

Algebraic & Rational Fractions

Phân Thức Đại Số & Phân Thức Đại Số Hữu Tỷ

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 12 tháng 12 năm 2022

Tóm tắt nội dung

[EN] This text is a collection of problems, from easy to advanced, about algebraic & rational fractions. This text is also a supplementary material for my lecture note on Elementary Mathematics grade 8, which is stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_8/lecture)¹. The latest version of this text has been stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/algebraic & rational fractions](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_8/algebraic_rational_fractions)².

[VI] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài tập chọn lọc từ cơ bản đến nâng cao về phân thức đại số & phân thức đại số hữu tỷ. Tài liệu này là phần bài tập bổ sung cho tài liệu chính – bài giảng [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_8/lecture) của tác giả viết cho Toán Sơ Cấp lớp 8. Phiên bản mới nhất của tài liệu này được lưu trữ & có thể tải xuống ở link sau: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/algebraic & rational fractions](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_8/algebraic_rational_fractions).

Mục lục

1 Định Nghĩa & Tính Chất Cơ Bản	1
2 Problems	2
2.1 Tính Chất Cơ Bản của Phân Thức. Rút Gọn Phân Thức	2
2.2 Các Phép Toán về Phân Thức Đại Số	4
Tài liệu	4

1 Định Nghĩa & Tính Chất Cơ Bản

Definition 1.1 (Algebraic fraction). “In *algebra*, an algebraic fraction is a *fraction* whose numerator & denominator are *algebraic expressions*.” – [Wikipedia/algebraic fraction](#)

“Algebraic fractions are subject to the same laws as *algebraic expressions*.” – [Wikipedia/algebraic fraction](#)

Definition 1.2 (Rational fraction). A rational fraction is an algebraic fraction whose numerator & denominator are both *polynomials*.

1. Phân thức đại số là 1 biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, trong đó A, B là những đa thức & $B \neq 0$. Đặc biệt: Mỗi đa thức cũng được coi như 1 phân thức với mẫu thức bằng 1. **2.** $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ nếu $AD = BC$, $B \neq 0$, $D \neq 0$. **3.** Tính chất cơ bản của phân thức: $\frac{A}{B} = \frac{AM}{BM}$, M là đa thức khác đa thức không 0; $\frac{A}{B} = \frac{A:N}{B:N}$, N là 1 nhân tử chung của A & B . Đặc biệt với $N = -1$, $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$ (quy tắc đổi dấu). **4.** Rút gọn phân thức: Phân tích tử & mẫu thành nhân tử (nếu cần) để tìm nhân tử chung; Chia cả tử & mẫu cho nhân tử chung (nếu có). **5.** Quy đồng mẫu của nhiều phân thức: Phân tích các mẫu thành nhân tử rồi tìm mẫu thức chung; Tìm nhân tử phụ của mỗi mẫu thức; Nhân tử & mẫu của mỗi phân thức với nhân tử phụ tương ứng.

Bổ sung. Phân số $\frac{a}{b}$ là 1 trường hợp đặc biệt của phân thức $\frac{A}{B}$ khi A, B là những đa thức bậc 0. Vì vậy tính chất cơ bản của phân số là 1 trường hợp đặc biệt của tính chất cơ bản của phân thức đại số.” – Tuyen, 2022, pp. 37–38

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam

e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

¹URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/NQBH_elementary_mathematics_grade_8.pdf.

²URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/algebraic_rational_fractions/NQBH_algebraic_rational_fractions.pdf.

2 Problems

2.1 Tính Chất Cơ Bản của Phân Thức. Rút Gọn Phân Thức

Bài toán 2.1 (Bình et al., 2021, Ví dụ 5.1, p. 39). Dùng định nghĩa 2 phân thức bằng nhau, chứng minh 2 phân thức sau bằng nhau: $\frac{a^2 - 2ab - 3b^2}{a^2 - 4ab + 3b^2} \text{ \& \#x2013; } \frac{a+b}{a-b}$ với $a \neq b$ \& \#x2013; $a \neq 3b$.

Bài toán 2.2 (Bình et al., 2021, Ví dụ 5.2, p. 39). Dùng định nghĩa 2 phân thức bằng nhau, xét sự bằng nhau của 2 phân thức $\frac{(3x+2)(x+5)}{4(3x+2)} \text{ \& \#x2013; } \frac{x+5}{4}$ trong các trường hợp biến x thuộc các tập hợp sau: (a) $x \in \mathbb{N}$; (b) $x \in \mathbb{Z}$; (c) $x \in \mathbb{Q}$.

