Some Topics in Elementary Mathematics/Grade 10

Nguyễn Quản Bá Hồng[1]

Ngày 8 tháng 8 năm 2022

[1]Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

Mục lục

Preface

Tóm tắt kiến thức Toán lớp 10 theo chương trình giáo dục của Việt Nam & một số chủ đề nâng cao.

Chương 1

Mệnh Đề Toán học. Tập Hợp

Nội dung. *Mệnh đề toán học, tập hợp & các phép toán trên tập hợp.*

1.1 Mệnh Đề Toán Học

1.1.1 Mệnh đề toán học

Định nghĩa 1.1.1 (Mệnh đề toán học)**.** *1 mệnh đề khẳng định về 1 sự kiện trong toán học, gọi là* mệnh đề toán học*.*

"Khi không sợ nhầm lẫn, ta thường gọi tắt mệnh đề toán học là *mệnh đề*." – Thái et al., 2022, p. 5

Mệnh đề 1.1.1. *Mỗi mệnh đề toán học phải hoặc đúng hoặc sai. 1 mệnh đề toán học không thể vừa đúng, vừa sai.*

Định nghĩa 1.1.2 (Mệnh đề đúng/sai)**.** *Khi mệnh đề toán học là đúng, ta gọi mệnh đề đó là 1 mệnh đề đúng. Khi mệnh đề toán học là sai, ta gọi mệnh đề đó là 1 mệnh đề sai.*

1.1.2 Mệnh đề chứa biến

Định nghĩa 1.1.3 (Mệnh đề chứa biến)**.** *Với mỗi bộ giá trị cụ thể của bộ biến $(x_1,\ldots,x_n)$, $n \in \mathbb{N}^\star$, mệnh đề $P(x_1,\ldots,x_n)$ cho ta 1 mệnh đề toán học mà ta có thể khẳng định được tính đúng sai của mệnh đề đó. Khi đó, $P(x_1,\ldots,x_n)$ được gọi là* mệnh đề chứa biến*.*

"Ta thường ký hiệu mệnh đề chứa biến n là $P(n)$; mệnh đề chứa biến x, y là $P(x,y)$; $\ldots$" – Thái et al., 2022, p. 6

1.1.3 Phủ định của 1 mệnh đề

Định nghĩa 1.1.4 (Mệnh đề phủ định)**.** *Cho mệnh đề P. Mệnh đề "Không phải P" được gọi là* mệnh đề phủ định *của mệnh đề P & ký hiệu là $\overline{P}$.*

"Mệnh đề $\overline{P}$ *đúng* khi P sai. Mệnh đề $\overline{P}$ *sai* khi P đúng." "Để phủ định 1 mệnh đề, ta chỉ cần thêm/bớt từ "không" (hoặc "không phải") vào trước vị ngữ của mệnh đề đó." – Thái et al., 2022, p. 7

1.1.4 Mệnh đề kéo theo

Định nghĩa 1.1.5 (Mệnh đề kéo theo)**.** *Cho 2 mệnh đề P & Q. Mệnh đề "Nếu P thì Q" được gọi là* mệnh đề kéo theo *& ký hiệu là $P \Rightarrow Q$. mệnh đề $P \Rightarrow Q$ sai khi P đúng, Q sai & đúng trong các trường hợp còn lại.*

"Tùy theo nội dung cụ thể, đôi khi người ta còn phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là "P kéo theo Q" hay "P suy ra Q" hay "Vì P nên Q" $\ldots$" "Các định lý toán học là những mệnh đề đúng & thường phát biểu ở dạng mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$. Khi đó ta nói: P là *giả thiết*, Q là *kết luận* của định lý, hay P là *điều kiện đủ* để có Q, hoặc Q là *điều kiện cần* để có P." – Thái et al., 2022, p. 7

1.1.5 Mệnh đề đảo. 2 mệnh đề tương đương

Định nghĩa 1.1.6 (Mệnh đề đảo, 2 mệnh đề tương đương)**.** *Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là* mệnh đề đảo *của mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Nếu cả 2 mệnh đề $P \Rightarrow Q$ & $Q \Rightarrow P$ đều đúng thì ta nói P & Q là* 2 mệnh đề tương đương*, ký hiệu $P \Leftrightarrow Q$.*

"Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ có thể phát biểu ở những dạng như sau: "P tương đương Q"; "P là điều kiện cần & đủ để có Q"; "P khi & chỉ khi Q"; "P nếu & chỉ nếu Q"." – Thái et al., 2022, p. 8

