Elementary Mathematics/Grade 6

Nguyễn Quản Bá Hồng

Ngày 19 tháng 3 năm 2022

Tóm tắt nội dung

Tóm tắt kiến thức Toán lớp 6 & một số chủ đề nâng cao.

Mục lục

Notation/Ký Hiệu

- $x \in [a, b]$: $x \geq a$ và $x \leq b$.
- e.g.: "ví dụ", "chẳng hạn", "for example", "for instance".
- i.e.: "tức là", "nghĩa là", "that means", "it means".
- w.l.o.g. abbr.[1] "without loss of generality", "không mất tính tổng quát".[2]
- Cá nhân tôi dùng dấu chấm để ngăn cách phần nguyên & phần thập phân của 1 số thực/phức (nói chung là không nguyên) thay vì dấu , như trong Thái et al., 2022a; Thái et al., 2022b. Ký hiệu dấu . được sử dụng rộng rãi 1 cách thống nhất trong nhiều ngành Khoa học.

[1] abbr. is the abbreviation of abbreviation itself, i.e., abbreviation (abbr., abbr.).

[2] Cụm này thường được dùng trong các chứng minh có *chia trường hợp* (hay còn gọi là *kỹ thuật chia để trị*), và điều quan trọng là các trường hợp được xét phải "bình đẳng"/"đối xứng" với nhau theo một nghĩa nào đó, thì mới được xử dụng kỹ thuật chia trường hợp, cũng như cụm từ này. Nếu sử dụng cụm từ "w.l.o.g." cho các trường hợp không bình đẳng với nhau thì lời giải sẽ thiếu trường hợp & sai logic ngay từ thời điểm cụm "w.l.o.g." được viết ra.

Principles/Nguyên Tắc

Về nguyên tắc cá nhân của tôi trong việc dạy & học Toán Sơ Cấp, xem GitHub/NQBH/elementary math/principle.

Câu hỏi 0.1. *Học Toán để làm gì? Tại sao phải học Toán?*

Đây thực sự là 1 câu hỏi khó, rất khó.

"...được tiến thêm 1 bước trên con đường khám phá thế giới bí ẩn & đẹp đẽ của Toán học, đặc biệt là được "làm giàu" về vốn văn hóa chung & có cơ hội "Mang cuộc sống vào bài học – Đưa bài học vào cuộc sống". [...] sẽ ngày càng tiến bộ & cảm thấy vui sướng khi nhận ra ý nghĩa: Học Toán rất có ích cho cuộc sống hằng ngày." – Thái et al., 2022a, p. 1

1 Số Tự Nhiên

Nội dung. Tập hợp; tập hợp các số tự nhiên; các phép tính trong tập hợp số tự nhiên; quan hệ chia hết, số nguyên tố; ước chung & bội chung.

1.1 Tập Hợp

1.1.1 Ký hiệu & cách viết tập hợp

Khái niệm tập hợp (set) thường gặp trong toán học & trong đời sống. Người ta thường dùng các chữ cái in hoa để đặt tên cho 1 tập hợp. Các phần tử của 1 tập hợp được viết trong 2 dấu ngoặc nhọn { }, cách nhau bởi dấu ";". Mỗi phần tử được liệt kê 1 lần, thứ tự liệt kê tùy ý.

1.1.2 Phần tử thuộc tập hợp

a là 1 phần tử của tập hợp A, viết $a \in A$, đọc là *a thuộc A*. *b không là 1 phần tử của tập hợp B*, viết $b \notin B$, đọc là *b không thuộc B*.

1.1.3 Cách cho 1 tập hợp

Có 2 cách cho 1 tập hợp:

- Liệt kê các phần tử của tập hợp;
- Chỉ ra tính đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.

1.1.4 Biểu đồ Ven (Venn diagram)

Người ta còn minh họa tập hợp bằng 1 vòng kín, mỗi phần tử của tập hợp được biểu diễn bởi 1 chấm bên trong vòng kín, còn phần tử không thuộc tập hợp đó được biểu diễn bởi 1 chấm bên ngoài vòng kín. Cách minh họa tập hợp này gọi là *biểu đồ Venn*, do nhà toán học người Anh John Venn (1834–1923) đưa ra.

1.2 Tập Hợp Các Số Tự Nhiên

1.2.1 Tập hợp các số tự nhiên

Tập hợp $\mathbb{N}$ & tập hợp $\mathbb{N}^\star$.

Định nghĩa 1.1. Tập hợp các số tự nhiên *được ký hiệu là* $\mathbb{N} := \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$. Tập hợp các số tự nhiên khác 0 *được ký hiệu là* $N^\star := \{1; 2; 3; 4; \ldots\}$.

Hiển nhiên $N^\star \subset \mathbb{N}$, i.e., $x \in \mathbb{N}^\star \Rightarrow x \in \mathbb{N}$ nhưng $x \in \mathbb{N} \not\Rightarrow x \in \mathbb{N}^\star$ vì $0 \in \mathbb{N}$ nhưng $0 \notin \mathbb{N}^\star$ (cũng là phản ví dụ duy nhất trong trường hợp này). Chú ý: $\mathbb{N} = \mathbb{N}^\star \cup \{0\}$.

Cách đọc & viết số tự nhiên. Khi viết các số tự nhiên có từ 4 chữ số trở lên, người ta thường viết tách riêng từng nhóm 3 chữ số kể từ phải sang trái cho dễ đọc (why).

1.2.2 Biểu diễn số tự nhiên

Biểu diễn số tự nhiên trên tia số. Các số tự nhiên được biểu diễn trên tia số. Mỗi số tự nhiên ứng với 1 điểm trên tia số.

Câu hỏi 1.1. *Tại sao cần/phải biểu diễn số tự nhiên trên tia số?*

Trả lời. Làm việc trên hình vẽ để trực quan, tiện trong nhiều mục đích khác, e.g., so sánh 2 số tự nhiên, so sánh 2 tập hợp con của $\mathbb{N}$, etc. □

Cấu tạo thập phân của số tự nhiên. Số tự nhiên được viết trong hệ thập phân bởi 1, 2, hay nhiều chữ số. Các chữ số được dùng là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Khi 1 số gồm 2 chữ số trở lên thì chữ số đầu tiên (tính từ trái sang phải) khác 0, i.e.,

$$\overline{a_na_{n-1}\dots a_1a_0}|_{10},\ n\in\mathbb{N}^\star,\ a_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\ \forall i=0,\dots,n,\ a_n\ne 0. \tag{1.1}$$

Chú ý, trong công thức (1.1), giả thiết $n\in\mathbb{N}^\star$ & $a_n\ne 0$ khiến ta chỉ xét ở đây các số tự nhiên có ít nhất 2 chữ số. Với mọi $a\in\mathbb{N}$, biểu diễn chữ số trong hệ thập phân của a là:

$$a=\overline{a_na_{n-1}\dots a_1a_0}|_{10},\ n\in\mathbb{N},\ a_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\ \forall i=0,\dots,n,\ a_n\ne 0 \text{ nếu } n\ne 0. \tag{1.2}$$

Trong các viết 1 số tự nhiên có nhiều chữ số, mỗi chữ số ở những vị trí khác nhau có giá trị khác nhau.

Chỉ số chân (subscript) 10 ở đây ám chỉ hệ thập phân. Do hệ thập phân được sử dụng đa số, nên chỉ số chân 10 này thường được lược bỏ & được hiểu ngầm là đang sử dụng hệ thập phân.

Chú ý, công thức (1.2) còn được viết cụ thể hơn dưới dạng tổng là:

$$\overline{a_na_{n-1}\dots a_1a_0}|_{10}=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\cdots+a_110+a_0=\sum_{i=0}^n a_i10^i. \tag{1.3}$$

Lưu ý 1.1 (Mở rộng cho hệ cơ số nguyên bất kỳ)**.** *Cơ số $b\in\mathbb{N}^\star$, $b\ge 2$ bất kỳ:*

$$\overline{a_na_{n-1}\dots a_1a_0}|_b,\quad \text{với } n\in\mathbb{N},\ a_i\in\{0,1,\dots,b-1\},\ \forall i=0,\dots,n,\ a_n\ne 0. \tag{1.4}$$

Tương tự (1.3), biểu diễn (1.4) còn được viết cụ thể hơn dưới dạng tổng là:

$$\overline{a_na_{n-1}\dots a_1a_0}|_b=a_nb^n+a_{n-1}b^{n-1}+\cdots+a_1b+a_0=\sum_{i=0}^n a_ib^i. \tag{1.5}$$

E.g., hệ nhị phân ($b=2$), và hệ thập lục phân ($b=16$) được xử dụng chủ yếu trong Tin học, hay chính xác hơn là Khoa học Máy tính (Computer Science). Hệ nhị phân được dùng để thiết kế ngôn ngữ máy tính. `[insert more details]`

Số La Mã. Cách ghi số La Mã: I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII, XVIII, XIX, XX, XXI, XXII, XXIII, XXIV, XXV, XXVI, XXVII, XXVIII, XXIX, XXX.

