Lecture Note: Mathematical Analysis – Bài Giảng: Giải Tích Toán Học

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 5 tháng 5 năm 2025

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Advanced STEM & Beyond*:
URL: `https://nqbh.github.io/advanced_STEM/`.
Latest version:

- *Lecture Note: Mathematical Analysis – Bài Giảng: Giải Tích Toán Học.*
  PDF: URL: `https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/lecture/NQBH_mathematical_analysis_lecture.pdf`.
  TEX: URL: `https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/lecture/NQBH_mathematical_analysis_lecture.tex`.
- *Slide: Mathematical Analysis – Slide: Giải Tích Toán Học.*
  PDF: URL: `https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/slide/NQBH_mathematical_analysis_slide.pdf`.
  TEX: URL: `https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/slide/NQBH_mathematical_analysis_slide.tex`.
- Codes:
  - C++: `https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/analysis/C++`.
  - Python: `https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/analysis/Python`.

Mục lục

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: `nguyenquanbahong@gmail.com`, `hong.nguyenquanba@umt.edu.vn`. Bến Tre City, Việt Nam.

1 Basic Mathematical Analysis – Giải Tích Toán Học Cơ Bản

Resources – Tài nguyên.

1. Đặng Đình Áng. *Nhập Môn Giải Tích*.
2. [Rud76]. Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*.
3. [Tao22a]. Terence Tao. *Analysis I*.
4. [Tao22b]. Terence Tao. *Analysis II*.

Question 1 (Definition of mathematical analysis)**.** *What is mathematical analysis? Cf. mathematical analysis with other types of analysis.*

For answers, see, e.g., [Tao22a, Chap. 1, Sect. 1.1: *What Is Analysis?*, pp. 1–2], Wikipedia/mathematical analysis. For other types of analysis, see, e.g., Wikipedia/analysis.

Question 2 (Motivation of mathematical analysis)**.** *Why do mathematical analysis?*

For answers, see, e.g., [Tao22a, Chap. 1, Sect. 1.2: *Why Do Analysis?*, pp. 2–10]

Example 1 (Division by zero & infinity)**.** *The cancellation law for multiplication $ac = bc \Rightarrow a = b$ does not work when $c = 0$ & $c = \pm\infty$. The cancellation law for addition $a + c = b + c \Rightarrow a = b$.*

Example 2 (Cancellation properties)**.**

See, e.g., Wikipedia/cancellation property.

Example 3 (Geometric series – Chuỗi hình học)**.** *When does the geometric series $G(a) \coloneqq \sum_{i=0}^\infty \frac{1}{a^i}$ converge? When does $G(a)$ diverge?*

1.1 Numbers – Các loại số

Trong chương trình Toán phổ thông, học sinh đã được học: số tự nhiên ở chương trình Toán 6 [Thá+23a; Thá+23b], & số hữu tỷ & số thực ở chương trình Toán 7,

1.2 Notations & conventions – Ký hiệu & quy ước

Đặt tập hợp các đa thức (polynomial) 1 biến với hệ số nguyên, hệ số hữu tỷ, hệ số thực, hệ số phức lần lượt cho bởi:

$$\mathbb{Z}[x] \coloneqq \left\{\sum_{i=0}^n a_ix^i; n\in\mathbb{N},\ a_i\in\mathbb{Z},\ \forall i = 0,\ldots,n,\ a_n\neq 0\right\},$$
$$\mathbb{Q}[x] \coloneqq \left\{\sum_{i=0}^n a_ix^i; n\in\mathbb{N},\ a_i\in\mathbb{Q},\ \forall i = 0,\ldots,n,\ a_n\neq 0\right\},$$
$$\mathbb{R}[x] \coloneqq \left\{\sum_{i=0}^n a_ix^i; n\in\mathbb{N},\ a_i\in\mathbb{R},\ \forall i = 0,\ldots,n,\ a_n\neq 0\right\},$$
$$\mathbb{C}[x] \coloneqq \left\{\sum_{i=0}^n a_ix^i; n\in\mathbb{N},\ a_i\in\mathbb{C},\ \forall i = 0,\ldots,n,\ a_n\neq 0\right\}.$$

Ta có quan hệ hiển nhiên $\mathbb{N}[x]\subset\mathbb{Z}[x]\subset\mathbb{Q}[x]\subset\mathbb{R}[x]\subset\mathbb{C}[x]$. Tổng quát, với $\mathbb{F}$ là 1 trường bất kỳ, tập hợp các đa thức 1 biến với hệ số thuộc trường $\mathbb{F}$ (e.g., $\mathbb{Z},\mathbb{Z}_p,\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$) cho bởi:

$$\mathbb{F}[x] \coloneqq \left\{\sum_{i=0}^n a_ix^i; n\in\mathbb{N},\ a_i\in\mathbb{F},\ \forall i = 0,\ldots,n,\ a_n\neq 0\right\}.$$

Tập xác định của đa thức có thể là toàn bộ trường số thực $\mathbb{R}$ hoặc trường số phức $\mathbb{C}$, i.e., $D_P = \mathrm{dom}(P) = \mathbb{R}$ or $D_P = \mathrm{dom}(P) = \mathbb{C}$, tùy vào trường $\mathbb{F}$ của các hệ số & mục đích sử dụng đa thức.

Problem 1 (Cf: Calculus vs. Mathematical Analysis)**.** *Distinguish & compare Calculus vs. Mathematical Analysis.*

Analysis is more pure mathematics. Calculus is more applied mathematics.

Problem 2 (Examples & counterexamples in mathematical analysis – Ví dụ & phản ví dụ trong phân tích toán học). *Find, from simple to advanced, examples & counterexamples to each mathematical concepts & mathematical results, including lemmas, propositions, theorems, & consequences.*

– Tìm các ví dụ & phản ví dụ từ đơn giản đến nâng cao cho mỗi khái niệm toán học & kết quả toán học, bao gồm các bổ đề, mệnh đề, định lý, & hệ quả.

Problem 3 (Python `SymPy`). *Study* `SymPy` *to support calculus & mathematical analysis.*

Definition 1 (Neighborhood, [WS10], p. 6). *The set of all points x s.t. $|x-a|<\delta$, where $\delta>0$, is called a δ* neighborhood *of the point a. The set of all points x s.t. $0<|x-a|<\delta$, in which $x=a$ is excluded, is called a* deleted δ neighborhood *of a or an open ball of radius δ about a.*

Theorem 1 (Bolzano–Weierstrass theorem). *Every bounded infinite set has at least 1 limit point.*

Definition 2 (Algebraic- & transcendental numbers – số đại số & số siêu việt). *A number $x\in\mathbb{R}$ which is a solution to the* polynomial equation

$$\sum_{i=0}^n a_ix^i = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0, \tag{1}$$

where $n\in\mathbb{N}^\star$, called the degree *of the equation, $a_i\in\mathbb{Z}$, $\forall i=0,1,\ldots,n$, $a_n\neq 0$, is called an* algebraic number*. A number which cannot be expressed as a solution of any polynomial equation with integer coefficients is called a* transcendental number*.*

Theorem 2 (Common transcendental numbers). *π, e are transcendental.*

Theorem 3 (Countability of sets of algebraic- & transcendental numbers). *(i) The set of algebraic numbers is a countably infinite set. (ii) The set of transcendental numbers is noncountably infinite.*

2 Sequence – Dãy Số

- **sequence** [n] /ˈsiːkwəns/ 1. [countable] *sequence (of sth)* a set of events, actions, numbers, etc. which have a particular order & which lead to a particular result; 2. [countable, uncountable] the order that events, actions, etc. happen in or should happen in; 3. [countable] a part of a film that deals with 1 subject or topic or consists of 1 scene. [v] 1. *sequence sth* (specialist) to arrange things into a sequence; 2. *sequence sth* (biology) to identify the order in which a set of genes or parts of molecules are arranged.

