Some Topics in Elementary Mathematics/Grade 11

Nguyễn Quản Bá Hồng[1]

Ngày 26 tháng 9 năm 2022

[1]Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

Mục lục

Phần I

Đại Số & Giải Tích – Algebra & Analysis

Chương 1

Hàm Số Lượng Giác & Phương Trình Lượng Giác – Trigonometric Function & Trigonometric Equation

"Nhiều hiện tượng tuần hoàn đơn giản trong thực tế được mô tả bởi những hàm số lượng giác. Chương này cung cấp những kiến thức cơ bản về các *hàm số lượng giác* & cách giải các *phương trình lượng giác* đơn giản." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, p. 3

> **Nội dung.** *Tính chất tuần hoàn của các hàm số lượng giác & phương pháp sử dụng đường tròn lượng giác để tìm nghiệm của các phương trình lượng giác cơ bản, kỹ năng biến đổi lượng giác & kỹ năng giải các dạng phương trình lượng giác.*

1.1 Công Thức Lượng Giác

Nội dung. *1 số công thức lượng giác cơ bản, trình bày số phức dưới dạng lượng giác & ứng dụng.*

1.1.1 Công thức lượng giác cơ bản

1.1.1.1 Công thức cộng

$$\boxed{\begin{cases}\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,\\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,\\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.\end{cases}\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}.} \tag{ctc}$$

Có thể viết tắt (ctc)bằng cách sử dụng các ký hiệu $\pm,\mp$ như sau:

$$\boxed{\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta,\ \sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}.}$$

Chứng minh (ctc). **(a)** "Ta chỉ cần chứng minh công thức đầu tiên rồi từ đó dùng giá trị lượng giác của các góc liên kết để suy ra các công thức còn lại. Giả sử các điểm M & N nằm trên đường tròn lượng giác tâm O, gốc A sao cho góc lượng giác $(OA,OM)=\alpha$, $(OA,ON)=\beta$ thì $\overrightarrow{OM}$ có tọa độ $(\cos\alpha;\sin\alpha)$, $\overrightarrow{ON}$ có tọa độ $(\cos\beta;\sin\beta)$, từ đó tích vô hướng $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$. Mặt khác, $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=|\overrightarrow{OM}||\overrightarrow{ON}|\cos\widehat{NOM}=\cos\widehat{NOM}=\cos(ON,OM)$ $=\cos[(OA,OM)-(OA,ON)]=\cos(\alpha-\beta)$, nên suy ra $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, pp. 5–6. **(b)** Thay β trong công thức vừa thu được ở (a) bởi $-\beta$, $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$ $=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$. **(c)** $\sin(\alpha-\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$, trong đó ta sử dụng công thức $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$[1] & công thức vừa chứng minh ở (b) với α được thay bởi $\frac{\pi}{2}-\alpha$. **(d)** Thay β trong công thức vừa thu được ở (c) bởi $-\beta$. Các công thức cộng (ctc) được chứng minh. □

[1] I.e., với 2 góc phụ nhau, sin 1 góc bất kỳ bằng côsin góc còn lại.

Kiểm tra nhanh tính hợp lý của (ctc):

$$\begin{aligned}
&\sin^2(\alpha-\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)=(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)^2+(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)^2\\
&\quad=\sin^2\alpha\cos^2\beta-2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta\\
&\quad=\sin^2\alpha\cos^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\beta+\cos^2\beta)=1,\\
&\sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)^2+(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)^2\\
&\quad=\sin^\alpha\cos^2\beta+2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta\\
&\quad=\sin^2\alpha\cos^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\beta+\cos^2\beta)=1.
\end{aligned}$$

Từ (ctc) dễ suy ra:

$$\boxed{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},\ \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta},\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}\text{ s.t. }\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha\pm\beta)\neq0,\ \tan\alpha\tan\beta\neq\pm1.}\tag{ctc'}$$

Công thức (ctc') cũng được gọi là công thức cộng. Có thể viết tắt (ctc')bằng cách sử dụng các ký hiệu $\pm,\mp$ như sau:

$$\boxed{\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta},\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}\text{ s.t. }\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha\pm\beta)\neq0,\ \tan\alpha\tan\beta\neq\pm1.}$$

1st Chứng minh (ctc'). Sử dụng (ctc), với $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ thỏa giả thiết,

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},$$

trong đó đẳng thức thứ 3 thu được bằng cách chia cả tử thức & mẫu thức cho $\cos\alpha\cos\beta$ (phép chia này có nghĩa vì $\cos\alpha\cos\beta\neq0$). Thay β bởi $-\beta$ trong biểu thức vừa thu được, ta thu được biểu thức còn lại. □

Ta vừa chứng minh (ctc') từ vế trái sang vế phải (i.e., LHS $=\cdots=$ RHS[2], hay VT $=\cdots=$ VP), cách chứng minh sau đi theo chiều ngược lại (i.e., RHS $=\cdots=$ LHS, hay VP $=\cdots=$ VT).

2nd Chứng minh (ctc'). Với $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ thỏa giả thiết,

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\tan(\alpha+\beta),$$

trong đó đẳng thức thứ 3 sử dụng (ctc). Thay β bởi $-\beta$ trong biểu thức vừa thu được, ta thu được biểu thức còn lại. □

1.1.1.2 Công thức nhân đôi, nhân 3

Áp dụng công thức cộng (ctc)–(ctc') với $\alpha=\beta$,

$$\boxed{\begin{cases}\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha,\ \sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}\\ \tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha},\ \forall\alpha\in\mathbb{R}\text{ s.t. }\cos2\alpha\neq0,\ \tan\alpha\neq\pm1.\end{cases}}\tag{ctn2}$$

& áp dụng tiếp (ctc) với $(\alpha,\beta)=(\alpha,2\alpha)$,

$$\boxed{\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha,\ \sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}.}\tag{ctn3}$$

Chứng minh (ctn2). Với $\alpha\in\mathbb{R}$ bất kỳ, áp dụng (ctc) với $(\alpha,\beta)=(\alpha,2\alpha)$:

$$\begin{aligned}
&\cos3\alpha=\cos(\alpha+2\alpha)=\cos\alpha(2\cos^2\alpha-1)-2\sin^2\alpha\cos\alpha=\cos\alpha(2\cos^2\alpha-1)-2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha,\\
&\sin3\alpha=\sin(\alpha+2\alpha)=\sin\alpha\cos2\alpha+\cos\alpha\sin2\alpha=\sin\alpha(1-2\sin^2\alpha)+2\sin\alpha\cos^2\alpha\\
&\quad=\sin\alpha(1-2\sin^2\alpha)+2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha.
\end{aligned}$$

Hoàn tất chứng minh. □

[2] LHS is the abbreviation of 'Left Hand Side' & RHS is the abbreviation of 'Right Hand Side'. In many English texts in mathematics, the abbreviations l.h.s. & r.h.s. are also used. In Vietnamese texts in mathematics, the abbreviations VT (vế trái) & VP/VF (vế phải) are commonly used.

Lưu ý 1.1.1 (Các khai triển khác của $\sin 3\alpha, \cos 3\alpha$)**.** *Sử dụng các biểu thức khác của* $\sin 2\alpha$ *&* $\cos 2\alpha$*, ta cũng thu được:*

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha = \cos\alpha - 4\sin^2\alpha\cos\alpha,$$
$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 4\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin\alpha = \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha\cos^2\alpha.$$

Tuy nhiên, 2 công thức của (ctn3) *mang lại nhiều lợi thế hơn do chúng là 2 đa thức bậc 3 của hàm* $\sin\alpha$ *&* $\cos\alpha$*, chứ không phải là 1 biểu thức đại số gồm cả* $\sin\alpha$ *&* $\cos\alpha$*.*

1.1.1.3 Công thức hạ bậc

Từ công thức nhân đôi (ctn2) suy ra công thức hạ bậc:

$$\boxed{\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2},\ \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},\ \forall\alpha\in\mathbb{R}.} \tag{cthb}$$

1.1.1.4 Công thức biến đổi tích thành tổng & công thức biến đổi tổng thành tích

"Từ các công thức cộng (ctc), dễ dàng suy ra

$$\boxed{\begin{cases} \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)], & \sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)],\\ \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)], & \cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)],\end{cases}\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}.}$$

Trong các công thức đó, đặt $x \coloneqq \alpha+\beta$, $y \coloneqq \alpha-\beta$ thì suy ra

$$\boxed{\begin{cases} \cos x+\cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, & \cos x-\cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},\\ \sin x+\sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, & \sin x-\sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},\end{cases}\ \forall x,y\in\mathbb{R}.}$$

Tất cả các công thức trên được dùng nhiều khi giải phương trình lượng giác." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 7

1.1.2 Số phức & dạng lượng giác của nó – Complex number & its trigonometric representation

1.1.2.1 Số phức – Complex number

"Người ta xây dựng được 1 tập hợp số gọi là *tập hợp số phức*, ký hiệu $\mathbb{C}$, chứa tập hợp số thực $\mathbb{R}$, trong đó có 2 phép toán cộng & nhân (mà khi thu hẹp lên $\mathbb{R}$ thì đó là phép toán cộng, nhân số thực) thỏa mãn các tính chất tương tự phép toán cộng & nhân số thực (giao, hoán, kết hợp, phân phối, ...), trong đó mọi số thực âm đều có căn bậc 2, mọi phương trình đa thức đều có nghiệm. Cụ thể là:

(a) Mỗi số phức được viết dưới dạng $z = a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$, i là *đơn vị ảo* ($i^2=-1$), a gọi là phần thực của z, b gọi là *phần ảo của* z.

`Skipped due to Toan 12`" – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 7

1.2 Các Hàm Số Lượng Giác – Trigonometric Functions

"Các hàm số lượng giác/trigonometric[3] [4] functions thường được dùng để mô tả những hiện tượng thay đổi 1 cách tuần hoàn hay gặp trong thực tiễn, khoa học & kỹ thuật." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, p. 4

[3]**trigonometric** [a] (also **trigonometrical**) (*mathematics*) connected with the types of mathematics that deals with the relationship between the sides & angles of triangles.

[4]**trigonometry** [n] [uncountable] the type of mathematics that deals with the relationship between the sides & angles of triangles.

1.2.1 Các hàm số $y = \sin x$ & $y = \cos x$

1.2.1.1 Khái niệm

Định nghĩa 1.2.1 (Hàm số sin, cos)**.** *Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực $x \in \mathbb{R}$ với* sin *của góc lượng giác có số đo radian bằng x được gọi là* hàm số sin*, ký hiệu là $y = \sin x$. Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực $x \in \mathbb{R}$ với côsin của góc lượng giác có số đo radian bằng x được gọi là* hàm số côsin*, ký hiệu là $y = \cos x$.*

"Tập xác định của các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ là $\mathbb{R}$. Do đó các hàm số sin & côsin được viết là:

$$\begin{array}{rl} \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin x \end{array}, \qquad \begin{array}{rl} \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos x \end{array}.$$

Hàm số $y = \sin x$ là 1 *hàm số lẻ* vì $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, trong khi hàm số $y = \cos x$ là 1 *hàm số chẵn* vì $\cos(-x) = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, p. 4. Về định nghĩa & tính chất của hàm số chẵn & hàm số lẻ, xem Sect. A.1. Có thể xem thêm Wikipedia/hàm số chẵn & lẻ & Wikipedia/even & odd functions.

1.2.1.2 Tính chất tuần hoàn của các hàm số $y = \sin x$ & $y = \cos x$

"Với mỗi $k \in \mathbb{Z}$, số $k2\pi$ thỏa mãn: $\sin(x + k2\pi) = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Ngược lại, có thể chứng minh rằng số T sao cho $\sin(x + T) = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ phải có dạng $T = k2\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$. Rõ ràng, trong các số dạng $k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), số dương nhỏ nhất là 2π. Vậy đối với hàm số $y = \sin x$, số $T = 2\pi$ là số dương nhỏ nhất thỏa mãn $\sin(x + T) = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = \cos x$ cũng có tinh chất tương tự. Ta nói 2 hàm số đó là những *hàm số tuần hoàn với chu kỳ* 2π.

Từ tính chất tuần hoàn với chu kỳ 2π, ta thấy khi biết giá trị các hàm số $y = \sin x$ & $y = \cos x$ trên 1 đoạn có độ dài 2π (e.g., đoạn $[0; 2\pi]$ hay đoạn $[-\pi; \pi]$) thì ta tính được giá trị của chúng tại mọi $x \in \mathbb{R}$. (Cứ mỗi khi biến số được cộng thêm 2π thì giá trị của các hàm số đó lại trở về như cũ; điều này giải thích từ "tuần hoàn")." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, p. 4–5

1.2.1.3 Sự biến thiên & đồ thị của hàm số $y = \sin x$

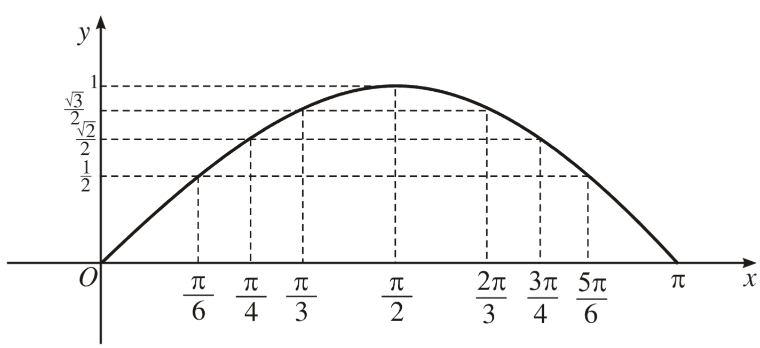
"Do hàm số $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π nên ta chỉ cần khảo sát hàm số đó trên 1 đoạn có độ dài 2π, e.g., trên đoạn $[-\pi; \pi]$."

- **Chiều biến thiên.** *Bảng biến thiên của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn* $[-\pi; \pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$y = \sin x$	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0

Hình 1.1: Bảng biến thiên của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$.

- **Đồ thị.** "Khi vẽ đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$, ta nên để ý rằng: Hàm số $y = \sin x$ là 1 hàm số lẻ, do đó đồ thị của nó nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng. Vì vậy, đầu tiên ta vẽ đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; \pi]$.



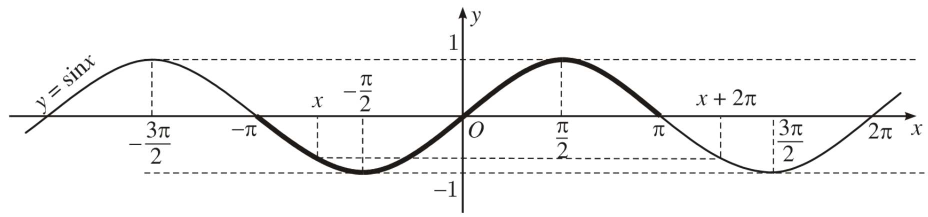
Hình 1.2: Đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0, \pi]$.

Trên đoạn $[0; \pi]$, đồ thị của hàm số $y = \sin x$ (Fig. 1.2) đi qua các điểm có tọa độ $(x; y)$ trong bảng sau:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$y = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Bảng 1.1: Các giá trị của hàm $y = \sin x$ tại 1 số điểm $\in [0; \pi]$.

Phần đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; \pi]$ cùng với hình đối xứng của nó qua gốc O lập thành đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi, \pi]$ (Fig. 1.3).



Hình 1.3: Đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên $\mathbb{R}$ – *đường hình sin*.

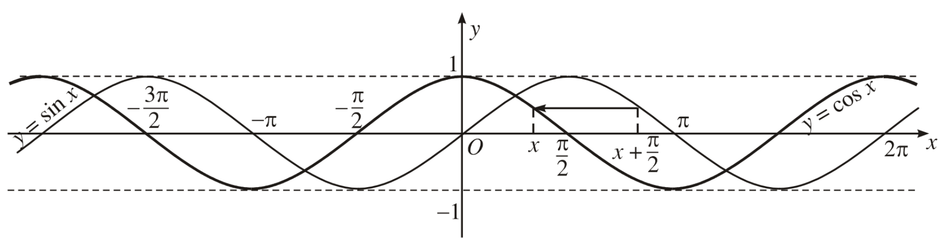
Tịnh tiến phần đồ thị vừa vẽ sang trái, sang phải những đoạn có độ dài $2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$ thì được toàn bộ đồ thị hàm số $y = \sin x$. Đồ thị đó được gọi là 1 *đường hình sin* (Fig. 1.3).” – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, pp. 6–7

Nhận xét 1.2.1. *1. “Khi x thay đổi, hàm số $y = \sin x$ nhận mọi giá trị thuộc đoạn $[-1; 1]$. Ta nói* tập giá trị *của hàm số $y = \sin x$ là đoạn $[-1; 1]$.*

2. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Từ đó, do tính chất tuần hoàn với chu kỳ 2π, hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.” – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, p. 7

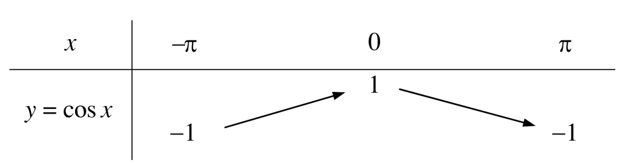
1.2.1.4 Sự biến thiên & đồ thị của hàm số $y = \cos x$

“Ta có thể tiến hành khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số $y = \cos x$ tương tự như đã làm đối với hàm số $y = \sin x$ trên đây. Tuy nhiên, ta nhận thấy $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, nên bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = \sin x$ sang trái 1 đoạn có độ dài $\frac{\pi}{2}$, ta được đồ thị hàm số $y = \cos x$ (nó cũng được gọi là 1 *đường hình sin*) (Fig. 1.4).



Hình 1.4: Đồ thị của hàm số $y = \cos x$ trên $\mathbb{R}$.

Căn cứ vào đồ thị của hàm số $y = \cos x$, ta lập được bảng biến thiên của hàm số đó trên đoạn $[-\pi; \pi]$ (Fig. 1.5):



Hình 1.5: Bảng biến thiên của hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$.

Nhận xét 1.2.2. *1. Khi x thay đổi, hàm số $y = \cos x$ nhận mọi giá trị thuộc đoạn $[-1; 1]$. Ta nói* tập giá trị *của hàm số $y = \cos x$ là đoạn $[-1; 1]$.*

2. Do hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn nên đồ thị của hàm số $y = \cos x$ nhận trục tung làm trục đối xứng.

3. Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $(-\pi; 0)$. Từ đó do tính chất tuần hoàn với chu kỳ 2π, hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.” – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, pp. 8–9

Hàm số $y = \sin x$	**Hàm số** $y = \cos x$
Có tập xác định là $\mathbb{R}$	Có tập xác định là $\mathbb{R}$
Có tập giá trị là $[-1; 1]$	Có tập giá trị là $[-1; 1]$
Là hàm số lẻ	Là hàm số chẵn
Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π	Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π
Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ & nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$	Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ & nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$
Có đồ thị là 1 đường hình sin	Có đồ thị là 1 đường hình sin

Bảng 1.2: So sánh tính chất của 2 hàm số $y = \sin x$ & $y = \cos x$.

1.2.2 Các hàm số $y = \tan x$ & $y = \cot x$

1.2.2.1 Định nghĩa

- "Với mỗi số thực $x \in \mathbb{R}$ mà $\cos x \neq 0$, i.e., $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), ta xác định được số thực $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Đặt $\mathcal{D}_1 \coloneqq \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

  Định nghĩa 1.2.2 (Hàm số tan)**.** *Quy tắc đặt tương ứng mỗi số $x \in \mathcal{D}_1$ với số thực $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ được gọi là* hàm số tang, *ký hiệu là $y = \tan x$.*

  Vậy hàm số $y = \tan x$ có tập xác định $\mathcal{D}_1$; ta viết

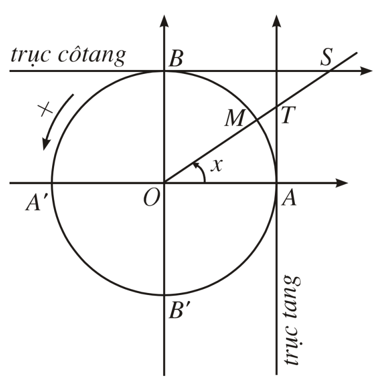
$$\begin{aligned} \tan : \mathcal{D}_1 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tan x. \end{aligned}$$

- Với mỗi số thực $x \in \mathbb{R}$ mà $\sin x \neq 0$, i.e., $x \neq k\pi\tan$ ($k \in \mathbb{Z}$), ta xác định được số thực $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Đặt $\mathcal{D}_2 \coloneqq \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

  Định nghĩa 1.2.3 (Hàm số cot)**.** *Quy tắc đặt tương ứng mỗi số $x \in \mathcal{D}_2$ với số thực $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ được gọi là* hàm số côtang, *ký hiệu là $y = \cot x$.*

  Vậy hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là $\mathcal{D}_2$; ta viết

$$\begin{aligned} \cot : \mathcal{D}_2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cot x. \end{aligned}$$



Hình 1.6: Trục tang & trục côtang.

Trên hình 1.6, ta có $(OA, OM) = x$, $\tan x = \overline{AT}$, $\cot x = \overline{BS}$.

Nhận xét 1.2.3. *1. Hàm số $y = \tan x$ là 1* hàm số lẻ *vì nếu $x \in \mathcal{D}_1$ thì $-x \in \mathcal{D}_1$ & $\tan(-x) = -\tan x$.*

2. Hàm số $y = \cot x$ cũng là 1 hàm số lẻ *vì nếu $x \in \mathcal{D}_2$ thì $-x \in \mathcal{D}_2$ & $\cot(-x) = -\cot x$." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, pp. 9–10*

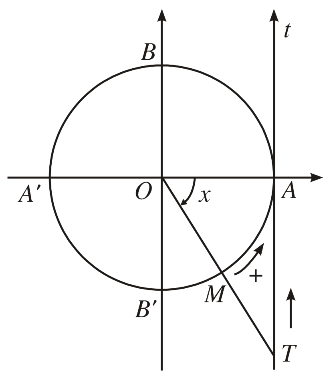
1.2.2.2 Tính chất tuần hoàn

"Có thể chứng minh rằng $T = \pi$ là số dương nhỏ nhất thỏa mãn $\tan(x+T) = \tan x$, $\forall x \in \mathcal{D}_1$, & $T = \pi$ cũng là số dương nhỏ nhất thỏa mãn $\cot(x+T) = \cot x$, $\forall x \in \mathcal{D}_2$. Ta nói các hàm số $y = \tan x$ & $y = \cot x$ là những *hàm số tuần hoàn với chu kỳ* π." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, p. 10

1.2.2.3 Sự biến thiên & đồ thị của hàm số $y = \tan x$

"Do tính chất tuần hoanf với chu kỳ π của hàm số $y = \tan x$, ta chỉ cần khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của nó trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \subset \mathcal{D}_1$, rồi tịnh tiến phần đồ thị vừa vẽ sang trái, sang phải các đoạn của độ dài $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ thì được toàn bộ đồ thị của hàm số $y = \tan x$.

