

Problem: Square-, Cube-, & n th Roots

Bài Tập: Căn Bậc 2, Căn Bậc 3, & Căn Bậc n

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 17 tháng 5 năm 2023

Tóm tắt nội dung

[en] This text is a collection of problems, from basic to advanced, on *square-, cube-, & n th roots*. Full set:

- Lecture note: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/square- & cube roots](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_9/square- & cube roots)¹.
- Cheatsheet:
- Problem: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/problem: square- & cube roots](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_9/problem: square- & cube roots)².
- Solution:

which is a supplementary material to my lecture note:

Keyword. Square root, cube root, n th root.

[vi] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài toán, từ cơ bản đến nâng cao, về *căn bậc 2, căn bậc 3, & căn bậc n* , cũng là phần bổ sung cho bài giảng: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/square- & cube roots](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_9/square- & cube roots).

Từ khóa. Căn bậc 2, căn bậc 3, căn bậc n , số hữu tỷ, số vô tỷ, căn thức.

Mục lục

1 Square Root & Irrationals – Căn Bậc 2 & Số Vô Tỷ	1
2 Căn Thức Bậc 2 & Hằng Đẳng Thức $\sqrt{A^2} = A $	2
3 Liên Hệ Giữa Phép Nhân, Phép Chia & Phép Khai Phương	3
4 Biến Đổi Đơn Giản Biểu Thức Chứa Căn Thức Bậc 2	5
5 Rút Gọn Biểu Thức Có Chứa Căn Thức Bậc 2	5
6 Cube Root, n th Root – Căn Bậc 3, Căn Bậc n	7
7 Miscellaneous	8
Tài liệu	11

1 Square Root & Irrationals – Căn Bậc 2 & Số Vô Tỷ

Bài toán 1 (Program to print out 1st n square roots). Với $n \in \mathbb{N}^*$ được nhập từ bàn phím, viết chương trình Pascal, C/C++, Python xuất ra: (a) Căn bậc 2 của n . (b) Căn bậc 2 của n số nguyên dương đầu tiên.

Bài toán 2 (Số chính phương). Viết chương trình Pascal, C/C++, Python để kiểm tra 1 số $n \in \mathbb{N}^*$ được nhập từ bàn phím có phải là số chính phương hay không.

Bài toán 3 ([Tuy23], Thí dụ 1, p. 5). Cho số thực $x \geq 0$. So sánh \sqrt{x} với x .

Bài toán 4 ([Bin23], Ví dụ 2, p. 5). Chứng minh tổng của 1 số hữu tỷ với 1 số vô tỷ là 1 số vô tỷ.

Bài toán 5 ([Bin23], Ví dụ 3, p. 5). Xét xem các số a, b có thể là số vô tỷ hay không, nếu: (a) $a + b$ & $a - b$ là các số hữu tỷ. (b) $a - b$ & ab là các số hữu tỷ.

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam

e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

¹URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/NQBH_square_root_cube_root.pdf.

²https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/problem/NQBH_square_root_cube_root_problem.pdf.

Bài toán 6 ([Bin23], Ví dụ 4, p. 5). *Chứng minh: Nếu số tự nhiên a không là số chính phương thì \sqrt{a} là số vô tỷ.*

Bài toán 7 ([Bin23], 2., p. 6). *Chứng minh các số sau là số vô tỷ: (a) $\sqrt{1+\sqrt{2}}$. (b) $m + \frac{\sqrt{3}}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Q}$, $n \neq 0$.*

Bài toán 8 ([Bin23], 3., p. 6). *Xét xem các số a, b có thể là số vô tỷ hay không nếu: (a) $ab \notin \frac{a}{b}$ là các số hữu tỷ. (b) $a+b \notin \frac{a}{b}$ là các số hữu tỷ ($a+b \neq 0$). (c) $a+b$, a^2 , $\notin b^2$ là các số hữu tỷ ($a+b \neq 0$).*

Bài toán 9 ([Bin23], 4., p. 6). *So sánh 2 số: (a) $2\sqrt{3}$ \notin $3\sqrt{2}$. (b) $6\sqrt{5}$ \notin $5\sqrt{6}$. (c) $\sqrt{24} + \sqrt{45}$ \notin 12. (d) $\sqrt{37} - \sqrt{15}$ \notin 2.*

Bài toán 10 ([Bin23], 5., p. 6). (a) *Cho 1 ví dụ để chứng tỏ khẳng định $\sqrt{a} \leq a$ với mọi số a không âm là sai. (b) Cho $a > 0$. Với giá trị nào của a thì $\sqrt{a} \geq a$?*

Bài toán 11 ([Bin23], 6*, pp. 6-7). (a) *Chỉ ra 1 số thực x mà $x - \frac{1}{x}$ là số nguyên ($x \neq \pm 1$). (b) Chứng minh nếu $x - \frac{1}{x}$ là số nguyên \notin $x \neq \pm 1$ thì $x \notin$ $x + \frac{1}{x}$ là số vô tỷ. Khi đó $(x + \frac{1}{x})^{2n} \notin$ $(x + \frac{1}{x})^{2n+1}$ là số hữu tỷ hay số vô tỷ?*

2 Căn Thức Bậc 2 & Hằng Đẳng Thức $\sqrt{A^2} = |A|$

Bài toán 12 ([Tuy23], Thí dụ 2, p. 5). *Cho $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $abc \neq 0$ \notin $a = b + c$. Chứng minh $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \in \mathbb{Q}$.*

Bài toán 13. *Cho $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $abc \neq 0$ \notin $a + b + c = 0$. Chứng minh $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \in \mathbb{Q}$.*

Bài toán 14. (a) *Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$, $abc \neq 0$, khi nào thì $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$? (b) Cho $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $abcd \neq 0$, khi nào thì $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}$? (c) Cho $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, $abcde \neq 0$, khi nào thì $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} + \frac{1}{e^2}$? (d) Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$, khi nào thì xảy ra đẳng thức sau?*

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2}, \text{ i.e., } \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)^2 = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}.$$

Bài toán 15. *Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, $abcd \neq 0$ \notin $ab + ac + ad + bc + bd + cd = 0$. Chứng minh $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}} \in \mathbb{Q}$.*

Bài toán 16. *Cho $a, b, c, d, e \in \mathbb{Q}$, $abcde \neq 0$ \notin $abc + abd + abe + acd + ace + ade + bcd + bce + bde + cde = 0$. Chứng minh $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} + \frac{1}{e^2}} \in \mathbb{Q}$.*

Bài toán 17. *Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $a_i \in \mathbb{Q}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$, \notin $\sum_{\text{cyc}} a_1 a_2 \dots a_{n-2} = 0$. Chứng minh:*

$$A = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2}} = \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}} \in \mathbb{Q}.$$