Bài toán 2.3 (Bình et al., 2021, Ví dụ 5.3, p. 39). So sánh $C = \frac{2013^2 - 2012^2}{2013^2 + 2012^2}$ với $D = \frac{2013 - 2012}{2013 + 2012}$.

Bài toán 2.4 (Bình et al., 2021, Ví dụ 5.4, p. 40). Chứng minh: $\sum_{i=0}^{63} a^i = \prod_{i=0}^5 (1 + a^{2^i})$, i.e., $1 + a + a^2 + \dots + a^{63} = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4) \dots (1 + a^{32})$.

Bài toán 2.5 (Bình et al., 2021, Ví dụ 5.5, p. 40). Rút gọn phân thức: $A = \frac{x^3 - 7x + 6}{x^3 + 5x^2 - 2x - 24}$.

Bài toán 2.6 (Bình et al., 2021, Ví dụ 5.6, p. 40). Rút gọn phân thức: $B = \frac{a^{30} + a^{20} + a^{10} + 1}{a^{2042} + a^{2032} + a^{2022} + a^{2012} + a^{30} + a^{20} + a^{10} + 1}$.

Bài toán 2.7 (Bình et al., 2021, 5.1, p. 41). Dùng định nghĩa 2 phân thức bằng nhau, tìm đa thức A trong các trường hợp sau: (a) $\frac{A}{3x-2} = \frac{15x^2 + 10x}{9x^2 - 4}$; (b) $\frac{3x^2 - 5x - 2}{A} = \frac{x-2}{2x-3}$; (c) $\frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} = \frac{x^2 + 4x + 4}{A}$; (d) $\frac{2x+1}{x^3 + x^2 - x + 2} = \frac{A}{x^3 + 1}$.

Bài toán 2.8 (Bình et al., 2021, 5.2, p. 41). Biến đổi mỗi phân thức sau thành 1 phân thức bằng nó \& \#x2013; có tử thức là đa thức B cho sau đây: (a) $\frac{2x-5}{3x^2+4} \text{ \& \#x2013; } B = 2x^2 - 3x - 5$; (b) $\frac{(x+1)(x^2+x-6)}{(x^2-9)(x^2+3x+2)} \text{ \& \#x2013; } B = x - 2$.

Bài toán 2.9 (Bình et al., 2021, 5.3, p. 41). Rút gọn biểu thức: (a) $\frac{2^{18} \cdot 54^3 + 15 \cdot 4^{10} \cdot 9^4}{2 \cdot 12^9 + 6^{10} \cdot 2^{10}}$; (b) $\frac{4^{15} \cdot 27^6 \cdot 42 - 3 \cdot 72^{10}}{4^4 \cdot 25 \cdot 36^{10} - 4^5 \cdot 6^{19} \cdot 35}$; (c) $\frac{880 \cdot (15^2 \cdot 3^{18} + 27^7)}{4^2 \cdot 15^4 \cdot 3^{16} - 2^4 \cdot 9^{11}}$.

Bài toán 2.10 (Bình et al., 2021, 5.4, p. 41). Rút gọn: (a) $M = \frac{4024 \cdot 2014 - 2}{2011 + 2012 \cdot 2013}$; (b) $N = \frac{2012 \cdot 2013 + 2014}{2010 - 2012 \cdot 2015}$; (c) $P = \frac{66666 \cdot 87564 - 33333}{22222 \cdot 87560 + 77777}$.

Bài toán 2.11 (Bình et al., 2021, 5.5, p. 41). Rút gọn các phân thức sau: (a) $Q = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + x - 12}$; (b) $R = \frac{3x^2 + 5xy - 2y^2}{3x^2 - 7xy + 2y^2}$; (c) $S = \frac{x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36}{x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12}$; (d) $T = \frac{x^6 - y^6}{x^6 + 2x^4y^2 + 2x^2y^4 + y^6}$.

Bài toán 2.12 (Bình et al., 2021, 5.6, pp. 41–42). Rút gọn: (a) $A = \frac{a^4 - 5a^2 + 4}{a^4 - a^2 + 4a - 4}$; (b) $B = \frac{a^3 - 3a + 2}{2a^3 - 7a^2 + 8a - 3}$; (c) $C = \frac{a^2 - 2ab + b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca}$; (d) $D = \frac{a^3 - 7a + 6}{a^2(a+3)^3 - 4a(a+3)^3 + 4(a+3)^3}$; (e) $E = \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}$.