Nguyên tắc. Chữ số I, II, III khi nằm bên trái V, X có nghĩa là "trừ ra", và khi nằm bên phải V, X có nghĩa là "cộng thêm".

1.2.3 So sánh các số tự nhiên

Trong 2 số tự nhiên $a,b\in\mathbb{N}$ khác nhau, có 1 số nhỏ hơn số kia. Nếu số a nhỏ hơn số b thì viết $a<b$ hay $b>a$.

Tính chất bắc cầu. Nếu $a<b$ & $b<c$ thì $a<c$, biểu thức logic:

$$(a<b)\wedge(b<c)\Rightarrow(a<c).$$

Hiểu 1 cách trực quan, biểu diễn 3 số $a,b,c\in\mathbb{N}$ trên tia số, khi đó $a<b$ có nghĩa là "a nằm bên trái b", $b<c$ có nghĩa là "b nằm bên trái c". Nhìn vào tia số, ta thấy a nằm bên trái c, nghĩa là $a<c$.

`Add partial ordering set.` See, e.g., Halmos, 1960; Halmos, 1974; Kaplansky, 1972; Kaplansky, 1977.

Định lý 1.1. *Trong 2 số tự nhiên có số chữ số khác nhau: Số nào có nhiều chữ số hơn thì lớn hơn, số nào có ít chữ số hơn thì nhỏ hơn, i.e.:*

$$\left.\begin{array}{l} a=\overline{a_ma_{m-1}\dots a_1a_0},\ b=\overline{b_nb_{n-1}\dots b_1b_0},\ m,n\in\mathbb{N}^\star,\ m>n\\ a_i,b_j\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\ \forall i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n,\ a_m\ne 0,\ b_n\ne 0,\end{array}\right\}\Rightarrow a>b. \tag{1.6}$$

Proof. Từ biểu diễn thập phân (1.6), xét $a-b$, nếu $a-b>0$ thì $a>b$. Thật vậy, vì $m>n$,

$$\begin{aligned}a-b&=\overline{a_ma_{m-1}\ldots a_1a_0}-\overline{b_nb_{n-1}\ldots b_1b_0}=\sum_{i=0}^m a_i10^i-\sum_{i=0}^n b_i10^i=\sum_{i=0}^n a_i10^i+\sum_{i=n+1}^m a_i10^i-\sum_{i=0}^n b_i10^i\\&=\sum_{i=0}^n(a_i-b_i)10^i+\sum_{i=n+1}^m a_i10^i\ge\sum_{i=0}^n -9\cdot 10^i+10^m=-9\sum_{i=0}^n 10^i+10^m=-9\frac{10^{n+1}-1}{10-1}+10^m=10^m-10^{n+1}+1>0,\end{aligned}$$

trong đó giả thiết $m>n$, tức $m\ge n+1$ (do $m,n\in\mathbb{N}$[3]) được sử dụng để tách tổng trong biểu diễn của a thành 2 tổng con và dùng trong phép so sánh $10^m\ge 10^{n+1}$, trong khi giả thiết thứ 2 $a_i,b_j\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, với mọi $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$ được dùng trong đánh giá hiển nhiên $a_i-b_i\ge -9$ vì trường hợp xấu nhất (the worst case) xảy ra khi $a_i=0$ và $b_i=9$, và đánh giá $a_i\ge 0$, với mọi $i=n+1,\ldots,m-1$ được dùng trong $a_i10^i\ge 0$, và đánh giá $a_m\ge 1$ được dùng trong $a^m10^m\ge 10^m$. □

Lưu ý 1.2. *Chú ý tổng $\sum_{i=0}^n 10^i$ được tính bằng công thức liên quan tới cấp số nhân hay đơn giản hơn là hằng đẳng thức:*

$$\sum_{i=0}^n a^i=\begin{cases}\dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}, & \forall a\in\mathbb{R}\backslash\{1\},\\ n+1, & \text{if } a=1.\end{cases}$$

> Để so sánh 2 số tự nhiên có số chữ số bằng nhau, ta lần lượt so sánh từng cặp chữ số trên cùng 1 hàng (tính từ trái sang phải), cho đến khi xuất hiện cặp chữ số đầu tiên khác nhau. Ở cặp chữ số khác nhau đó, chữ số nào lớn hơn thì số tự nhiên chứa chữ số đó lớn hơn.

Viết dưới dạng *thuật toán* (algorithm) như sau:
Giả sử $a,b\in\mathbb{N}$ là 2 số tự nhiên có số chữ số bằng nhau, i.e.,

$$a=\overline{a_na_{n-1}\ldots a_1a_0},\ b=\overline{b_nb_{n-1}\ldots b_1b_0},\ n\in\mathbb{N},\ a_i,b_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\ \forall i=1,\ldots,n,\ a_n\ne 0,\ b_n\ne 0.$$

Algorithm 1 So sánh 2 số tự nhiên có cùng chữ số

1: **for** $i=n$ to 0 (từ trái sang phải) **do** So sánh a_i và b_i.
- Nếu $a_i>b_i$ thì dừng vòng lặp for và kết luận $a>b$.
- Nếu $a_i<b_i$ thì dừng vòng lặp for và kết luận $a<b$.
- Nếu $a_i=b_i$ thì xét:
  - Nếu $i=0$ (vòng lặp cuối của vòng lặp for) thì kết luận $a=b$ (vì mỗi cặp chữ số tương ứng của a & b đều bằng nhau).
  - Nếu $i>0$ thì gán $i\leftarrow i-1$ và so sánh cặp chữ số tiếp theo ở ngay bên phải cặp chữ số vừa được so sánh.

2: **end for**

Với số tự nhiên $a\in\mathbb{N}$ cho trước, viết $x\le a$ để chỉ $x<a$ hoặc $x=a$, viết $x\ge a$ để chỉ $x>a$ hoặc $x=a$, i.e.,

$$(x\le a)\Leftrightarrow(x<a)\vee(x=a),\ (x\ge a)\Leftrightarrow(x>a)\vee(x=a),$$

Lưu ý 1.3. *Ký hiệu ngoặc nhọn* { *(hay* }*) dùng để biểu thị "và" (logical and) trong khi ký hiệu ngoặc vuông* [*(hay*]*) dùng để biểu thị "hoặc" (logical or), i.e.,*

$$a\ \text{và}\ b\Leftrightarrow a\ \text{and}\ b\Leftrightarrow a\wedge b\Leftrightarrow\begin{cases}a\\ b\end{cases},$$

$$a\ \text{hoặc}\ b\Leftrightarrow a\ \text{or}\ b\Leftrightarrow a\vee b\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a\\ b\end{array}\right.$$

[3]Đây chính là giả thiết được thêm, hay kỹ thuật *siết chặt bất đẳng thức* khi làm việc với các bài toán trên tập số tự nhiên $\mathbb{N}$ hay rộng hơn xíu là tập số nguyên $\mathbb{Z}$, đặc biệt là các bài giải phương trình hàm trên tập số nguyên. Điều này không có được khi làm việc trên các tập số thực $\mathbb{R}$ hay tập số phức $\mathbb{C}$. Cf. Tao, 2006, Problem 3.1, p. 36–38.

1.2.4 Số La Mã

"Đế quốc La Mã là 1 đế quốc hùng mạnh tồn tại từ thế kỷ III trước Công nguyên đến thế kỷ V sau Công nguyên, bao gồm những vùng lãnh thổ rộng lớn ở Địa Trung Hải, Bắc PHi & Tây Á." – Thái et al., 2022a, p. 14

Hệ thống các chữ số & số đặc biệt. Có 7 chữ số La Mã cơ bản là (ký hiệu & giá trị tương ứng trong hệ thập phân): I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000. Có 6 số đặc biệt là (ký hiệu & giá trị tương ứng trong hệ thập phân): IV = 4, IX = 9, XL = 40, XC = 90, CD = 400, CM = 900. I chỉ có thể đứng trước V hoặc X; X chỉ có thể đứng trước L hoặc C; C chỉ có thể đứng trước D hoặc M. Trong các chữ số La Mã, không có ký hiệu để chỉ số 0.

Cách ghi số La Mã.

- Trong 1 số La Mã tính từ trái sang phải, giá trị của các chữ số cơ bản & các số đặc biệt giảm dần.
- Mỗi chữ số I, X, C, M không viết liền nhau quá 3 lần.
- Mỗi chữ số V, L, D không viết liền nhau.

