Xác định điểm trên trục tọa độ

Nguyễn Quản Bá Hồng

27.08.2013

Tóm tắt nội dung

Bài viết này giới thiệu việc sử dụng phương pháp tọa độ tỷ cự đối với hệ hai điểm cố định cho trước trên trục tọa độ để xác định các điểm khác. Bên cạnh đó, sử dụng lý thuyết này để có một cách nhìn khác về các đối tượng như: tỷ số kép của hàng điểm, các tính chất của hàng điều hòa, tâm tỷ cự và phương tích,... và mở rộng một số tính chất của các đối tượng này.

1 Tọa độ trên trục và tâm tỷ cự

Phần này giới thiệu việc sử dụng tâm tỷ cự của hệ hai điểm cố định cho trước trên một đường thẳng (được coi là một trục) để xác định tọa độ tỷ cự trên một trục.

1.1 Tâm tỷ cự của hệ hai điểm

Định lý *Cho đoạn thẳng AB và và các số thực $\alpha, \beta, \alpha + \beta \neq 0$. Khi đó, tồn tại duy nhất điểm I sao cho $\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$. Nếu có α', β' sao cho $\alpha'\overrightarrow{IA} + \beta'\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$ thì $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}$. Khi đó ta nói I là tâm tỷ cự của hệ hai điểm A, B ứng với bộ số (α, β) và ký hiệu $I(\alpha, \beta)$*

Nhận xét Do có nhiều bộ (α, β) thỏa mãn đẳng thức vector, và theo định lý trên thì các bộ này tỷ lệ với nhau. Do đó, nếu bổ sung điều kiện $\alpha + \beta = 1$ thì bộ này được cố định duy nhất.

Biểu diễn tọa độ tỷ cự bởi độ dài đại số trên trục:
Cho đoạn thẳng AB và điểm I nằm trên đường thẳng AB. Khi đó I là tâm tỷ cự của hệ hai điểm A, B với hệ số tương ứng $\left(\frac{\overline{IB}}{\overline{AB}}, -\frac{\overline{IA}}{\overline{AB}}\right)$. Chú ý rằng $\frac{\overline{IB}}{\overline{AB}} - \frac{\overline{IA}}{\overline{AB}} = 1$, nên có thể viết $I\left(\frac{\overline{IB}}{\overline{AB}}, -\frac{\overline{IA}}{\overline{AB}}\right)$.

Sử dụng công thức Larrange về tâm tỷ cự
Cho điểm I nằm trên đường thẳng AB với $I(\alpha, \beta)$. Khi đó với mọi điểm P trong không gian, luôn có:

$$\alpha PA^2 + \beta PB^2 = PI^2 + \alpha\beta AB^2$$

Hệ thức Stewart
Dạng đại số:

$$\overline{BC}.AM^2 + \overline{MB}.AC^2 - \overline{MC}.AB^2 = \overline{MB}.\overline{MC}.\overline{BC}$$

Dạng độ dài hình học:

$$MB.b^2 + MC.c^2 = a.MA^2 + MB.MC.BC$$

1.2 Công thức khai triển phương tích theo hai điểm và đường tròn

Định lý: *Cho đường tròn (O) và đoạn thẳng AB bất kỳ, $I(\alpha, \beta)$. Khi đó, phương tích của điểm I đối với đường tròn (O) được xác định theo công thức sau:*

$$\alpha \wp_{A/(O)} + \beta \wp_{B/(O)} = \wp_{I/(O)} + \alpha\beta AB^2$$

Hệ quả: *Cho đường tròn (O) và ba điểm A, B, C thẳng hàng, luôn có:*

$$\wp_{A/(O)}.\overline{BC} + \wp_{B/(O)}.\overline{CA} + \wp_{C/(O)}.\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB} = 0$$

2 Tỷ số kép của hàng điểm và tâm tỷ cự

Phần này giới thiệu các tính chất của tỷ số kép của hàng điểm, đặc biệt là các tính chất của hàng điểm điều hòa. Và thông qua công cụ tâm tỷ cự của hệ hai điểm cố định cho trước, chúng ta sẽ tìm hiểu, chứng minh các tính chất cơ bản của tỷ số kép, hàng điểm điều hòa, và mở rộng các tính chất này.

