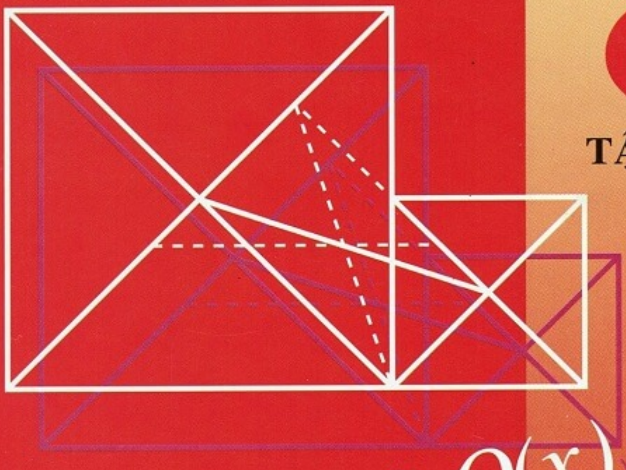
VŨ HỮU BÌNH

# NÂNG CAO VÀ PHÁT TRIỂN TOÁN 8

TẬP MỘT



$$f(x) = (x-a).Q(x) + r$$

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

VŨ HỮU BÌNH

# NÂNG CAO VÀ PHÁT TRIỂN

# TOÁN 8

## TẬP MỘT

*(Tái bản lần thứ tám)*

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

# LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách **Nâng cao và phát triển Toán 8 tập một** thuộc bộ sách **Nâng cao và phát triển Toán** bậc Trung học cơ sở, nhằm giúp cho bạn đọc : các học sinh khá và giỏi Toán, các thầy cô giáo dạy Toán một tài liệu tham khảo đào sâu môn Toán dưới dạng bài tập nâng cao và các chuyên đề có kèm theo bài tập vận dụng.

Khi biên soạn cuốn sách này, tác giả sử dụng các cuốn **Một số vấn đề phát triển Đại số 8, Toán nâng cao Đại số 8, Một số vấn đề phát triển Hình học 8**, đồng thời chỉnh lí và bổ sung cho phù hợp với chương trình mới của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Cuốn sách gồm hai phần : Đại số và Hình học.

**Phần Đại số** gồm các chương I, II và ba chuyên đề :

– Một số phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử.

– Tính chia hết đối với số nguyên.

– Tính chia hết đối với đa thức.

**Phần Hình học** gồm các chương I, II và hai chuyên đề :

– Tìm tập hợp điểm.

– Sử dụng công thức diện tích để thiết lập quan hệ về độ dài đoạn thẳng.

Riêng các nội dung về tính diện tích bằng cách lập phương trình và toán cực trị hình học được giới thiệu ở tập hai.

Cuối mỗi phần có **Bài đọc thêm** về lịch sử toán học. Riêng các nội dung về hình học tổ hợp được giới thiệu trong cuốn sách của cùng tác giả **Các bài toán Hình học tổ hợp dùng cho bậc Trung học cơ sở** sử dụng chung cho các lớp 7, 8, 9.

Thông qua các chuyên đề và bài tập vận dụng, cuốn sách cung cấp những kiến thức cần thiết về phương pháp giải toán, những kinh nghiệm cụ thể trong quá trình tìm tòi lời giải, do đó giúp học sinh rèn luyện các thao tác tư duy, phương pháp suy luận và khả năng sáng tạo.

Các lời giải trong sách được chọn lọc với các cách giải hợp lí, chặt chẽ, dễ hiểu, đảm bảo tính chính xác và tính sư phạm. Cuốn sách chú trọng nêu hướng suy nghĩ và đường lối giải, đồng thời vẫn đòi hỏi bạn đọc phải độc lập suy nghĩ trong giải toán.

Để thuận tiện cho bạn đọc, trong sách có một số kí hiệu, chẳng hạn 26(3) cho biết ví dụ hoặc bài tập 26 ứng với kiến thức của §3, và ~ để chỉ các bài tập tương ứng ở phần chuyên đề. Các ví dụ và bài tập, kể từ ví dụ 60 và bài tập 276 phần Đại số, ví dụ 31 và bài tập 171 phần Hình học thuộc cuốn **Nâng cao và phát triển Toán 8 tập hai**. Các bài khó dành cho học sinh giỏi được ghi dấu "*".

Tác giả hi vọng rằng cuốn sách là một tài liệu thiết thực và bổ ích để đào sâu chương trình môn Toán lớp 8 và chân thành cảm ơn bạn đọc về những ý kiến đóng góp cho cuốn sách này.

**Tác giả**
VŨ HỮU BÌNH

# PHẦN ĐẠI SỐ

*Chương I*

## PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA ĐA THỨC

### §1. NHÂN ĐA THỨC

**Ví dụ 1.** Tính giá trị của biểu thức

$$A = x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 17x + 20 \text{ tại } x = 16.$$

***Giải :*** *Cách 1*. Chú ý rằng $x = 16$ nên $x - 16 = 0$, do đó ta biến đổi để biểu thức A chứa nhiều biểu thức dạng $x - 16$.

$$A = x^4 - 16x^3 - x^3 + 16x^2 + x^2 - 16x - x + 16 + 4$$
$$= x^3(x - 16) - x^2(x - 16) + x(x - 16) - (x - 16) + 4 = 4.$$

*Cách 2*. Trong biểu thức A, ta thay các số 17 bởi $x + 1$, còn 20 thay bởi $x + 4$.

$$A = x^4 - x^3(x + 1) + x^2(x + 1) - x(x + 1) + x + 4$$
$$= x^4 - x^4 - x^3 + x^3 + x^2 - x^2 - x + x + 4 = 4.$$

**Ví dụ 2.** Tìm ba số tự nhiên liên tiếp, biết rằng nếu cộng ba tích của hai trong ba số ấy, ta được 242.

***Giải :*** Gọi $x - 1$, $x$, $x + 1$ là ba số tự nhiên liên tiếp. Ta có :

$$x(x - 1) + x(x + 1) + (x - 1)(x + 1) = 242.$$

Sau khi rút gọn ta được $3x^2 - 1 = 242$ nên $x^2 = 81$.

Do x là số tự nhiên nên $x = 9$. Ba số tự nhiên phải tìm là 8 ; 9 ; 10.

### Bài tập

#### Nhân đơn thức với đa thức

**1.** Thực hiện phép tính :

a) $3x^n(6x^{n-3} + 1) - 2x^n(9x^{n-3} - 1)$ ; b) $5^{n+1} - 4.5^n$ ;

c) $6^2.6^4 - 4^3(3^6 - 1)$.

**2.** Tìm x, biết :

a) $4(18 - 5x) - 12(3x - 7) = 15(2x - 16) - 6(x + 14)$ ;

b) $5(3x + 5) - 4(2x - 3) = 5x + 3(2x + 12) + 1$ ;

c) $2(5x - 8) - 3(4x - 5) = 4(3x - 4) + 11$ ;

d) $5x - 3\{4x - 2[4x - 3(5x - 2)]\} = 182$.

**3.** Tính giá trị của các biểu thức :

a) $A = x^3 - 30x^2 - 31x + 1$ tại $x = 31$ ;

b) $B = x^5 - 15x^4 + 16x^3 - 29x^2 + 13x$ tại $x = 14$ ;

c) $C = x^{14} - 10x^{13} + 10x^{12} - 10x^{11} + ... + 10x^2 - 10x + 10$ tại $x = 9$.

**4.** Tính giá trị của biểu thức sau bằng cách thay số bởi chữ một cách hợp lí :

$$A = 2\frac{1}{315} \cdot \frac{1}{651} - \frac{1}{105} \cdot 3\frac{650}{651} - \frac{4}{315.651} + \frac{4}{105}.$$

### Nhân đa thức với đa thức

**5.** Thực hiện phép tính :

a) $(x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ ;

b) $(x + 1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$.

**6.** Tìm x, biết :

a) $(x + 2)(x + 3) - (x - 2)(x + 5) = 6$ ;

b) $(3x + 2)(2x + 9) - (x + 2)(6x + 1) = (x + 1) - (x - 6)$ ;

c) $3(2x - 1)(3x - 1) - (2x - 3)(9x - 1) = 0$.

**7.** Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng $M = N = P$ với :

$M = a(a + b)(a + c)$ ; $N = b(b + c)(b + a)$ ; $P = c(c + a)(c + b)$.

**8.** Chứng minh các hằng đẳng thức :

a) $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ ;

b) $(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x + abc$.

**9.** Cho $a + b + c = 2p$. Chứng minh hằng đẳng thức :

$$2bc + b^2 + c^2 - a^2 = 4p(p - a).$$

**10.** Xét các ví dụ : 53 . 57 = 3021, 72 . 78 = 5616.

Hãy xây dựng quy tắc nhân nhẩm hai số có hai chữ số, trong đó các chữ số hàng chục bằng nhau, còn các chữ số hàng đơn vị có tổng bằng 10.

**11.** Cho biểu thức

$$M = (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) + x^2.$$

Tính M theo a, b, c, biết rằng $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$.

**12.** Cho dãy số 1, 3, 6, 10, 15, ..., $\frac{n(n+1)}{2}$, ...

Chứng minh rằng tổng hai số hạng liên tiếp của dãy bao giờ cũng là số chính phương.

**13.** Số a gồm 31 chữ số 1, số b gồm 38 chữ số 1. Chứng minh rằng ab – 2 chia hết cho 3.

**14*.** Số $3^{50} + 1$ có là tích của hai số tự nhiên liên tiếp không ?

**15*.** a) Thực hiện phép tính :

$$A = (2^9 + 2^7 + 1)(2^{23} - 2^{21} + 2^{19} - 2^{17} + 2^{14} - 2^{10} + 2^9 - 2^7 + 1).$$

b) Số $2^{32} + 1$ có là số nguyên tố không ?

~ **Ví dụ :** 42.

**Bài tập :** 225, 227, 228, 230 đến 233.

## §2. CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

Thực hiện phép nhân đa thức, ta được các hằng đẳng thức sau :

**1.** $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

**2.** $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

**3.** $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

**4.** $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.

**5.** $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$.

**6.** $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$.

**7.** $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$.

Ta cũng có :

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Tổng quát của các hằng đẳng thức 3 và 7, ta có hằng đẳng thức :

**8.** $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$

với mọi số nguyên dương n.

Tổng quát của hằng đẳng thức 6, ta có hằng đẳng thức :

**9.** $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... - ab^{n-2} + b^{n-1})$

với mọi số lẻ n.

Tổng quát của các hằng đẳng thức 1, 2, 4, 5, ta có công thức Niu-tơn (xem chuyên đề *Tính chia hết đối với số nguyên*).

**Ví dụ 3.** Chứng minh rằng số 3599 viết được dưới dạng tích của hai số tự nhiên khác 1.

***Giải :*** $3599 = 3600 - 1 = 60^2 - 1 = (60 + 1)(60 - 1) = 61 . 59.$

**Ví dụ 4.** Chứng minh rằng biểu thức sau viết được dưới dạng tổng các bình phương của hai biểu thức :

$$x^2 + 2(x + 1)^2 + 3(x + 2)^2 + 4(x + 3)^2.$$

***Giải :*** $x^2 + 2(x + 1)^2 + 3(x + 2)^2 + 4(x + 3)^2 =$

$= x^2 + 2(x^2 + 2x + 1) + 3(x^2 + 4x + 4) + 4(x^2 + 6x + 9)$

$= x^2 + 2x^2 + 4x + 2 + 3x^2 + 12x + 12 + 4x^2 + 24x + 36$

$= 10x^2 + 40x + 50$

$= (x^2 + 10x + 25) + (9x^2 + 30x + 25)$

$= (x + 5)^2 + (3x + 5)^2.$

**Ví dụ 5.** Cho $x + y + z = 0,$

$xy + yz + zx = 0.$

Chứng minh rằng $x = y = z$.

*Giải :* Ta có $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$.

Suy ra $\quad 0 = x^2 + y^2 + z^2 + 2.0$

hay $\quad 0 = x^2 + y^2 + z^2$.

Vậy $x = y = z$ $(= 0)$.

**Ví dụ 6**

a) Tính $A = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - ... - 99^2 + 100^2$.

b) Tính $A = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - ... + (-1)^n.\, n^2$.

***Giải :*** a) $A = (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + ... + (100^2 - 99^2)$

$$= (2 - 1)(1 + 2) + (4 - 3)(3 + 4) + ... + (100 - 99)(99 + 100)$$

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 99 + 100$$

$$= \frac{100.101}{2} = 5050.$$

b) Xét hai trường hợp :

Nếu n chẵn thì $A = (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + ... + [n^2 - (n - 1)^2]$

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + ... + (n - 1) + n$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}.$$

Nếu n lẻ thì $A = (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + ... + [(n - 1)^2 - (n - 2)^2] - n^2$

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + ... + (n - 1) - n^2$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} - n^2 = -\frac{n(n+1)}{2}.$$

*Chú ý :* Hai kết quả trên có thể viết chung trong một công thức

$$(-1)^n.\frac{n(n+1)}{2}.$$

**Ví dụ 7.** Cho

$$x + y = a + b, \qquad (1)$$

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2. \qquad (2)$$

Chứng minh rằng $x^3 + y^3 = a^3 + b^3$.

*Giải :* Ta có : $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$. (3)

Từ (1) suy ra : $(x + y)^2 = (a + b)^2$,

tức là $x^2 + 2xy + y^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Do $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ nên $2xy = 2ab$, suy ra $xy = ab$. (4)

Thay các kết quả (1), (2), (4) vào (3), ta được

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + y^2 - xy) = (a + b)(a^2 + b^2 - ab) = a^3 + b^3.$$

**Ví dụ 8.** Cho $a + b = m$, $a - b = n$. Tính $ab$ và $a^3 - b^3$ theo m và n.

***Giải :***

*Cách 1*. Từ $a + b = m$, $a - b = n$, ta tính được $b = \dfrac{m-n}{2}$, $a = \dfrac{m+n}{2}$.

Do đó $$ab = \frac{m+n}{2} \cdot \frac{m-n}{2} = \frac{m^2 - n^2}{4};$$

$$a^3 - b^3 = \left(\frac{m+n}{2}\right)^3 - \left(\frac{m-n}{2}\right)^3 = \frac{(m+n)^3 - (m-n)^3}{8}.$$

Rút gọn biểu thức trên, ta được $\dfrac{3m^2n + n^3}{4}$.

*Cách 2*. Ta có

$$4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2 = m^2 - n^2 \text{ nên } ab = \frac{m^2 - n^2}{4}.$$

Ta có $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b)[(a + b)^2 - ab]$

$$= n\left(m^2 - \frac{m^2 - n^2}{4}\right) = \frac{n(3m^2 + n^2)}{4} = \frac{3m^2n + n^3}{4}.$$

## Bài tập

**16.** Tính giá trị của các biểu thức :

a) $\dfrac{63^2 - 47^2}{215^2 - 105^2}$ ; b) $\dfrac{437^2 - 363^2}{537^2 - 463^2}$.

**17.** So sánh $A = 26^2 - 24^2$ và $B = 27^2 - 25^2$.

**18.** Tìm x, biết :

$$4(x+1)^2 + (2x-1)^2 - 8(x-1)(x+1) = 11.$$

**19.** Rút gọn các biểu thức :

a) $2x(2x-1)^2 - 3x(x+3)(x-3) - 4x(x+1)^2$ ;

b) $(a-b+c)^2 - (b-c)^2 + 2ab - 2ac$ ;

c) $(3x+1)^2 - 2(3x+1)(3x+5) + (3x+5)^2$ ;

d) $(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)$ ;

e) $(a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 - 2(b-c)^2$ ;

g) $(a+b+c)^2 + (a-b-c)^2 + (b-c-a)^2 + (c-a-b)^2$ ;

h) $(a+b+c+d)^2 + (a+b-c-d)^2 + (a+c-b-d)^2 + (a+d-b-c)^2$.

**20.** Cho $x + y = 3$. Tính giá trị của biểu thức

$$A = x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y + 1.$$

**21.** Cho $a^2 + b^2 + c^2 = m$. Tính giá trị của biểu thức sau theo m :

$$A = (2a+2b-c)^2 + (2b+2c-a)^2 + (2c+2a-b)^2.$$

**22.** Hãy viết các số sau đây dưới dạng tích của hai số tự nhiên khác 1 :

a) 899 ; b) 9991.

**23.** Chứng minh rằng hiệu sau đây là một số gồm toàn các chữ số như nhau :

$$7778^2 - 2223^2.$$

**24.** Chứng minh các hằng đẳng thức :

a) $(a+b+c)^2 + a^2 + b^2 + c^2 = (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2$;

b) $x^4 + y^4 + (x+y)^4 = 2(x^2+xy+y^2)^2$.

**25.** Cho $a^2 - b^2 = 4c^2$. Chứng minh hằng đẳng thức

$$(5a-3b+8c)(5a-3b-8c) = (3a-5b)^2.$$

**26.** Chứng minh rằng nếu $(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2$ với x, y khác 0 thì $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

**27.** Chứng minh rằng nếu $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2$ với x, y, z khác 0 thì $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

**28.** Cho $(a + b)^2 = 2(a^2 + b^2)$. Chứng minh rằng $a = b$.

**29.** Chứng minh rằng $a = b = c$ nếu có một trong các điều kiện sau :

a) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ ; b) $(a + b + c)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$ ;

c) $(a + b + c)^2 = 3(ab + bc + ca)$.

**30.** Hãy viết các biểu thức sau dưới dạng tổng của ba bình phương :

a) $(a + b + c)^2 + a^2 + b^2 + c^2$ ;

b) $2(a - b)(c - b) + 2(b - a)(c - a) + 2(b - c)(a - c)$.

**31.** Tính giá trị của biểu thức $a^4 + b^4 + c^4$, biết rằng $a + b + c = 0$ và :

a) $a^2 + b^2 + c^2 = 2$ ; b) $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

**32.** Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh $a^4 + b^4 + c^4$ bằng mỗi biểu thức :

a) $2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$ ; b) $2(ab + bc + ca)^2$ ;

c) $\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2}$.

**33.** Chứng minh rằng các biểu thức sau luôn luôn có giá trị dương với mọi giá trị của biến :

a) $9x^2 - 6x + 2$ ; b) $x^2 + x + 1$ ; c) $2x^2 + 2x + 1$.

**34.** Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức :

a) $A = x^2 - 3x + 5$ ; b) $B = (2x - 1)^2 + (x + 2)^2$.

**35.** Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức :

a) $A = 4 - x^2 + 2x$ ; b) $B = 4x - x^2$.

**36.** Chứng minh rằng :

a) Nếu p và $p^2 + 8$ là các số nguyên tố thì $p^2 + 2$ cũng là số nguyên tố.

b) Nếu p và $8p^2 + 1$ là các số nguyên tố thì $2p + 1$ cũng là số nguyên tố.

**37.** Chứng minh rằng các số sau là hợp số :

a) 999 991 ; b) 1 000 027.

**38.** Thực hiện phép tính :

a) $(x-2)^3 - x(x+1)(x-1) + 6x(x-3)$ ;

b) $(x-2)(x^2-2x+4)(x+2)(x^2+2x+4)$.

**39.** Tìm x, biết :

a) $(x-3)(x^2+3x+9) + x(x+2)(2-x) = 1$ ;

b) $(x+1)^3 - (x-1)^3 - 6(x-1)^2 = -10$.

**40.** Rút gọn các biểu thức :

a) $(a+b+c)^3 - (b+c-a)^3 - (a+c-b)^3 - (a+b-c)^3$ ;

b) $(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a)$.

**41.** Chứng minh các hằng đẳng thức :

a) $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(b+c)(c+a)$.

b) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

**42.** Cho $a+b+c=0$. Chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3 = 3abc$.

**43.** Cho $x+y=a$ và $xy=b$. Tính giá trị của các biểu thức sau theo a và b :

a) $x^2+y^2$ ; b) $x^3+y^3$ ; c) $x^4+y^4$ ; d) $x^5+y^5$.

**44.** a) Cho $x+y=1$. Tính giá trị của biểu thức $x^3+y^3+3xy$.

b) Cho $x-y=1$. Tính giá trị của biểu thức $x^3-y^3-3xy$.

**45.** Cho $a+b=1$. Tính giá trị của biểu thức

$$M = a^3 + b^3 + 3ab(a^2+b^2) + 6a^2b^2(a+b).$$

**46.** a) Cho $x+y=2$ và $x^2+y^2=10$. Tính giá trị của biểu thức $x^3+y^3$.

b) Cho $x+y=a$ và $x^2+y^2=b$. Tính $x^3+y^3$ theo a và b.

**47.** Chứng minh rằng :

a) Nếu số n là tổng của hai số chính phương thì 2n cũng là tổng của hai số chính phương.

b) Nếu số 2n là tổng của hai số chính phương thì n cũng là tổng của hai số chính phương.

c) Nếu số n là tổng của hai số chính phương thì $n^2$ cũng là tổng của hai số chính phương.

d) Nếu mỗi số m và n đều là tổng của hai số chính phương thì tích mn cũng là tổng của hai số chính phương.

**48.** Mỗi số sau là bình phương của số tự nhiên nào ?

a) $A = \underbrace{99...9}_{n}\underbrace{00...0}_{n}25$ ;  b) $B = \underbrace{99...9}_{n}8\underbrace{00...0}_{n}1$ ;

c) $C = \underbrace{44...4}_{n}\underbrace{88...8}_{n-1}9$ ;  d) $D = \underbrace{11...1}_{n}\underbrace{22...2}_{n+1}5$.

**49.** Chứng minh rằng các biểu thức sau là số chính phương :

a) $A = \underbrace{11...1}_{2n} - \underbrace{22...2}_{n}$ ;  b) $B = \underbrace{11...1}_{2n} + \underbrace{44...4}_{n} + 1$.

**50.** a) Cho $a = \underbrace{11...1}_{n}$, $b = 1\underbrace{00...0}_{n-1}5$. Chứng minh rằng ab + 1 là số chính phương.

b) Cho một dãy số có số hạng đầu là 16, các số hạng sau là số tạo thành bằng cách viết chèn số 15 vào chính giữa số hạng liền trước :

16, 1156, 111556, ...

Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy đều là số chính phương.

**51.** Chứng minh rằng ab + 1 là số chính phương với $a = \underbrace{11...1}_{n}2$, $b = \underbrace{11...1}_{n}4$.

**52.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên a, tồn tại số tự nhiên b sao cho ab + 4 là số chính phương.

**53.** Cho a là số gồm 2n chữ số 1, b là số gồm n + 1 chữ số 1, c là số gồm n chữ số 6. Chứng minh rằng a + b + c + 8 là số chính phương.

**54.** Chứng minh rằng biểu thức sau không là lập phương của một số tự nhiên :

$$10^{150} + 5.10^{50} + 1.$$

**55.** Chứng minh rằng tích ba số nguyên dương liên tiếp không là lập phương của một số tự nhiên.

**56.** Chứng minh rằng số $A = \frac{1}{3}(\underbrace{11...1}_{n} - \underbrace{33...3}_{n}\underbrace{00...0}_{n})$ là lập phương của một số tự nhiên.

**57.** Chia 27 quả cân có khối lượng 10, 20, 30, ..., 270 gam thành ba nhóm có khối lượng bằng nhau.

**58*.** Chia 18 quả cân có khối lượng $1^2, 2^2, 3^2, ..., 18^2$ gam thành ba nhóm có khối lượng bằng nhau.

**59*.** Chia 27 quả cân có khối lượng $1^2, 2^2, 3^2, ..., 27^2$ gam thành ba nhóm có khối lượng bằng nhau.

~ **Ví dụ :** 40, 41, 43 đến 45, 47 đến 49.

**Bài tập :** 192 đến 194, 196, 202, 205, 208 đến 214, 216, 218 đến 221, 229, 234 đến 258.

## §3. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

Để phân tích một đa thức thành nhân tử, ta thường dùng các phương pháp :

– Đặt nhân tử chung.

– Dùng các hằng đẳng thức đáng nhớ.

– Nhóm các hạng tử một cách thích hợp nhằm làm xuất hiện dạng hằng đẳng thức hoặc xuất hiện nhân tử chung mới.

Để phân tích đa thức thành nhân tử, người ta còn dùng các phương pháp khác. Xem chuyên đề *Một số phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử.*

**Ví dụ 9.** Phân tích đa thức sau thành nhân tử :

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1.$$

***Giải :*** $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) + (x^3 + x)$

$$= (x^2 + 1)^2 + x(x^2 + 1) = (x^2 + 1)(x^2 + x + 1).$$

**Ví dụ 10.** Cho a + b + c = 0. Rút gọn biểu thức

$$M = a^3 + b^3 + c(a^2 + b^2) - abc.$$

***Giải :*** $M = a^3 + b^3 + a^2c + b^2c - abc = (a^3 + a^2c) + (b^3 + b^2c) - abc$

$$= a^2(a + c) + b^2(b + c) - abc = a^2(-b) + b^2(-a) - abc$$

$$= -ab(a + b + c) = 0.$$

**Ví dụ 11**

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

b) Phân tích đa thức sau thành nhân tử bằng cách áp dụng câu a) :

$$(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3.$$

***Giải :*** a) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 + c^3 - 3abc$

$= [(a + b)^3 + c^3] - 3ab(a + b + c)$

$= (a + b + c)[(a + b)^2 - c(a + b) + c^2] - 3ab(a + b + c)$

$= (a + b + c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab)$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.

b) Đặt $x - y = a$, $y - z = b$, $z - x = c$ thì $a + b + c = 0$.

Do đó theo câu a) ta có $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

$$\Rightarrow (x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 3(x - y)(y - z)(z - x).$$

Cần nhớ kết quả của câu a) để vận dụng vào giải toán.

**Ví dụ 12.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$ ;

b) $8(x + y + z)^3 - (x + y)^3 - (y + z)^3 - (z + x)^3$.

***Giải :*** a) Áp dụng nhiều lần công thức $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$, ta có :

$(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = [(a + b) + c]^3 - a^3 - b^3 - c^3$

$= (a + b)^3 + c^3 + 3c(a + b)(a + b + c) - a^3 - b^3 - c^3$

$= a^3 + b^3 + 3ab(a + b) + c^3 + 3c(a + b)(a + b + c) - a^3 - b^3 - c^3$

$= 3(a + b)(ab + ac + bc + c^2)$

$= 3(a + b)[a(b + c) + c(b + c)]$

$= 3(a + b)(b + c)(c + a)$.

b) Đặt $x + y = a$, $y + z = b$, $z + x = c$ thì $a + b + c = 2(x + y + z)$. Đa thức đã cho có dạng $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$.

Áp dụng kết quả của câu a), đa thức đã cho bằng :

$$3(a + b)(b + c)(c + a) = 3(x + 2y + z)(y + 2z + x)(z + 2x + y).$$

*Chú ý :* Cần nhớ kết quả của câu a) để vận dụng vào giải toán.

**Ví dụ 13.** Phân tích đa thức sau thành nhân tử :

$$P = x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y).$$

***Giải :*** *Cách 1.* Khai triển hai hạng tử cuối rồi nhóm các hạng tử làm xuất hiện nhân tử chung $y - z$.

$$P = x^2(y - z) + y^2z - xy^2 + xz^2 - yz^2$$
$$= x^2(y - z) + yz(y - z) - x(y^2 - z^2)$$
$$= (y - z)(x^2 + yz - xy - xz)$$
$$= (y - z)[x(x - y) - z(x - y)]$$
$$= (y - z)(x - y)(x - z).$$

*Cách 2.* Tách $z - x$ thành $-[(y - z) + (x - y)]$, ta có

$$P = x^2(y - z) - y^2[(y - z) + (x - y)] + z^2(x - y)$$
$$= (y - z)(x^2 - y^2) - (x - y)(y^2 - z^2)$$
$$= (y - z)(x + y)(x - y) - (x - y)(y + z)(y - z)$$
$$= (y - z)(x - y)(x + y - y - z)$$
$$= (y - z)(x - y)(x - z).$$

*Cách 3.* Xem ví dụ 37.

**Ví dụ 14.** Xét hằng đẳng thức $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

Lần lượt cho x bằng 1, 2, 3, ... , n rồi cộng từng vế n đẳng thức trên để tính giá trị của biểu thức :

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2.$$

***Giải :*** Từ hằng đẳng thức đã cho ta có :

$$2^3 = 1^3 + 3.1^2 + 3.1 + 1$$
$$3^3 = 2^3 + 3 . 2^2 + 3 . 2 + 1$$
$$...$$
$$(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1.$$

Cộng từng vế n đẳng thức trên rồi rút gọn, ta được

$$(n + 1)^3 = 1^3 + 3(1^2 + 2^2 + ... + n^2) + 3(1 + 2 + ... + n) + n.$$

Do đó

$$3(1^2 + 2^2 + ... + n^2) = (n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - (n+1) =$$

$$= (n+1)\left[(n+1)^2 - \frac{3n}{2} - 1\right] = (n+1)\left(n^2 + \frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1).$$

Vậy $S = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

## Bài tập

**60.** Phân tích thành nhân tử :

a) $(ab-1)^2 + (a+b)^2$;

b) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ ;

c) $x^3 - 4x^2 + 12x - 27$ ;

d) $x^4 - 2x^3 + 2x - 1$ ;

e) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.

**61.** Phân tích thành nhân tử :

a) $x^2 - 2x - 4y^2 - 4y$ ;

b) $x^4 + 2x^3 - 4x - 4$ ;

c) $x^2(1-x^2) - 4 - 4x^2$ ;

d) $(1+2x)(1-2x) - x(x+2)(x-2)$ ;

e) $x^2 + y^2 - x^2y^2 + xy - x - y$.

**62.** Chứng minh rằng $199^3 - 199$ chia hết cho 200.

**63.** Tính giá trị của biểu thức sau, biết $x^3 - x = 6$ :

$$A = x^6 - 2x^4 + x^3 + x^2 - x.$$

**64.** Phân tích thành nhân tử :

a) $a(b^2 + c^2 + bc) + b(c^2 + a^2 + ac) + c(a^2 + b^2 + ab)$ ;

b) $(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$ ;

c*) $a(a+2b)^3 - b(2a+b)^3$.

**65.** Phân tích thành nhân tử :

a) $ab(a+b) - bc(b+c) + ac(a-c)$ ;

b) $a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) + 2abc$ ;

c) $(a + b)(a^2 - b^2) + (b + c)(b^2 - c^2) + (c + a)(c^2 - a^2)$ ;

d) $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$ ;

e) $a^3(c - b^2) + b^3(a - c^2) + c^3(b - a^2) + abc(abc - 1)$.

**66*.** Phân tích thành nhân tử :

a) $a(b + c)^2 (b - c) + b(c + a)^2 (c - a) + c(a + b)^2 (a - b)$ ;

b) $a(b - c)^3 + b(c - a)^3 + c(a - b)^3$ ;

c) $a^2b^2(a - b) + b^2c^2(b - c) + c^2a^2(c - a)$ ;

d) $a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) - 2abc - a^3 - b^3 - c^3$ ;

e) $a^4(b - c) + b^4(c - a) + c^4(a - b)$.

**67.** Phân tích thành nhân tử :

a) $(a + b + c)^3 - (a + b - c)^3 - (b + c - a)^3 - (c + a - b)^3$.

b) $abc - (ab + bc + ca) + (a + b + c) - 1$.

**68.** Chứng minh rằng trong ba số a, b, c, tồn tại hai số bằng nhau, nếu :

$$a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) = 0.$$

**69.** Chứng minh rằng nếu $a^2 + b^2 = 2ab$ thì $a = b$.

**70*.** Chứng minh rằng nếu $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và a, b, c là các số dương thì $a = b = c$.

**71*.** Chứng minh rằng nếu $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcd$ và a, b, c, d là các số dương thì $a = b = c = d$.

**72.** Chứng minh rằng nếu $m = a + b + c$ thì

$$(am + bc)(bm + ac)(cm + ab) = (a + b)^2 (b + c)^2 (c + a)^2.$$

**73.** Cho $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$, $ac + bd = 0$. Chứng minh rằng $ab + cd = 0$.

**74.** Xét hằng đẳng thức $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

Lần lượt cho x bằng 1, 2, 3,..., n rồi cộng từng vế n đẳng thức trên để tính giá trị của biểu thức $S_1 = 1 + 2 + 3 + ... + n$.

**75*.** Bằng phương pháp tương tự như ở ví dụ 14 và bài tập 74, tính giá trị của biểu thức $S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$.

~ **Ví dụ :** 26 đến 39.

**Bài tập :** 166 đến 191, 195, 197 đến 201, 203, 204, 206, 207, 215, 217, 222 đến 224, 226.

## §4. CHIA ĐA THỨC

Đa thức $A(x)$ gọi là chia hết cho đa thức $B(x)$ khác 0 nếu tồn tại đa thức $Q(x)$ sao cho $A(x) = B(x).\ Q(x)$.

Người ta chứng minh được rằng : Với mọi cặp đa thức $A(x)$ và $B(x)$ trong đó $B(x) \neq 0$, tồn tại duy nhất cặp đa thức $Q(x)$ và $R(x)$ sao cho $A(x) = B(x).Q(x) + R(x)$, trong đó $R(x) = 0$ hoặc bậc của $R(x)$ nhỏ hơn bậc của $B(x)$.

Nếu $R(x) = 0$ thì $A(x)$ chia hết cho $B(x)$. Nếu $R(x) \neq 0$ thì $A(x)$ không chia hết cho $B(x)$, khi đó $Q(x)$ là thương và $R(x)$ là dư của phép chia $A(x)$ cho $B(x)$.

**Ví dụ 15.** Tìm số tự nhiên n để đa thức A chia hết cho đơn thức B :

$$A = 3x^{n-1}y^6 - 5x^{n+1}y^4\ ;\ \ B = 2x^3y^n.$$

Tìm thương A : B trong trường hợp đó.

***Giải :*** Điều kiện để A chia hết cho B là :

$$\begin{cases} n-1 \geq 3 \\ n+1 \geq 3 \\ 6 \geq n \\ 4 \geq n \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} n \geq 4 \\ n \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow n = 4.$$

Vậy với n = 4 thì đa thức A chia hết cho đơn thức B. Khi đó

$$A : B = (3x^3y^6 - 5x^5y^4) : (2x^3y^4) = \frac{3}{2}y^2 - \frac{5}{2}x^2.$$

**Ví dụ 16.** Xác định các số hữu tỉ a và b để đa thức $x^3 + ax + b$ chia hết cho đa thức $x^2 + x - 2$.

***Giải :*** *Cách 1*. Đặt tính chia :

$$\begin{array}{rl|l} & x^3 \qquad\qquad + \ ax + b & \ x^2 + x - 2 \\ - & x^3 + x^2 \qquad - \ 2x & \overline{\ x - 1 \qquad} \\ \hline & \quad -x^2 + (a+2)x + b & \\ - & \quad -x^2 - \qquad\quad x + 2 & \\ \hline & \qquad (a+3)x + (b-2) & \end{array}$$

Để chia hết thì đa thức dư phải bằng 0 với mọi giá trị của x, nên :

$$\begin{cases} a + 3 = 0 \\ b - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2. \end{cases}$$

Vậy với a = −3 ; b = 2 thì $x^3 + ax + b$ chia hết cho $x^2 + x - 2$.

*Cách 2.* (Phương pháp hệ số bất định)

Đa thức bị chia có bậc ba, đa thức chia có bậc hai nên thương là một nhị thức bậc nhất, hạng tử bậc nhất là $x^3 : x^2 = x$.

Gọi thương là x + c, ta có :

$$x^3 + ax + b = (x^2 + x - 2)(x + c)$$

nên
$$x^3 + ax + b = x^3 + (c + 1)x^2 + (c - 2)x - 2c.$$

Hai đa thức trên bằng nhau nên :

$$\begin{cases} c + 1 = 0 \\ c - 2 = a \\ -2c = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ a = -3 \\ b = 2. \end{cases}$$

Vậy với a = −3 ; b = 2 thì $x^3 + ax + b$ chia hết cho $x^2 + x - 2$, thương là x − 1.

*Cách 3.* (Phương pháp xét giá trị riêng)

Gọi thương khi chia $x^3 + ax + b$ cho $x^2 + x - 2$ là Q(x), ta có :

$$x^3 + ax + b = (x - 1)(x + 2)\,Q(x).$$

Vì đẳng thức đúng với mọi x nên lần lượt cho x = 1, x = −2, ta được :

$$\begin{cases} 1 + a + b = 0 \\ -8 - 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ -2a + b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2. \end{cases}$$

Với a = −3 ; b = 2 thì $x^3 + ax + b$ chia hết cho $x^2 + x - 2$.

## Bài tập

### Chia đơn thức cho đơn thức

**76.** Thực hiện phép tính :

a) $8^{12} : 4^6$ ; b) $27^6 : 9^2$ ; c) $\dfrac{9^{15}.25^3.4^3}{3^{10}.50^6}$.

**77.** Chứng minh rằng biểu thức sau không âm với mọi giá trị của biến :

$$A = (-15x^3y^6) : (-5xy^2).$$

**78.** Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến y ($x \neq 0$ ; $y \neq 0$) :

$$B = \frac{2}{3}x^2y^3 : \left(-\frac{1}{3}xy\right) + 2x(y-1)(y+1).$$

**79.** Tìm số tự nhiên n để đơn thức A chia hết cho đơn thức B :

$$A = 4x^{n+1}y^2 \ ; \ B = 3x^3y^{n-1}.$$

### Chia đa thức cho đơn thức

**80.** Thực hiện phép tính :

a) $\left(\frac{1}{2}a^2x^4 + \frac{4}{3}ax^3 - \frac{2}{3}ax^2\right) : \left(-\frac{2}{3}ax^2\right)$ ;

b) $4\left(\frac{3}{4}x - 1\right) + (12x^2 - 3x) : (-3x) - (2x + 1).$

**81.** Thực hiện phép tính rồi tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$A = (9xy^2 - 6x^2y) : (-3xy) + (6x^2y + 2x^4) : (2x^2).$$

**82.** Tìm số tự nhiên n để đa thức A chia hết cho đơn thức B :

$$A = 7x^{n-1}y^5 - 5x^3y^4 \ ; \qquad B = 5x^2y^n.$$

### Chia đa thức cho đa thức

**83.** Rút gọn biểu thức

$$[(x^3 + y^3) - 2(x^2 - y^2) + 3(x+y)^2] : (x + y).$$

**84.** Chia các đa thức :

a) $(3x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 4x - 8) : (x^2 - 2)$ ;

b) $(2x^3 - 26x - 24) : (x^2 + 4x + 3)$ ;

c) $(x^3 - 7x + 6) : (x + 3).$

**85.** Xác định hằng số a sao cho :

a) $4x^2 - 6x + a$ chia hết cho $x - 3$ ;

b) $2x^2 + x + a$ chia hết cho $x + 3$ ;

c) $x^3 + ax^2 - 4$ chia hết cho $x^2 + 4x + 4$.

**86.** Xác định hằng số a sao cho :

a) $10x^2 - 7x + a$ chia hết cho $2x - 3$ ;

b) $2x^2 + ax + 1$ chia cho $x - 3$ dư 4 ;

c) $ax^5 + 5x^4 - 9$ chia hết cho $x - 1$.

**87.** Xác định các hằng số a và b sao cho :

a) $x^4 + ax + b$ chia hết cho $x^2 - 4$ ;

b) $x^4 + ax^3 + bx - 1$ chia hết cho $x^2 - 1$ ;

c) $x^3 + ax + b$ chia hết cho $x^2 + 2x - 2$.

**88.** Xác định các hằng số a và b sao cho :

a) $x^4 + ax^2 + b$ chia hết cho $x^2 - x + 1$ ;

b) $ax^3 + bx^2 + 5x - 50$ chia hết cho $x^2 + 3x - 10$ ;

c) $ax^4 + bx^3 + 1$ chia hết cho $(x - 1)^2$ ;

d) $x^4 + 4$ chia hết cho $x^2 + ax + b$.

**89.** Tìm các hằng số a và b sao cho $x^3 + ax + b$ chia cho $x + 1$ thì dư 7, chia cho $x - 3$ thì dư $-5$.

**90.** Tìm các hằng số a, b, c sao cho $ax^3 + bx^2 + c$ chia hết cho $x + 2$, chia cho $x^2 - 1$ thì dư $x + 5$.

~ **Ví dụ :** 46, 50 đến 59.

**Bài tập :** 259 đến 275.

# *Chương II*

# PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

## §5. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN THỨC. RÚT GỌN PHÂN THỨC

*Phân thức đại số* là một biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, trong đó A và B là các đa thức, $B \neq 0$.

Phân thức đại số có các tính chất cơ bản sau :

– Nếu nhân cả tử thức và mẫu thức của một phân thức với cùng một đa thức khác 0 thì được một phân thức bằng phân thức đã cho.

– Nếu chia cả tử thức và mẫu thức của một phân thức cho cùng một nhân tử chung của chúng thì được một phân thức bằng phân thức đã cho.

Muốn rút gọn một phân thức đại số, ta có thể :

– Phân tích tử thức và mẫu thức thành nhân tử ;

– Chia cả tử thức và mẫu thức cho nhân tử chung.

**Ví dụ 17.** Cho phân thức

$$M = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c)^2 + (ab + bc + ca)^2}{(a + b + c)^2 - (ab + bc + ca)}$$

a) Tìm các giá trị của a, b, c để phân thức được xác định (tức là để mẫu khác 0).

b) Rút gọn phân thức M.

***Giải :*** Ta có

$$(a + b + c)^2 - (ab + bc + ca) = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca = 0$$

$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 0$

$\Leftrightarrow (a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2 = 0 \Leftrightarrow a + b = b + c = c + a = 0$

$\Leftrightarrow a = b = c = 0.$

Vậy điều kiện để phân thức M được xác định là a, b, c không đồng thời bằng 0.

b) Chú ý rằng $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$. Do đó, ta đặt $a^2 + b^2 + c^2 = x$, $ab + bc + ca = y$. Khi đó $(a + b + c)^2 = x + 2y$. Ta có

$$M = \frac{x(x + 2y) + y^2}{x + 2y - y} = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x + y} = \frac{(x + y)^2}{x + y} = x + y$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca.$$

**Ví dụ 18.** Rút gọn phân thức

$$A = \frac{(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3}{a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)}.$$

***Giải :*** Phân tích mẫu thức thành nhân tử :

$$a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) = a^2(b - c) + b^2c - ab^2 + ac^2 - bc^2$$

$$= a^2(b - c) + bc(b - c) - a(b^2 - c^2) = (b - c)(a^2 + bc - ab - ac)$$

$$= (b - c)\,[a(a - b) - c(a - b)] = (b - c)(a - b)(a - c).$$

Do đó $$A = \frac{(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3}{-(a - b)(b - c)(c - a)}.$$

Ta có nhận xét : Nếu $x + y + z = 0$ thì $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ (chứng minh : xem bài tập 42). Đặt $b - c = x$, $c - a = y$, $a - b = z$ thì $x + y + z = 0$. Theo nhận xét trên :

$$A = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{-xyz} = \frac{3xyz}{-xyz} = -3.$$

**Ví dụ 19.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì phân số $\dfrac{n^3 + 2n}{n^4 + 3n^2 + 1}$ là phân số tối giản.

***Giải :*** Để chứng minh phân số đã cho là tối giản, ta sẽ chứng tỏ rằng tử và mẫu chỉ có ước chung là $\pm 1$.

Gọi d là ước chung của $n^3 + 2n$ và $n^4 + 3n^2 + 1$. Ta có :

$$n^3 + 2n \,\vdots\, d \Rightarrow n(n^3 + 2n) \,\vdots\, d \Rightarrow n^4 + 2n^2 \,\vdots\, d, \qquad (1)$$

$$n^4 + 3n^2 + 1 - (n^4 + 2n^2) = n^2 + 1 \,\vdots\, d \Rightarrow (n^2 + 1)^2 = n^4 + 2n^2 + 1 \,\vdots\, d. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$(n^4 + 2n^2 + 1) - (n^4 + 2n^2) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = \pm 1.$$

Vậy $\dfrac{n^3 + 2n}{n^4 + 3n^2 + 1}$ là phân số tối giản.

**Ví dụ 20.** Chứng minh rằng

$1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{31} = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)(1 + x^{16})$. (1)

***Giải :*** Gọi vế trái của đẳng thức (1) là A, vế phải là B.

Ta có $(1 - x).A = 1 - x^{32}$ theo hằng đẳng thức 8,

$(1 - x).B = (1 - x)(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)(1 + x^{16}) = 1 - x^{32}$.

Nếu $x \neq 1$ thì A và B đều bằng phân thức $\dfrac{1 - x^{32}}{1 - x}$. Do đó A = B.

Nếu x = 1 thì hai vế của (1) đều bằng 32. Do đó A = B.

Trong cả hai trường hợp, đẳng thức (1) đều đúng.

## Bài tập

**91.** Tìm giá trị của x để các phân thức sau bằng 0 :

a) $\dfrac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1}$ ; b) $\dfrac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 10x^2 + 9}$.

**92.** Rút gọn các phân thức :

a) $A = \dfrac{1235.2469 - 1234}{1234.2469 + 1235}$ ; b) $B = \dfrac{4002}{1000.1002 - 999.1001}$.

**93.** Rút gọn các phân thức :

a) $\dfrac{3x^3 - 7x^2 + 5x - 1}{2x^3 - x^2 - 4x + 3}$ ; b) $\dfrac{(x - y)^3 - 3xy(x + y) + y^3}{x - 6y}$ ;

c) $\dfrac{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz}{x^2 - 2xy + y^2 - z^2}$.

**94.** Rút gọn các phân thức với n là số tự nhiên :

a) $\dfrac{(n + 1)!}{n!(n + 2)}$ ; b) $\dfrac{n!}{(n + 1)! - n!}$ ; c) $\dfrac{(n + 1)! - (n + 2)!}{(n + 1)! + (n + 2)!}$.

**95.** Rút gọn các phân thức :

a) $\dfrac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{ab^2-ac^2-b^3+bc^2}$ ; b) $\dfrac{2x^3-7x^2-12x+45}{3x^3-19x^2+33x-9}$ ;

c) $\dfrac{x^3-y^3+z^3+3xyz}{(x+y)^2+(y+z)^2+(z-x)^2}$ ; d) $\dfrac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}$.

**96.** Chứng minh rằng các phân số sau tối giản với mọi số tự nhiên n :

a) $\dfrac{3n+1}{5n+2}$ ; b) $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ ; c*) $\dfrac{n^3+2n}{n^4+3n^2+1}$ ; d) $\dfrac{2n+1}{2n^2-1}$.

**97.** Chứng minh rằng phân số $\dfrac{n^7+n^2+1}{n^8+n+1}$ không tối giản với mọi số nguyên dương n.

**98.** Viết gọn biểu thức sau dưới dạng một phân thức :

$$(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)(x^{16}-x^8+1)(x^{32}-x^{16}+1).$$

**99.** Cho biết x, y, z khác 0 và $\dfrac{(ax+by+cz)^2}{x^2+y^2+z^2}=a^2+b^2+c^2$.

Chứng minh rằng $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}$.

**100*.** Cho biết $ax+by+cz=0$.

Rút gọn $A=\dfrac{bc(y-z)^2+ca(z-x)^2+ab(x-y)^2}{ax^2+by^2+cz^2}$.

**101.** Rút gọn $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}$, biết rằng $x+y+z=0$.

**102.** Tính giá trị của biểu thức $A=\dfrac{x-y}{x+y}$, biết $x^2-2y^2=xy$ ($y\neq 0$ ; $x+y\neq 0$).

**103.** Tính giá trị của phân thức $A=\dfrac{3x-2y}{3x+2y}$, biết rằng $9x^2+4y^2=20xy$ và $2y<3x<0$.

**104.** Cho $3x - y = 3z$ và $2x + y = 7z$. Tính giá trị của biểu thức

$$M = \frac{x^2 - 2xy}{x^2 + y^2} \ (x \neq 0, y \neq 0).$$

**105.** Tìm số nguyên x để phân thức sau có giá trị là số nguyên :

a) $\frac{3}{2x - 1}$; b) $\frac{5}{x^2 + 1}$ ; c) $\frac{7}{x^2 - x + 1}$ ;

d) $\frac{x^2 - 59}{x + 8}$ ; e) $\frac{x + 2}{x^2 + 4}$.

**106.** Tìm số hữu tỉ x để phân thức $\frac{10}{x^2 + 1}$ có giá trị là số nguyên.

**107*.** Chứng minh rằng nếu các chữ số a, b, c khác 0 thoả mãn điều kiện $\overline{ab} : \overline{bc} = a : c$ thì $\overline{abbb} : \overline{bbbc} = a : c$.

**108.** Điểm trung bình môn Toán của các học sinh nam và nữ hai lớp 8A và 8B được thống kê ở bảng sau :

| | Lớp 8A | Lớp 8B | Cả hai lớp 8A và 8B |
|---|---|---|---|
| Nam | 7,1 | 8,1 | 7,9 |
| Nữ | 7,6 | 9,0 | |
| Cả lớp | 7,4 | 8,4 | |

Tính điểm trung bình môn Toán của các học sinh của cả hai lớp 8A và 8B.

## §6. CÁC PHÉP TÍNH VỀ PHÂN THỨC

Muốn cộng các phân thức, ta quy đồng mẫu thức, cộng các tử thức với nhau, giữ nguyên mẫu thức chung, rồi rút gọn phân thức vừa tìm được.

Muốn trừ đi một phân thức, ta lấy phân thức bị trừ cộng với phân thức đối của phân thức trừ.

Muốn nhân các phân thức, ta nhân các tử thức với nhau, các mẫu thức với nhau, rồi rút gọn phân thức vừa tìm được. Muốn chia cho một phân thức khác 0, ta lấy phân thức bị chia nhân với phân thức nghịch đảo của phân thức chia.

**Ví dụ 21**

Cho a + b + c = 0 và a, b, c đều khác 0. Rút gọn biểu thức

$$A = \frac{ab}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{bc}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{ca}{c^2 + a^2 - b^2}.$$

***Giải :*** Từ a + b + c = 0 suy ra a + b = − c.

Bình phương hai vế, ta được $a^2 + b^2 + 2ab = c^2$ nên $a^2 + b^2 - c^2 = -2ab$.

Tương tự, $b^2 + c^2 - a^2 = -2bc$ và $c^2 + a^2 - b^2 = -2ca$.

Do đó $$A = \frac{ab}{-2ab} + \frac{bc}{-2bc} + \frac{ca}{-2ca} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}.$$

**Ví dụ 22.** Rút gọn biểu thức

$$A = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}.$$

***Giải :*** Do đặc điểm của bài toán, ta không quy đồng mẫu tất cả các phân thức mà cộng lần lượt từng phân thức.

$$A = \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$$

$$= \frac{4}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} = \frac{8}{1-x^8} + \frac{8}{1+x^8} = \frac{16}{1-x^{16}}.$$

**Ví dụ 23.** Rút gọn biểu thức

$$B = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + ... + \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2}.$$

***Giải :*** Đương nhiên không thể quy đồng mẫu tất cả các phân thức. Ta tìm cách tách mỗi phân thức thành hiệu của hai phân thức rồi dùng phương pháp khử liên tiếp. Ta có :

$$\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Do đó : $$B = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$

**Ví dụ 24.** Xác định các số a, b, c sao cho

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-1}. \quad (1)$$

***Giải :*** Thực hiện phép cộng ở vế phải của (1) :

$$\frac{(ax+b)(x-1)+c(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{ax^2-ax+bx-b+cx^2+c}{(x^2+1)(x-1)} =$$

$$= \frac{(a+c)x^2+(b-a)x+(c-b)}{(x^2+1)(x-1)}.$$

Đồng nhất phân thức trên với phân thức $\frac{1}{(x^2+1)(x-1)}$, ta được :

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b-a=0 \\ c-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c+b=0 \\ c-b=1 \end{cases} \Rightarrow c=\frac{1}{2}; \quad b=-\frac{1}{2}.$$

Do đó $a=-\frac{1}{2}$. Như vậy : $\frac{1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}$.

**Ví dụ 25.** Cho $\quad A = \frac{1}{(x+y)^3}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{y^4}\right)$,

$$B = \frac{2}{(x+y)^4}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}\right), \quad C = \frac{2}{(x+y)^5}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right).$$

Thực hiện phép tính A + B + C.

***Giải :*** Ta có

$$A = \frac{y^4-x^4}{x^4y^4(x+y)^3} = \frac{(y^2+x^2)(y^2-x^2)}{x^4y^4(x+y)^3} = \frac{(y^2+x^2)(y-x)}{x^4y^4(x+y)^2}.$$

$$B+C = \frac{2}{(x+y)^4}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}+\frac{1}{x+y}\cdot\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}\right)$$

$$= \frac{2}{(x+y)^4}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}+\frac{y-x}{x^2y^2}\right) = \frac{2}{(x+y)^4}\cdot\frac{y^3-x^3+xy(y-x)}{x^3y^3}$$

$$= \frac{2}{(x+y)^4} \cdot \frac{(y-x)(y^2+2xy+x^2)}{x^3y^3} = \frac{2(y-x)}{(x+y)^2x^3y^3}.$$

Do đó $A + B + C = \dfrac{(y^2+x^2)(y-x)}{x^4y^4(x+y)^2} + \dfrac{2(y-x)}{x^3y^3(x+y)^2} =$

$$= \frac{(y^2+x^2)(y-x)+2xy(y-x)}{x^4y^4(x+y)^2} = \frac{(y-x)(y^2+x^2+2xy)}{x^4y^4(x+y)^2} = \frac{y-x}{x^4y^4}.$$

## Bài tập

**109.** Thực hiện phép tính :

a) $\dfrac{x+3}{x+1} - \dfrac{2x-1}{x-1} - \dfrac{x-3}{x^2-1}$ ;

b) $\dfrac{1}{x(x+y)} + \dfrac{1}{y(x+y)} + \dfrac{1}{x(x-y)} + \dfrac{1}{y(y-x)}$.

**110.** Thực hiện phép tính :

a) $A = \dfrac{1}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{1}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$ ;

b) $B = \dfrac{1}{a(a-b)(a-c)} + \dfrac{1}{b(b-a)(b-c)} + \dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}$ ;

c) $C = \dfrac{bc}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{ac}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{ab}{(c-a)(c-b)}$ ;

d) $D = \dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$.

**111.** Cho a, b, c là các số nguyên khác nhau đôi một. Chứng minh rằng biểu thức sau có giá trị là một số nguyên :

$$P = \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}.$$

**112.** Cho $3y - x = 6$. Tính giá trị của biểu thức

$$A = \frac{x}{y-2} + \frac{2x-3y}{x-6}.$$

**113.** Tìm x, y, z, biết rằng $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3} + \dfrac{z^2}{4} = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{5}$.

**114.** Tìm x, y, biết rằng $x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 4$.

**115.** Cho biết :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2, \qquad (1)$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2. \qquad (2)$$

Chứng minh rằng $a + b + c = abc$.

**116.** Cho

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \qquad (1)$$

và

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2. \qquad (2)$$

Tính giá trị của biểu thức : $\dfrac{a^2}{x^2} + \dfrac{b^2}{y^2} + \dfrac{c^2}{z^2}$.

**117.** Cho $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$ và a, b, c khác 0. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}.$$

**118.** Cho

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b}.$$

Chứng minh rằng trong ba số a, b, c, tồn tại hai số bằng nhau.

**119.** Tìm các giá trị nguyên của x để phân thức sau có giá trị là số nguyên :

a) $A = \dfrac{2x^3 - 6x^2 + x - 8}{x - 3}$ ;

b) $B = \dfrac{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 1}{x^2 - 2x + 1}$ ;

c) $C = \dfrac{x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 6x - 2}{x^2 + 2}$.

**120.** Rút gọn biểu thức sau với $x = \frac{a}{3a+2}$ :

$$A = \frac{x+3a}{2-x} + \frac{x-3a}{2+x} - \frac{2a}{4-x^2} + a.$$

**121.** Rút gọn biểu thức :

$$A = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a} + \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

**122.** Cho biết $\frac{a+b-c}{ab} - \frac{b+c-a}{bc} - \frac{a+c-b}{ac} = 0$. Chứng minh rằng trong ba phân thức ở vế trái, có ít nhất một phân thức bằng 0.

**123.** Xác định các số a, b, c sao cho :

a) $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$ ; b) $\frac{1}{x^2-4} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$ ;

c) $\frac{1}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x+2}$.

**124.** Rút gọn biểu thức

$$B = (ab+bc+ca)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

**125.** Cho a, b, c khác nhau đôi một và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Rút gọn các biểu thức :

a) $M = \frac{1}{a^2+2bc} + \frac{1}{b^2+2ac} + \frac{1}{c^2+2ab}$ ;

b) $N = \frac{bc}{a^2+2bc} + \frac{ca}{b^2+2ac} + \frac{ab}{c^2+2ab}$ ;

c) $P = \frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ac} + \frac{c^2}{c^2+2ab}$.

**126.** Cho các số a, b, c khác nhau đôi một và $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b}$. Tính giá trị của biểu thức

$$M = \left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right).$$

**127*.** Cho $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và $a + b + c \neq 0$. Tính giá trị của biểu thức :

$$N = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2}.$$

**128.** Rút gọn các biểu thức :

a) $A = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)...\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ ;

b) $B = \frac{1^2}{2^2 - 1} \cdot \frac{3^2}{4^2 - 1} \cdot \frac{5^2}{6^2 - 1} \cdot \ ... \ \cdot \frac{(2n + 1)^2}{(2n + 2)^2 - 1}$.

**129.** Rút gọn các biểu thức :

a) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{(n - 1)n}$ ;

b) $\frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + ... + \frac{1}{(3n + 2)(3n + 5)}$ ;

c) $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + ... + \frac{1}{(n - 1)n(n + 1)}$.

**130.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ :

a) $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + ... + \frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{2}$ ;

b) $\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + ... + \frac{1}{(2n + 1)^2} < \frac{1}{4}$.

**131.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ :

$$A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{n^2} < \frac{2}{3}.$$

**132.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 3$ :

$$B = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + ... + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{12}.$$

**133.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ :

$$A = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right)\left(1 + \frac{1}{2.4}\right)\left(1 + \frac{1}{3.5}\right)...\left(1 + \frac{1}{n(n + 2)}\right) < 2.$$

**134.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ :

$$B = \left(1 - \frac{2}{6}\right)\left(1 - \frac{2}{12}\right)\left(1 - \frac{2}{20}\right)...\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) > \frac{1}{3}.$$

**135.** Rút gọn biểu thức

$$A = \frac{3^2 - 1}{5^2 - 1}.\frac{7^2 - 1}{9^2 - 1}.\frac{11^2 - 1}{13^2 - 1}...\frac{43^2 - 1}{45^2 - 1}.$$

**136*.** Chứng minh rằng :

a) $A = \dfrac{2^3 + 1}{2^3 - 1}.\dfrac{3^3 + 1}{3^3 - 1}.\dfrac{4^3 + 1}{4^3 - 1}. \;...\; .\dfrac{9^3 + 1}{9^3 - 1} < \dfrac{3}{2}.$

b) $B = \dfrac{2^3 - 1}{2^3 + 1}.\dfrac{3^3 - 1}{3^3 + 1}. \;...\; .\dfrac{n^3 - 1}{n^3 + 1} > \dfrac{2}{3}.$

**137*.** Rút gọn biểu thức

$$P = \frac{(1^4 + 4)(5^4 + 4)(9^4 + 4)\,...\,(21^4 + 4)}{(3^4 + 4)(7^4 + 4)(11^4 + 4)\,...\,(23^4 + 4)}.$$

**138.** Rút gọn biểu thức

$$M = \frac{1}{a^2 - 5a + 6} + \frac{1}{a^2 - 7a + 12} + \frac{1}{a^2 - 9a + 20} + \frac{1}{a^2 - 11a + 30}.$$

**139.** Rút gọn biểu thức

$$\left(\frac{n-1}{1} + \frac{n-2}{2} + \frac{n-3}{3} + ... + \frac{2}{n-2} + \frac{1}{n-1}\right) : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n}\right).$$

**140.** Rút gọn biểu thức

$$\frac{A}{B} = \frac{\dfrac{1}{1(2n-1)} + \dfrac{1}{3(2n-3)} + \dfrac{1}{5(2n-5)} + ... + \dfrac{1}{(2n-3).3} + \dfrac{1}{(2n-1).1}}{1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + ... + \dfrac{1}{2n-1}}.$$

**141.** Cho $\quad abc = 1 \qquad (1)$

và $\quad a + b + c = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}. \qquad (2)$

Chứng minh rằng trong ba số a, b, c, tồn tại một số bằng 1.

**142.** Chứng minh rằng nếu $x + y + z = a$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}$ thì tồn tại một trong ba số x, y, z bằng a.

**143.** Các biểu thức $x + y + z$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ có thể cùng có giá trị bằng 0 được hay không ?

**144.** Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{z+2}$, biết rằng

$$2a = by + cz,\ 2b = ax + cz,\ 2c = ax + by \text{ và } a + b + c \neq 0.$$

**145.** a) Cho $abc = 2$. Rút gọn biểu thức

$$M = \frac{a}{ab + a + 2} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{2c}{ac + 2c + 2}.$$

b) Cho $abc = 1$. Rút gọn biểu thức

$$N = \frac{a}{ab + a + 1} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{c}{ac + c + 1}.$$

**146.** Cho $\frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}$, $a \neq 0, c \neq 0, a - b \neq 0, b - c \neq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a-b} = \frac{1}{b-c} - \frac{1}{c}.$$

**147.** Cho $a + b + c = 0$ ($a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$). Rút gọn các biểu thức :

a) $A = \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}$ ;

b) $B = \frac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2} + \frac{b^2}{b^2 - c^2 - a^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2 - b^2}.$

**148*.** Tính giá trị của biểu thức sau, biết rằng $a + b + c = 0$ :

$$A = \left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a}\right).$$

**149.** Chứng minh rằng nếu $(a^2 - bc)(b - abc) = (b^2 - ac)(a - abc)$ và các số a, b, c, a − b khác 0 thì $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c$.

**150*.** Cho $a + b + c = 0$, $x + y + z = 0$, $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$. Chứng minh rằng

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0.$$

**151.** Cho $\frac{xy + 1}{y} = \frac{yz + 1}{z} = \frac{xz + 1}{x}$. Chứng minh rằng $x = y = z$ hoặc $x^2y^2z^2 = 1$.

**152.** Cho $\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} = 1$. Chứng minh rằng $\frac{a^2}{b + c} + \frac{b^2}{c + a} + \frac{c^2}{a + b} = 0$.

