

# Problem & Solution: Square-, Cube-, & $n$ th Roots

## Bài Tập Căn Bậc 2, Căn Bậc 3, & Căn Bậc $n$ & Lời Giải

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 31 tháng 7 năm 2023

### Tóm tắt nội dung

[en] This text is a collection of problems, from basic to advanced, on *square-, cube-, &  $n$ th roots*.

**Keyword.** Square root, cube root,  $n$ th root.

[vi] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài toán, từ cơ bản đến nâng cao, về *căn bậc 2, căn bậc 3, & căn bậc  $n$* .

**Từ khóa.** Căn bậc 2, căn bậc 3, căn bậc  $n$ , số hữu tỷ, số vô tỷ, căn thức.

- Lecture note – Bài giảng: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/square- & cube roots](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_9/square- & cube roots)<sup>1</sup>.
- Cheatsheet – Công thức: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/cheatsheet: square- & cube roots](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_9/cheatsheet: square- & cube roots)<sup>2</sup>.
- Problem – Bài tập: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/problem: square- & cube roots](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_9/problem: square- & cube roots)<sup>3</sup>.
- Solution – Lời giải: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/solution: square- & cube roots](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_9/solution: square- & cube roots)<sup>4</sup>.

## Mục lục

1 Square Root & Irrationals – Căn Bậc 2 & Số Vô Tỷ	2
2 Căn Thức Bậc 2 & Hằng Đẳng Thức $\sqrt{A^2} =  A $	3
3 Liên Hệ Giữa Phép Nhân, Phép Chia & Phép Khai Phương	5
4 Phép Chia & Phép Khai Phương	6
5 Biến Đổi Đơn Giản Biểu Thức Chứa Căn Thức Bậc 2	7
6 Rút Gọn Biểu Thức Có Chứa Căn Thức Bậc 2	8
7 Cube Root, $n$ th Root – Căn Bậc 3, Căn Bậc $n$	9
8 Miscellaneous	10
Tài liệu	10

---

\*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam

e-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com); website: <https://nqbh.github.io>.

<sup>1</sup>URL: [https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary\\_mathematics/grade\\_9/square\\_root\\_cube\\_root/NQBH\\_square\\_root\\_cube\\_root.pdf](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/NQBH_square_root_cube_root.pdf).

<sup>2</sup>[https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary\\_mathematics/grade\\_9/square\\_root\\_cube\\_root/cheatsheet/NQBH\\_square\\_root\\_cube\\_root\\_cheatsheet.pdf](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/cheatsheet/NQBH_square_root_cube_root_cheatsheet.pdf).

<sup>3</sup>[https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary\\_mathematics/grade\\_9/square\\_root\\_cube\\_root/problem/NQBH\\_square\\_root\\_cube\\_root\\_problem.pdf](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/problem/NQBH_square_root_cube_root_problem.pdf).

<sup>4</sup>[https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary\\_mathematics/grade\\_9/square\\_root\\_cube\\_root/solution/NQBH\\_square\\_root\\_cube\\_root\\_solution.pdf](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/solution/NQBH_square_root_cube_root_solution.pdf).

# 1 Square Root & Irrationals – Căn Bậc 2 & Số Vô Tỷ

**Bài toán 1** ([Chí+23], ?1–?3, pp. 4–5). (a) Tìm các căn bậc 2 của  $9, \frac{4}{9}, 0.25, 2$ . (b) Tìm căn bậc 2 số học của  $49, 64, 81, 1.21$ . (c) Tìm căn bậc 2 của  $49, 64, 81, 1.21$ .

*Giải.* (a) Căn bậc 2 của  $9, \frac{4}{9}, 0.25, 2$  lần lượt là  $\pm 3, \pm \frac{2}{3}, \pm 0.5, \pm \sqrt{2}$ . (b) Căn bậc 2 số học của  $49, 64, 81, 1.21$  lần lượt là  $7, 8, 9, 1.1$ . (c) Căn bậc 2 của  $49, 64, 81, 1.21$  lần lượt là  $\pm 7, \pm 8, \pm 9, \pm 1.1$ .  $\square$

**Bài toán 2** ([Chí+23], Ví dụ 2, ?4, pp. 5–6). So sánh: (a)  $1$  &  $\sqrt{2}$ . (b)  $2$  &  $\sqrt{5}$ . (c)  $4$  &  $\sqrt{15}$ . (d)  $\sqrt{11}$  &  $3$ .

*Giải.* (a)  $1 < 2 \Leftrightarrow \sqrt{1} = 1 < \sqrt{2}$ . (b)  $4 < 5 \Leftrightarrow \sqrt{4} = 2 < \sqrt{5}$ . (c)  $16 > 15 \Leftrightarrow \sqrt{16} = 4 > \sqrt{15}$ . (d)  $11 > 9 \Leftrightarrow \sqrt{11} > \sqrt{9} = 3$ .  $\square$

**Bài toán 3.** Biện luận theo  $a, b \in \mathbb{R}$  để so sánh  $a$  &  $\sqrt{b}$ .

*Giải.* ĐKXD:  $b \geq 0$ . Xét các trường hợp:

- Trường hợp  $a < 0$ : vì  $\sqrt{b} \geq 0, \forall b \in \mathbb{R}, b \geq 0$ , suy ra  $a < \sqrt{b}$ .
- Trường hợp  $a \geq 0$ : Xét các trường hợp con:
  - Trường hợp  $0 \leq a < \sqrt{b} \Leftrightarrow 0 \leq a$  &  $a^2 < b$ .
  - Trường hợp  $0 \leq a = \sqrt{b} \Leftrightarrow 0 \leq a$  &  $a^2 = b$ .
  - Trường hợp  $a > \sqrt{b} \Leftrightarrow a > 0$  &  $a^2 > b \geq 0$ .

Tổng hợp các trường hợp đã xét:

$$\begin{cases} a < \sqrt{b}, & \text{nếu } (a < 0 \wedge b \geq 0) \vee (a \geq 0 \wedge a^2 < b), \\ a = \sqrt{b}, & \text{nếu } a \geq 0 \wedge a^2 = b, \\ a > \sqrt{b}, & \text{nếu } a > 0 \wedge a^2 > b. \end{cases}$$

Biện luận hoàn tất.  $\square$

**Bài toán 4** ([Chí+23], Ví dụ 3, ?5, p. 6). (a) Tìm  $x \in \mathbb{R}$  thỏa: (a)  $\sqrt{x} > 2$ . (b)  $\sqrt{x} < 1$ . (c)  $\sqrt{x} > 1$ . (d)  $\sqrt{x} < 3$ .

*Giải.* (a)  $\sqrt{x} > 2 \Leftrightarrow x > 2^2 = 4$ . Vậy  $x > 4, S = (4, \infty) := \{x \in \mathbb{R} | x > 4\}$ . (b) ĐKXD:  $x \geq 0, \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1^2 = 1$ . Vậy  $0 \leq x < 1, S = [0, 1) := \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < 1\}$ . (c)  $\sqrt{x} > 1 \Leftrightarrow x > 1^2 = 1$ . Vậy  $x > 1, S = (1, \infty) := \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$ . (d) ĐKXD:  $x \geq 0, \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow 0 \leq x < 3^2 = 9$ . Vậy  $0 \leq x < 9, S = [0, 9) := \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < 9\}$ .  $\square$

**Lưu ý 1.** Ta quy ước  $S$  ký hiệu tập nghiệm của cả phương trình & bất phương trình.

**Bài toán 5** ([Chí+23], 1., p. 6). Tìm căn bậc 2 số học của mỗi số sau rồi suy ra căn bậc 2 của chúng:  $121, 144, 169, 225, 256, 324, 361, 400$ .

*Giải.* Căn bậc 2 số học của  $121, 144, 169, 225, 256, 324, 361, 400$  lần lượt là  $11, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 20$ . Căn bậc 2 của  $121, 144, 169, 225, 256, 324, 361, 400$  lần lượt là  $\pm 11, \pm 12, \pm 13, \pm 15, \pm 16, \pm 18, \pm 19, \pm 20$ .  $\square$

**Bài toán 6** ([Chí+23], 2., p. 6). So sánh: (a)  $2$  &  $\sqrt{3}$ . (b)  $6$  &  $\sqrt{41}$ . (c)  $7$  &  $\sqrt{47}$ .

*Giải.* (a)  $4 > 3 \Leftrightarrow \sqrt{4} = 2 > \sqrt{3}$ . (b)  $36 < 41 \Leftrightarrow \sqrt{36} = 6 < \sqrt{41}$ . (c)  $49 > 47 \Leftrightarrow \sqrt{49} = 7 > \sqrt{47}$ .  $\square$

**Bài toán 7** ([Chí+23], 3., p. 6). Tìm  $x \in \mathbb{R}$  thỏa mãn các phương trình sau & sau đó làm tròn đến chữ số thập phân thứ 3: (a)  $x^2 = 2$ . (b)  $x^2 = 3$ . (c)  $x^2 = 3.5$ . (d)  $x^2 = 4.12$ .

