

# Problem & Solution: Trigonometry – Bài Tập Lượng Giác & Lời Giải

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 22 tháng 5 năm 2023

## Tóm tắt nội dung

## Mục lục

|  |   |
|--|---|
| 1 Hệ Thức về Cạnh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông | 1 |
| 2 Tỷ Số Lượng Giác của Góc Nhọn                    | 6 |
| 3 Hệ Thức về Cạnh & Góc Trong Tam Giác Vuông       | 7 |
| 4 Miscellaneous                                    | 7 |
| Tài liệu   | 7 |

## 1 Hệ Thức về Cạnh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông

Trong 1 tam giác vuông, nếu biết 2 cạnh, hoặc 1 cạnh & 1 góc nhọn thì có thể tính được các góc & các cạnh còn lại của tam giác đó.

**Bài toán 1.** Xét  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , cạnh huyền  $BC = a$ , 2 cạnh góc vuông  $AC = b$ ,  $AB = c$ . Gọi  $AH = h$  là đường cao ứng với cạnh huyền  $BC$ <sup>1</sup> &  $CH = b'$ ,  $BH = c'$  lần lượt là hình chiếu của  $AC, AB$  trên cạnh huyền  $BC$ . Chứng minh: (a)  $b^2 = ab'$ ,  $c^2 = ac'$ . (b) Định lý Pythagore  $a^2 = b^2 + c^2$ . (c)  $h^2 = b'c'$ . (d)  $bc = ah$ . (e)  $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ .

*Chứng minh.* (a)  $\triangle AHC \sim \triangle BAC$  (g.g) vì 2 tam giác vuông này có chung  $\widehat{C}$  nhọn, nên  $\frac{CH}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC^2 = BC \cdot CH \Leftrightarrow b^2 = ab'$ . Tương tự,  $\triangle BHA \sim \triangle BAC$  (g.g) vì 2 tam giác vuông này có chung  $\widehat{B}$  nhọn, nên  $\frac{BH}{AB} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB^2 = BC \cdot BH \Leftrightarrow c^2 = ac'$ . (b) Theo (a),  $b^2 + c^2 = ab' + ac' = a(b' + c') = a \cdot a = a^2$ . (c) Vì  $\triangle AHC \sim \triangle BAC$  &  $\triangle BHA \sim \triangle BAC$  nên  $\triangle AHC \sim \triangle BHA$ , suy ra  $\frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH} \Rightarrow AH^2 = BH \cdot CH \Leftrightarrow h^2 = b'c'$ . (d) Tính diện tích  $\triangle ABC$  theo 2 cách:  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot AC \Leftrightarrow AH \cdot BC = AB \cdot AC \Leftrightarrow ah = bc$ . (e)  $ah = bc \Leftrightarrow a^2h^2 = b^2c^2 \Leftrightarrow (b^2 + c^2)h^2 = b^2c^2 \Leftrightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{b^2+c^2}{b^2c^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ .  $\square$

**Lưu ý 1.** Các hệ thức trên có thể được suy ra trực tiếp từ các tỷ số đồng dạng của bộ 3 tam giác đồng dạng:  $\triangle BHA \sim \triangle AHC \sim \triangle BAC$ . Thật vậy,  $\triangle AHC \sim \triangle BAC \Leftrightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{HC}{AC} = \frac{AC}{BC} \Leftrightarrow \frac{h}{c} = \frac{b'}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow bh = b'c$ ,  $b^2 = ab'$ , &  $ah = bc$ .  $\triangle BHA \sim \triangle BAC \Leftrightarrow \frac{HB}{AB} = \frac{AH}{AC} = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow \frac{c'}{c} = \frac{h}{b} = \frac{c}{a} \Rightarrow hc = bc'$ ,  $ah = bc$ , &  $c^2 = ac'$ .  $\triangle AHC \sim \triangle BHA \Leftrightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH} = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow \frac{h}{c'} = \frac{b'}{h} = \frac{b}{c} \Rightarrow h^2 = b'c'$ ,  $bh = b'c$ , &  $ch = bc'$ . Hơn nữa,  $\widehat{BAH} = \widehat{C}$  &  $\widehat{CAH} = \widehat{B}$ .

**Định lý 1** (Hệ thức giữa cạnh góc vuông & hình chiếu của nó trên cạnh huyền). Trong 1 tam giác vuông, bình phương mỗi cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền & hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền. Nói cách khác, mỗi cạnh góc vuông là trung bình nhân của cạnh huyền & hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền.  $b^2 = ab'$ ,  $c^2 = ac'$

3 hệ thức về đường cao trong tam giác vuông:

**Định lý 2.** Trong 1 tam giác vuông, bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tích 2 hình chiếu của 2 cạnh góc vuông trên cạnh huyền. Nói cách khác, đường cao ứng với cạnh huyền là trung bình nhân của 2 đoạn thẳng mà nó định ra trên cạnh huyền.  $h^2 = b'c'$ .