**153*.** Cho $\frac{a}{b - c} + \frac{b}{c - a} + \frac{c}{a - b} = 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{(b - c)^2} + \frac{b}{(c - a)^2} + \frac{c}{(a - b)^2} = 0.$$

**154.** Cho $x + \frac{1}{x} = a$. Tính các biểu thức sau theo a :

a) $x^2 + \frac{1}{x^2}$;  b) $x^3 + \frac{1}{x^3}$ ;  c) $x^4 + \frac{1}{x^4}$ ;  d) $x^5 + \frac{1}{x^5}$.

**155.** Cho $\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) : \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = a$. Tính biểu thức

$$M = \left(x^4 - \frac{1}{x^4}\right) : \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) \text{ theo a.}$$

**156.** Cho $x^2 - 4x + 1 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2}$.

**157.** Cho $\frac{x}{x^2 - x + 1} = a$. Tính $M = \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$ theo a.

**158.** Cho $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $y = \frac{a^2 - (b - c)^2}{(b + c)^2 - a^2}$.

Tính giá trị của biểu thức $x + y + xy$.

**159.** Tìm hai số tự nhiên a và b sao cho :

a) $a - b = \frac{a}{b}$ ;  b) $a - b = \frac{a}{2b}$.

**160.** Cho hai số nguyên dương a và b trong đó a > b. Tìm số nguyên dương c khác b sao cho

$$\frac{a^3 + b^3}{a^3 + c^3} = \frac{a + b}{a + c}.$$

**161.** Cho dãy số $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sao cho :

$$a_2 = \frac{a_1 - 1}{a_1 + 1}\ ;\ a_3 = \frac{a_2 - 1}{a_2 + 1}\ ;\ \ldots\ ;\ a_n = \frac{a_{n-1} - 1}{a_{n-1} + 1}.$$

a) Chứng minh rằng $a_1 = a_5$.

b) Xác định năm số đầu của dãy, biết rằng $a_{101} = 3$.

**162.** Tìm phân số $\frac{m}{n}$ khác 0 và số tự nhiên k, biết rằng $\frac{m}{n} = \frac{m + k}{nk}$.

**163*.** Cho hai số tự nhiên a và b (a < b). Tìm tổng các phân số tối giản có mẫu bằng 7, mỗi phân số lớn hơn a nhưng nhỏ hơn b.

**164.** a) Mức sản xuất của một xí nghiệp năm 2001 tăng a% so với năm 2000, năm 2002 tăng b% so với năm 2001. Mức sản xuất của xí nghiệp đó năm 2002 tăng so với năm 2000 là :

A) $(a + b)\%$ ;  B) $ab\%$ ;  C) $\left(a + b + \frac{a + b}{100}\right)\%$ ;

D) $\left(a + b + \frac{ab}{100}\right)\%$ ;  E) $\left(\frac{a + b}{100} + \frac{ab}{10000}\right)\%$.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

b) Một số a tăng m%, sau đó lại giảm đi n% (a, m, n là các số dương) thì được số b. Tìm liên hệ giữa m và n để b > a.

**165*.** Chứng minh rằng các tổng sau không là số nguyên :

a) $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbf{N}, n \geq 2)$ ;

b) $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n + 1}$ $(n \in \mathbf{N}, n \geq 1)$.

~ **Bài tập :** 463 đến 465.

# CHUYÊN ĐỀ

# MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

Trong chuyên đề này, ta chỉ phân tích đa thức thành nhân tử với các hệ số nguyên.

## I – PHƯƠNG PHÁP TÁCH MỘT HẠNG TỬ THÀNH NHIỀU HẠNG TỬ

**Ví dụ 26(3).** Phân tích đa thức thành nhân tử :

$$3x^2 - 8x + 4.$$

*Giải :* Đa thức trên không chứa nhân tử chung, không có dạng một hằng đẳng thức đáng nhớ nào, cũng không thể nhóm các hạng tử. Ta biến đổi đa thức ấy thành đa thức có nhiều hạng tử hơn.

*Cách 1.* (Tách hạng tử thứ hai)

$$3x^2 - 8x + 4 = 3x^2 - 6x - 2x + 4 = 3x(x - 2) - 2(x - 2) = (x - 2)(3x - 2).$$

*Cách 2.* (Tách hạng tử thứ nhất)

$$3x^2 - 8x + 4 = 4x^2 - 8x + 4 - x^2 = (2x - 2)^2 - x^2$$

$$= (2x - 2 + x)(2x - 2 - x) = (3x - 2)(x - 2).$$

*Nhận xét :* Trong cách 1, hạng tử $-8x$ được tách thành hai hạng tử $-6x$ và $-2x$. Trong đa thức $3x^2 - 6x - 2x + 4$, hệ số của các hạng tử là $3, -6, -2, 4$. Các hệ số thứ hai và thứ tư đều gấp $-2$ lần hệ số liền trước, nhờ đó mà xuất hiện nhân tử chung $x - 2$.

Một cách tổng quát, để phân tích tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ thành nhân tử, ta tách hạng tử $bx$ thành $b_1x + b_2x$ sao cho $\frac{b_1}{a} = \frac{c}{b_2}$, tức là $b_1b_2 = ac$.

Trong thực hành ta làm như sau :

*Bước 1 :* Tìm tích ac.

*Bước 2 :* Phân tích ac ra tích của hai thừa số nguyên bằng mọi cách.

*Bước 3 :* Chọn hai thừa số mà tổng bằng b.

Trong ví dụ trên, đa thức $3x^2 - 8x + 4$ có $a = 3$, $b = -8$, $c = 4$. Tích $ac = 3.4 = 12$. Phân tích 12 ra tích của hai thừa số, hai thừa số này cùng dấu (vì tích của chúng bằng 12), và cùng âm (để tổng của chúng bằng $-8$) : $(-1)(-12)$, $(-2)(-6)$, $(-3)(-4)$. Chọn hai thừa số mà tổng bằng $-8$, đó là $-2$ và $-6$.

**Ví dụ 27(3).** Phân tích đa thức thành nhân tử :

$$4x^2 - 4x - 3.$$

***Giải :*** *Cách 1*. (Tách hạng tử thứ hai)

$$4x^2 - 4x - 3 = 4x^2 + 2x - 6x - 3 = 2x(2x + 1) - 3(2x + 1) = (2x + 1)(2x - 3).$$

Chú ý rằng hệ số $-4$ được tách thành 2 và $-6$ có tích bằng $-12$, bằng tích của $4(-3)$.

*Cách 2*. (Tách hạng tử thứ ba)

$$4x^2 - 4x - 3 = 4x^2 - 4x + 1 - 4 = (2x - 1)^2 - 2^2 = (2x + 1)(2x - 3).$$

*Nhận xét :* Qua hai ví dụ trên, ta thấy việc tách một hạng tử thành nhiều hạng tử khác thường nhằm mục đích :

– Làm xuất hiện các hệ số tỉ lệ, nhờ đó mà xuất hiện nhân tử chung (cách 1) ;

– Làm xuất hiện hiệu của hai bình phương (cách 2).

Với các đa thức có bậc từ bậc ba trở lên, để dễ dàng làm xuất hiện các hệ số tỉ lệ, người ta thường dùng cách *tìm nghiệm của đa thức*.

Ta nhắc lại khái niệm nghiệm của đa thức : số a được gọi là nghiệm của đa thức $f(x)$ nếu $f(a) = 0$. Như vậy, nếu đa thức $f(x)$ có nghiệm $x = a$ thì nó chứa nhân tử $x - a$.

Ta chứng minh được rằng nghiệm nguyên của đa thức, nếu có, phải là ước của hệ số tự do.

Thật vậy, giả sử đa thức $a_ox^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ với các hệ số $a_o$, $a_1$, ..., $a_n$ nguyên, có nghiệm $x = a$ $(a \in \mathbb{Z})$. Thế thì

$$a_ox^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = (x - a)(b_ox^{n-1} + b_1x^{n-2} + ... + b_{n-1}),$$

trong đó $b_o$, $b_1$, ..., $b_{n-1}$ nguyên. Hạng tử có bậc thấp nhất của tích ở vế phải bằng $-ab_{n-1}$, hạng tử có bậc thấp nhất của vế trái bằng $a_n$. Do đó $-ab_{n-1} = a_n$, tức a là ước của $a_n$.

**Ví dụ 28(3).** Phân tích đa thức thành nhân tử :

$$f(x) = x^3 - x^2 - 4.$$

*Giải :* Lần lượt kiểm tra với $x = \pm 1, \pm 2, \pm 4$, ta thấy $f(2) = 2^3 - 2^2 - 4 = 0$. Đa thức có nghiệm $x = 2$, do đó chứa nhân tử $x - 2$.

Ta tách các hạng tử như sau :

*Cách 1.* $x^3 - x^2 - 4 = x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x + 2x - 4$

$= x^2(x - 2) + x(x - 2) + 2(x - 2) = (x - 2)(x^2 + x + 2).$

*Cách 2.* $x^3 - x^2 - 4 = x^3 - 8 - x^2 + 4$

$= (x - 2)(x^2 + 2x + 4) - (x + 2)(x - 2)$

$= (x - 2)(x^2 + 2x + 4 - x - 2) = (x - 2)(x^2 + x + 2).$

*Chú ý 1 :* Khi xét nghiệm nguyên của đa thức, nên nhớ hai định lí sau :

a) Nếu đa thức $f(x)$ có tổng các hệ số bằng 0 thì 1 là nghiệm của đa thức, do đó đa thức chứa nhân tử $x - 1$.

Chẳng hạn, đa thức $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ có $1 - 5 + 8 - 4 = 0$ nên 1 là nghiệm của đa thức, đa thức chứa nhân tử $x - 1$.

b) Nếu đa thức $f(x)$ có tổng các hệ số của hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của hạng tử bậc lẻ thì $-1$ là nghiệm của đa thức, đa thức chứa nhân tử $x + 1$.

Chẳng hạn, đa thức $x^3 - 5x^2 + 3x + 9$ có $9 - 5 = 3 + 1$ nên $-1$ là nghiệm của đa thức, đa thức chứa nhân tử $x + 1$.

Chứng minh hai định lí trên, xem các ví dụ 51 và 52.

*Chú ý 2 :* Để nhanh chóng loại trừ các ước của hệ số tự do không là nghiệm của đa thức, có thể dùng nhận xét sau :

Nếu a là nghiệm nguyên của đa thức $f(x)$ và $f(1)$, $f(-1)$ khác 0 thì $\dfrac{f(1)}{a-1}$ và $\dfrac{f(-1)}{a+1}$ đều là số nguyên.

*Chứng minh.* Số a là nghiệm của $f(x)$ nên

$$f(x) = (x - a).Q(x). \qquad (1)$$

Thay $x = 1$ vào (1), ta có $f(1) = (1 - a).Q(1)$.

Do $f(1) \neq 0$ nên $a \neq 1$, vì thế $Q(1) = \dfrac{f(1)}{1-a}$, tức là $\dfrac{f(1)}{a-1}$ là số nguyên.

Thay x = −1 vào (1). Chứng minh tương tự, ta cũng có $\frac{f(-1)}{a+1}$ là số nguyên.

Lấy một ví dụ : $f(x) = 4x^3 - 13x^2 + 9x - 18$.

Các ước của 18 là ± 1, ± 2, ± 3, ± 6, ± 9, ± 18.

$$f(1) = 4 - 13 + 9 - 18 = -18,\ f(-1) = -4 - 13 - 9 - 18 = -44.$$

Hiển nhiên ± 1 không là nghiệm của f(x). Ta thấy $\frac{-18}{-3-1}$, $\frac{-18}{\pm 6-1}$, $\frac{-18}{\pm 9-1}$, $\frac{-18}{\pm 18-1}$ không nguyên nên −3, ± 6, ± 9, ± 18 không là nghiệm của f(x).

Ta thấy $\frac{-44}{2+1}$ không nguyên nên 2 không là nghiệm của f(x). Chỉ còn −2 và 3. Kiểm tra ta thấy 3 là nghiệm của f(x). Do đó, ta tách các hạng tử như sau :

$$4x^3 - 13x^2 + 9x - 18 = 4x^3 - 12x^2 - x^2 + 3x + 6x - 18$$

$$= 4x^2(x-3) - x(x-3) + 6(x-3) = (x-3)(4x^2 - x + 6).$$

**Ví dụ 29(3).** Phân tích đa thức thành nhân tử :

$$3x^3 - 7x^2 + 17x - 5.$$

***Giải :*** Các số ±1, ±5 không là nghiệm của đa thức. Như vậy, đa thức không có nghiệm nguyên. Tuy vậy, đa thức có thể có nghiệm hữu tỉ khác. Ta chứng minh được rằng trong đa thức có các hệ số nguyên, nghiệm hữu tỉ (nếu có) phải có dạng $\frac{p}{q}$ trong đó p là ước của hệ số tự do, q là ước dương của hệ số cao nhất(*).

---

(*) Thật vậy, giả sử đa thức $a_ox^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ với các hệ số $a_o, a_1, \ldots, a_n$ nguyên, có nghiệm hữu tỉ $x = \frac{p}{q}$, trong đó $p, q \in \mathbf{Z}$, $q > 0$, $(p, q) = 1$. Thế thì

$$a_ox^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = (qx - p)(b_ox^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}).$$

Ta có $-pb_{n-1} = a_n$, $qb_o = a_o$ nên p là ước của $a_n$, còn q là ước dương của $a_o$.

Xét các số $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{5}{3}$, ta thấy $\frac{1}{3}$ là nghiệm của đa thức, do đó đa thức chứa thừa số 3x − 1. Ta tách các hạng tử như sau :

$$3x^3 - 7x^2 + 17x - 5 = 3x^3 - x^2 - 6x^2 + 2x + 15x - 5$$
$$= x^2(3x - 1) - 2x(3x - 1) + 5(3x - 1) = (3x - 1)(x^2 - 2x + 5).$$

## II – PHƯƠNG PHÁP THÊM VÀ BỚT CÙNG MỘT HẠNG TỬ

### 1. Thêm và bớt cùng một hạng tử làm xuất hiện hiệu của hai bình phương

**Ví dụ 30(3).** Phân tích đa thức thành nhân tử :

$$4x^4 + 81.$$

***Giải :*** Thêm và bớt $36x^2$ :

$$4x^4 + 81 = 4x^4 + 36x^2 + 81 - 36x^2$$
$$= (2x^2 + 9)^2 - (6x)^2 = (2x^2 + 9 + 6x)(2x^2 + 9 - 6x).$$

**Ví dụ 31(3).** Phân tích đa thức thành nhân tử :

$$64x^4 + y^4.$$

***Giải :*** Thêm và bớt $16x^2y^2$ :

$$64x^4 + y^4 = 64x^4 + 16x^2y^2 + y^4 - 16x^2y^2 = (8x^2 + y^2)^2 - (4xy)^2$$
$$= (8x^2 + y^2 + 4xy)(8x^2 + y^2 - 4xy).$$

### 2. Thêm và bớt cùng một hạng tử làm xuất hiện nhân tử chung

**Ví dụ 32(3).** Phân tích đa thức thành nhân tử :

$$x^5 + x - 1.$$

***Giải :*** *Cách 1.*

$$x^5 + x - 1 = x^5 - x^4 + x^3 + x^4 - x^3 + x^2 - x^2 + x - 1$$
$$= x^3(x^2 - x + 1) + x^2(x^2 - x + 1) - (x^2 - x + 1)$$
$$= (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 1).$$

*Cách 2.* Thêm và bớt $x^2$ :

$$x^5 + x - 1 = x^5 + x^2 - x^2 + x - 1 = x^2(x^3 + 1) - (x^2 - x + 1)$$

$$= (x^2 - x + 1)[x^2(x + 1) - 1] = (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 1).$$

**Ví dụ 33(3).** Phân tích đa thức thành nhân tử :

$$x^7 + x^2 + 1.$$

***Giải :*** Thêm và bớt x :

$$x^7 + x^2 + 1 = x^7 - x + x^2 + x + 1$$

$$= x(x^3 + 1)(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$= x(x^3 + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1).$$

*Chú ý :* Các đa thức dạng $x^{3m+1} + x^{3n+2} + 1$ như $x^7 + x^2 + 1$, $x^7 + x^5 + 1$, $x + x^5 + 1$, $x + x^8 + 1$, ... đều chứa nhân tử $x^2 + x + 1$ (xem ví dụ 57).

## III – PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

**Ví dụ 34(3).** Phân tích đa thức thành nhân tử :

$$x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128.$$

***Giải :***

$$x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128 = (x^2 + 10x)(x^2 + 10x + 24) + 128.$$

Đặt $x^2 + 10x + 12 = y$, đa thức đã cho có dạng :

$$(y - 12)(y + 12) + 128 = y^2 - 16 = (y + 4)(y - 4)$$

$$= (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 8) = (x + 2)(x + 8)(x^2 + 10x + 8).$$

*Nhận xét :* Trong ví dụ trên, nhờ phương pháp đổi biến, ta đã đưa đa thức bậc bốn đối với x thành đa thức bậc hai đối với y.

**Ví dụ 35(3).** Phân tích đa thức thành nhân tử :

$$A = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1.$$

*Giải :* Giả sử $x \neq 0$. Ta viết đa thức dưới dạng :

$$A = x^2\left(x^2 + 6x + 7 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = x^2\left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6\left(x - \frac{1}{x}\right) + 7\right].$$

Đặt $x - \frac{1}{x} = y$ thì $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$. Do đó

$$A = x^2(y^2 + 2 + 6y + 7) = x^2(y + 3)^2 = (xy + 3x)^2$$

$$= \left[x\left(x - \frac{1}{x}\right) + 3x\right]^2 = (x^2 + 3x - 1)^2.$$

Dạng phân tích này cũng đúng với $x = 0$.

*Chú ý :* Có thể trình bày lời giải của ví dụ trên như sau :

$$A = x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 9x^2 - 6x + 1$$

$$= x^4 + 2x^2(3x - 1) + (3x - 1)^2 = (x^2 + 3x - 1)^2.$$

## IV – PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH

**Ví dụ 36(3).** Phân tích đa thức thành nhân tử :

$$x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3.$$

*Giải :* Các số $\pm 1$, $\pm 3$ không là nghiệm của đa thức, đa thức không có nghiệm nguyên, cũng không có nghiệm hữu tỉ. Như vậy nếu đa thức trên phân tích được thành nhân tử thì phải có dạng $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$. Phép nhân này cho kết quả $x^4 + (a + c)x^3 + (ac + b + d)x^2 + (ad + bc)x + bd$. Đồng nhất đa thức này với đa thức đã cho, ta được hệ điều kiện :

$$\begin{cases} a + c = -6 \\ ac + b + d = 12 \\ ad + bc = -14 \\ bd = 3. \end{cases}$$

Xét $bd = 3$ với $b, d \in \mathbf{Z}$, $b \in \{\pm 1, \pm 3\}$. Với $b = 3$ thì $d = 1$, hệ điều kiện trên trở thành :

$$\begin{cases} a + c = -6 \\ ac = 8 \\ a + 3c = -14. \end{cases}$$

Suy ra $2c = -14 - (-6) = -8$. Do đó $c = -4$, $a = -2$.

Vậy đa thức đã cho phân tích thành $(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 4x + 1)$.

*Chú ý :* Ta trình bày lời giải của ví dụ trên như sau :

$$x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 =$$
$$= x^4 - 4x^3 + x^2 - 2x^3 + 8x^2 - 2x + 3x^2 - 12x + 3$$
$$= x^2(x^2 - 4x + 1) - 2x(x^2 - 4x + 1) + 3(x^2 - 4x + 1)$$
$$= (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2x + 3).$$

## V – PHƯƠNG PHÁP XÉT GIÁ TRỊ RIÊNG

Trong phương pháp này, trước hết ta xác định dạng các nhân tử chứa biến của đa thức, rồi gán cho các biến các giá trị cụ thể để xác định nhân tử còn lại.

**Ví dụ 37(3).** Phân tích đa thức thành nhân tử :

$$P = x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y) \text{ (ví dụ 13).}$$

***Giải :*** Thử thay x bởi y thì $P = y^2(y - z) + y^2(z - y) = 0$. Như vậy P chia hết cho $x - y$.

Ta lại thấy nếu thay x bởi y, thay y bởi z, thay z bởi x thì P không đổi (ta nói đa thức P có thể hoán vị vòng quanh $x \to y \to z \to x$). Do đó, nếu P đã chia hết cho $x - y$ thì cũng chia hết cho $y - z$ và $z - x$. Vậy P có dạng

$$k(x - y)(y - z)(z - x).$$

Ta thấy k phải là hằng số (không chứa biến) vì P có bậc ba đối với tập hợp các biến x, y, z, còn tích $(x - y)(y - z)(z - x)$ cũng có bậc ba đối với tập hợp các biến x, y, z.

Vì đẳng thức $x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y) = k(x - y)(y - z)(z - x)$ đúng với mọi x, y, z nên ta gán cho các biến x, y, z các giá trị riêng, chẳng hạn $x = 2$, $y = 1$, $z = 0$(*), ta được :

$$4.1 + 1.(-2) + 0 = k.1.1.(-2) \Leftrightarrow 2 = -2k \Leftrightarrow k = -1.$$

Vậy $P = -(x - y)(y - z)(z - x) = (x - y)(y - z)(x - z)$.

---

(*) Các giá trị của x, y, z có thể chọn tuỳ ý, chỉ cần chúng đôi một khác nhau để

$$(x - y)(y - z)(z - x) \neq 0.$$

## Bài tập

**Phân tích các đa thức sau thành nhân tử (từ bài 166 đến bài 179)**

**166(3).** a) $6x^2 - 11x + 3$ ; b) $2x^2 + 3x - 27$ ; c) $2x^2 - 5xy - 3y^2$.

**167(3).** a) $x^3 + 2x - 3$ ; b) $x^3 - 7x + 6$ ;

c) $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$ ; d) $x^3 - 9x^2 + 6x + 16$.

e) $x^3 - x^2 - x - 2$ ; g) $x^3 + x^2 - x + 2$ ;

h) $x^3 - 6x^2 - x + 30$.

**168(3).** $x^3 - 7x - 6$ (giải bằng nhiều cách).

**169(3).** a) $27x^3 - 27x^2 + 18x - 4$ ; b) $2x^3 - x^2 + 5x + 3$ ;

c) $(x^2 - 3)^2 + 16$.

**170(3).** a) $(x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 15$ ; b) $x^2 + 2xy + y^2 - x - y - 12$ ;

c) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$ ;

d) $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24$.

**171(3).** a) $(x + a)(x + 2a)(x + 3a)(x + 4a) + a^4$ ;

b) $(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2 + (xy + yz + zx)^2$ ;

c*) $2(x^4 + y^4 + z^4) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2 +$

$+ (x + y + z)^4$.

**172*(3).** $(a + b + c)^3 - 4(a^3 + b^3 + c^3) - 12abc$ bằng cách đổi biến : đặt $a + b = m$, $a - b = n$.

**173(3).** a) $4x^4 - 32x^2 + 1$ ; b) $x^6 + 27$ ;

c) $3(x^4 + x^2 + 1) - (x^2 + x + 1)^2$ ; d) $(2x^2 - 4)^2 + 9$.

**174(3).** a) $4x^4 + 1$ ; b) $4x^4 + y^4$ ; c) $x^4 + 324$.

**175(3).** a) $x^5 + x^4 + 1$ ; b) $x^5 + x + 1$ ; c) $x^8 + x^7 + 1$ ;

d) $x^5 - x^4 - 1$ e) $x^7 + x^5 + 1$ ; g) $x^8 + x^4 + 1$.

**176(3).** a) $a^6 + a^4 + a^2b^2 + b^4 - b^6$ ; b*) $x^3 + 3xy + y^3 - 1$.

**177(3).** Dùng phương pháp hệ số bất định :

a) $4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1$ ; b) $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1$ ;

c) $x^4 - 8x + 63$ ; d) $(x + 1)^4 + (x^2 + x + 1)^2$.

**178**(3).** a) $x^8 + 14x^4 + 1$ ; b) $x^8 + 98x^4 + 1$.

**179(3).** Dùng phương pháp xét giá trị riêng :

$$M = a(b + c - a)^2 + b(c + a - b)^2 + c(a + b - c)^2 + (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b).$$

**180(3).** Chứng minh rằng tích của bốn số tự nhiên liên tiếp cộng thêm 1 là một số chính phương.

**181*(3).** Chứng minh rằng số $A = (n + 1)^4 + n^4 + 1$ chia hết cho một số chính phương khác 1 với mọi số n nguyên dương.

**182(3).** Tìm các số nguyên a, b, c sao cho khi phân tích đa thức $(x + a)(x - 4) - 7$ thành nhân tử ta được $(x + b)(x + c)$.

**183(3).** Tìm các số hữu tỉ a, b, c sao cho khi phân tích đa thức $x^3 + ax^2 + bx + c$ thành nhân tử ta được $(x + a)(x + b)(x + c)$.

**184(3).** Số tự nhiên n có thể nhận bao nhiêu giá trị, biết rằng khi phân tích đa thức $x^2 + x - n$ thành nhân tử ta được $(x - a)(x + b)$ với a, b là các số tự nhiên và $1 < n < 100$ ?

**185(3).** Cho $A = a^2 + b^2 + c^2$, trong đó a và b là hai số tự nhiên liên tiếp, $c = ab$. Chứng minh rằng $\sqrt{A}$ là một số tự nhiên lẻ.

## TÍNH CHIA HẾT ĐỐI VỚI SỐ NGUYÊN

Tính chia hết đối với số nguyên đã được trình bày ở các cuốn *Nâng cao và phát triển Toán 6*, *Nâng cao và phát triển Toán 7*. Nhờ sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ và phân tích đa thức thành nhân tử, ở lớp 8 ta có khả năng giải quyết nhiều bài toán về chia hết phức tạp hơn ở các lớp dưới.

### I – CHỨNG MINH QUAN HỆ CHIA HẾT

Gọi A(n) là một biểu thức phụ thuộc vào n ($n \in \mathbf{N}$ hoặc $n \in \mathbf{Z}$).

*Chú ý 1 :* Để chứng minh biểu thức A(n) chia hết cho một số m, ta thường phân tích biểu thức A(n) thành thừa số, trong đó có một thừa số là m. Nếu m là hợp số, ta phân tích nó thành một tích các thừa số đôi một nguyên tố cùng nhau, rồi chứng minh A(n) chia hết cho tất cả các số đó. Nên lưu ý đến nhận xét : Trong k số nguyên liên tiếp, bao giờ cũng tồn tại một bội số của k.

**Ví dụ 38(3).** Chứng minh rằng

$A = n^3(n^2 - 7)^2 - 36n$ chia hết cho 5040 với mọi số tự nhiên n.

*Giải :* Phân tích ra thừa số : $5040 = 2^4 . 3^2 . 5 . 7$.

Phân tích $A = n[n^2(n^2 - 7)^2 - 36] = n[(n^3 - 7n)^2 - 6^2]$

$= n(n^3 - 7n - 6)(n^3 - 7n + 6)$.

Ta lại có $n^3 - 7n - 6 = (n + 1)(n + 2)(n - 3)$,

$n^3 - 7n + 6 = (n - 1)(n - 2)(n + 3)$.

Do đó $A = (n - 3)(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$.

Đây là tích của bảy số nguyên liên tiếp. Trong bảy số nguyên liên tiếp :

– Tồn tại một bội số của 5 (nên A chia hết cho 5) ;

– Tồn tại một bội số của 7 (nên A chia hết cho 7) ;

– Tồn tại hai bội số của 3 (nên A chia hết cho 9) ;

– Tồn tại ba bội số của 2, trong đó có một bội số của 4 (nên A chia hết cho 16).

A chia hết cho các số 5, 7, 9, 16 đôi một nguyên tố cùng nhau nên A chia hết cho 5.7.9.16 = 5040.

*Chú ý 2 :* Khi chứng minh A(n) chia hết cho m, ta có thể xét mọi trường hợp về số dư khi chia n cho m.

**Ví dụ 39(3).** Chứng minh rằng với mọi số nguyên a thì

a) $a^2 - a$ chia hết cho 2 ; b) $a^3 - a$ chia hết cho 3 ;

c) $a^5 - a$ chia hết cho 5 ; d) $a^7 - a$ chia chết cho 7.

***Giải :***

a) $a^2 - a = a(a - 1)$, chia hết cho 2.

b) $a^3 - a = a(a^2 - 1) = (a - 1)a(a + 1)$, tích này chia hết cho 3 vì tồn tại một bội của 3.

c) *Cách 1*. $A = a^5 - a = a(a^2 + 1)(a^2 - 1)$.

Nếu $a = 5k$ ($k \in \mathbf{Z}$) thì a chia hết cho 5.

Nếu $a = 5k \pm 1$ ($k \in \mathbf{Z}$) thì $a^2 - 1$ chia hết cho 5.

Nếu $a = 5k \pm 2$ ($k \in \mathbf{Z}$) thì $a^2 + 1$ chia hết cho 5.

Trường hợp nào cũng có một thừa số của A chia hết cho 5.

*Cách 2*. Phân tích $a^5 - a$ thành một tổng của hai số hạng chia hết cho 5 : Một số hạng là tích của năm số nguyên liên tiếp, một số hạng chứa thừa số 5.

$$\begin{aligned} a^5 - a &= a(a^2 - 1)(a^2 + 1) \\ &= a(a^2 - 1)(a^2 - 4 + 5) \\ &= a(a^2 - 1)(a^2 - 4) + 5a(a^2 - 1) \\ &= (a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2) + 5a(a^2 - 1). \end{aligned}$$

Số hạng thứ nhất là tích của năm số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 5, số hạng thứ hai cũng chia hết cho 5. Do đó $a^5 - a$ chia hết cho 5.

*Cách 3*. Giải tương tự như cách 2 : Xét hiệu giữa $a^5 - a$ và tích năm số nguyên liên tiếp $(a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2)$, được $5a(a^2 - 1)$. Do đó $a^5 - a$ chia hết cho 5.

d) *Bạn đọc tự chứng minh.*

*Chú ý :* Bài toán trên là trường hợp riêng của định lí nhỏ Phéc-ma(*). Định lí này thường được diễn đạt dưới hai dạng :

– Dạng 1 : Nếu p là một số nguyên tố và a là một số nguyên thì $a^p - a$ chia hết cho p.

– Dạng 2 : Nếu a là một số nguyên không chia hết cho số nguyên tố p thì $a^{p-1} - 1$ chia hết cho p.

Hai dạng trên là tương đương. Chính Phéc-ma đã phát biểu định lí của mình dưới dạng 2.

**Ví dụ 40(2)**

a) Chứng minh rằng một số chính phương chia cho 3 chỉ có thể có số dư bằng 0 hoặc 1.

---

(*) *Pierre de Fermat* (1601 – 1665), nhà toán học Pháp.

b) Chứng minh rằng một số chính phương chia cho 4 chỉ có thể có số dư bằng 0 hoặc 1.

c) Các số sau có là số chính phương không ?

$$M = 1992^2 + 1993^2 + 1994^2 ;$$

$$N = 1992^2 + 1993^2 + 1994^2 + 1995^2 ;$$

$$P = 1 + 9^{100} + 94^{100} + 1994^{100}.$$

d) Trong dãy sau có tồn tại số nào là số chính phương không ?

11, 111, 1111, 11111, ...

***Giải :*** Gọi A là số chính phương $A = n^2$ ($n \in \mathbf{N}$).

a) Xét các trường hợp :

$n = 3k$ ($k \in \mathbf{N}$) $\Rightarrow A = 9k^2$, chia hết cho 3.

$n = 3k \pm 1$ ($k \in \mathbf{N}$) $\Rightarrow A = 9k^2 \pm 6k + 1$, chia cho 3 dư 1.

Vậy số chính phương chia cho 3 chỉ có thể có số dư bằng 0 hoặc 1.

b) Xét các trường hợp :

$n = 2k$ ($k \in \mathbf{N}$) $\Rightarrow A = 4k^2$, chia hết cho 4.

$n = 2k + 1$ ($k \in \mathbf{N}$) $\Rightarrow A = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1$, chia cho 4 dư 1 (chia cho 8 cũng dư 1).

Vậy số chính phương chia cho 4 chỉ có thể có số dư bằng 0 hoặc 1.

*Chú ý :* Từ bài toán trên ta thấy :

– Số chính phương chẵn thì chia hết cho 4.

– Số chính phương lẻ thì chia cho 4 dư 1 (hơn nữa, chia cho 8 cũng dư 1).

c) Các số $1993^2$, $1994^2$ là số chính phương không chia hết cho 3 nên chia cho 3 dư 1, còn $1992^2$ chia hết cho 3. Số M là số chia cho 3 dư 2, không là số chính phương.

Các số $1992^2$, $1994^2$ là số chính phương chẵn nên chia hết cho 4. Các số $1993^2$, $1995^2$ là số chính phương lẻ nên chia cho 4 dư 1. Số N là số chia cho 4 dư 2, không là số chính phương.

Các số $94^{100}$, $1994^{100}$ là số chính phương chẵn nên chia hết cho 4. Còn $9^{100}$ là số chính phương lẻ nên chia cho 4 dư 1. Số P là số chia cho 4 dư 2, không là số chính phương.

d) Mọi số của dãy đều tận cùng bởi 11 nên là số chia cho 4 dư 3. Mặt khác, số chính phương lẻ thì chia cho 4 dư 1.

Vậy không có số nào của dãy là số chính phương.

*Chú ý 3 :* Khi chứng minh về tính chia hết của các luỹ thừa, ta còn sử dụng đến các hằng đẳng thức 8, 9 ở §2 và công thức Niu-tơn sau đây :

$$(a + b)^n = a^n + c_1a^{n-1}b + c_2a^{n-2}b^2 + ... + c_{n-1}ab^{n-1} + b^n.$$

Trong công thức trên, vế phải là một đa thức có n + 1 hạng tử, bậc của mỗi hạng tử đối với tập hợp các biến a, b là n (phần biến số của mỗi hạng tử có dạng $a^ib^k$, trong đó $i + k = n$ với $0 \le i \le n$, $0 \le k \le n$). Các hệ số $c_1$, $c_2$, ..., $c_{n-1}$ được xác định bởi bảng tam giác Pa-xcan (h.1) :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| n = 0 | 1 | | | | | |
| n = 1 | 1 | 1 | | | | |
| n = 2 | 1 | 2 | 1 | | | |
| n = 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | |
| n = 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | |
| n = 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 |
| | ................. | | | | | |
| | | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ | |

*Hình 1*

| | |
|---|---|
| 4 | 6 |
| | 10 |

*Hình 2*

Trong hình 1, các số dọc theo một cạnh góc vuông bằng 1, các số dọc theo cạnh huyền bằng 1. Cộng mỗi số với số liền sau bên phải thì được số đứng ở hàng dưới của số liền sau ấy, chẳng hạn ở hình 2.

Áp dụng các hằng đẳng thức đó vào tính chia hết, ta có với mọi số nguyên a, b và số tự nhiên n :

$a^n - b^n$ chia hết cho $a - b$ $(a \neq b)$ ;

$a^{2n+1} + b^{2n+1}$ chia hết cho $a + b$ $(a \neq -b)$ ;

$(a + b)^n = \text{BS } a + b^n$ (BS a là bội của a).

Đặc biệt nên lưu ý đến :

$$(a + 1)^n = \text{BS } a + 1 ;$$
$$(a - 1)^{2n} = \text{BS } a + 1 ;$$
$$(a - 1)^{2n+1} = \text{BS } a - 1.$$

**Ví dụ 41(2).** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, biểu thức $16^n - 1$ chia hết cho 17 khi và chỉ khi n là số chẵn.

***Giải :*** *Cách 1.* Nếu n chẵn ($n = 2k$, $k \in \mathbf{N}$) thì $A = 16^{2k} - 1 = (16^2)^k - 1$ chia hết cho $16^2 - 1$ theo hằng đẳng thức 8, mà $16^2 - 1 = 255$, chia hết cho 17. Vậy A chia hết cho 17.

Nếu n lẻ thì $A = 16^n + 1 - 2$, mà $16^n + 1$ chia hết cho 17 theo hằng đẳng thức 9, nên A không chia hết cho 17.

Vậy A chia hết cho 17 $\Leftrightarrow$ n chẵn.

*Cách 2.* $A = 16^n - 1 = (17 - 1)^n - 1 = \text{BS } 17 + (-1)^n - 1$ (theo công thức Niu-tơn).

Nếu n chẵn thì $A = \text{BS } 17 + 1 - 1 = \text{BS } 17$.

Nếu n lẻ thì $A = \text{BS } 17 - 1 - 1$, không chia hết cho 17.

*Chú ý 4 :* Người ta còn dùng phương pháp phản chứng, nguyên lí Đi-rích-lê để chứng minh quan hệ chia hết.

**Ví dụ 42(1).** Chứng minh rằng tồn tại một bội của 2003 có dạng

2004 2004 ... 2004.

***Giải :*** Xét 2004 số :

$a_1 = 2004$

$a_2 = 2004\ 2004$

...

$a_{2004} = 2004\ 2004\ ....\ 2004$ (nhóm 2004 có mặt 2004 lần).

Theo nguyên lí Đi-rích-lê, tồn tại hai số có cùng số dư khi phép chia cho 2003. Gọi hai số đó là $a_m$ và $a_n$ ($1 \leq n < m \leq 2004$) thì $a_m - a_n \ \vdots\ 2003$. Ta có

$$a_m - a_n = 2004 \ldots 2004\ 0000 \ldots 0000 = \underbrace{2004 \ldots 2004}_{m-n \text{ nhóm } 2004} . 10^{4n}.$$

Do $10^{4n}$ và 2003 nguyên tố cùng nhau nên $\underbrace{2004 \ldots 2004}_{m-n \text{ nhóm } 2004}$ chia hết cho 2003.

## II – TÌM SỐ DƯ

**Ví dụ 43(2).** Tìm số dư khi chia $2^{100}$ :

a) Cho 9 ; b) Cho 25 ; c) Cho 125.

***Giải :*** a) Luỹ thừa của 2 sát với một bội số của 9 là $2^3 = 8 = 9 - 1$.

Ta có $2^{100} = 2(2^3)^{33} = 2(9-1)^{33} = 2(\text{BS } 9 - 1) = \text{BS } 9 - 2 = \text{BS } 9 + 7$.

Số dư khi chia $2^{100}$ cho 9 là 7.

b) Luỹ thừa của 2 sát với một bội số của 25 là $2^{10} = 1024 = \text{BS } 25 - 1$.

Ta có $2^{100} = (2^{10})^{10} = (\text{BS } 25 - 1)^{10} = \text{BS } 25 + 1$.

c) Dùng công thức Niu-tơn :

$$2^{100} = (5-1)^{50} = 5^{50} - 50.\,5^{49} + \ldots + \frac{50\,.\,49}{2}\,.\,5^2 - 50\,.\,5 + 1.$$

Không kể phần hệ số của khai triển Niu-tơn thì 48 số hạng đầu đã chứa luỹ thừa của 5 với số mũ lớn hơn hoặc bằng 3 nên chia hết cho 125. Hai số hạng tiếp theo cũng chia hết cho 125, số hạng cuối cùng là 1. Vậy $2^{100} = \text{BS } 125 + 1$.

*Chú ý :* Tổng quát hơn, ta chứng minh được rằng nếu một số tự nhiên n không chia hết cho 5 thì chia $n^{100}$ cho 125 ta được số dư là 1.

Thật vậy, n có dạng $5k \pm 1$ hoặc $5k \pm 2$. Ta có

$$(5k \pm 1)^{100} = (5k)^{100} \pm \ldots + \frac{100\,.\,99}{2}(5k)^2 \pm 100.\,5k + 1 = \text{BS } 125 + 1,$$

$$(5k \pm 2)^{100} = (5k)^{100} \pm \ldots + \frac{100\,.\,99}{2}(5k)^2\,.\,2^{98} \pm 100\,.\,5k\,.\,2^{99} + 2^{100}$$

$$= \text{BS } 125 + 2^{100}.$$

Ta lại có $2^{100} = \text{BS } 125 + 1$ (câu c). Do đó $(5k \pm 2)^{100} = \text{BS } 125 + 1$.

**Ví dụ 44(2).** Tìm ba chữ số tận cùng của $2^{100}$ khi viết trong hệ thập phân.

***Giải :*** Tìm ba chữ số tận cùng của $2^{100}$ là tìm số dư khi chia $2^{100}$ cho 1000. Trước hết tìm số dư khi chia $2^{100}$ cho 125. Theo ví dụ 43 ta có $2^{100} = \text{BS } 125 + 1$, mà $2^{100}$ là số chẵn, nên ba chữ số tận cùng của nó chỉ có thể là 126, 376, 626 hoặc 876.

Hiển nhiên $2^{100}$ chia hết cho 8 nên ba chữ số tận cùng của nó phải chia hết cho 8. Trong bốn số trên chỉ có 376 thoả mãn điều kiện này.

Vậy ba chữ số tận cùng của $2^{100}$ là 376.

*Chú ý :* Bạn đọc tự chứng minh rằng nếu n là số chẵn không chia hết cho 5 thì ba chữ số tận cùng của $n^{100}$ là 376.

**Ví dụ 45(2).** Tìm bốn chữ số tận cùng của $5^{1994}$ khi viết trong hệ thập phân.

***Giải :***

*Cách 1.* $5^4 = 625$. Ta thấy số tận cùng bằng 0625 nâng lên luỹ thừa nguyên dương bất kì vẫn tận cùng bằng 0625 (chỉ cần kiểm tra : ... 0625 × ... 0625 = ... 0625). Do đó :

$$5^{1994} = 5^{4k+2} = 25(5^4)^k = 25(0625)^k = 25\,(\ldots 0625) = \ldots 5625.$$

*Cách 2.* Tìm số dư khi chia $5^{1994}$ cho $10\,000 = 2^4.5^4$.

*Nhận xét :* $5^{4k} - 1$ chia hết cho $5^4 - 1 = (5^2 + 1)(5^2 - 1)$ nên chia hết cho 16. Ta có : $5^{1994} = 5^6(5^{1988} - 1) + 5^6$.

Do $5^6$ chia hết cho $5^4$, còn $5^{1988} - 1$ chia hết cho 16 (theo nhận xét trên) nên $5^6(5^{1988} - 1)$ chia hết cho 10 000. Tính $5^6$, ta được 15625. Vậy bốn chữ số tận cùng của $5^{1994}$ là 5625.

*Chú ý :* Nếu viết $5^{1994} = 5^2(5^{1992} - 1) + 5^2$ thì ta có $5^{1992} - 1$ chia hết cho 16, nhưng $5^2$ không chia hết cho $5^4$.

Như thế trong bài toán này, ta cần viết $5^{1994}$ dưới dạng $5^n(5^{1994-n} - 1) + 5^n$ sao cho $n \geq 4$ và $1994 - n$ chia hết cho 4.

## III – TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ CHIA HẾT

**Ví dụ 46(4).** Tìm số nguyên n để giá trị của biểu thức A chia hết cho giá trị của biểu thức B :

$$A = n^3 + 2n^2 - 3n + 2, \quad B = n^2 - n.$$

***Giải :*** Đặt tính chia :

$$\begin{array}{rl|l}
 & n^3 + 2n^2 - 3n + 2 & n^2 - n \\ \cline{3-3}
- & n^3 - n^2 & n + 3 \\ \cline{1-2}
 & 3n^2 - 3n + 2 & \\
- & 3n^2 - 3n & \\ \cline{1-2}
 & 2 & 
\end{array}$$

Muốn chia hết, ta phải có 2 chia hết cho n(n – 1), do đó 2 chia hết cho n. Ta có :

| n | 1 | –1 | 2 | –2 |
|---|---|---|---|---|
| n – 1 | 0 | –2 | 1 | –3 |
| n(n – 1) | 0 | 2 | 2 | 6 |
| | loại | | | loại |

*Đáp số :* $n = -1$ ; $n = 2$.

*Chú ý :*

a) Không thể nói đa thức A chia hết cho đa thức B. Ở đây chỉ tồn tại những giá trị nguyên của n để giá trị của biểu thức A chia hết cho giá trị của biểu thức B.

b) Có thể thay việc đặt phép chia bằng cách biến đổi :

$$n^3 + 2n^2 - 3n + 2 = n(n^2 - n) + 3(n^2 - n) + 2.$$

**Ví dụ 47(2).** Tìm số nguyên dương n để $n^5 + 1$ chia hết cho $n^3 + 1$.

***Giải :*** Biến đổi :

$$n^5 + 1 \vdots n^3 + 1 \Leftrightarrow n^2(n^3 + 1) - (n^2 - 1) \vdots n^3 + 1$$

$$\Leftrightarrow (n + 1)(n - 1) \vdots (n + 1)(n^2 - n + 1)$$

$$\Leftrightarrow n - 1 \vdots n^2 - n + 1 \text{ (vì } n + 1 \neq 0).$$

Nếu $n = 1$ thì ta được 0 chia hết cho 1.

Nếu $n > 1$ thì $n - 1 < n(n - 1) + 1 = n^2 - n + 1$, do đó $n - 1$ không thể chia hết cho $n^2 - n + 1$.

Vậy giá trị duy nhất của n tìm được là 1.

**Ví dụ 48(2).** Tìm số nguyên n để $n^5 + 1$ chia hết cho $n^3 + 1$.

***Giải :*** Cũng biến đổi như ở ví dụ 47, ta có $n - 1 \vdots n^2 - n + 1$

$$n - 1 \vdots n^2 - n + 1 \Rightarrow n(n - 1) \vdots n^2 - n + 1 \Rightarrow n^2 - n \vdots n^2 - n + 1$$

$$\Rightarrow (n^2 - n + 1) - 1 \vdots n^2 - n + 1 \Rightarrow 1 \vdots n^2 - n + 1.$$

Có hai trường hợp :

$n^2 - n + 1 = 1 \Leftrightarrow n(n - 1) = 0 \Leftrightarrow n = 0$ ; $n = 1$. Các giá trị này thoả mãn đề bài.

$n^2 - n + 1 = -1 \Leftrightarrow n^2 - n + 2 = 0$, vô nghiệm.

Vậy $n = 0$, $n = 1$ là hai số phải tìm.

*Chú ý :* Từ $n - 1 \,\vdots\, n^2 - n + 1$ suy ra $n(n-1) \,\vdots\, n^2 - n + 1$ là phép kéo theo chứ không là phép biến đổi tương đương. Do đó sau khi tìm được $n = 0$, $n = 1$, ta phải thử lại.

**Ví dụ 49(2).** Tìm số tự nhiên n sao cho $2^n - 1$ chia hết cho 7.

***Giải :*** Nếu $n = 3k$ ($k \in \mathbf{N}$) thì $2^n - 1 = 2^{3k} - 1 = 8^k - 1$ chia hết cho 7.

Nếu $n = 3k + 1$ ($k \in \mathbf{N}$) thì $2^n - 1 = 2^{3k+1} - 1 = 2(2^{3k} - 1) + 1 = \text{BS } 7 + 1$.

Nếu $n = 3k + 2$ ($k \in \mathbf{N}$) thì $2^n - 1 = 2^{3k+2} - 1 = 4(2^{3k} - 1) + 3 = \text{BS } 7 + 3$.

Vậy $2^n - 1$ chia hết cho $7 \Leftrightarrow n = 3k$ ($k \in \mathbf{N}$).

## Bài tập

**186(3).** Chứng minh rằng với mọi số nguyên n, ta có :

a) $n^3 + 3n^2 + 2n$ chia hết cho 6 ;

b) $(n^2 + n - 1)^2 - 1$ chia hết cho 24.

**187(3).** Chứng minh rằng :

a) $n^3 + 6n^2 + 8n$ chia hết cho 48 với mọi số chẵn n ;

b) $n^4 - 10n^2 + 9$ chia hết cho 384 với mọi số lẻ n.

**188(3).** Chứng minh rằng $n^6 + n^4 - 2n^2$ chia hết cho 72 với mọi số nguyên n.

**189(3).** Chứngminh rằng $3^{2n} - 9$ chia hết cho 72 với mọi số nguyên dương n.

**190(3).** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên a và n :

a) $7^n$ và $7^{n+4}$ có hai chữ số tận cùng như nhau ;

b) a và $a^5$ có chữ số tận cùng như nhau ;

c) $a^n$ và $a^{n+4}$ có chữ số tận cùng như nhau ($n \geq 1$).

**191(3).** Tìm điều kiện của số tự nhiên a để $a^2 + 3a + 2$ chia hết cho 6.

**192(2).** a) Cho a là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $a^2 - 1$ chia hết cho 24.

b) Chứng minh rằng nếu a và b là các số nguyên tố lớn hơn 3 thì $a^2 - b^2$ chia hết cho 24.

c) Tìm điều kiện của số tự nhiên a để $a^4 - 1$ chia hết cho 240.

**193(2).** Tìm ba số nguyên tố liên tiếp a, b, c sao cho $a^2 + b^2 + c^2$ cũng là số nguyên tố.

**194(2).** Cho bốn số nguyên dương a, b, c, d thoả mãn $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Chứng minh rằng $a + b + c + d$ là hợp số.

**195(3).** Cho bốn số nguyên dương a, b, c, d thoả mãn $ab = cd$. Chứng minh rằng $a^5 + b^5 + c^5 + d^5$ là hợp số.

**196(2).** Cho các số tự nhiên a và b. Chứng minh rằng :

a) Nếu $a^2 + b^2$ chia hết cho 3 thì a và b chia hết cho 3.

b) Nếu $a^2 + b^2$ chia hết cho 7 thì a và b chia hết cho 7.

**197(3).** Cho các số nguyên a, b, c. Chứng minh rằng :

a) Nếu $a + b + c$ chia hết cho 6 thì $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 6.

b) Nếu $a + b + c$ chia hết cho 30 thì $a^5 + b^5 + c^5$ chia hết cho 30.

**198(3).** Cho các số nguyên a, b, c thoả mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng :

a) $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 3abc ;

b) $a^5 + b^5 + c^5$ chia hết cho 5abc.

**199(3).** a) Viết số 1998 thành tổng của ba số tự nhiên tuỳ ý. Chứng minh rằng tổng các lập phương của ba số tự nhiên đó chia hết cho 6.

b)* Viết số $1995^{1995}$ thành tổng của nhiều số tự nhiên. Tổng các lập phương của các số tự nhiên đó chia cho 6 dư bao nhiêu ?

**200(3).** Chứng minh rằng với mọi số nguyên a và b :

a) $a^3b - ab^3$ chia hết cho 6 ; b) $a^5b - ab^5$ chia hết cho 30.

**201(3).** Chứng minh rằng mọi số tự nhiên đều viết được dưới dạng $b^3 + 6c$ trong đó b và c là các số nguyên.

**202*(2).** Chứng minh rằng nếu các số tự nhiên a, b, c thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 = c^2$ thì abc chia hết cho 60.

**203(3).** Chứng minh rằng tổng các lập phương của ba số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 9.

**204(3).** Chứng minh rằng nếu tổng các lập phương của ba số nguyên chia hết cho 9 thì tồn tại một trong ba số đó là bội số của 3.

**205(2).** Cho dãy số 7, 13, 25, ..., $3n(n-1)+7$ ($n \in \mathbf{N}$). Chứng minh rằng :

a) Trong năm số hạng liên tiếp của dãy, bao giờ cũng tồn tại một bội số của 25.

b) Không có số hạng nào của dãy là lập phương của một số nguyên.

**206(3).** a) Chứng minh rằng nếu số tự nhiên a không chia hết cho 7 thì

$$a^6 - 1 \text{ chia hết cho } 7.$$

b) Chứng minh rằng nếu n là lập phương của một số tự nhiên thì

$$(n-1)n(n+1) \text{ chia hết cho } 504.$$

**207(3).** Chứng minh rằng A chia hết cho B với :

a) $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 99^3 + 100^3$,

$B = 1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100$ ;

b) $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 98^3 + 99^3$,

$B = 1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99$.

**208(2).** Các số sau có là số chính phương không ?

a) $A = 22 ... 24$ (có 50 chữ số 2) ; b) $B = 44 ... 4$ (có 100 chữ số 4) ;

c) $A = 1994^7 + 7$ ; d)* $B = 144 ... 4$ (có 99 chữ số 4).

**209(2).** Có thể dùng cả năm chữ số 2, 3, 4, 5, 6 lập thành số chính phương có năm chữ số được không ?

**210(2).** Chứng minh rằng tổng của hai số chính phương lẻ không là số chính phương.

**211(2).** Chứng minh rằng mọi số lẻ đều viết được dưới dạng hiệu của hai số chính phương.

**212*(2).** Chứng minh rằng :

a) $A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + 100^2$ không là số chính phương ;

b) $B = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + 56^2$ không là số chính phương ;

c) $C = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + n$ là số chính phương (n lẻ).

**213(2).** Chứng minh rằng :

a) Một số chính phương tận cùng bằng 9 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn.

b) Một số chính phương lẻ thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn.

c) Một số chính phương tận cùng bằng 6 thì chữ số hàng chục là chữ số lẻ.

d) Một số chính phương tận cùng bằng 5 thì chữ số hàng chục bằng 2 và chữ số hàng trăm là chữ số chẵn.

**214(2).** a) Một số chính phương có chữ số hàng chục bằng 5. Tìm chữ số hàng đơn vị.

b) Một số chính phương có chữ số hàng chục là chữ số lẻ. Tìm chữ số hàng đơn vị.

c) Có bao nhiêu số tự nhiên n từ 1 đến 100 mà chữ số hàng chục của $n^2$ là chữ số lẻ ?

**215(3).** Chứng minh rằng :

a) Tích của hai số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

b)* Tích của ba số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

c)* Tích của bốn số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

**216(2).** Cho hai số tự nhiên a và b, trong đó $a = b - 2$.

Chứng minh rằng $b^3 - a^3$ viết được dưới dạng tổng của ba số chính phương.

**217(3).** Tìm số nguyên dương n để biểu thức sau là số chính phương :

a) $n^2 - n + 2$ ; b) $n^4 - n + 2$ ;

c) $n^3 - n + 2$ ; d)* $n^5 - n + 2$.

**218(2).** Tìm số nguyên tố p để $4p + 1$ là số chính phương.

**219*(2).** Chứng minh rằng nếu $n + 1$ và $2n + 1$ ($n \in \mathbf{N}$) đều là số chính phương thì n chia hết cho 24.

**220*(2).** Chứng minh rằng nếu $2n + 1$ và $3n + 1$ ($n \in \mathbf{N}$) đều là số chính phương thì n chia hết cho 40.

**221(2).** Tìm số nguyên tố p để :

a) $2p^2 + 1$ cũng là số nguyên tố ;

b) $4p^2 + 1$ và $6p^2 + 1$ cũng là những số nguyên tố.

**222(3).** Tìm số tự nhiên n để giá trị của biểu thức là số nguyên tố :

a) $12n^2 - 5n - 25$ ; b) $8n^2 + 10n + 3$ ; c) $\frac{n^2 + 3n}{4}$.

**223(3).** Chứng minh rằng với mọi số nguyên n :

a) $n^2 + 7n + 22$ không chia hết cho 9 ;

b) $n^2 - 5n - 49$ không chia hết cho 169.

**224(3).** Các số tự nhiên n và $n^2$ có tổng các chữ số bằng nhau. Tìm số dư của n khi chia cho 9.

**225*(1).** a) Cho chín số tự nhiên từ 1 đến 9 xếp theo thứ tự tuỳ ý. Lấy số thứ nhất trừ 1, lấy số thứ hai trừ 2, lấy số thứ ba trừ 3,..., lấy số thứ chín trừ 9. Chứng minh rằng tích của chín số mới lập được là một số chẵn.

b) Cho hai dãy số $a_1, a_2, a_3, ..., a_9$ và $b_1, b_2, b_3, ..., b_9$, trong đó $a_1, a_2, ..., a_9$ là các số nguyên và $b_1, b_2, ..., b_9$ cũng là chín số nguyên trên nhưng lấy theo thứ tự khác. Chứng minh rằng tích $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) ... (a_9 - b_9)$ là số chẵn.

**226(3).** Tìm số nguyên n sao cho :

a) $n^2 + 2n - 4$ chia hết cho 11 ;

b) $2n^3 + n^2 + 7n + 1$ chia hết cho $2n - 1$ ;

c) $n^3 - 2$ chia hết cho $n - 2$ ;

d) $n^3 - 3n^2 - 3n - 1$ chia hết cho $n^2 + n + 1$ ;

e) $n^4 - 2n^3 + 2n^2 - 2n + 1$ chia hết cho $n^4 - 1$ ;

g)* $n^3 - n^2 + 2n + 7$ chia hết cho $n^2 + 1$.

**227(1).** *Đố vui : Năm sinh của hai bạn*

Một ngày của thập kỉ cuối cùng của thế kỉ XX, một người khách đến thăm trường gặp hai học sinh. Người khách hỏi :

– Có lẽ hai em bằng tuổi nhau ?

Bạn Mai trả lời :

– Không, em hơn bạn em một tuổi. Nhưng tổng các chữ số của năm sinh mỗi chúng em đều là số chẵn.

– Vậy thì các em sinh năm 1979 và 1980, đúng không ?

Người khách đã suy luận thế nào ?

**228(1).** Tìm số nguyên dương n để $2^n$ là số nằm giữa hai số nguyên tố sinh đôi(*) (hai số nguyên tố gọi là sinh đôi nếu chúng hơn kém nhau 2 đơn vị).

**229*(2).** Cho các số nguyên a, b, c, d, e, g thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = g^2$. Chứng minh rằng tích abcdeg là số chẵn.

**230(1).** Chứng minh rằng với mọi số nguyên a, b, c, d, tích

$$(a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d) \text{ chia hết cho } 12.$$

**231*(1).** Chứng minh rằng có thể có đến 33 số nguyên dương khác nhau, không quá 50, trong đó không tồn tại hai số nào mà một số gấp đôi số còn lại.

**232(1).** Chứng minh rằng tồn tại vô số bội của 2003 mà trong biểu diễn thập phân của chúng không có các chữ số 0, 1, 2, 3.

**233(1).** Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên k sao cho $2003^k - 1$ chia hết cho 51.

*Các bài toán sử dụng các hằng đẳng thức 8, 9 và công thức Niu-tơn.*

**234(2).** Chứng minh rằng $2^{51} - 1$ chia hết cho 7.

**235(2).** Chứng minh rằng $2^{70} + 3^{70}$ chia hết cho 13.

**236(2).** Chứng minh rằng $17^{19} + 19^{17}$ chia hết cho 18.

**237(2).** Chứng minh rằng $36^{63} - 1$ chia hết cho 7, nhưng không chia hết cho 37.

**238(2).** Chứng minh rằng các số sau là hợp số :

a) $4^{20} - 1$ ; b) 1 000 001. c) $2^{50} + 1$.

**239(2).** Chứng minh rằng $1 . 4 + 2 . 4^2 + 3 . 4^3 + 4 . 4^4 + 5 . 4^5 + 6 . 4^6$ chia hết cho 3.

**240(2).** Chứng minh rằng biểu thức $A = 31^n - 15^n - 24^n + 8^n$ chia hết cho 112 với mọi số tự nhiên n.

**241(2).** Tìm số tự nhiên n để $3^n - 1$ chia hết cho 8.

**242(2).** Tìm số tự nhiên n để $3^{2n+3} + 2^{4n+1}$ chia hết cho 25.

**243(2).** Tìm số tự nhiên n để $5^n - 2^n$ chia hết cho 9.

**244(2).** Tìm số tự nhiên n để $5^n - 2^n$ chia hết cho 63.

---

(*) Còn gọi là hai số nguyên tố sánh đôi.

**245(2).** Tìm số tự nhiên n để $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ chia hết cho 5.

**246(2).** Tìm số dư khi chia $22^{22} + 55^{55}$ cho 7.

**247(2).** Tìm số dư khi chia $2^{1994}$ cho 7.

**248(2).** Tìm số dư khi chia $3^{1993}$ cho 7.

**249(2).** Tìm số dư khi chia $1992^{1993} + 1994^{1995}$ cho 7.

**250(2).** Tìm số dư khi chia $3^{1998} + 5^{1998}$ cho 13.

**251*(2).** Tìm số dư khi chia $9^{10^{11}} - 5^{9^{10}}$ cho 13.

**252*(2).** Chứng minh rằng số $A = 2^{2^{2n+1}} + 3$ là hợp số với mọi số nguyên dương n.

**253(2).** Tìm số dư khi chia các số sau cho 7 :

a) $2^{9^{1945}}$ ; b) $3^{2^{1930}}$

**254(2).** Tìm số dư khi chia $(n^3 - 1)^{111} . (n^2 - 1)^{333}$ cho n ($n \in \mathbf{N}$).

**255(2).** Cho $ab = 455^{12}$. Tìm số dư trong phép chia a + b cho 4.

**256(2).** Tìm hai chữ số tận cùng của :

a) $3^{999}$ ; b) $7^{7^7}$.

**257(2).** Tìm ba chữ số tận cùng của $3^{100}$.

**258*(2).** Thay các dấu * bởi các chữ số thích hợp :

$$89^6 = 496\,9 * * \,290\,961.$$

## TÍNH CHIA HẾT ĐỐI VỚI ĐA THỨC

### I – TÌM DƯ CỦA PHÉP CHIA MÀ KHÔNG THỰC HIỆN PHÉP CHIA

#### 1. Đa thức chia có dạng x – a (a là hằng)

**Ví dụ 50(4).** Chứng minh rằng số dư khi chia đa thức f(x) cho nhị thức x – a bằng giá trị của đa thức f(x) tại x = a.

Định lí Bê-du (*Bézout*, 1730 – 1783, nhà toán học Pháp).

*Giải :* Do đa thức chia x – a có bậc nhất nên số dư khi chia f(x) cho x – a là hằng số r.

Ta có $$f(x) = (x - a) \,.\, Q(x) + r.$$

Đẳng thức trên đúng với mọi x nên với x = a ta có

$$f(a) = 0 \,.\, Q(a) + r \text{ hay } \boxed{f(a) = r.}$$

*Chú ý :* Từ định lí Bê-du ta suy ra :

Đa thức f(x) chia hết cho x – a khi và chỉ khi f(a) = 0 (tức là khi và chỉ khi a là nghiệm của đa thức).

**Ví dụ 51(4).** Chứng minh rằng nếu đa thức f(x) có tổng các hệ số bằng 0 thì đa thức ấy chia hết cho x – 1.

***Giải :*** Gọi $$f(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n.$$

Theo giả thiết, $$a_o + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n = 0. \quad (1)$$

Theo định lí Bê-du, số dư khi chia f(x) cho x – 1 là

$$r = f(1) = a_o + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra r = 0. Vậy f(x) chia hết cho x – 1.

**Ví dụ 52(4).** Chứng minh rằng nếu đa thức f(x) có tổng các hệ số của các hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các hạng tử bậc lẻ thì đa thức ấy chia hết cho x + 1.

***Giải :*** Gọi $f(x) = a_o x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + a_2 x^{2n-2} + \ldots + a_{2n-2} x^2 + a_{2n-1} x + a_{2n}$, trong đó $a_o$ có thể bằng 0.

