

Rational – Số Hữu Tỷ \mathbb{Q}

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 5 tháng 12 năm 2022

Tóm tắt nội dung

[EN] This text is a collection of problems, from easy to advanced, about rational. This text is also a supplementary material for my lecture note on Elementary Mathematics grade 7, which is stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 7/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_7/lecture)¹. The latest version of this text has been stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 7/rational](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_7/rational) \mathbb{Q} ².

[VI] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài tập chọn lọc từ cơ bản đến nâng cao về phân thức đại số & phân thức đại số hữu tỷ. Tài liệu này là phần bài tập bổ sung cho tài liệu chính – bài giảng [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 7/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_7/lecture) của tác giả viết cho Toán Sơ Cấp lớp 8. Phiên bản mới nhất của tài liệu này được lưu trữ & có thể tải xuống ở link sau: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 7/rational](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_7/rational) \mathbb{Q} .

Mục lục

1 Problem	1
1.1 Tập Hợp \mathbb{Q} Các Số Hữu Tỷ	1
1.2 $\pm, \cdot, :$ Trên \mathbb{Q}	2
1.3 Lũy Thừa của 1 Số Hữu Tỷ	4
1.4 Thứ Tự Thực Hiện Các Phép Tính. Quy Tắc Chuyển Vế	6
1.5 Biểu Diễn Thập Phân của Số Hữu Tỷ	7
1.6 Phần Nguyên, Phần Lẻ của 1 Số Hữu Tỷ	8
1.7 Miscellaneous	9
Tài liệu	9

1 Problem

1.1 Tập Hợp \mathbb{Q} Các Số Hữu Tỷ

“**1.** Số hữu tỷ là số viết được dưới dạng $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$. Tập hợp các số hữu tỷ được ký hiệu là \mathbb{Q} . **2.** Biểu diễn số hữu tỷ trên trục số: Trên trục số, điểm biểu diễn số hữu tỷ x gọi là điểm x . Các số khác nhau biểu diễn bởi những điểm khác nhau. **3.** Số đối của 1 số hữu tỷ: Trên trục số, 2 số hữu tỷ có điểm biểu diễn nằm về 2 phía của gốc O & cách đều gốc O được gọi là 2 số đối nhau. Số đối của số hữu tỷ x ký hiệu là $-x$. Số đối của 0 là 0. **4.** So sánh các số hữu tỷ: Để so sánh $x, y \in \mathbb{Q}$ ta làm như sau: Viết x, y dưới dạng 2 phân số có cùng mẫu dương $x = \frac{a}{m}, y = \frac{b}{m}, m > 0$. Sau đó so sánh các tử số: • Nếu $a < b$ thì $x < y$. • Nếu $a = b$ thì $x = y$. • Nếu $a > b$ thì $x > y$. Số hữu tỷ lớn hơn 0 gọi là số hữu tỷ dương. Số hữu tỷ nhỏ hơn 0 gọi là số hữu tỷ âm. Số 0 không là số hữu tỷ dương, cũng không là số hữu tỷ âm. **5.** Cho các số hữu tỷ $x = \frac{a}{b}$ & $y = \frac{c}{d}, a, b, c, d \in \mathbb{Z}, b > 0, d > 0$. Luôn có: • $x = y \Leftrightarrow ad = bc, x < y \Leftrightarrow ad < bc, x > y \Leftrightarrow ad > bc$. • $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.” – Tuyên, 2022, §1, pp. 4-5

Bài toán 1.1 (Tuyên, 2022, Ví dụ 1, p. 5). Cho $x = \frac{12}{b-15}$ với $b \in \mathbb{Z}$. Xác định b để: (a) x là 1 số hữu tỷ; (b) x là 1 số hữu tỷ dương; (c) x là 1 số hữu tỷ âm; (d) $0 < x < 1$.

Bài toán 1.2 (Tuyên, 2022, Ví dụ 2, p. 5). So sánh các số hữu tỷ sau: $\frac{-16}{27}, \frac{-16}{29}, \frac{-19}{27}$.

Bài toán 1.3 (Tuyên, 2022, 1., p. 5). Cho các số hữu tỷ $x = \frac{-5}{7}, y = \frac{-2}{3}$. Các số hữu tỷ này còn được biểu diễn bởi phân số nào trong các phân số sau: $\frac{9}{11}, \frac{4}{-6}, \frac{15}{-21}, \frac{-35}{49}, \frac{-10}{15}, \frac{-6}{-9}$.

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

¹URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_7/NQBH_elementary_mathematics_grade_7.pdf.

²URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_7/rational/NQBH_rational.pdf.

Bài toán 1.4 (Tuyên, 2022, 2., p. 6). Sắp xếp các số hữu tỷ sau theo thứ tự tăng dần: (a) $\frac{19}{33}, \frac{6}{11}, \frac{13}{22}$; (b) $\frac{-18}{12}, \frac{-10}{7}, \frac{-8}{5}$.

Bài toán 1.5 (Tuyên, 2022, 3., p. 6). So sánh các số hữu tỷ sau bằng cách nhanh nhất: (a) -5 & $\frac{1}{63}$; (b) $\frac{-18}{17}$ & $\frac{-999}{1000}$; (c) $\frac{-17}{35}$ & $\frac{-43}{85}$; (d) -0.76 & $\frac{-19}{28}$.

Bài toán 1.6 (Tuyên, 2022, 4., p. 6). Tìm các số hữu tỷ biểu diễn dưới dạng phân số có mẫu số bằng 10, lớn hơn $\frac{-7}{13}$ nhưng nhỏ hơn $-\frac{4}{13}$.

Bài toán 1.7 (Tuyên, 2022, 5., p. 6). Dùng 4 chữ số 1 & dấu $-$ (nếu cần thiết) để biểu diễn (không dùng phép tính lũy thừa): (a) Các số nguyên $-1, -111$; (b) Số hữu tỷ âm lớn nhất.

Bài toán 1.8 (Tuyên, 2022, 6., p. 6). Cho các số nguyên dương $a < b < c < d < m < n$. Chứng minh: $\frac{a+c+m}{a+b+c+d+m+n} < \frac{1}{2}$.

Bài toán 1.9 (Tuyên, 2022, 7., p. 6). Với cùng 1 khối lượng thành phẩm, vàng 4 số 9 & vàng 3 số 9, loại nào có hàm lượng vàng nhiều hơn?

1.2 ±, ·, : Trên \mathbb{Q}

“1. Ta có thể cộng, trừ, nhân, chia 2 số hữu tỷ bằng cách viết chúng dưới dạng phân số rồi áp dụng quy tắc cộng, trừ, nhân, chia phân số. Nếu 2 số hữu tỷ cùng viết dưới dạng số thập phân thì có thể cộng, trừ, nhân, chia 2 số đó theo quy tắc cộng, trừ, nhân, chia số thập phân. 2. Tính chất: • Phép cộng các số hữu tỷ cũng có các tính chất giao hoán, kết hợp, cộng với số 0, cộng với số đối như phép cộng các số nguyên. • Phép trừ 2 số hữu tỷ có thể chuyển thành phép cộng với số đối của số trừ. $x - y = x + (-y)$. • Phép nhân các số hữu tỷ cũng có các tính chất giao hoán, kết hợp, nhân với 1, phân phối đối với phép cộng & phép trừ. • Phép chia số hữu tỷ x cho số hữu tỷ $y \neq 0$ có thể chuyển thành phép nhân với số nghịch đảo của số chia $x : y = x \cdot \frac{1}{y}, y \neq 0$. 3. Quy tắc chuyển về : Khi chuyển 1 số hạng từ về này sang về kia của 1 đẳng thức, ta phải đổi dấu số hạng đó. $x + y = z \Leftrightarrow x - z = -y, x - y = z \Leftrightarrow x - z = y$. 4. Trong \mathbb{Q} cũng có những tổng đại số trong đó có thể đổi chỗ các số hạng, đặt dấu ngoặc để nhóm các số hạng 1 cách tùy ý như các tổng đại số trong \mathbb{Z} . 5. $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$.” – Tuyên, 2022, §2, pp. 6–7