"Trong toán học, những câu khẳng định đúng phát biểu ở dạng "$P \Leftrightarrow Q$" cũng được coi là 1 mệnh đề toán học, gọi là *mệnh đề tương đương*." – Thái et al., 2022, p. 9

1.1.6 Ký hiệu ∀ & ∃

∀: "với mọi", ∃: "tồn tại" hoặc "có 1" (tồn tại 1) hoặc "có ít nhất 1" (tồn tại ít nhất 1). Phương pháp chứng minh 1 mệnh đề có ký hiệu "∀", "∃", là đúng hoặc sai.

Mệnh đề 1.1.2. *Cho mệnh đề "$P(x)$, $x \in X$". Phủ định của mệnh đề $\forall x \in X$, $P(x)$" là mệnh đề "$\exists x \in X$, $\overline{P(x)}$". Phủ định của mệnh đề $\exists x \in X$, $P(x)$" là mệnh đề "$\forall x \in X$, $\overline{P(x)}$".*

1.2 Tập Hợp. Các Phép Toán Trên Tập Hợp

1.2.1 Tập hợp

"Người ta còn minh họa tập hợp bằng 1 vòng kín, mỗi phần tử của tập hợp được biểu diễn bởi 1 chấm bên trong vòng kín, còn phần tử không thuộc tập hợp đó được biểu diễn bởi 1 chấm bên ngoài vòng kín. Cách minh họa tập hợp như vậy được gọi là biểu đồ Venn." – Thái et al., 2022, p. 12

"Tập hợp không chứa phần tử nào được gọi là tập hợp rỗng, ký hiệu là $\emptyset$. 1 tập hợp có thể không có phần tử nào, cũng có thể có 1 phần tử, có nhiều phần tử, có vô số phần tử. Khi tập hợp C là tập hợp rỗng, ta viết $C = \emptyset$ & không được viết là $C = \{\emptyset\}$." – Thái et al., 2022, p. 13

1.2.2 Tập con & tập hợp bằng nhau

1.2.2.1 Tập con

Định nghĩa 1.2.1. *Nếu mọi phần tử của tập hợp A đều là phần tử của tập hợp B thì ta nói A là 1* tập con *của tập hợp B & viết là $A \subset B$. Ta còn đọc là A chứa trong B.*

"*Quy ước:* Tập hợp rỗng được coi là tập con của mọi tập hợp." "$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B)$. Khi $A \subset B$, ta cũng viết $B \supset A$ (đọc là B chứa A). Nếu A không phải là tập con của B, ta viết $A \not\subset B$." – Thái et al., 2022, p. 13

Mệnh đề 1.2.1. *$A \subset A$ với mọi tập hợp A. Nếu $A \subset B$ & $B \subset C$ thì $A \subset C$.*

Tính chất $((A \subset B) \wedge (B \subset C)) \Rightarrow (A \subset C)$ được gọi là *tính chất bắc cầu.*

1.2.2.2 Tập hợp bằng nhau

Định nghĩa 1.2.2. *Khi $A \subset B$ & $B \subset A$ thì ta nói 2 tập hợp A & B* bằng nhau*, viết là $A = B$.*

1.2.3 Giao của 2 tập hợp

Định nghĩa 1.2.3 (Giao của 2 tập hợp)**.** *Tập hợp gồm tất cả các phần tử vừa thuộc A vừa thuộc B được gọi là* giao *của A & B, ký hiệu $A \cap B$.*

"Vậy $A \cap B = \{x | x \in A \ \&\ x \in B\}$." "$x \in A \cap B$ khi & chỉ khi $x \in A$ & $x \in B$." – Thái et al., 2022, p. 14, i.e., $(x \in A \cap B) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B))$.

1.2.4 Hợp của 2 tập hợp

Định nghĩa 1.2.4 (Hợp của 2 tập hợp)**.** *Tập hợp gồm các phần tử thuộc A hoặc thuộc B được gọi là* hợp *của A & B, ký hiệu $A \cup B$.*

"Vậy $A \cup B = \{x | x \in A$ hoặc $x \in B\}$." $x \in A \cup B$ khi & chỉ khi $x \in A$ & $x \in B$." – Thái et al., 2022, p. 15, i.e., $(x \in A \cup B) \Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B))$.