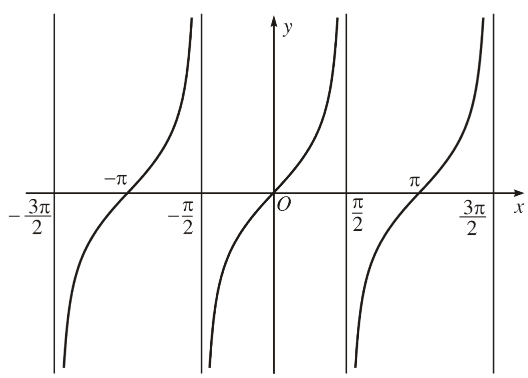
- *Chiều biến thiên*:



Hình 1.7: Chiều biến thiên của hàm $y = \tan x$.

Khi cho $x = (OA, OM)$ tăng từ $-\frac{\pi}{2}$ đến $\frac{\pi}{2}$ (không kể $\pm\frac{\pi}{2}$) thì điểm M chạy trên đường tròn lượng giác theo chiều dương từ B' đến B (không kể B' & B). Khi đó điểm T thuộc trục tang At sao cho $\overline{AT} = \tan x$ chạy dọc theo At suốt từ dưới lên trên, nên $\tan x$ *tăng từ* $-\infty$ *đến* $+\infty$ (qua quá trị 0 khi $x = 0$)."

- *Đồ thị*: "Đồ thị của hàm số $y = \tan x$ có dạng như ở hình 1.8.

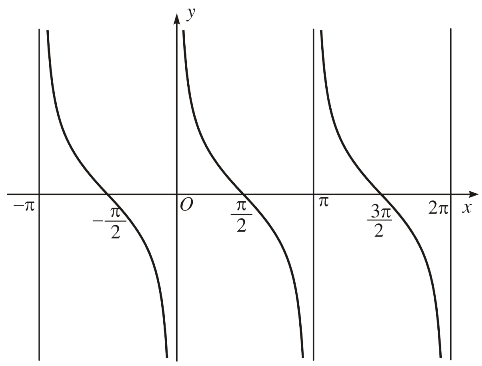


Hình 1.8: Đồ thị của hàm $y = \tan x$.

Nhận xét 1.2.4.
1. *Khi x thay đổi, hàm số $y = \tan x$ nhận mọi giá trị thực. Ta nói* tập giá trị *của hàm số $y = \tan x$ là $\mathbb{R}$.*
2. *Vì hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ nên đồ thị của nó nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.*
3. *Hàm số $y = \tan x$ không xác định tại $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Với mỗi $k \in \mathbb{Z}$, đường thẳng vuông góc với trục hành, đi qua điểm $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi; 0\right)$ gọi là 1* đường tiệm cận *của đồ thị hàm số $y = \tan x$. (Từ "tiệm cận" có nghĩa là ngày càng gần. E.g., nói đường thẳng $x = \frac{\pi}{2}$ là 1 đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \tan x$ nhằm diễn tả tính chất: điểm M trên đồ thị có hoành độ càng gần $\frac{\pi}{2}$ thì M càng gần đường thẳng $x = \frac{\pi}{2}$)." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, pp. 11–12*

1.2.2.4 Sự biến thiên & đồ thị của hàm số $y = \cot x$

"Hàm số $y = \cot x$ xác định trên $\mathcal{D}_2 = \mathbb{R}\backslash\{k\pi|k \in \mathbb{Z}\}$ là 1 hàm số tuần hoàn với chu kỳ π. Ta có thể khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của nó tương tự như đã làm đối với hàm số $y = \tan x$. Đồ thị của hàm số $y = \cot x$ có dạng như hình 1.9.



Hình 1.9: Đồ thị của hàm $y = \cot x$.

Nó nhận mỗi đường thẳng vuông góc với trục hoành, đi qua điểm $(k\pi; 0)$, $k \in \mathbb{Z}$ làm 1 đường tiệm cận." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, p. 12

Hàm số $y = \tan x$	**Hàm số** $y = \cot x$
Có tập xác định là $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi|k \in \mathbb{Z}\right\}$	Có tập xác định là $\mathcal{D}_2 = \mathbb{R}\backslash\{k\pi|k \in \mathbb{Z}\}$
Có tập giá trị là $\mathbb{R}$	Có tập giá trị là $\mathbb{R}$
Là hàm số lẻ	Là hàm số lẻ
Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ π	Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ π
Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$	Nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$
Có đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ làm 1 đường tiệm cận	Có đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ làm 1 đường tiệm cận

Bảng 1.3: So sánh tính chất của 2 hàm số $y = \tan x$ & $y = \cot x$.

1.2.3 Về khái niệm hàm số tuần hoàn

"Các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ là những hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π; các hàm số $y = \tan x$, $y = \cot x$ là những hàm số tuần hoàn với chu kỳ π. 1 cách tổng quát:

Định nghĩa 1.2.4 (Hàm số tuần hoàn)**.** *Hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp $\mathcal{D}$ được gọi là* hàm số tuần hoàn *nếu có số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in \mathcal{D}$ ta có $x + T \in \mathcal{D}$, $x - T \in \mathcal{D}$ & $f(x + T) = f(x)$. Nếu có số T dương nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên thì hàm số đó được gọi là 1* hàm số tuần hoàn với chu kỳ *T." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, p. 13*

Ví dụ 1.2.1. *Các hàm số có dạng $y = a\sin bx$, với $a, b \in \mathbb{R}^\star := \mathbb{R}\backslash\{0\}$ là những hàm số tuần hoàn.*

1.2.4 Dao động điều hòa

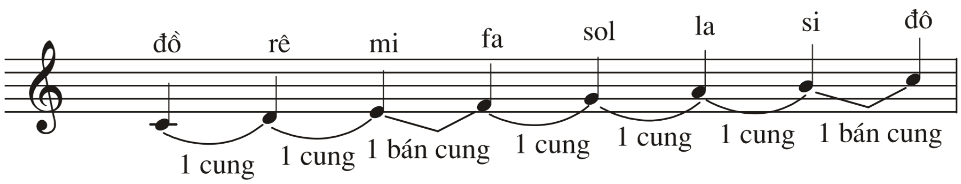
"Nhiều hiện tượng tự nhiên thay đổi có tính chất tuần hoàn (lặp đi lặp lại sau khoảng thời gian xác định) như: Chuyển động của các hành tinh trong hệ mặt trời, chuyển động của guồng nước quay, chuyển động của quả lắc đồng hồ, sự biến thiên của cường độ dòng điện xoay chiều, ... Hiện tượng tuần hoàn đơn giản nhất là *dao động điều hòa* được mô tả bởi hàm số $y = A\sin(\omega x + \alpha) + B$, trong đó A, B, ω & α là những hằng số; A & ω khác 0. Đó là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $\frac{2\pi}{|\omega|}$; $|A|$ gọi là *biên độ*. Đồ thị của nó là 1 *đường hình sin* có được từ đồ thị của hàm số $y = A\sin\omega x$ bằng cách tịnh tiến thích hợp (theo vector $-\frac{\alpha}{\omega}\vec{i}$ rồi theo vector $B\vec{j}$, i.e., tịnh tiến theo vector $-\frac{\alpha}{\omega}\vec{i} + B\vec{j}$)." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, pp. 15–16

1.2.5 Âm thanh

"Âm thanh được tạo nên bởi sự thay đổi áp suất của môi trường vật chất (chất khí, chất lỏng, chất rắn) 1 cách tuần hoàn theo thời gian (dao động tuần hoàn) & được lan truyền trong môi trường đó (sóng âm thanh).

Nếu dao động tuần hoàn ấy có chu kỳ T (đo bằng đơn vị thời gian là giây) thì $\frac{1}{T}$ gọi là *tần số* của dao động (i.e., số chu kỳ trong 1 giây); đơn vị của tần số là Hertz (abbr., Hz). Âm thanh tai người nghe được là dao động có tần số trong khoảng từ 17–20 Hz đến 20000 Hz. Dao động có tần số cao hơn 20000 Hz được gọi là *siêu âm*.

Trong âm nhạc (nghệ thuật phối hợp các âm thanh) người ta thường dùng những nốt nhạc để ghi những âm có tần số xác định. Tần số dao động càng lớn thì âm càng cao. Khi tăng tần số 1 âm lên gấp đôi thì ta nói cao độ của âm đó được tăng thêm 1 quãng 8. Người ta thường chia quãng 8 đó thành 12 quãng bằng nhau, mỗi quãng gọi là 1 bán cung để đo chênh lệch cao độ giữa các âm (xem SGK Âm nhạc & Mỹ thuật lớp 7). Với 2 âm cách nhau 1 bán cung, tỷ số các tần số của chúng bằng $\sqrt[12]{2}$; với 2 âm cách nhau 1 cung (i.e., 2 bán cung), tỷ số các tần số của chúng bằng $(\sqrt[12]{2})^2 = \sqrt[6]{2}$. Ở khuông nhạc dưới đây có ghi các nốt nhạc của 1 "âm giai" (quãng 8) cùng khoảng cách cao độ giữa 2 âm ứng với 2 nốt kề nhau. Âm *la* của âm giai đó có tần số 440 Hz (do đó, e.g., âm *si* kế đó có tần số $440\sqrt[6]{2}$ Hz).



Hình 1.10: Khuông nhạc.

Trong âm nhạc, ngoài các âm riêng lẻ còn có hợp âm (kết hợp các âm thanh). Nhà toán học Pháp Joseph Fourier (1768–1830) đã chứng minh rằng 1 hàm số tuần hoàn với chu kỳ T có thể phân tích thành "tổng" của 1 hằng số với những hàm số tuần hoàn có đồ thị là những đường hình sin với chu kỳ $\frac{T}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^\star$). Điều đó giúp ta hiểu sâu hơn về hợp âm, hòa âm, âm bội & âm sắc." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, p. 18

1.3 Phương Trình Lượng Giác Cơ Bản – Basic Trigonometric Equation

"Trên thực tế, có nhiều bài toán dẫn đến việc giải các phương trình có 1 trong các dạng $\sin x = m$, $\cos x = m$, $\tan x = m$, & $\cot x = m$, trong đó x là ẩn số ($x \in \mathbb{R}$) & m là 1 số cho trước. Đó là các *phương trình lượng giác cơ bản*." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, p. 19

1.3.1 Phương trình $\sin x = m$

"Giả sử m là 1 số đã cho. Xét phương trình

$$\sin x = m. \tag{sin}$$

Hiển nhiên phương trình (sin) xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta đã biết $|\sin x| \le 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó phương trình (sin) vô nghiệm khi $|m| > 1$. Mặt khác, khi x thay đổi, $\sin x$ nhận mọi giá trị từ -1 đến 1 nên phương trình (sin) luôn có nghiệm khi $|m| \le 1$." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, p. 20

Nếu α là 1 nghiệm của phương trình (sin), i.e., $\sin\alpha = m$ thì

$$\sin x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}). \tag{1.3.1}$$

"Ta nói rằng $x = \alpha + k2\pi$ & $x = \pi - \alpha + k2\pi$ là 2 *họ nghiệm* của phương trình (sin).

Kể từ đây, để cho gọn ta quy ước rằng nếu trong 1 biểu thức nghiệm của phương trình lượng giác có chứa k mà không giải thích gì thêm thì ta hiểu rằng k nhận mọi giá trị thuộc $\mathbb{Z}$. E.g., $x = \alpha + k2\pi$ có nghĩa là x lấy mọi giá trị thuộc tập hợp $\{\alpha, \alpha \pm 2\pi, \alpha \pm 4\pi, \alpha \pm 6\pi, \ldots\}$." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, p. 21

"Trong mặt phẳng tọa độ, nếu vẽ đồ thị (G) của hàm số $y = \sin x$ & đường thẳng (d): $y = m$ thì hoành độ mỗi giao điểm của (d) & (G) (nếu có) là 1 nghiệm của phương trình $\sin x = m$." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, p. 22

Lưu ý 1.3.1. 1. *"Khi $m \in \{0; \pm 1\}$, công thức (1.3.1) có thể viết gọn như sau:*

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi.$$

2. *Dễ thấy rằng với m cho trước mà $|m| \le 1$, phương trình $\sin x = m$ có đúng 1 nghiệm nằm trong đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Người ta thường ký hiệu đó là $\arcsin m$. Khi đó*

$$\boxed{\sin x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin m + k2\pi, \\ x = \pi - \arcsin m + k2\pi. \end{array}\right.}$$

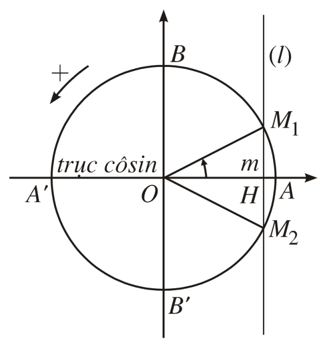
3. *Từ (1.3.1) ta thấy rằng: Nếu α & β là 2 số thực thì $\sin\beta = \sin\alpha$ khi & chỉ khi có số nguyên k để $\beta = \alpha + k2\pi$ hoặc $\beta = \pi - \alpha + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, pp. 22–23*

1.3.2 Phương trình $\cos x = m$

"Xét phương trình

$$\cos x = m, \tag{cos}$$

trong đó m là 1 số cho trước. Hiển nhiên phương trình (cos) xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Dễ thấy rằng: Khi $|m| > 1$, phương trình (cos) vô nghiệm. Khi $|m| \le 1$, phương trình (II) luôn có nghiệm. Để tìm tất cả các nghiệm của (II), trên trục côsin ta lấy điểm H sao cho $\overline{OH} = m$. Gọi (l) là đường thẳng đi qua H & vuông góc với trục côsin (Fig. 1.11).



Hình 1.11: Trục côsin.

Do $|m| \le 1$ nên đường thẳng (l) cắt đường tròn lượng giác tại 2 điểm M_1 & M_2. 2 điểm này đối xứng với nhau qua trục côsin (chúng trùng nhau nếu $m = \pm 1$). Ta thấy số đo của các góc lượng giác (OA, OM_1) & (OA, OM_2) là tất cả các nghiệm của (cos). Nếu α là số đo của 1 góc trong chúng, nói cách khác, nếu α là 1 nghiệm của (cos) thì các góc đó có các số đo là $\pm\alpha + k2\pi$. Vậy ta có

Nếu α là 1 nghiệm của phương trình (cos), i.e., $\cos\alpha = m$ thì

$$\cos x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi, \\ x = -\alpha + k2\pi. \end{array}\right. \tag{1.3.2}$$

Lưu ý 1.3.2. 1. *Đặc biệt, khi $m \in \{0; \pm 1\}$, công thức (1.3.2) có thể viết gọn như sau:*

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi,\ \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi,\ \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

2. *Dễ thấy rằng với mọi số m cho trước mà $|m| \le 1$, phương trình $\cos x = m$ có đúng 1 nghiệm nằm trong đoạn $[0; \pi]$. Người ta thường ký hiệu nghiệm đó là $\arccos m$. Khi đó*

$$\cos x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arccos m + k2\pi, \\ x = -\arccos m + k2\pi, \end{array}\right.$$

mà cũng thường được viết là $x = \pm\arccos m + k2\pi$.

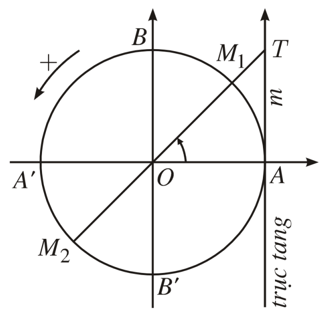
3. *Từ (1.3.2) ta thấy rằng: Nếu α & β là 2 số thực thì $\cos\beta = \cos\alpha$ khi & chỉ khi có số nguyên k để $\beta = \alpha + k2\pi$ hoặc $\beta = -\alpha + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, pp. 23–24*

1.3.3 Phương trình $\tan x = m$

"Cho m là 1 số tùy ý. Xét phương trình

$$\tan x = m. \tag{tan}$$

Điều kiện xác định (ĐKXĐ) của phương trình (tan) là $\cos x \neq 0$. Ta đã biết, khi x thay đổi, $\tan x$ nhận mọi giá trị từ $-\infty$ đến $+\infty$. Do đó phương trình (tan) luôn có nghiệm. Để tìm tất cả các nghiệm của (tan), trên tục tang, ta lấy điểm T sao cho $\overline{AT} = m$. Đường thẳng OT cắt đường tròn lượng giác tại 2 điểm M_1 & M_2 (Fig. 1.12).



Hình 1.12: Trục tang.

Ta có: $\tan(OA, OM_1) = \tan(OA, OM_2) = \overline{AT} = m$. Gọi số đo của 1 trong các góc lượng giác (OA, OM_1) & (OA, OM_2) là α; i.e., α là 1 nghiệm nào đó của phương trình (tan). Khi đó, các góc lượng giác (OA, OM_1) & (OA, OM_2). Khi đó, các góc lượng giác (OA, OM_1) & (OA, OM_2) có các số đo là $\alpha + k\pi$. Đó là tất cả các nghiệm của phương trình (tan) (hiển nhiên chúng thỏa mãn ĐKXĐ của (tan)). Vậy ta có:

Nếu α là 1 nghiệm của phương trình (tan), i.e., $\tan\alpha = m$ thì

$$\tan x = m \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi. \tag{1.3.3}$$

Lưu ý 1.3.3. *1. Dễ thấy rằng với mọi số $m \in \mathbb{R}$ cho trước, phương trình $\tan x = m$ có đúng 1 nghiệm nằm trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Người ta thường ký hiệu nghiệm đó là $\arctan m$. Khi đó*

$$\boxed{\tan x = m \Leftrightarrow x = \arctan m + k\pi.}$$

2. Từ (1.3.3) ta thấy rằng: Nếu α & β là 2 số thực mà $\tan\alpha$, $\tan\beta$ xác định thì $\tan\beta = \tan\alpha$ khi & chỉ khi có số nguyên k để $\beta = \alpha + k\pi$." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, pp. 25–26

1.3.4 Phương trình $\cot x = m$

"Cho $m \in \mathbb{R}$ là 1 số tùy ý, xét phương trình

$$\cot x = m. \tag{cot}$$

ĐKXĐ của phương trình (cot) là $\sin x \neq 0$. Tương tự như đối với phương trình $\tan x = m$, ta có

Nếu α là 1 nghiệm của phương trình (cot), i.e., $\cot\alpha = m$ thì

$$\cot x = m \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi. \tag{1.3.4}$$

" – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, pp. 26–27

Lưu ý 1.3.4. *Dễ thấy rằng với mọi số $m \in \mathbb{R}$ cho trước, phương trình $\cot x = m$ có đúng 1 nghiệm nằm trong khoảng $(0; \pi)$. Người ta thường ký hiệu nghiệm đó là $\operatorname{arccot} m$. Khi đó:*

$$\boxed{\cot x = m \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} m + k\pi.}$$

1.3.5 1 số điều cần lưu ý

1. Khi đã cho số m, ta có thể tính được các giá trị $\arcsin m, \arccos m$ (với $|m| \le 1$), $\arctan m$ bằng máy tính bỏ túi với các phím $\sin^{-1}, \cos^{-1}$ & $\tan^{-1}$.

2. $\arcsin m, \arccos m$ (với $|m| \le 1$), $\arctan m$ & $\operatorname{arccot} m$ có giá trị là những số thực. Do đó ta viết, e.g., $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ mà không viết $\arctan 1 = 45°$.

3. Khi xét các phương trình lượng giác ta đã coi ẩn số x là số đo radian của các góc lượng giác. Trên thực tế, ta còn gặp những bài toán yêu cầu tìm số đo độ của các góc (cung) lượng giác sao cho sin (côsin, tang hoặc côtang) của chúng bằng số $m \in \mathbb{R}$ cho trước e.g. $\sin(x + 20°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Khi giải các phương trình này (mà làm dụng ngôn ngữ, ta vẫn gọi là giải các phương trình lượng giác), ta có thể áp dụng các công thức nêu trên & lưu ý sử dụng ký hiệu số đo độ trong "công thức nghiệm" cho thống nhất, e.g., viết $x = 30° + k360°$ chứ không viết $x = 30° + k2\pi$.

   Tuy nhiên, ta quy ước rằng nếu không có giải thích gì thêm hoặc trong phương trình lượng giác không sử dụng đơn vị đo góc là độ thì mặc nhiên ẩn số là số đo radian của góc lượng giác." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, p. 27

1.3.6 Dùng máy tính bỏ túi để tìm 1 góc khi biết 1 giá trị lượng giác của nó

"Các phím $\sin^{-1}, \cos^{-1}$ & $\tan^{-1}$ của máy tính bỏ túi CASIO *fx-500MS* được dùng để tìm số đo (độ hoặc radian) của 1 góc khi biết 1 trong các giá trị lượng giác của nó. Muốn thế đối với máy tính CASIO *fx-500MS* ta thực hiện 2 bước sau:

1. *Ấn định đơn vị đo góc (độ hoặc radian).* Muốn tìm số đo độ, ta ấn $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{1}$. Lúc này dòng trên cùng của màn hình xuất hiện chữ nhỏ $\boxed{\text{D}}$. Muốn tìm số đo radian, ta ấn $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{2}$. Lúc này dòng trên cùng của màn hình xuất hiện chữ nhỏ $\boxed{\text{R}}$.

2. *Tìm số đo góc.* Khi biết sin, côsin hay tang của góc α cần tìm bằng m, ta lần lượt ấn phím $\boxed{\text{SHIFT}}$, & 1 trong các phím $\boxed{\sin^{-1}}$, $\boxed{\cos^{-1}}$, $\boxed{\tan^{-1}}$, rồi nhập giá trị lượng giác m & cuối cùng ấn phím $=$. Lúc này, trên màn hình cho kết quả là số đo của góc α (độ hay radian tùy theo bước 1).

Lưu ý 1.3.5. *1. Ở chế độ số đo radian, các phím* $\sin^{-1}, \cos^{-1}$ *cho kết quả (khi* $|m| \le 1$*) là* $\arcsin m, \arccos m$*; phím* $\tan^{-1}$ *cho kết quả là* $\arctan m$.

