

Problems in Elementary Inequality

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 19 tháng 5 năm 2023

Tóm tắt nội dung

A problem set for elementary inequality.

Mục lục

1 Cauchy-Schwarz Inequality – Bất Đẳng Thức Cauchy-Schwarz	1
2 Miscellaneous	2
Tài liệu	2

1 Cauchy-Schwarz Inequality – Bất Đẳng Thức Cauchy-Schwarz

The most basic inequality: $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}. x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0. x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0.$

Bài toán 1 (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho 2 số không âm). *Chứng minh:*

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

1st proof. $a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0. “=” \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b.$ □

2nd proof. $(a + b)^2 - (2\sqrt{ab})^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow (a + b)^2 \geq (2\sqrt{ab})^2 \Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (vì $a, b \geq 0$ nên $a + b \geq 0$ & $2\sqrt{ab} \geq 0$). “=” $\Leftrightarrow a = b.$ □

Lưu ý 1. Ở 2nd proof, ta đã vận dụng tính chất cơ bản của căn bậc 2: $0 \leq a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}.$ Phiên bản chặt/ngắt (strict) là: $0 \leq a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}.$ Ý nghĩa hình học của 2 tính chất này: Hình vuông nào có cạnh lớn hơn thì có diện tích lớn hơn & ngược lại, hình vuông nào có diện tích lớn hơn thì có cạnh lớn hơn.

3rd proof. Đặt $x := \sqrt{a}, y := \sqrt{b}, x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 0.$ Có $a + b - 2\sqrt{ab} = a + b - 2\sqrt{a}\sqrt{b} = x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}.$ “=” $\Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b.$ □

Bài toán 2. Với m, n, p nào thì bất đẳng thức $ma + nb \geq p\sqrt{ab}$ luôn đúng: (a) $\forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0.$ (b) $\forall a, b \in \mathbb{R}.$ Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lưu ý 2. Ở 3rd proof, ta đã sử dụng tính chất giao hoán của phép nhân & phép khai phương: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0.$

Bài toán 3 (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho 3 số không âm). *Chứng minh:*

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}, \forall a, b, c \in \mathbb{R}, a, b, c \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 4. Với m, n, p, q nào thì bất đẳng thức $ma + nb + pc \geq q\sqrt[3]{abc}$ luôn đúng: (a) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a, b, c \geq 0.$ (b) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}.$ Đẳng thức xảy ra khi nào?

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyentuanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

Bài toán 5 (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho n số không âm). *Chứng minh:*

$$\sum_{i=1}^n a_i \geq n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}, \text{ i.e., } a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_i \in \mathbb{R}, a_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 6. Với bộ $(m, m_1, m_2, \dots, m_n)$ nào thì bất đẳng thức:

$$\sum_{i=1}^n m_i a_i \geq m \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}, \text{ i.e., } m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n \geq m \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

đúng với: (a) $\forall a_i \in \mathbb{R}, a_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$. (b) $\forall a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, n$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

2 Miscellaneous

Bài toán 7 ([Sơn+21], Bổ đề 1.1, p. 5). *Chứng minh:* $4ab \leq (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, hay có thể viết dưới dạng $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Hint. $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \geq 0$, $2(a^2+b^2) - (a+b)^2 = (a-b)^2 \geq 0$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. “=” $\Leftrightarrow a = b$. □

Bài toán 8 ([Sơn+21], Bổ đề 1.2, p. 5). *Chứng minh:* $3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$, hay có thể viết dưới dạng $ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Hint. $(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0$, $3(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c)^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$. “=” $\Leftrightarrow a = b = c$. □

Bài toán 9 ([Sơn+21], Bổ đề 1.3, p. 6). *Chứng minh:* $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$, hay có thể viết dưới dạng $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$, $\forall a, b > 0$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Hint. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a+b} = \frac{(a-b)^2}{ab(a+b)} \geq 0$, $\forall a, b > 0$. “=” $\Leftrightarrow a = b > 0$. □

Bài toán 10 ([Sơn+21], Bổ đề 1.4, p. 6). *Chứng minh:* $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$, hay có thể viết dưới dạng $\frac{1}{a+b+c} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$, $\forall a, b, c > 0$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 11 ([Sơn+21], Mở rộng Bổ đề 1.3–1.4, p. 6 cho n số). *Chứng minh:*

$$\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1 + \dots + a_n}, \text{ i.e., } \frac{1}{a_1 + \dots + a_n} \leq \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right), \forall a_i > 0, \forall i = 1, \dots, n,$$

hay có thể được viết gọn lại như sau:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n a_i}, \text{ i.e., } \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i} \leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}, \forall a_i > 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 12 ([Sơn+21], Bổ đề 1.5, p. 7). *Chứng minh:* $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$, $\forall a, b \geq 0$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 13 ([Sơn+21], Mở rộng Bổ đề 1.5, p. 7). *Chứng minh:* $\sqrt{a+b+c} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{3(a+b+c)}$, $\forall a, b, c \geq 0$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 14 ([Sơn+21], Mở rộng Bổ đề 1.5, p. 7 cho n số). *Chứng minh:* $\sqrt{a_1 + \dots + a_n} \leq \sqrt{a_1} + \dots + \sqrt{a_n} \leq \sqrt{n(a_1 + \dots + a_n)}$, $\forall a_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n$, hay có thể được viết gọn lại như sau:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i} \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \leq \sqrt{n \sum_{i=1}^n a_i}, \forall a_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 15 ([Sơn+21], Bổ đề 1.6, p. 7). *Chứng minh:* $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}, a+b \geq 0$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Hint. $a^3 + b^3 - ab(a+b) = (a+b)(a-b)^2 \geq 0$, $\forall a, b \in \mathbb{R}, a+b \geq 0$. “=” $\Leftrightarrow a = \pm b$. □

Bài toán 16 ([Sơn+21], Mở rộng Bổ đề 1.6, p. 7). *Chứng minh:* $a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Tài liệu

[Sơn+21] Nguyễn Ngọc Sơn, Chu Đình Nghiệp, Lê Hải Trung, and Võ Quốc Bá Cẩn. *Các Chủ Đề Bất Đẳng Thức Ôn Thi Vào Lớp 10*. Tái bản lần thứ 3. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2021, p. 143.