Ví dụ 1.2.1. *Với tập hợp $\mathbb{Q}$ các số hữu tỷ & tập hợp I các số vô tỷ. $\mathbb{Q} \cap I = \emptyset$, $\mathbb{Q} \cup I = \mathbb{R}$.*

1.2.5 Phần bù. Hiệu của 2 tập hợp

"Tập hợp $\mathbb{Q}$ các số hữu tỷ là phần bù của tập hợp I các số vô tỷ trong tập hợp $\mathbb{R}$." – Thái et al., 2022, p. 15

Định nghĩa 1.2.5 (Phần bù)**.** *Cho tập hợp A là tập con của tập hợp B. Tập hợp những phần tử B mà không phải là phần tử của A được gọi là* phần bù *của A trong B, ký hiệu C_BA.*

$B = A \cup C_BA$ & $C_BA \cap A = \emptyset$, $\forall$ tập hợp A, B.

Định nghĩa 1.2.6 (Hiệu của 2 tập hợp)**.** *Tập hợp gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B được gọi là* hiệu *của A & B, ký hiệu $A\backslash B$.*

"Vậy $A\backslash B = \{x | x \in A \text{ \& } x \notin B\}$." "$x \in A\backslash B$ khi & chỉ khi $x \in A$ & $x \notin B$." "Nếu $B \subset A$ thì $A\backslash B = C_AB$." – Thái et al., 2022, p. 16

1.2.6 Các tập hợp số

1.2.6.1 Các tập hợp số đã học

"Ta đã biết $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ lần lượt là tập hợp số tự nhiên, tập hợp số nguyên, tập hợp số hữu tỷ, tập hợp số thực. Ta có quan hệ sau: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$." – Thái et al., 2022, p. 17

1.2.6.2 1 số tập con thường dùng của tập hợp số thực

"$\mathbb{R}$: tập hợp số thực $(-\infty; +\infty)$. $\{x \in \mathbb{R} | a \le x \le b\}$: đoạn $[a; b]$. $\{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$: khoảng $(a; b)$. $\{x \in \mathbb{R} | x > a\}$: khoảng $(a; +\infty)$. $\{x \in \mathbb{R} | x < b\}$: khoảng $(-\infty; b)$. $\{x \in \mathbb{R} | a \le x < b\}$: nửa khoảng $[a; b)$. $\{x \in \mathbb{R} | a < x \le b\}$: nửa khoảng $(a; b]$. $\{x \in \mathbb{R} | x \ge a\}$: nửa khoảng $[a; +\infty)$. $\{x \in \mathbb{R} | x \le b\}$: nửa khoảng $(-\infty; b]$. Ký hiệu $-\infty$ đọc là *âm vô cực*, ký hiệu $+\infty$ đọc là *dương vô cực*; a & b được gọi là *đầu mút* của các đoạn, khoảng, nửa khoảng. Ta cũng có thể biểu diễn tập hợp trên trục số bằng cách gạch bỏ phần không thuộc tập đó." – Thái et al., 2022, p. 17

Chương 2

Bất Phương Trình & Hệ Bất Phương Trình Bậc Nhất 2 Ẩn

Nội dung. *Bất phương trình bậc nhất 2 ẩn; hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn & ứng dụng của chúng vào bài toán thực tiễn.*

2.1 Bất Phương Trình Bậc Nhất 2 Ẩn

2.1.1 Bất phương trình bậc nhất 2 ẩn

Định nghĩa 2.1.1 (Bất phương trình bậc nhất 2 ẩn)**.** Bất phương trình bậc nhất 2 ẩn x, y *là bất phương trình có 1 trong các dạng sau:* $ax + by < c$, $ax + by > c$, $ax + by \le c$, $ax + by \ge c$, *trong đó* a, b, c *là những số cho trước với* a, b *không đồng thời bằng* 0, x *&* y *là các ẩn.*

Cho bất phương trình bậc nhất 2 ẩn $ax + by < c$. *Mỗi cặp số* $(x_0; y_0)$ *sao cho* $ax_0 + by_0 < c$ $(\star)$ *được gọi là 1* nghiệm *của bất phương trình* $(\star)$. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của bất phương trình* $(\star)$ *được gọi là* miền nghiệm *của bất phương trình đó.*

"Nghiệm & miền nghiệm của các bất phương trình dạng $ax + by > c$, $ax + by \le c$ & $ax + by \ge c$ được định nghĩa tương tự." – Thái et al., 2022, p. 21

2.1.2 Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất 2 ẩn

2.1.2.1 Mô tả miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất 2 ẩn

"Người ta chứng minh được định lý sau:

Định lý 2.1.1. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phương trình* $ax + by = c$ *(với* a *&* b *không đồng thời bằng* 0*) xác định 1 đường thẳng* d *như sau:*

- d *có phương trình là* $x = \frac{c}{a}$ *nếu* $b = 0$*;*
- d *có phương trình là* $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ *nếu* $b \ne 0$.