**Định lý 3.** Trong 1 tam giác vuông, tích 2 cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền & đường cao tương ứng.  $bc = ah$ .

**Định lý 4.** Trong 1 tam giác vuông, nghịch đảo của bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tổng nghịch đảo của bình phương 2 cạnh góc vuông.  $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ .

\*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam

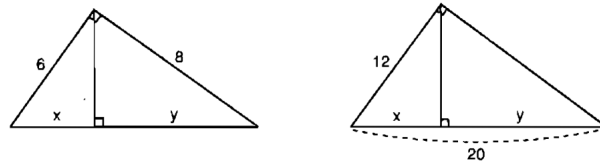
e-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com); website: <https://nqbh.github.io>.

<sup>1</sup> $AB, AC$  là đường cao ứng với nhau.

**Bài toán 2.** Cho  $\triangle ABC$  có độ dài 2 cạnh góc vuông là  $b$  &  $c$ . Tính độ dài đường cao  $h$  xuất phát từ đỉnh góc vuông theo  $b, c$ .

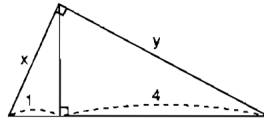
*Giải.* Có  $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \Rightarrow h^2 = \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2}$ . □

**Bài toán 3** ([Chí+23], 1., p. 68). Tính  $x, y$ :



*Giải.* (a) Áp dụng định lý Pythagore, cạnh huyền dài  $x + y = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ . Áp dụng định lý 1, ta có:  $6^2 = (x + y)x = 10x \Rightarrow x = \frac{6^2}{10} = 3.6$ ,  $y = 10 - x = 10 - 3.6 = 6.4$  (hoặc  $8^2 = (x + y)y = 10y \Rightarrow y = \frac{8^2}{10} = 6.4$ ). (b) Áp dụng định lý 1, ta có:  $12^2 = 20x \Rightarrow x = \frac{12^2}{20} = 7.2$ ,  $y = 20 - x = 20 - 7.2 = 12.8$ . □

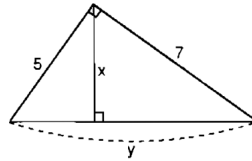
**Bài toán 4** ([Chí+23], 2., p. 68). Tính  $x, y$ :



*1st giải.* Áp dụng định lý 1, ta có:  $x^2 = (1 + 4) \cdot 1 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}$ ,  $y = (1 + 4)4 = 20 \Rightarrow y = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ . □

*2nd giải.* Áp dụng định lý 1, ta có:  $x^2 = (1 + 4) \cdot 1 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}$ . Áp dụng định lý Pythagore:  $y = \sqrt{(1 + 4)^2 - x^2} = \sqrt{5^2 - 5} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ . □

**Bài toán 5** ([Chí+23], 3., p. 69). Tính  $x, y$ :

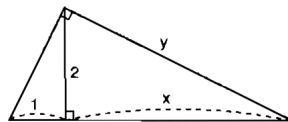


*1st giải.* Áp dụng định lý Pythagore:  $y = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74}$ . Áp dụng định lý 3, ta có  $5 \cdot 7 = xy \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 7}{y} = \frac{35}{\sqrt{74}} = \frac{35\sqrt{74}}{74}$ . □

*2nd giải.* Áp dụng định lý Pythagore:  $y = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74}$ . Áp dụng định lý 4, ta có:  $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{5^2 + 7^2}{5^2 \cdot 7^2}} = \frac{35\sqrt{74}}{74}$ . □

*3rd giải.* Áp dụng định lý 4, ta có:  $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{5^2 + 7^2}{5^2 \cdot 7^2}} = \frac{35\sqrt{74}}{74}$ . Áp dụng định lý 3, ta có:  $5 \cdot 7 = xy \Rightarrow y = \frac{5 \cdot 7}{x} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 74}{35} = \sqrt{74}$ . □

**Bài toán 6** ([Chí+23], 4., p. 69). Tính  $x, y$ :



*1st giải.* Áp dụng định lý 2, ta có:  $2^2 = 1 \cdot x \Leftrightarrow x = 4$ . Áp dụng định lý Pythagore:  $y = \sqrt{x^2 + 2^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ . □

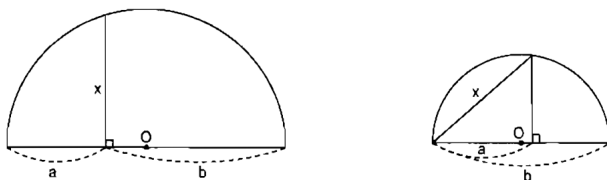
*1st giải.* Áp dụng định lý 2, ta có:  $2^2 = 1 \cdot x \Leftrightarrow x = 4$ . Áp dụng định lý 1, ta có:  $y^2 = (1 + x)x = (1 + 4) \cdot 4 = 20 \Rightarrow y = 2\sqrt{5}$ . □

**Bài toán 7** ([Chí+23], 5., p. 69). Trong tam giác vuông với các cạnh góc vuông có độ dài là 3 & 4, kẻ đường cao ứng với cạnh huyền. Tính đường cao này & độ dài các đoạn thẳng mà nó định ra trên cạnh huyền.

