

Some Topics in Elementary Mathematics/Grade

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 9 tháng 10 năm 2022

Tóm tắt nội dung

1 bộ sưu tập các bài toán chọn lọc từ cơ bản đến nâng cao cho Toán sơ cấp lớp 7. Tài liệu này là phần bài tập bổ sung cho tài liệu chính [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 6/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_6/lecture)¹ của tác giả viết cho Toán lớp 6. Phiên bản mới nhất của tài liệu này được lưu trữ ở link sau: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 6/problem](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_6/problem)².

Mục lục

1	Số Hữu Tỷ	2
1.1	Tập Hợp Các Số Hữu Tỷ \mathbb{Q}	2
1.2	\pm on \mathbb{Q}	2
1.3	$\cdot, :$ on \mathbb{Q}	2
1.4	Lũy thừa của 1 số hữu tỷ	2
2	Số Thực	4
3	Hình Học Trực Quan	4
4	Góc. Đường Thẳng Song Song	4
5	1 Số Yếu Tố Thống Kê & Xác Suất	4
6	Biểu Thức Đại Số	4
7	Tam Giác	4
	Tài liệu	4

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam

e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

¹URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_7/NQBH_elementary_mathematics_grade_7.pdf.

²URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_7/problem/NQBH_elementary_mathematics_grade_7_problem.pdf.

1 Số Hữu Tỷ

1.1 Tập Hợp Các Số Hữu Tỷ \mathbb{Q}

Với phân số $\frac{a}{b}$ tối giản, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $\text{UCLN}(a, b) = 1$ thì các phân số có dạng $\frac{na}{nb}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, đều biểu diễn phân số $\frac{a}{b}$. Để so sánh 2 hay nhiều số hữu tỷ, chuyển chúng về cùng 1 trong 2 dạng: dạng phân số hoặc dạng biểu diễn thập phân, rồi so sánh chúng dựa vào các quy tắc đã học ở Toán 6.

Bài toán 1.1 (Trọng et al., 2022, 10., p. 6). So sánh 2 số hữu tỷ $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$) với số 0 khi a, b cùng dấu & khi a, b khác dấu.

Giải. $a = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = 0$, $ab > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} > 0$, & $ab < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} < 0$. □

Bài toán 1.2 (Trọng et al., 2022, 11., p. 6). Giả sử $x = \frac{a}{m}$, $y = \frac{b}{m}$, ($a, b, m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$) & $x < y$. Chứng minh $x < z < y$ với $z := \frac{a+b}{2m}$ (z là trung bình cộng của x & y , i.e., $z = \frac{x+y}{2}$).

Chứng minh. $x < y \Rightarrow x + x < x + y < y + y \Rightarrow x < \frac{x+y}{2} < y$, mà $\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m} \right) = \frac{a+b}{2m} = z$, nên $x < z < y$. □

1.2 \pm on \mathbb{Q}

Tính tổng các phân số cùng mẫu số:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{b}, \text{ i.e., } \frac{a_1}{b} + \dots + \frac{a_n}{b} = \frac{a_1 + \dots + a_n}{b}, \forall a_i, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

Tính tổng các phân số khác mẫu số: Quy đồng mẫu số các phân số đó với mẫu số chung là BCNN của các mẫu số các phân số đó rồi cộng lại:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \frac{\text{BCNN}(b_1, \dots, b_n)}{b_i}}{\text{BCNN}(b_1, \dots, b_n)}, \text{ i.e., } \frac{a_1}{b_1} + \dots + \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 \frac{\text{BCNN}(b_1, \dots, b_n)}{b_1} + \dots + a_n \frac{\text{BCNN}(b_1, \dots, b_n)}{b_n}}{\text{BCNN}(b_1, \dots, b_n)},$$

$$\forall a_i, b_i \in \mathbb{Z}, b_i \neq 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

1.3 $\cdot, :$ on \mathbb{Q}

“*Phép nhân 2 hay nhiều số hữu tỷ*: • Xác định dấu bằng cách đếm các thừa số âm, nếu chẵn thì kết quả dương, nếu lẻ thì kết quả âm. • Nhân phân số tự nhiên của tử với tử, mẫu với mẫu rồi rút gọn.