Bài toán 1.10 (Tuyên, 2022, Ví dụ 3, p. 7). Tính bằng cách hợp lý (nếu có thể): (a) $-\frac{5}{18} + \frac{32}{45} - \frac{9}{10}$; (b) $(-\frac{1}{4} + \frac{7}{33} - \frac{5}{3}) - (-\frac{15}{12} + \frac{6}{11} - \frac{48}{49})$

Bài toán 1.11 (Tuyên, 2022, Ví dụ 4, p. 7). So sánh các tích sau bằng cách hợp lý nhất:

$$P_1 = \left(-\frac{43}{51}\right) \cdot \left(\frac{-19}{80}\right), P_2 = \left(-\frac{7}{13}\right) \cdot \left(-\frac{4}{65}\right) \cdot \left(-\frac{8}{31}\right), P_3 = \frac{-5}{10} \cdot \frac{-4}{10} \cdot \frac{-3}{10} \cdots \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{10}.$$

Bài toán 1.12 (Tuyên, 2022, Ví dụ 5, p. 7). Tìm giá trị của $x \in \mathbb{Q}$ để biểu thức sau có giá trị dương $P = (x + 5)(x + 9)$.

Bài toán 1.13 (Tuyên, 2022, 8., p. 7). Tìm x biết: $\frac{11}{13} - (\frac{5}{42} - x) = -(\frac{15}{28} - \frac{11}{13})$.

Bài toán 1.14 (Tuyên, 2022, 9., p. 7). Cho $S = (a + b + c) - (a - b + c) + (a - b - c) + c$ với $a = 0.1, b = 0.01, c = 0.001$. Tính S .

Bài toán 1.15 (Tuyên, 2022, 10., p. 7). Tính bằng cách hợp lý:

$$(a) \frac{11}{125} - \frac{17}{18} - \frac{5}{7} + \frac{4}{9} + \frac{17}{14}; (b) 1 - \frac{1}{2} + 2 - \frac{2}{3} + 3 - \frac{3}{4} + 4 - \frac{1}{4} - 3 - \frac{1}{3} - 2 - \frac{1}{2} - 1.$$

Bài toán 1.16 (Tuyên, 2022, 11., p. 7). Cho các số hữu tỷ $x = \frac{a}{9}$ & $y = \frac{b}{9}$ trong đó a là các số nguyên âm liên tiếp từ -5 đến -1 ; b là các số nguyên dương liên tiếp từ 1 đến 8. Tính tổng $x + y$.

Bài toán 1.17 (Tuyên, 2022, 12., p. 8). Cho $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$; $B = \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{9}{8} + \frac{17}{16} + \frac{33}{32} - 6$. Tính A & B .

Bài toán 1.18 (Tuyên, 2022, 13., p. 8). Cho 31 số hữu tỷ sao cho bất kỳ 3 số nào trong chúng cũng có tổng là 1 số âm. Chứng minh tổng của 31 số đó là 1 số âm.

Bài toán 1.19 (Tuyên, 2022, 14., p. 8). Tìm x biết: (a) $(\frac{1}{7}x - \frac{2}{7})(-\frac{1}{5}x + \frac{3}{5})(\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}) = 0$; (b) $\frac{1}{6}x + \frac{1}{10}x - \frac{4}{15}x + 1 = 0$.

Bài toán 1.20 (Tuyên, 2022, 15., p. 8). Tính sau bằng cách hợp lý nhất: (a) $(-\frac{40}{51} \cdot 0.32 \cdot \frac{17}{20}) : \frac{64}{75}$; (b) $-\frac{10}{11} \cdot \frac{8}{9} + \frac{7}{18} \cdot \frac{10}{11}$; (c) $\frac{3}{14} : \frac{1}{28} - \frac{13}{21} : \frac{1}{28} + \frac{29}{42} : \frac{1}{28} - 8$; (d) $-1\frac{5}{7} \cdot 15 + \frac{2}{7}(-15) + (-105) \cdot (\frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{7})$.

Bài toán 1.21 (Tuyên, 2022, 16., p. 8). Tính giá trị các biểu thức sau: (a) $A = 7x - 2x - \frac{2}{3}y + \frac{7}{9}y$ với $x = -\frac{1}{10}, y = 4.8$;

$$(b) B = x + \frac{0.2 - 0.375 + \frac{5}{11}}{-0.3 + \frac{9}{16} - \frac{15}{22}} \text{ với } x = -\frac{1}{3}.$$

Bài toán 1.22 (Tuyên, 2022, 17., p. 8). Tìm giá trị của x để các biểu thức sau có giá trị dương: (a) $A = x^2 + 4x$; (b) $B = (x - 3)(x + 7)$; (c) $C = \left(\frac{1}{2} - x\right) \left(\frac{1}{3} - x\right)$.

Bài toán 1.23 (Tuyên, 2022, 18., p. 8). Tìm các giá trị của x để các biểu thức sau có giá trị âm: (a) $D = x^2 - \frac{2}{5}x$; (b) $E = \frac{x-2}{x-6}$.

Bài toán 1.24 (Tuyên, 2022, 19., p. 8). Tìm $x, y \in \mathbb{Q}$, $y \neq 0$ thỏa $x - y = xy = x : y$.

Bài toán 1.25 (Tuyên, 2022, 20., p. 8). Cho 100 số hữu tỷ trong đó tích của bất kỳ 3 số nào cũng là 1 số âm. Chứng minh: (a) Tích của 100 số đó là 1 số dương; (b) Tất cả 100 số đó đều là số âm.

Bài toán 1.26 (Bình, 2022, Ví dụ 1, p. 3). Tính $A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \dots$ (A có 300 số hạng).

Bài toán 1.27 (Bình, 2022, Ví dụ 2, p. 4). Cho phân số $\frac{a}{b} \neq 1$. (a) Tìm phân số x sao cho nhân x với $\frac{a}{b}$ cũng bằng cộng x với $\frac{a}{b}$. (b) Tìm giá trị của x trong câu (a) nếu $\frac{a}{b} = \frac{7}{5}$, nếu $\frac{a}{b} = \frac{8}{11}$.

Bài toán 1.28 (Bình, 2022, Ví dụ 3, p. 4). Tìm $x \in \mathbb{Q}$, $x < 0$ để $\frac{4}{x-1} \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 1.29 (Bình, 2022, Ví dụ 4, p. 5). Tân đạp xe từ trường về nhà với thời gian dự kiến. Nhưng Tân đã dùng $\frac{2}{3}$ thời gian dự kiến để đi $\frac{3}{4}$ quãng đường với vận tốc v_1 , rồi đi quãng đường còn lại với vận tốc v_2 & đã về nhà đúng thời điểm dự kiến. Tính tỷ số $v_1 : v_2$.

