

Some Topics in Elementary Mathematics/Grade 7

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 21 tháng 11 năm 2022

Tóm tắt nội dung

1 bộ sưu tập các bài toán chọn lọc từ cơ bản đến nâng cao cho Toán sơ cấp lớp 7. Tài liệu này là phần bài tập bổ sung cho tài liệu chính [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 7/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_7/lecture)¹ của tác giả viết cho Toán lớp 7. Phiên bản mới nhất của tài liệu này được lưu trữ ở link sau: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 7/problem](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_7/problem)².

Mục lục

1	Số Hữu Tỷ	2
1.1	Tập Hợp Các Số Hữu Tỷ \mathbb{Q}	2
1.2	\pm trên \mathbb{Q}	2
1.3	$\cdot, :$ trên \mathbb{Q}	2
1.4	Lũy thừa của 1 số hữu tỷ	3
1.5	Tỷ Lệ Thức	5
1.6	Tính Chất của Dây Tỷ Số Bằng Nhau	5
1.7	Chia Tỷ Lệ	6
1.8	Số Thập Phân Hữu Hạn. Số Thập Phân Vô Hạn Tuần Hoàn	7
1.8.1	Viết phân số dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn	7
1.8.2	Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn dưới dạng phân số	7
1.8.3	Điều kiện để phân số viết dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn hay tạp	8
2	Số Thực	8
2.1	Số Vô Tỷ. Căn Bậc 2. Số Thực	8
2.2	Giá Trị Tuyệt Đối của 1 Biểu Thức	9
2.2.1	Tính giá trị của 1 biểu thức	9
2.2.2	Rút gọn biểu thức chứa dấu giá trị tuyệt đối	9
2.2.3	Tìm giá trị của biến trong đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối	9
2.2.4	Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức chứa dấu giá trị tuyệt đối	9
3	Hình Học Trực Quan	10
4	Góc. Đường Thẳng Vuông Góc. Đường Thẳng Song Song	10
4.1	2 Góc Đối Đỉnh	10
4.2	2 Đường Thẳng Vuông Góc	10
4.3	Dấu Hiệu Nhận Biết 2 Đường Thẳng Song Song	11
4.4	Tiên Đề Euclid. Tính Chất 2 Đường Thẳng Song Song	11
5	1 Số Yếu Tố Thống Kê & Xác Suất	11
6	Biểu Thức Đại Số	11
7	Tam Giác	11
	Tài liệu	11

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam

e-mail: nguyenquanhong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

¹URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_7/NQBH_elementary_mathematics_grade_7.pdf.

²URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_7/problem/NQBH_elementary_mathematics_grade_7_problem.pdf.

1 Số Hữu Tỷ

1.1 Tập Hợp Các Số Hữu Tỷ \mathbb{Q}

Với phân số $\frac{a}{b}$ tối giản, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $\text{UCLN}(a, b) = 1$ thì các phân số có dạng $\frac{na}{nb}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, đều biểu diễn phân số $\frac{a}{b}$. Để so sánh 2 hay nhiều số hữu tỷ, chuyển chúng về cùng 1 trong 2 dạng: dạng phân số hoặc dạng biểu diễn thập phân, rồi so sánh chúng dựa vào các quy tắc đã học ở Toán 7.

Bài toán 1.1 (Trọng et al., 2022, 10., p. 6). So sánh 2 số hữu tỷ $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$) với số 0 khi a, b cùng dấu & khi a, b khác dấu.

Giải. $a = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = 0$, $ab > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} > 0$, & $ab < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} < 0$. □

Bài toán 1.2 (Trọng et al., 2022, 11., p. 6). Giả sử $x = \frac{a}{m}$, $y = \frac{b}{m}$, ($a, b, m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$) & $x < y$. Chứng minh $x < z < y$ với $z := \frac{a+b}{2m}$ (z là trung bình cộng của x & y , i.e., $z = \frac{x+y}{2}$).

Chứng minh. $x < y \Rightarrow x + x < x + y < y + y \Rightarrow x < \frac{x+y}{2} < y$, mà $\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m} \right) = \frac{a+b}{2m} = z$, nên $x < z < y$. □

1.2 \pm trên \mathbb{Q}

Tính tổng các phân số cùng mẫu số:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{b}, \text{ i.e., } \frac{a_1}{b} + \dots + \frac{a_n}{b} = \frac{a_1 + \dots + a_n}{b}, \forall a_i, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

Tính tổng các phân số khác mẫu số: Quy đồng mẫu số các phân số đó với mẫu số chung là BCNN của các mẫu số các phân số đó rồi cộng lại:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \frac{\text{BCNN}(b_1, \dots, b_n)}{b_i}}{\text{BCNN}(b_1, \dots, b_n)}, \text{ i.e., } \frac{a_1}{b_1} + \dots + \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 \frac{\text{BCNN}(b_1, \dots, b_n)}{b_1} + \dots + a_n \frac{\text{BCNN}(b_1, \dots, b_n)}{b_n}}{\text{BCNN}(b_1, \dots, b_n)},$$

$\forall a_i, b_i \in \mathbb{Z}, b_i \neq 0, \forall i = 1, \dots, n.$

Bài toán 1.3 (Bình, 2022, §1, 2.). Tìm 2 phân số có tử bằng 9, biết rằng giá trị của mỗi phân số đó lớn hơn $\frac{-11}{13}$ & nhỏ hơn $\frac{-11}{15}$.

Bài toán 1.4 (Bình, 2022, §1, 3.). Cho các số hữu tỷ $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ với mẫu dương, trong đó $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Chứng minh: (a) $ab < bc$; (b) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Bài toán 1.5 (Bình, 2022, §1, 4.). Ký hiệu $\lfloor x \rfloor$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x , được gọi là phần nguyên của x , e.g., $\lfloor 1.5 \rfloor = 1$, $\lfloor 5 \rfloor = 5$, $\lfloor -2.5 \rfloor = -3$. (a) Tính $\lfloor -\frac{1}{7} \rfloor$, $\lfloor 3.7 \rfloor$, $\lfloor -4 \rfloor$, $\lfloor -\frac{43}{10} \rfloor$. (b) Cho $x = 3.7$. So sánh: $A = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{5} \rfloor + \lfloor x + \frac{2}{5} \rfloor + \lfloor x + \frac{3}{5} \rfloor + \lfloor x + \frac{4}{5} \rfloor$ & $B = \lfloor 5x \rfloor$. (c) Tính $\lfloor \frac{100}{3} \rfloor + \lfloor \frac{100}{32} \rfloor + \lfloor \frac{100}{33} \rfloor + \lfloor \frac{100}{34} \rfloor$. (d) Tính $\lfloor \frac{50}{2} \rfloor + \lfloor \frac{50}{22} \rfloor + \lfloor \frac{50}{23} \rfloor + \lfloor \frac{50}{24} \rfloor + \lfloor \frac{50}{25} \rfloor$. (e) Cho $x \in \mathbb{Q}$. So sánh $\lfloor x \rfloor$ với x , so sánh $\lfloor x \rfloor$ với y trong đó $y \in \mathbb{Z}$, $y < x$.

1.3 $\cdot, :$ trên \mathbb{Q}

“*Phép nhân 2 hay nhiều số hữu tỷ*: • Xác định dấu bằng cách đếm các thừa số âm, nếu chẵn thì kết quả dương, nếu lẻ thì kết quả âm. • Nhân phần số tự nhiên của tử với tử, mẫu với mẫu rồi rút gọn.

Phép chia 2 số hữu tỷ: Ta lấy số hữu tỷ bị chia nhân với nghịch đảo số hữu tỷ chia rồi làm như phép nhân. Thương của phép chia $x \in \mathbb{Q}$ cho số hữu tỷ $y \in \mathbb{Q}^*$ gọi là *tỷ số* của 2 số x & y , ký hiệu là $\frac{x}{y}$ hay $x : y$.” – Trọng et al., 2022, §3, p. 10

Bài toán 1.6 (Trọng et al., 2022, 3., p. 13). Cho số hữu tỷ $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$. Chứng minh: (a) $\frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow a > b$; (b) $\frac{a}{b} < 1 \Leftrightarrow a < b$; (c) $((a < b) \wedge (a, c > 0)) \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$; (d) $((a > b) \wedge (c > 0)) \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$.

Bài toán 1.7 (Bình, 2022, §1, Ví dụ 1). Cho phân số $\frac{a}{b} \neq 1$. Tìm phân số $\frac{c}{d}$ sao cho $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$.