2.1 Tọa độ tỷ cựu trên trục và tỷ số kép của hàng điểm

Định nghĩa: *Trên một đường thẳng bất kỳ (được coi là trục), lấy hai điểm A, B cố định. Khi đó, mọi điểm I nằm trên đường thẳng AB được xác định bởi bộ hai số (α, β) nếu $I(\alpha, \beta)$ đối với hai điểm A, B. Bộ hai số này được gọi là tọa độ tỷ cự trên trục AB của điểm I.*

Dễ thấy tọa độ của hai điểm A, B là $A(1, 0)$ và $B(0, 1)$.
Vì tọa độ tỷ cự của điểm I có thê viết lại dưới dạng $I\left(\frac{\overline{IA}}{\overline{AB}}, -\frac{\overline{IB}}{\overline{AB}}\right)$ nên suy ra $\frac{\overline{IA}}{\overline{IB}} = -\frac{\alpha}{\beta}$
Ta cũng có $\overline{IA} = -\beta\overline{AB}$ và $\overline{IB} = \alpha\overline{AB}$.

Dạng tọa độ tỷ cự của tỷ số kép của hàng điểm
Cho A, B là hai điểm cố định và phân biệt. Trên trục AB, lấy các điểm $C(\alpha_1, \beta_1)$ và $D(\alpha_2, \beta_2)$. Tỷ số kép của hàng điểm A, B, C, D là một số, ký hiệu là $(ABCD)$ và được xác định theo các số α_i, β_i như sau:

$$(ABCD) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \left(-\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right) : \left(-\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) = \frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2}$$

Có thể viết lại biểu thức trên như sau:

$$(ABCD) = \frac{\alpha_2(1-\alpha_1)}{\alpha_1(1-\alpha_2)}$$

Bằng cách sử dụng tọa độ tỷ cự, ta có thể chứng minh các tính chất cơ bản của hàng điểm.

$$(ABCD) = (CDAB) = (BADC) = (DCBA)$$

$$(ABCD) = \frac{1}{(BACD)} = \frac{1}{(ABDC)}$$

$$(ABCD) = 1 - (ACBD) = 1 - (DBCA)$$

$$(ABCD) = (ABCD') \Leftrightarrow D \equiv D'$$

$$(ABCD) \neq 1$$

2.2 Tọa độ tỷ cự trên trục và hàng điểm điều hòa

Điều kiện để 4 điểm trên trục tạo thành một hàng điểm điều hòa
Cho A, B là hai điểm cố định và phân biệt. Trên trục AB lấy các điểm $C(\alpha_1, \beta_1)$ và $D(\alpha_2, \beta_2)$. Khi đó, điều kiện cần và đủ để $(ABCD) = -1$ là $\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 = 0$.

Mối quan hệ giữa $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ khi (ABCD) là hàng điểm điều hòa.
Ta có các số $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 1 \\ \alpha_2 + \beta_2 = 1 \\ \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 = 0 \end{cases}$$

Dễ dàng chứng minh được các hệ thức:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha_1\alpha_2, \beta_1 + \beta_2 = 2\beta_1\beta_2$$

Xác định tọa độ của một điểm khi biết tọa độ của ba điểm kia trên hàng điểm điều hòa.
Cho hai điểm A, B cố định. Điểm C thuộc đường thẳng AB và có tọa độ tỷ cự $C(\alpha, \beta)$. Điểm D thuộc đường thẳng AB sao cho $(ABCD) = -1$. Khi đó, điểm

D được xác định theo C bởi:

$$D\left(\frac{\alpha}{2\alpha-1},\frac{\beta}{2\beta-1}\right)$$

Quy tất cả về một biến số
Cho 2 điểm A,B cố định. Điểm $C\in AB$ có tọa độ tỷ cự $C\left(\alpha,1-\alpha\right)$. Điểm D thuộc đường thẳng AB sao cho $(ABCD)=-1$. Khi đó, D được xác định bởi:

$$D\left(\frac{\alpha}{2\alpha-1},\frac{\alpha-1}{2\alpha-1}\right)$$

Tính chất cơ bản của hàng điểm điều hòa: Cho $(ABCD)=-1$ thì:

$$(CDAB)=(BADC)=(DCBA)=(BACD)=(ABDC)=(ABCD)=-1$$

2.3 Các biểu thức tọa độ của hàng điểm điều hòa

Định lý: *Cho A,B là hai điểm cố định và phân biệt. Trên trục AB lấy điểm $C\left(\alpha,1-\alpha\right)$ và điểm $D\left(\beta,1-\beta\right)$. Khi đó:*

$$(ABCD)=-1\Leftrightarrow\alpha+\beta=2\alpha\beta$$

Sử dụng tính chất này, ta có thể dễ dàng chứng minh các tính chất sau đây:
Hệ thức Descartes .

