

# Some Topics in Elementary Mathematics/Grade 11

Nguyễn Quân Bá Hồng<sup>1</sup>

Ngày 6 tháng 8 năm 2022

<sup>1</sup>Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam  
e-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com); website: <https://nqbh.github.io>.

# Mục lục

<b>I Đại Số &amp; Giải Tích – Algebra &amp; Analysis</b>	<b>1</b>
<b>1 Hàm Số Lượng Giác &amp; Phương Trình Lượng Giác – Trigonometric Function &amp; Trigonometric Equation</b>	<b>2</b>
1.1 Các Hàm Số Lượng Giác – Trigonometric Functions	2
1.1.1 Các hàm số $y = \sin x$ & $y = \cos x$	2
1.1.1.1 Khái niệm	2
1.1.1.2 Tính chất tuần hoàn của các hàm số $y = \sin x$ & $y = \cos x$	2
1.1.1.3 Sự biến thiên & đồ thị của hàm số $y = \sin x$	3
1.1.1.4 Sự biến thiên & đồ thị của hàm số $y = \cos x$	4
1.1.2 Các hàm số $y = \tan x$ & $y = \cot x$	4
1.1.2.1 Định nghĩa	4
1.1.2.2 Tính chất tuần hoàn	5
1.1.2.3 Sự biến thiên & đồ thị của hàm số $y = \tan x$	5
1.1.2.4 Sự biến thiên & đồ thị của hàm số $y = \cot x$	6
1.1.3 Về khái niệm hàm số tuần hoàn	7
1.1.4 Dao động điều hòa	7
1.1.5 Âm thanh	7
1.2 Phương Trình Lượng Giác Cơ Bản – Basic Trigonometric Equation	8
1.2.1 Phương trình $\sin x = m$	8
1.2.2 Phương trình $\cos x = m$	9
1.2.3 Phương trình $\tan x = m$	9
1.2.4 Phương trình $\cot x = m$	10
1.2.5 1 số điều cần lưu ý	10
1.2.6 Dùng máy tính bỏ túi để tìm 1 góc khi biết 1 giá trị lượng giác của nó	11
1.3 1 Số Dạng Phương Trình Lượng Giác Cơ Bản	11
<b>2 Tổ Hợp &amp; Xác Suất</b>	<b>12</b>
2.1 2 Quy Tắc Đếm Cơ Bản	12
2.2 Hoán Vị, Chỉnh Hợp & Tổ Hợp	12
2.3 Nhị Thức Newton	12
2.4 Biến Cố & Xác Suất của Biến Cố	12
2.5 Các Quy Tắc Tính Xác Suất	12
2.6 Biến Ngẫu Nhiên Rời Rạc	12
<b>3 Dãy Số. Cấp Số Cộng &amp; Cấp Số Nhân</b>	<b>13</b>
3.1 Phương Pháp Quy Nạp Toán Học	13
3.2 Dãy Số	13
3.3 Cấp Số Cộng	13
3.4 Cấp Số Nhân	13
<b>4 Giới Hạn</b>	<b>14</b>
4.1 Dãy Số Có Giới Hạn 0	14
4.2 Dãy Số Có Giới Hạn Hữu Hạn	14
4.3 Dãy Số Có Giới Hạn Vô Cực	14
4.4 Định Nghĩa & 1 Số Định Lý về Giới Hạn của Hàm Số	14
4.5 Giới Hạn 1 Bên	14
4.6 1 Vài Quy Tắc Tìm Giới Hạn Vô Cực	14
4.7 Các Dạng Vô Hình	14
4.8 Hàm Số Liên Tục	14

<b>5</b>	<b>Đạo Hàm</b>	<b>15</b>
5.1	Khái Niệm Đạo Hàm	15
5.2	Các Quy Tắc Tính Đạo Hàm	15
5.3	Đạo Hàm của Các Hàm Số Lượng Giác	15
5.4	Vị Phân	15
5.5	Đạo Hàm Cấp Cao	15
<b>II</b>	<b>Hình Học – Geometry</b>	<b>16</b>
<b>6</b>	<b>Phép Dời Hình &amp; Phép Đồng Dạng Trong Mặt Phẳng</b>	<b>17</b>
6.1	Mở Đầu về Phép Biến Hình	17
6.1.1	Phép biến hình	17
6.1.2	Ký hiệu & thuật ngữ	18
6.2	Phép Tịnh Tiến & Phép Dời Hình	18
6.2.1	Định nghĩa phép tịnh tiến	18
6.2.2	Các tính chất của phép tịnh tiến	18
6.2.3	Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến	18
6.2.4	Ứng dụng của phép tịnh tiến	19
6.2.5	Phép dời hình	19
6.3	Phép Đối Xứng Trục	19
6.4	Phép Quay & Phép Đối Xứng Tâm	19
6.5	2 Hình bằng Nhau	19
6.6	Phép Vị Tự	19
6.7	Phép Đồng Dạng	19
6.8	Hình Tự Đồng Dạng & Hình Học Fractal	19
<b>7</b>	<b>Đường Thẳng &amp; Mặt Phẳng Trong Không Gian</b>	<b>20</b>
7.1	Đại Cương về Đường Thẳng & Mặt Phẳng	20
7.2	2 Đường Thẳng Song Song	20
7.3	Đường Thẳng Song Song với Mặt Phẳng	20
7.4	2 Mặt Phẳng Song Song	20
7.5	Phép Chiếu Song Song	20
7.6	Phương Pháp Tiên Đề Trong Hình Học	20
<b>8</b>	<b>Vector Trong Không Gian. Quan Hệ Vuông Góc</b>	<b>21</b>
8.1	Vector Trong Không Gian. Sự Đồng Phẳng của Các Vector	21
8.2	2 Đường Thẳng Vuông Góc	21
8.3	Đường Thẳng Vuông Góc với Mặt Phẳng	21
8.4	2 Mặt Phẳng Vuông Góc	21
8.5	Khoảng Cách	21
<b>A</b>	<b>Phụ Lục – Appendices</b>	<b>22</b>
A.1	Hàm Số Chẵn & Hàm Số Lẻ – Even & Odd Functions	22
A.1.1	Hàm số chẵn – Even function	22
A.1.2	Hàm số lẻ – Odd function	22
A.1.3	Các tính chất cơ bản	22
A.1.3.1	Tính duy nhất	22
A.1.3.2	Cộng & trừ hàm số chẵn lẻ	22
A.1.3.3	Nhân & chia hàm số chẵn lẻ	23
A.1.3.4	Hàm hợp (tích ánh xạ)	23
A.1.4	Phân tích chẵn-lẻ	23
	<b>Tài liệu tham khảo</b>	<b>25</b>

## Phần I

# Đại Số & Giải Tích – Algebra & Analysis

# Chương 1

## Hàm Số Lượng Giác & Phương Trình Lượng Giác – Trigonometric Function & Trigonometric Equation

“Nhiều hiện tượng tuần hoàn đơn giản trong thực tế được mô tả bởi những hàm số lượng giác. Chương này cung cấp những kiến thức cơ bản về các *hàm số lượng giác* & cách giải các *phương trình lượng giác* đơn giản.” – Quỳnh, Doan, et al., 2020, p. 3

**Nội dung.** *Tính chất tuần hoàn của các hàm số lượng giác & phương pháp sử dụng đường tròn lượng giác để tìm nghiệm của các phương trình lượng giác cơ bản, kỹ năng biến đổi lượng giác & kỹ năng giải các dạng phương trình lượng giác.*

### 1.1 Các Hàm Số Lượng Giác – Trigonometric Functions

“Các hàm số lượng giác/trigonometric<sup>1 2</sup> functions thường được dùng để mô tả những hiện tượng thay đổi 1 cách tuần hoàn hay gặp trong thực tiễn, khoa học & kỹ thuật.” – Quỳnh, Doan, et al., 2020, p. 4

#### 1.1.1 Các hàm số $y = \sin x$ & $y = \cos x$

##### 1.1.1.1 Khái niệm

**Định nghĩa 1.1.1** (Hàm số sin, cos). *Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực  $x \in \mathbb{R}$  với sin của góc lượng giác có số đo radian bằng  $x$  được gọi là hàm số sin, ký hiệu là  $y = \sin x$ . Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực  $x \in \mathbb{R}$  với cosin của góc lượng giác có số đo radian bằng  $x$  được gọi là hàm số cosin, ký hiệu là  $y = \cos x$ .*

“Tập xác định của các hàm số  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$  là  $\mathbb{R}$ . Do đó các hàm số sin & cosin được viết là:

$$\begin{array}{ll} \sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin x & x \mapsto \cos x \end{array}$$

Hàm số  $y = \sin x$  là 1 *hàm số lẻ* vì  $\sin(-x) = -\sin(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , trong khi hàm số  $y = \cos x$  là 1 *hàm số chẵn* vì  $\cos(-x) = \cos x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . – Quỳnh, Doan, et al., 2020, p. 4. Về định nghĩa & tính chất của hàm số chẵn & hàm số lẻ, xem Sect. A.1. Có thể xem thêm [Wikipedia/hàm số chẵn & lẻ](#) & [Wikipedia/even & odd functions](#).