Resources – Tài nguyên.

1. [Rud76]. Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. Chap. 3: Numerical Sequences & Series.
2. [Tao22a]. Terence Tao. *Analysis I*.
3. [Tao22b]. Terence Tao. *Analysis II*.
4. [WS10]. Robert Wrede, Murray R. Spiegel. *Advanced Calculus*. 3e. Schaum's Outline Series. Chap. 2: Sequences.

This section deals primarily with sequences of real- & complex numbers, sequences in Euclidean spaces, or even in metric spaces.

– Phần này chủ yếu đề cập đến các dãy số thực & phức, các dãy trong không gian Euclid hoặc thậm chí trong không gian metric.

2.1 Definition of a sequence – Định nghĩa của dãy số

Definition 3 (Numerical sequence – dãy số, [WS10], p. 25). *A* sequence *is a set of numbers $u_1,u_2,\ldots$ in a definite order of arrangement (i.e., a* correspondence *with the natural numbers or a subset thereof) & formed according to a definite rule. Each number in the sequence is called a* term*; u_n is called the* nth term*. The sequence is called* finite *or* infinite *according as there are or are not a finite number of terms. The sequence $u_1,u_2,\ldots$ is also designated briefly by $\{u_n\}$.*

Có thể hiểu khái niệm dãy (sequence) ở đây 1 cách tổng quát hơn là 1 dãy các đối tượng Toán học hoặc Tin học, e.g., dãy số phức $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ là 1 dãy gồm các số $a_n\in\mathbb{C}$, $\forall n=1,2,\ldots$, dãy các hàm số thực $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ là 1 dãy gồm các hàm số $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\forall n=1,2,\ldots$, hay dãy các dãy $\{\{a_{m,n}\}_{n=1}^\infty\}_{m=1}^\infty$ tức 1 dãy gồm các phần tử của dãy lại là các dãy số $\{a_{m,n}\}_{n=1}^\infty$, $\forall m=1,2,\ldots$ Trước hết, ta tập trung là khái niệm dãy đơn giản nhất: dãy số – numerical sequence, trước khi đến với khái niệm *hội tụ đều* của dãy hàm (uniform convergence of sequences of functions).

2.2 Convergent- & divergent sequences – Dãy số hội tụ & dãy số phân kỳ

Definition 4 (Limit of a sequence, [WS10], p. 25). *A number $l \in \mathbb{R}$ is called the* limit *of an infinite sequence $u_1, u_2, \ldots$ if for any positive number ϵ we can find a positive number N depending on ϵ s.t. $|u_n - l| < \epsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > N$. In such case we write $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.*

Definition 5 (Convergent sequences, [Rud76], Def. 3.1, p. 47). *A sequence $\{p_n\}$ in a metric space X is said to* converge *if there is a point $p \in X$ with the following property: For every $\varepsilon > 0$ there is an integer N such that $n \ge N$ implies that $d(p_n, p) < \varepsilon$. (Here d denotes the* distance *in X.) In this case we also say that $\{p_n\}$ converges to p, or that p is the* limit *of $\{p_n\}$, & we write $p_n \to p$, or $p_n \to p$ as $n \to \infty$, or $\lim_{n\to+\infty} p_n = p$. If $\{p_n\}$ does not converge, it is said to* diverge.

Remark 1. *Định nghĩa 5 về dãy hội tụ trong các không gian metric không chỉ phụ thuộc vào bản thân dãy $\{p_n\}$ mà còn vào chính không gian metric X. Nhân tiện, vì ở đây đang xét không gian metric mà mỗi phần tử của nó được coi là 1 điểm (point), nên thành phần của dãy số được ký hiệu là p_n để ám chỉ bản chất của mỗi phần tử của dãy là 1 điểm trong không gian metric tổng quát X. Nếu $X = \mathbb{R}$ hoặc $X = \mathbb{C}$ thì mỗi điểm trên trục số thực hoặc 1 số phức $z = a + bi$ tương ứng với điểm (a, b) trên mặt phẳng phức $\mathbb{R}^2$, khi đó ký hiệu p_n có thể được thay bởi các ký hiệu quen thuộc hơn cho số (numerals), e.g., $a_n, x_n, \ldots$*

In cases of possible ambiguity, we can be more precise & specify "convergent in X" rather than "convergent".
– Trong trường hợp có thể có sự mơ hồ, chúng ta có thể chính xác hơn & cụ thể hơn "hội tụ trong X" thay vì "hội tụ".

Definition 6 (Range of a sequence, bounded sequence). *The set of all points p_n, $n = 1, 2, \ldots$, is the* range *of $\{p_n\}$. The range of a sequence may be a finite set, or it may be infinite. The sequence $\{p_n\}$ is said to be* bounded *if its range is bounded.*

Problem 4. *Prove: (a) If $s_n = \frac{1}{n}$, then $\lim_{n\to+\infty} s_n = 0$; the range is infinite, & the sequence is bounded. (b) If $s_n = n^2$, the sequence $\{s_n\}$ is unbounded, is divergent, & has infinite range. (c) If $s_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$, the sequence $\{s_n\}$ converges to 1, is bounded, & has infinite range. (d) If $s_n = i^n$, the sequence $\{s_n\}$ is divergent, is bounded, & has finite range. (e) If $s_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, then $\{s_n\}$ converges to 1, is bounded, & has finite range. (f) Find similar examples.*

Theorem 4 (Some important properties of convergent sequences in metric spaces, [Rud76], Thm. 3.2, p. 48). *Let $\{p_n\}$ be a sequence in a metric space X.*

(a) $\{p_n\}$ converges to $p \in X$ iff every neighborhood of p contains all but finitely many of the terms of $\{p_n\}$.

(b) (Uniqueness of limit) *If $p \in X, p' \in X$, & if $\{p_n\}$ converges to p & to p', then $p' = p$.*

(c) If $\{p_n\}$ converges, then $\{p_n\}$ is bounded.

(d) If $E \subset X$ & if p is a limit point of E, then there is a sequence $\{p_n\}$ in E such that $p = \lim_{n\to+\infty} p_n$.

For sequences in Euclidean spaces $\mathbb{R}^d$, we can study the relation between convergence & the algebraic operations.

Theorem 5 (Algebraic operations on limit of sequences of complex numbers, [Rud76], Thm. 3.3, p. 49). *Suppose $\{a_n\}, \{b_n\}$ are complex sequences, & $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$,$\lim_{n\to+\infty} b_n = b$. Then:*

(a) $\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty} b_n = a + b$.

(b) $\lim_{n\to+\infty} ca_n = ca$, $\lim_{n\to+\infty}(c + a_n) = c + \lim_{n\to+\infty} a_n = c + a$, $\forall c \in \mathbb{C}$.

(c) $\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n \lim_{n\to+\infty} b_n = ab$.

(d) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a}$, provided $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, & $a \neq 0$.

Theorem 6 (Algebraic operations on limit of sequences in Euclidean spaces, [Rud76], Thm. 3.4, p. 50).

(a) Suppose $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^d$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, & $\mathbf{x}_n = (x_{1,n}, \ldots, x_{d,n})$. Then $\{\mathbf{x}_n\}$ converges to $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ iff $\lim_{n\to+\infty} x_{i,n} = x_i$, $\forall i = 1, \ldots, k$.

