1 Tổ hợp cơ bản

1.1 Nguyên lý bù trừ

Bài toán 1.

Với $n \in \mathbb{Z}^+$, xét A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ là n tập hợp hữu hạn bất kỳ. Chứng minh rằng

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\substack{T\subseteq\{1,2,\ldots,n\}\\ T\neq\emptyset}} (-1)^{|T|+1} \left|\bigcap_{i\in T} A_i\right|;$$

từ đó suy ra rằng khi lấy tổng $m < n$ hạng tử đầu tiên của vế phải, nếu m chẵn thì ta có chặn dưới và nếu m lẻ thì ta có chặn trên của $\left|\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right|$.

Lời giải.

Đặt $P(n, k) = (-1)^{k+1} \sum\limits_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$ đẳng thức vừa chứng minh có thể được viết lại

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = \sum_{k=1}^{n} P(n, k).$$

Ta sẽ chứng minh với mọi $m \in \mathbb{Z}^+$, $m < n$ thì

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| \le \sum_{k=1}^{m} P(n, k) \text{ nếu } m \text{ lẻ và } \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| \ge \sum_{k=1}^{m} P(n, k) \text{ nếu } m \text{ chẵn}$$

bằng phương pháp quy nạp toán học.

Trường hợp $n = 1$, mệnh đề hiển nhiên đúng. Giả sử mệnh đề đúng đến $n = N$, tức ta đã có

$$\left|\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right| \le \sum_{k=1}^{m} P(N, k) \text{ nếu } m \text{ lẻ và } \left|\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right| \ge \sum_{k=1}^{m} P(N, k) \text{ nếu } m \text{ chẵn.}$$

Ta cần phải chứng minh mệnh đề cũng đúng với $n = N + 1$, tức cần chứng minh

$$\left|\bigcup_{i=1}^{N+1} A_i\right| \le \sum_{k=1}^{m} P(N+1, k) \text{ nếu } m \text{ lẻ và } \left|\bigcup_{i=1}^{N+1} A_i\right| \ge \sum_{k=1}^{m} P(N+1, k) \text{ nếu } m \text{ chẵn.}$$

Thật vậy, áp dụng $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, ta được

$$\left|\bigcup_{i=1}^{N+1} A_i\right| = |A_{N+1}| + \left|\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right| - \left|\bigcup_{i=1}^{N}(A_{N+1} \cap A_i)\right|.$$

Xét trường hợp m chẵn, trường hợp m lẻ việc chứng minh hoàn toàn tương tự. Khi m chẵn thì $m-1$ lẻ, áp dụng giả thiết quy nạp, ta có

$$\left|\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right| \geq \sum_{k=1}^{m} P(N,\, k) \text{ và } \left|\bigcup_{i=1}^{N}(A_{N+1} \cap A_i)\right| \leq \sum_{k=1}^{m-1} Q(N,\, k),$$

trong đó $Q(N,\, k) = (-1)^{k+1} \sum\limits_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq N} |(A_{N+1} \cap A_{i_1}) \cap (A_{N+1} \cap A_{i_2}) \cap \cdots \cap (A_{N+1} \cap A_{i_k})| = (-1)^{k+1} \sum\limits_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq N} |A_{N+1} \cap (A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})|$.

Suy ra

$$\left|\bigcup_{i=1}^{N+1} A_i\right| \geq |A_{N+1}| + \sum_{k=1}^{m} P(N,\, k) - \sum_{k=1}^{m-1} Q(N,\, k) = |A_{N+1}| + P(N,\, 1) + \sum_{k=2}^{m} \left(P(N,\, k) - Q(N,\, k-1)\right).$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}
P(N+1,\, k) &= (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq N+1} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| \\
&= (-1)^{k+1} \left(\left(\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq N} + \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k = N+1} \right) |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| \right) \\
&= (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq N} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{k-1} \leq N} \left|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_{N+1}\right| \\
&= P(N,\, k) - Q(N,\, k-1).
\end{aligned}$$

Ngoài ra $|A_{N+1}| + P(N,\, 1) = |A_{N+1}| + \sum\limits_{1 \leq i \leq N} |A_i| = \sum\limits_{1 \leq i \leq N+1} |A_i| = P(N+1,\, 1)$.