Bài toán 1.30 (Bình, 2022, Mở rộng Ví dụ 4, p. 5). Tân đạp xe từ trường về nhà với thời gian dự kiến. Nhưng Tân đã dùng a thời gian dự kiến để đi b quãng đường với vận tốc v_1 , $a, b > 0$, $a + b < 1$, rồi đi quãng đường còn lại với vận tốc v_2 & đã về nhà đúng thời điểm dự kiến. Tính tỷ số $v_1 : v_2$ theo a, b .

Bài toán 1.31 (Bình, 2022, 1., p. 5). So sánh các số hữu tỷ: (a) $-\frac{18}{91}$ & $-\frac{23}{114}$; (b) $-\frac{22}{35}$ & $-\frac{103}{177}$.

Bài toán 1.32 (Bình, 2022, 2., p. 5). Tìm 2 phân số có tử bằng 9, biết giá trị của mỗi phân số đó lớn hơn $-\frac{11}{13}$ & nhỏ hơn $-\frac{11}{15}$.

Bài toán 1.33 (Bình, 2022, 3., p. 5). Cho các số hữu tỷ $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ với mẫu dương, trong đó $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Chứng minh: (a) $ab < bc$; (b) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Bài toán 1.34 (Bình, 2022, 4., p. 5). Tính: (a) $\frac{-2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{-1}{6} + \frac{-2}{5}$; (b) $\frac{-2}{3} + \frac{-1}{5} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6} - \frac{-7}{10}$; (c) $\frac{1}{2} - \frac{-2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{5}{7} - \frac{-1}{6} + \frac{-4}{35} + \frac{1}{41}$; (d) $\frac{1}{100 \cdot 99} - \frac{1}{99 \cdot 98} - \frac{1}{98 \cdot 97} - \dots - \frac{1}{3 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 1}$.

Bài toán 1.35 (Bình, 2022, 5., pp. 5-6). Ký hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x , được gọi là phần nguyên của x , e.g., $[1.5] = 1$, $[5] = 5$, $[-2.5] = -3$. (a) Tính $[-\frac{1}{7}]$, $[3.7]$, $[-4]$, $[-\frac{43}{10}]$. (b) Cho $x = 3.7$. So sánh: $A = [x] + [x + \frac{1}{5}] + [x + \frac{2}{5}] + [x + \frac{3}{5}] + [x + \frac{4}{5}]$ & $B = [5x]$. (c) Tính $[\frac{100}{3}] + [\frac{100}{3^2}] + [\frac{100}{3^3}] + [\frac{100}{3^4}]$. (d) Tính $[\frac{50}{2}] + [\frac{50}{2^2}] + [\frac{50}{2^3}] + [\frac{50}{2^4}] + [\frac{50}{2^5}]$. (e) Cho $x \in \mathbb{Q}$. So sánh $[x]$ với x , so sánh $[x]$ với y trong đó $y \in \mathbb{Z}$, $y < x$.

Bài toán 1.36 (Bình, 2022, 6., p. 6). Cho các số hữu tỷ x bằng 1.4089, 0.1398, -0.4771, -1.2592. (a) Viết các số đó dưới dạng tổng của 1 số nguyên a & 1 số thập phân b không âm nhỏ hơn 1. (b) Tính tổng các số hữu tỷ trên bằng 2 cách: tính theo cách thông thường, tính tổng các số được viết dưới dạng ở (a). (c) So sánh a & $[x]$ trong trường hợp ở câu (a). Lưu ý: Trong cách viết này, a là phần nguyên của x , còn b là phần lẻ của x . Ký hiệu phần lẻ của x là $\{x\}$ thì $x = [x] + \{x\}$.

Bài toán 1.37 (Bình, 2022, 7., p. 6). Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để phân số sau có giá trị là 1 số nguyên & tính giá trị đó: (a) $A = \frac{3n+9}{n-4}$; (b) $B = \frac{6n+5}{2n-1}$.

Bài toán 1.38 (Bình, 2022, 8., p. 6). Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$, biết: $\frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8}$.

Bài toán 1.39 (Bình, 2022, 9., p. 6). Viết tất cả các số nguyên có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 20 theo thứ tự tùy ý. Lấy mỗi số trừ đi số thứ tự của nó ta được 1 hiệu. Tổng của tất cả các hiệu đó bằng bao nhiêu?

Bài toán 1.40 (Bình, 2022, 10., p. 6). Tính: (a) $\left(\frac{\frac{3}{10} - \frac{4}{15} - \frac{7}{20}}{\frac{1}{14} + \frac{1}{7} - \frac{-3}{35}}\right) \cdot \frac{5}{19}$; (b) $\frac{(1 + 2 + \dots + 100) \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) \cdot (6 \cdot 3 \cdot 12 - 21 \cdot 3 \cdot 6)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}}$; (c) $\frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11}}{\frac{4}{9} - \frac{4}{7} - \frac{4}{11}} + \frac{\frac{3}{5} - \frac{3}{25} - \frac{3}{125} - \frac{3}{625}}{\frac{4}{5} - \frac{4}{25} - \frac{4}{125} - \frac{4}{625}}$.

Bài toán 1.41 (Bình, 2022, 11., p. 7). Tìm $x \in \mathbb{Q}$, biết: (a) $\frac{2}{3}x - 4 = -12$; (b) $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} : x = -3$; (c) $|3x - 5| = 4$; (d) $\frac{x+1}{10} + \frac{x+1}{11} + \frac{x+1}{12} = \frac{x+1}{13} + \frac{x+1}{14}$; (e) $\frac{x+4}{2000} + \frac{x+3}{2001} = \frac{x+2}{2002} + \frac{x+1}{2003}$.

Bài toán 1.42 (Bình, 2022, 12., p. 7). Cho phân số $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$. Tìm phân số x sao cho $\frac{a}{b} - x = \frac{a}{b} \cdot x$.

Bài toán 1.43 (Bình, 2022, 13., p. 7). Trung bình cộng của 2 số lớn hơn số thứ nhất 75% thì nhỏ hơn số thứ 2 bao nhiêu %?

Bài toán 1.44 (Bình, 2022, 14., p. 7). Chứng minh:

$$(a) \sum_{i=1}^{99} \frac{i}{(i+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{99}{100!} < 1. \quad (b) \sum_{i=1}^{99} \frac{i(i+1)-1}{(i+1)!} = \frac{1 \cdot 2 - 1}{2!} + \frac{2 \cdot 3 - 1}{3!} + \frac{3 \cdot 4 - 1}{4!} + \cdots + \frac{99 \cdot 100 - 1}{100!} < 2.$$

Bài toán 1.45 (Bình, 2022, 15., p. 7). (a) Người ta viết 7 số hữu tỷ trên 1 vòng tròn. Tìm các số đó, biết tích của 2 số bất kỳ cạnh nhau bằng 16. (b) Cũng hỏi như trên đối với n số.

Bài toán 1.46 (Bình, 2022, 16., p. 7). Có tồn tại hay không 2 số dương a, b khác nhau sao cho $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a-b}$?

Bài toán 1.47 (Bình, 2022, 17.*, p. 7). (a) Chứng minh: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{49 \cdot 50} = \frac{1}{26} + \frac{1}{27} + \frac{1}{28} + \cdots + \frac{1}{50}$. (b) Cho $B = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 100}$. Chứng minh $\frac{7}{12} < B < \frac{5}{6}$.

Bài toán 1.48 (Bình, 2022, 18., p. 7). Tìm $a, b \in \mathbb{Q}$ sao cho: (a) $a - b = 2(a + b) = a : b$. (b) $a + b = ab = a : b$.

Bài toán 1.49 (Bình, 2022, 19.*, p. 7). Tìm $x \in \mathbb{Q}$, sao cho tổng của số đó với số nghịch đảo của nó là 1 số nguyên.