Bài toán 18 ([Tuy23], 1., p. 6). *Tính $A = \sqrt{\frac{8^{10} - 4^{10}}{4^{11} - 8^4}}$.*

Bài toán 19 ([Tuy23], 2., p. 6). *Cho $A = \underbrace{99 \dots 9}_{10^s} \underbrace{400 \dots 0}_{10^s} 9$. Tính \sqrt{A} .*

Bài toán 20 ([Tuy23], 3., p. 6). *Không dùng máy tính hoặc bảng số, so sánh: (a) $\sqrt{8} + \sqrt{15}$ \notin $\sqrt{65} - 1$. (b) $\frac{13 - 2\sqrt{3}}{6}$ \notin $\sqrt{2}$.*

Bài toán 21 ([Tuy23], 4., p. 6). *Tìm DKXD của các biểu thức: (a) $\sqrt{2-x^2}$. (b) $\frac{x}{\sqrt{5x^2-3}}$. (c) $\sqrt{-4x^2+4x-1}$. (d) $\frac{1}{\sqrt{x^2+x-2}}$.*

Bài toán 22 ([Tuy23], 5., p. 6). *Cho $a, b, c \in \mathbb{Q}$ khác nhau đôi một. Chứng minh $A = \sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}} \in \mathbb{Q}$.*

Bài toán 23 ([Tuy23], 6., p. 6). *Cho $a, b, c \in \mathbb{Q}$ thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh $\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} \in \mathbb{Q}$.*

Bài toán 24 ([Tuy23], 7., p. 6-7). (a) *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sqrt{-x^2 + x + \frac{3}{4}}$. (b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = \sqrt{4x^4 - 4x^2(x+1) + (x+1)^2 + 9}$. (c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = \sqrt{25x^2 - 20x + 4} + \sqrt{25x^2}$.*

Bài toán 25 ([Tuy23], 8., p. 7). Cho $x < 0$, rút gọn biểu thức $A = |2x - \sqrt{(5x-1)^2}|$.

Bài toán 26 ([Tuy23], 9., p. 7). Cho biểu thức $A = 4x - \sqrt{9x^2 - 12x + 4}$. (a) Rút gọn A . (b) Tính giá trị của A với $x = \frac{2}{7}$.

Bài toán 27 ([Tuy23], 10., p. 7). Cho biểu thức $A = 5x + \sqrt{x^2 + 6x + 9}$. (a) Rút gọn A . (b) Tìm x để $B = -9$.

Bài toán 28 ([Tuy23], 11., p. 7). Tìm $x \in \mathbb{R}$ biết $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} \leq 5 - x$.

Bài toán 29 ([Tuy23], 12., p. 7). Giải phương trình: (a) $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{x + 1}$. (b) $\sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 0$. (c) $\sqrt{x^2 - 4} - x^2 + 4 = 0$.

Bài toán 30 ([Tuy23], 13., p. 7). Giải phương trình: (a) $\sqrt{x^2 - 4x + 5} + \sqrt{x^2 - 4x + 8} + \sqrt{x^2 - 4x + 9} = 3 + \sqrt{5}$. (b) $\sqrt{2 - x^2 + 2x} + \sqrt{-x^2 - 6x - 8} = 1 + \sqrt{3}$. (c) $\sqrt{9x^2 - 6x + 2} + \sqrt{45x^2 - 30x + 9} = \sqrt{6x - 9x^2 + 8}$.

Bài toán 31 ([Bin23], Ví dụ 5, p. 7). Cho biểu thức $A = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4x + 4}}$. (a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức A . (b) Rút gọn biểu thức A .

Bài toán 32 ([Bin23], Ví dụ 6, p. 8). Tìm điều kiện xác định của các biểu thức: (a) $A = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}$. (b) $B = \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2x + 1}}}$.

Bài toán 33 ([Bin23], Ví dụ 7, p. 8). Tìm các giá trị của x sao cho $\sqrt{x + 1} < x + 3$.

Bài toán 34 ([Bin23], 7., p. 9). Tìm điều kiện xác định của các biểu thức: (a) $3 - \sqrt{1 - 16x^2}$. (b) $\frac{1}{1 - \sqrt{x^2 - 3}}$. (c) $\sqrt{8x - x^2 - 15}$.

(d) $\frac{2}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$. (e) $A = \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}}$. (f) $B = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{\sqrt{2x + 1}} + \sqrt{x^2 - 8x + 14}$.

Bài toán 35 ([Bin23], 8., p. 9). Cho biểu thức $A = \sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{x^2 + 6x + 9}$. (a) Rút gọn biểu thức A . (b) Tìm các giá trị của x để $A = 1$.

Bài toán 36 ([Bin23], 9., p. 9). Tìm các giá trị của x sao cho: (a) $\sqrt{x^2 - 3} \leq x^2 - 3$. (b) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} > x - 6$.

Bài toán 37 ([Bin23], 10., p. 9). Cho $a + b + c = 0$ & $abc \neq 0$. Chứng minh hằng đẳng thức: $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right|$.

3 Liên Hệ Giữa Phép Nhân, Phép Chia & Phép Khai Phương

Bài toán 38 ([Tuy23], Thí dụ 3, p. 9). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}}$.

Bài toán 39 ([Tuy23], Thí dụ 4, p. 10). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sqrt{x - 5} + \sqrt{13 - x}$.

Bài toán 40 ([Tuy23], 14., p. 11). Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{3}} - \sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{7} - 2}}$.

Bài toán 41 ([Tuy23], 15., p. 11). Cho 2 số có tổng bằng $\sqrt{19}$ & có hiệu bằng $\sqrt{7}$. Tính tích của 2 số đó.

Bài toán 42 ([Tuy23], 16., p. 11). Tính \sqrt{A} biết: (a) $A = 13 - 2\sqrt{42}$. (b) $A = 46 + 6\sqrt{5}$. (c) $A = 12 - 3\sqrt{15}$.

Bài toán 43 ([Tuy23], 17., p. 12). Rút gọn biểu thức: (a) $A = \sqrt{6 + 2\sqrt{2}\sqrt{3 - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}}$. (b) $B = \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$. (c) $C = \sqrt{3 - \sqrt{5}}(\sqrt{10} - \sqrt{2})(3 + \sqrt{5})$.

Bài toán 44 ([Tuy23], 18., p. 12). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}}$.

Bài toán 45 ([Tuy23], 19., p. 12). Cho $a > 0$, so sánh $\sqrt{a + 1} + \sqrt{a + 3}$ với $2\sqrt{a + 2}$.