Cách tính giá trị tương ứng trong hệ thập phân của số La Mã. "Giá trị tương ứng trong hệ thập phân của số La Mã bằng tổng giá trị của các chữ số cơ bản & các số đặc biệt tính theo thứ tự từ trái sang phải." – Thái et al., 2022a, p. 14

Lưu ý 1.4 (Ứng dụng của số La Mã)**.** *"Chữ số La Mã được sử dụng rộng rãi cho đến thế kỷ XIV thì không còn được sử dụng nhiều nữa vì hệ thống chữ số Ả Rập (được tạo thành bởi các chữ số từ 0 đến 9) tiện dụng hơn. Tuy nhiên, chúng vẫn còn được sử dụng trong việc đánh số trên mặt đồng hồ, thế kỷ, âm nhạc hay các sự kiện chính trị – văn hóa – thể thao lớn như Thế vận hội Olympic, ..."* [4]

1.3 Phép Cộng, Phép Trừ Các Số Tự Nhiên

1.3.1 Phép cộng +

$\boxed{a + b = c}$, trong đó $a, b \in \mathbb{N}$ là các *số hạng*, & c được gọi là *tổng* của a & b.

Định lý 1.2 (Tính chất của phép cộng các số tự nhiên)**.** *Phép cộng các số tự nhiên có các tính chất:*

- *(Giao hoán) Khi đổi chỗ các số hạng trong 1 tổng thì tổng không thay đổi, i.e.,*
$$a + b = b + a, \ \forall a, b \in \mathbb{N}.$$
- *(Kết hợp) Muốn cộng 1 tổng 2 số với số thứ 3, ta có thể cộng số thứ nhất với tổng của số thứ 2 & số thứ 3, i.e.,*
$$(a + b) + c = a + (b + c), \ \forall a, b, c \in \mathbb{N}.$$
- *(Cộng với số 0) Bất kỳ số tự nhiên nào cộng với số 0 cũng bằng chính nó, i.e.,*
$$a + 0 = 0 + a = a, \ \forall a \in \mathbb{N}.$$

Do tính chất kết hợp nên giá trị của biểu thức $a + b + c$ có thể được tính theo 1 trong 2 cách sau: $a + b + c = (a + b) + c$ hoặc $a + b + c = a + (b + c)$.

1.3.2 Phép trừ −

$\boxed{a - b = c}$ $(a \geq b)$ trong đó a là *số bị trừ*, b là *số trừ*, c là *hiệu*.
Tính chất. Nếu $a - b = c$ thì $a = b + c$. Nếu $a + b = c$ thì $a = c - b$ & $b = c - a$.

[4] Nói tóm lại, sử dụng chữ số La Mã để thể hiện tính trang trọng & đôi khi màu mè/fancy.

1.4 Phép Nhân, Phép Chia Các Số Tự Nhiên

1.4.1 Phép nhân $\times/\cdot$

$\boxed{a \times b = c}$, trong đó $a, b \in \mathbb{N}$ là các *thừa số*, & c là *tích*.

Quy ước.

- Trong 1 tích, có thể thay dấu nhân $\times$ bằng dấu $\cdot$, i.e., $a \cdot b \coloneqq a \times b$.

  Lưu ý 1.5 (Chuẩn quốc tế về dấu nhân). *Trong SGK Thái et al., 2022a, p. 18, các tác giả dùng dấu chấm . thay dấu $\times$, nhưng điều này thực ra nguy hiểm, vì chuẩn quốc tế của dấu nhân là dấu $\cdot$ (dấu chấm nằm giữa, không phải nằm dưới chân), thay vì dấu . dùng để ngăn cách phần nguyên & phần thập phân của số thực, e.g., $\pi = 3.1416\ldots$ chứ không phải $\pi = 3 \cdot 1416\ldots$. Vì vậy, cá nhân tôi sẽ dùng dấu $\cdot$ thay cho dấu $\times$ trong tài liệu này, chú ý ký hiệu này vẫn được sử dụng ở Toán Cao Cấp.*

- Trong 1 tích mà các thừa số đều bằng chữ hoặc chỉ có 1 thừa số bằng số, ta có thể không cần viết dấu nhân giữa các thừa số, i.e.,

$$a \times b = a \cdot b = ab.$$

Nhân 2 số có nhiều chữ số. Cho 2 số $a, b \in \mathbb{N}$. Nếu 1 trong chúng bằng 0 thì hiển nhiên tích $ab = 0$. Nếu cả 2 số a, b đều khác 0, tức $a, b \in \mathbb{N}^\star$, thì để tính tích ab, trước tiên ta biểu diễn a & b dưới dạng thập phân (1.2):

$$\begin{cases} a = \overline{a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0},\ b = \overline{b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0},\ \text{với } m, n \in \mathbb{N}, \\ a_i, b_j \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\ \forall i = 0, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n,\ a_m \neq 0,\ b_n \neq 0, \end{cases}$$

sau đó sử dụng công thức (1.3) để tính tích ab như sau:

$$ab = \overline{a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0} \cdot \overline{b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0} = \left(\sum_{i=0}^m a_i 10^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^n b_j 10^j\right) = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^m a_i 10^i\right) b_j 10^j = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_i b_j 10^{i+j},$$

trong đó $\sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^m a_i 10^i\right) b_j 10^j$ chính là cách thường được sử dụng để tính tích 2 số nguyên dương: tính tích riêng thứ nhất, tính tích riêng thứ 2 & viết tích này lùi sang bên trái 1 cột so với tích riêng thứ nhất, tính tích riêng thứ 3 & viết tích này lùi sang bên trái 2 cột so với tích riêng thứ nhất, etc (xem ví dụ ở Thái et al., 2022a, p. 18).

Tính chất của phép nhân.

Định lý 1.3 (Các tính chất của phép nhân các số tự nhiên). *Phép nhân các số tự nhiên có các tính chất sau:*

- *Giao hoán:* $ab = ba$.
- *Kết hợp:* $(ab)c = a(bc)$.
- *Nhân với số 1:* $a1 = 1a = a$.
- *Phân phối đối với phép cộng & phép trừ:* $a(b + c) = ab + ac$, $a(b - c) = ab - ac$.

Do tính chất kết hợp nên giá trị của biểu thức abc có thể được tính theo 1 trong 2 cách sau: $abc = (ab)c$ hoặc $abc = a(bc)$.

1.4.2 Phép Chia :

Phép chia hết. Phép chia hết 1 số tự nhiên cho 1 số tự nhiên khác 0: $\boxed{a : b = q}$ $(b \neq 0)$, trong đó a là *số bị chia*, b là *số chia*, q là *thương*.

Tính chất. Nếu $a : b = q$ thì $a = bq$. Nếu $a : b = q$ & $q \neq 0$ thì $a : q = b$ (trường hợp $q = 0$ xảy ra khi & chỉ khi $a = 0$, $b \neq 0$, i.e., $b \in \mathbb{N}^\star$, & khi đó biểu thức $0 : b = 0$ đúng, nhưng $0 : 0 = b \neq 0$ lại vô nghĩa!).

Phép chia có dư.

Định lý 1.4. *Cho 2 số tự nhiên $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^\star$. Khi đó luôn tìm được đúng 2 số tự nhiên q & r sao cho $a = bq + r$, trong đó $0 \leq r < b$.*

Proof. Xem *thuật toán chia Euclid* (Euclide's division algorithm). □

Lưu ý 1.6. *Khi $r = 0$ ta có phép chia hết. Khi $r \neq 0$ ta có phép chia có dư. Ta nói: a chia cho b được thương là q & số dư là r. Ký hiệu: $a : b = q$ (dư r).*

1.5 Phép Tính Lũy Thừa với Số Mũ Tự Nhiên

Câu hỏi 1.2. *Tại sao cần phép tính lũy thừa?*

Trả lời. Phép nhân dùng để tiện viết gọn phép cộng/ của cùng 1 số hạng nhiều lần. Tương tự, phép lấy lũy thừa dùng để viết gọn phép nhân/tích của cùng 1 số hạng nhiều lần. Lưu ý, 1 trong những mục đích chính của Toán học là dùng công thức để biểu thị càng cô đọng/ngắn gọn ý toán/lập luận logic càng tốt. □

1.5.1 Phép nâng lên lũy thừa

Định nghĩa 1.2 (Lũy thừa/Exponentiation)**.** Lũy thừa bậc *n của a, ký hiệu a^n, là tích của n thừa số a: $a^n = a \cdot a \cdots a$ (n thừa số a) với $n \in \mathbb{N}^\star$. Số a được gọi là* cơ số, *n được gọi là* số mũ.