Bài toán 1.8 (Bình, 2022, §1, 5.). Thực hiện các phép tính: (a) $\frac{-2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{-1}{6} + \frac{-2}{5}$; (b) $\frac{-2}{3} + \frac{-1}{5} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6} - \frac{7}{10}$; (c) $\frac{1}{2} - \frac{-2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{5}{7} - \frac{-1}{6} + \frac{-4}{35} + \frac{41}{11}$; (d) $\frac{1}{100 \cdot 99} - \frac{1}{99 \cdot 98} - \frac{1}{98 \cdot 97} - \dots - \frac{1}{3 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 1}$.

Bài toán 1.9 (Bình, 2022, §1, 6.). Cho các số hữu tỷ x bằng 1.4089, 0.1398, -0.4771, -1.2592. (a) Viết các số đó dưới dạng tổng của 1 số nguyên a & 1 số thập phân b không âm nhỏ hơn 1.³ (b) Tính tổng các số hữu tỷ trên bằng cách 2 cách: tính thông thường, tính tổng các số được viết dưới dạng ở câu (a). (c) So sánh a & $\lfloor x \rfloor$ trong từng trường hợp ở câu (a).

³Trong cách viết này, a là phần nguyên của x , còn b là phần lẻ của x . Ký hiệu phần lẻ của x là $\{x\}$ thì $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$.

Bài toán 1.10 (Bình, 2022, §1, 7.). Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để phân số sau có giá trị là 1 số nguyên & tính giá trị đó: (a) $A = \frac{3n+9}{n-4}$; (b) $B = \frac{6n+5}{2n-1}$.

Bài toán 1.11 (Bình, 2022, §1, 8.). Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$, biết: $\frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8}$.

Bài toán 1.12 (Bình, 2022, §1, 9.). Viết tất cả các số nguyên có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 20 theo thứ tự tùy ý. Lấy mỗi số trừ đi số thứ tự của nó ta được 1 hiệu. Tổng của tất cả các hiệu đó bằng bao nhiêu?

Bài toán 1.13 (Bình, 2022, §1, 10.). Tính: (a) $\frac{(\frac{3}{10} - \frac{4}{15} - \frac{7}{20}) \cdot \frac{5}{3}}{(\frac{1}{14} + \frac{1}{7} - \frac{-3}{35}) \cdot \frac{-4}{3}}$; (b) $\frac{(1+2+\dots+100)(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9}) \cdot (6.3 \cdot 12 - 21 \cdot 3.6)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}}$; (c) $\frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11}}{\frac{4}{9} - \frac{4}{7} - \frac{4}{11}} + \frac{\frac{3}{5} - \frac{3}{25} - \frac{3}{125} - \frac{3}{625}}{\frac{4}{5} - \frac{4}{25} - \frac{4}{125} - \frac{4}{625}}$.

Bài toán 1.14 (Bình, 2022, §1, 11.). Tìm $x \in \mathbb{Q}$, biết: (a) $\frac{2}{3}x + 4 = -12$; (b) $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} : x = -3$; (c) $|3x - 5| = 4$; (d) $\frac{x+1}{10} + \frac{x+1}{11} + \frac{x+1}{12} = \frac{x+1}{13} + \frac{x+1}{14}$; (e) $\frac{x+4}{2000} + \frac{x+3}{2001} = \frac{x+2}{2002} + \frac{x+1}{2003}$.

Bài toán 1.15 (Bình, 2022, §1, 12.). Chứng minh $\sum_{i=1}^{99} \frac{i}{(i+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{99}{100!} < 1$.

Bài toán 1.16 (Bình, 2022, §1, 13.). Chứng minh $\sum_{i=1}^{99} \frac{i(i+1)-1}{(i+1)!} = \frac{1 \cdot 2 - 1}{2!} + \frac{2 \cdot 3 - 1}{3!} + \frac{3 \cdot 4 - 1}{4!} + \dots + \frac{99 \cdot 100 - 1}{100!} < 2$.

Bài toán 1.17 (Bình, 2022, §1, 14.). (a) Người ta viết 7 số hữu tỷ trên 1 vòng tròn. Tìm các số đó, biết rằng tích của 2 số bất kỳ cạnh nhau bằng 16. (b) Cũng hỏi như trên đối với n số.

Bài toán 1.18 (Bình, 2022, §1, 15.). Có tồn tại hay không 2 số dương a, b khác nhau sao cho $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a-b}$?

Bài toán 1.19 (Bình, 2022, §1, 16.). Chứng minh: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{49 \cdot 50} = \frac{1}{26} + \frac{1}{27} + \frac{1}{28} + \dots + \frac{1}{50}$.

Bài toán 1.20 (Bình, 2022, §1, 17.). Cho $A = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$. Chứng minh $\frac{7}{12} < A < \frac{5}{6}$.

Bài toán 1.21 (Bình, 2022, §1, 18.). Tìm $a, b \in \mathbb{Q}$ sao cho: $a - b = 2(a + b) = a : b$.

Bài toán 1.22 (Bình, 2022, §1, 19.). Tìm $a, b \in \mathbb{Q}$ sao cho $a + b = ab = a : b$.

Bài toán 1.23 (Bình, 2022, §1, 20.). Tìm $x \in \mathbb{Q}$, sao cho tổng của số đó với số nghịch đảo của nó là 1 số nguyên.

1.4 Lũy thừa của 1 số hữu tỷ

Bài toán 1.24 (Bình, 2022, §3, Ví dụ 2). Cho $x \in \mathbb{Q}$. Khi nào thì: (a) $x^2 = x$; (b) $x^2 > x$; (c) $x^2 < x$.

Bài toán 1.25 (Bình, 2022, §3, Ví dụ 3). Tìm $a, b, c \in \mathbb{Q}$ biết $ab = 2$, $bc = 3$, $ca = 54$.

Bài toán 1.26 (Bình, 2022, §3, Ví dụ 4). Rút gọn $A = \sum_{i=0}^{50} 5^i = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{50}$.

Bài toán 1.27 (Bình, 2022, §3, Ví dụ 5). Cho $B = \sum_{i=1}^{99} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{99}$. Chứng minh $B < 1$.

Bài toán 1.28 (Bình, 2022, §3, 21.). Chứng minh: (a) $7^6 + 7^5 - 7^4 \vdots 55$; (b) $16^5 + 2^{15} \vdots 33$; (c) $81^7 - 27^9 - 9^{13} \vdots 405$.

Bài toán 1.29 (Bình, 2022, §3, 22.). Điền vào chỗ trống ... các từ “bằng nhau” hoặc “đổi nhau” cho đúng: (a) Nếu 2 số đối nhau thì bình phương của chúng ... (b) Nếu 2 số đối nhau thì lập phương của chúng ... (c) Lũy thừa chẵn cùng bậc của 2 số đối nhau thì ... (d) Lũy thừa lẻ cùng bậc của 2 số đối nhau thì ...

Bài toán 1.30 (Bình, 2022, §3, 23. & mở rộng). Các đẳng thức sau có đúng với mọi $a, b \in \mathbb{Q}$ hay không? (a) $-a^3 = (-a)^3$; (b) $-a^5 = (-a)^5$; (c) $-a^2 = (-a)^2$; (d) $-a^4 = (-a)^4$; (e) $-a^{2n+1} = (-a)^{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$; (f) $a^{2n} = (-a)^{2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$; (g) $(a-b)^2 = (b-a)^2$; (h) $(a-b)^3 = -(b-a)^3$; (i) $(a-b)^{2n} = (b-a)^{2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$; (j) $(a-b)^{2n+1} = -(b-a)^{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Bài toán 1.31 (Bình, 2022, §3, 24.). Tính: (a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{15} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{20}$; (b) $\left(\frac{1}{9}\right)^{25} : \left(\frac{1}{3}\right)^{30}$; (c) $\left(\frac{1}{16}\right)^3 : \left(\frac{1}{8}\right)^2$; (d) $(x^3)^2 : (x^2)^3$ với $x \neq 0$.

Bài toán 1.32 (Bình, 2022, §3, 25.). Viết số 64 dưới dạng a^n với $a \in \mathbb{Z}$. Có bao nhiêu cách viết?

Bài toán 1.33 (Bình, 2022, §3, 26.). Rút gọn biểu thức: $A = \frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 2^0}$.