Bài toán 2.13 (Bình et al., 2021, 5.7, p. 42). Rút gọn các phân thức sau: (a) $A = \frac{xy^2 - xz^2 - y^3 + yz^2}{x^2(z-y) + y^2(x-z) + z^2(y-x)}$; (b) $B = \frac{x^4(y^2 - z^2) + y^4(z^2 - x^2) + z^4(x^2 - y^2)}{x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)}$.

Bài toán 2.14 (Bình et al., 2021, 5.8, p. 42). Rút gọn các phân thức sau: (a) $A = \frac{(x+y+z)^2 - 3xy - 3yz - 3zx}{9xyz - 3x^3 - 3y^3 - 3z^3}$; (b) $B = \frac{x^3 - y^3 + z^3 + 3xyz}{(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z-x)^2}$; (c) $C = \frac{(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3}{(x^2 - y^2)^3 + (y^2 - z^2)^3 + (z^2 - x^2)^3}$.

Bài toán 2.15 (Bình et al., 2021, 5.9, p. 42). Rút gọn các phân thức sau với $n \in \mathbb{N}^*$: (a) $\frac{(n+2)!}{n!(n+2)(n+3)}$; (b) $\frac{n!}{n! + (n-1)!}$; (c) $\frac{(n+3)! - (n+2)!}{(n+2)! + (n+3)!}$.

Bài toán 2.16 (Bình et al., 2021, 5.10, p. 42). Chứng minh các phân số sau là tối giản $\forall n \in \mathbb{N}$: (a) $\frac{3n+2}{4n+3}$; (b) $\frac{12n+1}{2(10n+1)}$; (c) $\frac{2n+3}{2n^2+4n+1}$.

Bài toán 2.17 (Bình et al., 2021, 5.11, p. 42). Chứng minh phân số $\frac{n^7+2n^2+n+2}{n^8+n^2+2n+2}$ không tối giản, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Bài toán 2.18 (Bình et al., 2021, 5.12, p. 42). Viết gọn biểu thức sau dưới dạng 1 phân thức: $P = (x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)(x^{16} - x^8 + 1)(x^{32} + x^{16} + 1)$.

Bài toán 2.19 (Bình et al., 2021, 5.13, p. 42). Rút gọn phân thức: (a) $\frac{|x-2|+|x-1|+x}{2x^2-7x+3}$ với $x < 1$; (b) $\frac{|x-4||x-5|}{x^3-9x^2+20x}$ với $4 < x < 5$.

Bài toán 2.20 (Bình et al., 2021, 5.14, p. 43). Rút gọn các phân thức sau: (a) $T = \frac{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)+1}{x^2+7x+11}$; (b) $U = \frac{x^3-53x+88}{(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+16}$.

Bài toán 2.21 (Bình et al., 2021, 5.15, p. 43). Cho $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ & $x, y, z \neq 0$. Chứng minh: $\frac{x^2+y^2+z^2}{(ax+by+cz)^2} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}$.

Bài toán 2.22 (Bình et al., 2021, 5.16, p. 43). Cho $ax+by+cz = 0$. Rút gọn phân thức: $V = \frac{ax^2+by^2+cz^2}{bc(y-z)^2+ca(z-x)^2+ab(x-y)^2}$.

Bài toán 2.23 (Bình et al., 2021, 5.17, p. 43). Cho $x+y+z = 0$. Chứng minh: $\frac{9(x^2+y^2+z^2)}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2} = 3$.

Bài toán 2.24 (Bình et al., 2021, 5.18, p. 43). Chứng minh: $\frac{x^2+y^2-z^2-2zt+2xy-t^2}{x+y-z-t} = \frac{x^2-y^2+z^2-2zt+2xz-t^2}{x-y+z-t}$.

Bài toán 2.25 (Bình et al., 2021, 5.19, p. 43). Rút gọn: $X = \frac{(2^4+4)(6^4+4)(10^4+4)(14^4+4)}{(4^4+4)(8^4+4)(12^4+4)(16^4+4)}$.

Bài toán 2.26 (Tuyên, 2022, Ví dụ 16, p. 38). Cho $\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{5}{8}$, rút gọn phân thức $P = \frac{x^2-2xy+y^2}{x^2+2xy+y^2}$.

Giải. $\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{5}{8} \Rightarrow x^2+y^2 = \frac{8}{5}xy \Rightarrow P = \frac{\frac{8}{5}xy-2xy}{\frac{8}{5}xy+xy} = \frac{(\frac{8}{5}-2)xy}{(\frac{8}{5}+2)xy} = \frac{\frac{8}{5}-2}{\frac{8}{5}+2} = -\frac{1}{9}$. \square

Bài toán 2.27 (Tuyên, 2022, 151., p. 38). So sánh: (a) $A = \frac{201-200}{201+200}$ & $B = \frac{201^2-200^2}{201^2+200^2}$. (b) $C = \frac{1999 \cdot 4001 + 2000}{2000 \cdot 4001 - 2001}$ & $D = \frac{1501 \cdot 1503 - 1500 \cdot 1498}{6002}$.