##### 1.1.1.2 Tính chất tuần hoàn của các hàm số $y = \sin x$ & $y = \cos x$

“Với mỗi  $k \in \mathbb{Z}$ , số  $k2\pi$  thỏa mãn:  $\sin(x + k2\pi) = \sin x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ . Ngược lại, có thể chứng minh rằng số  $T$  sao cho  $\sin(x + T) = \sin x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  phải có dạng  $T = k2\pi$ , với  $k \in \mathbb{Z}$ . Rõ ràng, trong các số dạng  $k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), số dương nhỏ nhất là  $2\pi$ . Vậy đối với hàm số  $y = \sin x$ , số  $T = 2\pi$  là số dương nhỏ nhất thỏa mãn  $\sin(x + T) = \sin x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Hàm số  $y = \cos x$  cũng có tính chất tương tự. Ta nói 2 hàm số đó là những *hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$* .”

<sup>1</sup>**trigonometric** [a] (also **trigonometrical**) (*mathematics*) connected with the types of mathematics that deals with the relationship between the sides & angles of triangles.

<sup>2</sup>**trigonometry** [n] [uncountable] the type of mathematics that deals with the relationship between the sides & angles of triangles.

Từ tính chất tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$ , ta thấy khi biết giá trị các hàm số  $y = \sin x$  &  $y = \cos x$  trên 1 đoạn có độ dài  $2\pi$  (e.g., đoạn  $[0; 2\pi]$  hay đoạn  $[-\pi; \pi]$ ) thì ta tính được giá trị của chúng tại mọi  $x \in \mathbb{R}$ . (Cứ mỗi khi biến số được cộng thêm  $2\pi$  thì giá trị của các hàm số đó lại trở về như cũ; điều này giải thích từ “tuần hoàn”).” – Quỳnh, Doan, et al., 2020, p. 4–5

### 1.1.1.3 Sự biến thiên & đồ thị của hàm số $y = \sin x$

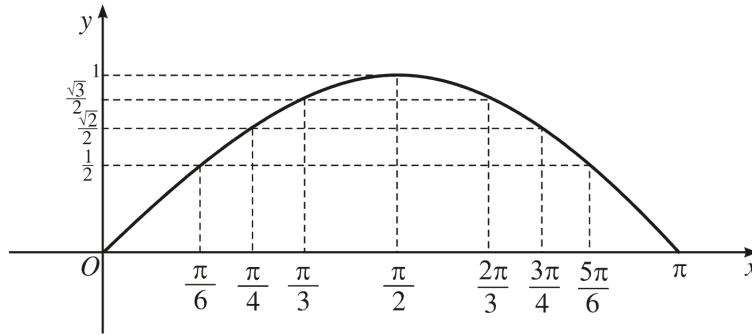
“Do hàm số  $y = \sin x$  là hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$  nên ta chỉ cần khảo sát hàm số đó trên 1 đoạn có độ dài  $2\pi$ , e.g., trên đoạn  $[-\pi; \pi]$ .”

- **Chiều biến thiên.** *Bảng biến thiên của hàm số  $y = \sin x$  trên đoạn  $[-\pi; \pi]$ :*

$x$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$0$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$y = \sin x$	0	$\searrow -1$	$\nearrow 0$	$\nearrow 1$	$\searrow 0$

Hình 1.1: Bảng biến thiên của hàm số  $y = \sin x$  trên đoạn  $[-\pi; \pi]$ .

- **Đồ thị.** “Khi vẽ đồ thị của hàm số  $y = \sin x$  trên đoạn  $[-\pi; \pi]$ , ta nên để ý rằng: Hàm số  $y = \sin x$  là 1 hàm số lẻ, do đó đồ thị của nó nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng. Vì vậy, đầu tiên ta vẽ đồ thị của hàm số  $y = \sin x$  trên đoạn  $[0; \pi]$ .



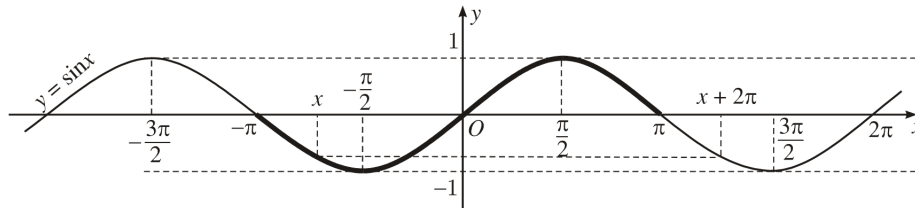
Hình 1.2: Đồ thị của hàm số  $y = \sin x$  trên đoạn  $[0; \pi]$ .

Trên đoạn  $[0; \pi]$ , đồ thị của hàm số  $y = \sin x$  (Fig. 1.2) đi qua các điểm có tọa độ  $(x; y)$  trong bảng sau:

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$y = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Bảng 1.1: Các giá trị của hàm  $y = \sin x$  tại 1 số điểm  $\in [0; \pi]$ .

Phần đồ thị của hàm số  $y = \sin x$  trên đoạn  $[0; \pi]$  cùng với hình đối xứng của nó qua gốc  $O$  lập thành đồ thị của hàm số  $y = \sin x$  trên đoạn  $[-\pi; \pi]$  (Fig. 1.3).



Hình 1.3: Đồ thị của hàm số  $y = \sin x$  trên  $\mathbb{R}$  – đường hình sin.

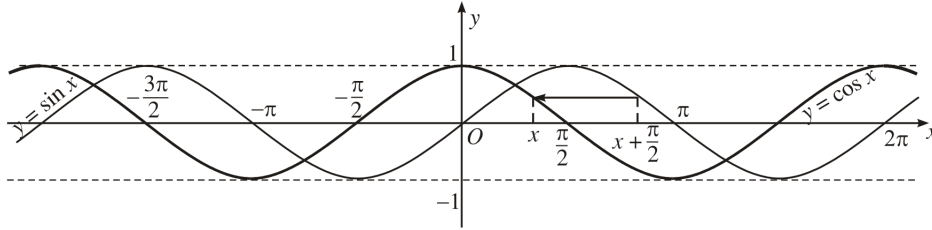
Tính tiến phần đồ thị vừa vẽ sang trái, sang phải những đoạn có độ dài  $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$  thì được toàn bộ đồ thị hàm số  $y = \sin x$ . Đồ thị đó được gọi là 1 đường hình sin (Fig. 1.3).” – Quỳnh, Doan, et al., 2020, pp. 6–7

**Nhận xét 1.1.1.** 1. “Khi  $x$  thay đổi, hàm số  $y = \sin x$  nhận mọi giá trị thuộc đoạn  $[-1; 1]$ . Ta nói tập giá trị của hàm số  $y = \sin x$  là đoạn  $[-1; 1]$ .

2. Hàm số  $y = \sin x$  đồng biến trên khoảng  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ . Từ đó, do tính chất tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$ , hàm số  $y = \sin x$  đồng biến trên mỗi khoảng  $(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .” – Quỳnh, Doan, et al., 2020, p. 7

#### 1.1.1.4 Sự biến thiên & đồ thị của hàm số $y = \cos x$

“Ta có thể tiến hành khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số  $y = \cos x$  tương tự như đã làm đối với hàm số  $y = \sin x$  trên đây. Tuy nhiên, ta nhận thấy  $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , nên bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số  $y = \sin x$  sang trái 1 đoạn có độ dài  $\frac{\pi}{2}$ , ta được đồ thị hàm số  $y = \cos x$  (nó cũng được gọi là 1 đường hình sin) (Fig. 1.4).



Hình 1.4: Đồ thị của hàm số  $y = \cos x$  trên  $\mathbb{R}$ .