*Giải.*  $b = 3$ ,  $c = 4$ . Áp dụng định lý Pythagore:  $a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ . Áp dụng định lý 3, ta có:  $h = \frac{bc}{a} = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2.4$ . Áp dụng định lý 1, ta có:  $b^2 = ab' \Rightarrow b' = \frac{b^2}{a} = \frac{3^2}{5} = 1.8$ ,  $c' = a - b' = 5 - 1.8 = 3.2$ . □

**Bài toán 8** ([Chí+23], 6., p. 69). Đường cao của 1 tam giác vuông chia cạnh huyền thành 2 đoạn thẳng có độ dài là 1 & 2. Tính các cạnh góc vuông của tam giác này.

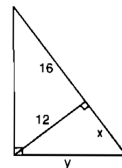
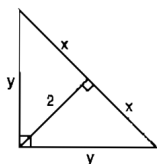
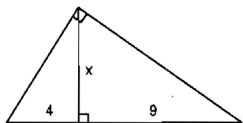
**Bài toán 9** ([Chí+23], 7., p. 69–70). Người ta đưa ra 2 cách vẽ đoạn trung bình nhân  $x$  của 2 đoạn thẳng  $a, b$  (i.e.,  $x^2 = ab$  hay  $x = \sqrt{ab}$ ) như trong 2 hình:



Chứng minh các cách vẽ trên là đúng.

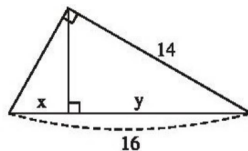
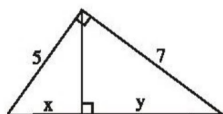
Hint. Nếu 1 tam giác có đường trung tuyến ứng với 1 cạnh bằng nửa cạnh đó thì tam giác đó là tam giác vuông.

**Bài toán 10** ([Chí+23], 8., p. 70). Tính  $x, y$ :

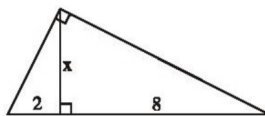
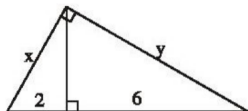


**Bài toán 11** ([Chí+23], 9., p. 70). Cho hình vuông  $ABCD$ . Gọi  $I$  là 1 điểm nằm giữa  $A$  &  $B$ . Tia  $DI$  & tia  $CB$  cắt nhau ở  $K$ . Kẻ đường thẳng qua  $D$ , vuông góc với  $DI$ . Đường thẳng này cắt đường thẳng  $BC$  tại  $L$ . Chứng minh: (a)  $\triangle DIL$  là 1 tam giác cân. (b) Tổng  $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2}$  không đổi khi  $I$  thay đổi trên cạnh  $AB$ .

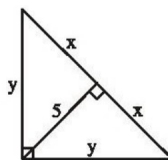
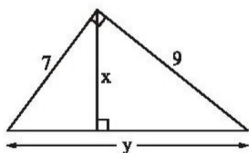
**Bài toán 12** ([Thâ+23], 1., p. 102). Tính  $x, y$ :



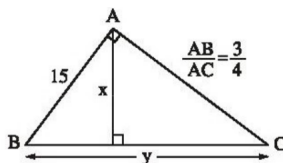
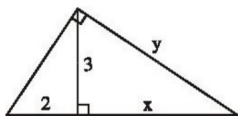
**Bài toán 13** ([Thâ+23], 2., p. 102). Tính  $x, y$ :



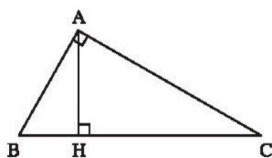
**Bài toán 14** ([Thâ+23], 3., p. 103). Tính  $x, y$ :



**Bài toán 15** ([Thâ+23], 4., p. 103). Tính  $x, y$ :



**Bài toán 16** ([Thâ+23], 5., p. 103). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ :



Giải bài toán trong mỗi trường hợp sau: (a) Cho  $AH = 16$ ,  $BH = 25$ . Tính  $AB, AC, BC, CH$ . (b) Cho  $AB = 12$ ,  $BH = 6$ . Tính  $AH, AC, BC, CH$ .

**Bài toán 17** ([Thã+23], 6., p. 103). Cho tam giác vuông với các cạnh góc vuông có độ dài là 5 và 7, kẻ đường cao ứng với cạnh huyền. Tính đường cao này và các đoạn thẳng mà nó chia ra trên cạnh huyền.