$$(ABCD)=-1\Leftrightarrow\frac{2}{\overline{AB}}=\frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{\overline{AD}}$$

Chứng minh: Hệ thức trên tương đương với

$$\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1-\beta}=2\Leftrightarrow\alpha+\beta=2\alpha\beta$$

Hệ thức Newton: Gọi I là trung điểm của AB. Khi đó:

$$(ABCD)=-1\Leftrightarrow\overline{IA}^2=\overline{IC}.\overline{ID}$$

Chứng minh: Hệ thức trên tương đương với

$$\frac{1}{2\alpha-1}=\frac{2\beta-1}{1}\Leftrightarrow\alpha+\beta=2\alpha\beta$$

Hệ thức Maclaurin: Gọi J là trung điểm của CD. Khi đó:

$$(ABCD)=-1\Leftrightarrow\overline{AC}.\overline{AD}=\overline{AB}.\overline{AJ}$$

2.4 Mở rộng dạng tọa độ tỷ cự của tỷ số kép của hàng điểm

Cho A, B là hai điểm cố định và phân biệt. Trên trục AB lấy các điểm

$$P\left(\alpha_1, 1-\alpha_1\right), Q\left(\alpha_2, 1-\alpha_2\right), R\left(\alpha_3, 1-\alpha_3\right), S\left(\alpha_4, 1-\alpha_4\right)$$

Tỷ số kép của hàng điểm $(PQRS)$ được xác định bởi:

$$(PQRS) = \frac{\overline{RP}}{\overline{RQ}} : \frac{\overline{SP}}{\overline{SQ}}$$

$$= \frac{\overline{RA}+\overline{AP}}{\overline{RA}+\overline{AQ}} : \frac{\overline{SA}+\overline{AP}}{\overline{SA}+\overline{AQ}}$$

$$= \frac{\overline{AB}[(\alpha_3-1)-(\alpha_1-1)]}{\overline{AB}[(\alpha_3-1)-(\alpha_2-1)]}.\frac{\overline{AB}[(\alpha_4-1)-(\alpha_2-1)]}{\overline{AB}[(\alpha_4-1)-(\alpha_3-1)]}$$

$$= \frac{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)}{(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_1)}$$

Cho A, B là hai điểm cố định và phân biệt. Trên trục AB lấy các điểm

$$P\left(\alpha_1, 1-\alpha_1\right), Q\left(\alpha_2, 1-\alpha_2\right), R\left(\alpha_3, 1-\alpha_3\right), S\left(\alpha_4, 1-\alpha_4\right)$$

Điều kiện cần và đủ để $(PQRS) = -1$ là:

$$\frac{\alpha_3-\alpha_1}{\alpha_3-\alpha_2}.\frac{\alpha_4-\alpha_2}{\alpha_4-\alpha_1} = -1$$

Nếu biết tọa độ tỷ cự của 3 trong 4 điểm trong hàng điểm điều hòa, chúng ta có thể xác định tọa độ tỷ cự của điểm còn lại bằng cách giải phương trình trên.

3 Tỷ số kép của chùm đường thẳng

Phần này điểm lại các định lý cơ bản về tỷ số kép của chùm đường thẳng, và hàng điểm điều hòa. Các định lý này có ứng dụng rất rộng rãi trong hình học phẳng, là một công cụ mạnh trong các bài toán chứng minh vuông góc, song song, trung điểm của đoạn thẳng, thẳng hàng, đồng quy,.. Chúng ta hãy cùng nhau điểm lại các tính chất này.