Căn cứ vào đồ thị của hàm số  $y = \cos x$ , ta lập được bảng biến thiên của hàm số đó trên đoạn  $[-\pi; \pi]$  (Fig. 1.5):

$x$	$-\pi$	$0$	$\pi$
$y = \cos x$	$-1$	$1$	$-1$

Hình 1.5: Bảng biến thiên của hàm số  $y = \cos x$  trên đoạn  $[-\pi; \pi]$ .

**Nhận xét 1.1.2.** 1. Khi  $x$  thay đổi, hàm số  $y = \cos x$  nhận mọi giá trị thuộc đoạn  $[-1; 1]$ . Ta nói tập giá trị của hàm số  $y = \cos x$  là đoạn  $[-1; 1]$ .

2. Do hàm số  $y = \cos x$  là hàm số chẵn nên đồ thị của hàm số  $y = \cos x$  nhận trục tung làm trục đối xứng.

3. Hàm số  $y = \cos x$  đồng biến trên khoảng  $(-\pi; 0)$ . Từ đó do tính chất tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$ , hàm số  $y = \cos x$  đồng biến trên mỗi khoảng  $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .” – Quỳnh, Doan, et al., 2020, pp. 8–9

Hàm số $y = \sin x$	Hàm số $y = \cos x$
Có tập xác định là $\mathbb{R}$	Có tập xác định là $\mathbb{R}$
Có tập giá trị là $[-1; 1]$	Có tập giá trị là $[-1; 1]$
Là hàm số lẻ	Là hàm số chẵn
Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $2\pi$	Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $2\pi$
Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi)$ & nghịch biến trên mỗi khoảng $(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi)$ , $k \in \mathbb{Z}$	Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ & nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ , $k \in \mathbb{Z}$
Có đồ thị là 1 đường hình sin	Có đồ thị là 1 đường hình sin

Bảng 1.2: So sánh tính chất của 2 hàm số  $y = \sin x$  &  $y = \cos x$ .

### 1.1.2 Các hàm số $y = \tan x$ & $y = \cot x$

#### 1.1.2.1 Định nghĩa

- “Với mỗi số thực  $x \in \mathbb{R}$  mà  $\cos x \neq 0$ , i.e.,  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), ta xác định được số thực  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ . Đặt  $\mathcal{D}_1 := \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Định nghĩa 1.1.2** (Hàm số tan). Quy tắc đặt tương ứng mỗi số  $x \in \mathcal{D}_1$  với số thực  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  được gọi là hàm số tang, ký hiệu là  $y = \tan x$ .

Vậy hàm số  $y = \tan x$  có tập xác định  $\mathcal{D}_1$ ; ta viết

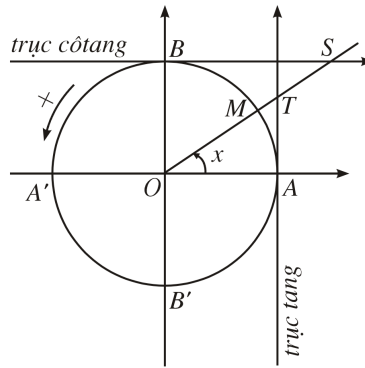
$$\begin{aligned}\tan : \mathcal{D}_1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tan x.\end{aligned}$$

- Với mỗi số thực  $x \in \mathbb{R}$  mà  $\sin x \neq 0$ , i.e.,  $x \neq k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), ta xác định được số thực  $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ . Đặt  $\mathcal{D}_2 := \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Định nghĩa 1.1.3** (Hàm số cot). Quy tắc đặt tương ứng mỗi số  $x \in \mathcal{D}_2$  với số thực  $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$  được gọi là hàm số cotang, ký hiệu là  $y = \cot x$ .

Vậy hàm số  $y = \cot x$  có tập xác định là  $\mathcal{D}_2$ ; ta viết

$$\begin{aligned}\cot : \mathcal{D}_2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cot x.\end{aligned}$$



Hình 1.6: Trục tang & trục cotang.

Trên hình 1.6, ta có  $(OA, OM) = x$ ,  $\tan x = \overline{AT}$ ,  $\cot x = \overline{BS}$ .

- Nhận xét 1.1.3.** 1. Hàm số  $y = \tan x$  là 1 hàm số lẻ vì nếu  $x \in \mathcal{D}_1$  thì  $-x \in \mathcal{D}_1$  &  $\tan(-x) = -\tan x$ .  
 2. Hàm số  $y = \cot x$  cũng là 1 hàm số lẻ vì nếu  $x \in \mathcal{D}_2$  thì  $-x \in \mathcal{D}_2$  &  $\cot(-x) = -\cot x$ . – Quỳnh, Doan, et al., 2020, pp. 9–10

### 1.1.2.2 Tính chất tuần hoàn

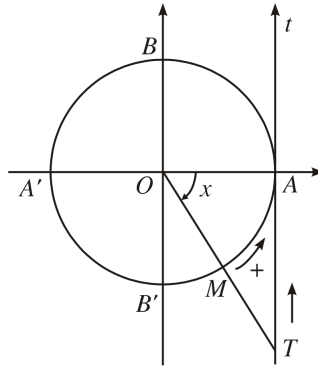
“Có thể chứng minh rằng  $T = \pi$  là số dương nhỏ nhất thỏa mãn  $\tan(x + T) = \tan x$ ,  $\forall x \in \mathcal{D}_1$ , &  $T = \pi$  cũng là số dương nhỏ nhất thỏa mãn  $\cot(x + T) = \cot x$ ,  $\forall x \in \mathcal{D}_2$ . Ta nói các hàm số  $y = \tan x$  &  $y = \cot x$  là những hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $\pi$ .” – Quỳnh, Doan, et al., 2020, p. 10

### 1.1.2.3 Sự biến thiên & đồ thị của hàm số $y = \tan x$

“Do tính chất tuần hoàn với chu kỳ  $\pi$  của hàm số  $y = \tan x$ , ta chỉ cần khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của nó trên khoảng  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \subset \mathcal{D}_1$ , rồi tịnh tiến phần đồ thị vừa vẽ sang trái, sang phải các đoạn của độ dài  $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$  thì được toàn bộ đồ thị của hàm số  $y = \tan x$ .

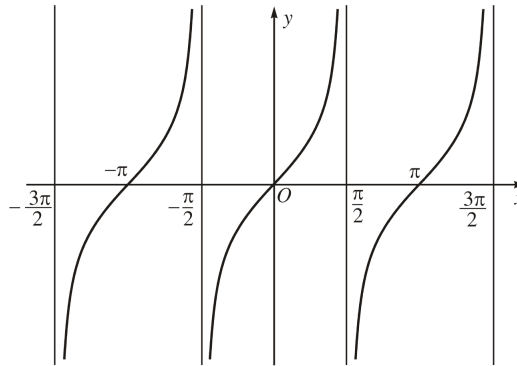
- Chiều biến thiên:



Hình 1.7: Chiều biến thiên của hàm  $y = \tan x$ .

Khi cho  $x = (OA, OM)$  tăng từ  $-\frac{\pi}{2}$  đến  $\frac{\pi}{2}$  (không kể  $\pm\frac{\pi}{2}$ ) thì điểm  $M$  chạy trên đường tròn lượng giác theo chiều dương từ  $B'$  đến  $B$  (không kể  $B'$  &  $B$ ). Khi đó điểm  $T$  thuộc trục tang  $At$  sao cho  $\overline{AT} = \tan x$  chạy dọc theo  $At$  suốt từ dưới lên trên, nên  $\tan x$  tăng từ  $-\infty$  đến  $+\infty$  (qua quá trị 0 khi  $x = 0$ )."

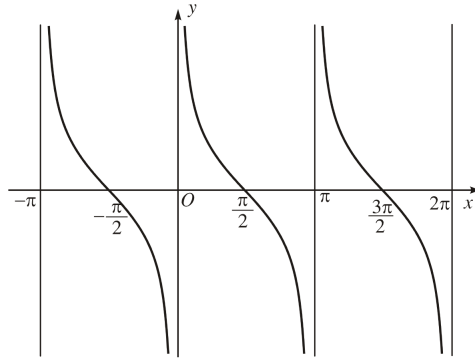
- *Đồ thị*: “Đồ thị của hàm số  $y = \tan x$  có dạng như ở hình 1.8.

Hình 1.8: Đồ thị của hàm  $y = \tan x$ .