Bài toán 1.50 (Bình, 2022, 20.*, p. 8). Viết tất cả các số hữu tỷ dương thành dãy gồm các nhóm phân số có tổng của tử ℓ mẫu lần lượt bằng 2, 3, 4, 5, ..., các phân số trong cùng 1 nhóm được đặt trong dấu ngoặc: $(\frac{1}{1})$, $(\frac{2}{1}, \frac{1}{2})$, $(\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3})$, $(\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4})$, ... Tìm phân số thứ 200 của dãy.

1.3 Lũy Thừa của 1 Số Hữu Tỷ

“1. Lũy thừa với số mũ tự nhiên $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_n$, $\forall x \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}, n > 1$. Nếu $x = \frac{a}{b}$ thì $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$. Quy ước: $x^0 = 1, \forall x \in \mathbb{Q}, x \neq 0, x^1 = x, \forall x \in \mathbb{Q}$. 2. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}, x^m : x^n = \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}, (x^m)^n = x^{mn}, \forall x, y \in \mathbb{Q}, x \neq 0, \forall m, n \in \mathbb{N}^*, m \geq n; (\frac{x}{y})^n = \frac{x^n}{y^n}, y \neq 0$. 3. Lũy thừa với số mũ nguyên âm $x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \forall x \in \mathbb{Q}, x \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. 4. So sánh 2 lũy thừa: (a) Cùng cơ số: Với $m > n > 0$ thì: • $x > 1 \Rightarrow x^m > x^n$; • $x = 1 \Rightarrow x^m = x^n$; • $0 < x < 1 \Rightarrow x^m > x^n$. (b) Cùng số mũ: $\forall n \in \mathbb{N}^*$: • Với $x, y > 0$, nếu $x > y$ thì $x^n > y^n$; • $x > y \Leftrightarrow x^{2n+1} > y^{2n+1}$; • $(-x)^{2n} = x^{2n}$; • $(-x)^{2n+1} = -x^{2n+1}$.” – Tuyên, 2022, §3, pp. 8–9

Bài toán 1.51 (Tuyên, 2022, Ví dụ 6, p. 9). Chứng minh: Không tồn tại 3 số hữu tỷ x, y, z sao cho $xy = \frac{13}{15}, yz = \frac{1}{3}, zx = -\frac{3}{13}$.

Bài toán 1.52 (Tuyên, 2022, Ví dụ 7, p. 9). Tìm x biết $(3^x)^2 : 3^3 = \frac{1}{243}$.

Bài toán 1.53 (Tuyên, 2022, Ví dụ 8, p. 9). Tìm x biết: $(3x^2 - 51)^{2n} = (-24)^{2n}, n \in \mathbb{N}^*$.

Bài toán 1.54 (Tuyên, 2022, 21., p. 10). Viết các số sau dưới dạng 1 lũy thừa với số mũ tự nhiên lớn hơn 1: (a) 64, 81, -216; (b) $-\frac{1}{27}, \frac{8}{729}, \frac{16}{625}$.

Bài toán 1.55 (Tuyên, 2022, 22., p. 10). Dùng lũy thừa với số mũ nguyên âm để viết gọn các số sau: (a) Đường kính của nguyên tử cỡ 0.000000001m; (a) Đường kính của hạt nhân nguyên tử cỡ 0.0000000000000001m; (c) Khối lượng hạt nhân nguyên tử cỡ $\underbrace{0.000 \dots 001}_{23 \text{ số } 0} \text{ gam}$.

Bài toán 1.56 (Tuyên, 2022, 23., p. 10). Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa của 1 số nguyên: (a) $12^3 : (3^{-4} \cdot 64)$; (b) $(\frac{3}{7})^5 \cdot (\frac{7}{3})^{-1} \cdot (\frac{5}{3})^6 : (\frac{343}{625})^{-2}$; (c) $5^4 \cdot 125 \cdot (2.5)^{-5} \cdot 0.04$.

Bài toán 1.57 (Tuyên, 2022, 24., p. 10). Cho $A = (ax + by)^2, B = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$. So sánh giá trị của 2 biểu thức A & B biết: $a = 2, b = -1, x = \frac{8}{11}, y = \frac{-5}{11}$.

Bài toán 1.58 (Tuyên, 2022, 25., p. 10). So sánh $(\frac{1}{8})^6$ với $(\frac{1}{32})^4$.

Bài toán 1.59 (Tuyên, 2022, 26., p. 10). So sánh 4^{30} với $1000 \cdot 32^{10}$.

Bài toán 1.60 (Tuyên, 2022, 27., p. 10). Tìm x biết: (a) $5^x \cdot (5^3)^2 = 625$; (b) $(\frac{12}{25})^x = (\frac{3}{5})^2 - (-\frac{3}{5})^4$; (c) $(-\frac{3}{4})^{3x-1} = \frac{256}{81}$.

Bài toán 1.61 (Tuyên, 2022, 28., p. 10). Tìm $x \in \mathbb{N}$ biết: (a) $8 < 2^x \leq 2^9 : 2^5$; (b) $27 < 81^3 : 3^x < 243$; (c) $(\frac{2}{5})^x > (\frac{5}{2})^{-3} \cdot (-\frac{2}{5})^2$.

Bài toán 1.62 (Tuyên, 2022, 29., p. 10). *Tìm x biết: (a) $(5x+1)^2 = \frac{36}{49}$; (b) $(x - \frac{2}{9})^3 = (\frac{2}{3})^6$; (c) $(8x-1)^{2n+1} = 5^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.*

Bài toán 1.63 (Tuyên, 2022, 30., p. 10). *Tìm x, y biết: (a) $x^2 + (y - \frac{1}{10})^4 = 0$; (b) $(\frac{1}{2}x - 5)^{20} + (y^2 - \frac{1}{4})^{10} \leq 0$.*

Bài toán 1.64 (Tuyên, 2022, 31., p. 10). *Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết: $(x-7)^{x+1} - (x-7)^{x+11} = 0$.*

Bài toán 1.65 (Tuyên, 2022, 32., p. 10). *Tìm x, y biết: $x(x-y) = \frac{3}{10}$, $y(x-y) = -\frac{3}{50}$.*

Bài toán 1.66 (Tuyên, 2022, 33., p. 11). *Tìm: (a) Giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức $A = (2x + \frac{1}{3})^2 - 1$; (b) Giá trị lớn nhất (GTLN) của biểu thức $B = -(\frac{4}{9}x - \frac{2}{15})^6 + 3$.*

Bài toán 1.67 (Bình, 2022, Ví dụ 5, p. 8). *(a) Chứng minh: $2^{10} \approx 10^3$ & $9^{10} \approx 80^5$. (b) Dùng nhận xét ở (a) để chứng minh $9^{10} \approx 3.2 \cdot 10^9$.*

Bài toán 1.68 (Bình, 2022, Ví dụ 6, p. 8). *Tính: $A = \sum_{i=1}^{10} \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{10}{2^{10}}$.*

Bài toán 1.69 (Bình, 2022, Ví dụ 7, p. 9). *(a) Có thể khẳng định x^2 luôn luôn lớn hơn x hay không? (b) Khi nào thì $x^2 < x$?*

Bài toán 1.70 (Bình, 2022, Ví dụ 8, p. 9). *Tìm $a, b, c \in \mathbb{Q}$, biết: $ab = 2$, $bc = 3$, $ca = 54$.*