Theo giả thiết, $a_o + a_2 + \ldots + a_{2n} = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1}$ nên

$$(a_o + a_2 + \ldots + a_{2n}) - (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1}) = 0. \quad (1)$$

Theo định lí Bê-du, số dư khi chia f(x) cho x + 1 bằng

$$r = f(-1) = a_o - a_1 + a_2 - \ldots + a_{2n-2} - a_{2n-1} + a_{2n}$$
$$= (a_o + a_2 + \ldots + a_{2n}) - (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1}). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra r = 0. Vậy f(x) chia hết cho x + 1.

### 2. Đa thức chia có bậc từ bậc hai trở lên

**Ví dụ 53(4).** Tìm dư khi chia

$$x^7 + x^5 + x^3 + 1 \text{ cho } x^2 - 1.$$

*Giải :* Để tìm dư trong trường hợp này, ta thường dùng các cách sau :

*Cách 1* (tách ra ở đa thức bị chia những đa thức chia hết cho đa thức chia).

Ta biết rằng $x^n - 1$ chia hết cho $x - 1$ với mọi số tự nhiên n nên $x^{2n} - 1$ chia hết cho $x^2 - 1$.

Do đó $x^4 - 1$, $x^6 - 1$, ... chia hết cho $x^2 - 1$.

Ta có

$$x^7 + x^5 + x^3 + 1 = x^7 - x + x^5 - x + x^3 - x + 3x + 1$$
$$= x(x^6 - 1) + x(x^4 - 1) + x(x^2 - 1) + (3x + 1).$$

Dư khi chia $x^7 + x^5 + x^3 + 1$ cho $x^2 - 1$ là $3x + 1$.

*Cách 2* (xét giá trị riêng).

Gọi thương là Q(x), dư là ax + b. Ta có

$$x^7 + x^5 + x^3 + 1 = (x + 1)(x - 1).\,Q(x) + ax + b \text{ với mọi } x.$$

Đẳng thức đúng với mọi x nên với $x = 1$ ta được $4 = a + b$ (1), với $x = -1$ ta được $-2 = -a + b$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $a = 3$, $b = 1$.

Dư phải tìm là $3x + 1$.

*Chú ý :* Để tách ra các đa thức chia hết cho $x^2 - 1$, hoặc $x^2 + 1$, cần nhớ lại các hằng đẳng thức 8 và 9 :

$$a^n - b^n \text{ chia hết cho } a - b \ (a \neq b)\ ;$$

$$a^n + b^n \text{ (n lẻ) chia hết cho } a + b \ (a \neq -b).$$

## II – SƠ ĐỒ HOÓC–NE(*)

### 1. Ví dụ 54(4). Chia các đa thức :

a) $(x^3 - 5x^2 + 8x - 4) : (x - 2)$ ;  b) $(x^3 - 9x^2 + 6x + 10) : (x + 1)$ ;

c) $(x^3 - 7x + 6) : (x + 3)$.

---

(*) *Horner* (1786 – 1837), nhà toán học Anh.

*Giải :* Đặt tính chia đa thức, ta được các kết quả (bạn đọc tự giải) :

a) Thương là $x^2 - 3x + 2$.

b) Thương là $x^2 - 10x + 16$, dư là $-6$.

c) Thương là $x^2 - 3x + 2$.

## 2. Sơ đồ Hoóc-ne

Ta có thể tìm được kết quả khi chia đa thức f(x) cho nhị thức x – a (a là hằng số) bằng một cách khác.

Trở lại câu a) của ví dụ trên :

$(x^3 - 5x^2 + 8x - 4) : (x - 2)$. Các hệ số của đa thức bị chia thứ tự là 1, –5, 8, –4 ; hằng số a trong ví dụ này là 2.

a) Đặt các hệ số của đa thức bị chia theo thứ tự vào các cột của dòng trên :

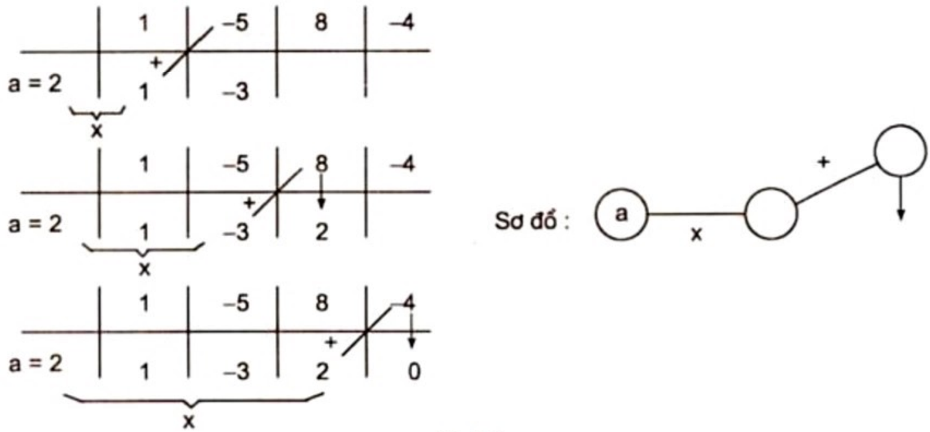
| | 1 | –5 | 8 | –4 |
|---|---|---|---|---|
| a = 2 | | | | |

b) Trong bốn cột để trống ở dòng dưới, ba cột đầu cho ta các hệ số của đa thức thương, cột cuối cùng cho ta số dư.

– Số ở cột thứ nhất của dòng dưới bằng số tương ứng ở dòng trên :

| | 1 | –5 | 8 | –4 |
|---|---|---|---|---|
| a = 2 | 1 | | | |

– Kể từ cột thứ hai, mỗi số ở dòng dưới được xác định bằng cách lấy a nhân với số cùng dòng liền trước, rồi cộng với số cùng cột ở dòng trên (xem hình 3).




*Hình 3*

Ta có thương bằng $x^2 - 3x + 2$, số dư bằng 0.

Sơ đồ của thuật toán trên được gọi là sơ đồ Hoóc-ne.

Bạn đọc hãy dùng sơ đồ trên để kiểm tra lại kết quả của các câu b) và c).

Như vậy nếu đa thức bị chia là $a_ox^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, đa thức chia là $x - a$, ta được thương $b_ox^2 + b_1x + b_2$, dư r. Theo sơ đồ Hoóc-ne ta có :

| | $a_o$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
|---|---|---|---|---|
| a | $b_o = a_o$ | $b_1 = ab_o + a_1$ | $b_2 = ab_1 + a_2$ | $r = ab_2 + a_3$ |

### 3. Chứng minh sơ đồ Hoóc-ne

Tổng quát với đa thức bị chia là $a_ox^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$, đa thức chia là $x - a$, thương là $b_ox^{n-1} + b_1x^{n-2} + ... + b_{n-2}x + b_{n-1}$, dư r. Ta cần chứng minh rằng :

$$\begin{aligned}
b_o &= a_o \\
b_1 &= ab_o + a_1 \\
b_2 &= ab_1 + a_2 \\
&\dots \\
b_{n-1} &= ab_{n-2} + a_{n-1} \\
r &= ab_{n-1} + a_n.
\end{aligned}$$

Thật vậy, thực hiện phép tính

$$(x - a)\,(b_ox^{n-1} + b_1x^{n-2} + ... + b_{n-2}\,x + b_{n-1}) + r$$

rồi rút gọn, ta được

$$b_ox^n + (b_1 - ab_o)x^{n-1} + ... + (b_{n-1} - ab_{n-2})x - ab_{n-1} + r.$$

Đồng nhất đa thức này với đa thức bị chia, ta được :

$$\begin{aligned}
b_o &= a_o \\
b_1 - ab_o &= a_1 \\
\dots &\quad \dots \\
b_{n-1} - ab_{n-2} &= a_{n-1} \\
r - ab_{n-1} &= a_n.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

### 4. Áp dụng sơ đồ Hoóc-ne để tính giá trị của đa thức f(x) tại x = a

Sơ đồ Hoóc-ne cho ta thương và dư khi chia đa thức f(x) cho nhị thức x – a. Chú ý rằng theo định lí Bê-du, số dư khi chia f(x) cho x – a bằng f(a). Do đó dùng sơ đồ Hoóc-ne ta cũng tính được giá trị của đa thức f(x) tại x = a.

**Ví dụ 55(4).** Tính giá trị của đa thức $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ tại x = 37.

*Giải :* Theo định lí Bê-du, f(37) là số dư khi chia f(x) cho x – 37. Ta lập sơ đồ Hoóc-ne :

| | 1 | 3 | 0 | –4 |
|---|---|---|---|---|
| a = 37 | 1 | 37.1 + 3 = 40 | 37. 40 + 0 = 1480 | 37.1480 – 4 = 54 756 |

Vậy f(37) = 54 756.

## III – CHỨNG MINH MỘT ĐA THỨC CHIA HẾT CHO MỘT ĐA THỨC KHÁC

Ta chỉ xét các đa thức một biến. Thường có các cách sau :

**1. Cách 1.** Phân tích đa thức bị chia thành nhân tử, trong đó có một nhân tử là đa thức chia.

**Ví dụ 56(4).** Chứng minh rằng $x^{8n} + x^{4n} + 1$ chia hết cho $x^{2n} + x^n + 1$ với mọi số tự nhiên n.

*Giải :* $x^{8n} + x^{4n} + 1 = x^{8n} + 2x^{4n} + 1 - x^{4n} = (x^{4n} + 1)^2 - (x^{2n})^2$

$$= (x^{4n} + x^{2n} + 1)(x^{4n} - x^{2n} + 1).$$

Tiếp tục phân tích :

$$x^{4n} + x^{2n} + 1 = x^{4n} + 2x^{2n} + 1 - x^{2n}$$
$$= (x^{2n} + 1)^2 - (x^n)^2 = (x^{2n} + x^n + 1)(x^{2n} - x^n + 1).$$

Vậy $x^{8n} + x^{4n} + 1$ chia hết cho $x^{2n} + x^n + 1$.

**2. Cách 2.** Biến đổi đa thức bị chia thành một tổng các đa thức chia hết cho đa thức chia.

**Ví dụ 57(4).** Chứng minh rằng $x^{3m+1} + x^{3n+2} + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ với mọi số tự nhiên m, n.

*Giải :* $x^{3m+1} + x^{3n+2} + 1 = x^{3m+1} - x + x^{3n+2} - x^2 + x^2 + x + 1$

$$= x(x^{3m} - 1) + x^2(x^{3n} - 1) + (x^2 + x + 1).$$

Ta thấy $x^{3m} - 1$ và $x^{3n} - 1$ chia hết cho $x^3 - 1$, do đó chia hết cho $x^2 + x + 1$. Vậy $x^{3m+1} + x^{3n+2} + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$.

**Ví dụ 58(4).** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên m, n thì

$$x^{6m+4} + x^{6n+2} + 1 \text{ chia hết cho } x^2 - x + 1.$$

*Giải :*

$$x^{6m+4} + x^{6n+2} + 1 = x^{6m+4} - x^4 + x^{6n+2} - x^2 + x^4 + x^2 + 1$$

$$= x^4(x^{6m} - 1) + x^2(x^{6n} - 1) + (x^4 + x^2 + 1).$$

Do $x^{6m} - 1 \vdots x^6 - 1$, $x^{6n} - 1 \vdots x^6 - 1$ và

$$x^6 - 1 = (x^3 + 1)(x^3 - 1) \vdots x^2 - x + 1,$$

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 \vdots x^2 - x + 1$$

nên suy ra điều phải chứng minh.

**3. Cách 3.** Sử dụng các biến đổi tương đương, chẳng hạn để chứng minh $f(x) \vdots g(x)$, có thể chứng minh $f(x) + g(x) \vdots g(x)$ hoặc $f(x) - g(x) \vdots g(x)$.

Xem bài tập 268.

**4. Cách 4.** Chứng tỏ rằng mọi nghiệm của đa thức chia đều là nghiệm của đa thức bị chia(*) (ta công nhận rằng điều này dẫn đến đa thức bị chia chia hết cho đa thức chia).

**Ví dụ 59(4).** Cho $f(x) = (x^2 + x - 1)^{10} + (x^2 - x + 1)^{10} - 2$. Chứng minh rằng f(x) chia hết cho $x^2 - x$.

*Giải :* Đa thức chia có hai nghiệm : x = 0 và x = 1. Ta sẽ chứng tỏ rằng x = 0 và x = 1 cũng là nghiệm của đa thức bị chia.

---

(*) Chú ý rằng ở đây đòi hỏi phải xét cả nghiệm bội của đa thức. Chẳng hạn 1 là nghiệm bội hai của đa thức $(x - 1)^2$, 1 là nghiệm bội ba của đa thức $(x - 1)^3$. Để chia hết, nếu đa thức chia có nghiệm a với bội k thì đa thức bị chia phải có nghiệm a với bội lớn hơn hay bằng k.

Ta có f(0) = 1 + 1 – 2 = 0 nên f(x) chia hết cho x. Ta lại có f(1) = 1 + 1 – 2 = 0 nên f(x) chia hết cho x – 1. Các nhân tử x và x – 1 không chứa nhân tử chung.

Do đó f(x) chia hết cho x(x – 1).

## Bài tập

**259(4).** Không đặt tính chia đa thức, hãy xét xem đa thức $x^3 - 9x^2 + 6x + 16$ có hay không chia hết cho :

a) $x + 1$ ; b) $x - 3$.

**260(4).** Tìm dư khi chia các đa thức sau :

a) $x^{41} : (x^2 + 1)$ ; b) $x^{43} : (x^2 + 1)$.

**261(4).** Tìm dư khi chia $x + x^3 + x^9 + x^{27}$ cho :

a) $x - 1$ ; b) $x^2 - 1$.

**262(4).** Tìm dư khi chia $x^{99} + x^{55} + x^{11} + x + 7$ cho :

a) $x + 1$ ; b) $x^2 + 1$.

**263(4).** Tìm dư khi chia đa thức $f(x) = x^{50} + x^{49} + ... + x^2 + x + 1$ cho $x^2 - 1$.

**264(4).** Tìm đa thức f(x), biết rằng f(x) chia cho x – 3 thì dư 7, f(x) chia cho x – 2 thì dư 5, f(x) chia cho (x – 2) (x – 3) thì được thương là 3x và còn dư.

**265(4).** Tìm đa thức f(x), biết rằng f(x) chia cho x – 3 thì dư 2, f(x) chia cho x + 4 thì dư 9, còn f(x) chia cho $x^2 + x - 12$ thì được thương $x^2 + 3$ và còn dư.

**266(4).** Khi chia đơn thức $x^8$ cho $x + \frac{1}{2}$, ta được thương là B(x) và dư là số $r_1$.

Khi chia B(x) cho $x + \frac{1}{2}$, ta được thương là C(x) và dư là số $r_2$. Tính $r_2$.

**267(4).** Chứng minh rằng :

a) $x^{50} + x^{10} + 1$ chia hết cho $x^{20} + x^{10} + 1$ ;

b) $x^2 - x^9 - x^{1945}$ chia hết cho $x^2 - x + 1$ ;

c) $x^{10} - 10x + 9$ chia hết cho $(x - 1)^2$ ;

d)* $8x^9 - 9x^8 + 1$ chia hết cho $(x - 1)^2$.

**268(4).** Chứng minh rằng f(x) chia hết cho g(x) với :

$$f(x) = x^{99} + x^{88} + x^{77} + ... + x^{11} + 1\ ;$$

$$g(x) = x^{9} + x^{8} + x^{7} + ... + x + 1.$$

**269(4).** Chứng minh rằng đa thức $(x + y)^6 + (x - y)^6$ chia hết cho đa thức $x^2 + y^2$.

**270(4).** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n :

a) $(x + 1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ chia hết cho $x(x + 1)(2x + 1)$ ;

b) $x^{4n+2} + 2x^{2n+1} + 1$ chia hết cho $(x + 1)^2$ ;

c) $(x + 1)^{4n+2} + (x - 1)^{4n+2}$ chia hết cho $x^2 + 1$.

**271(4).** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $(x^n - 1)(x^{n+1} - 1)$ chia hết cho $(x + 1)(x - 1)^2$.

**272(4).** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên m, n thì

$$x^{6m+4} + x^{6n+2} + 1 \text{ chia hết cho } x^4 + x^2 + 1.$$

**273*(4).** Tìm số tự nhiên n sao cho $x^{2n} + x^n + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$.

**274(4).** Xác định số k để đa thức

$$A = x^3 + y^3 + z^3 + kxyz \text{ chia hết cho đa thức } x + y + z.$$

**275*(4).** Cho đa thức f(x) có các hệ số nguyên. Biết rằng f(0), f(1) là các số lẻ. Chứng minh rằng đa thức f(x) không có nghiệm nguyên.

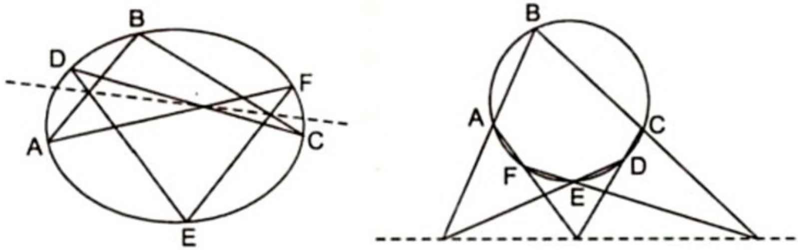
## Ble-dơ Pa-xcan và I-xắc Niu-tơn

Pa-xcan *(Blaise Pascal)* sinh ở Pháp năm 1623. Lúc nhỏ Pa-xcan rất yếu nên cha ông đã giấu đi mọi sách vở liên quan đến Toán học, sợ rằng những suy nghĩ căng thẳng sẽ ảnh hưởng không tốt đến sức khoẻ của con mình.

*Ble-dơ Pa-xcan*

Nhưng cậu bé Pa-xcan vẫn đến với Toán học : cậu đã tự xây dựng môn Hình học "của riêng mình" : cậu đặt tên cho đường thẳng là cái gậy, đường tròn là bánh xe, hình chữ nhật là mặt bàn... Cậu cũng đã công nhận một số tính chất đầu tiên (tiên đề) rồi chứng minh được nhiều tính chất khác, trong đó có định lí về tổng các góc của một tam giác. Lúc đó cậu mới 12 tuổi.

Bốn năm sau, Pa-xcan lại hoàn thành một luận văn khoa học, trong đó có định lí về "hình lục giác thần kì" : Nếu một lục giác nội tiếp một đường tròn (hoặc một elip, một parabol, tổng quát : nội tiếp một thiết diện cônic) thì ba giao điểm của các đường thẳng chứa cặp cạnh đối nằm trên một đường thẳng" (h.4). Định lí nổi tiếng này là một trong những định lí cơ sở của môn Hình học xạ ảnh.




*Hình 4*

Năm 19 tuổi, để giúp cha đỡ vất vả trong tính toán, Pa-xcan đã làm tặng cha một chiếc máy tính. Máy tính này gồm nhiều bánh xe răng cưa liên kết với nhau, các bánh xe gắn với các chữ số, sự chuyển dịch của bánh xe làm chuyển dịch các chữ số, cho phép thực hiện được các phép tính cộng và trừ. Sáng chế này được giới khoa học đánh giá cao.

Năm 1654, Pa-xcan công bố công trình về tam giác số, được gọi là tam giác Pa-xcan, cho phép tính được một cách đơn giản các hệ số trong khai triển của nhị thức Niu-tơn. Pa-xcan là người đầu tiên định nghĩa chính xác và vận dụng phương pháp quy nạp toán học để chứng minh.

Pa-xcan còn nghiên cứu các biến cố ngẫu nhiên, đặt nền móng cho môn xác suất. Ông cũng nghiên cứu về các đại lượng vô cùng bé và đã đi rất gần đến phép tính vi phân và tích phân mà Niu-tơn và Lai-bơ-nít là những người sáng lập.

Về vật lí học, Pa-xcan là một nhà thực hành tài giỏi. Ông đã tìm ra định luật mang tên ông : Các chất lỏng và chất khí truyền áp suất đi nguyên vẹn, không thay đổi và theo mọi phương. Các máy ép dùng nước, thang máy dùng nước, phanh hãm dùng dầu... đều vận dụng định luật này.

Pa-xcan cũng là một nhà văn với cuốn *Tư tưởng* mang tính ngụ ngôn luân lí. Pa-xcan bị một tai nạn xe ngựa vào năm 1654 và mất năm 1662, lúc mới 39 tuổi.

I-xắc Niu-tơn sinh ở Anh năm 1642(*) và mất bố từ khi cậu chưa chào đời.

---

(*) *Isaac Newton* (1642 – 1727), nhà toán học và vật lí học Anh. Theo *Bách khoa toàn thư Anh* và *Petit Larousse* (Pháp), Niu-tơn sinh năm 1642. Theo *Bách khoa Đức* và *Đại bách khoa toàn thư Nga*, ông sinh năm 1643.

Niu-tơn sinh vào cuối tháng 12 năm 1642 theo lịch cũ, tức là vào đầu năm 1643 theo lịch mới. Lúc đó nước Anh vẫn dùng lịch cũ, còn các bang công giáo ở Đức dùng lịch mới. Vì thế có sự khác biệt nói trên.

Tài năng của Niu-tơn đã sớm nảy nở ngay từ hồi niên thiếu. Khoảng 12 tuổi, cậu bé Niu-tơn đã làm lấy được đồng hồ nước và đồng hồ chỉ giờ theo bóng mặt trời. Chiếc cối xay gió nhỏ của cậu đặt cạnh nhà làm mọi người ngạc nhiên vì quay được cả trong lúc không có gió : cậu đã nhốt một chú chuột bên trong, chuột chạy làm chuyển động các cánh quạt của cối xay.

Cậu bé tinh nghịch Niu-tơn còn làm dân làng khiếp sợ khi cậu làm chiếc diều có buộc đèn lồng đỏ ở đuôi rồi thả diều và giật sợi dây diều để tạo ra một "ngôi sao chổi" nhảy nhót trên bầu trời.

I-xắc Niu-tơn

Năm 1661, Niu-tơn học đại học và được sự chỉ bảo hết lòng của giáo sư Ba-râu. Thời sinh viên, Niu-tơn đã chứng minh được định lí về khai triển của $(a + b)^n$ mà về sau người ta gọi là *nhị thức Niu-tơn*.

Công lao lớn nhất của Niu-tơn trong Toán học là sáng tạo ra phép tính vi phân tích phân, đồng thời và độc lập với Lai-bơ-nít. Vi phân tích phân của Niu-tơn đậm chất hình học, còn vi phân tích phân của Lai-bơ-nít lại giàu tính đại số. Những khám phá của Niu-tơn về vi phân tích phân thực hiện trước Lai-bơ-nít 10 năm, nhưng lại công bố công khai sau Lai-bơ-nít 3 năm. Các thành quả kiệt xuất của Niu-tơn và Lai-bơ-nít đã tạo ra một cuộc cách mạng lớn trong toán học.

Niu-tơn cũng là một nhà vật lí thiên tài. Với ba định luật chuyển động và định luật vạn vật hấp dẫn, Niu-tơn đã xây dựng môn cơ học mà ngày nay người ta quen gọi là *Cơ học cổ điển*. Nhờ các định luật đó, người ta đã phát hiện ra những hành tinh mới, đã tính toán được chính xác thời điểm nhật thực và nguyệt thực.

Một người bạn của Niu-tơn có kể lại trong hồi kí của mình : Một buổi tối năm 1665, Niu-tơn ngắm trăng tại vườn nhà. Thấy một quả táo rơi xuống gần chỗ ngồi, ông tự hỏi vì sao quả táo rơi mà mặt trăng lại không rơi. Ông đã đi đến kết luận về sự hút lẫn nhau giữa các vật : "Hai vật hút nhau với một lực có cường độ tỉ lệ thuận với khối lượng của chúng và tỉ lệ nghịch với bình phương của khoảng cách giữa chúng".

Sở dĩ Niu-tơn công bố định luật vạn vật hấp dẫn chậm đến 10 năm vì ông đã phải dành thời gian đó nghiên cứu các phép tính tích phân để tìm ra những lập luận cần thiết chứng minh sự chính xác của định luật.

Trong lĩnh vực quang học, Niu-tơn là người đầu tiên chứng minh được ánh sáng trắng là hỗn hợp của bảy màu : đỏ, da cam, vàng, lục, lam, chàm, tím. Thiên văn học hiện đại cũng chịu ơn Niu-tơn với phát minh của ông về kính thiên văn phản xạ bằng cách dùng một gương cầu thay cho kính thiên văn khúc xạ dùng thấu kính, nhờ đó đã nhìn thấy được các vệ tinh của sao Mộc.

Niu-tơn còn được giao công việc đúc tiền, làm Giám đốc Viện đúc tiền. Chỉ sau ba năm nghiên cứu, ông đã thay đổi toàn bộ dây chuyền sản xuất và đạt mức cứ hai giây cho ra một đồng tiền bạc đúng tiêu chuẩn chất lượng. Ông còn có nhiều công trình xuất sắc về niên đại học trong lịch sử.

Có tài năng xuất sắc trong rất nhiều lĩnh vực, Niu-tơn lại là người khiêm tốn, giản dị, có lòng nhân từ độ lượng, hay giúp đỡ người khác. Niu-tơn cũng thẳng thắn đấu tranh bảo vệ lẽ phải và được mọi người mến phục. Cậu bé Niu-tơn đẻ non, ốm yếu, tưởng chừng không sống nổi, vậy mà đã sống đến 85 tuổi, mắt chưa phải dùng kính và chưa rụng một cái răng !

Mải làm việc nên Niu-tơn nhiều khi đãng trí. Người ta kể lại nhiều chuyện vui về tính đãng trí của ông : bỏ đồng hồ vào nồi luộc và cầm quả trứng trong tay "để tính giờ luộc trứng" ; khoét hai lỗ to nhỏ ở cửa để lỗ to cho chó và lỗ nhỏ cho mèo chui ra chui vào ; mời bạn đến ăn, chạy vào phòng giải quyết một bài toán, bạn ăn xong và ra về vẫn không hay, thấy bát đĩa dang dở lại nghĩ mình đã ăn rồi sao vẫn thấy đói...

Cho đến già Niu-tơn vẫn không ngừng làm việc. Năm 1716, Lai-bơ-nít đưa ra một bài toán rất khó thách thức các nhà toán học châu Âu. Nhận được bài toán đó vào buổi chiều sau khi từ Viện đúc tiền trở về, Niu-tơn đã giải xong bài toán ngay sau bữa ăn chiều, lúc đó ông 74 tuổi. Năm 80 tuổi, Niu-tơn lại bắt tay vào sửa chữa cuốn *Những nguyên lí toán học của triết học tự nhiên* xuất bản lần thứ ba. Chính Lai-bơ-nít đã nói về Niu-tơn như sau : "Xét về toán học từ buổi sơ khai đến khi xuất hiện Niu-tơn thì Niu-tơn đã làm được một nửa, mà là một nửa tốt hơn nhiều".

Tên của Niu-tơn được đặt cho đơn vị lực, kí hiệu N. Còn tên của Pa-xcan được đặt cho một ngôn ngữ lập trình của tin học : ngôn ngữ Pa-xcan.

Pa-xcan mất khi Niu-tơn mới 20 tuổi, nhưng có một câu nói của Pa-xcan minh hoạ được cho việc Niu-tơn tìm ra định luật vạn vật hấp dẫn khi quan sát một quả táo rơi trong vườn nhà : "Chỉ có những khối óc đã được chuẩn bị mới có được những phát minh tình cờ".

# PHẦN HÌNH HỌC

## *Chương I*

## TỨ GIÁC

### §1. TỨ GIÁC

Tứ giác ABCD là hình gồm bốn đoạn thẳng AB, BC, CD, DA trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào cũng không cùng nằm trên một đường thẳng.

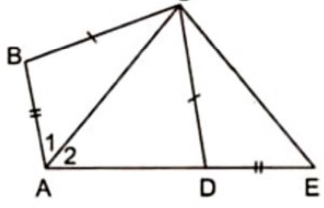
Các tứ giác được nghiên cứu trong chương là tứ giác lồi, đó là tứ giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng mà bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của tứ giác.

Khi nói đến tứ giác mà không chú thích gì thêm, ta hiểu đó là tứ giác lồi.

Tổng bốn góc của một tứ giác bằng $360^o$.

**Ví dụ 1.** Tứ giác ABCD có $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^o$, CB = CD. Chứng minh rằng AC là tia phân giác của góc A.

***Giải :*** (h.5) Trên tia đối của tia DA lấy điểm E sao cho DE = AB. Ta có $\widehat{B} + \widehat{ADC} = 180^o$, $\widehat{EDC} + \widehat{ADC} = 180^o$ nên $\widehat{B} = \widehat{EDC}$.




*Hình 5*

$$\Delta ABC = \Delta EDC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{E} \quad (1)$$

$$AC = EC.$$

Tam giác CAE có AC = EC nên là tam giác cân, do đó

$$\widehat{A}_2 = \widehat{E}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra AC là tia phân giác của góc A.

### Bài tập

**1.** Tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc, AB = 8 cm, BC = 7 cm, AD = 4 cm. Tính độ dài CD.

**2.** Tứ giác ABCD có $\widehat{A} - \widehat{B} = 50^o$. Các tia phân giác của các góc C và D cắt nhau tại I và $\widehat{CID} = 115^o$. Tính các góc A và B.

**3.** Cho tứ giác ABCD, E là giao điểm của các đường thẳng AB và CD, F là giao điểm của các đường thẳng BC và AD. Các tia phân giác của các góc E và F cắt nhau ở I. Chứng minh rằng :

a) Nếu $\widehat{BAD} = 130^o$, $\widehat{BCD} = 50^o$ thì IE vuông góc với IF.

b) Góc EIF bằng nửa tổng của một trong hai cặp góc đối của tứ giác ABCD.

**4.** Chứng minh rằng nếu M là giao điểm các đường chéo của tứ giác ABCD thì MA + MB + MC + MD nhỏ hơn chu vi nhưng lớn hơn nửa chu vi tứ giác.

**5.** So sánh độ dài cạnh AB và đường chéo AC của tứ giác ABCD biết rằng chu vi tam giác ABD nhỏ hơn hoặc bằng chu vi tam giác ACD.

**6.** Tứ giác ABCD có O là giao điểm của hai đường chéo, AB = 6, OA = 8, OB = 4, OD = 6. Tính độ dài AD.

**7*.** Cho năm điểm trên mặt phẳng trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng bao giờ cũng có thể chọn ra được bốn điểm là đỉnh của một tứ giác lồi.

## §2. HÌNH THANG

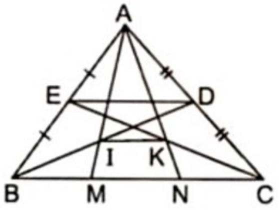
Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song.

Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau. Trong hình thang cân, hai cạnh bên bằng nhau, hai đường chéo bằng nhau. Để chứng minh một hình thang là hình thang cân, ta chứng minh hình thang đó có hai góc kề một đáy bằng nhau, hoặc có hai đường chéo bằng nhau.

Đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang là đường trung bình của hình thang. Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy. Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm cạnh bên thứ hai và là đường trung bình của hình thang.

**Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC có BC = a, các đường trung tuyến BD, CE. Lấy các điểm M, N trên cạnh BC sao cho BM = MN = NC. Gọi I là giao điểm của AM và BD, K là giao điểm của AN và CE. Tính độ dài IK.

*Giải :* (h.6) DN là đường trung bình của $\Delta ACM$ nên $DN \parallel AM$.




*Hình 6*

$\Delta BND$ có $BM = MN$, $MI \parallel ND$ nên I là trung điểm của BD. Tương tự K là trung điểm của CE.

Hình thang BEDC có I và K là trung điểm của hai đường chéo nên dễ dàng chứng minh được

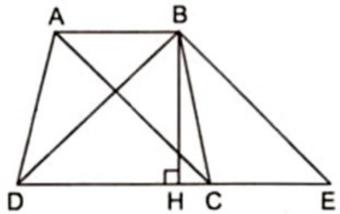
$$IK = (BC - ED) : 2 = \left(a - \frac{a}{2}\right) : 2 = \frac{a}{4}.$$

(Bạn đọc tự chứng minh).

**Ví dụ 3.** Một hình thang cân có đường cao bằng nửa tổng hai đáy. Tính góc tạo bởi hai đường chéo hình thang.

*Giải :* (h.7) Xét hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$), đường cao BH và

$$BH = \frac{AB + CD}{2}. \qquad (1)$$




*Hình 7*

Qua B kẻ đường thẳng song song với AC, cắt DC ở E.

Ta có $BE = AC$, $AC = BD$ nên $BE = BD$. Tam giác BDE cân tại B, đường cao BH nên

$$DH = HE = \frac{DE}{2}. \qquad (2)$$

Ta có $AB = CE$ nên

$$AB + CD = CE + CD = DE. \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $BH = DH = HE$.

Các tam giác BHD, BHE vuông cân tại H nên $\widehat{DBE} = 90^\circ$.

Ta có $DB \perp BE$, $AC \parallel BE$ nên $DB \perp AC$.

## Bài tập

### Hình thang

**8.** Cho một hình thang có hai đáy không bằng nhau. Chứng minh rằng :

a) Tổng hai góc kề đáy nhỏ lớn hơn tổng hai góc kề đáy lớn.

b) Tổng hai cạnh bên lớn hơn hiệu hai đáy.

9. Hình thang ABCD có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^o$, đáy nhỏ AB = 11cm, AD = 12cm, BC = 13cm. Tính độ dài AC.

10. Hình thang ABCD (AB // CD) có E là trung điểm của BC, $\widehat{AED} = 90^o$. Chứng minh rằng DE là tia phân giác của góc D.

### Hình thang cân

11. Hình thang cân ABCD (AB // CD) có đường chéo BD chia hình thang thành hai tam giác cân : tam giác ABD cân tại A và tam giác BCD cân tại D. Tính các góc của hình thang cân đó.

12. Trên đoạn thẳng AB lấy một điểm M (MA > MB). Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ AB, vẽ các tam giác đều AMC, BMD. Gọi E, F, I, K theo thứ tự là trung điểm của CM, CB, DM, DA. Chứng minh rằng EFIK là hình thang cân và $KF = \frac{1}{2}CD$.

13. Cho điểm M nằm bên trong tam giác đều ABC. Chứng minh rằng trong ba đoạn thẳng MA, MB, MC, đoạn lớn nhất nhỏ hơn tổng hai đoạn kia.

### Đường trung bình của hình thang, của tam giác

14. Cho tam giác ABC, trọng tâm G.

a) Vẽ đường thẳng d qua G, cắt các đoạn thẳng AB, AC. Gọi A', B', C' là hình chiếu của A, B, C trên d. Tìm liên hệ giữa các độ dài AA', BB', CC'.

b) Nếu đường thẳng d nằm ngoài tam giác ABC và G' là hình chiếu của G trên d thì các độ dài AA', BB', CC', GG' có liên hệ gì ?

15*. Trên đoạn thẳng AB lấy các điểm M và N (M nằm giữa A và N). Vẽ về một phía của AB các tam giác đều AMD, MNE, BNF. Gọi G là trọng tâm của tam giác DEF. Chứng minh rằng khoảng cách từ G đến AB không phụ thuộc vào vị trí của các điểm M, N trên đoạn thẳng AB.

16. Tứ giác ABCD có E, F theo thứ tự là trung điểm của AD, BC.

a) Chứng minh rằng $EF \le \dfrac{AB + CD}{2}$.

b) Tứ giác ABCD có điều kiện gì thì $EF = \dfrac{AB + CD}{2}$ ?

**17.** Tứ giác ABCD có AB = CD. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua trung điểm của hai đường chéo tạo với AB và CD các góc bằng nhau.

**18.** Trong tứ giác ABCD, gọi A', B', C', D' thứ tự là trọng tâm của các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Chứng minh rằng bốn đường thẳng AA', BB', CC', DD' đồng quy.

**19.** Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H, M là trung điểm của BC. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với HM, cắt AB và AC theo thứ tự ở E và F.

a) Trên tia đối của tia HC, lấy điểm D sao cho HD = HC. Chứng minh rằng E là trực tâm của tam giác DBH.

b) Chứng minh rằng HE = HF.

**20.** Tứ giác ABCD có B và C nằm trên đường tròn có đường kính là AD. Tính độ dài CD biết rằng AD = 8, AB = BC = 2.

## §3. DỰNG HÌNH BẰNG THƯỚC VÀ COMPA

*Giải bài toán dựng hình* (bằng thước và compa) là chỉ ra một số hữu hạn lần các phép dựng hình cơ bản và các bài toán dựng hình cơ bản rồi chứng tỏ hình dựng được có đủ các điều kiện mà bài toán đòi hỏi.

Lời giải đầy đủ của một bài toán dựng hình gồm bốn phần :

*1. Phân tích.* Giả sử đã có một hình thoả mãn các điều kiện của bài toán. Có thể vẽ thêm hình mới làm xuất hiện những yếu tố nêu trong đề bài hoặc làm xuất hiện những hình có thể dựng được ngay. Đưa việc dựng các yếu tố còn lại của hình phải dựng về các phép dựng hình cơ bản và các bài toán dựng hình cơ bản đã biết.

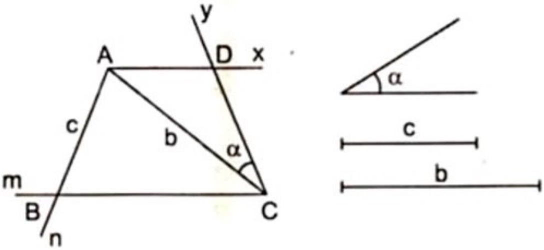
*2. Cách dựng.* Nêu thứ tự từng bước dựng hình dựa vào các phép dựng hình cơ bản và các bài toán dựng hình cơ bản, đồng thời thể hiện các bước dựng đó trên hình vẽ.

*3. Chứng minh.* Dùng lập luận chứng tỏ rằng với cách dựng như trên, hình đã dựng thoả mãn các điều kiện của bài toán.

*4. Biện luận.* Chỉ rõ trong trường hợp nào bài toán dựng được và dựng được bao nhiêu hình thoả mãn đề bài (hình thoả mãn đề bài được gọi là nghiệm hình).

**Ví dụ 4.** Dựng tam giác ABC, biết AC = b, AB = c, $\widehat{B} - \widehat{C} = \alpha$.

***Giải :*** (h.8)




*Hình 8*

a) *Phân tích*

Giả sử đã dựng được $\Delta ABC$ có AC = b, AB = c, $\widehat{B} - \widehat{C} = \alpha$.

Kẻ Ax // BC, kẻ tia Cy sao $\widehat{BCy} = \widehat{B}$ (Cy và A cùng phía đối với BC).

ABCD là hình thang cân nên

$$CD = AB = c, \quad \widehat{ACD} = \widehat{BCD} - \widehat{BCA} = \widehat{B} - \widehat{BCA} = \alpha.$$

Tam giác ACD dựng được (biết hai cạnh và góc xen giữa).

Điểm B thoả mãn hai điều kiện : nằm trên đường thẳng qua C song song với AD và $\widehat{DAB} = \widehat{ADC}$.

b) *Cách dựng*

– Dựng $\Delta ACD$ có AC = b, CD = c, $\widehat{ACD} = \alpha$.

– Qua C dựng đường thẳng Cm // AD.

– Dựng tia An sao cho $\widehat{DAn} = \widehat{ADC}$, cắt Cm ở B.

c) *Chứng minh*

Tứ giác ABCD có AD // BC, $\widehat{DAB} = \widehat{ADC}$ nên là hình thang cân, do đó AB = CD = c, $\widehat{ABC} = \widehat{DCB}$.

Ta có $\widehat{ABC} - \widehat{ACB} = \widehat{DCB} - \widehat{ACB} = \widehat{ACD} = \alpha$.

d) *Biện luận*

Bài toán có một nghiệm hình nếu b > c và $\alpha < 180^o$.

*Chú ý :* Điểm B được dựng ở ví dụ 4 là giao điểm của hai tia Cm và An. Điểm B đã được dựng là giao điểm của hai đường, hay tổng quát là giao của hai tập hợp (quỹ tích)(*).

(*) Chi tiết hơn về tìm tập hợp điểm (quỹ tích), xem chuyên đề *Tìm tập hợp điểm*.

Phương pháp lấy giao của hai quỹ tích gọi là phương pháp *quỹ tích tương giao*. Nội dung của phương pháp này là : Để dựng một điểm, ta phân tích điểm đó thoả mãn hai điều kiện, do điều kiện thứ nhất điểm thuộc một quỹ tích, do điều kiện thứ hai điểm thuộc một quỹ tích khác, giao điểm của hai quỹ tích ấy cho ta điểm phải dựng.

Khi phân tích một điểm thuộc đường nào, cần nhớ các kiến thức sau :

– Điểm cách đều hai đầu của đoạn thẳng AB thì nằm trên đường trung trực của AB.

– Điểm cách đều điểm O một khoảng r thì nằm trên đường tròn (O ; r).

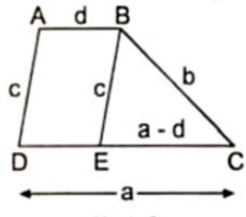
– Điểm nằm trong góc và cách đều hai cạnh của góc thì nằm trên tia phân giác của góc ấy.

Cũng cần chú ý đến số giao điểm của hai đường. Hai đường thẳng có thể có 0, 1 hoặc vô số giao điểm tuỳ theo chúng song song, cắt nhau hay trùng nhau. Đường thẳng và đường tròn (O ; r) có thể có 0, 1 hoặc 2 giao điểm tuỳ theo $r < h$, $r = h$ hoặc $r > h$ (h là khoảng cách từ O đến đường thẳng). Hai đường tròn có thể có 0, 1, 2 hoặc vô số giao điểm.

Dựa vào số giao điểm ấy mà ta biện luận bài toán.

**Ví dụ 5.** Chứng minh rằng tồn tại một hình thang có độ dài bốn cạnh bằng độ dài bốn cạnh của một tứ giác cho trước.

*Giải :* (h.9) Gọi a, b, c, d là độ dài bốn cạnh của tứ giác ($a \geq b \geq c \geq d$). Cần chứng minh tồn tại hình thang có độ dài bốn cạnh như trên : Chọn đáy lớn bằng a, đáy nhỏ bằng d. Ta dựng ΔBEC rồi dựng D và A (h.9).



*Hình 9*

Để chứng minh tồn tại hình thang ABCD, ta sẽ chứng tỏ tồn tại ΔBEC (tam giác này có thể suy biến thành đoạn thẳng). Thật vậy, ta có

$b + c > a - d$ (vì $d + b + c > a$ do a, b, c, d là bốn cạnh của tứ giác),

$a - d + b \geq c$ (vì $a \geq c$, $b \geq d$), $a - d + c \geq b$ (vì $a \geq b$, $c \geq d$).

## Bài tập

**21.** Dựng hình thang ABCD (AB // CD), biết :

a) AB = 1cm, AD = 2cm, BC = 3cm, CD = 3cm.

b) AB = a, CD = b, AC = c, BD = d.

**22.** Dựng hình thang cân ABCD (AB // CD), biết AB = a, CD = b, $\widehat{D} = \alpha$.

**23.** Dựng tứ giác ABCD, biết ba góc và :

a) Hai cạnh kề nhau ; b) Hai cạnh đối nhau.

**24.** Dựng tam giác ABC, biết $\widehat{B} = \beta$, $\widehat{C} = \alpha$, BC – AB = d.

**25.** Dựng tam giác ABC, biết :

a) $\widehat{A} = \alpha$, BC = a, AC – AB = d ;

b) $\widehat{B} - \widehat{C} = \alpha$, BC = a, AC – AB = d.

**26.** Dựng tam giác ABC, biết :

a) $\widehat{A} = \alpha$, BC = a, AC + AB = s ;

b*) $\widehat{B} - \widehat{C} = \alpha$, BC = a, AC + AB = s.

**27*.** Dựng tam giác ABC, biết $\widehat{A} = \alpha$, AB + AC = s, đường trung tuyến AM = m.

**28.** Dựng tam giác ABC, biết BC = a, đường cao AH = h, đường trung tuyến BM = m.

**29.** Dựng tam giác ABC, biết đường cao AH = h, đường cao BI = k, đường trung tuyến AM = m.

**30.** Dựng tam giác ABC có $\widehat{B} = 3\widehat{C}$ biết AB = c, AC = b.

**31.** Dựng tam giác, biết độ dài ba đường trung tuyến.

**32.** Cho góc xOy và điểm G ở trong góc. Dựng tam giác OAB nhận G làm trọng tâm, có A thuộc Ox, B thuộc Oy.

**33*.** Dựng tam giác ABC có $\widehat{B} - \widehat{C} = 90^{o}$, biết đường phân giác AD = d, DC = m.

**34*.** Cho đường thẳng m và hai điểm H, G thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ m. Dựng tam giác ABC có B và C thuộc m, nhận H làm trực tâm, G làm trọng tâm.

**35*.** Dựng tam giác ABC vuông tại A có AC = 2AB, biết BC = 5cm.

**36.** Cho tam giác ABC. Dựng đường thẳng DE song song với BC (D thuộc AB, E thuộc AC) sao cho DE = DB + CE.

**37.** Cho tam giác ABC. Dựng đường thẳng DE song song với BC (D thuộc AB, E thuộc AC) sao cho AE = BD.

**38*.** Cho hai đường thẳng song song a và b, điểm C thuộc a, điểm O thuộc nửa mặt phẳng không chứa b có bờ a. Qua O dựng đường thẳng m cắt a, b theo thứ tự ở A, B sao cho CA = CB.

**39*.** a) Cho đường thẳng xy và hai điểm A, B thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ xy. Dựng điểm M thuộc xy sao cho $\widehat{AMx} = 2\widehat{BMy}$.

b) Giải bài toán trên trong trường hợp A và B thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ xy.

**40*.** Cho tam giác ABC. Dựng điểm M sao cho nếu vẽ $MA' \perp BC$, $MB' \perp AC$, $MC' \perp AB$ thì $A'B = B'C = C'A$.

~ **Ví dụ :** 62.

## §4. ĐỐI XỨNG TRỤC

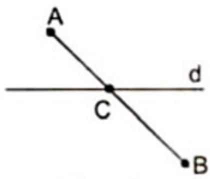
Hai điểm gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm đó. Khi một điểm nằm trên đường thẳng d thì điểm đối xứng với nó qua đường thẳng d là chính điểm đó.

Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng với nhau qua một đường thẳng thì chúng bằng nhau.

Hình thang cân nhận đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy làm trục đối xứng.

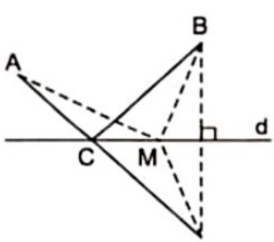
**Ví dụ 6.** Cho đường thẳng d và hai điểm A, B nằm cùng phía đối với d. Dựng điểm C thuộc d sao cho AC + CB có độ dài ngắn nhất.

*Hướng suy nghĩ.* Bài toán trở nên đơn giản nếu đề bài cho A và B nằm khác phía đối với d. Khi đó C là giao điểm của d với đoạn thẳng AB (h.10a). Trong trường hợp A, B nằm cùng phía đối với d, ta có thể tạo ra điểm B' nằm khác phía với A đối với d mà độ dài CB' luôn luôn bằng CB khi C thay đổi vị trí trên đường thẳng d. Điểm B' chính là điểm đối xứng với B qua d.



*Hình 10a*

*Giải :* (h.10b)



*Hình 10b*

*Phân tích.* Vẽ B' đối xứng với B qua d. Gọi M là điểm bất kì thuộc d. Ta có MB' = MB. Do đó

$$AM + MB = AM + MB' \geq AB' \text{ (hằng số)}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của AM + MB bằng AB' $\Leftrightarrow$ M thuộc đoạn thẳng AB'.

*Cách dựng.* Dựng B' đối xứng với B qua d. Nối A với B', cắt d ở C.

*Chứng minh.* Gọi M là điểm bất kì thuộc d. Ta có

$$AM + MB = AM + MB' \geq AB', \quad AC + CB = AC + CB' = AB'.$$

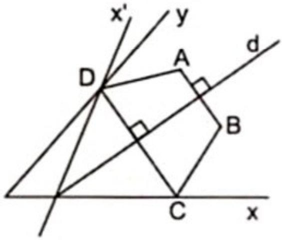
Vậy $$AC + CB \leq AM + MB.$$

*Biện luận.* Bài toán có một nghiệm hình.

**Ví dụ 7.** Cho hai đường thẳng x, y và hai điểm A, B. Dựng điểm C thuộc x, điểm D thuộc y sao cho A, B, C, D là các đỉnh của hình thang cân có AB là một cạnh đáy.

***Giải :*** (h.11)

*Phân tích.* Giả sử đã dựng được hình thang cân thoả mãn đề bài. Gọi d là đường trung trực của AB. Dựng đường thẳng x' qua D và qua giao điểm của d và x (nếu d // x thì x' là đường thẳng qua D và song song với x). Khi đó x' đối xứng với x qua d. Điểm D thoả mãn hai điều kiện : thuộc x' và thuộc y. Từ đó dựng được điểm C.




*Hình 11*

*Cách dựng*

– Dựng đường trung trực d của AB.

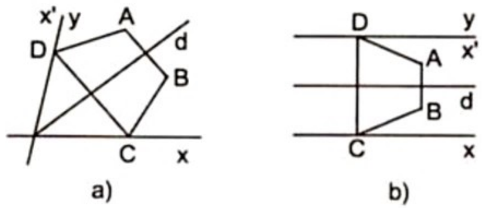
– Dựng đường thẳng x' đối xứng với x qua d.

– Gọi D là giao điểm của x' và y. Dựng C đối xứng với D qua d.

*Chứng minh.* Bạn đọc tự chứng minh.

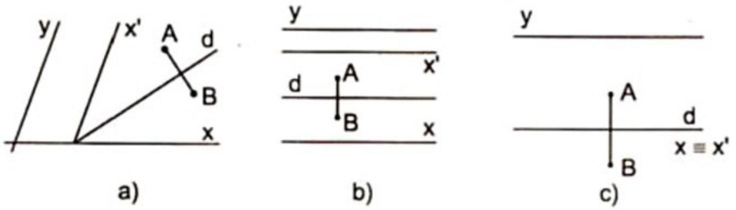
*Biện luận.*

– Nếu x' trùng y thì bài toán có vô số nghiệm hình (h.12). Khi đó x và x' đối xứng với nhau qua d ; nói cách khác d trùng với phân giác của góc tạo bởi x và y (h.12a) hoặc d là đường thẳng song song cách đều x và y (h.12b).



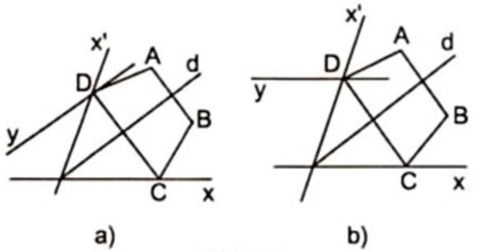

*Hình 12*

– Nếu x' // y thì bài toán không có nghiệm hình (h.13). Khi đó d song song với một tia phân giác của góc tạo bởi x và y (h.13a) hoặc d song song với đường thẳng song song cách đều x và y (h.13b, c).



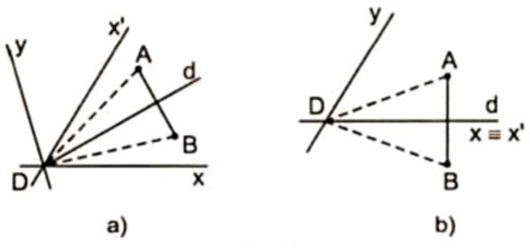

*Hình 13*

– Nếu x' cắt y thì bài toán có một nghiệm hình (h.14). Khi đó d cắt cả hai đường thẳng chứa phân giác của góc tạo bởi x và y (h.14a) hoặc d cắt đường thẳng song song cách đều x và y (h.14b).




*Hình 14*

Riêng nếu x' cắt y tại điểm D thuộc d, bài toán không có nghiệm hình (hình thang cân suy biến thành tam giác cân, h.15 a, b) ; nếu x' cắt y tại điểm D thẳng hàng với AB, bài toán không có nghiệm hình (hình thang cân suy biến thành đoạn thẳng).




*Hình 15*

*Chú ý*

1. Trong cách dựng trên, do chú ý đến tính đối xứng trục, ta đã dựng d là đường trung trực của AB, khi đó đường thẳng d xác định, các điểm C và D đối xứng với nhau qua d. Ta thấy : *D đối xứng với C qua d, mà C thuộc đường*

*thẳng x thì D thuộc đường thẳng x' đối xứng với x qua d.* Giao điểm của x' và y cho ta điểm D.

2. Cũng có thể phân tích : C đối xứng với D qua d, mà D thuộc y nên C thuộc đường thẳng y' đối xứng với y qua d. Giao điểm của x và y' cho ta điểm C.

## Bài tập

**41.** Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^o$, các đường phân giác BD và CE cắt nhau tại I. Qua E kẻ đường vuông góc với BD, cắt BC ở F. Chứng minh rằng :

a) E và F đối xứng với nhau qua BD.

b) IF là tia phân giác của góc BIC.

c) D và F đối xứng với nhau qua IC.

**42.** Cho ba điểm O, D, E. Dựng tam giác ABC sao cho O là giao điểm của các đường phân giác BD và CE.

**43.** Cho đường thẳng d và hai điểm A, B nằm khác phía đối với d. Dựng điểm C thuộc d sao cho tia phân giác của góc ACB nằm trên d.

**44.** Dựng hình thang cân ABCD (AB // CD) có $\widehat{D} = 2\widehat{ACD}$, biết CD = a, đường cao AH = h.

**45*.** Cho điểm M nằm bên trong tam giác ABC, A' đối xứng với M qua đường phân giác của góc A, B' đối xứng với M qua đường phân giác của góc B, C' đối xứng với M qua đường phân giác của góc C. Chứng minh rằng các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy hoặc song song đôi một.

**46*.** Cho tam giác ABC. Vẽ các tia Ax, Ay trong góc A sao cho $\widehat{BAx} = \widehat{CAy}$, vẽ các tia Bz, Bt trong góc B sao cho $\widehat{ABz} = \widehat{CBt}$. Gọi E là giao điểm của Ax và Bz, gọi F là giao điểm của Ay và Bt. Chứng minh rằng $\widehat{ACE} = \widehat{BCF}$.

~ **Bài tập :** 350, 351.

## §5. HÌNH BÌNH HÀNH

Hình bình hành là tứ giác có các cạnh đối song song.

Trong hình bình hành : các cạnh đối bằng nhau, các góc đối bằng nhau, các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Một tứ giác là hình bình hành nếu có một trong các dấu hiệu sau :

– Các cạnh đối song song ;

– Các cạnh đối bằng nhau ;

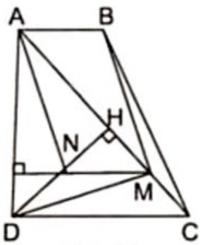
– Hai cạnh đối song song và bằng nhau ;

– Các góc đối bằng nhau ;

– Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

**Ví dụ 8.** Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^o$), có $AB = \frac{1}{2}CD$. Gọi H là hình chiếu của D trên AC, M là trung điểm của HC. Chứng minh rằng $\widehat{BMD} = 90^o$.

*Giải :* (h.16). Gọi N là trung điểm của HD. Ta có MN là đường trung bình của $\Delta HDC$ nên MN // DC, $MN = \frac{1}{2}DC$. Ta lại có AB // DC, $AB = \frac{1}{2}DC$, do đó AB // MN, AB = MN. Vậy ABMN là hình bình hành, suy ra



*Hình 16*

$$AN \,//\, BM. \qquad (1)$$

$\Delta ADM$ có $DH \perp AM$, $MN \perp AD$, suy ra

$$AN \perp DM. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BMD} = 90^o$.

**Ví dụ 9.** Tính độ dài đường trung tuyến AM của tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^o$, AB = 4 cm, AC = 6 cm.

*Giải : Cách 1* (h.17). Vẽ điểm E sao cho M là trung điểm của AE. Tứ giác ABEC là hình bình hành, $\widehat{ABE} = 180^o - \widehat{BAC} = 180^o - 120^o = 60^o$.

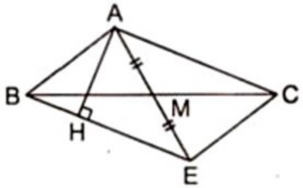
Kẻ $AH \perp BE$. Tam giác vuông ABH có $\widehat{B} = 60^o$ nên $BH = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2$ (cm).

Suy ra HE = BE – BH = 6 – 2 = 4 (cm).

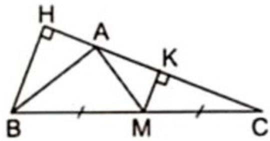
Trong $\Delta ABH$ vuông : $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 16 - 4 = 12$.

Trong $\Delta AHE$ vuông : $AE^2 = AH^2 + HE^2 = 12 + 16 = 28$.

Do đó AE = $2\sqrt{7}$ (cm). Suy ra AM = $\sqrt{7}$ (cm).




*Hình 17*




*Hình 18*

*Cách 2.* (h.18). Kẻ BH ⊥ AC, MK ⊥ AC. Lần lượt tính được AH = 2 cm, HB = $2\sqrt{3}$ cm, MK = $\sqrt{3}$ cm, HK = $\frac{HC}{2} = \frac{2+6}{2} = 4$ (cm), AK = 2 cm. Từ đó tính được AM = $\sqrt{7}$ cm.

## Bài tập

**47.** Cho điểm D nằm bên trong tam giác đều ABC. Vẽ các tam giác đều BDE, CDF (E, F, D nằm cùng phía đối với BC). Chứng minh rằng AEDF là hình bình hành.

**48.** Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm D trên cạnh AB, điểm E trên cạnh AC sao cho AD = CE. Gọi I là trung điểm của DE, K là giao điểm của AI và BC. Chứng minh rằng ADKE là hình bình hành.

**49.** a) Chứng minh rằng đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo và các đoạn thẳng nối trung điểm các cạnh đối của tứ giác gặp nhau tại một điểm.

Bài toán của Giéc-gôn (*Gergonne*, nhà toán học Pháp, 1771 – 1859).

b) Dùng định lí trên chứng tỏ rằng nếu một tứ giác có các đường thẳng nối trung điểm các cạnh đối đi qua giao điểm hai đường chéo thì tứ giác đó là hình bình hành.

**50.** Cho tứ giác ABCD. Trên cạnh AB lấy các điểm E, F sao cho AE = EF = FB. Trên cạnh CD lấy các điểm G, H sao cho DG = GH = HC. Gọi M, I, K, N theo thứ tự là trung điểm của AD, EG, FH, BC. Chứng minh rằng bốn điểm M, I, K, N thẳng hàng và MI = IK = KN.

**51.** Hình bình hành ABCD có $\widehat{A} = 60^o$. Lấy các điểm E, F theo thứ tự thuộc các cạnh AD, CD sao cho DE = CF. Gọi K là điểm đối xứng với F qua BC. Chứng minh rằng EK song song với AB.

**52.** Cho tam giác ABC có $\widehat{A} > 90^o$. Trong góc A vẽ các đoạn thẳng AD, AE sao cho AD vuông góc và bằng AB, AE vuông góc và bằng AC. Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh rằng AM vuông góc với BC.

**53.** Vẽ ra phía ngoài tam giác ABC các tam giác ABD vuông cân tại B, ACE vuông cân tại C. Gọi M là trung điểm của DE. Hãy xác định dạng của tam giác BMC.

**54.** Cho tam giác đều ABC, một đường thẳng song song với BC cắt AB, AC ở D, E. Gọi G là trọng tâm của tam giác ADE, I là trung điểm của CD. Tính số đo các góc của tam giác GIB.

**55.** Cho điểm E thuộc cạnh AC của tam giác đều ABC. Đường vuông góc với AB kẻ từ E cắt đường vuông góc với BC kẻ từ C tại điểm D. Gọi K là trung điểm của AE. Tính $\widehat{KBD}$.

**56*.** Cho tam giác đều ABC, điểm M thuộc cạnh BC. Gọi D là điểm đối xứng với M qua AB, E là điểm đối xứng với M qua AC. Vẽ hình bình hành MDNE. Chứng minh rằng AN song song với BC.

**57*.** Cho tam giác ABC. Lấy các điểm D, E theo thứ tự thuộc tia đối của các tia BA, CA sao cho BD = CE = BC. Gọi O là giao điểm của BE và CD. Qua O vẽ đường thẳng song song với tia phân giác của góc A, đường thẳng này cắt AC ở K. Chứng minh rằng AB = CK.

## §6. ĐỐI XỨNG TÂM

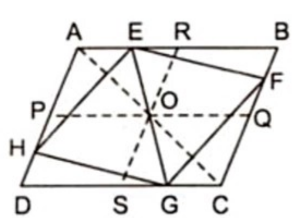
Hai điểm gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu O là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm đó. Điểm đối xứng của điểm O qua điểm O là chính điểm O.

Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng với nhau qua một điểm thì chúng bằng nhau.

Hình bình hành nhận giao điểm của hai đường chéo làm tâm đối xứng.

**Ví dụ 10.** Một hình bình hành có bốn đỉnh nằm trên bốn cạnh của một hình bình hành khác. Chứng minh rằng các tâm của hai hình bình hành đó trùng nhau.

*Giải :* Gọi EFGH là hình bình hành có bốn đỉnh nằm trên bốn cạnh của hình bình hành ABCD (h.19). Gọi O là tâm của hình bình hành EFGH, ta sẽ chứng minh O cũng là tâm của hình bình hành ABCD.



*Hình 19*

Gọi P, Q theo thứ tự là trung điểm của AD, BC. Ta có OP là đường trung bình của hình thang AEGD nên OP // DG. Tương tự, OQ // GC. Suy ra P, O, Q thẳng hàng.

Chứng minh tương tự, O thuộc đường trung bình RS của hình bình hành ABCD. Do AR // OQ và AR = OQ nên ARQO là hình bình hành. Suy ra AO // RQ, AO = RQ. Tương tự, OC // RQ, OC = RQ. Từ đó suy ra O là trung điểm của AC. Do đó, O là tâm của hình bình hành ABCD.

Vậy các tâm của hai hình bình hành EFGH, ABCD trùng nhau.

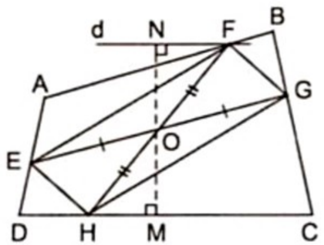
**Ví dụ 11.** Cho tứ giác ABCD, điểm E thuộc AD, điểm G thuộc BC. Dựng điểm F thuộc AB, điểm H thuộc CD sao cho EFGH là hình bình hành.

