỗi sự gia tăng khoảng cách từ nguồn cho ra kết quả giảm mức độ âm thanh theo tỷ lệ nghịch với bình phương của sự gia tăng khoảng cách.*

Bài toán 122 ([VMS23], 3.3, pp. 33–34, ĐH Đồng Tháp). *Sử dụng luật bình phương nghịch đảo, giải quyết bài toán: 1 người có 1 mảnh đất lớn có chiều dài mặt tiền là* l m *ở giữa 2 quán karaoke thường phát ra âm thanh có cường độ lần lượt là* I_1, I_2. *Người này định xây 1 ngôi nhà nhỏ trên mảnh đất đó nhưng muốn tìm vị trí sao cho chịu ảnh hưởng của âm thanh từ 2 quán karaoke là ít nhất. Giúp người này nếu biết: (a) Cường độ âm thanh* $I_1 = I_2$. *(b) Cường độ âm thanh* $I_1 = 8I_2$. *(c)* $I_1 = aI_2$ *với* $a \in (0,\infty)$ *cho trước.*

Bài toán 123 ([VMS23], 3.5, p. 34, ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). *Cho hàm*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + \alpha x & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

(a) Tính $f'(x)$ khi $x \neq 0$. (b) Tính $f'(0)$. (c) Chứng minh hàm $f(x)$ không đơn điệu trên mỗi khoảng mở chứa điểm 0.

Bài toán 124 ([VMS23], 3.6, p. 34, ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). *(a) Gia đình bác Nam muốn xây 1 cái bể hình hộp với đáy là hình vuông có thể tích $V = 10$ m^3. Biết giá thành để xây mỗi m^2 mặt đáy là $a = 700000$ đồng & 1 mặt bên là $b = 500000$ đồng. Để tổng chi phí xây dựng là nhỏ nhất thì bác Nam nên xây bể với kích thước như thế nào? (b) Giải bài toán với $a, b, V \in (0, \infty)$ bất kỳ.*

Bài toán 125 ([VMS23], 3.7, pp. 34–35, ĐHKH Thái Nguyên). *Tìm các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \not\equiv 0$, thỏa*

$$f(x+y) = 2023^y f(x) + 2023^x f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Từ đó tính

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{\sin f(x)}, \ \lim_{n \to \infty} \frac{n}{f^{(n)}(0)}.$$

Bài toán 126 ([VMS23], 3.8, p. 35, ĐH Mỏ–Địa chất). *Tính*

$$\lim_{(x,y,z) \to (0,0,0)} \frac{\sin x^2 + \sin y^2 + \sin z^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Bài toán 127 ([VMS23], 3.9, p. 35, ĐH Mỏ–Địa chất). *Gọi $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ là 3 nghiệm của phương trình vi phân $y''' + a(x)y'' + b(x)y'c(x)y = 0$ thỏa $y_1^2(x) + y_2^2(x) + y_3^2(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tìm các hằng số α, β để hàm $z = (y_1'(x))^2 + (y_2'(x))^2 + (y_3'(x))^2$ là nghiệm của phương trình vi phân $z' + \alpha a(x) z + \beta c(x) = 0$.*

Bài toán 128 ([VMS23], 3.10, p. 35, ĐH Mỏ–Địa chất). *Trên hình ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, tìm tất cả các điểm $T = (x_0, y_0)$ thỏa: tam giác bị giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0, y = 0$ & tiếp tuyến với ellipse tại điểm T có diện tích nhỏ nhất.*

Bài toán 129 ([VMS23], 3.11, p. 35, FTU Hà Nội). *Chứng minh đa thức $f(x) = \sum_{i=0}^{2022} (-1)^i \frac{x^i}{i!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2022}}{2022!}$ không có nghiệm thực.*

Bài toán 130 ([VMS23], 3.12, p. 35, ĐHSPHN2). *Cho $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. 1 điểm x được gọi là 1* điểm mù *nếu tồn tại 1 điểm $y \in \mathbb{R}$ với $y > x$ sao cho $f(y) > f(x)$. Giả sử tất cả các điểm thuộc khoảng mở $I = (a, b)$ là các điểm mù & a, b không phải là 2 điểm mù. Chứng minh $f(a) = f(b)$.*

Bài toán 131 ([VMS23], 3.13, p. 36, ĐH Trà Vinh). *Chứng minh hàm số $f(x) = x^{x^x}$ đồng biến trên $(0, \infty)$ & $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$.*

Bài toán 132 ([VMS23], 3.14, p. 36, ĐH Vinh). *Cho hàm*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2} \sin \frac{1}{x^{2023}} & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

(a) Chứng minh hàm số f liên tục tại $x = 0$. (b) Hàm số f có khả vi tại $x = 0$ hay không?