Hint. Nghiệm của phương trình bậc 2  $x^2 = a$  với  $a \geq 0$  là các căn bậc 2 của  $a$ .

*Giải.* (a)  $x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{2} \Rightarrow x \approx \pm 1.414$ . (b)  $x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{3} \Rightarrow x \approx \pm 1.732$ . (c)  $x^2 = 3.5 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{3.5} \Rightarrow x \approx \pm 1.871$ . (d)  $x^2 = 4.12 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{4.12} \Rightarrow x \approx \pm 2.030$ .  $\square$

**Bài toán 8** ([Chí+23], 4., p. 7). Tìm  $x \in \mathbb{R}$  thỏa: (a)  $\sqrt{x} = 15$ . (b)  $2\sqrt{x} = 14$ . (c)  $\sqrt{x} < \sqrt{2}$ . (d)  $\sqrt{2x} < 4$ .

*Giải.* ĐKXD:  $x \geq 0$ . (a)  $\sqrt{x} = 15 \Leftrightarrow x = 15^2 = 225 > 0$ : nhận. Vậy  $x = 225, S = \{225\}$ . (b)  $2\sqrt{x} = 14 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{14}{2} = 7 \Leftrightarrow x = 7^2 = 49 > 0$ : nhận. Vậy  $x = 49, S = \{49\}$ . (c)  $\sqrt{x} < \sqrt{2} \Leftrightarrow 0 \leq x < 2$ . Vậy  $0 \leq x < 2, S = [0, 2) := \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < 2\}$ . (d)  $\sqrt{2x} < 4 \Leftrightarrow 0 \leq 2x < 4^2 = 16 \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{16}{2} = 8$ . Vậy  $0 \leq x < 8, S = [0, 8) := \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < 8\}$ .  $\square$

**Bài toán 9.** Biện luận theo tham số  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  để giải bất phương trình: (a)  $\sqrt{x} < a$ . (b)  $\sqrt{x} > a$ . (c)  $\sqrt{x} \leq a$ . (d)  $\sqrt{x} \geq a$ . (e)  $\sqrt{ax+b} > c, a \neq 0$ . (f)  $\sqrt{ax+b} < c, a \neq 0$ . (g)  $\sqrt{ax+b} \leq c, a \neq 0$ . (h)  $\sqrt{ax+b} \geq c, a \neq 0$ . (i)  $\sqrt{ax+b} < \sqrt{cx+d}, ac \neq 0$ . (j)  $\sqrt{ax+b} > \sqrt{cx+d}, ac \neq 0$ . (k)  $\sqrt{ax+b} \leq \sqrt{cx+d}, ac \neq 0$ . (l)  $\sqrt{ax+b} \geq \sqrt{cx+d}, ac \neq 0$ .

*Giải.* (a) ĐKXD:  $x \geq 0$ . Xét các trường hợp:

- Trường hợp  $a \leq 0$ : Vì  $\sqrt{x} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ , nên bất phương trình  $\sqrt{x} < a$  vô nghiệm.

- Trường hợp  $a > 0$ :  $\sqrt{x} < a \Leftrightarrow 0 \leq x < a^2$ .

Vậy

$$S = \begin{cases} \emptyset, & \text{nếu } a \leq 0, \\ [0, a^2) := \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < a^2\}, & \text{nếu } a > 0. \end{cases}$$

(b) ĐKXD:  $x \geq 0$ . Xét các trường hợp:

- Trường hợp  $a < 0$ : Vì  $\sqrt{x} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ , nên bất phương trình  $\sqrt{x} > a$  luôn đúng  $\forall x \geq 0$ .
- Trường hợp  $a = 0$ :  $\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$ .
- Trường hợp  $a > 0$ :  $\sqrt{x} > a \Leftrightarrow x > a^2$ .

Vậy

$$S = \begin{cases} [0, \infty) := \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}, & \text{nếu } a < 0, \\ (0, \infty) := \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}, & \text{nếu } a = 0, \\ (a^2, \infty) := \{x \in \mathbb{R} | x > a^2\}, & \text{nếu } a > 0. \end{cases}$$

(c) ĐKXD:  $x \geq 0$ . Xét các trường hợp:

- Trường hợp  $a < 0$ : Vì  $\sqrt{x} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ , nên bất phương trình  $\sqrt{x} \leq a$  vô nghiệm.
- Trường hợp  $a = 0$ :  $\sqrt{x} \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$ .
- Trường hợp  $a > 0$ :  $\sqrt{x} \leq a \Leftrightarrow 0 \leq x \leq a^2$ .

Vậy

$$S = \begin{cases} \emptyset, & \text{nếu } a < 0, \\ \{0\}, & \text{nếu } a = 0, \\ [0, a^2] := \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq a^2\}, & \text{nếu } a > 0. \end{cases}$$

(d) ĐKXD:  $x \geq 0$ . Xét các trường hợp:

- Trường hợp  $a \leq 0$ : Vì  $\sqrt{x} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ , nên bất phương trình  $\sqrt{x} \geq a$  đúng  $\forall x \geq 0$ .
- Trường hợp  $a > 0$ :  $\sqrt{x} \geq a \Leftrightarrow x \geq a^2$ .

Vậy

$$S = \begin{cases} [0, \infty), & \text{nếu } a \leq 0, \\ [a^2, \infty) := \{x \in \mathbb{R} | x \geq a^2\}, & \text{nếu } a > 0. \end{cases}$$

(e)  $\sqrt{ax+b} > c$ . (f)  $\sqrt{ax+b} < c$ . (g)  $\sqrt{ax+b} \leq c$ . (h)  $\sqrt{ax+b} \geq c$ . (i)  $\sqrt{ax+b} < \sqrt{cx+d}$ . (j)  $\sqrt{ax+b} > \sqrt{cx+d}$ . (k)  $\sqrt{ax+b} \leq \sqrt{cx+d}$ . (l)  $\sqrt{ax+b} \geq \sqrt{cx+d}$ .  $\square$

**Bài toán 10.** Viết chương trình Pascal, Python, C/C++ để giải 8 biện luận theo tham số  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  để giải bất phương trình: (a)  $\sqrt{x} < a$ . (b)  $\sqrt{x} > a$ . (c)  $\sqrt{x} \leq a$ . (d)  $\sqrt{x} \geq a$ . (e)  $\sqrt{ax+b} > c, a \neq 0$ . (f)  $\sqrt{ax+b} < c, a \neq 0$ . (g)  $\sqrt{ax+b} \leq c, a \neq 0$ . (h)  $\sqrt{ax+b} \geq c, a \neq 0$ . (i)  $\sqrt{ax+b} < \sqrt{cx+d}, ac \neq 0$ . (j)  $\sqrt{ax+b} > \sqrt{cx+d}, ac \neq 0$ . (k)  $\sqrt{ax+b} \leq \sqrt{cx+d}, ac \neq 0$ . (l)  $\sqrt{ax+b} \geq \sqrt{cx+d}, ac \neq 0$ .

**Bài toán 11** ([Chí+23], 5., p. 7). Tính cạnh 1 hình vuông biết diện tích của nó bằng diện tích của hình chữ nhật có chiều rộng 3.5 m & chiều dài 14 m.

*Giải.*  $S_{\text{hv}} = S_{\text{hcn}} = 3.5 \cdot 14 = 49 \Rightarrow a = \sqrt{S_{\text{hv}}} = \sqrt{49} = 7$  m.  $\square$

## 2 Căn Thức Bậc 2 & Hằng Đẳng Thức $\sqrt{A^2} = |A|$

**Bài toán 12** ([Chí+23], ?1, p. 8). Hình chữ nhật ABCD có đường chéo dài a cm & cạnh BC = x cm. tính AB.

*Giải.* Áp dụng định lý Pythagore cho  $\triangle ABC$  vuông tại B:  $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$ .  $\square$

**Bài toán 13** ([Chí+23], Ví dụ 1, ?2, p. 8). Với giá trị nào của  $x \in \mathbb{R}$  thì: (a)  $\sqrt{3x}$  xác định. (b)  $\sqrt{5-2x}$  xác định?

*Giải.* (a)  $\sqrt{3x}$  xác định  $\Leftrightarrow 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ . (b)  $\sqrt{5-2x}$  xác định  $\Leftrightarrow 5-2x \geq 0 \Leftrightarrow 2x \leq 5 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2} = 2.5$ .  $\square$

**Bài toán 14.** Với giá trị nào của  $x \in \mathbb{R}$  thì  $\sqrt{ax+b}$  xác định với  $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ .

*Giải.*  $\sqrt{ax+b}$  xác định  $\Leftrightarrow ax+b \geq 0 \Leftrightarrow ax \geq -b \Leftrightarrow x \geq -\frac{b}{a}$  nếu  $a > 0$  &  $x \leq -\frac{b}{a}$  nếu  $a < 0$ .  $\square$

**Bài toán 15** ([Chí+23], DL, p. 9). Chứng minh:  $\sqrt{a^2} = |a|, \forall a \in \mathbb{R}$ .

**Chứng minh.** Theo định nghĩa giá trị tuyệt đối thì  $|a| \geq 0$ . Nếu  $a \geq 0$  thì  $|a| = a$ , nên  $(|a|)^2 = a^2$ . Nếu  $a < 0$  thì  $|a| = -a$ , nên  $(|a|)^2 = (-a)^2 = a^2$ . Do đó,  $(|a|)^2 = a^2, \forall a \in \mathbb{R}$ . Vậy  $|a|$  chính là căn bậc 2 số học của  $a^2$ , i.e.,  $\sqrt{a^2} = |a|$ .  $\square$

**Bài toán 16** ([Chí+23], Ví dụ 2, p. 9). *Tính:* (a)  $\sqrt{12^2}$ . (b)  $\sqrt{(-7)^2}$ .

*Giải.* (a)  $\sqrt{12^2} = |12| = 12$ . (b)  $\sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7$ .  $\square$

**Bài toán 17** ([Chí+23], Ví dụ 3, p. 9). *Rút gọn:* (a)  $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$ . (b)  $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$ .

*Giải.*  $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$  (vì  $2 > 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} > \sqrt{1} = 1$ ). Vậy  $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2}-1$ . (b)  $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2$  (vì  $5 > 4 \Leftrightarrow \sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$ ). Vậy  $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}-2$ .  $\square$

**Bài toán 18** ([Chí+23], Ví dụ 4, p. 10). *Rút gọn:* (a)  $\sqrt{(x-2)^2}$  với  $x \geq 2$ . (b)  $\sqrt{a^6}$  với  $a < 0$ .

*Giải.* (a)  $\sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = x-2$  (vì  $x \geq 2$ ). (b)  $\sqrt{a^6} = \sqrt{(a^3)^2} = |a^3| = -a^3$  vì  $a < 0 \Leftrightarrow a^3 < 0$ .  $\square$

**Bài toán 19** ([Chí+23], 6., p. 10). *Với giá trị nào của  $a \in \mathbb{R}$  thì mỗi căn thức sau có nghĩa?* (a)  $\sqrt{\frac{a}{3}}$ . (b)  $\sqrt{-5a}$ . (c)  $\sqrt{4-a}$ . (d)  $\sqrt{3a+7}$ .

*Giải.* (a)  $\sqrt{\frac{a}{3}}$  xác định  $\Leftrightarrow \frac{a}{3} \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0$ . (b)  $\sqrt{-5a}$  xác định  $\Leftrightarrow -5a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 0$ . (c)  $\sqrt{4-a}$  xác định  $\Leftrightarrow 4-a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 4$ . (d)  $\sqrt{3a+7}$  xác định  $\Leftrightarrow 3a+7 \geq 0 \Leftrightarrow 3a \geq -7 \Leftrightarrow a \geq -\frac{7}{3}$ .  $\square$

**Bài toán 20** ([Chí+23], 7., p. 10). *Tính:* (a)  $\sqrt{(0.1)^2}$ . (b)  $\sqrt{(-0.3)^2}$ . (c)  $-\sqrt{(-1.3)^2}$ . (d)  $-0.4\sqrt{(-0.4)^2}$ .

*Giải.* (a)  $\sqrt{(0.1)^2} = |0.1| = 0.1$ . (b)  $\sqrt{(-0.3)^2} = |-0.3| = 0.3$ . (c)  $-\sqrt{(-1.3)^2} = -|-1.3| = -1.3$ . (d)  $-0.4\sqrt{(-0.4)^2} = -0.4|-0.4| = -0.4 \cdot 0.4 = -0.16$ .  $\square$

**Bài toán 21** ([Chí+23], 8., p. 10). *Rút gọn các biểu thức:* (a)  $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$ . (b)  $\sqrt{(3-\sqrt{11})^2}$ . (c)  $2\sqrt{a^2}$  với  $a \geq 0$ . (d)  $3\sqrt{(a-2)^2}$  với  $a < 2$ .

*Giải.* (a)  $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = |2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3}$  (vì  $4 > 3 \Leftrightarrow \sqrt{4} = 2 > \sqrt{3}$ ). (b)  $\sqrt{(3-\sqrt{11})^2} = |3-\sqrt{11}| = \sqrt{11}-3$  (vì  $9 < 11 \Leftrightarrow \sqrt{9} = 3 < \sqrt{11}$ ). (c)  $2\sqrt{a^2} = 2|a| = 2a$  với  $a \geq 0$ . (d)  $3\sqrt{(a-2)^2} = 3|a-2| = 3(2-a)$  vì  $a < 2 \Leftrightarrow a-2 < 0$ .  $\square$

**Bài toán 22** ([Chí+23], 9., p. 11). *Tìm  $x$  thỏa:* (a)  $\sqrt{x^2} = 7$ . (b)  $\sqrt{x^2} = |-8|$ . (c)  $\sqrt{4x^2} = 6$ . (d)  $\sqrt{9x^2} = |-12|$ .

*Giải.* (a)  $\sqrt{x^2} = 7 \Leftrightarrow |x| = 7 \Leftrightarrow x = \pm 7$ . (b)  $\sqrt{x^2} = |-8| \Leftrightarrow |x| = 8 \Leftrightarrow x = \pm 8$ . (c)  $\sqrt{4x^2} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{(2x)^2} = 6 \Leftrightarrow |2x| = 6 \Leftrightarrow 2|x| = 6 \Leftrightarrow |x| = \frac{6}{2} = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3$ . (d)  $\sqrt{9x^2} = |-12| \Leftrightarrow \sqrt{(3x)^2} = 12 \Leftrightarrow |3x| = 12 \Leftrightarrow 3|x| = 12 \Leftrightarrow |x| = \frac{12}{3} = 4 \Leftrightarrow x = \pm 4$ .  $\square$

**Bài toán 23.** *Giải & biện luận phương trình ẩn  $x$  theo các tham số  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ :* (a)  $\sqrt{ax^2} = b$ . (b)  $\sqrt{(ax+b)^2} = c$ . (c)  $\sqrt{a(bx+c)^2} = d$ . (d)  $\sqrt{ax^2} = \sqrt{bx^2}$ . (e)  $\sqrt{(ax+b)^2} = \sqrt{cx^2}$ . (f)  $\sqrt{(ax+b)^2} = \sqrt{(cx+d)^2}$ . (g)  $\sqrt{a(bx+c)^2} = \sqrt{dx^2}$ . (h)  $\sqrt{a(bx+c)^2} = \sqrt{(dx+e)^2}$ . (i)  $\sqrt{a(bx+c)^2} = \sqrt{d(ex+f)^2}$ .

**Bài toán 24** ([Chí+23], 10., p. 11). *Chứng minh:* (a)  $(\sqrt{3}-1)^2 = 4-2\sqrt{3}$ . (b)  $\sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{3} = -1$ .

*Giải.* (a)  $(\sqrt{3}-1)^2 = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1 = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = 4 - 2\sqrt{3}$ . (b) Từ (a):  $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{4-2\sqrt{3}} = |\sqrt{3}-1| = \sqrt{3}-1 \Leftrightarrow \sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{3} = -1$ .  $\square$

**Bài toán 25** ([Chí+23], 11., p. 11). *Tính:* (a)  $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25} + \sqrt{196} : \sqrt{49}$ . (b)  $36 : \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 18} - \sqrt{169}$ . (c)  $\sqrt{\sqrt{81}}$ . (d)  $\sqrt{3^2+4^2}$ .

*Giải.* (a)  $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25} + \sqrt{196} : \sqrt{49} = \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{5^2} + \sqrt{14^2} : \sqrt{7^2} = |4||5| + |14| : |7| = 4 \cdot 5 + 14 : 7 = 20 + 2 = 22$ . (b)  $36 : \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 18} - \sqrt{169} = 36 : \sqrt{18 \cdot 18} - \sqrt{13^2} = 36 : \sqrt{(18)^2} - \sqrt{13^2} = 36 : |18| - |13| = 36 : 18 - 13 = 2 - 13 = -11$ . (c)  $\sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{\sqrt{9^2}} = \sqrt{|9|} = \sqrt{9} = \sqrt{3^2} = |3| = 3$ . (d)  $\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = \sqrt{5^2} = |5| = 5$ .  $\square$

**Bài toán 26** ([Chí+23], 12., p. 11). *Tìm  $x$  để mỗi căn thức sau có nghĩa:* (a)  $\sqrt{2x+7}$ . (b)  $\sqrt{-3x+4}$ . (c)  $\sqrt{\frac{1}{x-1}}$ . (d)  $\sqrt{1+x^2}$ .