Quy ước $a^1 = a$ với mọi $a \in \mathbb{N}$. Phép nhân nhiều thừa số bằng nhau gọi là *phép nâng lũy thừa*.

Câu hỏi 1.3. *Có phép toán nào cho phép viết gọn phép lũy thừa 1 cơ số với cùng số mũ nhiều lần, i.e., $(((a^n)^n)^{\cdots})^n$ (m lần lấy số mũ) hay không?*

Lưu ý 1.7.

- *a^n đọc là "a mũ n" hoặc "a lũy thừa n" hoặc "lũy thừa bậc n của a".*
- *a^2 còn được gọi là "a bình phương" hay "bình phương của a".*
- *a^3 còn được gọi là "a lập phương" hay "lập phương của a".*

Lưu ý: $10^n = 10\ldots0$ với n chữ số 0, với mọi $n \in \mathbb{N}^\star$.

1.5.2 Nhân 2 lũy thừa cùng cơ số

Quy tắc. Khi nhân 2 lũy thừa cùng cơ số, ta giữ nguyên cơ số & cộng các số mũ:

$$\boxed{a^m a^n = a^{m+n},\ \forall a, m, n \in \mathbb{N}.} \tag{1.7}$$

Chú ý: $\boxed{a^0 = 1, \forall a \in \mathbb{N}^\star}$. *Why?* Bởi vì khi cho $m = n = 0$ trong công thức (1.7), thu được: $a^0a^0 = a^0$ hay $a^0(a^0 - 1) = 0$ nên $a^0 = 0$ hoặc $a^0 = 1$. Giả sử[5] $a^0 = 0$, thay $m = 0$, $a = 1$, $n = 1$ vào (1.7) thu được $1^0 1^1 = 1^{0+1}$, hay $0 \cdot 1 = 1$, vô lý. Vậy chỉ có thể xảy ra $a^0 = 1$ với mọi $a \in \mathbb{N}$.

1.5.3 Chia 2 lũy thừa cùng cơ số

Quy tắc. Khi chia 2 lũy thừa cùng cơ số (khác 0) (why?[6]), ta giữ nguyên cơ số & trừ các số mũ:

$$\boxed{a^m : a^n = a^{m-n},\ \forall a \in \mathbb{N}^\star,\ m, n \in \mathbb{N}, m \ge n.} \tag{1.8}$$

Quy ước. $0^0 = 1$ hoặc vô nghĩa. Xem, e.g., Wikipedia/zero to the power of zero.

Chú ý, từ công thức (1.8), cho $m = n$, thu được $a^m : a^m = a^{m-m}$, $\forall a \in \mathbb{N}^\star$, hay tương đương, $1 = a^0$, $\forall a \in \mathbb{N}^\star$. Vậy ta cũng thu được công thức này từ định nghĩa của phép chia, & trực tiếp/ngắn gọn hơn, thay vì suy ra từ phép nhân 2 lũy thừa cùng cơ số.

1.6 Thứ Tự Thực Hiện Các Phép Tính

"Khi tính giá trị của 1 biểu thức, ta không được làm tùy tiện mà phải tính theo đúng quy ước thứ tự thực hiện các phép tính." – Thái et al., 2022b, p. 26

[5] Ở đây xảy ra 2 trường hợp, & 1 trong số chúng chính là kết quả ta cần chứng minh, vì vậy, bằng phương pháp phản chứng, ta sẽ giả sử các trường hợp còn lại là đúng (nhưng thực tế là sai) rồi tiếp tục suy luận để dẫn tới "1 điều vô lý". Từ đó ta kết luận được trường hợp duy nhất xảy ra. "Điều vô lý" thường xuất hiện trong *phương pháp chứng minh bằng phản chứng/proof by method of contradiction* thường là "$0 = a$" với $a \neq 0$. NQBH: sẽ bổ sung các điều vô lý khác ở đây.

[6] Nếu cơ số bằng 0 và số mũ của số chia khác 0, thì số chia sẽ bằng 0, & phép chia cho 0 (division by zero) vô nghĩa.

1.6.1 Thứ tự thực hiện các phép tính trong biểu thức không chứa dấu ngoặc

- Khi biểu thức chỉ có các phép tính cộng & trừ (hoặc chỉ có các phép tính nhân & chia), ta thực hiện phép tính theo thứ tự từ trái sang phải.
- Khi biểu thức có các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, ta thực hiện phép tính nhân & chia trước, rồi đến cộng & trừ.
- Khi biểu thức có các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa, ta thực hiện phép tính nâng lên lũy thừa trước, rồi đến phép nhân & chia, cuối cùng đến cộng & trừ.

1.6.2 Thứ tự thực hiện các phép tính trong biểu thức chứa dấu ngoặc

- Khi biểu thức có chứa dấu ngoặc, ta thực hiện các phép tính trong dấu ngoặc trước.
- Nếu biểu thức chứa các dấu ngoặc $(\ ), [\ ], \{\ \}$ thì thứ tự thực hiện các phép tính như sau: $(\ ) \to [\ ] \to \{\ \}$.

1.7 Quan Hệ Chia Hết. Tính Chất Chia Hết

1.7.1 Quan hệ chia hết

Khái niệm về chia hết.

Định nghĩa 1.3 (Chia hết)**.** *Cho $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$. Nếu có số tự nhiên q sao cho $a = bq$ thì ta nói a* chia hết cho *b. Khi a chia hết cho b, ta nói a là* bội *của b & b là* ước *của a.*

Nếu số dư trong phép chia a cho b bằng 0 thì a chia hết cho b, ký hiệu $a \vdots b$. Nếu số dư trong phép chia a cho b khác 0 thì a không chia hết cho b, ký hiệu $a \not\vdots\, b$.

Với $a \in \mathbb{N}^\star$, a là ước của a, a là bội của a, 0 là bội của a, 1 là ước của a.

Cách tìm bội & ước của 1 số. Để tìm các bội của $n \in \mathbb{N}^\star$, ta có thể lần lượt nhân n với $0, 1, 2, 3, \ldots$. Khi đó, các kết quả nhận được đều là bội của n. Ngắn gọn, tập hợp tất cả các bội của $n \in \mathbb{N}^\star$ là $\{kn; k \in \mathbb{N}\}$.

Để tìm các ước của $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ (tức $n \geq 2$) ta có thể lần lượt chia n cho các số tự nhiên từ 1 đến n. Khi đó, các phép chia hết cho ta số chia là ước của n. Ngắn gọn, tập hợp tất cả các ước của $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ là $\{a \in \mathbb{N}^\star; a \leq n,\ n \vdots a\}$.

1.7.2 Tính chất chia hết

Tính chất chia hết của 1 tổng.

Định lý 1.5. *Nếu tất cả các số hạng của tổng đều chia hết cho cùng 1 số thì tổng chia hết cho số đó.*

I.e., $(a \vdots m) \wedge (b \vdots m) \Rightarrow (a + b) \vdots m$. Khi đó, $(a + b) : m = a : m + b : m$.

Proof. Cho $a, b, m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$. Nếu $a \vdots m$, tồn tại $a_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $a = ma_1$. Tương tự, nếu $b \vdots m$, tồn tại $b_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $b = mb_1$. Khi đó $a + b = ma_1 + mb_1 = m(a_1 + b_1)$, & hiển nhiên $a_1 + b_1 \in \mathbb{N}$, nên $(a + b) \vdots m$. □

Tính chất chia hết của 1 hiệu.

Định lý 1.6. *Nếu số bị trừ & số trừ đều chia hết cho cùng 1 số thì hiệu của chúng chia hết cho số đó.*

I.e., với $a, b, m \in \mathbb{N}$, $a \geq b$, nếu $a \vdots m$ & $b \vdots m$ thì $(a - b) \vdots m$. Khi đó, ta có $(a - b) : m = a : m - b : m$.

Proof. Cho $a, b, m \in \mathbb{N}$, $a \geq b$, $m \neq 0$. Nếu $a \vdots m$, tồn tại $a_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $a = ma_1$. Tương tự, nếu $b \vdots m$, tồn tại $b_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $b = mb_1$. Giả thiết $a \geq b$ cho ta $a_1 \geq b_1$. Khi đó $a - b = ma_1 - mb_1 = m(a_1 - b_1)$, & hiển nhiên $a_1 - b_1 \in \mathbb{N}$, nên $(a - b) \vdots m$. □

Tính chất chia hết của 1 tích.

Định lý 1.7. *Nếu 1 thừa số của tích chia hết cho 1 số thì tích chia hết cho số đó.*

Nếu $a \vdots m$ thì $(ab) \vdots m$ với mọi $b \in \mathbb{N}$.