Bài toán 133 ([VMS23], 3.15, p. 36, ĐH Vinh). *Cho hàm $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$, khả vi trên khoảng $(0, 1)$, thỏa $f(0) = 0$, & $|f'(x)| \leq 2023|f(x)|$, $\forall x \in (0, 1)$. Chứng minh $f(x) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$.*

Bài toán 134 ([VMS23], 3.16, p. 36, ĐH Vinh). *Giả sử hàm $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ khả vi trên khoảng $(0, \infty)$ & thỏa 2 điều kiện: (i) $|f(x)| \leq 2023$, $\forall x \in (0, \infty)$; (ii) $f(x)f'(x) \geq 2022 \cos x$, $\forall x \in (0, \infty)$. Có tồn tại $\lim_{x \to \infty} f(x)$ không?*

4 Continuity – Sự Liên Tục

Definition 10 ([Tao22a], Def. 6.1.1, p. 109: distance between 2 reals). *Given $x, y \in \mathbb{R}$, their distance $d(x, y)$ is defined to be $d(x, y) \coloneqq |x - y| \in [0, \infty)$.*

Definition 11 ([Tao22a], Def. 6.1.2, p. 109: ε-close reals). *Let $\varepsilon > 0$ be a real number. $x, y \in \mathbb{R}$ is said to be* ε-close *iff $d(x, y) \leq \varepsilon$.*

5 Series – Chuỗi Số

Bài toán 135 ([VMS23], 2.1, p. 32, VNUHCM UIT). *Cho dãy số* $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset (0,\infty)$ *thỏa* $\sum_{n=1}^\infty \frac{x_n}{(2n-1)^2} < 1$. *Chứng minh* $\sum_{k=1} \sum_{n=1}^k \frac{x_n}{k^3} < 2$.

Bài toán 136 ([VMS23], 2.2, p. 32, ĐHGTVT). *Cho dãy số* $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset (0,\infty)$ *đặt bởi*

$$a_1 > 0,\ a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Tính $\sum_{n=1}^\infty a_n$.

Bài toán 137 ([VMS23], 2.2, p. 32, ĐH Mỏ–Địa chất). *Gọi* S *là dãy con của dãy điều hòa* $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^\infty = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ *& có tổng hữu hạn. Gọi* $c(n)$ *là số lượng các phần tử của* S *có số thứ tự trong dãy mẹ (điều hòa) ban đầu không vượt quá* n. *Chứng minh* $\lim_{n\to\infty} \frac{c(n)}{n} = 0$.

Bài toán 138 ([VMS24], p. 33, 2.1, ĐHCNTT TpHCM). *Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\beta \sin^2 l\alpha}{1 + \beta \sin^2 k\alpha},\ \alpha \notin \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\},\ \beta > 0.$$

6 Derivative & Differentiability – Đạo Hàm & Tính Khả Vi

Bài toán 139 ([VMS23], p. 36, 4.1, VNUHCM UIT). *Cho hàm* $f \in C^2(\mathbb{R})$ *thỏa* $f(0) = 2,\ f'(0) = -2,\ f(1) = 1$. *Chứng minh tồn tại* $c \in (0,1)$ *thỏa* $f(c)f'(c) + f''(c) = 0$.

Bài toán 140 ([VMS23], p. 37, 4.2, ĐH Đồng Tháp). *Cho* f *khả vi trên* (a,∞), $\forall a \in (0,\infty)$ *&* $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. *Chứng minh* $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Bài toán 141 ([VMS23], p. 37, 4.3, ĐH Đồng Tháp). *Cho* f *là hàm số có đạo hàm* f' *đồng biến trên* $[0,2]$ *&* $f(0) = -1, f(2) = 1$. *Chứng minh tồn tại* $a,b,c \in [0,2]$ *thỏa* $f'(a)f'(b)f'(c) = 1$.