Bài toán 46 ([Tuy23], 20., p. 12). Cho $a, b, x, y > 0$. Chứng minh $\sqrt{ax} + \sqrt{by} \leq \sqrt{(a + b)(x + y)}$.

Bài toán 47 ([Tuy23], 21., p. 12). (a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 8}$. (b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = \sqrt{x - 1} + \sqrt{5 - x}$.

Bài toán 48 ([Tuy23], 22., p. 12). Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} \left[\sqrt{(1 + x)^3} - \sqrt{(1 - x)^3} \right]}{2 + \sqrt{1 - x^2}}.$$

Bài toán 49 ([Tuy23], 23., p. 12). Tìm x, y biết $x + y + 12 = 4\sqrt{x} + 6\sqrt{y - 1}$.

Bài toán 50 ([Tuy23], 24., p. 12). Tìm x, y, z biết $\sqrt{x - a} + \sqrt{y - b} + \sqrt{z - c} = \frac{1}{2}(x + y + z)$, trong đó $a + b + c = 3$.

Bài toán 51 ([Tuy23], 25., p. 12). Giải phương trình $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8+6\sqrt{x-1}} = 5$.

Bài toán 52 ([Tuy23], 26., p. 12). Giải phương trình $\sqrt{x^2-5x+6} + \sqrt{x+1} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2-2x-3}$.

Bài toán 53 ([Tuy23], 27., p. 12). Chứng minh bất đẳng thức $\sqrt{n+a} + \sqrt{n-a} < 2\sqrt{n}$ vpos $0 < |a| \leq n$. Áp dụng (không dùng máy tính hoặc bảng số): Chứng minh: $\sqrt{101} - \sqrt{99} > 0.1$.

Bài toán 54 ([Tuy23], 28., p. 13). Chứng minh: $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Áp dụng: Cho $S = \sum_{i=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}}$. Chứng minh $18 < S < 19$.

Bài toán 55 ([Tuy23], 29., p. 13). Chứng minh: $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Áp dụng: Chứng minh: $S = \sum_{i=1}^{2500} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2500}} < 100$.

Bài toán 56 ([Tuy23], 30., p. 13). Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh $x + y + z \geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$.

Bài toán 57 ([Tuy23], 31., p. 13). Cho $A = \sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}$. Chứng minh $A \leq 4$.

Bài toán 58 ([Tuy23], 32., p. 13). Cho $B = \frac{x^3}{1+y} + \frac{y^3}{1+x}$ trong đó x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy = 1$. Chứng minh $B \geq 1$.

Bài toán 59 ([Tuy23], 33., p. 13). Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 2$. Chứng minh $xyz \leq \frac{1}{8}$.

Bài toán 60 ([Tuy23], 34., p. 13). Tìm các số dương x, y, z sao cho $x + y + z = 3$ & $x^4 + y^4 + z^4 = 3xyz$.

Bài toán 61 ([Tuy23], 35., p. 13). Cho $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 10$. Chứng minh: $x + y \geq 20$.

Bài toán 62 ([Tuy23], 36., p. 13). Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z = 1$. Chứng minh: $\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} \leq \sqrt{6}$.

Bài toán 63 ([Bin23], Ví dụ 8, p. 10). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} - \sqrt{x - \sqrt{2x-1}}$.

Bài toán 64 ([Bin23], Ví dụ 9, p. 11). Chứng minh số $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ là số vô tỷ.

Bài toán 65 ([Bin23], 11., pp. 11–12). Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{11-2\sqrt{10}}$. (b) $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$. (c) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$. (d) $\sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{9+4\sqrt{5}}$. (e) $\sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}}$. (f) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{2} + \sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{7+2\sqrt{10}}}$. (g) $\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{7}+4\sqrt{3}}}$. (h) $\sqrt{4 + \sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10+2\sqrt{5}}}$. (i) $\sqrt{94-42\sqrt{5}} - \sqrt{94+42\sqrt{5}}$.

Bài toán 66 ([Bin23], 12., p. 12). Tính: (a) $(4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$. (b) $\sqrt{3 - \sqrt{5}}(\sqrt{10} - \sqrt{2})(3 + \sqrt{5})$.

(c) $\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Bài toán 67 ([Bin23], 13., p. 12). Chứng minh các hằng đẳng thức sau với $b \geq 0$, $a \geq \sqrt{b}$: (a) $\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2(a \pm \sqrt{a^2 - b})}$. (b) $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$.

Bài toán 68 ([Bin23], 14., p. 12). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x+2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$.

Bài toán 69 ([Bin23], 15., p. 12). Cho biểu thức $A = \frac{x + \sqrt{x^2-2x}}{x - \sqrt{x^2-2x}} - \frac{x - \sqrt{x^2-2x}}{x + \sqrt{x^2-2x}}$. (a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức A. (b) Rút gọn biểu thức A. (c) Tìm giá trị của x để $A < 2$.

Bài toán 70 ([Bin23], 16., p. 12). Lập 1 phương trình bậc 2 với các hệ số nguyên, trong đó: (a) $2 + \sqrt{3}$ là 1 nghiệm của phương trình. (b) $6 - 4\sqrt{2}$ là 1 nghiệm của phương trình.

Bài toán 71 ([Bin23], 17., p. 13). Chứng minh các số sau là số vô tỷ: (a) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$. (b) $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Bài toán 72 ([Bin23], 18., p. 13). Có tồn tại các số hữu tỷ dương a, b hay không nếu: (a) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2}$. (b) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{\sqrt{2}}$.

Bài toán 73 ([Bin23], 19., p. 13). Cho 3 số $x, y, \sqrt{x} + \sqrt{y}$ là các số hữu tỷ. Chứng minh mỗi số \sqrt{x}, \sqrt{y} đều là số hữu tỷ.

Bài toán 74 ([Bin23], 20., p. 13). Cho a, b, c, d là các số dương. Chứng minh tồn tại 1 số dương trong 2 số $2a + b - 2\sqrt{cd}$ & $2c + d - 2\sqrt{ab}$.

Bài toán 75 ([Bin23], 21*, p. 13). (a) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}}$ với $a > 0$. (b) Tính giá trị của tổng $B = \sum_{i=1}^{99} \sqrt{1 + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(i+1)^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}}$.

Bài toán 76 ([Bin23], 22*, p. 13). (a) Nêu 1 cách tính nhẩm 997^2 . (b) Tính tổng các chữ số của A biết $\sqrt{A} = 99 \dots 96$ (có 100 chữ số 9).

4 Biến Đổi Đơn Giản Biểu Thức Chứa Căn Thức Bậc 2

Bài toán 77 ([Bin23], Ví dụ 10, p. 14). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$.