Bài toán 1.71 (Bình, 2022, Ví dụ 9, p. 9). *Rút gọn: $A = \sum_{i=0}^{50} 5^i = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{49} + 5^{50}$.*

Bài toán 1.72 (Bình, 2022, Ví dụ 10, p. 9). *Cho $B = \sum_{i=1}^{99} (\frac{1}{2})^i = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + \dots + (\frac{1}{2})^{98} + (\frac{1}{2})^{99}$. Chứng minh $B < 1$.*

Bài toán 1.73 (Bình, 2022, 21., p. 10). *Chứng minh: (a) $7^6 + 7^5 - 7^4 : 55$; (b) $16^5 + 2^{15} : 33$; (c) $81^7 - 27^9 - 9^{13} : 405$.*

Bài toán 1.74 (Bình, 2022, 22., p. 10). *Điền vào chỗ chấm (\dots) các từ “bằng nhau” hoặc “đổi nhau” cho đúng: (a) Nếu 2 số đổi nhau thì bình phương của chúng (b) Nếu 2 số đổi nhau thì lập phương của chúng (c) Lũy thừa chẵn cùng bậc của 2 số đổi nhau thì (d) Lũy thừa lẻ cùng bậc của 2 số đổi nhau thì*

Bài toán 1.75 (Bình, 2022, 23., p. 10 & mở rộng). *Các đẳng thức sau có đúng với mọi $a, b \in \mathbb{Q}$ hay không? (a) $-a^3 = (-a)^3$; (b) $-a^5 = (-a)^5$; (c) $-a^2 = (-a)^2$; (d) $-a^4 = (-a)^4$; (e) $-a^{2n+1} = (-a)^{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$; (f) $a^{2n} = (-a)^{2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$; (g) $(a-b)^2 = (b-a)^2$; (h) $(a-b)^3 = -(b-a)^3$; (i) $(a-b)^{2n} = (b-a)^{2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$; (j) $(a-b)^{2n+1} = -(b-a)^{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Bài toán 1.76 (Bình, 2022, 24., p. 10). *Tính: (a) $(\frac{1}{2})^{15} \cdot (\frac{1}{4})^{20}$; (b) $(\frac{1}{9})^{25} : (\frac{1}{3})^{30}$; (c) $(\frac{1}{16})^3 : (\frac{1}{8})^2$; (d) $(x^3)^2 : (x^2)^3$ với $x \neq 0$.*

Bài toán 1.77 (Bình, 2022, 25., p. 10). *Viết số 64 dưới dạng a^n với $a \in \mathbb{Z}$. Có bao nhiêu cách viết?*

Bài toán 1.78 (Bình, 2022, 26., p. 10). *Rút gọn biểu thức: $A = \frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 20}$.*

Bài toán 1.79 (Bình, 2022, 27., p. 10). *(a) Chứng minh: $2^{10} \approx 10^3$ & $3^{16} \approx 80^4$. (b) Dùng nhận xét ở (a) để chứng minh $3^{16} \approx 40000000$.*

Bài toán 1.80 (Bình, 2022, 28., p. 10). *Cho $S_n = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} i = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (-1)^{n-1} n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tính $S_{35} + S_{60}$.*

Bài toán 1.81 (Bình, 2022, 29., p. 10). *Cho $A = 1 - 5 + 9 - 13 + 17 - 21 + 25 - \dots$ (n số hạng, giá trị tuyệt đối của số sau lớn hơn giá trị tuyệt đối của số hạng trước 4 đơn vị, các dấu $+$ & $-$ xen kẽ). (a) Tính A theo n . (b) Viết số hạng thứ n của biểu thức A theo n (chú ý dùng lũy thừa để biểu thị dấu của số hạng đó).*

Bài toán 1.82 (Bình, 2022, 30., p. 11). *Với giá trị nào của các chữ thì các biểu thức sau có giá trị là số 0, số dương, số âm? (a) $P = \frac{a^2 b}{c}$; (b) $Q = \frac{x^3}{yz}$.*

Bài toán 1.83 (Bình, 2022, 31., p. 11). *Cho 2 số hữu tỷ a & b trái dấu trong đó $|a| = b^5$. Xác định dấu của mỗi số.*

Bài toán 1.84 (Bình, 2022, 32., p. 11). *Viết các số sau dưới dạng lũy thừa của 2: 16, 64, 1, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{8}$, 0.5, 0.25.*

Bài toán 1.85 (Bình, 2022, 33., p. 11). *(a) Viết các số sau thành lũy thừa với số mũ âm: $\frac{1}{1000000}$, 0.00000002. (b) Viết các số sau dưới dạng số thập phân: 10^{-7} , $2.5 \cdot 10^{-6}$.*

Bài toán 1.86 (Bình, 2022, 34., p. 11). *Tính xem A gấp mấy lần B : (a) $A = 3.4 \cdot 10^{-8}$, $B = 34 \cdot 10^{-9}$; (b) $A = 10^{-4} + 10^{-3} + 10^{-2}$, $B = 10^{-9}$.*

Bài toán 1.87 (Bình, 2022, 35., p. 11). So sánh: (a) $\left(-\frac{1}{16}\right)^{100}$ & $\left(-\frac{1}{2}\right)^{500}$; (b) $(-32)^9$ & $(-18)^{13}$; (c) $a = 2^{100}$, $b = 3^{75}$, $c = 5^{50}$.

Bài toán 1.88 (Bình, 2022, 36., p. 11). Trong các câu sau, câu nào đúng với mọi $a \in \mathbb{Q}$? (a) Nếu $a < 0$ thì $a^2 > 0$; (b) Nếu $a^2 > 0$ thì $a > 0$; (c) Nếu $a < 0$ thì $a^2 > a$; (d) Nếu $a^2 > a$ thì $a > 0$; (e) Nếu $a^2 > a$ thì $a < 0$.

Bài toán 1.89 (Bình, 2022, 37., p. 11). (a) Cho $a^m = a^n$ ($a \in \mathbb{Q}$, $m, n \in \mathbb{N}$). Tìm m, n . (b) Cho $a^m > a^n$ ($a \in \mathbb{Q}$, $a > 0$, $m, n \in \mathbb{N}$). So sánh m & n .

Bài toán 1.90 (Bình, 2022, 38., p. 11). Tìm $x \in \mathbb{Q}$, biết: (a) $(2x-1)^4 = 81$; (b) $(x-1)^5 = -32$; (c) $(2x-1)^6 = (2x-1)^8$.

Bài toán 1.91 (Bình, 2022, 39., p. 11). Tìm $x \in \mathbb{N}$, biết: (a) $5^x + 5^{x+2} = 650$; (b) $3^{x-1} + 5 \cdot 3^{x-1} = 162$.

Bài toán 1.92 (Bình, 2022, 40., p. 11). Tìm $x, y \in \mathbb{N}$, biết: (a) $2^{x+1} \cdot 3^y = 12^x$; (b) $10^x : 5^y = 20^y$; (c) $2^x = 4^{y-1}$ & $27^y = 3^{x+8}$.

Bài toán 1.93 (Bình, 2022, 41., p. 11). Tìm $a, b, c \in \mathbb{Q}$, biết: (a) $ab = \frac{3}{5}$, $bc = \frac{4}{5}$, $ca = \frac{3}{4}$. (b) $a(a+b+c) = -12$, $b(a+b+c) = 18$, $c(a+b+c) = 30$; (c) $ab = c$, $bc = 4a$, $ac = 9b$.

Bài toán 1.94 (Bình, 2022, 42.*, p. 12). Cho $a, b, c, d, e \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $a^b = b^c = c^d = d^e = e^a$. Chứng minh $a = b = c = d = e$.

