Vector

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 28 tháng 11 năm 2022

Tóm tắt nội dung

[EN] This text is a collection of problems, from easy to advanced, about vector. This text is also a supplementary material for my lecture note on Elementary Mathematics grade 10, which is stored & downloadable at the following link: GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 10/lecture[1]. The latest version of this text has been stored & downloadable at the following link: GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 10/vector[2].

[VI] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài tập chọn lọc từ cơ bản đến nâng cao về ước, ước chung, ước chung lớn nhất, bội, bội chung, bội chung nhỏ nhất. Tài liệu này là phần bài tập bổ sung cho tài liệu chính – bài giảng GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 10/lecture của tác giả viết cho Toán Sơ Cấp lớp 10. Phiên bản mới nhất của tài liệu này được lưu trữ & có thể tải xuống ở link sau: GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 10/vector.

Mục lục

1 Vector & Các Phép Toán Trên Vector

Bài toán 1.1 (Hải et al., 2022, Ví dụ 1, p. 59). *Cho đoạn thẳng AB & I là trung điểm của AB. (a) Chứng minh $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. (b) Chứng minh $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ với mọi điểm M.*

Bài toán 1.2 (Hải et al., 2022, Ví dụ 2, p. 59). *Cho ΔABC & điểm M nằm giữa B & C. Chứng minh:*

$$\overrightarrow{AM}=\frac{MB}{BC}\overrightarrow{AC}+\frac{MC}{BC}\overrightarrow{AB}.$$

Bài toán 1.3 (Hải et al., 2022, Ví dụ 3, p. 60). *Cho ΔABC. Chứng minh: (a) 3 đường trung tuyến đồng quy tại 1 điểm G. (b) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. (c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$ với mọi điểm M.*

Bài toán 1.4 (Hải et al., 2022, Ví dụ 4, p. 60). *Cho ΔABC & 1 điểm M bất kỳ trong tam giác. Đặt $S_{MBC}=S_a$, $S_{MCA}=S_b$, $S_{MAB}=S_c$. Chứng minh: $S_a\overrightarrow{MA}+S_b\overrightarrow{MB}+S_c\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.*

Bài toán 1.5 (Hải et al., 2022, Ví dụ 5, p. 61). *Cho ΔABC. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với cạnh BC tại D. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh: $a\overrightarrow{MD}+b\overrightarrow{MC}+c\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ (với a,b,c là độ dài các cạnh BC,AC,AB).*

Bài toán 1.6 (Hải et al., 2022, Ví dụ 6, p. 61). *Cho ΔABC & điểm P bất kỳ. Gọi A_1,B_1,C_1 lần lượt là trung điểm của BC,CA,AB. Trên các tia PA_1,PB_1,PC_1 lần lượt lấy các điểm X,Y,Z sao cho $\frac{PX}{PA_1}=\frac{PY}{PB_1}=\frac{PZ}{PC_1}=k$. (a) Chứng minh: AX,BY,CZ đồng quy tại T. (b) Chứng minh: P,T,G thẳng hàng & $\frac{TG}{PG}=\left|\frac{3k}{2+k}\right|$.*

Bài toán 1.7 (Hải et al., 2022, Ví dụ 7, p. 62). *Đường đối trung trong tam giác là đường đối xứng với trung tuyến qua phân giác. Chứng minh: 3 đường đối trung đồng quy tại điểm L thỏa mãn $a^2\overrightarrow{LA}+b^2\overrightarrow{LB}+c^2\overrightarrow{LC}=\vec{0}$. Điểm L như vậy gọi là điểm* Lemoine *của ΔABC.*

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

[1] URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_10/NQBH_elementary_mathematics_grade_10.pdf.

[2] URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_10/vector/NQBH_vector.pdf.