*Giải.* (a)  $\sqrt{2x+7}$  xác định  $\Leftrightarrow 2x+7 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -7 \Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{2} = -3.5$ . (b)  $\sqrt{-3x+4}$  xác định  $\Leftrightarrow -3x+4 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{3}$ . (c)  $\sqrt{\frac{1}{x-1}}$  xác định  $\Leftrightarrow \frac{1}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ . (d)  $\sqrt{1+x^2}$  xác định  $\Leftrightarrow 1+x^2 > 0$ : luôn đúng  $\forall x \in \mathbb{R}$  vì  $x^2+1 \geq 0+1 = 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Vậy  $\sqrt{1+x^2}$  xác định  $\forall x \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Bài toán 27** ([Chí+23], 13., p. 11). *Rút gọn các biểu thức:* (a)  $2\sqrt{a^2} - 5a$  với  $a < 0$ . (b)  $\sqrt{25a^2} + 3a$  với  $a \geq 0$ . (c)  $\sqrt{9a^4} + 3a^2 = \sqrt{(3a^2)^2} + 3a^2 = |3a^2| + 3a^2 = 3a^2 + 3a^2 = 6a^2$ . (d)  $5\sqrt{4a^6} - 3a^3$  với  $a < 0$ .

*Giải.* (a)  $2\sqrt{a^2} - 5a = 2|a| - 5a = -2a - 5a = -7a$  với  $a < 0$ . (b)  $\sqrt{25a^2} + 3a = \sqrt{(5a)^2} + 3a = |5a| + 3a = 5a + 3a = 8a$  vì  $a \geq 0 \Leftrightarrow 5a \geq 0$ . (c)  $\sqrt{9a^4} + 3a^2$ . (d)  $5\sqrt{4a^6} - 3a^3 = 5\sqrt{(2a^3)^2} - 3a^3 = 5|2a^3| - 3a^3 = -10a^3 - 3a^3 = -13a^3$  vì  $a < 0 \Leftrightarrow a^3 < 0 \Leftrightarrow 2a^3 < 0$ .  $\square$

**Bài toán 28** ([Chí+23], 14., p. 11). *Phân tích thành nhân tử: (a)  $x^2 - 3$ . (b)  $x^2 - 6$ . (c)  $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3$ . (d)  $x^2 - 2\sqrt{5}x + 5$ .*

Hint.  $a = (\sqrt{a})^2, \forall a \in \mathbb{R}, a \geq 0$ .

*Giải.* (a)  $x^2 - 3 = x^2 - (\sqrt{3})^2 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$ . (b)  $x^2 - 6 = x^2 - (\sqrt{6})^2 = (x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})$ . (c)  $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = x^2 + 2x\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = (x + \sqrt{3})^2$ . (d)  $x^2 - 2\sqrt{5}x + 5 = x^2 - 2x\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = (x - \sqrt{5})^2$ .  $\square$

**Bài toán 29** ([Chí+23], 15., p. 11). *Giải phương trình: (a)  $x^2 - 5 = 0$ . (b)  $x^2 - 2\sqrt{11}x + 11 = 0$ .*

*Giải.* (a)  $x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$ . Vậy  $x = \pm\sqrt{5}$ ,  $S = \{\pm\sqrt{5}\}$ . (b)  $x^2 - 2\sqrt{11}x + 11 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x\sqrt{11} + (\sqrt{11})^2 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{11})^2 = 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{11} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{11}$ . Vậy  $x = \sqrt{11}$ ,  $S = \{\sqrt{11}\}$ .  $\square$

**Bài toán 30** ([Chí+23], 16., p. 12). *Tìm chỗ sai trong phép chứng minh “Con muỗi nặng bằng con voi” sau: Giả sử con muỗi nặng  $m$  g, còn con voi nặng  $V$  g. Ta có:  $m^2 + V^2 = V^2 + m^2$ . Cộng cả 2 vế với  $-2mV$ , ta có:  $m^2 - 2mV + V^2 = V^2 - 2mV + m^2$ , hay  $(m - V)^2 = (V - m)^2$ . Lấy căn bậc 2 mỗi vế của đẳng thức trên, ta được:  $\sqrt{(m - V)^2} = \sqrt{(V - m)^2}$ . Do đó  $m - V = V - m$ . Từ đó ta có  $2m = 2V$ , suy ra  $m = V$ . Vậy con muỗi nặng bằng con voi!*

*Giải.* Chỗ sai ở bước khai căn:  $\sqrt{(m - V)^2} = \sqrt{(V - m)^2} \Leftrightarrow |m - V| = |V - m|$ , chứ không phải  $\sqrt{(m - V)^2} = \sqrt{(V - m)^2} \Rightarrow m - V = V - m$ , vì  $\sqrt{(m - V)^2} = \sqrt{(V - m)^2} \Leftrightarrow m - V = \pm(V - m)$ . Lời giải trên thiếu dấu giá trị tuyệt đối sau khi khai phương nên sai.  $\square$

### 3 Liên Hệ Giữa Phép Nhân, Phép Chia & Phép Khai Phương

**Bài toán 31** ([Chí+23], ?1, p. 12). *Tính & so sánh:  $\sqrt{16 \cdot 25}$  &  $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25}$ .*

**Bài toán 32** ([Chí+23], ĐL, p. 12). *Chứng minh: (a)  $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0$ . (b)*

$$\sqrt{\prod_{i=1}^n a_i} = \prod_{i=1}^n \sqrt{a_i}, \text{ i.e., } \sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n} = \sqrt{a_1} \sqrt{a_2} \cdots \sqrt{a_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_i \in \mathbb{R}, a_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

**Bài toán 33** ([Chí+23], Ví dụ 1, ?2, p. 13). *Áp dụng quy tắc khai phương 1 tích, tính: (a)  $\sqrt{49 \cdot 1.44 \cdot 25}$ . (b)  $\sqrt{810 \cdot 40}$ . (c)  $\sqrt{0.16 \cdot 0.64 \cdot 225}$ . (d)  $\sqrt{250 \cdot 360}$ .*

**Bài toán 34** ([Chí+23], Ví dụ 2, ?3, pp. 13–14). *Tính: (a)  $\sqrt{5}\sqrt{20}$ . (b)  $\sqrt{1.3}\sqrt{52}\sqrt{10}$ . (c)  $\sqrt{3}\sqrt{75}$ . (d)  $\sqrt{20}\sqrt{72}\sqrt{4.9}$ .*

**Bài toán 35** ([Chí+23], Ví dụ 3, ?4, p. 14). *Tìm ĐKXD rồi rút gọn biểu thức: (a)  $\sqrt{3a}\sqrt{27a}$  với  $a \geq 0$ . (b)  $\sqrt{9a^2b^4}$ . (c)  $\sqrt{3a^3}\sqrt{12a}$ . (d)  $\sqrt{2a \cdot 32ab^2}$ .*

**Bài toán 36** ([Chí+23], 17., p. 14). *Áp dụng quy tắc khai phương 1 tích, tính: (a)  $\sqrt{0.09 \cdot 64}$ . (b)  $\sqrt{2^4(-7)^2}$ . (c)  $\sqrt{12.1 \cdot 360}$ . (d)  $\sqrt{2^2 \cdot 3^4}$ .*

**Bài toán 37** ([Chí+23], 18., p. 14). *Áp dụng quy tắc nhân các căn bậc 2, tính: (a)  $\sqrt{7}\sqrt{63}$ . (b)  $\sqrt{2.5}\sqrt{30}\sqrt{48}$ . (c)  $\sqrt{0.4} \cdot \sqrt{6.4}$ . (d)  $\sqrt{2.7}\sqrt{5}\sqrt{1.5}$ .*

**Bài toán 38** ([Chí+23], 19., p. 15). *Rút gọn biểu thức: (a)  $\sqrt{0.36a^2}$  với  $a < 0$  &  $a \in \mathbb{R}$ . (b)  $\sqrt{a^4(3-a)^2}$  với  $a \geq 3$  &  $a \in \mathbb{R}$ . (c)  $\sqrt{27 \cdot 48(1-a)^2}$  với  $a > 1$  &  $a \in \mathbb{R}$ . (d)  $\frac{1}{a-b}\sqrt{a^4(a-b)^2}$  với  $a > b$ .*

**Bài toán 39** ([Chí+23], 20., p. 15). *Rút gọn biểu thức: (a)  $\sqrt{\frac{2a}{3}}\sqrt{\frac{3a}{8}}$  với  $a \geq 0$ . (b)  $\sqrt{13a}\sqrt{\frac{52}{a}}$  với  $a > 0$ . (c)  $\sqrt{5a}\sqrt{45a} - 3a$  với  $a \geq 0$ . (d)  $(3-a)^2 - \sqrt{0.2}\sqrt{180a^2}$ .*