Ngoài ra, người ta cũng chứng minh được định lý sau:

Định lý 2.1.2. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, đường thẳng* $d : ax + by = c$ *chia mặt phẳng thành 2 nửa mặt phẳng. 1 trong 2 nửa mặt phẳng (không kể* d*) là* miền nghiệm *của bất phương trình* $ax + by < c$, *nửa mặt phẳng còn lại (không kể* d*) là* miền nghiệm *của bất phương trình* $ax + by > c$.

Đối với bất phương trình dạng $ax + by \le c$ hoặc $ax + by \ge c$ thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng kể cả đường thẳng d." – Thái et al., 2022, p. 22

2.1.2.2 Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất 2 ẩn

"Quy tắc thực hành biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất 2 ẩn như sau:

Các bước biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy:

1. Vẽ đường thẳng $d : ax + by = c$. Đường thẳng d chia mặt phẳng tọa độ thành 2 nửa mặt phẳng.
2. Lấy 1 điểm $M(x_0; y_0)$ không nằm trên d (thường lấy gốc tọa độ O nếu $c \neq 0$). Tính $ax_0 + by_0$ & so sánh với c.
3. Kết luận:
   - Nếu $ax_0 + by_0 < c$ thì nửa mặt phẳng (không kể d) chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$.
   - Nếu $ax_0 + by_0 > c$ thì nửa mặt phẳng (không kể d) không chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$.

Thông thường khi sử dụng phần mềm toán học để biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất 2 ẩn, miền nghiệm của bất phương trình đó được tô màu." –Thái et al., 2022, pp. 23–24

2.2 Hệ Bất Phương Trình Bậc Nhất 2 Ẩn

2.2.1 Hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn

Định nghĩa 2.2.1 (Hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn)**.** Hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn x, y *là 1 hệ gồm 1 số bất phương trình bậc nhất 2 ẩn* x, y. *Mỗi nghiệm chung của các bất phương trình trong hệ được gọi là 1* nghiệm *của hệ bất phương trình đó.*

2.2.2 Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn

"Cũng như bất phương trình bậc nhất 2 ẩn, ta có thể biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn trên mặt phẳng tọa độ." –Thái et al., 2022, p. 26

Định nghĩa 2.2.2 (Miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn)**.** Miền nghiệm *của hệ bất phương trình là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.*

"Để biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn, ta làm như sau:

- Trong cùng mặt phẳng tọa độ, biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình trong hệ bằng cách gạch bỏ phần không thuộc miền nghiệm của nó.
- Phần không bị gạch là miền nghiệm cần tìm." –Thái et al., 2022, p. 27

Chương 3

Hàm Số & Đồ Thị

3.1 Hàm Số & Đồ Thị

3.2 Hàm Số Bậc 2. Đồ Thị Hàm Số Bậc 2 & Ứng Dụng

3.3 Dấu của Tam Thức Bậc 2

3.4 Bất Phương Trình Bậc 2 1 Ẩn

3.5 2 Dạng Phương Trình Quy về Phương Trình Bậc 2

Chương 4

Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác. Vector

4.1 Giá Trị Lượng Giác của 1 Góc $\in [0^\circ; 180^\circ]$. Định Lý Côsin & Định Lý Sin Trong Tam Giác

4.2 Giải Tam Giác

4.3 Khái Niệm Vector

4.4 Tổng & Hiệu của 2 Vector

4.5 Tích của 1 Số với 1 Vector

4.6 Tích Vô Hướng của 2 Vector

Tài liệu tham khảo

[NQBH/elementary math] Nguyễn Quản Bá Hồng. *Some Topics in Elementary Mathematics: Problems, Theories, Applications, & Bridges to Advanced Mathematics*. Mar 2022–now.

Tài liệu tham khảo

Thái, Đỗ Đức et al. (2022). *Toán 10, tập 1*. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, p. 107.