**Bài toán 18** ([Thã+23], 7., p. 103). Đường cao của 1 tam giác vuông chia cạnh huyền thành 2 đoạn thẳng có độ dài là 3 và 4. Tính các cạnh góc vuông của tam giác này.

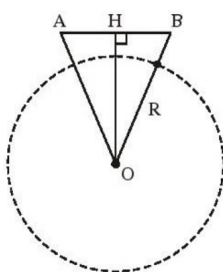
**Bài toán 19** ([Thã+23], 8., p. 103). Cạnh huyền của 1 tam giác vuông lớn hơn 1 cạnh góc vuông là 1 cm và tổng của 2 cạnh góc vuông lớn hơn cạnh huyền 4 cm. Tính các cạnh của tam giác vuông này.

**Bài toán 20** ([Thã+23], 9., p. 104). 1 tam giác vuông có cạnh huyền là 5 và đường cao ứng với cạnh huyền là 2. Tính cạnh nhỏ nhất của tam giác vuông này.

**Bài toán 21** ([Thã+23], 10., p. 104). Cho 1 tam giác vuông. Biết tỷ số 2 cạnh góc vuông là 3 : 4 và cạnh huyền là 125 cm. Tính độ dài các cạnh góc vuông và hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền.

**Bài toán 22** ([Thã+23], 11., p. 104). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A. Biết  $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{6}$ , đường cao  $AH = 30$  cm. Tính  $HB, HC$ .

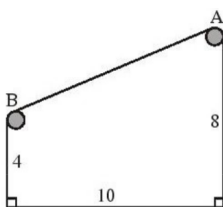
**Bài toán 23** ([Thã+23], 12., p. 104). 2 vệ tinh đang bay ở vị trí A và B cùng cách mặt đất 230 km có nhìn thấy nhau hay không nếu khoảng cách giữa chúng theo đường thẳng là 2200 km? Biết bán kính R của Trái Đất gần bằng 6370 km và 2 vệ tinh nhìn thấy nhau nếu  $OH > R$ .



**Bài toán 24** ([Thã+23], 13., p. 104). Cho 2 đoạn thẳng có độ dài là  $a, b$ . Dựng các đoạn thẳng có độ dài tương ứng bằng: (a)  $\sqrt{a^2 + b^2}$ . (b)  $\sqrt{a^2 - b^2}$  ( $a > b$ ).

**Bài toán 25** ([Thã+23], 14., p. 104). Cho 2 đoạn thẳng có độ dài là  $a, b$ . Dựng đoạn thẳng  $\sqrt{ab}$  như thế nào?

**Bài toán 26** ([Thã+23], 15., p. 104). Giữa 2 tòa nhà (kho và phân xưởng) của 1 nhà máy người ta xây dựng 1 băng chuyền AB để chuyển vật liệu. Khoảng cách giữa 2 tòa nhà là 10 m, còn 2 vòng quay của băng chuyền được đặt ở độ cao 8 m và 4 m so với mặt đất. Tìm độ dài AB của băng chuyền.



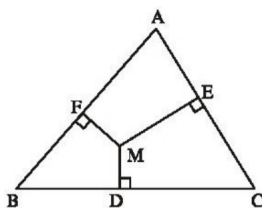
**Bài toán 27** ([Thã+23], 16., p. 104). Cho tam giác có độ dài các cạnh là 5, 12, 13. Tìm góc của tam giác đối diện với cạnh có độ dài 13.

**Bài toán 28** ([Thã+23], 17., p. 104). Cho hình chữ nhật ABCD. Đường phân giác của góc B cắt đường chéo AC thành 2 đoạn  $4\frac{2}{7}$  m và  $5\frac{5}{7}$  m. Tính các kích thước của hình chữ nhật.

**Bài toán 29** ([Thã+23], 18., p. 105). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A, vẽ đường cao AH. Chu vi của  $\triangle ABH$  là 30 cm và chu vi  $\triangle ACH$  là 40 cm. Tính chu vi của  $\triangle ABC$ .

**Bài toán 30** ([Thã+23], 19., p. 105). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A có cạnh  $AB = 6$  cm và  $AC = 8$  cm. Các đường phân giác trong và ngoài của góc B cắt đường thẳng ABC lần lượt tại M, N. Tính độ dài các đoạn thẳng AM, AN.

**Bài toán 31** ([Thã+23], 20., p. 105). Cho  $\triangle ABC$ . Từ 1 điểm M bất kỳ trong tam giác kẻ MD, ME, MF lần lượt vuông góc với các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh:  $BD^2 + CE^2 + AF^2 = CD^2 + AE^2 + BF^2$ .



**Bài toán 32** ([Thâ+23], 1.1., p. 105). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB : AC = 3 : 4$  & đường cao  $AH$  bằng 9 cm. Tính độ dài đoạn thẳng  $CH$ .

**Bài toán 33** ([Thâ+23], 1.2., p. 105). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB : AC = 4 : 5$  & đường cao  $AH$  bằng 12 cm. Tính độ dài đoạn thẳng  $BH$ .