**Bài toán 40** ([Chí+23], 21., p. 15). *Khai phương tích  $12 \cdot 30 \cdot 40$  được bao nhiêu?*

**Bài toán 41** ([Chí+23], 22., p. 15). *Tính hợp lý: (a)  $\sqrt{13^2 - 12^2}$ . (b)  $\sqrt{17^2 - 8^2}$ . (c)  $\sqrt{117^2 - 108^2}$ . (d)  $\sqrt{313^2 - 312^2}$ .*

**Bài toán 42** (Mở rộng [Chí+23], 22., p. 15). *Rút gọn biểu thức:*

$$\sqrt{\left(\frac{m^2 + n^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{m^2 - n^2}{2}\right)^2}, \forall m, n \in \mathbb{R}.$$

**Bài toán 43** ([Chí+23], 23., p. 15). *Chứng minh: (a)  $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1$ . (b)  $\sqrt{2006} \pm \sqrt{2005}$  là 2 số nghịch đảo của nhau.*

**Bài toán 44** (Mở rộng [Chí+23], 23., p. 15). *Chứng minh: (a)  $(n - \sqrt{n^2 - 1})(n + \sqrt{n^2 - 1}) = 1, \forall n \in \mathbb{R}, |n| \geq 1$ . (b)  $\sqrt{n+1} \pm \sqrt{n}$  là 2 số nghịch đảo của nhau,  $\forall n \in \mathbb{R}, n \geq 0$ .*

**Bài toán 45** ([Chí+23], 24., p. 15). *Rút gọn & tìm giá trị (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 3) của các căn thức: (a)  $\sqrt{4(1+6x+9x^2)}$  tại  $x = -\sqrt{2}$ . (b)  $\sqrt{9a^2(b^2+4-4b)}$  tại  $a = -2, b = -\sqrt{3}$ .*

**Bài toán 46** ([Chí+23], 25., p. 16). *Tìm  $x \in \mathbb{R}$  thỏa: (a)  $\sqrt{16x} = 8$ . (b)  $\sqrt{4x} = \sqrt{5}$ . (c)  $\sqrt{9(x-1)} = 21$ . (d)  $\sqrt{4(1-x)^2} - 6 = 0$ .*

**Bài toán 47** ([Chí+23], 26., p. 16). *(a) So sánh  $\sqrt{25+9}$  &  $\sqrt{25} + \sqrt{9}$ . (b) Chứng minh  $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$ . (c) Chứng minh  $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0$ .*

**Bài toán 48** ([Chí+23], 27., p. 16). *So sánh: (a) 4 &  $2\sqrt{3}$ . (b)  $-\sqrt{5}$  &  $-2$ .*

## 4 Phép Chia & Phép Khai Phương

**Bài toán 49** ([Chí+23], ?1, p. 16). *Tính & so sánh:* (a)  $\sqrt{\frac{16}{25}}$  &  $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}$ . (b)  $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}$  &  $\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ .

*Giải.* (a)  $\sqrt{\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{4^2}{5^2}} = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \left|\frac{4}{5}\right| = \frac{4}{5}$  &  $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{4^2}}{\sqrt{5^2}} = \frac{|4|}{|5|} = \frac{4}{5}$ , suy ra  $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$ . (b) Tương tự,  $\forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ , có  $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2} = \left|\frac{a}{b}\right|$  &  $\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \frac{|a|}{|b|}$ , mà  $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ , suy ra  $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \left|\frac{a}{b}\right|$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ .  $\square$

**Bài toán 50** ([Chí+23], ĐL, p. 16). *Chứng minh:*  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \geq 0, b > 0$ .

*Chứng minh.* Vì  $a \geq 0, b > 0$  nên  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$  xác định & không âm. Có  $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$ , suy ra  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$  là căn bậc 2 số học của  $\frac{a}{b}$ , i.e.,  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \geq 0, b > 0$ .  $\square$

**Bài toán 51** ([Chí+23], Ví dụ 1, ?2, p. 17). *Áp dụng quy tắc khai phương 1 thương, tính:* (a)  $\sqrt{\frac{25}{121}}$ . (b)  $\sqrt{\frac{9}{16} : \frac{25}{36}}$ . (c)  $\sqrt{\frac{225}{256}}$ . (d)  $\sqrt{0.0196}$ .

*1st giải.* (a)  $\sqrt{\frac{25}{121}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{121}} = \frac{\sqrt{5^2}}{\sqrt{11^2}} = \frac{|5|}{|11|} = \frac{5}{11}$ . (b)  $\sqrt{\frac{9}{16} : \frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{9}{16} \cdot \frac{36}{25}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 36}{16 \cdot 25}} = \frac{\sqrt{9 \cdot 36}}{\sqrt{16 \cdot 25}} = \frac{\sqrt{9} \cdot \sqrt{36}}{\sqrt{16} \cdot \sqrt{25}} = \frac{\sqrt{3^2} \cdot \sqrt{6^2}}{\sqrt{4^2} \cdot \sqrt{5^2}} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} = \frac{9}{10}$ . (c)  $\sqrt{\frac{225}{256}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{256}} = \frac{\sqrt{15^2}}{\sqrt{16^2}} = \frac{15}{16}$ . (d)  $\sqrt{0.0196} = \sqrt{\frac{196}{10000}} = \frac{\sqrt{196}}{\sqrt{10000}} = \frac{14}{100} = 0.14$ .  $\square$

*2nd giải.* (a)  $\sqrt{\frac{25}{121}} = \sqrt{\frac{5^2}{11^2}} = \sqrt{\left(\frac{5}{11}\right)^2} = \left|\frac{5}{11}\right| = \frac{5}{11}$ . (b)  $\sqrt{\frac{9}{16} : \frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{9}{16} \cdot \frac{36}{25}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 36}{16 \cdot 25}} = \frac{\sqrt{9 \cdot 36}}{\sqrt{16 \cdot 25}} = \frac{\sqrt{9} \cdot \sqrt{36}}{\sqrt{16} \cdot \sqrt{25}} = \frac{\sqrt{3^2} \cdot \sqrt{6^2}}{\sqrt{4^2} \cdot \sqrt{5^2}} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} = \frac{9}{10}$ . (c)  $\sqrt{\frac{225}{256}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{256}} = \frac{\sqrt{15^2}}{\sqrt{16^2}} = \frac{15}{16}$ . (d)  $\sqrt{0.0196} = \sqrt{\frac{196}{10000}} = \frac{\sqrt{196}}{\sqrt{10000}} = \frac{14}{100} = 0.14$ .  $\square$

**Bài toán 52** ([Chí+23], Ví dụ 2, ?3, pp. 17–18). *Tính:* (a)  $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$ . (b)  $\sqrt{\frac{49}{8} : \sqrt{3\frac{1}{8}}}$ . (c)  $\frac{\sqrt{999}}{\sqrt{111}}$ . (d)  $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}}$ .

**Bài toán 53** ([Chí+23], Ví dụ 3, ?4, p. 18). *Rút gọn biểu thức:* (a)  $\sqrt{\frac{4a^2}{25}}$ . (b)  $\frac{\sqrt{27a}}{\sqrt{3a}}$  với  $a > 0$ . (c)  $\sqrt{\frac{2a^2b^4}{50}}$ . (d)  $\frac{\sqrt{2ab^2}}{\sqrt{162}}$  với  $a \geq 0$ .

**Bài toán 54** ([Chí+23], 28., p. 18). *Tính:* (a)  $\sqrt{\frac{289}{225}}$ . (b)  $\sqrt{2\frac{14}{25}}$ . (c)  $\sqrt{\frac{0.25}{9}}$ . (d)  $\sqrt{\frac{8.1}{1.6}}$ .

**Bài toán 55** ([Chí+23], 29., p. 19). *Tính:* (a)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$ . (b)  $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{735}}$ . (c)  $\frac{\sqrt{12500}}{\sqrt{500}}$ . (d)  $\frac{\sqrt{6^5}}{\sqrt{2^3 \cdot 3^5}}$ .

**Bài toán 56** ([Chí+23], 30., p. 19). *Rút gọn biểu thức:* (a)  $\frac{y}{x} \sqrt{\frac{x^2}{y^4}}$  với  $x > 0$  &  $y \neq 0$ . (b)  $2y^2 \sqrt{\frac{x^4}{4y^2}}$  với  $y < 0$ . (c)  $5xy \sqrt{\frac{25x^2}{y^6}}$  với  $x < 0, y > 0$ . (d)  $0.2x^3y^3 \sqrt{\frac{16}{x^4y^8}}$  với  $xy \neq 0$ .

**Bài toán 57** ([Chí+23], 31., p. 19). (a) So sánh  $\sqrt{25-16}$  &  $\sqrt{25}-\sqrt{16}$ . (b) Chứng minh:  $\sqrt{a}-\sqrt{b} < \sqrt{a-b}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}, a > b > 0$ .