1.8 Dấu hiệu chia hết cho 2, cho 5

1.8.1 Dấu hiệu chia hết cho 2

Các số chẵn thì chia hết cho 2 còn các số lẻ thì không chia hết cho 2, i.e.,

Định lý 1.8 (Dấu hiệu chia hết cho 2)**.** *Các số có chữ số tận cùng là 0, 2, 4, 6, 8 thì chia hết chia 2 & chỉ những số đó mới chia hết cho 2.*

I.e., $(a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0},\ n \in \mathbb{N},\ a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,9\}, \forall i = 1,\dots,n,\ a_0 \in \{0,2,4,6,8\}) \Leftrightarrow a \vdots 2$.

1.8.2 Dấu hiệu chia hết cho 5

Định lý 1.9 (Dấu hiệu chia hết cho 5)**.** *Các số có chữ số tận cùng là 0 hoặc 5 thì chia hết chia 5 & chỉ những số đó mới chia hết cho 5.*

I.e., $(a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0},\ n \in \mathbb{N},\ a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,9\}, \forall i = 1,\dots,n,\ a_0 \in \{0,5\}) \Leftrightarrow a \vdots 5$.

Corollary 1.1 (Dấu hiệu chia hết cho cả 2 & 5)**.** *Các số có chữ số tận cùng là 0 thì chia hết cho cả 2 & 5 & chỉ những số đó mới chia hết cho cả 2 & 5.*

1.8.3 Giải thích dấu hiệu chia hết cho 2, cho 5

Tham khảo Thái et al., 2022a, p. 37. Xét số tự nhiên A có chữ số tận cùng là a. Khi đó A có thể viết được dưới dạng: $A = 10B + a$, trong đó $B \in \mathbb{N}$ (trường hợp $B = 0$ thì $A = a$ & là số có 1 chữ số). Do đó, $A - 10B = a$.

- Nếu $a \in \{0;2;4;6;8\}$ thì $a \vdots 2$. Do $10B \vdots 2$ & $a \vdots 22$ nên tổng $(10B + a) \vdots 2$. Vậy $A \vdots 2$. Ngược lại, nếu $A \vdots 2$ thì hiệu $(A - 10B) \vdots 2$, tức là $a \vdots 2$ nên $a \in \{0;2;4;6;8\}$.
- Nếu $a \in \{0;5\}$ thì $a \vdots 5$. Do $10B \vdots 5$ & $a \vdots 5$ nên tổng $(10B + a) \vdots 5$. Vậy $A \vdots 5$. Ngược lại, nếu $A \vdots 5$ thì hiệu $(A - 10B) \vdots 5$, tức là $a \vdots 5$ nên $a \in \{0;5\}$.

1.8.4 Dấu hiệu chia hết cho 4

Tham khảo Thái et al., 2022a, p. 37. Xét số tự nhiên A có 3 chữ số trở lên[7]. Gọi C là số tại bởi 2 chữ số tận cùng của A. Khi đó A có thể được viết dưới dạng: $A = 100B + C$, trong đó $B \in \mathbb{N}$ (trường hợp $B = 0$ thì $A = C$ & là số có 2 chữ số). Do đó, $A - 100B = C$. Nếu $C \vdots 4$ thì tổng $(100B + C) \vdots 4$, tức là $A \vdots 4$. Ngược lại, nếu $A \vdots 4$ thì hiệu $(A - 100B) \vdots 4$, tức là $C \vdots 4$. Vậy:

Định lý 1.10. *Các số có 2 chữ số tận cùng tạo thành 1 số chia hết cho 4 thì chia hết cho 4 & chỉ những số đó mới chia hết cho 4.*

I.e., $(a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0},\ n \in \mathbb{N},\ a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,9\}, \forall i = 1,\dots,n,\ \overline{a_1 a_0} \vdots 4) \Leftrightarrow a \vdots 4$. Chú ý công thức này bao gồm cả những số có 1 hoặc 2 chữ số & chia hết 4.

1.9 Dấu Hiệu Chia Hết Cho 3, Cho 9

1.9.1 Dấu hiệu chia hết cho 3

Định lý 1.11 (Dấu hiệu chia hết cho 3)**.** *Các số có tổng các chữ số chia hết cho 3 thì chia hết cho 3 & chỉ những số đó mới chia hết cho 3.*

[7]Giả thiết này sẽ làm thiếu những số có 1 hoặc 2 chữ số & chia hết cho 4.

Proof. Xét $a \in \mathbb{N}$ bất kỳ với biểu diễn các chữ số của a là $a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,9\}$, $\forall i = 0,\ldots,n$. Sử dụng công thức (1.3), chú ý $10^i \equiv 1(\bmod 3)$, $\forall i = 0,\ldots,n$,

$$a = \sum_{i=0}^{n} a_i 10^i \equiv \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) (\bmod 3).$$

Vì vậy, $a \vdots 3$ khi & chỉ khi tổng các chữ số của a, i.e., $\sum_{i=0}^{n} a_i$, chia hết cho 3. □

1.9.2 Dấu hiệu chia hết cho 9

Hoàn toàn tương tự dấu hiệu chia hết cho 3:

Định lý 1.12 (Dấu hiệu chia hết cho 9)**.** *Các số có tổng các chữ số chia hết cho 9 thì chia hết cho 9 & chỉ những số đó mới chia hết cho 9.*

Proof. Xét $a \in \mathbb{N}$ bất kỳ với biểu diễn các chữ số của a là $a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,9\}$, $\forall i = 0,\ldots,n$. Sử dụng công thức (1.3), chú ý $10^i \equiv 1(\bmod 9)$, $\forall i = 0,\ldots,n$,

$$a = \sum_{i=0}^{n} a_i 10^i \equiv \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) (\bmod 9).$$

Vì vậy, $a \vdots 9$ khi & chỉ khi tổng các chữ số của a, i.e., $\sum_{i=0}^{n} a_i$, chia hết cho 9. □

1.9.3 Giải thích dấu hiệu chia hết cho 3, cho 9

Tham khảo Thái et al., 2022a, p. 40. Xét số tự nhiên $\overline{abc}$, $a \neq 0$ có 3 chữ số, ta viết được $\overline{abc} = 100a + 10b + c = (99a + 9b) + (a + b + c) = 9(11a + b) + (a + b + c)$. Tổng quát, ta có mọi số tự nhiên A đều viết được dưới dạng tổng các chữ số của nó cộng với 1 số chia hết cho 9, i.e., $A = 9M + S$, trong đó S là tổng các chữ số của số A.

- Nếu $A \in \mathbb{N}$ có tổng các chữ số chia hết cho 3 thì S chia hết cho 3. Do $9M \vdots 3$ & $S \vdots 3$ nên tổng $(9M + S) \vdots 3$. Vậy $A \vdots 3$. Ngược lại, nếu $A \vdots 3$ thì hiệu $(A - 9M) \vdots 3$, i.e., $S \vdots 3$. Vậy tổng các chữ số của A chia hết cho 3.
- Nếu $A \in \mathbb{N}$ có tổng các chữ số chia hết cho 9 thì S chia hết cho 9. Do $9M \vdots 9$ & $S \vdots 9$ nên tổng $(9M + S) \vdots 9$. Vậy $A \vdots 9$. Ngược lại, nếu $A \vdots 9$ thì hiệu $(A - 9M) \vdots 9$, i.e., $S \vdots 9$. Vậy tổng các chữ số của A chia hết cho 9.

"Áp dụng dấu hiệu chia hết cho 9, ta có thể kiểm tra (sơ bộ) kết quả phép nhân 2 số có nhiều chữ số là sai." – Thái et al., 2022a, p. 40

1.10 Số Nguyên Tố. Hợp Số

Định nghĩa 1.4 (Số nguyên tố, hợp số)**.** Số nguyên tố *là số tự nhiên lớn hơn 1, chỉ có 2 ước là 1 & chính nó.* Hợp số *là số tự nhiên lớn hơn 1, có nhiều hơn 2 ước.*

Số 0 (có vô hạn ước) & số 1 (có duy nhất 1 ước là chính nó) không là số nguyên tố & cũng không là hợp số. Để chứng tỏ $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$ là hợp số, ta chỉ cần tìm 1 ước của a khác 1 & khác a (khi đó, a có ít nhất 3 ước, theo định nghĩa, suy ra a là hợp số).