Bài toán 142 ([VMS23], p. 37, 4.4, ĐHGTVT). *Cho* $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ *thỏa* $f^{(n)}(0) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ *&* $f^{(n)}(x)x \ge 0,\ \forall k \in \mathbb{N}^\star$, $\forall x \in (0,\infty)$. *Chứng minh* $f(x) = 0,\ \forall x \in (0,\infty)$.

Bài toán 143 ([VMS23], p. 37, 4.5, ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). *Giả sử hàm* $f \in C([1,2023])$, *khả vi trong khoảng* $(1,2023)$, *&* $f(2023) = 0$. *Chứng minh tồn tại* $c \in (1,2023)$ *thỏa*

$$f'(c) = \frac{2024 - 2023c}{1-c} f(c).$$

Bài toán 144 ([VMS23], p. 37, 4.6, ĐHKH Thái Nguyên). *Giả sử* $f(x) \in C^\infty([-1,1])$, $f^{(n)}(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *& tồn tại* $\alpha \in (0,1)$ *thỏa* $\sup_{x\in[-1,1]} |f^{(n)}(x)| \le \alpha^n n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Chứng minh* $f(x) \equiv 0$ *trên đoạn* $[-1,1]$.

Bài toán 145 ([VMS23], p. 37, 4.7, ĐHSPHN2). *Cho* $f \in C([a,b])$ *khả vi trên* (a,b). *Giả sử* $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a,b)$. *Chứng minh* $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *thỏa* $a \le x_1 < x_2 \le b$ *&* $f(x_1)f(x_2) > 0$ *thì luôn tồn tại* $c \in (x_1,x_2)$ *thỏa*

$$\frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = c - \frac{f(c)}{f'(c)}.$$

Bài toán 146 ([VMS24], p. 33, 3.1, VNUHCM UIT). *Cho* f *là hàm số thực trên* $(0,\infty)$. *Giả sử*

$$f(x^\alpha) = f(x)\sin^2\alpha + f(1)\cos^2\alpha,\ \forall x \in (0,\infty),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh f *khả vi tại* 1.

Bài toán 147 ([VMS24], p. 34, 3.2, ĐH Đồng Tháp). *(a) Chứng minh với mỗi* $n \in \mathbb{N}^\star$, *phương trình* $2x = \sqrt{x+n} + \sqrt{x+n+1}$ *có nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là* x_n. *(b) Tính* $a := \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}}, b := \lim_{n\to\infty} x_n - a\sqrt{n}$.

Bài toán 148 ([VMS24], p. 34, 3.3, ĐH Đồng Tháp). *Cho*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left|\cos \frac{\pi}{x}\right| & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

Chứng minh f *khả vi tại* 0 *nhưng* f *không khả vi tại các điểm* $x_n := \frac{2}{2n+1}$ *với* $n \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 149 ([VMS24], p. 34, 3.4, ĐH Đồng Tháp). *Giả sử f khả vi liên tục trên $(0,\infty)$, $f(0) = 1$. Chứng minh nếu $|f(x)| \le e^{-x}$, $\forall x \ge 0$ thì tồn tại $x_0 > 0$ để $f'(x_0) = -e^{-x_0}$.*

Bài toán 150 ([VMS24], p. 34, 3.5, ĐHGTVT). *Cho $a \in \mathbb{R}$, $b \in (0,\infty)$. Hàm f xác định trên $[-1,1]$, được cho bởi*

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin x^{-b} & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

(a) Tìm tất cả các giá trị của a để hàm f liên tục trên $[-1,1]$. (b) Tìm tất cả các giá trị của a để tồn tại $f'(0)$. (c) Tìm điều kiện của a, b để tồn tại $f''(0)$.

Bài toán 151 ([VMS24], p. 35, 3.7, HUS). *Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm số được xác định bởi công thức*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{if } x \le 0, \\ be^x + x & \text{if } x > 0, \end{cases}$$

với $a, b \in \mathbb{R}$: tham số. Xác định a, b để f có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$.