(b) Suppose $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^\infty, \{\mathbf{y}_n\}_{n=1}^\infty$ are sequences in $\mathbb{R}^d$, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ is a sequence of reals, & $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}, \mathbf{y}_n \to \mathbf{y}, a_n \to a$. Then

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n = \mathbf{x} + \mathbf{y},\ \lim_{n\to+\infty} \mathbf{x}_n \cdot \mathbf{y}_n = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y},\ \lim_{n\to+\infty} a_n \mathbf{x}_n = a\mathbf{x}.$$

2.3 Subsequences

Definition 7. *Given a sequence $\{p_n\}_{n=1}^\infty$, consider a sequence $\{n_k\}$ of positive integers, s.t. $n_1 < n_2 < \cdots$. Then the sequence $\{p_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ is called a* subsequence *of $\{p_n\}_{n=1}^\infty$. If $\{p_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ converges, its limit is called a* subsequential limit *of $\{p_n\}_{n=1}^\infty$.*

Problem 5. *Prove that $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ converges to p iff every subsequence of $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ converges to p.*

Theorem 7 ([Rud76], Thm. 3.6, p. 50).

(a) If $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ is a sequence in a compact metric space X, then some subsequence of $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ converges to a point of X.

(b) Every bounded sequence in $\mathbb{R}^d$ contains a convergent subsequence.

Theorem 8 ([Rud76], Thm. 3.7, p. 52). *The subsequential limits of a sequence $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ in a metric space X form a closed subset of X.*

2.4 Cauchy sequences – Dãy Cauchy

Definition 8 ([Rud76], Def. 3.8, p. 52)**.** *A sequence $\{p_n\}$ in a metric space X is said to be a* Cauchy sequence *if for every $\epsilon > 0$ there is an integer N s.t. $d_X(p_n, p_m) < \epsilon$ if $n \ge N$ & $m \ge N$.*

Briefly:

$$\{p_n\} \text{ is a Cauchy sequence in a metric space } X \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \text{ s.t. } \min\{m, n\} \ge N_\varepsilon \Rightarrow d_X(p_n, p_m) < \varepsilon,$$

or equivalently,

$$\{p_n\} \text{ is a Cauchy sequence in a metric space } X \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \text{ s.t. } d_X(p_n, p_m) < \varepsilon,\ \forall m \ge N_\varepsilon,\ \forall n \ge N_\varepsilon.$$

Definition 9. *Let E be a subset of a metric space X, & let S be the set of all real numbers of the form $d(p, q)$, with $p \in E, q \in E$. The sup of S is called the* diameter *of E.*

Problem 6 ([Rud76], p. 48, +1)**.** *(a) Prove that the sequence $\{\frac{1}{n}\}$ converges in $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ (to 0), but fails to converge in the set of all positive real numbers, with $d(x, y) := |x - y|$, $\forall x, y \in X$. (b) Find similar or more advanced examples.*

2.5 Sequences with SymPy

A sequence is a finite or infinite lazily evaluated list.

```
sympy.series.sequences.sequence(seq, limits=None)
```

returns appropriate `sequence object`.

Explanation: If `seq` is a SymPy sequence, returns `SeqPer` object otherwise returns `SeqFormula` object. E.g.:

```
from sympy import sequence
from sympy.abc import n
sequence(n**2, (n, 0, 5))
# output: SeqFormula(n**2, (n, 0, 5))
sequence((1, 2, 3), (n, 0, 5))
# output: SeqPer((1, 2, 3), (n, 0, 5))
```

2.5.1 Sequence Base

`class sympy.series.sequences.SeqBase(*args)`: Base class for sequences.

- `coeff(pt)`: returns the coefficient at point `pt`.
- `coeff_mul(other)`: should be used when `other` is not a sequence. Should be defined to define custom behavior.

  ```
  from sympy import SeqFormula
  from sympy.abc import n
  SeqFormula(n**2).coeff_mul(2)
  # output: SeqFormula(2*n**2, (n, 0, oo))
  ```

  `*` defines multiplication of sequences with sequences only.

- `find_linear_recurrence(n, d = None, gfvar = None, )`: Finds the shortest linear recurrence that satisfies the 1st n terms of sequence of order $\le \frac{n}{2}$ if possible. If `d` is specified, find shortest linear recurrence of order $\le \min\{d, \frac{n}{2}\}$ if possible. Returns list of coefficients `[b(1), b(2), ...]` corresponding to recurrence relation `x(n) = b(1)*x(n - 1) + b(2)*x(n - 2) + ...`. Return `[]` if no recurrence is found. If `gfvar` is specified, also returns ordinary generating function as a function of `gfvar`.

2.6 Problems: Sequences

Bài toán 1. *Tính* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{an + b}{cn + d}$ *theo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(c, d) \ne (0, 0)$.*

Bài toán 2. *Tính* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{an^2 + bn + c}{dn^2 + en + f}$ *theo $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, $(d, e, f) \ne (0, 0, 0)$.*

Bài toán 3. *Tính* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ *với: (a) $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $Q \not\equiv 0$. (b) $P, Q \in \mathbb{C}[x]$, $Q \not\equiv 0$.*

Bài toán 4. *Cho* $a, b, c, d, \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. *Tính: (a)* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a + b\alpha^n}{c + d\alpha^n}$. *(b)* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{an + b\alpha^n}{cn + d\alpha^n}$. *(c)* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{an^2 + b\alpha^n}{cn^2 + d\alpha^n}$. *(d)* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{P(x) + a\alpha^n}{Q(x) + b\alpha^n}$ *với* $P, Q \in \mathbb{R}[x]$.

Bài toán 5 ([VMS23], 1.1, p. 30, HCMUT)**.** *Cho* $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *thỏa* $f'(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *Xét dãy số* $\{a_n\}$*:*

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star. \end{cases}$$

(a) Nếu $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, *tính* $\lim_{n\to+\infty} a_n$. *(b) Nếu* $f(2023) = 0$ *&* $f \in C^2(\mathbb{R})$ *thỏa* $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, *tính* $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

Bài toán 6 ([VMS23], 1.2, p. 30, VNUHCM UIT)**.** *Cho dãy số* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *thỏa*

$$\begin{cases} u_0 \geq -2, \\ u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star. \end{cases}$$

(a) Chứng minh $\{u_n\}$ *có giới hạn hữu hạn. Tính* $\lim_{n\to+\infty} u_n$. *(b) Cho 2 dãy* $\{v_n\}_{n=1}^\infty, \{w_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$\begin{cases} v_n = 4^n|u_n - 2|, \\ w_n = \dfrac{u_1 u_2 \cdots u_n}{2^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star. \end{cases}$$

Tính $\lim_{n\to+\infty} v_n, \lim_{n\to+\infty} w_n$.

Bài toán 7 ([VMS23], 1.3, p. 30, ĐH Đồng Tháp)**.** *Xét dãy số* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$u_1 = \frac{3}{2}, \ u_n = 1 + \frac{1}{2}\arctan u_{n-1}, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Chứng minh $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *hội tụ.*

Bài toán 8 ([VMS23], 1.4, p. 31, ĐH Đồng Tháp)**.** *Cho dãy số* $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$a_1 = 1, \ a_{n+1} = \frac{n^2 - 1}{a_n} + 2, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

(a) Chứng minh $n \leq a_n \leq n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *(b) Đặt* $S_n^{(3)} \coloneqq \sum_{i=1}^n a_i^3$. *Tính* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{S_n^{(3)}}{n^4}$.