- Nhận xét 1.1.4.**
1. Khi  $x$  thay đổi, hàm số  $y = \tan x$  nhận mọi giá trị thực. Ta nói tập giá trị của hàm số  $y = \tan x$  là  $\mathbb{R}$ .
  2. Vì hàm số  $y = \tan x$  là hàm số lẻ nên đồ thị của nó nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.
  3. Hàm số  $y = \tan x$  không xác định tại  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Với mỗi  $k \in \mathbb{Z}$ , đường thẳng vuông góc với trục hoành, đi qua điểm  $(\frac{\pi}{2} + k\pi; 0)$  gọi là 1 đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \tan x$ . (Từ “tiệm cận” có nghĩa là ngày càng gần. E.g., nói đường thẳng  $x = \frac{\pi}{2}$  là 1 đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \tan x$  nhằm diễn tả tính chất: điểm  $M$  trên đồ thị có hoành độ càng gần  $\frac{\pi}{2}$  thì  $M$  càng gần đường thẳng  $x = \frac{\pi}{2}$ ).” – Quỳnh, Doan, et al., 2020, pp. 11–12

#### 1.1.2.4 Sự biến thiên & đồ thị của hàm số $y = \cot x$

“Hàm số  $y = \cot x$  xác định trên  $\mathcal{D}_2 = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$  là 1 hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $\pi$ . Ta có thể khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của nó tương tự như đã làm đối với hàm số  $y = \tan x$ . Đồ thị của hàm số  $y = \cot x$  có dạng như hình 1.9.

Hình 1.9: Đồ thị của hàm  $y = \cot x$ .

Nó nhận mỗi đường thẳng vuông góc với trục hoành, đi qua điểm  $(k\pi; 0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  làm 1 đường tiệm cận.” – Quỳnh, Doan, et al., 2020, p. 12

Hàm số $y = \tan x$	Hàm số $y = \cot x$
Có tập xác định là $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$	Có tập xác định là $\mathcal{D}_2 = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
Có tập giá trị là $\mathbb{R}$	Có tập giá trị là $\mathbb{R}$
Là hàm số lẻ	Là hàm số lẻ
Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $\pi$	Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $\pi$
Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$ , $k \in \mathbb{Z}$	Nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$ , $k \in \mathbb{Z}$
Có đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ( $k \in \mathbb{Z}$ ) làm 1 đường tiệm cận	Có đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x = k\pi$ ( $k \in \mathbb{Z}$ ) làm 1 đường tiệm cận

Bảng 1.3: So sánh tính chất của 2 hàm số  $y = \tan x$  &  $y = \cot x$ .

### 1.1.3 Về khái niệm hàm số tuần hoàn

“Các hàm số  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$  là những hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$ ; các hàm số  $y = \tan x$ ,  $y = \cot x$  là những hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $\pi$ . 1 cách tổng quát:

**Định nghĩa 1.1.4** (Hàm số tuần hoàn). *Hàm số  $y = f(x)$  xác định trên tập hợp  $\mathcal{D}$  được gọi là hàm số tuần hoàn nếu có số  $T \neq 0$  sao cho với mọi  $x \in \mathcal{D}$  ta có  $x + T \in \mathcal{D}$ ,  $x - T \in \mathcal{D}$  &  $f(x + T) = f(x)$ . Nếu có số  $T$  dương nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên thì hàm số đó được gọi là 1 hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $T$ .” – Quỳnh, Doan, et al., 2020, p. 13*

**Ví dụ 1.1.1.** Các hàm số có dạng  $y = a \sin bx$ , với  $a, b \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$  là những hàm số tuần hoàn.

### 1.1.4 Dao động điều hòa

“Nhiều hiện tượng tự nhiên thay đổi có tính chất tuần hoàn (lặp đi lặp lại sau khoảng thời gian xác định) như: Chuyển động của các hành tinh trong hệ mặt trời, chuyển động của guồng nước quay, chuyển động của quả lắc đồng hồ, sự biến thiên của cường độ dòng điện xoay chiều, ... Hiện tượng tuần hoàn đơn giản nhất là *dao động điều hòa* được mô tả bởi hàm số  $y = A \sin(\omega x + \alpha) + B$ , trong đó  $A, B, \omega$  &  $\alpha$  là những hằng số;  $A$  &  $\omega$  khác 0. Đó là hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $\frac{2\pi}{|\omega|}$ ;  $|A|$  gọi là *biên độ*. Đồ thị của nó là 1 *đường hình sin* có được từ đồ thị của hàm số  $y = A \sin \omega x$  bằng cách tịnh tiến thích hợp (theo vector  $-\frac{\alpha}{\omega} \vec{i}$  rồi theo vector  $B \vec{j}$ , i.e., tịnh tiến theo vector  $-\frac{\alpha}{\omega} \vec{i} + B \vec{j}$ ).” – Quỳnh, Doan, et al., 2020, pp. 15–16

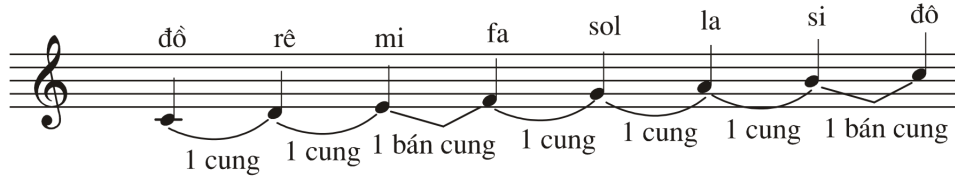
### 1.1.5 Âm thanh

“Âm thanh được tạo nên bởi sự thay đổi áp suất của môi trường vật chất (chất khí, chất lỏng, chất rắn) 1 cách tuần hoàn theo thời gian (dao động tuần hoàn) & được lan truyền trong môi trường đó (sóng âm thanh).

Nếu dao động tuần hoàn ấy có chu kỳ  $T$  (đo bằng đơn vị thời gian là giây) thì  $\frac{1}{T}$  gọi là *tần số* của dao động (i.e., số chu kỳ trong 1 giây); đơn vị của tần số là Hertz (abbr., Hz). Âm thanh tai người nghe được là dao động có tần số trong khoảng từ 17–20 Hz đến 20000 Hz. Dao động có tần số cao hơn 20000 Hz được gọi là *siêu âm*.

Trong âm nhạc (nghệ thuật phối hợp các âm thanh) người ta thường dùng những nốt nhạc để ghi những âm có tần số xác định. Tần số dao động càng lớn thì âm càng cao. Khi tăng tần số 1 âm lên gấp đôi thì ta nói cao độ của âm đó được tăng thêm 1 quãng 8. Người ta thường chia quãng 8 đó thành 12 quãng bằng nhau, mỗi quãng gọi là 1 bán cung để đo chênh

lệch cao độ giữa các âm (xem SGK Âm nhạc & Mỹ thuật lớp 7). Với 2 âm cách nhau 1 bán cung, tỷ số các tần số của chúng bằng  $\sqrt[12]{2}$ ; với 2 âm cách nhau 1 cung (i.e., 2 bán cung), tỷ số các tần số của chúng bằng  $(\sqrt[12]{2})^2 = \sqrt[6]{2}$ . Ở khuông nhạc dưới đây có ghi các nốt nhạc của 1 “âm giai” (quãng 8) cùng khoảng cách cao độ giữa 2 âm ứng với 2 nốt kế nhau. Âm *la* của âm giai đó có tần số 440 Hz (do đó, e.g., âm *si* kế đó có tần số  $440\sqrt[6]{2}$  Hz).



Hình 1.10: Khuông nhạc.

Trong âm nhạc, ngoài các âm riêng lẻ còn có hợp âm (kết hợp các âm thanh). Nhà toán học Pháp **Joseph Fourier** (1768–1830) đã chứng minh rằng 1 hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $T$  có thể phân tích thành “tổng” của 1 hằng số với những hàm số tuần hoàn có đồ thị là những đường hình sin với chu kỳ  $\frac{T}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). Điều đó giúp ta hiểu sâu hơn về hợp âm, hòa âm, âm bội & âm sắc.” – Quỳnh, Doan, et al., 2020, p. 18

## 1.2 Phương Trình Lượng Giác Cơ Bản – Basic Trigonometric Equation

“Trên thực tế, có nhiều bài toán dẫn đến việc giải các phương trình có 1 trong các dạng  $\sin x = m$ ,  $\cos x = m$ ,  $\tan x = m$ , &  $\cot x = m$ , trong đó  $x$  là ẩn số ( $x \in \mathbb{R}$ ) &  $m$  là 1 số cho trước. Đó là các *phương trình lượng giác cơ bản*.” – Quỳnh, Doan, et al., 2020, p. 19

### 1.2.1 Phương trình $\sin x = m$

“Giả sử  $m$  là 1 số đã cho. Xét phương trình

$$\sin x = m. \quad (\sin)$$

Hiển nhiên phương trình (sin) xác định với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Ta đã biết  $|\sin x| \leq 1$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Do đó phương trình (sin) vô nghiệm khi  $|m| > 1$ . Mặt khác, khi  $x$  thay đổi,  $\sin x$  nhận mọi giá trị từ  $-1$  đến  $1$  nên phương trình (sin) luôn có nghiệm khi  $|m| \leq 1$ .” – Quỳnh, Doan, et al., 2020, p. 20

Nếu  $\alpha$  là 1 nghiệm của phương trình (sin), i.e.,  $\sin \alpha = m$  thì

$$\sin x = m \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (1.2.1)$$

“Ta nói rằng  $x = \alpha + k2\pi$  &  $x = \pi - \alpha + k2\pi$  là 2 họ nghiệm của phương trình (sin).