***Giải :*** (h.20)

*Phân tích :*

Gọi O là trung điểm của EG thì O là điểm xác định.

F đối xứng với H qua O mà H thuộc CD nên F thuộc đường thẳng đối xứng với CD qua O. Mặt khác F thuộc AB.



*Hình 20*

*Cách dựng :*

Dựng trung điểm O của EG.

Dựng đường thẳng đối xứng với CD qua O, cắt AB ở F (để dựng đường thẳng d ta dựng OM ⊥ CD, dựng N đối xứng với M qua O, rồi kẻ qua N đường thẳng song song với CD). FO cắt CD ở H. Nối EF, FG, GH, HE.

*Chứng minh :*

$$\Delta OMH = \Delta ONF \text{ (g.c.g) nên } OH = OF.$$

Tứ giác EFGH có OH = OF, OE = OG nên là hình bình hành.

*Biện luận :*

– Nếu d trùng AB (khi đó AB // CD, O cách đều AB và CD) thì bài toán có vô số nghiệm hình.

– Nếu d // AB (khi đó AB // CD, O không cách đều AB và CD) thì bài toán không có nghiệm hình.

– Nếu d cắt AB (khi đó AB không song song với CD) thì bài toán có một nghiệm hình.

## Bài tập

**58.** Cho tam giác ABC, gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, AC, AB. Gọi O là một điểm bất kì, A' là điểm đối xứng với O qua D, B' là điểm đối xứng với O qua E, C' là điểm đối xứng với O qua F. Chứng minh rằng các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

**59.** Cho góc xOy khác góc bẹt và điểm M thuộc miền trong của góc.

a) Qua M dựng đường thẳng cắt các tia Ox, Oy theo thứ tự ở A và B sao cho M là trung điểm của AB.

b) Chứng minh rằng tam giác AOB nhận được trong cách dựng trên có diện tích nhỏ nhất trong tất cả các tam giác tạo bởi các tia Ox, Oy và một đường thẳng bất kì qua M.

**60.** Dựng tam giác biết một đỉnh, trọng tâm và hai đường thẳng đi qua hai đỉnh còn lại.

**61.** Cho tứ giác ABCD và một điểm O nằm bên trong tứ giác. Dựng hình bình hành EFGH nhận O làm tâm đối xứng, có bốn đỉnh nằm trên bốn đường thẳng chứa cạnh tứ giác.

# §7. HÌNH CHỮ NHẬT

Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông.

Hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình bình hành và hình thang cân, trong đó chú ý đến tính chất : Trong hình chữ nhật, hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Để chứng minh một tứ giác là hình chữ nhật, ta chứng minh tứ giác đó có ba góc vuông, hoặc chứng minh tứ giác đó là hình bình hành có một trong các tính chất sau :

– Có một góc vuông ;

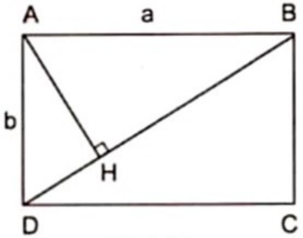
– Có hai đường chéo bằng nhau.

Áp dụng vào tam giác, ta có :

– Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.

– Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.

**Ví dụ 12.** Tính các cạnh AB, AD của hình chữ nhật ABCD, biết rằng đường vuông góc AH kẻ từ A đến BD chia BD thành hai đoạn thẳng HD = 9 cm, HB = 16 cm.



*Hình 21*

***Giải :*** (h.21) Đặt AB = a, AD = b.

Áp dụng định lí Py-ta-go vào $\Delta ABD$ vuông, ta có

$$a^2 + b^2 = BD^2 = 25^2 = 625. \qquad (1)$$

Áp dụng định lí Py-ta-go vào các tam giác vuông AHB, AHD, ta có

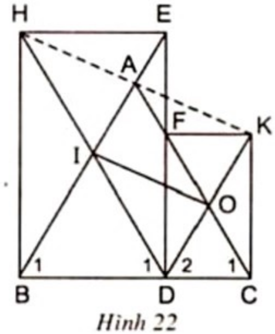
$$a^2 - b^2 = (HB^2 + AH^2) - (HD^2 + AH^2) = HB^2 - HD^2 = 16^2 - 9^2 = 175. \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a^2 = 400$ nên a = 20 cm. Từ đó b = 15 cm.

Vậy AB = 20 cm, AD = 15 cm.

**Ví dụ 13.** Cho tam giác ABC cân tại A. Từ một điểm D trên đáy BC, vẽ đường thẳng vuông góc với BC, cắt các đường thẳng AB, AC ở E, F. Vẽ các hình chữ nhật BDEH và CDFK. Chứng minh rằng A là trung điểm của HK.

***Giải :*** (h.22) Gọi I và O là tâm các hình chữ nhật BDEH và CDFK. Ta có $\widehat{B}_1 = \widehat{D}_1$, $\widehat{C}_1 = \widehat{D}_2$ (tính chất hình chữ nhật) mà $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$ nên $\widehat{B}_1 = \widehat{D}_1 = \widehat{C}_1 = \widehat{D}_2$. Do đó BE // DK, DH // CA. Suy ra AIDO là hình bình hành.



*Hình 22*

AIDO là hình bình hành nên AO = ID, mà HI = ID, nên AO = HI. Ta lại có AO // HI nên AOIH là hình bình hành, do đó

$$AH \,//\, IO,\ AH = IO. \qquad (1)$$

Chứng minh tương tự, AIOK là hình bình hành nên

$$AK \,//\, IO,\ AK = IO. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra H, A, K thẳng hàng và AH = AK. Vậy A là trung điểm của HK.

**Ví dụ 14.** Cho hình bình hành ABCD, các đường cao AE và AF. Biết AC = 25 cm, EF = 24 cm, tính khoảng cách từ A đến trực tâm H của tam giác AEF.

*Hướng dẫn :* Kẻ $CN \perp AB$, tính độ dài NF.

***Giải :*** (h.23)

Kẻ $CN \perp AB$. Tứ giác EHFC có EH // CF, HF // EC nên là hình bình hành. Ta có AN = HF (vì cùng bằng EC).

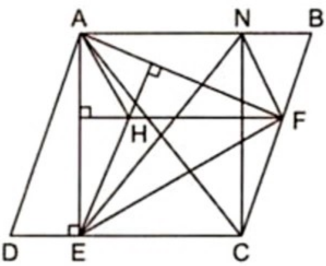
Tứ giác ANFH có AN = HF, AN // HF nên là hình bình hành, suy ra AH = NF và AH // NF.

Ta lại có $AH \perp EF$ nên $NF \perp EF$.

Tam giác EFN vuông tại F có EF = 24 cm, NE = AC = 25 cm nên

$$NF^2 = NE^2 - EF^2 = 25^2 - 24^2 = 49.$$

Suy ra NF = 7 cm. Do đó AH = 7 cm.



*Hình 23*

## Bài tập

**62.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, K theo thứ tự là hình chiếu của H trên AB, AC. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng AM vuông góc với IK.

**63.** Cho hình bình hành ABCD, O là giao điểm hai đường chéo, H là hình chiếu của A trên OD. Biết rằng các góc DAH, HAO, OAB bằng nhau. Chứng minh rằng ABCD là hình chữ nhật.

**64.** Cho tam giác ABC, trực tâm H, I là giao điểm các đường trung trực. Gọi E là điểm đối xứng với A qua I. Chứng minh rằng BHCE là hình bình hành.

**65.** Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC), đường cao AH. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho AE = AB. Gọi M là trung điểm của BE. Chứng minh rằng HM là tia phân giác của góc AHC.

**66.** Cho hình thang cân ABCD có AB // CD, $\widehat{ACD} = 60^o$, O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi E, F, G theo thứ tự là trung điểm của OA, OD, BC. Tam giác EFG là tam giác gì ? Tại sao ?

**67.** Gọi H là hình chiếu của đỉnh B trên đường chéo AC của hình chữ nhật ABCD, M và K theo thứ tự là trung điểm của AH và CD.

a) Gọi I và O theo thứ tự là trung điểm của AB và IC. Chứng minh rằng

$$MO = \frac{1}{2}IC.$$

b) Tính số đo góc BMK.

**68.** Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh bằng a, b, c, chu vi bằng 2p, các chiều cao tương ứng bằng h, m, n. Chứng minh rằng :

a) $(b + c)^2 \geq a^2 + 4h^2$ ;   b) $h^2 \leq p(p - a)$ ;   c) $h^2 + m^2 + n^2 \leq p^2$.

**69*.** Cho hình thang vuông ABCD có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^o$, $AB = AD = \dfrac{CD}{2}$. Qua điểm E thuộc cạnh AB, kẻ đường vuông góc với DE, cắt BC tại F. Chứng minh rằng ED = EF.

**70*.** Cho hình chữ nhật ABCD có $\widehat{BDC} = 30^o$. Qua C kẻ đường vuông góc với BD, cắt BD ở E và cắt tia phân giác của góc ADB ở M.

a) Chứng minh rằng AMBD là hình thang cân.

b) Gọi N là hình chiếu của M trên DA, K là hình chiếu của M trên AB. Chứng minh rằng ba điểm N, K, E thẳng hàng.

**71.** Cho hình chữ nhật ABCD.

a) Chứng minh rằng nếu M là một điểm bất kì nằm trong hình chữ nhật thì

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2.$$

b) Kết quả trên có thay đổi không nếu điểm M nằm ngoài hình chữ nhật ?

**72*.** Cho tam giác ABC. Vẽ ra phía ngoài tam giác ABC các hình chữ nhật ABDE, ACFG, BCHK. Chứng minh rằng các đường trung trực của EG, FH, KD đồng quy.

~ **Bài tập :** 337, 338, 352, 353, 360.

## §8. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC

Xem chuyên đề *Tìm tập hợp điểm*

~ *Ví dụ :* 23, 24, 26, 27.

*Bài tập :* 141, 142, 144 đến 146, 148 đến 154.

## §9. HÌNH THOI

Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.

Hình thoi có tất cả các tính chất của hình bình hành. Trong hình thoi, hai đường chéo vuông góc với nhau và là đường phân giác các góc của hình thoi.

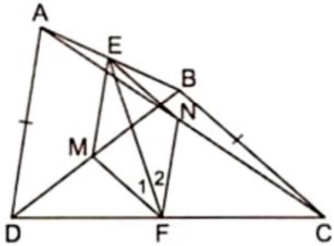
Để chứng minh một tứ giác là hình thoi, ta chứng minh tứ giác đó có bốn cạnh bằng nhau, hoặc chứng minh tứ giác đó là hình bình hành có một trong các tính chất sau :

– Có hai cạnh kề bằng nhau ;

– Có hai đường chéo vuông góc ;

– Có một đường chéo là đường phân giác của một góc.

**Ví dụ 15.** Tứ giác ABCD có $\widehat{C} = 40^o$, $\widehat{D} = 80^o$, AD = BC. Gọi E và F là trung điểm của AB và CD. Tính $\widehat{EFD}$, $\widehat{EFC}$.



*Hình 24*

*Giải :* (h.24) Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BD, AC. Ta có NF là đường trung bình của tam giác ADC nên $\widehat{NFC} = \widehat{ADC} = 80^o$, MF là đường trung bình của tam giác BDC nên $\widehat{MFD} = \widehat{BCD} = 40^o$. Suy ra :

$$\widehat{MFN} = 180^o - (80^o + 40^o) = 60^o.$$

Tứ giác EMFN có bốn cạnh bằng nhau nên là hình thoi. Do đó

$$\widehat{F}_1 = \widehat{F}_2 = 60^o : 2 = 30^o.$$

Vậy $\widehat{EFD} = 30^o + 40^o = 70^o$, $\widehat{EFC} = 30^o + 80^o = 110^o$.

## Bài tập

**73.** Xác định dạng của một tứ giác, biết rằng :

a) Tứ giác đó có hai trục đối xứng vuông góc với nhau và không đi qua đỉnh của tứ giác ;

b) Tứ giác đó có hai trục đối xứng là hai đường chéo của nó.

**74.** Cho tam giác ABC. Điểm D thuộc cạnh AB, điểm E thuộc cạnh AC sao cho BD = CE. Gọi I, K, M, N theo thứ tự là trung điểm của BE, CD, BC, DE.

a) Tứ giác MINK là hình gì ? Vì sao ?

b) Chứng minh rằng IK vuông góc với tia phân giác At của góc A.

**75.** Cho hình bình hành ABCD, AB = 2AD, $\widehat{D} = 70^o$. Gọi H là hình chiếu của B trên AD, M là trung điểm của CD. Tính số đo góc HMC.

**76.** Gọi O là giao điểm các đường chéo của hình thoi ABCD, E và F theo thứ tự là hình chiếu của O trên BC và CD. Tính các góc của hình thoi biết rằng EF bằng một phần tư đường chéo của hình thoi.

**77.** Trên các cạnh AB, BC, CD, DA của hình bình hành ABCD, lấy theo thứ tự các điểm E, M, N, F sao cho BM = DN, BE = DF. Gọi I, O, K theo thứ tự là trung điểm của EF, BD, MN.

a) Chứng minh rằng ba điểm I, O, K thẳng hàng.

b) Trong trường hợp nào thì cả năm điểm A, I, O, K, C thẳng hàng ?

**78.** Tứ giác ABCD có các đường chéo cắt nhau tại O và chu vi các tam giác OAB, OBC, OCD, ODA bằng nhau. Chứng minh rằng ABCD là hình thoi.

**79*.** Gọi H là trực tâm của tam giác đều ABC, đường cao AD. Lấy điểm M bất kì thuộc cạnh BC. Gọi E và F theo thứ tự là hình chiếu của M trên AB, AC. Gọi I là trung điểm của AM.

a) Xác định dạng của tứ giác DEIF.

b) Chứng minh rằng các đường thẳng MH, ID, EF đồng quy.

## §10. HÌNH VUÔNG

Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và có bốn cạnh bằng nhau.

Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.

Để chứng minh một tứ giác là hình vuông, ta chứng minh tứ giác đó là hình chữ nhật có một trong các tính chất :

– Có hai cạnh kề bằng nhau ;

– Có hai đường chéo vuông góc ;

– Có một đường chéo là đường phân giác của một góc.

Hoặc chứng minh tứ giác đó là hình thoi có một trong các tính chất :

– Có một góc vuông ;

– Có hai đường chéo bằng nhau.

**Ví dụ 16.** Gọi M là điểm bất kì trên đoạn thẳng AB. Vẽ về một phía của AB các hình vuông AMCD, BMEF.

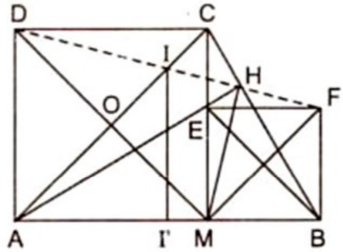
a) Chứng minh rằng AE $\perp$ BC.

b*) Gọi H là giao điểm của AE và BC. Chứng minh rằng ba điểm D, H, F thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng đường thẳng DF luôn luôn đi qua một điểm cố định khi điểm M chuyển động trên đoạn thẳng AB cố định.

*Giải :* (h.25) a) Xét $\Delta CAB$, ta có $CM \perp AB$, $BE \perp AC$ (vì $BE \perp MF$, $MF \parallel AC$). Suy ra $AE \perp BC$.

b) Gọi O là giao điểm của AC và DM. Do $\widehat{AHC} = 90^o$ (câu a) nên $OH = \frac{AC}{2}$, do đó $OH = \frac{DM}{2}$. Tam giác MHD có đường trung tuyến HO bằng nửa DM nên



*Hình 25*

$$\widehat{MHD} = 90^o. \qquad (1)$$

Chứng minh tương tự,

$$\widehat{MHF} = 90^o. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra D, H, F, thẳng hàng.

c) Gọi I là giao điểm của DF và AC ; $\Delta$ DMF có DO = OM, OI // MF nên I là trung điểm của DF.

Kẻ $II' \perp AB$ thì I' là trung điểm của AB và

$$II' = \frac{AD + BF}{2} = \frac{AM + MB}{2} = \frac{AB}{2}.$$

Do đó I là điểm cố định : I nằm trên đường trung trực của AB và cách AB một khoảng bằng $\frac{AB}{2}$.

## Bài tập

**80.** Tứ giác ABCD có E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của AB, BD, DC, CA. Tìm điều kiện của tứ giác ABCD để EFGH là hình vuông.

**81.** Cho hình vuông ABCD, điểm M nằm trên đường chéo AC. Gọi E, F theo thứ tự là các hình chiếu của M trên AD, CD. Chứng minh rằng :

a) BM vuông góc với EF.

b) Các đường thẳng BM, AF, CE đồng quy.

**82.** Cho hình vuông ABCD. Điểm E nằm trong hình vuông sao cho tam giác ECD cân có góc đáy bằng $15^o$. Chứng minh rằng tam giác ABE là tam giác đều.

**83.** Cho tam giác ABC cân tại A, góc đáy $75^o$ và hình vuông BDEC (các điểm A, D, E nằm cùng phía đối với BC). Hãy xác định dạng của tam giác ADE.

**84.** Cho hình vuông ABCD, điểm E thuộc cạnh CD, điểm F thuộc cạnh BC. Chứng minh rằng chu vi tam giác CEF bằng nửa chu vi hình vuông khi và chỉ khi $\widehat{EAF} = 45^o$.

**85.** Cho hình vuông ABCD, điểm M thuộc cạnh AB. Tia phân giác của góc MCD cắt cạnh AD ở N. Cho biết BM = m, DN = n. Tính độ dài CM theo m và n.

**86.** Cho hình vuông A'B'C'D' nằm trong hình vuông ABCD sao cho thứ tự các đỉnh theo cùng một chiều là như nhau (tức là nếu vẽ hai đường tròn, mỗi đường tròn qua các đỉnh của một hình vuông, thì chiều đi trên đường tròn từ A lần lượt qua B, C, D và từ A' lần lượt qua B', C', D' là như nhau). Chứng minh rằng trung điểm các đoạn thẳng AA', BB', CC', DD' là đỉnh của một hình vuông.

**87.** Cho hình vuông ABCD. Lấy các điểm E, F theo thứ tự thuộc các cạnh AD, AB sao cho AE = AF. Gọi H là hình chiếu của A trên BE. Tính $\widehat{CHF}$.

**88.** Cho điểm M thuộc cạnh CD của hình vuông ABCD. Tia phân giác của góc ABM cắt AD ở I. Chứng minh rằng BI ≤ 2MI.

**89.** Vẽ ra phía ngoài của một tam giác các hình vuông có cạnh là cạnh của tam giác. Chứng minh rằng :

a) Các đoạn thẳng nối trung điểm một cạnh của tam giác với tâm các hình vuông dựng trên hai cạnh kia bằng nhau và vuông góc với nhau.

b) Đoạn thẳng nối tâm hai hình vuông bằng và vuông góc với đoạn thẳng nối tâm hình vuông thứ ba với đỉnh chung của hai hình vuông trước.

**90.** Cho tam giác ABC. Vẽ về phía ngoài tam giác các hình vuông ABDE, ACFG có tâm theo thứ tự là M, N. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của EG, BC.

a) Chứng minh rằng KMIN là hình vuông.

b) Nếu tam giác ABC có BC cố định và đường cao tương ứng bằng h không đổi thì I chuyển động trên đường nào ?

**91.** Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là tâm các hình vuông có cạnh AB, BC, CD, DA dựng ra phía ngoài tứ giác. Chứng minh rằng :

a) Tứ giác EFGH có hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau.

b) Trung điểm các đường chéo của các tứ giác ABCD, EFGH là đỉnh của một hình vuông.

**92.** Cho bốn điểm E, G, F, H. Dựng hình vuông ABCD có bốn đường thẳng chứa cạnh đi qua bốn điểm E, G, F, H.

**93.** Cho ba điểm E, O, F. Dựng hình vuông ABCD nhận O làm giao điểm hai đường chéo, E và F thứ tự thuộc :

a) Các đường thẳng AB và CD ;

b) Các đường thẳng AB và BC.

**94.** Cho ba đường thẳng a, b, d. Dựng hình vuông ABCD có A thuộc a, C thuộc b, còn B và D thuộc d.

~ **Bài tập :** 143, 147, 368, 370, 373.

*Chương II*

# ĐA GIÁC. DIỆN TÍCH CỦA ĐA GIÁC

## §11. ĐA GIÁC

Đa giác $A_1A_2A_3... A_n$ là hình gồm n đoạn thẳng ($n \geq 3$), trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào có một điểm chung cũng không cùng nằm trên một đường thẳng.

Đa giác lồi là đa giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng mà bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của đa giác đó.

Khi nói đến đa giác mà không chú thích gì thêm, ta hiểu đó là đa giác lồi.

Tổng số đo các góc của đa giác n cạnh là $(n - 2).2v$ hay $(n - 2).180^o$.

Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.

**Ví dụ 17.** Tổng các góc của một đa giác n cạnh trừ đi góc A của nó bằng $570^o$. Tính n và $\widehat{A}$.

*Giải :* Ta có (n – 2) $180^o - \widehat{A} = 570^o$ nên $\widehat{A} = (n-2)\,180^o - 570^o$.

Do $0^o < \widehat{A} < 180^o$ nên $0 < (n-2)\,180 - 570 < 180$

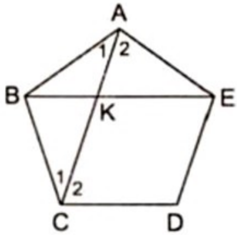
$$\Leftrightarrow 0 < n - 2 - \frac{570}{180} < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < n - 5\frac{1}{6} < 1 \Leftrightarrow 5\frac{1}{6} < n < 6\frac{1}{6}.$$

Do n là số tự nhiên nên n = 6 và

$$\widehat{A} = (6-2).\,180^o - 570^o = 150^o.$$

**Ví dụ 18.** Ngũ giác đều ABCDE có các đường chéo AC và BE cắt nhau ở K. Chứng minh rằng CKED là hình thoi.



*Hình 26*

*Giải :* (h.26) Góc của ngũ giác đều bằng $\frac{(5-2).180^o}{5} = 108^o$. Tam giác ABC cân tại B có $\widehat{ABC} = 108^o$ nên $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1 = 36^o$. Do đó

$$\widehat{A}_2 = \widehat{C}_2 = 108^o - 36^o = 72^o.$$

Ta có $\qquad \widehat{C}_2 + \widehat{D} = 72^o + 108^o = 180^o$

nên AC // DE. Chứng minh tương tự, BE // CD. Do đó CKED là hình bình hành. Ta lại có CD = DE nên CKED là hình thoi.

## Bài tập

### Đa giác

**95.** Tính số cạnh của một đa giác, biết rằng đa giác đó có :

a) Tổng các góc trong bằng tổng các góc ngoài (tại mỗi đỉnh của đa giác chỉ kể một góc ngoài) ;

b) Số đường chéo gấp đôi số cạnh ;

c) Tổng các góc trong trừ đi một góc của đa giác bằng $2570^o$.

**96.** Cho ngũ giác ABCDE. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, DE, AE ; gọi I là trung điểm của NQ, K là trung điểm của MP. Chứng minh rằng IK // CD, IK = $\frac{1}{4}$CD.

**97.** Chứng minh rằng nếu một lục giác có các góc bằng nhau thì hiệu các cạnh đối diện bằng nhau.

**98*.** Lục giác ABCDEF có số đo các góc (tính theo độ) là một số nguyên và $\widehat{A} - \widehat{B} = \widehat{B} - \widehat{C} = \widehat{C} - \widehat{D} = \widehat{D} - \widehat{E} = \widehat{E} - \widehat{F}$. Giá trị lớn nhất của $\widehat{A}$ có thể bằng bao nhiêu ?

### Đa giác đều

**99.** Gọi M là điểm bất kì trong tam giác đều ABC. Các điểm A', B', C' là hình chiếu của M trên các cạnh BC, AC, AB. Tính tỉ số $\dfrac{MA' + MB' + MC'}{AB' + BC' + CA'}$.

**100.** Cho lục giác đều ABCDEF, M và N theo thứ tự là trung điểm của CD, DE. Gọi I là giao điểm của AM và BN.

a) Tính $\widehat{AIB}$.

b*) Tính $\widehat{OID}$ (O là tâm của lục giác đều).

*Hướng dẫn :* Chứng minh rằng IO, ID là các tia phân giác của hai góc kề bù.

**101.** Chứng minh rằng ngũ giác có năm cạnh bằng nhau và ba góc liên tiếp bằng nhau là ngũ giác đều.

**102.** Chứng minh rằng trong đa giác đều 9 cạnh, hiệu giữa đường chéo lớn nhất và đường chéo nhỏ nhất bằng cạnh của nó.

**103.** a) Tìm số n sao cho mặt phẳng có thể được phủ kín bởi các đa giác đều bằng nhau có n cạnh.

b) Có tồn tại các ngũ giác bằng nhau (không yêu cầu đều) để phủ kín mặt phẳng không ?

c) Số đo các góc của đa giác đều n cạnh là số tự nhiên. Có bao nhiêu giá trị của n thoả mãn bài toán ?

A) 24 ; B) 22 ; C)12 ; D)10.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

~ **Bài tập :** 342.

## §12. DIỆN TÍCH CỦA ĐA GIÁC

Diện tích hình chữ nhật : $S = a.b$ (a là chiều dài, b là chiều rộng).

Diện tích hình vuông : $S = a^2$ (a là cạnh).

Diện tích tam giác : $S = \frac{1}{2}ah$ (a là cạnh, h là chiều cao tương ứng).

Diện tích tam giác đều : $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (a là cạnh).

Diện tích hình thang : $S = \frac{1}{2}(a + b).h$ (a và b là hai đáy, h là chiều cao).

Diện tích hình bình hành, hình thoi : $S = a.h$ (a là cạnh, h là chiều cao tương ứng).

Diện tích hình thoi, diện tích tứ giác có hai đường chéo vuông góc : $S = \frac{1}{2}d_1d_2$ ($d_1$ và $d_2$ là hai đường chéo).

**Ví dụ 19.** Tính diện tích hình thang ABCD có cạnh bên AD = a, khoảng cách từ trung điểm E của BC đến AD bằng h.

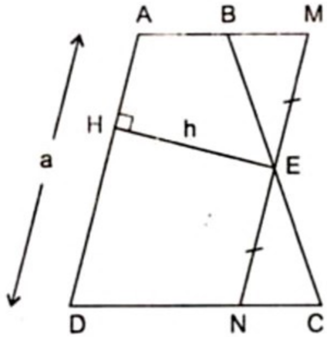
*Giải :* (h.27) Qua E, kẻ đường thẳng song song với AD, cắt AB và CD theo thứ tự tại M và N.

$\Delta ENC = \Delta EMB$ (g.c.g, bạn đọc tự chứng minh), suy ra $S_{ENC} = S_{EMB}$. Cộng $S_{ABEND}$ vào hai vế, ta được $S_{ABCD} = S_{AMND}$.

AMND là hình bình hành nên

$$S_{AMND} = AD.\,EH = ah.$$

Vậy $S_{ABCD} = ah$.

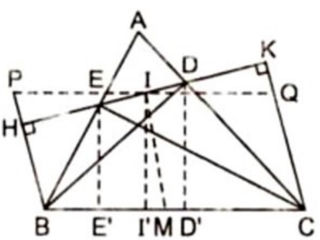


*Hình 27*

**Ví dụ 20.** Tam giác ABC có ba góc nhọn, vẽ các đường cao BD, CE. Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của B, C trên đường thẳng ED. Chứng minh rằng :

a) EH = DK.

b) $S_{BEC} + S_{BDC} = S_{BHKC}$.



*Hình 28*

*Giải :* (h.28) Gọi M, I theo thứ tự là trung điểm của BC và ED.

$\Delta MDE$ có MD = ME (cùng bằng $\frac{1}{2}$BC) nên là tam giác cân, do đó $MI \perp ED$.

Hình thang BHKC có BM = MC, MI // BH // CK nên I là trung điểm của HK.

Ta có IH = IK, IE = ID nên EH = DK.

b) Vẽ EE', II', DD' vuông góc với BC. Ta có II' là đường trung bình của hình thang EE'D'D nên $II' = \frac{1}{2}(EE' + DD')$. Do đó :

$$S_{BEC} + S_{BDC} = \frac{1}{2}BC.EE' + \frac{1}{2}BC.DD' = \frac{1}{2}BC(EE' + DD') = BC.II'. \quad (1)$$

Qua I, vẽ đường thẳng song song với BC, cắt BH và CK ở P và Q. Ta có

$$BC.\ II' = S_{BPQC}. \quad (2)$$

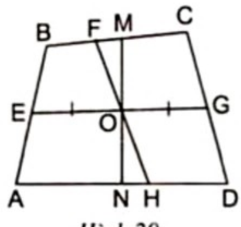
Ta lại có ΔPIH = ΔQIK (g.c.g) nên $S_{PIH} = S_{QIK}$, do đó

$$S_{BPQC} = S_{BHKC}. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $S_{BEC} + S_{BDC} = S_{BHKC}$.

**Ví dụ 21*.** Cho hình bình hành có bốn đỉnh nằm trên bốn cạnh của một tứ giác, trong đó hai đỉnh của hình bình hành là trung điểm hai cạnh đối của tứ giác. Chứng minh rằng diện tích hình bình hành bằng nửa diện tích tứ giác.

*Giải :* (h.29) Xét tứ giác ABCD và hình bình hành EFGH có E, G là trung điểm AB, CD. Gọi O là tâm của hình bình hành EFGH, M và N là trung điểm của BC và AD. Do EMGN cũng là hình bình hành nên O cũng là trung điểm của MN. Xét hai trường hợp :



*Hình 29*

a) Nếu F không trùng M thì FMHN là hình bình hành. Khi đó FM // NH nên BC // AD suy ra ABCD là hình thang. Dễ thấy

$$S_{EFGH} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

b) Nếu F trùng M thì H trùng N.

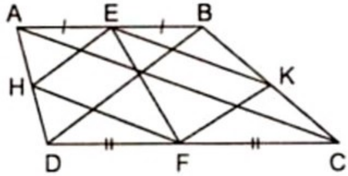
Khi đó $$S_{EFGH} = S_{EMGN} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

**Ví dụ 22*.** Tính diện tích hình thang có hai đường chéo dài 6 m và 10 m, đoạn thẳng nối trung điểm của hai đáy bằng 4 m.

*Giải :* Gọi ABCD là hình thang có AB // CD, BD = 6 m, AC = 10 m (h.30).

Gọi E, F, K theo thứ tự là trung điểm của AB, CD, BC. Ta có EK là đường trung bình của $\Delta ABC$ nên EK = AC : 2 = 10 : 2 = 5(m), FK là đường trung bình của $\Delta$ BDC nên

$$FK = BD : 2 = 6 : 2 = 3(m).$$



*Hình 30*

$\Delta EFK$ có $EF^2 + FK^2 = 4^2 + 3^2 = 25$

$= 5^2 = EK^2$ nên $\widehat{EFK} = 90^o$ (định lí Py-ta-go đảo).

Gọi H là trung điểm của AD. Dễ dàng chứng minh được EHFK là hình bình hành nên

$$S_{EHFK} = 2.\ S_{EFK} = EF.\ FK = 4\ .\ 3 = 12\ (m^2).$$

Dễ dàng chứng minh được $S_{ABCD} = 2\ S_{EHFK}$ (bạn đọc tự chứng minh).

Vậy $\qquad S_{ABCD} = 24\ m^2.$

*Chú ý :* Các đoạn thẳng EF, AC, BD đồng quy vì trong hình thang trung điểm của hai đáy và giao điểm của hai đường chéo là ba điểm thẳng hàng, xem *Bổ đề hình thang ở Nâng cao và phát triển Toán 8 tập hai*.

## Bài tập

### Diện tích hình chữ nhật, hình vuông, hình tam giác

**104.** Cho một hình chữ nhật có các kích thước là a và b (a và b có cùng đơn vị đo). Các tia phân giác các góc của hình chữ nhật cắt nhau tạo thành một tứ giác. Xác định dạng tứ giác đó và tính diện tích của nó.

**105.** Tam giác ABC vuông tại C có BC = a, AC = b. Vẽ phía ngoài tam giác ABC, vẽ tam giác DAB vuông cân tại D. Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của D trên CB, CA. Tính diện tích của tứ giác DHCK.

**106.** Tam giác ABC vuông tại A có BC = a, AC = b, BC = c, diện tích S. Chứng minh rằng 4S = (a + b + c)(b + c − a)

**107.** Cho tam giác ABC vuông tại A, các đường phân giác của các góc B và C cắt nhau ở I. Biết hình chiếu của IB, IC trên BC là m, n. Tính diện tích của tam giác ABC.

**108.** Cho tam giác ABC, m là trung điểm của BC. Gọi O là một điểm bất kì. Tìm liên hệ giữa diện tích các tam giác OAM, OAB, OAC.

**109.** O là một điểm nằm trong tam giác ABC. Gọi D, E, F theo thứ tự là các hình chiếu của O trên BC, AC, AB. Trên các tia OD, OE, OF lấy lần lượt các điểm A', B', C' sao cho OA' = BC, OB' = AC, OC' = AB.

a) Chứng minh rằng diện tích tam giác A'B'C' không phụ thuộc vào vị trí của điểm O trong tam giác.

b) Điểm O có vị trí gì đối với tam giác A'B'C' ?

**110.** Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Gọi D là điểm nằm giữa B và M. Qua M kẻ đường thẳng song song với DA, cắt AC ở E. Hãy chọn câu trả lời đúng trong các câu sau :

A) Diện tích tam giác DEC thay đổi phụ thuộc vào vị trí của điểm D.

B) Diện tích tam giác DEC bằng $\frac{1}{2}$ diện tích tam giác ABC.

C) Diện tích tam giác DEC bằng $\frac{1}{3}$ diện tích tam giác ABC.

**111*.** Cho tam giác ABC. Lấy các điểm D, E, F theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, CA sao cho $AD = \frac{1}{3}AB$, $BE = \frac{1}{3}BC$, $CF = \frac{1}{3}CA$. Các đoạn thẳng AE, BF, CD cắt nhau tạo thành một tam giác. Chứng minh rằng diện tích tam giác này bằng $\frac{1}{7}$ diện tích tam giác ABC.

**112*.** Cho tam giác ABC có diện tích S. Các điểm D, E, F theo thứ tự nằm trên các cạnh AB, BC, CA sao cho AD = DB, $BE = \frac{1}{2}EC$, $CF = \frac{1}{3}FA$. Các đoạn thẳng AE, BF, CD cắt nhau tạo thành một tam giác. Tính diện tích tam giác đó.

**113.** Tính diện tích tam giác ABC, biết AB = 3 cm, AC = 5 cm, đường trung tuyến AM = 2 cm.

**114.** Tính diện tích tam giác, biết độ dài ba đường trung tuyến của nó bằng 15 cm, 36 cm, 39 cm.

**115.** Cho tam giác ABC vuông tại A, AC = 20 cm, AB = 15 cm.

a) Lấy điểm D trên cạnh BC sao cho AD = AB. Tính độ dài BD.

b) Lấy điểm D trên cạnh BC sao cho BD = 4 cm. Tính độ dài AD.

**116.** Có tam giác nào mà độ dài các đường cao đều nhỏ hơn 1 cm nhưng diện tích bằng 2000 $cm^2$ không ?

**117.** Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh bằng a, b, c, diện tích tam giác bằng S. Chứng minh rằng

$$6S \le a^2 + b^2 + c^2.$$

### Diện tích hình thang, hình bình hành, hình thoi

**118.** Tính diện tích hình thang cân có đường cao bằng h, biết rằng hai đường chéo của hình thang vuông góc với nhau.

**119.** Tính diện tích hình thang có hai đường chéo dài 9 m và 12 m, tổng hai đáy bằng 15 m.

**120.** Qua giao điểm O của các đường chéo của một hình thang, vẽ đường thẳng song song với hai đáy, cắt các cạnh bên ở E và G. Chứng minh rằng OE = OG.

**121.** Hình thang ABCD có diện tích S, đáy DC gấp đôi đáy AB. Gọi M là trung điểm của AD, K là giao điểm của BM và AC. Tính diện tích tam giác ABK.

**122.** Điểm O là giao điểm các đường chéo của hình thang ABCD (AB // CD). Biết diện tích các tam giác AOB, COD theo thứ tự bằng $a^2$, $b^2$. Tính diện tích hình thang (a, b > 0).

**123.** Cho hình bình hành ABCD có diện tích S. Gọi M, N, I, K theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Gọi E và F theo thứ tự là giao điểm của KB với AI và MC. Gọi H và G theo thứ tự là giao điểm của DN với AI và MC.

a) Chứng minh rằng EFGH là hình bình hành.

b) Tính diện tích hình bình hành EFGH theo S.

**124.** Cho hình thoi ABCD có cạnh bằng a. Lấy điểm M trên cạnh AD, điểm N trên cạnh CD sao cho DM = CN. Tính diện tích hình thoi ABCD, biết rằng tam giác BMN là tam giác đều.

### Diện tích tứ giác

**125.** Tứ giác ABCD có $\widehat{B} = 90^\circ$, AB = 4 cm, BC = 3 cm, CD = 12 cm, AD = 13 cm. Tính diện tích tứ giác ABCD.

**126.** Tứ giác ABCD có O là giao điểm của hai đoạn thẳng nối trung điểm các cạnh đối. Chứng minh rằng

$$S_{AOD} + S_{BOC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

**127.** Các đường chéo của một tứ giác chia tứ giác đó thành bốn tam giác trong đó ba tam giác có diện tích bằng 30 $cm^2$, 60 $cm^2$, 90 $cm^2$. Tính diện tích tứ giác đó.

**128.** Chứng minh rằng :

a) $S \leq \frac{a^2 + b^2}{4}$ với S là diện tích của tam giác có độ dài hai cạnh bằng a, b.

b) $S \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}$ với S là diện tích của tứ giác có độ dài bốn cạnh bằng a, b, c, d.

**129.** Gọi a, b, c, d là độ dài bốn cạnh liên tiếp của một tứ giác có diện tích S. Chứng minh các bất đẳng thức sau và chỉ rõ khi nào xảy ra đẳng thức.

a) $4S \leq (a + c)(b + d)$ ; b) $16S \leq (a + b + c + d)^2$.

**130.** Gọi a, b, c, d là độ dài bốn cạnh (không nhất thiết liên tiếp) của một tứ giác có diện tích S. Chứng minh rằng $2S \leq ab + cd$. Khi nào xảy ra đẳng thức ?

**131*.** Cho tứ giác ABCD, E và F theo thứ tự là trung điểm của AD và CD. Biết BE + BF = a, chứng minh rằng

$$S_{ABCD} < \frac{a^2}{2}.$$

**132.** Cho hình bình hành ABCD. Các điểm E, F, G, H theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho EG không song song với AD. Cho biết diện tích tứ giác EFGH bằng nửa diện tích hình bình hành ABCD. Chứng minh rằng HF song song với CD.

**133.** Cho tam giác ABC, E là trung điểm của AC. Lấy điểm D trên cạnh BC sao cho $BD = \frac{1}{3}BC$, lấy điểm G trên cạnh AE sao cho $AG = \frac{1}{3}AE$. Đoạn thẳng AD cắt BG, BE theo thứ tự ở M, N. Tính diện tích tứ giác MNEG theo diện tích tam giác ABC.

**134*.** Cho tam giác ABC diện tích S. Lấy các điểm E, G trên BC sao cho BE = EG = GC. Gọi D, H theo thứ tự là trung điểm của AC, AB ; I là giao điểm của GH và BD ; K là giao điểm của AG và BD. Tính diện tích tứ giác EIKG.

**135*.** Chứng minh rằng tam giác có một đỉnh là giao điểm hai cạnh đối của một tứ giác, hai đỉnh kia là trung điểm hai đường chéo của tứ giác đó có diện tích bằng $\frac{1}{4}$ diện tích tứ giác.

**Dựng hình**

**136.** Cho tam giác ABC. Dựng các điểm D và F nằm trên cạnh AB, E nằm trên cạnh AC sao cho đường gấp khúc CDEF chia tam giác ABC ra bốn phần có diện tích bằng nhau.

**137.** Một mảnh vườn hình tam giác có một giếng D nằm trên cạnh BC. Hãy chia mảnh vườn thành hai phần có diện tích bằng nhau bởi một đường thẳng đi qua D.

**138.** Cho tứ giác ABCD. Dựng đường thẳng đi qua A chia tứ giác ra hai phần có diện tích bằng nhau.

**139.** Cho tam giác ABC. Dựng điểm O nằm bên trong tam giác sao cho diện tích các tam giác AOB, BOC, COA tỉ lệ với 1 ; 2 ; 3.

**140*.** Cho tứ giác ABCD. Dựng điểm O nằm bên trong tứ giác sao cho nếu nối O với trung điểm các cạnh của tứ giác thì tứ giác được chia ra bốn phần có diện tích bằng nhau.

~ **Ví dụ :** 25, 28, 29, 30, 53 đến 55, 58, 61, 63 đến 65, 67, 68.

**Bài tập :** 155,156, 157 đến 170, 324 đến 331, 335, 336, 339 đến 341, 343 đến 349, 354, 355, 357 đến 359, 361, 363 đến 367, 369, 371, 372.

# CHUYÊN ĐỀ

# TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

Bài toán tìm *tập hợp điểm* (còn gọi là *quỹ tích*) được chính thức giới thiệu ở lớp 9. Tuy nhiên, học sinh khá và giỏi có thể làm quen với dạng toán này ngay từ lớp 8 với các kiến thức thuộc chương trình Hình học lớp 7 và lớp 8.

## I – HAI TẬP HỢP BẰNG NHAU

Ta đã biết rằng : *Tập hợp các điểm cách một đường thẳng xy cố định một khoảng bằng h không đổi* (gọi là tập hợp A) là *hai đường thẳng song song với xy và cách xy một khoảng bằng h* (gọi là tập hợp B).

Hai tập hợp A và B nói trên là hai tập hợp bằng nhau. Ta biết rằng :

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A \Rightarrow x \in B \\ \forall x \in B \Rightarrow x \in A. \end{cases}$$

Do đó muốn chứng tỏ hai tập hợp điểm A và B bằng nhau, ta phải chứng minh hai điều :

– Nếu M là một điểm bất kì thuộc A thì M cũng thuộc B. (1)

– Nếu M là một điểm bất kì thuộc B thì M cũng thuộc A. (2)

Điều (1) chứng tỏ rằng tập hợp B chứa tập hợp A, điều (2) chứng tỏ rằng tập hợp A chứa tập hợp B. Phải chứng minh cả hai điều trên mới kết luận được A và B là hai tập hợp bằng nhau.

Do đó bài toán "*Tìm tập hợp các điểm có chung một tính chất α nào đó*" được trình bày theo ba phần :

Phần 1 : Chứng minh rằng nếu điểm M có tính chất α thì điểm M thuộc một hình H nào đó.

Phần 2 : Chứng minh rằng nếu điểm M thuộc hình H thì điểm M có tính chất α.

Phần 3 : Kết luận rằng tập hợp các điểm M có tính chất α là hình H.

*Chú ý :*

1. Phần 2 là đảo của phần 1, do đó nếu gọi phần 1 là phần thuận thì phần 2 là phần đảo.

2. Theo phần thuận, hình H chứa mọi điểm có tính chất α, không chứa thiếu điểm nào. Theo phần đảo, hình H chỉ chứa những điểm có tính chất α, không chứa thừa điểm nào khác. Như vậy, hình H gồm và chỉ gồm tất cả những điểm có tính chất α.

## II – CÁC TẬP HỢP ĐIỂM ĐÃ HỌC

Khi giải bài toán về tìm tập hợp điểm, cần nhớ lại ba tập hợp điểm đã học ở lớp 7 và một tập hợp điểm học ở lớp 8 :

– Tập hợp các điểm cách một điểm O cố định một khoảng R không đổi là đường tròn tâm O, bán kính R.

– Tập hợp các điểm cách đều hai đầu của một đoạn thẳng cố định là đường trung trực của đoạn thẳng ấy.

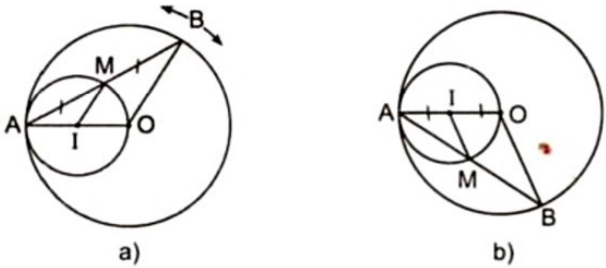
– Tập hợp các điểm thuộc miền trong một góc cố định và cách đều hai cạnh của nó là tia phân giác của góc ấy.

– Tập hợp các điểm cách đường thẳng xy cố định một khoảng bằng h không đổi là hai đường thẳng song song với xy và cách xy một khoảng bằng h.

## III – VÍ DỤ

**Ví dụ 23(8).** Cho đường tròn tâm O cố định, bán kính 4 cm, điểm A cố định trên đường tròn, điểm B chuyển động trên đường tròn. Tìm tập hợp các trung điểm M của AB.

***Giải :*** *Phần thuận.* (h.31a) Gọi I là trung điểm của AO thì I là điểm cố định. IM là đường trung bình của tam giác AOB nên $IM = \frac{OB}{2} = 2$ cm. Điểm M luôn cách điểm I cố định 2 cm nên M thuộc đường tròn tâm I bán kính 2 cm.




*Hình 31*

*Phần đảo.* (h.31b) Lấy điểm M bất kì thuộc đường tròn (I, 2 cm), M khác A. Ta sẽ chứng minh rằng M là trung điểm của một đoạn thẳng nào đó có một đầu là A và một đầu thuộc đường tròn (O).

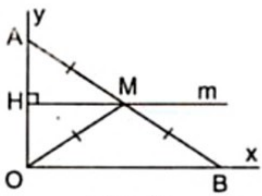
Thật vậy, gọi B là giao điểm của AM và (O), tam giác IAM cân nên $\widehat{IAM} = \widehat{IMA}$, $\Delta OAB$ cân nên $\widehat{OAB} = \widehat{B}$, suy ra $\widehat{IMA} = \widehat{B}$, do đó IM // OB. Tam giác OAB có OI = IA, IM // OB nên AM = MB.

*Kết luận.* Khi điểm B chuyển động trên (O), tập hợp các trung điểm M của AB là đường tròn (I, 2 cm), trừ điểm A.

**Ví dụ 24(8).** Cho góc vuông xOy cố định, điểm A cố định trên tia Oy, điểm B chuyển động trên tia Ox. Tìm tập hợp các trung điểm M của AB.

***Giải :*** *Cách 1* (h.32)

*Phần thuận.* OM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông OAB nên $OM = \frac{AB}{2}$ mà $MA = \frac{AB}{2}$, suy ra MA = MO. Điểm M cách đều hai điểm O và A cố định nên M thuộc đường trung trực của OA.




*Hình 32*

*Giới hạn :* Vì đoạn thẳng AB chỉ thuộc miền trong góc vuông xOy nên điểm M nằm trên tia Hm thuộc đường trung trực của OA và thuộc miền trong góc xOy.

*Phần đảo.* Lấy điểm M bất kì thuộc tia Hm thì

$$MO = MA, \qquad (1)$$

suy ra

$$\widehat{MAO} = \widehat{MOA}. \qquad (2)$$

Gọi B là giao điểm của AM và Ox. Ta có

$$\widehat{MBO} + \widehat{MAO} = 90^o,\ \widehat{MOB} + \widehat{MOA} = 90^o \qquad (3)$$

nên từ (2) và (3) suy ra $\widehat{MBO} = \widehat{MOB}$. Do đó

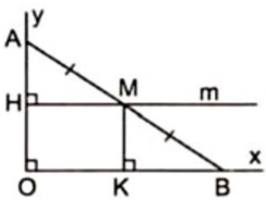
$$MO = MB. \qquad (4)$$

Từ (1), (4) suy ra MA = MB, do đó M là trung điểm của AB.

*Kết luận.* Khi điểm B chuyển động trên tia Ox thì tập hợp các trung điểm M của AB là tia Hm thuộc đường trung trực của OA và thuộc miền trong góc xOy.

*Cách 2* (h.33)

*Phần thuận.* Đặt AO = h (không đổi). Vẽ MK ⊥ Ox. Tam giác AOB có AM = MB, MK // AO nên $MK = \dfrac{AO}{2} = \dfrac{h}{2}$. Điểm M cách Ox cố định một khoảng không đổi $\dfrac{h}{2}$ nên M thuộc đường thẳng song song với Ox, cách Ox một khoảng $\dfrac{h}{2}$.



*Hình 33*

*Giới hạn :* Vì M chỉ thuộc miền trong góc vuông xOy nên M nằm trên tia Hm thuộc đường thẳng song song nói trên.

*Phần đảo.* Lấy điểm M bất kì thuộc tia Hm. Gọi B là giao điểm của AM và Ox. Tam giác AOB có $AH = HO = \dfrac{h}{2}$, HM // OB nên M là trung điểm của AB.

*Kết luận.* Khi điểm B chuyển động trên tia Ox, tập hợp các trung điểm M của AB là tia Hm thuộc đường thẳng song song với Ox, cách Ox một khoảng $\dfrac{h}{2}$ và thuộc miền trong góc xOy.

## IV – THỨ TỰ NGHIÊN CỨU VÀ TRÌNH BÀY LỜI GIẢI BÀI TOÁN TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

### 1. Tìm hiểu để bài

Phân biệt các yếu tố cố định yếu tố không đổi, quan hệ không đổi, yếu tố chuyển động (bao gồm điểm chuyển động đã biết vị trí và điểm chuyển động phải xác định vị trí).

Chẳng hạn trong ví dụ 24 thì :

– Yếu tố cố định : góc vuông xOy, điểm A.

– Yếu tố không đổi : độ dài AO = h.

– Quan hệ không đổi : MA = MB.

– Yếu tố chuyển động : điểm B chuyển động trên tia Ox, điểm M đang cần xác định vị trí.

### 2. Dự đoán tập hợp điểm

Để dự đoán tập hợp điểm phải tìm, ta thường vẽ chính xác vài vị trí của điểm đó (ít nhất là ba vị trí) rồi bằng trực giác đoán nhận điểm đó chuyển động trên hình nào.

Khi dự đoán tập hợp điểm, nên chú ý đến :

– *Điểm đặc biệt :* Trong ví dụ 23, khi B ở vị trí đối xứng với A qua O thì M ở vị trí O, vậy O là một điểm của tập hợp phải tìm. Trong ví dụ 24, khi B ở vị trí O thì M ở vị trí H, trung điểm của AO, điểm H là một điểm của tập hợp phải tìm.

– *Vị trí giới hạn :* Trong ví dụ 23, khi B tiến đến A thì M tiến đến A, điểm A là vị trí giới hạn của tập hợp phải tìm.

– *Điểm vô tận :* Trong ví dụ 24, khi B chuyển động xa điểm O vô tận trên tia Ox thì M cũng chuyển động xa vô tận. Như vậy, M không thể chuyển động trên đường tròn.

– *Tính đối xứng :* Trong ví dụ 23, chuyển động của điểm M có tính đối xứng qua đường thẳng cố định AO nên tập hợp điểm phải tìm nhận OA làm trục đối xứng.

### 3. Phần thuận

– Phát hiện quan hệ giữa điểm M cần xác định vị trí với các điểm cố định, các đường thẳng cố định. Nếu dự đoán điểm cần xác định vị trí thuộc đường tròn, ta chứng tỏ nó cách một điểm cố định một khoảng không đổi. Nếu dự đoán điểm cần xác định vị trí thuộc đường thẳng, ta chứng tỏ nó cách đều hai điểm cố định, hoặc cách một đường thẳng cố định một khoảng không đổi.

Để phát hiện ra các quan hệ ấy, có thể phải vẽ thêm đường phụ (điểm I trong ví dụ 23, đoạn MK trong cách 2 của ví dụ 24).

– Dựa vào các tập hợp điểm cơ bản đã học, chỉ ra điểm M cần xác định vị trí thuộc một hình nào đó, chẳng hạn hình H.

– Giới hạn hình H nếu điểm M không thuộc toàn bộ hình H mà chỉ thuộc hình H', một bộ phận của hình H (tia Hm trong ví dụ 24).

### 4. Phần đảo

– Lấy điểm M bất kì trên hình H'. Bằng vẽ hình, tạo ra các điểm chuyển động khác được nêu trong bài toán (điểm B trong ví dụ 23 và ví dụ 24).

– Chứng tỏ rằng điểm M có tính chất mà đề bài nêu lên (M là trung điểm của AB trong ví dụ 23 và ví dụ 24).

### 5. Kết luận

Tập hợp các điểm M phải tìm là hình H'.

*Chú ý :* Hầu hết các bài toán trong cuốn sách này được hỏi dưới dạng : Nếu điểm M có tính chất $\alpha$ thì điểm M nằm trên đường nào ? Do đó trong lời giải của bài chỉ trình bày nội dung của phần thuận. Chi tiết hơn về phần đảo và cách chứng minh phần đảo trong bài toán tìm tập hợp điểm, xem *Nâng cao và phát triển Toán 9 tập hai*.

## V – PHÂN CHIA CÁC TRƯỜNG HỢP TRONG BÀI TOÁN TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

Trong một số bài toán, ta cần phân chia các trường hợp khi kết luận "tập hợp các điểm M có tính chất $\alpha$ là hình H".

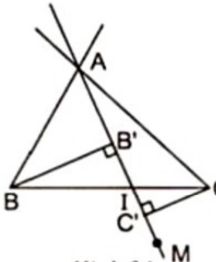
### 1. Xét điểm M thuộc từng miền

Nếu một khẳng định là đúng khi điểm M ở vị trí này nhưng lại không đúng khi M ở vị trí khác thì ta cần xét điểm M thuộc từng miền rồi lấy hợp các tập hợp điểm tìm được.

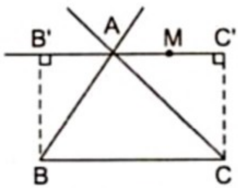
**Ví dụ 25(12).** Cho tam giác ABC cố định. Các điểm M sao cho các tam giác MAB và MAC có diện tích bằng nhau nằm trên đường nào ?

*Giải :* $S_{MAB} = S_{MAC} \Rightarrow BB' = CC'$ (BB', CC' là các đường vuông góc kẻ từ B và từ C đến MA). Xét hai trường hợp :

a) Điểm M thuộc miền trong góc BAC hoặc góc đối đỉnh với nó (h.34), tức là B và C nằm khác phía đối với AM. Khi đó đường thẳng AM cắt đoạn thẳng BC ở I. Do BB' = CC', BB' // CC' nên BB'CC' là hình bình hành, I là trung điểm của BC. Điểm M thuộc đường thẳng AI.



*Hình 34*



*Hình 35*

b) Điểm M thuộc miền trong góc kề bù với góc BAC (h.35), tức là B và C nằm cùng phía đối với AM. Do BB' = CC', BB' // CC' nên BB'C'C là hình bình hành, AM // BC. Điểm M thuộc đường thẳng qua A và song song với BC.

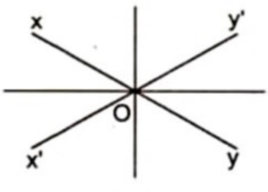
*Kết luận chung :* Các điểm M phải tìm gồm đường thẳng chứa đường trung tuyến AI của tam giác ABC và đường thẳng qua A song song với BC, trừ điểm A.

## 2. Xét từng vị trí của hình đã cho

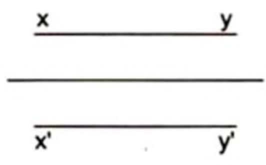
Nếu các hình đã cho có những vị trí khác nhau làm cho hình dạng của hình H thay đổi thì ta cần xét từng vị trí của hình đã cho.

**Ví dụ 26(8).** Các điểm M cách đều hai đường thẳng cố định xy, x'y' nằm trên đường nào ?

*Giải :* Trường hợp xy cắt x'y' ở O, điểm M nằm trên bốn tia phân giác của bốn góc tạo bởi hai đường thẳng (bốn tia này làm thành hai đường thẳng vuông góc với nhau tại O, xem hình 36).



*Hình 36*



*Hình 37*

Trường hợp xy // x'y', điểm M nằm trên đường thẳng song song cách đều xy và x'y' (h.37).

### 3. Xét từng trường hợp của tính chất $\alpha$ đã cho

Nếu tính chất $\alpha$ có những trường hợp khác nhau làm cho hình dạng của hình H thay đổi thì ta cần xét riêng từng trường hợp của tính chất $\alpha$.

**Ví dụ 27(8).** Cho góc vuông xOy cố định, điểm A cố định trên tia Oy, điểm B chuyển động trên tia Ox. Đỉnh C các tam giác ABC vuông cân tại B nằm trên đường nào ?

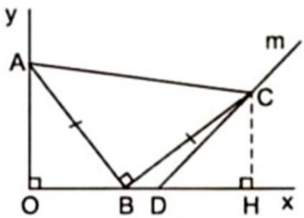
*Dự đoán tập hợp điểm* (khi C và O nằm khác phía đối với AB).

Khi B trùng O thì C trùng D (D thuộc tia Ox sao cho OD = OA), đó là điểm cố định.

Chú ý rằng khi B chạy xa vô tận trên tia Ox thì C cũng chạy xa vô tận.

Từ các nhận xét trên, ta dự đoán các đỉnh C nằm trên một tia gốc D.

***Giải :***



*Hình 38*

a) Trường hợp C và O nằm khác phía đối với AB (h.38) :

Trên tia Ox lấy điểm D sao cho OD = OA, D là điểm cố định. Kẻ CH $\perp$ Ox, $\Delta AOB = \Delta BHC$ (cạnh huyền – góc nhọn) suy ra

$$OB = CH, \qquad (1)$$

$$OA = BH. \qquad (2)$$

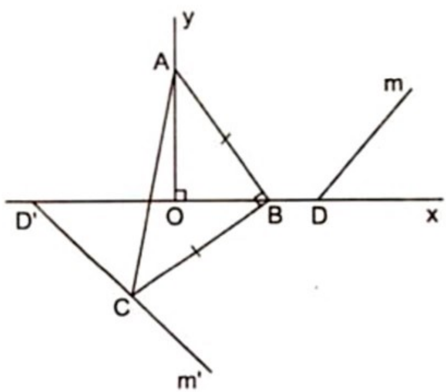
Ta lại có OA = OD nên từ (2) suy ra BH = OD, do đó

$$OB = DH. \qquad (3)$$

Từ (1) và (3) suy ra CH = DH. Vậy $\widehat{CDH} = 45^o$. Điểm C chuyển động trên tia Dm tạo với Dx góc $45^o$ và thuộc miền trong góc xOy.

b) Trường hợp C và O nằm cùng phía đối với AB (h.39) :

Bạn đọc tự giải được C chuyển động trên tia D'm', chính là tia Dm quay quanh A góc $90^o$ cùng chiều quay của kim đồng hồ.



*Hình 39*

## Bài tập

**141(8).** Tam giác ABC có BC cố định, I là trung điểm của đường cao BH. Các điểm I nằm trên đường nào ?

**142(8).** Cho góc xOy cố định, đường thẳng d cố định vuông góc với Ox tại A, điểm B chuyển động trên đoạn thẳng OA. Trên tia Oy lấy điểm C sao cho OC = OB. Đường vuông góc với BC tại C cắt đường thẳng d ở D. Các trung điểm M của BD nằm trên đường nào ?

**143(10).** Cho hình vuông ABCD cố định. Điểm E chuyển động trên tia đối của tia AD, điểm F chuyển động trên tia đối của tia BA sao cho BF = DE. Các trung điểm M của EF nằm trên đường nào ?

**144(8).** Cho góc xOy cố định có số đo bằng $\alpha < 180^o$. Một tam giác ABC cân tại A có cạnh bên bằng a không đổi, góc đáy bằng $\frac{\alpha}{2}$, tam giác đó thay đổi vị trí sao cho B thuộc tia Ox, C thuộc tia Oy, A và O khác phía đối với BC. Các điểm A nằm trên đường nào ?

**145(8).** Cho tam giác vuông cân ABC cố định. Điểm M chuyển động trên cạnh huyền BC. Đường thẳng qua M và vuông góc với BC cắt các đường thẳng BA, CA theo thứ tự ở D, E. Gọi I là trung điểm của CE, K là trung điểm của BD. Các trung điểm O của IK nằm trên đường nào ?

**146(8).** a) Cho đoạn thẳng AB cố định, điểm M chuyển động trên đoạn thẳng đó. Vẽ trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB các tam giác đều AMC, BMD. Các trung điểm I của CD nằm trên đường nào ?

b) Cũng câu hỏi như câu a), trong đó các tam giác đều vẽ trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB.

**147(10).** Cho đoạn thẳng AB cố định, điểm M chuyển động trên đoạn thẳng đó. Các trung điểm đoạn nối tâm các hình vuông có cạnh theo thứ tự là MA và MB nằm trên đường nào ?

**148(8).** Cho góc vuông xOy cố định, điểm A cố định trên tia Oy, điểm B chuyển động trên tia Ox. Vẽ tam giác đều ABC (C và O khác phía đối với AB).

a) Các điểm C nằm trên đường nào ?

b) Các trung điểm H của AC nằm trên đường nào ?

c) Các trung điểm K của BC nằm trên đường nào ?

**149(8).** Cho góc vuông xOy cố định, các điểm A, B cố định thuộc tia Ox, điểm C chuyển động trên tia Oy. Đường vuông góc với CA tại A và đường vuông góc CB tại B cắt nhau ở M. Các điểm M nằm trên đường nào ?

**150(8).** Cho góc xOy cố định khác góc bẹt và một độ dài h.

a) Các điểm M thuộc miền trong của góc có tổng các khoảng cách từ M đến Ox và đến Oy bằng h nằm trên đường nào ?

b) Cũng hỏi như câu a), trong đó thay tổng bằng hiệu.

**151(8).** Cho tam giác cân ABC cố định (AB = AC). Hai điểm D, E theo thứ tự chuyển động trên các cạnh bên AB, AC sao cho AD = CE. Các trung điểm M của DE nằm trên đường nào ?

**152(8).** Cho tam giác ABC cố định. Gọi Bx, Cy theo thứ tự là tia đối của các tia BA, CA. Các điểm D, E theo thứ tự chuyển động trên các tia Bx, Cy sao cho BD = CE. Các trung điểm M của DE nằm trên đường nào ?

**153(8).** a) Cho góc xOy khác góc bẹt. Điểm C chuyển động trên tia Ox, điểm D chuyển động trên tia Oy sao cho OC + OD = a. Các trung điểm M của CD nằm trên đường nào ?

b) Cũng hỏi như câu a), trong đó thay OC + OD = a bởi OC – OD = a.

