

Integer – Số Nguyên \mathbb{Z}

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 22 tháng 12 năm 2022

Tóm tắt nội dung

[EN] This text is a collection of problems, from easy to advanced, about integer. This text is also a supplementary material for my lecture note on Elementary Mathematics grade 6, which is stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 6/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_6/lecture)¹. The latest version of this text has been stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 6/integer](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_6/integer)².

[VI] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài tập chọn lọc từ cơ bản đến nâng cao về số nguyên. Tài liệu này là phần bài tập bổ sung cho tài liệu chính – bài giảng [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 6/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_6/lecture) của tác giả viết cho Toán Sơ Cấp lớp 6. Phiên bản mới nhất của tài liệu này được lưu trữ & có thể tải xuống ở link sau: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 6/integer](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_6/integer).

Mục lục

1 Tập Hợp \mathbb{Z} Các Số Nguyên. Thứ Tự Trên \mathbb{Z}	2
2 \pm Trên \mathbb{Z}	3
3 Quy Tắc Dấu Ngoặc	6
4 $., :$ Trên \mathbb{Z}	6
5 Tính Chia hết Trên \mathbb{Z}. Bội & Ước của 1 Số Nguyên	8
6 Điền Chữ Số	9
7 Dãy Các Số Viết Theo Quy Luật	11
7.1 Dãy cộng	11
7.2 Các dãy khác	12
8 Đếm số	13
9 Miscellaneous	15
Tài liệu	15

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam

e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

¹URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_6/NQBH_elementary_mathematics_grade_6.pdf.

²URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_6/integer/NQBH_integer.pdf.

1 Tập Hợp \mathbb{Z} Các Số Nguyên. Thứ Tự Trên \mathbb{Z}

“**1.** Tập hợp $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ gồm có số 0, các số $1, 2, 3, \dots$ (số nguyên dương) & các số $-1, -2, -3, \dots$ (số nguyên âm) được gọi là *tập hợp các số nguyên*, ký hiệu là \mathbb{Z} . **2.** *Biểu diễn trên trục số*: Điểm biểu diễn số nguyên $a \in \mathbb{Z}$ được gọi là *điểm a* . **3.** *Số đối*: Cho $a \in \mathbb{Z}$, trên trục số, 2 điểm a & $-a$ (viết gom lại là $\pm a$) cách đều điểm gốc 0. Ta nói a & $-a$ là 2 số đối nhau. Tính chất: $a + (-a) = (-a) + a = a - a = 0$, $|a| = |-a|$, $\forall a \in \mathbb{Z}$. **4.** *Thứ tự trong \mathbb{Z}* : Trên trục số, điểm a nằm bên trái điểm b thì $a < b$ hay $b > a$. Suy ra: số nguyên âm $< 0 <$ số nguyên dương, i.e., $-a < 0 < b$, $\forall a, b \in \mathbb{N}^*$. Có $a > b \Leftrightarrow -a < -b$, $a = b \Leftrightarrow -a = -b$, $\forall a, b \in \mathbb{N}^*$.” – Tuyên, 2022, Chap. II, §1, p. 35

Ký hiệu “or”/“hoặc”, ký hiệu “and”/“&”:

$$\begin{cases} A \\ B \end{cases} \text{ hay } A \vee B \text{ nghĩa là } A \text{ hoặc } B; \begin{cases} A \\ B \end{cases} \text{ hay } A \wedge B \text{ nghĩa là } A \text{ \& } B.$$

E.g., các mệnh đề chứa phép so sánh:

$$\begin{aligned} x > a \text{ hoặc } x < b &\Leftrightarrow x > a \vee x < b \Leftrightarrow \begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases}; x \geq a \text{ hoặc } x < b \Leftrightarrow x \geq a \vee x < b \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a \\ x < b \end{cases}; \\ x > a \text{ hoặc } x \leq b &\Leftrightarrow x > a \vee x \leq b \Leftrightarrow \begin{cases} x > a \\ x \leq b \end{cases}; x \geq a \text{ hoặc } x \leq b \Leftrightarrow x \geq a \vee x \leq b \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a \\ x \leq b \end{cases}. \end{aligned}$$

“Tập hợp \mathbb{Z} các số nguyên gồm các số tự nhiên & các số $-1, -2, -3, \dots$. $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Ta xác định trên \mathbb{Z} 1 thứ tự như sau: $a < b$ khi & chỉ khi điểm a ở bên trái điểm b trên trục số ($a, b \in \mathbb{Z}$). Ta xác định trên \mathbb{Z} 2 phép toán: phép cộng & phép nhân. Phép cộng có 4 tính chất: giao hoán, kết hợp, cộng với số 0, cộng với số đối. Phép nhân có 3 tính chất: giao hoán, kết hợp, nhân với số 1. Giữa phép nhân & phép cộng có quan hệ: phép nhân phân phối đối với phép cộng. Giữa thứ tự & phép toán có quan hệ: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$, $a < b \Rightarrow ac < bc$ với $c > 0$, $ac > bc$ với $c < 0$. Trừ đi 1 số là cộng với số đối của số trừ. Phép trừ 2 số nguyên bao giờ cũng thực hiện được³. Phép chia chỉ thực hiện được trong phạm vi số nguyên khi số bị chia chia hết cho số chia. Trong trường hợp $a : b$, ta nói: a là bội của b & b là ước của a . Ước chung (hoặc bội chung) của 2 hay nhiều số là ước (hoặc bội) của tất cả các số đó.” – Bình, 2022, Chap. II, p. 41

Bài toán 1 (Tuyên, 2022, Ví dụ 38, p. 35). *Viết tập hợp 3 số nguyên liên tiếp trong đó có số 0.*

Phân tích. Có 3 vị trí cho số 0: đầu, giữa, cuối.

Giải. Tập hợp 3 số số nguyên liên tiếp trong đó có số 0: $\{0, 1, 2\}, \{-1, 0, 1\}, \{-2, -1, 0\}$. □

Bài toán 2 (Mở rộng Tuyên, 2022, Ví dụ 38, p. 35). *Viết tập hợp 3 số nguyên liên tiếp trong đó có số $a \in \mathbb{Z}$ cho trước.*

Phân tích. Có 3 vị trí cho số a : đầu, giữa, cuối. Bài toán 1 là 1 trường hợp riêng của bài toán này với $a = 0$.

Giải. Tập hợp 3 số số nguyên liên tiếp trong đó có số 0: $\{a, a+1, a+2\}, \{a-1, a, a+1\}, \{a-2, a-1, a\}$. □

Bài toán 3 (Mở rộng Tuyên, 2022, Ví dụ 38, p. 35). *Cho trước $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ & $a \in \mathbb{Z}$. Viết tập hợp n số nguyên liên tiếp trong đó có số a .*

Phân tích. Có n vị trí cho số a : 1st, 2nd, 3rd, ..., nth. Bài toán 1 là 1 trường hợp riêng của bài toán này với $n = 3$ & $a = 0$. Bài toán 2 là 1 trường hợp riêng của bài toán này với $n = 3$.

Giải. Tập hợp n số số nguyên liên tiếp trong đó có số 0: $\{a, a+1, \dots, a+n-1\}, \{a-1, a, \dots, a+n-2\}, \dots, \{a-n+1, \dots, a-1, a\}$. (Có thể viết gọn n tập hợp này lại thành 1 công thức duy nhất: $\{a-k, a-k+1, \dots, a-k+n-1\}, \forall k = 0, 1, \dots, n-1$.) □

Bài toán 4 (Tuyên, 2022, Ví dụ 39, p. 36). *Cho 3 số nguyên khác nhau $a, b, 0$. Biết a là 1 số âm & $a < b$. Sắp xếp các số đó theo thứ tự tăng dần.*

Giải. Nếu b là số nguyên âm thì $a < b < 0$. Nếu b là số nguyên dương thì $a < 0 < b$. □

Bài toán 5 (Mở rộng Tuyên, 2022, Ví dụ 39, p. 36). *Cho 3 số nguyên khác nhau $a, b, 0$ & $a < b$. Sắp xếp các số đó theo thứ tự tăng dần.*

Giải. Nếu $a > 0$ thì $0 < a < b$. Nếu $b < 0$ thì $a < b < 0$. Nếu $a < 0$ & $b > 0$ thì $a < 0 < b$. □

³Phép trừ 2 số tự nhiên sẽ không thực hiện được (i.e., kết quả không phải là 1 số tự nhiên, hay không còn nằm trong \mathbb{N}) nếu số bị trừ nhỏ hơn số trừ.

Bài toán 6 (Tuyên, 2022, 177., p. 36). Số nguyên âm & số nguyên dương thường được sử dụng để biểu thị các đại lượng có 2 hướng ngược nhau. Điền cho đủ các câu sau: (a) Nếu $+8^\circ\text{C}$ biểu diễn nhiệt độ 8°C trên 0°C thì -8°C biểu diễn nhiệt độ (b) Nếu $+8848\text{m}$ biểu diễn độ cao của đỉnh núi Everest là 8848m trên mực nước biển thì ... biểu diễn độ sâu của thềm lục địa Việt Nam là 65m dưới mực nước biển. (c) Nếu -3 biểu diễn số tầng ngầm dưới mặt đất của 1 chung cư thì $+27$ biểu diễn

Bài toán 7 (Tuyên, 2022, 178., p. 36). Các suy luận sau đúng hay sai? (a) Nếu $a \in \mathbb{N}$ thì $a \in \mathbb{Z}$. (b) Nếu $a \in \mathbb{Z}$ thì $a \in \mathbb{N}$. (c) Nếu $a \notin \mathbb{Z}$ thì $a \notin \mathbb{N}$.

Bài toán 8 (Tuyên, 2022, 179., p. 36). Trên trục số, điểm A cách gốc 2 đơn vị về bên trái, điểm B cách A là 3 đơn vị. Hỏi: (a) Điểm A biểu diễn số nguyên nào? (b) Điểm B biểu diễn số nguyên nào?

Bài toán 9 (Mở rộng Tuyên, 2022, 179., p. 36). Cho trước $a, b \in \mathbb{N}$. Trên trục số, điểm A cách gốc a đơn vị về bên trái, điểm B cách A là b đơn vị. Hỏi: (a) Điểm A biểu diễn số nguyên nào? (b) Điểm B biểu diễn số nguyên nào?

Bài toán 10 (Tuyên, 2022, 180., p. 36). Cho dãy số $15, -4, 0, -76, 100, 99$. (a) Sắp xếp các số trong dãy theo thứ tự giảm dần. (b) Sắp xếp số đối của các số trong dãy theo thứ tự tăng dần.

Bài toán 11 (Tuyên, 2022, 181., p. 36). Viết 4 số nguyên liên tiếp trong đó có số 0.

Bài này là 1 trường hợp riêng của Bài toán 3 với $n = 4$ & $a = 0$.

Bài toán 12 (Tuyên, 2022, 182., p. 36). Viết tập hợp các số nguyên x sao cho: (a) $-4 < x < 3$; (b) $-2 \leq x \leq 2$.

Bài toán 13 (Tuyên, 2022, 183., p. 36). Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} | x > -9\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} | x < -4\}$, $C = \{x \in \mathbb{Z} | x \geq -2\}$. Tìm x sao cho: (a) $x \in A$ & $x \in B$; (b) $x \in B$ & $x \in C$; (c) $x \in C$ & $x \in A$.

Bài toán 14 (Tuyên, 2022, 184., p. 36). Số nguyên âm lớn nhất có 3 chữ số & số nguyên âm nhỏ nhất có 2 chữ số có phải là 2 số nguyên liên nhau không?