Phép chia 2 số hữu tỷ: Ta lấy số hữu tỷ bị chia nhân với nghịch đảo số hữu tỷ chia rồi làm như phép nhân. Thương của phép chia $x \in \mathbb{Q}$ cho số hữu tỷ $y \in \mathbb{Q}^*$ gọi là *tỷ số* của 2 số x & y , ký hiệu là $\frac{x}{y}$ hay $x : y$.” – Trọng et al., 2022, §3, p. 10

Bài toán 1.3 (Trọng et al., 2022, 3., p. 13). Cho số hữu tỷ $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$. Chứng minh: (a) $\frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow a > b$; (b) $\frac{a}{b} < 1 \Leftrightarrow a < b$; (c) $((a < b) \wedge (a, c > 0)) \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$; (d) $((a > b) \wedge (c > 0)) \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$.

Bài toán 1.4 (Bình, 2022, §1, Ví dụ 1). Cho phân số $\frac{a}{b} \neq 1$. Tìm phân số $\frac{c}{d}$ sao cho $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$.

1.4 Lũy thừa của 1 số hữu tỷ

Bài toán 1.5 (Bình, 2022, §3, Ví dụ 2). Cho $x \in \mathbb{Q}$. Khi nào thì: (a) $x^2 = x$; (b) $x^2 > x$; (c) $x^2 < x$.

Bài toán 1.6 (Bình, 2022, §3, Ví dụ 3). Tìm $a, b, c \in \mathbb{Q}$ biết $ab = 2$, $bc = 3$, $ca = 54$.

Bài toán 1.7 (Bình, 2022, §3, Ví dụ 4). Rút gọn $A = \sum_{i=0}^{50} 5^i = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{50}$.

Bài toán 1.8 (Bình, 2022, §3, Ví dụ 5). Cho $B = \sum_{i=1}^{99} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{99}$. Chứng minh $B < 1$.

Bài toán 1.9 (Bình, 2022, §3, 21.). Chứng minh: (a) $7^6 + 7^5 - 7^4 \vdots 55$; (b) $16^5 + 2^{15} \vdots 33$; (c) $81^7 - 27^9 - 9^{13} \vdots 405$.

Bài toán 1.10 (Bình, 2022, §3, 22.). Điền vào chỗ trống ... các từ “bằng nhau” hoặc “đổi nhau” cho đúng: (a) Nếu 2 số đổi nhau thì bình phương của chúng ... (b) Nếu 2 số đổi nhau thì lập phương của chúng ... (c) Lũy thừa chẵn cùng bậc của 2 số đổi nhau thì ... (d) Lũy thừa lẻ cùng bậc của 2 số đổi nhau thì ...

Bài toán 1.11 (Bình, 2022, §3, 23. & mở rộng). Các đẳng thức sau có đúng với mọi $a, b \in \mathbb{Q}$ hay không? (a) $-a^3 = (-a)^3$; (b) $-a^5 = (-a)^5$; (c) $-a^2 = (-a)^2$; (d) $-a^4 = (-a)^4$; (e) $-a^{2n+1} = (-a)^{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$; (f) $a^{2n} = (-a)^{2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$; (g) $(a-b)^2 = (b-a)^2$; (h) $(a-b)^3 = -(b-a)^3$; (i) $(a-b)^{2n} = (b-a)^{2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$; (j) $(a-b)^{2n+1} = -(b-a)^{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Bài toán 1.12 (Bình, 2022, §3, 24.). Tính: (a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{15} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{20}$; (b) $\left(\frac{1}{9}\right)^{25} : \left(\frac{1}{3}\right)^{30}$; (c) $\left(\frac{1}{16}\right)^3 : \left(\frac{1}{8}\right)^2$; (d) $(x^3)^2 : (x^2)^3$ với $x \neq 0$.

Bài toán 1.13 (Bình, 2022, §3, 25.). Viết số 64 dưới dạng a^n với $a \in \mathbb{Z}$. Có bao nhiêu cách viết?

Bài toán 1.14 (Bình, 2022, §3, 26.). Rút gọn biểu thức: $A = \frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 20}$.