**154*(8).** Cho tam giác ABC cố định (AB < AC). Hai điểm D, E theo thứ tự chuyển động trên các cạnh BA, CA sao cho BD + CE = a < AB. Các trung điểm M của DE nằm trên đường nào ?

**155(12).** Cho hai đoạn thẳng AB, CD cố định có độ dài bằng nhau. Các điểm M sao cho các tam giác MAB và MCD có diện tích bằng nhau nằm trên đường nào ?

**156*(12).** Cho tứ giác ABCD, E là giao điểm của AB và CD, F là giao điểm của AD và BC, I và K theo thứ tự là trung điểm của BD và AC.

a) Các điểm M thuộc miền trong của tứ giác và có tính chất

$$S_{MAB} + S_{MCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} \text{ nằm trên đường nào ?}$$

b) Gọi N là trung điểm của EF. Chứng minh rằng các điểm I, K, N thẳng hàng.

**157(8).** Cho hình chữ nhật ABCD cố định. Tìm tập hợp các điểm M sao cho :

a) $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ ; b) MA + MC = MB + MD.

## SỬ DỤNG CÔNG THỨC DIỆN TÍCH ĐỂ THIẾT LẬP QUAN HỆ VỀ ĐỘ DÀI CỦA CÁC ĐOẠN THẲNG

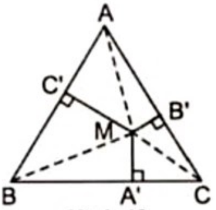
Các công thức diện tích cho ta các quan hệ về độ dài của các đoạn thẳng, chúng rất có ích để giải nhiều bài toán.

**Ví dụ 28(12).** Cho tam giác đều ABC.

a) Chứng minh rằng nếu điểm M thuộc miền trong của tam giác ABC thì tổng các khoảng cách từ M đến ba cạnh của tam giác bằng chiều cao của tam giác.

b) Quan hệ trên thay đổi như thế nào nếu điểm M thuộc miền ngoài của tam giác ?

***Giải :*** *Gọi a và h là cạnh và chiều cao của ΔABC, MA', MB', MC' là các khoảng cách từ M đến BC, AC, AB.*



*Hình 40*

a) Nếu M thuộc miền trong ΔABC (h.40) thì :

$$S_{MBC} + S_{MAC} + S_{MAB} = S_{ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}BC \,.\, MA' + \frac{1}{2}AC \,.\, MB' + \frac{1}{2}AB \,.\, MC' = \frac{1}{2}BC \,.\, AH$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2}(MA' + MB' + MC') = \frac{a}{2} \,.\, h$$

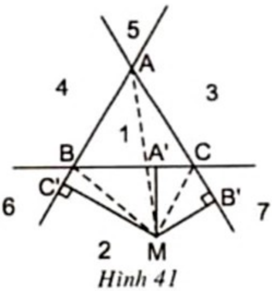
$$\Rightarrow MA' + MB' + MC' = h.$$

b) Nếu M thuộc miền ngoài ΔABC và thuộc miền trong góc A (miền 2, h.41) thì :

$$S_{MAC} + S_{MAB} - S_{MBC} = S_{ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} \,.\, MB' + \frac{a}{2} \,.\, MC' - \frac{a}{2} \,.\, MA' = \frac{a}{2} \,.\, h$$

$$\Rightarrow MB' + MC' - MA' = h.$$



*Hình 41*

Tương tự : Nếu M thuộc miền ngoài ΔABC và thuộc miền trong góc B (miền 3) thì MA' + MC' − MB' = h.

Nếu M thuộc miền ngoài ΔABC và thuộc miền trong góc C (miền 4) thì

$$MA' + MB' - MC' = h.$$

Nếu M thuộc miền trong góc đối đỉnh với góc A (miền 5) thì :

$$MA' - MB' - MC' = h.$$

Nếu M thuộc miền trong góc đối đỉnh với góc B (miền 6) thì :

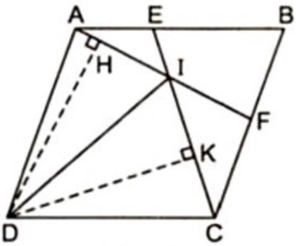
$$MB' - MA' - MC' = h.$$

Nếu M thuộc miền trong góc đối đỉnh với góc C (miền 7) thì :

$$MC' - MA' - MB' = h.$$

**Ví dụ 29(12).** Các điểm E, F nằm trên các cạnh AB, BC của hình bình hành ABCD sao cho AF = CE. Gọi I là giao điểm của AF, CE. Chứng minh rằng ID là tia phân giác của góc AIC.

*Hướng suy luận* (h.42)



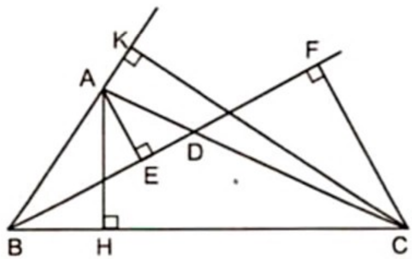
*Hình 42*

Để chứng tỏ D thuộc tia phân giác của góc AIC, ta vẽ $DH \perp IA$, $DK \perp IC$ rồi chứng minh rằng DH = DK. Hai đoạn thẳng này là các đường cao của $\Delta AFD$ và $\Delta CED$ có cạnh đáy tương ứng là AF và CE (bằng nhau theo giả thiết), do đó chỉ cần chứng minh $S_{AFD} = S_{CED}$, các diện tích này đều bằng $\frac{1}{2}S_{ABCD}$. Bạn đọc tự giải bài toán.

**Ví dụ 30(12).** Cho tam giác ABC có $\widehat{A} \geq 90^o$, D là điểm nằm giữa A và C. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ A và từ C đến BD lớn hơn đường cao kẻ từ A và nhỏ hơn đường cao kẻ từ C của tam giác ABC.

***Giải :*** (h.43) Gọi AH, CK là các đường cao của $\Delta ABC$. Kẻ AE và CF vuông góc với BD. Đặt $S_{ABC} = S$. Ta có $AE = \frac{2S_{ABD}}{BD}$, $CF = \frac{2S_{CBD}}{BD}$ nên

$$AE + CF = \frac{2S}{BD}.$$



*Hình 43*

Ta lại có $AH = \frac{2S}{BC}$, $CK = \frac{2S}{BA}$.

Do $\widehat{A} \geq 90^o$ nên BA < BD < BC, do đó AH < AE + CF < CK.

## Bài tập

**158(12).** Có tam giác nào mà độ dài ba đường cao bằng 3 cm, 4 cm, 7 cm không ?

**159(12).** Độ dài hai cạnh của một tam giác bằng 6 cm và 4 cm, nửa tổng các chiều cao ứng với hai cạnh ấy bằng chiều cao ứng với cạnh thứ ba. Tính độ dài cạnh thứ ba.

**160(12).** Chứng minh rằng một tam giác là tam giác vuông nếu các chiều cao $h_a$, $h_b$, $h_c$ của nó thoả mãn điều kiện

$$\left(\frac{h_a}{h_b}\right)^2 + \left(\frac{h_a}{h_c}\right)^2 = 1.$$

**161(12).** Tính các cạnh của một tam giác có ba đường cao bằng 12 cm, 15 cm, 20 cm.

**162(12).** Gọi $h_a$, $h_b$, $h_c$ là ba đường cao của một tam giác, chứng minh rằng

$$\frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

**163(12).** Tam giác ABC có độ dài các cạnh là a, b, c, các chiều cao tương ứng là $h_a$, $h_b$, $h_c$. Biết rằng $a + h_a = b + h_b = c + h_c$. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều.

**164(12).** Cho điểm O thuộc miền trong tam giác ABC. Các tia AO, BO, CO cắt các cạnh của tam giác ABC theo thứ tự ở A', B', C'. Chứng minh rằng :

a) $\dfrac{OA'}{AA'} + \dfrac{OB'}{BB'} + \dfrac{OC'}{CC'} = 1.$

b) $\dfrac{OA}{AA'} + \dfrac{OB}{BB'} + \dfrac{OC}{CC'} = 2$ (bài toán của Giec-gôn, nhà toán học Pháp).

c) $M = \dfrac{OA}{OA'} + \dfrac{OB}{OB'} + \dfrac{OC}{OC'} \geq 6.$ Tìm vị trí của O để tổng M có giá trị nhỏ nhất.

d*) $N = \dfrac{OA}{OA'} \cdot \dfrac{OB}{OB'} \cdot \dfrac{OC}{OC'} \geq 8.$ Tìm vị trí của O để tích N có giá trị nhỏ nhất.

**165(12).** a) Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ điểm M nằm trên đáy một tam giác cân đến hai cạnh bên không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trên cạnh đáy.

b) Kết quả trên có gì thay đổi nếu điểm M thuộc đường thẳng chứa cạnh đáy nhưng không thuộc cạnh đáy ?

**166(12).** Cho tam giác ABC cân tại A. Tìm tập hợp các điểm M thuộc miền trong tam giác hoặc nằm trên cạnh của tam giác, sao cho khoảng cách từ điểm M đến BC bằng tổng các khoảng cách từ điểm M đến hai cạnh kia.

**167(12).** Cho tam giác đều ABC cố định có chiều cao h. Tìm tập hợp các điểm M có tổng các khoảng cách đến ba cạnh của tam giác bằng độ dài m không đổi ($m > h$).

**168(12).** C là một điểm thuộc tia phân giác của góc xOy có số đo bằng $60^o$, M là điểm bất kì nằm trên đường vuông góc với OC tại C và thuộc miền ngoài của góc xOy. Gọi MA, MB theo thứ tự là khoảng cách từ M đến Ox, Oy. Tính độ dài OC theo MA, MB.

**169(12).** Cho tam giác đều ABC, các đường cao AD, BE, CF. Gọi A', B', C' là hình chiếu của điểm M (nằm bên trong tam giác ABC) trên AD, BE, CF. Chứng minh rằng khi điểm M thay đổi vị trí trong tam giác ABC thì :

a) Tổng A'D + B'E + C'F không đổi,

b) Tổng AA' + BB' + CC' không đổi.

**170(12).** Cho tam giác đều ABC, A', B', C' theo thứ tự là hình chiếu của điểm M (nằm bên trong tam giác ABC) trên BC, AC, AB. Các đường thẳng vuông góc với AB tại B, vuông góc với BC tại C, vuông góc với CA tại A cắt nhau ở D, E, F. Chứng minh rằng :

a) Tam giác DEF là tam giác đều.

b) Tổng AB' + BC' + CA' không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trong tam giác ABC.

## *Bài đọc thêm*

### TỪ MIỀN TRONG VÀ MIỀN NGOÀI CỦA ĐA GIÁC ĐẾN CÁC MÊ CUNG

**1. Định lí Jor-đăng**

Hình 58 biểu diễn một đa giác đơn(*) và hai điểm A, B. Liệu có thể tìm được một đường đi từ A đến B mà không cắt cạnh nào của đa giác hay không ?

---

(*) Đa giác đơn là đa giác mà :

– Mỗi đỉnh chỉ là điểm chung của hai cạnh ;

– Hai cạnh bất kì hoặc không cắt nhau, hoặc cắt nhau tại đỉnh.

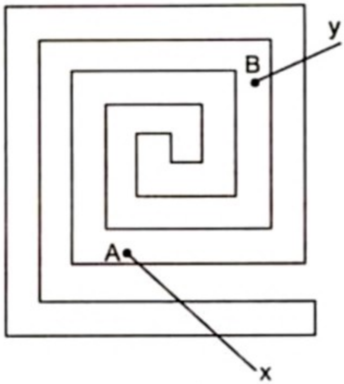
Câu trả lời là : không tìm được. Điều này đã được nhà toán học Pháp Jor-đăng (*Camille Jordan*, 1838 - 1922) chứng minh trong định lí mang tên ông :

Mỗi đa giác đơn phân chia mặt phẳng thành hai tập hợp có tính chất :

– Hai điểm bất kì thuộc cùng một tập hợp đều có thể nối được với nhau bởi một đường gấp khúc không cắt cạnh của đa giác.

– Bất kì đường gấp khúc nào nối hai điểm thuộc hai tập hợp cũng phải cắt cạnh của đa giác.

Mỗi tập hợp điểm như vậy gọi là một *miền* ; miền chứa hoàn toàn một đường thẳng nào đó gọi là *miền ngoài*, miền còn lại gọi là *miền trong*.



*Hình 44*

Với một hình chữ nhật, xác định một điểm thuộc miền trong hay miền ngoài của nó không có gì khó khăn. Nhưng với đa giác ở hình 44, điều này không phải là đơn giản. Định lí Jor-đăng cho phép xác định nhanh chóng một điểm thuộc miền trong hay miền ngoài của đa giác : chỉ cần vẽ qua điểm đó một tia không đi qua đỉnh nào của đa giác rồi đếm số giao điểm của tia đó với các cạnh của đa giác :

– Nếu số giao điểm là số chẵn thì điểm đó thuộc miền ngoài của đa giác.

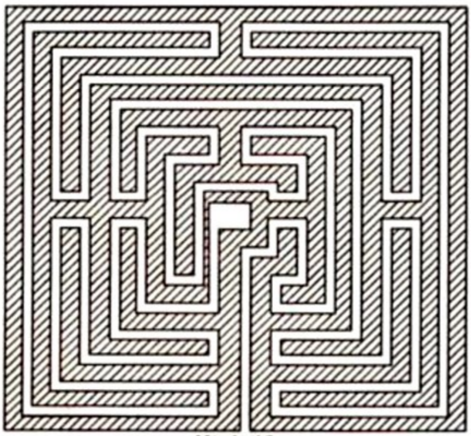
– Nếu số giao điểm là số lẻ thì điểm đó thuộc miền trong.

Một cách trực quan, ta thấy rằng từ miền ngoài của đa giác muốn vào miền trong của đa giác, phải "vượt biên giới" một lần, sau đó muốn ra miền ngoài của đa giác phải "vượt biên giới" một lần nữa.

Trên hình 44, tia Ax có ba giao điểm với các cạnh của đa giác nên A thuộc miền trong của đa giác, tia By có hai giao điểm với các cạnh của đa giác nên B thuộc miền ngoài của đa giác. Do A và B thuộc hai miền khác nhau nên mọi đường gấp khúc nối từ A đến B đều phải cắt cạnh của đa giác.

**2. Mê cung và những truyền thuyết**

Hình 45 là một đa giác đơn, cũng là một mê cung ở I-ta-li-a thế kỉ XII. Mê cung (hay mê lộ, mê đạo, tiếng Hi Lạp là *labyrinth*) thường được hiểu là một hệ thống đường ngầm gồm nhiều nhánh ngang dọc nối chằng chịt với nhau. Mê cung cũng được dùng để chỉ những công trình gồm rất nhiều hành lang, lối đi được bao bọc xung quanh với vô vàn ngã ba, ngã tư, ngõ cụt.


*Hình 45*

Người bị dẫn vào mê cung chỉ nhìn thấy một phần của đường đi nên rất khó định hướng và có thể không tìm được lối ra. Các mê cung trong các Kim tự tháp ở

Ai Cập là những đường hầm tối đen như mực, chỉ cao có một mét, ngang một mét. Càng vào sâu, đường càng hóc hiểm, có đoạn dẫn đến giếng nước, có đoạn dẫn đến bức tường đá. Phải rất khó khăn mới tìm đến được những gian buồng rộng rãi có quan tài ướp xác các vua chúa, hoàng hậu.

Theo truyền thuyết Hi Lạp thì mê cung đầu tiên được xây dựng trên đảo Cret, một đảo lớn ở Địa Trung Hải. Trên đảo này có con quỷ Mi-nô-tap đầu bò mình người. Nó bắt người thợ xây tài ba Đê-đan phải làm một mê cung gồm vô số căn phòng với những đường ngang, lối dọc ngoằn ngoèo và những ngõ cụt bất ngờ. Chín năm một lần, dân thành A-ten phải cống nạp bảy cặp trai tài gái sắc nhốt vào mê cung cho quái vật ăn thịt. Đã có nhiều tráng sĩ lần mò vào mê cung, nhưng nếu không bị lạc lối rồi kiệt sức thì cũng không chống cự nổi với sức mạnh hung hãn của quái vật. Cuối cùng hoàng tử Tê-dê, con trai vua Ê-ghê, đã vào được mê cung nhờ lần theo sợi chỉ của nàng công chúa xinh đẹp A-ri-at-na, con vua Mi-nôt trao cho. Sau một trận chiến đấu quyết liệt, chàng đã giết chết quái vật và ra được khỏi mê cung cũng bởi chính cuộn chỉ này (h.46).

*Hình 46*

*Mê cung* đã trở thành một từ để chỉ một tình huống phức tạp, nan giải, còn *cuộn chỉ A-ri-at-na* được dùng để chỉ một giải pháp hợp lí, sáng suốt nhằm thoát khỏi tình trạng bế tắc.

Mê cung khá phổ biến ở nhiều nước Châu Âu trước kia. Vào thế kỉ XII, vua Anh Hen-ri II đã xây một mê cung để dấu cô tình nhân xinh đẹp, nhưng cuối cùng cũng bị hoàng hậu Ê-lê-ô-no phát hiện nhờ dùng "sợi chỉ A-ri-at-na".

Ở Trung Quốc, trận đồ bát quái do Khổng Minh bày ra cũng chính là một mê cung. Tướng Ngô là Lục Tốn không biết đã đi vào từ cửa Tử, lạc lối không tìm được đường ra, may nhờ cụ già Hoàng Thừa Ngạn, chính là bố vợ Khổng Minh, dắt ra cửa Sinh mới thoát chết.

### 3. Rất có thể Cổ Loa là một thành mê cung(*)

Việc xây dựng thành Cổ Loa của An Dương Vương thế kỉ III-II trước Công nguyên đã được huyền thoại hoá với thần Kim Quy. Nhưng thành Cổ Loa lại là một công trình có thật.

Theo sử cũ, thành được xây dựng quanh co chín lớp theo hình con ốc. Di tích còn lại đến nay chỉ thấy ba lớp gồm ba vòng thành đắp bằng đất khép kín theo thứ tự từ trong ra ngoài là thành Nội, thành Trung và thành Ngoại.

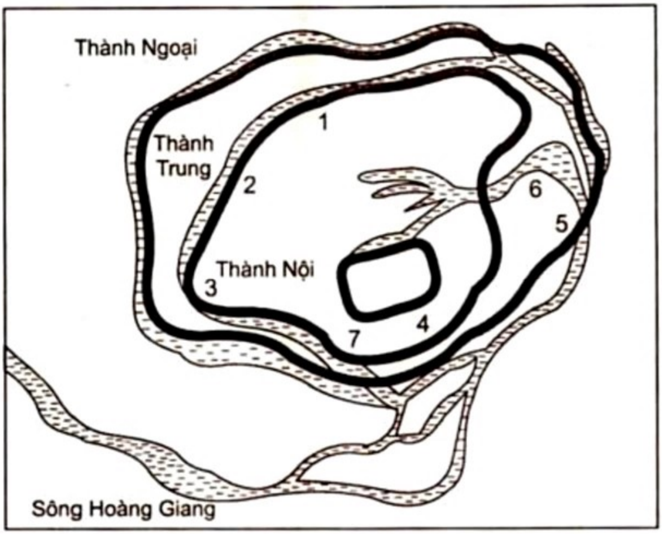
Thành Nội hình chữ nhật có chu vi 1650 m, mặt thành cao 5 m, rộng 6 - 12 m. Thành Trung có chu vi 6500 m, mặt thành rộng 10 m, chỗ cao nhất là 10 m. Thành Ngoại có chu vi 8000 m, đoạn cao nhất còn lại khoảng 8 m (h.47).

---

(*) Theo Nguyễn Như Mai, báo *Nhân Dân chủ nhật* ngày 28-5-1989.

Từ trước đến nay, đã có nhiều tác phẩm phân tích tài năng sáng tạo của người Âu Lạc trong việc đắp thành và giá trị quân sự của thành Cổ Loa.

Nhưng có một điều rất rõ ràng mà chưa thấy ai để cập : thành Cổ Loa thực chất là một mê cung rất độc đáo, ra đời cách đây đã hơn hai nghìn năm.




*Hình 47*

*Chú thích :* 1. cửa Bắc ; 2. cửa Tây Bắc ; 3. cửa Tây Nam ; 4. cửa Nam ; 5. cửa Đông ; 6. đầm Cả ; 7. giếng Ngọc

Chỉ căn cứ trên bình đồ của ba lớp thành còn lại cũng đủ thấy sự phức tạp và đầy bí ẩn của việc thiết kế mê cung này. Các lớp thành bao quanh có dạng đồng tâm lệch, ở phía nam sít gần nhau, toả rộng ra về phía bắc. Thành Nội chỉ có một cổng ở cửa Nam. Các cổng ở thành Trung và thành Ngoại không thẳng tuyến mà đặt lệch nhau. Các vách thành trùng điệp kết hợp với mạng lưới sông, hào, ao, đầm chằng chịt tạo thành những chỗ đón lõng, những vật cản khó vượt qua được. Ở đây có cả cửa "Tử" như cửa Đông. Muốn đột nhập thành tại cửa này, phải vượt sông Hoàng Giang, nhưng rẽ sang trái vấp phải ngách cụt, rẽ sang phải sa lầy vào đầm Cả.

Cửa Nam là hướng tiếp cận với thành Nội gần nhất, nhưng ở đây thành cao, hào sâu xen kẽ nhau ba bốn tầng với những ụ canh nhô cao, không dễ gì mà lọt qua được.

Có thể nói chắc chắn rằng quân Triệu Đà, nhất là quân kị, tiến công vào Cổ Loa là sa vào một mê cung khổng lồ, không có lối thoát. Trọng Thuỷ trong vai trò ở rể xâm nhập vào triều đình An Dương Vương chắc không chỉ ăn cắp bí mật của nỏ liên hoàn (nỏ thần Kim Quy trong truyền thuyết). Cũng giống như nàng A-ri-at-na, nàng Mị Châu đã trao "sợi chỉ đỏ" cho người tình đột nhập mê cung. Nhưng tiếc thay, Trọng Thuỷ không phải là hoàng tử Tê-dê nên vua An Dương Vương phải bỏ thành Cổ Loa mà chạy và Mị Châu đã phải trả giá đắt cho sự cả tin ấy bằng cả cuộc đời mình !

#### 4. Con chuột máy của San-nơn

Ngày nay, mê cung không chỉ là một đề tài giải trí. Người ta đã đề ra nhiều bài toán về mê cung, lập các thuật toán, các chương trình để giải các bài toán đó. Năm 1951, nhà toán học và kĩ sư Mỹ San-nơn (*Shannon*, sinh năm 1916) đã chế tạo ra con chuột máy biết tìm đường đi trong mê cung. Những bài toán về mê cung như tránh các ngõ cụt để tìm đường vào hoặc đường ra nhanh nhất, đi đến mọi nhánh của mê cung, mỗi nhánh đi đúng hai lần và mỗi lần theo một chiều khác nhau... là những bài toán có ứng dụng quan trọng cho một ngành toán học trẻ tuổi : ngành điều khiển học.

#### 5. Mời bạn vào thăm vườn

Hãy quan sát hình 48, đó là một vườn hoa đẹp do vua Anh Vin- hem III xây dựng vào thế kỉ XVII, đến nay vẫn còn.

*Hình 48*

Hai bên lối đi là hai hàng rào cây nhiều màu sắc. Ở chính giữa vườn có hai cây đại thụ và hai ghế đá quý. Nhưng vào được giữa vườn không phải dễ dàng. Nào, bây giờ mời bạn vào thăm vườn hoa đó !

# LỜI GIẢI, CHỈ DẪN HOẶC ĐÁP SỐ

## PHẦN ĐẠI SỐ

### *Chương I* - PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA ĐA THỨC

#### §1. Nhân đa thức

**1.** a) $5x^n$ ; b) $5.5^n - 4.5^n = 5^n$ ; c) 64.

**2.** a) $x = 6$ ; b) $x = 0$ ; c) $x = \dfrac{2}{7}$ ; d) $x = -2$.

**3.** a) $A = 1$.

b) Tại $x = 14$ thì

$$\begin{aligned} B &= x^5 - 15x^4 + 16x^3 - 29x^2 + 13x \\ &= x^5 - (x+1)x^4 + (x+2)x^3 - (2x+1)x^2 + x(x-1) \\ &= x^5 - x^5 - x^4 + x^4 + 2x^3 - 2x^3 - x^2 + x^2 - x \\ &= -x = -14. \end{aligned}$$

c) Thay 10 bởi $x + 1$. *Đáp số* : 1.

**4.** Đặt $\dfrac{1}{315} = a$, $\dfrac{1}{651} = b$ thì

$A = (2 + a)b - 3a(4 - b) - 4ab + 12a =$

$= 2b + ab - 12a + 3ab - 4ab + 12a = 2b = \dfrac{2}{651}$.

**5.** a) $x^6 - 1$ ; b) $x^7 + 1$.

**6.** a) $x = -5$ ; b) $x = -\dfrac{1}{2}$ ; c) $x = 0$.

**7.** Do $a + b + c = 0$ nên $M = a(a + b)(a + c) = a(-c)(-b) = abc$.

Tương tự : $N = abc$, $P = abc$. Vậy $M = N = P$.

**8.** Thực hiện phép tính ở từng vế.

**9.** Biến đổi vế phải : $4p(p-a) = 2p(2p-2a) = (a+b+c)(b+c-a)$. Kết quả của phép nhân này cho ta $2bc + b^2 + c^2 - a^2$.

**10.** Xét hai số $\overline{ab}$ và $\overline{ac}$ có $b + c = 10$. Hãy chứng minh rằng :

$$(10a + b)(10a + c) = 100a(a + 1) + bc.$$

*Quy tắc :* Nhân chữ số hàng chục với chữ số hàng chục thêm 1 rồi viết vào sau tích đó tích của hai chữ số đơn vị (tích này viết bằng hai chữ số).

*Ví dụ :* 34 . 36 = 1224 ; 81 . 89 = 7209.

**11.** $M = (x^2 - ax - bx + ab) + (x^2 - bx - cx + bc) + (x^2 - ax - cx + ac) + x^2$

$= 4x^2 - 2x(a + b + c) + ab + bc + ca.$

Thay $a + b + c = 2x$, ta được $M = ab + bc + ca$.

**12.** Xét $a_{n-1} + a_n = \dfrac{(n-1)n}{2} + \dfrac{n(n+1)}{2} = n^2$.

**13.** Số a chia cho 3 dư 1, số b chia cho 3 dư 2. Đặt $a = 3m + 1$, $b = 3n + 2$ (m, n nguyên) thì $ab - 2$ chia hết cho 3.

**14.** Trước hết, ta chứng minh rằng tích của hai số tự nhiên liên tiếp chia cho 3 thì dư 0 hoặc 2.

Số $3^{50} + 1$ chia cho 3 dư 1 nên không thể là tích của hai số tự nhiên liên tiếp.

**15.** a) Thực hiện phép nhân rồi rút gọn, ta được :

$A = 2^{32} + (2^{23} + 2^{23} - 2^{24}) + (2^{18} - 2^{17} - 2^{17}) + (2^9 + 2^9 - 2^{10}) + 1$

$= 2^{32} + 1$ (chú ý rằng các biểu thức trong ngoặc đều bằng 0).

b) Theo câu a), ta có $2^{32} + 1$ là hợp số.

## §2. Các hằng đẳng thức đáng nhớ

**16.** a) $\dfrac{1}{20}$ ;  b) $\dfrac{4}{5}$.

**17.** $A < B$.

**18.** $x = -\frac{1}{2}$.

**19.** a) $x^3 - 16x^2 + 25x$.

b) $[a - (b - c)]^2 - (b - c)^2 + 2ab - 2ac =$

$= a^2 - 2a(b - c) + (b - c)^2 - (b - c)^2 + 2ab - 2ac$

$= a^2 - 2ab + 2ac + 2ab - 2ac = a^2$.

c) Đặt $3x + 5 = a$, $3x + 1 = b$. Biểu thức đã cho bằng $(a - b)^2 = 4^2 = 16$.

d) Nhân biểu thức đã cho với $3 - 1$, được $3^{64} - 1$. *Đáp số* : $B = \frac{1}{2}(3^{64} - 1)$.

e) $2a^2$ ; g) $4(a^2 + b^2 + c^2)$ ; h) $4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$.

**20.** $A = (x + y)^2 - 4(x + y) + 1 = 3^2 - 4 . 3 + 1 = -2$.

**21.** $A = (2a + 2b + 2c - 3c)^2 + (2b + 2c + 2a - 3a)^2 + (2c + 2a + 2b - 3b)^2$.

Đặt $a + b + c = x$ thì

$A = (2x - 3c)^2 + (2x - 3a)^2 + (2x - 3b)^2$

$= 4x^2 - 12cx + 9c^2 + 4x^2 - 12ax + 9a^2 + 4x^2 - 12bx + 9b^2$

$= 12x^2 - 12x(a + b + c) + 9(a^2 + b^2 + c^2)$

$= 12x^2 - 12x^2 + 9(a^2 + b^2 + c^2) = 9(a^2 + b^2 + c^2) = 9m$.

**22.** a) $899 = 900 - 1 = 30^2 - 1 = (30 + 1)(30 - 1) = 31 . 29$.

b) $9991 = 10\,000 - 9 = 100^2 - 3^2 = 103 . 97$.

**23.** $7778^2 - 2223^2 = (7778 + 2223)(7778 - 2223) = 10001 . 5555 = 55\,555\,555$.

**24.** Thực hiện các phép tính ở từng vế.

**25.** Biến đổi vế trái được $(5a - 3b)^2 - 64c^2$. Thay $4c^2$ bằng $a^2 - b^2$.

**26.** Tính hiệu của vế trái và vế phải, ta được $(ay - bx)^2 = 0$ nên $ay = bx$. Do x, y khác 0 nên $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

**27.** Biến đổi đẳng thức đã cho thành $(ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (az - cx)^2 = 0$.

**28.** $(a + b)^2 = 2(a^2 + b^2) \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 2a^2 + 2b^2$

$$\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 0 \Rightarrow (a - b)^2 = 0 \Rightarrow a = b.$$

*Chú ý* : Bài này là trường hợp xảy ra dấu "=" của bất đẳng thức $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, đây là trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki.

**29.** a) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \Rightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2ab + 2bc + 2ca$

$\Rightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0 \Rightarrow a = b = c$.

b) Biến đổi đẳng thức đã cho thành $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$.

*Chú ý* : Câu này là trường hợp xảy ra dấu "=" của bất đẳng thức $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$, đây là trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki.

c) Biến đổi đẳng thức đã cho thành $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$.

**30.** a) $(a + b + c)^2 + a^2 + b^2 + c^2 =$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac + a^2 + b^2 + c^2$

$= (a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2$.

b) Đặt $a - b = x$, $b - c = y$, $c - a = z$ thì $x + y + z = 0$. (1)

Ta sẽ chứng minh $-2xy - 2xz - 2yz = x^2 + y^2 + z^2$. Chỉ cần bình phương hai vế của (1) là được đẳng thức trên.

**31.** a) 2 ; b) $\frac{1}{2}$.

**32.** a) Bình phương hai vế của $a + b + c = 0$, được

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 0$$

nên $a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca)$. (1)

Bình phương hai vế của (1), được

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) =$$

$$= 4[a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c)] = 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

Suy ra $\qquad a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2). \qquad (2)$

b) c) Bạn đọc tự chứng minh.

**33.** a) $9x^2 - 6x + 2 = 9x^2 - 6x + 1 + 1 = (3x - 1)^2 + 1 \geq 1$.

b) $x^2 + x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$.

c) $2x^2 + 2x + 1 = x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + (x + 1)^2 \geq 0$.

Không xảy ra đẳng thức. Do đó $2x^2 + 2x + 1 > 0$.

**34.** a) $A = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4}$ ; $\min A = \frac{11}{4}$ với $x = \frac{3}{2}$.

b) $B = 5x^2 + 5 \geq 5$ ; $\min B = 5$ với $x = 0$.

**35.** a) $A = 5 - (x - 1)^2 \leq 5$ ; $\max A = 5$ với $x = 1$.

b) $B = 4 - (x - 2)^2 \leq 4$ ; $\max B = 4$ với $x = 2$.

**36.** a) Xét $p = 3k + 1$ (k nguyên) thì $p^2 + 8 \ \vdots\ 3$, là hợp số.

Xét $p = 3k + 2$ thì $p^2 + 8 \ \vdots\ 3$, là hợp số.

Vậy $p = 3k$, mà p là số nguyên tố nên $p = 3$.

Khi đó $p^2 + 2 = 11$, là số nguyên tố.

b) Tương tự câu a), tìm được $p = 3$.

**37.** a) $999\,991 = 1\,000\,000 - 9 = 1000^2 - 3^2 = 1003 \,.\, 997$.

b) $1\,000\,027 = 100^3 + 3^3 \ \vdots\ 100 + 3$.

**38.** a) $-5x - 8$ ; $\qquad$ b) $x^6 - 64$.

**39.** a) $x = 7$ ; $\qquad$ b) $x = -\frac{1}{2}$.

**40.** a) $[a + (b + c)]^3 - [(b + c) - a]^3 - [a - (b - c)]^3 - [a + (b - c)]^3$.

*Đáp số :* 24abc.

b) $2(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$.

**41.** Thực hiện các phép tính ở từng vế.

*Chú ý :* Cách biến đổi biểu thức ở vế trái để được biểu thức ở vế phải : xem các ví dụ 11, 12.

**42.** Thay $c = -(a + b)$ lần lượt vào từng vế rồi thực hiện phép tính.

*Chú ý :* Bài toán này cũng được suy ra trực tiếp từ hằng đẳng thức ở bài 41b.

**43.** a) $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = a^2 - 2b$.

b) $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = a^3 - 3ab$.

c) $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (a^2 - 2b)^2 - 2b^2 = a^4 - 4a^2b + 2b^2$.

d) $x^5 + y^5 = (x^3 + y^3)(x^2 + y^2) - x^2y^2(x + y)$.

*Đáp số :* $a^5 - 5a^3b + 5ab^2$.

**44.** a) 1 ; b) 1.

**45.** M = 1.

**46.** a) Ta tính được $xy = -3$ và $x^3 + y^3 = 26$. Xem cách giải tổng quát ở câu b).

b) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = a(b - xy)$. (1)

Tính xy theo a và b, ta có

$$x + y = a \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = a^2 \Rightarrow xy = \frac{a^2 - b}{2}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $x^3 + y^3 = \dfrac{a(3b - a^2)}{2}$.

**47.** a) Cho $n = a^2 + b^2$ $(a, b \in \mathbf{N})$. Khi đó

$2n = 2a^2 + 2b^2 = a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 = (a + b)^2 + (a - b)^2$.

b) Cho $2n = a^2 + b^2$. Khi đó $n = \dfrac{a^2 + b^2}{2} = \left(\dfrac{a + b}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a - b}{2}\right)^2$.

Chú ý rằng $a^2 + b^2$ là số chẵn nên a và b cùng chẵn hoặc cùng lẻ, do đó $\frac{a+b}{2}$ và $\frac{a-b}{2}$ là số nguyên.

c) Cho $n = a^2 + b^2$. Khi đó $n^2 = (a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$.

d) Giả sử $m = a^2 + b^2$ và $n = c^2 + d^2$. Khi đó

$$\begin{aligned} mn &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\ &= a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 \\ &= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2. \end{aligned}$$

**48.** a) Đặt $\underbrace{99...9}_{n} = a$ thì $10^n = a + 1$.

$A = \underbrace{99...9}_{n}\underbrace{00....0}_{n}25 = (a.10^n).100 + 25 = a(a+1).100 + 25$

$= 100a^2 + 100a + 25 = (10a + 5)^2 = (\underbrace{99...9}_{n}5)^2$.

b) Đặt $\underbrace{99...9}_{n} = a$.

Biến đổi được $B = (10a + 9)^2 = (\underbrace{99...9}_{n+1})^2$.

c) Đặt $\underbrace{11...1}_{n} = a$ thì $10^n = 9a + 1$

$C = \underbrace{44...4}_{n}\underbrace{88...8}_{n} + 1 = 4a \cdot 10^n + 8a + 1$

$= 4a(9a + 1) + 8a + 1 = 36a^2 + 12a + 1 = (6a + 1)^2 = (\underbrace{66...6}_{n-1}7)^2$.

d) Đặt $\underbrace{11...1}_{n} = a$. Biến đổi được $D = (30a + 5)^2 = (\underbrace{33...3}_{n}5)^2$.

**49.** Đặt $\underbrace{11....1}_{n} = a$ thì $10^n = 9a + 1$.

a) $A = (3a)^2$.

b) $B = (3a + 1)^2$.

**50.** a) Ta có $9a + 1 = 10^n$, $b = 10^n + 5 = 9a + 6$. Do đó

$$ab + 1 = a(9a + 6) + 1 = (3a + 1)^2.$$

b) Cần chứng minh $A = \underbrace{11...1}_{n}\underbrace{55...5}_{n-1}6$ là số chính phương.

Đặt $\underbrace{11...1}_{n} = a$ thì $10^n = 9a + 1$. Ta có : $A = (3a + 1)^2$.

**51.** *Cách 1*. Giải như câu a) bài 50.

*Cách 2*. Chú ý rằng $b = a + 2$ nên

$$ab + 1 = a(a + 2) + 1 = (a + 1)^2 = (\underbrace{11....1}_{n}3)^2.$$

**52.** Chọn $b = a + 4$.

**53.** Đặt $\underbrace{11...1}_{n} = k$. Biểu thị a, b, c theo k, ta sẽ được $a = k(9k + 2)$, $b = 10k + 1$, $c = 6k$. *Đáp số* : $a + b + c + 8 = (3k + 3)^2$.

**54.** Ta thấy :

$$(10^{50})^3 < 10^{150} + 5.10^{50} + 1 < 10^{150} + 3.(10^{50})^2 + 3.10^{50} + 1 = (10^{50} + 1)^3.$$

Vậy $10^{150} + 5.10^{50} + 1$ không là lập phương của một số tự nhiên.

**55.** Chứng minh rằng :

$$(n - 1)^3 < (n - 1)n(n + 1) = n(n^2 - 1) = n^3 - n < n^3.$$

**56.** Đặt $\underbrace{11...1}_{n} = k$. *Đáp số* : $A = (3k)^3 = (\underbrace{33...3}_{n})^3$.

**57.** Nhận xét :

$$n + (n + 5) + (n + 7) = 3n + 12 = A,$$
$$(n + 1) + (n + 3) + (n + 8) = 3n + 12 = A,$$
$$(n + 2) + (n + 4) + (n + 6) = 3n + 12 = A.$$

Chia chín quả cân 10, 20, 30, ..., 90 thành ba nhóm như trên, khối lượng các nhóm đều bằng nhau. Lần thứ hai và lần thứ ba cũng làm như vậy.

**58.** Nhận xét :

$$n^2 + (n+5)^2 = 2n^2 + 10n + 25 = A + 12,$$

$$(n+1)^2 + (n+4)^2 = 2n^2 + 10n + 17 = A + 4,$$

$$(n+2)^2 + (n+3)^2 = 2n^2 + 10n + 13 = A.$$

Lần thứ nhất, chia sáu quả cân $1^2, 2^2, ..., 6^2$ thành ba phần : $A + 12$, $A + 4$, A.

Lần thứ hai, chia sáu quả cân $7^2, 8^2, ..., 12^2$ thành ba phần : B, $B + 12$, $B + 4$.

Lần thứ ba, chia sáu quả cân $13^2, 14^2, ..., 18^2$ thành ba phần : $C + 4$, C, $C + 12$.

Nhóm thứ nhất gồm các phần : $A + 12$, B, $C + 4$. Nhóm thứ hai gồm các phần : $A + 4$, $B + 12$, C. Nhóm thứ ba gồm các phần A, $B + 4$, $C + 12$. Khối lượng mỗi nhóm đều bằng $A + B + C + 16$.

**59.** Nhận xét :

$$n^2 + (n+5)^2 + (n+7)^2 = 3n^2 + 24n + 74 = A + 18,$$

$$(n+1)^2 + (n+3)^2 + (n+8)^2 = 3n^2 + 24n + 74 = A + 18,$$

$$(n+2)^2 + (n+4)^2 + (n+6)^2 = 3n^2 + 24n + 56 = A.$$

Nhóm thứ nhất gồm các phần: A, $B + 18$, $C + 18$. Nhóm thứ hai gồm các phần : $A + 18$, B, $C + 18$. Nhóm thứ ba gồm các phần $A + 18$, $B + 18$, C. Khối lượng mỗi nhóm đều bằng $A + B + C + 36$.

## §3. Phân tích đa thức thành nhân tử

**60.** a) *Đáp số :* $(b^2 + 1)(a^2 + 1)$.

b) *Đáp số :* $(x + 1)(x^2 + x + 1)$.

c) Gộp $x^3 - 27$. *Đáp số :* $(x - 3)(x^2 - x + 9)$.

d) Gộp $x^4 - 1$. *Đáp số :* $(x - 1)^3(x + 1)$.

e) Gộp $x^4 + 2x^2 + 1$. *Đáp số :* $(x^2 + 1)(x + 1)^2$.

**61.** a) $(x + 2y)(x - 2y) - 2(x + 2y) = (x + 2y)(x - 2y - 2)$.

b) $(x^2 + 2)(x^2 - 2) + 2x(x^2 - 2) = (x^2 - 2)(x^2 + 2x + 2)$.

c) $x^2 - x^4 - 4 - 4x^2 = x^2 - (x^2 + 2)^2 = (x + x^2 + 2)(x - x^2 - 2)$.

d) $1 - 4x^2 - x(x^2 - 4) = 1 - x^3 + 4x(1 - x) = (1 - x)(1 + 5x + x^2)$.

e) $(x^2 - x) + (y^2 - x^2y^2) + (xy - y)$. *Đáp số :* $(x - 1)(1 - y)(x + y + xy)$.

**62.** $199^3 - 199 = 199(199^2 - 1) = 199.200.198 \vdots 200$.

**63.** $A = (x^6 - 2x^4 + x^2) + (x^3 - x) = (x^3 - x)^2 + (x^3 - x) = 6^2 + 6 = 42$.

**64.** a) $(a + b + c)(ab + bc + ca)$.

b) $(a + b)(ab + bc + ca) + c(ab + bc + ca) - abc$

$= (a + b)(ab + bc + ca) + abc + c^2(a + b) - abc$

$= (a + b)(ab + bc + ca + c^2)$. *Đáp số :* $(a + b)(b + c)(c + a)$.

c) Viết đa thức dưới dạng $a[(a + b) + b]^3 - b[a + (a + b)]^3$ rồi đặt $a + b$ làm nhân tử chung. *Đáp số :* $(a + b)(a - b)^3$.

**65.** a) $(a + b)(b + c)(a - c)$.

b) $ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + (ca^2 + cb^2 + 2abc)$

$= ab(a + b) + c^2(a + b) + c(a + b)^2$

$= (a + b)(ab + c^2 + ac + bc) = (a + b)(b + c)(c + a)$.

c) Viết $b^2 - c^2$ dưới dạng : $-[(a^2 - b^2) + (c^2 - a^2)]$.

*Đáp số :* $(a - b)(b - c)(a - c)$.

d) Tách $c - a$ thành $-[(b - c) + (a - b)]$ :

$a^3(b - c) - b^3[(b - c) + (a - b)] + c^3(a - b) =$

$= a^3(b - c) - b^3(b - c) - b^3(a - b) + c^3(a - b)$

$= (b - c)(a^3 - b^3) - (a - b)(b^3 - c^3)$.

*Đáp số :* $(a - b)(a - c)(b - c)(a + b + c)$.

e) $(a^2 - b)(b^2 - c)(c^2 - a)$.

**66.** a) Viết c – a dưới dạng – [(b – c) + (a – b)].

*Đáp số :* (a – b)(b – c)(c – a)(a + b + c)

b) *Cách 1*. $A = a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3$.

Giữ hạng tử thứ nhất. Khai triển các hạng tử sau.

*Cách 2*. Viết c – a dưới dạng – [(b – c) + (a – b)], ta được

$$A = a(b-c)^3 - b[(b-c) + (a-b)]^3 + c(a-b)^3.$$

Áp dụng công thức $(x+y)^3 = x^3 + 3xy(x+y) + y^3$, ta được

$$A = a(b-c)^3 - b[(b-c)^3 + 3(b-c)(a-b)(a-c) + (a-b)^3] + c(a-b)^3$$

$$= (b-c)^3(a-b) - 3b(b-c)(a-b)(a-c) - (a-b)^3(b-c)$$

$$= (b-c)(a-b)[(b-c)^2 - 3b(a-c) - (a-b)^2].$$

Dễ dàng phân tích được biểu thức trong dấu ngoặc vuông thành

$$(c-a)(a+b+c).$$

*Đáp số :* (a – b)(b – c)(c – a)(a + b + c).

c) (a – b)(a – c)(b – c)(ab + bc + ca).

d) $a[(b-c)^2 - a^2] + b[(a+c)^2 - b^2] + c[(a-b)^2 - c^2]$.

Phân tích mỗi biểu thức trong dấu ngoặc vuông thành nhân tử rồi đặt a + c – b làm thừa số chung.

*Đáp số :* (a + c – b)(b + a – c)(c + b – a).

e) $a^4(b-c) - b^4[(b-c) + (a-b)] + c^4(a-b) =$

$= (b-c)(a^4 - b^4) - (a-b)(b^4 - c^4)$

$= (b-c)(a-b)(a+b)(a^2+b^2) - (a-b)(b-c)(b+c)(b^2+c^2)$.

$= (b-c)(a-b)(a^3 + ab^2 + a^2b + b^3 - b^3 - bc^2 - b^2c - c^3)$.

*Đáp số :* $(a-b)(b-c)(a-c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)$.

**67.** a) Đặt a + b – c = x, b + c – a = y, c + a – b = z thì

$$x + y + z = a + b - c + b + c - a + c + a - b = a + b + c.$$

Áp dụng hằng đẳng thức :

$$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x + y)(y + z)(z + x) \text{ (ví dụ 12a),}$$

ta có : $(a + b + c)^3 - (a + b - c)^3 - (b + c - a)^3 + (c + a - b)^3 =$

$= 3(a + b - c + b + c - a)(b + c - a + c + a - b)(c + a - b + a + b - c)$

$= 3 \,.\, 2b \,.\, 2c \,.\, 2a = 24abc.$

b) $abc - bc - ab + b - ac + c + a - 1$

$= bc(a - 1) - b(a - 1) - c(a - 1) + (a - 1)$

$= (a - 1)(bc - b - c + 1) = (a - 1)(b - 1)(c - 1).$

**68.** Biến đổi $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) = 0$ thành $(a - b)(b - c)(a - c) = 0$ (xem ví dụ 13).

Ta suy ra a = b, hoặc b = c, hoặc c = a. Vậy trong ba số a, b, c tồn tại hai số bằng nhau.

**69.** $a^2 + b^2 = 2ab \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 0 \Rightarrow (a - b)^2 = 0 \Rightarrow a = b.$

**70.** Theo ví dụ 11a, ta có :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

Do đó nếu $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và $a, b, c > 0$ thì

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0.$$

Áp dụng bài 29a để giải tiếp.

**71.** $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcd$

$\Rightarrow a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + c^4 - 2c^2d^2 + d^4 + 2a^2b^2 - 4abcd + 2c^2d^2 = 0$

$\Rightarrow (a^2 - b^2)^2 + (c^2 - d^2)^2 + 2(ab - cd)^2 = 0$

Bạn đọc tự chứng minh a = b = c = d.

**72.** $am + bc = a(a + b + c) + bc = a(a + b) + ac + bc = (a + b)(a + c).$

Tương tự, $bm + ca = (b + c)(b + a)$, $cm + ab = (c + a)(c + b)$. Suy ra điều phải chứng minh.

**73.** Do $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ nên

$$ab + cd = ab.1 + cd.1 = ab(c^2 + d^2) + cd(a^2 + b^2).$$

Phân tích đa thức này thành nhân tử được $(bc + ad)(ac + bd)$, bằng 0.

**74.** Ta có :

$$(1 + 1)^2 = 1^2 + 2.1 + 1$$

$$(2 + 1)^2 = 2^2 + 2.2 + 1$$

...

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2.n + 1.$$

Cộng từng vế n đẳng thức trên rồi rút gọn :

$$(n + 1)^2 = 1^2 + 2(1 + 2 + ... + n) + n.$$

Từ đó tính được $S_1 = \dfrac{n(n + 1)}{2}$.

**75.** Xét hằng đẳng thức $(x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$.

Lần lượt cho x bằng 1, 2, 3, ...., n, ta được :

$$(1 + 1)^4 = 1^4 + 4.1^3 + 6.1^2 + 4.1 + 1$$

$$(2 + 1)^4 = 2^4 + 4.2^3 + 6.2^2 + 4.2 + 1$$

...

$$(n + 1)^4 = n^4 + 4.n^3 + 6.n^2 + 4.n + 1.$$

Cộng từng vế n đẳng thức trên rồi rút gọn :

$$(n + 1)^4 = 1^4 + 4(1^3 + 2^3 + ... + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + ... + n^2) + \\ + 4(1 + 2 + ... + n) + n$$

$$= 1 + 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n.$$

Ta đã biết $S_1 = \dfrac{n(n + 1)}{2}$

$$S_2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1) \text{ (xem ví dụ 14).}$$

Từ đó tính được $S_3 = \dfrac{n^2(n + 1)^2}{4}$.

## §4. Chia đa thức

**76.** a) $8^{12} : 4^6 = (2^3)^{12} : (2^2)^6 = 2^{36} : 2^{12} = 2^{24}$.

b) $3^{14}$.

c) $\dfrac{9^{15}.25^3.4^3}{3^{10}.50^6} = \dfrac{(3^2)^{15}.25^3.(2^2)^3}{3^{10}.25^6.2^6} = \dfrac{3^{30}.2^6}{3^{10}.25^3.2^6} = \dfrac{3^{20}}{25^3}$.

**77.** $A = 3x^2y^4 \geq 0$ với mọi x và y.

**78.** $B = -2xy^2 + 2x(y^2 - 1) = -2x$.

**79.** $n \in \{2 ; 3\}$.

**80.** a) $-\dfrac{3}{4}ax^2 - 2x + 1$. b) $-3x - 4$.

**81.** $A = x^2 + 2x$.

min $A = -1$ với $x = -1$ và y tuỳ ý.

**82.** $n \in \{3 ; 4\}$.

**83.** $x^2 + y^2 - xy + x + 5y$.

**84.** a) $3x^2 - 2x + 4$ ; b) $2x - 8$ ; c) $x^2 - 3x + 2$.

**85.** a) $a = -18$ ; b) $a = -15$ ; c) $a = 3$.

**86.** a) $a = -12$ ; b) $a = -5$ ; c) $a = 4$.

**87.** a) Có thể giải bằng ba cách : đặt tính chia, hệ số bất định, xét giá trị riêng. *Đáp số :* $a = 0$ ; $b = -16$.

b) Có thể giải bằng ba cách như câu a).

*Đáp số :* $a + b = 0$ (tức là a tuỳ ý, $b = -a$).

c) Có thể giải bằng hai cách : đặt tính chia, hệ số bất định.

*Đáp số :* $a = -6$ ; $b = 4$.

**88.** a) *Cách 1*. Đặt tính chia ta được thương bằng $x^2 + x + a$, dư $(a - 1)x + (b - a)$. Muốn chia hết thì đa thức dư phải đồng nhất bằng 0, do đó $a = 1$, $b = a$. Vậy $a = b = 1$.

*Cách 2*. Thương có dạng $x^2 + cx + b$. Nhân nó với $x^2 - x + 1$ rồi đồng nhất với $x^4 + ax^2 + b$, ta được $c - 1 = 0$, $b - c + 1 = a$, $c - b = 0$. Suy ra $a = b = c = 1$.

b) *Cách 1*. Đặt tính chia.

*Cách 2*. Đồng nhất $(x^2 + 3x - 10)(ax + 5)$ với đa thức bị chia, được $3a + 5 = b$, $15 - 10a = 5$. Suy ra $a = 1$, $b = 8$.

*Cách 3*. Xét $ax^3 + bx^2 + 5x - 50 = (x + 5)(x - 2).Q(x)$. Lần lượt cho $x = -5$, $x = 2$, ta được

$$\begin{cases} -125a + 25b = 75 \\ 8a + 4b = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5a + b = 3 \\ 2a + b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 8. \end{cases}$$

c) Giải bằng hai cách như câu a). *Đáp số :* $a = 3$, $b = -4$.

d) Phân tích $x^4 + 4$ thành nhân tử, được $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$. Vậy $a = \pm 2$, $b = 2$.

**89.** $x^3 + ax + b = (x + 1).P(x) + 7$ nên với $x = -1$ thì $-1 - a + b = 7$, tức là

$$a - b = -8, \qquad (1)$$

$x^3 + ax + b = (x - 3).Q(x) - 5$ nên với $x = 3$ thì $27 + 3a + b = -5$, tức là

$$3a + b = -32. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a = -10$, $b = -2$.

**90.** Trong hằng đẳng thức $ax^3 + bx^2 + c = (x + 2).P(x)$, cho $x = -2$, ta được $-8a + 4b + c = 0$.

Trong hằng đẳng thức $ax^3 + bx^2 + c = (x + 1)(x - 1).Q(x) + x + 5$, lần lượt cho $x = 1$ và $x = -1$, được $a + b + c = 6$, $-a + b + c = 4$.

*Đáp số :* $a = 1$, $b = 1$, $c = 4$.

## *Chương II* - PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

### §5. Tính chất cơ bản của phân thức. Rút gọn phân thức

**91.** a) $x = -1$ ; b) $x = \pm 2$.

**92.** a) Đặt $1234 = x$. Ta có $A = \dfrac{(x+1)(2x+1) - x}{x(2x+1) + x + 1} = 1$.

b) Đặt $1000 = x$. *Đáp số* : $B = 2$.

**93.** a) $\dfrac{(3x-1)(x-1)^2}{(2x+3)(x-1)^2} = \dfrac{3x-1}{2x+3}$ ; b) $x^2$.

c) $\dfrac{(x-y+z)^2}{(x-y+z)(x-y-z)} = \dfrac{x-y+z}{x-y-z}$.

**94.** a) $\dfrac{n!(n+1)}{n!(n+2)} = \dfrac{n+1}{n+2}$ ; b) $\dfrac{n!}{n![(n+1)-1]} = \dfrac{1}{n}$ ;

c) $\dfrac{(n+1)!(-n-1)}{(n+1)!(n+3)} = \dfrac{-n-1}{n+3}$.

**95.** a) $\dfrac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a-b)(b-c)(b+c)} = \dfrac{a-c}{b+c}$ ; b) $\dfrac{(x-3)^2(2x+5)}{(x-3)^2(3x-1)} = \dfrac{2x+5}{3x-1}$ ;

c) $\dfrac{1}{2}(x-y+z)$ ; d) $\dfrac{1}{2}(x+y+z)$.

**96.** a) Giả sử $(3n+1, 5n+2) = d$.

Ta có $3(5n+2) - 5(3n+1) \,\vdots\, d \Rightarrow 1 \,\vdots\, d \Rightarrow d = \pm 1$.

b) Bạn đọc tự giải.

c) Giả sử $(n^3 + 2n, n^4 + 3n^2 + 1) = d$.

Ta có $(n^4 + 3n^2 + 1) - n(n^3 + 2n) = n^2 + 1 \,\vdots\, d$.

Do đó $(n^4 + 3n^2 + 1) - (n^2+1)^2 = n^2 \,\vdots\, d$.

Suy ra $1 \,\vdots\, d \Rightarrow d = \pm 1$.

d) Giả sử $d \in$ ƯC $(2n+1, 2n^2 - 1) \Rightarrow n(2n+1) - (2n^2 - 1) = n + 1 \,\vdots\, d$

$\Rightarrow 2n + 2 \,\vdots\, d \Rightarrow (2n+2) - (2n+1) = 1 \,\vdots\, d \Rightarrow d = \pm 1$.

**97.** Tử và mẫu cùng chứa thừa số $n^2 + n + 1$ lớn hơn 1.

**98.** Nhân biểu thức đã cho A với $x^2 + x + 1$, ta được

$$(x^2 + x + 1).A = x^{64} + x^{32} + 1.$$

Do $x^2 + x + 1 \neq 0$ nên $A = \dfrac{x^{64} + x^{32} + 1}{x^2 + x + 1}$.

**99.** Hãy chứng minh $(ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2 = 0$.

**100.** Ta có $B = bc(y - z)^2 + ca(z - x)^2 + ab(x - y)^2$

$= bcy^2 + bcz^2 + caz^2 + cax^2 + abx^2 + aby^2 - 2(bcyz + acxz + abxy)$. (1)

Từ giả thiết suy ra

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2(bcyz + acxz + abxy) = 0. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$B = ax^2(b + c) + by^2(a + c) + cz^2(a + b) + a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$$

$$= ax^2(a + b + c) + by^2(a + b + c) + cz^2(a + b + c)$$

$$= (a + b + c)(ax^2 + by^2 + cz^2).$$

Do đó : $$A = \frac{B}{ax^2 + by^2 + cz^2} = a + b + c.$$

**101.** *Đáp số :* $\dfrac{1}{3}$.

**102.** $x^2 - xy - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + xy - 2xy - 2y^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x(x + y) - 2y(x + y) = 0 \Leftrightarrow (x + y)(x - 2y) = 0.$$

Do $x + y \neq 0$ nên $x = 2y$. Do đó :

$$A = \frac{2y - y}{2y + y} = \frac{y}{3y} = \frac{1}{3}.$$

**103.** $A^2 = \dfrac{9x^2 + 4y^2 - 12xy}{9x^2 + 4y^2 + 12xy} = \dfrac{20xy - 12xy}{20xy + 12xy} = \dfrac{8xy}{32xy} = \dfrac{1}{4}$.

Do $2y < 3x < 0 \Rightarrow 3x - 2y > 0$, $3x + 2y < 0 \Rightarrow A < 0$.

Vậy $A = -\frac{1}{2}$.

**104.** Tính x và y theo z, được $x = 2z$, $y = 3z$. Thay các giá trị của x và y vào biểu thức M và rút gọn được $M = \frac{-8}{13}$.

**105.** a) $x \in \{-1 ; 0 ; 1 ; 2\}$ ; b) $x \in \{-2 ; 0 ; 2\}$ ;

c) $x \in \{-2 ; 0 ; 1 ; 3\}$ ;

d) $x^2 - 59 \vdots x + 8 \Leftrightarrow x^2 - 64 + 5 \vdots x + 8 \Leftrightarrow 5 \vdots x + 8$.

*Đáp số* : $x \in \{-13 ; -9 ; -7 ; -3\}$.

e) $x + 2 \vdots x^2 + 4 \Rightarrow (x + 2)(x - 2) \vdots x^2 + 4 \Rightarrow x^2 + 4 - 8 \vdots x^2 + 4$

$\Rightarrow 8 \vdots x^2 + 4$.

Xét $x^2 + 4$ bằng 4, bằng 8 rồi thử lại, ta được $x = -2$ thoả mãn bài toán.

**106.** Đặt $\frac{10}{x^2 + 1} = k \in \mathbf{Z}$, ta có $kx^2 + k = 10$ nên $x^2 = \frac{10 - k}{k}$.

Ta phải có $\frac{10 - k}{k} \geq 0$ nên $0 < k \leq 10$. Ta có bảng sau :

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 = \frac{10 - k}{k}$ | 9 | 4 | $\frac{7}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | 1 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{7}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{9}$ | 0 |
| $x \in \mathbf{Q}$ | $\pm 3$ | $\pm 2$ | | | $\pm 1$ | | | $\pm\frac{1}{2}$ | $\pm\frac{1}{3}$ | 0 |

*Đáp số* : $\pm 3, \pm 2, \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, 0$.

**107.** $\overline{abbb}.c = (1000a + 111b)c = 1000ac + 111bc = ac + 111c(9a + b)$.

$a.\overline{bbbc} = a(1110b + c) = ac + 1110ab$.

Cần chứng minh $111c(9a + b) = 1110ab$, tức là $c(9a + b) = 10ab$.

Theo giả thiết

$$\overline{ab}\,.c = \overline{bc}\,.a \Rightarrow (10a + b)\,c = (10b + c)a \Rightarrow 10ac + bc = 10ab + ac$$

$$\Rightarrow 9ac + bc = 10ab \Rightarrow c\,(9a + b) = 10ab.$$

*Chú ý :* Có các chữ số a, b, c thoả mãn đề bài, chẳng hạn 16 : 64 = 1 : 4, khi đó 1666 : 6664 = 1 : 4.

**108.** Gọi số học sinh nam và nữ của lớp 8A theo thứ tự là a và b, số học sinh nam và nữ của lớp 8B theo thứ tự là c và d. Ta cần tìm $\dfrac{7{,}6b + 9d}{b + d}$. Ta có :

$$\frac{7{,}1a + 7{,}6b}{a + b} = 7{,}4, \qquad (1)$$

$$\frac{8{,}1c + 9d}{c + d} = 8{,}4, \qquad (2)$$

$$\frac{7{,}1a + 8{,}1c}{a + c} = 7{,}9. \qquad (3)$$

Từ (1) suy ra b = 1,5a. Từ (3) suy ra c = 4a. Từ (2) suy ra d = 0,5c, do đó d = 2a. Ta được :

$$\frac{7{,}6b + 9d}{b + d} = \frac{7{,}6.1{,}5a + 9.2a}{1{,}5a + 2a} = \frac{29{,}4a}{3{,}5a} = 8{,}4.$$

Điểm trung bình phải tìm là 8,4.

## §6. Các phép tính về phân thức

**109.** a) $-1$.

b) $\dfrac{y + x}{xy(x + y)} + \dfrac{y - x}{xy(x - y)} = \dfrac{1}{xy} - \dfrac{1}{xy} = 0$.

**110.** a) A = 0.

b) $B = \dfrac{bc(b - c) - ac(a - c) + ab(a - b)}{abc(a - b)(b - c)(a - c)}$. Rút gọn được $\dfrac{1}{abc}$.

c) C = 1.

d) $D = \dfrac{a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)}{(a - b)(b - c)(a - c)} = 1$.

**111.** $P = \dfrac{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$.

Phân tích tử thành nhân tử được $(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)$.

Vậy $P = a + b + c$.

**112.** $A = \dfrac{3y-6}{y-2} + \dfrac{2x-(x+6)}{x-6} = 3 + 1 = 4$.

**113.** Từ $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3} + \dfrac{z^2}{4} = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{5}$ suy ra

$$\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{5}\right) + \left(\frac{y^2}{3} - \frac{y^2}{5}\right) + \left(\frac{z^2}{4} - \frac{z^2}{5}\right) = 0$$

nên $\dfrac{3}{10}x^2 + \dfrac{2}{15}y^2 + \dfrac{1}{20}z^2 = 0$. Do đó $x = y = z = 0$.

