

Congruent Triangle – Tam Giác Đồng Dạng

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 18 tháng 2 năm 2023

Tóm tắt nội dung

[EN] This text is a collection of problems, from easy to advanced, about *congruent triangle*. This text is also a supplementary material for my lecture note on Elementary Mathematics grade 8, which is stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_8/lecture)¹. The latest version of this text has been stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/congruent triangle](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_8/congruent_triangle)².

[VI] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài tập chọn lọc từ cơ bản đến nâng cao về *tam giác đồng dạng*. Tài liệu này là phần bài tập bổ sung cho tài liệu chính – bài giảng [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_8/lecture) của tác giả viết cho Toán Sơ Cấp lớp 8. Phiên bản mới nhất của tài liệu này được lưu trữ & có thể tải xuống ở link sau: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/congruent triangle](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_8/congruent_triangle).

Nội dung. Định lý Thales, tam giác đồng dạng.

Mục lục

1 Định Lý Thales Trong Tam Giác	2
2 Định Lý Đảo & Hệ Quả của Định Lý Thales	2
3 Tính Chất Đường Phân Giác của Tam Giác	2
4 Khái Niệm 2 Tam Giác Đồng Dạng	3
5 Trường Hợp Đồng Dạng Thứ Nhất	4
6 Trường Hợp Đồng Dạng Thứ 2	4
7 Trường Hợp Đồng Dạng Thứ 3	4
8 Các Trường Hợp Đồng Dạng của Tam Giác Vuông	4
9 Ứng Dụng Thực Tế của Tam Giác Đồng Dạng	4
10 Miscellaneous	4
Tài liệu	4

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

¹URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/NQBH_elementary_mathematics_grade_8.pdf.

²URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/congruent_triangle/NQBH_congruent_triangle.pdf.

1 Định Lý Thales Trong Tam Giác

Định nghĩa 1 (Tỷ số của 2 đoạn thẳng). Tỷ số của 2 đoạn thẳng là tỷ số độ dài của chúng theo cùng 1 đơn vị đo.

Tỷ số của 2 đoạn thẳng AB, CD được ký hiệu là $\frac{AB}{CD}$. Tỷ số của 2 đoạn thẳng không phụ thuộc vào cách chọn đơn vị đo, e.g., $\frac{2\text{km}}{3\text{km}} = \frac{2\cancel{\text{km}}}{3\cancel{\text{km}}} = \frac{2}{3}$, $\frac{3\text{cm}}{4\text{cm}} = \frac{3\cancel{\text{cm}}}{4\cancel{\text{cm}}} = \frac{3}{4}$, $\frac{4\text{nm}}{5\text{nm}} = \frac{4\cancel{\text{nm}}}{5\cancel{\text{nm}}} = \frac{4}{5}$ (dễ hiểu: 2 đơn vị trên tử & mẫu sẽ triệt tiêu lẫn nhau).

Định nghĩa 2 (2 đoạn thẳng tỷ lệ). 2 đoạn thẳng AB, CD gọi là tỷ lệ với 2 đoạn thẳng $A'B', C'D'$ nếu có tỷ lệ thức: $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$ hay $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$.

Định lý 1 (Thales). Nếu 1 đường thẳng song song với 1 cạnh của tam giác \mathcal{E} cắt 2 cạnh còn lại thì nó định ra trên 2 cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ.

$$\text{GT: } \triangle ABC, B'C' \parallel BC, B' \in AB, C' \in AC. \text{ KL: } \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}, \frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C} = \frac{B'C'}{BC-B'C'}, \frac{B'B}{AB} = \frac{C'C}{AC} = \frac{BC-B'C'}{B'C'}.$$

Bài toán 1 (Chính et al., 2022, ?4, p. 58). (a) Cho $\triangle ABC$. Đường thẳng $al \parallel BC$ cắt 2 cạnh AB, AC lần lượt tại D, E . Biết $AD = \sqrt{3}$, $BD = 5$, $CE = 10$. Tính AE . (b) Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Trên BC, AC lần lượt lấy D, E sao cho $DE \parallel AB$. Biết $CD = 5$, $BD = 3.5$, $CE = 4$. Tính AC, AB .