**Bài toán 34** ([Thâ+23], 1.3., p. 105). (a) Tính  $h, b, c$  nếu biết  $b' = 36, c' = 64$ . (b) Tính  $h, b, b', c'$  nếu biết  $a = 9, c = 6$ .

**Bài toán 35** ([Thâ+23], 1.4., p. 105). Biểu thị  $b', c'$  qua  $a, b, c$ .

**Bài toán 36** ([Thâ+23], 1.5., p. 105). Chứng minh: (a)  $h = \frac{bc}{a}$ . (b)  $\frac{b^2}{c^2} = \frac{b'}{c'}$ .

**Bài toán 37** ([Thâ+23], 1.6., p. 106). Đường cao của 1 tam giác vuông kẻ từ đỉnh góc vuông chia cạnh huyền thành 2 đoạn, trong đó đoạn lớn hơn bằng 9 cm. Tính cạnh huyền của tam giác vuông đó nếu 2 cạnh góc vuông có tỷ lệ 6 : 5.

**Bài toán 38** ([Thâ+23], 1.7., p. 106). Trong tam giác có các cạnh là 5 cm, 12 cm, 13 cm, kẻ đường cao đến cạnh lớn nhất. Tính các đoạn thẳng mà đường cao này chia ra trên cạnh lớn nhất đó.

**Bài toán 39** ([Thâ+23], 1.8., p. 106).  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$  có đường cao  $AH$  bằng 12 cm. Tính cạnh huyền  $BC$  nếu biết  $HB : HC = 1 : 3$ .

**Bài toán 40** ([Thâ+23], 1.9., p. 106). Cho  $\triangle ABC$  vuông cân tại  $A$ , đường trung tuyến  $BM$ . Gọi  $D$  là chân đường vuông góc kẻ từ  $C$  đến  $BM$  &  $H$  là chân đường vuông góc kẻ từ  $D$  đến  $AC$ . Đ/S? (a)  $\triangle HCD \sim \triangle ABM$ . (b)  $AH = 2HD$ .

**Bài toán 41** ([Thâ+23], 1.10., p. 106). Cho hình thang  $ABCD$  vuông tại  $A$  có cạnh đáy  $AB$  bằng 6 cm, cạnh bên  $AD$  bằng 4 cm & 2 đường chéo vuông góc với nhau. Tính độ dài các cạnh  $CD, BC$ , & đường chéo  $BD$ .

**Bài toán 42** ([Tuy23], Thí dụ 1, p. 103). Cho hình thang  $ABCD$  có  $\widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ$ , 2 đường chéo vuông góc với nhau tại  $H$ . Biết  $AB = 3\sqrt{5}$  cm,  $HA = 3$  cm. Chứng minh: (a)  $HA : HB : HC : HD = 1 : 2 : 4 : 8$ . (b)  $\frac{1}{AB^2} - \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{HB^2} - \frac{1}{HC^2}$ .

**Bài toán 43** ([Tuy23], 1., p. 105). Cho hình thang  $ABCD$ ,  $AB \parallel CD$ , 2 đường chéo vuông góc với nhau. Biết  $AC = 16$  cm,  $BD = 12$  cm. Tính chiều cao của hình thang.

**Bài toán 44** ([Tuy23], 2., p. 105). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ , đường phân giác  $AD$ . Biết  $BH = 63$  cm,  $CH = 112$  cm, tính  $HD$ .

**Bài toán 45** ([Tuy23], 3., p. 105). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ . 2 đường trung tuyến  $AD, BE$  vuông góc với nhau tại  $G$ . Biết  $AB = \sqrt{6}$  cm. Tính cạnh huyền  $BC$ .

**Bài toán 46** ([Tuy23], 4., p. 105). Gọi  $a, b, c$  là các cạnh của 1 tam giác vuông,  $h$  là đường cao ứng với cạnh huyền  $a$ . Chứng minh tam giác có các cạnh  $a + h, b + c$ , &  $h$  cũng là 1 tam giác vuông.

**Bài toán 47** ([Tuy23], 5., p. 105). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Gọi  $I, K$  thứ tự là hình chiếu của  $H$  trên  $AB, AC$ . Đặt  $c = AB, b = AC$ . (a) Tính  $AI, AK$  theo  $b, c$ . (b) Chứng minh  $\frac{BI}{CK} = \frac{c^3}{b^3}$ .

**Bài toán 48** ([Tuy23], 6., p. 105). Cho  $\triangle ABC$ ,  $AB = 1, \widehat{A} = 105^\circ, \widehat{B} = 60^\circ$ . Trên cạnh  $BC$  lấy điểm  $E$  sao cho  $BE = 1$ . Vẽ  $ED \parallel AB, D \in AC$ . Chứng minh:  $\frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{4}{3}$ .