Bài toán 1.15 (Bình, 2022, §3, 27.). Cho $S_n = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} i = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (-1)^{n-1} n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tính $S_{35} + S_{60}$.

Bài toán 1.16 (Bình, 2022, §3, 28.). Cho $A = 1 - 5 + 9 - 13 + 17 - 21 + 25 - \dots$ (n số hạng, giá trị tuyệt đối của số sau lớn hơn giá trị tuyệt đối của số hạng trước 4 đơn vị, các dấu $+$ & $-$ xen kẽ). (a) Tính A theo n . (b) Viết số hạng thứ n của biểu thức A theo n (chú ý dùng lũy thừa để biểu thị dấu của số hạng đó).

Bài toán 1.17 (Bình, 2022, §3, 29.). Với giá trị nào của các chữ thì các biểu thức sau có giá trị là số 0, số dương, số âm? (a) $P = \frac{a^2 b}{c}$; (b) $Q = \frac{x^3}{yz}$.

Bài toán 1.18 (Bình, 2022, §3, 30.). Cho 2 số hữu tỷ a & b trái dấu trong đó $|a| = b^5$. Xác định dấu của mỗi số.

Bài toán 1.19 (Bình, 2022, §3, 31.). Viết các số sau dưới dạng lũy thừa của 2: 16, 64, 1, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{8}$, 0.5, 0.25.

Bài toán 1.20 (Bình, 2022, §3, 32.). (a) Viết các số sau thành lũy thừa với số mũ âm: $\frac{1}{1000000}$, 0.0000002. (b) Viết các số sau dưới dạng số thập phân: 10^{-7} , $2.5 \cdot 10^{-6}$.

Bài toán 1.21 (Bình, 2022, §3, 33.). Tính xem A gấp mấy lần B : (a) $A = 3.4 \cdot 10^{-8}$, $B = 34 \cdot 10^{-9}$; (b) $A = 10^{-4} + 10^{-3} + 10^{-2}$, $B = 10^{-9}$.

Bài toán 1.22 (Bình, 2022, §3, 34.). So sánh: (a) $\left(-\frac{1}{16}\right)^{100}$ & $\left(-\frac{1}{2}\right)^{500}$; (b) $(-32)^9$ & $(-18)^{13}$.

Bài toán 1.23 (Bình, 2022, §3, 35.). Sắp xếp $a, b, c \in \mathbb{Q}$ theo thứ tự từ nhỏ đến lớn: $a = 2^{100}$, $b = 3^{75}$, $c = 5^{50}$.

Bài toán 1.24 (Bình, 2022, §3, 36.). Trong các câu sau, câu nào đúng với mọi $a \in \mathbb{Q}$? (a) Nếu $a < 0$ thì $a^2 > 0$; (b) Nếu $a^2 > 0$ thì $a > 0$; (c) Nếu $a < 0$ thì $a^2 > a$; (d) Nếu $a^2 > a$ thì $a > 0$; (e) Nếu $a^2 > a$ thì $a < 0$.

Bài toán 1.25 (Bình, 2022, §3, 37.). (a) Cho $a^m = a^n$ ($a \in \mathbb{Q}$, $m, n \in \mathbb{N}$). Tìm m, n . (b) Cho $a^m > a^n$ ($a \in \mathbb{Q}$, $a > 0$, $m, n \in \mathbb{N}$). So sánh m & n .

Bài toán 1.26 (Bình, 2022, §3, 38.). Tìm $x \in \mathbb{Q}$, biết rằng: (a) $(2x-1)^4 = 81$; (b) $(x-1)^5 = -32$; (c) $(2x-1)^6 = (2x-1)^8$.

Bài toán 1.27 (Bình, 2022, §3, 39.). Tìm $x \in \mathbb{N}$, biết rằng: (a) $5^x + 5^{x+2} = 650$; (b) $3^{x-1} + 5 \cdot 3^{x-1} = 162$.

Bài toán 1.28 (Bình, 2022, §3, 40.). Tìm $x, y \in \mathbb{N}$, biết rằng: (a) $2^{x+1} \cdot 3^y = 12^x$; (b) $10^x : 5^y = 20^y$; (c) $2^x = 4^{y-1}$ & $27^y = 3^{x+8}$.

