

Lecture Note: Combinatorics & Graph Theory

Bài Giảng: Tổ Hợp & Lý Thuyết Đồ Thị

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 9 tháng 3 năm 2025

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Advanced STEM & Beyond*:

URL: https://nqbh.github.io/advanced_STEM/.

Latest version:

- *Lecture Note: Combinatorics & Graph Theory – Bài Giảng: Tổ Hợp & Lý Thuyết Đồ Thị.*

PDF: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/combinatorics/lecture/NQBH_combinatorics_graph_theory_lecture.pdf.

TeX: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/combinatorics/lecture/NQBH_combinatorics_graph_theory_lecture.tex.

- *Slide: Combinatorics & Graph Theory – Slide Bài Giảng: Tổ Hợp & Lý Thuyết Đồ Thị.*

PDF: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/combinatorics/slide/NQBH_combinatorics_graph_theory_slide.pdf.

TeX: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/combinatorics/slide/NQBH_combinatorics_graph_theory_slide.tex.

- Codes:

- C/C++: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/combinatorics/C++.

- Python: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/combinatorics/Python.

Mục lục

| | |
|---|----------|
| 1 Basic Combinatorics – Tổ Hợp Cơ Bản | 2 |
| 1.1 Mathematical induction & recurrence – Quy nạp & truy hồi | 2 |
| 1.2 Pigeonhole principle & Ramsey theory – Nguyên lý chuồng bồ câu & lý thuyết Ramsey | 2 |
| 1.3 Counting rules & Stirling number of type 1 & type 2 | 2 |
| 1.4 Hoán vị & tổ hợp | 2 |
| 1.5 Hệ số nhị thức & đa thức | 2 |
| 1.6 Phân vùng số nguyên & nguyên tắc loại suy | 2 |
| 2 Graph Theory – Lý Thuyết Đồ Thị | 2 |
| 3 Posets, Kết Nối, Lưới Boolean | 2 |
| 4 Miscellaneous | 2 |
| Tài liệu | 2 |

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com, hong.nguyenquanba@umt.edu.vn. Bến Tre City, Việt Nam.

1 Basic Combinatorics – Tổ Hợp Cơ Bản

1.1 Mathematical induction & recurrence – Quy nạp & truy hồi

1.2 Pigeonhole principle & Ramsey theory – Nguyên lý chuồng bồ câu & lý thuyết Ramsey

1.3 Counting rules & Stirling number of type 1 & type 2

1.4 Hoán vị & tổ hợp

1.5 Hệ số nhị thức & đa thức

1.6 Phân vùng số nguyên & nguyên tắc loại suy

2 Graph Theory – Lý Thuyết Đồ Thị

Định nghĩa 2.1 ([HT24], Def. 7.2, p. 249, Đỉnh cô lập, lá). Cho G là 1 đồ thị. Đỉnh có bậc 0 được gọi là đỉnh cô lập, đỉnh có bậc 1 được gọi là lá.

Định nghĩa 2.2 ([HT24], Def. 7.3, p. 249, Đồ thị chính quy). 1 đồ thị được gọi là chính quy bậc d hoặc d -chính quy nếu mỗi đỉnh có bậc bằng $d \in \mathbb{N}$.

Định nghĩa 2.3 ([HT24], Def. 7.3, p. 249, Đỉnh thị khối). 1 đồ thị được gọi là đồ thị bậc 3 nếu nó chính quy bậc 3, i.e., mỗi đỉnh đồ thị có bậc bằng 3.

Goal 1 (Tính khả dĩ của dãy bậc của đồ thị). Tìm vài dấu hiệu hoặc vài điều kiện cần & đủ để có thể quyết định liệu 1 dãy số nguyên dương $(a_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{N}$ cho trước có thể thể là dãy bậc của đồ thị mà không phải vẽ biểu đồ.

Định nghĩa 2.4 ([HT24], Def. 7.6, p. 249, Dãy bậc của đồ thị, chuỗi đồ thị). Chuỗi bậc của đồ thị là dãy bậc của các đỉnh của nó theo thứ tự không tăng. 1 dãy số nguyên không âm không tăng được gọi là đồ thị nếu tồn tại 1 đồ thị có chuỗi bậc chính xác là dãy số nguyên không âm đó.

Ví dụ 1 (Sequence $1, 1, \dots, 1$). $1, 1, 1$ không phải là 1 dãy đồ thị vì không thể xây dựng 1 đồ thị có 3 đỉnh sao cho tất cả 3 bậc là 1. Nhưng $1, 1$ & $1, 1, 1, 1$, hay nói chung các dãy chỉ toàn số 1 với độ dài là 1 số chẵn, i.e., $\{1\}_{i=1}^{2n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, là các dãy đồ thị, nhưng bất kỳ dãy chỉ toàn số 1 với độ dài là 1 số lẻ, i.e., $\{1\}_{i=1}^{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, thì không phải là 1 dãy đồ thị (why?)

Định lý 2.1 (Euler's, [HT24], Thm. 7.9, p. 250). Cho $G = (V, E)$ là đồ thị tổng quát với $d_1, \dots, d_{|V|} \in \mathbb{N}$ là bậc của các đỉnh. Khi đó $\sum_{i=1}^{|V|} d_i = 2|E|$. Nói riêng, số đỉnh của G có bậc lẻ là số chẵn.

Briefly:

$$d_1, \dots, d_{|V|} \text{ are degrees of vertices of a graph } G = (V, E) \Rightarrow \sum_{i=1}^{|V|} d_i = 2|E| \Rightarrow |\{i; d_i \not\equiv 2\}| : 2.$$

Chú ý chiều ngược lại chưa chắc đúng:

Ví dụ 2. Dãy số $7, 5, 5, 4, 3, 2, 2, 0$ không mâu thuẫn với Định lý 2.1 nhưng nó không phải là đồ thị (why?).

Question 1. Có thể suy ra được những hệ quả nào từ đẳng thức $\sum_{i=1}^{|V|} d_i = 2|E|$?

1. Cho $G = (V, E)$ là đồ thị tổng quát với $d_1, \dots, d_p \in \mathbb{N}$ là bậc của các đỉnh. Chứng minh: (i) Bậc cao nhất $d_{\max} := \max_{1 \leq i \leq p} d_i$ thỏa $d_{\max} \geq \frac{2|E|}{|V|}$. (ii)

3 Posets, Kết Nối, Lưới Boolean

4 Miscellaneous

Tài liệu

[HT24] Bùi Việt Hà and Vương Trọng Thanh. *Các Vấn Đề Trong Tổ Hợp*. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2024, p. 429.