**Bài toán 49** ([Tuy23], 7., p. 105). Cho hình chữ nhật  $ABCD$ ,  $AB = 2BC$ . Trên cạnh  $BC$  lấy điểm  $E$ . Tia  $AE$  cắt đường thẳng  $CD$  tại  $F$ . Chứng minh:  $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{4AF^2}$ .

**Bài toán 50** ([Tuy23], 8., p. 105). Cho 3 đoạn thẳng có độ dài  $a, b, c$ . Dựng đoạn thẳng  $x$  sao cho  $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ .

**Bài toán 51** ([Tuy23], 9., p. 105). Cho hình thoi  $ABCD$  có  $\widehat{A} = 120^\circ$ . 1 đường thẳng  $d$  không cắt các cạnh của hình thoi. Chứng minh: tổng các bình phương hình chiếu của 4 cạnh với 2 lần bình phương hình chiếu của đường chéo  $AC$  trên đường thẳng  $d$  không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng  $d$ .

**Bài toán 52** ([Tuy23], 10., p. 106). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ . Từ 1 điểm  $O$  ở trong tam giác ta vẽ  $OD \perp BC, OE \perp CA, OF \perp AB$ . Xác định vị trí của  $O$  để  $OD^2 + OE^2 + OF^2$  nhỏ nhất.

**Bài toán 53** ([Bin+23], Ví dụ 1, p. 5). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Biết  $AB : AC = 3 : 4$  &  $AB + AC = 21$  cm. (a) Tính các cạnh của  $\triangle ABC$ . (b) Tính độ dài các đoạn  $AH, BH, CH$ .

**Bài toán 54** (Mở rộng [Bin+23], Ví dụ 1, p. 5). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Biết  $AB : AC = m : n$  &  $AB + AC = p$  cm. (a) Tính các cạnh của  $\triangle ABC$ . (b) Tính độ dài các đoạn  $AH, BH, CH$ .

**Bài toán 55** ([Bin+23], Ví dụ 2, p. 6). Cho hình thang  $ABCD$  có  $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ, \widehat{B} = 60^\circ, CD = 30$  cm,  $CA \perp CB$ . Tính diện tích của hình thang.

**Bài toán 56** ([Bin+23], Ví dụ 3, p. 7). Cho  $\triangle ABC$  nhọn, đường cao  $CK$ ,  $H$  là trực tâm. Gọi  $M$  là 1 điểm trên  $CK$  sao cho  $\widehat{AMB} = 90^\circ$ .  $S, S_1, S_2$  theo thứ tự là diện tích các  $\triangle AMB, \triangle ABC, \triangle ABH$ . Chứng minh  $S = \sqrt{S_1 S_2}$ .

**Bài toán 57** ([Bin+23], 1.1., p. 7). Cho  $\triangle ABC$  vuông cân tại  $A$  & điểm  $M$  nằm giữa  $B$  &  $C$ . Gọi  $D, E$  lần lượt là hình chiếu của điểm  $M$  lên  $AB, AC$ . Chứng minh  $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$ .

**Bài toán 58** ([Bin+23], 1.2., p. 7). Cho hình chữ nhật  $ABCD$  & điểm  $O$  nằm trong hình chữ nhật đó. Chứng minh  $OA^2 + OC^2 = OB^2 + CD^2$ .

**Bài toán 59** ([Bin+23], 1.3., p. 8). Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AD = 6$  cm,  $CD = 8$  cm. Đường thẳng kẻ từ  $D$  vuông góc với  $AC$  tại  $E$ , cắt cạnh  $AB$  tại  $F$ . Tính độ dài các đoạn thẳng  $DE, DF, AE, CE, AF, BF$ .

**Bài toán 60** ([Bin+23], 1.4., p. 8). Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 3$  cm,  $BC = 4$  cm,  $AC = 5$  cm. Đường cao, đường phân giác, đường trung tuyến của tam giác kẻ từ đỉnh  $B$  chia tam giác thành 4 gam giác không có điểm trong chung. Tính diện tích của mỗi tam giác đó.

**Bài toán 61** ([Bin+23], 1.5., p. 8). Trong 1 tam giác vuông tỷ số giữa đường cao & đường trung tuyến kẻ từ đỉnh góc vuông bằng  $40 : 41$ . Tính độ dài các cạnh góc vuông của tam giác đó, biết cạnh huyền bằng  $\sqrt{41}$  cm.

**Bài toán 62** ([Bin+23], 1.6., p. 8). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Kẻ  $HE \perp AB$ ,  $HF \perp AC$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $AH$  &  $EF$ . Chứng minh  $HB \cdot HC = 4OE \cdot OF$ .