Bài toán 1.95 (Bình, 2022, 43., p. 12). Cho $A = \prod_{i=2}^{100} \left(\frac{1}{i^2} - 1\right) = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right) \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$. So sánh A với $-\frac{1}{2}$.

Bài toán 1.96 (Bình, 2022, 44., p. 12). Rút gọn $A = \sum_{i=1}^{100} (-1)^i 2^i = 2^{100} - 2^{99} + 2^{98} - 2^{97} + \cdots + 2^2 - 2$.

Bài toán 1.97 (Bình, 2022, 45., p. 12). Rút gọn $B = \sum_{i=1}^{100} (-1)^i 3^i = 3^{100} - 3^{99} + 3^{98} - 3^{97} + \cdots + 3^2 - 3 + 1$.

Bài toán 1.98 (Bình, 2022, 46., p. 12). Cho $C = \sum_{i=1}^{99} \frac{1}{3^i} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{99}}$. Chứng minh $C < \frac{1}{2}$.

Bài toán 1.99 (Bình, 2022, 47., p. 12). Chứng minh $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \cdots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2} < 1$.

Bài toán 1.100 (Bình, 2022, 48.*, p. 12). Chứng minh $\sum_{i=1}^{100} \frac{i}{3^i} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots + \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4}$.

Bài toán 1.101 (Bình, 2022, 49., p. 12). Ta không có $2^m + 2^n = 2^{m+n}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$. Nhưng có những số nguyên dương m, n có tính chất trên. Tìm các số đó.

Bài toán 1.102 (Bình, 2022, 50.*, p. 12). Tìm $m, n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $2^m - 2^n = 256$.

Bài toán 1.103 (Bình, 2022, 51.*, p. 12). Cho 1 bảng vuông 3×3 ô. Trong mỗi ô của bảng viết số 1 hoặc số -1 . Gọi d_i là tích các số trên dòng i ($i = 1, 2, 3$), c_k là tích các số trên cột k ($k = 1, 2, 3$). (a) Chứng minh không thể xảy ra $d_1 + d_2 + d_3 + c_1 + c_2 + c_3 = 0$. (b) Xét bài toán trên đối với bảng vuông $n \times n$.

Bài toán 1.104 (Bình, 2022, 52.*, p. 12). Cho n số x_1, \dots, x_n , mỗi số bằng 1 hoặc -1 . Biết tổng của n tích $x_1 x_2, x_2 x_3, x_3 x_4, \dots, x_n x_1$ bằng 0. Chứng minh $n \vdots 4$.

1.4 Thứ Tự Thực Hiện Các Phép Tính. Quy Tắc Chuyển Vế

“1. Thứ tự thực hiện các phép tính đối với số hữu tỷ cũng tương tự như thứ tự thực hiện các phép tính đối với số tự nhiên, số nguyên, phân số. 2. Quy tắc chuyển vế: Khi chuyển 1 số hạng từ vế này sang vế kia của 1 đẳng thức, ta phải đổi dấu số hạng đó. 3. Quy tắc dấu ngoặc đối với số hữu tỷ cũng tương tự quy tắc dấu ngoặc đối với các số nguyên, phân số, số thập phân. 4. Nếu đưa các số hạng vào trong dấu ngoặc & có dấu “-” đằng trước thì phải đổi dấu các số hạng đó.” – Tuyên, 2022, §4, p. 11

Bài toán 1.105 (Tuyên, 2022, Ví dụ 9, p. 11). Tính: $A = \frac{2}{5} - \left(\frac{7}{10}\right)^2 : \frac{28}{25} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (-3)$.

Bài toán 1.106 (Tuyên, 2022, Ví dụ 10, p. 11). Tính: $B = \frac{3 + \frac{1}{6} - \frac{2}{5}}{5 - \frac{1}{6} + \frac{7}{10}} - \frac{3}{2}$.

Bài toán 1.107 (Tuyên, 2022, Ví dụ 11, p. 12). Tìm x biết: $\frac{3}{7} \left(x - \frac{14}{9}\right) = -\frac{11}{7} \left(x + \frac{14}{11}\right)$.

Bài toán 1.108 (Tuyên, 2022, 34., p. 12). Tính: $2\frac{1}{8} : 1\frac{11}{40} - (2^4 - 7\frac{13}{18}) : 11\frac{1}{27}$.

Bài toán 1.109 (Tuyên, 2022, 35., p. 12). Tính: $1\frac{13}{15} \cdot \frac{3}{4} - \left[\frac{2^3}{4^2-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \cdot \frac{24}{47}$.

Bài toán 1.110 (Tuyên, 2022, 36., p. 12). *Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{2 - \frac{1}{3} + 2^{-2}}{2 + \frac{1}{6} - 2^{-2}} - 2^0$.*

Bài toán 1.111 (Tuyên, 2022, 37., p. 12). *Tìm x biết: $2\frac{1}{4} \cdot (x - 7\frac{1}{3}) = 1.5$.*

Bài toán 1.112 (Tuyên, 2022, 38., p. 12). *Tìm x biết: $(12\frac{7}{18} - 10\frac{13}{18}) : x - 1\frac{7}{33} : \frac{8}{11} = 1\frac{2}{3}$.*

Bài toán 1.113 (Tuyên, 2022, 39., p. 12). *Cho biểu thức $A = \frac{12}{17} : \frac{5}{51} - \frac{8}{35} \cdot 7$. (a) Tính giá trị của biểu thức A . (b) Đặt thêm dấu ngoặc để biểu thức A có giá trị là 48.8.*

Bài toán 1.114 (Tuyên, 2022, 40., p. 12). *Ông Phú gửi tiết kiệm 100 triệu đồng tại 1 ngân hàng với kỳ hạn 1 năm, lãi suất 5%/năm. Hết thời hạn 1 năm, tiền lãi gộp vào số tiền gửi ban đầu & lại gửi theo thể thức cũ. Cứ như thế sau 3 năm thì số tiền cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu?*

1.5 Biểu Diễn Thập Phân của Số Hữu Tỷ

“**1.** Số thập phân hữu hạn & số thập phân vô hạn tuần hoàn: • Xét phép chia $47 : 20 = 2.35$. Số thập phân 2.35 chỉ có 2 chữ số sau dấu phẩy được gọi là *số thập phân hữu hạn*. • Xét phép chia $49 : 30 = 1.63333 \dots$. Trong phần thập phân của thương, chữ số 3 xuất hiện liên tiếp mãi. Ta nói số thập phân 1.63333... là *số thập phân vô hạn tuần hoàn* có chu kỳ là 3 & viết gọn $1.63333 \dots = 1.6(3)$. Chu kỳ của 1 số thập phân vô hạn tuần hoàn có thể có 1 chữ số hoặc nhiều chữ số, có thể bắt đầu ngay sau dấu phẩy hoặc không bắt đầu ngay sau dấu phẩy. **2.** *Biểu diễn thập phân của số hữu tỷ*: Mỗi số hữu tỷ được biểu diễn bởi 1 số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn. Ngược lại, mỗi số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn biểu diễn 1 số hữu tỷ. • Các phân số tối giản với mẫu dương mà mẫu không có ước nguyên tố khác 2 & 5 thì viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn. • Các phân số tối giản với mẫu dương mà mẫu có ước nguyên tố khác 2 & 5 thì được viết dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn. **3.** $\frac{1}{9} = 0.111 \dots = 0.(1)$, $\frac{1}{99} = 0.0101 \dots = 0.(01)$, $\frac{1}{999} = 0.001001 \dots = 0.(001)$. Ta thừa nhận kết quả sau: $0.(1) = \frac{1}{9}$, $0.(01) = \frac{1}{99}$, $0.(001) = \frac{1}{999}$.” – Tuyên, 2022, §5, pp. 12–13

