

# Bến Tre Mathematical Olympiad

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 3 tháng 7 năm 2023

## Tóm tắt nội dung

## Mục lục

1 Thành Phố Bến Tre 2022–2023	1
2 Bến Tre 2022–2023	1

## 1 Thành Phố Bến Tre 2022–2023

**Bài toán 1.** Cho biểu thức:

$$A = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} + \frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}} \text{ với } a > 0, a \neq 1.$$

(a) Chứng minh  $A > 4$ . (b) Tìm các giá trị của  $a$  để biểu thức  $\frac{6}{A}$  nhận giá trị nguyên.

**Bài toán 2.** Phân tích đa thức thành nhân tử:  $x^2(y-2z) + y^2(z-x) + 2z^2(x-y) + xyz$ .

**Bài toán 3.** (a) Giải phương trình:  $(x^2 - 4x + 11)(x^4 - 8x^2 + 21) = 35$ . (b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = (x+2)(y+2), \\ \left(\frac{x}{y+2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x+2}\right)^2 = 1. \end{cases}$$

**Bài toán 4.** (a) Tìm tất cả các số tự nhiên  $n$  để  $B = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + 1$  là số nguyên tố. (b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$C = \frac{\sqrt{x+6\sqrt{x-9}} + \sqrt{x-6\sqrt{x-9}}}{\sqrt{\frac{81}{x^2} - \frac{18}{x}} + 1} \text{ với } x > 9.$$

**Bài toán 5.** Cho  $\triangle ABC$  nhọn, 3 đường cao  $AK, BD, CE$  cắt nhau tại  $H$ . (a) Chứng minh  $BH \cdot BD = BC \cdot BK$  &  $BH \cdot BD + CH \cdot CE = BC^2$ . (b) Chứng minh:  $BH = AC \cot \widehat{ABC}$ . (c) Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Đường thẳng qua  $A$  vuông góc với  $AM$  cắt các đường thẳng  $BD, CE$  lần lượt tại  $Q, P$ . Chứng minh  $MP = MQ$ .

## 2 Bến Tre 2022–2023