Bài toán 78 ([Bin23], Ví dụ 11, p. 14). Tính giá trị của biểu thức

$$M = \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{(i+1)\sqrt{i} + i\sqrt{i+1}} = \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{25\sqrt{24} + 24\sqrt{25}}.$$

Bài toán 79 ([Bin23], 23., p. 15). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{1-a} + \sqrt{a(a-1)} + a\sqrt{\frac{a-1}{a}}$.

Bài toán 80 ([Bin23], 24., p. 15). Chứng minh các hằng đẳng thức: (a) $\sqrt{10 + \sqrt{60} - \sqrt{24} - \sqrt{40}} = \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{2}$. (b) $\sqrt{6 + \sqrt{24} + \sqrt{12} + \sqrt{8}} - \sqrt{3} = \sqrt{2} + 1$.

Bài toán 81 ([Bin23], 25., p. 15). Cho $A = \sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}}$. Biểu diễn A dưới dạng tổng của 3 căn thức.

Bài toán 82 ([Bin23], 26., p. 15). Rút gọn biểu thức $A = \frac{x+3+2\sqrt{x^2-9}}{2x-6+\sqrt{x^2-9}}$.

Bài toán 83 ([Bin23], 27., p. 15). Rút gọn biểu thức $B = \frac{x^2+5x+6+x\sqrt{9-x^2}}{3x-x^2+(x+2)\sqrt{9-x^2}}$.

Bài toán 84 ([Bin23], 28., p. 15). Rút gọn biểu thức:

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}},$$

$$B = \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{\sqrt{i} - \sqrt{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{1} - \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{4}} - \cdots - \frac{1}{\sqrt{24} - \sqrt{25}}.$$

5 Rút Gọn Biểu Thức Có Chứa Căn Thức Bậc 2

Bài toán 85 ([Tuy23], Thí dụ 5, p. 14). Cho $A = \sqrt{11 + \sqrt{96}}$ & $B = \frac{2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$. Không dùng máy tính hoặc bảng số, so sánh A & B .

Bài toán 86 ([Tuy23], Thí dụ 6, p. 15). Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} - \frac{x-3}{\sqrt{x-1} - \sqrt{2}} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{2x} - x} \right)$.
(a) Rút gọn A . (b) Tính giá trị của A với $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

Bài toán 87 ([Tuy23], 37., pp. 15–16). Không dùng máy tính hoặc bảng số, so sánh các số sau: (a) $-3\sqrt{11}$ & $-7\sqrt{2}$. (b) $\frac{7}{2}\sqrt{\frac{1}{12}}$ & $\frac{9}{4}\sqrt{\frac{1}{5}}$. (c) $\sqrt{\frac{4}{27}}$ & $\sqrt{\frac{3}{26}}$.

Bài toán 88 ([Tuy23], 38., p. 16). Không dùng máy tính hoặc bảng số, chứng minh $4\sqrt{5} - 3\sqrt{2} < 5$.

Bài toán 89 ([Tuy23], 39., p. 16). Cho $A = \sqrt{x^2+1} - x - \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x}$ trong đó $x \in \mathbb{R}$. Xác định $x \in \mathbb{R}$ để giá trị của A là 1 số tự nhiên.

Bài toán 90 ([Tuy23], 40., p. 16). Trục căn thức ở mẫu của các biểu thức sau: (a) $A = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{2c}}$ trong đó $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện c là trung bình nhân của a & b . (b) $B = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}}$ trong đó $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn điều kiện $ab = cd$ & $a + b \neq c + d$.

Bài toán 91 ([Tuy23], 41., p. 16). Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ sao cho $x > y > 0$ thỏa mãn điều kiện $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{931}$.

Bài toán 92 ([Tuy23], 42., p. 16). Chứng minh: $\frac{2\sqrt{mn}}{\sqrt{m} + \sqrt{n} + \sqrt{m+n}} = \sqrt{m} + \sqrt{n} - \sqrt{m+n}$. Áp dụng tính $\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}}$.

Bài toán 93 ([Tuy23], 43., p. 16). Chứng minh: $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Áp dụng tính tổng:
$$S = \sum_{i=1}^{399} \frac{1}{(i+1)\sqrt{i} + i\sqrt{i+1}} = \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{400\sqrt{399} + 399\sqrt{400}}.$$

Bài toán 94 ([Tuy23], 44., p. 16). Tìm $n \in \mathbb{N}$ nhỏ nhất sao cho $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 0.05$.

Bài toán 95 ([Tuy23], 45., p. 17). Cho $A = \sum_{i=1}^{120} \frac{1}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{120} + \sqrt{121}}$, $B = \sum_{i=1}^{35} \frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{35}}$. Chứng minh $A < B$.

Bài toán 96 ([Tuy23], 46., p. 17). Cho $x, y, z > 0$ & khác nhau đôi một. Chứng minh giá trị của biểu thức

$$A = \frac{x}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{z})} + \frac{y}{(\sqrt{y} - \sqrt{z})(\sqrt{y} - \sqrt{x})} + \frac{z}{(\sqrt{z} - \sqrt{x})(\sqrt{z} - \sqrt{y})}$$

không phụ thuộc vào giá trị của các biến.

Bài toán 97 ([Tuy23], 47., p. 17). Cho biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{5}{x - \sqrt{x} - 6} - \frac{\sqrt{x} - 2}{3 - \sqrt{x}}$. (a) Rút gọn A . (b) Tìm giá trị lớn nhất của A .

Bài toán 98 ([Tuy23], 48., p. 17). Cho $A = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left(1 + \frac{x + y + 2xy}{1 - xy} \right)$. (a) Rút gọn A . (b) Tính giá trị của P với $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$. (c) Tìm giá trị lớn nhất của A .

Bài toán 99 ([Tuy23], 49., p. 17). Cho $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy} + \sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 1} + \frac{2\sqrt{z}}{\sqrt{zx} + 2\sqrt{z} + 2}$. Biết $xyz = 4$, tính \sqrt{P} .

Bài toán 100 ([Bin23], Ví dụ 12, p. 15). Tính: $A = \left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \right) : \left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} - \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \right)$.

Bài toán 101 ([Bin23], Ví dụ 13, p. 16). Rút gọn biểu thức $A = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$.

Bài toán 102 ([Bin23], Ví dụ 14, p. 16). Cho $A = \frac{\sqrt{a} + 6}{\sqrt{a} + 1}$. (a) Tìm các số nguyên a để A là số nguyên. (b) Chứng minh với $a = \frac{4}{9}$ thì A là số nguyên. (c) Tìm các số hữu tỷ a để A là số nguyên.