Kể từ đây, để cho gọn ta quy ước rằng nếu trong 1 biểu thức nghiệm của phương trình lượng giác có chứa  $k$  mà không giải thích gì thêm thì ta hiểu rằng  $k$  nhận mọi giá trị thuộc  $\mathbb{Z}$ . E.g.,  $x = \alpha + k2\pi$  có nghĩa là  $x$  lấy mọi giá trị thuộc tập hợp  $\{\alpha, \alpha \pm 2\pi, \alpha \pm 4\pi, \alpha \pm 6\pi, \dots\}$ .” – Quỳnh, Doan, et al., 2020, p. 21

“Trong mặt phẳng tọa độ, nếu vẽ đồ thị ( $G$ ) của hàm số  $y = \sin x$  & đường thẳng ( $d$ ):  $y = m$  thì hoành độ mỗi giao điểm của ( $d$ ) & ( $G$ ) (nếu có) là 1 nghiệm của phương trình  $\sin x = m$ .” – Quỳnh, Doan, et al., 2020, p. 22

**Lưu ý 1.2.1.** 1. “Khi  $m \in \{0; \pm 1\}$ , công thức (1.2.1) có thể viết gọn như sau:

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \quad \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, \quad \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi.$$

2. Để thấy rằng với  $m$  cho trước mà  $|m| \leq 1$ , phương trình  $\sin x = m$  có đúng 1 nghiệm nằm trong đoạn  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ . Người ta thường ký hiệu đó là  $\arcsin m$ . Khi đó

$$\sin x = m \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin m + k2\pi, \\ x = \pi - \arcsin m + k2\pi. \end{cases}$$

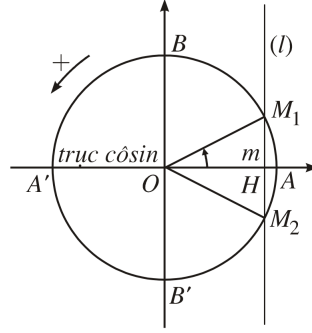
3. Từ (1.2.1) ta thấy rằng: Nếu  $\alpha$  &  $\beta$  là 2 số thực thì  $\sin \beta = \sin \alpha$  khi & chỉ khi có số nguyên  $k$  để  $\beta = \alpha + k2\pi$  hoặc  $\beta = \pi - \alpha + k2\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .” – Quỳnh, Doan, et al., 2020, pp. 22–23

### 1.2.2 Phương trình $\cos x = m$

“Xét phương trình

$$\cos x = m, \quad (\cos)$$

trong đó  $m$  là 1 số cho trước. Hiển nhiên phương trình (cos) xác định với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Dễ thấy rằng: Khi  $|m| > 1$ , phương trình (cos) vô nghiệm. Khi  $|m| \leq 1$ , phương trình (II) luôn có nghiệm. Để tìm tất cả các nghiệm của (II), trên trục côsin ta lấy điểm  $H$  sao cho  $\overline{OH} = m$ . Gọi  $(l)$  là đường thẳng đi qua  $H$  & vuông góc với trục côsin (Fig. 1.11).



Hình 1.11: Trục côsin.

Do  $|m| \leq 1$  nên đường thẳng  $(l)$  cắt đường tròn lượng giác tại 2 điểm  $M_1$  &  $M_2$ . 2 điểm này đối xứng với nhau qua trục côsin (chúng trùng nhau nếu  $m = \pm 1$ ). Ta thấy số đo của các góc lượng giác  $(OA, OM_1)$  &  $(OA, OM_2)$  là tất cả các nghiệm của (cos). Nếu  $\alpha$  là số đo của 1 góc trong chúng, nói cách khác, nếu  $\alpha$  là 1 nghiệm của (cos) thì các góc đó có các số đo là  $\pm\alpha + k2\pi$ . Vậy ta có

Nếu  $\alpha$  là 1 nghiệm của phương trình (cos), i.e.,  $\cos \alpha = m$  thì

$$\cos x = m \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi, \\ x = -\alpha + k2\pi. \end{cases} \quad (1.2.2)$$

**Lưu ý 1.2.2.** 1. Đặc biệt, khi  $m \in \{0; \pm 1\}$ , công thức (1.2.2) có thể viết gọn như sau:

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, \quad \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, \quad \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

2. Dễ thấy rằng với mọi số  $m$  cho trước mà  $|m| \leq 1$ , phương trình  $\cos x = m$  có đúng 1 nghiệm nằm trong đoạn  $[0; \pi]$ . Người ta thường ký hiệu nghiệm đó là  $\arccos m$ . Khi đó

$$\cos x = m \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arccos m + k2\pi, \\ x = -\arccos m + k2\pi, \end{cases}$$

mà cũng thường được viết là  $x = \pm \arccos m + k2\pi$ .

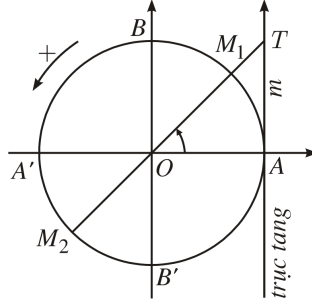
3. Từ (1.2.2) ta thấy rằng: Nếu  $\alpha$  &  $\beta$  là 2 số thực thì  $\cos \beta = \cos \alpha$  khi & chỉ khi có số nguyên  $k$  để  $\beta = \alpha + k2\pi$  hoặc  $\beta = -\alpha + k2\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . – Quỳnh, Doan, et al., 2020, pp. 23–24

### 1.2.3 Phương trình $\tan x = m$

“Cho  $m$  là 1 số tùy ý. Xét phương trình

$$\tan x = m. \quad (\tan)$$

Điều kiện xác định (ĐKXD) của phương trình (tan) là  $\cos x \neq 0$ . Ta đã biết, khi  $x$  thay đổi,  $\tan x$  nhận mọi giá trị từ  $-\infty$  đến  $+\infty$ . Do đó phương trình (tan) luôn có nghiệm. Để tìm tất cả các nghiệm của (tan), trên trục tang, ta lấy điểm  $T$  sao cho  $\overline{AT} = m$ . Đường thẳng  $OT$  cắt đường tròn lượng giác tại 2 điểm  $M_1$  &  $M_2$  (Fig. 1.12).



Hình 1.12: Trục tang.

Ta có:  $\tan(OA, OM_1) = \tan(OA, OM_2) = \overline{AT} = m$ . Gọi số đo của 1 trong các góc lượng giác  $(OA, OM_1)$  &  $(OA, OM_2)$  là  $\alpha$ ; i.e.,  $\alpha$  là 1 nghiệm nào đó của phương trình (tan). Khi đó, các góc lượng giác  $(OA, OM_1)$  &  $(OA, OM_2)$  có các số đo là  $\alpha + k\pi$ . Đó là tất cả các nghiệm của phương trình (tan) (hiển nhiên chúng thỏa mãn ĐKXD của (tan)). Vậy ta có:

Nếu  $\alpha$  là 1 nghiệm của phương trình (tan), i.e.,  $\tan \alpha = m$  thì

$$\tan x = m \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi. \quad (1.2.3)$$

**Lưu ý 1.2.3.** 1. Để thấy rằng với mọi số  $m \in \mathbb{R}$  cho trước, phương trình  $\tan x = m$  có đúng 1 nghiệm nằm trong khoảng  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ . Người ta thường ký hiệu nghiệm đó là  $\arctan m$ . Khi đó

$$\tan x = m \Leftrightarrow x = \arctan m + k\pi.$$

2. Từ (1.2.3) ta thấy rằng: Nếu  $\alpha$  &  $\beta$  là 2 số thực mà  $\tan \alpha, \tan \beta$  xác định thì  $\tan \beta = \tan \alpha$  khi & chỉ khi có số nguyên  $k$  để  $\beta = \alpha + k\pi$ .” – Quỳnh, Doan, et al., 2020, pp. 25–26