Do đó $\left|\bigcup\limits_{i=1}^{N+1} A_i\right| \geq P(N+1,\, 1) + \sum\limits_{k=2}^{m} P(N+1,\, k) = \sum\limits_{k=1}^{m} P(N+1,\, k)$. Như vậy đối với trường hợp m chẵn, mệnh đề cũng đúng với $n = N+1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, mệnh đề đúng với mọi n nguyên dương. Hoàn tất chứng minh.

1.3 Nhị thức Newton

Bài toán 1.

(a) Khai triển $(a+b+c)^n$.

(b) Khai triển $(a+b+c+d)^n$.

(c) Khai triển $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)^n$.

(d) Cho $z = a + bi$. Tính z^n và thu gọn.

Lời giải.

(a) $(a+(b+c))^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot (b+c)^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \cdot b^{i-j} \cdot c^j\right) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \binom{n}{i} \binom{i}{j} a^{n-i} b^{i-j} c^j$.

(b) $(a+b+c+d)^n = (a+(b+c+d))^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot (b+c+d)^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot \left(\sum_{j=0}^{i} \sum_{k=0}^{j} \binom{i}{j} \binom{j}{k} b^{i-j} c^{j-k} d^k\right) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \sum_{k=0}^{j} \binom{n}{i} \binom{i}{j} \binom{j}{k} a^{n-i} b^{i-j} c^{j-k} d^k$.

(c) Ta sẽ chứng minh quy nạp theo m rằng

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)^n = \sum_{i_1=0}^{n} \sum_{i_2=0}^{i_1} \cdots \sum_{i_{m-1}=0}^{i_{m-2}} \left(\binom{n}{i_1}\binom{i_1}{i_2} \cdots \binom{i_{m-2}}{i_{m-1}} a_1^{n-i_1} a_2^{i_1-i_2} \cdots a_{m-1}^{i_{m-2}-i_{m-1}} a_m^{i_{m-1}}\right).$$

Với $m = 1, 2, 3$ thì đẳng thức trên đúng.

Giả sử đẳng thức trên đúng tới $m = M$, tức ta đã có

$$\left(\sum_{i=1}^{M} a_i\right)^n = \sum_{i_1=0}^{n} \sum_{i_2=0}^{i_1} \cdots \sum_{i_{M-1}=0}^{i_{M-2}} \left(\binom{n}{i_1}\binom{i_1}{i_2} \cdots \binom{i_{M-2}}{i_{M-1}} a_1^{n-i_1} a_2^{i_1-i_2} \cdots a_{M-1}^{i_{M-2}-i_{M-1}} a_M^{i_{M-1}}\right).$$

Ta cần chứng minh đẳng thức trên cũng đúng với $n = N + 1$, tức cần chứng minh

$$\left(\sum_{i=1}^{M+1} a_i\right)^n = \sum_{i_1=0}^{n} \sum_{i_2=0}^{i_1} \cdots \sum_{i_M=0}^{i_{M-1}} \left(\binom{n}{i_1}\binom{i_1}{i_2} \cdots \binom{i_{M-1}}{i_M} a_1^{n-i_1} a_2^{i_1-i_2} \cdots a_M^{i_{M-1}-i_M} a_{M+1}^{i_M}\right).$$

Thật vậy, áp dụng Nhị thức Newton và giả thiết quy nạp ở trên ta được,

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{M+1} a_i\right)^n &= \sum_{i_1=0}^{n} \binom{n}{i_1} a_1^{n-i_1} \left(\sum_{i=2}^{M+1} a_i\right)^{i_1} \\
&= \sum_{i_1=0}^{n} \binom{n}{i_1} a_1^{n-i_1} \left(\sum_{i_2=0}^{i_1}\sum_{i_3=0}^{i_2}\cdots\sum_{i_M=0}^{i_{M-1}} \left(\binom{i_1}{i_2}\binom{i_2}{i_3}\cdots\binom{i_{M-1}}{i_M} a_2^{i_1-i_2} a_3^{i_2-i_3}\cdots a_{M+1}^{i_M}\right)\right) \\
&= \sum_{i_1=0}^{n}\sum_{i_2=0}^{i_1}\cdots\sum_{i_M=0}^{i_{M-1}} \left(\binom{n}{i_1}\binom{i_1}{i_2}\cdots\binom{i_{M-1}}{i_M} a_1^{n-i_1} a_2^{i_1-i_2}\cdots a_M^{i_{M-1}-i_M} a_{M+1}^{i_M}\right).
\end{aligned}
$$

Như vậy đẳng thức cũng đúng với $m = M + 1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học ta có điều phải chứng minh.