Bài toán 9 ([VMS23], 1.5, p. 31, ĐHGTVT)**.** *Cho dãy số* $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$a_1 > 0, \ a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Chứng minh $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ *giảm & tính* $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

Bài toán 10 ([VMS23], 1.6, p. 31, ĐH Hùng Vương, Phú Thọ)**.** *Cho dãy số* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$\begin{cases} u_0 = 0, \ u_1 = \beta, \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_{n-1}}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star. \end{cases}$$

(a) Tìm công thức số hạng tổng quát của $\{u_n\}_{n=1}^\infty$. *(b) Tính* $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Bài toán 11 ([VMS23], 1.7, p. 31, ĐHKH, Thái Nguyên)**.** *Cho dãy số* $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ *đặt bởi*

$$x_n = \sum_{i=1}^n \frac{i}{(i+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Tính $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{2023} x_i^n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{2023}^n}$.

Bài toán 12 ([VMS23], 1.8, p. 31, ĐH Mỏ–Địa chất)**.** *Tính*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\prod_{i=1}^n i^{i^{2021}}\right)^{\frac{1}{n^{2022}}}}{n^{\frac{1}{2022}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1^{1^{2021}} \cdot 2^{2^{2021}} \cdots n^{n^{2021}}\right)^{\frac{1}{n^{2022}}}}{n^{\frac{1}{2022}}}.$$

Bài toán 13 ([VMS23], 1.9, pp. 31–32, ĐHSPHN2). *Cho dãy số $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ đặt bởi*

$$x_1 \in (0,1),\ x_{n+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(1+x_i),\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

(a) Chứng minh dãy $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ có giới hạn hữu hạn. (b) Chứng minh $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n(x_n - x_{n+1})}{x_n^2} = \dfrac{1}{2}$.

Bài toán 14 ([VMS23], 1.10, p. 32, ĐH Trà Vinh). *Cho dãy số $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ đặt bởi*

$$a_1 = a_2 = 1,\ a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} + a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Tính x_{2022}.

Bài toán 15 ([VMS23], 1.11, p. 32, ĐH Trà Vinh). *Cho 2 dãy số $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty$ đặt bởi*

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3},\ x_{n+1} = x_n + \sqrt{1+x_n^2},\ y_{n+1} = \frac{1}{1+\sqrt{1+y_n^2}},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Chứng minh $x_ny_n \in (2,3)$, $\forall n \geq 2$ & $\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$.

Bài toán 16 ([VMS23], 1.11, p. 32, ĐH Vinh). *Cho dãy số $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ đặt bởi*

$$x_n = \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{2^i}\right) = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right),\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

(a) Tìm tất cả $n \in \mathbb{N}^\star$ thỏa $x_n > \frac{15}{8}$. (b) Chứng minh $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ hội tụ.

Bài toán 17 ([VMS24], p. 32, 1.1, VNUHCM UIT). *Cho $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Xét dãy số*

$$\begin{cases} x_0 = a,\ x_1 = b, \\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{2}x_{n-1}\left(1 - \cos\dfrac{\pi}{n}\right). \end{cases}$$

Chứng minh $\{x_n\}$ hội tụ.

Bài toán 18 ([VMS24], p. 32, 1.2, ĐH Đồng Tháp). *Cho dãy số $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ đặt bởi*

$$u_n = \sum_{i=1}^n \frac{i}{(i+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

(a) Tìm $n \in \mathbb{N}$ lớn nhất để $u_n < \dfrac{2023}{2024}$. (b) Tính giới hạn $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{2024} u_i^n} = \sqrt[n]{u_1^n + u_2^n + \cdots + u_{2024}^n}$.

Bài toán 19 ([VMS24], p. 32, 1.3, ĐHGTVT). *Cho dãy số $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ thỏa $\frac{1}{2} < a_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Dãy số $\{x_n\}$ đặt bởi*

$$x_1 = a_1,\ x_{n+1} = \frac{2(a_{n+1} + x_n) - 1}{1 + 2a_{n+1}x_n},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

(a) Chứng minh dãy số $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ tăng & bị chặn trên. (b) Tìm $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

Bài toán 20 ([VMS24], p. 33, 1.4, ĐH Vinh). *Cho dãy số $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ đặt bởi*

$$\begin{cases} x_1 = 2024, \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{3\lfloor x_n \rfloor + 4},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star. \end{cases}$$

(a) Chứng minh $x_8 < 1$. (b) Chứng minh $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ hội tụ & tìm giới hạn.

3 Function – Hàm Số

Bài toán 21 ([VMS23], 3.1, p. 33, HCMUT). *(a) Chứng minh tồn tại hàm số $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ thỏa $xf''(x) + 2f'(x) = x^{2023}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (b) Giả sử $g \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ thỏa $xg''(x) + 2g'(x) \geq x^{2023}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh $\int_{-1}^1 x(g(x) + x^{2023})\,\mathrm{d}x \geq \dfrac{2}{2025}$.*

Bài toán 22 ([VMS23], 3.2, p. 33, ĐH Đồng Tháp). *Cho hàm $f(x)x = 2(x-1) - \arctan x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất là $a \in (1, \sqrt{3})$.*

Proposition 1 (Luật bình phương nghịch đảo). *Mỗi sự gia tăng khoảng cách từ nguồn cho ra kết quả giảm mức độ âm thanh theo tỷ lệ nghịch với bình phương của sự gia tăng khoảng cách.*

Bài toán 23 ([VMS23], 3.3, pp. 33–34, ĐH Đồng Tháp). *Sử dụng luật bình phương nghịch đảo, giải quyết bài toán: 1 người có 1 mảnh đất lớn có chiều dài mặt tiền là l m ở giữa 2 quán karaoke thường phát ra âm thanh có cường độ lần lượt là I_1, I_2. Người này định xây 1 ngôi nhà nhỏ trên mảnh đất đó nhưng muốn tìm vị trí sao cho chịu ảnh hưởng của âm thanh từ 2 quán karaoke là ít nhất. Giúp người này nếu biết: (a) Cường độ âm thanh $I_1 = I_2$. (b) Cường độ âm thanh $I_1 = 8I_2$. (c) $I_1 = aI_2$ với $a \in (0, \infty)$ cho trước.*

Bài toán 24 ([VMS23], 3.5, p. 34, ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). *Cho hàm*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} + \alpha x & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

(a) Tính $f'(x)$ khi $x \neq 0$. (b) Tính $f'(0)$. (c) Chứng minh hàm $f(x)$ không đơn điệu trên mỗi khoảng mở chứa điểm 0.