**Bài toán 63** ([Bin+23], 1.7., p. 8).

**Bài toán 64** ([Bin+23], 1.8., p. 8).

**Bài toán 65** ([Bin+23], 1.9., p. 8).

**Bài toán 66** ([Bin+23], 1.10., p. 8).

**Bài toán 67** ([Bin+23], 1.11., p. 8).

**Bài toán 68** ([Bin+23], 1.12., p. 8).

**Bài toán 69** ([Bin+23], 1.13., p. 9).

**Bài toán 70** ([Bin+23], 1.14., p. 9).

**Bài toán 71** ([Bin+23], 1.15., p. 9).

**Bài toán 72** ([Bin+23], 1.16., p. 9).

## 2 Tỷ Số Lượng Giác của Góc Nhọn

**Bài toán 73** ([Tuy23], Thí dụ 2, p. 107). Cho  $\cot \alpha = \frac{a^2 - b^2}{2ab}$  trong đó  $\alpha$  là góc nhọn,  $a > b > 0$ . Tính  $\cos \alpha$ .

**Bài toán 74** ([Tuy23], 11., p. 108, định lý sin). Cho  $\triangle ABC$  nhọn,  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Chứng minh:  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ . Dạng thức này còn đúng với tam giác vuông & tam giác tù hay không?

**Bài toán 75** ([Tuy23], 12., p. 108). Chứng minh: (a)  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ . (b)  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ . (c)  $\cot^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \cot^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$ . (d)  $\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$ .

**Bài toán 76** ([Tuy23], 13., p. 108). Rút gọn biểu thức: (a)  $A = \frac{1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$ . (b)  $B = (1 + \tan^2 \alpha)(1 - \sin^2 \alpha) - (1 + \cot^2 \alpha)(1 - \cos^2 \alpha)$ . (c)  $C = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$ .

**Bài toán 77** ([Tuy23], 14., p. 108). Tính giá trị của biểu thức  $A = 5 \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha$  biết  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ .

**Bài toán 78** ([Tuy23], 15., p. 108). Không dùng máy tính hoặc bảng số, tính: (a)  $A = \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 70^\circ$ . (b)  $B = \sin^2 5^\circ + \sin^2 25^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 65^\circ + \sin^2 85^\circ$ .

**Bài toán 79** ([Tuy23], 16., p. 108). Cho  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Chứng minh:  $\sin \alpha < \tan \alpha$ ,  $\cos \alpha < \cot \alpha$ . Áp dụng: (a) Sắp xếp các số sau theo thứ tự tăng dần:  $\sin 65^\circ, \cos 65^\circ, \tan 65^\circ$ . (b) Xác định  $\alpha$  thỏa mãn điều kiện:  $\tan \alpha > \sin \alpha > \cos \alpha$ .

**Bài toán 80** ([Tuy23], 17., p. 108). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ . Biết  $\sin B = \frac{1}{4}$ , tính  $\tan C$ .

**Bài toán 81** ([Tuy23], 18., p. 108). Cho biết  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}$ ,  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ , tính  $\tan \alpha$ .



- Bài toán 82** ([Tuy23], 19., p. 109).  $\triangle ABC$ , đường trung tuyến  $AM$ . Chứng minh nếu  $\cot B = 3 \cot C$  thì  $AM = AC$ .
- Bài toán 83** ([Tuy23], 20., p. 109). Cho  $\triangle ABC$ , trực tâm  $H$  là trung điểm của đường cao  $AD$ . Chứng minh  $\tan B \tan C = 2$ .
- Bài toán 84** ([Tuy23], 21., p. 109). Cho  $\triangle ABC$  nhọn, 2 đường cao  $BD, CE$ . Chứng minh: (a)  $S_{\triangle ADE} = S_{\triangle ABC} \cos^2 A$ . (b)  $S_{BCDE} = S_{\triangle ABC} \sin^2 A$ .
- Bài toán 85** ([Tuy23], 22., p. 109). Cho  $\triangle ABC$  nhọn. Từ 1 điểm  $M$  nằm trong tam giác vẽ  $MD \perp BC$ ,  $ME \perp AC$ ,  $MF \perp AB$ . Chứng minh  $\max\{MA, MB, MC\} \geq 2 \min\{MD, ME, MF\}$ , trong đó  $\max\{MA, MB, MC\}$  là đoạn thẳng lớn nhất trong các đoạn thẳng  $MA, MB, MC$  &  $\min\{MD, ME, MF\}$  là đoạn thẳng nhỏ nhất trong các đoạn thẳng  $MD, ME, MF$ .