Lưu ý 1.8. *Số nguyên tố (prime) là 1 chủ đề cực khó, với nhiều bài toán mở, giả thuyết chưa được chứng minh đúng hay sai, trong Lý thuyết Số học/Number Theory.*

Định nghĩa 1.5. *Nếu số nguyên tố p là ước của số tự nhiên a thì p được gọi là* ước nguyên tố *của a.*

1.10.1 Sàng Eratosthenes

"Số nguyên tố nhỏ nhất là số 2 & đó là số nguyên tố chẵn duy nhất." Bằng sàng Eratosthenes, ta có thể lọc ra tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn 1 số tự nhiên n cho trước. "Eratosthenes là nhà toán học, địa lý học, thiên văn học người Hy Lạp. Ông là người đã nghĩ ra hệ thống kinh độ, vĩ độ & cũng là người đầu tiên tính được kích thước của Trái Đất." – Thái et al., 2022a, p. 43

1.11 Phân Tích 1 Số Ra Thừa Số Nguyên Tố

1.11.1 Cách tìm 1 ước nguyên tố của 1 số

Để tìm 1 ước nguyên tố của số $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$, ta có thể làm như sau: Lần lượt thực hiện phép chia a cho các số nguyên tố theo thứ tự tăng dần $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$. Khi đó, phép chia hết đầu tiên cho ta số chia là 1 ước nguyên tố của a.

1.11.2 Phân tích 1 số ra thừa số nguyên tố

Định nghĩa 1.6 (Phân tích 1 số ra thừa số nguyên tố/Factorization into prime factors)**.** Phân tích 1 số tự nhiên lớn hơn 1 ra thừa số nguyên tố *là viết số đó dưới dạng 1 tích các thừa số nguyên tố.*

"Ta nên chia mỗi số cho ước nguyên tố nhỏ nhất của nó. Cứ tiếp tục chia như thế cho đến khi được thương là 1." – Thái et al., 2022a, p. 45

"Thông thường, khi phân tích 1 số tự nhiên ra thừa số nguyên tố, các ước nguyên tố được viết theo thứ tự tăng dần. Ngoài cách làm như trên, ta cũng có thể phân tích 1 số ra thừa số nguyên tố bằng cách viết số đó thành tích của 2 thừa số 1 cách linh hoạt." "Dù phân tích 1 số ra thừa số nguyên tố bằng cách nào thì cuối cùng ta cũng được cùng 1 kết quả."[8] – Thái et al., 2022a, p. 46

1.12 Ước Chung & Ước Chung Lớn Nhất

1.12.1 Ước chung & ước chung lớn nhất

Định nghĩa 1.7 (Ước chung & ước chung lớn nhất)**.** *Số tự nhiên n được gọi là* ước chung *của 2 số tự nhiên a & b nếu n vừa là ước của a vừa là ước của b. Số lớn nhất trong các ước chung của a & b được gọi là* ước chung lớn nhất *của a & b.*

Quy ước. Viết tắt ước chung là ƯC & ước chung lớn nhất là ƯCLN. Ta ký hiệu: Tập hợp các ước chung của a & b là ƯC(a, b); ước chung lớn nhất của a & b là ƯCLN(a, b).

Ký hiệu chuẩn quốc tế của ước chung lớn nhất của 2 số $a, b \in \mathbb{N}$ là $\gcd(a, b)$, viết tắt của *greatest common divisor*.

Định nghĩa 1.8. *Số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^\star$ được gọi là* ước chung *của n số $a_1, \ldots, a_n$ nếu n là ước của tất cả n số đó.*

Định lý 1.13. *Ước chung của 2 số là ước của ước chung lớn nhất của chúng.*

1.12.2 Tìm ước chung lớn nhất bằng cách phân tích các số ra thừa số nguyên tố

Tìm ước chung lớn nhất bằng cách phân tích các số ra thừa số nguyên tố.

1. Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố.
2. Chọn ra các thừa số nguyên tố chung.
3. Với mỗi thừa số nguyên tố chung, ta chọn lũy thừa với số mũ nhỏ nhất.
4. Lấy tích của các lũy thừa đã chọn, ta nhận được ước chung lớn nhất cần tìm.

Nếu 2 số đã cho không có thừa số nguyên tố chung thì ƯCLN của chúng bằng 1. Nếu $a \vdots b$ thì ƯCLN$(a, b) = b$.

1.12.3 2 số nguyên tố cùng nhau

Định nghĩa 1.9 (2 số nguyên tố cùng nhau)**.** 2 số nguyên tố cùng nhau *là 2 số có ước chung lớn nhất bằng 1.*

Định nghĩa 1.10 (Phân số tối giản)**.** Phân số tối giản *là phân số có tử & mẫu là 2 số nguyên tố cùng nhau.*

[8] Điều này có nghĩa là dạng phân tích ra thừa số nguyên tố của 1 số tự nhiên là duy nhất, & điều này ứng với Định lý Phân tích số tự nhiên ra thừa số nguyên tố của Lý thuyết Số học. `[insert later]` Xem, e.g., sách Số Học của GS. Hà Huy Khoái.

1.12.4 Tìm ước chung lớn nhất bằng thuật toán Euclid

Tham khảo Thái et al., 2022a, p. 52: Để tìm ước chung lớn nhất bằng *thuật toán Euclid*, ta làm như sau:

1. Chia số lớn cho số nhỏ.
2. Nếu phép chia còn dư thì ta lấy số chia đem chia cho số dư. Ta cứ làm như vậy cho đến khi nhận được số dư bằng 0 thì dừng lại.
3. Số chia cuối cùng là ước chung lớn nhất phải tìm.

Lưu ý 1.9. *Người ta thường dùng thuật toán Euclid để tìm ƯCLN của cặp số lớn.*

1.13 Bội Chung & Bội Chung Nhỏ Nhất

1.13.1 Bội chung & bội chung nhỏ nhất

Định nghĩa 1.11 (Bội chung & bội chung nhỏ nhất)**.** *Số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$ được gọi là* bội chung *của 2 số a & b nếu n vừa là bội của a vừa là bội của b. Số nhỏ nhất khác 0 trong các bội chung của a & b được gọi là* bội chung nhỏ nhất *của a & b.*

Quy ước. Viết tắt bội chung là BC & bội chung nhỏ nhất là BCNN. Ta ký hiệu: Tập hợp các bội chung của a & b là $\mathrm{BC}(a,b)$; bội chung nhỏ nhất của a & b là $\mathrm{BCNN}(a,b)$.

Ký hiệu chuẩn quốc tế của bội chung nhỏ nhất của 2 số $a,b \in \mathbb{N}^\star$ là $\mathrm{lcm}(a,b)$, trong đó lcm là viết tắt của *least common multiple/lowest common multiple*.

2 Số Nguyên

3 Hình Học Trực Quan

4 Một Số Yếu Tố Thống kê & Xác Suất

Nội dung. Thu thập, tổ chức, biểu diễn, phân tích, & xử lý dữ liệu; bảng số liệu, biểu đồ tranh, biểu đồ cột, biểu đồ cột kép; mô hình xác suất & xác suất thực nghiệm trong 1 số trò chơi & thí nghiệm đơn giản.

4.1 Thu Thập, Tổ Chức, Biểu Diễn, Phân Tích, & Xử Lý Dữ Liệu

Những bước chính trong tiến trình thống kê: "thu thập, phân loại, kiểm đếm, ghi chép số liệu; đọc & mô tả các số liệu ở dạng dãy số liệu, bảng số liệu hoặc ở dạng biểu đồ (biểu đồ tranh, biểu đồ cột hoặc biểu đồ hình quạt tròn); nêu được nhận xét đơn giản từ biểu đồ." – Thái et al., 2022b, p. 3.

4.1.1 Thu thập, tổ chức, phân tích, & xử lý dữ liệu

"Sau khi thu thập, tổ chức, phân loại, biểu diễn dữ liệu bằng bảng hoặc biểu đồ, ta cần phân tích & xử lý các dữ liệu đó để tìm ra những thông tin hữu ích & rút ra kết luận." [...] "Ta có thể nhận biết được tính hợp lý của dữ liệu thống kê theo những tiêu chí đơn giản." [...] "Dựa theo đối tượng & tiêu chí thống kê, ta có thể tổ chức & phân loại dữ liệu." – Thái et al., 2022b, p. 4.

"Dựa vào thống kê, ta có thể nhận biết được tính hợp lý của kết luận đã nêu ra." – Thái et al., 2022b, p. 5.

4.1.2 Biểu diễn dữ liệu

"Sau khi thu thập & tổ chức dữ liệu, ta cần biểu diễn dữ liệu đó ở dạng thích hợp. Nhờ việc biểu diễn dữ liệu, ta có thể phân tích & xử lý được các dữ liệu đó." – Thái et al., 2022b, p. 6.