3.1 Các định lý cơ bản về tỷ số kép của chùm đường thẳng

Định lý 1: *Cho a, b, c, d là chùm đường thẳng tâm O. Đường thẳng Δ không đi qua O, theo thứ tự cắt a, b, c, d tại A, B, C, D. Đường thẳng Δ' không đi qua O, theo thứ tự cắt a, b, c tại A', B', C'. Khi đó: $\Delta' \parallel d \Leftrightarrow (ABCD) = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}}$*

Định lý 2: *Cho a, b, c, d là chùm đường thẳng tâm O. Đường thẳng Δ không đi qua O, theo thứ tự cắt a, b, c, d tại A, B, C, D. Đường thẳng Δ' không đi qua O,* *theo thứ tự cắt a, b, c, d tại A', B', C', D'. Khi đó:* $(ABCD) = (A'B'C'D')$

Định lý 3: *Cho 2 đường thẳng Δ, Δ' cắt nhau tại O. Các điểm A, B, C thuộc Δ; các điểm A', B', C' thuộc Δ'. Khi đó, AA', BB', CC' hoặc đồng quy hoặc đôi một song song khi và chỉ khi $(OABC) = (OA'B'C')$.*

Định lý 4: *Cho hai chùm $O(ABCO'), O'(ABCO)$. Khi đó, A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi*

$$O(ABCO') = O'(ABCO)$$

3.2 Hai định lý về chùm điều hòa

Định lý 5: *Với chùm a, b, c, d, các điều kiện sau là tương đương:*
i. $(abcd) = -1$
ii. Tồn tại một đường thẳng song song với một đường của chùm và định ra trên ba đường còn lại 2 đoạn thẳng bằng nhau.
iii. Mọi đường thẳng song song với một đường của chùm định ra trên 3 đường còn lại 2 đoạn thẳng bằng nhau.

Định lý 6: *Với chùm điều hòa $(abcd)$, các điều kiện sau là tương đương:*
i. $c \perp d$
ii. c là phân giác của các góc tạo bởi a, b
iii. d là phân giác của các góc tạo bởi a, b

4 Một số hệ thức trên đường thẳng

Phần này giới thiệu một số hệ thức có trên trục tọa độ. Do các điểm được xác định trên trục, nên các hệ thức sau đây đều có dạng độ dài đại số. Sau đây lfa 2 hệ thức nổi tiếng và 2 hệ thức khác.
Hệ thức Euler
Cho 4 điểm thẳng hàng A, B, C, M, luôn có:

$$\overline{MA}.\overline{BC} + \overline{MB}.\overline{CA} + \overline{MC}.\overline{AB} = 0$$

Hệ thức Stewart
Cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng và điểm M, luôn có:

$$\overline{MA}.BC^2 + \overline{MB}.CA^2 + \overline{MC}.AB^2 + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB} = 0$$

Hệ thức 3
Cho 5 điểm A, B, C, M, N thẳng hàng, luôn có:

$$\frac{\overline{AM}.\overline{AN}}{\overline{AB}.\overline{AC}} + \frac{\overline{BM}.\overline{BN}}{\overline{BC}.\overline{BA}} + \frac{\overline{CM}.\overline{CN}}{\overline{CA}.\overline{CB}} = 1$$

Hệ thức 4
Cho các điểm $O, A_i, i = \overline{1,n}$ thẳng hàng và các điểm $A_i, i = \overline{1,n}$ đôi một phân biệt với nhau. Đặt:

$$S_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{OA_i^k}{\prod\limits_{j \neq i} \overline{A_j A_i}}$$

Luôn có các đẳng thức sau:

$$S_0 = S_1 = S_2 = ... = S_{n-2} = 0$$

$$S_{n-1} = 1$$

Cùng một số hệ thức khác.

Tài liệu

[1] Max Schindler, Evan Chen. *Barycentric Coordinates in Olympiad Geometry.* July 13, 2012.

[2] Trần Quang Hùng.*Tâm Tỷ cự và các bài toán phương tích.*

[3] Nguyễn Minh Hà. *Chương 1: Vector, Tài liệu chuyên Toán Hình học 10.* NXB Giáo Dục.

[4] Nguyễn Minh Hà. *Các thuật toán biến đổi tâm tỷ cự trong hình học phẳng.* THTT số 403.

[5] Mathscope.org. *Một số kiến thức Hình học phẳng thi Olympic Toán.*

[6] Eric W. Weisstein.*Barycentric Coordinates.* From MathWorld - A Wolfram Web Resource.

[7] Zachary Abel.*Bary centric Coordinates.*

[8] Christina Koblbauer.*Barycentric Coordinates.*Waterloo, 2012.

[9] Evan Chen.*Barycentric Coordinates.*Berkeley Math Circle.

[10] *Art of Problem Solving*