Giải. (a) Có $A = \frac{201-200}{201+200} = \frac{(201-200)(201+200)}{(201+200)^2} = \frac{201^2-200^2}{201^2+2 \cdot 200 \cdot 201+200^2} < \frac{201^2-200^2}{201^2+200^2} = B$. (b) Đặt $x := 2000$, $y := 1500$. $C = \frac{(x-1)(2x+1)+x}{x(2x+1)-(x+1)} = \frac{2x^2-1}{2x^2-1} = 1$. $D = \frac{(y+1)(y+3)-y(y-2)}{4y+2} = \frac{3(2y+1)}{2(2y+1)} = \frac{3}{2}$. Suy ra $C < D$. \square

Bài toán 2.28 (Mở rộng Tuyên, 2022, 151. (a), p. 38). Biện luận theo các tham số $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq -b$, $(a, b) \neq (0, 0)$ để so sánh $A = \frac{a-b}{a+b}$ & $B = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

Giải. $A - B = \frac{a-b}{a+b} - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \frac{(a-b)(a^2+b^2)-(a+b)(a^2-b^2)}{(a+b)(a^2+b^2)} =$. \square

Bài toán 2.29 (Tuyên, 2022, 152., p. 39). Chứng minh: $\forall n \in \mathbb{N}$, (a) Phân số $A = \frac{n^3-1}{n^5+n+1}$ không tối giản; (b) Phân số $B = \frac{6n+1}{8n+1}$ tối giản; (c) Phân số $C = \frac{10n^2+9n+4}{20n^2+20n+9}$ tối giản. Có thể mở rộng từ \mathbb{N} lên \mathbb{Z} được không?

Bài toán 2.30 (Tuyên, 2022, 153., p. 39). Viết mỗi đa thức sau dưới dạng 1 phân thức đại số với tử & mẫu là những đa thức có 2 hạng tử: (a) $A = \sum_{i=0}^{19} x^i = x^{19} + x^{18} + x^{17} + \dots + x + 1$; (b) $B = (x+1)(x^2+1)(x^4+1) \dots (x^{32}+1)$.

Bài toán 2.31 (Tuyên, 2022, 154., p. 39). Rút gọn các phân thức: (a) $A = \frac{n!}{(n-1)!(n+1)}$; (b) $\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}$.

Bài toán 2.32 (Tuyên, 2022, 155., p. 39). *Rút gọn các phân thức:*

$$(a) A = \frac{(x^2 - y)(y + 1) + x^2 y^2 - 1}{(x^2 + y)(y + 1) + x^2 y^2 + 1}; (b) B = \frac{x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)}{x^2 y - x^2 z + y^2 z - y^3}.$$

Bài toán 2.33 (Tuyên, 2022, 156., p. 39). *Rút gọn các phân thức:* (a) $\frac{x^4 - 4x^2 + 3}{x^4 + 6x^2 - 7}$; (b) $\frac{x^4 + x^3 - x - 1}{x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1}$; (c) $\frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 - 3x + 2}$.

Bài toán 2.34 (Tuyên, 2022, 157., p. 39). *Rút gọn các phân thức:* (a) $\frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^3 + 8x^2 + 17x + 10}$; (b) $\frac{x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 1}{x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1}$.

Bài toán 2.35 (Tuyên, 2022, 158., p. 39). *Cho $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, rút gọn phân thức $P = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(ax + by + cz)^2}$.*

Bài toán 2.36 (Tuyên, 2022, 159., p. 40). *Cho $x + y + z = 0$, và $x, y, z \neq 0$, rút gọn các phân thức sau:*

$$(a) P = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2}; (b) Q = \frac{(x^2 + y^2 - z^2)(y^2 + z^2 - x^2)(z^2 + x^2 - y^2)}{16xyz}.$$

Bài toán 2.37 (Tuyên, 2022, 160., p. 40). *Cho $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$, rút gọn phân thức $P = \frac{xyz}{(x + y)(y + z)(z + x)}$.*

2.2 Các Phép Toán về Phân Thức Đại Số

Tài liệu

Bình, Vũ Hữu et al. (2021). *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 8. Tập 1: Đại Số*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 264.

Tuyên, Bùi Văn (2022). *Bài Tập Nâng Cao và Một Số Chuyên Đề Toán 8*. Tái bản lần thứ 17. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 326.