2. Ở chế độ số đo độ, các phím $\sin^{-1}$ *&* $\tan^{-1}$ *cho kết quả là số đo góc* α *từ* $-90°$ *đến* $90°$*; phím* $\cos^{-1}$ *cho kết quả là số đo góc* α *từ* $0°$ *đến* $180°$*. Các kết quả ấy được hiển thị dưới dạng số thập phân." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, p. 27*

Xem Quỳnh, Đoan, et al., 2020, Ví dụ 1–3, p. 31 để biết chi tiết thao tác bấm phím trên máy tính cầm tay.

1.4 1 Số Dạng Phương Trình Lượng Giác Cơ Bản

1.4.1 1 số dạng phương trình lượng giác đơn giản

1.4.1.1 Phương trình bậc nhất & bậc 2 đối với 1 hàm số lượng giác

Để giải các phương trình lượng giác có dạng $P(\sin x) = 0$, $P(\cos x) = 0$, $P(\tan x) = 0$, $P(\cot x) = 0$ với P là 1 đa thức có bậc 1 hoặc 2 (i.e., $\deg P \in \{1, 2\}$ [5]), ta chọn 1 biểu thức lượng giác thích hợp có mặt trong phương trình làm ẩn phụ & quy về phương trình bậc nhất hoặc bậc 2 đối với ẩn phụ đó (có thể nêu hoặc không nêu ký hiệu ẩn phụ).

1.4.1.1.1 Phương trình bậc nhất đối với 1 hàm số lượng giác. Xét các phương trình lượng giác có dạng $P(\sin x) = 0$, $P(\cos x) = 0$, $P(\tan x) = 0$, $P(\cot x) = 0$ với P là 1 đa thức có bậc 1 (i.e., $\deg P = 1$), i.e.:

$$a\sin(mx + n) + b = 0,\ a\cos(mx + n) + b = 0,\ a\tan(mx + n) + b = 0,\ a\cot(mx + n) + b = 0,\ a, b, m, n \in \mathbb{R},\ a \ne 0,\ m \ne 0.$$

Tổng quát hơn, giải các phương trình lượng giác sau:

$$a\sin f(x) + b = 0,\ a\cos f(x) + b = 0,\ a\tan f(x) + b = 0,\ a\cot f(x) + b = 0,$$

trong đó $a, b \in \mathbb{R}$, $a \ne 0$, & f là 1 hàm số (đa thức, phân thức, hàm căn thức) sao cho phương trình $f(x) = m$ có thể giải được/solvable (có nghiệm hoặc vô nghiệm) trên tập số thực $\mathbb{R}$.

[5] Ký deg là viết tắt của từ "degree" tức là "bậc".

1.4.1.1.2 Phương trình bậc 2 đối với 1 hàm số lượng giác. Xét các phương trình lượng giác có dạng $P(\sin x) = 0$, $P(\cos x) = 0$, $P(\tan x) = 0$, $P(\cot x) = 0$ với P là 1 đa thức có bậc 2 (i.e., $\deg P = 2$), i.e.,

$$a\sin^2(mx+n) + b\sin(mx+n) + c = 0,\ a\cos^2(mx+n) + b\cos(mx+n) + c = 0,$$
$$a\tan^2(mx+n) + b\tan(mx+n) + c = 0,\ a\cot^2(mx+n) + b\tan(mx+n) + c = 0,$$

trong đó $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $m \neq 0$. Tổng quát hơn, giải các phương trình lượng giác sau:

$$a\sin^2 f(x) + b\sin f(x) + c = 0,\ a\cos^2 f(x) + b\cos f(x) + c = 0,$$
$$a\tan^2 f(x) + b\tan f(x) + c = 0,\ a\cot^2 f(x) + b\cot f(x) + c = 0,\ ,$$

trong đó $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, & f là 1 hàm số (đa thức, phân thức, hàm căn thức) sao cho phương trình $f(x) = m$ có thể giải được (solvable) trên tập số thực $\mathbb{R}$.

1.4.1.1.3 Phương trình bậc $n \in \mathbb{N}$ đối với 1 hàm số lượng giác. Xét các phương trình lượng giác có dạng $P(\sin x) = 0$, $P(\cos x) = 0$, $P(\tan x) = 0$, $P(\cot x) = 0$ với P là 1 đa thức có bậc $n \in \mathbb{N}$ (i.e., $\deg P = n$), i.e., với $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, hệ số cao nhất $a_n \neq 0$, xét các phương trình lượng giác có dạng

$$P(\sin(mx+n)) = \sum_{i=0}^n a_i \sin^i(mx+n) = 0,\ P(\cos(mx+n)) = \sum_{i=0}^n a_i \cos^i(mx+n) = 0,$$
$$P(\tan(mx+n)) = \sum_{i=0}^n a_i \tan^i(mx+n) = 0,\ P(\cot(mx+n)) = \sum_{i=0}^n a_i \cot^i(mx+n) = 0.$$

Tổng quát hơn, giải các phương trình lượng giác sau:

$$P(\sin f(x)) = \sum_{i=0}^n a_i \sin^i f(x) = 0,\ P(\cos f(x)) = \sum_{i=0}^n a_i \cos^i f(x) = 0,$$
$$P(\tan f(x)) = \sum_{i=0}^n a_i \tan^i f(x) = 0,\ P(\cot f(x)) = \sum_{i=0}^n a_i \cot^i f(x) = 0.$$

Về đa thức tổng quát bậc n & các tính chất liên quan, có thể xem các tài liệu chuyên khảo về đa thức hoặc phần đầu của tài liệu của tác giả cho chương trình Toán lớp 8 ở link sau: GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/lecture[6].

[6]Explicitly, https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/NQBH_elementary_mathematics_grade_8.pdf.

Chương 2

Thống Kê – Statistics

See FaceBook/Statsystem – a funny Facebook page, including hilarious mathematical & statistical jokes, etc.

2.1 Mẫu Số Liệu & Trình Bày Mẫu Số Liệu – Data Sample & Representation of Data Sample

2.1.1 Định nghĩa của thống kê – Definiton of Statistics

"Những thông tin dưới dạng số liệu rất phổ biến trong khoa học & đời sống. Khi đọc 1 tờ báo, nghe 1 bản tin trên truyền hình, ... chúng ta thường bắt gặp các con số thống kê.

Định nghĩa 2.1.1 (Thống kê)**.** Thống kê *là khoa học về phương pháp thu thập, tổ chức, trình bày, phân tích & xử lý số liệu.*

Thống kê giúp ta thu thập, phân tích các số liệu 1 cách khoa học & rút ra các tri thức, thông tin chứa đựng trong các số liệu đó. Trên cơ sở này, chúng ta mới có thể đưa ra được những dự báo & những quyết định đúng đắn. Chính vì thế, thống kê đóng 1 vai trò cực kỳ quan trọng, 1 vai trò không thể thiếu trong rất nhiều hoạt động của con người, từ khoa học tự nhiên, kinh tế, nông nghiệp, y học cho tới khoa học xã hội, khoa học quản lý & hoạch định chính sách. Lenin[1] đã từng ví von rằng thống kê giống như tai, như mắt của Nhà nước; không có thống kê, Nhà nước như người mù & điếc. Ngay từ đầu thế kỷ 20, nhà khoa học người Anh H. D. Well đã cho rằng: `[translated]` "Trong tương lai không xa, kiến thức thống kê & tư duy thống kê phải trở thành 1 yếu tố không thể thiếu được trong học vấn phổ thông của mỗi công dân, giống như khả năng biết đọc biết viết vậy"." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p.

Có thể xem thêm Wikipedia/Statistics.

2.1.2 Mẫu số liệu – Data sample

Xem Thái et al., 2022, Chap. IV: 1 Số Yếu Tố Thống Kê & Xác Suất, pp. 3–24 & tài liệu của tác giả cho chương trình Toán lớp 6 GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 6/lecture.

Định nghĩa 2.1.2 (Mẫu số liệu, kích thước mẫu, số liệu của mẫu)**.** *(i) "1 tập con hữu hạn các đơn vị điều tra được gọi là 1* mẫu*. Số phần tử của 1 mẫu được gọi là* kích thước mẫu*. Các giá trị của dấu hieuj thu được trên mẫu được gọi là 1* mẫu số liệu*. Mỗi giá trị trong mẫu số liệu được gọi là 1* số liệu của mẫu*. (ii) Nếu thực hiện việc điều tra trên mọi đơn vị điều tra thì đó là* điều tra toàn bộ*. (iii) Nếu chỉ điều tra trên 1 mẫu thì đó là điều tra mẫu." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 62*

Lưu ý 2.1.1. *"Điều tra toàn bộ nói chung không được thực hiện khi số lượng các đơn vị điều tra quá lớn hoặc khi điều tra thì phải phá hủy đơn vị điều tra. Người ta thường chỉ điều tra mẫu & dựa trên các thông tin thu được, phân tích, suy diễn để rút ra những kết luận & dự báo cần thiết liên quan tới toàn bộ đơn vị điều tra." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 62*

2.1.3 Trình bày 1 mẫu số liệu – Representation of a data sample

2.1.3.1 Bảng phân bố tần số – tần suất

Định nghĩa 2.1.3. *Giả sử trong 1 mẫu số liệu kích thước N có m giá trị khác nhau $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$. (i)* Tần số *của giá trị x_i (ký hiệu là n_i) là số lần xuất hiện của x_i trong mẫu số liệu. (ii)* Tần suất *của giá trị x_i (ký hiệu là f_i) là tỷ số giữa tần số n_i & kích thước mẫu N, $f_i = \frac{n_i}{N}$. Người ta thường viết tần suất dưới dạng phần trăm (%). (iii) Bảng sau đây được gọi là* bảng phân bố tần số – tần suất *(gọi tắt là* bảng tần số – tần suất*):*

[1] See, e.g., Wikipedia/Vladimir Ilyich Lenin & Wikipedia/Vladimir Lenin.

Giá trị	x_1	x_2	$\cdots$	x_m	
Tần số	n_1	n_2	$\cdots$	n_m	$N = \sum_{i=1}^m n_i$
Tần suất (%)	f_1	f_2	$\cdots$	f_m	

Lưu ý 2.1.2. *"Bảng tần số – tần suất ở trên có dạng "ngang" với 3 dòng & $m+2$ cột. Ta có thể trình bày bảng tần số – tần suất dưới dạng "dọc" (chuyển hàng thành cột). Khi đó bảng sẽ có 3 cột & $m+2$ dòng." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 63*

2.1.3.2 Bảng phân bố tần số – tần suất ghép lớp

"Trong trường hợp ta có mẫu số liệu với kích thước lớn, ta thường thực hiện việc ghép số liệu thành các lớp sao cho mỗi số liệu thuộc vào 1 & chỉ 1 lớp. Mỗi lớp thường là 1 đoạn hoặc nửa khoảng. Việc phân lớp thế nào là tùy nhu cầu của ta trong mỗi tình huống cụ thể.

Định nghĩa 2.1.4 (Tần số/tần suất ghép lớp)**.** *Giả sử ta xác định m lớp $C_1, C_2, \ldots, C_m$. (i)* Tần số của lớp C_i *(ký hiệu n_i) là số số liệu của mẫu nằm trong lớp C_i. (ii)* Tần suất của lớp C_i *(ký hiệu f_i) là tỷ số giữa tần số n_i của lớp C_i & kích thước mẫu N, $f_i = \frac{n_i}{N}$.*

Bảng sau đây được gọi là *bảng phân bố tần số – tần suất ghép lớp của mẫu số liệu*:

Lớp	Tần số	Tần suất (%)
C_1	n_1	f_1
C_2	n_2	f_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
C_m	n_m	f_m
	$N = \sum_{i=1}^m n_i$	

Bảng 2.1: Bảng phân bố tần số – tần suất ghép lớp của mẫu số liệu.

Trong nhiều trường hợp, ta ghép lớp theo các nửa khoảng sao cho mút bên phải của 1 nửa khoảng cũng là mút bên trái của nửa khoảng tiếp theo." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, pp. 64–65

2.1.3.3 Biểu đồ

"Tục ngữ có những câu: "Trăm nghe không bằng 1 thấy"; "1 hình ảnh có giá trị hơn ngàn lời nói". Chính vì thế, để trình bày mẫu số liệu 1 cách trực quan sinh động, dễ nhớ & gây ấn tượng, người ta sử dụng biểu đồ. Sau đây là 1 số biểu đồ thông dụng nhất:

(i) *Biểu đồ tần số, tần suất hình cột.* Đây là cách thể hiện rất tốt bảng phân bố tần số – tần suất. Trên mỗi đoạn (hay nửa khoảng) xác định lớp, ta dựng 1 hình chữ nhật với đáy là đoạn đó (hay nửa khoảng đó) & chiều cao bằng tần số của lớp. Khi đó ta có biểu đồ tần số hình cột." "Nếu trên mỗi đoạn (hay nửa khoảng) xác định lớp, ta dựng 1 hình chữ nhật với đáy là đoạn đó (hay nửa khoảng đó) & chiều cao bằng tần suất của lớp thì ta có biểu đồ tần suất hình cột.

(ii) *Biểu đồ tần suất hình quạt.* Biểu đồ hình quạt rất thích hợp cho việc thể hiện bảng phân bố tần suất ghép lớp. Hình tròn được chia thành những hình quạt. Mỗi lớp được tương ứng với 1 hình quạt mà diện tích của nó tỷ lệ với tần suất của lớp đó." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, pp. 65–66

2.2 Các Số Đặc Trưng của Mẫu Số Liệu

"Để nhanh chóng nắm bắt được những thông tin quan trọng chứa đựng trong mẫu số liệu, ta đưa ra 1 vài chỉ số gọi là *các số đặc trưng của mẫu số liệu*." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 69

2.2.1 Số trung bình

"Cho mẫu số liệu kích thước N: $\{x_i\}_{i=1}^N = \{x_1, \ldots, x_N\}$. *Số trung bình* của mẫu số liệu này, ký hiệu là $\overline{x}$, được tính bởi công thức sau:

$$\overline{x} := \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}. \tag{2.2.1}$$

Nếu mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số:

Giá trị	x_1	x_2	$\cdots$	x_m	
Tần số	n_1	n_2	$\ldots\ldots$	n_m	$N=\sum_{i=1}^m n_i$

thì trong tổng $\sum_{i=1}^N x_i$ mỗi giá trị x_i xuất hiện đúng n_i lần. Thành thử công thứ tính số trung bình trở thành

$$\overline{x} := \frac{\sum_{i=1}^m n_ix_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^m n_ix_i}{\sum_{i=1}^m n_i}.$$

Nếu mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số – tần suất ghép lớp thì ta thường tính gần đúng số trung bình theo cách sau: Giả sử các số liệu được chia thành m lớp $C_1, C_2, \ldots, C_m$, trong đó mỗi lớp C_i là 1 đoạn $[a_i; b_i]$ hoặc 1 nửa khoảng $[a_i; b_i)$. Ta gọi giá trị $x_i = \frac{a_i+b_i}{2}$ là *giá trị đại diện* của lớp C_i. Các gía trị thuộc lớp C_i có thể coi như xấp xỉ bằng x_i. Gọi n_i là tần số của lớp C_i. Khi đó số trung bình của mẫu số liệu này được tính xấp xỉ theo công thức

$$\overline{x} \approx \frac{\sum_{i=1}^m n_ix_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^m n_i(a_i+b_i)}{2\sum_{i=1}^m n_i}.$$

Ý nghĩa của số trung bình. *Số trung bình của mẫu số liệu dùng làm đại diện cho các giá tri trong mẫu số liệu.*" – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, pp. 69–70

2.2.2 Số trung vị

"Giả sử ta có 1 mẫu số liệu kích thước N. Sắp xếp các số liệu trong mẫu theo thứ tự không giảm $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_N$. Nếu N là 1 số lẻ thì số liệu $x_{\frac{N+1}{2}}$ (số liệu đứng chính giữa) được gọi là *số trung vị*. Nếu N là 1 số chẵn thì trung bình cộng của $x_{\frac{N}{2}}$ & $x_{\frac{N}{2}+1}$, i.e., $\frac{1}{2}\left(x_{\frac{N}{2}} + x_{\frac{N}{2}+1}\right)$ được gọi là *số trung vị*. Số trung vị được ký hiệu là M_e." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 70

Lưu ý 2.2.1. *"Khi các số liệu trong mẫu có sự chênh lệch rất lớn với nhau thì số trung bình & số trung vị cũng khác biệt lớn. Khi đó số trung bình không đại diện tốt cho các số liệu trong mẫu, số trung vị làm đại diện tốt hơn." "Khi các số liệu trong mẫu không có sự chênh lệch rất lớn với nhau thì số trung bình & số trung vị xấp xỉ nhau." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 71*

"Nếu mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số – tần suất ghép lớp thì ta thường tính gần đúng số trung vị theo cách sau: Giả sử mẫu số liệu kích thước N được chia làm m lớp, trong đó mỗi lớp là 1 nửa khoảng có độ dài h:

Lớp	Tần số
$[a_1; a_2)$	n_1
$[a_2; a_3)$	n_2
$\vdots$	$\vdots$
$[a_m; a_{m+1})$	n_m
	N

ký hiệu $S_l = \sum_{i=1}^l n_i$. Ta xác định số nguyên dương k thỏa mãn bất đẳng thức $S_{k-1} < \frac{N}{2} \le S_k$, i.e., trong dãy $S_1 < S_2 < \cdots < S_m = N$, k là số nguyên dương đầu tiên thỏa mãn $S_k \ge \frac{N}{2}$. Đặt $p := \frac{N}{2} - S_{k-1}$. Khi đó số trung vị được tính xấp xỉ bởi công thức $M_e \approx a_k + \frac{hp}{n_k}$." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, pp. 71–72

2.2.3 Mốt – Mode

"Cho mẫu số liệu dưới dạng bảng phân bố tần số:

Giá trị	x_1	x_2	$\cdots$	x_m	
Tần số	n_1	n_2	$\cdots$	n_m	$N=\sum_{i=1}^m n_i$

Bảng 2.2: Bảng phân bố tần số.

Định nghĩa 2.2.1 (Mốt). *Giá trị có tần số lớn nhất được gọi là* mốt *của mẫu số liệu & ký hiệu là M_0, i.e., $M_0 = x_k$ nếu $n_k \ge n_i$, $\forall i = 1, \ldots, m$.*

Lưu ý 2.2.2. *Từ định nghĩa ta thấy 1 mẫu số liệu có thể có 1 hay nhiều mốt." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 73*

"Nếu mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số – tần suất ghép lớp thì ta thường tính gần đúng mốt theo cách sau: Giả sử mẫu số liệu kích thước N được chia làm m lớp, trong đó mỗi lớp là 1 đoạn hoặc 1 nửa khoảng. Ta xác định lớp có tần số cao nhất & giá trị đại diện của lớp có tần số cao nhất này được xem là mốt của bảng phân bố tần số ghép lớp." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 74

2.2.4 Phương sai & độ lệch chuẩn

"Cho mẫu số liệu kích thước N là $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ có $\overline{x}$ là số trung bình. *Phương sai* của mẫu số liệu này, ký hiệu là s^2, được tính bởi công thức sau:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \overline{x})^2}{N}. \tag{2.2.2}$$

Căn bậc 2 của phương sai, ký hiệu là s, được gọi là *độ lệch chuẩn*

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \overline{x})^2}{N}}. \tag{2.2.3}$$

Lưu ý 2.2.3. *Phương sai có thể tính theo công thức sau đây:*

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2 = \frac{C}{N} - \frac{B^2}{N^2}, \ \textit{với } B = \sum_{i=1}^N x_i, \ C = \sum_{i=1}^N x_i^2. \tag{2.2.4}$$

Công thức này thường được sử dụng trong tính toán. Thật vậy, ta có $B = N\overline{x}$. Vậy $\sum_{i=1}^N (x_i - \overline{x})^2 = C - 2B\overline{x} + N\overline{x}^2 = C - 2N\overline{x}^2 + N\overline{x}^2 = C - N\overline{x}^2 = C - \frac{B^2}{N}$. Suy ra $s^2 = \frac{C}{N} - \frac{B^2}{N^2}$." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, pp. 74–75

"Nếu mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số 2.2 thì trong tổng $\sum_{i=1}^N x_i$ & $\sum_{i=1}^N x_i^2$, mỗi giá trị x_i xuất hiện đúng n_i lần. Thành thử công thức tính phương sai (2.2.4) trở thành:

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^m n_i x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^m n_i x_i\right)^2.$$

Nếu mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số – tần suất ghép lớp thì ta thường tính gần đúng số trung bình theo cách sau: Các số liệu được chia thành m lớp $C_1, C_2, \ldots, C_m$, trong đó mỗi lớp C_i là 1 đoạn $[a_i; b_i]$ hoặc 1 nửa khoảng $[a_i; b_i)$. Ta gọi giá trị $x_i = \frac{a_i + b_i}{2}$ là giá trị đại diện của lớp C_i. Các giá trị thuộc lớp C_i có thể coi như xấp xỉ bằng x_i. Gọi n_i là tần số của lớp C_i. Khi đó phương sai của mẫu số liệu này được tính xấp xỉ theo công thức

$$s^2 \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^m n_i x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^m n_i x_i\right)^2.$$

Ý nghĩa của phương sai & độ lệch chuẩn. Từ công thức tính phương sai trong định nghĩa ta thấy phương sai là trung bình cộng của bình phương khoảng cách từ mỗi số liệu tới số trung bình. Như vậy phương sai đo mức độ phân tán của các số liệu trong mẫu quanh số trung bình. Khi số liệu có đơn vị (thứ nguyên) thì đơn vị của phương sai là bình phương đơn vị của số liệu. Độ lệch chuẩn là căn bậc 2 của phương sai, do đó nó cũng là 1 số đo mức độ phân tán của các số liệu trong mẫu quanh số trung bình. Khi số liệu có đơn vị (thứ nguyên) thì độ lệch chuẩn & số liệu có cùng đơn vị." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, pp. 76–77

Chương 3

Tổ Hợp & Xác Suất – Combinatorics & Probability

3.1 2 Quy Tắc Đếm Cơ Bản

Nội dung. *2 quy tắc đếm cơ bản* – [goal] nhờ đó có thể tính chính xác & nhanh chóng số phần tử của 1 tập hợp mà không cần đếm trực tiếp bằng cách liệt kê.