Bài toán 2 (Chính et al., 2022, 3, p. 59). (a) Cho biết độ dài của AB gấp 5 lần độ dài của CD & độ dài của $A'B'$ gấp 12 lần độ dài của CD . Tính tỷ số của 2 đoạn thẳng $AB, A'B'$. (b) Cho biết độ dài của AB gấp a lần độ dài của CD & độ dài của $A'B'$ gấp b lần độ dài của CD với $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$. Tính tỷ số của 2 đoạn thẳng $AB, A'B'$.

Bài toán 3 (Chính et al., 2022, 4, p. 59). Cho $\triangle ABC$, $B' \in AB$, $C' \in AC$. Cho biết $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$. Chứng minh: (a) $\frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}$. (b) $\frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC}$.

2 Định Lý Đảo & Hệ Quả của Định Lý Thales

Định lý 2 (Thales đảo). Nếu 1 đường thẳng cắt 2 cạnh của 1 tam giác \mathcal{E} định ra trên 2 cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

$$\text{GT: } \triangle ABC, B' \in AB, C' \in AC, \frac{A'B'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}. \text{ KL: } B'C' \parallel BC.$$

Bài toán 4 (Chính et al., 2022, ?2, p. 60). Cho $\triangle ABC$. $D \in AB, E \in AC, F \in BC$, $AD = 3$, $BD = 6$, $AE = 5$, $CE = 10$, $BF = 7$, $CF = 14$. (a) Có bao nhiêu cặp đường thẳng song song với nhau. (b) Tứ giác $BDEF$ là hình gì? (c) So sánh các tỷ số $\frac{AD}{AB}$, $\frac{AE}{AC}$, $\frac{DE}{BC}$ & cho nhận xét về mối liên hệ giữa các cặp cạnh tương ứng của $\triangle ADE$ & $\triangle ABC$.

Hệ quả 1. Nếu 1 đường thẳng cắt 2 cạnh của 1 tam giác \mathcal{E} song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành 1 tam giác mới có 3 cạnh tương ứng tỷ lệ với 3 cạnh của tam giác đã cho.

GT: $\triangle ABC$, $B'C' \parallel BC$, $B' \in AB$, $C' \in AC$. KL: $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$. Hệ quả 1 vẫn đúng cho trường hợp đường thẳng a song song với 1 cạnh của tam giác & cắt phần kéo dài của 2 cạnh còn lại.

Bài tập phụ thuộc hình vẽ: Chính et al., 2022, ?3, 6.-8., pp. 62-63.

Bài toán 5 (Chính et al., 2022, 9., p. 63). Cho $\triangle ABC$ & $D \in AB$ sao cho $AD = 13.5\text{cm}$, $BD = 4.5\text{cm}$. Tính tỷ số các khoảng cách từ các điểm D & B đến cạnh AC .

Bài toán 6 (Chính et al., 2022, 10., p. 63). $\triangle ABC$ có đường cao AH . Đường thẳng d song song với BC , cắt các cạnh AB, AC , & đường cao AH theo thứ tự tại các điểm B', C' , & H' . (a) Chứng minh: $\frac{AH'}{AH} = \frac{B'C'}{BC}$. (b) Áp dụng: Cho biết $AH' = \frac{1}{3}AH$ & diện tích $\triangle ABC$ là 67.5cm^2 . Tính diện tích $\triangle AB'C'$.

Bài toán 7 (Chính et al., 2022, 11., p. 63). $\triangle ABC$ có $BC = 15\text{cm}$. Trên đường cao AH lấy các điểm I, K sao cho $AK = KI = IH$. Qua I, K vẽ các đường $EF \parallel BC$, $MN \parallel BC$. (a) Tính độ dài các đoạn thẳng MN, EF . (b) Tính diện tích tứ giác $MNFE$ biết diện tích $\triangle ABC$ là 270cm^2 .