### 1.2.4 Phương trình $\cot x = m$

“Cho  $m \in \mathbb{R}$  là 1 số tùy ý, xét phương trình

$$\cot x = m. \quad (\cot)$$

ĐKXD của phương trình (cot) là  $\sin x \neq 0$ . Tương tự như đối với phương trình  $\tan x = m$ , ta có

Nếu  $\alpha$  là 1 nghiệm của phương trình (cot), i.e.,  $\cot \alpha = m$  thì

$$\cot x = m \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi. \quad (1.2.4)$$

” – Quỳnh, Doan, et al., 2020, pp. 26–27

**Lưu ý 1.2.4.** Để thấy rằng với mọi số  $m \in \mathbb{R}$  cho trước, phương trình  $\cot x = m$  có đúng 1 nghiệm nằm trong khoảng  $(0; \pi)$ . Người ta thường ký hiệu nghiệm đó là  $\operatorname{arccot} m$ . Khi đó:

$$\cot x = m \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} m + k\pi.$$

### 1.2.5 1 số điều cần lưu ý

1. Khi đã cho số  $m$ , ta có thể tính được các giá trị  $\arcsin m, \arccos m$  (với  $|m| \leq 1$ ),  $\arctan m$  bằng máy tính bỏ túi với các phím  $\sin^{-1}, \cos^{-1}$  &  $\tan^{-1}$ .
2.  $\arcsin m, \arccos m$  (với  $|m| \leq 1$ ),  $\arctan m$  &  $\operatorname{arccot} m$  có giá trị là những số thực. Do đó ta viết, e.g.,  $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$  mà không viết  $\arctan 1 = 45^\circ$ .

3. Khi xét các phương trình lượng giác ta đã coi ẩn số  $x$  là số đo radian của các góc lượng giác. Trên thực tế, ta còn gặp những bài toán yêu cầu tìm số đo độ của các góc (cung) lượng giác sao cho  $\sin$  (côsin, tang hoặc cotang) của chúng bằng số  $m \in \mathbb{R}$  cho trước e.g.  $\sin(x + 20^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Khi giải các phương trình này (mà làm dụng ngôn ngữ, ta vẫn gọi là giải các phương trình lượng giác), ta có thể áp dụng các công thức nêu trên & lưu ý sử dụng ký hiệu số đo độ trong “công thức nghiệm” cho thống nhất, e.g., viết  $x = 30^\circ + k360^\circ$  chứ không viết  $x = 30^\circ + k2\pi$ .

Tuy nhiên, ta quy ước rằng nếu không có giải thích gì thêm hoặc trong phương trình lượng giác không sử dụng đơn vị đo góc là độ thì mặc nhiên ẩn số là số đo radian của góc lượng giác.” – Quỳnh, Doan, et al., 2020, p. 27

### 1.2.6 Dùng máy tính bỏ túi để tìm 1 góc khi biết 1 giá trị lượng giác của nó

“Các phím  $\sin^{-1}$ ,  $\cos^{-1}$  &  $\tan^{-1}$  của máy tính bỏ túi CASIO *fx-500MS* được dùng để tìm số đo (độ hoặc radian) của 1 góc khi biết 1 trong các giá trị lượng giác của nó. Muốn thế đối với máy tính CASIO *fx-500MS* ta thực hiện 2 bước sau:

1. *Ấn định đơn vị đo góc (độ hoặc radian)*. Muốn tìm số đo độ, ta ấn MODE MODE MODE 1. Lúc này dòng trên cùng của màn hình xuất hiện chữ nhỏ D. Muốn tìm số đo radian, ta ấn MODE MODE MODE 2. Lúc này dòng trên cùng của màn hình xuất hiện chữ nhỏ R.
2. *Tìm số đo góc*. Khi biết  $\sin$ ,  $\cos$  hay  $\tan$  của góc  $\alpha$  cần tìm bằng  $m$ , ta lần lượt ấn phím SHIFT, & 1 trong các phím  $\sin^{-1}$ ,  $\cos^{-1}$ ,  $\tan^{-1}$

## 1.3 1 Số Dạng Phương Trình Lượng Giác Cơ Bản

## Chương 2

# Tổ Hợp & Xác Suất

- 2.1 2 Quy Tắc Đếm Cơ Bản
- 2.2 Hoán Vị, Chỉnh Hợp & Tổ Hợp
- 2.3 Nhị Thức Newton
- 2.4 Biến Cố & Xác Suất của Biến Cố
- 2.5 Các Quy Tắc Tính Xác Suất
- 2.6 Biến Ngẫu Nhiên Rời Rạc

## Chương 3

# Dãy Số. Cấp Số Cộng & Cấp Số Nhân

3.1 Phương Pháp Quy Nạp Toán Học

3.2 Dãy Số

3.3 Cấp Số Cộng

3.4 Cấp Số Nhân



## Chương 4

# Giới Hạn

4.1 Dãy Số Có Giới Hạn 0

4.2 Dãy Số Có Giới Hạn Hữu Hạn

4.3 Dãy Số Có Giới Hạn Vô Cực

4.4 Định Nghĩa & 1 Số Định Lý về Giới Hạn của Hàm Số

4.5 Giới Hạn 1 Bên

4.6 1 Vài Quy Tắc Tìm Giới Hạn Vô Cực

4.7 Các Dạng Vô Hình

4.8 Hàm Số Liên Tục

## Chương 5

# Đạo Hàm

5.1 Khái Niệm Đạo Hàm

5.2 Các Quy Tắc Tính Đạo Hàm

5.3 Đạo Hàm của Các Hàm Số Lượng Giác

5.4 Vi Phân

5.5 Đạo Hàm Cấp Cao

## Phần II

# Hình Học – Geometry

## Chương 6

# Phép Dời Hình & Phép Đồng Dạng Trong Mặt Phẳng

“Bức tranh của họa sĩ Hà Lan M.C. Escher gồm những hình bằng nhau mô tả các chiến binh trên lưng ngựa. Các hình này phủ kín mặt phẳng. 2 chiến binh & ngựa cùng màu (trắng hoặc đen) tương ứng với nhau qua 1 phép tịnh tiến. 2 chiến binh & ngựa khác màu thì tương ứng với nhau qua 1 phép đối xứng trục & tiếp theo là 1 phép tịnh tiến. Nghệ thuật dùng những hình bằng nhau để lấp đầy mặt phẳng được phát triển mạnh mẽ vào thế kỷ XIII ở nước Ý/Italia.” – Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 3

**Nội dung.** Các phép dời hình & đồng dạng trong mặt phẳng: phép tịnh tiến, phép đối xứng trục, phép quay, phép vị tự, ...; 2 hình bằng nhau, 2 hình đồng dạng 1 cách tổng quát.

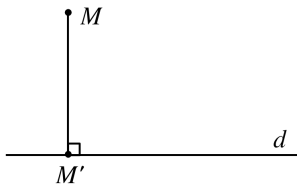
### 6.1 Mở Đầu về Phép Biến Hình

#### 6.1.1 Phép biến hình

Khái niệm “hàm số” – 1 khái niệm quan trọng trong Đại số: “Nếu có 1 quy tắc để với mỗi số  $x \in \mathbb{R}$ , xác định được 1 số duy nhất  $y \in \mathbb{R}$  thì quy tắc đó gọi là 1 hàm số xác định trên tập số thực  $\mathbb{R}$ . Bây giờ, trong mệnh đề trên ta thay số thực bằng điểm thuộc mặt phẳng thì ta được khái niệm về phép biến hình trong mặt phẳng. Cụ thể là: Nếu có 1 quy tắc để với mỗi điểm  $M$  thuộc mặt phẳng, xác định được 1 điểm duy nhất  $M'$  thuộc mặt phẳng ấy thì quy tắc đó gọi là 1 phép biến hình (trong mặt phẳng).” – Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 4

**Định nghĩa 6.1.1** (Phép biến hình). Phép biến hình (trong mặt phẳng) là 1 quy tắc để với mỗi điểm  $M$  thuộc mặt phẳng, xác định được 1 điểm duy nhất  $M'$  thuộc mặt phẳng ấy. Điểm  $M'$  gọi là ảnh của điểm  $M$  qua phép biến hình đó.