Giải. Số nguyên âm lớn nhất có 3 chữ số: -100 . Số nguyên âm nhỏ nhất có 2 chữ số: -99 . $-100, -99$ là 2 số nguyên liên nhau/liên tiếp. \square

Bài toán 15 (Tuyên, 2022, 185., p. 36). Tìm các giá trị thích hợp của a, b : (a) $\overline{a00} > -111$; (b) $-\overline{a99} > -600$; (c) $-\overline{cb3} < -\overline{cba}$; (d) $-\overline{cab} < -\overline{c85}$.

Giải. (a) Có $\overline{a00} > 0 > -111$, $\forall a \in \{1, 2, \dots, 9\}$. (b) $-\overline{a99} > -600 \Leftrightarrow \overline{a99} < 600 \Leftrightarrow a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. (c) $-\overline{cb3} < -\overline{cba} \Leftrightarrow \overline{cb3} > \overline{cba} \Rightarrow 3 > a \Rightarrow a \in \{0, 1, 2\}$ (với $b \in \{0, 1, \dots, 9\}$, $c \in \{1, 2, \dots, 9\}$ tùy ý). (d) $-\overline{cab} < -\overline{c85} \Leftrightarrow \overline{cab} > \overline{c85} \Leftrightarrow \overline{ab} \in \{86, 87, \dots, 99\}$ (với $c \in \{1, 2, \dots, 9\}$ tùy ý). \square

Bài toán 16 (Bình, 2022, Ví dụ 48, p. 41). Cho $a \in \mathbb{Z}$. Gọi khoảng cách từ điểm a đến điểm gốc trên trục số là giá trị tuyệt đối của số a & ký hiệu là $|a|$. Điền vào chỗ trống các dấu $\geq, \leq, >, <, =$ để các khẳng định sau là đúng: (a) $|a| \dots a$, $\forall a \in \mathbb{Z}$. (b) $|a| \dots 0$, $\forall a \in \mathbb{Z}$. (c) Nếu $a > 0$ thì $a \dots |a|$. (d) Nếu $a = 0$ thì $a \dots |a|$. (e) Nếu $a < 0$ thì $a \dots |a|$.

Bài toán 17 (Bình, 2022, 247., p. 42). Điền vào chỗ trống ... các từ “nhỏ hơn” hoặc “lớn hơn” cho đúng: (a) Mọi số nguyên dương đều ... số 0. (b) Mọi số nguyên âm đều ... số 0. (c) Mỗi số nguyên dương đều ... mọi số nguyên âm. (d) Trong 2 số nguyên dương, số nào có giá trị tuyệt đối lớn hơn thì số ấy ... (e) Trong 2 số nguyên âm, số nào có giá trị tuyệt đối lớn hơn thì số ấy ...

Bài toán 18 (Bình, 2022, 248., p. 42). Tìm: (a) Số nguyên dương lớn nhất có 2 chữ số. (a) Số nguyên âm lớn nhất có 2 chữ số.

Bài toán 19 (Bình, 2022, 249., p. 42). Tính $|b| - |a|$ biết: (a) $a = -3$, $b = 7$; (b) $a = 5$, $b = -6$; (c) $a = 5$, $b = -5$;

Bài toán 20 (Bình, 2022, 250., p. 42). Các khẳng định sau có đúng $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ hay không? Cho ví dụ. (a) $|a| = |b| \Rightarrow a = b$. (b) $a > b \Rightarrow |a| > |b|$.

2 ± Trên \mathbb{Z}

“1. Cộng 2 số nguyên cùng dấu. • Muốn cộng 2 số nguyên dương, ta cộng chúng như cộng 2 số tự nhiên. Muốn cộng 2 số nguyên âm, ta cộng 2 số đối của chúng rồi thêm dấu trừ – đằng trước. $(+a) + (+b) = a + b$, $(-a) + (-b) = -(a + b)$, $\forall a, b \in \mathbb{N}^*$. 2. Cộng 2 số nguyên khác dấu. • Tổng 2 số nguyên đối nhau thì bằng 0: $a + (-a) = a - a = 0$, $\forall a \in \mathbb{Z}$. • Cộng 2 số nguyên khác dấu không đối nhau: Với 2 số nguyên dương a, b : $\circ a > b \Rightarrow a + (-b) = a - b$. $\circ a < b \Rightarrow a + (-b) = -(b - a)$. 3. Tính chất của phép cộng 2 số nguyên. Các tính chất của phép cộng trong \mathbb{N} vẫn còn đúng trong \mathbb{Z} . Khi thực hiện cộng nhiều số nguyên ta có thể thay đổi tùy ý thứ tự các số hạng, nhóm các số hạng 1 cách tùy ý. 4. Phép trừ 2 số nguyên. Muốn lấy số nguyên a trừ đi số nguyên b ta cộng a với số đối của b : $a - b = a + (-b)$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$. 5. $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$, $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$.” – Tuyên, 2022, Chap. II, §2, p. 37

Bài toán 21 (Trọng et al., 2021, 9., p. 59). *Tính hợp lý: (a) $152 + (-73) - (-18) - 127$; (b) $7 + 8 + (-9) + (-10)$.*

Bài toán 22 (Trọng et al., 2021, 10., p. 59). *Tính giá trị của biểu thức $(-156) - x$ khi: (a) $x = -26$; (b) $x = 76$; (c) $x = (-28) - (-143)$.*

Bài toán 23 (Trọng et al., 2021, 11., p. 59). *Thay mỗi dấu \star bằng 1 chữ số thích hợp: (a) $(-\overline{6\star}) + (-34) = -100$; (b) $(-789) + \overline{2\star\star} = -515$.*

Bài toán 24 (Trọng et al., 2021, 12., p. 59). *Liệt kê các phần tử của tập hợp sau rồi tính tổng của chúng: (a) $A = \{x \in \mathbb{Z} | -5 < x < 5\}$; (b) $B = \{x \in \mathbb{Z} | -7 \leq x < 1\}$.*

Bài toán 25 (Mở rộng Trọng et al., 2021, 12., p. 59). *Cho trước $a, b \in \mathbb{Z}$. Liệt kê các phần tử của tập hợp sau rồi tính tổng của chúng: (a) $A = \{x \in \mathbb{Z} | a < x < b\}$; (b) $B = \{x \in \mathbb{Z} | a \leq x < b\}$; (c) $C = \{x \in \mathbb{Z} | a < x \leq b\}$; (d) $D = \{x \in \mathbb{Z} | a \leq x \leq b\}$; trong các trường hợp: (1) $a \geq b$; (2) $0 < a < b$; (3) $a < 0 < b$; (4) $a < b < 0$.*

Bài toán 26 (Tuyên, 2022, Ví dụ 40, p. 37). *Tính tổng $S = (-351) + (-74) + 51 + (-126) + 149$.*

1st giải. $S = [(-315) + (-74) + (-126)] + (51 + 149) = -551 + 200 = -351$. □

2nd giải. $S = [(-351) + 51] + [(-74) + (-126)] + 149 = (-300) + (-200) + 149 = -500 + 149 = -351$. □

Nhận xét 2.1. “Trong 1st Giải, để cộng nhiều số ta cộng số âm với số âm, số dương với số dương rồi cộng 2 kết quả với nhau. Cách này có ưu điểm là đỡ nhầm dấu. Trong 2nd Giải, ta kết hợp từng nhóm có tổng là 1 số tròn trăm. Cách giải này có ưu điểm là có thể nhầm ra kết quả.” – Tuyên, 2022, p. 37

Bài toán 27 (Tuyên, 2022, Ví dụ 41, p. 38). *Với $a, b \in \mathbb{Z}$, chứng minh $a - b$ & $b - a$ là 2 số đối nhau.*

Phân tích. Để chứng minh 2 số đối nhau ta chứng minh tổng của chúng bằng 0.

1st giải. Có $(a - b) + (b - a) = a - b + b - a = (a - a) + (b - b) = 0 + 0 = 0$. □

2nd giải. Có $(a - b) + (b - a) = [a + (-b)] + [b + (-a)] = [a + (-a)] + [b + (-b)] = 0 + 0 = 0$. □

Nhận xét 2.2. “Do $a - b$ & $b - a$ là 2 số đối nhau nên nếu biết hiệu $a - b$ thì không cần làm phép trừ ta cũng tính được $b - a$ 1 cách nhanh chóng.” – Tuyên, 2022, p. 38

Bài toán 28 (Tuyên, 2022, 186., p. 38). *Tính nhanh: (a) $-37 + 54 + (-70) + (-163) + 246$; (b) $-359 + 181 + (-123) + 350 + (-172)$; (c) $-69 + 53 + 46 + (-94) + (-14) + 78$.*

Giải. (a) $-37 + 54 + (-70) + (-163) + 246 = (54 + 246) + [(-37) + (-163)] + (-70) = 300 + (-200) + (-70) = 100 - 70 = 30$.
(b) *Cách 1:* $-359 + 181 + (-123) + 350 + (-172) = (181 + 350) + [-359 + (-172)] + (-123) = 531 + (-531) + (-123) = 0 - 123 = -123$. *Cách 2:* $-359 + 181 + (-123) + 350 + (-172) = (350 - 359) + (181 - 172) - 123 = -9 + 9 - 123 = 0 - 123 = 0$.
(c) $-69 + 53 + 46 + (-94) + (-14) + 78 = [-69 + (-94) + (-14)] + (53 + 46 + 78) = -177 + 177 = 0$. □

Bài toán 29 (Tuyên, 2022, 187., p. 38). *Tính tổng các số nguyên x biết: $-17 \leq x \leq 18$.*

Giải. $x \in \mathbb{Z} \wedge (-17 \leq x \leq 18) \Leftrightarrow x \in \{-17, -16, \dots, -1, 0, 1, \dots, 18\}$. Tổng của chúng bằng $(-17) + (-16) + \dots + (-1) + 0 + 1 + \dots + 16 + 17 + 18 = (-17 + 17) + (-16 + 16) + \dots + (-1 + 1) + 0 + 18 = 0 + 0 + \dots + 0 + 0 + 18 = 18$. □

Bài toán 30 (Tuyên, 2022, 188., p. 38). *Cho $S_1 = 1 + (-3) + 5 + (-7) + \dots + 17$, $S_2 = -2 + 4 + (-6) + 8 + \dots + (-18)$. Tính $S_1 + S_2$.*

Bài toán 31 (Tuyên, 2022, 189., p. 38). *Cho $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, 10\}$, $y \in \{-1, 0, 1, 2, \dots, 5\}$. Biết $x + y = 3$, tìm x, y .*

Bài toán 32 (Tuyên, 2022, 190., p. 38). *1 thủ quỹ ghi số tiền thu chi trong ngày (đơn vị là nghìn đồng) như sau: $+7250, +13485, -10964, +5000, -1380, +24750, -9771$. Đầu ngày trong két có 500 (nghìn đồng). Hỏi cuối ngày trong két có bao nhiêu?*

Bài toán 33 (Tuyên, 2022, 191., p. 38). *Chứng minh số đối của tổng 2 số bằng tổng 2 số đối của chúng.*

Giải. Có $-(a + b) = -a - b = (-a) + (-b)$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$. □

Bài toán 34 (Mở rộng Tuyên, 2022, 191., p. 38). *Chứng minh số đối của tổng n số bằng tổng n số đối của chúng với $n \in \mathbb{N}^*$ cho trước.*

Giải. Có $-(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = -a_1 - a_2 - \dots - a_n = (-a_1) + (-a_2) + \dots + (-a_n)$, $\forall a_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$. □

Bài toán 35 (Tuyên, 2022, 192., p. 38). Cho 18 số nguyên sao cho tổng của 6 số bất kỳ trong các số đó đều là 1 số âm. Giải thích vì sao tổng của 18 số đó cũng là 1 số âm. Bài toán còn đúng không nếu thay 18 số bởi 19 số?