Bài toán 1.34 (Bình, 2022, §3, 27.). Cho $S_n = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} i = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (-1)^{n-1} n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tính $S_{35} + S_{60}$.

Bài toán 1.35 (Bình, 2022, §3, 28.). Cho $A = 1 - 5 + 9 - 13 + 17 - 21 + 25 - \dots$ (n số hạng, giá trị tuyệt đối của số sau lớn hơn giá trị tuyệt đối của số hạng trước 4 đơn vị, các dấu $+$ & $-$ xen kẽ). (a) Tính A theo n . (b) Viết số hạng thứ n của biểu thức A theo n (chú ý dùng lũy thừa để biểu thị dấu của số hạng đó).

Bài toán 1.36 (Bình, 2022, §3, 29.). Với giá trị nào của các chữ thì các biểu thức sau có giá trị là số 0, số dương, số âm? (a) $P = \frac{a^2b}{c}$; (b) $Q = \frac{x^3}{yz}$.

Bài toán 1.37 (Bình, 2022, §3, 30.). Cho 2 số hữu tỷ a & b trái dấu trong đó $|a| = b^5$. Xác định dấu của mỗi số.

Bài toán 1.38 (Bình, 2022, §3, 31.). Viết các số sau dưới dạng lũy thừa của 2: 16, 64, 1, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{8}$, 0.5, 0.25.

Bài toán 1.39 (Bình, 2022, §3, 32.). (a) Viết các số sau thành lũy thừa với số mũ âm: $\frac{1}{1000000}$, 0.00000002. (b) Viết các số sau dưới dạng số thập phân: 10^{-7} , $2.5 \cdot 10^{-6}$.

Bài toán 1.40 (Bình, 2022, §3, 33.). Tính xem A gấp mấy lần B : (a) $A = 3.4 \cdot 10^{-8}$, $B = 34 \cdot 10^{-9}$; (b) $A = 10^{-4} + 10^{-3} + 10^{-2}$, $B = 10^{-9}$.

Bài toán 1.41 (Bình, 2022, §3, 34.). So sánh: (a) $(-\frac{1}{16})^{100}$ & $(-\frac{1}{2})^{500}$; (b) $(-32)^9$ & $(-18)^{13}$.

Bài toán 1.42 (Bình, 2022, §3, 35.). Sắp xếp $a, b, c \in \mathbb{Q}$ theo thứ tự từ nhỏ đến lớn: $a = 2^{100}$, $b = 3^{75}$, $c = 5^{50}$.

Bài toán 1.43 (Bình, 2022, §3, 36.). Trong các câu sau, câu nào đúng với mọi $a \in \mathbb{Q}$? (a) Nếu $a < 0$ thì $a^2 > 0$; (b) Nếu $a^2 > 0$ thì $a > 0$; (c) Nếu $a < 0$ thì $a^2 > a$; (d) Nếu $a^2 > a$ thì $a > 0$; (e) Nếu $a^2 > a$ thì $a < 0$.

Bài toán 1.44 (Bình, 2022, §3, 37.). (a) Cho $a^m = a^n$ ($a \in \mathbb{Q}$, $m, n \in \mathbb{N}$). Tìm m, n . (b) Cho $a^m > a^n$ ($a \in \mathbb{Q}$, $a > 0$, $m, n \in \mathbb{N}$). So sánh m & n .

Bài toán 1.45 (Bình, 2022, §3, 38.). Tìm $x \in \mathbb{Q}$, biết rằng: (a) $(2x-1)^4 = 81$; (b) $(x-1)^5 = -32$; (c) $(2x-1)^6 = (2x-1)^8$.

Bài toán 1.46 (Bình, 2022, §3, 39.). Tìm $x \in \mathbb{N}$, biết rằng: (a) $5^x + 5^{x+2} = 650$; (b) $3^{x-1} + 5 \cdot 3^{x-1} = 162$.

Bài toán 1.47 (Bình, 2022, §3, 40.). Tìm $x, y \in \mathbb{N}$, biết rằng: (a) $2^{x+1} \cdot 3^y = 12^x$; (b) $10^x : 5^y = 20^y$; (c) $2^x = 4^{y-1}$ & $27^y = 3^{x+8}$.

Bài toán 1.48 (Bình, 2022, §3, 41.). Tìm $a, b, c \in \mathbb{Q}$, biết rằng: (a) $ab = \frac{3}{5}$, $bc = \frac{4}{5}$, $ca = \frac{3}{4}$. (b) $a(a+b+c) = -12$, $b(a+b+c) = 18$, $c(a+b+c) = 30$; (c) $ab = c$, $bc = 4a$, $ac = 9b$.

Bài toán 1.49 (Bình, 2022, §3, 42.). Cho $a, b, c, d, e \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $a^b = b^c = c^d = d^e = e^a$. Chứng minh $a = b = c = d = e$.

Bài toán 1.50 (Bình, 2022, §3, 43.). Cho $A = \prod_{i=2}^{100} (\frac{1}{i^2} - 1) = (\frac{1}{2^2} - 1) (\frac{1}{3^2} - 1) (\frac{1}{4^2} - 1) \dots (\frac{1}{100^2} - 1)$. So sánh A với $-\frac{1}{2}$.

Bài toán 1.51 (Bình, 2022, §3, 44.). Rút gọn $A = \sum_{i=1}^{100} (-1)^i 2^i = 2^{100} - 2^{99} + 2^{98} - 2^{97} + \dots + 2^2 - 2$.

Bài toán 1.52 (Bình, 2022, §3, 45.). Rút gọn $B = \sum_{i=1}^{100} (-1)^i 3^i = 3^{100} - 3^{99} + 3^{98} - 3^{97} + \dots + 3^2 - 3 + 1$.

Bài toán 1.53 (Bình, 2022, §3, 46.). Cho $C = \sum_{i=1}^{99} \frac{1}{3^i} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{99}}$. Chứng minh $C < \frac{1}{2}$.

Bài toán 1.54 (Bình, 2022, §3, 47.). Chứng minh $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2} < 1$.

Bài toán 1.55 (Bình, 2022, §3, 48.). Chứng minh $\sum_{i=1}^{100} \frac{i}{3^i} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4}$.

Bài toán 1.56 (Bình, 2022, §3, 49.). Ta không có $2^m + 2^n = 2^{m+n}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$. Nhưng có những số nguyên dương m, n có tính chất trên. Tìm các số đó.

Bài toán 1.57 (Bình, 2022, §3, 50.). Tìm $m, n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $2^m - 2^n = 256$.

Bài toán 1.58 (Bình, 2022, §3, 51.). Cho 1 bảng vuông 3×3 ô. Trong mỗi ô của bảng viết số 1 hoặc số -1 . Gọi d_i là tích các số trên dòng i ($i = 1, 2, 3$), c_k là tích các số trên cột k ($k = 1, 2, 3$). (a) Chứng minh rằng không thể xảy ra $d_1 + d_2 + d_3 + c_1 + c_2 + c_3 = 0$. (b) Xét bài toán trên đối với bảng vuông $n \times n$.

Bài toán 1.59 (Bình, 2022, §3, 52.). Cho n số x_1, \dots, x_n , mỗi số bằng 1 hoặc -1 . Biết rằng tổng của n tích $x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, \dots, x_nx_1$ bằng 0. Chứng minh $n \vdots 4$.

1.5 Tỷ Lệ Thức

“Tỷ lệ thức là 1 đẳng thức của 2 tỷ lệ. Trong tỷ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (hoặc $a : b = c : d$) các số hạng a & d được gọi là *ngoại tỷ*, các số hạng b & c được gọi là *trung tỷ*. Khi viết tỷ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ta luôn giả thiết $b \neq 0, d \neq 0$. Từ tỷ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ta suy ra $ad = bc$. Đảo lại, nếu $ad = bc$ (cả 4 số a, b, c, d khác 0⁴) thì ta có các tỷ lệ thức: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \frac{d}{a} = \frac{c}{b}, \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$. Như vậy trong tỷ lệ thức, ta có thể hoán vị các ngoại tỷ với nhau, hoán vị các trung tỷ với nhau, hoán vị cả ngoại tỷ với nhau & trung tỷ với nhau. Từ đẳng thức $ad = bc$, ta lập được 4 tỷ lệ thức với các số hạng là a, b, c, d (với quy ước 2 tỷ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ & $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ chỉ kể là 1 tỷ lệ thức).” – Bình, 2022, §4

Bài toán 1.60 (Bình, 2022, §4, Ví dụ 6). Cho 3 số 6, 8, 24. (a) Tìm số x , sao cho x cùng với 3 số trên lập thành 1 tỷ lệ thức. (b) Có thể lập được tất cả bao nhiêu tỷ lệ thức?