3.1.1 Quy tắc cộng

3.1.1.1 Quy tắc cộng

"Quy tắc cộng có thể phát biểu dưới dạng sau: (i) Giả sử 1 công việc nào đó có thể thực hiện theo phương án A hoặc phương án B. Có n cách thực hiện phương án A & có m cách thực hiện phương án B. Khi đó công việc có thể thực hiện theo $n+m$ cách. (ii) 1 cách tổng quát, giả sử 1 công việc nào đó có thể thực hiện theo 1 trong k phương án $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Phương án A_i có n_i cách thực hiện ($i = 1, 2, \ldots, k$). Khi đó công việc có thể thực hiện theo $\sum_{i=1}^k n_i = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ cách." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 79

3.1.1.2 Tính số phần tử của hợp 2 tập hợp

"Bản chất toán học của quy tắc cộng (i) là công thức tính số phần tử của hợp 2 tập hợp không giao nhau: *Nếu A & B là 2 tập hợp hữu hạn không giao nhau thì* $|A \cup B| = |A| + |B|$. 1 cách tổng quát, bản chất toán học của quy tắc cộng (ii) là công thức tính số phần tử của tập n tập hợp hữu hạn đôi một không giao nhau. Quy tắc cộng cho nhiều phần tử đôi một không giao nhau được phát biểu như sau: *Cho n tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_k$ đôi một không giao nhau. Khi đó:* $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^k |A_i|$. Trong nhiều bài toán tổ hợp, chúng ta phải tính số phần tử của hợp 2 tập hợp bất kỳ (có thể không rời nhau)." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, pp. 79–80

Định lý 3.1.1 (Công thức tính số phần tử của hợp 2 tập hợp bất kỳ)**.** *Cho A & B là 2 tập hợp hữu hạn bất kỳ. Khi đó ta có*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{3.1.1}$$

Chứng minh. B & $A \backslash B$ là 2 tập hợp không giao nhau & $A \cup B = B \cup (A \backslash B)$ nên $|A \cup B| = |B| + |A \backslash B|$. Mặt khác, $A \cap B$ & $A \backslash B$ là 2 tập hợp không giao nhau & $A = (A \cap B) \cup (A \backslash B)$ nên $|A| = |A \cap B| + |A \backslash B|$, do đó $|A \backslash B| = |A| - |A \cap B|$. Kết hợp 2 biểu thức vừa thu được suy ra (3.1.1). □

3.1.1.3 Tính số phần tử của hợp 3 tập hợp

Với 3 tập hợp bất kỳ, ta có định lý sau:

Định lý 3.1.2 (Công thức tính số phần tử của hợp 3 tập hợp bất kỳ)**.** *Cho A, B, C là 3 tập hợp. Khi đó:*

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|. \tag{3.1.2}$$

Chứng minh. Theo định lý 3.1.1 ta có $|A \cup B \cup C| = |A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)|$. Mặt khác cũng theo Định lý 1, $|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C|$ & $|A \cap (B \cup C)| = |(A \cap B) \cup (A \cap C)| = |A \cap B| + |A \cap C| - |(A \cap B) \cap (A \cap C)| = |A \cap B| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C|$. Kết hợp 3 biểu thức vừa thu được suy ra (3.1.2). □

3.1.2 Quy tắc nhân

3.1.2.1 Quy tắc nhân

(i) "Giả sử 1 công việc nào đó bao gồm 2 công đoạn A & B. Công đoạn A có thể làm theo n cách. Với mỗi cách thực hiện công đoạn A thì công đoạn B có thể làm theo m cách. Khi đó công việc có thể thực hiện theo mn cách. (ii) Giả sử 1 công việc nào đó bao gồm k công đoạn $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Giả sử rằng công đoạn A_1 có thể làm theo n_1 cách. Với mỗi $i \geq 2$ & với mỗi cách thực hiện các công đoạn $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}$ thì công đoạn A_i có thể thực hiện theo n_i cách. Khi đó công việc có thể thực hiện theo $\prod_{i=1}^k n_i = n_1 n_2 \cdots n_k$ cách." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 82

3.1.2.2 Tính số phần tử của tích Descartes của 2 tập hợp

"Giả sử công đoạn đầu có thể tiến hành theo n cách: $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Công đoạn thứ 2 có thể tiến hành theo m cách $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Như vậy nếu công đoạn đầu tiến hành theo cách a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, công đoạn thứ 2 tiến hành theo cách b_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ thì việc thực hiện công việc được mô tả bởi cặp (a_i, b_j). Thành thử tập hợp tất cả các cách thực hiện công việc được mô tả bởi tập hợp tất cả các cặp $\{(a_i, b_j)\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m)$, i.e., tích Descartes $A \times B$ của 2 tập hợp A & B." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 82. Như vậy bản chất toán học của quy tắc nhân là:

Định lý 3.1.3. *Số phần tử của tích Descartes $A \times B$ của 2 tập hợp hữu hạn A & B bằng số phần tử của A nhân với số phần tử của B, $|A \times B| = |A||B|$.*

3.1.2.3 Tính số phần tử của tích Descartes của nhiều tập hợp

"1 cách tổng quát, bản chất toán học của quy tắc nhân (ii) cho công việc nhiều công đoạn là công thức tính số phần tử của tích Descartes của nhiều tập hợp." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 82

Định lý 3.1.4. *Cho k tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Tập hợp tất cả các bộ $\{(a_1, a_2, \ldots, a_k)\}$ với $a_i \in A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ được gọi là* tích Descartes của k tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *& ký hiệu là $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$. Ta có quy tắc nhân sau đây:*

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = \prod_{i=1}^k |A_i| = |A_1||A_2| \cdots |A_k|.$$

Chứng minh. Sử dụng phương pháp quy nạp & nhận xét $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \times A_{k+1} = (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) \times A_{k+1}$. □

3.2 Hoán Vị, Chỉnh Hợp & Tổ Hợp – Permutation, Arrangement, & Combination

3.2.1 Hoán vị – Permutation

Định nghĩa 3.2.1 (Hoán vị). *Cho tập hợp A có n phần tử. Mỗi cách sắp xếp n phần tử này theo 1 thứ tự cho ta 1 hoán vị của tập hợp A. Số các hoán vị của tập hợp có n phần tử được ký hiệu là P_n.*

Ký hiệu P được lấy từ chữ cái đầu của từ *permutation*[1], i.e., hoán vị.

Định lý 3.2.1 (Công thức tính số các hoán vị)**.**

$$P_n = n! := \prod_{i=1}^n i = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^\star. \tag{3.2.1}$$

Chứng minh. "Việc sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A có n phần tử là công việc gồm n công đoạn. Công đoạn 1 là chọn phần tử để xếp vào vị trí thứ nhất: có n cách thực hiện. Sau khi thực hiện công đoạn 1, công đoạn 2 là chọn phần tử xếp vào vị trí thứ 2: có $n-1$ cách thực hiện. Sau khi thực hiện xong $i-1$ công đoạn (chọn $i-1$ phần tử của A vào các vị trí thứ $1, 2, \ldots, i-1$), công đoạn thứ i tiếp theo là chọn phần tử xếp vào vị trí thứ i: có $n-i+1$ cách thực hiện. Công đoạn cuối cùng (công đoạn thứ n) có 1 cách thực hiện. Theo quy tắc nhân, ta có $n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$ cách sắp xếp thứ tự n phần tử của tập A, i.e., có $n!$ hoán vị." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 85 □

[1] **permutation** [n] any of the different ways in which a set or number of things can be ordered or arranged.

3.2.2 Chỉnh hợp – Arrangement

Định nghĩa 3.2.2 (Chỉnh hợp). *Cho tập hợp A gồm n phần tử & số nguyên dương k với $1 \le k \le n$. Khi lấy ra k phần tử của A & sắp xếp chúng theo 1 thứ tự ta được 1* chỉnh hợp chập k của n phần tử của A *(gọi tắt là 1* chỉnh hợp chập k của *A). Số các chỉnh hợp chập k của tập hợp có n phần tử được ký hiệu là A_n^k.*

Nhận xét 3.2.1. *"Từ định nghĩa, ta thấy 1 hoán vị của tập hợp A có n phần tử là 1 chỉnh hợp chập n của A." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 85*

Định lý 3.2.2 (Công thức tính số các chỉnh hợp)**.**

$$A_n^k = \prod_{i=n-k+1}^{n} i = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{P_n}{P_{n-k}},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall k \in \mathbb{N},\ k \le n. \tag{3.2.2}$$

Chứng minh. "Việc thiết lập 1 chỉnh hợp chập k của tập A có n phần tử là công việc gồm k công đoạn. Công đoạn 1 là chọn phần tử để xếp vào vị trí thứ nhất: có n cách thực hiện. Sau khi thực hiện công đoạn 1, công đoạn 2 là chọn phần tử xếp vào vị trí thứ 2: có $n-1$ cách thực hiện. Sau khi thực hiện xong $i-1$ công đoạn (chọn $i-1$ phần tử của A vào các vị trí thứ $1, 2, \ldots, i-1$), công đoạn thứ i tiếp theo là chọn phần tử xếp vào vị trí thứ i: có $n-i+1$ cách thực hiện. Công đoạn cuối cùng (công đoạn thứ k) có $n-k+1$ cách thực hiện. Theo quy tắc nhân, ta có $\prod_{i=n-k+1}^n i = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ cách lập 1 chỉnh hợp chập k của tập A có n phần tử, i.e., có $\prod_{i=n-k+1}^n i = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ chỉnh hợp chập k của tập A có n phần tử." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 86 □

3.2.3 Tổ hợp – Combination

Định nghĩa 3.2.3 (Tổ hợp)**.** *Cho tập hợp A gồm n phần tử & $k \in \mathbb{N}^\star$ với $1 \le k \le n$. Mỗi tập con có k phần tử của A được gọi là 1* tổ hợp chập k của n phần tử của A *(gọi tắt là 1* tổ hợp chập k *của A). Số các tổ hợp chập k của tập hợp có n phần tử được ký hiệu là C_n^k.*

Định lý 3.2.3 (Công thức tính số các tổ hợp)**.**

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{n!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{P_n}{P_k P_{n-k}},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall k \in \mathbb{N},\ k \le n.$$

Chứng minh. "Từ định nghĩa, ta có mỗi hoán vị của 1 tổ hợp chập k của A cho ta 1 chỉnh hợp chập k của A. Do đó, từ 1 tổ hợp chập k của A, ta lập được $k!$ chỉnh hợp chập k của A. Vậy $A_n^k = k! C_n^k$." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 86 □

Quy ước: $0! = 1$ & $C_n^0 = A_n^0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Với quy ước đó thì định lý 3.2.3–3.2.3 đúng cho cả $k = 0$ & $k = n$.

Định lý 3.2.4 (2 tính chất căn bản của số C_n^k)**.** *(a)* $C_n^k = C_n^{n-k}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \le n$.

(b) (Hằng đẳng thức Pascal)

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1},\ \forall n, k \in \mathbb{N}^\star,\ k \le n. \tag{hdtP}$$

Chứng minh. (a) $C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \le n$. (b) $C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} + \frac{n!k}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = C_{n+1}^k$, $\forall n, k \in \mathbb{N}^\star$, $k \le n$. □

3.3 Nhị Thức Newton – Newton's Binomial

3.3.1 Công thức nhị thức Newton – Newton's binomial theorem

"1 cách tổng quát, khai triển của $(a+b)^n$ được cho bởi công thức sau:

Định lý 3.3.1 (Công thức nhị thức Newton)**.**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k,\ \forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star. \tag{3.3.1}$$

Công thức này được gọi là *công thức nhị thức Newton* (gọi tắt là *nhị thức Newton*)." See, e.g., Wikipedia/định lý nhị thức & Wikipedia/binomial theorem.

Chứng minh. "Trước hết ta chứng minh khẳng định $P(n)$ sau: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Chứng minh bằng quy nạp theo n. Rõ ràng $P(1)$ đúng. Giả sử $P(n)$ đúng. Ta có $(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n = (1+x)\sum_{k=0}^n C_n^k x^k = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k + \sum_{k=0}^n C_n^k x^{k+1}$. Lại có $\sum_{k=0}^n C_n^k x^k = 1 + \sum_{k=1}^n C_n^k x^k$, $\sum_{k=0}^n C_n^k x^{k+1} = \sum_{k=1}^n C_n^{k-1} x^k + x^{n+1}$. Kết hợp 3 đẳng thức vừa thu được & áp dụng hằng đẳng thức Pascal (hdtP), ta được $(1+x)^{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^n (C_n^k + C_n^{k-1})x^k + x^{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^n C_{n+1}^k x^k + x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^k$. Vậy $P(n+1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp ta có $P(n)$ đúng, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Trở lại định lý. Nếu $a = 0$ thì công thức hiển nhiên đúng. Giả sử $a \neq 0$. Đặt $x = \frac{b}{a}$ & áp dụng $P(n)$ ta có $\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{b^k}{a^k}$. Thành thử $(a+b)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = a^n \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{b^k}{a^k} = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, pp. 90–91 □

Lưu ý 3.3.1. *Công thức trên là khai triển của $(a+b)^n$ theo lũy thừa giảm của a & lũy thừa tăng của b. Ta cũng có thể viết khai triển của $(a+b)^n$ theo lũy thừa tăng của a & lũy thừa giảm của b. $(a+b) = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$.*

Hệ quả 3.3.1 (Khai triển lũy thừa của hiệu)**.**

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k,\ \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Suy ra

$$(a-b)^n = a^n - C_n^1 a^{n-1} b + \cdots - C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n,\ \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ n \,\vdots\, 2,$$

$$(a-b)^n = a^n - C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} - b^n,\ \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ n \not\vdots\, 2.$$

Có thể gộp chung 2 công thức thành:

$$(a-b)^n = \begin{cases} a^n - C_n^1 a^{n-1} b + \cdots - C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n, & \text{if } n \,\vdots\, 2, \\ a^n - C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} - b^n, & \text{if } n \not\vdots\, 2, \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Bài toán 3.3.1 (Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, Ví dụ 2, p. 92)**.** *Chứng minh công thức khai triển nhị thức Newton bằng suy luận tổ hợp.*

Chứng minh. "Khi khai triển $(a+b)^n = (a+b)(a+b)\cdots(a+b)$ (n thừa số $(a+b)$) theo quy tắc phân phối của phép nhân, ta được 1 tổng các đơn thức dạng $x_1 x_2 \cdots x_n$ trong đó $x_i \in \{a, b\}$. Bây giờ ta thực hiện việc ghép các số hạng đồng dạng. Khi tất cả n giá trị x_i bằng a, ta nhận được đơn thức a^n. Chỉ có 1 đơn thức như vậy. Khi $n-1$ giá trị x_i bằng a & giá trị còn lại bằng b, ta nhận được đơn thức $a^{n-1}b$. Số các đơn thức như thế bằng số cách chọn 1 số bằng b trong n số $x_1, x_2, \ldots, x_n$, i.e., bằng C_n^1. Do đó ta thu được số hạng $C_n^1 a^{n-1} b$. Khi $n-2$ giá trị x_i bằng a & 2 giá trị còn lại bằng b, ta nhận được đơn thức $a^{n-2}b^2$. Số các đơn thức như thế bằng số cách chọn 2 số bằng b trong n số $x_1, x_2, \ldots, x_n$, i.e., bằng C_n^2. Do đó ta thu được số hạng $C_n^2 a^{n-2} b^2$. Tiếp tục như vậy, khi $n-k$ giá trị x_i bằng a & k giá trị còn lại bằng b, ta nhận được đơn thức $a^{n-k}b^k$. Số các đơn thức như thế bằng số cách chọn k số bằng b trong n số $x_1, \ldots, x_n$, i.e., bằng C_n^k. Do đó ta thu được số hạng $C_n^k a^{n-k} b^k$. Cuối cùng, khi tất cả n giá trị bằng b, ta được đơn thức b^n. Chỉ có 1 đơn thức như vậy. Vậy $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, pp. 92–93 □

3.3.2 Tam giác Pascal – Pascal triangle

"Tam giác Pascal là 1 bảng số được lập theo quy luật sau: Đỉnh của tam giác được ghi số 1. Hàng thứ nhất được ghi 2 số 1. Nếu đã có hàng thứ $n \in \mathbb{N}^\star$ thì hàng thứ $n+1$ tiếp theo được thiết lập bằng cách cộng 2 số liên tiếp của hàng thứ n rồi viết kết quả xuống hàng dưới ở vị trí giữa 2 số này. Sau đó viết số 1 ở đầu & cuối hàng.

Định lý 3.3.2. *Các số ở hàng thứ $n \in \mathbb{N}^\star$ trong tam giác Pascal là dãy gồm các số $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{n-1}, C_n^n$.*

Chứng minh. Chứng minh bằng quy nạp. Với $n = 1$, khẳng định đúng. Giả sử khẳng định đúng với n. Xét hàng thứ $n+1$: Giả sử các số ở hàng này là $a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$. Theo cách xây dựng tam giác, ta có $a_0 = 1 = C_{n+1}^0$, $a_{n+1} = 1 = C_{n+1}^{n+1}$. Xét $1 \le k \le n$. Theo cách xây dựng tam giác & giả thiết quy nạp, ta có $a_k = C_n^k + C_n^{k-1}$. Mặt khác, theo hằng đẳng thức Pascal $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$. Thành thử $a_k = C_{n+1}^k$. Vậy khẳng định đúng với $n+1$. Theo nguyên lý quy nạp, khẳng định đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^\star$." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, pp. 93–94 □

3.4 Biến Cố & Xác Suất của Biến Cố – Event & Probability of Event

3.4.1 Phép thử ngẫu nhiên & không gian mẫu – Random trial & sample space

3.4.1.1 Phép thử ngẫu nhiên – Random trial

Định nghĩa 3.4.1 (Phép thử ngẫu nhiên)**.** *"*Phép thử ngẫu nhiên *(gọi tắt là* phép thử*) là 1 thí nghiệm hay 1 hành động mà: • Kết quả của nó không dự đoán trước được. • Có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể của nó. Phép thử thường được ký hiệu bởi chữ T." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 95*

Ký hiệu T của phép thử được lấy từ chữ cái đầu của từ *trial*[2], i.e., thử, phép thử.

3.4.1.2 Không gian mẫu – Sample space

Định nghĩa 3.4.2 (Không gian mẫu)**.** *"Tập hợp tất cả các kết quả có thể của phép thử được gọi là* không gian mẫu *của phép thử & được ký hiệu bởi chữ Ω." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 95*

3.4.2 Biến cố – Event

Định nghĩa 3.4.3 (Biến cố)**.** *(a) "1* biến cố *A (còn gọi là* sự kiện *A) liên quan tới phép thử T là biến cố mà việc xảy ra hay không xảy ra của nó tùy thuộc vào kết quả T. Mỗi kết quả của phép thử T làm cho biến cố A xảy ra được gọi là 1* kết quả thuận lợi *cho A. (b) Tập hợp các kết quả thuận lợi cho A được ký hiệu bởi Ω_A. Để đơn giản, ta có thể dùng chính chữ A để ký hiệu tập hợp các kết quả thuận lợi cho A. Khi đó ta cũng nói biến cố A được mô tả bởi tập A. (c)* Biến cố chắc chắn *là biến cố luôn luôn xảy ra khi thực hiện phép thử T. Biến cố chắc chắn được mô tả bởi tập Ω & được ký hiệu là Ω. (d)* Biến cố không thể *là biến cố không bao giờ xảy ra khi thực hiện phép thử T. Biến cố không thể được mô tả bởi tập $\emptyset$ & được ký hiệu là $\emptyset$." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, pp. 95–96*

3.4.3 Xác suất của biến cố – Probability of event

"Trong cuộc sống hàng ngày, khi nói về biến cố, ta thường nói biến cố này có nhiều khả năng xảy ra, biến cố kia có ít khả năng xảy ra, biến cố này có nhiều khả năng xảy ra hơn biến cố kia. Toán học đã định lượng hóa các khả năng này bằng cách gán cho mỗi biến cố 1 số $\in [0;1]$ gọi là *xác suất của biến cố* đó. *Xác suất của biến cố A* được ký hiệu bởi $P(A)$. Nó đo lường khả năng khách quan xuất hiện biến cố A." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 96

3.4.3.1 Định nghĩa cổ điển của xác suất – Classical definition of probability

Định nghĩa 3.4.4 (Xác suất)**.** *"Giả sử phép thử T có 1 số hữu hạn kết quả có thể đồng khả năng. Khi đó* xác suất của 1 biến cố *A liên quan tới T là tỷ số giữa số kết quả thuận lợi cho A & số kết quả có thể: $P(A) \coloneqq \frac{|A|}{|\Omega|}$.*

Như vậy, việc giải 1 bài toán tính xác suất của 1 biến cố A theo định nghĩa cổ điển sẽ được quy về 1 bài toán tổ hợp: đếm số kết quả có thể của T & đếm số kết quả thuận lợi cho A. Cụ thể chúng ta có 3 bước sau:

1. Xác định không gian mẫu Ω rồi tính số phần tử của Ω, i.e., đếm số kết quả có thể của phép thử T.
2. Xác định tập con A mô tả biến cố A rồi tính số phần tử của A, i.e., đếm số kết quả thuận lợi cho A.
3. Lấy kết quả của bước 2 chia cho bước 1.

Nói chung việc tính số các kết quả có thể (bước 1) thường dễ dàng hơn nhiều so với việc tính số các kết quả thuận lợi cho A (bước 2). Để giải tốt các bài toán tính xác suất, các bạn phải nắm chắc phần tổ hợp. 1 giả thiết quan trọng khi áp dụng định nghĩa cổ điển là các kết quả của phép thử T (i.e., các phần tử của Ω) được coi là *đồng khả năng*. I.e., tất cả các kết quả của T đều có khả năng xuất hiện như nhau, ta không có 1 lý do gì để cho rằng kết quả này lại hay xảy ra hơn kết quả kia. E.g.: Nếu phép thử T liên quan tới gieo súc sắc, tung đồng tiền, ta giả thiết con súc sắc, đồng tiền được chế tạo cân đối, đồng chất thì các kết quả của T là đồng khả năng. Khi nói tới việc "chọn ngẫu nhiên" 1 phần tử trong 1 tập hợp nào đó, ta phải hiểu là việc chọn vô tư, không thiên vị, do đó mỗi phần tử đều có khả năng được chọn như nhau." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, pp. 96–97

[2] **trial** [n] [countable, uncountable] **1.** the process of testing something/somebody to find out whether they are effective, successful, suitable, etc.; **2.** a formal examination of evidence in court by a judge & often a jury, to decide if somebody accused of a crime is guilty or not; **trial & error** [idiom] the process of solving a problem by trying various methods, amounts, etc. until you find one that is successful; [v] **trial something** to test something/somebody to find out whether they are effective, successful, suitable, etc.

3.4.3.2 Định nghĩa thống kê của xác suất – Statistical definition of probability

"Trong định nghĩa cổ điển của xác suất, ta cần giả thiết phép thử T có 1 số hữu hạn kết qủa có thể đồng khả năng. Nếu giả thiết đó bị vi phạm thì định nghĩa đó sẽ được thay bởi định nghĩa sau gọi là định nghĩa thống kê của xác suất.

