Problems & Proofs in Elementary Inequality
Bài Tập Bất Đẳng Thức & Chứng Minh

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 19 tháng 5 năm 2023

Tóm tắt nội dung

A problem set for elementary inequality.

Mục lục

1 Cauchy-Schwarz Inequality – Bất Đẳng Thức Cauchy-Schwarz

The most basic inequality: $x^2 \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \ne 0$.

Bài toán 1 (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho 2 số không âm)**.** *Chứng minh:*

$$\boxed{a + b \ge 2\sqrt{ab},\ \forall a, b \in \mathbb{R},\ a, b \ge 0.}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

1st proof. $a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \ge 0 \Rightarrow a + b \ge 2\sqrt{ab}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \ge 0$. "=" $\Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$. □

2nd proof. $(a + b)^2 - (2\sqrt{ab})^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \ge 0 \Rightarrow (a + b)^2 \ge (2\sqrt{ab})^2 \Rightarrow a + b \ge 2\sqrt{ab}$ (vì $a, b \ge 0$ nên $a + b \ge 0$ & $2\sqrt{ab} \ge 0$). "=" $\Leftrightarrow a = b$. □

Lưu ý 1. *Ở 2nd proof, ta đã vận dụng tính chất cơ bản của căn bậc 2:* $\boxed{0 \le a \le b \Leftrightarrow \sqrt{a} \le \sqrt{b},\ \forall a, b \in \mathbb{R}}$*. Phiên bản chặt/ngặt (strict) là:* $\boxed{0 \le a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b},\ \forall a, b \in \mathbb{R}}$*. Ý nghĩa hình học của 2 tính chất này: Hình vuông nào có cạnh lớn hơn thì có diện tích lớn hơn & ngược lại, hình vuông nào có diện tích lớn hơn thì có cạnh lớn hơn.*

3rd proof. Đặt $x \coloneqq \sqrt{a}$, $y \coloneqq \sqrt{b}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y \ge 0$. Có $a+b-2\sqrt{ab} = a+b-2\sqrt{a}\sqrt{b} = x^2+y^2-2xy = (x-y)^2 \ge 0 \Rightarrow a+b \ge 2\sqrt{ab}$. "=" $\Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$. □

Bài toán 2. *Với m, n, p nào thì bất đẳng thức $ma + nb \ge p\sqrt{ab}$ luôn đúng: (a) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \ge 0$. (b) $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Lưu ý 2. *Ở 3rd proof, ta đã sử dụng tính chất giao hoán của phép nhân & phép khai phương:* $\boxed{\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b},\ \forall a, b \in \mathbb{R},\ a, b \ge 0}$.

Bài toán 3 (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho 3 số không âm)**.** *Chứng minh:*

$$\boxed{a + b + c \ge 3\sqrt[3]{abc},\ \forall a, b, c \in \mathbb{R},\ a, b, c \ge 0.}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 4. *Với m, n, p, q nào thì bất đẳng thức $ma + nb + pc \ge q\sqrt[3]{abc}$ luôn đúng: (a) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $a, b, c \ge 0$. (b) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

Bài toán 5 (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho n số không âm). *Chứng minh:*

$$\sum_{i=1}^n a_i \ge n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i},\ i.e.,\ a_1+a_2+\cdots+a_n \ge \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},\ \forall n\in\mathbb{N}^\star,\ \forall a_i\in\mathbb{R},\ a_i\ge 0,\ \forall i=1,2,\ldots,n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 6. *Với bộ* $(m, m_1, m_2, \ldots, m_n)$ *nào thì bất đẳng thức:*

$$\sum_{i=1}^n m_ia_i \ge m\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i},\ i.e.,\ m_1a_1+m_2a_2+\cdots+m_na_n \ge m\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},\ \forall n\in\mathbb{N}^\star,$$

đúng với: (a) $\forall a_i\in\mathbb{R}$, $a_i\ge 0$, $\forall i=1,2,\ldots,n$. *(b)* $\forall a_i\in\mathbb{R}$, $\forall i=1,2,\ldots,n$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