Bài toán 36 (Tuyên, 2022, 193., p. 38). Cho $x = \pm 5$, $y = \pm 11$ với $x, y \in \mathbb{Z}$. Tính $x + y$.

Bài toán 37 (Tuyên, 2022, 194., p. 38). Cho $x = \pm 7$, $y = \pm 20$ với $x, y \in \mathbb{Z}$. Tính $x - y$.

Bài toán 38 (Tuyên, 2022, 195., p. 38). Cho $-3 \leq x \leq 3$ & $-5 \leq y \leq 5$ với $x, y \in \mathbb{Z}$. Biết $x - y = 2$, tìm x, y .

Bài toán 39 (Tuyên, 2022, 196., p. 38). Cho $x \in \{-2, -1, 0, 1, \dots, 11\}$, $y \in \{-89, -88, -87, \dots, -1, 0, 1\}$. Tìm giá trị lớn nhất (GTLN) & giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hiệu $x - y$.

Bài toán 40 (Tuyên, 2022, 197., p. 38). Quan sát các số sau & các số còn thiếu (?) để tìm giá trị của x :

$$\begin{array}{cccc} 40 & 32 & 21 & 15 \\ 8 & ? & & 6 \\ & ? & ? & \\ & & x & \end{array}$$

Bài toán 41 (Bình, 2022, Ví dụ 49, p. 42). Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết $10 = 10 + 9 + 8 + \dots + x$, trong đó vế phải là tổng các số nguyên liên tiếp viết theo thứ tự giảm dần.

Bài toán 42 (Bình, 2022, 251., p. 42). Tìm tổng của số nguyên âm nhỏ nhất có 1 chữ số & số nguyên dương lớn nhất có 1 chữ số.

Bài toán 43 (Bình, 2022, 252., p. 42). Điền vào chỗ trống cho đúng: (a) Số đối của 1 số nguyên âm là 1 số ... (b) 2 số nguyên đối nhau thì có giá trị tuyệt đối ... (c) 2 số nguyên có giá trị tuyệt đối bằng nhau thì ... (d) Số ... thì nhỏ hơn số đối của nó. (e) Nếu $a \dots$ thì $-a > 0$. (f) Nếu $a < 0$ thì $|a| = \dots$ (g) Nếu $a < 0$ thì $a + |a| = \dots$

Bài toán 44 (Bình, 2022, 253., p. 43). Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết: (a) $x + 13 = 5$. (b) $x - 1 = -9$. (c) $25 - |x| = 10$. (d) $|x - 2| + 7 = 12$. (e) $x + 4$ là số nguyên dương nhỏ nhất. (f) $10 - x$ là số nguyên âm lớn nhất.

Bài toán 45 (Bình, 2022, 254., p. 43). (a) Cho bảng vuông 3×3 ô:

-8	7	
5		9
	5	-6

Điền số vào các ô trống sao cho tổng các số ở 3 dòng 1, 2, 3 lần lượt bằng -5, 11, 1. Tính tổng các số ở mỗi cột.

(b) Cho bảng vuông 3×3 ô. Có thể điền được hay không 9 số nguyên vào 9 ô của bảng sao cho tổng các số ở 3 dòng lần lượt bằng 5, -3, 2 & tổng các số ở 3 cột lần lượt bằng -1, 2, 2?

Bài toán 46 (Bình, 2022, 255., p. 43). (a) Có 10 ô liên tiếp trong đó ô đầu tiên ghi số 6, ô thứ 8 ghi số -4. Điền số vào các ô trống để tổng 3 số ở 3 ô liên nhau bằng 0. (b) 1 bảng vuông 4×4 ô có 2 ô ở góc trên ghi số -3 & 2. Điền số vào các ô còn lại, sao cho tổng 2 số ở 2 ô liên nhau thì bằng nhau (2 ô liên nhau là 2 ô có 1 cạnh chung).

Bài toán 47 (Bình, 2022, 256., p. 43). Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết $x + (x + 1) + (x + 2) + \dots + 19 + 20 = 20$, trong đó vế trái là tổng các số nguyên liên tiếp viết theo thứ tự tăng dần.

Bài toán 48 (Bình, 2022, 257., p. 43). Tìm các số nguyên a sao cho: (a) $a > -a$. (b) $a = -a$. (c) $a < -a$.

Bài toán 49 (Bình, 2022, 258., p. 43). Tìm $a, b, c \in \mathbb{Z}$ biết: $a + b = 11$, $b + c = 3$, $c + a = 2$.

Bài toán 50 (Bình, 2022, 259., p. 43). Tìm $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ biết $a + b + c + d = 1$, $a + c + d = 2$, $a + b + d = 3$, $a + b + c = 4$.

Bài toán 51 (Bình, 2022, 260., p. 43). Cho $\sum_{i=1}^{51} x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_{50} + x_{51} = 0$ & $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = \dots = x_{47} + x_{48} = x_{49} + x_{50} = x_{50} + x_{51} = 1$. Tính x_{50} .

3 Quy Tắc Dấu Ngoặc

“**1. Quy tắc dấu ngoặc:** Khi bỏ dấu ngoặc có dấu “+” đằng trước, ta giữ nguyên dấu của các số hạng trong ngoặc. Khi bỏ dấu ngoặc có dấu “−” đằng trước, ta phải đổi dấu tất cả của các số hạng trong ngoặc. **2. Tổng đại số:** 1 dãy các phép tính cộng, trừ các số nguyên được gọi là 1 *tổng đại số* hay 1 *tổng*. Để viết gọn 1 tổng đại số ta làm như sau: (1) Thay các phép trừ bằng phép cộng với số đối. (2) Bỏ đi dấu của phép cộng & dấu ngoặc. (3) Đổi vị trí của các số hạng (nếu cần). **3. Quy tắc đặt dấu ngoặc:** Khi đặt dấu ngoặc có dấu “+” đằng trước ta giữ nguyên dấu của các số hạng đặt vào trong ngoặc. Khi đặt dấu ngoặc có dấu “−” đằng trước ta phải đổi dấu tất cả các số hạng đặt vào trong ngoặc.” – Tuyên, 2022, Chap. II, §3, p. 39

Bài toán 52 (Tuyên, 2022, Ví dụ 42, p. 39). Cho a là 1 số nguyên âm, còn $b, c \in \mathbb{Z}$. Chứng minh số $M = (-a + b) - (b + c - a) + (c - a)$ là 1 số nguyên dương.

Giải. $M = -a + b - b - c + a + c - a = (-a + a) + (b - b) + (-c + c) - a = -a > 0$ do $a < 0$. Hiển nhiên $M \in \mathbb{Z}$ vì M là 1 tổng (đại số) của các số nguyên. Vậy M là 1 số nguyên dương. \square

Bài toán 53 (Tuyên, 2022, 198., p. 39). Tính hợp lý: (a) $-2021 + (-22 + 87 + 2021)$; (b) $1152 - (374 + 1152) + (-65 + 374)$.

Bài toán 54 (Tuyên, 2022, 199., p. 39). Đặt dấu ngoặc 1 cách thích hợp để tính các tổng đại số sau: (a) $942 - 2567 + 2563 - 1942$; (b) $13 - 12 + 11 + 10 - 9 + 8 - 7 - 6 + 5 - 4 + 3 + 2 - 1$.

Bài toán 55 (Tuyên, 2022, 200., p. 39). Tìm $x \in \mathbb{Z}$ thỏa: (a) $461 + (x - 45) = 387$; (b) $11 - (-53 + x) = 97$; (c) $-(x + 84) + 213 = -16$.

Bài toán 56 (Tuyên, 2022, 201., p. 39). Chứng minh: $-(-a + b + c) + (b + c - 1) = (b - c + 6) - (7 - a + b) + c, \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 57 (Tuyên, 2022, 202., p. 40). Cho $a, b, c \in \mathbb{Z}$ & $A = a + b - 5, B = -b - c + 1, C = b - c - 4, D = b - a$. Chứng minh $A + B = C - D$.

Bài toán 58 (Tuyên, 2022, 203., p. 40). Cho $S = -(a - b + c) + (-c + b + a) - (a + b)$ trong đó $a > b$ & $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Chứng minh S là 1 số nguyên âm.

Bài toán 59 (Tuyên, 2022, 204., p. 40). Viết 5 số nguyên vào 5 đỉnh của 1 ngôi sao 5 cánh sao cho tổng của 2 số tại 2 đỉnh liền nhau luôn bằng -6 . Tìm 5 số nguyên đó.

Bài toán 60 (Tuyên, 2022, 205., p. 40). Cho 1001 số tự nhiên từ 1 đến 1001 sắp xếp theo thứ tự tùy ý. Lấy số thứ nhất trừ đi 1, lấy số thứ 2 trừ đi 2, lấy số thứ 3 trừ đi 3, ..., lấy số thứ 1001 trừ đi 1001. Tính tổng của 1001 số mới.

4 ·, : Trên \mathbb{Z}

“**1. Nhân 2 số nguyên cùng dấu:** Muốn nhân 2 số nguyên dương ta nhân chúng như nhân 2 số tự nhiên. Muốn nhân 2 số nguyên âm ta nhân 2 số đối của chúng. **2. Nhân 2 số nguyên khác dấu:** Với a, b là 2 số nguyên dương thì $(+a) \cdot (-b) = (-a) \cdot (+b) = -(ab) = -ab$. **3.** $a \cdot 1 = 1a = a, a \cdot 0 = 0a = 0, \forall a \in \mathbb{Z}. ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$. **4. Tính chất của phép nhân 2 số nguyên:** Các tính chất của phép nhân trong \mathbb{N} vẫn còn đúng trong \mathbb{Z} . Phép nhân các số nguyên còn có tính chất phân phối đối với phép trừ: $a(b - c) = ab - ac$. Trong phép nhân nhiều thừa số khác 0, nếu thừa số âm chẵn thì tích mang dấu “+”. Nếu thừa số âm lẻ thì tích mang dấu “−”. Khi đổi dấu 1 thừa số thì tích đổi dấu. Khi đổi dấu 2 thừa số thì tích không thay đổi. Tổng quát hơn, khi đổi dấu 1 số lẻ các thừa số thì tích đổi dấu & khi đổi dấu 1 số chẵn các thừa số thì tích không thay đổi. **5.** Lũy thừa bậc chẵn của 1 số âm là 1 số dương, i.e., $(-a)^{2n} > 0, \forall a, n \in \mathbb{N}, a \neq 0$. Lũy thừa bậc lẻ của 1 số âm là 1 số âm, i.e., $(-a)^{2n+1} < 0, \forall a, n \in \mathbb{N}, a \neq 0$. **6.** $a^2 \geq 0, \forall a \in \mathbb{Z}$ (dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = 0$).” – Tuyên, 2022, Chap. II, §4, p. 40

Bài toán 61 (Tuyên, 2022, Ví dụ 43, p. 40). Tìm $a, b \in \mathbb{Z}$ biết $ab = 24$ & $a + b = -10$.