### 3 Hệ Thức về Cạnh & Góc Trong Tam Giác Vuông

- Bài toán 86** ([Tuy23], Thí dụ 3, p. 109). Tứ giác  $ABCD$  có 2 đường chéo cắt nhau tại  $O$ . Cho biết  $\widehat{AOD} = 70^\circ$ ,  $AC = 5.3$  cm,  $BD = 4$  cm. Tính diện tích tứ giác  $ABCD$ .
- Bài toán 87** ([Tuy23], 23., p. 110). Chứng minh: (a) Diện tích của 1 tam giác bằng nửa tích của 2 cạnh nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa 2 cạnh ấy. (b) Diện tích hình bình hành bằng tích của 2 cạnh kề nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa 2 cạnh ấy.
- Bài toán 88** ([Tuy23], 24., p. 110). Cho hình bình hành  $ABCD$ ,  $BD \perp BC$ . Biết  $AB = a$ ,  $\widehat{A} = \alpha$ , tính diện tích hình bình hành đó.
- Bài toán 89** ([Tuy23], 25., p. 110). Cho  $\triangle ABC$ ,  $\widehat{A} = 120^\circ$ ,  $\widehat{B} = 35^\circ$ ,  $AB = 12.25$  dm. Giải  $\triangle ABC$ .
- Bài toán 90** ([Tuy23], 26., p. 110). Cho  $\triangle ABC$  nhọn,  $\widehat{A} = 75^\circ$ ,  $AB = 30$  mm,  $BC = 35$  mm. Giải  $\triangle ABC$ .
- Bài toán 91** ([Tuy23], 27., p. 110). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ , đường cao  $BH$ . Biết  $BH = h$ ,  $\widehat{C} = \alpha$ . Giải  $\triangle ABC$ .
- Bài toán 92** ([Tuy23], 28., p. 110). Hình bình hành  $ABCD$  có  $\widehat{A} = 120^\circ$ ,  $AB = a$ ,  $BC = b$ . Các đường phân giác của 4 góc cắt nhau tạo thành tứ giác  $MNPQ$ . Tính diện tích tứ giác  $MNPQ$ .
- Bài toán 93** ([Tuy23], 29., p. 110). Cho  $\triangle ABC$ , các đường phân giác  $AD$ , đường cao  $BH$ , đường trung tuyến  $CE$  đồng quy tại điểm  $O$ . Chứng minh  $AC \cos A = BC \cos C$ .

### 4 Miscellaneous

- Bài toán 94** ([Tuy23], Thí dụ 4, p. 111). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là 2 điểm trên cạnh  $AB, AC$  sao cho  $AM = \frac{1}{3}AB$ ,  $AN = \frac{1}{3}AC$ . Biết độ dài  $BN = \sin \alpha$ ,  $CM = \cos \alpha$  với  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Tính cạnh huyền  $BC$ .
- Bài toán 95** ([Tuy23], 30., p. 112). Cho  $\triangle ABC$  nhọn,  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $CA = b$  trong đó  $b - c = \frac{a}{k}$ ,  $k > 1$ . Gọi  $h_a, h_b, h_c$  lần lượt là các đường cao hạ từ  $A, B, C$ . Chứng minh: (a)  $\sin A = k(\sin B - \sin C)$ . (b)  $\frac{1}{h_a} = k \left( \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} \right)$ .
- Bài toán 96** ([Tuy23], 31., p. 112). Giải  $\triangle ABC$  biết  $AB = 14$ ,  $BC = 15$ ,  $CA = 13$ .
- Bài toán 97** ([Tuy23], 32., p. 112). Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$ . Biết  $\widehat{DC'D'} = 45^\circ$ ,  $\widehat{BC'B'} = 60^\circ$ . Tính  $\widehat{BC'D}$ .
- Bài toán 98** ([Tuy23], 33., p. 112). Cho  $\triangle ABC$ ,  $AB = AC = 1$ ,  $\widehat{A} = 2\alpha$ ,  $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ . Vẽ các đường cao  $AD, BE$ . (a) Các tỷ số lượng giác  $\sin \alpha, \cos \alpha, \sin 2\alpha, \cos 2\alpha$  được biểu diễn bởi các đoạn thẳng nào? (b) Chứng minh  $\triangle ADC \sim \triangle BEC$ , từ đó suy ra các hệ thức sau:  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ,  $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ . (c) Chứng minh:  $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ ,  $\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$ .
- Bài toán 99** ([Tuy23], 34., p. 112). Cho  $\alpha = 22^\circ 30'$ , tính  $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ .
- Bài toán 100** ([Tuy23], 35., p. 112). Cho  $\triangle ABC$ , đường phân giác  $AD$ . Biết  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $\widehat{A} = 2\alpha$ ,  $\alpha < 45^\circ$ . Chứng minh  $AD = \frac{2bc \cos \alpha}{b + c}$ .

### Tài liệu

- [Bìn+23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Ngọc Dạm, Nguyễn Bá Đang, Lê Quốc Hán, and Hồ Quang Vinh. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 9. Tập 2: Hình Học*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 240.
- [Chí+23] Phan Đức Chính, Tôn Thân, Vũ Hữu Bình, Trần Phương Dung, Ngô Hữu Dũng, Lê Văn Hồng, and Nguyễn Hữu Thảo. *Toán 9 Tập 1*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 128.
- [Thâ+23] Tôn Thân, Vũ Hữu Bình, Trần Phương Dung, Lê Văn Hồng, and Nguyễn Hữu Thảo. *Bài Tập Toán 9 Tập 1*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 216.
- [Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.