**114.** $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + \left(y^2 + \dfrac{1}{y^2}\right) = 4 \Rightarrow \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 2\right) + \left(y^2 + \dfrac{1}{y^2} - 2\right) = 0$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{y}\right)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{x} \\ y = \dfrac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1. \end{cases}$$

Có bốn đáp số :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 1 | −1 | −1 |
| y | 1 | −1 | 1 | −1 |

**115.** Từ (1) suy ra

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}\right) = 4.$$

Do (2) nên $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{ac} + \dfrac{1}{bc} = 1$, suy ra $\dfrac{a+b+c}{abc} = 1$.

Do đó $a + b + c = abc$.

**116.** Từ (1) suy ra bcx + acy + abz = 0.

Từ (2) suy ra $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z^2}+2\left(\frac{ab}{xy}+\frac{ac}{xz}+\frac{bc}{yz}\right)=4$.

Do đó $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z^2}=4-2.\frac{abz+acy+bcz}{xyz}=4.$

**117.** Từ giả thiết suy ra ab + bc + ca = 0.

Do đó $\frac{ab+bc+ca}{abc}=0$, tức là $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0.$

Sau đó chứng minh rằng nếu x + y + z = 0 thì

$$x^3+y^3+z^3=3xyz \text{ (xem bài 42).}$$

**118.** Từ giả thiết suy ra

$$a^2c+ab^2+bc^2=b^2c+a^2b+ac^2 \Rightarrow a^2(c-b)-a(c^2-b^2)+bc(c-b)=0$$

$$\Rightarrow (c-b)(a^2-ac-ab+bc)=0 \Rightarrow (c-b)(a-b)(a-c)=0.$$

Tồn tại một trong các thừa số c – b, a – b, a – c bằng 0. Do đó trong ba số a, b, c tồn tại hai số bằng nhau.

**119.** a) $A=2x^2+1-\frac{5}{x-3}$ ; $x\in\{-2;2;4;8\}$.

b) $x\in\{0;2\}$ ; c) $x\in\{0\}$.

**120.** $A=\frac{6ax+4x-2a}{4-x^2}+a=\frac{2x(3a+2)-2a}{4-x^2}+a=a.$

**121.** Đặt a – b = x, b – c = y, c – a = z thì x + y + z = 0.

Ta có $A=\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}+\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}=\frac{(x+y+z)^2}{xyz}=0.$

**122.** Thực hiện phép tính ở vế trái, ta được một phân thức có tử bằng $a^2+b^2-2ab-c^2$. Do đó (a – b + c)(a – b – c) = 0. Vậy b + c – a = 0 hoặc a + c – b = 0.

**123.** a) Thực hiện phép tính ở vế phải, được $\frac{(a+b)x^2+cx+a}{x(x^2+1)}$.

Đồng nhất với phân thức $\dfrac{1}{x(x^2+1)}$, ta được a + b = 0, c = 0, a = 1. Suy ra b = −1.

Vậy $\dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+1}$.

b) $a = \dfrac{1}{4}, b = -\dfrac{1}{4}$ ;  c) a = −1, b = 1, c = 1.

**124.** $B = (ab+bc+ca).\dfrac{ab+bc+ca}{abc} - \dfrac{abc(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{a^2b^2c^2}$

$= \dfrac{(ab+bc+ca)^2}{abc} - \dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{abc}$

$= \dfrac{2abc(a+b+c)}{abc} = 2(a+b+c)$.

**125.** Từ giả thiết suy ra ab + bc + ac = 0 nên

$a^2+2bc = a^2+bc+(-ab-ac) = a(a-b)-c(a-b) = (a-b)(a-c)$.

Tương tự : $b^2+2ac = (b-a)(b-c)$,

$c^2+2ab = (c-a)(c-b)$.

a) $M = \dfrac{1}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{1}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$

$= \dfrac{b-c+c-a+a-b}{(a-b)(b-c)(a-c)} = 0$.

b) $N = \dfrac{bc}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{ca}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{ab}{(c-a)(c-b)} = 1$.

c) $P = \dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)} = 1$.

**126.** Ta có $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{b+c}{a} = \dfrac{c+a}{b} = \dfrac{a+b+b+c+c+a}{c+a+b} = \dfrac{2(a+b+c)}{a+b+c}$.

Nếu $a+b+c \neq 0$ thì tỉ số trên bằng 2. Suy ra a + b = 2c, b + c = 2a, do đó a − c = 2(c − a) nên c = a, trái với đề bài.

Vậy a + b + c = 0. Ta có $M = \frac{a+b}{b}.\frac{b+c}{c}.\frac{c+a}{a} = \frac{-c}{b}.\frac{-a}{c}.\frac{-b}{a} = -1.$

**127.** Ta có $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ (xem bài 41b).

Do $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và $a + b + c \neq 0$ nên

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0.$$

Dễ dàng suy ra a = b = c. Vậy $N = \frac{3a^2}{(3a)^2} = \frac{1}{3}.$

**128.** a) $A = \frac{1.3}{2^2}.\frac{2.4}{3^2}.\frac{3.5}{4^2}...\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$

$$= \frac{1.2.3...(n-1)}{2.3...n}.\frac{3.4.5...(n+1)}{2.3...n} = \frac{1}{n}.\frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

b) $B = \frac{1^2.3^2.\ ....\ .(2n+1)^2}{1.3.3.5.5.7...(2n+1)(2n+1)(2n+3)}$. *Đáp số* : $\frac{1}{2n+3}$ .

**129.** a) Viết $\frac{1}{(n-1)n}$ thành $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ rồi dùng phương pháp khử liên tiếp.

*Đáp số* : $1 - \frac{1}{n}$.

b) Viết $\frac{1}{(3n+2)(3n+5)}$ thành $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+5}\right)$.

*Đáp số* : $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+5}\right) = \frac{n+1}{2(3n+5)}$.

c) $\frac{1}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)}\right]$. *Đáp số* : $\frac{(n-1)(n+2)}{4n(n+1)}$.

**130.** a) $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + .... + \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}\right)$

$$< \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{(n-1)n}\right) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2}.$$

b) $B = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ... + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{5^2-1} + ... + \frac{1}{(2n+1)^2-1}$

$= \frac{1}{2.4} + \frac{1}{4.6} + ... + \frac{1}{2n(2n+2)}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n+2}\right) < \frac{1}{4}.$

**131.** Nhận xét : $\frac{1}{n^2} < \frac{4}{4n^2-1} = 2\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right).$

Do đó

$$A < 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1}\right) < \frac{2}{3}.$$

**132.** Ta thấy : $\frac{1}{n^3} < \frac{1}{n^3-n} = \frac{1}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)-(n-1)}{(n-1)n(n+1)}$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)}\right].$$

Do đó :

$$B < \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5} + ... + \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)}\right]$$

$$< \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

**133.** Nhận xét : $1 + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}.$

Do đó

$$A = \frac{2^2}{1.3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \cdot \frac{4^2}{3.5} \cdot ... \cdot \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{2.3. ...(n+1)}{1.2. ...n} \cdot \frac{2.3. ... .(n+1)}{3.4. ... .(n+2)}$$

$$= \frac{n+1}{1} \cdot \frac{2}{n+2} < 2.$$

**134.** Nhận xét : $1 - \frac{2}{n(n+1)} = \frac{n^2+n-2}{n(n+1)} = \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}.$

Do đó $\quad B = \dfrac{1.4}{2.3}.\dfrac{2.5}{3.4}. \dots . \dfrac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$

Rút gọn được $B = \dfrac{1}{n}.\dfrac{n+2}{3} > \dfrac{1}{3}$.

**135.** $A = \dfrac{2.4}{4.6}.\dfrac{6.8}{8.10}.\dfrac{10.12}{12.14}\dots\dfrac{42.44}{44.46} = \dfrac{2}{46} = \dfrac{1}{23}$.

**136.** Nhận xét :

a) $\dfrac{n^3+1}{n^3-1} = \dfrac{(n+1)(n^2-n+1)}{(n-1)(n^2+n+1)} = \dfrac{(n+1)[(n-0,5)^2+0,75]}{(n-1)[(n+0,5)^2+0,75]}$

Do đó

$$A = \frac{3(1,5^2+0,75)}{1(2,5^2+0,75)}.\frac{4(2,5^2+0,75)}{2(3,5^2+0,75)}. \dots . \frac{10(8,5^2+0,75)}{8(9,5^2+0,75)}$$

$$= \frac{3.4. \dots .10}{1.2. \dots .8}.\frac{1,5^2+0,75}{9,5^2+0,75} = \frac{9.10}{1.2}.\frac{3}{91} = \frac{3}{2}.\frac{90}{91} < \frac{3}{2}.$$

b) Giải tương tự như trên.

$$B = \frac{1.2.3. \dots(n-1)}{3.4.5. \dots (n+1)}.\frac{(2,5^2+0,75)(3,5^2+0,75). \dots[(n+0,5)^2+0,75]}{(1,5^2+0,75)(2,5^2+0,75). \dots[(n-0,5)^2+0,75]}$$

$$= \frac{1.2}{n(n+1)}.\frac{(n+0,5)^2+0,75}{1,5^2+0,75}$$

$$= \frac{2}{n(n+1)}.\frac{n^2+n+1}{3} = \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)} > \frac{2}{3}.$$

**137.** Xét $\quad n^4+4 = (n^2+2)^2 - 4n^2 = (n^2-2n+2)(n^2+2n+2) =$

$= [(n-1)^2+1][(n+1)^2+1]$. Do đó

$$P = \frac{(0^2+1)(2^2+1)}{(2^2+1)(4^2+1)}.\frac{(4^2+1)(6^2+1)}{(6^2+1)(8^2+1)}. \dots . \frac{(20^2+1)(22^2+1)}{(22^2+1)(24^2+1)}$$

$$= \frac{1}{24^2+1} = \frac{1}{577}.$$

**138.** Viết mỗi phân thức thành hiệu của hai phân thức, được

$$M = \frac{1}{a-6} - \frac{1}{a-2} = \frac{4}{(a-2)(a-6)}.$$

**139.** $A = \frac{n-1}{1} + \frac{n-2}{2} + ... + \frac{n-(n-2)}{n-2} + \frac{n-(n-1)}{n-1}.$

$$= \frac{n}{1} + \frac{n}{2} + ... + \frac{n}{n-2} + \frac{n}{n-1} - 1 - 1 - ... - 1.$$

$$= n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + ... + \frac{n}{n-1} - (n-1)$$

$$= \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + ... + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n} = n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right) = n.B.$$

Vậy A : B = n.

**140.** Chú ý rằng $\frac{1}{k(2n-k)} = \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{2n-k}\right)$. Do đó

$$A = \frac{1}{2n}\left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2n-1}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n-3}\right) + ... + \left(\frac{1}{2n-3} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{1}\right)\right].$$

Tổng các phân thức thứ nhất trong mỗi dấu ngoặc bằng

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-1} \ ;$$

bằng B. Tổng các phân thức thứ hai trong mỗi dấu ngoặc cũng bằng B.

Vậy $A = \frac{1}{2n}.2B = \frac{B}{n}$. Do đó $A : B = \frac{1}{n}$.

**141.** Từ (2) ta có $\qquad a + b + c = \frac{bc + ac + ab}{abc}.$

Do abc = 1 nên $\qquad a + b + c = bc + ac + ab. \qquad (3)$

Để chứng minh trong ba số a, b, c tồn tại một số bằng 1, ta sẽ chứng minh

$$(a-1)(b-1)(c-1) = 0.$$

Xét $\qquad (a-1)(b-1)(c-1) = (ab - a - b + 1)(c - 1)$

$$= abc - ab - ac + a - bc + b + c - 1$$

$$= (abc - 1) + (a + b + c) - (ab + ac + bc).$$

Từ (1) và (3) suy ra biểu thức trên bằng 0.

Do đó, tồn tại một trong ba thừa số a – 1, b – 1, c – 1 bằng 0. Vậy, tồn tại một trong ba số a, b, c bằng 1.

**142.** Ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$. Hãy chứng minh rằng

$$(x+y)(y+z)(z+x)=0.$$

**143.** Hai biểu thức không thể cùng bằng 0. Chứng minh bằng phản chứng.

**144.** Cộng từng vế ba đẳng thức đã cho được

$$a+b+c=ax+by+cz=ax+2a=a(x+2)$$

nên $\frac{1}{x+2}=\frac{a}{a+b+c}$.

Tương tự, $\frac{1}{y+2}=\frac{b}{a+b+c}$, $\frac{1}{z+2}=\frac{c}{a+b+c}$.

Suy ra $M=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$.

**145.** a) Nhân tử và mẫu của phân thức thứ hai với a, thay 2 ở mẫu của phân thức thứ ba bởi abc, ta được

$$M=\frac{a}{ab+a+2}+\frac{ab}{2+ab+a}+\frac{2}{a+2+ab}=\frac{a+ab+2}{a+ab+2}=1.$$

b) Nhân tử và mẫu của phân thức thứ hai với a, thay 1 ở mẫu của phân thức thứ ba bởi abc. *Đáp số* : N = 1.

**146.** Từ giả thiết suy ra $\quad a(b-c)=c(a-b). \quad (1)$

Ta có
$$\frac{1}{c}+\frac{1}{a-b}=\frac{a-b+c}{c(a-b)}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{b-c}-\frac{1}{a}=\frac{a-b+c}{a(b-c)}. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra điều phải chứng minh.

**147.** a) $A=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$. Ta có $a+b+c=0$ nên $a^3+b^3+c^3=3abc$ (xem bài 42). Do đó A = 3.

b) $b+c=-a \Rightarrow b^2+2bc+c^2=a^2 \Rightarrow a^2-b^2-c^2=2bc$.

Tương tự, $b^2-c^2-a^2=2ac$, $c^2-a^2-b^2=2ab$.

$$B=\frac{a^2}{2bc}+\frac{b^2}{2ac}+\frac{c^2}{2ab}=\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc}.$$

Ta có $a + b + c = 0$ nên $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ (xem bài 42)

Do đó $B = \dfrac{3abc}{2abc} = \dfrac{3}{2}$.

**148.** Gọi $M = \dfrac{a-b}{c} + \dfrac{b-c}{a} + \dfrac{c-a}{b}$, ta có

$$M.\frac{c}{a-b} = 1 + \frac{c}{a-b}\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right) = 1 + \frac{c}{a-b}.\frac{b^2 - bc + ac - a^2}{ab} =$$

$$= 1 + \frac{c}{a-b}.\frac{(a-b)(c-a-b)}{ab} = 1 + \frac{2c^2}{ab} = 1 + \frac{2c^3}{abc}.$$

Tương tự, $M.\dfrac{a}{b-c} = 1 + \dfrac{2a^3}{abc}$, $\quad M.\dfrac{b}{c-a} = 1 + \dfrac{2b^3}{abc}$.

Vậy $A = 3 + \dfrac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc} = 9$ (vì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, xem bài 42).

**149.** Từ giả thiết suy ra :

$$a^2b - a^3bc - b^2c + ab^2c^2 = ab^2 - ab^3c - a^2c + a^2bc^2$$

$$\Rightarrow ab(a-b) + c(a^2 - b^2) = abc^2(a-b) + abc(a^2 - b^2)$$

$$\Rightarrow (a-b)(ab + ac + bc) = abc(a-b)(c + a + b).$$

Chia hai vế cho $abc(a-b) \neq 0$.

**150.** Từ $x + y + z = 0$ suy ra $x^2 = (y+z)^2$, $y^2 = (x+z)^2$, $z^2 = (x+y)^2$.

Do đó

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = a(y+z)^2 + b(x+z)^2 + c(x+y)^2 =$$

$$= a(y^2 + 2yz + z^2) + b(x^2 + 2xz + z^2) + c(x^2 + 2xy + y^2) =$$

$$= x^2(b+c) + y^2(a+c) + z^2(a+b) + 2(ayz + bxz + cxy). \qquad (1)$$

Thay $b + c = -a$, $a + c = -b$, $a + b = -c$ do $a + b + c = 0$

và thay $ayz + bxz + cxy = 0$ do $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z} = 0$ vào (1), ta được

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = -ax^2 - by^2 - cz^2$$

nên $\qquad 2ax^2 + 2by^2 + 2cz^2 = 0 \Rightarrow ax^2 + by^2 + cz^2 = 0.$

**151.** Từ giả thiết suy ra $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$. Do đó

$$x - y = \frac{1}{z} - \frac{1}{y} = \frac{y - z}{yz},\ y - z = \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = \frac{z - x}{xz},\ z - x = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{x - y}{xy}.$$

Suy ra $$(x - y)(y - z)(z - x) = \frac{(x - y)(y - z)(z - x)}{x^2y^2z^2}$$

nên $$(x - y)(y - z)(z - x)(x^2y^2z^2 - 1) = 0.$$

Bạn đọc tự giải tiếp bài toán.

**152.** Nhân hai vế của $\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} = 1$ với $a + b + c$, ta được

$$\frac{a^2 + a(b + c)}{b + c} + \frac{b^2 + b(c + a)}{c + a} + \frac{c^2 + c(a + b)}{a + b} = a + b + c$$

nên $$\frac{a^2}{b + c} + a + \frac{b^2}{c + a} + b + \frac{c^2}{a + b} + c = a + b + c.$$

**153.** Từ $\frac{a}{b - c} + \frac{b}{c - a} + \frac{c}{a - b} = 0$ suy ra

$$\frac{a}{b - c} = \frac{b}{a - c} + \frac{c}{b - a} = \frac{b^2 - ab + ac - c^2}{(a - b)(c - a)}.$$

Nhân hai vế với $\frac{1}{b - c} \Rightarrow \frac{a}{(b - c)^2} = \frac{b^2 - ab + ac - c^2}{(a - b)(b - c)(c - a)}$. Tương tự,

$$\frac{b}{(c - a)^2} = \frac{c^2 - bc + ba - a^2}{(b - c)(c - a)(a - b)},\ \frac{c}{(a - b)^2} = \frac{a^2 - ca + cb - b^2}{(c - a)(a - b)(b - c)}.$$

Cộng từng vế ba đẳng thức trên.

**154.** a) $a^2 - 2$ ; b) $a(a^2 - 3)$ ; c) $a^4 - 4a^2 + 2$ ;

d) Chú ý rằng $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = x^5 + \frac{1}{x} + x + \frac{1}{x^5}$. *Đáp số :* $a^5 - 5a^3 + 5a$.

**155.** Trước hết, tính $x^4$ theo a. Ta có

$$\frac{x^4 - 1}{x^4 + 1} = a \Rightarrow x^4 - 1 = ax^4 + a \Rightarrow x^4 - ax^4 = a + 1$$

$$\Rightarrow x^4 = \frac{a+1}{1-a} \text{ (do } a \neq 1).$$

Thay vào M và rút gọn được $M = \dfrac{2a}{a^2+1}$.

**156.** *Cách 1.* Ta có

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 3x \Rightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x} = 3. \qquad (1)$$

$$A = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^2 - x + 1}{x} . \frac{x^2 + x + 1}{x} = 3.\frac{x^2 + x + 1}{x}.$$

Ta thấy $\qquad \dfrac{x^2 + x + 1}{x} = \dfrac{x^2 - x + 1}{x} + \dfrac{2x}{x} = 3 + 2 = 5.$

Vậy A = 3.5 = 15.

*Cách 2.*

$$A = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2} = \frac{(x^2+1)^2 - x^2}{x^2} = \frac{(4x)^2 - x^2}{x^2} = 15.$$

**157.** Xét $x = 0$ thì $a = 0$, $M = 0$. Xét $x \neq 0$ thì $a \neq 0$.

$$M = \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{x}{x^2 - x + 1} . \frac{x}{x^2 + x + 1}. \qquad (1)$$

Ta có

$$\frac{x^2 + x + 1}{x} = \frac{x^2 - x + 1}{x} + \frac{2x}{x} = \frac{1}{a} + 2 = \frac{1+2a}{a}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $M = a.\dfrac{a}{1+2a} = \dfrac{a^2}{1+2a}$.

*Kết luận :* $M = \dfrac{a^2}{1+2a}$. Đáp số này chung cho cả hai trường hợp $x = 0$ và $x \neq 0$ (khi $x = 0$ thì $a = 0$ nên $\dfrac{a^2}{1+2a} = 0$, tức là $M = 0$).

**158.** Ta xét biểu thức $x + y + xy + 1$, biểu thức này bằng $x(y+1) + (y+1)$ hay $(x+1)(y+1)$.

Từ giả thiết suy ra $x + 1 = \dfrac{(b + c)^2 - a^2}{2bc}$, $y + 1 = \dfrac{4bc}{(b + c)^2 - a^2}$.

Do đó $(x + 1)(y + 1) = 2 \Rightarrow xy + x + y + 1 = 2 \Rightarrow xy + x + y = 1$.

**159.** a) Đặt
$$a - b = n, \tag{1}$$
$$\frac{a}{b} = n, \tag{2}$$

trong đó $a, b, n \in \mathbf{N}$ ; $b \neq 0$. Ta có $bn - b = n$ nên $b(n - 1) = n$.

Nếu $n = 1$ thì $a = b$. Khi đó, theo (1) thì $n = 0$, loại.

Xét $n \neq 1$, ta có
$$b = \frac{n}{n - 1} = 1 + \frac{1}{n - 1}. \tag{3}$$

Vì $n - 1$ là ước của 1 nên $n - 1 \in \{1 ; -1\}$.

Với $n - 1 = 1$ thì $n = 2$, từ (3) suy ra $b = 2$, $a = 4$.

Với $n - 1 = -1$ thì $n = 0$, từ (3) suy ra $b = 0$, loại.

Vậy $a = 4$, $b = 2$. Thử lại : $4 - 2 = \dfrac{4}{2}$.

b) Giải tương tự câu a). *Đáp số :* $a = 2$ ; $b = 1$.

**160.** Do $a + b \neq 0$, $a + c \neq 0$ nên
$$\frac{a^3 + b^3}{a^3 + c^3} = \frac{a + b}{a + c} \Leftrightarrow \frac{a^3 + b^3}{a + b} = \frac{a^3 + c^3}{a + c} \Leftrightarrow a^2 - ab + b^2 = a^2 - ac + c^2$$
$\Leftrightarrow b^2 - c^2 = ab - ac \Leftrightarrow (b + c)(b - c) = a(b - c)$.

Do $b - c \neq 0$ nên $b + c = a$. Vậy, $c = a - b$.

**161.** a) Lần lượt tính được $a_3 = -\dfrac{1}{a_1}$, $a_4 = \dfrac{1 + a_1}{1 - a_1}$, $a_5 = a_1$.

b) Từ câu a) suy ra $a_1 = a_5 = a_9 = ... = a_{101} = 3$.

Từ đó tính được $a_1 = 3$ ; $a_2 = \dfrac{1}{2}$ ; $a_3 = -\dfrac{1}{3}$ ; $a_4 = -2$ ; $a_5 = 3$.

**162.** Ta có $mnk = mn + kn$. Chia hai vế cho n, được $mk = m + k$. Do đó $m = k(m - 1)$. Như vậy m chia hết cho $m - 1$. Từ đó tìm được $m = 0$ (loại) và $m = 2$. Khi đó $k = 2$.

Phân số phải tìm có dạng $\dfrac{2}{n}$ và $k = 2$.

**163.** Tổng phải tìm bằng A – B, trong đó

$$A = \left(a + \frac{1}{7}\right) + \left(a + \frac{2}{7}\right) + \ldots + \left(b - \frac{2}{7}\right) + \left(b - \frac{1}{7}\right) =$$

$$= \frac{1}{7}[(7a + 1) + (7a + 2) + \ldots + (7b - 2) + (7b - 1)] =$$

$$= \frac{1}{14}[(7a + 1) + (7b - 1)][(7b - 1) - (7a + 1) + 1] =$$

$$= \frac{1}{2}(a + b)(7b - 7a - 1),$$

$$B = (a + 1) + (a + 2) + \ldots + (b - 2) + (b - 1) =$$

$$= \frac{1}{2}[(a + 1) + (b - 1)][(b - 1) - (a + 1) + 1] = \frac{1}{2}(a + b)(b - a - 1).$$

Tính hiệu A – B, ta được $3(b^2 - a^2)$.

**164.** a) Giả sử mức sản xuất của xí nghiệp năm 2000 là 1 thì mức sản suất năm 2001 là $1 + \frac{a}{100}$, mức sản xuất năm 2002 là

$$\left(1 + \frac{a}{100}\right)\left(1 + \frac{b}{100}\right) = 1 + \frac{b}{100} + \frac{a}{100} + \frac{ab}{10\,000},$$

tăng so với năm 2000 là : $\frac{a + b}{100} + \frac{ab}{10\,000}$ hay $\left(a + b + \frac{ab}{100}\right)\%$.

Vậy, câu trả lời D) là đúng.

b) Ta có $$b = a\left(1 + \frac{m}{100}\right)\left(1 - \frac{n}{100}\right)$$

nên $$b - a = a\left[\left(1 + \frac{m}{100}\right)\left(1 - \frac{n}{100}\right) - 1\right].$$

Điều kiện để b > a là $\left(1 + \frac{m}{100}\right)\left(1 - \frac{n}{100}\right) > 1$. Rút gọn điều kiện này, ta được $100(m - n) > mn$.

**165.** a) Gọi k là số nguyên lớn nhất sao cho $2^k \le n$. Chọn mẫu chung là $2^kP$ trong đó P là tích các số lẻ không vượt quá n. Chỉ có duy nhất một thừa số phụ (của phân số $\frac{1}{2^k}$) là số lẻ, còn mọi thừa số phụ khác đều chẵn.

Như vậy sau khi quy đồng mẫu, mẫu là số chẵn, tử là số lẻ. Do đó A không là số nguyên.

b) Gọi k là số nguyên lớn nhất sao cho $3^k \le 2n + 1$. Chọn mẫu chung là $3^kP$ trong đó P là tích các thừa số nguyên tố lẻ không vượt quá 2n + 1. Chỉ có duy nhất một thừa số phụ (của phân số $\frac{1}{3^k}$) không chia hết cho 3, còn mọi thừa số phụ khác đều chia hết cho 3. Như vậy sau khi quy đồng mẫu, mẫu chia hết cho 3, tử không chia hết cho 3, do đó B không là số nguyên.

## MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

**166.** a) $(3x - 1)(2x - 3)$ ; b) $(2x + 9)(x - 3)$ ; c) $(x - 3y)(2x + y)$.

**167.** a) $(x - 1)(x^2 + x + 3)$ ; b) $(x - 1)(x - 2)(x + 3)$ ;

c) $(x + 1)(x + 2)^2$ ; d) $(x + 1)(x - 2)(x - 8)$.

e) Viết đa thức dưới dạng $x^3 - 1 - (x^2 + x + 1)$.

*Đáp số :* $(x - 2)(x^2 + x + 1)$.

g) – 2 là một nghiệm. *Đáp số* : $(x + 2)(x^2 - x + 1)$.

h) 2 là một nghiệm. *Đáp số* : $(x + 2)(x - 3)(x - 5)$.

**168.** *Đáp số :* $(x + 1)(x + 2)(x - 3)$.

Chú ý rằng – 1 là một nghiệm, ta có các cách biến đổi :

Cách 1. $x^3 - 7x - 6 = x^3 + 1 - 7x - 7$.

Cách 2. $x^3 - 7x - 6 = x^3 - x - 6x - 6$.

Cách 3. $x^3 - 7x - 6 = x^3 - x^2 + x^2 - x - 6x - 6$.

Cách 4. $x^3 - 7x - 6 = 7x^3 - 7x - 6x^3 - 6$.

Chú ý rằng – 2 là một nghiệm, ta có các cách biến đổi :

Cách 5. $x^3 - 7x - 6 = x^3 - 4x - 3x - 6$.

Cách 6. $x^3 - 7x - 6 = x^3 + 8 - 7x - 14$.

Chú ý rằng 3 là một nghiệm, ta có cách biến đổi :

Cách 7. $x^3 - 7x - 6 = x^3 - 9x + 2x - 6$.

Cách 8. $x^3 - 7x - 6 = x^3 - 27 - 7x + 21$.

**169.** a) $\frac{1}{3}$ là một nghiệm. Biến đổi : $27x^3 - 1 - 27x^2 + 18x - 3$.

*Đáp số :* $(3x - 1)(9x^2 - 6x + 4)$

b) $-\frac{1}{2}$ là một nghiệm. *Đáp số :* $(2x + 1)(x^2 - x + 3)$.

c) $(x^2 - 3)^2 + 16 = x^4 - 6x^2 + 9 + 16$

$= x^4 + 10x^2 + 25 - 16x^2 = (x^2 + 5)^2 - (4x)^2$

$= (x^2 + 4x + 5)(x^2 - 4x + 5)$.

**170.** a) Đặt $x^2 + x = y$. *Đáp số :* $(x^2 + x - 5)(x^2 + x + 3)$.

b) Đặt $x + y = a$. *Đáp số :* $(x + y + 3)(x + y - 4)$.

c) Đặt $x^2 + x + 1 = y$. *Đáp số :* $(x^2 + x + 5)(x + 2)(x - 1)$.

d) Biến đổi : $(x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12) - 24$.

Đặt $x^2 + 7x + 11 = y$. *Đáp số :* $(x^2 + 7x + 16)(x + 1)(x + 6)$.

**171.** a) Đặt $x^2 + 5ax + 5a^2 = y$. *Đáp số :* $(x^2 + 5ax + 5a^2)^2$.

b) $A = (x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2 + (xy + yz + zx)^2$.

Đặt $x^2 + y^2 + z^2 = a$, $xy + yz + zx = b$,

$A = a(a + 2b) + b^2 = (a + b)^2 = (x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx)^2$.

c) $M = 2(x^4 + y^4 + z^4) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2$

$+ (x + y + z)^4$.

Để ý rằng các biểu thức $x + y + z$, $x^2 + y^2 + z^2$ xuất hiện nhiều lần trong biểu thức M. Ta đặt $x^4 + y^4 + z^4 = a$, $x^2 + y^2 + z^2 = b$, $x + y + z = c$.

Ta có $M = 2a - b^2 - 2bc^2 + c^4 = 2a - 2b^2 + b^2 - 2bc^2 + c^4$

$$= 2(a - b^2) + (b - c^2)^2.$$

Ta có $a - b^2 = -2(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)$, $b - c^2 = -2(xy + xz + yz)$. Do đó

$$M = -4(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) + 4(xy + xz + yz)^2$$

$$= 8x^2yz + 8xy^2z + 8xyz^2 = 8xyz(x + y + z).$$

**172.** $A = (a + b + c)^3 - 4(a^3 + b^3 + c^3) - 12abc$. Đặt $a + b = m$, $a - b = n$ thì

$$4ab = m^2 - n^2,$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)[(a - b)^2 + ab] = m\left(n^2 + \frac{m^2 - n^2}{4}\right).$$

Ta có $A = (m + c)^3 - 4.\dfrac{m^3 + 3mn^2}{4} - 4c^3 - 3c(m^2 - n^2)$

$$= 3(-c^3 + mc^2 - mn^2 + cn^2).$$

Biến đổi dấu ngoặc thành $(m - c)(c + n)(c - n)$.

Vậy $$A = 3(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b).$$

**173.** a) Tách $-32x^2$ thành $4x^2 - 36x^2$.

*Đáp số :* $(2x^2 + 6x + 1)(2x^2 - 6x + 1)$.

b) $x^6 + 27 = (x^2 + 3)(x^4 - 3x^2 + 9) =$

$(x^2 + 3)(x^4 + 6x^2 + 9 - 9x^2) = (x^2 + 3)(x^2 + 3 + 3x)(x^2 + 3 - 3x)$.

c) Chú ý $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

*Đáp số :* $2(x - 1)^2(x^2 + x + 1)$.

d) $(2x^2 - 4)^2 + 9 = 4x^4 - 16x^2 + 25 = 4x^4 + 20x^2 + 25 - 36x^2$

$$= (2x^2 + 6x + 5)(2x^2 - 6x + 5).$$

**174.** a) Thêm và bớt $4x^2$. *Đáp số :* $(2x^2 + 2x + 1)(2x^2 - 2x + 1)$.

b) Thêm và bớt $4x^2y^2$. *Đáp số :* $(2x^2 + 2xy + y^2)(2x^2 - 2xy + y^2)$.

c) Thêm và bớt $36x^2$. *Đáp số :* $(x^2 + 6x + 18)(x^2 - 6x + 18)$.

**175.** a) Thêm và bớt $x^3$

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 + 1 &= x^5 + x^4 + x^3 - x^3 + 1 \\ &= x^3(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1). \end{aligned}$$

b) Thêm và bớt $x^2$. *Đáp số :* $(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$.

c) Thêm và bớt $x^2 + x$.

$$x^8 + x^7 + 1 = (x^8 - x^2) + (x^7 - x) + (x^2 + x + 1).$$

*Đáp số :* $(x^2 + x + 1)(x^6 - x^4 + x^3 - x + 1)$.

d) Thêm và bớt $x^2 + x$. *Đáp số :* $(x^2 - x + 1)(x^3 - x - 1)$.

e) Thêm và bớt $x^2 + x$. *Đáp số :* $(x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$.

g) Thêm và bớt $x^4$. *Đáp số :* $(x^4 - x^2 + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

**176.** a) $a^6 - b^6 + a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^4 + a^2b^2 + b^4)(a^2 - b^2 + 1) =$

$$= (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)(a^2 - b^2 + 1).$$

b) $x^3 + 3xy + y^3 - 1 = (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 1) - 3x^2y - 3xy^2 + 3xy =$

$$= [(x + y)^3 - 1] - 3xy(x + y - 1) =$$

$$= (x + y - 1)(x^2 + 2xy + y^2 + x + y + 1 - 3xy) =$$

$$= (x + y - 1)(x^2 - xy + y^2 + x + y + 1).$$

**177.** a) $(2x^2 + x + 1)^2$. Có thể tách $5x^2$ thành $4x^2 + x^2$.

b) $(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 4x + 1)$.

c) $(x^2 - 4x + 7)(x^2 + 4x + 9)$.

d) $(x^2 + 2x + 2)(2x^2 + 2x + 1)$.

*Cách giải không dùng phương pháp hệ số bất định :*

$$(x+1)^4 + (x^2+x+1)^2 = (x+1)^4 + x^2(x+1)^2 + 2x(x+1) + 1$$

$$= (x+1)^2[(x+1)^2 + x^2] + (2x^2 + 2x + 1) = (2x^2 + 2x + 1)[(x+1)^2 + 1]$$

$$= (2x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x + 2).$$

**178.** a) $A = x^8 + 14x^4 + 1 = (x^4 + 1)^2 + 12x^4$.

Thêm và bớt $4x^2(x^4 + 1)$ được

$$A = (x^4+1)^2 + 4x^2(x^4+1) + 4x^4 - 4x^2(x^4+1) + 8x^4$$

$$= (x^4 + 1 + 2x^2)^2 - 4x^2(x^4 + 1 - 2x^2)$$

$$= (x^4 + 2x^2 + 1)^2 - 4x^2(x^2-1)^2 = (x^4 + 2x^2 + 1)^2 - (2x^3 - 2x)^2$$

$$= (x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1)(x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1).$$

b) $x^8 + 98x^4 + 1 = (x^4+1)^2 + 96x^4$

$$= (x^4+1)^2 + 16x^2(x^4+1) + 64x^4 - 16x^2(x^4+1) + 32x^4 =$$

$$= (x^4 + 1 + 8x^2)^2 - 16x^2(x^4 + 1 - 2x^2) =$$

$$= (x^4 + 8x^2 + 1)^2 - 16x^2(x^2-1)^2 =$$

$$= (x^4 + 8x^2 + 1)^2 - (4x^3 - 4x)^2 =$$

$$= (x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 4x + 1)(x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 4x + 1).$$

*Chú ý :* Các đa thức ở câu a), b) là các trường hợp đặc biệt của đa thức

$$x^8 + (4a^4 + 8a^2 + 2)x^4 + 1 \qquad (1) \qquad \text{với } a = 1 \text{ và } a = 2.$$

Đa thức (1) lại là trường hợp đặc biệt của đa thức

$$x^8 + (4a^4 + 8a^2b + 2b^2)x^4 + b^4 \text{ với } b = 1.$$

Các kết quả tổng quát trên do Trần Thanh Sơn và Đinh Nho Tâm, học sinh 8H trường Trưng Vương Hà Nội năm học 1999 – 2000 đề xuất.

**179.** Kiểm tra với $a = 0$ thì $M = 0$. Do vai trò bình đẳng của a, b, c nên M có nhân tử abc, nhân tử còn lại là hằng số k.

Cho $a = b = c = 1$ được $k = 4$. Vậy $M = 4abc$.

**180.** Biến đổi $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$ thành $(n^2 + 3n + 1)^2$.

**181.** $A = (n + 1)^4 + n^4 + 1 = (n^2 + 2n + 1)^2 - n^2 + (n^4 + n^2 + 1)$

$$= (n^2 + 3n + 1)(n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$$

$$= (n^2 + n + 1)(2n^2 + 2n + 2) = 2(n^2 + n + 1)^2.$$

**182.** Với mọi x ta có $(x + a)(x - 4) - 7 = (x + b)(x + c)$ nên với $x = 4$ thì $-7 = (4 + b)(4 + c)$.

Xét hai trường hợp : $4 + b = 1$, $4 + c = -7$ và $4 + b = 7$, $4 + c = -1$.

Trường hợp thứ nhất cho $b = -3$, $c = -11$, $a = -10$, ta có

$$(x - 10)(x - 4) - 7 = (x - 3)(x - 11).$$

Trường hợp thứ hai cho $b = 3$, $c = -5$, $a = 2$, ta có

$$(x + 2)(x - 4) - 7 = (x + 3)(x - 5).$$

**183.** Nhân $(x + a)(x + b)(x + c)$, được

$$x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x + abc.$$

Do đó $b + c = 0$ (1), $ab + bc + ca = b$ (2), $abc = c$ (3).

Từ (1) có $c = -b$. Thay vào (2), được $ab - b^2 - ab = b \Leftrightarrow b^2 + b = 0$ $\Leftrightarrow b(b + 1) = 0 \Leftrightarrow b = 0$ ; $b = -1$.

Nếu $b = 0$ thì từ (1) có $c = 0$, còn (2) và (3) luôn đúng nên a tuỳ ý.

Nếu $b = -1$ thì (1) có $c = 1$, từ (3) có $a = -1$.

Tóm lại, ta có $x^3 + ax^2 = x^2(x + a)$ hoặc

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)^2(x + 1).$$

**184.** Đồng nhất $x^2 + x - n$ với $x^2 + (b - a)x - ab$, ta được $b - a = 1$ và $ab = n$.

Do đó $a(a + 1) = n$. Do $1 < n < 100$ nên tích hai số tự nhiên liên tiếp $a(a + 1)$ có thể bằng 1.2, 2.3, 3.4,..., 8.9, 9.10, gồm chín cặp số.

Vậy có chín giá trị của n thoả mãn bài toán.

**185.** $A = a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (a+1)^2 + a^2(a+1)^2 = 2a^2 + 2a + 1 + a^2(a+1)^2$

$$= a^2(a+1)^2 + 2a(a+1) + 1 = [a(a+1)+1]^2.$$

Ta có $\sqrt{A} = a(a+1)+1$, là số lẻ.

## TÍNH CHIA HẾT ĐỐI VỚI SỐ NGUYÊN

**186.** a) Biến đổi : $n^3 + 3n^2 + 2n = n(n+1)(n+2)$, đó là tích của ba số nguyên liên tiếp.

b) Biến đổi : $(n-1)n(n+1)(n+2)$, đó là tích của bốn số nguyên liên tiếp.

**187.** a) Biến đổi : $n(n+2)(n+4)$ rồi thay $n = 2k$, được $8k(k+1)(k+2)$.

b) Phân tích $n^4 - 10n^2 + 9$ thành nhân tử rồi thay $n = 2k + 1$.

**188.** Biến đổi : $A = n^6 + n^4 - 2n^2 = n^2(n^2-1)(n^2+2)$.

Xét các trường hợp $n = 2a$, $n = 2a + 1$ để chứng minh $A \vdots 8$.

Xét các trường hợp $n = 3b$, $n = 3b \pm 1$ để chứng minh $A \vdots 9$. Suy ra $A \vdots 72$.

**189.** Biến đổi $B = 3^{2n} - 9 = 9^n - 9$, nên $B \vdots 9$.

Để chứng minh $B \vdots 8$, viết B dưới dạng

$$B = (3^n)^2 - 1 - 8 = (3^n - 1)(3^n + 1) - 8$$

và chú ý rằng $3^n - 1$ và $3^n + 1$ là hai số chẵn liên tiếp.

**190.** a) Hiệu $7^{n+4} - 7^n = 7^n(7^4 - 1) = 2400 \,.\, 7^n$.

b) $a^5 - a = a(a^2+1)(a^2-1)$ chia hết cho 2 và 5.

c) Giải tương tự như câu b).

**191.** $a^2 + 3a + 2 = (a+1)(a+2)$, luôn chia hết cho 2.

$a^2 + 3a + 2 \vdots 3 \Leftrightarrow a^2 + 2 \vdots 3 \Leftrightarrow a^2$ chia cho 3 dư 1 $\Leftrightarrow$ a không chia hết cho 3.

Điều kiện phải tìm là a không chia hết cho 3.

**192.** a) Ta có $a^2$ là số chính phương lẻ nên chia cho 8 dư 1, $a^2$ là số chính phương không chia hết cho 3 nên chia cho 3 dư 1. Suy ra $a^2 - 1$ chia hết cho 8, chia hết cho 3, do đó chia hết cho 24.

b) Áp dụng kết quả của câu a).

c) $240 = 2^4 . 3 . 5$ ; $A = a^4 - 1 = (a^2 - 1)(a^2 + 1) = (a + 1)(a - 1)(a^2 + 1)$.

Nếu a lẻ thì $(a + 1)(a - 1)$ là tích của hai số chẵn liên tiếp nên chia hết cho 8, còn $a^2 + 1$ chia hết cho 2, do đó A chia hết cho 16. Còn nếu a chẵn thì A không chia hết cho 2.

Nếu $a = 3k \pm 1$ $(k \in \mathbf{N})$ thì $a^2 - 1$ chia hết cho 3, do đó A chia hết cho 3. Còn nếu $a = 3k$ $(k \in \mathbf{N})$ thì A chia cho 3 dư 2.

Nếu $a = 5k \pm 1$ $(k \in \mathbf{N})$ thì $a^2 - 1$ chia hết cho 5, nếu $a = 5k \pm 2$ $(k \in \mathbf{N})$ thì $a^2 + 1$ chia hết cho 5, do đó A chia hết cho 5. Còn nếu $a = 5k$ $(k \in \mathbf{N})$ thì A chia cho 5 dư 4.

Vậy điều kiện để $a^4 - 1$ chia hết cho 240 là a lẻ, không chia hết cho 3, không chia hết cho 5.

*Chú ý :* Từ kết quả trên, ta có bài toán : Nếu a là số nguyên tố lớn hơn 5 thì $a^4 - 1$ chia hết cho 240.

**193.** Xét hai trường hợp :

a) Trong a, b, c có một số bằng 3. Khi đó $2^2 + 3^2 + 5^2 = 38$, là hợp số, loại ; còn $3^2 + 5^2 + 7^2 = 83$, là số nguyên tố.

b) Cả a, b, c đều lớn hơn 3. Khi đó $a^2$, $b^2$, $c^2$ đều chia cho 3 dư 1 nên $a^2 + b^2 + c^2$ chia hết cho 3, là hợp số, loại. *Đáp số* : 3 ; 5 ; 7.

**194.** Xét biểu thức $A = (a^2 - a) + (b^2 - b) + (c^2 - c) + (d^2 - d)$.

Dễ thấy A là số chẵn (vì biểu thức trong mỗi dấu ngoặc là tích của hai số nguyên liên tiếp) nên $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a + b + c + d)$ là số chẵn.

Từ đề bài $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ nên $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ là số chẵn.

Vậy $a + b + c + d$ là số chẵn, tổng này lại lớn hơn 2 nên là hợp số.

**195.** Gọi ƯCLN (a, c) = k, ta có $a = ka_1$, $c = kc_1$ và $(a_1, c_1) = 1$.

Thay vào ab = cd được $ka_1b = kc_1d$ nên

$$a_1b = c_1d. \qquad (1)$$

Ta có $a_1b \,\vdots\, c_1$ mà $(a_1, c_1) = 1$ nên $b \,\vdots\, c_1$. Đặt $b = c_1m$ $(m \in N^*)$, thay vào (1) được $a_1c_1m = c_1d$ nên $a_1m = d$.

Do đó $$A = a^5 + b^5 + c^5 + d^5 = k^5a_1^5 + c_1^5m^5 + k^5c_1^5 + a_1^5m^5$$

$$= k^5(a_1^5 + c_1^5) + m^5(a_1^5 + c_1^5) = (a_1^5 + c_1^5)(k^5 + m^5).$$

Do $a_1, c_1, k, m$ là các số nguyên dương nên A là hợp số.

**196.** a) *Nhận xét :* Một số chính phương khi chia cho 3 chỉ có thể dư 0 hoặc 1.

Ta có $a^2 + b^2$ chia hết cho 3. Xét các trường hợp của tổng hai số dư : 0 + 0, 0 + 1, 1 + 1, chỉ có 0 + 0 chia hết cho 3. Vậy $a^2$, $b^2$ chia hết cho 3, do đó a và b chia hết cho 3.

b) *Nhận xét :* Một số chính phương khi chia cho 7 chỉ có thể dư 0, 1, 2, 4 (thật vậy, xét a lần lượt bằng 7k, 7k ± 1, 7k ± 2, 7k ± 3 thì $a^2$ chia cho 7 thứ tự dư 0, 1, 4, 2).

Ta có $a^2 + b^2$ chia hết cho 7. Xét các trường hợp của tổng hai số dư : 0 + 0, 0 + 1, 0 + 2, 0 + 4, 1 + 1, 1 + 2, 2 + 2, 1 + 4, 2 + 4, 4 + 4, chỉ có 0 + 0 chia hết cho 7. Vậy $a^2$, $b^2$ chia hết cho 7, do đó a và b chia hết cho 7.

**197.** a) Xét hiệu

$$(a^3 + b^3 + c^3) - (a + b + c) = (a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c).$$

Mỗi biểu thức trong dấu ngoặc ở vế phải đều chia hết cho 6.

b) Xét hiệu $(a^5 + b^5 + c^5) - (a + b + c)$. Giải tương tự câu a).

**198.** a) $a + b + c = 0 \Rightarrow c = -(a + b)$. Do đó

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 - (a + b)^3 = -3ab(a + b) = 3abc.$$

b) $a + b + c = 0 \Rightarrow c = -(a + b)$. Do đó

$$a^5 + b^5 + c^5 = a^5 + b^5 - (a + b)^5 = -5a^4b - 10a^3b^2 - 10a^2b^3 - 5ab^4.$$

$$= -5ab(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3).$$

Biểu thức trong dấu ngoặc bằng

$$a^3 + b^3 + 2ab(a + b) = (a + b)(a^2 - ab + b^2) + 2ab(a + b)$$

$$= (a + b)(a^2 + ab + b^2).$$

Vậy $a^5 + b^5 + c^5 = 5abc(a^2 + ab + b^2)$.

**199.** a) Áp dụng câu a) bài 197 (chú ý rằng 1998 chia hết cho 6).

b) Đặt $1995^{1995} = a = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Gọi

$$S = a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3 = (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + ... + (a_n^3 - a_n) + a.$$

Mỗi dấu ngoặc đều chia hết cho 6. Chỉ cần tìm số dư khi chia a cho 6. Chú ý rằng 1995 là số lẻ chia hết cho 3 nên a cũng là số lẻ chia hết cho 3, do đó chia cho 6 dư 3. Vậy S chia cho 6 dư 3.

**200.** a) $a^3b - ab^3 = a^3b - ab - ab^3 + ab = b(a^3 - a) - a(b^3 - b)$ ; biểu thức trong mỗi dấu ngoặc chia hết cho 6.

b) Viết $a^5b - ab^5$ thành $b(a^5 - a) - a(b^5 - b)$.

**201.** Gọi a là một số tự nhiên tuỳ ý. Chứng minh rằng $a^3 - a$ chia hết cho 6, suy ra $a = a^3 - 6k$.

**202.** $60 = 2^2.3.5$, $a^2 + b^2 = c^2$. (1)

Nhận xét : $n = BS\,3 \pm 1 \Rightarrow n^2 = BS3 + 1$, $n = BS5 \pm 1 \Rightarrow n^2 = BS5 + 1$, $n = BS5 \pm 2 \Rightarrow n^2 = BS5 + 4$, $n = BS4 \pm 1 \Rightarrow n^2 = BS8 + 1$, $n = BS4 \pm 2$ $\Rightarrow n^2 = BS8 + 4$.

Nếu a, b, c đều không chia hết cho 3 thì $a^2, b^2, c^2$ đều chia cho 3 dư 1. Khi đó $a^2 + b^2 = BS3 + 2$, còn $c^2 = BS3 + 1$, trái với (1). Vậy tồn tại một trong ba số a, b, c chia hết cho 3, do đó abc chia hết cho 3.

Nếu a, b, c đều không chia hết cho 5 thì $a^2, b^2, c^2$ chia cho 5 dư 1 hoặc 4. Khi đó $a^2 + b^2$ chia cho 5 dư 0, 2, 3, còn $c^2$ chia cho 5 dư 1, 4, trái với (1). Vậy tồn tại một trong ba số a, b, c chia hết cho 5.

Nếu a, b, c đều không chia hết cho 4 thì $a^2$, $b^2$, $c^2$ chia cho 8 dư 1 hoặc 4.

Khi đó $a^2 + b^2$ chia cho 8 dư 0, 2, 5 , còn $c^2$ chia cho 8 dư 1, 4, trái với (1). Vậy tồn tại một trong các số a, b, c chia hết cho 4.

*Kết luận :* abc chia hết cho 3 . 4 . 5 tức là chia hết cho 60.

**203.** *Cách 1.* Gọi ba số nguyên liên tiếp là $n - 1$, $n$, $n + 1$. Biến đổi $(n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3$ thành $3(n^3 - n) + 9n$, chia hết cho 9.

*Cách 2.* Trong ba số nguyên liên tiếp, có một số chia hết cho 3, một số chia cho 3 dư 1, một số chia cho 3 dư 2. Chứng minh rằng tổng của các số $(3a)^3$, $(3b + 1)^3$, $(3c - 1)^3$ chia hết cho 9.

**204.** Giả sử $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 9 (1). Giả sử a, b, c đều không chia hết cho 3 (có dạng BS3 ± 1) thì lập phương của mỗi số có dạng BS9 ± 1, do đó $a^3 + b^3 + c^3 = \text{BS9} + r_1 + r_2 + r_3$, trong đó $r_1, r_2, r_3 \in \{1 ; -1\}$. Không có cách chọn ba số $r_1$, $r_2$, $r_3$ nào để tổng chia hết cho 9, trái với (1).

Vậy tồn tại một trong ba số a, b, c là bội của 3.

**205.** a) Ta có $a_3$ chia hết cho 25. Cần chứng minh rằng $a_{5k+3}$ chia hết cho 25. Thật vậy :

$$a_{5k+3} = 3(5k + 3)(5k + 2) + 7 = 3(25k^2 + 25k + 6) + 7 = \text{BS25}.$$

b) $n(n - 1)$ chia cho 3 dư 0 hoặc 2 $\Rightarrow 3n(n - 1)$ chia cho 9 dư 0 hoặc 6 $\Rightarrow$ $3n(n - 1) + 7$ chia cho 9 dư 7 hoặc 4. Trong khi đó, lập phương của một số nguyên chia cho 9 chỉ có thể dư 0, 1, 8.

**206.** a) Bài toán là trường hợp đặc biệt của định lí nhỏ Phéc-ma : $a^{p-1} - 1$ chia hết cho p với p = 7. Chứng minh trực tiếp :

$$a^6 - 1 = (a^3 + 1)(a^3 - 1).$$

Nếu $a = 7k \pm 1$ ($k \in N$) thì $a^3 = \text{BS7} \pm 1$, nếu $a = 7k \pm 2$ thì $a^3 = \text{BS7} \pm 8$, nếu $a = 7k \pm 3$ thì $a^3 = \text{BS7} \pm 27$. Ta luôn luôn có $a^3 + 1$ hoặc $a^3 - 1$ chia hết cho 7. Do đó $a^6 - 1$ chia hết cho 7.

b) $504 = 3^2 . 7 . 8$ Đặt $n = a^3$, cần chứng minh

$$A = (a^3 - 1)\, a^3 (a^3 + 1) \text{ chia hết cho 504.}$$

Nếu a chẵn thì $a^3$ chia hết cho 8 ; nếu a lẻ thì $a^3 - 1$ và $a^3 + 1$ là hai số chẵn liên tiếp nên $(a^3 - 1)(a^3 + 1)$ chia hết cho 8. Do đó A chia hết cho 8.

Nếu a chia hết cho 7 thì A chia hết cho 7. Nếu a không chia hết cho 7 thì $a^6 - 1$ chia hết cho 7 (câu a).

Nếu a chia hết cho 3 thì $a^3$ chia hết cho 9. Nếu $a = 3k \pm 1$ thì $a^3 = BS9 \pm 1$, nên $a^3 - 1$ hoặc $a^3 + 1$ chia hết cho 9. Do đó A chia hết cho 9.

**207.** a) $B = 100.\ 101 : 2 = 50\ .\ 101$.

Để chứng minh A chia hết cho 101, ghép cặp : $1^3 + 100^3, 2^3 + 99^3, ...$

Để chứng minh A chia hết cho 50, ghép cặp : $1^3 + 99^3, 2^3 + 98^3, ...$

b) Giải tương tự câu a).

*Chú ý :* Tổng quát, ta có với k lẻ thì $1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k$ chia hết cho $1 + 2 + 3 + ... + n$.

Cách giải của bài toán tổng quát này cũng tương tự như cách giải sau đây với n = 99.

Gọi $C = 1^k + 2^k + 3^k + ... + 99^k$, $D = 1 + 2 + 3 + ... + 99 = \frac{99.100}{2}$.

Ta sẽ chứng minh $C \vdots \frac{99.\ 100}{2}$. Ta có

$$2C = (1^k + 99^k) + (2^k + 98^k) + ... + (99^k + 1^k).$$

Do k là số lẻ nên các biểu thức trong mỗi dấu ngoặc chia hết cho 100, do đó

$$2C \vdots 100. \qquad (1)$$

Mặc khác, ta viết $C = 1^k + 2^k + ... + 98^k + 99^k$,

$$C = 98^k + 97^k + ... + 1^k + 99^k$$

nên $2C = (1^k + 98^k) + (2^k + 97^k) + ... + (98^k + 1^k) + 2.\ 99^k$. Do k là số lẻ nên các biểu thức trong mỗi dấu ngoặc chia hết cho 99, do đó

$$2C \vdots 99. \qquad (2)$$

Do 99 và 100 là hai số nguyên tố cùng nhau nên từ (1) và (2) suy ra $2C \vdots 99\ .\ 100$, do đó $C \vdots \frac{99\ .\ 100}{2}$, tức là $C \vdots D$.

**208.** a) A chia cho 3 dư 2 nên A không là số chính phương.

b) Biến đổi : $B = 4 \,.\, \underbrace{11\ldots1}_{100}$. Để B là số chính phương thì $\underbrace{11\ldots1}_{100}$ phải là số chính phương. Số $\underbrace{11\ldots1}_{100}$ tận cùng bằng 11 nên chia cho 4 dư 3, không là số chính phương. Do đó B không là số chính phương.

c) A chia cho 4 dư 3 nên không là số chính phương.

d) $B = 4 \,.\, 36\underbrace{11\ldots1}_{97}$

Số $36\underbrace{11\ldots1}_{97}$ chia cho 4 dư 3 nên không là số chính phương.

Do đó B không là số chính phương.

**209.** Số có năm chữ số tạo bởi các chữ số 2, 3, 4, 5, 6 là số chia cho 3 dư 2 nên không là số chính phương.

**210.** Mỗi số chính phương lẻ chia cho 4 dư 1 nên tổng của chúng chia cho 4 dư 2, không là số chính phương.

**211.** Mọi số lẻ đều có dạng $2k + 1$ ($k \in \mathbf{N}$).

Ta có : $2k + 1 = (k + 1 - k)(k + 1 + k) = (k + 1)^2 - k^2$.

**212.** a) A gồm 50 số chính phương chẵn, 50 số chính phương lẻ. Mỗi số chính phương chẵn chia hết cho 4 nên tổng của 50 số đó chia hết cho 4. Mỗi số chính phương lẻ chia cho 4 dư 1 nên tổng của 50 số đó chia cho 4 dư 2.

A là số chia cho 4 dư 2, không là số chính phương.

b) Ta viết B dưới dạng tổng của 57 số chính phương liên tiếp :

$$S = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + 56^2.$$

Ta thấy tổng của ba số chính phương liên tiếp chia cho 3 thì dư 2. Thật vậy : $(n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 = 3n^2 + 2$. Viết B dưới dạng tổng của 19 nhóm :

$$B = (0^2 + 1^2 + 2^2) + (3^2 + 4^2 + 5^2) + \ldots + (54^2 + 55^2 + 56^2).$$

$$= 19(\text{BS } 3 + 2) = \text{BS } 3 + 38 = \text{BS } 3 + 2.$$

Số chia cho 3 dư 2 không là số chính phương. Vậy B không là số chính phương.

c) Đặt $n = 2k - 1$ ($k \in \mathbf{N}, k > 1$). Ta có

$$C = 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = \frac{1 + (2k - 1)}{2} . k = k^2.$$

Vậy C là số chính phương.

**213.** a) $n^2$ tận cùng bằng 9 $\Rightarrow$ $n^2 = (10a \pm 3)^2 = 100a^2 \pm 60a + 9 =$ $= 10(10a^2 \pm 6a) + 9$. Số chục của $n^2$ là $10a^2 \pm 6a$, là số chẵn. Vậy chữ số hàng chục của $n^2$ là chữ số chẵn.

b) Gọi $n^2$ là số chính phương lẻ thì

$$n^2 = (10a + b)^2, \text{ trong đó } b \in \{1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9\}.$$

Ta có $n^2 = 10(10a^2 + 2ab) + b^2$.

Vì $b^2$ có chữ số hàng chục chẵn và $10a^2 + 2ab$ là số chẵn nên chữ số hàng chục của $n^2$ là chữ số chẵn.

c) *Cách 1*. Xét

$$n^2 = (10a \pm 4)^2 = 100a^2 \pm 80a + 16 = 10(10a^2 \pm 8a + 1) + 6.$$

*Cách 2*. Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử $n^2$ tận cùng bằng 06, 26, 46, 86 thì vô lí (vì số chính phương chẵn thì phải chia hết cho 4).

d) Xét $n^2 = (10a + 5)^2 = 100a(a + 1) + 25$.

**214.** a) Số chính phương không có tận cùng bằng 2, 3, 7, 8. Xét các số có tận cùng 50, 51, 54, 55, 56, 59 : các số có tận cùng bằng 50, 54 có dạng BS 4 + 2, các số có tận cùng 51, 55, 59 có dạng BS 4 + 3, chúng đều không là số chính phương.

Vậy số chính phương đã cho có tận cùng bằng 56, chữ số hàng đơn vị bằng 6. Ví dụ : $16^2 = 256$, $34^2 = 1156$.

b) Gọi $n^2 = (10a + b)^2 = 10(10a^2 + 2ab) + b^2$. Chữ số hàng đơn vị phải tìm là chữ số tận cùng của $b^2$.

Theo đề bài, chữ số hàng chục của $n^2$ là chữ số lẻ nên chữ số hàng chục của $b^2$ phải lẻ. Xét các giá trị của b từ 0 đến 9, chỉ có $b^2 = 16$ và $b^2 = 36$

có chữ số hàng chục lẻ, chúng đều tận cùng bằng 6. Vậy $n^2$ có chữ số tận cùng bằng 6.

c) Giải tương tự như câu b), nếu $n^2$ có chữ số hàng chục lẻ thì n phải có tận cùng bằng 4 hoặc 6. Ngược lại, nếu n có tận cùng bằng 4 hoặc 6 thì chữ số hàng chục của $n^2$ là chữ số lẻ.

Từ 1 đến 100, có 20 số có tận cùng bằng 4 hoặc 6 (đó là các số 4, 6, 14, 16, ..., 94, 96). Vậy có 20 số n phải tìm.

**215.** a) Xét hai số nguyên dương liên tiếp n và n + 1 ($n \geq 1$). Với $n \geq 1$ thì

$$n^2 < n(n+1) < (n+1)^2.$$

Vậy n(n + 1) không là số chính phương.

b) Xét ba số nguyên dương liên tiếp n – 1, n, n + 1 ($n \geq 2$). Ta có

$$(n-1)\,n\,(n+1) = n(n^2-1).$$

Ta thấy n và $n^2 - 1$ là hai số nguyên tố cùng nhau (thật vậy nếu $n \,\vdots\, d$ và $n^2 - 1 \,\vdots\, d$ thì $1 \,\vdots\, d$ nên $d = \pm 1$). Do đó nếu $n(n^2-1)$ là số chính phương thì cả hai thừa số n và $n^2 - 1$ đều là số chính phương.

Ta có nhận xét : Với $n \geq 2$ thì $n^2 - 1$ không là số chính phương vì

$$(n-1)^2 < n^2 - 1 < n^2.$$

Vậy tích của ba số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

c) Xét bốn số nguyên dương liên tiếp n, n + 1, n + 2, n + 3. Ta thấy $(n^2+3n+1)^2 - 1$ không là số chính phương (dùng nhận xét ở câu b).

**216.** $b^3 - a^3 = (a+2)^3 - a^3$. Biến đổi thành $a^2 + (a+2)^2 + (2a+2)^2$.

**217.** a) Với n = 1 thì $n^2 - n + 2 = 2$, không là số chính phương.

Với n = 2 thì $n^2 - n + 2 = 4$, là số chính phương.

Với n > 2 thì $n^2 - n + 2$ không là số chính phương vì

$$(n-1)^2 < n^2 - (n-2) < n^2.$$

b) Với $n > 2$ thì $(n^2 - 1)^2 < n^4 - (n - 2) < (n^2)^2$ nên $n^4 - n + 2$ không là số chính phương.

Xét $n = 1$ và $n = 2$. *Đáp số :* $n = 2$.

c) $n^3 - n + 2$ chia cho 3 dư 2 nên không là số chính phương.

d) Trước hết chứng minh rằng $n^5 - n \vdots 5$ (xem ví dụ 39).