Bài toán 152 ([VMS24], p. 35, 3.8, ĐH Vinh). *Cho hàm $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ thỏa $f_{2024}(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ với*

$$\begin{cases} f_{n+1}(x) = f(f_n(x)),\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star, \\ \quad f_1(x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Chứng minh $f_2(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 153 ([VMS24], p. 35, 3.9, ĐH Vinh). *Cho hàm*

$$f(x) = \left(\frac{2023^x + 2024^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}},\ x > 0.$$

(a) Tìm $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. (b) Chứng minh f là hàm số đơn điệu tăng trên $(0,+\infty)$.

Bài toán 154 ([VMS24], p. 36, 4.1, HCMUT). *(a) Cho $f \in C^3(\mathbb{R},[0,+\infty))$ thỏa $\max_{x\in\mathbb{R}} |f'''(x)| \le 1$. Chứng minh*

$$f''(x) \ge -\sqrt[3]{\frac{3}{2}f(x)},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) Tìm tất cả các hàm số f thỏa mãn điều kiện của (a) thỏa

$$f''(x) = -\sqrt[3]{\frac{3}{2}f(x)},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 155 ([VMS24], p. 36, 4.2, VNUHCM UIT). *Cho hàm số $f : [0,1] \to \mathbb{R})$ liên tục trên $[0,1]$, khả vi trên $(0,1)$ sao cho $\exists M > 0$, $\exists c \in [0,1]$ thỏa $f(c) = 0$ &*

$$|f'(x)| \le M|f(x)|,\ \forall x \in (0,1).$$

Chứng minh $f(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$.

Bài toán 156 ([VMS24], p. 36, 4.3, ĐH Đồng Tháp). *Cho f khả vi trên $\mathbb{R}$ & f' giảm ngặt trên $\mathbb{R}$. (a) Chứng minh*

$$f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) Chứng minh nếu tồn tại $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ thì $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. (c) Tìm hàm số g khả vi trên $\mathbb{R}$ & tồn tại $\lim_{x\to\infty} g(x) = L$ nhưng $\lim_{x\to\infty} g'(x) \neq 0$.

Bài toán 157 ([VMS24], p. 37, 4.4, ĐHGTVT). *Giả sử V là tập hợp các hàm liên tục $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ & khả vi trên $(0,1)$ thỏa $f(0) = 0, f(1) = 1$. Xác định các giá trị $\alpha \in \mathbb{R}$ để với mỗi $f \in V$, luôn tồn tại $\xi \in (0,1)$ thỏa $f(\xi) + \alpha = f'(\alpha)$.*

Bài toán 158 ([VMS24], p. 37, 4.5, HUS). *Cho $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục trên $[0,3]$ & khả vi trong $(0,3)$. Chứng minh tồn tại $c \in (0,3)$ thỏa $2f'(c) = f(3) - f(2) + f(1) - f(0)$.*

Bài toán 159 ([VMS24], p. 37, 4.6, ĐH Mỏ–Địa chất). *Giả sử có chuỗi có 2 đầu hướng ra vô cực*

$$\cdots + f''(x) + f'(x) + f(x) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t + \cdots$$

& hội tụ đều trên khoảng $(-1,1)$. Chuỗi là biểu diễn của số nào?

Bài toán 160 ([VMS24], p. 37, 4.7, ĐH Vinh). *Cho hàm $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ & thỏa $f(x) \le 2024$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh tồn tại $x \in \mathbb{R}$ thỏa $f''(x) = 0$.*

7 Integral – Tích Phân

Bài toán 161 ([VMS23], p. 38, 5.1, VNUHCM UIT). *Cho hàm $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ khả vi đến cấp 2 thỏa $f(0)=1$ & $f''(x)+2f'(x)+f(x)\ge 1$, $\forall x\in(-1,1)$. Tìm* GTNN *của $\int_{-1}^1 e^x f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Bài toán 162 ([VMS23], p. 38, 5.2, ĐH Đồng Tháp). *Cho hàm $f:[0,2023]\to(0,\infty)$ khả tích & $f(x)f(2023-x)=1$, $\forall x\in[0,2023]$. Chứng minh $\int_0^{2023} f(x)\,\mathrm{d}x\ge 2023$.*

Bài toán 163 ([VMS23], p. 38, 5.3, ĐHGTVT). *Cho hàm $f\in C([0,1])$ thỏa $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$. Chứng minh tồn tại $c\in(0,1)$ thỏa $cf(c)+2023\int_0^c f(x)\,\mathrm{d}x=0$.*

