Exponentiation & Logarithm
Hàm Số Lũy Thừa, Hàm Số Mũ, & Hàm Số Logarith

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 30 tháng 11 năm 2022

Tóm tắt nội dung

Mục lục

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

1 Cheatsheet

Định lý 1.1 (So sánh các lũy thừa cùng cơ số). *$\forall m,n\in\mathbb{Z}$, $a^m>a^n\Leftrightarrow m>n$, $\forall a>1$; $a^m>a^n\Leftrightarrow m<n$, $\forall a\in(0,1)$.*

2 Problem

Bài toán 2.1 (Quỳnh et al., 2020, Ví dụ 1, p. 42). *Không dùng máy tính, so sánh $99^{100}+100^{100}$ & 101^{100}.*

Giải. Có $99^{100}+100^{100}\le 2\cdot 100^{100}$, cần chứng minh $2\cdot 100^{100}<101^{100}$. Thật vậy, theo bất đẳng thức Bernoulli: $\left(\frac{101}{100}\right)^{100}=\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}>1+100\cdot\frac{1}{100}=2\Rightarrow 2\cdot 100^{100}<101^{100}$. Do đó $99^{100}+100^{100}<101^{100}$. □

"Các bất đẳng thức dạng này khá yếu & thường khi giải bất phương trình mũ, ta sẽ dùng các đánh giá trung gian đưa về cùng số mũ hoặc cùng cơ số rồi so sánh dựa vào định lý 1.1." – Quỳnh et al., 2020, p. 42

"In mathematics, *Bernoulli's inequality* (named after Jacob Bernoulli) is an inequality that approximates exponentiations of $1+x$. It is often employed in real analysis. It has several useful variants: • $(1+x)^r\ge 1+rx$, $\forall r\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $x>-1$. The inequality is strict if $x\ne 0$ & $r\ge 2$. • $(1+x)^r\ge 1+rx$, $\forall r\in\mathbb{N}$, $r\,\vdots\,2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. • $(1+x)^r\ge 1+rx$, $\forall r\in\mathbb{N}$, $\forall x\ge -2$. • $(1+x)^r\ge 1+rx$, $\forall r\in[1,\infty)$, $x\ge -1$. The inequalities are strict if $x\ne 0$ & $r\notin\{0,1\}$. • $(1+x)^r\le 1+rx$, $\forall r\in[0,1]$, $x\ge -1$." – Wikipedia/Bernoulli's inequality

Định lý 2.1 (Bernoulli's inequality). *$(1+x)^r\ge 1+rx$, $\forall r\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $x>-1$.*

Bài toán 2.2 (Mở rộng Quỳnh et al., 2020, Ví dụ 1, p. 42). *So sánh $m^n+(m+1)^n$ & $(m+2)^n$.*

Bài toán 2.3 (Quỳnh et al., 2020, Ví dụ 2, p. 42). *Chứng minh:*

$$\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=\frac{a^4+b^4+c^4}{2}\frac{a^3+b^3+c^3}{3},\ \forall a,b,c\in\mathbb{R},\ a+b+c=0.$$

Bài toán 2.4 (Quỳnh et al., 2020, H1, p. 42). *Với những giá trị nguyên dương nào của n thì $\sum_{i=1}^{9}i^n=1^n+2^n+\cdots+9^n<10^n$?*

Bài toán 2.5 (Quỳnh et al., 2020, Ví dụ 3, p. 43). *Chứng minh: $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=const$, $\forall x\in[4,8]$.*

Giải. $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=\sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2}=|\sqrt{x-4}+2|+|\sqrt{x-4}-2|=\sqrt{x-4}+2+2-\sqrt{x-4}=4$, $\forall x\in[4,8]$, trong đó $|\sqrt{x-4}-2|=2-\sqrt{x-4}$ vì $x\le 8$, nên $\sqrt{x-4}\le\sqrt{8-4}=2$. □

Bài toán 2.6 (Mở rộng Quỳnh et al., 2020, Ví dụ 3, p. 43). *Biện luận theo tham số a để rút gọn biểu thức $A=\sqrt{x+2a\sqrt{x-a^2}}+\sqrt{x-2a\sqrt{x-a^2}}$ & $B=\sqrt{x+2a\sqrt{x-a^2}}-\sqrt{x-2a\sqrt{x-a^2}}$.*

Bài toán 2.7 (Quỳnh et al., 2020, H2, p. 43). *Rút gọn biểu thức $M=\sqrt[3]{11\sqrt{2}+9\sqrt{3}}+\sqrt[3]{11\sqrt{2}-9\sqrt{3}}$.*

Phân tích. Dưới dấu $\sqrt[3]{\cdot}$ là biểu thức có dạng $A\sqrt{2}+B\sqrt{3}$, ta nghĩ ngay đến $(a\sqrt{2}+b\sqrt{3})^3=2a^3\sqrt{2}+6a^2b\sqrt{3}+9ab^2\sqrt{2}+3b^3\sqrt{3}=(2a^3+9ab^2)\sqrt{2}+(6a^2b+3b^3)\sqrt{3}$. Đồng nhất hệ số: $2a^3+9ab^2=11$ & $6a^2b+3b^3=9$, suy ra $a=b=1$, hay $11\sqrt{2}\pm 9\sqrt{3}=(\sqrt{2}\pm\sqrt{3})^3$.