Suy ra $n^5 - n + 2$ chia cho 5 dư 2. Số chia cho 5 dư 2 thì tận cùng bằng 2 hoặc 7, do đó không là số chính phương.

**218.** $4p + 1$ là số lẻ và là số chính phương nên

$$4p + 1 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \text{ (k nguyên)}$$

$$\Rightarrow 4p = 4k(k + 1) \Rightarrow p = k(k + 1).$$

Do p là số nguyên tố nên $k = 1$. Khi đó $p = 2$ và $4p + 1 = 9 = 3^2$.

**219.** Chứng minh n chia hết cho 3 : Nếu $n = 3k + 1$ thì $n + 1 = 3k + 2$, không là số chính phương, loại. Nếu $n = 3k + 2$ thì $2n + 1 = 3(2k + 1) + 2$, không là số chính phương, loại. Vậy n chia hết cho 3.

Chứng minh n chia hết cho 8 : Ta có $2n + 1$ là số chính phương lẻ nên chia cho 8 dư 1 (1), do đó 2n chia hết cho 8, n chia hết cho 4, $n + 1$ là số chính phương lẻ nên chia cho 8 dư 1, do đó n chia hết cho 8.

**220.** $2n + 1$ là số chính phương lẻ nên chia cho 8 dư 1 $\Rightarrow$ n chẵn $\Rightarrow$ $3n + 1$ là số chính phương lẻ, số này chia cho 8 dư 1 nên 3n chia hết cho 8, do đó n chia hết cho 8 (1).

*Cách 1.* $3n + 1$ tận cùng 1, 5, 9 $\Rightarrow$ 3n tận cùng 0, 4, 8 $\Rightarrow$ n tận cùng 0, 8, 6.

Loại trường hợp n tận cùng 8 (vì khi đó $2n + 1$ tận cùng 7, không là số chính phương), loại trường hợp n tận cùng 6 (vì khi đó $2n + 1$ tận cùng 3, không là số chính phương). Vậy n tận cùng 0 (2).

Từ (1) và (2) suy ra n chia hết cho 40.

*Cách 2.* $2n + 1$, $3n + 1$ là các số chính phương lẻ nên tận cùng bằng 1, 5, 9 do đó chia cho 5 dư 1, 0, 4. Tổng của chúng là $5n + 2$ nên mỗi số $2n + 1$ và $3n + 1$ đều chia cho 5 dư 1, do đó 2n và 3n đều chia hết cho 5, vậy n chia hết cho 5 (3).

Từ (1) và (3) suy ra n chia hết cho 40.

**221.** a) Xét $p = 3k + 1$ và $p = 3k + 2$ đều không xảy ra. Xét $p = 3k$, tìm được $p = 3$.

b) Xét $p = 5k \pm 1$ thì $4p^2 + 1$ là hợp số.

Xét $p = 5k \pm 2$ thì $6p^2 + 1$ là hợp số.

Do đó $p = 5$. Khi đó $4p^2 + 1 = 101$ ; $6p^2 + 1 = 151$ đều là các số nguyên tố.

**222.** a) Phân tích thành nhân tử :

$$12n^2 - 5n - 25 = 12n^2 + 15n - 20n - 25$$
$$= 3n(4n + 5) - 5(4n + 5) = (4n + 5)(3n - 5).$$

Do $12n^2 - 5n - 25$ là số nguyên tố và $4n + 5 > 0$ nên $3n - 5 > 0$. Ta lại có $3n - 5 < 4n + 5$ (vì $n \geq 0$) nên để $12n^2 - 5n - 25$ là số nguyên tố thì thừa số nhỏ phải bằng 1.

Giải điều kiện $3n - 5 = 1$, được $n = 2$.

Khi đó, $12n^2 - 5n - 25 = 13 \,.\, 1 = 13$, là số nguyên tố.

Vậy với $n = 2$ thì giá trị của biểu thức $12n^2 - 5n - 25$ là số nguyên tố 13.

b) Biến đổi : $8n^2 + 10n + 3 = (2n + 1)(4n + 3)$.

*Đáp số* : $n = 0$, khi đó $8n^2 + 10n + 3 = 3$.

c) $A = \dfrac{n(n+3)}{4}$. Do A là số tự nhiên nên $n(n + 3) \,\vdots\, 4$. Hai số n và $n + 3$ không thể cùng chẵn. Vậy hoặc n, hoặc $n + 3$ chia hết cho 4.

Nếu $n = 0$ thì $A = 0$, không là số nguyên tố.

Nếu $n = 4$ thì $A = 7$, là số nguyên tố.

Nếu $n = 4k$ với $k \in \mathbf{Z}$, $k > 1$ thì $A = k(4k + 3)$ là tích của hai thừa số lớn hơn 1 nên A là hợp số.

Nếu $n + 3 = 4$ thì $A = 1$, không là số nguyên tố.

Nếu $n + 3 = 4k$ với $k \in \mathbf{Z}$, $k > 1$ thì $A = k(4k - 3)$ là tích của hai thừa số lớn hơn 1 nên A là hợp số.

Vậy $n = 4$, khi đó $A = 7$.

**223.** a) *Cách 1.* $A = n^2 + 7n + 22 = (n + 5)(n + 2) + 12.$

Các số $n + 2$ và $n + 5$ có hiệu bằng 3 nên chúng cùng chia hết hoặc cùng không chia hết cho 3. Nếu chúng cùng chia hết cho 3 thì $(n + 5)(n + 2)$ chia hết cho 9, suy ra A không chia hết cho 9. Nếu chúng cùng không chia hết cho 3 (3 là số nguyên tố) thì $(n + 2)(n + 5)$ không chia hết cho 3, suy ra A không chia hết cho 3, do đó không chia hết cho 9.

*Chú ý*. Trong cách giải này, ta đã biến đổi $n^2 + 7n + 22$ về dạng $(n + a)(n + b) + c$ sao cho $(n + a) - (n + b) = 3$ (tức là $a - b = 3$) và $a + b = 7$, do đó chọn $a = 5$, $b = 2$.

*Cách 2*. Giả sử $A = n^2 + 7n + 22$ chia hết cho 9 thì các biểu thức sau chia hết cho 3 : $n^2 + 7n + 22 - 9n - 21$, $n^2 - 2n + 1$, $(n - 1)^2$, $n - 1$. Thay $n = 3k + 1$ vào A ta lại được một biểu thức không chia hết cho 9. Vậy với mọi số nguyên n thì $n^2 + 7n + 22$ không chia hết cho 9.

b) Giải tương tự câu a).

**224.** Số n và $n^2$ có tổng các chữ số bằng nhau nên $n^2 - n$ chia hết cho 9 . Ta lại có $(n, n - 1) = 1$ nên n = BS 9 hoặc n = BS 9 + 1.

**225.** a) Gọi chín số ban đầu là $a_1, a_2, \ldots, a_9$ thì chín số mới là $a_1 - 1$, $a_2 - 2$, ..., $a_9 - 9$. Để chứng minh tích của chín số mới là số chẵn, ta chứng tỏ rằng tồn tại một số mới là số chẵn. Thật vậy, giả sử chín số mới đều là số lẻ thì tổng của chúng là số lẻ.

Do đó $(a_1 - 1) + (a_2 - 2) + \ldots + (a_9 - 9)$ là số lẻ

nên $(a_1 + a_2 + \ldots + a_9) - (1 + 2 + \ldots + 9)$ là số lẻ,

suy ra 0 là số lẻ, vô lí.

b) Chú ý rằng $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots + (a_9 - b_9) = 0$. Giải tương tự như câu a).

**226.** a) $n^2 + 2n - 4 = (n - 3)(n + 5) + 11$ chia hết cho 11. Vậy n = BS 11 + 3 hoặc n = BS 11 − 5.

b) *Đáp số* : 1, 0 ; 3 ; − 2.

c) $n^3 - 8 + 6$ chia hết cho $n - 2$ nên 6 chia hết cho $n - 2$.

*Đáp số* : 3 ; 1 ; 4 ; 0 ; 5 ; − 1 ; 8 ; − 4.

d) Phải có $n^2 + n + 1$ là ước của 3. Chú ý rằng $n^2 + n + 1 > 0$ nên chỉ xét $n^2 + n + 1 = 3$ hoặc $n^2 + n + 1 = 1$.

*Đáp số* : 1 ; − 2 ; 0 ; − 1.

e) $A = n^4 - 2n^3 + 2n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2(n^2+1)$,

$B = n^4 - 1 = (n^2+1)(n+1)(n-1)$.

Do $n \neq \pm 1$ nên $n - 1$ chia hết cho $n + 1 \Rightarrow 2$ chia hết cho $n + 1$.

*Đáp số* : 0 ; − 2 ; − 3 (chú ý rằng n = 1 loại).

g) Chia $n^3 - n^2 + 2n + 7$ cho $n^2 + 1$, được $n - 1$, dư $n + 8$.

$$n + 8 \vdots n^2 + 1 \Rightarrow (n+8)(n-8) = n^2 - 64 \vdots n^2 + 1$$
$$\Rightarrow n^2 + 1 - 65 \vdots n^2 + 1 \Rightarrow 65 \vdots n^2 + 1.$$

Lần lượt cho $n^2 + 1$ bằng 1 ; 5 ; 13 ; 65, được n bằng 0 ; ± 2 ; ± 8. Thử lại, các giá trị n = 0, n = 2, n = − 8 thoả mãn.

**227.** Chữ số tận cùng của năm sinh của hai bạn phải là 9 và 0 vì trong trường hợp ngược lại thì tổng các chữ số của năm sinh của hai bạn chỉ hơn kém nhau là 1, không thể cũng là số chẵn.

Gọi năm sinh của Mai là $\overline{19a9}$ thì $1 + 9 + a + 9 = 19 + a$. Muốn tổng này là số chẵn thì $a \in \{1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9\}$. Hiển nhiên Mai không thể sinh năm 1959 hoặc 1999. Vậy Mai sinh năm 1979, bạn của Mai sinh năm 1980.

**228.** Xét ba số tự nhiên liên tiếp $2^n - 1, 2^n, 2^n + 1$, tồn tại một bội của 3, đó là $2^n - 1$ hoặc $2^n + 1$.

Nếu $n > 2$ thì $2^n + 1 > 2^n - 1 > 3$ nên bội của 3 nói trên là hợp số.

Xét n = 1, n = 2 thì n = 2 thoả mãn bài toán :

$$2^n - 1 = 3, \quad 2^n + 1 = 5.$$

**229.** Giả sử các số a, b, c, d, e, g đều lẻ thì bình phương của mỗi số đều chia cho 8 dư 1. Do đó vế trái chia cho 8 dư 5, còn vế phải chia cho 8 dư 1, vô lí. Vậy tồn tại một trong các số đó là số chẵn.

**230.** $$P = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

Xét bốn số a, b, c, d khi chia cho 3, tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 3, hiệu của chúng chia hết cho 3, nên P chia hết cho 3.

Xét bốn số a, b, c, d khi chia cho 4 :

– Nếu tồn tại hai số cùng số dư khi chia cho 4 thì hiệu của chúng chia hết cho 4, do đó P chia hết cho 4.

– Nếu bốn số ấy có số dư khác nhau khi chia cho 4 (là 0, 1, 2, 3) thì hai số có số dư là 0 và 2 có hiệu chia hết cho 2, hai số có số dư là 1 và 3 có hiệu chia hết cho 2. Do đó P chia hết cho 4.

**231.** Mỗi số nguyên dương không quá 50 đều viết được dưới dạng $a = 2^k . b$ với $k \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$, $b \in \{1 ; 3 ; 5 ; ... ; 49\}$.

Chọn các số có k = 0, còn $b \in \{1 ; 3 ; 5 ; ... ; 49\}$, các số này là 1, 3 , 5, ..., 49, gồm 25 số.

Chọn các số có k = 2, còn $b \in \{1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11\}$, các số này là 4, 12, 20, 28, 36, 44 gồm sáu số.

Chọn các số có k = 4, còn $b \in \{1 ; 3\}$, các số này là 16, 48, gồm hai số.

Trong 25 + 6 + 2 = 33 số trên, không có hai số nào mà một số gấp đôi số còn lại.

*Chú ý :* Nếu có thêm một số nữa, khác 33 số đã cho, nhỏ hơn 50 thì trong 34 số này, tồn tại hai số mà một số gấp đôi số còn lại.

Thật vậy, nếu số thứ 34 có dạng 2 . k' (k' = 1, 3, 5, ... , 23) thì nó gấp đôi một trong các số có dạng $2^o . k$, nếu số thứ 34 có dạng $2^3. k'$ (k' = 1, 3, 5) thì nó gấp đôi một trong các số có dạng $2^2.k$ , nếu số thứ 34 có dạng $2^5$ thì nó gấp đôi một trong các số có dạng $2^4 . k$.

**232.** Gọi a là số tự nhiên mà trong biểu diễn thập phân của nó không có các chữ số 0, 1, 2, 3. Có vô số các số a như vậy.

Xét dãy số : a, $\overline{aa}$, ..., $\underbrace{\overline{aa ... a}}_{2004 \text{ số a}}$

Tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 2003.

Giả sử hai số đó là $a_m = \underbrace{\overline{aa ... a}}_{m \text{ số a}}$ và $a_n = \underbrace{\overline{aa ... a}}_{n \text{ số a}}$ (m > n).

Hãy chứng minh rằng số $\underbrace{\overline{aa ... a}}_{m-n \text{ số a}}$ chia hết cho 2003.

**233.** Xét 52 số : 2003, $2003^2$, $2003^3$, ..., $2003^{52}$.

Tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 51. Giả sử hai số đó là $2003^m$ và $2003^n$ $(1 \le n < m \le 52)$. Khi đó

$$2003^m - 2003^n \ \vdots \ 51$$

nên
$$2003^n(2003^{m-n} - 1) \ \vdots \ 51.$$

Do $2003^n$ và 51 nguyên tố cùng nhau nên $2003^{m-n} - 1$ chia hết cho 51.

*Chú ý :* Nếu các số nguyên dương a và m nguyên tố cùng nhau thì tồn tại số tự nhiên k sao cho $a^k - 1$ chia hết cho m. Có định lí cho phép chỉ ra được số k, đó là định lí Ơ-le, trong đó k là số lượng các số nguyên dương nhỏ hơn m và nguyên tố cùng nhau với m. Chú ý rằng số k tìm theo cách này không nhất thiết là số nhỏ nhất để $a^k - 1 \ \vdots \ m$.

Cách tìm số lượng các số nguyên dương nhỏ hơn m và nguyên tố cùng nhau với m như sau :

– Nếu m là số nguyên tố thì k = m – 1.

– Nếu m là hợp số và dạng phân tích ra thừa số nguyên tố là $a^x b^y c^z \ldots$ thì

$$k = m\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right) \ldots$$

Trong bài toán trên m = 51 = 3.17 nên

$$k = 51\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{17}\right) = 51 \, . \, \frac{2}{3} \, . \, \frac{16}{17} = 32.$$

Như vậy với định lí Ơ-le, ta chỉ ra được $2003^{32} - 1 \ \vdots \ 51$.

**234.** $2^{51} - 1 = (2^3)^{17} - 1$ chia hết cho $2^3 - 1 = 7$.

**235.** $2^{70} + 3^{70} = (2^2)^{35} + (3^2)^{35} = 4^{35} + 9^{35}$ chia hết cho 4 + 9 = 13 (áp dụng $a^{2k+1} + b^{2k+1} \ \vdots \ a + b$)

**236.** $17^{19} + 19^{17} = (17^{19} + 1) + (19^{17} - 1) \ \vdots \ 18$ (áp dụng $a^{2k+1} + b^{2k+1} \ \vdots \ a + b$ ; $a^n - b^n \ \vdots \ a - b$).

**237.** $36^{63} - 1$ chia hết cho $36 - 1 = 35$ nên chia hết cho 7.

$36^{63} - 1 = (36^{63} + 1) - 2$ chia cho 37 dư $-2$.

**238.** a) $4^{20} - 1$ chia hết cho $4 - 1$ tức là $4^{20} - 1$ chia hết cho 3, mà $4^{20} - 1 > 3$ nên $4^{20} - 1$ là hợp số.

b) $1\,000\,001 = 100^3 + 1^3$ chia hết cho $100 + 1$. Vậy 1 000 001 là hợp số.

c) $2^{50} + 1 = 4^{25} + 1$ chia hết cho $4 + 1$.

**239.** Ta có $4^n = (3 + 1)^n = \text{BS}\,3 + 1$ nên biểu thức đã cho bằng

$$\text{BS}3 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \text{BS}\,3 + 21, \text{ chia hết cho } 3.$$

**240.** $A = (31^n - 15^n) - (24^n - 8^n)$ chia hết cho 16 ;

$A = (31^n - 24^n) - (15^n - 8^n)$ chia hết cho 7.

**241.** Xét các trường hợp n chẵn và lẻ. *Đáp số :* n chẵn.

**242.** $A = 3^{2n+3} + 2^{4n+1} = 27.3^{2n} + 2.2^{4n} =$

$= 25.3^{2n} + 2(3^{2n} + 2^{4n}) = \text{BS}25 + 2(9^n + 16^n)$.

Nếu n lẻ thì $9^n + 16^n$ chia hết cho 25, do đó A chia hết cho 25.

Nếu n chẵn thì $9^n$ tận cùng bằng 1, còn $16^n$ tận cùng bằng 6, suy ra $2(9^n + 16^n)$ tận cùng bằng 4, vậy A không chia hết cho 25.

*Đáp số :* n lẻ.

**243.** Lần lượt xét $n = 3k$, $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$, chỉ có $n = 3k$ thì $5^n - 2^n$ chia hết cho 9.

**244.** $5^n - 2^n$ chia hết cho 9 $\Leftrightarrow$ n là bội của 3 (câu a).

$5^n - 2^n$ chia hết cho 7 $\Leftrightarrow$ n chẵn. *Đáp số :* $n = 6k$ ($k \in \mathbf{N}$).

**245.** Đặt $A = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$.

Nếu n là số lẻ thì $1^n + 4^n \vdots 5$ và $2^n + 3^n \vdots 5$ nên $A \vdots 5$.

Nếu n = 4k + 2 (k $\in$ **N**) thì

$$A = 1 + 2^{4k+2} + 3^{4k+2} + 4^{4k+2} = (1 + 4^{2k+1}) + (9^{2k+1} + 16^{2k+1})$$

chia hết cho 5.

Nếu n = 4k (k $\in$ **N**) thì

$$A = 1 + 2^{4k} + 3^{4k} + 4^{4k} = 1 + 16^k + 81^k + 16^{2k},$$

tận cùng bằng 4, không chia hết cho 5.

*Đáp số :* n không chia hết cho 4.

**246.** $22^{22} + 55^{55} = (BS\ 7 + 1)^{22} + (BS\ 7 - 1)^{55} =$

$$= BS\ 7 + 1 + BS\ 7 - 1 = BS\ 7.$$

**247.** Luỹ thừa của 2 sát với một bội của 7 là $2^3 = 8 = 7 + 1$.

Ta thấy 1994 chia cho 3 dư 2. Do đó

$$2^{1994} = 2^{3k+2} = 4(2^3)^k = 4(7 + 1)^k = 4(BS\ 7 + 1) = BS\ 7 + 4.$$

**248.** Luỹ thừa của 3 sát với một bội của 7 là $3^3 = 27 = BS\ 7 - 1$.

Ta thấy 1993 chia cho 6 dư 1. Do đó

$$3^{1993} = 3^{6k+1} = 3(3^3)^{2k} = 3(BS\ 7 - 1)^{2k} = 3(BS\ 7 + 1) = BS\ 7 + 3.$$

**249.** Chú ý rằng 1995 là bội của 7, do đó

$$A = 1992^{1993} + 1994^{1995} = (BS\ 7 - 3)^{1993} + (BS\ 7 - 1)^{1995} =$$

$$= BS\ 7 - 3^{1993} + BS\ 7 - 1.$$

Theo bài 248 thì $3^{1993} = BS\ 7 + 3$. Do đó $A = BS\ 7 - (BS\ 7 + 3) - 1 = BS\ 7 - 4$.
Vậy A chia cho 7 dư 3.

*Chú ý :* Để tìm số dư của phép chia luỹ thừa $a^b$ cho m, ta có thể tìm một luỹ thừa của a sát với một bội của m (chẳng hạn là $a^n$), sau đó viết b dưới dạng nk + r (bài 247) hoặc 2nk + r (bài 248).

**250.** *Cách 1.* Chứng minh rằng $3^{1998} = BS\ 13 + 1$, $5^{1998} = BS\ 13 - 1$.

Vậy $3^{1998} + 5^{1998}$ chia hết cho 13.

*Cách 2.* $A = 3^{1998} + 5^{1998} = (3^3)^{666} + (5^2)^{999} = 27^{666} + 25^{999} =$

$$= (27^{666} - 1) + (25^{999} + 1).$$

Ta có $27^{666} - 1$ chia hết cho 26 (hằng đẳng thức 8), $25^{999} + 1$ chia hết cho 26 (hằng đẳng thức 9). Vậy A chia hết cho 13.

**251.** Ta tìm một luỹ thừa của 9 sát với một bội của 13, đó là $9^3 = 729 = BS\ 13 + 1$. Do đó ta viết $10^{11}$ dưới dạng $(BS\ 3 + 1)^{11} = 3k + 1$. Ta có

$$9^{10^{11}} = 9^{3k+1} = 9(9^3)^k = 9(BS\ 13 + 1)^k = 9(BS\ 13 + 1) = BS\ 13 + 9.$$

Luỹ thừa của 5 sát với một bội của 13 là $5^2 = BS\ 13 - 1$.

Viết $9^{10}$ dưới dạng $4n + 1$ thì

$$5^{9^{10}} = 5^{4n+1} = 5.(5^2)^{2n} = 5(BS\ 13 - 1)^{2n} = 5(BS\ 13 + 1) = BS\ 13 + 5$$

(chú ý rằng nếu viết $9^{10}$ dưới dạng $2m + 1$ thì $5^{9^{10}} = 5^{2m+1} = 5(BS\ 13 - 1)^m$, chưa xác định được số dư vì chưa biết m chẵn hay lẻ).

Vậy $9^{10^{11}} - 5^{9^{10}}$ chia cho 13 dư 4.

**252.** Ta sẽ chứng minh A chia hết cho 7. Luỹ thừa của 2 sát với một bội của 7 là $2^3$. Ta có

$$2^{2n+1} = (3 - 1)^{2n+1} = BS\ 3 - 1 = 3k + 2.$$

Do đó

$$A = 2^{3k+2} + 3 = 4.(2^3)^k + 3 = 4(7 + 1)^k + 3 = BS\ 7 + 7 = BS\ 7.$$

Ta lại có $A > 7$, do đó A là hợp số.

**253.** a) dư 1 ; b) dư 4.

**254.** $(n^3 - 1)^{111} = BS\ n - 1$, $(n^2 - 1)^{333} = BS\ n - 1$. Vậy

$$(n^3 - 1)^{111}.(n^2 - 1)^{333} = BS\ n + 1.$$

**255.** *Cách 1.* Ta thấy $455^{12} = (BS\ 4 - 1)^{12} = B\ 4 + 1$. Do đó, a và b chia cho 4 cùng dư 1 hoặc cùng dư 3. Trong cả hai trường hợp trên, a + b chia cho 4 dư 2.

*Cách 2.* Xét biểu thức $ab + a + b + 1 = a(b + 1) + (b + 1) = (a + 1)(b + 1)$. Do a và b lẻ nên $(a + 1)(b + 1)$ chia hết cho 4, tức là

$$(ab + 1) + (a + b) \text{ chia hết cho 4.} \qquad (1)$$

Ta thấy

$$ab = 455^{12} = (BS\ 4 - 1)^{12} = BS\ 4 + 1 \Rightarrow ab + 1 = BS\ 4 + 2. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a + b = BS\ 4 + 2$.

**256.** a) $3^{999} = 3.3^{998} = 3(10-1)^{499} = 3(10^{499} - ... + 499.10 - 1) =$

$= 3(\text{BS } 100 + 4989) = ... 67.$

b) Xét số mũ $7^7 = (8-1)^7 = \text{BS } 8 - 1 = 4k + 3$. Ta có

$$7^{7^7} = 7^{4k+3} = 7^3.(7^4)^k = 343.(...01)^k = (...43)(..01) = ...43.$$

**257.** $3^{100} = (10-1)^{50} = 10^{50} - ... + \dfrac{50.49}{2}.10^2 - 50.10 + 1$

$= \text{BS } 1000 + ... 500 - 500 + 1$

$= \text{BS } 1000 + 1$. Vậy $3^{100}$ có tận cùng là 001.

*Chú ý :* Tổng quát, ta chứng minh được rằng nếu n là số lẻ không chia hết cho 5 thì ba chữ số tận cùng của $n^{100}$ là 001.

Trước hết, ta thấy một số n không chia hết cho 5 thì chia cho 125 có số dư bằng 1. Điều này đã được chứng minh ở chú ý của ví dụ 45. Ở đây, do có thêm điều kiện n là số lẻ nên còn có thể chứng minh bằng cách sau :

n tận cùng bằng 1, 3, 7, 9 $\Rightarrow n^4$ tận cùng bằng 1

$\Rightarrow n^{100} = (n^4)^{25} = (10k+1)^{25}$

$$= \text{BS } 1000 + \frac{25.24}{2}(10k)^2 + 25.10k + 1 = \text{BS } 125 + 1. \qquad (1)$$

Ta có $n^{100} = (n^{50})^2$ là số chính phương lẻ (vì n lẻ) nên chia cho 8 dư 1. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $n^{100} - 1$ chia hết cho 1000, tức là tận cùng bằng 001.

Từ kết quả này, ta còn suy ra : Nếu n là số lẻ không chia hết cho 5 thì $n^{101}$ và n có ba chữ số tận cùng như nhau.

**258.** Ta có $89^6 - 1$ chia hết cho $89 - 1$ nên chia hết cho 11, $89^6 - 1$ chia hết cho $89^3 + 1$ nên chia hết cho $89 + 1$, do đó chia hết cho 9. Đặt $89^6 - 1 = A$.

$A = \overline{496\ 9xy\ 290\ 960}$ chia hết cho 11 và 9.

Tổng các chữ số hàng lẻ từ phải sang trái của A bằng $36 + y$, tổng các chữ số hàng chẵn của A bằng $18 + x$.

A chia hết cho 9 nên $54 + x + y$ chia hết cho 9, từ đó $x + y \in \{0 ; 9 ; 18\}$ ;
A chia hết cho 11 nên

$(36 + y) - (18 + x)$ chia hết cho 11, từ đó $x - y \in \{7 ; -4\}$.

Nếu $x + y = 0$ thì $x = y = 0$, loại.

Nếu $x + y = 18$ thì $x = y = 9$, loại.

Nếu $x + y = 9$ : chú ý rằng $x + y$ và $x - y$ cùng chẵn hoặc cùng lẻ nên $x - y = 7$. Ta được $x = 8$, $y = 1$.

Vậy $89^6 = 496\,981\,290\,961$.

## TÍNH CHIA HẾT ĐỐI VỚI ĐA THỨC

**259.** a) Có ; b) Không.

**260.** a) $x^{41} = x^{41} - x + x = x(x^{40} - 1) + x$. Ta thấy $x^{40} - 1 = (x^4)^{10} - 1$ nên chia hết cho $x^4 - 1$, do đó chia hết cho $x^2 + 1$.

Vậy $x^{41}$ chia cho $x^2 + 1$ dư x.

b) Dư $-x$.

**261.** a) Dư 4 ; b) Dư 4x.

**262.** a) $r = f(-1) = -1 - 1 - 1 - 1 + 7 = 3$. Dư 3.

b) $x^{99} + x^{55} + x^{11} + x + 7 = x(x^{98} + 1) + x(x^{54} + 1) + x(x^{10} + 1) - 2x + 7$.

Chú ý rằng $(x^2)^{49} + 1$, $(x^2)^{27} + 1$, $(x^2)^5 + 1$ chia hết cho $x^2 + 1$ (theo hằng đẳng thức 9). Vậy dư phải tìm là $-2x + 7$.

**263.** Gọi thương khi chia f(x) cho $x^2 - 1$ là Q(x), dư là $ax + b$. Ta có

$$f(x) = (x^2 - 1).Q(x) + ax + b.$$

Đẳng thức trên đúng với mọi x. Lần lượt cho $x = 1$ và $x = -1$.

*Đáp :* Dư khi chia f(x) cho $x^2 - 1$ là $25x + 26$.

**264.** Trước hết ta tìm dư khi chia f(x) cho $(x - 2)(x - 3)$.

Xét $\quad f(x) = (x - 3).A(x) + 7, \quad (1)$

$\quad f(x) = (x - 2).B(x) + 5. \quad (2)$

*Cách 1*. Xét $\quad f(x) = 3x(x - 2)(x - 3) + ax + b. \quad (3)$

Từ (1), (2), (3), bằng cách cho $x = 2$, $x = 3$ ta tìm được $a = 2$, $b = 1$. Dư của phép chia f(x) cho $(x - 2)(x - 3)$ là $2x + 1$.

Do đó $f(x) = 3x(x-2)(x-3) + 2x + 1 = 3x^3 - 15x^2 + 20x + 1$.

*Cách 2*. Từ (1) suy ra

$$(x-2)f(x) = (x-2)(x-3).A(x) + 7(x-2). \quad (4)$$

Từ (2) suy ra

$$(x-3)f(x) = (x-2)(x-3).B(x) + 5(x-3). \quad (5)$$

Lấy (4) trừ (5) được $f(x) = (x-2)(x-3)[A(x) - B(x)] + 2x + 1$.

Dư khi chia $f(x)$ cho $(x-2)(x-3)$ là $2x + 1$. Giải tiếp như cách 1.

**265.** *Đáp số :* $x^4 + x^3 - 9x^2 + 2x - 31$.

**266.** Đặt $-\frac{1}{2} = a$, ta có : $x^8 = (x-a).B(x) + r_1$.

Cho $x = a$ thì $r_1 = a^8$, do đó :

$$x^8 - a^8 = (x-a).B(x)$$

nên $$B(x) = \frac{x^8 - a^8}{x-a} = (x^4 + a^4)(x^2 + a^2)(x+a).$$

Ta có $$(x^4 + a^4)(x^2 + a^2)(x+a) = (x-a).C(x) + r_2.$$

Cho $x = a$, ta được : $2a^4.2a^2.2a = r_2$ nên $r_2 = 8a^7$.

Thay $a = -\frac{1}{2}$, ta được $r_2 = -\frac{1}{16}$.

**267.** a) Thêm và bớt $x^{20}$ vào đa thức bị chia.

b) Biến đổi : $x^2 - x^9 - x^{1945} = (x^2 - x + 1) - (x^9 + 1) - (x^{1945} - x)$.

c) $x^{10} - 10x + 9 = (x^{10} - 1) - 10(x-1) = (x-1)(x^9 + x^8 + x^7 + ... + x + 1 - 10)$.

Biểu thức trong dấu ngoặc thứ hai bằng $(x^9 - 1) + (x^8 - 1) + ... + (x - 1)$, chia hết cho $x - 1$.

d) $8x^9 - 9x^8 + 1 = 8(x^9 - 1) - 9(x^8 - 1)$

$$= (x-1)[8(x^8 + x^7 + ... + x + 1) - 9(x^7 + x^6 + ... + x + 1)].$$

Biểu thức trong dấu ngoặc vuông bằng

$$8x^8 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1,$$

chia hết cho $x - 1$ vì tổng các hệ số bằng 0.

**268.** Trước hết chứng minh rằng f(x) – g(x) chia hết cho g(x).

Ta có $f(x) - g(x) = x^{99} - x^9 + x^{88} - x^8 + ... + x^{11} - x =$

$$= x^9(x^{90} - 1) + x^8(x^{80} - 1) + ... + x(x^{10} - 1).$$

Các biểu thức trong dấu ngoặc đều chia hết cho $x^{10} - 1$, mà $x^{10} - 1$ chia hết cho g(x).

**269.** $(x + y)^6 + (x - y)^6 = [(x + y)^2]^3 + [(x - y)^2]^3$ chia hết cho $(x + y)^2 + (x - y)^2$, tức là chia hết cho $2(x^2 + y^2)$, do đó chia hết cho $x^2 + y^2$.

**270.** a) Chứng minh rằng mọi nghiệm của đa thức chia đều là nghiệm của đa thức bị chia.

b) Đa thức bị chia bằng $(x^{2n+1} + 1)^2$, chia hết cho $(x + 1)^2$.

c) $(x + 1)^{4n+2} + (x - 1)^{4n+2} = [(x + 1)^2]^{2n+1} + [(x - 1)^2]^{2n+1}$ chia hết cho $(x + 1)^2 + (x - 1)^2$, tức là chia hết cho $2(x^2 + 1)$.

**271.** Vì n và n + 1 là hai số tự nhiên liên tiếp nên có một số chẵn, một số lẻ. Đa thức bị chia có dạng

$$(x^{2k} - 1)(x^{2k+1} - 1) = (x^2 - 1).A(x).(x - 1).B(x)$$
$$= (x + 1)(x - 1)^2.A(x).B(x).$$

**272.** Trước hết, ta chứng minh $x^{6m+4} + x^{6n+2} + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$. Giải tương tự như ví dụ 58.

Đa thức $x^{6m+4} + x^{6n+2} + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ và chia hết cho $x^2 - x + 1$ (ví dụ 58), hai đa thức này không có nhân tử chung bậc nhất. Do đó $x^{6m+4} + x^{6n+2} + 1$ chia hết cho tích $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$, tức là chia hết cho $x^4 + x^2 + 1$.

**273.** Xét n = 3k, n = 3k + 1, n = 3k + 2. Trong trường hợp đầu, số dư của phép chia bằng 3. Trong hai trường hợp sau, số dư bằng 0. Vậy số cần tìm n không chia hết cho 3.

**274.** Gọi thương khi chia đa thức A cho x + y + z là Q, ta có

$$x^3 + y^3 + z^3 + kxyz = (x + y + z).Q$$

Đẳng thức trên đúng với mọi x, y, z nên với x = 1, y = 1, z = –2 ta có :

$$1 + 1 + (-2)^3 + k(-2) = (1 + 1 - 2).Q \Rightarrow -6 - 2k = 0 \Rightarrow k = -3.$$

Với $k = -3$ ta có $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ chia hết cho $x + y + z$ (thương bằng $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$).

Vậy $k = -3$.

**275.** Giả sử a là nghiệm nguyên của f(x). Với mọi x, ta có $f(x) = (x - a).Q(x)$ trong đó Q(x) là đa thức có hệ số nguyên, do đó

$$f(0) = -a.Q(0), \quad f(1) = (1 - a).Q(1)$$

Do f(0) là số lẻ nên a là số lẻ, do f(1) là số lẻ nên $1 - a$ là số lẻ, mâu thuẫn với nhau.

# PHẦN HÌNH HỌC

## *Chương I* - TỨ GIÁC

### §1. Tứ giác

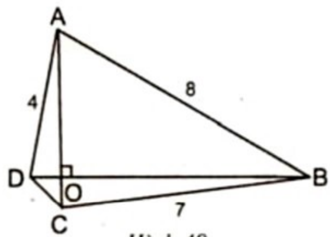
**1.** (h.49) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có

$$OC^2 + OD^2 + OB^2 + OA^2 = BC^2 + AD^2 = 7^2 + 4^2 = 65$$

và $\quad OA^2 + OB^2 = AB^2 = 8^2 = 64.$

Suy ra $OC^2 + OD^2 = 1$ hay $CD^2 = 1$.

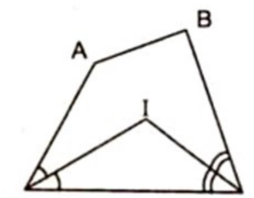
Vậy $CD = 1$.



*Hình 49*

**2.** (h.50) Ta tính được $\widehat{C} + \widehat{D} = 130^o$, do đó $\widehat{A} + \widehat{B} = 230^o$.

Ta lại có $\widehat{A} - \widehat{B} = 50^o$. Từ đó $\widehat{A} = 140^o$, $\widehat{B} = 90^o$.



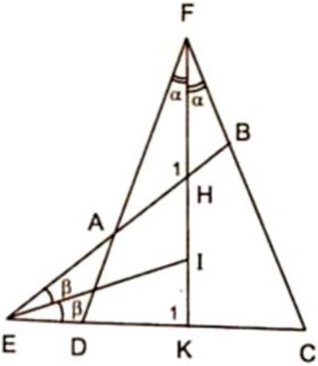
*Hình 50*

3. a) Xem cách giải tổng quát ở câu b.

b) Giả sử E và F có vị trí như trên hình 51, các tia phân giác của các góc E và F cắt nhau tại I. Trước hết ta chứng minh rằng $\widehat{BAD} + \widehat{C} = 2\widehat{EIF}$.

Thật vậy, gọi H và K là giao điểm của FI với AB và CD. Theo tính chất góc ngoài của tam giác ta có $\widehat{BAD} = \widehat{H}_1 + \alpha$, $\widehat{C} = \widehat{K}_1 - \alpha$ nên

$$\widehat{BAD} + \widehat{C} = \widehat{H}_1 + \widehat{K}_1$$
$$= (\widehat{EIF} + \beta) + (\widehat{EIF} - \beta) = 2\widehat{EIF}.$$

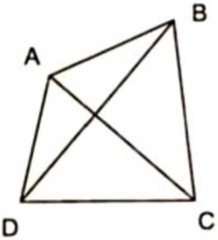


*Hình 51*

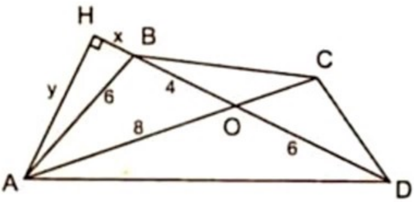
Do đó $\widehat{EIF} = (\widehat{BAD} + \widehat{C}) : 2$.

4. Bạn đọc tự chứng minh.

5. (h.52) Cộng từng vế : AB + CD < AC + BD và AB + BD ≤ AC + CD ⇒ 2AB < 2AC ⇒ AB < AC.



*Hình 52*



*Hình 53*

6. (h.53) Kẻ AH ⊥ OB. Đặt BH = x, AH = y. Ta có : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ (x+4)^2 + y^2 = 64. \end{cases}$

Từ đó ta tìm được : $x = \dfrac{3}{2}, y^2 = \dfrac{135}{4}$.

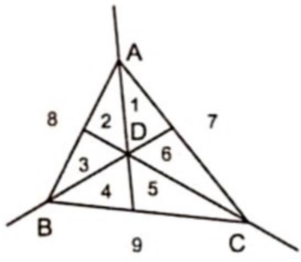
Do đó : $AD^2 = HD^2 + AH^2 = 11{,}5^2 + \dfrac{135}{4} = 166$.

Vậy $AD = \sqrt{166}$.

7. Xét bốn điểm A, B, C, D. Nếu bốn điểm đó là đỉnh của một tứ giác lồi thì bài toán được chứng minh xong. Nếu bốn điểm đó không là đỉnh của một tứ giác lồi thì tồn tại một điểm (giả sử D) nằm trong tam giác có đỉnh là

ba điểm còn lại (h.54). Chia mặt phẳng thành chín miền như hình vẽ, điểm thứ năm E nằm bên trong một miền (vì trong năm điểm không có ba điểm thẳng hàng).

Nếu E thuộc các miền 1, 4, 8, ta chọn bốn điểm là E và A, D, B. Nếu E thuộc các miền 2, 5, 7, ta chọn E và A, D, C. Nếu E thuộc các miền 3, 6, 9 ta chọn E và B, D, C.



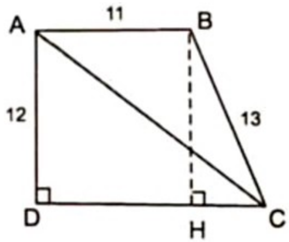
*Hình 54*

## §2. Hình thang

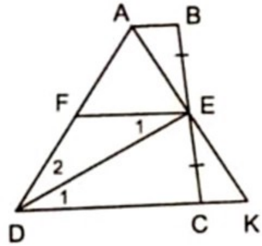
**8.** Qua một đỉnh của đáy nhỏ, kẻ đường thẳng song song với cạnh bên của hình thang.

**9.** (h.55) Kẻ $BH \perp CD$. Ta tính được CH = 5 cm, CD = 16 cm.

Từ đó AC = 20 cm.



*Hình 55*



*Hình 56*

**10.** (h.56) *Cách 1.* Gọi K là giao điểm của AE và DC, $\Delta ABE = \Delta KCE$ (g.c.g) $\Rightarrow AE = EK$. Vậy $\Delta ADK$ cân , $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$.

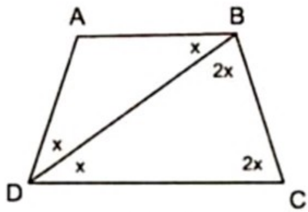
*Cách 2.* Gọi F là trung điểm của AD. Ta có EF // CD nên $\widehat{E}_1 = \widehat{D}_1$.

Mặt khác $\Delta AED$ vuông nên

$$EF = FA = FD \Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{D}_2.$$

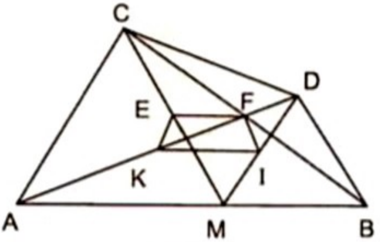
Vậy $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$.

**11.** (h.57) Đặt $\widehat{ADB} = x$. Ta tìm được $x = 36^o$. Các góc của hình thang cân bằng : $72^o$, $72^o$, $108^o$, $108^o$ .

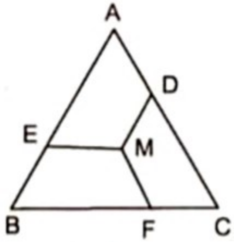


*Hình 57*

**12.** (h.58) Chứng minh EF // KI, $\widehat{EKI} = \widehat{FIK} = 60^o$. Suy ra $KF = EI = \dfrac{CD}{2}$.




*Hình 58*



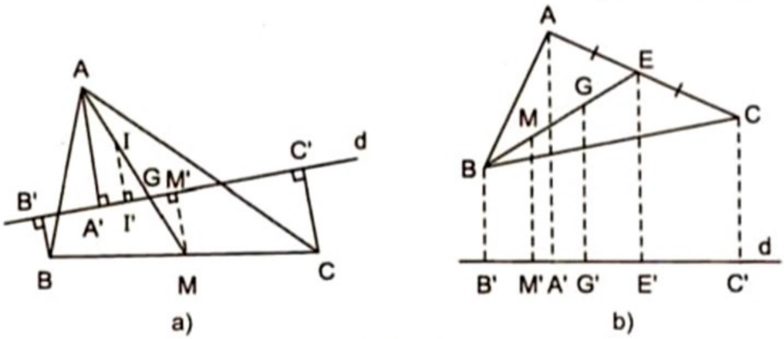

*Hình 59*

**13.** (h.59). Qua M vẽ MD // AB, vẽ ME // BC, vẽ MF // AC, được ba hình thang cân, do đó MA = DE, MB = EF, MC = DF, các đoạn thẳng MA, MB, MC là độ dài của các cạnh của ΔDEF nên đoạn lớn nhất nhỏ hơn tổng của hai đoạn kia.

*Cách khác.* AM cắt BC ở K. Ta có MA < AK < AC = BC < MB + MC. Tương tự, MB < MA + MC, MC < MA + MB.

**14.** a) (h.60a) Lấy điểm I trên đường trung tuyến AM sao cho I là trung điểm của AG. Kẻ AA', BB', CC', II', MM' vuông góc với d.

*Đáp số* : AA' = BB' + CC'.




*Hình 60*

b) (h.60b) Gọi BE là đường trung tuyến của ΔABC, M là trung điểm của BG. Vẽ AA', BB', CC', EE', GG', MM' vuông góc với d. Ta có :

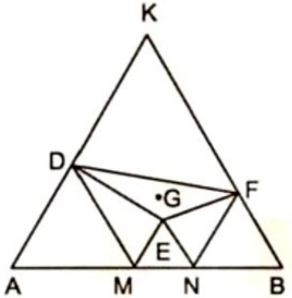
$$MM' + EE' = 2GG'$$

$$\Rightarrow 2MM' + 2EE' = 4\,GG'$$

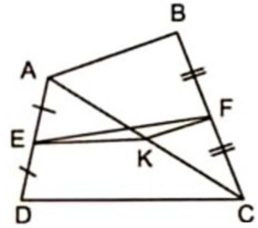
$$\Rightarrow BB' + GG' + AA' + CC' = 4\,GG'$$

$$\Rightarrow AA' + BB' + CC' = 3GG'.$$

**15.** (h.61) Gọi K là giao điểm của AD, BF thì $\Delta ABK$ đều. Trước hết chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ D, E, F đến AB bằng đường cao KH = h của $\Delta KAB$ (h không đổi). Do đó khoảng cách từ G đến AB bằng $\frac{h}{3}$ (theo bài 14).



*Hình 61*



*Hình 62*

**16.** (h.62) a) Gọi K là trung điểm của AC.

Ta có $EF \leq KF + KE$, từ đó $2EF \leq AB + CD$ nên $EF \leq \frac{AB + CD}{2}$.

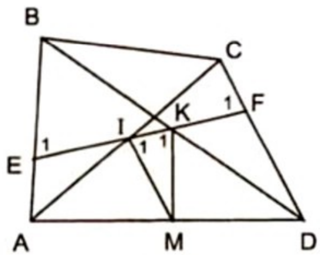
b) $EF = \frac{AB + CD}{2} \Leftrightarrow$ E, K, F thẳng hàng $\Leftrightarrow AB \parallel CD$.

**17.** (h.63) Gọi M là trung điểm của AD, I và K là trung điểm của AC và BD. Đường thẳng IK cắt AB, CD ở E, F.

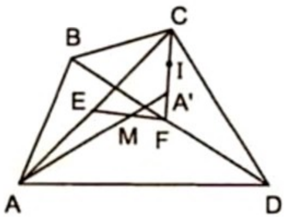
$$\Delta MIK \text{ cân nên } \widehat{K_1} = \widehat{I_1}$$

Ta lại có $\widehat{K_1} = \widehat{E_1}$ (so le trong, $AB \parallel KM$), $\widehat{I_1} = \widehat{F_1}$ (so le trong, $IM \parallel CD$).

Vậy $\widehat{E_1} = \widehat{F_1}$.



*Hình 63*



*Hình 64*

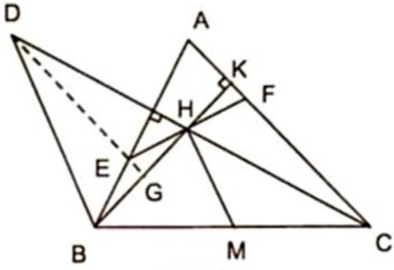
**18.** (h.64). Gọi E, F là trung điểm của AC và BD ; I là trung điểm của A'C. Ta có $EI \parallel AA'$, do đó AA' đi qua trung điểm M của EF. Tương tự, BB', CC', DD' cũng đi qua M.

**19.** (h.65) a) MH là đường trung bình của $\Delta CBD$ nên MH // BD. Do $MH \perp EF$ nên $BD \perp EF$. Ta lại có $BA \perp HD$, do đó E là trực tâm của $\Delta BDH$.

b) Gọi G là giao điểm của DE và BH, K là giao điểm của BH và AC.

$\Delta DHG = \Delta CHK$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow HG = HK$.

$\Delta HGE = \Delta HKF$ (g.c.g) $\Rightarrow HE = HF$.

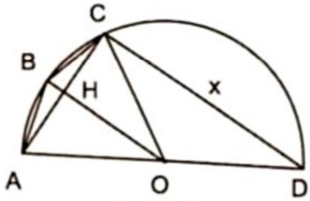


*Hình 65*

**20.** (h.66) Gọi O là tâm của đường tròn, H là giao điểm của OB và AC.

Ta có BA = BC, OA = OC nên OB là đường trung trực của AC, do đó $OB \perp AC$ và AH = HC. OH là đường trung bình của $\Delta ACD$.

Đặt CD = x thì $OH = \frac{x}{2}$ nên $BH = 4 - \frac{x}{2}$.



*Hình 66*

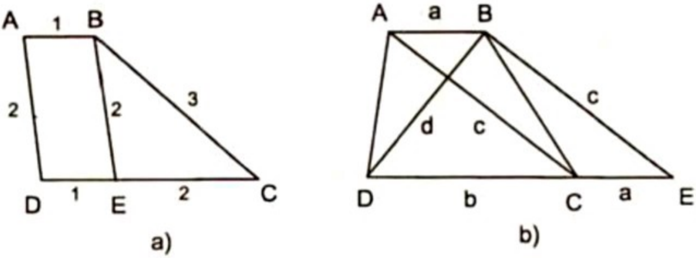
Ta có

$$AB^2 - BH^2 = OA^2 - OH^2 \text{ (cùng bằng } AH^2\text{)}$$

nên $4 - \left(4 - \frac{x}{2}\right)^2 = 16 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$. Từ đó được x = 7. Vậy CD = 7.

## §3. Dựng hình bằng thước và compa

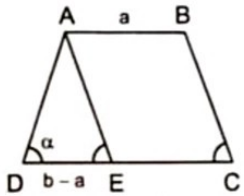
**21.** a) (h.67a) Trước hết dựng $\Delta BEC$ biết ba cạnh BC = 3cm, BE = CE = 2cm. Sau đó dựng điểm D và điểm A.



*Hình 67*

b) (h.67b) Trước hết dựng $\Delta BDE$, biết ba cạnh DE = a + b, BE = c, BD = d. Sau đó dựng điểm A.

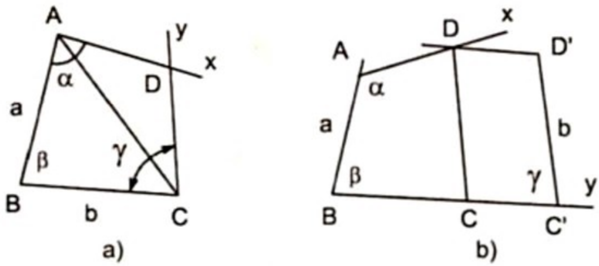
**22.** (h.68) Trước hết dựng tam giác $\Delta ADE$ có $DE = b - a$, $\widehat{D} = \widehat{AED} = \alpha$. Sau đó dựng các điểm C và B.



*Hình 68*

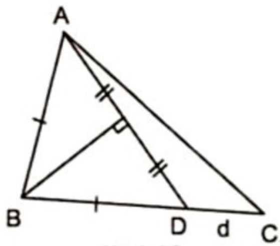
**23.** a) Cách dựng được thể hiện trên hình 69a).

b) Cách dựng được thể hiện trên hình 69b).



*Hình 69*

**24.** (h.70)



*Hình 70*

*1. Phân tích.* Giả sử đã dựng được $\Delta ABC$ có $\widehat{B} = \beta$, $\widehat{C} = \alpha$, $BC - AB = d$. Trên BC lấy điểm D sao cho $BD = AB$ thì $DC = BC - BD = BC - AB = d$. Ta có $\Delta ABD$ cân nên $\widehat{ADC} = 90^o + \dfrac{\widehat{B}}{2} = 90^o + \dfrac{\beta}{2}$ (góc này dựng được bằng thước và compa).

– $\Delta ADC$ xác định ngay vì biết một cạnh và hai góc kề với nó.

– Điểm B thuộc tia đối của tia DC. Mặt khác do $BA = BD$ nên B thuộc đường trung trực của AD.

*2. Cách dựng*

– Dựng $\Delta ADC$ có $\widehat{D} = 90^o + \dfrac{\beta}{2}$, $DC = d$, $\widehat{C} = \alpha$.

– Dựng đường trung trực của AD, cắt tia đối của tia DC ở B. Nối AB.

*3. Chứng minh.* B thuộc đường trung trực của AD nên $AB = BD$. Do đó

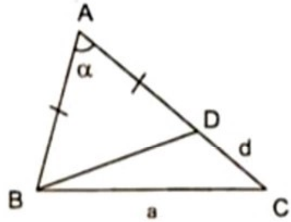
$$BC - AB = BC - BD = DC = d.$$

$\Delta ABD$ cân mà $\widehat{ADC} = 90^o + \frac{\beta}{2}$ nên $\widehat{ADB} = 90^o - \frac{\beta}{2}$, do đó $\widehat{B} = \beta$. Còn $\widehat{C} = \alpha$.

*4. Biện luận*. Bài toán có một nghiệm hình nếu dựng được $\Delta ADC$, tức là nếu $90^o + \frac{\beta}{2} + \alpha < 180^o \Leftrightarrow \alpha < 90^o - \frac{\beta}{2}$.

**25.** (h.71) a) Trên AC lấy điểm D sao cho AD = AB thì DC = d, $\widehat{BDC} = 90^o + \frac{\alpha}{2}$. Dựng $\Delta DBC$, rồi dựng điểm A.

b) Trên AC lấy điểm D sao cho AD = AB thì DC = AC − AB = d. Tính




*Hình 71*

$$\widehat{DBC} = \widehat{ADB} - \widehat{C} = \left(90^o - \frac{\widehat{A}}{2}\right) - \widehat{C}$$

$$= \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} - \widehat{C} = \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Dựng $\Delta BDC$, rồi dựng điểm A. Chú ý rằng có thể dựng được hai điểm D nhưng chỉ chọn D sao cho $\widehat{BDC} > 90^o$.

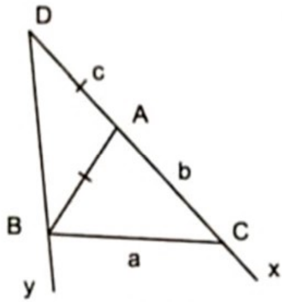
**26.** (h.72)

a) *Phân tích*. Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho AD = AB thì $\Delta ABD$ cân nên $\widehat{D} = \frac{\alpha}{2}$.

Dựng $\Delta BDC$, rồi dựng A.

*Cách dựng*.

– Dựng $\widehat{xDy} = \frac{\alpha}{2}$.




*Hình 72*

– Trên tia Dx lấy DC = s.

– Dựng đường tròn (C; a) cắt tia Dy ở B.

– Dựng đường trung trực của BD cắt cạnh DC ở A.

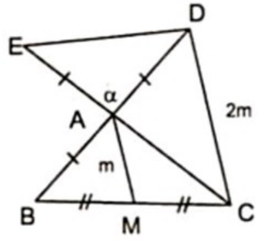
*Biện luận*. Gọi h là khoảng cách từ C đến Dy. Điều kiện để bài toán có nghiệm hình là $h \le a < s$.

b) Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho AD = AB (h.72). Tính

$$\widehat{DBC} = \widehat{B} + \frac{\widehat{A}}{2} = \widehat{B} + \left(90^o - \frac{\widehat{B}}{2} - \frac{\widehat{C}}{2}\right) = 90^o + \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2} = 90^o + \frac{\alpha}{2},$$

góc này dựng được bằng thước và compa . Dựng $\Delta$BDC, rồi dựng điểm A.

**27.** (h.73) Trên tia đối của tia AB lấy D, trên tia đối của tia AC lấy E sao cho AD = AE = AB. Ta có EC = s, DC = 2m, $\widehat{DEC} = 90^o - \frac{\alpha}{2}$. Dựng $\Delta$EDC rồi dựng A, sau đó dựng B.



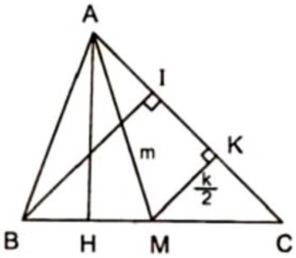
*Hình 73*

**28.** Vẽ MK vuông góc với BC thì $MK = \frac{h}{2}$. Dựng $\Delta$BMK, rồi dựng điểm C, sau đó dựng điểm A.

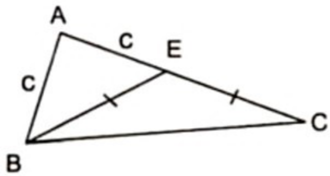
**29.** (h.74) Tam giác vuông AHM dựng được. Vẽ MK $\perp$ AC thì $MK = \frac{BI}{2} = \frac{k}{2}$.

Dựng tiếp tam giác vuông AMK.

Điều kiện để có nghiệm hình : $\frac{k}{2} < m$, $h \leq m$.



*Hình 74*

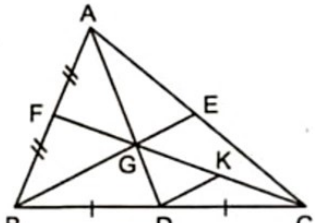


*Hình 75*

**30.** (h.75) Lấy E trên AC sao cho $\widehat{CBE} = \widehat{C}$ thì $\widehat{ABE} = 2\widehat{C}$, $\widehat{AEB} = 2\widehat{C}$. Do đó $\Delta$ABE cân. Suy ra EC = b − c, BE = b − c.

Dựng $\Delta$ABE biết độ dài ba cạnh c, c, b − c. Sau đó dựng điểm C.

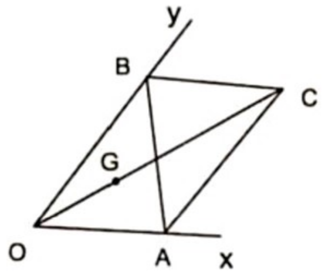
**31.** (h.76) Gọi K là trung điểm của CG. $\Delta$GDK có các cạnh bằng $\frac{1}{3}$ độ dài các đường trung tuyến của $\Delta$ABC. Dựng $\Delta$GDK, rồi dựng F, C. Sau đó dựng B, A.



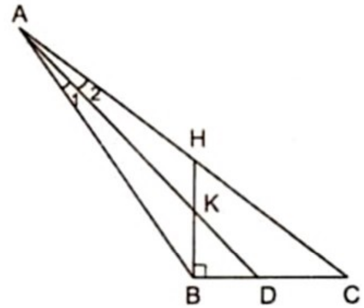
*Hình 76*

Điều kiện để có nghiệm hình là $|m - n| < p < m + n$ với m, n, p là độ dài ba đường trung tuyến đã cho.

**32.** (h.77) Trên tia OG lấy C sao cho OC = 3OG. Qua C vẽ các đường thẳng song song với các cạnh của góc.




*Hình 77*




*Hình 78*

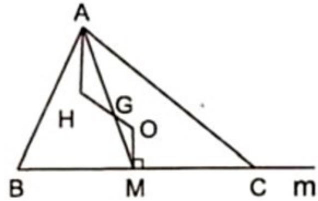
**33.** (h.78) Vẽ đường vuông góc với BC tại B, cắt AD ở K, cắt AC ở H. Ta có $\widehat{ABH} = \widehat{C}$, $\widehat{ADB} = \widehat{A}_2 + \widehat{C}$, $\widehat{BKD} = \widehat{A}_1 + \widehat{ABH}$ nên $\widehat{ADB} = \widehat{BKD}$, do đó $\widehat{ADB} = 45^o$, $\widehat{ADC} = 135^o$.

Dựng $\Delta ADC$ (c.g.c) rồi dựng B.

**34.** (h.79) Gọi O là giao điểm các đường trung trực của $\Delta ABC$ thì G nằm giữa H và O, đồng thời HG = 2GO (bạn đọc tự chứng minh).

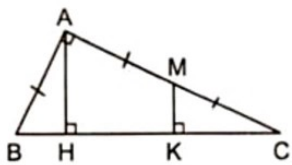
Do đó biết vị trí H, G thì dựng được O. Sau đó dựng $OM \perp m$. Trên tia MG lấy MA = 3MG. Dựng (O ; OA) cắt m ở B và C.

Bài toán luôn có một nghiệm hình vì đường tròn (O ; OA) luôn cắt m.



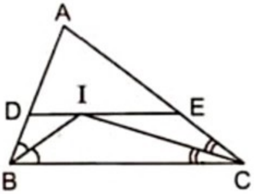

*Hình 79*

**35.** (h.80) Gọi M là trung điểm của AC. Vẽ AH, $MK \perp BC$. $\Delta ABH = \Delta CMK$ (cạnh huyền – góc nhọn) nên BH = MK, AH = CK. Ta lại có $MK = \dfrac{AH}{2}$. Suy ra $BH = \dfrac{CK}{2}$. Mà CK = HK nên $BH = \dfrac{1}{5}BC = 1$ cm, AH = 2 cm. Dựng được $\Delta ABH$, rồi dựng C.

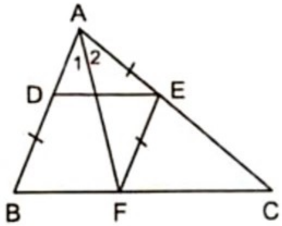



*Hình 80*

**36.** (h.81) Dựng tia phân giác của các góc B và C, chúng cắt nhau ở I. Qua I dựng DE // BC.




*Hình 81*



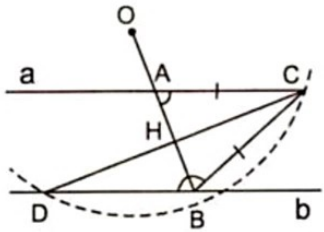

*Hình 82*

**37.** (h.82) Qua E vẽ đường thẳng song song với AB cắt BC ở F. Chứng minh rằng AF là tia phân giác của góc A.

Trước hết dựng F, rồi dựng E.

**38.** (h.83)

*Phân tích :* Qua C vẽ CH ⊥ AB, cắt b ở D. ΔACB cân nên $\widehat{CAB} = \widehat{CBA}$, mà $\widehat{CAB} = \widehat{ABD}$. Do đó $\widehat{CBA} = \widehat{DBA}$, suy ra OD = OC.




*Hình 83*

*Cách dựng :* Dựng đường tròn (O ; OC) cắt b ở D.

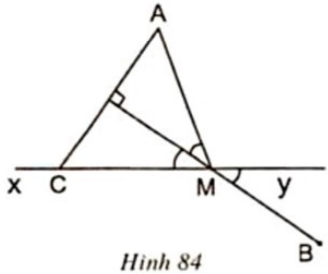
Qua O dựng đường vuông góc với CD cắt a, b ở A, B.

*Biện luận :* Gọi h là khoảng cách từ O đến b. Tuỳ theo OC > h, OC = h. OC < h mà bài toán có 2, 1, 0 nghiệm hình.

**39.** (h.84)

a) *Phân tích :* Qua A vẽ đường vuông góc với BM, cắt xy ở C. Ta chứng minh được BA = BC, vì thế xác định được C, do đó xác định được M.

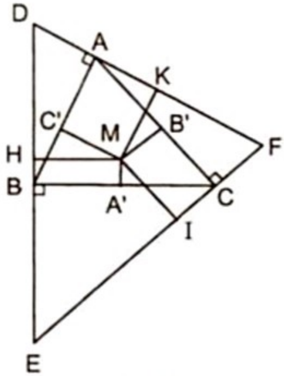
b) Dựng B' sao cho xy là đường trung trực của BB'. Đưa về câu a).