Giải. Vì $ab > 0$ nên a, b cùng dấu, & vì $a + b < 0$ nên a, b cùng âm. Có $ab = 24 = (-1) \cdot (-24) = (-2) \cdot (-12) = (-3) \cdot (-8) = (-4) \cdot (-6)$. Trong các trường hợp trên chỉ có $(-4) + (-6) = -10$. Vậy $a = -4, b = -6$ hoặc $a = -6$ hoặc $b = -4$.⁴ \square

Nhận xét 4.1. “Trong ví dụ trên ta cũng có thể biểu diễn số -10 dưới dạng tổng của 2 số nguyên âm, i.e., $-10 = (-1) + (-9) = (-2) + (-8) = (-3) + (-7) = (-4) + (-6) = (-5) + (-5)$. Có tất cả 9 trường hợp. Xét 9 trường hợp này có 1 trường hợp có đáp số như trên. Cách này chưa hay vì phải xét nhiều trường hợp.” – Tuyên, 2022, p. 41

Bài toán 62 (Tuyên, 2022, Ví dụ 44, p. 41). Tìm tất cả các cặp số nguyên sao cho tổng bằng tích.

⁴Có thể viết gọn kết luận lại thành $\{a, b\} = \{-4, -6\}$, i.e., dùng tập hợp để không cần phân biệt thứ tự của a, b .

Giải. Gọi cặp số nguyên cần tìm là $x, y \in \mathbb{Z}$. Có

$$x + y = xy \Leftrightarrow xy - x - y + 1 = 1 \Leftrightarrow x(y - 1) - (y - 1) = 1 \Leftrightarrow (x - 1)(y - 1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y - 1 = x - 1 = 1, \\ y - 1 = x - 1 = -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2, \\ x = y = 0. \end{cases}$$

Vậy $(x, y) \in \{(0, 0), (2, 2)\}$. □

Bài toán 63 (Tuyên, 2022, 206., p. 41). Tìm $x \in \mathbb{Z}$ thỏa: (a) $x(x + 3) = 0$; (b) $(x - 2)(5 - x) = 0$; (c) $(x - 1)(x^2 + 1) = 0$.

Bài toán 64 (Tuyên, 2022, 207., p. 41). Thu gọn các biểu thức sau với $x, y \in \mathbb{Z}$: (a) $7x - 19x + 6x$; (b) $-xy - xy$.

Bài toán 65 (Tuyên, 2022, 208., p. 41). Cho $A = -36m^2n^3$ với $m, n \in \mathbb{Z}$. Với giá trị nào của m, n thì $A > 0$?

Bài toán 66 (Tuyên, 2022, 209., p. 41). Tìm $x \in \mathbb{Z}$ thỏa: (a) $-12(x - 5) + 7(3 - x) = 5$; (b) $30(x + 2) - 6(x - 5) - 24x = 100$.

Bài toán 67 (Tuyên, 2022, 210., p. 41). Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ biết: (a) $(x - 3)(2y + 1) = 7$; (b) $(x - 7)(x + 3) < 0$.

Bài toán 68 (Tuyên, 2022, 211., p. 41). Tính hợp lý: (a) $125 \cdot (-61) \cdot (-2)^3 \cdot (-1)^{2n}$ với $n \in \mathbb{N}^*$; (b) $136 \cdot (-47) + 36 \cdot 47$; (c) $(-48) \cdot 72 + 36 \cdot (-304)$.

Bài toán 69 (Tuyên, 2022, 212., p. 41). Tìm $x \in \mathbb{Z}$ thỏa: (a) $(x + 1) + (x + 3) + (x + 5) + \dots + (x + 99) = 0$; (b) $(x - 3) + (x - 2) + (x - 1) + \dots + 9 + 10 = 0$.

Bài toán 70 (Tuyên, 2022, 213., p. 41). Cho 16 số nguyên. Tích của 3 số bất kỳ luôn là 1 số âm. Chứng minh tích của 16 số đó là 1 số dương.

Bài toán 71 (Tuyên, 2022, 214., p. 41). Cho $A^2 = b(a - c) - c(a - b)$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính A với $a = -20$, $b - c = -5$.

Bài toán 72 (Tuyên, 2022, 215., p. 41). Biến đổi tổng thành tích: (a) $ab - ac + ad$; (b) $ac + ad - bc - bd$.

Bài toán 73 (Tuyên, 2022, 216., p. 42). Cho $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Biết $ab - ac + bc - c^2 = -1$. Chứng minh a, c đối nhau.

Bài toán 74 (Tuyên, 2022, 216., p. 42). 1 tài khoản ngân hàng có số dư đầu tháng là 48 triệu đồng. Trong tháng này người chủ tài khoản có giao dịch 5 lần trong đó 2 lần, mỗi lần +9 triệu đồng & 3 lần, mỗi lần -12 triệu đồng. Tính số dư của tài khoản vào cuối tháng.

Bài toán 75 (Bình, 2022, Ví dụ 50, p. 43). (a) Cho bảng vuông 3×3 ô:

5	2	-4
-2	-4	-3
-6	5	7

Tìm tích các số ở mỗi dòng, tích các số ở mỗi cột.

(b) Viết 9 số nguyên khác 0 vào 1 bảng vuông 3×3 . Biết tích các số ở mỗi dòng đều là số âm. Chứng minh luôn luôn tồn tại 1 cột mà tích các số trong cột ấy là số âm.

Bài toán 76 (Bình, 2022, Ví dụ 51, p. 44). Thay các dấu \star trong biểu thức $1 \star 2 \star 3$ bằng các phép tính $+$, $-$, \cdot , $:$. & thêm các dấu ngoặc để được kết quả là: số lớn nhất, số nhỏ nhất.

Bài toán 77 (Bình, 2022, 261., p. 44). Thực hiện các phép tính sau 1 cách nhanh chóng: (a) $(-14) \cdot (-125) \cdot 3 \cdot (-8)$; (b) $(-127) \cdot 57 + (-127) \cdot 43$; (c) $(-13) \cdot 34 - 87 \cdot 34$; (d) $(-25) \cdot 68 + (-34) \cdot (-250)$; (e) $A = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 99 - 100$; (f) $B = 1 + 3 - 5 - 7 + 9 + 11 - \dots - 397 - 399$; (g) $C = 1 - 2 - 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + \dots + 97 - 98 - 99 + 100$; (h) $D = 2^{200} - 2^{99} - 2^{98} - \dots - 2^2 - 2 - 1$.

Bài toán 78 (Bình, 2022, 262., p. 44). Thay các dấu \star trong biểu thức $1 \star 2 \star 3 \star 4$ bằng dấu các phép tính $+$, $-$, \cdot , $:$. & thêm các dấu ngoặc để được kết quả là: số lớn nhất, số nhỏ nhất.

Bài toán 79 (Bình, 2022, 263., p. 44). Tìm $x \in \mathbb{Z}$ sao cho: (a) $(x - 1)^2 = 0$; (b) $x(x - 1) = 0$; (c) $(x + 1)(x - 2) = 0$.

Bài toán 80 (Bình, 2022, 264., p. 44). Cho dãy số a_1, a_2, \dots, a_{100} trong đó $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_k = a_{k-2}a_{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$. Tính a_{100} .

Bài toán 81 (Bình, 2022, 265., p. 44). Gọi a, b, c, d, e, f, g, h là các số khác nhau trong tập hợp số $\{-7, -5, -3, -2, 2, 4, 6, 13\}$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $A = (a + b + c + d)^2 + (e + f + g + h)^2$.

5 Tính Chia hết Trên \mathbb{Z} . Bội & Ước của 1 Số Nguyên

“**1.** Cho $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Nếu có 1 số nguyên q sao cho $a = bq$ thì ta nói a chia hết cho b , ký hiệu $a : b$, & a chia cho b được q (viết là $a : b = q$ hoặc $\frac{a}{b} = q$). Ta còn nói a là bội của b & b là ước của a . **2.** Quy tắc về dấu của phép chia 2 số nguyên cũng giống như quy tắc về dấu của phép nhân 2 số nguyên. **3.** Số 0 là bội của mọi số nguyên khác 0, i.e., $0 : a$, $0 \in B(a)$, $\forall a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Số 0 không phải là ước của bất kỳ số nguyên nào, i.e., $0 \notin U(a)$, $\forall a \in \mathbb{Z}$. Số 1 & -1 là ước của mọi số nguyên, i.e., $a : \pm 1$, $\pm 1 \in U(a)$, $\forall a \in \mathbb{Z}$. **4. Tính chất của phép chia hết:** Tính chất bắc cầu: $a : b \wedge b : c \Rightarrow a : c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$. $a : b \Rightarrow an : b$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. $a : n \wedge b : n \Rightarrow a \pm b : n$. Tổng quát hơn, $a : n \wedge b : n \Rightarrow xa \pm yb : n$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$. **5.** Nếu a là bội của b thì $-a$ cũng là bội của b , i.e., $a : b \Rightarrow -a : b$, hay $a \in B(b) \Rightarrow -a \in B(b)$. Nếu b là ước của a thì $-b$ cũng là ước của a , i.e., $b|a \Leftrightarrow -b|a$, hay $b \in U(a) \Leftrightarrow -b \in U(a)$. Do đó nếu 1 số nguyên a có k ước tự nhiên thì a có thêm k ước âm (là số đối của các ước tự nhiên).” – Tuyên, 2022, Chap. II, §5, p. 42

Các ước nguyên của 1 số nguyên sẽ bao gồm các ước tự nhiên của số nguyên đó & các số đối của các ước tự nhiên đó, i.e., $U(a) \cap \mathbb{Z} = (U(a) \cap \mathbb{N}) \cup \{-n | n \in U(a) \cap \mathbb{N}\} = \{\pm n | n \in U(a) \cap \mathbb{N}\}$, $\forall a \in \mathbb{Z}$. 2 tập hợp ước nguyên của 2 số nguyên đối nhau trùng nhau, i.e., $U(a) \cap \mathbb{Z} = U(-a) \cap \mathbb{Z}$, $\forall a \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 82 (Tuyên, 2022, Ví dụ 45, p. 42). *Tìm tất cả các ước của -24 .*

Giải. Vì $U(-24) = U(24)$ nên chỉ cần tìm $U(24)$. Các ước tự nhiên của 24 là: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.⁶ Thêm các số đối của chúng, được $U(-24) = U(24) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24\}$. \square

Nhận xét 5.1. “Để tìm tất cả các ước của 1 số nguyên âm ta chỉ cần tìm tất cả các ước của số đối của số nguyên âm đó. Trước tiên, tìm các ước tự nhiên rồi thêm các ước đối của chúng.” – Tuyên, 2022, p. 42

Bài toán 83 (Tuyên, 2022, Ví dụ 46, p. 43). *Cho $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Biết $a : b$ & $b : a$. Chứng minh $a = \pm b$.*

Giải. $a : b \Rightarrow a = bq_1$, với $q_1 \in \mathbb{Z}$. $b : a \Rightarrow b = aq_2$, với $q_2 \in \mathbb{Z}$. Suy ra $a = bq_1 = (aq_2)q_1 = a(q_1q_2)$, vì $a \neq 0$ suy ra $q_1q_2 = 1$, suy ra $q_1 = q_2 = 1$ hoặc $q_1 = q_2 = -1$, hay $a = b$ hoặc $a = -b$. Vậy $a = \pm b$. \square

Bài toán 84 (Tuyên, 2022, 218., p. 43). *Các số sau có bao nhiêu ước? (a) 54; (b) -196 .*