Định nghĩa 3.4.5 (Xác suất)**.** *Xét phép thử T & biến cố A liên quan tới T. Ta tiến hành lặp đi lặp lại N lần phép thử T. Giả sử trong N lần thực hiện phép thử T đó, biến cố A xuất hiện $k = k(N)$ lần. Người ta chứng minh được rằng khi $N \to +\infty$ thì tỷ số $\frac{k(N)}{N}$ luôn dần tới 1 giới hạn xác định. Giới hạn đó được gọi là* xác suất *của A, i.e., $P(A) = \lim \frac{k(N)}{N}$.*

Trong trường hợp phép thử T có 1 số hữu hạn kết quả có thể đồng khả năng thì xác suất của biến cố A theo định nghĩa thống kê cũng trùng với xác suất của biến cố A theo định nghĩa cổ điển. Tỷ số $\frac{k(N)}{N}$ được gọi là *tần suất* của A trong N lần thực hiện phép thử T. Khi N càng lớn thì tần suất càng gần với xác suất. Thành thử tần suất được xem như giá trị gần đúng của xác suất. Số phép thử N càng lớn thì sai số giữa tần suất & xác suất càng bé." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, pp. 98–99

3.4.4 Quy tắc cộng xác suất – Addition rule of probability

3.4.4.1 Biến cố hợp

Định nghĩa 3.4.6 (Biến cố hợp)**.** *"Cho 2 biến cố A & B. Biến cố "A hoặc B xảy ra", ký hiệu là $A \cup B$, được gọi là* hợp *của 2 biến cố A & B. 1 cách tổng quát, cho k biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Biến cố: "Có ít nhất 1 trong các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$ xảy ra", ký hiệu là $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$, được gọi là* hợp *của k biến cố đó." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 99*

3.4.4.2 Biến cố xung khắc

Định nghĩa 3.4.7 (Biến cố xung khắc)**.** *"2 biến cố A & B được gọi là* xung khắc *với nhau nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 99*

3.4.4.3 Biến cố đối – Addition rule of probability

Định nghĩa 3.4.8 (Biến cố đối)**.** *"Cho A là 1 biến cố. Khi đó biến cố "Không xảy ra A" được gọi là* biến cố đối *của A. Biến cố đối của A ký hiệu là $\overline{A}$." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 99*

"Rõ ràng A & $\overline{A}$ là 2 biến cố xung khắc & hợp của chúng là 1 biến cố chắc chắn: $\Omega = A \cup \overline{A}$." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 100

3.4.4.4 Quy tắc cộng xác suất

Định lý 3.4.1 (Quy tắc cộng xác suất)**.** *(a) Nếu 2 biến cố A, B xung khắc với nhau thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.*

(b) Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_k$ là k biến cố đôi một xung khắc với nhau thì $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = \sum_{i=1}^k P(A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_k)$, i.e.,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k P(A_i).$$

Chứng minh. (a) Sử dụng công thức $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ với mọi tập A, B, & nếu có thêm $A \cap B =$, i.e., A & B xung khắc, thì $|A \cup B| = |A| + |B|$. Chia 2 vế cho $|\Omega|$, thu được $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. (b) Có thể chứng minh bằng quy nạp dựa vào bước cơ sở $k = 2$ chính là (a) hoặc sử dụng trực tiếp công thức tương ứng ở ngôn ngữ tập hợp: $|\bigcup_{i=1}^k A_i| = \sum_{i=1}^k |A_i|$, với mọi tập hợp A_i, $i = 1, \ldots, k$, đôi một không giao nhau. □

3.4.4.5 Công thức tính xác suất biến cố đối

"Xác suất của biến cố đối $\overline{A}$ của biến cố A là $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. Thật vậy, vì $P(\Omega) = 1$; A & $\overline{A}$ là 2 biến cố xung khắc & $\Omega = A \cup \overline{A}$ nên từ quy tắc cộng suy ra $1 = P(A) + P(\overline{A})$." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 100

3.4.5 Quy tắc nhân xác suất – Multiplication rule of probability

3.4.5.1 Biến cố giao

Định nghĩa 3.4.9. *"Cho 2 biến cố A & B. Biến cố "Cả A & B đều xảy ra" ký hiệu là AB được gọi là* giao *của 2 biến cố A & B. 1 cách tổng quát, cho k biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Biến cố: "Tất cả k biến số $A_1, A_2, \ldots, A_k$ đều xảy ra", ký hiệu là $A_1A_2 \ldots A_k$, được gọi là* giao *của k biến cố đó." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 101*

3.4.5.2 Biến cố độc lập

Định nghĩa 3.4.10 (Biến cố độc lập)**.** *"2 biến cố A & B được gọi là* độc lập với nhau *nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia. 1 cách tổng quát, cho k biến cố* $A_1, A_2, \ldots, A_k$*. Chúng được gọi là* độc lập với nhau *nếu việc xảy ra hay không xảy ra của 1 nhóm bất kỳ trong các biến cố trên không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của các biến cố còn lại." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 101*

3.4.5.3 Quy tắc nhân xác suất

Định lý 3.4.2 (Quy tắc nhân xác suất)**.** *Nếu* A, B *là 2 biến cố độc lập thì* $P(AB) = P(A)P(B)$*. 1 cách tổng quát, nếu k biến cố* $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *là độc lập thì* $P(A_1A_2 \ldots A_k) = \prod_{i=1}^{k} P(A_i) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_k)$*.*

Chứng minh. *** □

3.5 Các Quy Tắc Tính Xác Suất – Rules of Probability

3.6 Biến Ngẫu Nhiên Rời Rạc – Discrete Random Variable

Chương 4

Dãy Số. Cấp Số Cộng & Cấp Số Nhân – Series. Arithmetic Progression/Sequence & Geometric Progression/Sequence

4.1 Phương Pháp Quy Nạp Toán Học – Method of Mathematical Induction

"*Phương pháp quy nạp* là 1 trong những công cụ hữu hiệu nhất thường dùng khi chứng minh các mệnh đề Toán học. Cơ sở của phương pháp được xây dựng dựa trên nguyên lý sau:

Nguyên lý 4.1.1 (Nguyên lý quy nạp Toán học)**.** *Giả sử S là 1 tập hợp các số nguyên dương nào đó, chứa số $k \in \mathbb{N}^\star$. Khi đó, nếu với mọi $n \geq k$, $n \in S$, S đều chứa số $n+1$, thì S là tập hợp tất cả các số nguyên dương không nhỏ hơn k.*

Từ nguyên lý quy nạp, ta thấy rằng để chứng minh 1 mệnh đề $P(n)$ nào đó đúng với tập hợp các số nguyên dương n, $n \geq k$, i.e., $\{n \in \mathbb{Z}; n \geq k\}$, ta chỉ cần thực hiện 2 bước:

1. Chứng minh $P(k)$ đúng (với k là số nhỏ nhất của tập hợp đó).
2. Chứng minh nếu $P(n)$ đúng thì $P(n+1)$ cũng đúng. (Phần giả thiết $P(n)$ đúng được gọi là *giả thiết quy nạp*).

Phương pháp quy nạp được sử dụng rộng rãi trên khắp các lĩnh vực của Toán học, trong đó có bất đẳng thức. Rất nhiều kết quả kinh điển trong bất đẳng thức (e.g., bất đẳng thức AM–GM, bất đẳng thức Chebyshev, ...) đều được xây dựng từ quy nạp. Ngoài ra, quy nạp cũng là 1 công cụ rất hiệu quả thường được sử dụng trong giải toán bất đẳng thức." – Quỳnh, Dũng, Khoái, et al., 2020, p. 136

"... 2 ví dụ ứng dụng trực tiếp phương pháp quy nạp trong chứng minh bất đẳng thức, ta chỉ việc áp dụng thẳng, không cần phải suy xét gì mà vẫn đi đến kết quả. Tuy nhiên trong thực tế giải toán, muốn sử dụng quy nạp thành công, ta còn phải xét đến nhiều yếu tố khác (thứ tự các biến, *sự bảo tồn* giả thiết, ...)." – Quỳnh, Dũng, Khoái, et al., 2020, p. 138

"Có 1 kinh nghiệm rất thú vị khi sử dụng quy nạp để chứng minh bất đẳng thức: Có những bài toán ta không thể sử dụng quy nạp trực tiếp để giải chúng, nhưng sau khi tìm cách "làm mạnh" thích hợp, ta lại có thể sử dụng được quy nạp." – Quỳnh, Dũng, Khoái, et al., 2020, p. 140

Nhận xét 4.1.1. *"Ý tưởng chính ở đây là ta tìm cách "làm mạnh" bài toán sao cho kết quả "làm mạnh" có tính chất:* Nếu giả thiết mệnh đề $P(n)$ đúng thì ta có thể sử dụng giả thiết đó để chứng minh mệnh đề $P(n+1)$ cũng đúng. *Khi ấy, chỉ cần tìm được 1 số n_0 sao cho kết quả bài toán "làm mạnh" đúng là ta có thể sử dụng quy nạp để suy ra ngay kết quả bài toán "làm mạnh" đúng với mọi $n \geq n_0$, i.e., ta đã chứng minh được kết quả bài toán đã cho ban đầu đúng với mọi $n \geq n_0$. Cần chú ý rằng:*

- *Có nhiều cách "làm mạnh" bài toán khác nhau tùy thuộc vào kinh nghiệm & khả năng suy luận của người giải.*
- *Số n_0 không nhất thiết phải trùng với số nhỏ nhất trong tập hợp các số được cho ở đề bài. Trong trường hợp n_0 không phải là số nhỏ nhất thì từ kết quả bài toán "làm mạnh", ta cũng đã loại đi được 1 trường hợp lớn cho cả bài toán ban đầu là $n \geq n_0$, & việc còn lại ta phải làm chỉ là đi xét từng trường hợp cụ thể của n thỏa $n < n_0$ nữa là xong." – Quỳnh, Dũng, Khoái, et al., 2020, pp. 141–142*

4.2 Dãy Số – Sequence

Nội dung. *Dãy số & các khái niệm cơ bản liên quan, các cách xác định 1 dãy số, dãy số tăng, dãy số giảm, dãy số bị chặn, dãy số tuần hoàn.*

4.2.1 Định nghĩa

"Nói tới dãy số, ta hiểu đó là kết quả thu được khi viết liên tiếp các số theo 1 quy tắc nào đó." "Dãy số thể hiện 1 quy tắc mà nhờ nó, ứng với mỗi $n \in \mathbb{N}^\star$, ta xác định được duy nhất 1 số thực u_n. Vì thế, ta có coi dãy số là 1 hàm số xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^\star \equiv \mathbb{Z}_{>0}$." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 116

Định nghĩa 4.2.1 (Dãy số)**.** *"Dãy số là 1 hàm số từ S vào $\mathbb{R}$, trong đó: $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ đối với* dãy số hữu hạn*, hoặc $S = \mathbb{N}$ đối với* dãy số vô hạn *bắt đầu từ chỉ số 0, $S = \mathbb{N}^\star$ đối với dãy số vô hạn bắt đầu từ chỉ số 1.*

Với dãy số $f : S \to \mathbb{R}$, ta thường ký hiệu $f(i)$ là f_i." "Dãy số thường được ký hiệu là $(a_i)_{i=1}^n$; $(a_i)_{i=1}^\infty$ hay dưới *dạng khai triển* $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ hoặc đơn giản là (a_i) khi đã rõ tập S." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 117

"Các số a_i được gọi là các *số hạng* của dãy số, trong đó a_1 (hoặc a_0) là *số hạng đầu tiên*, a_i là số hạng thứ i. $S_n \coloneqq \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ được gọi là *tổng của n số hạng đầu tiên*. Với dãy số hữu hạn $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ta gọi a_n là *số hạng cuối cùng*, n là số số hạng còn S_n là *tổng tất cả các số hạng* của dãy số. Nếu $a_i \in \mathbb{Z}, \forall i \in S$ thì ta nói (a_i) là dãy số nguyên. E.g., dãy (a_n) với $a_n = (-1)^n n$, dãy Fibonacci là những dãy số nguyên." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 118

4.2.2 Cách xác định 1 dãy số

Dãy số có thể được xác định (cho) bằng các cách dưới đây: **1.** Cho dãy số bằng cách liệt kê các phần tử (dùng cho các dãy số hữu hạn). **2.** Cho dãy số bởi công thức của số hạng tổng quát. **3.** Cho dãy số bởi hệ thức truy hồi. **4.** Diễn đạt bằng lời cách xác định mỗi số hạng của dãy số. E.g., cho dãy các số nguyên tố, cho dãy các hợp số nguyên dương, dãy (a_n) với a_n là số các xâu nhị phân độ dài n không có 2 bit 1 kề nhau.

"Chú ý là 1 dãy số có thể cho bằng nhiều cách. Trong số các cách xác định dãy số thì 2 cách **2** & **3** là quan trọng nhất & thường được sử dụng nhất." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 119

Ví dụ 4.2.1 (Dãy số Fibonacci)**.** *Cho dãy số (F_n) xác định bởi $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$.*

4.2.3 Dãy số tăng, dãy số giảm – Strictly monotonically increasing & decreasing sequences

"Vì dãy số là 1 hàm số từ $\mathbb{N}$ (hay 1 tập con S của $\mathbb{N}$) vào $\mathbb{R}$ nên 1 cách tự nhiên, ta có thể nghĩ đến khái niệm dãy số tăng, giảm như sau: Dãy số (u_n) là *dãy số tăng* nếu $u_n < u_m$, $\forall m, n \in S$, $n < m$. Tuy nhiên do đặc thù của tập hợp các số tự nhiên, điều kiện này có thể thay thế bằng 1 điều kiện tương đương nhưng đơn giản hơn, đó là $u_n < u_{n+1}$, $\forall n \in S$.

Định nghĩa 4.2.2 (Dãy số tăng/giảm)**.** *Dãy số (u_n) được gọi là* dãy số tăng *nếu với mọi n, ta có $u_n < u_{n+1}$. Dãy số (u_n) được gọi là* dãy số giảm *nếu với mọi n, ta có $u_n > u_{n+1}$." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 119*

4.2.4 Dãy số bị chặn – Bounded sequence

Định nghĩa 4.2.3 (Dãy số bị chặn)**.** *(a) Dãy số (u_n) được gọi là* dãy số bị chặn trên *nếu tồn tại 1 số M sao cho $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n \le M$. (b) Dãy số (u_n) được gọi là* dãy số bị chặn dưới *nếu tồn tại 1 số m sao cho $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n \ge m$. (c) Dãy số (u_n) được gọi là* dãy số bị chặn *nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới; i.e., tồn tại 2 số M & m sao cho $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $m \le u_n \le M$.*

Vì các dãy số hữu hạn thì hiển nhiên là bị chặn (e.g., 1 chặn trên chặt/ngặt chính là phần tử lớn nhất của chúng) nên ta chỉ xét tính bị chặn đối với các dãy vô hạn.

4.2.5 Dãy số tuần hoàn – Periodic sequence

"Tương tự như khái niệm dãy số tăng, khái niệm dãy số tuần hoàn cũng được cảm sinh 1 cách tự nhiên từ khái niệm hàm số tuần hoàn.

Định nghĩa 4.2.4 (Dãy số tuần hoàn)**.** *Dãy số (u_n) được gọi là* dãy số tuần hoàn *nếu tồn tại $k \in \mathbb{N}^\star$ sao cho $u_{n+k} = u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Số nguyên dương k, nếu tồn tại, được gọi là* chu kỳ tuần hoàn *của dãy số.*

Ví dụ 4.2.2. *(a) Dãy số $u_n = 2^n \mod 10$ (i.e., chữ số tận cùng của 2^n) là dãy số tuần hoàn với chu kỳ 4: $2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2, \ldots$. (b) Dãy các chữ số thập phân sau dấu phẩy của $\sqrt{2}$ không tuần hoàn: $4, 1, 4, 2, 1, 3, 5, 6, \ldots$. (c) Dãy số (u_n) xác định bởi $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_{n+1} = u_n - u_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, tuần hoàn với chu kỳ 6: $1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, \ldots$." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 121*

4.3 Cấp Số – Progression

"Có những dãy số xác định bởi quy luật đặc biệt gọi là *cấp số* [1]. Có 2 dạng cấp số cơ bản thường gặp nhất là *cấp số cộng* & *cấp số nhân*." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 123

[1] **progression** [n] **1.** [uncountable, countable] the process of developing gradually from 1 stage or state to another; **2.** [countable] **progression (of something)** a number of things that come in a series.

4.3.1 Cấp số cộng – Arithmetic progression

Định nghĩa 4.3.1. "Cấp số cộng *là 1 dãy số (hữu hạn hay vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ 2, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó & 1 số d không đổi, i.e.,* (u_n) *là cấp số cộng* $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ n \ge 2,\ u_n = u_{n-1} + d$.

u_1 được gọi là *số hạng đầu tiên*, u_k là *số hạng thứ k* của cấp số cộng; d được gọi là *công sai* của cấp số cộng. Nếu cấp số cộng là hữu hạn & có n số hạng thì n gọi là *số số hạng* còn u_n được gọi là *số hạng cuối* của cấp số cộng. Sở dĩ có thuật ngữ công sai này là vì $u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = \cdots = u_n - u_{n-1} = d$, i.e., d là *sai biệt chung* của các số hạng kề nhau của dãy số. Ngoài các cấp số cộng có hữu hạn phần tử, người ta còn xét những cấp số cộng có vô hạn phần tử."

Ví dụ 4.3.1 (Dãy các bội của 1 số nguyên dương). *Dãy các bội số dương của* $m \in \mathbb{N}^\star$ *bất kỳ là 1 cấp số cộng có vô hạn phần tử với số hạng đầu là m & công sai là m, i.e.,* $\mathrm{B}(m) = \{mn | n \in \mathbb{Z}\}$, $\mathrm{B}(m) \cap (0;\infty) = \{mn | n \in \mathbb{N}^\star\} = (mn)_{n=1}^\infty$, $\forall m \in \mathbb{N}^\star$.

Dãy các số tự nhiên lẻ $(2n+1)_{n=0}^\infty$ & dãy các số tự nhiên chẵn $(2n)_{n=0}^\infty$ là 2 cấp số cộng với công sai $d = 2$. Tương tự, với $m \in \mathbb{N}^\star$ & $r \in \mathbb{N}$, $r < m$, bất kỳ, dãy các số tự nhiên chia m dư r là 1 cấp số cộng có vô hạn phần tử với số hạng đầu là r & công sai là m, i.e., $\{mn + r | n \in \mathbb{N}\} = (mn + r)_{n=0}^\infty$, $\forall m \in \mathbb{N}^\star$, $\forall r \in \mathbb{N}$. Với $r = 0$, phép chia có số dư là r này là 1 phép chia hết & dãy số này trở thành dãy các bội của m trong Ví dụ 4.3.1 với số 0 được thêm vào đầu dãy.

Định lý 4.3.1 (Các tính chất cơ bản của cấp số cộng). *(a)* (Tính chất đặc trưng của cấp số cộng) *Nếu* (u_n) *là 1 cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ* 2*, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của 2 số hạng đứng kề nó trong dãy, i.e.,* $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$.

(b) (Số hạng tổng quát của cấp số cộng) *Nếu 1 cấp số cộng có số hạng đầu* u_1 *& công sai d thì số hạng tổng quát* u_n *của nó được xác định theo công thức sau:* $u_n = u_1 + (n-1)d$.

(c) (Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng) *Giả sử* (u_n) *là 1 cấp số cộng. Với mỗi số nguyên dương n, gọi* S_n *là tổng n số hạng đầu tiên của nó* ($S_n = \sum_{i=1}^n u_i$)*. Khi đó ta có:* $S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2}$.

Chứng minh. "(a) Gọi d là công sai của cấp số cộng (u_n). Với mọi $k \ge 2$, ta có $u_{k+1} = u_k + d$, $u_{k-1} = u_k - d$. Từ 2 đẳng thức trên ta được $u_{k+1} + u_{k-1} = 2u_k$, $\forall k \ge 2$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh. (b) Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp. Công thức đúng khi $n = 1$, vì $u_1 = u_1 + 0d$. Giả sử công thức đúng khi $n = k$, $(k \in \mathbb{N}^\star)$, i.e., $u_k = u_1 + (k-1)d$. Khi đó ta có $u_{k+1} = u_k + d = [u_1 + (k-1)d] + d = u_1 + kd$. Vậy công thức cũng đúng khi $n = k+1$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh. (c) Để ý rằng $u_1 + u_n = u_2 + u_{n-1} = u_3 + u_{n-2} = \ldots = u_n + u_1$ nên ta có $2S_n = \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{i=n}^1 u_i = \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{i=1}^n u_{n+1-i} = \sum_{i=1}^n (u_i + u_{n+1-i}) = \sum_{i=1}^n (u_1 + u_n) = n(u_1 + u_n)$. Từ đó suy ra $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, pp. 124–125 □

"Công thức tính số số hạng của 1 cấp số cộng khi biết số hạng đầu, số hạng cuối & công sai: Số số hạng = [(số hạng đầu − số hạng cuối): công sai] +1. Đây chính là công thức của bài toán trồng cây quen thuộc ở cấp 2." "ý tưởng của Gauss (lúc còn là 1 cậu bé) khi ông tính tổng $\sum_{i=1}^{100} i = 1 + 2 + \cdots + 100$ rằng $1 + 100 = 2 + 99 = \cdots = 50 + 51$ gồm 50 cặp số, mỗi cặp có tổng bằng 101. Tư (b)–(c) của định lý 4.3.1 dễ dàng suy ra: $S_n = \frac{1}{2}[2u_1 + (n-1)d]n$." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 126

4.3.2 Cấp số nhân – Geometric progression

Định nghĩa 4.3.2 (Cấp số nhân). "Cấp số nhân *là 1 dãy số (hữu hạn hay vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ 2, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước đó & 1 số q không đổi. I.e.,* (u_n) *là cấp số nhân* $\Leftrightarrow \forall n \ge 2,\ u_n = qu_{n-1}$.

u_1 được gọi là *số hạng đầu tiên*, u_k là *số hạng thứ k* của cấp số nhân, q được gọi là *công bội* của cấp số nhân. Nếu cấp số nhân là hữu hạn & có n số hạng thì n được gọi là *số số hạng* còn u_n được gọi là *số hạng cuối* của cấp số nhân." – Quỳnh, Dũng, Lương, et al., 2010, p. 128

CÁCH CHUYỂN CÁC DÃY SỐ CÓ CÔNG THỨC TRUY HỒI DẠNG $u_{n+1} = au_n + b$ THÀNH CẤP SỐ CỘNG & CẤP SỐ NHÂN. Cho dãy số $(u_n)_n$ (ở đây ta chỉ quan tâm tới công thức truy hồi chứ không quan tâm đến tập các chỉ số, e.g., chỉ số đầu/cuối, nên chỉ ký hiệu đơn giản là $(u_n)_n$ thay vì chỉ ra cụ thể tập các chỉ số, e.g., $(u_n)_{n=1}^\infty$ hay $(u_n)_{n=0}^N$) xác định bởi công thức truy hồi $u_{n+1} = au_n + b$ với $a \ne 0$ (nếu $a = 0$, thì $u_n = b$, $\forall n$, nên là 1 dãy hằng, i.e., 1 cấp số cộng có công sai bằng 0 & đồng thời là 1 cấp số nhân có công bội bằng 1, i.e., 1 trường hợp tầm thường không đáng quan tâm).