Bài toán 25 ([VMS23], 3.6, p. 34, ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). *(a) Gia đình bác Nam muốn xây 1 cái bể hình hộp với đáy là hình vuông có thể tích $V = 10\ \mathrm{m}^3$. Biết giá thành để xây mỗi m^2 mặt đáy là $a = 700000$ đồng & 1 mặt bên là $b = 500000$ đồng. Để tổng chi phí xây dựng là nhỏ nhất thì bác Nam nên xây bể với kích thước như thế nào? (b) Giải bài toán với $a, b, V \in (0, \infty)$ bất kỳ.*

Bài toán 26 ([VMS23], 3.7, pp. 34–35, ĐHKH Thái Nguyên). *Tìm các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \not\equiv 0$, thỏa*

$$f(x + y) = 2023^y f(x) + 2023^x f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Từ đó tính

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{\sin f(x)},\ \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{f^{(n)}(0)}.$$

Bài toán 27 ([VMS23], 3.8, p. 35, ĐH Mỏ–Địa chất). *Tính*

$$\lim_{(x,y,z) \to (0,0,0)} \frac{\sin x^2 + \sin y^2 + \sin z^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Bài toán 28 ([VMS23], 3.9, p. 35, ĐH Mỏ–Địa chất). *Gọi $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ là 3 nghiệm của phương trình vi phân $y''' + a(x)y'' + b(x)y'c(x)y = 0$ thỏa $y_1^2(x) + y_2^2(x) + y_3^2(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tìm các hằng số α, β để hàm $z = (y_1'(x))^2 + (y_2'(x))^2 + (y_3'(x))^2$ là nghiệm của phương trình vi phân $z' + \alpha a(x)z + \beta c(x) = 0$.*

Bài toán 29 ([VMS23], 3.10, p. 35, ĐH Mỏ–Địa chất). *Trên hình ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, tìm tất cả các điểm $T = (x_0, y_0)$ thỏa: tam giác bị giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0, y = 0$ & tiếp tuyến với ellipse tại điểm T có diện tích nhỏ nhất.*

Bài toán 30 ([VMS23], 3.11, p. 35, FTU Hà Nội). *Chứng minh đa thức $f(x) = \sum_{i=0}^{2022} (-1)^i \frac{x^i}{i!} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^{2022}}{2022!}$ không có nghiệm thực.*

Bài toán 31 ([VMS23], 3.12, p. 35, ĐHSPHN2). *Cho $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. 1 điểm x được gọi là 1* điểm mù *nếu tồn tại 1 điểm $y \in \mathbb{R}$ với $y > x$ sao cho $f(y) > f(x)$. Giả sử tất cả các điểm thuộc khoảng mở $I = (a, b)$ là các điểm mù & a, b không phải là 2 điểm mù. Chứng minh $f(a) = f(b)$.*

Bài toán 32 ([VMS23], 3.13, p. 36, ĐH Trà Vinh). *Chứng minh hàm số $f(x) = x^{x^x}$ đồng biến trên $(0, \infty)$ & $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$.*

Bài toán 33 ([VMS23], 3.14, p. 36, ĐH Vinh). *Cho hàm*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2} \sin \dfrac{1}{x^{2023}} & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

(a) Chứng minh hàm số f liên tục tại $x = 0$. (b) Hàm số f có khả vi tại $x = 0$ hay không?

Bài toán 34 ([VMS23], 3.15, p. 36, ĐH Vinh). *Cho hàm $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$, khả vi trên khoảng $(0, 1)$, thỏa $f(0) = 0$, & $|f'(x)| \leq 2023|f(x)|$, $\forall x \in (0, 1)$. Chứng minh $f(x) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$.*

Bài toán 35 ([VMS23], 3.16, p. 36, ĐH Vinh). *Giả sử hàm $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ khả vi trên khoảng $(0, \infty)$ & thỏa 2 điều kiện: (i) $|f(x)| \leq 2023$, $\forall x \in (0, \infty)$; (ii) $f(x)f'(x) \geq 2022 \cos x$, $\forall x \in (0, \infty)$. Có tồn tại $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ không?*

4 Continuity – Sự Liên Tục

Definition 10 ([Tao22a], Def. 6.1.1, p. 109: distance between 2 reals). *Given $x, y \in \mathbb{R}$, their distance $d(x, y)$ is defined to be $d(x, y) \coloneqq |x - y| \in [0, \infty)$.*

Definition 11 ([Tao22a], Def. 6.1.2, p. 109: ε-close reals). *Let $\varepsilon > 0$ be a real number. $x, y \in \mathbb{R}$ is said to be* ε-close *iff $d(x, y) \leq \varepsilon$.*

5 Series – Chuỗi Số

Bài toán 36 ([VMS23], 2.1, p. 32, VNUHCM UIT). *Cho dãy số* $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset (0,\infty)$ *thỏa* $\sum_{n=1}^\infty \frac{x_n}{(2n-1)^2} < 1$. *Chứng minh* $\sum_{k=1} \sum_{n=1}^k \frac{x_n}{k^3} < 2$.

Bài toán 37 ([VMS23], 2.2, p. 32, ĐHGTVT). *Cho dãy số* $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset (0,\infty)$ *đặt bởi*

$$a_1 > 0,\ a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Tính $\sum_{n=1}^\infty a_n$.

Bài toán 38 ([VMS23], 2.2, p. 32, ĐH Mỏ–Địa chất). *Gọi* S *là dãy con của dãy điều hòa* $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^\infty = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ *& có tổng hữu hạn. Gọi* $c(n)$ *là số lượng các phần tử của* S *có số thứ tự trong dãy mẹ (điều hòa) ban đầu không vượt quá* n. *Chứng minh* $\lim_{n\to+\infty} \frac{c(n)}{n} = 0$.

Bài toán 39 ([VMS24], p. 33, 2.1, ĐHCNTT TpHCM). *Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\beta \sin^2 l\alpha}{1 + \beta \sin^2 k\alpha},\ \alpha \notin \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\},\ \beta > 0.$$

6 Derivative & Differentiability – Đạo Hàm & Tính Khả Vi

Bài toán 40 ([VMS23], p. 36, 4.1, VNUHCM UIT). *Cho hàm* $f \in C^2(\mathbb{R})$ *thỏa* $f(0) = 2$, $f'(0) = -2$, $f(1) = 1$. *Chứng minh tồn tại* $c \in (0,1)$ *thỏa* $f(c)f'(c) + f''(c) = 0$.

Bài toán 41 ([VMS23], p. 37, 4.2, ĐH Đồng Tháp). *Cho* f *khả vi trên* (a,∞), $\forall a \in (0,\infty)$ *&* $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. *Chứng minh* $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Bài toán 42 ([VMS23], p. 37, 4.3, ĐH Đồng Tháp). *Cho* f *là hàm số có đạo hàm* f' *đồng biến trên* $[0,2]$ *&* $f(0) = -1, f(2) = 1$. *Chứng minh tồn tại* $a, b, c \in [0,2]$ *thỏa* $f'(a)f'(b)f'(c) = 1$.

Bài toán 43 ([VMS23], p. 37, 4.4, ĐHGTVT). *Cho* $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ *thỏa* $f^{(n)}(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *&* $f^{(n)}(x)x \ge 0$, $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $\forall x \in (0,\infty)$. *Chứng minh* $f(x) = 0$, $\forall x \in (0,\infty)$.

Bài toán 44 ([VMS23], p. 37, 4.5, ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). *Giả sử hàm* $f \in C([1,2023])$, *khả vi trong khoảng* $(1,2023)$, *&* $f(2023) = 0$. *Chứng minh tồn tại* $c \in (1,2023)$ *thỏa*

$$f'(c) = \frac{2024 - 2023c}{1-c} f(c).$$

Bài toán 45 ([VMS23], p. 37, 4.6, ĐHKH Thái Nguyên). *Giả sử* $f(x) \in C^\infty([-1,1])$, $f^{(n)}(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *& tồn tại* $\alpha \in (0,1)$ *thỏa* $\sup_{x\in[-1,1]} |f^{(n)}(x)| \le \alpha^n n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Chứng minh* $f(x) \equiv 0$ *trên đoạn* $[-1,1]$.