Bài toán 164 ([VMS23], p. 38, 5.4, ĐHGTVT). *Tính*

$$I:=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{(1+2023^x)\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

Bài toán 165 ([VMS23], p. 38, 5.5, ĐHGTVT). *Cho hàm f dương, khả tích trên $[a,b]$, $0<m\le f(x)\le M$, $\forall x\in[a,b]$. Chứng minh*

$$(b-a)^2\le\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\le\frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2.$$

Bài toán 166 ([VMS23], p. 39, 5.6, ĐHKH Thái Nguyên). *Cho hàm $h\in C([0,1])$ thỏa $\int_0^1 xh(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x$. Chứng minh tồn tại $\beta\in(0,1)$ thỏa $\beta h(\beta^2)=\frac{2023}{2}\int_0^{\beta^2} h(x)\,\mathrm{d}x$.*

Bài toán 167 ([VMS23], p. 39, 5.7, ĐHKH Thái Nguyên). *Cho $f\in C([0,\pi])$ thỏa $f(0)>0$ & $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x<2$. Chứng minh phương trình $f(x)=\sin x$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(0,\pi)$.*

Bài toán 168 ([VMS23], p. 39, 5.8, ĐH Mỏ–Địa chất). *Cho $f\in C([0,1]),g\in C([0,1],(0,\infty))$ với f không giảm. Chứng minh*

$$\left(\int_0^t f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right)\le\left(\int_0^t g(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right),\ \forall t\in[0,1].$$

Bài toán 169 ([VMS23], p. 39, 5.9, ĐH Mỏ–Địa chất). *Cho $f\in C([0,1])$ thỏa $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$. Chứng minh tồn tại điểm $c\in(0,1)$ thỏa $\int_0^c xf(x)\,\mathrm{d}x=0$.*

Bài toán 170 ([VMS23], p. 39, 5.10, ĐHSPHN2). *Gọi $\mathcal{F}$ là lớp tất cả các hàm khả vi $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ thỏa*

$$|f'(x)-f'(y)|\le 2023|x-y|,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Chứng minh

$$(f'(x))^2<4046f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 171 ([VMS23], p. 40, 5.11, ĐHSPHN2). *Giả sử $f\in C^2([a,b])$ thỏa $f(a)\ne -f(b)$ & $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$. Tìm* GTNN *của*

$$A:=\frac{(b-a)^3}{(f(a)+f(b))^2}\int_a^b (f''(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

Bài toán 172 ([VMS23], p. 40, 5.12, ĐH Trà Vinh). *Tính*

$$I:=\int_0^{2\pi}\ln(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x})\,\mathrm{d}x.$$

Bài toán 173 ([VMS23], p. 40, 5.12, ĐH Vinh). *Cho $f\in C([0,1])$ thỏa $xf(y)+yf(x)\le 1$, $\forall x,y\in[0,1]$. Chứng minh: (a) $f(x)\le\dfrac{1}{2x}$, $\forall x\in(0,1]$. (b) $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\le\dfrac{\pi}{4}$.*

Bài toán 174 ([VMS24], p. 37, 5.1, VNUHCM UIT). *Cho $\alpha\in(0,\infty)$ & $f\in C([0,1])$ nghịch biến, $a\in(0,1)$ thỏa*

$$\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t<\frac{a}{2025},\ f(0)=\beta>0.$$

Chứng minh phương trình $f(x)=x^{2024}$ có nghiệm trong $[0,1]$.

Bài toán 175 ([VMS24], p. 38, 5.2, ĐH Đồng Tháp). *Giả sử $f \in C^1([0,1])$ thỏa $f(0) = 0$, $0 \le f'(x) \le 1$, $\forall x \in [0,1]$. Xét hàm số*

$$F(t) = \left(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 - \int_0^t (f(x))^3\,\mathrm{d}x,\ \forall t \in [0,1].$$

(a) Chứng minh F đồng biến trên $[0,1]$. (b) Chứng minh

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \ge \int_0^1 (f(x))^3\,\mathrm{d}x.$$

Cho vài ví dụ về hàm f để đẳng thức xảy ra.