Bài toán 103 ([Bin23], 29., p. 18). Rút gọn biểu thức: (a) $A = \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1 - \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}}$. (b) $B = \left(\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{a}}{1 - a} \right)^2$. (c) $C = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}} : \left[\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \frac{1}{x + y + 2\sqrt{xy}} + \frac{2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^3} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \right]$ với $x = 2 - \sqrt{3}$ & $y = 2 + \sqrt{3}$.

Bài toán 104 ([Bin23], 30., p. 18). Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}$.

Bài toán 105 ([Bin23], 31., p. 18). Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x^2 - y^2}} - \sqrt{x - \sqrt{x^2 - y^2}}}{\sqrt{2(x-y)}}$ với $x > y > 0$.

Bài toán 106 ([Bin23], 32., p. 18). Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right)$ với $x = \frac{a^2 + b^2}{2ab}$ & $b > a > 0$.

Bài toán 107 ([Bin23], 33., p. 18). Rút gọn biểu thức $B = \frac{2a\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$ với $x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1-a}{a}} - \sqrt{\frac{a}{1-a}} \right)$ & $0 < a < 1$.

Bài toán 108 ([Bin23], 34., p. 18). Rút gọn biểu thức $A = a + b - \sqrt{\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{c^2+1}}$ với $a, b, c > 0$ & $ab + bc + ca = 1$.

Bài toán 109 ([Bin23], 35., p. 18). Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}} \cdot \sqrt{2x-1}$.

Bài toán 110 ([Bin23], 36., p. 18). Chứng minh hằng đẳng thức sau với $x \geq 2$

$$\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{\frac{x^2-4}{x}}} + \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{\frac{x^2-4}{x}}} = \sqrt{\frac{2x+4}{\sqrt{x}}}.$$

Bài toán 111 ([Bin23], 37., p. 18). Cho $a = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{-1 - \sqrt{2}}{2}$. Tính $a^7 + b^7$.

Bài toán 112 ([Bin23], 38., p. 19). Cho biết $\sqrt{x^2 - 6x + 13} - \sqrt{x^2 - 6x + 10} = 1$. Tính $\sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{x^2 - 6x + 10}$.

Bài toán 113 ([Bin23], 39., p. 19). Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{a} + 2}{\sqrt{a} - 2}$. (a) Tìm các số nguyên a để A là số nguyên. (b) Tìm các số hữu tỷ a để A là số nguyên.

Bài toán 114 ([Bin23], 40., p. 19). Cho $a = \sqrt{2} - 1$. (a) Viết a^2, a^3 dưới dạng $\sqrt{m} - \sqrt{m-1}$ trong đó m là số tự nhiên. (b) Chứng minh với mọi số nguyên dương n , số a^n viết được dưới dạng trên.

6 Cube Root, nth Root – Căn Bậc 3, Căn Bậc n

Bài toán 115 (Program to print out 1st n cube roots). Viết chương trình Pascal, C/C++, Python xuất ra căn bậc 3 của n số tự nhiên đầu tiên với $n \in \mathbb{N}^*$ được nhập từ bàn phím.

Bài toán 116. Viết chương trình Pascal, C/C++, Python để kiểm tra 1 số $n \in \mathbb{N}^*$ được nhập từ bàn phím có phải là lập phương của 1 số tự nhiên hay không.

Bài toán 117 (Program to print out 1st n nth roots). Viết chương trình Pascal, C/C++, Python xuất ra căn bậc n của m số tự nhiên đầu tiên với $m, n \in \mathbb{N}^*$ được nhập từ bàn phím.

Bài toán 118. Viết chương trình Pascal, C/C++, Python để kiểm tra 1 số m được nhập từ bàn phím có phải là lũy thừa bậc n của 1 số tự nhiên hay không với $m, n \in \mathbb{N}^*$ được nhập từ bàn phím.

Bài toán 119 (Mở rộng [Tuy23], Thí dụ 1, p. 5). Cho $x \in \mathbb{R}$. So sánh $\sqrt[3]{x}$ với x .

Bài toán 120 (Mở rộng [Tuy23], Thí dụ 1, p. 5). Cho $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. So sánh $\sqrt[n]{x}$ với x .

Bài toán 121 ([Tuy23], Thí dụ 7, p. 19). Tính $x = \sqrt[3]{17\sqrt{5} + 38} - \sqrt[3]{17\sqrt{5} - 38}$.

Bài toán 122 ([Tuy23], Thí dụ 8, p. 20). Giải & biện luận phương trình $(x - a)^n = a^2 - 2a + 1$ với $n \in \mathbb{N}^*$, a là tham số.

Bài toán 123 ([Tuy23], 50., p. 21). Tính: (a) $\sqrt[3]{8\sqrt{5} - 16} \sqrt[3]{8\sqrt{5} + 16}$. (b) $\sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} + \sqrt[6]{8}$. (c) $\sqrt[3]{4} \sqrt[3]{1 - \sqrt{3}} \sqrt[6]{4 + 2\sqrt{3}}$.

Bài toán 124 ([Tuy23], 51., p. 21). (a) Tính $\frac{2}{\sqrt[3]{3} - 1} - \frac{4}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1}$. (b) Cho $x = \frac{2}{2\sqrt[3]{2} + 2 + \sqrt[3]{4}}$, $y = \frac{6}{2\sqrt[3]{2} - 2 + \sqrt[3]{4}}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{xy}{x + y}$.

Bài toán 125 ([Tuy23], 52., p. 21). Cho $x = \frac{\sqrt[3]{8 - 3\sqrt{5}} + \sqrt[3]{64 - 12\sqrt{20}}}{\sqrt[3]{57}} \sqrt[3]{8 + 3\sqrt{5}}$, $y = \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt{2}}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{2}} + \frac{\sqrt{2} - 9\sqrt[3]{9}}{\sqrt[4]{2} - \sqrt[3]{81}}$. Tính xy .

Bài toán 126 ([Tuy23], 53., p. 22). Tính: (a) $x = \sqrt[3]{5 + 2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5 - 2\sqrt{13}}$. (b) $x = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$. (c) $x = \sqrt[3]{182 + \sqrt{33125}} + \sqrt[3]{182 - \sqrt{33125}}$.

Bài toán 127 ([Tuy23], 54., p. 22). Cho $A = \sqrt[3]{60 + \sqrt[3]{60 + \sqrt[3]{60 + \cdots + \sqrt[3]{60}}}}$. Chứng minh $3 < A < 3$. Tìm $\lfloor A \rfloor$.