Tổng quát,

$$0.\underbrace{(0 \dots 0 1)}_{n \text{ số } 0} = \frac{1}{\underbrace{9 \dots 9}_{n+1 \text{ số } 9}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh. $\forall n \in \mathbb{N}$, đặt $a_n = 0.\underbrace{(0 \dots 0 1)}_{n \text{ số } 0}$. Có $10^{n+1}a_n = 1.\underbrace{(0 \dots 0 1)}_{n \text{ số } 0} = 1 + 0.\underbrace{(0 \dots 0 1)}_{n \text{ số } 0} = 1 + a_n \Leftrightarrow (10^{n+1} - 1)a_n = 1 \Leftrightarrow$

$$a_n = \frac{1}{10^{n+1} - 1} = \frac{1}{1 \underbrace{0 \dots 0}_{n+1 \text{ số } 0}} = \frac{1}{\underbrace{9 \dots 9}_{n+1 \text{ số } 9}}. \quad \square$$

Bài toán 1.115 (Tuyên, 2022, Ví dụ 12, p. 13). *Viết các số thập phân sau dưới dạng phân số tối giản: (a) 0.555; (b) 0.555...*

Lưu ý 1.1 (Số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn). “Các số 0.555..., 4.272727... là những số thập phân vô hạn tuần hoàn có chu kỳ ngay sau dấu phẩy gọi là số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn.” – Tuyên, 2022, p. 13

Bài toán 1.116 (Tuyên, 2022, Ví dụ 13, p. 13). *Viết số thập phân 0.25454... dưới dạng phân số tối giản.*

Lưu ý 1.2 (Số thập phân vô hạn tuần hoàn tạp). *Số 0.25454... có chu kỳ không bắt đầu ngay sau dấu phẩy gọi là số thập phân vô hạn tuần hoàn tạp. Để viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn tạp dưới dạng phân số tối giản, trước hết phải đưa chúng về dạng vô hạn tuần hoàn đơn.*” – Tuyên, 2022, p. 13

Bài toán 1.117 (Tuyên, 2022, Ví dụ 14, p. 13). *Tính: $1.(6) \cdot 2.(3) : 0.(7)$.*

Cách giải: “Trước hết viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn dưới dạng phân số tối giản rồi làm các phép tính đối với phân số.” – Tuyên, 2022, p. 13

Bài toán 1.118 (Tuyên, 2022, 41., p. 14). *Không làm phép chia, cho biết trong các phân số sau, phân số nào viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn, phân số nào viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn? $\frac{7}{32}$, $\frac{2}{35}$, $\frac{6}{75}$, $\frac{-35}{42}$, $\frac{3^2}{11^2-1}$.*

Bài toán 1.119 (Tuyên, 2022, 42., p. 14). *Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn dưới dạng phân số tối giản: (a) 0.333...; (b) 0.454545...; (c) 0.162162...; (d) 5.272727...*

Bài toán 1.120 (Tuyên, 2022, 43., p. 14). *Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn tạp dưới dạng phân số tối giản: (a) 0.7666...; (b) 0.507575...; (c) 1.2148148...*

Bài toán 1.121 (Tuyên, 2022, 44., p. 14). *Tính:*

(a) $0.2777 \dots 0.3555 \dots$; (b) $1.5454 \dots - 0.8181 \dots - 0.75$; (c) $1 : 10.2(6) : 0.41(6) \cdot 0.42(7)$.

Bài toán 1.122 (Tuyên, 2022, 45., p. 14). *Cho x & y là các số nguyên tố. Tìm x & y để các phân số sau viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn: (a) $P = \frac{x}{3 \cdot 5 \cdot y}$; (b) $Q = \frac{15x}{14y}$.*

Bài toán 1.123 (Tuyên, 2022, 46., p. 14). *Tìm 1 phân số dương tối giản nhỏ hơn 1, biết khi chia tử cho mẫu ta được 1 số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn chu kỳ có 3 chữ số & phân số này bằng lập phương của 1 phân số khác.*

1.6 Phần Nguyên, Phần Lẻ của 1 Số Hữu Tỷ

“**1.** Phần nguyên của $x \in \mathbb{Q}$, ký hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x . Như vậy $[x]$ là 1 số nguyên sao cho: $[x] \leq x < [x] + 1$. Khi $x \in \mathbb{Z}$ thì $[x] = x$. E.g., $[8.9] = 8$, $[-3.2] = -4$, $[-2] = -2$. **2.** Phần lẻ của 1 số hữu tỷ $x \in \mathbb{Q}$, ký hiệu $\{x\}$ & $\{x\} = x - [x]$. Như vậy $\{x\}$ là 1 số hữu tỷ sao cho $0 \leq \{x\} < 1$. Khi $x \in \mathbb{Z}$ thì $\{x\} = 0$. E.g., $\{8.9\} = 8.9 - [8.9] = 8.9 - 8 = 0.9$, $\{-3.2\} = -3.2 - [-3.2] = -3.2 - (-4) = 0.8$, $\{-2\} = -2 - [-2] = -2 - (-2) = 0$. **3.** Tính chất quan trọng để tìm phần nguyên của 1 số hữu tỷ: Nếu số hữu tỷ x bị “kẹp giữa” 2 số nguyên liên tiếp thì $[x]$ bằng số nhỏ hơn trong 2 số đó. Nếu $a \leq x < a + 1$, $a \in \mathbb{Z}$ thì $[x] = a$. **4.** Với khái niệm phần nguyên, ta có thể trình bày nguyên lý Dirichlet 1 cách tổng quát như sau: Nếu nhốt a con thỏ vào b chiếc chuồng mà phép chia $\frac{a}{b}$ còn dư thì tồn tại 1 chuồng nhốt $[\frac{a}{b}] + 1$ con thỏ trở lên.” – Tuyên, 2022, §6, pp. 14–15

Bài toán 1.124 (Tuyên, 2022, Ví dụ 15, p. 15). *Tìm $[x]$ biết $x < 9 < x + 0.4$.*

Bài toán 1.125 (Tuyên, 2022, Ví dụ 16, p. 15). *Tìm $[x]$ biết $[\frac{x}{3}] = -5$.*

Bài toán 1.126 (Tuyên, 2022, Ví dụ 17, p. 15). *Tích $A = 1000! = \prod_{i=1}^{1000} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 1000$ có bao nhiêu thừa số 3 khi phân tích ra thừa số nguyên tố?*

“Tổng quát, số thừa số nguyên tố p khi phân tích $A = n! = \prod_{i=1}^n i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ ra thừa số nguyên tố là: $\sum_{i=1}^k [\frac{n}{p^i}] = [\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p^2}] + \cdots + [\frac{n}{p^k}]$ với k là số mũ lớn nhất sao cho $p^k \leq n$.” – Tuyên, 2022, p. 15

Bài toán 1.127 (Tuyên, 2022, 47., p. 16). *Tìm phần nguyên, phần lẻ của $x \in \mathbb{Q}$ biết: (a) $x = -3$; (b) $x = 6.1$; (c) $x = -\frac{6}{5}$; (d) $x = \frac{1}{8}$.*

Bài toán 1.128 (Tuyên, 2022, 48., p. 16). *Tìm $[x]$ của $x \in \mathbb{Q}$ biết: (a) $13 < x < 13.4$; (b) $-9.2 < x < -9$.*