Bài toán 85 (Tuyên, 2022, 219., p. 43). *Cho $a, b, x, y \in \mathbb{Z}$, trong đó x, y không đối nhau. Chứng minh nếu $(ax - by) : (x + y)$ thì $(ay - bx) : (x + y)$.*

Bài toán 86 (Tuyên, 2022, 220., p. 43). *Cho $S = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + 3^{98} - 3^{99}$. (a) Chứng minh S là bội của -20 ; (b) Tính S từ đó suy ra 3^{100} chia cho 4 dư 1.*

Bài toán 87 (Tuyên, 2022, 221., p. 43). *Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $n + 2$ là ước của 111 còn $n - 2$ là bội của 11.*

Bài toán 88 (Tuyên, 2022, 222., p. 43). *Tìm $n \in \mathbb{Z}$ thỏa: (a) $(4n - 5) : n$; (b) -11 là bội của $n - 1$; (c) $2n - 1$ là ước của $3n + 2$.*

Bài toán 89 (Tuyên, 2022, 223., p. 43). *Tìm $n \in \mathbb{Z}$ sao cho: $n - 1$ là bội của $n + 5$ & $n + 5$ là bội của $n - 1$.*

Bài toán 90 (Tuyên, 2022, 224., p. 43). *Ở 1 thành phố xứ lạnh, nhiệt độ thấp nhất trong mỗi ngày của 1 tuần lễ là: $-8^\circ C$, $-6^\circ C$, $-5^\circ C$, $-4^\circ C$, $-1^\circ C$, $+1^\circ C$, & $2^\circ C$. Tính nhiệt độ trung bình thấp nhất trong tuần lễ đó của thành phố này.*

Bài toán 91 (Tuyên, 2022, 225., p. 43). *Hà làm bài kiểm tra trắc nghiệm gồm 25 câu. Mỗi câu làm đúng được 3 điểm, làm sai được (-2) điểm & không làm câu nào thì câu ấy không có điểm. Biết Hà làm đúng được 20 câu nhưng chỉ được 54 điểm. Hỏi Hà đã làm sai mấy câu?*

Bài toán 92 (Bình, 2022, Ví dụ 52, p. 44). *Số 36 chia cho $a \in \mathbb{Z}$ rồi trừ đi a . Lấy kết quả này chia cho a rồi trừ đi a . Lại lấy kết quả này chia cho a rồi trừ đi a . Cuối cùng ta được số $-a$. Tìm a .* Ans: 3.

Bài toán 93 (Bình, 2022, 266., p. 45). *Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ biết: (a) $(x + 2)(y - 3) = 5$; (b) $(x + 1)(xy - 1) = 3$.*

Bài toán 94 (Bình, 2022, 267., p. 45). *Tính tổng $A + B$ biết A là tổng các số nguyên âm lẻ có 2 chữ số, B là tổng các số nguyên dương chẵn có 2 chữ số.*

Bài toán 95 (Bình, 2022, 268., p. 45). *Cho $A = 2 - 5 + 8 - 11 + 14 - 17 + \dots + 98 - 101$. (a) Viết dạng tổng quát của số hạng thứ n của A . (b) Tính giá trị của biểu thức A .*

⁵Số phần tử của tập hợp các ước nguyên của 1 số sẽ gấp đôi số phần tử của tập hợp các ước tự nhiên của 1 số vì phải thêm dấu $-$ vào trước tất cả các ước tự nhiên của số đó, i.e., $|U(a) \cap \mathbb{Z}| = 2|U(a) \cap \mathbb{N}|$ với $|A|$ ký hiệu số phần tử của 1 tập hợp A .

⁶Cũng có thể viết bằng công thức toán học 1 cách chặt chẽ là: $U(24) \cap \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$.

Bài toán 96 (Bình, 2022, 269., p. 45). Cho $A = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - \dots - 99 - 100$. (a) A có chia hết cho 2, cho 3, cho 5 hay không? (b) A có bao nhiêu ước nguyên, có bao nhiêu ước tự nhiên?

Bài toán 97 (Bình, 2022, 270., p. 45). Cho dãy số $1, -3, 5, -7, 9, -11, 13, -15, 17, -19$. Có thể tìm được hay không 5 số trong các số trên, sao cho đặt dấu “+” hoặc “-” nối các số đó với nhau, ta được kết quả bằng: (a) 15; (b) 20?

Bài toán 98 (Bình, 2022, 271., p. 45). Thay các dấu \star trong biểu thức $1 \star 2 \star 3 \star 4 \star 5 \star 6 \star 7 \star 8 \star 9$ bởi các dấu “+” hoặc “-” để giá trị của biểu thức bằng: (a) -13 ; (b) -4 ?

Bài toán 99 (Bình, 2022, 272., p. 45). Tìm $n \in \mathbb{Z}$ sao cho: (a) $n + 5 : n - 2$; (b) $2n + 1 : n - 5$; (c) $n^2 + 3n - 13 : n + 3$; (d) $n^2 + 3 : n - 1$.

Bài toán 100 (Bình, 2022, 273., p. 45). Tìm các số a, b, c, d, m khác nhau thuộc tập hợp $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ sao cho $a < b < \min\{c, d\}$, với $\min\{c, d\}$ là số nhỏ hơn trong 2 số c, d , ℓ đặt m nằm ở trung tâm, các số a, b, c, d lần lượt nằm ở bên trái, bên trên, bên phải, bên dưới của m , ℓ tổng của 3 số trên đường nằm ngang bằng tổng của 3 số trên đường thẳng đứng.

Bài toán 101 (Bình, 2022, 274.*, p. 45). Cho n số nguyên (có thể có số âm) với $n > 1$ mà tổng ℓ tích của chúng đều bằng 505. Tìm giá trị nhỏ nhất của n .

6 Điền Chữ Số

“Các bài toán về điền chữ số không chỉ yêu cầu kỹ năng tính toán đúng mà còn đòi hỏi cả lập luận chính xác & hợp lý. Ta quy ước rằng khi ở đề bài cho các chữ a, b, c, \dots mà không chú thích gì thêm, ta hiểu rằng các chữ khác nhau biểu thị các chữ số khác nhau.” – Bình, 2022, p. 46

Bài toán 102 (Bình, 2022, Ví dụ 53, p. 46). Thay các chữ bởi các chữ số thích hợp: $\overline{abc} + \overline{acb} = \overline{bca}$.

Bài toán 103 (Bình, 2022, Ví dụ 54, p. 46). Tìm các chữ số a, b, c biết tổng $a + b + c$ bằng tổng của 4 số chẵn liên tiếp ℓ các chữ số a, b, c thỏa mãn cả 2 phép trừ sau: $\overline{abc} - \overline{cba} = 99$ ℓ $\overline{bac} - \overline{abc} = 270$.

Bài toán 104 (Bình, 2022, Ví dụ 55, p. 46). Thay các dấu $*$ bằng các chữ số thích hợp trong phép chia:

$$\begin{array}{r} \text{A} \quad \begin{array}{cccccc} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & & & \end{array} \\ \text{B} \quad \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & * & * & \end{array} \\ \text{C} \quad \begin{array}{cccccc} & & & * & * & \\ & & & 0 & 0 & \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{r} * & * \\ * & * & 8 \end{array}$$

Bài toán 105 (Bình, 2022, Ví dụ 56, p. 47). Thay các chữ a, b, c bằng các chữ số khác nhau thích hợp trong phép nhân sau: $\overline{ab} \cdot \overline{cc} \cdot \overline{abc} = \overline{abcabc}$.

Bài toán 106 (Bình, 2022, Ví dụ 57, p. 47). Tìm số tự nhiên có 3 chữ số, biết trong 2 cách viết: viết thêm chữ số 5 vào đằng sau số đó hoặc viết thêm chữ số 1 vào đằng trước số đó thì cách viết thứ nhất cho số lớn gấp 5 lần so với cách viết thứ 2.

Bài toán 107 (Bình, 2022, Ví dụ 58, p. 48). Điền các chữ số thích hợp vào các chữ trong phép nhân sau: $\overline{2abcdmn} = \overline{cdmnaab}$.

Bài toán 108 (Bình, 2022, Ví dụ 59, p. 48). Điền các chữ số thích hợp vào các dấu \star trong phép nhân sau: $\star\star \cdot \star\star = \star\star\star$ biết cả 2 thừa số đều chẵn ℓ tích là số có 3 chữ số như nhau.

Bài toán 109 (Bình, 2022, Ví dụ 60, p. 48). Tìm các chữ số a ℓ b , biết $900 : (a + b) = \overline{ab}$.

Bài toán 110 (Bình, 2022, Ví dụ 61, p. 49). Chứng minh không thể thay các chữ bằng các chữ số để có phép tính đúng: (a) HỌ C VUI – VUI HỌ C = 1991; (b) TOÁN + LÝ + SỬ + VÊ = 1992.

Thay các dấu \star & các chữ bởi các số thích hợp:

Bài toán 111 (Bình, 2022, 275., p. 49). $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = \overline{abc}$.

Bài toán 112 (Bình, 2022, 276., p. 49). (a) $\overline{abc} + \overline{ab} + a = 874$; (b) $\overline{abc} + \overline{ab} + a = 1037$.

Bài toán 113 (Bình, 2022, 277., p. 49). (a) $\overline{acc} \cdot b = \overline{dba}$ biết a là chữ số lẻ; (b) $\overline{ac} \cdot \overline{ac} = \overline{acc}$; (c) $\overline{ab} \cdot \overline{ab} = \overline{acc}$.

Bài toán 114 (Bình, 2022, 278., p. 49). (a) $\overline{21bac} = \overline{abc8}$; (b) $\overline{ab} = 9b$.

Bài toán 115 (Bình, 2022, 279., p. 49). $\overline{4abcdef} = \overline{abcde}$ ℓ $\overline{abcde} + f = 15390$.

Bài toán 116 (Bình, 2022, 280., p. 49). $\overline{abc} - \overline{ca} = \overline{ca} - \overline{ac}$.

Bài toán 117 (Bình, 2022, 281., p. 49). $\overline{abcd} + \overline{abc} = 3576$.

Bài toán 118 (Bình, 2022, 282., p. 49). $\overline{abcd0} - \overline{abcd} = \overline{3462\star}$.

Bài toán 119 (Bình, 2022, 283., p. 49). Thay các dấu $*$ bởi các số thích hợp:

$$\begin{array}{r} * * * * \\ \times \quad * * \\ \hline * * * * \\ * * * 7 \\ \hline * * * * * \end{array}$$

biết số bị nhân có tổng các chữ số bằng 18 và không đổi khi đọc từ phải sang trái.

Bài toán 120 (Bình, 2022, 284., p. 49). (a) $\overline{ab} \cdot b = \overline{1ab}$; (b) $\overline{abc} = 9\overline{bc}$.

Bài toán 121 (Bình, 2022, 285., p. 50). $\overline{260abc} : \overline{abc} = 626$.

Bài toán 122 (Bình, 2022, 286., p. 50). Thay các dấu $*$ bởi các số thích hợp:

$$\begin{array}{r} * * * \\ \times \\ \hline 8 * * \\ * * * 9 \\ * * * \\ \hline * * * * * \end{array}$$

Bài toán 123 (Bình, 2022, 287., p. 50). (a) $\overline{ab} \cdot \overline{cb} = \overline{ddd}$; (b) $\star\star\star = \star\star\star$; (c) $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{bbb}$. Biết tích là số có 3 chữ số như nhau.

Bài toán 124 (Bình, 2022, 288., p. 50). $\overline{6abcdef} = \overline{defabc}$.