Bài toán 128 ([Tuy23], 55., p. 22). Cho $A = \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \cdots + \sqrt{20}}}}$, $B = \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \cdots + \sqrt[3]{24}}}}$. Chứng minh $7 < A + B < 8$. Tìm $\lfloor A + B \rfloor$.

Bài toán 129 ([Tuy23], 56., p. 22). So sánh $a = \sqrt[3]{5\sqrt{2}}$ & $b = \sqrt{5\sqrt[3]{2}}$.

Bài toán 130 ([Tuy23], 57., p. 22). Cho $ax^3 = by^3 = cz^3$ & $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Chứng minh $\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$.

Bài toán 131 ([Tuy23], 58., p. 22). Giải phương trình: (a) $x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3}$. (b) $x^3 + 2x^2 - 4x = -\frac{8}{3}$.

Bài toán 132 ([Tuy23], 59., p. 22). Giải phương trình: (a) $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{5x}$. (b) $2\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2} = \sqrt[3]{x^2 - 4}$.

Bài toán 133 ([Tuy23], 60., p. 22). Giải phương trình: $\sqrt[3]{x-5} + \sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{3x+2} = -2$.

Bài toán 134 ([Tuy23], 61., p. 22). Giải phương trình: $\sqrt[n]{(x-2)^2} + 4\sqrt[n]{x^2-4} = 5\sqrt[n]{(x+2)^2}$.

Bài toán 135 ([Tuy23], 62., p. 22). Cho $A = (a+b)(b+c)(c+a)$ trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh $A + 1 \geq 3(a+b+c)$.

Bài toán 136 ([Bin23], Ví dụ 15, p. 20). Chứng tỏ số $m = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$ là 1 nghiệm của phương trình $x^3 + 3x - 4 = 0$.

Bài toán 137 ([Bin23], Ví dụ 16, p. 20). Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$.

Bài toán 138 ([Bin23], 41., p. 20). Tính: (a) $\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 2}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$. (b) $\sqrt{3 + \sqrt{3} + \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}}$. (c) $\frac{4 + 2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}}$.

Bài toán 139 ([Bin23], 42., p. 21). Số $m = \sqrt[3]{4 + \sqrt{80}} - \sqrt[3]{4 - \sqrt{80}}$ có phải là nghiệm của phương trình $x^3 + 12x - 8 = 0$ không?

Bài toán 140 ([Bin23], 43., p. 21). Lập 1 phương trình bậc 3 với các hệ số nguyên, trong đó: (a) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ là 1 nghiệm của phương trình. (b) $\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}$ là 1 nghiệm của phương trình.

Bài toán 141 ([Bin23], 44., p. 21). Tính: (a) $A = \sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10}$. (b) $B = \sqrt[3]{5 + 2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5 - 2\sqrt{13}}$. (c) $C = \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$. (d) $D = \sqrt[3]{2 + 10\sqrt{\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{2 - 10\sqrt{\frac{1}{27}}}$. (e) $E = \sqrt[3]{4 + \frac{5}{3}\sqrt{\frac{31}{3}}} + \sqrt[3]{4 - \frac{5}{3}\sqrt{\frac{31}{3}}}$.

Bài toán 142 ([Bin23], 45., p. 21). Tìm x biết: (a) $\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{2-x} = 1$. (b) $2x^3 = (x-1)^3$.

Bài toán 143 ([Bin23], 46., p. 21). Cho $am^3 = bn^3 = cp^3$ & $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1$. Chứng minh: $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{am^2 + bn^2 + cp^2}$.

Bài toán 144 ([Bin23], 47., p. 21). Tính: (a) $\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}(\sqrt[6]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}})$. (b) $\sqrt[4]{17 + 12\sqrt{2}} - \sqrt{2}$. (c) $\sqrt[4]{56 - 24\sqrt{5}}$. (d) $1 + \sqrt[4]{28 - 16\sqrt{3}}$. (e) $\frac{2}{\sqrt{4 - 3\sqrt[4]{5}} + 2\sqrt{5} - \sqrt[4]{125}}$.

7 Miscellaneous

Bài toán 145 ([Tuy23], Thí dụ 15, pp. 29-30). Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x + \sqrt{x} - 1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right)$. (a) Rút gọn A. (b) Tính giá trị của A với $x = 7 - 4\sqrt{3}$. (c) Tìm giá trị lớn nhất của a để $P > a$.

Bài toán 146 ([Tuy23], 80., p. 31). Chứng minh: $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(a+b)^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} \right|$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $ab(a+b) \neq 0$. Áp dụng tính $A = \sqrt{1 + 999^2 + \frac{999^2}{1000^2}} + \frac{999}{1000}$.

Bài toán 147 ([Tuy23], 81., p. 31). Rút gọn biểu thức $A = (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$.

Bài toán 148 ([Tuy23], 82., p. 31). Không dùng máy tính hoặc bảng số, chứng minh: $\sqrt{14} - \sqrt{13} < 2\sqrt{3} - \sqrt{11}$.

Bài toán 149 ([Tuy23], 83., p. 31). Giải phương trình: $\frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 1$.

Bài toán 150 ([Tuy23], 84., p. 31). Tìm x, y, z biết $x + y + z + 35 = 2(2\sqrt{x+1} + 3\sqrt{y+2} + 4\sqrt{z+3})$.

Bài toán 151 ([Tuy23], 85., p. 31). Cho $a > 0$, $b > 0$ & $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. Chứng minh: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1}$.

Bài toán 152 ([Tuy23], 86., p. 31). Chứng minh: $A = \sqrt{8 + 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{8 - 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = \sqrt{2} + \sqrt{10}$.

Bài toán 153 ([Tuy23], 87., p. 31). Chứng minh:

$$\frac{1}{4} < \frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}} < \frac{3}{10},$$

(ở tử có n dấu căn, ở mẫu có $n-1$ dấu căn).

Bài toán 154 ([Tuy23], 88., p. 31). Giải phương trình: $\sqrt{x+2-3\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x-2+3\sqrt{2x-5}} = 2\sqrt{2}$.

Bài toán 155 ([Tuy23], 89., p. 31). Giải phương trình: $\sqrt[3]{(65+x)^2} + 4\sqrt[3]{(65-x)^2} = 5\sqrt[3]{65^2 - x^2}$.

Bài toán 156 ([Tuy23], 90., p. 32). Giải phương trình ẩn x: $\frac{(a-x)\sqrt[4]{x-b} + (x-b)\sqrt[4]{a-x}}{\sqrt[4]{a-x} + \sqrt[4]{x-b}} = \frac{a-b}{2}$ với $a > b$.