Bài toán 1.129 (Tuyên, 2022, 49., p. 16). *So sánh phần nguyên của các số hữu tỷ sau: (a) $x = \frac{25}{8}$, $y = \frac{24}{6}$, $z = \frac{23}{7}$; (b) $x = -3\frac{1}{9}$, $y = -3\frac{8}{9}$, $z = -4$.*

Bài toán 1.130 (Tuyên, 2022, 50., p. 16). *Cho $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Q}$. So sánh $\{x\}$ & $\{y\}$.*

Bài toán 1.131 (Tuyên, 2022, 51., p. 16). *Tìm $[x]$ của $x \in \mathbb{Q}$ biết: (a) $x - 0.7 < 8 < x$; (b) $x < -5 < x + \frac{1}{3}$.*

Bài toán 1.132 (Tuyên, 2022, 52., p. 16). *Tính: (a) $[\frac{12}{2}] + [\frac{13}{2}]$; (b) $[\frac{12}{3}] + [\frac{13}{3}] + [\frac{14}{3}]$; (c) $[\frac{-12}{3}] + [\frac{-13}{3}] + [\frac{-14}{3}]$.*

Bài toán 1.133 (Tuyên, 2022, 53., p. 16). *Cho $A = [\frac{n}{2}] + [\frac{n+1}{2}]$, $B = [\frac{n}{3}] + [\frac{n+1}{3}] + [\frac{n+2}{3}]$ với giá trị nào của $n \in \mathbb{Z}$ thì: (a) $A : 2$; (b) $B : 3$.*

Bài toán 1.134 (Tuyên, 2022, 54., p. 16). *Tìm x biết: (a) $[2x] = -1$; (b) $[x + 0.4] = 3$; (c) $[\frac{2}{3}x - 5] = 3$.*

Bài toán 1.135 (Tuyên, 2022, 55., p. 16). *Chứng minh: $[x + y] = [x] + [y]$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$.*

Bài toán 1.136 (Tuyên, 2022, 56., p. 16). *Tìm x biết: (a) $[3x - 4] = x$; (b) $[x + 8] = -3x$; (c) $[5x - 3] = 2x + 1$.*

Bài toán 1.137 (Tuyên, 2022, 57., p. 16). *Tích $C = \prod_{i=201}^{600} i$ có bao nhiêu thừa số 3 khi phân tích ra thừa số nguyên tố?*

Bài toán 1.138 (Tuyên, 2022, 58., p. 16). *Số $300!$ có tận cùng bằng bao nhiêu chữ số 0?*

Bài toán 1.139 (Tuyên, 2022, 59., p. 16). *1 lớp học có 44 học sinh làm bài kiểm tra Toán. Điểm số là 1 số tự nhiên từ 6 đến 10. Biết cả lớp có 6 học sinh được điểm 10. Chứng minh: Ít nhất cũng có 10 học sinh có cùng 1 loại điểm.*

Bài toán 1.140 (Tuyên, 2022, 60., p. 16). *1 tổ 11 học sinh thảo luận về học tập. Có 1 học sinh phát biểu 4 lần, các học sinh khác đều phát biểu nhưng số lần phát biểu ít hơn. Chứng minh: Ít nhất cũng có 4 học sinh có số lần phát biểu như nhau.*

Bài toán 1.141 (Tuyên, 2022, 61., p. 16). *Có 50 quyển vở chia cho 11 học sinh. Chứng minh: (a) Ít nhất cũng có 1 học sinh được 5 quyển trở lên. (b) Với mọi cách chia (kể cả trường hợp có học sinh không được quyển nào) bao giờ cũng có ít nhất 2 học sinh được số quyển vở như nhau.*

1.7 Miscellaneous

Nội dung. Định nghĩa số hữu tỷ; các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, & lũy thừa với số mũ tự nhiên của 1 số hữu tỷ; thứ tự thực hiện các phép tính; quy tắc chuyển vế; số thập phân hữu hạn & số thập phân vô hạn tuần hoàn.

Bài toán 1.142 (Tuyên, 2022, Ví dụ 18, p. 17). Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{2.5-1}\right)^2 - \left(\frac{1}{3\frac{1}{2}-1}\right)^2$. Tính giá trị của A rồi viết kết quả dưới dạng lũy thừa với số mũ tự nhiên của 1 số hữu tỷ.

Bài toán 1.143 (Tuyên, 2022, Ví dụ 19, p. 17). Tìm x biết: $(1 - \frac{3}{10} - x) : (\frac{19}{10} - 1 - \frac{2}{5}) + \frac{4}{5} = 1$.

Bài toán 1.144 (Tuyên, 2022, 62., p. 18). Tính: (a) $9.6 \cdot (\frac{3}{4} - \frac{5}{6})^2$; (b) $6 \cdot (-\frac{2}{3}) + 12(-\frac{2}{3})^2 + 18 \cdot (-\frac{2}{3})^3$.

Bài toán 1.145 (Tuyên, 2022, 63., p. 18). Cho $A = \frac{17}{24} \cdot 9\frac{1}{2} - 3\frac{1}{4} \cdot \frac{17}{24}$, $B = 3\frac{1}{2} \cdot 2\frac{13}{36} + 2\frac{13}{36} \cdot 2\frac{3}{4}$. (a) Tính giá trị của thương $\frac{A}{B}$; (b) Tính $(\frac{A}{B} - \frac{1}{5})^{-2}$.

Bài toán 1.146 (Tuyên, 2022, 64., p. 18). Tính: $\frac{3^6 \cdot 45^4 - 15^{13} \cdot (\frac{1}{5})^9}{27^4 \cdot 25^3 + 45^6}$.

Bài toán 1.147 (Tuyên, 2022, 65., p. 18). Tính: $\frac{(\frac{2}{5})^7 \cdot 5^7 + (\frac{9}{4})^3 : (\frac{3}{16})^3}{2^7 \cdot 5^2 + 512}$.

Bài toán 1.148 (Tuyên, 2022, 66., p. 18). Tìm $x \in \mathbb{Q}$ biết: $30(x - \frac{7}{12}) - 24x = 100 + 6(x - \frac{3}{4})$.

Bài toán 1.149 (Tuyên, 2022, 67., p. 18). Tìm x sao cho: (a) $(x-3)(x+4) > 0$; (b) $(x+5)(x-1) < 0$.

Bài toán 1.150 (Tuyên, 2022, 68., p. 18). Muốn biết ngày ... tháng ... năm ... nào đó là ngày thứ mấy, làm theo 2 bước sau:

- Bước 1: Tìm S theo công thức: $S = x - 1 + \lfloor \frac{x-1}{4} \rfloor - \lfloor \frac{x-1}{100} \rfloor + \lfloor \frac{x-1}{400} \rfloor + C$, trong đó x là năm dương lịch, C là số ngày từ tháng giêng năm đó đến ngày cần tìm (kể cả ngày đầu tiên).
- Bước 2: Tìm số dư trong phép chia $\frac{S}{7}$ rồi đối chiếu với bảng sau:

Thứ	CN	2	3	4	5	6	7
Số dư	0	1	2	3	4	5	6

(a) Ngày 01/01/2001 là ngày thứ mấy? (b) Ngày 03/02/2030 là ngày thứ mấy?

Tài liệu

Bình, Vũ Hữu (2022). *Nâng Cao & Phát Triển Toán 7, tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 152.

Tuyên, Bùi Văn (2022). *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 7*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 168.