- *Chuyển* $(u_n)_n$ *về cấp số nhân.* Thử đặt $v_n := xu_n + y$, $\forall n$ $(x \ne 0)$, thì $v_{n+1} = xu_{n+1} + y = x(au_n + b) + y = axu_n + bx + y = a(xu_n + y) + bx + y - ay = av_n + bx + (1-a)y$. Để $(v_n)_n$ là 1 cấp số nhân, ta phải chọn x, y sao cho $bx + (1-a)y = 0$, hay $bx = (a-1)y$. Ngược lại, ta thấy nếu các số x, y thỏa mãn $bx = (a-1)y$ thì $(v_n)_n$ là 1 cấp số nhân với công bội a. Có thể chọn, e.g., $(x, y) = (a-1, b)$ hoặc $(x, y) = \left(\frac{a-1}{k}, \frac{b}{k}\right)$ với $k \in \mathbb{Z}^\star$ tùy ý.
- *Chuyển* $(u_n)_n$ *về cấp số cộng. How?*

Chương 5

Giới Hạn – Limit

5.1 Dãy Số Có Giới Hạn 0

5.2 Dãy Số Có Giới Hạn Hữu Hạn

5.3 Dãy Số Có Giới Hạn Vô Cực

5.4 Định Nghĩa & 1 Số Định Lý về Giới Hạn của Hàm Số

5.5 Giới Hạn 1 Bên

5.6 1 Vài Quy Tắc Tìm Giới Hạn Vô Cực

5.7 Các Dạng Vô Hình

5.8 Hàm Số Liên Tục

Chương 6

Đạo Hàm – Derivative

6.1 Khái Niệm Đạo Hàm

6.2 Các Quy Tắc Tính Đạo Hàm

6.3 Đạo Hàm của Các Hàm Số Lượng Giác

6.4 Vi Phân

6.5 Đạo Hàm Cấp Cao

Phần II

Hình Học – Geometry

Chương 7

Phép Dời Hình & Phép Đồng Dạng Trong Mặt Phẳng

"Bức tranh của họa sĩ Hà Lan M.C. Escher gồm những hình bằng nhau mô tả các chiến binh trên lưng ngựa. Các hình này phủ kín mặt phẳng. 2 chiến binh & ngựa cùng màu (trắng hoặc đen) tương ứng với nhau qua 1 phép tịnh tiến. 2 chiến binh & ngựa khác màu thì tương ứng với nhau qua 1 phép đối xứng trục & tiếp theo là 1 phép tịnh tiến. Nghệ thuật dùng những hình bằng nhau để lấp đầy mặt phẳng được phát triển mạnh mẽ vào thế kỷ XIII ở nước Ý/Italia." – Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 3

Nội dung. *Các phép dời hình & đồng dạng trong mặt phẳng: phép tịnh tiến, phép đối xứng trục, phép quay, phép vị tự, …; 2 hình bằng nhau, 2 hình đồng dạng 1 cách tổng quát.*

7.1 Mở Đầu về Phép Biến Hình

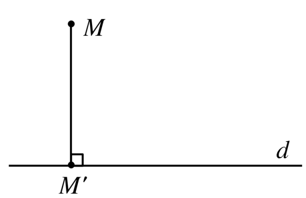
7.1.1 Phép biến hình

Khái niệm "hàm số" – 1 khái niệm quan trọng trong Đại số: "Nếu có 1 quy tắc để với mỗi số $x \in \mathbb{R}$, xác định được 1 số duy nhất $y \in \mathbb{R}$ thì quy tắc đó gọi là *1 hàm số xác định trên tập số thực* $\mathbb{R}$. Bây giờ, trong mệnh đề trên ta thay *số thực* bằng *điểm thuộc mặt phẳng* thì ta được khái niệm về phép biến hình trong mặt phẳng. Cụ thể là: Nếu có 1 quy tắc để với mỗi điểm M thuộc mặt phẳng, xác định được 1 điểm duy nhất M' thuộc mặt phẳng ấy thì quy tắc đó gọi là *1 phép biến hình (trong mặt phẳng)*." – Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 4

Định nghĩa 7.1.1 (Phép biến hình)**.**

- *"Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M của mặt phẳng với 1 điểm xác định duy nhất M' của mặt phẳng đó được gọi là* phép biến hình *trong mặt phẳng." "Nếu ký hiệu phép biến hình là F thì ta viết $F(M) = M'$ hay $M' = F(M)$ & gọi điểm M' là* ảnh *của điểm M qua phép biến hình F." – Hạo, Hy, et al., 2022, p. 4*
- "Phép biến hình *(trong mặt phẳng) là 1 quy tắc để với mỗi điểm M thuộc mặt phẳng, xác định được 1 điểm duy nhất M' thuộc mặt phẳng ấy. Điểm M' gọi là* ảnh *của điểm M qua phép biến hình đó." – Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 4*

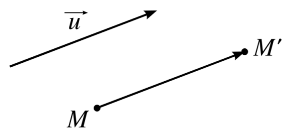
Ví dụ 7.1.1 (Phép chiếu vuông góc lên 1 đường thẳng)**.** *"Cho đường thẳng d. Với mỗi điểm M, ta xác định M' là hình chiếu (vuông góc) của M trên d thì ta được 1 phép biến hình.*



Hình 7.1: Phép chiếu vuông góc lên đường thẳng d.

Phép biến hình này gọi là phép chiếu (vuông góc) lên đường thẳng *d." – Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 4*

Ví dụ 7.1.2 (Phép tịnh tiến theo vector)**.** *"Cho vector $\vec{u}$, với mỗi điểm M ta xác định điểm M' theo quy tắc $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ (Fig. 7.2). Như vậy ta cũng có 1 phép biến hình. Phép biến hình đó gọi là* phép tịnh tiến theo vector *$\vec{u}$." – Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 4*



Hình 7.2: Phép tịnh tiến theo vector $\vec{u}$.

Ví dụ 7.1.3 (Phép đồng nhất)**.** *"Với mỗi điểm M, ta xác định điểm M' trùng với M thì ta cũng được 1 phép biến hình." – Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 5*

Định nghĩa 7.1.2 (Phép đồng nhất)**.** *"Phép biến hình biến mỗi điểm M thành chính nó được gọi là* phép đồng nhất*." – Hạo, Hy, et al., 2022, p. 4. Phép đồng nhất thường được ký hiệu là* id *(identity mapping),* $\mathrm{id}(M) = M$, $\forall M \in \mathbb{R}^2$, *&* $\mathrm{id}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$, *với mọi hình* $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^2$.

Ví dụ 7.1.4. *Cho trước số dương $a \in (0; +\infty)$, với mỗi điểm M trong mặt phẳng, gọi M' là 1 điểm sao cho $MM' = a$. Khi đó tập hợp các điểm M' thỏa mãn điều kiện này là đường tròn tâm M bán kính a, i.e., $\{M' \in \mathbb{R}^2 | MM' = a\} = \mathrm{circle}(M; a)$, là 1 tập có vô hạn không đếm được các phần tử, thậm chí lực lượng/cardinality[1] của 1 hình tròn với bán kính là 1 số dương bất kỳ bằng lực lượng của $\mathbb{R}$ & bằng $\mathfrak{c}$ (cardinality of the continuum[2]). Quy tắc này hiển nhiên không là 1 phép biến hình do vi phạm yêu cầu về tính xác định duy nhất của ảnh.*

Về lực lượng & các tính chất sâu sắc hơn của tập hợp, có thể tham khảo Halmos, 1960; Halmos, 1974; Kaplansky, 1972; Kaplansky, 1977[3].

7.1.2 Ký hiệu & thuật ngữ

- "Nếu $\mathcal{H}$ là 1 hình nào đó trong mặt phẳng thì ta ký hiệu $\mathcal{H}' \coloneqq F(\mathcal{H})$ là tập các điểm $M' = F(M)$, $\forall M \in \mathcal{H}$. Khi đó ta nói *$F$ biến hình $\mathcal{H}$ thành hình $\mathcal{H}'$*, hay *hình $\mathcal{H}'$ là ảnh của hình $\mathcal{H}$* qua phép biến hình F. " – Hạo, Hy, et al., 2022, p. 4
- "Nếu ta ký hiệu 1 phép biến hình nào đó là F & điểm M' là ảnh của điểm M qua phép biến hình F thì ta viết $M' = F(M)$, hoặc $F(M) = M'$. Khi đó, ta còn nói *phép biến hình F biến điểm M thành điểm M'*. Với mỗi hình $\mathcal{H}$, ta gọi hình $\mathcal{H}'$ gồm các điểm $M' = F(M)$, trong đó $M \in \mathcal{H}$, là *ảnh của $\mathcal{H}$ qua phép biến hình F*, & viết $\mathcal{H}' = F(\mathcal{H})$." – Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 5, i.e.,

$$\mathcal{H}' \coloneqq \{M' \in \mathbb{R}^2 | \exists M \in \mathcal{H},\ M' = F(M)\} = \{F(M) | M \in \mathcal{H}\} = F(\mathcal{H}).$$

7.2 Phép Tịnh Tiến

7.2.1 Định nghĩa phép tịnh tiến

Định nghĩa 7.2.1 (Phép tịnh tiến)**.** "Phép tịnh tiến *theo vector $\vec{u}$ là 1 phép biến hình biến điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$." – Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 5*

"Phép tịnh tiến theo vector $\vec{u}$ thường được ký hiệu là T hoặc $T_{\vec{u}}$. Vector $\vec{u}$ được gọi là *vector tịnh tiến*." – Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 5.

"Như vậy, $T_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Phép tịnh tiến theo vector $\vec{0}$ chính là *phép đồng nhất*." – Hạo, Hy, et al., 2022, p. 5

Bài toán 7.2.1 (Hạo, Tuấn, et al., 2022, **1.**, p. 7)**.** *Chứng minh: $M' = T_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow M = T_{-\vec{u}}(M')$.*

7.2.2 Các tính chất của phép tịnh tiến

Định lý 7.2.1 (Phép tịnh tiến bảo toàn khoảng cách)**.** *Nếu phép tịnh tiến biến 2 điểm M & N lần lượt thành 2 điểm M' & N' thì $M'N' = MN$.*

"Người ta diễn tả tính chất trên của phép tịnh tiến là: *Phép tịnh tiến không làm thay đổi khoảng cách giữa 2 điểm bất kỳ*." – Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 6. "Nếu $T_{\vec{u}}(M) = M'$, $T_{\vec{u}}(N) = N'$ thì $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ & từ đó suy ra $M'N' = MN$." "Nói cách khác, phép tịnh tiến bảo toàn khoảng cách giữa 2 điểm bất kỳ." – Hạo, Hy, et al., 2022, p. 6, i.e.,

$$((T_{\vec{u}}(M) = M') \wedge (T_{\vec{u}}(N) = N')) \Rightarrow \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN} \Rightarrow M'N' = MN. \tag{7.2.1}$$

[1] See, e.g., Wikipedia/cardinality.
[2] See, e.g., Wikipedia/cardinality of the continuum.
[3] Đây là những quyển sách đầu tiên tác giả đọc khi bắt đầu học Toán Cao Cấp ở bậc Đại học

Chứng minh (7.2.1). Vì $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \vec{u}$ & $\overrightarrow{M'M} = -\vec{u}$, $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'} = -\vec{u} + \overrightarrow{MN} + \vec{u} = \overrightarrow{MN}$. Suy ra $|\overrightarrow{M'N'}| = |\overrightarrow{MN}|$, i.e., $M'N' = MN$. □

Định lý 7.2.2 (Phép tịnh tiến bảo toàn tính chất thẳng hàng & thứ tự các điểm thẳng hàng)**.** *Phép tịnh tiến biến 3 điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng & không làm thay đổi thứ tự 3 điểm đó.*

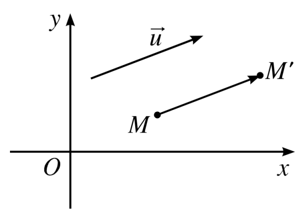
Chứng minh. "Giả sử phép tịnh tiến biến 3 điểm A, B, C thành 3 điểm A', B', C'. Theo Định lý **??**, ta có $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, & $A'C' = AC$. Nếu A, B, C thẳng hàng, B nằm giữa A & C thì $AB + AC = AC$. Do đó ta cũng có $A'B' + B'C' = A'C'$, i.e., A', B', C' thẳng hàng, trong đó B' nằm giữa A' & C'. □

Từ định lý **??**, suy ra:

Hệ quả 7.2.1. *Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến tia thành tia song song cùng hướng hoặc trùng với nó, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính, biến góc thành góc bằng nó.*

7.2.3 Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến

"Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho phép tịnh tiến theo vector $\vec{u}$. Biết tọa độ của $\vec{u}$ là $(a; b)$. Giả sử điểm $M(x; y)$ biến thành điểm $M(x'; y')$ (Fig. 7.3).



Hình 7.3: Phép tịnh tiến trên hệ trục tọa độ.

Khi đó ta có:

$$\boxed{\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b. \end{cases}}$$

Công thức trên gọi là *biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ theo vector $\vec{u}(a; b)$*." – Quỳnh, Cương, et al., 2020, pp. 6–7

Bài toán 7.2.2. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho vector $\vec{u} = (u_1; u_2)$, 2 điểm $A(a_1; a_2) \not\equiv B(b_1, b_2)$ (i.e., phân biệt/không trùng nhau) & đường thẳng d có phương trình $ax + by + c = 0$ với $a, b \in \mathbb{R}$ sao cho $a^2 + b^2 \neq 0$. (a) Tìm tọa độ của các điểm A', B' theo thứ tự là ảnh của A, B qua phép tịnh tiến theo $\vec{u}$. (b) Tìm tọa độ của điểm C sao cho A là ảnh của C qua phép tịnh tiến theo $\vec{u}$. (c) Tìm phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo $\vec{u}$.*

Giải. (a) $A' = T_{\vec{u}}(A)$, $B' = T_{\vec{u}}(B)$, sử dụng biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$, thu được $A'(a_1 + u_1; a_2 + u_2)$, $B'(b_1 + u_1; b_2 + u_2)$. (b) Giả sử $C(c_1; c_2)$, $A = T_{\vec{u}}(C)$,[4] sử dụng biểu thức tọa độ của $T_{\vec{u}}$, thu được $a_i = c_i + u_i$, $i = 1, 2$, suy ra $c_i = a_i - u_i$, $i = 1, 2$, hay $C(a_1 - u_1, a_2 - u_2)$. (c) Nếu $\vec{u} = \vec{0}$ thì $d \equiv d'$ & có chung phương trình $ax + by + c = 0$. Nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$. Giả sử đường thẳng d' có phương trình $a'x + b'y + c' = 0$ với $a', b' \in \mathbb{R}$ với $(a')^2 + (b')^2 \neq 0$. Sử dụng hệ quả 7.2.1 thu được $d' \equiv d$ hoặc $d' \parallel d$, nên $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k =$ const với quy ước nếu mẫu số bằng 0 thì tử bằng 0. W.l.o.g., có thể giả sử $a' = a$, $b' = b$ (chia các hệ số của d' cho hằng số k trong dãy tỷ số bằng nhau vừa thu được), ta cần tìm c' bằng cách xác định 1 điểm thuộc d'. Vì $a^2 + b^2 \neq 0$, 1 trong số a, b phải khác 0. W.l.o.g., giả sử $a \neq 0$, thì điểm $D_1\left(-\frac{c}{a}; 0\right) \in d$, khi đó ảnh của D_1 qua $T_{\vec{u}}$ là $D_1' \coloneqq T_{\vec{u}}(D_1) = \left(-\frac{c}{a} + u_1; u_2\right) \in d'$, i.e., $a\left(-\frac{c}{a} + u_1\right) + bu_2 + c' = 0$, hay $c' = c - au_1 - bu_2$. (Nếu $b \neq 0$, thì có thể lấy điểm $D_2\left(0; -\frac{c}{b}\right)$, khi đó $D_2' \coloneqq T_{\vec{u}}(D_2) = \left(u_1; -\frac{c}{b} + u_2\right) \in d'$, i.e., $au_1 + b\left(-\frac{c}{b} + u_2\right) + c' = 0$, cũng cho ta $c' = c - au_1 - bu_2$.). Vậy phương trình đường thẳng $d' = T_{\vec{u}}(d)$ là $ax + by + c - au_1 - bu_2 = 0$. □

Nhận xét 7.2.1. *Vài nhận xét về lời giải trên:*

1. *Nếu $\vec{u} = \vec{0}$, i.e., $u_1 = u_2 = 0$, phương trình của d' thu được ở (c) trùng với phương trình của d như đã lý luận ở đầu lời giải của (c) (consistency).*

2. *Nếu vector tịnh tiến $\vec{u}$ có tọa độ trùng với hệ số của d, i.e., $u_1 = a$, $u_2 = b$, $\vec{u}(a; b)$, thì $d \not\equiv d'$. Thật vậy, phương trình của d' thu được ở (c) trở thành: $ax + by + c - a^2 - b^2 = 0$, & vì $a^2 + b^2 \neq 0$ (ít nhất 1 trong 2 số phải khác 0) nên $c - a^2 - b^2 \neq c$, nên $d' \parallel d$ nhưng $d \not\equiv d'$ trong trường hợp này.*

[4] Sử dụng bài toán 7.2.1 cho ta $C = T_{-\vec{u}}(A)$, có thể sử dụng biểu thức tọa độ của $T_{-\vec{u}}$ để thu được trực tiếp $c_i = a_i - u_i$, $i = 1, 2$.

3. *1 ý tưởng giải khác cho (c) là tìm 2 điểm phân biệt thuộc d (e.g., 2 điểm $\left(0;-\frac{c}{b}\right)$, $\left(-\frac{c}{a};0\right)$ nếu $ab \neq 0$; còn nếu $ab = 0$ thì phải tìm thêm 1 điểm khác), tìm 2 ảnh của 2 điểm đó qua $T_{\vec{u}}$ như (a), (b), rồi viết phương trình đường thẳng d' đi qua 2 điểm ảnh vừa tìm được. Cách này cũng sẽ cho cùng kết quả với lời giải (c) ở trên nhưng không hay & / vì sẽ tốn nhiều công sức tính toán hơn, bởi vì không tận dụng trực tiếp tính chất của phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó. Cho nên, cần ưu tiên các lập luận logic (thông minh) sử dụng các tính chất đã biết của 1 đối tượng toán học nói chung hoặc 1 phép biến hình nói riêng, để tiết kiệm công sức tính toán & thời gian đi tìm phương hướng tiếp cận khi giải 1 bài toán bất kỳ:*

$$\boxed{\textit{Smart strategies} \gg \textit{heavy calculation/computation skills.}}$$

The symbol "$\gg$" in the last inequality means "are much more important", "remarkably dominate", or "dramatically outweigh". To be able to be lazy in doing mathematics, you need smart strategies, not heavy computations: Work less but effective – laziness as its finest.

7.2.4 Ứng dụng của phép tịnh tiến

Bài toán 7.2.3 (Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 7)**.** *Cho 2 điểm B, C cố định trên đường tròn $(O;R)$ & 1 điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Chứng minh rằng trực tâm ΔABC nằm trên 1 đường tròn cố định.*

Giải. Nếu BC là đường kính thì trực tâm H của ΔABC chính là A. Vậy H nằm trên đường tròn cố định $(O;R)$. Nếu BC không phải là đường kính, vẽ đường kính BB' của đường tròn. Nếu H là trực tâm của ΔABC thì $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$ (suy ra từ nhận xét tứ giác $AHCB'$ là hình bình hành). Như vậy, phép tịnh tiến theo vector cố định $\overrightarrow{B'C}$ biến điểm A thành điểm H. Do đó, khi A thay đổi trên $(O;R)$ thì trực tâm H luôn nằm trên đường tròn cố định là ảnh của đường tròn $(O;R)$ qua phép tịnh tiến nói trên. □

Bài toán 7.2.4. *2 thôn nằm ở 2 vị trí A & B cách nhau 1 con sông (xem rằng 2 bờ sông là 2 đường thẳng song song). Người ta dự định xây 1 chiếc cầu MN bắt qua sông (cố nhiên cầu phải vuông góc với bờ sông) & làm 2 đoạn thẳng từ A đến M & từ B đến N. Hãy xác định vị trí chiếc cầu MN sao cho $AM + BN$ ngắn nhất.*

Hint. Trường hợp tổng quát có thể đưa về trường hợp con sông rất hẹp – hẹp đến mức 2 bờ sông a & b xem như trùng nhau bằng 1 phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{MN}$ để a trùng b. Khi đó điểm A biến thành điểm A' sao cho $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN}$ & do đó $A'N = AM$. □

Bài toán 7.2.5 (Quỳnh, Cương, et al., 2020, **1.**, p. 9)**.** *Qua phép tịnh tiến T theo vector $\vec{u} \neq \vec{0}$, đường thẳng d biến thành đường thẳng d'. Trong trường hợp nào thì: $d \equiv d'$? $d \parallel d'$? d cắt d'?*

Bài toán 7.2.6 (Quỳnh, Cương, et al., 2020, **2.**, p. 9)**.** *Cho 2 đường thẳng song song a & a'. Tìm tất cả những phép tịnh tiến biến a thành a'.*

Bài toán 7.2.7 (Quỳnh, Cương, et al., 2020, **3.**, p. 9)**.** *Cho 2 phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ & $T_{\vec{v}}$. Với điểm M bất kỳ, $T_{\vec{u}}$ biến M thành điểm M', $T_{\vec{v}}$ biến M' thành điểm M''. Chứng tỏ rằng phép biến hình biến M thành M'' là 1 phép tịnh tiến.*

Bài toán 7.2.8 (Quỳnh, Cương, et al., 2020, **4.**, p. 9)**.** *Cho đường tròn (O) & 2 điểm A, B. 1 điểm M thay đổi trên đường tròn (O). Tìm quỹ tích điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.*

Bài toán 7.2.9 (Quỳnh, Cương, et al., 2020, **5.**, p. 9)**.** *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, với α, a, b là những số cho trước, xét phép biến hình F biến mỗi điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$, trong đó*

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a, \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b. \end{cases}$$

(a) Cho 2 điểm $M(x_1;y_1)$, $N(x_2;y_2)$ & gọi M', N' lần lượt là ảnh của M, N qua phép F. Tìm tọa độ của M' & N'.s (b) Tính khoảng cách d giữa M & N; khoảng cách d' giữa M' & N'. (c) Phép F có phải là phép dời hình hay không? 1. Khi $\alpha = 0$, chứng tỏ rằng F là phép tịnh tiến.