Bài toán 125 (Bình, 2022, 289., p. 50). $20\star\star : 13 = \star\star 7$.

Bài toán 126 (Bình, 2022, 290., p. 50). Thay các dấu $*$ bởi các số thích hợp:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{array}{r} * * * * * \\ * * \\ \hline * * * \\ * * * \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} * * \\ * * 2 \end{array} \\ \text{b) } \begin{array}{r} * * * * * \\ * * * \\ \hline * * \\ * * \\ \hline * * * \\ * * * \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} * * \\ * * 8 * * \end{array} \end{array}$$

Bài toán 127 (Bình, 2022, 291., p. 50). $\overline{abc} : 11 = a + b + c$.

Bài toán 128 (Bình, 2022, 292., p. 50). $(\overline{ab} + \overline{cd})(\overline{ab} - \overline{cd}) = 2002$.

Bài toán 129 (Bình, 2022, 293., p. 50). (a) $a \cdot \overline{bc} = d \cdot \overline{ef} = 156$ (các chữ khác các chữ số đã có); (b) $\overline{ab} \cdot \overline{cde} = 16038$ (các chữ khác các chữ số đã có).

Bài toán 130 (Bình, 2022, 294., p. 50). Tìm chữ số a sao cho $n = \underbrace{4\dots 4}_{55 \text{ số}} \underbrace{a6\dots 6}_{55 \text{ số}} : 13$.

Bài toán 131 (Bình, 2022, 295., p. 50). Tìm chữ số a và $x \in \mathbb{N}$ sao cho: $(12 + 3x)^2 = \overline{1a96}$.

Bài toán 132 (Bình, 2022, 296., p. 50). Tìm số tự nhiên có 5 chữ số, biết rằng nếu viết thêm chữ số 7 vào đằng trước số đó thì được 1 số lớn gấp 4 lần so với số có được bằng cách viết thêm chữ số 7 vào sau số đó.

Bài toán 133 (Bình, 2022, 297., p. 50). Tìm số tự nhiên có 2 chữ số, biết rằng nếu viết thêm 1 chữ số 2 vào bên phải và 1 chữ số 2 vào bên trái của nó thì số ấy tăng gấp 36 lần.

Bài toán 134 (Bình, 2022, 298., p. 50). *Tìm số tự nhiên có 2 chữ số, biết rằng nếu viết xen vào giữa 2 chữ số của nó chính số đó thì số đó tăng gấp 99 lần.*

Bài toán 135 (Bình, 2022, 299., p. 50). *Tìm số tự nhiên có 4 chữ số, sao cho khi nhân số đó với 4 ta được số gồm 4 chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại.*

Bài toán 136 (Bình, 2022, 300., p. 50). *Tìm số tự nhiên có 4 chữ số, sao cho nhân nó với 9 ta được số gồm chính các chữ số của số ấy viết theo thứ tự ngược lại.*

Bài toán 137 (Bình, 2022, 301., p. 51). *Tìm số tự nhiên có 5 chữ số, sao cho nhân nó với 9 ta được số gồm chính các chữ số của số ấy viết theo thứ tự ngược lại.*

Bài toán 138 (Bình, 2022, 302., p. 51). (a) *Tìm số tự nhiên có 3 chữ số, biết rằng nếu xóa chữ số hàng trăm thì số ấy giảm 9 lần.* (b) *Giải bài toán trên nếu không cho biết chữ số bị xóa thuộc hàng nào.*

Bài toán 139 (Bình, 2022, 303., p. 51). *Tìm $n \in \mathbb{N}$ có 3 chữ số khác nhau, biết rằng nếu xóa bất kỳ chữ số nào của nó ta cũng được 1 số là ước của n .*

Bài toán 140 (Bình, 2022, 304., p. 51). *Tìm số tự nhiên có 4 chữ số, biết rằng nếu xóa chữ số hàng nghìn thì số ấy giảm 9 lần.*

Bài toán 141 (Bình, 2022, 305., p. 51). (a) *Tìm số tự nhiên có 4 chữ số, biết rằng chữ số hàng trăm bằng 0 nếu xóa chữ số 0 đó thì số ấy giảm 9 lần.* (b) *1 số tự nhiên tăng gấp 9 lần nếu viết thêm 1 chữ số 0 vào giữa các chữ số hàng chục ở hàng đơn vị của nó. Tìm số ấy.*

Bài toán 142 (Bình, 2022, 306., p. 51). *Tìm $A \in \mathbb{N}$, biết rằng nếu xóa 1 hoặc nhiều chữ số tận cùng của nó thì được số B mà $A = 130B$.*

Bài toán 143 (Bình, 2022, 307.*, p. 51). *Tìm $x \in \mathbb{N}$ có chữ số tận cùng bằng 2, biết rằng $x, 2x, 3x$ đều là các số có 3 chữ số ở 9 chữ số của 3 số đó đều khác nhau ở khác 0.*

Bài toán 144 (Bình, 2022, 308.*, p. 51). *Tìm $x \in \mathbb{N}$ có 6 chữ số, biết rằng các tích $2x, 3x, 4x, 5x, 6x$ cũng là số có 6 chữ số gồm cả 6 chữ số ấy.* (a) *Cho biết 6 chữ số của số phải tìm là 1, 2, 4, 5, 7, 8.* (b) *Giải bài toán nếu không cho điều kiện (a).*

7 Dãy Các Số Viết Theo Quy Luật

7.1 Dãy cộng

“Xét các dãy số sau: (a) Dãy số tự nhiên: $0, 1, 2, 3, \dots$; (b) Dãy số lẻ: $1, 3, 5, 7, \dots$; (c) Dãy các số chia cho 3 dư 1: $1, 4, 7, 10, \dots$. Trong các dãy số trên, mỗi số hạng, kể từ số hạng thứ 2, đều lớn hơn số hạng đứng liền trước nó cùng 1 đơn vị, số đơn vị này là 1 ở dãy (a), là 2 ở dãy (b), là 3 ở dãy (c). Ta gọi các dãy trên là *dãy cộng*.”

Xét dãy cộng $4, 7, 10, 13, 16, 19, \dots$. Hiệu giữa 2 số liên tiếp của dãy là 3. Số hạng thứ 6 của dãy này là 19, bằng: $4 + (6 - 1) \cdot 3$; số hạng thứ 10 của dãy này là $4 + (10 - 1) \cdot 3 = 31$. Tổng quát, nếu 1 dãy cộng có số hạng đầu là a_1 & hiệu giữa 2 số hạng liên tiếp là d thì số hạng thứ n của dãy cộng đó (ký hiệu a_n) bằng: $a_n = a_1 + (n - 1)d, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Để tính tổng các số hạng của dãy cộng $4 + 7 + 10 + \dots + 25 + 28 + 31$ (gồm 10 số) ta viết: $A = 4 + 7 + 10 + \dots + 25 + 28 + 31, A = 31 + 28 + 25 + \dots + 10 + 7 + 4$ nên $2A = (4 + 31) + (7 + 28) + \dots + (28 + 7) + (31 + 4) = (4 + 31) \cdot 10$. Do đó $A = \frac{(4+31) \cdot 10}{2} = 175$.

Tổng quát, nếu 1 dãy cộng có n số hạng, số hạng đầu là a_1 , số hạng cuối là a_n thì tổng của n số hạng đó được tính như sau: $S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$. Quy tắc dân gian: dĩ đầu, cộng vĩ, chiết bán, nhân chi (lấy số đầu cộng với số cuối, chia đôi, nhân với số số hạng). Trường hợp đặc biệt, tổng của n số tự nhiên liên tiếp bắt đầu từ 1 bằng: $\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$.” – Bình, 2022, Chuyên đề 2, pp. 51–52 (Cho $a_1 = 1, a_n = n$ trong công thức $S = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$.)

Định nghĩa 7.1 (Dãy cộng). *Dãy cộng là dãy có dạng $\{a + nb\}_{n=0}^\infty = a, a + b, a + 2b, a + 3b, \dots$, với $a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0$.*

Trong các dãy số cộng, mỗi số hạng, kể từ số hạng thứ 2, đều lớn hơn số hạng đứng trước nó cùng 1 số đơn vị là b .

Ví dụ 7.1. (a) $a = 0, b = 1$, dãy $\{a + nb\}_{n=0}^\infty = \{n\}_{n=0}^\infty = \mathbb{N} = 0, 1, 2, 3, \dots$ là dãy các số tự nhiên. (b) $a = 1, b = 2$, dãy $\{a + nb\}_{n=0}^\infty = \{1 + 2n\}_{n=0}^\infty = 1, 3, 5, 7, \dots$ là dãy các số tự nhiên lẻ. (c) $a = 0, b = 2$, $\{a + nb\}_{n=0}^\infty = \{2n\}_{n=0}^\infty = 0, 2, 4, 6, \dots$ là dãy các số tự nhiên chẵn. (d) Với $b \in \mathbb{N}^*, b \geq 2, a \in \mathbb{N}, a < b$, dãy $\{a + nb\}_{n=0}^\infty$ là dãy các số tự nhiên chia cho b dư a .

Bài toán 145 (Bình, 2022, Ví dụ 62, p. 52). *Bạn Lâm đánh số trang 1 cuốn sách dày 284 trang bằng dãy số chẵn 2, 4, 6, 8, ...* (a) *Biết mỗi chữ số viết mất 1 giây. Hỏi bạn Lâm cần bao nhiêu phút để đánh số trang cuốn sách?* (b) *Chữ số thứ 300 mà bạn Lâm viết là chữ số nào?*

Bài toán 146 (Bình, 2022, Ví dụ 63*, p. 52). *Tìm $n \in \mathbb{N}$ lớn nhất để tích các số tự nhiên từ 1 đến 1000 chia hết cho 5^n .*

“*Tổng quát:* Số thừa số a khi phân tích $n! = \prod_{i=1}^n i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ ra thừa số nguyên tố là: $\sum_{i=1}^k \lfloor \frac{n}{a^i} \rfloor = \lfloor \frac{n}{a} \rfloor + \lfloor \frac{n}{a^2} \rfloor + \cdots + \lfloor \frac{n}{a^k} \rfloor$ với k là số mũ lớn nhất sao cho $a^k \leq n$. Ký hiệu $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ là số tự nhiên lớn nhất không vượt quá $\frac{n}{m}$ (nếu $n : m$ thì $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ là thương đúng, nếu $n \not\vdots m$ thì $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ là thương hụt, ta gọi $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ là *phần nguyên* của $\frac{n}{m}$).” – Bình, 2022, p. 53

Bài toán 147 (Bình, 2022, Ví dụ 64, p. 53). Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 13 trong dãy $111, 1111, \dots, \underbrace{1 \dots 1}_{1993 \text{ số}}$.

7.2 Các dãy khác

Bài toán 148 (Bình, 2022, Ví dụ 65, p. 53). Tìm số hạng thứ 100 của các dãy được viết theo quy luật: (a) $3, 8, 15, 24, 35, \dots$; (b) $3, 24, 63, 120, 195, \dots$; (c) $1, 3, 6, 10, 15, \dots$; (d) $1, 2, 4, 7, 11$; (e) $2, 5, 10, 17, 26, \dots$

Hint. 2 số hạng đầu của các dãy trên có thể viết dưới dạng: dãy (a): $1 \cdot 3, 2 \cdot 4$; dãy (b): $1 \cdot 3, 4 \cdot 6$; dãy (c): $\frac{1 \cdot 2}{2}, \frac{2 \cdot 3}{2}$; (d) dãy (e): $1 + 1^2, 1 + 2^2$.