**Bài toán 58** ([Chí+23], 32., p. 19). *Tính:* (a)  $\sqrt{1\frac{9}{16} \cdot 5\frac{4}{9} \cdot 0.01}$ . (b)  $\sqrt{1.44 \cdot 1.21 - 1.44 \cdot 0.4}$ . (c)  $\sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}}$ . (d)  $\sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}$ .

**Bài toán 59** ([Chí+23], 33., p. 19). *Giải phương trình:* (a)  $\sqrt{2}x - \sqrt{50} = 0$ . (b)  $\sqrt{3}x + \sqrt{3} = \sqrt{12} + \sqrt{27}$ . (c)  $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{12} = 0$ . (d)  $\frac{x^2}{\sqrt{5}} - \sqrt{20} = 0$ .

**Bài toán 60** ([Chí+23], 34., pp. 19–20). *Rút gọn biểu thức:* (a)  $ab^2 \sqrt{\frac{3}{a^2b^4}}$  với  $a < b, b \neq 0$ . (b)  $\sqrt{\frac{27(a-3)^2}{48}}$  với  $a > 3$ . (c)  $\sqrt{\frac{9+12a+4a^2}{b^2}}$  với  $a \geq -1.5$  &  $b < 0$ . (d)  $(a-b) \sqrt{\frac{ab}{(a-b)^2}}$  với  $a < b < 0$ .

**Bài toán 61** ([Chí+23], 35., p. 20). *Tìm  $x \in \mathbb{R}$  thỏa:* (a)  $\sqrt{(x-3)^2} = 9$ . (b)  $\sqrt{4x^2+4x+1} = 6$ .



**Giải.** (a) ĐKXD:  $\forall x \in \mathbb{R}. \sqrt{(x-3)^2} = 9 \Leftrightarrow |x-3| = 9 \Leftrightarrow x-3 = \pm 9 \Leftrightarrow x = 12 \text{ or } x = -6$ . Vậy  $S = \{-6, 12\}$ . (b) ĐKXD:  $\forall x \in \mathbb{R}. \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{(2x+1)^2} = 6 \Leftrightarrow |2x+1| = 6 \Leftrightarrow 2x+1 = \pm 6 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \text{ or } x = -\frac{7}{2}$ . Vậy  $S = \{-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\}$ .  $\square$

**Bài toán 62** (Mở rộng [Chí+23], 35., p. 20). *Biện luận theo 3 tham số  $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$  để giải phương trình  $\sqrt{(ax+b)^2} = \sqrt{a^2x^2 + 2abx + b^2} = c$ .*

**Giải.** ĐKXD:  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Xét các trường hợp tương ứng với giá trị của  $c$ :

- Trường hợp  $c < 0$ : VT  $\geq 0 > VP$ , nên phương trình vô nghiệm trong trường hợp này.
- Trường hợp  $c = 0$ :  $\sqrt{(ax+b)^2} = 0 \Leftrightarrow |ax+b| = 0 \Leftrightarrow ax+b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$  (xác định vì  $a \neq 0$ ), nên phương trình có duy nhất 1 nghiệm  $x = -\frac{b}{a}$  trong trường hợp này.
- Trường hợp  $c > 0$ :  $\sqrt{(ax+b)^2} = c \Leftrightarrow |ax+b| = c \Leftrightarrow ax+b = \pm c \Leftrightarrow x = \frac{c-b}{a} \text{ or } x = \frac{-c-b}{a}$  (cả 2 đều xác định vì  $a \neq 0$ ), nên phương trình có 2 nghiệm  $x = \frac{\pm c - b}{a}$ .

Vậy tập nghiệm

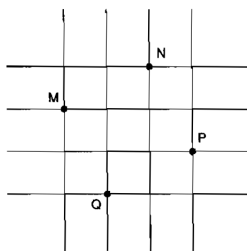
$$S = \begin{cases} \emptyset, & \text{nếu } c < 0, \\ \left\{-\frac{b}{a}\right\}, & \text{nếu } c = 0, \\ \left\{\frac{\pm c - b}{a}\right\}, & \text{nếu } c > 0, \end{cases}$$

Biện luận hoàn tất.  $\square$

**Bài toán 63** ([Chí+23], 36., p. 20). Đ/S? (a)  $0.01 = \sqrt{0.0001}$ . (b)  $-0.5 = \sqrt{-0.25}$ . (c)  $6 < \sqrt{39} < 7$ . (d)  $(4 - \sqrt{13})2x < \sqrt{3}(4 - \sqrt{13}) \Leftrightarrow 2x < \sqrt{3}$ .

**Giải.** (a) Đ vì  $\sqrt{0.0001} = \sqrt{0.01^2} = 0.01$ . (b) S:  $\sqrt{-0.25}$  không xác định vì  $-0.25 < 0$ . (c) Đ:  $36 < 39 < 49 \Leftrightarrow \sqrt{36} = 6 < \sqrt{39} < \sqrt{49} = 7$ . (d) Đ vì  $16 > 13 \Leftrightarrow \sqrt{16} = 4 > \sqrt{13} \Leftrightarrow 4 - \sqrt{13} > 0$ .  $\square$

**Bài toán 64** ([Chí+23], 37., p. 20). *Trên lưới ô vuông, mỗi hình vuông cạnh 1 cm, cho 4 điểm  $M, N, P, Q$ :*



*Xác định số đo cạnh, đường chéo & diện tích tứ giác  $MNPQ$ .*

**Giải.** Áp dụng định lý Pythagore: cạnh hình vuông  $= \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ , đường chéo hình vuông  $= \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$  (hoặc áp dụng công thức tính đường chéo hình vuông:  $d = a\sqrt{2}$  với  $a$  là độ dài cạnh hình vuông). Diện tích hình vuông  $MNPQ$ :  $S_{MNPQ} = (\sqrt{5})^2 = 5$ .  $\square$

## 5 Biến Đổi Đơn Giản Biểu Thức Chứa Căn Thức Bậc 2

**Bài toán 65** ([Chí+23], ?1, p. 24). *Chứng minh:  $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0$ .*

**Bài toán 66** ([Chí+23], Ví dụ 1-2, ?2, pp. 24-25). *Rút gọn: (a)  $\sqrt{2 \cdot 3^2}$ . (b)  $\sqrt{20}$ . (c)  $3\sqrt{5} + \sqrt{20} + \sqrt{5}$ . (d)  $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{50}$ . (e)  $4\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{45} + \sqrt{5}$ .*

**Bài toán 67** ([Chí+23], Ví dụ 3, ?3, p. 25). *Đưa thừa số ra ngoài dấu căn: (a)  $\sqrt{4x^2y}$  với  $x, y \geq 0$ . (b)  $\sqrt{18xy^2}$  với  $x \geq 0, y < 0$ . (c)  $\sqrt{28a^4b^2}$  với  $b \geq 0$ . (d)  $\sqrt{72a^2b^4}$  với  $a < 0$ .*

**Bài toán 68** ([Chí+23], Ví dụ 4, ?4, p. 26). *Đưa thừa số vào trong dấu căn: (a)  $3\sqrt{7}$ . (b)  $-2\sqrt{3}$ . (c)  $5a^2\sqrt{2a}$  với  $a \geq 0$ . (d)  $-3a^2\sqrt{2ab}$  với  $ab \geq 0$ . (e)  $3\sqrt{5}$ . (f)  $1.2\sqrt{5}$ . (g)  $ab^4\sqrt{a}$  với  $a \geq 0$ . (h)  $-2ab^2\sqrt{5a}$  với  $a \geq 0$ .*

**Bài toán 69** ([Chí+23], Ví dụ 5, p. 26). *So sánh  $3\sqrt{7}$  &  $\sqrt{28}$ .*

**Bài toán 70** ([Chí+23], 43., p. 27). *Viết các số hoặc biểu thức dưới dấu căn thành dạng tích rồi đưa thừa số ra ngoài dấu căn: (a)  $\sqrt{54}$ . (b)  $\sqrt{108}$ . (c)  $0.1\sqrt{20000}$ . (d)  $-0.05\sqrt{28800}$ . (e)  $\sqrt{7 \cdot 63a^2}$ .*

**Bài toán 71** ([Chí+23], 44., p. 27). *Đưa thừa số vào trong dấu căn:  $3\sqrt{5}, -5\sqrt{2}, -\frac{2}{3}\sqrt{xy}$  với  $xy \geq 0, x\sqrt{\frac{2}{x}}$  với  $x > 0$ .*

**Bài toán 72** ([Chí+23], 45., p. 27). So sánh: (a)  $3\sqrt{3}$  &  $\sqrt{12}$ . (b) 7 &  $3\sqrt{5}$ . (c)  $\frac{1}{3}\sqrt{51}$  &  $\frac{1}{5}\sqrt{150}$ . (d)  $\frac{1}{2}\sqrt{6}$  &  $6\sqrt{\frac{1}{2}}$ .