Bài toán 46 ([VMS23], p. 37, 4.7, ĐHSPHN2). *Cho* $f \in C([a,b])$ *khả vi trên* (a,b). *Giả sử* $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a,b)$. *Chứng minh* $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *thỏa* $a \le x_1 < x_2 \le b$ *&* $f(x_1)f(x_2) > 0$ *thì luôn tồn tại* $c \in (x_1,x_2)$ *thỏa*

$$\frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = c - \frac{f(c)}{f'(c)}.$$

Bài toán 47 ([VMS24], p. 33, 3.1, VNUHCM UIT). *Cho* f *là hàm số thực trên* $(0,\infty)$. *Giả sử*

$$f(x^\alpha) = f(x)\sin^2\alpha + f(1)\cos^2\alpha,\ \forall x \in (0,\infty),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh f *khả vi tại* 1.

Bài toán 48 ([VMS24], p. 34, 3.2, ĐH Đồng Tháp). *(a) Chứng minh với mỗi* $n \in \mathbb{N}^\star$, *phương trình* $2x = \sqrt{x+n} + \sqrt{x+n+1}$ *có nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là* x_n. *(b) Tính* $a := \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}}, b := \lim_{n\to+\infty} x_n - a\sqrt{n}$.

Bài toán 49 ([VMS24], p. 34, 3.3, ĐH Đồng Tháp). *Cho*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left|\cos\frac{\pi}{x}\right| & \text{if } x \ne 0, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

Chứng minh f *khả vi tại* 0 *nhưng* f *không khả vi tại các điểm* $x_n := \frac{2}{2n+1}$ *với* $n \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 50 ([VMS24], p. 34, 3.4, ĐH Đồng Tháp). *Giả sử f khả vi liên tục trên $(0,\infty)$, $f(0)=1$. Chứng minh nếu $|f(x)|\le e^{-x}$, $\forall x\ge 0$ thì tồn tại $x_0>0$ để $f'(x_0)=-e^{-x_0}$.*

Bài toán 51 ([VMS24], p. 34, 3.5, ĐHGTVT). *Cho $a\in\mathbb{R}$, $b\in(0,\infty)$. Hàm f xác định trên $[-1,1]$, được cho bởi*

$$f(x)=\begin{cases} x^a\sin x^{-b} & \text{if } x\neq 0,\\ 0 & \text{if } x=0.\end{cases}$$

(a) Tìm tất cả các giá trị của a để hàm f liên tục trên $[-1,1]$. (b) Tìm tất cả các giá trị của a để tồn tại $f'(0)$. (c) Tìm điều kiện của a,b để tồn tại $f''(0)$.

Bài toán 52 ([VMS24], p. 35, 3.7, HUS). *Cho $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là hàm số được xác định bởi công thức*

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a & \text{if } x\le 0,\\ be^x+x & \text{if } x>0,\end{cases}$$

với $a,b\in\mathbb{R}$: tham số. Xác định a,b để f có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$.

Bài toán 53 ([VMS24], p. 35, 3.8, ĐH Vinh). *Cho hàm $f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ thỏa $f_{2024}(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ với*

$$\begin{cases} f_{n+1}(x)=f(f_n(x)),\ \forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}^\star,\\ f_1(x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Chứng minh $f_2(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Bài toán 54 ([VMS24], p. 35, 3.9, ĐH Vinh). *Cho hàm*

$$f(x)=\left(\frac{2023^x+2024^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}},\ x>0.$$

(a) Tìm $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. (b) Chứng minh f là hàm số đơn điệu tăng trên $(0,+\infty)$.

Bài toán 55 ([VMS24], p. 36, 4.1, HCMUT). *(a) Cho $f\in C^3(\mathbb{R},[0,+\infty))$ thỏa $\max_{x\in\mathbb{R}}|f'''(x)|\le 1$. Chứng minh*

$$f''(x)\ge -\sqrt[3]{\frac{3}{2}f(x)},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

(b) Tìm tất cả các hàm số f thỏa mãn điều kiện của (a) thỏa

$$f''(x)=-\sqrt[3]{\frac{3}{2}f(x)},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 56 ([VMS24], p. 36, 4.2, VNUHCM UIT). *Cho hàm số $f:[0,1]\to\mathbb{R})$ liên tục trên $[0,1]$, khả vi trên $(0,1)$ sao cho $\exists M>0$, $\exists c\in[0,1]$ thỏa $f(c)=0$ &*

$$|f'(x)|\le M|f(x)|,\ \forall x\in(0,1).$$

Chứng minh $f(x)=0$, $\forall x\in[0,1]$.

Bài toán 57 ([VMS24], p. 36, 4.3, ĐH Đồng Tháp). *Cho f khả vi trên $\mathbb{R}$ & f' giảm ngặt trên $\mathbb{R}$. (a) Chứng minh*

$$f(x+1)-f(x)<f'(x)<f(x)-f(x-1),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

(b) Chứng minh nếu tồn tại $\lim_{x\to+\infty}f(x)=L$ thì $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$. (c) Tìm hàm số g khả vi trên $\mathbb{R}$ & tồn tại $\lim_{x\to+\infty}g(x)=L$ nhưng $\lim_{x\to+\infty}g'(x)\neq 0$.

Bài toán 58 ([VMS24], p. 37, 4.4, ĐHGTVT). *Giả sử V là tập hợp các hàm liên tục $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ & khả vi trên $(0,1)$ thỏa $f(0)=0, f(1)=1$. Xác định các giá trị $\alpha\in\mathbb{R}$ để với mỗi $f\in V$, luôn tồn tại $\xi\in(0,1)$ thỏa $f(\xi)+\alpha=f'(\alpha)$.*

Bài toán 59 ([VMS24], p. 37, 4.5, HUS). *Cho $f:[0,3]\to\mathbb{R}$ là hàm liên tục trên $[0,3]$ & khả vi trong $(0,3)$. Chứng minh tồn tại $c\in(0,3)$ thỏa $2f'(c)=f(3)-f(2)+f(1)-f(0)$.*

Bài toán 60 ([VMS24], p. 37, 4.6, ĐH Mỏ–Địa chất). *Giả sử có chuỗi có 2 đầu hướng ra vô cực*

$$\cdots+f''(x)+f'(x)+f(x)+\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t+\cdots$$

& hội tụ đều trên khoảng $(-1,1)$. Chuỗi là biểu diễn của số nào?

Bài toán 61 ([VMS24], p. 37, 4.7, ĐH Vinh). *Cho hàm $f\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ & thỏa $f(x)\le 2024$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Chứng minh tồn tại $x\in\mathbb{R}$ thỏa $f''(x)=0$.*

7 Integral – Tích Phân

Bài toán 62 ([VMS23], p. 38, 5.1, VNUHCM UIT). *Cho hàm $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ khả vi đến cấp 2 thỏa $f(0)=1$ & $f''(x)+2f'(x)+f(x)\ge 1$, $\forall x\in(-1,1)$. Tìm* GTNN *của $\int_{-1}^1 e^x f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Bài toán 63 ([VMS23], p. 38, 5.2, ĐH Đồng Tháp). *Cho hàm $f:[0,2023]\to(0,\infty)$ khả tích & $f(x)f(2023-x)=1$, $\forall x\in[0,2023]$. Chứng minh $\int_0^{2023} f(x)\,\mathrm{d}x\ge 2023$.*

Bài toán 64 ([VMS23], p. 38, 5.3, ĐHGTVT). *Cho hàm $f\in C([0,1])$ thỏa $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$. Chứng minh tồn tại $c\in(0,1)$ thỏa $cf(c)+2023\int_0^c f(x)\,\mathrm{d}x=0$.*

Bài toán 65 ([VMS23], p. 38, 5.4, ĐHGTVT). *Tính*

$$I:=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{(1+2023^x)\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