Tổng quát hơn của bài toán Quỳnh, Cương, et al., 2020, **6.**, p. 9:

Bài toán 7.2.10. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét các phép biến hình sau đây: Phép biến hình F biến mỗi điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(f(x,y);g(x;y))$ với $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là 2 hàm sốt. Với f, g thỏa điều kiện nào thì F là 1 phép dời hình?*

7.3 Phép Dời Hình Phẳng

7.3.1 Đại cương về các phép dời hình phẳng

"Không phải chỉ có phép tịnh tiến "không làm thay đổi khoảng cách giữa 2 điểm" mà còn nhiều phép biến hình khác cũng có tính chất đó (tính chất này còn được gọi là tính chất *bảo toàn khoảng cách* giữa 2 điểm). Người ta gọi các phép biến hình như vậy là phép dời hình." – Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 8

7.3.1.1 Định nghĩa phép dời hình

Định nghĩa 7.3.1 (Phép dời hình)**.**

- "Phép dời hình *là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa 2 điểm bất kỳ." – Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 8*
- *"1 phép biến hình $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ được gọi là 1* phép dời hình *của mặt phẳng, ký hiệu là $\mathcal{D}$, nếu với 2 điểm bất kỳ M, N nào của $\mathcal{P}$ & các ảnh $M' = f(M)$, $N' = f(N)$ của chúng, ta đều có $M'N' = MN$.*

  Nói 1 cách ngắn gọn, phép dời hình của mặt phẳng, hay gọi vắn tắt là phép dời hình phẳng*, là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa 2 điểm bất kỳ nào của mặt phẳng. Vậy là, nếu ký hiệu tập hợp các phép dời hình của mặt phẳng là $\{\mathcal{D}\}$ thì: $f \in \{\mathcal{D}\}$ của $\mathcal{P} \Leftrightarrow f(M)f(N) = MN, \forall M, N \in \mathcal{P}$." – Quỳnh, Ban, et al., 2014, p. 5*

"Chính vì phép dời hình bảo toàn khoảng cách giữa 2 điểm bất kỳ nào nên người ta còn gọi nó là *phép biến hình đẳng cự*, hay vắn tắt là *phép đẳng cự*." – Quỳnh, Ban, et al., 2014, p. 5. Từ định nghĩa của phép dời hình ta suy ra:

Hệ quả 7.3.1 (Quỳnh, Ban, et al., 2014, p. 5)**.** *(a) Phép biến hình đồng nhất* id *là 1 phép dời hình. (b) Phép biến hình đảo ngược của 1 phép dời hình cũng là 1 phép dời hình. (c) Hợp thành (i.e., tích) của 2, hay n ($n \in \mathbb{N}$, $n > 2$) phép dời hình là 1 phép dời hình. (d) Phép đối xứng trục, phép đối xứng tâm, phép tịnh tiến, phép quay (xung quanh 1 điểm) là những phép dời hình phẳng.*

7.3.1.2 Các tính chất của phép dời hình

Chú ý rằng các tính chất đã nêu của phép tịnh tiến được chứng minh dựa vào tính chất "*không làm thay đổi khoảng cách giữa 2 điểm*". Bởi vậy, các phép dời hình cũng có những tính chất đó. Cụ thể ta có:

Định lý 7.3.1 (Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 8; Quỳnh, Ban, et al., 2014, p. 6)**.** *Phép dời hình biến 3 điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng & không làm thay đổi thứ tự 3 điểm đó, biến 1 đường thẳng thành 1 đường thẳng, biến 1 tia thành 1 tia, biến 1 đoạn thẳng thành 1 đoạn thẳng bằng nó, biến 1 tam giác thành 1 tam giác bằng nó, biến 1 đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính, trong đó tâm biến thành tâm, biến 1 góc thành 1 góc bằng nó.*

Định lý 7.3.2 (Quỳnh, Ban, et al., 2014, p. 6)**.** *Phép dời hình bảo toàn sự thẳng hàng của 3 điểm & thứ tự của chúng trên đường thẳng chứa 3 điểm đó.*

"Cụ thể là: Phép dời hình biến 3 điểm A, B, C thẳng hàng, trong đó B ở giữa A & C thành 3 điểm A', B', C' thẳng hàng cũng theo thứ tự đó." – Quỳnh, Ban, et al., 2014, p. 6

Định lý 7.3.3 (Quỳnh, Ban, et al., 2014, p. 6)**.** *1 phép dời hình phẳng có 3 điểm bất động không thẳng hàng là phép biến hình đồng nhất.*

Chứng minh. "Giả sử $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ là 1 phép dời hình phẳng có 3 điểm bất động không thẳng hàng: $A = A' = f(A)$, $B = B' = f(B)$, $C = C' = f(C)$. Thế thì theo tính chất của phép dời hình, bất kỳ 1 điểm nào trên các đường thẳng $(BC), (CA)$, hoặc (AB) đều là điểm bất động. Từ đó dễ dàng suy ra mọi điểm M của mặt phẳng (ABC) đều là điểm bất động, & do đó $f = \mathrm{id}$." – Quỳnh, Ban, et al., 2014, p. 6 □

Hệ quả 7.3.2 (Quỳnh, Ban, et al., 2014, p. 6)**.** *1 phép dời hình phẳng $\mathcal{D} \neq \mathrm{id}$ thì hoặc không có điểm bất động nào, hoặc có 1 điểm bất động duy nhất, hoặc có 1 đường thẳng mà mọi điểm của nó đều là điểm bất động (i.e., có 1 đường thẳng cố định).*

Các ví dụ về các phép dời hình có 0 điểm bất động, 1 điểm bất động, & 1 tập hợp các điểm bất động là 1 đường thẳng cố định trong hệ quả vừa phát biểu lần lượt là phép tịnh tiến theo 1 vector khác $\vec{0}$, phép đối xứng tâm, & phép đối xứng trục.

7.3.1.3 Khái niệm về 2 hình bằng nhau

"Phép dời hình biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$ bằng nó, trong đó các cạnh tương ứng bằng nhau & các góc tương ứng bằng nhau: $B'C' = BC$, $C'A' = CA$, $A'B' = AB$; $\widehat{A'} = \widehat{A}$, $\widehat{B'} = \widehat{B}$, $\widehat{C'} = \widehat{C}$. 1 cách tổng quát, giả sử 1 phép dời hình $\mathcal{D}$ biến 1 hình (phẳng) $\mathcal{H}$ thành 1 hình $\mathcal{H}'$, ký hiệu $\mathcal{H}' = \mathcal{D}(\mathcal{H})$." – Quỳnh, Ban, et al., 2014, pp. 6–7

Định nghĩa 7.3.2 (2 hình bằng nhau)**.** *"2 hình $\mathcal{H}$ & $\mathcal{H}'$ được gọi là* bằng nhau*, nếu có 1 phép dời hình $\mathcal{D}$ biến hình $\mathcal{H}$ thành hình $\mathcal{H}'$ (& do đó, phép dời hình $\mathcal{D}^{-1}$, đảo ngược của phép dời hình $\mathcal{D}$ biến $\mathcal{H}'$ thành $\mathcal{H}$), ký hiệu như thông thường: $\mathcal{H}' := \mathcal{H}$." – Quỳnh, Ban, et al., 2014, p. 7*

7.3.2 Sự xác định 1 phép dời hình phẳng

- "Khi chúng ta nói cho 1 phép dời hình $\mathcal{D}$ mà tổng quát hơn là cho 1 phép biến hình f của $\mathcal{P}$ (mặt phẳng), i.e., chỉ ra đầy đủ các yếu tốt để xác định hoàn toàn phép dời hình (hay phép biến hình) đó của $\mathcal{P}$. I.e.: Với 1 điểm M bất kỳ của $\mathcal{P}$, ta phải chỉ ra cách (quy tắc) dựng, cũng là cách xác định được điểm tương ứng (ảnh) M' của nó qua phép dời hình (hay phép biến hình) này.
- Về phép dời hình, ta đã biết rằng 1 phép dời hình biến 1 ΔABC thành 1 $\Delta A'B'C'$ bằng nó, trong đó các cạnh tương ứng bằng nhau, các góc tương ứng bằng nhau.

Mệnh đề sau đây khẳng định điều ngược lại.

Định lý 7.3.4 (Về sự xác định 1 phép dời hình phẳng)**.** *ΔABC & $\Delta A'B'C'$ là 2 tam giác bằng nhau cho trước trong mặt phẳng $\mathcal{P}$ ($B'C' = BC$, $C'A' = CA$, $A'B' = AB$). Bao giờ cũng có 1 & chỉ 1 phép dời hình $\mathcal{D} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ biến A thành A', B thành B' & C thành C'. Đồng thời, phép dời hình $\mathcal{D}$ này có thể phân tích thành tích của không quá 3 phép đối xứng trục.*

Chứng minh. Xem Quỳnh, Ban, et al., 2014, p. 7 □

7.4 Phép Đối Xứng Trục

7.5 Phép Quay & Phép Đối Xứng Tâm

`Quick notes.` Hình có tâm đối xứng phải có chẵn đỉnh (i.e., số đỉnh của hình đó phải là 1 số chẵn). Hình có số đỉnh là 1 số lẻ chắc chắn không phải là hình có tâm đối xứng.

Hình có vô số tâm đối xứng, e.g.:

- 1 đường thẳng với tâm đối xứng là bất kỳ điểm nào thuộc nó, i.e., tập hợp các tâm đối xứng của 1 đường thẳng là chính nó.
- 2 đường thẳng song song có tâm đối xứng là 1 điểm bất kỳ nằm trên đường thẳng song song & cách đều 2 đường thẳng đó. Đường thẳng này cũng là tập hợp các tâm đối xứng của hình gồm 2 đường thẳng song song này.

đẳng cự

7.6 2 Hình bằng Nhau

7.7 Phép Vị Tự

7.8 Phép Đồng Dạng

7.9 Hình Tự Đồng Dạng & Hình Học Fractal

Chương 8

Đường Thẳng & Mặt Phẳng Trong Không Gian. Quan Hệ Song Song – Line & Plane in Euclidean Space $\mathbb{R}^n$. Parallelism

"Từ trước đến nay trong phần hình học phẳng, chúng ta xem xét các vấn đề, các bài toán trong đó các đối tượng, các hình thể & các chuyển động đều được cho trong 1 mặt phẳng. Tuy nhiên, trong thực tế, không gian mà chúng đang sống không chỉ bó hẹp trong 1 mặt phẳng; các vật thể, các dịch chuyển mà chúng ta vẫn quan sát hàng ngày không phải lúc nào cũng có thể được mô tả bằng những mô hình đã có trong hình học phẳng. *Hình học không gian/hình học khối* đã phần nào giúp ta khắc phục những thiếu sót đó". "Bên cạnh điểm & đường thẳng thư đã có trong hình học phẳng, chúng ta cần xem thêm 1 đối tượng cơ bản nữa là mặt phẳng & các hình thể được xét đến trong hình học không gian chủ yếu đều có dạng "khối" như tứ diện, hình chóp, hình lăng trụ, hình cầu, ..." – Quỳnh, Ban, et al., 2014, p. 43

8.1 Đại Cương về Đường Thẳng & Mặt Phẳng

8.1.1 Điểm, đường thẳng, mặt phẳng, & các tiên đề

"... trong hình học phẳng, điểm, đường thẳng là các đối tượng cơ bản & xuất phát từ các đối tượng này cũng như từ các mối tương quan ban đầu giữa chúng (mà người ta thường gọi đó là các *tiên đề*), ta có thể xây dựng & định nghĩa các đối tượng, các khái niệm khác & thiết lập các mối tương quan mới giữa chúng. Trong hình học không gian, ta sẽ xuất phát từ các đối tượng cơ bản là *điểm, đường thẳng, mặt phẳng*. Đây là các đối tượng được thừa nhận từ đầu, không qua định nghĩa. Có thể nói rằng chính chúng là sự thể hiện của những hình tượng, những đường nét quen thuộc mà chúng ta vẫn thường gặp & cảm nhận được khi quan sát các vật thể xung quanh cùng những chuyển động của chúng trong cuộc sống hằng ngày. E.g., điểm có thể được xem là biểu tượng chung của những ngôi sao lấp lánh trên bầu trời về đêm hoặc những lỗ khoan trên 1 tấm bảng gỗ, ... đường thẳng là đường nét chính hiện hữu trong những tia sáng mặt trời hoặc trong những sợi dây được kéo căng, ... Còn mặt biển yên ả không gợn sóng hoặc bề mặt 1 bức tường là những hình ảnh thực tế của 1 phần mặt phẳng, ...

Trong hình học không gian các điểm thường được biểu thị trên hình vẽ bằng các chấm nhỏ & được ký hiệu bằng các chữ in lớn như: $A, B, C, \ldots$. Các đường thẳng thường được biểu thị bằng các nét kẻ thẳng & ký hiệu bằng các chữ in thường như: $a, b, c, \ldots$. Còn các mặt phẳng thường được biểu thị bằng các hình bình hành & ký hiệu bằng chữ cái Hy Lạp hoặc chữ in hoa được ghi trong ngoặc đơn như: $(\alpha), (\beta), (\gamma), \ldots$ hoặc $(P), (Q), \ldots$. Đường thẳng & mặt phẳng là các tập hợp điểm. Nếu điểm A thuộc đường thẳng a, ký hiệu $A \in a$ & đôi khi còn nói rằng đường thẳng a đi qua điểm A. Nếu điểm A thuộc mặt phẳng (α), ký hiệu $A \in (\alpha)$ & đôi khi còn nói rằng mặt phẳng (α) đi qua điểm A. Nếu đường thẳng a chứa trong mặt phẳng (α), ký hiệu $a \subset (\alpha)$ & đôi khi còn nói rằng mặt phẳng (α) đi qua (hoặc chứa) đường thẳng a.

Bên cạnh việc lấy điểm, đường thẳng, mặt phẳng làm các đối tượng cơ bản (mà không định nghĩa), chúng ta còn thừa nhận 1 số tương quan cơ bản giữa chúng (mà không chứng minh). Các tương quan này thường xuất phát từ những nhận định đơn giản nhất về các mối quan hệ giữa điểm, đường thẳng, mặt phẳng có trong thực tế & thường được gọi là các *tiên đề*. Trên cơ sở các đối tượng cơ bản là điểm, đường thẳng, mặt phẳng, & các tiên đề được thừa nhận, người ta xây dựng các đối tượng, các khái niệm khác & thiết lập 1 cách chặt chẽ các tính chất cũng như các mối tương quan giữa các đối tượng mới này.

Tiên đề 8.1.1. *Trong không gian với 2 điểm phân biệt cho trước có 1 & chỉ 1 đường thẳng đi qua.*

Như vậy với 2 điểm phân A, B tồn tại duy nhất 1 đường thẳng chứa cả 2 điểm này & đường thẳng đó thường được gọi là *đường thẳng AB*.

Tiên đề 8.1.2. *Trong không gian, với 3 điểm cho trước không cùng thuộc 1 đường thẳng, có 1 & chỉ 1 mặt phẳng đi qua.*

Do đó đối với 3 điểm A, B, C không cùng thuộc 1 đường thẳng, tồn tại duy nhất 1 mặt phẳng chứa cả 3 điểm này & mặt phẳng đó thường được gọi lfa *mặt phẳng đi qua* A, B, C & ký hiệu là (ABC).

Tiên đề 8.1.3. *Trong không gian, 2 mặt phẳng phân biệt có 1 điểm chung thì phải có điểm chung thứ 2.*

Tiên đề 8.1.4. *Trong không gian có ít nhất 4 điểm không cùng thuộc bất cứ mặt phẳng nào.*

Nếu có 1 số điểm cùng thuộc 1 mặt phẳng thì ta thường nói rằng các điểm đó *đồng phẳng*. Tiên đề 8.1.2 cho thấy rằng 3 điểm bất kỳ thì luôn luôn đồng phẳng. Nhưng đối với 4 điểm, tiên đề 4 cho thấy rằng điều tương tự không phải bao giờ cũng đúng.

Tiên đề 8.1.5. *Trong mỗi mặt phẳng của không gian, các tiên đề của hình học phẳng đều đúng.*

Như vậy tiên đề này cho phép chúng ta sử dụng các kết quả đã có của hình học phẳng trong trường hợp nếu các đối tượng mà ta đang lưu ý xem xét & các chuyển động của chúng được giới hạn trong phạm vi 1 mặt phẳng nào đó của không gian.

Từ các tiên đề vừa được phát biểu, chúng ta có thể thiết lập được 1 tổng thể về vị trí tương đối của các đường thẳng & mặt phẳng trong không gian." – Quỳnh, Ban, et al., 2014, pp. 43–45

8.1.2 Vị trí tương đối của các đường thẳng & mặt phẳng trong không gian

8.1.2.1 Vị trí tương đối của 1 đường thẳng & 1 mặt phẳng

"Cho đường thẳng d & mặt phẳng (α). Có thể xảy ra 1 trong các khả năng sau:

- Đường thẳng d & mặt phẳng (α) không có điểm chung. Trong trường hợp này ta sẽ nói rằng đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) & ký hiệu $d \parallel (\alpha)$.
- Đường thẳng d & mặt phẳng (α) có đúng 1 điểm chung. Trong trường hợp này ta sẽ nói rằng đường thẳng d cắt mặt phẳng (α) tại điểm A & ký hiệu $d \cap (\alpha) = \{A\}$.
- Đường thẳng d & mặt phẳng (α) có nhiều hơn 1 điểm chung. Lúc này ta sẽ chứng minh rằng đường thẳng d thuộc mặt phẳng (α) & ký hiệu $d \subset (\alpha)$. Thật vậy, giả sử d & (α) có 2 điểm chung là P & Q. Xét đường thẳng a đi qua P & Q trong mặt phẳng (α). Theo tiên đề 1 thì d & a phải trùng nhau, thành thử đường thẳng d phải thuộc mặt phẳng (α).

Vậy *với 1 đường thẳng & 1 mặt phẳng cho trước thì: Đường thẳng hoặc song song, hoặc cắt mặt phẳng tại 1 điểm hoặc thuộc mặt phẳng đó.*" – Quỳnh, Ban, et al., 2014, p. 46

8.1.2.2 Vị trí tương đối của 2 mặt phẳng

"Cho 2 mặt phẳng phân biệt (α) & (β). Có thể xảy ra 1 trong các khả năng sau:

- Các mặt phẳng (α) & (β) không có điểm chung. Trong trường hợp này ta sẽ nói rằng các mặt phẳng (α) & (β) song song với nhau & ký hiệu $(\alpha) \parallel (\beta)$.
- Các mặt phẳng (α) & (β) có ít nhất 1 điểm chung. Lúc này ta sẽ chứng minh rằng các mặt phẳng (α) & (β) có phần chung là 1 đường thẳng. Thật vậy theo tiên đề 8.1.3 phải có ít nhất 2 điểm chung là A & B. Theo phần vị trí tương đối của đường thẳng & mặt phẳng ở trên thì (α) & (β) đều chứa đường thẳng AB. Hơn nữa có thể thấy chúng không thể có điểm chung nào khác ngoài đường thẳng AB. Nếu không, gọi C là điểm như vậy thì các mặt phẳng (α) & (β) đều đi qua 3 điểm A, B, C không thẳng hàng nên phải trùng nhau. Vô lý. Vậy (α) & (β) có phần chung là đường thẳng d. Trong trường hợp này ta thường nói rằng các mặt phẳng (α) & (β) cắt nhau theo *giao tuyến* là đường thẳng d & ký hiệu $(\alpha) \cap (\beta) = d$.

Vậy *với 2 mặt phẳng phân biệt cho trước thì: 2 mặt phẳng đó hoặc song song hoặc cắt nhau theo giao tuyến là 1 đường thẳng.*" – Quỳnh, Ban, et al., 2014, pp. 46–47

8.1.2.3 Vị trí tương đối của 2 đường thẳng

"Cho 2 đường thẳng phân biệt a & b. Có thể xảy ra 1 trong các khả năng sau:

- Các đường thẳng a & b cùng thuộc 1 mặt phẳng. Trong trường hợp này ta thường nói rằng các đường thẳng a & b đồng phẳng & trong hình học phẳng ta biết rằng a & b lúc đó hoặc cắt nhau tại 1 điểm hoặc không cắt nhau. Trường hợp 2 đường thẳng a & b đồng phẳng & không cắt nhau, cũng như trong hình học phẳng, ta sẽ nói rằng *a & b song song với nhau* & ký hiệu $a \parallel b$.

- Các đường thẳng a & b không cùng thuộc bất cứ 1 mặt phẳng nào. Trong trường hợp này ta thường nói rằng *các đường thẳng a & b chéo nhau*. Nhận xét rằng nếu các đường thẳng a & b chéo nhau thì chúng không có điểm chung. Thật vậy, nếu a & b chéo nhau & có điểm chung là O. Lấy trên a & b các điểm A & B khác O. Rõ ràng O, A, B không cùng thuộc 1 đường thẳng. Do đó theo vị trí tương đối giữa đường thẳng & mặt phẳng thì các đường thẳng a & b đều thuộc mặt phẳng (OAB). Vô lý! Vậy a & b không có điểm chung.

Như vậy có thể thấy rằng khác với hình học phẳng, trong hình học không gian, 2 đường thẳng không có điểm chung không nhất thiết phải song song với nhau mà có thể chéo nhau.

Vậy *với 2 đường thẳng phân biệt trong không gian thì: 2 đường thẳng đó hoặc đồng phẳng hoặc chéo nhau. Trong trường hợp đồng phẳng, chúng hoặc cắt nhau tại 1 điểm hoặc song song với nhau.*" – Quỳnh, Ban, et al., 2014, pp. 47–48

8.1.3 Xác định mặt phẳng trong không gian

"Từ tiên đề 8.1.2 ở trên, ta biết rằng 1 mặt phẳng được xác định bởi 3 điểm cho trước không cùng thuộc 1 đường thẳng. Trong các phần lý thuyết & bài tập về sau, mặt phẳng còn có thể được xác định bằng các cách thức khác. Ta nói rằng mặt phẳng được xác định bởi 1 cách thức nếu tồn tại duy nhất 1 mặt phẳng thỏa mãn tất cả các yêu cầu của cách thức đó. Mệnh đề sau đây cho ta 1 số cách thức xác định mặt phẳng quan trọng nhất.