1. **Bảng số liệu.** Các đối tượng thống kê lần lượt được biểu diễn ở dòng đầu tiên. Ứng với mỗi đối tượng thống kê có 1 số liệu thống kê theo tiêu chí, lần lượt được biểu diễn ở dòng thứ 2 (theo cột tương ứng).
2. **Biểu đồ tranh.** Các đối tượng thống kê lần lượt được biểu diễn ở cột đầu tiên. Ứng với mỗi đối tượng thống kê có 1 số liệu thống kê theo tiêu chí, lần lượt được biểu diễn ở dòng tương ứng.
3. **Biểu đồ cột.** Các đối tượng thống kê lần lượt được biểu diễn ở trục nằm ngang. Ứng với mỗi đối tượng thống kê có 1 số liệu thống kê theo tiêu chí, lần lượt được biểu diễn ở trục thẳng đứng.

"Dựa vào thống kê, ta có thể bác bỏ kết luận đã nêu ra." – Thái et al., 2022b, p. 8

4.2 Biểu Đồ Cột Kép

Mục đích của biểu đồ cột kép: biểu diễn được đồng thời từng loại đối tượng thống kê trên cùng 1 biểu đồ cột (ưu điểm so với biểu đồ cột đơn thông thường). Các đối tượng thống kê lần lượt được biểu diễn ở trục nằm ngang. Ứng với mỗi đối tượng thống kê có 1 số liệu thống kê theo tiêu chí, lần lượt được biểu diễn ở trục thẳng đứng.

4.3 Mô Hình Xác Suất Trong 1 Số Trò Chơi & Thí Nghiệm Đơn Giản

4.3.1 Mô hình xác suất trong trò chơi tung đồng xu

2 mặt của đồng xu: mặt sấp /S[9] hay mặt ngửa/N. Khi tung đồng xu 1 lần, có 2 kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của đồng xu, đó là: mặt N; mặt S. Có 2 điều cần chú ý trong mô hình xác suất của trò chơi tung đồng xu:

- Tung đồng xu 1 lần;
- Tập hợp các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của đồng xu là $\{\mathrm{S};\mathrm{N}\}$. Ở đây, S ký hiệu cho kết quả xuất hiện mặt sấp & N ký hiệu cho kết quả xuất hiện mặt ngửa.

4.3.2 Mô hình xác suất trong trò chơi lấy vật từ trong hộp

Dạng toán. Cho 1 hộp có n vật thể có kích thước & khối lượng như nhau nhưng có n màu khác nhau. Khi lấy ngẫu nhiên 1 vật thể trong hộp, có n kết quả có thể xảy ra đối với màu của vật thể được lấy ra, đó là: màu thứ nhất, màu thứ 2, ..., màu thứ n.

Lưu ý 4.1. *Giả thiết "n vật thể có kích thước & khối lượng như nhau" giúp cho các đối tượng bình đẳng/công bằng (fairness) trong việc lấy ra ngẫu nhiên. Trường hợp ngược lại, chẳng hạn, 1 vật thể đầy gai nhọn trong khi các vật thể khác trơn nhẵn hoặc 1 vật thể quá nặng so các vật thể còn lại sẽ khó để lấy ra được bằng tay không, nên xác suất xảy ra đối với vật thể đó sẽ là 0 (unfairness). Trường hợp bình đẳng ứng với xác suất của các vật thể có phân phối đều (uniform distribution), trong khi trường hợp bất bình đẳng của các vật thể ứng với các phân phối có trọng số (non-uniform/weighted distribution) sẽ được học ở Phổ thông hoặc Toán Cao Cấp.*

4.3.3 Mô hình xác suất trong trò chơi gieo xúc xắc

Dạng toán. Mỗi xúc xắc có 6 mặt, số chấm ở mỗi mặt là 1 trong các số nguyên dương 1, 2, 3, 4, 5, 6. Gieo xúc xắc 1 lần. *Tài*: $\{4,5,6\}$. *Xỉu*: $\{1,2,3\}$.

4.4 Xác Suất Thực Nghiệm Trong 1 Số Trò Chơi & Thí Nghiệm Đơn Giản

4.4.1 Xác suất thực nghiệm trong trò chơi tung đồng xu/toss a coin

Định nghĩa 4.1 (Xác suất thực nghiệm trong trò chơi tung đồng xu)**.** Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N *khi tung đồng xu nhiều lần bằng:*

$$\frac{\textit{Số lần mặt } N \textit{ xuất hiện}}{\textit{Tổng số lần tung đồng xu}} = \frac{\textit{Số lần mặt } N \textit{ xuất hiện}}{\textit{Số lần mặt } N \textit{ xuất hiện} + \textit{Số lần mặt } S \textit{ xuất hiện}} \in \mathbb{Q}\cap[0,1].$$

Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S *khi tung đồng xu nhiều lần bằng:*

$$\frac{\textit{Số lần mặt } S \textit{ xuất hiện}}{\textit{Tổng số lần tung đồng xu}} = \frac{\textit{Số lần mặt } S \textit{ xuất hiện}}{\textit{Số lần mặt } N \textit{ xuất hiện} + \textit{Số lần mặt } S \textit{ xuất hiện}} \in \mathbb{Q}\cap[0,1].$$

Từ định nghĩa: "Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N (hoặc mặt S) phản ảnh số lần xuất hiện mặt đó so với tổng số lần tiến hành thực nghiệm." – Thái et al., 2022b, p. 18

Lưu ý 4.2.
- *Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N bằng 0 khi và chỉ khi không có mặt N nào trong tất cả lần tung đồng xu.*
- *Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N bằng 1 khi và chỉ khi không có mặt S nào trong tất cả lần tung đồng xu.*
- *Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt s bằng 0 khi và chỉ khi không có mặt S nào trong tất cả lần tung đồng xu.*
- *Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S bằng 1 khi và chỉ khi không có mặt N nào trong tất cả lần tung đồng xu.*

[9] Cần phân biệt "mặt sấp" (S) với "SML", i.e., "sấp mặt lợn".

Bài toán 4.1. *Tung 2 đồng xu cân đối & đồng chất T lần (T viết tắt của "tổng số"), trong đó:*

- *2 đồng xu sấp xuất hiện SS lần.*
- *1 đồng xu sấp, 1 đồng xu ngửa xuất hiện SN lần.*
- *2 đồng xu ngửa xuất hiện NN lần.*

Hiển nhiên: $T = SS + SN + NN$. Khi đó:

- *Xác suất thực nghiệm để có 1 đồng xu sấp, 1 đồng xu ngửa* $= \dfrac{SN}{T} = \dfrac{SN}{SS + SN + NN} \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$.
- *Xác suất thực nghiệm để có 2 đồng xu đều ngửa* $= \dfrac{NN}{T} = \dfrac{NN}{SS + SN + NN} \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$.
- *Xác suất thực nghiệm để có 2 đồng xu đều sấp* $= \dfrac{SS}{T} = \dfrac{SS}{SS + SN + NN} \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$.
- *Xác suất thực nghiệm để có ít nhất 1 đồng xu sấp* $= \dfrac{SS + SN}{T} = \dfrac{SS + SN}{SS + SN + NN} \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$.
- *Xác suất thực nghiệm để có ít nhất 1 đồng xu ngửa* $= \dfrac{SN + NN}{T} = \dfrac{SN + NN}{SS + SN + NN} \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$.

4.4.2 Xác suất thực nghiệm trong trò chơi lấy vật từ trong hộp

Định nghĩa 4.2 (Xác suất thực nghiệm trong trò chơi lấy vật từ trong hộp)**.** Xác suất thực nghiệm xuất hiện màu A *khi lấy bóng nhiều lần bằng:*

$$\frac{\textit{Số lần màu A xuất hiện}}{\textit{Tổng số lần lấy bóng}} \in \mathbb{Q} \cap [0,1].$$

4.4.3 Xác suất thực nghiệm trong trò chơi gieo xúc xắc

Định nghĩa 4.3 (Xác suất thực nghiệm trong trò chơi gieo xúc xắc)**.** Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt k chấm *($k \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le 6$) khi gieo xúc xắc nhiều lần bằng:*

$$\frac{\textit{Số lần xuất hiện mặt k chấm}}{\textit{Tổng số lần gieo xúc xắc}} \in \mathbb{Q} \cap [0,1].$$

4.4.4 Xác suất khi số lần thực nghiệm rất lớn

"Người ta chứng minh được rằng khi số lần tung càng lớn thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N càng gần với 0.5. Số 0.5 được gọi là *xác suất xuất hiện mặt N* (theo nghĩa thống kê)." – Thái et al., 2022b, p. 21. Phương pháp tung kim để tính số π của Bá tước Georges-Louis Leclerc de Buffon chính là tiền thân của phương pháp Monte–Carlo trong toán học.