Bài toán 176 ([VMS24], p. 38, 5.3, ĐHGTVT). *Cho $f : [0,1] \to (0,+\infty)$ là 1 hàm khả tích thỏa $f(x)f(1-x) = 1$, $\forall x \in [0,1]$. Chứng minh $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \ge 1$.*

Bài toán 177 ([VMS24], p. 38, 5.4, HUS). *Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ là hàm khả tích trên $[0,1]$ & liên tục trên $(0,1)$. Chứng minh tồn tại $a, b \in (0,1)$ phân biệt sao cho*

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Bài toán 178 ([VMS24], p. 38, 5.5, ĐH Mỏ–Địa chất). *Tính tích phân*

$$\iiiint_{x^2+y^2+z^2+t^2\le 1} e^{x^2+y^2-z^2-t^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t.$$

Bài toán 179 ([VMS24], p. 38, 5.6, ĐH Vinh). *Chứng minh*

$$\frac{9}{8\pi} < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x < \frac{3}{2\pi}.$$

7.1 SymPy/`integrals` module

See https://docs.sympy.org/latest/modules/integrals/integrals.html. The `integrals` module in `SymPy` implements methods to calculate definite & indefinite integrals of expressions. Principal method in this module is `integrate()`:

- `integrate(f, x)` returns the indefinite integral $\int f\,\mathrm{d}x$
- `integrate(f, (x, a, v))` returns the definite integral $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$.

Problem 7 (Integration of elementary functions). *Use* `SymPy` *to compute definite- & indefinite integrals of elementary functions as many as possible.*

Problem 8 (Integration of nonelementary functions). *Use* `SymPy` *to compute definite- & indefinite integrals of nonelementary functions as many as possible.*

Example 4 (Integral of error function). *The indefinite integral of the nonelementary function $e^{-x^2}\mathrm{erf}(x)$, where $\mathrm{erf}(x)$ is the* error function, *is given by*

$$\int e^{-x^2}\mathrm{erf}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\mathrm{erf}(x).$$

Run the following Python code:

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
print(integrate(exp(-x**2)*erf(x), x))
```

to obtain the following output:

```
sqrt(pi)*erf(x)**2/4
```

For more information about the error function, see, e.g., Wikipedia/error function.

7.2 Leibniz integral rule – Quy tắc tích phân Leibniz

In calculus, the *Leibniz integral rule* for differentiation under the integral sign, named after Gottfried Wilhelm Leibniz.

Theorem 9 (Leibniz integral rule – Quy tắc tích phân Leibniz). *For an integral of the form $\int_{a(x)}^{b(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t$ where $a(x), b(x) \in \mathbb{R}$ & the integrands are functions dependent on x, the derivative of this integral is expressible as*

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t\right) = f(b(x),x)\frac{d}{dx}b(x) - f(a(x),x)\frac{d}{dx}a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \partial_x f(t,x)\,\mathrm{d}t, \tag{Lintr}$$

where the partial derivative $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ indicates that inside the integral, only the variation of $f(t,x)$ with x is considered in taking the derivative.

8 Functional Equation – Phương Trình Hàm

Bài toán 180 ([VMS23], 6.1, p. 40, VNUHCM UIT)**.** *Tìm tất cả các hàm số* $f \in C^2(\mathbb{R}, (0,\infty))$ *thỏa*

$$f''(x)f(x) \ge 2(f'(x))^2, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 181 ([VMS23], 6.2, p. 40, ĐH Hùng Vương, Phú Thọ)**.** *Tìm tất cả các hàm số* $f \in C(\mathbb{R})$ *thỏa* $f(1) = 2023$ *&* $f(x+y) = 2023^x f(y) + 2023^y f(x)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Bài toán 182 ([VMS23], 6.3, p. 40, ĐH Hùng Vương, Phú Thọ)**.** *Tìm tất cả các hàm số* $f(x) \in C^1([0,1])$ *có* $f(1) = f(0$ *& thỏa*

$$\int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 \mathrm{d}x \le 1.$$

Bài toán 183 ([VMS23], 6.4, p. 41, ĐH Mỏ–Địa chất)**.** *Cho* $r, s \in \mathbb{Q}$. *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ *thỏa*

$$f(x + f(y)) = f(x + r) + y + s, \ \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

Bài toán 184 ([VMS23], 6.5, p. 41, FTU Hà Nội)**.** *Tìm tất cả các hàm số thực* $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *thỏa*

$$f(x + f(y)) = xf\left(1 + f\left(\frac{y}{x}\right)\right), \ \forall x, y \in (0,\infty).$$

Bài toán 185 ([VMS23], 6.6, p. 41, ĐH Trà Vinh)**.** *Tìm tất cả các hàm số* $f(x)$ *thỏa*

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2f(x) + \frac{3}{x-1}, \ \forall x \ne 1.$$

Bài toán 186 ([VMS23], 6.7, p. 41, ĐH Trà Vinh)**.** *Tìm tất cả các hàm số* $f(x) \in C^1([0,1])$ *thỏa* $f(1) = ef(0)$ *&*

$$\int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 \mathrm{d}x \le 1.$$

Bài toán 187 ([VMS24], p. 38, 6.1, HUS)**.** *Cho* $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ *là 1 hàm khả vi thỏa* $(f'(x))^2 - 3f'(x) + 2 = 0$, $\forall x \in (0,1)$. *Tìm* f. *(b) Mở rộng bài toán cho dạng phương trình hàm phức tạp hơn.*

9 Fourier transform – Biến đổi Fourier

Resources – Tài nguyên.

1. [Tao12]. Terence Tao. *Higher Order Fourier Analysis.*

9.1 Discrete Fourier transform – Biến đổi Fourier rời rạc

See, e.g., Wikipedia/discrete Fourier transform. In mathematics, the *discrete Fourier transform (DFT)* converts a finite sequence of equally-spaced samples of a function into a same-length sequence of equally-spaced samples of the discrete-time Fourier transform (DTFT), which is a complex-valued function of frequency. The interval at which the DTFT is sampled is the reciprocal of the duration of the input sequence.

Definition 12 (Discrete Fourier transform)**.** *The* discrete Fourier transform *transforms a sequence of* N *complex numbers* $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=0}^{N-1} \coloneqq x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$ *into another sequence of complex numbers,* $\mathbf{X} = \{X_n\}_{n=0}^{N-1} \coloneqq X_0, X_1, \ldots, X_{N-1}$ *defined by*

$$X_k \coloneqq \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi \frac{k}{N} n}. \tag{dFt}$$

The transform is sometimes denoted by the symbol $\mathcal{F}$*, as in* $\mathbf{X} = \mathcal{F}\{\mathbf{x}\}$ *or* $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ *or* $\mathcal{F}\mathbf{x}$.

10 Miscellaneous

10.1 Contributors

1. Võ Ngọc Trâm Anh [VNTA]: Code C/C++.

2. Nguyễn Lê Đăng Khoa [NLDK]: Code C/C++.

3. Phan Vĩnh Tiến [PVT]. Proofs of some results in Mathematical Analysis.

10.2 See also

1. [Str20]. STEVEN STROGATZ. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe.*

2. [Str24]. STEVEN STROGATZ. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe – Sức Mạnh Vô Hạn: Giải Tích Toán Khám Phá Bí Mật Của Vũ Trụ Như Thế Nào?.*