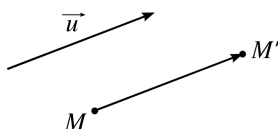
**Ví dụ 6.1.1** (Phép chiếu vuông góc lên 1 đường thẳng). “Cho đường thẳng  $d$ . Với mỗi điểm  $M$ , ta xác định  $M'$  là hình chiếu (vuông góc) của  $M$  trên  $d$  thì ta được 1 phép biến hình.



Hình 6.1: Phép chiếu vuông góc lên đường thẳng  $d$ .

Phép biến hình này gọi là phép chiếu (vuông góc) lên đường thẳng  $d$ .” – Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 4

**Ví dụ 6.1.2.** “Cho vector  $\vec{u}$ , với mỗi điểm  $M$  ta xác định điểm  $M'$  theo quy tắc  $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$  (Fig. 6.2).



Hình 6.2: Phép tịnh tiến theo vector  $\vec{u}$ .

Như vậy ta cũng có 1 phép biến hình. Phép biến hình đó gọi là phép tịnh tiến theo vector  $\vec{u}$ .” – Quỳnh, Cường, et al., 2020, p. 4

**Ví dụ 6.1.3** (Phép đồng nhất). Với mỗi điểm  $M$ , ta xác định điểm  $M'$  trùng với  $M$  thì ta cũng được 1 phép biến hình.

### 6.1.2 Ký hiệu & thuật ngữ

“Nếu ta ký hiệu 1 phép biến hình nào đó là  $F$  & điểm  $M'$  là ảnh của điểm  $M$  qua phép biến hình  $F$  thì ta viết  $M' = F(M)$ , hoặc  $F(M) = M'$ . Khi đó, ta còn nói *phép biến hình  $F$  biến điểm  $M$  thành điểm  $M'$* .

Với mỗi hình  $\mathcal{H}$ , ta gọi hình  $\mathcal{H}'$  gồm các điểm  $M' = F(M)$ , trong đó  $M \in \mathcal{H}$ , là *ảnh của  $\mathcal{H}$  qua phép biến hình  $F$* , & viết  $\mathcal{H}' = F(\mathcal{H})$ .” – Quỳnh, Cường, et al., 2020, p. 5

## 6.2 Phép Tịnh Tiến & Phép Dời Hình

### 6.2.1 Định nghĩa phép tịnh tiến

**Định nghĩa 6.2.1** (Phép tịnh tiến). Phép tịnh tiến theo vector  $\vec{u}$  là 1 phép biến hình biến điểm  $M$  thành điểm  $M'$  sao cho  $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ .

“Phép tịnh tiến theo vector  $\vec{u}$  thường được ký hiệu là  $T$  hoặc  $T_{\vec{u}}$ . Vector  $\vec{u}$  được gọi là *vector tịnh tiến*.” – Quỳnh, Cường, et al., 2020, p. 5. Phép đồng nhất là phép tịnh tiến theo vector  $\vec{u} = \vec{0}$ .

### 6.2.2 Các tính chất của phép tịnh tiến

**Định lý 6.2.1** (Phép tịnh tiến bảo toàn khoảng cách). Nếu phép tịnh tiến biến 2 điểm  $M$  &  $N$  lần lượt thành 2 điểm  $M'$  &  $N'$  thì  $M'N' = MN$ .

“Người ta diễn tả tính chất trên của phép tịnh tiến là: *Phép tịnh tiến không làm thay đổi khoảng cách giữa 2 điểm bất kỳ*.” – Quỳnh, Cường, et al., 2020, p. 6

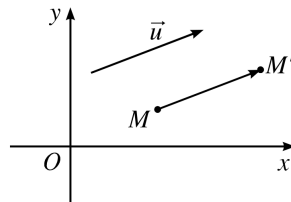
**Định lý 6.2.2** (Phép tịnh tiến bảo toàn tính chất thẳng hàng & thứ tự các điểm thẳng hàng). Phép tịnh tiến biến 3 điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng & không làm thay đổi thứ tự 3 điểm đó.

*Chứng minh.* “Giả sử phép tịnh tiến biến 3 điểm  $A, B, C$  thành 3 điểm  $A', B', C'$ . Theo Định lý 6.2.1, ta có  $A'B' = AB$ ,  $B'C' = BC$ , &  $A'C' = AC$ . Nếu  $A, B, C$  thẳng hàng,  $B$  nằm giữa  $A$  &  $C$  thì  $AB + BC = AC$ . Do đó ta cũng có  $A'B' + B'C' = A'C'$ , i.e.,  $A', B', C'$  thẳng hàng, trong đó  $B'$  nằm giữa  $A'$  &  $C'$ .  $\square$

**Hệ quả 6.2.1.** Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính, biến góc thành góc bằng nó.

### 6.2.3 Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến

“Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ  $Oxy$ , cho phép tịnh tiến theo vector  $\vec{u}$ . Biết tọa độ của  $\vec{u}$  là  $(a; b)$ . Giả sử điểm  $M(x; y)$  biến thành điểm  $M'(x'; y')$  (Fig. 6.3).



Hình 6.3: Phép tịnh tiến trên hệ trục tọa độ.

Khi đó ta có:

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b. \end{cases}$$

Công thức trên gọi là *biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến theo vector  $\vec{u}(a; b)$* .” – Quỳnh, Cường, et al., 2020, pp. 6–7

### 6.2.4 Ứng dụng của phép tịnh tiến

**Bài toán 6.2.1** (Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 7). Cho 2 điểm  $B, C$  cố định trên đường tròn  $(O; R)$  & 1 điểm  $A$  thay đổi trên đường tròn đó. Chứng minh rằng trực tâm  $\Delta ABC$  nằm trên 1 đường tròn cố định.

*Giải.* Nếu  $BC$  là đường kính thì trực tâm  $H$  của  $\Delta ABC$  chính là  $A$ . Vậy  $H$  nằm trên đường tròn cố định  $(O; R)$ . Nếu  $BC$  không phải là đường kính, vẽ đường kính  $BB'$  của đường tròn. Nếu  $H$  là trực tâm của  $\Delta ABC$  thì  $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$  (suy ra từ nhận xét tứ giác  $AHCB'$  là hình bình hành). Như vậy, phép tịnh tiến theo vector cố định  $\overrightarrow{B'C}$  biến điểm  $A$  thành điểm  $H$ . Do đó, khi  $A$  thay đổi trên  $(O; R)$  thì trực tâm  $H$  luôn nằm trên đường tròn cố định là ảnh của đường tròn  $(O; R)$  qua phép tịnh tiến nói trên.  $\square$

**Bài toán 6.2.2.** 2 thôn nằm ở 2 vị trí  $A$  &  $B$  cách nhau 1 con sông (xem rằng 2 bờ sông là 2 đường thẳng song song). Người ta dự định xây 1 chiếc cầu  $MN$  bắc qua sông (có nhiên cầu phải vuông góc với bờ sông) & làm 2 đoạn thẳng từ  $A$  đến  $M$  & từ  $B$  đến  $N$ . Hãy xác định vị trí chiếc cầu  $MN$  sao cho  $AM + BN$  ngắn nhất.

*Hint.* Trường hợp tổng quát có thể đưa về trường hợp con sông rất hẹp – hẹp đến mức 2 bờ sông  $a$  &  $b$  xem như trùng nhau bằng 1 phép tịnh tiến theo vector  $\overrightarrow{MN}$  để  $a$  trùng  $b$ . Khi đó điểm  $A$  biến thành điểm  $A'$  sao cho  $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN}$  & do đó  $A'N = AM$ .  $\square$

### 6.2.5 Phép dời hình

“Không phải chỉ có phép tịnh tiến “không làm thay đổi khoảng cách giữa 2 điểm” mà còn nhiều phép biến hình khác cũng có tính chất đó (tính chất này còn được gọi là tính chất *bảo toàn khoảng cách* giữa 2 điểm). Người ta gọi các phép biến hình như vậy là phép dời hình.

**Định nghĩa 6.2.2** (Phép dời hình). Phép dời hình là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa 2 điểm bất kỳ.

Chú ý rằng các tính chất đã nêu của phép tịnh tiến được chứng minh dựa vào tính chất “không làm thay đổi khoảng cách giữa 2 điểm”. Bởi vậy, các phép dời hình cũng có những tính chất đó. Cụ thể ta có:

**Định lý 6.2.3.** Phép dời hình biến 3 điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng & không làm thay đổi thứ tự 3 điểm đó, biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính, biến góc thành góc bằng nó.

” – Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 8

## 6.3 Phép Đối Xứng Trục

## 6.4 Phép Quay & Phép Đối Xứng Tâm

## 6.5 2 Hình bằng Nhau

## 6.6 Phép Vị Tự

## 6.7 Phép Đồng Dạng

## 6.8 Hình Tự Đồng Dạng & Hình Học Fractal

## Chương 7

# Đường Thẳng & Mặt Phẳng Trong Không Gian

7.1 Đại Cương về Đường Thẳng & Mặt Phẳng

7.2 2 Đường Thẳng Song Song

7.3 Đường Thẳng Song Song với Mặt Phẳng

7.4 2 Mặt Phẳng Song Song

7.5 Phép Chiếu Song Song

7.6 Phương Pháp Tiên Đề Trong Hình Học

## Chương 8

# Vector Trong Không Gian. Quan Hệ Vuông Góc

8.1 Vector Trong Không Gian. Sự Đồng Phẳng của Các Vector

8.2 2 Đường Thẳng Vuông Góc

8.3 Đường Thẳng Vuông Góc với Mặt Phẳng

8.4 2 Mặt Phẳng Vuông Góc

8.5 Khoảng Cách



# Phụ lục A

## Phụ Lục – Appendices

### A.1 Hàm Số Chẵn & Hàm Số Lẻ – Even & Odd Functions

“Trong toán học, *hàm số chẵn* & *hàm số lẻ* là các **hàm số** thỏa mãn các quan hệ **đối xứng** nhất định khi lấy **nghịch đảo phép cộng**. Chúng rất quan trọng trong nhiều lĩnh vực của **giải tích toán**, đặc biệt trong lý thuyết chuỗi lũy thừa & **chuỗi Fourier**. Chúng được đặt tên theo **tính chẵn lẻ** của số mũ lũy thừa của **hàm lũy thừa** thỏa mãn từng điều kiện: hàm số  $f(x) = x^n$  là 1 hàm chẵn nếu  $n$  là 1 số nguyên chẵn, & nó là hàm lẻ nếu  $n$  là 1 số nguyên lẻ.” – [Wikipedia/hàm số chẵn & lẻ](#)

#### A.1.1 Hàm số chẵn – Even function

**Định nghĩa A.1.1** (Hàm số chẵn). “Cho  $f$  là 1 hàm số giá trị thực của 1 đối số thực,  $f$  là hàm số chẵn nếu điều kiện sau được thỏa mãn với mọi  $x$  sao cho cả  $x$  &  $-x$  đều thuộc miền xác định của  $f$ :  $f(x) = f(-x)$ ,  $\forall x \in \text{dom}(f)$ , với  $\text{dom}(f)$  ký hiệu miền xác định của  $f$ , hoặc phát biểu 1 cách tương đương, nếu phương trình sau thỏa mãn  $f(x) - f(-x) = 0$ ,  $\forall x \in \text{dom}(f)$ .

Về mặt hình học, đồ thị của 1 hàm số chẵn **đối xứng** qua trục  $y$ , nghĩa là đồ thị của nó giữ không đổi sau phép **lấy đối xứng qua trục  $y$** .” – [Wikipedia/hàm số chẵn & lẻ](#)

**Ví dụ A.1.1** (Hàm chẵn). **Hàm trị tuyệt đối**  $x \mapsto |x|$ , các hàm đơn thức dạng  $x \mapsto x^{2n}$ , **hàm cosin**  $\cos$ , **hàm cosin hyperbolic**  $\cosh$ .

#### A.1.2 Hàm số lẻ – Odd function

**Định nghĩa A.1.2** (Hàm số lẻ). Cho  $f$  là 1 hàm số giá trị thực của 1 đối số (biến) thực,  $f$  là hàm số lẻ nếu điều kiện sau được thỏa mãn với mọi  $x$  sao cho cả  $x$  &  $-x$  đều thuộc miền xác định của  $f$ :  $f(-x) = -f(x)$ ,  $\forall x \in \text{dom}(f)$ , với  $\text{dom}(f)$  ký hiệu miền xác định của  $f$ , hoặc phát biểu 1 cách tương đương, nếu phương trình sau thỏa mãn  $f(x) + f(-x) = 0$ ,  $\forall x \in \text{dom}(f)$ .

“Về mặt hình học, đồ thị của 1 hàm lẻ có tính đối xứng tâm quay qua gốc tọa độ, i.e., đồ thị của nó không đổi sau khi thực hiện phép quay  $180^\circ$  quanh điểm gốc.” – [Wikipedia/hàm số chẵn & lẻ](#)

**Ví dụ A.1.2** (Hàm số lẻ). **Hàm đồng nhất**  $x \mapsto x$ , các hàm đơn thức dạng  $x \mapsto x^{2n+1}$ , **hàm sin**  $\sin$ , **hàm sin hyperbol**  $\sinh$ , **hàm lỗi**  $\text{erf}$ .

#### A.1.3 Các tính chất cơ bản

##### A.1.3.1 Tính duy nhất

- “Nếu 1 hàm số vừa chẵn & vừa lẻ, nó bằng 0 ở mọi điểm mà nó được xác định.
- Nếu 1 hàm là lẻ thì **giá trị tuyệt đối** của hàm đó là 1 hàm chẵn.” – [Wikipedia/hàm số chẵn & lẻ](#)

##### A.1.3.2 Cộng & trừ hàm số chẵn lẻ

- Tổng & hiệu của 2 hàm số chẵn là 2 hàm số chẵn.
- Tổng & hiệu của 2 hàm lẻ là 2 hàm lẻ.
- Tổng của 1 hàm chẵn & 1 hàm lẻ thì không chẵn cũng không lẻ, trừ khi 1 trong các hàm ấy bằng 0 trên miền đã cho.

**A.1.3.3 Nhân & chia hàm số chẵn lẻ**

- Tích & thương của 2 hàm chẵn là 2 hàm chẵn.
- Tích & thương của 2 hàm lẻ là 2 hàm chẵn.
- Tích & thương của 1 hàm chẵn với 1 hàm lẻ là 2 hàm lẻ.

**A.1.3.4 Hàm hợp (tích ánh xạ)**

- Hàm hợp của 2 hàm chẵn là hàm chẵn.
- Hàm hợp của 2 hàm lẻ là hàm lẻ.
- 1 hàm chẵn hợp với 1 hàm lẻ là hàm chẵn.
- Hàm hợp của bất kỳ hàm số nào với 1 hàm chẵn là hàm chẵn (nhưng điều ngược lại không đúng).

**A.1.4 Phân tích chẵn–lẻ**

“Mọi hàm có thể được phân tích duy nhất thành tổng của 1 hàm chẵn & 1 hàm lẻ, được gọi tương ứng là *phần chẵn* & *phần lẻ* của 1 hàm số, nếu ta đặt như sau:

$$f_e(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_o(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

sau đó  $f_e$  là hàm chẵn,  $f_o$  là hàm lẻ, &  $f(x) = f_e(x) + f_o(x)$ . Ngược lại nếu  $f(x) = g(x) + h(x)$ , trong đó  $g$  là chẵn &  $h$  là lẻ, thì  $g = f_e$  &  $h = f_o$ , bởi vì

$$\begin{aligned} 2f_e(x) &= f(x) + f(-x) = g(x) + g(-x) + h(x) + h(-x) = 2g(x), \\ 2f_o(x) &= f(x) - f(-x) = g(x) - g(-x) + h(x) - h(-x) = 2h(x). \end{aligned}$$

**Ví dụ A.1.3.** Hàm *cosin hyperbolic* & *sin hyperbolic* có thể được coi là các phần chẵn & phần lẻ của hàm số lũy thừa tự nhiên, bởi vì hàm thứ nhất là chẵn, hàm thứ 2 là lẻ, &  $e^x = \sinh x + \cosh x$ .” – [Wikipedia/hàm số chẵn & lẻ](#)

# Tài liệu tham khảo

[NQBH/elementary math] Nguyễn Quân Bá Hồng. *Some Topics in Elementary Mathematics: Problems, Theories, Applications, & Bridges to Advanced Mathematics*. Mar 2022–now.

# Tài liệu tham khảo

- Quỳnh, Đoàn, Văn Như Cương, et al. (2020). *Hình Học 11 nâng cao*. Tái bản lần thứ 13. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 132.
- Quỳnh, Đoàn, Nguyễn Huy Doan, et al. (2020). *Đại Số & Giải Tích 11 nâng cao*. Tái bản lần thứ 13. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 241.