**Bài toán 73** ([Chí+23], 46., p. 27). Rút gọn các biểu thức sau với  $x \geq 0$ : (a)  $2\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} + 27 - 3\sqrt{3x}$ . (b)  $3\sqrt{2x} - 5\sqrt{8x} + 7\sqrt{18x} + 28$ .

**Bài toán 74** ([Chí+23], 47., p. 27). Rút gọn: (a)  $\frac{2}{x^2 - y^2} \sqrt{\frac{3(x+y)^2}{2}}$  với  $x \geq 0, y \geq 0$ , &  $x \neq y$ . (b)  $\frac{2}{2a-1} \sqrt{5a^2(1-4a+4a^2)}$  với  $a > 0.5$ .

**Bài toán 75** ([Chí+23], Ví dụ 1, ?1, p. 28). Khử mẫu của biểu thức lấy căn: (a)  $\sqrt{\frac{2}{3}}$ . (b)  $\sqrt{\frac{5a}{7b}}$  với  $ab > 0$ . (c)  $\sqrt{\frac{4}{5}}$ . (d)  $\sqrt{\frac{3}{125}}$ . (e)  $\sqrt{\frac{3}{2a^3}}$  với  $a > 0$ .

**Bài toán 76** ([Chí+23], Ví dụ 2, ?2, pp. 28–29). Trục căn thức ở mẫu: (a)  $\frac{5}{2\sqrt{3}}$ . (b)  $\frac{10}{\sqrt{3}+1}$ . (c)  $\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ . (d)  $\frac{5}{3\sqrt{8}}, \frac{2}{\sqrt{b}}$  với  $b > 0$ . (e)  $\frac{5}{5-2\sqrt{3}}, \frac{2a}{1-\sqrt{a}}$  với  $a \geq 0, a \neq 1$ . (f)  $\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}, \frac{6a}{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}$  với  $a > b > 0$ .

**Bài toán 77** ([Chí+23], 48., p. 29). Khử mẫu của biểu thức lấy căn:  $\sqrt{\frac{1}{600}}, \sqrt{\frac{11}{540}}, \sqrt{\frac{3}{50}}, \sqrt{\frac{5}{98}}, \sqrt{\frac{(1-\sqrt{3})^2}{27}}$ .

**Bài toán 78** ([Chí+23], 49., p. 29). Tìm ĐKXD rồi khử mẫu của biểu thức lấy căn:  $ab\sqrt{\frac{a}{b}}, \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}, \sqrt{\frac{1}{b} + \frac{1}{b^2}}, \sqrt{\frac{9a^3}{36b}}, 3xy\sqrt{\frac{2}{xy}}$ .

**Bài toán 79** ([Chí+23], 50., p. 30). Tìm ĐKXD rồi trục căn thức:  $\frac{5}{\sqrt{10}}, \frac{5}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{3\sqrt{20}}, \frac{2\sqrt{2}+2}{5\sqrt{2}}, \frac{y+b\sqrt{y}}{b\sqrt{y}}$ .

**Bài toán 80** ([Chí+23], 51., p. 30). Tìm ĐKXD rồi trục căn thức:  $\frac{3}{\sqrt{3}+1}, \frac{2}{\sqrt{3}-1}, \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}, \frac{b}{3+\sqrt{b}}, \frac{p}{2\sqrt{p}-1}$ .

**Bài toán 81** ([Chí+23], 52., p. 30). Tìm ĐKXD rồi trục căn thức:  $\frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}, \frac{2ab}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ .

**Bài toán 82** ([Chí+23], 53., p. 30). Tìm ĐKXD rồi rút gọn biểu thức: (a)  $\sqrt{18(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$ . (b)  $ab\sqrt{1+\frac{1}{a^2b^2}}$ . (c)  $\sqrt{\frac{a}{b^3} + \frac{a}{b^4}}$ . (d)  $\frac{a+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ .

**Bài toán 83** ([Chí+23], 54., p. 30). Tìm ĐKXD rồi rút gọn biểu thức:  $\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2}, \frac{a-\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}, \frac{p-2\sqrt{p}}{\sqrt{p}-2}$ .

**Bài toán 84** ([Chí+23], 55., p. 30). Phân tích thành nhân tử với  $a, b, x, y \in \mathbb{R}, a, b, x, y \geq 0$ : (a)  $ab + b\sqrt{a} + \sqrt{a} + 1$ . (b)  $\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3} + \sqrt{x^2y} - \sqrt{xy^2}$ .

**Bài toán 85** ([Chí+23], 56., p. 30). Sắp xếp theo thứ tự tăng dần: (a)  $3\sqrt{5}, 2\sqrt{6}, \sqrt{29}, 4\sqrt{2}$ . (b)  $6\sqrt{2}, \sqrt{38}, 3\sqrt{7}, 2\sqrt{14}$ .

**Bài toán 86** ([Chí+23], 57., p. 30). Giải phương trình  $\sqrt{25x} - \sqrt{16x} = 9$ .

## 6 Rút Gọn Biểu Thức Có Chứa Căn Thức Bậc 2

**Bài toán 87** ([Chí+23], Ví dụ 1, ?1, p. 31). Rút gọn: (a)  $5\sqrt{a} + 6\sqrt{\frac{a}{4}} - a\sqrt{\frac{4}{a}} + \sqrt{5}$  với  $a > 0$ . (b)  $3\sqrt{5a} - \sqrt{20a} + 4\sqrt{45a} + \sqrt{a}$  với  $a \geq 0$ .

**Bài toán 88** ([Chí+23], Ví dụ 2, p. 31). Chứng minh:  $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) = 2\sqrt{2}$ .

**Bài toán 89** ([Chí+23], ?2, p. 31). Chứng minh:  $\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab} = (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$ .

**Bài toán 90** ([Chí+23], ?2, p. 31). Cho biểu thức  $P = \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)$  với  $a \in \mathbb{R}$ . (a) Tìm ĐKXD. (b) Rút gọn biểu thức P. (c) Tìm giá trị của a  $\in \mathbb{R}$  để  $P < 0$ .

**Bài toán 91** ([Chí+23], ?3, p. 32). Tìm ĐKXD & rút gọn biểu thức: (a)  $\frac{x^2-3}{x+\sqrt{3}}$ . (b)  $\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}$ .



**Bài toán 92** ([**Chí+23**], 58., p. 32). *Rút gọn biểu thức: (a)  $5\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{20} + \sqrt{5}$ . (b)  $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4.5} + \sqrt{12.5}$ . (c)  $\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72}$ . (d)  $0.1\sqrt{200} + 2\sqrt{0.08} + 0.4\sqrt{50}$ .*

**Bài toán 93** ([**Chí+23**], 59., p. 32). *Tìm ĐKXD & rút gọn biểu thức: (a)  $5\sqrt{a} - 4b\sqrt{25a^3} + 5a\sqrt{16ab^2} - 2\sqrt{9a}$ . (b)  $5a\sqrt{64ab^3} - \sqrt{3}\sqrt{12a^3b^3} + 2ab\sqrt{9ab} - 5b\sqrt{81a^3b}$ .*

**Bài toán 94** ([**Chí+23**], 60., p. 33). *Cho biểu thức  $A = \sqrt{16x+16} - \sqrt{9x+9} + \sqrt{4x+4} + \sqrt{x+1}$ . (a) Tìm ĐKXD. (b) Rút gọn biểu thức A. (c) Tìm  $x \in \mathbb{R}$  sao cho  $A = 16$ .*

**Bài toán 95** ([**Chí+23**], 61., p. 33). *Chứng minh đẳng thức:  $\frac{3}{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$ . (b)  $\left(x\sqrt{\frac{6}{x}} + \sqrt{\frac{2x}{3}} + \sqrt{6x}\right) : \sqrt{6x} = 2\frac{1}{3}$  với  $x > 0$ .*

**Bài toán 96** ([**Chí+23**], 62., p. 33). *Rút gọn biểu thức: (a)  $\frac{1}{2}\sqrt{48} - 2\sqrt{75} - \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}} + 5\sqrt{1\frac{1}{3}}$ . (b)  $\sqrt{150} + \sqrt{1.6}\sqrt{60} + 4.5\sqrt{2\frac{2}{3}} - \sqrt{6}$ . (c)  $(\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7})\sqrt{7} + \sqrt{84}$ . (d)  $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120}$ .*

**Bài toán 97** ([**Chí+23**], 63., p. 33). *Tìm ĐKXD & rút gọn biểu thức: (a)  $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{ab} + \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}$ . (b)  $\sqrt{\frac{m}{1-2x+x^2}}\sqrt{\frac{4m-8mx+4mx^2}{81}}$ .*

**Bài toán 98** ([**Chí+23**], 64., p. 33). *Chứng minh đẳng thức: (a)  $\left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)\left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-a}\right)^2 = 1, \forall a \in \mathbb{R}, a \geq 0, a \neq 1$ . (b)*

$$\frac{a+b}{b^2}\sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2+2ab+b^2}} = |a|, \forall a, b \in \mathbb{R}, a+b > 0, b \neq 0.$$