2 Miscellaneous

Bài toán 7 ([Sơn+21], Bổ đề 1.1, p. 5). *Chứng minh:* $4ab\le(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)$, *hay có thể viết dưới dạng* $\frac{a^2+b^2}{2}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, $ab\le\frac{(a+b)^2}{4}$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Hint. $(a+b)^2-4ab=(a-b)^2\ge 0$, $2(a^2+b^2)-(a+b)^2=(a-b)^2\ge 0$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$. "$=$" $\Leftrightarrow a=b$. ☐

Bài toán 8 ([Sơn+21], Bổ đề 1.2, p. 5). *Chứng minh:* $3(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)$, *hay có thể viết dưới dạng* $ab+bc+ca\le\frac{1}{3}(a+b+c)^2$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Hint. $(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\ge 0$, $3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$. "$=$" $\Leftrightarrow a=b=c$. ☐

Bài toán 9 ([Sơn+21], Bổ đề 1.3, p. 6). *Chứng minh:* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$, *hay có thể viết dưới dạng* $\frac{1}{a+b}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$, $\forall a,b>0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Hint. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{4}{a+b}=\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}\ge 0$, $\forall a,b>0$. "$=$" $\Leftrightarrow a=b>0$. ☐

Bài toán 10 ([Sơn+21], Bổ đề 1.4, p. 6). *Chứng minh:* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}$, *hay có thể viết dưới dạng* $\frac{1}{a+b+c}\le\frac{1}{9}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$, $\forall a,b,c>0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Bài toán 11 ([Sơn+21], Mở rộng Bổ đề 1.3–1.4, p. 6 cho n số). *Chứng minh:*

$$\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}\ge\frac{n^2}{a_1+\cdots+a_n},\ i.e.,\ \frac{1}{a_1+\cdots+a_n}\le\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right),\ \forall a_i>0,\ \forall i=1,\ldots,n,$$

hay có thể được viết gọn lại như sau:

$$\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}\ge\frac{n^2}{\sum_{i=1}^n a_i},\ i.e.,\ \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i}\le\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i},\ \forall a_i>0,\ \forall i=1,\ldots,n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 12 ([Sơn+21], Bổ đề 1.5, p. 7). *Chứng minh:* $\sqrt{a+b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{2(a+b)}$, $\forall a,b\ge 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Bài toán 13 ([Sơn+21], Mở rộng Bổ đề 1.5, p. 7). *Chứng minh:* $\sqrt{a+b+c}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\le\sqrt{3(a+b+c)}$, $\forall a,b,c\ge 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Bài toán 14 ([Sơn+21], Mở rộng Bổ đề 1.5, p. 7 cho n số). *Chứng minh:* $\sqrt{a_1+\cdots+a_n}\le\sqrt{a_1}+\cdots+\sqrt{a_n}\le\sqrt{n(a_1+\cdots+a_n)}$, $\forall a_i\ge 0$, $\forall i=1,\ldots,n$, *hay có thể được viết gọn lại như sau:*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i}\le\sum_{i=1}^n\sqrt{a_i}\le\sqrt{n\sum_{i=1}^n a_i},\ \forall a_i\ge 0,\ \forall i=1,\ldots,n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 15 ([Sơn+21], Bổ đề 1.6, p. 7). *Chứng minh:* $a^3+b^3\ge ab(a+b)$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $a+b\ge 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Hint. $a^3+b^3-ab(a+b)=(a+b)(a-b)^2\ge 0$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $a+b\ge 0$. "$=$" $\Leftrightarrow a=\pm b$. ☐

Bài toán 16 ([Sơn+21], Mở rộng Bổ đề 1.6, p. 7). *Chứng minh:* $a^4+b^4\ge ab(a^2+b^2)$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Tài liệu

[Sơn+21] Nguyễn Ngọc Sơn, Chu Đình Nghiệp, Lê Hải Trung, and Võ Quốc Bá Cẩn. *Các Chủ Đề Bất Đẳng Thức Ôn Thi Vào Lớp 10.* Tái bản lần thứ 3. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2021, p. 143.