Bài toán 1.29 (Bình, 2022, §3, 41.). Tìm $a, b, c \in \mathbb{Q}$, biết rằng: (a) $ab = \frac{3}{5}$, $bc = \frac{4}{5}$, $ca = \frac{3}{4}$. (b) $a(a+b+c) = -12$, $b(a+b+c) = 18$, $c(a+b+c) = 30$; (c) $ab = c$, $bc = 4a$, $ac = 9b$.

Bài toán 1.30 (Bình, 2022, §3, 42.). Cho $a, b, c, d, e \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $a^b = b^c = c^d = d^e = e^a$. Chứng minh $a = b = c = d = e$.

Bài toán 1.31 (Bình, 2022, §3, 43.). Cho $A = \prod_{i=2}^{100} \frac{1}{i^2} - 1 = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right) \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$. So sánh A với $-\frac{1}{2}$.

Bài toán 1.32 (Bình, 2022, §3, 44.). Rút gọn $A = \sum_{i=1}^{100} (-1)^i 2^i = 2^{100} - 2^{99} + 2^{98} - 2^{97} + \dots + 2^2 - 2$.

Bài toán 1.33 (Bình, 2022, §3, 45.). Rút gọn $B = \sum_{i=1}^{100} (-1)^i 3^i = 3^{100} - 3^{99} + 3^{98} - 3^{97} + \dots + 3^2 - 3 + 1$.

Bài toán 1.34 (Bình, 2022, §3, 46.). Cho $C = \sum_{i=1}^{99} \frac{1}{3^i} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{99}}$. Chứng minh $C < \frac{1}{2}$.

Bài toán 1.35 (Bình, 2022, §3, 47.). Chứng minh $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2} < 1$.

Bài toán 1.36 (Bình, 2022, §3, 48.). Chứng minh $\sum_{i=1}^{100} \frac{i}{3^i} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4}$.

Bài toán 1.37 (Bình, 2022, §3, 49.). Ta không có $2^m + 2^n = 2^{m+n}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$. Nhưng có những số nguyên dương m, n có tính chất trên. Tìm các số đó.

Bài toán 1.38 (Bình, 2022, §3, 50.). Tìm $m, n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $2^m - 2^n = 256$.

Bài toán 1.39 (Bình, 2022, §3, 51.). Cho 1 bảng vuông 3×3 ô. Trong mỗi ô của bảng viết số 1 hoặc số -1 . Gọi d_i là tích các số trên dòng i ($i = 1, 2, 3$), c_k là tích các số trên cột k ($k = 1, 2, 3$). (a) Chứng minh rằng không thể xảy ra $d_1 + d_2 + d_3 + c_1 + c_2 + c_3 = 0$. (b) Xét bài toán trên đối với bảng vuông $n \times n$.

Bài toán 1.40 (Bình, 2022, §3, 52.). Cho n số x_1, \dots, x_n , mỗi số bằng 1 hoặc -1 . Biết rằng tổng của n tích $x_1 x_2, x_2 x_3, x_3 x_4, \dots, x_n x_1$ bằng 0. Chứng minh $n : 4$.

2 Số Thực

Bài toán 2.1. *Chứng minh:* $(x^2 + m^2)(x^2 + n^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + m^2n^2 = 0$ & $(x^2 + m^2)(x^2 + n^2) \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + m^2n^2 \neq 0$, $\forall x, m, n \in \mathbb{R}$.

Ý nghĩa: Điều kiện để các công thức nhân chia lũy thừa cùng cơ số xác định.

3 Hình Học Trực Quan

4 Góc. Đường Thẳng Song Song

5 1 Số Yếu Tố Thống Kê & Xác Suất

6 Biểu Thức Đại Số

7 Tam Giác

Tài liệu

Bình, Vũ Hữu (2022). *Nâng Cao & Phát Triển Toán 7, tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 146.

Trọng, Đặng Đức et al. (2022). *Bồi Dưỡng Năng Lực Tự Học Toán 7*. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, p. 200.