Bài tập phụ thuộc hình vẽ: Chính et al., 2022, 12.-13., p. 64.

Bài toán 8 (Chính et al., 2022, 11., p. 64). Cho 3 đoạn thẳng có độ dài là m, n, p (cùng đơn vị đo). Dựng đoạn thẳng có độ dài x sao cho: (a) $\frac{x}{m} = 2$; (b) $\frac{x}{n} = \frac{2}{3}$; (c) $\frac{m}{x} = \frac{n}{p}$.

3 Tính Chất Đường Phân Giác của Tam Giác

Định lý 3. Trong tam giác, đường phân giác của 1 góc chia cạnh đối diện thành 2 đoạn thẳng tỷ lệ với 2 cạnh kề 2 đoạn ấy.

GT: $\triangle ABC$, AD là tia phân giác của \widehat{BAC} , $D \in BC$. KL: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Định lý vẫn đúng đối với tia phân giác của góc ngoài của tam giác.

1st chứng minh. Qua đỉnh B vẽ đường thẳng song song với AC , cắt đường thẳng AD tại điểm E . Có: $\widehat{BAE} = \widehat{CAE}$ (gt). $BE \parallel AC \Rightarrow \widehat{BEA} = \widehat{CAE}$ (so le trong). Suy ra $\widehat{BAE} = \widehat{BEA}$. Do đó $\triangle ABE$ cân tại B , suy ra $BE = AB$ (1). Áp dụng hệ quả 1 của định lý Thales đối với $\triangle DAC$: $\frac{DB}{DC} = \frac{BE}{AC}$ (2). Từ (1)–(2) suy ra $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$. \square

Cách chứng minh sau dựa vào công thức lượng giác tính diện tích tam giác.

2nd chứng minh. Gọi AH là đường cao của $\triangle ABC$ ứng với cạnh BC , $H \in BC$. Có $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2}BD \cdot AH}{\frac{1}{2}CD \cdot AH} = \frac{BD}{DC}$. Cũng có:

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2}AD \cdot AB \sin \widehat{DAB}}{\frac{1}{2}AD \cdot AC \sin \widehat{DAC}} = \frac{\frac{1}{2}AD \cdot AB \sin \frac{\widehat{A}}{2}}{\frac{1}{2}AD \cdot AC \sin \frac{\widehat{A}}{2}} = \frac{AB}{AC}.$$

Kết hợp 2 đẳng thức trên suy ra $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$. \square

Cách chứng minh thứ 2 cho ta 1 kết quả tổng quát hơn khi AD không phải là tia phân giác:

Bài toán 9. Cho $\triangle ABC$, $D \in BC$. Chứng minh $\frac{DB}{DC} = \frac{AB \sin \widehat{DAB}}{AC \sin \widehat{DAC}}$.

Chứng minh. Gọi AH là đường cao của $\triangle ABC$ ứng với cạnh BC , $H \in BC$. Có $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2}BD \cdot AH}{\frac{1}{2}CD \cdot AH} = \frac{BD}{DC}$. Cũng có:

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2}AD \cdot AB \sin \widehat{DAB}}{\frac{1}{2}AD \cdot AC \sin \widehat{DAC}} = \frac{AB \sin \widehat{DAB}}{AC \sin \widehat{DAC}}.$$

Kết hợp 2 đẳng thức trên suy ra $\frac{DB}{DC} = \frac{AB \sin \widehat{DAB}}{AC \sin \widehat{DAC}}$. \square

Bài tập phụ thuộc hình vẽ: Chính et al., 2022, ?2–?3, 15. p. 67.

Bài toán 10 (Chính et al., 2022, 16., p. 67). $\triangle ABC$ có độ dài các cạnh $AB = m$, $AC = n$, \mathcal{E} AD là đường phân giác. Chứng minh tỷ số diện tích của $\triangle ABD$ \mathcal{E} diện tích của $\triangle ACD$ bằng $\frac{m}{n}$.