Bài toán 149 (Bình, 2022, Ví dụ 66, p. 54). (a) Tính tổng $A = \sum_{i=1}^{98} i(i+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 98 \cdot 99$. (b) Sử dụng kết quả của (a), tính $B = \sum_{i=1}^{98} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 97^2 + 98^2$.

Tổng quát:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài toán 150 (Bình, 2022, 309., p. 55). Tìm chữ số thứ 1000 khi viết liên tiếp liền nhau các số hạng của dãy số lẻ $1, 3, 5, 7, \dots$

Bài toán 151 (Bình, 2022, 310., p. 55). (a) Tính tổng các số lẻ có 2 chữ số. (b) Tính tổng các số chẵn có 2 chữ số.

Bài toán 152 (Bình, 2022, 311., p. 55). Có số hạng nào của dãy sau tận cùng bằng 2 hay không? $1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, \dots$

Bài toán 153 (Bình, 2022, 312., p. 55). (a) Viết liên tiếp các số hạng của dãy số tự nhiên từ 1 đến 100 tạo thành 1 số A. Tính tổng các chữ số của A. (b) Cũng hỏi như trên nếu viết từ 1 đến 1000000.

Bài toán 154 (Bình, 2022, 313., p. 55). Có n em bé được nhận quà. Cô giáo đã xếp cho các em đứng thành 1 hàng ngang, có số tuổi nhỏ dần kể từ trái sang phải. Lần lượt từ trái sang phải em thứ nhất được 1 chiếc, em thứ 2 được 2 chiếc, cứ như vậy em nhận sau được chia nhiều hơn em nhận trước 1 chiếc kẹo. Đến lượt chia thứ 2, cô giáo cũng chia kẹo từ trái sang phải sao cho em nhận sau được chia nhiều hơn em nhận trước 1 chiếc kẹo (lưu ý: ở lượt thứ 2 thì em thứ nhất nhận không phải 1 chiếc kẹo mà là $n+1$ chiếc kẹo). Tính n biết số kẹo chia ở lượt thứ 2 nhiều hơn số kẹo chia ở lượt thứ nhất là 36 chiếc.

Bài toán 155 (Bình, 2022, 314., p. 55). Bạn A viết dãy số tự nhiên như sau: $3, 4, 5, \dots, 345$ (1). Bạn B thay mỗi số của dãy (1) bởi tổng các chữ số của nó & được dãy (2). Bạn C thay mỗi số của dãy (2) bởi tổng các chữ số của nó & được dãy (3). Bạn D thay mỗi số của dãy (3) bởi tổng các chữ số của nó & được dãy (4). (a) Chứng tỏ chỉ có dãy (4) mới có mọi số hạng đều là số có 1 chữ số. (b) Số nào xuất hiện nhiều nhất ở dãy (4)?

Bài toán 156 (Bình, 2022, 315., p. 55). (a) Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số $1000!$ chứa thừa số nguyên tố 7 với số mũ bằng bao nhiêu? (b) Tích $A = 500!$ tận cùng bằng bao nhiêu chữ số 0?

Bài toán 157 (Bình, 2022, 316., p. 55). (a) Tích $B = 38 \cdot 39 \cdot 40 \cdots 74$ có bao nhiêu thừa số 2 khi phân tích ra thừa số nguyên tố? (b) Tích $C = 31 \cdot 32 \cdot 33 \cdots 90$ có bao nhiêu thừa số 3 khi phân tích ra thừa số nguyên tố?

Bài toán 158 (Bình, 2022, 317., p. 55). 2 con châu chấu cùng nhảy 1 lúc từ 1 chỗ & về cùng 1 phía. Khi con I nhảy 1 bước thì con II cũng nhảy 1 bước. Con I nhảy mỗi bước dài 4m. Con II nhảy bước thứ nhất dài 1m, mỗi bước sau tăng hơn so với bước liền trước 1m cho đến khi đuổi kịp con I. Hỏi sau bao nhiêu bước nhảy thì con II đuổi kịp con I?

Bài toán 159 (Bình, 2022, 318., p. 56). Cho 3 dãy các số tự nhiên liên tiếp: $1, 2, 3, \dots, 95, 96, 97$; $1, 2, 3, \dots, 95, 96$; $1, 2, 3, \dots, 95$. Trong dãy nào có thể chia các số của dãy thành 2 nhóm để tổng các số trong mỗi nhóm bằng nhau?

Bài toán 160 (Bình, 2022, 319., p. 56). (a) Viết số hạng thứ n của dãy $1, 4, 7, 10, 13, \dots$; (b) Viết 2 số hạng tiếp theo của dãy $1, 3, 2, 6, 3, 9, 4, 12, 5, \dots$; (c) Viết số hạng thứ n của dãy $1, 2, 4, 7, 11, \dots$

Bài toán 161 (Bình, 2022, 320., p. 56). Có bao nhiêu số tự nhiên đồng thời là các số hạng của cả 2 dãy sau: $3, 7, 11, 15, \dots, 407$ & $2, 9, 16, 23, \dots, 709$.

Bài toán 162 (Bình, 2022, 321., p. 56). Cho 1 dãy gồm 30 số chẵn liên tiếp tăng dần có tổng bằng 1470. Tìm số hạng đầu & số hạng cuối của dãy.

Bài toán 163 (Bình, 2022, 322., p. 56). (a) Tính tổng của n số lẻ liên tiếp bắt đầu từ 1. (b) Xếp các hộp thành hàng, hàng thứ nhất có 1 hộp, hàng thứ 2 có 3 hộp, hàng thứ 3 có 5 hộp, etc., sao cho các hộp ở giữa mỗi hàng tạo thành 1 cột. Có tất cả bao nhiêu hộp từ hàng thứ nhất tới hàng thứ 10? Có tất cả bao nhiêu hộp từ hàng thứ nhất tới hàng thứ n , $n \in \mathbb{N}^*$?

Bài toán 164 (Bình, 2022, 323., p. 56). Trong dãy số $1, 2, 3, \dots, 1990$, có thể chọn được nhiều nhất bao nhiêu số để tổng 2 số bất kỳ được chọn chia hết cho 38?

Bài toán 165 (Bình, 2022, 324., p. 56). 1 đồng hồ reo chuông vào các thời điểm sau: 4:10, 5:20, 6:40, 8:10, ... Theo quy luật trên, đồng hồ reo chuông lần tiếp theo vào lúc nào?

Bài toán 166 (Bình, 2022, 325.*, p. 56, Theo nội dung bài toán bò ăn cỏ của Newton). Có 3 cánh đồng cỏ như nhau. Mỗi cỏ luôn mọc đều như nhau trên toàn bộ cánh đồng. 9 con bò ăn hết số cỏ có sẵn ở số cỏ mọc thêm của cánh đồng I trong 2 tuần, 6 con bò ăn hết số cỏ có sẵn ở số cỏ mọc thêm của cánh đồng II trong 4 tuần. Hỏi bao nhiêu con bò ăn hết cỏ có sẵn ở số cỏ mọc thêm của cánh đồng II trong 6 tuần? (mỗi con bò đều ăn số cỏ như nhau).

Bài toán 167 (Bình, 2022, 326.*, p. 56). Chia dãy số tự nhiên kể từ 1 thành từng nhóm (các số cùng nhóm được đặt trong dấu ngoặc) $(1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10), (11, 12, 13, 14, 15), \dots$ (a) Tìm số hạng đầu tiên của nhóm thứ 100. (b) Tính tổng các số thuộc nhóm thứ 100.

Bài toán 168 (Bình, 2022, 327., p. 56). Cho $S_1 = 1 + 2$, $S_2 = 3 + 4 + 5$, $S_3 = 6 + 7 + 8 + 9$, $S_4 = 10 + 11 + 12 + 13 + 14, \dots$ Tính S_{100} .

Bài tập phụ thuộc vào hình vẽ: Bình, 2022, 328.–331., p. 57.
pause here ...

Bài toán 169 (Bình, 2022, 230., p. 49). Tính số hạng thứ 50 của các dãy sau: (a) $1 \cdot 6, 2 \cdot 7, 3 \cdot 8, \dots$; (b) $1 \cdot 4, 4 \cdot 7, 7 \cdot 10, \dots$

Bài toán 170 (Bình, 2022, 231., p. 49). Cho $A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{20} = \sum_{i=0}^{20} 3^i$, $B = 3^{21} : 2$. Tính $B - A$.

Bài toán 171 (Bình, 2022, 232., p. 49). Cho $A = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{99}$, $B = 4^{100}$. Chứng minh rằng $A < \frac{B}{3}$.

Bài toán 172 (Bình, 2022, 233., p. 49). Tính giá trị của biểu thức:

$$(a) A = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{9 \dots 9}_{50' \text{ s}}; (b) B = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{9 \dots 9}_{200' \text{ s}}.$$

8 Đếm số

Bài toán 173 (Bình, 2022, Ví dụ 43, p. 49). Có bao nhiêu số \overline{abcd} mà $\overline{ab} < \overline{cd}$?

Bài toán 174 (Bình, 2022, Ví dụ 44, p. 49). Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 4 gồm 4 chữ số, chữ số tận cùng bằng 2?

Lưu ý 8.1. “Nếu việc chọn đối tượng A có thể thực hiện bởi m cách ở với mỗi cách chọn của A có thể chọn đối tượng B bởi n cách thì việc chọn A và B theo thứ tự đó có thể thực hiện bởi mn cách chọn.” – Bình, 2022, p. 50 Quy tắc nhân trong phép đếm khác niệm tổ hợp, chỉnh hợp sẽ được học ở môn Tổ hợp, trong chương trình Toán 10.

Bài toán 175 (Bình, 2022, Ví dụ 45, p. 50). Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số \overline{abcd} , trong đó $b - a = 1$, $d - c = 1$?

Bài toán 176 (Bình, 2022, Ví dụ 46, p. 50). Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số trong đó có đúng 1 chữ số 5?

“Trong nhiều trường hợp, để đếm các số có tính chất nào đó, ta lại đếm trước hết các số không có tính chất ấy.” – Bình, 2022, p. 51

Bài toán 177 (Bình, 2022, Ví dụ 47, p. 50). Có bao nhiêu số chứa ít nhất 1 chữ số 1 trong các số tự nhiên: (a) có 3 chữ số; (b) từ 1 đến 999.

Bài toán 178 (Bình, 2022, Ví dụ 48, p. 51). Viết 999 số tự nhiên liên tiếp kể từ 1. Hỏi: (a) Chữ số 2 có mặt bao nhiêu lần? (b) Chữ số 0 có mặt bao nhiêu lần?

Bài toán 179 (Bình, 2022, 234., p. 52). Bạn Tâm đánh số trang của 1 cuốn vở có 110 trang bằng cách viết dãy số tự nhiên $1, 2, \dots, 110$. Bạn Tâm phải viết tất cả bao nhiêu chữ số?

Bài toán 180 (Bình, 2022, 235., p. 52). 1 cô nhân viên đánh máy liên tục dãy số chẵn bắt đầu từ 2: $2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$ Cô phải đánh tất cả 2000 chữ số. Tìm chữ số cuối cùng mà cô đã đánh.

Bài toán 181 (Bình, 2022, 236., p. 52). Bạn Mai viết dãy số lẻ $1, 3, 5, \dots, 245$. (a) Bạn Mai phải viết tất cả bao nhiêu chữ số? (b) Nếu mỗi chữ số viết mất 1 giây thì viết đến số 245 mất bao nhiêu giây? Sau 5 phút, bạn Mai viết đến chữ số nào?