Mệnh đề 8.1.1. *1 mặt phẳng trong không gian có thể được xác định bởi 1 trong các cách thức sau: (a) Mặt phẳng đó đi qua 3 điểm không cùng thuộc 1 đường thẳng; (b) Mặt phẳng đó đi qua 1 đường thẳng & 1 điểm ngoài đường thẳng ấy; (c) Mặt phẳng đó đi qua 2 đường thẳng cắt nhau; (d) Mặt phẳng đó đi qua 2 đưởng thẳng song song với nhau.*

Chứng minh. **(a)** Tiên đề 8.1.2. **(b)** Cho đường thẳng d & điểm A ở ngoài d. Ta chứng minh tồn tại duy nhất 1 mặt phẳng (α) đi qua d & A. Thật vậy, lấy trên đường thẳng d 2 điểm B, C & gọi (α) là mặt phẳng đi qua 3 điểm A, B, C thì đường thẳng d phải thuộc mặt phẳng (α) thành thử (α) đi qua d & A. Do mọi mặt phẳng chứa d & A đều phải đi qua 3 điểm A, B, C nên theo tiên đề 8.1.2, (α) chính là mặt phẳng duy nhất đi qua đường thẳng d & điểm A. **(c)–(d)** Cho 2 đường thẳng a & b cắt nhau hoặc song song với nhau. Theo vị trí tương đối của 2 đường thẳng thì a & b cùng thuộc 1 mặt phẳng (α). Theo vị trí tương đối của 2 mặt phẳng thì 2 mặt phẳng phân biệt không có chung 2 đường thẳng khác nhau nên (α) chính là mặt phẳng duy nhất đi qua các đường thẳng a & b. □

Mặt phẳng đi qua đường thẳng d & điểm A ở ngoài nó thường được ký hiệu là mặt phẳng $(d; A)$. Mặt phăng đi qua 2 đường thẳng a & b cắt nhau hoặc song song với nhau thường được ký hiệu là mặt phẳng $(a; b)$." – Quỳnh, Ban, et al., 2014, pp. 48–49

Nhận xét 8.1.1. *"Giao tuyến của 2 mặt phẳng là 1 đường thẳng; do vậy việc xác định giao tuyến của 2 mặt phẳng tương đương với việc xác định 2 điểm cùng thuộc đồng thời 2 mặt phẳng đã cho. Ngoài ra, nếu biết được rằng 3 điểm cũng thuộc đồng thời 2 mặt phẳng thì 3 điểm đó phải nằm trên 1 đường thẳng." – Quỳnh, Ban, et al., 2014, p. 50*

8.1.4 Hình chóp & tứ diện

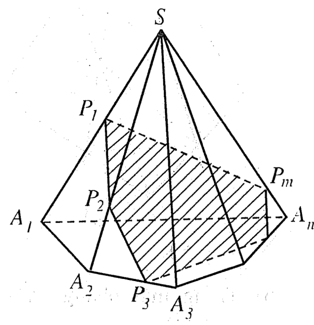
8.1.4.1 Hình chóp

"Hình chóp $S.A_1A_2 \ldots A_n$ là hình được lập thành từ 1 đa giác $A_1A_2 \ldots A_n$ & điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa đa giác. Điểm S được gọi là *đỉnh* của hình chóp. Đa giác $A_1A_2 \ldots A_n$ được gọi là *đáy* của hình chóp & các đoạn A_iA_{i+1}, $i = 1, \ldots, n$, với $A_{n+1} \coloneqq A_1$, được gọi là các *cạnh đáy* của hình chóp. Các ΔSA_iA_{i+1}, $i = 1, \ldots, n$, được gọi là các *mặt bên* của hình chóp. Các đoạn SA_i, $i = 1, \ldots, n$ được gọi là các *cạnh bên* của hình chóp. Nếu đáy là tam giác, tứ giác hoặc ngũ giác, ... thì hình chóp tương ứng được gọi là *hình chóp tam giác, tứ giác hoặc ngũ giác*, ..." – Quỳnh, Ban, et al., 2014, pp. 51–52

8.1.4.2 Tứ diện

"Tứ diện $ABCD$ là hình được lập thanh từ 4 điểm không đồng phẳng A, B, C, D. Các điểm A, B, C, D được gọi là các *đỉnh* của tứ diện, các $\Delta BCD, \Delta CDA, \Delta DAB, \Delta ABC$ được gọi là các *mặt* của tứ diện đối diện với các đỉnh A, B, C, D & các đoạn AB, CD, AC, BD, AD, BC được gọi là *cạnh* của tứ diện. Trong đó các cặp cạnh AB & CD, AC & BD, AD & BC thường được gọi là các *cặp cạnh đối* của tứ diện. Như vậy khác với hình chóp tam giác khi 1 đỉnh đã được chọn trước & 3 điểm còn lại lập thành đáy hình chóp, trong tứ diện mỗi 1 trong 4 điểm đã cho đều là đỉnh & 3 điểm còn lại lập thành mặt đối của đỉnh đó." – Quỳnh, Ban, et al., 2014, p. 52

Nhận xét 8.1.2. *(a) "Để xác định giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (α), ta thường đi tìm trước 1 đường thẳng a trong mặt phẳng (α) sao cho a & d đồng phẳng & lấy giao điểm của d & a Việc tìm đường thẳng a như vậy thường yêu cầu phải dựng thêm 1 vài điểm bổ sung trong mặt phẳng (α). (b) Việc xác định giao tuyến của 2 mặt phẳng & xác định giao điểm của đường thẳng & mặt phẳng chính là phương tiện giúp chúng ta giải quyết vấn đề xác định thiết diện của 1 hình cắt bởi 1 mặt phẳng." "Cho hình chóp $S.A_1A_2 \ldots A_n$ & mặt phẳng (α). Lúc đó mặt phẳng (α) có thể cắt 1 số mặt của hình chóp* *(mp(α) có thể không cắt hết các mặt của hình chóp). Mỗi mặt như vậy được (α) cắt theo 1 đoạn thẳng gọi là* đoạn giao tuyến *(Fig. 8.1). Khi sắp các đoạn giao tuyến đó 1 cách liên tiếp: P_iP_{i+1}, $i = 1,\ldots,m$, với $P_{m+1} \coloneqq P_1$ (điểm đầu của đoạn sau là điểm cuối của đoạn trước), ta được các cạnh liền nhau của 1 đa giác $P_1P_2\ldots P_m$. Đa giác này chính là* thiết diện *(đôi khi còn gọi là* mặt cắt*) của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α)." – Quỳnh, Ban, et al., 2014, pp. 53–54*



Hình 8.1: Thiết diện của hình chóp, Quỳnh, Ban, et al., 2014, Hình 2.10, p. 53.

Nhận xét 8.1.3. *"Để xác định thiết diện của hình chóp $S.A_1A_2\ldots A_n$ cắt bởi mặt phẳng (α) với các đường thẳng chứa các cạnh của hình chóp. Thiết diện cần xác định chính là đa giác với các đỉnh phải là các giao điểm của (α) với các cạnh của hình chóp (& mỗi cạnh của thiết diện phải là 1 đoạn giao tuyến với 1 mặt của hình chóp)." – Quỳnh, Ban, et al., 2014, p. 55*

8.2 Quan Hệ Song Song – Parallelism

"Quá trình xác định thiết diện của 1 hình cắt bởi 1 mặt phẳng thường được thực hiện thông qua việc tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng cũng như tìm giao điểm của 1 đường thẳng & 1 mặt phẳng. Trong quá trình đó, mỗi đỉnh của 1 thiết diện cần dựng có thể xác định như là giao điểm của 2 đường thẳng đồng phẳng được chọn lựa phù hợp với tình hình cụ thể của từng bài toán. Trong 1 vài trường hợp, khi 2 đường thẳng đồng phẳng được chọn lựa không thể cắt nhau, việc tìm các yếu tố cần thiết cho bài toán xác định thiết diện (như giao tuyến, giao điểm) có thể được thực hiện dựa trên 1 số tính chất liên quan đến các mối quan hệ song song. Các tính chất này còn cho phép chúng ta bổ sung thêm những cách thức khác để xác định 1 đường thẳng hoặc 1 mặt phẳng trong không gian." – Quỳnh, Ban, et al., 2014, p. 59

8.2.1 Đường thẳng song song với đường thẳng

8.2.1.1 Định nghĩa

"2 đường thẳng phân biệt bất kỳ hoặc chéo nhau hoặc đồng phẳng & nếu đồng phẳng thì 2 đường thẳng đó hoặc cắt nhau tại 1 điểm hoặc không cắt nhau. Nếu 2 đường thẳng phân biệt đồng phẳng & không cắt nhau thì cũng như trong hình học phẳng ta nói rằng 2 đường thẳng đó song song với nhau. Vậy, trong không gian: 2 đường thẳng a & b được gọi là *song song* với nhau, ký hiệu $a \parallel b$, nếu chúng đồng phẳng & không cắt nhau." – Quỳnh, Ban, et al., 2014, pp. 59–60

8.2.1.2 Tính chất

"Trong hình học phẳng, ta biết rằng với 1 đường thẳng d cho trước & 1 điểm A cho trước nằm ngoài d, tồn tại duy nhất 1 đường thẳng a đi qua A & song song với d. Khẳng định này cho ta 1 cách xác định đường thẳng trong mặt phẳng & được thừa nhận như là 1 tiên đề. Tiên đề này thường được gọi là *tiên đề 5 của hình học phẳng*. Trong không gian, tính chất này cũng đúng nhưng khác với trong mặt phẳng, nó có thể được chứng minh bằng cách sử dụng tiên đề 5 của hình học phẳng.

Định lý 8.2.1. *Trong không gian, cho đường thẳng d & điểm A ngoài d. Lúc đó tồn tại duy nhất 1 đường thẳng a đi qua điểm A & song song với đường thẳng d.*

Chứng minh. Xét mặt phẳng $(d;A)$. Trong mặt phẳng này theo tiên đề 5 của hình học phẳng, tồn tại 1 đường thẳng a đi qua A & song song với đường thẳng d. Nếu trong không gian còn có 1 đường thẳng b cũng đi qua A & song song với d thì mặt phẳng $(d;b)$ xác định bởi các đường thẳng song song b & d cũng chính là mặt phẳng $(d;A)$. Theo tính chất của tiên đề 5 trong mặt phẳng này thì các đường thẳng a & b phải trùng nhau. Vậy đường thẳng a tồn tại & duy nhất. □

Định lý vừa được chứng minh cho ta thêm 1 cách xác định đường thẳng trong không gian: đó là đường thẳng đi qua 1 điểm & song song với 1 đường thẳng cho trước không chứa điểm đó. Kết hợp với mệnh đề dưới đây, nó còn cho 1 phương thức bổ sung để tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng.

Mệnh đề 8.2.1. *Nếu 2 mặt phẳng chứa lần lượt 2 đường thẳng song song với nhau & 2 mặt phẳng đó cắt nhau theo 1 đường thẳng thì đường thẳng này song song với cả 2 đường thẳng trên hoặc trùng với 1 trong chúng.*

Chứng minh. Giả sử các mặt phẳng (α) & (β) chứa lần lượt các đường thẳng a & b song song với nhau & $(\alpha), (\beta)$ cắt nhau theo giao tuyến d. Xét mặt phẳng $(a; b)$. Nếu mặt phẳng này trùng với (α) thì ta có: $(\alpha) \cap (\beta) = b$ & do đó b trùng với d. Tương tự nếu mặt phẳng $(a; b)$ trùng với (β) thì a trùng với d & mệnh đề được chứng minh. Bây giờ giả sử rằng $(a; b)$ không trùng với cả (α) lẫn (β). Lấy điểm P bất kỳ trên d. Nếu $P \in a$ thì $P \notin b$, suy ra các mặt phẳng (β) & $(a; b)$ phải trùng nhau vì cùng chứa P & b. Vô lý! Thành thử với mọi điểm $P \in d$ thì $P \notin a$ nên $d \parallel a$. Lập luận tương tự ta cũng được $d \parallel b$. Vậy d song song với cả a & b. □

Từ mệnh đề 8.2.1, có thể chứng minh tính chất sau:

Mệnh đề 8.2.2. *2 đường thẳng phân biệt cùng song song với 1 đường thẳng thứ 3 thì song song với nhau.*

Mệnh đề này thường được gọi là *tính bắc cầu trong quan hệ song song giữa các đường thẳng* & có thể được ghi vắn tắt dưới dạng: $(d_1 \parallel d_2) \wedge (d_2 \parallel d_3) \Rightarrow (d_1 \parallel d_3)$. Trong hình học phẳng, đây là 1 tính chất quen thuộc & là hệ quả của tiên đề 5. Còn trong hình học không gian, ta chứng minh nó như sau:

Chứng minh. Giả sử 2 đường thẳng a, b cùng song song với đường thẳng c. Nếu a, b, & c cùng thuộc 1 mặt phẳng thì theo tính chất quen thuộc đã biết trong hình học phẳng, hệ quả được chứng minh. Giả sử 3 đường thẳng này không cùng thuộc 1 mặt phẳng. Lấy 1 điểm $P \in a$. Các mặt phẳng $(b; P)$ & $(c; a)$ không trùng nhau & có điểm P chung nên chúng cắt nhau theo giao tuyến là 1 đường thẳng. Đường thẳng này cũng đi qua P & song song với c như đường thẳng a nên đó chính là đường thẳng a. Theo mệnh đề 8.2.1, giao tuyến a song song với b & c. Mệnh đề được chứng minh." – Quỳnh, Ban, et al., 2014, pp. 60–62 □

8.2.2 Đường thẳng song song với mặt phẳng

8.3 2 Mặt Phẳng Song Song

8.4 Phép Chiếu Song Song

8.5 Phương Pháp Tiên Đề Trong Hình Học

Chương 9

Vector Trong Không Gian. Quan Hệ Vuông Góc – Vector in Euclidean Space $\mathbb{R}^n$. Perpendicular Relation

9.1 Vector Trong Không Gian. Sự Đồng Phẳng của Các Vector

9.2 2 Đường Thẳng Vuông Góc

9.3 Đường Thẳng Vuông Góc với Mặt Phẳng

9.4 2 Mặt Phẳng Vuông Góc

9.5 Khoảng Cách

Phụ lục A

Phụ Lục – Appendix

A.1 Hàm Số Chẵn & Hàm Số Lẻ – Even & Odd Functions

"Trong toán học, *hàm số chẵn* & *hàm số lẻ* là các hàm số thỏa mãn các quan hệ đối xứng nhất định khi lấy nghịch đảo phép cộng. Chúng rất quan trọng trong nhiều lĩnh vực của giải tích toán, đặc biệt trong lý thuyết chuỗi lũy thừa & chuỗi Fourier. Chúng được đặt tên theo tính chẵn lẻ của số mũ lũy thừa của hàm lũy thừa thỏa mãn từng điều kiện: hàm số $f(x) = x^n$ là 1 hàm chẵn nếu n là 1 số nguyên chẵn, & nó là hàm lẻ nếu n là 1 số nguyên lẻ." – Wikipedia/hàm số chẵn & lẻ

A.1.1 Hàm số chẵn – Even function

Định nghĩa A.1.1 (Hàm số chẵn)**.** *"Cho f là 1 hàm số giá trị thực của 1 đối số thực, f là* hàm số chẵn *nếu điều kiện sau được thỏa mãn với mọi x sao cho cả x & $-x$ đều thuộc miền xác định của f: $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \operatorname{dom}(f)$, với $\operatorname{dom}(f)$ ký hiệu miền xác định của f, hoặc phát biểu 1 cách tương đương, nếu phương trình sau thỏa mãn $f(x) - f(-x) = 0$, $\forall x \in \operatorname{dom}(f)$.*

Về mặt hình học, đồ thị của 1 hàm số chẵn đối xứng qua trục y, nghĩa là đồ thị của nó giữ không đổi sau phép lấy đối xứng qua trục y." – Wikipedia/hàm số chẵn & lẻ

Ví dụ A.1.1 (Hàm chẵn)**.** *Hàm trị tuyệt đối $x \mapsto |x|$, các hàm đơn thức dạng $x \mapsto x^{2n}$, hàm cosin* cos, *hàm cosin hyperbolic* cosh.

A.1.2 Hàm số chẵn – Odd function

Định nghĩa A.1.2 (Hàm số lẻ)**.** *Cho f là 1 hàm số giá trị thực của 1 đối số (biến) thực, f là hàm số* lẻ *nếu điều kiện sau được thỏa mãn với mọi x sao cho cả x & $-x$ đều thuộc miền xác định của f: $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \operatorname{dom}(f)$, với $\operatorname{dom}(f)$ ký hiệu miền xác định của f, hoặc phát biểu 1 cách tương đương, nếu phương trình sau thỏa mãn $f(x)+f(-x) = 0$, $\forall x \in \operatorname{dom}(f)$.*

"Về mặt hình học, đồ thị của 1 hàm lẻ có tính đối xứng tâm quay qua gốc tọa độ, i.e., đồ thị của nó không đổi sau khi thực hiện phép quay 180° quanh điểm gốc." – Wikipedia/hàm số chẵn & lẻ

Ví dụ A.1.2 (Hàm số lẻ)**.** *Hàm đồng nhất $x \mapsto x$, các hàm đơn thức dạng $x \mapsto x^{2n+1}$, hàm sin* sin, *hàm sin hyperbol* sinh, *hàm lỗi* erf.

A.1.3 Các tính chất cơ bản

A.1.3.1 Tính duy nhất

- "Nếu 1 hàm số vừa chẵn & vừa lẻ, nó bằng 0 ở mọi điểm mà nó được xác định.
- Nếu 1 hàm là lẻ thì giá trị tuyệt đối của hàm đó là 1 hàm chẵn." – Wikipedia/hàm số chẵn & lẻ

A.1.3.2 Cộng & trừ hàm số chẵn lẻ

- Tổng & hiệu của 2 hàm số chẵn là 2 hàm số chẵn.
- Tổng & hiệu của 2 hàm lẻ là 2 hàm lẻ.
- Tổng của 1 hàm chẵn & 1 hàm lẻ thì không chẵn cũng không lẻ, trừ khi 1 trong các hàm ấy bằng 0 trên miền đã cho.

A.1.3.3 Nhân & chia hàm số chẵn lẻ

- Tích & thương của 2 hàm chẵn là 2 hàm chẵn.
- Tích & thương của 2 hàm lẻ là 2 hàm chẵn.
- Tích & thương của 1 hàm chẵn với 1 hàm lẻ là 2 hàm lẻ.

A.1.3.4 Hàm hợp (tích ánh xạ)

- Hàm hợp của 2 hàm chẵn là hàm chẵn.
- Hàm hợp của 2 hàm lẻ là hàm lẻ.
- 1 hàm chẵn hợp với 1 hàm lẻ là hàm chẵn.
- Hàm hợp của bất kỳ hàm số nào với 1 hàm chẵn là hàm chẵn (nhưng điều ngược lại không đúng).

A.1.4 Phân tích chẵn–lẻ

"Mọi hàm có thể được phân tích duy nhất thành tổng của 1 hàm chẵn & 1 hàm lẻ, được gọi tương ứng là *phần chẵn* & *phần lẻ* của 1 hàm số, nếu ta đặt như sau:

$$f_{\rm e}(x) \coloneqq \frac{f(x)+f(-x)}{2},\ f_{\rm o}(x) \coloneqq \frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

sau đó $f_{\rm e}$ là hàm chẵn, $f_{\rm o}$ là hàm lẻ, & $f(x) = f_{\rm e}(x) + f_{\rm o}(x)$. Ngược lại nếu $f(x) = g(x) + h(x)$, trong đó g là chẵn & h là lẻ, thì $g = f_{\rm e}$ & $h = f_{\rm o}$, bởi vì

$$\begin{aligned}2f_{\rm e}(x) &= f(x)+f(-x) = g(x)+g(-x)+h(x)+h(-x) = 2g(x),\\ 2f_{\rm o}(x) &= f(x)-f(-x) = g(x)-g(-x)+h(x)-h(-x) = 2h(x).\end{aligned}$$

Ví dụ A.1.3. *Hàm cosin hyperbolic & sin hyperbolic có thể được coi là các phần chẵn & phần lẻ của hàm số lũy thừa tự nhiên, bởi vì hàm thứ nhất là chẵn, hàm thứ 2 là lẻ, &* $e^x = \sinh x + \cosh x$*."* – *Wikipedia/hàm số chẵn & lẻ*

Tài liệu tham khảo

Halmos, Paul R. (1960). *Naive set theory.* The University Series in Undergraduate Mathematics. D. Van Nostrand Co., Princeton, N.J.-Toronto-London-New York, pp. vii+104.

— (1974). *Naive set theory.* Undergraduate Texts in Mathematics. Reprint of the 1960 edition. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, pp. vii+104.

Hạo, Trần Văn, Nguyễn Mộng Hy, et al. (2022). *Hình Học 11.* Tái bản lần thứ 15. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 136.

Hạo, Trần Văn, Vũ Tuấn, et al. (2022). *Đại Số & Giải Tích 11.* Tái bản lần thứ 15. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 191.

Kaplansky, Irving (1972). *Set theory and metric spaces.* Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics. Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass., pp. xii+140.

— (1977). *Set theory and metric spaces.* Second. Chelsea Publishing Co., New York, xii+140 pp. ISBN 0-8284-0298–1.

Quỳnh, Đoàn, Phạm Khắc Ban, et al. (2014). *Tài Liệu Chuyên Toán Hình Học 11.* Tái bản lần thứ 4. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 320.

Quỳnh, Đoàn, Văn Như Cương, et al. (2020). *Hình Học 11 nâng cao.* Tái bản lần thứ 13. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 132.

Quỳnh, Đoàn, Nguyễn Huy Đoan, et al. (2020). *Đại Số & Giải Tích 11 nâng cao.* Tái bản lần thứ 13. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 241.

Quỳnh, Đoàn, Trần Nam Dũng, Hà Huy Khoái, et al. (2020). *Tài Liệu Chuyên Toán Giải Tích 12.* Tái bản lần thứ 4. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 364.

Quỳnh, Đoàn, Trần Nam Dũng, Nguyễn Vũ Lương, et al. (2010). *Tài Liệu Chuyên Toán Đại Số & Giải Tích 11.* Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 327.

Thái, Đỗ Đức et al. (2022). *Toán 6, tập 2.* Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, p. 108.