Bài toán 11 (Chính et al., 2022, 17., p. 68). Cho $\triangle ABC$ với đường trung tuyến AM . Tia phân giác của góc AMB cắt cạnh AB ở D , tia phân giác của góc AMC cắt cạnh AC ở E . Chứng minh $DE \parallel BC$.

Bài toán 12 (Chính et al., 2022, 18., p. 68). $\triangle ABC$ có $AB = 5\text{cm}$, $AC = 6\text{cm}$, \mathcal{E} $BC = 7\text{cm}$. Tia phân giác của góc BAC cắt cạnh BC tại E . Tính các đoạn EB, EC .

Bài toán 13 (Chính et al., 2022, 19., p. 68). Cho hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$. Đường thẳng a song song với DC , cắt các cạnh AD, BC theo thứ tự tại E, F . Chứng minh: (a) $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$; (b) $\frac{AE}{AD} = \frac{BF}{BC}$; (c) $\frac{DE}{DA} = \frac{CF}{CB}$.

Bài toán 14 (Chính et al., 2022, 20., p. 68). Cho hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$. 2 đường chéo AC, BD cắt nhau tại O . Đường thẳng a qua O \mathcal{E} song song với đáy của hình thang cắt các cạnh bên AD, BC theo thứ tự tại E, F . Chứng minh $OE = OF$.

Bài toán 15 (Chính et al., 2022, 21., p. 68). (a) Cho $\triangle ABC$ với đường trung tuyến AM \mathcal{E} đường phân giác AD . Tính diện tích $\triangle ADM$ biết $AB = m$, $AC = n$, $n > m$, \mathcal{E} diện tích của $\triangle ABC$ là S . (b) Cho $n = 7\text{cm}$, $m = 3\text{cm}$, hỏi diện tích $\triangle ADM$ chiếm bao nhiêu % diện tích $\triangle ABC$?

Bài toán 16 (Chính et al., 2022, 22., p. 68). Cho A, B, C, D, E, F, G thẳng hàng theo thứ tự đó \mathcal{E} O nằm ngoài đường thẳng chứa 7 điểm đó sao cho $\widehat{OAB} = \widehat{OBC} = \widehat{OCD} = \widehat{ODE} = \widehat{OEF} = \widehat{OFG}$. Đặt $OA = a, OB = b, OC = c, OD = d, OE = e, OF = f, OG = g, AB = x, BC = y, CD = z, DE = t, EF = u, FG = v$. Thiết lập những tỷ lệ thức từ các kích thước đã cho.

4 Khái Niệm 2 Tam Giác Đồng Dạng

Định nghĩa 3 (2 tam giác đồng dạng). $\triangle A'B'C'$ gọi là đồng dạng với $\triangle ABC$ nếu: $\widehat{A'} = \widehat{A}$, $\widehat{B'} = \widehat{B}$, $\widehat{C'} = \widehat{C}$, $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$.

$\triangle A'B'C'$ đồng dạng với $\triangle ABC$ được ký hiệu là $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ (viết theo thứ tự cặp đỉnh tương ứng). Tỷ số các cạnh tương ứng $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k$ gọi là tỷ số đồng dạng.

Bài toán 17 (Chính et al., 2022, ?2., p. 70). (a) Nếu $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ thì $\triangle A'B'C'$ có đồng dạng với $\triangle ABC$ không? Tỷ số đồng dạng là bao nhiêu? (b) Nếu $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ theo tỷ số k thì $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ theo tỷ số nào?

Định lý 4 (Tính chất 2 tam giác đồng dạng). (a) Mỗi tam giác đồng dạng với chính nó với tỷ số đồng dạng $k = 1$. (b) Nếu $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ với tỷ số đồng dạng k thì $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ với tỷ số đồng dạng $\frac{1}{k}$. (c) Nếu $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ với tỷ số đồng dạng k' \mathcal{E} $\triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C''$ với tỷ số đồng dạng k'' thì $\triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$ với tỷ số đồng dạng $k = k'k''$.