Bài toán 1.61 (Bình, 2022, §4, Ví dụ 7). Cho tỷ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh: $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$ (giả thiết $a \neq b, c \neq d$ & mỗi số $a, b, c, d \neq 0$).

Bài toán 1.62 (Bình, 2022, Ví dụ 8, §4). Cho tỷ lệ thức $\frac{x}{2} = \frac{y}{5}$. Biết $xy = 90$. Tính x & y .

Bài toán 1.63 (Bình, 2022, §4, 53.). Tìm $x \in \mathbb{Q}$ trong tỷ lệ thức: (a) $0.4 : x = x : 0.9$. (b) $13\frac{1}{3} : 1\frac{1}{3} = 26 : (2x - 1)$. (c) $0.2 : 1\frac{1}{5} = \frac{2}{3} : (6x + 7)$. (d) $\frac{37-x}{x+13} = \frac{3}{7}$.

Bài toán 1.64 (Bình, 2022, §4, 54.). Cho tỷ lệ thức $\frac{3x-y}{x+y} = \frac{3}{4}$. Tìm giá trị của tỷ số $\frac{x}{y}$.

Bài toán 1.65 (Bình, 2022, §4, 55.). Cho tỷ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh các tỷ lệ thức sau (giả thiết các tỷ lệ thức đều có nghĩa): (a) $\frac{2a+3b}{2a-3b} = \frac{2c+3d}{2c-3d}$. (b) $\frac{ab}{cd} = \frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}$. (c) $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$.

Bài toán 1.66 (Bình, 2022, §4, 56.). Chứng minh: ta có tỷ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ nếu có 1 trong các đẳng thức sau (giả thiết các tỷ lệ thức đều có nghĩa): (a) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$. (b) $(a+b+c+d)(a-b-c+d) = (a-b+c-d)(a+b-c-d)$.

Bài toán 1.67 (Bình, 2022, §4, 57.). Cho tỷ lệ thức $\frac{a+b+c}{a+b-c} = \frac{a-b+c}{a-b-c}$ trong đó $b \neq 0$. Chứng minh $c = 0$.

Bài toán 1.68 (Bình, 2022, §4, 58.). Cho tỷ lệ thức $\frac{a+b}{b+c} = \frac{c+d}{d+a}$. Chứng minh: $a = c$ hoặc $a+b+c+d = 0$.

Bài toán 1.69 (Bình, 2022, §4, 59.). Có thể lập được 1 tỷ lệ thức từ 4 trong các số sau không (mỗi số chỉ chọn 1 lần)? Nếu có thì lập được bao nhiêu tỷ lệ thức? (a) 3, 4, 5, 6, 7. (b) 1, 2, 4, 8, 16. (c) 1, 3, 9, 27, 81, 243.

Bài toán 1.70 (Bình, 2022, §4, 60.). Cho 4 số 2, 4, 8, 16. Tìm $x \in \mathbb{Q}$ cùng với 3 trong 4 số trên lập được thành 1 tỷ lệ thức.

1.6 Tính Chất của Dây Tỷ Số Bằng Nhau

“Nếu có n tỷ số bằng nhau ($n \geq 2$): $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ thì $\frac{a_1}{b_1} = \frac{\sum_{i=1}^n c_i a_i}{\sum_{i=1}^n c_i b_i} = \frac{c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_n a_n}{c_1 b_1 + c_2 b_2 + \dots + c_n b_n}$ (nếu đặt dấu “-” trước số hạng trên của tỷ số nào thì cũng đặt dấu “-” trước số hạng dưới của tỷ số đó). Ta gọi tính chất này là *tính chất dây tỷ số bằng nhau*. Tính chất dây tỷ số bằng nhau cho ta 1 khả năng rộng rãi để từ 1 số tỷ số bằng nhau cho trước, ta lập được những tỷ số mới bằng các tỷ số đã cho, trong đó số hạng trên hoặc số hạng dưới của nó có dạng thuận lợi nhằm sử dụng các dữ kiện của bài toán.” – Bình, 2022, §5

Bài toán 1.71 (Bình, 2022, §5, Ví dụ 9). Tìm các số x, y, z biết $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}, \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$ & $2x + 3y - z = 186$.

Bài toán 1.72 (Bình, 2022, §5, Ví dụ 10). Tìm các số x, y, z biết $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$.

Bài toán 1.73 (Bình, 2022, §5, 61.). Tìm các số x, y, z biết: (a) $\frac{x}{10} = \frac{y}{10} = \frac{z}{21}$ & $5x + y - 2z = 28$. (b) $3x = 2y, 7y = 5z, x - y + z = 32$. (c) $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}, \frac{y}{5} = \frac{z}{5}, 2x - 3y + z = 6$. (d) $\frac{2x}{3} = \frac{3y}{4} = \frac{4z}{5}$ & $x + y + z = 49$. (e) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ & $2x + 3y - z = 50$. (g) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ & $xyz = 810$.

Bài toán 1.74 (Bình, 2022, §5, 62.). Tìm x biết $\frac{1+2y}{18} = \frac{1+4y}{24} = \frac{1+6y}{6x}$.

Bài toán 1.75 (Bình, 2022, §5, 63.). Tìm phân số $\frac{a}{b}$ biết nếu cộng thêm cùng 1 số khác 0 vào tử & mẫu thì giá trị của phân số đó không đổi.

Bài toán 1.76 (Bình, 2022, §5, 64.). Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$. Chứng minh $\left(\frac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3 = \frac{a}{d}$.

Bài toán 1.77 (Bình, 2022, §5, 65.). Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$. Chứng minh $a = b = c$.

Bài toán 1.78 (Bình, 2022, §5, 66.). Vì sao tỷ số của 2 hỗn số dạng $a\frac{1}{b}$ & $b\frac{1}{a}$ luôn luôn bằng phân số $\frac{a}{b}$?

Bài toán 1.79 (Bình, 2022, §5, 67.). Cho 3 tỷ số bằng nhau là $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$. Tìm giá trị của mỗi tỷ số đó.

⁴I.e., $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$.

1.7 Chia Tỷ Lệ

“Trong các bài toán về chia 1 số thành các phần tỷ lệ thuận hoặc tỷ lệ nghịch với các số cho trước, cần chú ý: **1.** x, y, z tỷ lệ thuận với $a, b, c \Leftrightarrow x : y : z = a : b : c \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. **2.** x, y, z tỷ lệ nghịch với $m, n, p \Leftrightarrow x : y : z = \frac{1}{m} : \frac{1}{n} : \frac{1}{p}$.” – Bình, 2022

Bài toán 1.80 (Bình, 2022, Ví dụ 16). 2 xe ô tô cùng khởi hành 1 lúc từ 2 địa điểm A & B. Xe thứ nhất đi quãng đường AB hết 4h15ph, xe thứ 2 đi quãng đường BA hết 3h45ph. Đến chỗ gặp nhau, xe thứ 2 đi được quãng đường dài hơn quãng đường xe thứ nhất đã đi là 20km. Tính quãng đường AB.

Bài toán 1.81 (Bình, 2022, Ví dụ 17). Để đi từ A đến B có thể dùng các phương tiện: máy bay, ô tô, xe lửa. Vận tốc của máy bay, ô tô, xe lửa có tỷ lệ với 6; 2; 1. Biết thời gian đi từ A đến B bằng máy bay ít hơn so với đi bằng ô tô là 6 giờ. Hỏi thời gian xe lửa đi quãng đường AB là bao lâu?

Bài toán 1.82 (Bình, 2022, Ví dụ 18). 3 kho A, B, C chứa 1 số gạo. Người ta nhập vào kho A thêm $\frac{1}{7}$ số gạo của kho đó, xuất ở kho B đi $\frac{1}{9}$ số gạo của kho đó, xuất ở kho C đi $\frac{2}{7}$ số gạo của kho đó. Khi đó số gạo của 3 kho bằng nhau. Tính số gạo ở mỗi kho lúc đầu, biết kho B chứa nhiều hơn kho A là 20 tạ gạo.

Bài toán 1.83 (Bình, 2022, Ví dụ 19). 3 đội công nhân I, II, III phải vận chuyển tổng cộng 1530kg hàng từ kho theo thứ tự đến 3 địa điểm cách kho 1500m, 2000m, 3000m. Phân chia số hàng cho mỗi đội sao cho khối lượng hàng tỷ lệ nghịch với khoảng cách cần chuyển.