Giải. $M=\sqrt[3]{11\sqrt{2}+9\sqrt{3}}+\sqrt[3]{11\sqrt{2}-9\sqrt{3}}=\sqrt[3]{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3}+\sqrt[3]{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^3}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}=2\sqrt{2}$. □

Từ phân tích trên, ta có 1 mở rộng của bài toán vừa giải như sau:

Bài toán 2.8 (Mở rộng Quỳnh et al., 2020, H2, p. 43). *Rút gọn biểu thức*

$$A=\sqrt[3]{(2a^3+9ab^2)\sqrt{2}+(6a^2b+3b^3)\sqrt{3}}+\sqrt[3]{(2a^3+9ab^2)\sqrt{2}-(6a^2b+3b^3)\sqrt{3}},\ \forall a,b\in\mathbb{R}.$$

Giải. $A=\sqrt[3]{(2a^3+9ab^2)\sqrt{2}+(6a^2b+3b^3)\sqrt{3}}+\sqrt[3]{(2a^3+9ab^2)\sqrt{2}-(6a^2b+3b^3)\sqrt{3}}=\sqrt[3]{(a\sqrt{2}+b\sqrt{3})^3}+\sqrt[3]{(a\sqrt{2}-b\sqrt{3})^3}=a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+a\sqrt{2}-b\sqrt{3}=2a\sqrt{2}$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$. □

Lưu ý 2.1. *Kết quả rút gọn của biểu thức A chỉ phụ thuộc vào mỗi tham số a, & độc lập với tham số b.*

Mở rộng hơn nữa bằng cách thay $\sqrt{2},\sqrt{3}$ bởi $\sqrt{m},\sqrt{n}$:

Bài toán 2.9 (Mở rộng Quỳnh et al., 2020, H2, p. 43). *Rút gọn biểu thức*

Mở rộng hơn nữa bằng cách thay $\sqrt{\cdot}$, $\sqrt[3]{\cdot}$ bởi $\sqrt[n]{\cdot}$.

Bài toán 2.10 (Mở rộng Quỳnh et al., 2020, H2, p. 43). *Rút gọn biểu thức*

3 Phương Trình, Bất Phương Trình Mũ & Logarithm – Exponential & Logarithmic Equation & Inequation

1 số tính chất cơ bản của phương trình mũ & logarithm: • Phương trình $a^x = m$, $0 < a \neq 1$. Nếu $m \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm. Nếu $m > 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \log_a m$. • Phương trình $\log_a x = m$, $0 < a \neq 1$ luôn có nghiệm duy nhất là $x = a^m$.

3.1 Phương trình có dạng $a^{f(x)} = b^{g(x)}$

"*Cách giải chung*: • Nếu $a = b$ thì theo tính chất của hàm số mũ, ta có $f(x) = g(x)$, đưa bài toán về dạng đơn giản hơn – *phương pháp đưa về cùng cơ số*. • Nếu $a \neq b$ thì lấy logarith cơ số a (hoặc b) 2 vế đưa về $f(x) = \log_a b \cdot g(x)$. Do $\log_a b$ cũng là 1 hằng số nên tính chất của phương trình này cũng tương tự trường hợp $a = b$." – Quỳnh et al., 2020, p. 71

Bài toán 3.1 (Quỳnh et al., 2020, Ví dụ 1, p. 71)**.** *Giải phương trình sau: (a)* $(5^{x+2})^{x+1} + (5^x)^{x+3} = (2^{x+1})^{x+5} - 6(2^{x+6})^x$. *(b)* $(10 + 6\sqrt{3})^{2\sin x} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^{\sin 4x}}$. *(c)* $\left(\frac{8}{3}\right)^{x^2-x+1}\left(\frac{3}{5}\right)^{2x^2-3x+2}\left(\frac{5}{7}\right)^{3x^2-4x+3}\left(\frac{7}{2}\right)^{4x^2-5x+4} = 210^{(x-1)^2}$.

Bài toán 3.2 (Quỳnh et al., 2020, H1, p. 72)**.** *(a) Giải các phương trình sau:* $2^x \cdot 3^x \cdot 4^{x^2} = 4 \cdot 36^{\frac{x}{x+1}}$. *(b) Với* $a > 1$, *giải phương trình* $\left(\frac{a}{a^2+1}\right)^x \left(\frac{a^2-1}{a^2-1}\right)^{2x} = 6$.

Tài liệu

Quỳnh, Đoàn et al. (2020). *Tài Liệu Chuyên Toán Giải Tích 12*. Tái bản lần thứ 4. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 364.