Bài toán 182 (Bình, 2022, 237., p. 52). *Bạn Hùng viết dãy số lẻ $1, 3, 5, 7, \dots$ để đánh số trang 1 cuốn sách. Tính xem chữ số 200 mà bạn Hùng viết là chữ số nào?*

Bài toán 183 (Bình, 2022, 238., p. 52). *Để đánh số trang của 1 cuốn sách, người ta viết dãy số tự nhiên bắt đầu từ 1 và phải dùng tất cả 1998 chữ số. (a) Hỏi cuốn sách có bao nhiêu trang? (b) Chữ số thứ 1010 là chữ số nào?*

Bài toán 184 (Bình, 2022, 239., p. 52). *Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 3, có 4 chữ số và tận cùng bằng 5?*

Bài toán 185 (Bình, 2022, 240., pp. 52–53). *Tuấn muốn đến nhà bạn, nhưng không nhớ số nhà, chỉ biết rằng số nhà của bạn là số chia hết cho 3 và có 2 chữ số. Biết số nhà cuối của dãy phố đó là 135. Hỏi Tuấn phải gõ cửa nhiều nhất bao nhiêu số nhà? (các số nhà không đánh số a, b, ...).*

Bài toán 186 (Bình, 2022, 241., p. 53). *Tìm số lượng các số tự nhiên có 4 chữ số mà: (a) Số tạo bởi 2 chữ số đầu (theo thứ tự ấy) cộng với số tạo bởi 2 chữ số cuối (theo thứ tự ấy) nhỏ hơn 100. (b) Số tạo bởi 2 chữ số đầu (theo thứ tự ấy) lớn hơn số tạo bởi 2 chữ số cuối (theo thứ tự ấy)?*

Bài toán 187 (Bình, 2022, 242., p. 53). *Trong các số tự nhiên từ 1 đến 252, xóa các số chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 5, rồi xóa các số chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 2. Còn lại bao nhiêu số?*

Bài toán 188 (Bình, 2022, 243., p. 53). *Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số mà: (a) Các chữ số đều chẵn? (b) Chữ số hàng chục là chữ số lẻ?*

Bài toán 189 (Bình, 2022, 244., p. 53). *Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số mà: (a) Mỗi chữ số đều chẵn? (b) Tổng các chữ số là số chẵn?*

Bài toán 190 (Bình, 2022, 245., p. 53). *Có bao nhiêu biển số xe máy khác nhau, mỗi số xe lập bởi 2 chữ cái đứng đầu và 3 chữ số đứng sau? (bảng chữ cái có 25 chữ, không có biển số 000).*

Bài toán 191 (Bình, 2022, 246., p. 53). *Trong các số tự nhiên có 3 chữ số, có bao nhiêu số: (a) Chứa đúng 1 chữ số 4? (b) Chứa đúng 2 chữ số 4?*

Bài toán 192 (Bình, 2022, 247., p. 53). *Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 5, có 4 chữ số, có đúng 1 chữ số 5?*

Bài toán 193 (Bình, 2022, 248., p. 53). *Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số, biết rằng cộng nó với số gồm 3 chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại thì được 1 số chia hết cho 5?*

Bài toán 194 (Bình, 2022, 249., p. 53). *Có bao nhiêu số chẵn có 3 chữ số, các chữ số khác nhau?*

Bài toán 195 (Bình, 2022, 250., p. 53). *Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số trong đó có ít nhất 2 chữ số như nhau?*

Bài toán 196 (Bình, 2022, 251., p. 53). *Trong các số tự nhiên có 4 chữ số, có bao nhiêu số trong đó có đúng 3 chữ số như nhau?*

Bài toán 197 (Bình, 2022, 252., p. 53). *Trong các số tự nhiên có 3 chữ số, có bao nhiêu số: (a) Chia hết cho 5, có chứa chữ số 5? (b) Chia hết cho 4, có chứa chữ số 4? (c) Chia hết cho 3, không chứa chữ số 3?*

Bài toán 198 (Bình, 2022, 253., p. 54). *Viết liên tiếp các số tự nhiên từ 1 đến 999 ta được 1 số tự nhiên A. (a) Số A có bao nhiêu chữ số? (b) Tính tổng các chữ số của số A.*

Bài toán 199 (Bình, 2022, 254*, p. 54). *Viết dãy số tự nhiên từ 1 đến 999. (a) Chữ số 1 được viết bao nhiêu lần? (b) Chữ số 0 được viết bao nhiêu lần?*

Bài toán 200 (Bình, 2022, 255., p. 54). *Trong các số tự nhiên có 3 chữ số, có bao nhiêu số chứa ít nhất 1 chữ số 4?*

Bài toán 201 (Bình, 2022, 256*, p. 54). *Trong các số tự nhiên từ 1 đến 10000: (a) Có bao nhiêu số chứa chữ số 0? (b) Số chứa chữ số 1 hay số không chứa chữ số 1 có nhiều hơn?*

Bài toán 202 (Bình, 2022, 257., p. 54). *Viết dãy số chẵn 100, 102, ..., 390. Hỏi chữ số 2 được viết bao nhiêu lần?*

Bài toán 203 (Bình, 2022, 258., p. 54). *Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, lập tất cả các số tự nhiên có 7 chữ số trong đó mỗi chữ số trên đều có mặt. Chứng minh rằng tổng tất cả các số đó chia hết cho 9.*

Bài toán 204 (Bình, 2022, 259., p. 54). *Cho 3 chữ số a, b, c khác nhau và khác 0. Gọi A là tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số lập bởi cả 3 chữ số trên. (a) Tập hợp A có bao nhiêu phần tử? (b) Tính tổng các phần tử của tập hợp A, biết rằng $a + b + c = 17$.*

Bài toán 205 (Bình, 2022, 260., p. 54). *Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, lập tất cả các số tự nhiên mà mỗi chữ số trên đều có mặt đúng 1 lần. Tìm tổng các số ấy.*

Bài toán 206 (Bình, 2022, 261., p. 54). *Tìm tổng các số tự nhiên có 3 chữ số lập bởi các chữ số 2, 3, 0, 7 trong đó: (a) Các chữ số có thể giống nhau; (b) Các chữ số đều khác nhau.*

9 Miscellaneous

Nội dung. Số âm, số dương; tập hợp \mathbb{Z} các số nguyên; thứ tự trong \mathbb{Z} ; các phép tính về số nguyên; quy tắc dấu ngoặc; bội, ước của 1 số nguyên.

Bài toán 207 (Tuyên, 2022, Ví dụ 47, p. 43). Tìm $x, y, z \in \mathbb{Z}$ thỏa $x - y = -9$, $y - z = -10$, $z + x = 11$.

Giải. Có $(x - y) + (y - z) + (z + x) = (-9) + (-10) + 11 \Leftrightarrow (x + x) + (-y + y) + (-z + z) = -9 \Leftrightarrow 2x = -8 \Leftrightarrow x = \frac{-8}{2} = -4$. Vì $x - y = -9$ nên $y = x + 9 = -4 + 9 = 5$. Vì $x + z = 11$ nên $z = 11 - x = 11 - (-4) = 15$. Vậy $(x, y, z) = (-4, 5, 15)$. \square

Bài toán 208 (Tuyên, 2022, Ví dụ 48, p. 44). Cho $x \in \mathbb{Z}$. So sánh x^2 với x^3 .

Giải. Nếu $x < 0$ thì $x^2 > 0$, $x^3 < 0$ nên $x^2 > 0 > x^3$. Nếu $x = 0$ hoặc $x = 1$ thì $x^2 = x^3$ (tương ứng $= 0, 1$). Nếu $x > 1$ thì $x^2 - x^3 = x^2(1 - x) < 0$ (vì $x^2 > 0$ & $1 - x < 0$), nên $x^2 < x^3$. \square

Nhận xét 9.1. “Trong cách giải trên ta đã phân chia tập hợp \mathbb{Z} các số nguyên thành 3 tập hợp là tập hợp các số nguyên âm, tập hợp các số 0 & 1, tập hợp các số nguyên lớn hơn 1. Cách phân chia như vậy đảm bảo được yêu cầu không bỏ sót số nguyên nào cũng như không có số nguyên nào thuộc 2 tập hợp.” – Tuyên, 2022, p. 44

Bài toán 209 (Tuyên, 2022, 226., p. 44). Tính giá trị của biểu thức $A = -125 \cdot \underbrace{(x + x + \cdots + x)}_8 - \underbrace{(y - y - \cdots - y)}_8$ với $x = -43$, $y = 17$.

Bài toán 210 (Tuyên, 2022, 227., p. 44). Tìm $x \in \mathbb{Z}$ thỏa: (a) $-4x + 5 = 41$; (b) $7x + 1 = \pm 20$.

Bài toán 211 (Tuyên, 2022, 228., p. 44). Cho $A = \{6, 7, 8, 9\}$, $B = \{-1, -2, -3, 4, 8\}$. (a) Có bao nhiêu hiệu dạng $a - b$ với $a \in A, b \in B$? (b) Có bao nhiêu hiệu chia hết cho 5? (c) Có bao nhiêu hiệu là số nguyên âm?

Bài toán 212 (Tuyên, 2022, 229., p. 44). Tìm $x \in \mathbb{Z}$ thỏa $(x + 5)(3x - 12) > 0$.

Bài toán 213 (Tuyên, 2022, 230., p. 44). Tìm $x \in \mathbb{Z}$ thỏa $(x^3 + 5)(x^3 + 10)(x^3 + 15)(x^3 + 30) < 0$.

Bài toán 214 (Tuyên, 2022, 231., p. 44). Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa $(x - 7)(xy + 1) = 5$.

Bài toán 215 (Tuyên, 2022, 232., p. 44). Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Biết tích ab là liền sau của tích cd & $a + b = c + d$. Chứng minh $a = b$.

Bài toán 216 (Tuyên, 2022, 233., p. 44). Tìm 2 số nguyên mà tích của chúng bằng hiệu của chúng.

Bài toán 217 (Tuyên, 2022, 234., p. 44). Máy cấp đông (làm lạnh nhanh) làm thay đổi nhiệt độ được -2°C sau 1 phút. Khi bắt đầu chạy, nhiệt độ trong tủ đông là $+10^\circ\text{C}$. Hỏi sau mấy phút thì nhiệt độ trong tủ đông là -4°C .

Bài toán 218 (Tuyên, 2022, 235., p. 44). 1 công ty nhỏ trong quý I mỗi tháng thu nhập -100 triệu đồng. Trong quý II mỗi tháng được -20 triệu đồng. Sang quý III mỗi tháng thu nhập $+60$ triệu đồng. Cuối năm tổng kết lại, kết quả kinh doanh của công ty thu nhập được $+420$ triệu đồng. Hỏi mỗi tháng trong quý IV công ty thu nhập được bao nhiêu, biết thu nhập trong các tháng như nhau?

Tài liệu

Bình, Vũ Hữu (2022). *Nâng Cao & Phát Triển Toán 6, tập 1*. Tái bản lần thứ nhất. Kết nối tri thức với cuộc sống. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 200.

Trọng, Đặng Đức, Nguyễn Đức Tấn, Phạm Lê Quốc Thắng, Nguyễn Phúc Trường, and Cao Hoàng Lợi (2021). *Bồi Dưỡng Năng Lực Tự Học Toán 6*. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, p. 195.

Tuyên, Bùi Văn (2022). *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 6*. Tái bản lần thứ 1. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 184.