Bài toán 1.84 (Bình, 2022, Ví dụ 20). 3 xí nghiệp cùng xây dựng chung 1 cái cầu hết 38 triệu đồng. Xí nghiệp I có 40 xe ở cách cầu 1.5km, xí nghiệp II có 20 xe ở cách cầu 3km, xí nghiệp III có 30 xe ở cách cầu 1km. Hỏi mỗi xí nghiệp phải trả cho việc xây dựng cầu bao nhiêu tiền, biết số tiền phải trả tỷ lệ thuận với số xe & tỷ lệ nghịch với khoảng cách từ xí nghiệp đến cầu?

Bài toán 1.85 (Bình, 2022, 106.). (a) Tính thời gian từ lúc 2 kim đồng hồ gặp nhau lần trước đến lúc chúng gặp nhau lần tiếp theo. (b) Trong 1 ngày, 2 kim đồng hồ tạo với nhau góc vuông bao nhiêu lần?

Bài toán 1.86 (Bình, 2022, 107.). 1 ống dài được kéo bởi 1 máy kéo trên đường. Tuấn chạy dọc từ đầu ống đến cuối ống theo hướng chuyển động của máy kéo thì đếm được 140 bước. Sau đó Tuấn quay lại chạy dọc ống theo chiều ngược lại thì đếm được 20 bước. Biết mỗi bước chạy của Tuấn dài 1m. Tính độ dài của ống.

Bài toán 1.87 (Bình, 2022, 108.). 5 lớp 7A, 7B, 7C, 7D, 7E nhận chăm sóc vườn trường có diện tích 300m². Lớp 7A nhận 15% diện tích vườn, lớp 7B nhận $\frac{1}{5}$ diện tích còn lại. Diện tích còn lại của vườn sau khi 2 lớp trên nhận được đem chia cho 3 lớp 7C, 7D, 7E tỷ lệ với $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{5}{16}$. Tính diện tích vườn giao cho mỗi lớp.

Bài toán 1.88 (Bình, 2022, 109.). 3 công nhân được thưởng 100000 đồng, số tiền thưởng được phân chia tỷ lệ với mức sản xuất của mỗi người. Biết mức sản xuất của người thứ nhất so với mức sản xuất của người thứ 2 bằng 5 : 3, mức sản xuất của người thứ 3 bằng 25% tổng số mức sản xuất của 2 người kia. Tính số tiền mỗi người được thưởng.

Bài toán 1.89 (Bình, 2022, 110.). 1 công trường dự định phân chia số đất cho 3 đội I, II, III tỷ lệ với 7,6,5. Nhưng sau đó vì số người của các đội thay đổi nên đã chia lại tỷ lệ với 6,5,4. Như vậy có 1 đội làm nhiều hơn so với dự định là 6m³ đất. Tính số đất đã phân chia cho mỗi đội.

Bài toán 1.90 (Bình, 2022, 111.). Trong 1 đợt lao động, 3 khối 7, 8, 9 chuyển được 912m³ đất. Trung bình mỗi học sinh khối 7, 8, 9 theo thứ tự làm được 1.2m³, 1.4m³, 1.6m³. Số học sinh khối 7 & khối 8 tỷ lệ với 1 & 3, số học sinh khối 8 & khối 9 tỷ lệ với 4 & 5. Tính số học sinh của mỗi khối.

Bài toán 1.91 (Bình, 2022, 112.). 3 tổ công nhân có mức sản xuất tỷ lệ với 5,4,3. Tổ I tăng năng suất 10%, tổ II tăng năng suất 20%, tổ III tăng năng suất 10%. Do đó trong cùng 1 thời gian, tổ I làm được nhiều hơn tổ II là 7 sản phẩm. Tính số sản phẩm mỗi tổ đã làm được trong thời gian đó.

Bài toán 1.92 (Bình, 2022, 113.). Tìm 3 số tự nhiên, biết BCNN của chúng bằng 3150, tỷ số của số thứ nhất & số thứ 2 là 5 : 9, tỷ số của số thứ nhất & số thứ 3 là 10 : 7.

Bài toán 1.93 (Bình, 2022, 114.). 3 tấm vải theo thứ tự giá 120000 đồng, 192000 đồng, & 144000 đồng. Tấm thứ nhất & tấm thứ 2 có cùng chiều dài, tấm thứ 2, & tấm thứ 3 có cùng chiều rộng. Tổng của 3 chiều dài là 110m, tổng của 3 chiều rộng là 2.1m. Tính kích thước của mỗi tấm vải, biết giá 1m² của 3 tấm vải bằng nhau.

Bài toán 1.94 (Bình, 2022, 115.). Có 3 gói tiền: gói thứ nhất gồm toàn tờ 500 đồng, gói thứ 2 gồm toàn tờ 2000 đồng, gói thứ 3 gồm toàn tờ 5000 đồng. Biết tổng số tờ giấy bạc của 3 gói là 540 tờ & số tiền ở các gói bằng nhau. Tính số tờ giấy bạc mỗi loại.

Bài toán 1.95 (Bình, 2022, 116.). 3 công nhân tiện được tất cả 860 dụng cụ trong cùng 1 thời gian. Để tiện 1 dụng cụ, người thứ nhất cần 5ph, người thứ 2 cần 6ph, người thứ 3 cần 9ph. Tính số dụng cụ mỗi người tiện được.

Bài toán 1.96 (Bình, 2022, 117.). 3 em bé: Ánh 5 tuổi, Bích 6 tuổi, Châu 10 tuổi được bà chia cho 42 chiếc kẹo. Số kẹo được chia tỷ lệ nghịch với số tuổi của mỗi em. Hỏi mỗi em được chia bao nhiêu chiếc kẹo?

Bài toán 1.97 (Bình, 2022, 118.). Tìm 3 phân số, biết tổng của chúng bằng $3\frac{3}{10}$, các tử của chúng tỷ lệ với 3, 4, 5, các mẫu của chúng tỷ lệ với 5, 1, 2.

Bài toán 1.98 (Bình, 2022, 119.). Tìm số tự nhiên có 3 chữ số, biết số đó là bội của 72 & các chữ số của nó nếu xếp từ nhỏ đến lớn thì tỷ lệ với 1, 2, 3.

Bài toán 1.99 (Bình, 2022, 120.). Độ dài 3 cạnh của 1 tam giác tỷ lệ với 2, 3, 4. 3 chiều cao tương ứng với 3 cạnh đó tỷ lệ với 3 số nào?

Bài toán 1.100 (Bình, 2022, 121.). 3 đường cao của $\triangle ABC$ có độ dài bằng 4, 12, x . Biết $x \in \mathbb{N}^*$. Tìm x (cho biết bất đẳng thức tam giác: mỗi cạnh của tam giác nhỏ hơn tổng 2 cạnh kia & lớn hơn hiệu của chúng).

Bài toán 1.101 (Bình, 2022, 122.). Cho $\triangle ABC$. Có góc ngoài của tam giác tại A, B, C tỷ lệ với 4, 5, 6. Các góc trong tương ứng tỷ lệ với các số nào?

Bài toán 1.102 (Bình, 2022, 123.). Tìm 2 số khác 0 biết tổng, hiệu, tích của chúng tỷ lệ với 5, 1, 12.

1.8 Số Thập Phân Hữu Hạn. Số Thập Phân Vô Hạn Tuần Hoàn

Bài toán 1.103 (Bình, 2022, Ví dụ 21). Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân: (a) $\frac{7}{25}$, $\frac{3}{40}$. (b) $\frac{7}{33}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{7}{22}$.