Bài toán 66 ([VMS23], p. 38, 5.5, ĐHGTVT). *Cho hàm f dương, khả tích trên $[a,b]$, $0<m\le f(x)\le M$, $\forall x\in[a,b]$. Chứng minh*

$$(b-a)^2\le\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\le\frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2.$$

Bài toán 67 ([VMS23], p. 39, 5.6, ĐHKH Thái Nguyên). *Cho hàm $h\in C([0,1])$ thỏa $\int_0^1 xh(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x$. Chứng minh tồn tại $\beta\in(0,1)$ thỏa $\beta h(\beta^2)=\frac{2023}{2}\int_0^{\beta^2} h(x)\,\mathrm{d}x$.*

Bài toán 68 ([VMS23], p. 39, 5.7, ĐHKH Thái Nguyên). *Cho $f\in C([0,\pi])$ thỏa $f(0)>0$ & $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x<2$. Chứng minh phương trình $f(x)=\sin x$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(0,\pi)$.*

Bài toán 69 ([VMS23], p. 39, 5.8, ĐH Mỏ–Địa chất). *Cho $f\in C([0,1]), g\in C([0,1],(0,\infty))$ với f không giảm. Chứng minh*

$$\left(\int_0^t f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right)\le\left(\int_0^t g(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right),\ \forall t\in[0,1].$$

Bài toán 70 ([VMS23], p. 39, 5.9, ĐH Mỏ–Địa chất). *Cho $f\in C([0,1])$ thỏa $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$. Chứng minh tồn tại điểm $c\in(0,1)$ thỏa $\int_0^c xf(x)\,\mathrm{d}x=0$.*

Bài toán 71 ([VMS23], p. 39, 5.10, ĐHSPHN2). *Gọi $\mathcal{F}$ là lớp tất cả các hàm khả vi $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ thỏa*

$$|f'(x)-f'(y)|\le 2023|x-y|,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Chứng minh

$$(f'(x))^2<4046f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 72 ([VMS23], p. 40, 5.11, ĐHSPHN2). *Giả sử $f\in C^2([a,b])$ thỏa $f(a)\ne -f(b)$ & $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$. Tìm* GTNN *của*

$$A:=\frac{(b-a)^3}{(f(a)+f(b))^2}\int_a^b (f''(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

Bài toán 73 ([VMS23], p. 40, 5.12, ĐH Trà Vinh). *Tính*

$$I:=\int_0^{2\pi}\ln(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x})\,\mathrm{d}x.$$

Bài toán 74 ([VMS23], p. 40, 5.12, ĐH Vinh). *Cho $f\in C([0,1])$ thỏa $xf(y)+yf(x)\le 1$, $\forall x,y\in[0,1]$. Chứng minh: (a) $f(x)\le\dfrac{1}{2x}$, $\forall x\in(0,1]$. (b) $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\le\dfrac{\pi}{4}$.*

Bài toán 75 ([VMS24], p. 37, 5.1, VNUHCM UIT). *Cho $\alpha\in(0,\infty)$ & $f\in C([0,1])$ nghịch biến, $a\in(0,1)$ thỏa*

$$\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t<\frac{a}{2025},\ f(0)=\beta>0.$$

Chứng minh phương trình $f(x)=x^{2024}$ có nghiệm trong $[0,1]$.

Bài toán 76 ([VMS24], p. 38, 5.2, ĐH Đồng Tháp)**.** *Giả sử* $f \in C^1([0,1])$ *thỏa* $f(0) = 0$, $0 \le f'(x) \le 1$, $\forall x \in [0,1]$. *Xét hàm số*

$$F(t) = \left(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 - \int_0^t (f(x))^3\,\mathrm{d}x,\ \forall t \in [0,1].$$

(a) Chứng minh F *đồng biến trên* $[0,1]$. *(b) Chứng minh*

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \ge \int_0^1 (f(x))^3\,\mathrm{d}x.$$

Cho vài ví dụ về hàm f *để đẳng thức xảy ra.*

Bài toán 77 ([VMS24], p. 38, 5.3, ĐHGTVT)**.** *Cho* $f : [0,1] \to (0,+\infty)$ *là 1 hàm khả tích thỏa* $f(x)f(1-x) = 1$, $\forall x \in [0,1]$. *Chứng minh* $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \ge 1$.

Bài toán 78 ([VMS24], p. 38, 5.4, HUS)**.** *Cho* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *là hàm khả tích trên* $[0,1]$ *& liên tục trên* $(0,1)$. *Chứng minh tồn tại* $a, b \in (0,1)$ *phân biệt sao cho*

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Bài toán 79 ([VMS24], p. 38, 5.5, ĐH Mỏ–Địa chất)**.** *Tính tích phân*

$$\iiiint_{x^2+y^2+z^2+t^2 \le 1} e^{x^2+y^2-z^2-t^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t.$$

Bài toán 80 ([VMS24], p. 38, 5.6, ĐH Vinh)**.** *Chứng minh*

$$\frac{9}{8\pi} < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x < \frac{3}{2\pi}.$$

7.1 SymPy/integrals module

See https://docs.sympy.org/latest/modules/integrals/integrals.html. The `integrals` module in `SymPy` implements methods to calculate definite & indefinite integrals of expressions. Principal method in this module is `integrate()`:

- `integrate(f, x)` returns the indefinite integral $\int f\,\mathrm{d}x$
- `integrate(f, (x, a, v))` returns the definite integral $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$.

Problem 7 (Integration of elementary functions)**.** *Use* `SymPy` *to compute definite- & indefinite integrals of elementary functions as many as possible.*

Problem 8 (Integration of nonelementary functions)**.** *Use* `SymPy` *to compute definite- & indefinite integrals of nonelementary functions as many as possible.*

Example 4 (Integral of error function)**.** *The indefinite integral of the nonelementary function* $e^{-x^2}\operatorname{erf}(x)$, *where* $\operatorname{erf}(x)$ *is the* error function, *is given by*

$$\int e^{-x^2}\operatorname{erf}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\operatorname{erf}(x).$$

Run the following Python code:

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
print(integrate(exp(-x**2)*erf(x), x))
```

to obtain the following output:

```
sqrt(pi)*erf(x)**2/4
```

For more information about the error function, see, e.g., Wikipedia/error function.

7.2 Leibniz integral rule – Quy tắc tích phân Leibniz

In calculus, the *Leibniz integral rule* for differentiation under the integral sign, named after Gottfried Wilhelm Leibniz.

Theorem 9 (Leibniz integral rule – Quy tắc tích phân Leibniz)**.** *For an integral of the form* $\int_{a(x)}^{b(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t$ *where* $a(x), b(x) \in \mathbb{R}$ *& the integrands are functions dependent on* x, *the derivative of this integral is expressible as*

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t\right) = f(b(x),x)\frac{d}{dx}b(x) - f(a(x),x)\frac{d}{dx}a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \partial_x f(t,x)\,\mathrm{d}t, \tag{Lintr}$$

where the partial derivative $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ *indicates that inside the integral, only the variation of* $f(t,x)$ *with* x *is considered in taking the derivative.*

8 Functional Equation – Phương Trình Hàm

Bài toán 81 ([VMS23], 6.1, p. 40, VNUHCM UIT). *Tìm tất cả các hàm số $f\in C^2(\mathbb{R},(0,\infty))$ thỏa*

$$f''(x)f(x)\ge 2(f'(x))^2,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 82 ([VMS23], 6.2, p. 40, ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). *Tìm tất cả các hàm số $f\in C(\mathbb{R})$ thỏa $f(1)=2023$ & $f(x+y)=2023^xf(y)+2023^yf(x)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.*

Bài toán 83 ([VMS23], 6.3, p. 40, ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). *Tìm tất cả các hàm số $f(x)\in C^1([0,1])$ có $f(1)=f(0$ & thỏa*

$$\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2\,\mathrm{d}x\le 1.$$

Bài toán 84 ([VMS23], 6.4, p. 41, ĐH Mỏ–Địa chất). *Cho $r,s\in\mathbb{Q}$. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ thỏa*

$$f(x+f(y))=f(x+r)+y+s,\ \forall x,y\in\mathbb{Q}.$$

Bài toán 85 ([VMS23], 6.5, p. 41, FTU Hà Nội). *Tìm tất cả các hàm số thực $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ thỏa*

$$f(x+f(y))=xf\left(1+f\left(\frac{y}{x}\right)\right),\ \forall x,y\in(0,\infty).$$

Bài toán 86 ([VMS23], 6.6, p. 41, ĐH Trà Vinh). *Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ thỏa*

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=2f(x)+\frac{3}{x-1},\ \forall x\ne 1.$$

Bài toán 87 ([VMS23], 6.7, p. 41, ĐH Trà Vinh). *Tìm tất cả các hàm số $f(x)\in C^1([0,1])$ thỏa $f(1)=ef(0)$ &*

$$\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2\,\mathrm{d}x\le 1.$$

Bài toán 88 ([VMS24], p. 38, 6.1, HUS). *Cho $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ là 1 hàm khả vi thỏa $(f'(x))^2-3f'(x)+2=0$, $\forall x\in(0,1)$. Tìm f. (b) Mở rộng bài toán cho dạng phương trình hàm phức tạp hơn.*

9 Fourier transform – Biến đổi Fourier

Resources – Tài nguyên.

1. [Tao12]. Terence Tao. *Higher Order Fourier Analysis.*

9.1 Discrete Fourier transform – Biến đổi Fourier rời rạc

See, e.g., Wikipedia/discrete Fourier transform. In mathematics, the *discrete Fourier transform (DFT)* converts a finite sequence of equally-spaced samples of a function into a same-length sequence of equally-spaced samples of the discrete-time Fourier transform (DTFT), which is a complex-valued function of frequency. The interval at which the DTFT is sampled is the reciprocal of the duration of the input sequence.

Definition 12 (Discrete Fourier transform). *The* discrete Fourier transform *transforms a sequence of N complex numbers $\mathbf{x}=\{x_n\}_{n=0}^{N-1}:=x_0,x_1,\ldots,x_{N-1}$ into another sequence of complex numbers, $\mathbf{X}=\{X_n\}_{n=0}^{N-1}:=X_0,X_1,\ldots,X_{N-1}$ defined by*

$$X_k:=\sum_{n=0}^{N-1}x_ne^{-i2\pi\frac{k}{N}n}. \tag{dFt}$$

The transform is sometimes denoted by the symbol $\mathcal{F}$, as in $\mathbf{X}=\mathcal{F}\{\mathbf{x}\}$ or $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ or $\mathcal{F}\mathbf{x}$.

10 Miscellaneous

10.1 See also

1. [Str20]. Steven Strogatz. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe.*
2. [Str24]. Steven Strogatz. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe – Sức Mạnh Vô Hạn: Giải Tích Toán Khám Phá Bí Mật Của Vũ Trụ Như Thế Nào?.*

   Nhận xét. 1 quyển sách hay về thường thức về lịch sử phát triển của Giải tích Toán học & các ý tưởng cơ bản nhất của Giải tích. Khuyến khích đọc thử, cũng như các tác phẩm thường thức Khoa học Tự nhiên nói chung & Toán học nói riêng khác của tác giả Steven Strogatz.

3. TS. Huỳnh Quang Vũ. *Các Bài Giảng Giải Tích*. https://sites.google.com/view/hqvu/teaching.
   - Bộ Môn Giải Tích, Khoa Toán - Tin học, Faculty of Mathematics & Computer Science, HCMUS. *Giáo Trình Vi Tích Phân 1*.
   - Bộ Môn Giải Tích, Khoa Toán - Tin học, Faculty of Mathematics & Computer Science, HCMUS. *Giáo Trình Vi Tích Phân 2*.
4. *Vietnamese Mathematical Olympiad for High School- & College Students (VMC) – Olympic Toán Học Học Sinh & Sinh Viên Toàn Quốc*.

   PDF: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/VMC/NQBH_VMC.pdf.

   TEX: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/VMC/NQBH_VMC.tex.
   - Codes:
     - C++ code: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/C++.
     - Python code: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/Python.
   - Resource: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/resource.
   - Figures: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/VMC/figure.
5. *Olympic Tin Học Sinh Viên OLP & ICPC*.

   PDF: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/OLP_ICPC/NQBH_OLP_ICPC.pdf.

   TEX: URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/OLP_ICPC/NQBH_OLP_ICPC.tex.
   - Codes:
     - C: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/OLP_ICPC/C.
     - C++: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/OLP_ICPC/C++.
     - Python: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/tree/main/OLP_ICPC/Python.

Tài liệu

[Rud76] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*. Third. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 1976, pp. x+342.

[Str20] Steven Strogatz. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe*. Mariner Books, 2020, p. 400.

[Str24] Steven Strogatz. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe – Sức Mạnh Vô Hạn: Giải Tích Toán Khám Phá Bí Mật Của Vũ Trụ Như Thế Nào?* Phạm Văn Thiều dịch. Nhà Xuất Bản Trẻ, 2024, p. 486.

[Tao12] Terence Tao. *Higher order Fourier analysis*. Vol. 142. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012, pp. x+187. ISBN: 978-0-8218-8986-2. DOI: 10.1090/gsm/142. URL: https://doi.org/10.1090/gsm/142.

[Tao22a] Terence Tao. *Analysis I*. Vol. 37. Texts and Readings in Mathematics. Fourth edition [of 2195040]. Hindustan Book Agency, New Delhi, [2022] ©2022, pp. xvi+355. ISBN: 978-81-951961-9-7.

[Tao22b] Terence Tao. *Analysis II*. Vol. 38. Texts and Readings in Mathematics. Fourth edition [of 2195041]. Springer, Singapore; Hindustan Book Agency, New Delhi, [2022] ©2022, pp. xvii+195. ISBN: 978-9-81197-284-3. DOI: 10.1007/978-981-19-7284-3. URL: https://doi.org/10.1007/978-981-19-7284-3.

[Thá+23a] Đỗ Đức Thái, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang. *Toán 6 Tập 1*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2023, p. 128.

[Thá+23b] Đỗ Đức Thái, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang. *Toán 6 Tập 2*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2023, p. 108.

[VMS23] Hội Toán Học Việt Nam VMS. *Kỷ Yếu Kỳ Thi Olympic Toán Học Sinh Viên–Học Sinh Lần Thứ 29*. Huế 2–8/4/2023. VMS, 2023, p. 141.

[VMS24] Hội Toán Học Việt Nam VMS. *Kỷ Yếu Kỳ Thi Olympic Toán Học Sinh Viên–Học Sinh Lần Thứ 30*. Đà Nẵng 8–13/4/2024. VMS, 2024, p. 112.

[WS10] Robert Wrede and Murray R. Spiegel. *Advanced Calculus*. 3rd edition. Schaum's Outline Series. McGraw Hill, 2010, p. 456. ISBN: 978-0071623667.