Bài toán 1.8 (Hải et al., 2022, Ví dụ 8, p. 62). *Cho ΔABC & điểm P bất kỳ. PA, PB, PC cắt các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại các điểm A_1, B_1, C_1. Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Gọi A_3, B_3, C_3 lần lượt là trung điểm của AA_1, BB_1, CC_1. (a) Chứng minh: A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 đồng quy. (b) Lấy điểm A_4 thuộc BC sao cho QA_4 song song với PA. Xác định các điểm B_4 & C_4 tương tự A_4. Chứng minh: Q là trọng tâm của $\Delta A_4B_4C_4$.*

Bài toán 1.9 (Hải et al., 2022, Ví dụ 9, p. 64). *Cho ΔABC. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Chứng minh: $a\overrightarrow{ID} + b\overrightarrow{IE} + c\overrightarrow{IF} = \vec{0}$.*

Bài toán 1.10 (Hải et al., 2022, Ví dụ 10, p. 64). *Cho ΔABC có $\widehat{A} = 90^\circ$ & các đường phân giác BE & CF. Đặt $\vec{u} = (AB + BC + CA)\overrightarrow{BC} + BC\overrightarrow{EF}$. Chứng minh: giá của $\vec{u}$ vuông góc với BC.*

Bài toán 1.11 (Hải et al., 2022, **8.1**, p. 65). *Cho vector $\vec{u}$ có 2 phương khác nhau, chứng minh $\vec{u} = \vec{0}$.*

Bài toán 1.12 (Hải et al., 2022, **8.2**, p. 65). *Cho ΔABC có M & N lần lượt là trung điểm của AB & AC. Lấy P đối xứng với M qua N. Chứng minh: $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BC}$.*

Bài toán 1.13 (Hải et al., 2022, **8.3**, p. 65). *Cho ΔABC có tâm đường tròn ngoại tiếp O, trực tâm H. Lấy K đối xứng với O qua BC. Chứng minh: $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{AH}$.*

Bài toán 1.14 (Hải et al., 2022, **8.4**, p. 65). *Cho 2 vector $\vec{a}$ & $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$. Chứng minh: 2 vector $\vec{a}$ & $\vec{b}$ có giá vuông góc.*

Bài toán 1.15 (Hải et al., 2022, **8.5**, p. 65). *Cho ΔABC & ΔDEF thỏa mãn $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$. Chứng minh: ΔABC & ΔDEF có cùng trọng tâm.*

Bài toán 1.16 (Hải et al., 2022, **8.6**, p. 65). *Cho 2 vector $\vec{a}$ & $\vec{b}$ thỏa mãn $\vec{a}$ có giá vuông góc với giá của vector $\vec{a} + \vec{b}$. Chứng minh: $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2$.*

Bài toán 1.17 (Hải et al., 2022, **8.7**, p. 65). *Cho ΔABC & điểm P thỏa mãn $|\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC}| = |\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA}|$, $|\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}|$. Chứng minh: $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC}|$.*

Bài toán 1.18 (Hải et al., 2022, **8.8**, p. 65). *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Cho $(O), B, C$ cố định & A di chuyển trên đường tròn (O). BE, CF là 2 đường cao của ΔABC. Giả sử có vector $\vec{u}$ thỏa mãn $\frac{|\overrightarrow{EF} - \vec{u}|^2}{EF^2} + \frac{|\overrightarrow{OA} - \vec{u}|^2}{OA^2} = 1$. Chứng minh: Hiệu $\frac{1}{EF^2} - \frac{1}{|\vec{u}|^2}$ luôn không đổi khi A thay đổi.*

Bài toán 1.19 (Hải et al., 2022, **8.9**, p. 65). *Cho ΔABC có các phân giác trong AD, BE, CF. Gọi X, Y, Z lần lượt là trung điểm của EF, FD, DE.*

(a) Chứng minh: AX, BY, CZ đồng quy tại điểm P thỏa mãn hệ thức: $a(b + c)\overrightarrow{PA} + b(c + a)\overrightarrow{PB} + c(a + b)\overrightarrow{PC} = \vec{0}$.

(b) Gọi N là tâm đường tròn Euler của ΔABC. Dựng vector $\vec{u}$ thỏa mãn $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{NA}}{a} + \frac{\overrightarrow{NB}}{b} + \frac{\overrightarrow{NC}}{c}$. Gọi Q là trung điểm ON, trong đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Chứng minh: PQ song song hoặc trùng với giá của vector $\vec{u}$.

Tài liệu

Hải, Phạm Việt et al. (2022). *Nâng Cao & Phát Triển Toán 10 Tập 1.* Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 176.