1.8.1 Viết phân số dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn

“1. Nếu 1 phân số tối giản mà mẫu không có ước nguyên tố khác 2 & 5 thì viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn. 2. Nếu 1 phân số tối giản mà mẫu có ước nguyên tố khác 2 & 5 thì không viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn. Phân số đó viết thành số thập phân vô hạn, trong đó có những nhóm chữ số được lặp lại, nhóm chữ số đó được gọi là *chu kỳ*, số thập phân vô hạn đó được gọi là *tuần hoàn*. Số thập phân có nguồn gốc từ phân số nếu vô hạn thì phải tuần hoàn. E.g., khi chia 1 cho 7, ta được số thập phân vô hạn, số dư trong phép chia này chỉ có thể là 1, 2, 3, 4, 5, 6, nên nhiều nhất đến số dư thứ 7, số dư phải lặp lại, do đó các nhóm chữ số ở thương cũng lặp lại, & số thập phân vô hạn phải tuần hoàn. Ta có: $\frac{1}{7} = 0.142857142857 \dots$ 3. Để viết gọn số thập phân vô hạn tuần hoàn, người ta đặt chu kỳ trong dấu ngoặc. E.g., $\frac{7}{33} = 0.2121 \dots = 0.(21)$, $\frac{7}{22} = 0.31818 \dots = 0.3(18)$. Số $\frac{7}{33}$ cũng có thể viết dưới dạng 0.(2121) hoặc 0.2(12). So với cách viết 0.(21) có chu kỳ 21 thì cách viết thứ 2 có chu kỳ lớn hơn, cách viết thứ 3 có chữ số thập phân liền trước chu kỳ & chữ số cuối cùng của chu kỳ bằng nhau, ta không chọn những cách viết này. 4. Số thập phân vô hạn tuần hoàn gọi là *đơn* nếu chu kỳ bắt đầu ngay sau dấu phẩy, ví dụ 0.(21); gọi là *tạp* nếu chu kỳ không bắt đầu ngay sau dấu phẩy, phân thập phân đứng trước chu kỳ được gọi là *phần bất thường*, e.g., 0.3(18) có chu kỳ là 18 & phần bất thường là 3.” – Bình, 2022

1.8.2 Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn dưới dạng phân số

“Để viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn 0.(21), 0.3(18) dưới dạng phân số ta phải tính các tổng có vô số hạng: $0.212121 \dots = \frac{21}{10^2} + \frac{21}{10^4} + \frac{21}{10^6} + \dots$, $0.31818 \dots = \frac{3}{10} + \frac{18}{10^3} + \frac{18}{10^5} + \dots$ Các phép tính này sẽ được nghiên cứu ở Toán 11 khi học về tổng các số hạng của 1 cấp số nhân lùi vô hạn. Người ta đã chứng minh được các quy tắc sau: Muốn viết phần thập phân của số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn dưới dạng phân số, ta lấy chu kỳ làm tử, còn mẫu là 1 số gồm các chữ số 9, số chữ số 9 bằng số chữ số của chu kỳ. E.g., $0.(6) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, $0.(21) = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$. Muốn viết phần thập phân của số thập phân vô hạn tuần hoàn tạp dưới dạng phân số, ta lấy số gồm phần bất thường & chu kỳ trừ đi phần bất thường làm tử, còn mẫu là 1 số gồm các chữ số 9 kèm theo các chữ số 0, số chữ số 9 bằng số chữ số của chu kỳ, số chữ số 0 bằng số chữ số của phần bất thường. E.g., $5.1(6) = 5\frac{16-1}{90} = 5\frac{1}{6}$, $0.3(18) = \frac{318-3}{990} = \frac{315}{990} = \frac{7}{22}$. Ta có thể đưa ra 1 cách minh họa các quy tắc trên. Gọi $x = 0.2121 \dots$ thì: $100x - x = 21.2121 \dots - 0.2121 \dots \Leftrightarrow 99x = 21 \Leftrightarrow x = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$. Gọi $y = 0.3181818 \dots$ thì: $1000y - 10y = 318.1818 \dots - 3.1818 \dots \Leftrightarrow 990y = 318 - 3 \Leftrightarrow y = \frac{318-3}{990} = \frac{315}{990} = \frac{7}{22}$. Tuy nhiên, các minh họa nói trên không phải là các cách chứng minh chặt chẽ vì ở đây ta đã áp dụng các quy tắc tính của số thập phân hữu hạn vào các số vô hạn mà chưa chứng minh rằng điều đó có được phép hay không.” – Bình, 2022

1.8.3 Điều kiện để phân số viết dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn hay tạp

“Xét quy tắc viết số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn dưới dạng phân số: $0.(21) = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$, tổng quát: $\overline{0.(a_1a_2 \dots a_n)} = \frac{\overline{a_1a_2 \dots a_n}}{99 \dots 9}$. Mẫu $\underbrace{99 \dots 9}_n \not\vdots 2$, $\underbrace{99 \dots 9}_n \not\vdots 5$, nên đến khi phân số tối giản, mẫu không chứa thừa số nguyên tố 2 & 5. Xét quy tắc viết số thập phân tuần hoàn tạp dưới dạng phân số $0.3(18) = \frac{318-3}{990} = \frac{315}{990} = \frac{7}{22}$, tổng quát:

$$\overline{0.b_1b_2 \dots b_k(a_1a_2 \dots a_n)} = \frac{\overline{b_1b_2 \dots b_k a_1a_2 \dots a_n} - \overline{b_1b_2 \dots b_k}}{\underbrace{99 \dots 9}_{n} \underbrace{00 \dots 0}_k}, \text{ mẫu } \underbrace{99 \dots 9}_{n} \underbrace{00 \dots 0}_k$$

tận cùng bằng 0 mà tử tận cùng khác 0 (vì theo quy định viết chu kỳ ta có $b_k \neq a_n$) nên đến khi phân số tối giản, mẫu vẫn chứa thừa số 2, hoặc 5, hoặc cả 2 & 5. Từ đó suy ra:

Mệnh đề 1.1. *1 phân số tối giản mà mẫu có ước nguyên tố khác 2 & 5 thì viết được thành số thập phân vô hạn tuần hoàn.*

Đối với các phân số đó, nếu mẫu không có ước nguyên tố 2 & 5 thì viết được thành số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn, nếu mẫu có 1 trong các ước nguyên tố 2 & 5 thì viết được thành số thập phân vô hạn tuần hoàn tạp.” – Bình, 2022

Bài toán 1.104 (Bình, 2022, Ví dụ 22). $\forall n \in \mathbb{N}^*$, khi viết các phân số sau dưới dạng số thập phân, ta được số thập phân hữu hạn hay vô hạn? Nếu là số thập phân vô hạn thì số đó là số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn hay tạp? (a) $\frac{3n^2+3n}{12n}$. (b) $\frac{6n+1}{12n}$.

Bài toán 1.105 (Bình, 2022, 124). Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân: $\frac{35}{56}, \frac{10}{15}, \frac{5}{11}, \frac{2}{13}, \frac{15}{82}, \frac{13}{22}, \frac{1}{60}, \frac{5}{24}$.

Bài toán 1.106 (Bình, 2022, 125). Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số: $0.(27), 0.(703), 0.(571428), 2.01(6), 0.1(63), 2.41(3), 0.88(63)$.

Bài toán 1.107 (Bình, 2022, 126). Tìm các phân số tối giản có mẫu $\neq 1$, biết tích của tử & mẫu bằng 1260 & phân số này có thể viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn.

Bài toán 1.108 (Bình, 2022, 127). Cho số $x = 0.12345 \dots 998999$ trong đó ở bên phải dấu phẩy ta viết các số từ 1 đến 999 liên tiếp nhau. Chữ số thứ 2003 ở bên phải dấu phẩy là chữ số: A. 0. B. 3. C. 4. D. 7.

Bài toán 1.109 (Bình, 2022, 128). Thay các chữ cái bởi các chữ số thích hợp: (a) $1 : \overline{0.abc} = a+b+c$. (b) $1 : \overline{0.0abc} = a+b+c+d$. (c) $0.x(y) - 0.y(x) = 8 \cdot 0.0(1)$, biết $x + y = 9$.

Bài toán 1.110 (Bình, 2022, 130). Khi viết các phân số sau dưới dạng số thập phân, ta được số thập phân hữu hạn, hay vô hạn tuần hoàn đơn, hay vô hạn tuần hoàn tạp? (a) $\frac{35n+3}{70}$, $n \in \mathbb{N}$. (b) $\frac{10987654321}{(n+1)(n+2)(n+3)}$, $n \in \mathbb{N}$.

Bài toán 1.111 (Bình, 2022, 131). Cho $A = \frac{1}{1.00 \dots 01}$ (số chia có 99 chữ số 0 sau dấu phẩy). Tính A với 300 chữ số thập phân.

Bài toán 1.112 (Bình, 2022, 132). Cho A là số lẻ không tận cùng bằng 5. Chứng minh: tồn tại 1 bội của A gồm toàn chữ số 9.