Lý thuyết nằm sau những ví dụ này là *Luật Số Lớn/Law of Large Numbers* – 1 trong những định lý quan trọng nhất của *Lý thuyết xác suất & thống kê*, được chứng minh bởi nhà Toán học huyền thoại người Nga Kolmogorov.[10]

5 Phân Số & Số Thập Phân

Nội dung. phân số với tử & mẫu là số nguyên; các phép tính với phân số; số thập phân; các phép tinh với số thập phân; tỷ số, tỷ số phần trăm, làm tròn số.

5.1 Phân Số với Tử & Mẫu là Số Nguyên

5.1.1 Khái niệm phân số

Định nghĩa 5.1 (Phân số/Fractions)**.** *1* phân số *có tử và mẫu số là số nguyên là biểu thức có dạng* $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. *a: tử số (numerator), b: mẫu số (denominator).*

Phân số $\frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^\star$, *được gọi là* phân số tối giản *nếu* $\gcd(a,b) = 1$, *ở đây* gcd *ký hiệu* ước chung lớn nhất *(greatest common divisor).*[11]

[10]NQBH: Kolmogorov còn có những cống hiến khác về nền tảng xác suất & thống kê trong việc nghiên cứu *turbulence/sự nhiễu loạn*. Turbulence vẫn còn là 1 vấn đề mở cực khó của cả Toán học & Vật lý. Đề tài PhD ở Đức của tôi là làm tối ưu hình dáng (shape optimization) & tối ưu topo (topology optimization) cho turbulence models. Và đương nhiên 3 năm chẳng thể nào đủ cho 1 đề tài khủng như vậy.

[11]Hoặc ký hiệu Việt Nam là: UCLN(a,b).

5.1.2 Khái niệm 2 phân số bằng nhau.

2 phân số được gọi là *bằng nhau* nếu chúng cùng biểu diễn một giá trị, i.e. (tức/nghĩa là),

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow b \neq 0, d \neq 0,\ ad = bc.} \tag{5.1}$$

Vế sau có nghĩa là *nhân chéo chia ngang*, hay được gọi là *quy tắc bằng nhau của 2 phân số*.
Chú ý. luôn nhớ điều kiện mẫu số 2 phân số phải khác 0.

Ví dụ 5.1. *Trong Sách Giáo Khoa Toán 6, Cánh Diều, của Đỗ Đức Thái chủ biên, có viết:*

> *"Xét 2 phân số $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$. Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì $ad = bc$*[12]*. Ngược lại, nếu $ad = bc$ thì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$."*

Phản ví dụ: $a = 0$, $b = 0$ thì $ad = bc = 0$, nhưng $\frac{0}{0} \neq \frac{c}{d}$ và phân số $\frac{0}{0}$ không có nghĩa.

Mẹo nhanh. Xét dấu (sign) của tử số và mẫu số khi so sánh 2 phân số $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$. Nếu trong 4 số a, b, c, d, có 1 hoặc 3 số âm, còn lại dương, thì 2 phân số không bằng nhau.

5.1.3 Tính Chất Cơ Bản của Phân Số

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc},\ \frac{a}{b} = \frac{a:c}{b:c},\ a, b, c \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ c \neq 0.} \tag{5.2}$$

trong đó đẳng thức thứ 2 yêu cầu $c \in \mathrm{UC}(a, b)$ để phân số đều có tử và mẫu nguyên.

Rút gọn về phân số tối giản. Để rút gọn phân số với tử và mẫu là số nguyên về phân số tối giản:

1. Tìm UCLN của tử và mẫu sau khi đã bỏ dấu $-$ (nếu có).
2. Chia cả tử và mẫu cho UCLN vừa tìm được.

Quy đồng mẫu nhiều phân số.

Câu hỏi 5.1. *Tại sao phải quy đồng mẫu nhiều phân số?*

Trả lời.
- Để tiện so sánh 2 phân số.
- Để tiện cho việc giải phương trình.

□

Câu hỏi 5.2. *Cách để quy đồng mẫu nhiều phân số?*

Để quy đồng mẫu nhiều phân số:

1. Viết các phân số đã cho về phân số có mẫu dương. Tìm BCNN của các mẫu dương đó để làm mẫu chung.
   Note. Nếu các mẫu số nguyên tố cùng nhau, thì BCNN của chúng chính là tích của chúng.
2. Tìm thừa số phụ của mỗi mẫu (bằng cách chia mẫu chung cho từng mẫu).
3. Nhân tử và mẫu của mỗi phân số ở Bước 1 với thừa số phụ tương ứng.

5.2 So Sánh Các Phân Số. Hỗn Số Dương

6 Hình Học Phẳng

6.1 Điểm. Đường Thẳng

Quy ước. Khi nói 2 điểm mà không nói gì thêm, ta hiểu đó là 2 điểm phân biệt.
Chú ý. Mỗi hình là tập hợp các điểm. Hình có thể chỉ gồm 1 điểm.

Lưu ý 6.1 (Phân biệt đường thẳng vs. đoạn thẳng)**.** *Đường thẳng không bị giới hạn về 2 phía, trong khi đoạn thẳng bị giới hạn về 2 phía bởi 2 đầu mút của nó.*

[12] Phép nhân: $a \times b = a \cdot b = ab$.

Định nghĩa 6.1. *Điểm A* thuộc/nằm trên *đường thẳng d (hay đường thẳng d* đi qua *điểm A) & được ký hiệu là $A \in d$. Điểm B* không thuộc/không nằm trên *đường thẳng d (hay đường thẳng d* không đi qua *điểm B) & được ký hiệu là $B \notin d$.*

Lưu ý 6.2. *Có vô số điểm thuộc 1 đoạn/đường thẳng.*

Thật vậy, đoạn thẳng AB có vô số điểm bởi vì: lấy M_1 là trung điểm của AB, lấy M_2 là trung điểm của đoạn AM_1, lấy M_3 là trung điểm của đoạn AM_2, tương tự như vậy, thì có vô số lần lấy trung điểm, tương ứng vô hạn điểm.

Định lý 6.1. *Có 1 & chỉ 1 đường thẳng đi qua 2 điểm A & B (phân biệt).*

Đường thẳng đi qua 2 điểm A, B còn được gọi là *đường thẳng AB*, hay *đường thẳng BA*.

Định nghĩa 6.2 (3 điểm thẳng hàng, không thẳng hàng)**.** *Khi 3 điểm cùng thuộc 1 đường thẳng, chúng được gọi là* thẳng hàng*. Khi 3 điểm không cùng thuộc bất kỳ đường thẳng nào, chúng được gọi là* không thẳng hàng*.*

Định lý 6.2. *Trong 3 điểm thẳng hàng, có 1 & chỉ 1 điểm nằm giữa 2 điểm còn lại.*

6.2 2 Đường Thẳng Cắt Nhau. 2 Đường Thẳng Song Song

Định nghĩa 6.3 (2 đường thẳng cắt nhau)**.** *2 đường thẳng chỉ có 1 điểm chung gọi là* 2 đường thẳng cắt nhau *& điểm chung được gọi là* giao điểm *của 2 đường đó.*

Định nghĩa 6.4 (2 đường thẳng song song)**.** *2 đường thẳng a & b không có điểm chung nào được gọi là* song song với nhau*. Viết $a//b$ hoặc $b//a$.*

Lưu ý 6.3. *2 đường thẳng* trùng nhau *thì không thuộc vào 2 định nghĩa trên.*

Tài liệu

[NQBH/elementary math] Nguyễn Quản Bá Hồng. *Some Topics in Elementary Mathematics: Problems, Theory, Applications, & Bridges to Advanced Mathematics*. Mar 2022–now.

Tài liệu

Halmos, Paul R. (1960). *Naive set theory*. The University Series in Undergraduate Mathematics. D. Van Nostrand Co., Princeton, N.J.-Toronto-London-New York, pp. vii+104.

— (1974). *Naive set theory*. Undergraduate Texts in Mathematics. Reprint of the 1960 edition. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, pp. vii+104.

Kaplansky, Irving (1972). *Set theory and metric spaces*. Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics. Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass., pp. xii+140.

— (1977). *Set theory and metric spaces*. Second. Chelsea Publishing Co., New York, xii+140 pp. ISBN 0-8284-0298–1.

Tao, Terence (2006). *Solving mathematical problems*. A personal perspective. Oxford University Press, Oxford, pp. xii+103. ISBN: 978-0-19-920560-8; 0-19-920560-4.

Thái, Đỗ Đức et al. (2022a). *Toán 6, tập 1*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, p. 128.

— (2022b). *Toán 6, tập 2*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, p. 108.