   Nhận xét. 1 quyển sách hay về thường thức về lịch sử phát triển của Giải tích Toán học & các ý tưởng cơ bản nhất của Giải tích. Khuyến khích đọc thử, cũng như các tác phẩm thường thức Khoa học Tự nhiên nói chung & Toán học nói riêng khác của tác giả STEVEN STROGATZ.

3. TS. HUỲNH QUANG VŨ. *Các Bài Giảng Giải Tích.* https://sites.google.com/view/hqvu/teaching.

   - Bộ Môn Giải Tích, Khoa Toán - Tin học, Faculty of Mathematics & Computer Science, HCMUS. *Giáo Trình Vi Tích Phân 1.*
   - Bộ Môn Giải Tích, Khoa Toán - Tin học, Faculty of Mathematics & Computer Science, HCMUS. *Giáo Trình Vi Tích Phân 2.*

4. *Vietnamese Mathematical Olympiad for High School- & College Students (VMC) – Olympic Toán Học Học Sinh & Sinh Viên Toàn Quốc.*

   PDF: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/VMC/NQBH_VMC.pdf.

   TEX: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/VMC/NQBH_VMC.tex.

   - Codes:
     - C++ code: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/C++.
     - Python code: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/Python.
   - Resource: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/resource.
   - Figures: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/figure.

5. *Olympic Tin Học Sinh Viên OLP & ICPC.*

   PDF: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/OLP_ICPC/NQBH_OLP_ICPC.pdf.

   TEX: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/OLP_ICPC/NQBH_OLP_ICPC.tex.

   - Codes:
     - C: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/OLP_ICPC/C.
     - C++: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/OLP_ICPC/C++.
     - Python: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/OLP_ICPC/Python.

Tài liệu

[Hùn+23] Trần Quang Hùng, Lê Thị Việt Anh, Phạm Việt Hải, Khiếu Thị Hương, Tạ Công Sơn, Nguyễn Xuân Thọ, Ninh Văn Thu, and Phạm Đình Tùng. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 11 Tập 1.* Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 176.

[Quỳ+20a] Đoàn Quỳnh, Trần Nam Dũng, Nguyễn Vũ Lương, and Đặng Hùng Thắng. *Tài Liệu Chuyên Toán Bài Tập Đại Số & Giải Tích 11.* Tái bản lần 9. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2020, p. 248.

[Quỳ+20b] Đoàn Quỳnh, Trần Nam Dũng, Nguyễn Vũ Lương, and Đặng Hùng Thắng. *Tài Liệu Chuyên Toán Đại Số & Giải Tích 11.* Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2020, p. 327.

[Rud76] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis.* Third. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 1976, pp. x+342.

[Str20] Steven Strogatz. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe.* Mariner Books, 2020, p. 400.

[Str24] Steven Strogatz. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe – Sức Mạnh Vô Hạn: Giải Tích Toán Khám Phá Bí Mật Của Vũ Trụ Như Thế Nào?* Phạm Văn Thiều dịch. Nhà Xuất Bản Trẻ, 2024, p. 486.

[Tao12] Terence Tao. *Higher order Fourier analysis.* Vol. 142. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012, pp. x+187. ISBN: 978-0-8218-8986-2. DOI: 10.1090/gsm/142. URL: https://doi.org/10.1090/gsm/142.

[Tao22a] Terence Tao. *Analysis I.* Vol. 37. Texts and Readings in Mathematics. Fourth edition [of 2195040]. Hindustan Book Agency, New Delhi, [2022] ©2022, pp. xvi+355. ISBN: 978-81-951961-9-7.

[Tao22b] Terence Tao. *Analysis II.* Vol. 38. Texts and Readings in Mathematics. Fourth edition [of 2195041]. Springer, Singapore; Hindustan Book Agency, New Delhi, [2022] ©2022, pp. xvii+195. ISBN: 978-9-81197-284-3. DOI: 10.1007/978-981-19-7284-3. URL: https://doi.org/10.1007/978-981-19-7284-3.

[Thá+23a] Đỗ Đức Thái, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang. *Toán 6 Tập 1*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2023, p. 128.

[Thá+23b] Đỗ Đức Thái, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang. *Toán 6 Tập 2*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2023, p. 108.

[Thá+25] Đỗ Đức Thái, Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Minh Phương. *Toán 11 Tập 1*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2025, p. 123.

[Thư+21] Trần Đan Thư, Nguyễn Thanh Phương, Đinh Bá Tiến, and Trần Minh Triết. *Nhập Môn Lập Trình*. Nhà Xuất Bản Khoa Học & Kỹ Thuật, 2021, p. 427.

[VMS23] Hội Toán Học Việt Nam VMS. *Kỷ Yếu Kỳ Thi Olympic Toán Học Sinh Viên–Học Sinh Lần Thứ 29*. Huế 2–8/4/2023. VMS, 2023, p. 141.

[VMS24] Hội Toán Học Việt Nam VMS. *Kỷ Yếu Kỳ Thi Olympic Toán Học Sinh Viên–Học Sinh Lần Thứ 30*. Đà Nẵng 8–13/4/2024. VMS, 2024, p. 112.

[WS10] Robert Wrede and Murray R. Spiegel. *Advanced Calculus*. 3rd edition. Schaum's Outline Series. McGraw Hill, 2010, p. 456. ISBN: 978-0071623667.