2 Số Thực

Bài toán 2.1. Chứng minh: $(x^2 + m^2)(x^2 + n^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + m^2n^2 = 0$ & $(x^2 + m^2)(x^2 + n^2) \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + m^2n^2 \neq 0$, $\forall x, m, n \in \mathbb{R}$.

Ý nghĩa: Điều kiện để các công thức nhân chia lũy thừa cùng cơ số xác định.

2.1 Số Vô Tỷ. Căn Bậc 2. Số Thực

“Mọi số hữu tỷ đều biểu diễn được dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn. Ngược lại, mỗi số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn đều biểu diễn 1 số hữu tỷ. Số vô tỷ là số viết được dưới dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn. Tập hợp các số thực \mathbb{R} bao gồm tập hợp số hữu tỷ \mathbb{Q} & tập hợp số vô tỷ \mathbb{I} . Cho số a không âm. Căn bậc 2 của a là số x mà $x^2 = a$. Căn bậc 2 không âm của a ký hiệu là \sqrt{a} . Nếu $n \in \mathbb{N}$ không là số chính phương thì \sqrt{n} là số vô tỷ.” – Bình, 2022, §7

Bài toán 2.2 (Bình, 2022, §7, Ví dụ 11). Chứng minh: (a) $\sqrt{15}$ là số vô tỷ. (b) Nếu số tự nhiên a không phải là số chính phương thì \sqrt{a} là số vô tỷ.

Bài toán 2.3 (Bình, 2022, §7, 69.). *Tìm x biết: (a) $x^2 = 81$. (b) $(x-1)^2 = \frac{9}{16}$. (c) $x - 2\sqrt{x} = 0$. (d) $x = \sqrt{x}$.*

Bài toán 2.4 (Bình, 2022, §7, 70.). *Cho $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$. Chứng minh với $x = \frac{16}{9}$ & $x = \frac{25}{9}$ thì A có giá trị là số nguyên.*

Bài toán 2.5 (Bình, 2022, §7, 71.). *Cho $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$. Tìm số nguyên x để A có giá trị là 1 số nguyên.*

Bài toán 2.6 (Bình, 2022, §7, 72.). *Chứng minh: (a) $\sqrt{2}$ là số vô tỷ. (b) $5 - \sqrt{2}$ là số vô tỷ.*

Bài toán 2.7 (Bình, 2022, §7, 73.). *(a) Có 2 số vô tỷ nào mà tích là 1 số hữu tỷ hay không? (b) Có 2 số vô tỷ dương nào mà tổng là 1 số hữu tỷ hay không?*

Bài toán 2.8 (Bình, 2022, §7, 74.). *Ký hiệu $\lfloor x \rfloor$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x . Tính giá trị của tổng: $\sum_{i=1}^{35} \lfloor \sqrt{i} \rfloor = \lfloor \sqrt{1} \rfloor + \lfloor \sqrt{2} \rfloor + \dots + \lfloor \sqrt{35} \rfloor$.*

Bài toán 2.9 (Bình, 2022, §7, 75.). *Cho $a, b \in \mathbb{R}$ sao cho các tập hợp $\{a^2 + a; b\}$ & $\{b^2 + b; a\}$ bằng nhau. Chứng minh $a = b$.*

2.2 Giá Trị Tuyệt Đối của 1 Biểu Thức

Định nghĩa 2.1 (Giá trị tuyệt đối). “Giá trị tuyệt đối của 1 số a , ký hiệu $|a|$, là số đo của khoảng cách từ điểm a đến điểm gốc trên trục số.

Ta thường sử dụng định nghĩa trên dưới dạng:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{nếu } a \geq 0, \\ -a, & \text{nếu } a < 0. \end{cases}$$

Tính chất. • Nếu $a = 0$ thì $|a| = 0$, nếu $a \neq 0$ thì $|a| > 0$. Ta có: *Giá trị tuyệt đối của 1 số thì không âm: $|a| \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}$.*
• Nếu $a \geq 0$ thì $|a| = a$, nếu $a < 0$ thì $|a| > a$. Ta có: *Giá trị tuyệt đối của 1 số thì lớn hơn hoặc bằng số đó: $|a| \geq a, \forall a \in \mathbb{R}$.*

2.2.1 Tính giá trị của 1 biểu thức

Bài toán 2.10 (Bình, 2022, Ví dụ 15, p. 19). *Tính giá trị của biểu thức $A = 3x^2 - 2x + 1$ với $|x| = \frac{1}{2}$.*

2.2.2 Rút gọn biểu thức chứa dấu giá trị tuyệt đối

Bài toán 2.11 (Bình, 2022, Ví dụ 16, p. 20). *Rút gọn biểu thức $|a| + a$.*

2.2.3 Tìm giá trị của biến trong đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối

Bài toán 2.12 (Bình, 2022, Ví dụ 17, p. 20). *Tìm x thỏa $2|3x - 1| + 1 = 5$.*

Bài toán 2.13 (Bình, 2022, Ví dụ 18, p. 20). *Tìm x thỏa $|x - 5| - x = 3$.*

Bài toán 2.14 (Bình, 2022, Ví dụ 19, p. 20). *Tìm x thỏa $|x - 2| = 2x - 3$.*

Bài toán 2.15 (Bình, 2022, Ví dụ 20, p. 20). *Với giá trị nào của a, b thì đẳng thức $|a(b - 2)| = a(2 - b)$ đúng?*

Bài toán 2.16 (Bình, 2022, Ví dụ 21, p. 21). *Tìm các số $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa $a + b = |a| - |b|$.*

2.2.4 Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức chứa dấu giá trị tuyệt đối

Bài toán 2.17 (Bình, 2022, Ví dụ 22, p. 21). *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 2|3x - 1| - 4$.*

Bài toán 2.18 (Bình, 2022, Ví dụ 23, p. 21). *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B = 10 - 4|x - 2|$.*

Bài toán 2.19 (Bình, 2022, Ví dụ 24, p. 21). *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = \frac{6}{|x|-3}$ với $x \in \mathbb{Z}$.*

Bài toán 2.20 (Bình, 2022, Ví dụ 25, p. 21). *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = x - |x|$.*

Bài toán 2.21 (Bình, 2022, 70., p. 22). *Tìm tất cả các số a thỏa mãn 1 trong các điều kiện sau: (a) $a = |a|$; (b) $a < |a|$; (c) $a > |a|$; (d) $|a| = -a$; (e) $a \leq |a|$.*

Bài toán 2.22 (Bình, 2022, 71., p. 22). *Bổ sung các điều kiện để các khẳng định sau là đúng: (a) $|a| = |b| \Rightarrow a = b$; (b) $a > b \Rightarrow |a| > |b|$.*

Bài toán 2.23 (Bình, 2022, 72., p. 22). Cho $|x| = |y|$, $x < 0$, $y > 0$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?
(a) $x^2y > 0$; (b) $x + y = 0$; (c) $xy < 0$; (d) $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0$; (e) $\frac{x}{y} + 1 = 0$.

Bài toán 2.24 (Bình, 2022, 73., p. 22). Tìm giá trị của các biểu thức: (a) $A = 6x^3 - 3x^2 + 2|x| + 4$ với $x = -\frac{2}{3}$; (b) $B = 2|x| - 3|y|$ với $x = \frac{1}{2}$, $y = -3$; (c) $C = 2|x - 2| - 3|1 - x|$ với $x = 4$; (d) $D = \frac{5x^2 - 7x + 1}{3x - 1}$ với $|x| = \frac{1}{2}$.

Bài toán 2.25 (Bình, 2022, 74., p. 22). Rút gọn các biểu thức: (a) $|a| - a$; (b) $|a|a$; (c) $|a| : a$.

Bài toán 2.26 (Bình, 2022, 75., p. 22). Tìm x trong các đẳng thức: (a) $|2x - 3| = 5$; (b) $|2x - 1| = |2x + 3|$; (c) $|x - 1| + 3x = 1$; (d) $|5x - 3| - x = 7$.

Bài toán 2.27 (Bình, 2022, 76., p. 23). Tìm các số a và b thỏa mãn 1 trong các điều kiện sau: (a) $a + b = |a| + |b|$; (b) $a + b = |b| - |a|$.

Bài toán 2.28 (Bình, 2022, 77., p. 23). Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn 1 trong các điều kiện sau: (a) $|x| + |y| = 20$; (b) $|x| + |y| < 20$.