Do tính chất (b) ta nói $\triangle ABC$ & $\triangle A'B'C'$ đồng dạng (với nhau).

Bài toán 18 (Chính et al., 2022, ?3., p. 70). Cho $\triangle ABC$. Kẻ đường thẳng a song song với cạnh BC & cắt 2 cạnh AB, AC theo thứ tự tại M, N . $\triangle AMN$ & $\triangle ABC$ có các góc & các cạnh tương ứng như thế nào?

Định lý 5. Nếu 1 đường thẳng cắt 2 cạnh của tam giác & song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành 1 tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho.

GT: $\triangle ABC$, $MN \parallel BC$, $M \in AB$, $N \in AC$. KL: $\triangle AMN \sim \triangle ABC$. Định lý cũng đúng cho trường hợp đường thẳng a cắt phần kéo dài 2 cạnh của tam giác & song song với cạnh còn lại.

Chứng minh. Xét $\triangle ABC$ & $MN \parallel BC$. $\triangle AMN$ & $\triangle ABC$ có: $\widehat{AMN} = \widehat{ABC}$, $\widehat{ANM} = \widehat{ACB}$ (các cặp góc đồng vị); \widehat{BAC} là góc chung. Mặt khác, theo hệ quả 1 của định lý Thales, $\triangle AMN$ & $\triangle ABC$ có 3 cặp cạnh tương ứng tỷ lệ: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$. Vậy $\triangle AMN \sim \triangle ABC$. \square

Bài toán 19 (Chính et al., 2022, 23., p. 71). Đ/S? (a) 2 tam giác bằng nhau thì đồng dạng với nhau. (b) 2 tam giác đồng dạng với nhau thì bằng nhau.

Bài toán 20 (Chính et al., 2022, 24., p. 72). $\triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C''$ theo tỷ số đồng dạng k_1 , $\triangle A''B''C'' \sim \triangle ABC$ theo tỷ số đồng dạng k_2 . Hỏi $\triangle A'B'C'$ đồng dạng với $\triangle ABC$ theo tỷ số nào?

Bài toán 21 (Chính et al., 2022, 25., p. 72). Cho $\triangle ABC$. Vẽ 1 tam giác đồng dạng với $\triangle ABC$ theo tỷ số $\frac{1}{2}$.

Bài toán 22 (Chính et al., 2022, 26., p. 72). Cho $\triangle ABC$, vẽ $\triangle A'B'C'$ đồng dạng với $\triangle ABC$ theo tỷ số đồng dạng $k = \frac{2}{3}$.

Bài toán 23 (Chính et al., 2022, 27., p. 72). Từ điểm M thuộc cạnh AB của $\triangle ABC$ với $AM = \frac{1}{2}MB$, kẻ các tia song song với AC, BC , chúng cắt BC, AC lần lượt tại L, N . (a) Nêu tất cả các cặp tam giác đồng dạng. (b) Đối với mỗi cặp tam giác đồng dạng, viết các cặp góc bằng nhau & tỷ số đồng dạng tương ứng.

Bài toán 24 (Chính et al., 2022, 28., p. 72). $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ theo tỷ số đồng dạng $k = \frac{3}{5}$. (a) Tính tỷ số chu vi của 2 tam giác đã cho. (b) Tính tỷ số diện tích của 2 tam giác đã cho. (c) Cho biết hiệu chu vi của 2 tam giác trên là 40dm, tính chu vi của mỗi tam giác.

5 Trường Hợp Đồng Dạng Thứ Nhất

6 Trường Hợp Đồng Dạng Thứ 2

7 Trường Hợp Đồng Dạng Thứ 3

8 Các Trường Hợp Đồng Dạng của Tam Giác Vuông

9 Ứng Dụng Thực Tế của Tam Giác Đồng Dạng

10 Miscellaneous

Tài liệu

Chính, Phan Đức, Tôn Thân, Nguyễn Huy Doan, Lê Văn Hồng, Trương Công Thành, and Nguyễn Hữu Thảo (2022). *Toán 8 Tập 2*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 133.