Bài toán 157 ([Tuy23], 91., p. 32). Cho biểu thức $A = \sum_{i=1}^{199} \frac{1}{\sqrt{i(200-i)}} = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 199}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 198}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{199 \cdot 1}}$. Chứng minh $A > 1.99$.

Bài toán 158 ([Tuy23], 92., p. 32). Cho n số dương a_1, a_2, \dots, a_n . Chứng minh:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right) = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Bài toán 159 ([Tuy23], 93., p. 32). Cho các số thực dương a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $abcd = 1$. Chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + a(b+c) + b(c+d) + c(d+a) + d(a+b) \geq 12$.

Bài toán 160 ([Tuy23], 94., p. 32). Giải phương trình: $\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x^2+x+1}} = \frac{7}{4}$.

Bài toán 161 ([Tuy23], 95., p. 32). Giải phương trình: $\sqrt{x+x^2} + \sqrt{x-x^2} = x+1$.

Bài toán 162 ([Tuy23], 96., p. 32). Cho $A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$ với $0 \leq x \leq 1$. Rút gọn biểu thức $B = 1 - \sqrt{A+x+1}$.

Bài toán 163 ([Tuy23], 97., p. 32). Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$. (a) Rút gọn A . (b) Tính giá trị của A với $x = 14 - 6\sqrt{5}$. (c) Tìm GTNN của A .

Bài toán 164 ([BNS23], Ví dụ 1.1, p. 5). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{(7+4\sqrt{3})(a-1)^2}$.

Bài toán 165 ([BNS23], Ví dụ 1.2, p. 6). Cho biểu thức $A = \sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$. (a) Tìm điều kiện xác định của A . (b) Rút gọn biểu thức A với $1 \leq a < 2$. (c) Rút gọn biểu thức A với $a \geq 2$.

Bài toán 166 ([BNS23], Ví dụ 1.3, p. 6). Đơn giản biểu thức $A = (\sqrt{8+2\sqrt{7}} + 2\sqrt{8-2\sqrt{7}})(\sqrt{63}+1)$.

Bài toán 167 ([BNS23], Ví dụ 1.4, p. 6). Tính tổng $A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$.

Bài toán 168 ([BNS23], Ví dụ 1.5, p. 6). Tính $A = \frac{\sqrt{7-2\sqrt{10}}(7+2\sqrt{10})(74-22\sqrt{10})}{\sqrt{125-4\sqrt{50}+5\sqrt{20}+\sqrt{8}}}$.

Bài toán 169 ([BNS23], Ví dụ 1.6, p. 7). Cho $a = \sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}} + \sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$. Chứng minh: $a^2 - 2a - 2 = 0$.

Bài toán 170 ([BNS23], Ví dụ 1.7, p. 7). Cho $a = \sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$. Tính

$$A = \frac{a^4 - 4a^3 + a^2 + 6a + 4}{a^2 - 2a + 12}.$$

Bài toán 171 ([BNS23], Ví dụ 1.8, p. 7). Cho $f(x) = \frac{1+\sqrt{1+x}}{x+1} + \frac{1+\sqrt{1-x}}{x-1}$ & $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tính $f(a)$.

Bài toán 172 ([BNS23], Ví dụ 1.9, p. 8). Giả thiết $x, y, z > 0$ & $xy + yz + zx = a$. Chứng minh

$$x\sqrt{\frac{(a+y^2)(a+z^2)}{a+x^2}} + y\sqrt{\frac{(a+z^2)(a+x^2)}{a+y^2}} + z\sqrt{\frac{(a+x^2)(a+y^2)}{a+z^2}} = 2a.$$

Bài toán 173 ([BNS23], 1.1, p. 8). Biểu diễn $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ thành $a + b\sqrt{5}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$.

Bài toán 174 ([BNS23], 1.2, p. 8). Đơn giản biểu thức $A = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{18} + \sqrt{28-16\sqrt{3}}$.

Bài toán 175 ([BNS23], 1.3, p. 8). Chứng minh $\sqrt{10+2\sqrt{24}} - \sqrt{10-2\sqrt{24}} = 4$.

Bài toán 176 ([BNS23], 1.4, p. 8). Tính $A = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Bài toán 177 ([BNS23], 1.5, p. 9). Tính tích ab với

$$a = \sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{3+\sqrt{7+\sqrt{2}}}, \quad b = \sqrt{3+\sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{2}}}}\sqrt{3-\sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{2}}}}.$$

Bài toán 178 ([BNS23], 1.6, p. 9). Chứng minh $\frac{4}{\sqrt{5}-1} + \frac{3}{\sqrt{5}-2} + \frac{16}{\sqrt{5}-3} = -5$.

Bài toán 179 ([BNS23], 1.7, p. 9). Chứng minh $\left(\frac{2}{\sqrt{6}-1} + \frac{3}{\sqrt{6}-2} + \frac{3}{\sqrt{6}-3}\right) \frac{5}{9\sqrt{6}+4} = \frac{1}{2}$.

Bài toán 180 ([BNS23], 1.8, p. 9). Cho $f(x) = \frac{x+\sqrt{5}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{5}}} + \frac{x-\sqrt{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{5}}}$. Tính $f(3)$.

Bài toán 181 ([BNS23], 1.9, p. 9). Cho $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ & $a = \frac{4}{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}$. Tính $f(a)$.

Bài toán 182 ([BNS23], Ví dụ 2.1, p. 10). Chứng minh với $ab \neq 0$: $\frac{\sqrt[3]{a^5b^7}}{\sqrt[3]{a^2b}} - \frac{\sqrt[3]{a^4b^8}}{\sqrt[3]{ab^2}} = 0$.

Bài toán 183 ([BNS23], Ví dụ 2.2, p. 10). Chứng minh với $abc \neq 0$: $\frac{\sqrt[3]{a^4b^5c^7}}{\sqrt[3]{ab^2c}} = abc^2$.

Bài toán 184 ([BNS23], Ví dụ 2.3, p. 10). Với $a \geq 2 + \sqrt{2}$ & $u = \sqrt[3]{\left(a + \frac{2}{a}\right)^3 - 3a^2 - \frac{12}{a^2} + 3\left(a + \frac{2}{a}\right) - 13}$, $v = \sqrt{a^2 + \frac{4}{a^2} - 8\left(a + \frac{2}{a}\right) + 20}$.

Chứng minh $u - v = 3$.

Bài toán 185 ([BNS23], Ví dụ 2.4, p. 11). Đơn giản biểu thức $A = \sqrt[3]{8(7+5\sqrt{2})} + \sqrt[3]{216(7-5\sqrt{2})} + 4\sqrt{2} - 7$.

Bài toán 186 ([BNS23], Ví dụ 2.5, p. 11). Chứng minh $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1$.