Bài toán 2.29 (Bình, 2022, 78., p. 23). Điền vào chỗ chấm các dấu $\geq, \leq, =$ để các khẳng định sau đúng với mọi a, b . Phát biểu mỗi khẳng định đó thành 1 tính chất và chỉ rõ khi nào xảy ra dấu đẳng thức? (a) $|a + b| \dots |a| + |b|$; (b) $|a - b| \dots |a| - |b|$ với $|a| \geq |b|$; (c) $|ab| \dots |a||b|$; (d) $|\frac{a}{b}| \dots \frac{|a|}{|b|}$.

Bài toán 2.30 (Bình, 2022, 79., p. 23). Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức: (a) $A = 2|3x - 2| - 1$; (b) $B = 5|1 - 4x| - 1$; (c) $C = x^2 + 3|y - 2| - 1$; (d) $D = x + |x|$.

Bài toán 2.31 (Bình, 2022, 80., p. 23). Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức: (a) $A = 5 - |2x - 1|$; (b) $B = \frac{1}{|x - 2| + 3}$.

Bài toán 2.32 (Bình, 2022, 81., p. 23). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $C = \frac{x+2}{|x|}$ với $x \in \mathbb{Z}$.

3 Hình Học Trực Quan

4 Góc. Đường Thẳng Vuông Góc. Đường Thẳng Song Song

4.1 2 Góc Đối Đỉnh

Định nghĩa 4.1 (2 góc đối đỉnh). 2 góc đối đỉnh là 2 góc mà mỗi cạnh của góc này là tia đối của 1 cạnh của góc kia.

Tính chất. 2 góc đối đỉnh thì bằng nhau.

Bài toán 4.1 (Bình, 2022, §1, Ví dụ 1). Cho 3 đường thẳng AB, CD, EF cắt nhau tại O . Kể tên các cặp góc đối đỉnh nhỏ hơn góc bẹt trên hình.

Bài toán 4.2 (Bình, 2022, §1, 1.). Cho 2 góc đối đỉnh AOB và $A'OB'$. Gọi Ox là tia phân giác của \widehat{AOB} , Ox' là tia đối của tia Ox . Chứng minh Ox' là tia phân giác của $\widehat{A'OB'}$.

Bài toán 4.3 (Bình, 2022, §1, 2.). Chứng minh 2 tia phân giác của 2 góc đối đỉnh là 2 tia đối nhau.

Bài toán 4.4 (Bình, 2022, §1, 3.). Qua điểm O , vẽ 5 đường thẳng phân biệt. (a) Có bao nhiêu góc trong hình vẽ? (b) Trong các góc ấy, có bao nhiêu cặp góc đối đỉnh nhỏ hơn góc bẹt? (c) Xét các góc không có đỉnh trong chung, chứng tỏ tồn tại 1 góc $\geq 36^\circ$, tồn tại 1 góc $\leq 36^\circ$.

4.2 2 Đường Thẳng Vuông Góc

Định nghĩa 4.2 (2 đường thẳng vuông góc). 2 đường thẳng vuông góc là 2 đường thẳng cắt nhau và trong các góc tạo thành có 1 góc vuông.

Định nghĩa 4.3 (Đường trung trực). Đường trung trực của 1 đoạn thẳng là đường thẳng vuông góc với đoạn thẳng ấy tại trung điểm của nó.

Bài toán 4.5 (Bình, 2022, §1, Ví dụ 2). Chứng minh 2 tia phân giác của 2 góc kề bù vuông góc với nhau.

Bài toán 4.6 (Bình, 2022, §1, 4.). Cho 2 góc kề bù AOC và COB . Gọi OM là tia phân giác của \widehat{AOC} . Kẻ tia $ON \perp OM$ (tia ON nằm trong \widehat{BOC}). Tia ON là tia phân giác của góc nào? Vì sao?

Bài toán 4.7 (Bình, 2022, §1, 5.). Ở miền trong góc tù xOy , vẽ các tia Oz, Ot sao cho $Oz \perp Ox$, $Ot \perp Oy$. Chứng tỏ: (a) $\widehat{xOt} = \widehat{yOz}$. (b) $\widehat{xOy} + \widehat{zOt} = 180^\circ$.

Bài toán 4.8 (Bình, 2022, §1, 6.). Ở miền ngoài góc tù xOy , vẽ các tia Oz, Ot sao cho $Oz \perp Ox$, $Ot \perp Oy$. Gọi Om, On là tia phân giác của các góc xOy, zOt . Chứng minh Om, On là 2 tia đối nhau.

4.3 Dấu Hiệu Nhận Biết 2 Đường Thẳng Song Song

“2 đường thẳng song song là 2 đường thẳng không có điểm chung. Để nhận ra 2 đường thẳng song song, ta xét các góc tạo bởi 2 đường thẳng ấy với 1 đường thẳng thứ 3 (*cắt tuyến*). Nếu 2 góc so le trong bằng nhau, hoặc 2 góc đồng vị bằng nhau, hoặc 2 góc trong cùng phía bù nhau thì 2 đường thẳng đó song song với nhau. 2 đường thẳng cũng song song với nhau nếu chúng cùng vuông góc với 1 đường thẳng thứ 3.” – Bình, 2022, §6, p. 83

Bài toán 4.9 (Bình, 2022, Ví dụ 15, p. 83). Cho đoạn thẳng AB . Vẽ các tia Ax & By cùng phía đối với AB trong đó $\widehat{BAx} = \alpha$, $\widehat{ABy} = 4\alpha$. Tính α để Ax song song với By .

Giải. Sử dụng “nếu 2 góc trong cùng phía bù nhau thì 2 đường thẳng song song”. $Ax \parallel By \Leftrightarrow \widehat{BAx} + \widehat{ABy} = \alpha + 4\alpha = 5\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 36^\circ$. \square

Bài toán 4.10 (Bình, 2022, 38., p. 84). Cho $\widehat{xOy} = \alpha$, điểm A nằm trên Oy . Qua A vẽ tia Am . Tính số đo \widehat{OAm} để Am song song với Ox .

Bài tập dựa vào hình vẽ sẵn: Bình, 2022, 37., 39., p. 84, 44., 45., p. 87.

4.4 Tiên Đề Euclid. Tính Chất 2 Đường Thẳng Song Song

“Khi vẽ đường thẳng qua điểm A ($A \notin a$) & song song với đường thẳng a , 1 vấn đề được đặt ra: Qua điểm A nằm ngoài đường thẳng a , có bao nhiêu đường thẳng song song với a ? Ta thừa nhận tiên đề sau:

Tiên đề Euclid. Qua 1 điểm nằm ngoài 1 đường thẳng, chỉ có 1 đường thẳng song song với đường thẳng đó. Với tiên đề Euclid, ta chứng minh được: 2 đường thẳng cùng song song với 1 đường thẳng thứ 3 thì song song với nhau. Từ tiên đề Euclid, ta cũng chứng minh được các tính chất của 2 đường thẳng song song: Nếu 2 đường thẳng song song bị cắt bởi 1 cát tuyến thì 2 góc so le trong bằng nhau, 2 góc đồng vị bằng nhau, 2 góc trong cùng phía bù nhau.” – Bình, 2022, §7, p. 84

Bài tập dựa vào hình vẽ sẵn: Bình, 2022, Ví dụ 16, p. 84, 40., p. 85.

Bài toán 4.11 (Bình, 2022, 41., p. 85). $\triangle ABC$ có tia phân giác của góc B cắt AC ở D . Qua A kẻ đường thẳng song song với BD , đường thẳng này cắt đường thẳng BC ở E . Chứng minh $\widehat{BAE} = \widehat{BEA}$.

Bài toán 4.12 (Bình, 2022, 42., p. 85). Chứng minh: nếu 2 đường thẳng song song thì các tia phân giác của mỗi cặp góc đồng vị song song với nhau.

Bài toán 4.13 (Bình, 2022, 43.*, p. 85). Cho 5 đường thẳng, trong đó không có 2 đường thẳng nào song song. Chứng minh: trong 5 đường thẳng đó, tồn tại 2 đường thẳng tạo với nhau 1 góc nhỏ hơn bằng 36° .

Bài tập dựa vào hình vẽ sẵn: Bình, 2022, 45., p. 87.

5 1 Số Yếu Tố Thống Kê & Xác Suất

6 Biểu Thức Đại Số

7 Tam Giác

Tài liệu

Bình, Vũ Hữu (2022). *Nâng Cao & Phát Triển Toán 7, tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 152.

Trọng, Đặng Đức et al. (2022). *Bồi Dưỡng Năng Lực Tự Học Toán 7*. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, p. 200.