**Bài toán 99** ([**Chí+23**], 65., p. 34). *Tìm ĐKXD & rút gọn rồi so sánh giá trị của A với 1 biết:*

$$A = \left(\frac{1}{a-\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}-1}\right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1}.$$

**Bài toán 100** ([**Chí+23**], 66., p. 34). *Tính  $\frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}}$ .*

## 7 Cube Root, nth Root – Căn Bậc 3, Căn Bậc n

**Bài toán 101** ([**Chí+23**], ?1, p. 35). *Tìm căn bậc 3 của: 27, -64, 0,  $\frac{1}{125}$ .*

*Giải.* Căn bậc 3 của 27, -64, 0,  $\frac{1}{125}$  lần lượt là 3, -4, 0,  $\frac{1}{5}$ . □

**Bài toán 102** ([**Chí+23**], Ví dụ 2, p. 35). *So sánh 2 &  $\sqrt[3]{7}$ .*

*Giải.*  $8 > 7 \Leftrightarrow \sqrt[3]{8} = 2 > \sqrt[3]{7}$ . □

**Bài toán 103** ([**Chí+23**], Ví dụ 3, p. 36). *Rút gọn  $\sqrt[3]{8a^3} - 5a$ .*

*Giải.*  $\sqrt[3]{8a^3} - 5a = \sqrt[3]{(2a)^3} - 5a = 2a - 5a = -3a$ . □

**Bài toán 104** ([**Chí+23**], ?2, p. 36). *Tính  $\sqrt[3]{1728} : \sqrt[3]{64}$  theo 2 cách.*

*Giải.* Cách 1:  $\sqrt[3]{1728} : \sqrt[3]{64} = 12 : 4 = 3$ . Cách 2:  $\sqrt[3]{1728} : \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{\frac{1728}{64}} = \sqrt[3]{27} = 3$ . □

**Bài toán 105** ([**Chí+23**], 67., p. 36). *Tính:  $\sqrt[3]{512}, \sqrt[3]{-729}, \sqrt[3]{0.064}, \sqrt[3]{-0.216}, \sqrt[3]{-0.008}$ .*

*1st giải.* Sử dụng máy tính bỏ túi:  $\sqrt[3]{512} = 8, \sqrt[3]{-729} = -9, \sqrt[3]{0.064} = 0.4, \sqrt[3]{-0.216} = -0.6, \sqrt[3]{-0.008} = -0.2$ . □

*2nd giải.* Không sử dụng máy tính bỏ túi:  $\sqrt[3]{0.064} = \sqrt[3]{\frac{64}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{4}{10} = 0.4, \sqrt[3]{-0.216} = \sqrt[3]{-\frac{216}{1000}} = -\frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{1000}} = -\frac{6}{10} = -0.6,$   
 $\sqrt[3]{-0.008} = \sqrt[3]{-\frac{8}{1000}} = -\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{1000}} = -\frac{2}{10} = -0.2$ . □

**Bài toán 106** ([**Chí+23**], 68., p. 36). *Tính: (a)  $\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{-8} - \sqrt[3]{125}$ . (b)  $\frac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}} - \sqrt[3]{54}\sqrt[3]{4}$ .*

*Giải.* (a)  $\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{-8} - \sqrt[3]{125} = 3 - (-2) - 5 = 3 + 2 - 5 = 5 - 5 = 0$ . (b)  $\frac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}} - \sqrt[3]{54}\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{\frac{135}{5}} - \sqrt[3]{54 \cdot 4} = \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{216} = 3 - 6 = -3$ . □

**Bài toán 107** ([**Chí+23**], 69., p. 36). *So sánh: (a) 5 &  $\sqrt[3]{123}$ . (b)  $5\sqrt[3]{6}$  &  $6\sqrt[3]{5}$ .*

*Giải.* (a)  $125 > 123 \Leftrightarrow \sqrt[3]{125} = 5 > \sqrt[3]{123}$ . (b)  $5\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 6} = \sqrt[3]{750}, 6\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{6^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{1080}$ . Vì  $750 < 1080 \Leftrightarrow \sqrt[3]{750} < \sqrt[3]{1080} \Leftrightarrow 5\sqrt[3]{6} < 6\sqrt[3]{5}$ . □

**Bài toán 108.** *Biện luận theo tham số  $a, b \in \mathbb{R}$  để so sánh: (a) a &  $\sqrt[3]{b}$ . (b)  $a\sqrt[3]{b}$  &  $b\sqrt[3]{a}$ .*

## 8 Miscellaneous

**Bài toán 109** ([Chí+23], 1–5, p. 39). (a) Nêu điều kiện để  $x \in \mathbb{R}$  là căn bậc 2 số học của số  $a \in \mathbb{R}$  không âm. Cho ví dụ. (b) Chứng minh  $\sqrt{a^2} = |a|$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$ . (c) Biểu thức  $A$  phải thỏa điều kiện gì để  $\sqrt{A}$  xác định? (d) Phát biểu & chứng minh định lý về mối liên hệ giữa phép nhân & phép khai phương. Cho ví dụ. (e) Phát biểu & chứng minh định lý về mối liên hệ giữa phép chia & phép khai phương. Cho ví dụ.

**Bài toán 110** ([Chí+23], 70., p. 40). Tính: (a)  $\sqrt{\frac{25}{81} \cdot \frac{16}{49} \cdot \frac{196}{9}}$ . (b)  $\sqrt{3 \frac{1}{16} \cdot 2 \frac{14}{25} \cdot 2 \frac{34}{81}}$ . (c)  $\frac{\sqrt{640}\sqrt{34.3}}{\sqrt{567}}$ . (d)  $\sqrt{21.6}\sqrt{810}\sqrt{11^2 - 5^2}$ .

**Bài toán 111** ([Chí+23], 71., p. 40). Rút gọn biểu thức: (a)  $(\sqrt{8} - 3\sqrt{2} + \sqrt{10})\sqrt{2} - \sqrt{5}$ . (b)  $0.2\sqrt{(-10)^2 \cdot 3} + 2\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2}$ . (c)  $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{4}{5}\sqrt{200}\right) : \frac{1}{8}$ . (d)  $2\sqrt{(\sqrt{2} - 3)^2} + \sqrt{2(-3)^2} - 5\sqrt{(-1)^4}$ .

**Bài toán 112** ([Chí+23], 72., p. 40). Phân tích thành nhân tử với  $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ ,  $a, b, x, y \geq 0$ ,  $a \geq b$ : (a)  $xy - y\sqrt{x} + \sqrt{x} - 1$ . (b)  $\sqrt{ax} - \sqrt{by} + \sqrt{bx} - \sqrt{ay}$ . (c)  $\sqrt{a+b} + \sqrt{a^2-b^2}$ . (d)  $12 - \sqrt{x} - x$ .

**Bài toán 113** ([Chí+23], 73., p. 40). Tìm DKXD, rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức: (a)  $\sqrt{-9a} - \sqrt{9 + 12a + 4a^2}$  tại  $a = -9$ . (b)  $1 + \frac{3m}{m-2}\sqrt{m^2 - 4m + 4}$  tại  $m = 1.5$ . (c)  $\sqrt{1 - 10a + 25a^2} - 4a$  tại  $a = \sqrt{2}$ . (d)  $4x - \sqrt{9x^2 + 6x + 1}$  tại  $x = -\sqrt{3}$ .

**Bài toán 114** ([Chí+23], 74., p. 40). Tìm  $x \in \mathbb{R}$  thỏa: (a)  $\sqrt{(2x-1)^2} = 3$ . (b)  $\frac{5}{3}\sqrt{15x} - \sqrt{15x} - 2 = \frac{1}{3}\sqrt{15x}$ .

**Bài toán 115** ([Chí+23], 75., pp. 40–41). Chứng minh: (a)  $\left(\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{\sqrt{8} - 2} - \frac{\sqrt{216}}{3}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = -1.5$ . (b)  $\left(\frac{\sqrt{14} - \sqrt{7}}{1 - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{3}}\right) : \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = -2$ . (c)  $\frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} : \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = a - b$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a, b > 0$ ,  $a \neq b$ . (d)  $\left(1 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right) \left(1 - \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}\right) = 1 - a$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$ ,  $a \geq 0$ ,  $a \neq 1$ .

**Bài toán 116** ([Chí+23], 76., p. 41). Cho biểu thức  $A = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} - \left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right) : \frac{b}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$ . (a) Tìm DKXD. (b) Rút gọn  $A$ . (c) Tính  $Q$  khi  $a = 3b$ .

## Tài liệu

[Chí+23] Phan Đức Chính, Tồn Thân, Vũ Hữu Bình, Trần Phương Dung, Ngô Hữu Dũng, Lê Văn Hồng, and Nguyễn Hữu Thảo. *Toán 9 Tập 1*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 128.