Bài toán 187 ([BNS23], Ví dụ 2.6, p. 11). Chứng minh nếu $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ thì $a^3 + 3a = 4$.

Bài toán 188 ([BNS23], Ví dụ 2.7, p. 11). Chứng minh:

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}} + 3\sqrt[3]{2}\right)\sqrt{3}}}{3+\sqrt[6]{108}} = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}.$$

Bài toán 189 ([BNS23], Ví dụ 2.8, p. 12). Chứng minh nếu $\sqrt[3]{(a+1)^2} + \sqrt[3]{a^2-1} + \sqrt[3]{(a-1)^2} = 1$ thì $\sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a-1} = 2$.

Bài toán 190 ([BNS23], Ví dụ 2.9, p. 12). Đơn giản biểu thức $A = \frac{x+1}{2\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}+x+\frac{1}{x}}$ với $x \notin \{-1, 0\}$.

Bài toán 191 ([BNS23], Ví dụ 2.10, p. 12). Cho $a = \sqrt{2} + \sqrt{7 - \sqrt[3]{61+46\sqrt{5}}} + 1$. (a) Chứng minh $a^4 - 14a^2 + 9 = 0$. (b) Giả sử $f(x) = x^5 + 2x^4 - 14x^3 - 28x^2 + 9x + 19$. Tính $f(a)$.

Bài toán 192 ([BNS23], Ví dụ 2.11, p. 13). Cho $a, b, c > 0$. Giả sử m, n, p là những số nguyên dương lớn hơn 1 sao cho $bc = \sqrt[p]{a}$, $ca = \sqrt[b]{b}$, & $ab = \sqrt[c]{c}$. Chứng minh trong 3 số a, b, c phải có ít nhất 1 số bằng 1.

Bài toán 193 ([BNS23], Ví dụ 2.12, p. 13). Cho $a = \frac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}$. (a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận số a làm nghiệm. (b) Giả sử đa thức $f(x) = 3x^6 - 4x^5 - 7x^4 + 6x^3 + 6x^2 + x - 53\sqrt{2}$. Tính $f(a)$.

Bài toán 194 ([BNS23], Ví dụ 2.13, p. 14). Cho $a = \frac{7-4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}} - \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$. (a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận số a làm nghiệm. (b) Giả sử đa thức $f(x) = \frac{x^6+x^4+4x^2}{40(x^4+4x^2-144)}$. Tính $f(a)$.

Bài toán 195 ([BNS23], Ví dụ 2.14, p. 14). Cho $a = \sqrt[3]{38+17\sqrt{5}} + \sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}$. Giả sử ta có đa thức $f(x) = (x^3+3x+1935)^{2012}$. Tính $f(a)$.

Bài toán 196 ([BNS23], 2.1., p. 14). Biểu diễn $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ thành $a+b\sqrt{5}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$.

Bài toán 197 ([BNS23], 2.2., p. 14). Cho $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} + \sqrt[3]{1-\sqrt{11}}$. Chứng minh $a^9 - 6a^6 + 28a^3 = 8$.

Bài toán 198 ([BNS23], 2.3., p. 15). Cho $a = (\sqrt[3]{1+2\sqrt{6}} - \sqrt[6]{5+4\sqrt{6}})\sqrt[3]{2\sqrt{6}-1} + 1$. (a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận a làm nghiệm. (b) Giả sử $f(x) = \sum_{i=1}^{2012} ix^i + 2012$. Tính $f(a)$.

Bài toán 199 ([BNS23], 2.4., p. 15). *Chứng minh:*

$$\frac{a + 2\sqrt{ab} + 9b}{\sqrt{a} + 3\sqrt{b} - 2\sqrt[4]{ab}} - 2\sqrt{b} = \left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right)^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0.$$

Bài toán 200 ([BNS23], 2.5., p. 15). *Chứng minh:*

$$\left(\sqrt[3]{a^4} + b^2\sqrt[3]{a^2} + b^4\right) \frac{\sqrt[3]{a^8} - b^6 + b^4\sqrt[3]{a^2} - a^2b^2}{a^2b^2 + b^2 - a^2b^8 - b^4} = a^2b^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, ab \neq 0, a \neq b^3.$$

Bài toán 201 ([BNS23], 2.6., p. 15). *Cho $a, b > 0$. Đơn giản biểu thức*

$$A = \frac{\sqrt{a^3 + 2a^2b} + \sqrt{a^4 + 2a^3b} - \sqrt{a^3} - a^2b}{\sqrt{(2a + b - \sqrt{a^2 + 2ab}) \left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[6]{a^5} + a\right)}}.$$

Bài toán 202 ([BNS23], 2.7., p. 15). *Giả sử $u^3 \geq v^2$, $u, v \in \mathbb{Q}^+$. Xác định u, v để*

$$\sqrt{\frac{u - 8\sqrt[6]{u^3v^2} + 4\sqrt[3]{v^2}}{\sqrt{u} - 2\sqrt[3]{v} + 2\sqrt[12]{u^3v^2}}} + 3\sqrt[3]{v} + \sqrt[6]{v} = 1.$$

Bài toán 203. *Cho $a, b, c, A, B \in \mathbb{Z}$, $c \geq 0$ thỏa mãn đẳng thức $(a + b\sqrt{c})^2 = A + B\sqrt{c}$. (a) Tìm mối quan hệ của a, b, c, A, B . Biểu diễn (A, B) theo (a, b, c) . (b)* Biểu diễn (a, b) theo (c, A, B) .*

Bài toán 204. *Cho $a, b, c, A, B \in \mathbb{Z}$, $c \geq 0$ thỏa mãn đẳng thức $(a + b\sqrt{c})^3 = A + B\sqrt{c}$. (a) Tìm mối quan hệ của a, b, c, A, B . Biểu diễn (A, B) theo (a, b, c) . (b)* Biểu diễn (a, b) theo (c, A, B) .*

Bài toán 205. *Cho $a, b, c, A, B \in \mathbb{Z}$, $c \geq 0$ thỏa mãn đẳng thức $(a + b\sqrt[3]{c})^3 = A + B\sqrt[3]{c} + C\sqrt[3]{c^2}$. (a) Tìm mối quan hệ của a, b, c, A, B, C . Biểu diễn (A, B, C) theo (a, b, c) . (b)* Biểu diễn (a, b) theo (c, A, B, C) .*

Tài liệu

- [Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.
- [BNS23] Vũ Hữu Bình, Phạm Thị Bạch Ngọc, and Nguyễn Tam Sơn. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 9. Tập 1: Đại Số*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 192.
- [Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.