*Hình 84*

**40.** (h.85) Để cho ba đoạn thẳng bằng nhau A'B, B'C, C'A có liên hệ với nhau, ta "dịch" chúng đến M : Vẽ đường thẳng qua M song song với A'B và đường thẳng qua B song song với A'M, chúng cắt nhau ở H. Vẽ đường thẳng qua M song song với B'C và đường thẳng qua C song song với B'M, chúng cắt nhau ở I. Vẽ đường thẳng qua M song song với C'A và đường thẳng qua A song song với C'M, chúng cắt nhau ở K.

Các đường thẳng AK, BH, CI cắt nhau ở D, E, F. $\Delta DEF$ xác định được vì có các cạnh theo thứ tự vuông góc với AB ở A, với BC ở B, với CA ở C. Còn M là điểm cách đều ba cạnh của $\Delta DEF$ nên là giao điểm của các đường phân giác (trong hoặc ngoài) của tam giác. Bài toán có bốn nghiệm hình.



*Hình 85*

## §4. Đối xứng trục

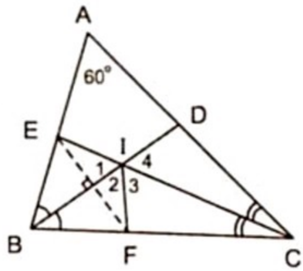
**41.** (h.86)

a) $\Delta EBF$ cân tại B, BD là tia phân giác của góc B nên BD là đường trung trực của EF. Vậy E và F đối xứng với nhau qua BD.

b) Ta tính được $\widehat{BIC} = 120^o$, nên $\hat{I}_1 = 60^o$, suy ra $\hat{I}_2 = 60^o$, $\hat{I}_3 = 60^o$.

Vậy IF là tia phân giác của góc BIC.

c) $\Delta IDC = \Delta IFC$ (g.c.g) $\Rightarrow$ IF = ID, CF = CD.

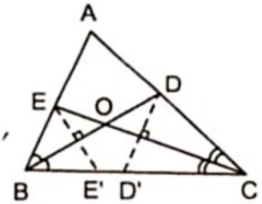


*Hình 86*

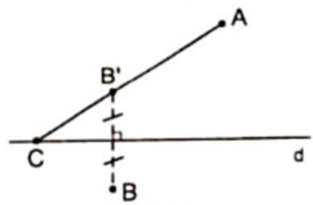
Do đó CI là đường trung trực của DF. Vậy D và F đối xứng với nhau qua CI.

**42.** (h.87) Dựng D' đối xứng với D qua OE, dựng E' đối xứng với E qua OD, E'D' cắt đường thẳng DO và EO ở B và C.

*Biện luận :* Nếu $\widehat{DOE} \le 90^o$ hoặc D, O, E thẳng hàng : không có nghiệm hình ; nếu $\Delta DOE$ cân ở O và $\hat{O} = 120^o$ thì E' trùng D' : vô số nghiệm hình ; còn lại : một nghiệm hình.



*Hình 87*



*Hình 88*

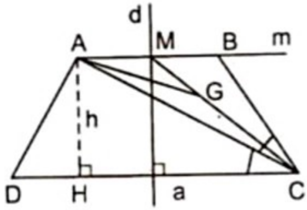
**43.** Dựng B' đối xứng với B qua d. Giao điểm của AB' và d cho ta điểm C (h.88).

**44.** (h.89)

*Phân tích :* Qua A kẻ đường thẳng m // CD. Kẻ đường trung trực d của CD, cắt m ở M. Gọi G là trọng tâm của $\Delta ABC$.

Ta dựng đoạn thẳng CD, đường thẳng m, điểm M, điểm G.

Chú ý rằng $\Delta ABC$ cân (do $\widehat{D} = 2\widehat{ACD}$) nên GA = GC, do đó dựng được điểm A, rồi điểm B.



*Hình 89*

Bạn đọc tự nêu cách dựng.

Do GA = GC > GM nên đường tròn (G ; GC) cắt m. Bài toán luôn có nghiệm hình.

**45.** (h.90) Ta sẽ chứng minh rằng AA', BB', CC' là các đường trung trực của ba đoạn thẳng có các đầu là D, E, F thứ tự là các điểm đối xứng với M qua AB, AC, BC.

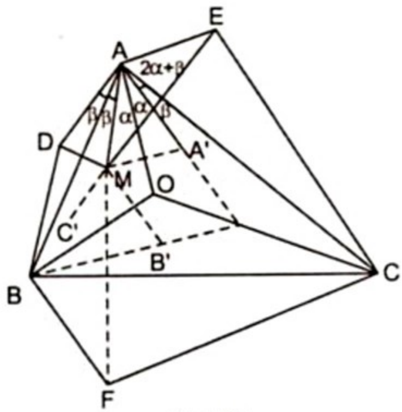
Để chứng minh AA' là đường trung trực của DE, ta cần chứng minh AD = AE (cùng bằng AM) và $\widehat{A'AD} = \widehat{A'AE}$. (Gọi O là giao điểm các đường phân giác của $\Delta ABC$, đặt

$$\widehat{OAM} = \widehat{OAA'} = \alpha,$$

$$\widehat{MAB} = \widehat{A'AC} = \beta$$

thì $\widehat{A'AD} = 2\alpha + 2\beta$,

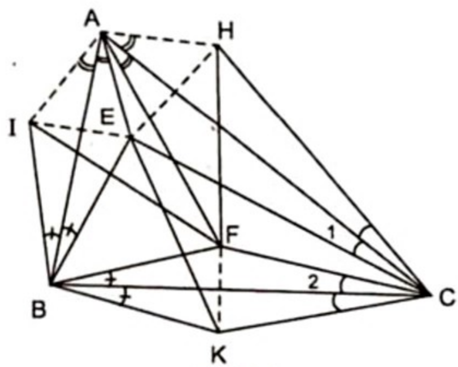
$\widehat{A'AE} = 2\alpha + 2\beta$).



*Hình 90*

**46.** (h.91) Để chứng minh $\widehat{ACE} = \widehat{BCF}$, ta gấp đôi các góc trên bằng cách vẽ H đối xứng với E qua AC, vẽ K đối xứng với F qua BC. Cần phải chứng minh $\widehat{HCE} = \widehat{FCK}$. Muốn vậy ta sẽ chứng minh $\widehat{HCF} = \widehat{ECK}$ bằng cách chứng minh $\Delta HCF = \Delta ECK$.

Hai tam giác này đã có HC = EC, CF = CK. Cần chứng minh FH = KE.



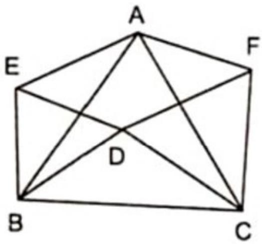
*Hình 91*

Ta tạo ra một đoạn thẳng trung gian : vẽ I đối xứng với E qua AB. Lần lượt chứng minh :

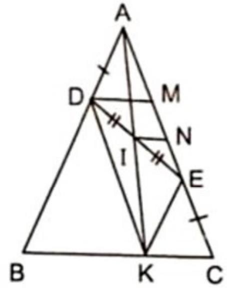
$\Delta FAH = \Delta FAI$ (c.g.c) suy ra FH = FI, $\Delta IBF = \Delta EBK$ (c.g.c) suy ra FI = EK.

## §5. Hình bình hành

**47.** (h.92) $\Delta DBC = \Delta EBA$ (c.g.c) nên DC = EA, do đó DF = EA. Tương tự, DE = FA.




*Hình 92*



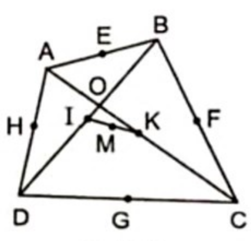

*Hình 93*

**48.** (h.93) Kẻ DM, IN song song với BC. Hãy chứng minh AM = CE, MN = NE, từ đó N là trung điểm của AC, I là trung điểm của AK.

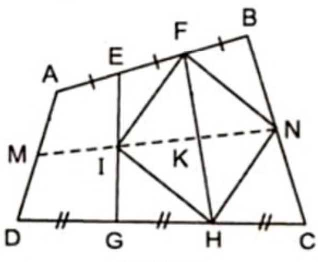
**49.** (h.94) a) Gọi E, F, G, H là trung điểm của AB, BC, CD, DA ; I, K là trung điểm của BD, AC.

Chứng minh rằng EFGH, EIGK là hình bình hành, do đó FH và IK đều đi qua trung điểm của EG.

b) Gọi O là giao điểm hai đường chéo và M là trung điểm của IK. Nếu EG, FH cắt nhau tại O thì theo câu a), M trùng O, do đó I và K trùng O. Tứ giác ABCD có O là trung điểm của hai đường chéo nên là hình bình hành.



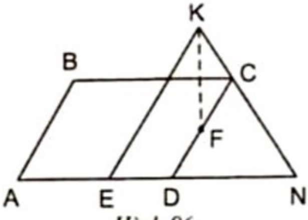

*Hình 94*




*Hình 95*

**50.** (h.95) IF và HN song song và bằng nhau vì cùng song song và bằng một nửa BG. Do đó IFNH là hình bình hành. Ta lại có K là trung điểm của FH nên I, K, N thẳng hàng và K là trung điểm của IN.

Chứng minh tương tự, M, I, K thẳng hàng và I là trung điểm của MK. Vậy M, I, K, N thẳng hàng và MI = IK = KN.

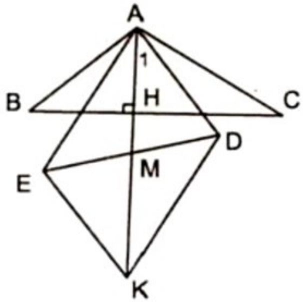


*Hình 96*

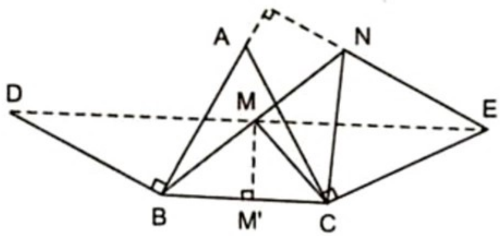
**51.** (h.96) Gọi N là giao điểm của ED và KC, $\Delta$NCD đều mà CK = DE (cùng bằng CF) nên $\Delta$NKE đều. Vậy EK // AB.

**52.** (h.97) Vẽ hình bình hành ADKE, $\Delta ADK = \Delta BAC$ (c.g.c) (chú ý rằng $\widehat{ADK} = \widehat{BAC}$ vì cùng bù với góc DAE nên $\widehat{A}_1 = \widehat{B}$. Gọi H là giao điểm của AM và BC.

Ta có $\widehat{B} + \widehat{BAH} = \widehat{A}_1 + \widehat{BAH} = 90^o$ nên $AH \perp BC$.



*Hình 97*

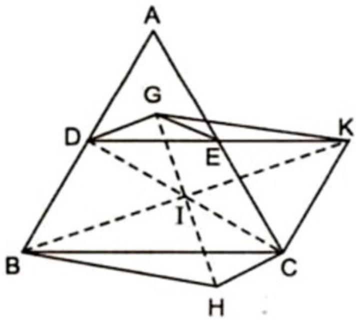


*Hình 98*

**53.** (h.98) Trên tia đối của tia MB lấy MN = MB, BDNE là hình bình hành nên $EN \perp AB$, EN = AB. Ta lại có $EC \perp AC$, EC = AC. Từ đó dễ dàng có $\Delta ENC = \Delta ABC$ (c.g.c), NC = BC, $NC \perp BC$.

Do đó $\Delta$BCN vuông cân, suy ra $\Delta$BMC vuông cân tại M.

*Cách khác.* (dùng kiến thức của §2). Vẽ DD', AA', EE', MM' vuông góc với BC rồi chứng minh rằng M'B = M'C, $MM' = \dfrac{BC}{2}$.



*Hình 99*

**54.** (h.99) *Cách 1*. Qua C, vẽ đường thẳng song song với BD, cắt DE ở K. Ta có BDKC là hình bình hành nên B, I, K thẳng hàng. Hãy chứng minh rằng $\Delta GDB = \Delta GEK$ (c.g.c) để suy ra $\Delta GBK$ cân có góc ở đỉnh $120^o$. Do đó các góc của $\Delta GIB$ bằng $90^o$, $60^o$, $30^o$.

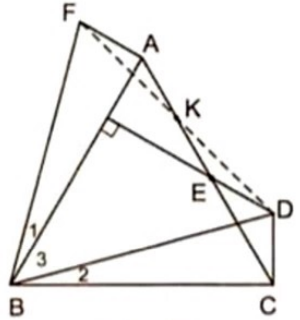
*Cách 2.* Vẽ H sao cho I là trung điểm của GH rồi chứng minh rằng $\Delta GBH$ là tam giác đều bằng cách chứng minh

$$\Delta HCB = \Delta GAB \text{ (c.g.c).}$$

**55.** (h.100) Vẽ F sao cho K là trung điểm của DF thì AF // DE, AF = DE. $\Delta DEC$ có $\widehat{E} = \widehat{C} = 30^o$ nên DE = DC, suy ra AF = DC.

$\Delta BAF = \Delta BCD$ (c.g.c) nên BF = BD, $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$

Ta lại có $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_3 = \widehat{B}_2 + \widehat{B}_3 = 60^o$, do đó $\Delta DBF$ đều, $\widehat{KBD} = 30^o$.



*Hình 100*

**56.** (h.101) Gọi O là giao điểm của DE và MN. Kẻ DD', OO', AH, NN', EE' vuông góc với BC. Ta sẽ chứng minh AH = NN'.

Ta có OO' là đường trung bình của $\Delta MNN'$ nên

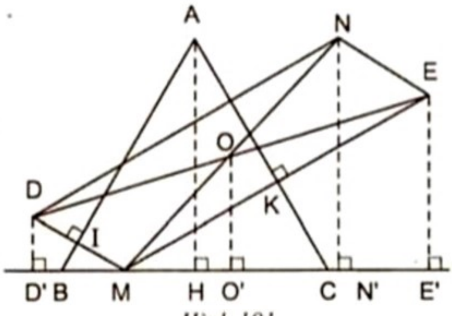
$$NN' = 2.OO'. \qquad (1)$$

Gọi I là giao điểm của MD và AB, K là giao điểm của ME và AC, dễ chứng minh

$$AH = MI + MK. \qquad (2)$$

Vì OO' là đường trung bình của hình thang DEE'D' nên

$$DD' + EE' = 2.OO'. \qquad (3)$$



*Hình 101*

Ta có $\widehat{EME'} = 30^o$ nên $EE' = \dfrac{ME}{2} = MK$. Tương tự, DD' = MI, suy ra

$$DD' + EE' = MI + MK. \qquad (4)$$

Từ (2), (3), (4) suy ra $\qquad AH = 2.OO'. \qquad (5)$

Từ (1) và (5) suy ra AH = NN'. Từ đó chứng minh được AN // HN', tức là AN // BC.

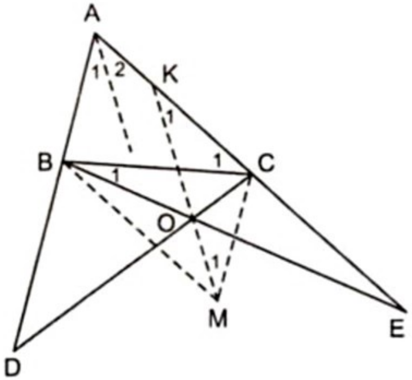
**57.** (h.102) Vẽ hình bình hành ABMC thì AB = CM. Ta sẽ chứng minh rằng CM = CK. Trước hết, ta chứng minh M, O, K thẳng hàng. Thật vậy,

$\widehat{B}_1 = \frac{1}{2}\widehat{C}_1 = \frac{1}{2}\widehat{CBM}$ nên BO là tia phân giác của góc CBM. Tương tự, CD là tia phân giác của góc BCM. Do đó MO là tia phân giác của góc BMC. Suy ra OM song song với tia phân giác của góc A, vậy K, O, M thẳng hàng.

Ta có $\widehat{M}_1 = \frac{1}{2}\widehat{BMC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{K}_1$

nên $\Delta$CMK cân. Suy ra

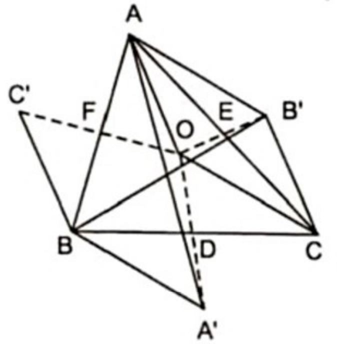
$$CK = CM = AB.$$



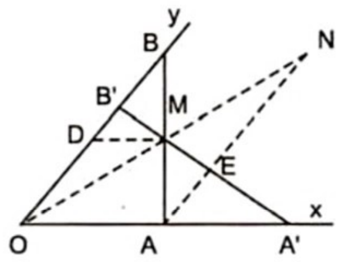

*Hình 102*

## §6. Đối xứng tâm

**58.** (h.103) AB' song song và bằng A'B (vì cùng song song và bằng OC) $\Rightarrow$ ABA'B' là hình bình hành $\Rightarrow$ AA' cắt BB' tại trung điểm của mỗi đoạn. Ta có BCB'C' là hình bình hành $\Rightarrow$ CC' cắt BB' tại trung điểm của mỗi đoạn. Suy ra điều phải chứng minh.




*Hình 103*




*Hình 104*

**59.** (h.104)

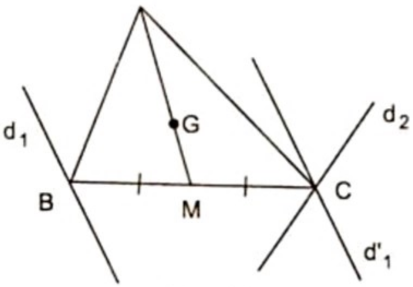
a) *Cách 1*. Qua M dựng đường thẳng song song với Ox, cắt Oy ở D. Dựng B đối xứng với O qua D ; BM cắt Ox ở A.

*Cách 2*. Dựng N đối xứng với O qua M. Qua N dựng NA // Oy, NB // Ox.

b) Qua M, vẽ đường thẳng bất kì (không trùng với AB), cắt Ox, Oy thứ tự ở A', B'. Ta sẽ chứng minh rằng $S_{OAB} < S_{OA'B'}$. Thật vậy, có duy nhất một đường thẳng qua M cắt Ox, Oy ở A, B sao cho M là trung điểm của AB nên

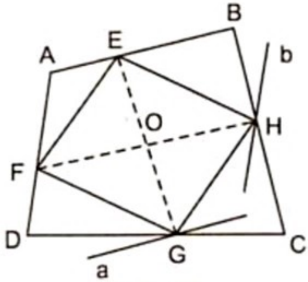
MA', MB' không bằng nhau. Giả sử MA' > MB' ; trên tia MA' ta lấy ME = MB' thì $S_{MBB'} = S_{MAE} < S_{MAA'}$.

**60.** Chẳng hạn cần dựng $\Delta ABC$ biết đỉnh A, trọng tâm G và các đường thẳng $d_1$, $d_2$ sao cho $B \in d_1$, $C \in d_2$ (h.105). Trước hết ta dựng trung điểm M của BC. Chú ý rằng B và C đối xứng với nhau qua M nên C là giao điểm của $d_2$ và $d'_1$ ($d'_1$ là đường thẳng đối xứng với $d_1$ qua M).



*Hình 105*

**61.** Chẳng hạn cần dựng hình bình hành EFGH có tâm O, $E \in AB$, $F \in AD$, $G \in CD$, $H \in BC$ (h.106). G là giao điểm của CD và đường thẳng a đối xứng với AB qua O. H là giao điểm của BC và đường thẳng b đối xứng với AD qua O.



*Hình 106*

*Biện luận :*

– Nếu ABCD là hình bình hành thì bài toán có vô số nghiệm hình (khi O là tâm của hình bình hành) hoặc không có nghiệm hình (khi O không là tâm của hình bình hành).

– Nếu ABCD là hình thang mà không là hình bình hành thì bài toán có vô số nghiệm hình (khi O cách đều hai đáy) hoặc không có nghiệm hình (khi không cách đều hai đáy).

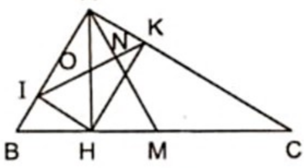
– Còn lại : một nghiệm hình.

## §7. Hình chữ nhật

**62.** (h.107) Gọi O là giao điểm của AH và IK, N là giao điểm của AM và IK. Ta có $\widehat{MAK} = \widehat{MCK}$, $\widehat{OKA} = \widehat{OAK}$ nên

$$\widehat{MAK} + \widehat{OKA} = \widehat{MCK} + \widehat{OAK} = 90^{\circ}$$

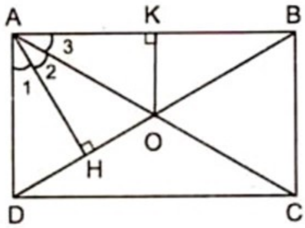
do đó $AM \perp IK$.



*Hình 107*

**63.** (h.108) Kẻ OK ⊥ AB. Hãy chứng minh rằng

$$DH = HO = OK.$$

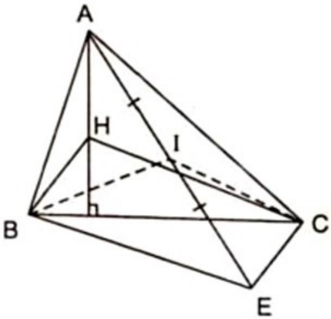


*Hình 108*

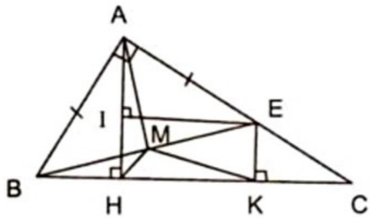
Xét $\Delta$OKB vuông có $OK = \frac{1}{2}OB$ nên $\widehat{OBK} = 30^o$, suy ra $\widehat{BAH} = 60^o$, $\widehat{BAD} = 90^o$. Hình bình hành ABCD là hình chữ nhật.

**64.** (h.109) I là giao điểm các đường trung trực của $\Delta$ABC nên IA = IB = IC. Ta lại có IA = IE nên IA = IB = IC = IE.

Hãy chứng minh AC ⊥ CE để suy ra BH // CE. Tương tự, CH // BE. Do đó BHCE là hình bình hành.



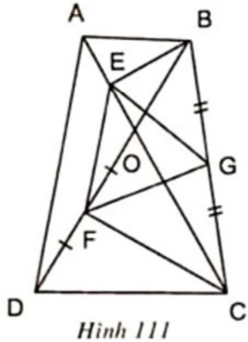
*Hình 109*



*Hình 110*

**65.** (h.110) Kẻ EK ⊥ BC, EI ⊥ AH. AM = KM vì chúng là các đường trung tuyến ứng với cùng một cạnh huyền của hai tam giác vuông. AH = KH vì cùng bằng EI.

$\Delta AHM = \Delta KHM$ (c.c.c) nên $\widehat{AHM} = \widehat{KHM}$. Suy ra HM là tia phân giác của góc AHC.

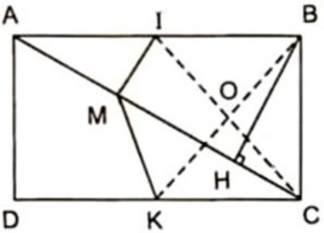


*Hình 111*

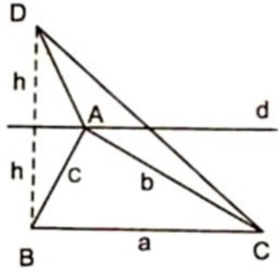
**66.** (h.111) Các tam giác OCD, OAB là tam giác đều. Sử dụng tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền, tính chất đường trung bình của tam giác, tính chất cạnh bên hình thang cân, ta chứng minh được $\Delta$EFG là tam giác đều.

**67.** (h.112) a) BIKC là hình chữ nhật nên O là trung điểm của IC và BK. Xét $\Delta$IMC vuông, ta có $MO = \frac{1}{2}IC$.

b) $\Delta MBK$ có $MO = \frac{1}{2}IC = \frac{1}{2}BK$ nên $\widehat{BMK} = 90^o$.



*Hình 112*



*Hình 113*

**68.** Xét $\Delta ABC$ có $BA = a$, $AC = b$, $AB = c$ (h.113)

a) Qua A kẻ đường thẳng d song song với BC. Gọi D là điểm đối xứng với B qua d. Ta có $BD = 2h$. Tam giác DBC vuông tại B nên

$$BD^2 + BC^2 = CD^2 \le (b + c)^2.$$

Do đó $$4h^2 + a^2 \le (b + c)^2. \quad (1)$$

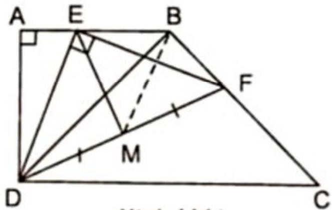
b) Từ (1) suy ra $4h^2 \le (b + c)^2 - a^2 = (b + c + a)(b + c - a) = 4p(p - a)$.

Do đó $h^2 \le p(p - a)$.

c) Cộng từng vế các bất đẳng thức $h^2 \le p(p - a)$, $m^2 \le p(p - b)$, $n^2 \le p(p - c)$.

**69.** (h.114) Dễ thấy $\widehat{DBC} = 90^o$. Gọi M là trung điểm của DF. Theo tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông, ta có

$$EM = BM \text{ (cùng bằng } \frac{DF}{2}\text{)}.$$



*Hình 114*

Xét tứ giác MEBF, ta có

$$\widehat{EBF} = 135^o, \ \widehat{MEB} + \widehat{MFB} = \widehat{MBE} + \widehat{MBF} = \widehat{EBF} = 135^o$$

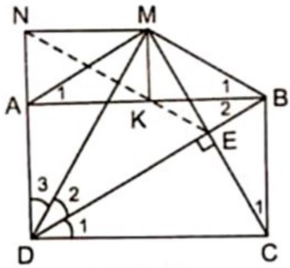
nên $\widehat{EMF} = 360^o - 2.135^o = 90^o$.

$\Delta DEF$ có đường cao EM là đường trung tuyến nên $ED = EF$.

**70.** (h.115) a) Dễ thấy $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 = \widehat{D}_3 = 30^o$, $\widehat{C}_1 = 30^o$, $\widehat{B}_2 = 30^o$.

$\Delta BMC$ có đường cao là đường trung tuyến nên là tam giác cân, suy ra $\widehat{MBC} = 120^o$, do đó $\widehat{B}_1 = 30^o$.

MK là đường trung trực của CD nên là trục đối xứng của hình chữ nhật, do đó AM = BM. Suy ra $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 = 30^o$.



*Hình 115*

Tứ giác AMBD có AM // BD (vì $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_2 = 30^o$) và $\widehat{ADB} = \widehat{MBD} = 60^o$ nên là hình thang cân.

b) M thuộc tia phân giác của góc NDE nên MN = ME.

$\Delta NME$ cân có $\widehat{NME} = 120^o$ nên $\widehat{MNE} = 30^o$. (1)

Ta lại có MNAK là hình chữ nhật nên $\widehat{MNK} = \widehat{A}_1 = 30^o$. (2)

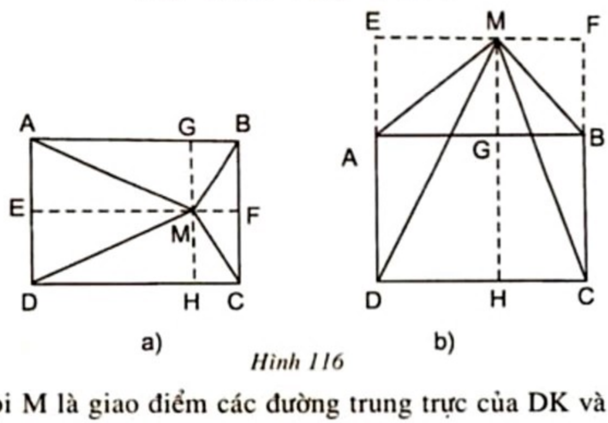
Từ (1) và (2) suy ra N, K, E thẳng hàng.

**71.** a) Kẻ $ME \perp AD$, $MF \perp BC$, $MG \perp AB$, $MH \perp CD$ (h.116a).

$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ vì cùng bằng $ME^2 + MG^2 + MF^2 + MH^2$.

b) Kết quả không thay đổi. Bạn đọc tự chứng minh. Chẳng hạn như trên hình 116b, ta có $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ vì cùng bằng

$$ME^2 + AE^2 + MF^2 + CF^2.$$



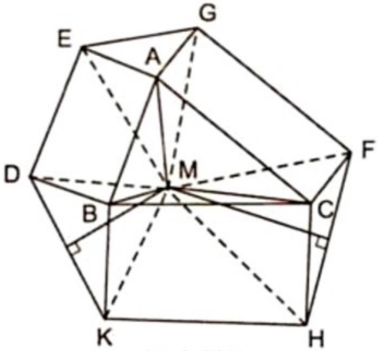
*Hình 116*

**72.** (h.117) Gọi M là giao điểm các đường trung trực của DK và FH. Theo kết quả ở bài 71 ta có

$$MA^2 + MD^2 = ME^2 + MB^2,$$

$$MB^2 + MH^2 = MK^2 + MC^2,$$

$$MC^2 + MG^2 = MF^2 + MA^2.$$



*Hình 117*

Cộng từng vế ba đẳng thức trên rồi rút gọn, ta được

$$MD^2 + MH^2 + MG^2 = ME^2 + MK^2 + MF^2.$$

Do $MD^2 = MK^2$, MH = MF nên

$$MG^2 = ME^2,$$

suy ra MG = ME, tức là đường trung trực của EG cũng đi qua M.

## §9. Hình thoi

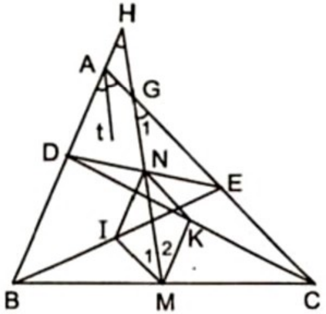
**73.** a) Hình chữ nhật ;

b) Hình thoi.

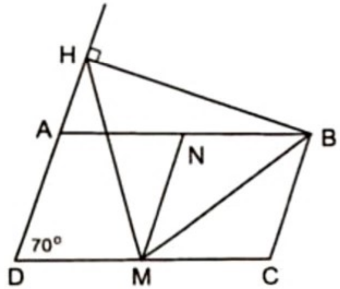
**74.** (h.118)

a) MINK là hình thoi.

b) Gọi G, H theo thứ tự là giao điểm của MN với AC, AB. Ta chứng minh được $\widehat{M}_1 = \widehat{G}_1$, $\widehat{M}_2 = \widehat{H}$ rồi chứng minh MG // At và suy ra IK ⊥ At.



*Hình 118*



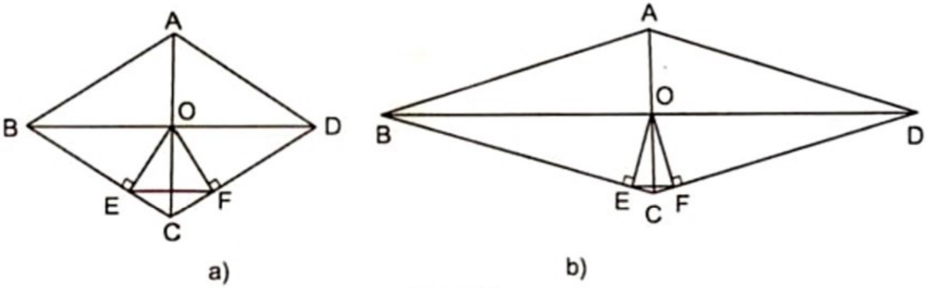
*Hình 119*

**75.** (h.119) Gọi N là trung điểm của AB, hãy chứng minh MN là đường trung trực của HB. *Đáp số :* $\widehat{HMC} = 105^{\circ}$.

**76.** Xét hai trường hợp :

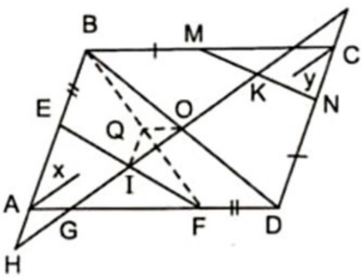
a) (h. 120a) $EF = \dfrac{1}{4}BD$ thì $\widehat{C} = \widehat{A} = 120^o$, $\widehat{B} = \widehat{D} = 60^o$.

b) (h.120b) $EF = \dfrac{1}{4}AC$ thì $\widehat{C} = \widehat{A} = 150^o$, $\widehat{B} = \widehat{D} = 30^o$.




*Hình 120*

**77.** (h.121) a) Trước hết, ta chứng minh rằng đường thẳng OI tạo với AB và AD các góc bằng nhau. Thật vậy, gọi Q là trung điểm của BF, do BE = DF nên QI = QO.



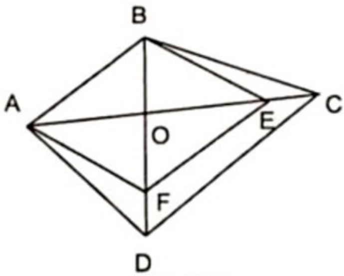

*Hình 121*

Nếu ABCD là hình thoi thì I, O, A thẳng hàng. Tương tự, K, O, C thẳng hàng. Do đó năm điểm A, I, O, K, C thẳng hàng.

Nếu ABCD không là hình thoi, ta có $\Delta QIO$ cân. Gọi G, H là giao điểm của OI với AD, AB. Ta có $\widehat{O} = \widehat{I}$ nên $\widehat{G} = \widehat{H}$, do đó HG song song với tia phân giác Ax của góc A. Tương tự, OK song song với tia phân giác Cy của góc C. Nhưng Ax // Cy, do đó I, O, K thẳng hàng.

b) Trong trường hợp ABCD là hình thoi thì năm điểm A, I, O, K, C thẳng hàng.

**78.** (h.122) Giả sử $OC \geq OA$, $OD \geq OB$. Trên đoạn thẳng OC lấy điểm E, trên đoạn thẳng OD lấy điểm F sao cho OE = OA, OF = OB. Tứ giác ABEF là hình bình hành, chu vi $\Delta OAB$ bằng chu vi $\Delta OEF$.




*Hình 122*

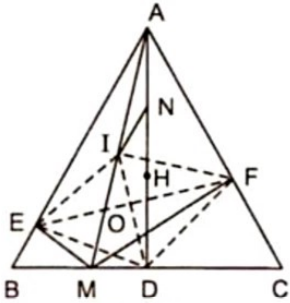
Theo đề bài, chu vi $\Delta OAB$ bằng chu vi $\Delta OCD$ nên chu vi các tam giác OEF và

OCD bằng nhau, tức là EF = EC + CD + DF. Điều này chỉ xảy ra khi C trùng E và D trùng F. Vậy ABCD là hình bình hành.

Sau đó chứng minh tiếp ABCD là hình thoi bằng cách sử dụng điều kiện chu vi $\Delta OAB$ bằng chu vi $\Delta OBC$ ở đề bài.

**79.** (h.123) a) Dễ dàng chứng minh được $\Delta DIE$ đều ($DI = EI = \frac{1}{2}AM$, $\widehat{DIE} = 2\widehat{DAE} = 60^0$). Tương tự, $\Delta DIF$ đều. Vậy DEIF là hình thoi.

b) Gọi O là giao điểm của ID và EF. Cần chứng minh M, O, H thẳng hàng. Gọi N là trung điểm của AH. Chứng minh OH và MH cùng song song với IN.



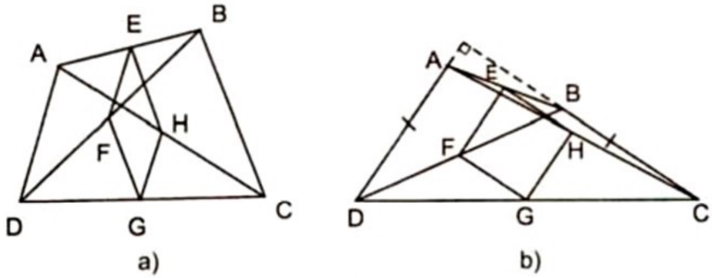
*Hình 123*

## §10. Hình vuông

**80.** Tứ giác EFGH có EF // GH, EF = GH (vì EF, GH cùng song song và bằng AD) nên là hình bình hành (h.124a).

Ta cũng có EH // FG // BC, $EH = FG = \frac{BC}{2}$.

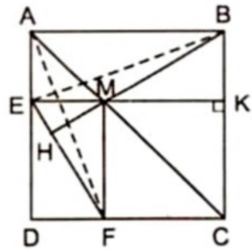
Điều kiện để hình bình hành EFGH trở thành hình vuông là : $EF \perp EH$ và $EF = EH \Leftrightarrow AD \perp BC$ và AD = BC (h.124b).



*Hình 124*

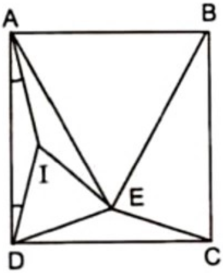
**81.** (h.125) a) Gọi K là giao điểm của EM và BC. Ta có $\Delta EMF = \Delta BKM$ (g.c.g) nên $\widehat{MFE} = \widehat{KMB}$.
Gọi H là giao điểm của BM và EF. Dễ dàng chứng minh được $BH \perp EF$.

b) $\Delta ADF = \Delta BAE$ (c.g.c), từ đó chứng minh được $AF \perp BE$. Tương tự, $CE \perp BF$. Ta có BM, AF, CE là các đường cao của $\Delta BEF$ nên chúng đồng quy.

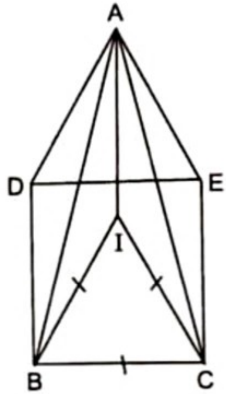


*Hình 125*

**82.** (h.126) Vẽ điểm I nằm trong hình vuông sao cho $\Delta IAD$ cân tại I có góc ở đáy bằng $15^o$. Ta chứng minh được $\Delta DIE$ đều, $\Delta IAE = \Delta IAD$ (c.g.c) nên $AE = AD$. Tương tự, $BE = BC$. Do đó $AE = BE = AB$.



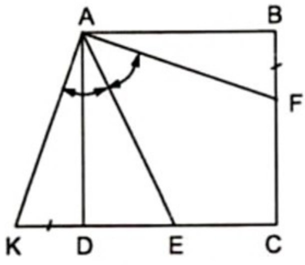

*Hình 126*




*Hình 127*

**83.** (h.127) Vẽ tam giác đều BIC vào trong hình vuông rồi chứng minh rằng DE, AD, AE cùng bằng AI, do đó $\Delta ADE$ đều.

**84.** (h.128) Trên tia đối của tia DC lấy $DK = BF$, $\Delta ADK = \Delta ABF$ (c.g.c) nên $AK = AF$, $\widehat{KAF} = 90^o$.




*Hình 128*

a) Chứng minh mệnh đề "$\widehat{EAF} = 45^o$ thì chu vi CEF bằng nửa chu vi hình vuông" (tương ứng với từ "khi") :

$$\widehat{EAF} = 45^o \Rightarrow \widehat{EAK} = 45^o$$

$$\Rightarrow \Delta EAK = \Delta EAF \text{ (c.g.c)} \Rightarrow EK = EF.$$

Do đó chu vi $CEF = CE + CF + EF = CE + CF + EK = CE + CF + ED + DK$

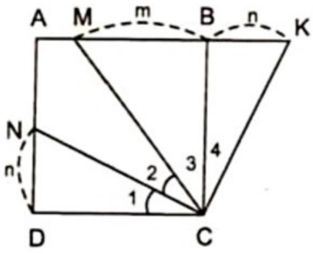
$= CE + CF + ED + FB$ (bằng nửa chu vi hình vuông ABCD).

b) Chứng minh mệnh đề "chu vi CEF bằng nửa chu vi hình vuông thì $\widehat{EAF} = 45^o$" (tương ứng với từ "chỉ khi") :

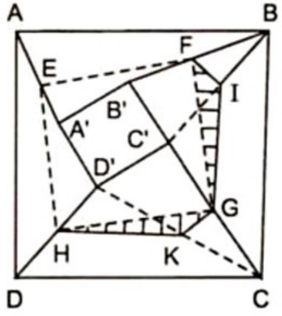
$$CE + CF + EF = CB + CD \Rightarrow EF = ED + BF \Rightarrow EF = ED + DK = EK,$$

$$\Delta EAK = \Delta EAF \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \widehat{EAK} = \widehat{EAF} \Rightarrow \widehat{EAF} = 45^o.$$

**85.** (h.129) Trên tia đối của tia BA lấy điểm K sao cho BK = DN = n. Hãy chứng minh ΔMCK cân tại M. Từ đó CM = m + n.



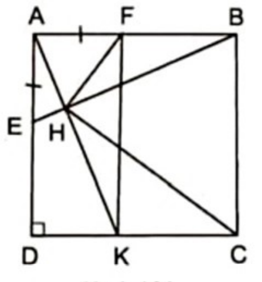

*Hình 129*



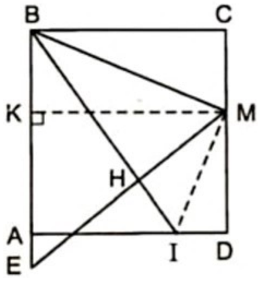

*Hình 130*

**86.** (h.130). Gọi E, F, G, H thứ tự là trung điểm của AA', BB', CC', DD'. Gọi I, K là trung điểm của BC', CD'. Hãy chứng minh ΔFIG = ΔGKH (c.g.c) để suy ra GF = GH, GF ⊥ GH.

**87.** (h.131) Gọi K là giao điểm của AH và CD thì BFKC là hình chữ nhật. Giải tương tự như bài 67. *Đáp số :* $\widehat{CHF} = 90^o$.




*Hình 131*




*Hình 132*

**88.** (h.132) Vẽ MH ⊥ BI, MH cắt AB ở E. Ta có

$$ME = 2MH \leq 2MI. \qquad (1)$$

Ta sẽ chứng minh rằng BI = ME.

Thật vậy, vẽ MK ⊥ AB, ΔMKE = ΔBAI (g.c.g) nên ME = BI. (2)

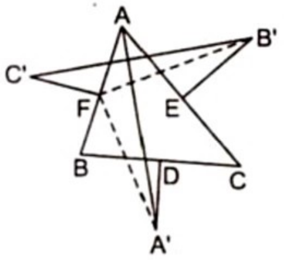
Từ (1) và (2) suy ra BI ≤ 2MI.

**89.** (h.133) Xét ΔABC có D, E, F là trung điểm của các cạnh BC, AC, AB và A', B', C' là tâm các hình vuông dựng trên ba cạnh ấy.

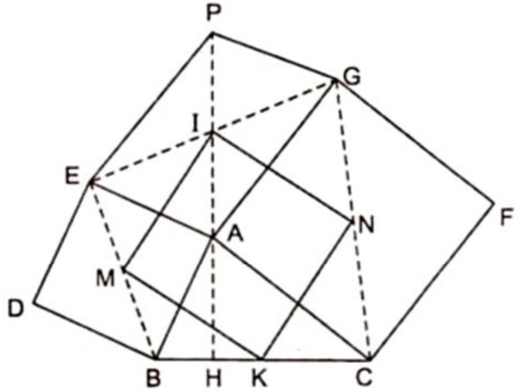
a) Trước hết chứng minh $\Delta A'DF = \Delta FEB'$ (c.g.c), từ đó chứng minh được $FA' = FB'$ và $FA' \perp FB'$.

b) $\Delta AFA' = \Delta C'FB'$ (c.g.c).

Từ đó chứng minh được $B'C' = AA'$ và $B'C' \perp AA'$.




*Hình 133*




*Hình 134*

**90.** (h.134)

a) *Cách 1.* Theo bài 89a các tam giác KMN, IMN vuông cân nên KMIN là hình vuông.

*Cách 2.* $\Delta AEC = \Delta ABG$ (c.g.c), từ đó $EC = BG$ và $EC \perp BG$, do đó $MK = KN$ và $MK \perp KN$. Tứ giác KMIN là hình bình hành có $MK = KN$ và $MK \perp KN$ nên là hình vuông.

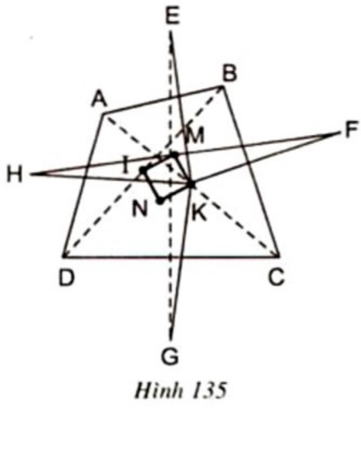
b) Gọi P là điểm đối xứng với A qua I thì AEPG là hình bình hành. Lần lượt chứng minh $PA = BC$, $PA \perp BC$. Từ đó suy ra I chuyển động trên đường thẳng song song với BC, cách BC một khoảng bằng $h + \frac{1}{2}BC$.

**91.** (h.135) a) Gọi K là trung điểm của AC. Theo bài 89a, ta có

$KE = KF$, $KE \perp KF$, $KH = KG$, $KH \perp KG$.

$\Delta FKH = \Delta EKG$ (c.g.c).

Từ đó suy ra được $FH = EG$, $FH \perp EG$.



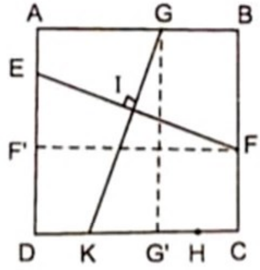

*Hình 135*

b) Gọi M, N thứ tự là trung điểm của HF, EG thì KM, KN là các đường trung tuyến tương ứng của hai tam giác trên, do đó KM = KN, KM ⊥ KN. Vậy ΔMKN vuông cân tại K.

Gọi I là trung điểm của BD, chứng minh tương tự, ΔIMN vuông cân tại I. Do đó IMKN là hình vuông.

**92.** (h.136) *Phân tích.* Qua G, vẽ GI ⊥ EF, cắt CD ở K. Ta có ΔGG'K = ΔFF'E nên GK = EF. Ta dựng được HK là đường thẳng chứa cạnh hình vuông.

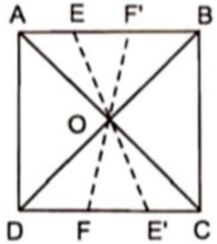
*Biện luận.* Qua G, có thể vẽ GI ⊥ EF, hoặc GI ⊥ EH, hoặc GI ⊥ HF. Với mỗi cách trong ba cách trên, có hai cách chọn điểm K (chẳng hạn trên đường thẳng GI ⊥ EF, có hai điểm K và K' sao cho GK = GK' = EF).



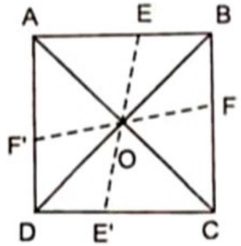
*Hình 136*

Do đó bài toán có 3 × 2 = 6 (nghiệm hình). Riêng trường hợp một trong hai điểm K hoặc K' trùng với điểm thứ tư, bài toán có vô số nghiệm hình.

**93.** a) (h.137) Dựng E' đối xứng với E qua O, dựng F' đối xứng với F qua O, ta xác định được các đường thẳng AB và CD.



*Hình 137*



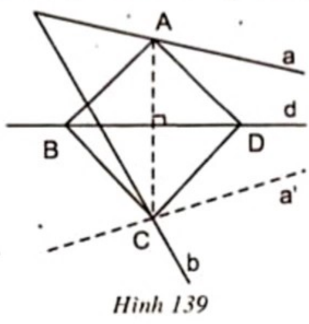
*Hình 138*

b) (h.138) Dựng E' đối xứng với E qua O, dựng F' đối xứng với F qua O. Đưa về bài toán dựng hình vuông biết bốn điểm thuộc bốn đường thẳng chứa cạnh hình vuông (bài 92).

**94.** (h.139) C đối xứng với A qua d, mà A thuộc a nên C thuộc đường thẳng a' đối xứng với a qua d. Mặt khác C thuộc b.

*Biện luận :*

– Nếu d cắt các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng a và b, hoặc đường thẳng song song cách đều a và b : một nghiệm.



*Hình 139*

– Nếu d song song (hoặc trùng) với một đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng a và b hoặc đường thẳng song song cách đều a và b : không có nghiệm hình (hoặc vô số nghiệm hình).

## *Chương II* - ĐA GIÁC. DIỆN TÍCH CỦA ĐA GIÁC

### §11. Đa giác

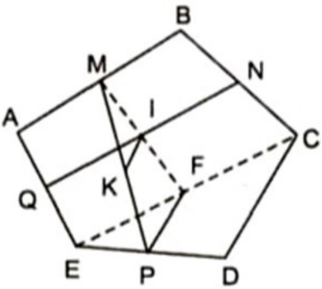
**95.** Gọi số cạnh của đa giác là n.

a) Ta có $\dfrac{n(n-3)}{2} = 2n$. Ta tìm được $n = 7$.

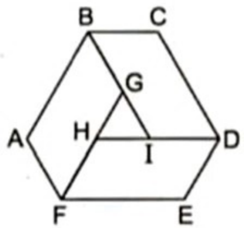
b) Ta có $(n-2).2v = 4v$. Ta tìm được $n = 4$.

c) Giải tương tự ví dụ 17. *Đáp số :* $n = 17$.

**96.** (h.140) Vẽ thêm F là trung điểm của CE. Chú ý rằng MNFQ là hình bình hành nên ba điểm M, I, F thẳng hàng.



*Hình 140*



*Hình 141*

**97.** Vẽ các tia phân giác của các góc B, D, F, chúng cắt nhau tạo thành $\Delta GHI$ như hình 141. Chứng minh rằng $\Delta GHI$ đều.

**98.** Tổng các góc trong của lục giác bằng $(6-2).180^o = 720^o$.

Đặt $\widehat{A} - \widehat{B} = \widehat{B} - \widehat{C} = \widehat{C} - \widehat{D} = \widehat{D} - \widehat{E} = \widehat{E} - \widehat{F} = \alpha$, ta có

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} + \widehat{E} + \widehat{F} = 720^o$$

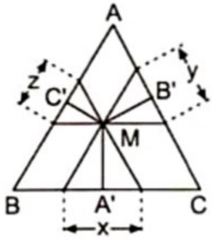
$$\Rightarrow \widehat{A} + (\widehat{A} - \alpha) + (\widehat{A} - 2\alpha) + (\widehat{A} - 3\alpha) + (\widehat{A} - 4\alpha) + (\widehat{A} - 5\alpha) = 720^o$$

$$\Rightarrow 6\widehat{A} - 15\alpha = 720^o \Rightarrow 2\widehat{A} = 5\alpha + 240^o.$$

Do $\widehat{A}$ là số tự nhiên và chia hết cho 5 nên $\widehat{A} \le 175^o$.

Với $\widehat{A} = 175^o$ thì $\alpha = 22^o$. Giá trị lớn nhất của $\widehat{A}$ là $175^o$.

**99.** (h.142) Qua M vẽ các đường thẳng song song với các cạnh của $\Delta ABC$, chúng chia mỗi cạnh thành ba đoạn thẳng x, y, z như hình vẽ. Ta có :



*Hình 142*

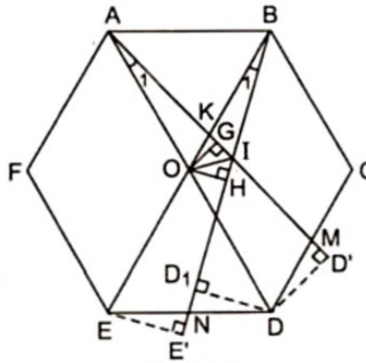
$$MA' + MB' + MC' = \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2} + \frac{z\sqrt{3}}{2} =$$

$$= (x + y + z)\frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad (1)$$

$$AB' + BC' + CA' = (z + \frac{y}{2}) + (x + \frac{z}{2}) + (y + \frac{x}{2}) = \frac{3}{2}(x + y + z). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra tỉ số phải tìm bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

**100.** (h.143) a) $\Delta ADM = \Delta BEN$ (c.g.c) nên $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$. Gọi O là giao điểm của AD và BE, K là giao điểm của AM và BE. Ta có $\widehat{BIK} = \widehat{AOK} = 60^o$. Vậy $\widehat{AIB} = 60^o$.



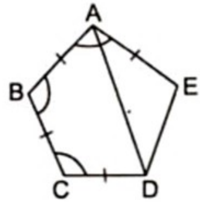
*Hình 143*

b) Vẽ $OG \perp AM$, $OH \perp BN$. Ta có $\Delta OGA = \Delta OHB$ (cạnh huyền - góc nhọn) nên OG = OH, suy ra IO là tia phân giác của góc AIN. (1)

Vẽ $EE' \perp BN$, $DD' \perp AM$, $DD_1 \perp BN$. Ta có EE' = DD' (bằng hai lần các đoạn thẳng bằng nhau OH, OG), mà $EE' = DD_1$ nên $DD_1 = DD'$, suy ra ID là tia phân giác của góc MIN. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{OID} = 90^o$.

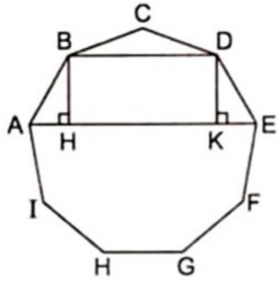
**101.** (h.144) Trước hết, xét tứ giác ABCD, ta có $\widehat{B} = \widehat{C}$, AB = CD nên ABCD là hình thang cân (bạn đọc tự chứng minh), suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{CDA}$, do đó $\widehat{BAE} = \widehat{CDE}$ (tức là $\widehat{A} = \widehat{D}$).



*Hình 144*

Chứng minh tương tự đối với tứ giác ABCE, ta được $\widehat{C} = \widehat{E}$. Vậy $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = \widehat{E}$.

**102.** Gọi ABCDEFGHI là đa giác đều 9 cạnh, AE là đường chéo lớn nhất, BD là đường chéo nhỏ nhất, ABDE là hình thang cân (h.145). Vẽ BH $\perp$ AE, DK $\perp$AE, $\widehat{ABC} = 140^{\circ}$ nên $\widehat{ABH} = 30^{\circ}$. Ta có $AH = \dfrac{AB}{2}$ nên AE – BD = AB.



*Hình 145*

**103.** a) Giải điều kiện : $360 \,\vdots\, \dfrac{(n-2)180}{n}$.

*Đáp số :* n bằng 6, 4, 3.

b) Có, chẳng hạn ngũ giác là nửa của lục giác đều (xem h.146).


*Hình 146*

c) $\dfrac{(n-2)180}{n}$ là số tự nhiên

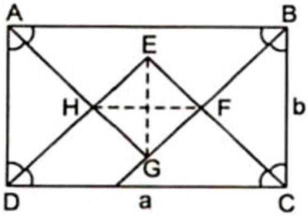
$\Rightarrow 180 - \dfrac{360}{n}$ là số tự nhiên $\Rightarrow 360 \,\vdots\, n$.

Phân tích 360 ra thừa số nguyên tố : $360 = 2^3.3^2.5$.

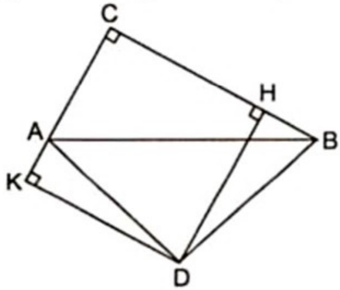
Số 360 có 24 ước tự nhiên. Do $n \geq 3$ nên ta loại các số 1 và 2, còn lại 22 ước. Vậy câu trả lời B là đúng.

## §12. Diện tích của đa giác

**104.** (h.147) EFGH là hình vuông có đường chéo bằng a – b, diện tích bằng $\dfrac{1}{2}(a-b)^2$.



*Hình 147*



*Hình 148*

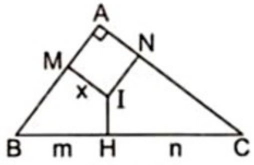
**105.** (h.148) DHCK là hình vuông có cạnh bằng $\dfrac{1}{2}(a+b)$, diện tích bằng $\dfrac{1}{4}(a+b)^2$.

**106.** Ta có $(b + c + a)(b + c - a) = (b + c)^2 - a^2 = b^2 + 2bc + c^2 - a^2 = 2bc$.

Mặt khác $S = \frac{1}{2}bc$ nên $4S = 2bc$.

Vậy $4S = (b + c + a)(b + c - a)$.

**107.** (h.149) Gọi H, M, N theo thứ tự là hình chiếu của I trên BC, AB, AC. Đặt $IH = IM = IN = x$. Ta có $AM = AN = x$, $BM = BH = m$, $CN = CH = n$. Đặt $S_{ABC} = S$ ta có :




*Hình 149*

$$2S = AB.\,AC = (x + m)(x + n)$$

$$= x^2 + xm + xn + mn \qquad (1)$$

Theo định lí Py-ta-go :

$$(x + m)^2 + (x + n)^2 = (m + n)^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2xm + 2xn + m^2 + n^2 = m^2 + 2mn + n^2$$

$$\Rightarrow x^2 + xm + xn = mn. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $2S = 2mn$ nên $S = mn$.

**108.** Vẽ MM', BB', CC' vuông góc với OA. Xét hai trường hợp :

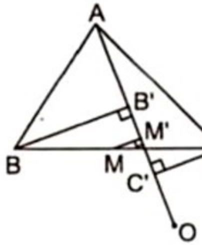
1) B và C nằm khác phía đối với OA.

a) Nếu $BB' \geq CC'$ (h.150) thì $MM' = \frac{BB' - CC'}{2}$ nên

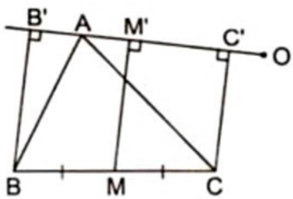
$$MM'\,.\,OA = \frac{1}{2}BB'.OA - \frac{1}{2}CC'.OA$$

Do đó $2S_{OAM} = S_{OAB} - S_{OAC}$.

b) Nếu $BB' < CC'$, tương tự $S_{OAM} = S_{OAC} - S_{OAB}$.




*Hình 150*




*Hình 151*

2) B và C nằm cùng phía đối với OA (h.151).

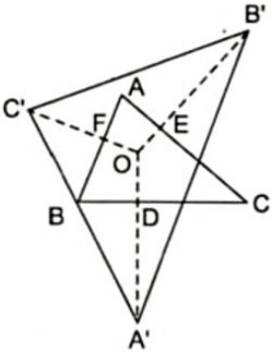
Ta có $MM' = \dfrac{BB' + CC'}{2}$ nên $MM' . OA = \dfrac{1}{2}BB'.OA + \dfrac{1}{2}CC'.OA$.

Do đó $2S_{OAM} = S_{OAB} + S_{OAC}$.

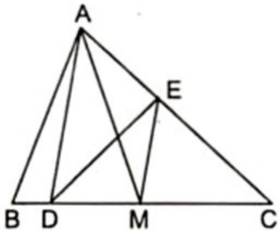
**109.** (h.152)

a) $\Delta A'OB'$ và $\Delta ABC$ có hai cặp cạnh bằng nhau, cặp góc xen giữa bù nhau nên diện tích bằng nhau (dễ chứng minh). Điểm O nằm bên trong $\Delta DEF$ nên nằm bên trong $\Delta A'B'C'$. Vậy $S_{A'B'C'} = 3S_{ABC}$.

b) O là trọng tâm của $\Delta A'B'C'$.




*Hình 152*




*Hình 153*

**110.** (h.153) $S_{DEC} = S_{DEM} + S_{EMC} = S_{AEM} + S_{EMC} = S_{AMC} = \dfrac{1}{2}S_{ABC}$.

Vậy câu trả lời B là đúng.

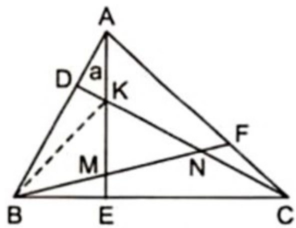
**111.** Gọi tam giác tạo thành là MNK như hình 154.

Đặt $S_{AKD} = a$ thì

$$S_{AKB} = 3a, S_{AKC} = 2S_{AKB} = 6a \qquad (1)$$

(vì $S_{AEC} = 2S_{AEB}, S_{KEC} = 2S_{KEB}$).

Suy ra $\quad S_{ACD} = 7a, S_{ABC} = 21a. \qquad (2)$




*Hình 154*

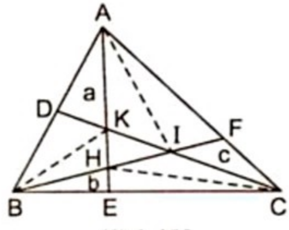
Từ (1) và (2) suy ra

$$S_{AKC} = \frac{6}{21}S_{ABC} = \frac{2}{7}S_{ABC}.$$

Tương tự, $$S_{BMA} = S_{CNB} = \frac{2}{7}S_{ABC}.$$

Do đó $$S_{AKC} + S_{BMA} + S_{CNB} = \frac{6}{7}S_{ABC} \Rightarrow S_{MNK} = \frac{1}{7}S_{ABC}.$$

**112.** (h.155) Gọi H, I, K thứ tự là giao điểm của AE và BF, BF và CD, CD và AE.



*Hình 155*

Gọi $S_{AKD} = a$ (1)

thì $S_{AKB} = 2a$.

Ta có $S_{AKC} = 2S_{AKB}$ (chung đáy AK, đường cao kẻ từ C gấp đôi đường cao kẻ từ B) = 4a. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$S_{AKC} = \frac{4}{5}S_{ACD} = \frac{2}{5}S. \quad (3)$$

Bằng phương pháp tương tự như trên, ta tính $S_{BHA}$ và $S_{CIB}$.

Gọi $S_{BHE} = b$ thì $S_{BHC} = 3b$, $S_{BHA} = 3S_{BHC} = 9b$ (chung đáy BH, đường cao kẻ từ A gấp ba đường cao kẻ từ C).

Suy ra $$S_{BHA} = \frac{9}{10}S_{ABE} = \frac{3}{10}S. \quad (4)$$

Gọi $S_{CIF} = c$ thì $S_{CIA} = 4c$, $S_{CIB} = S_{CIA} = 4c$ (chung đáy CI, đường cao kẻ từ B bằng đường cao kẻ từ A).

Suy ra $$S_{CIB} = \frac{4}{5}S_{BCF} = \frac{1}{5}S. \quad (5)$$

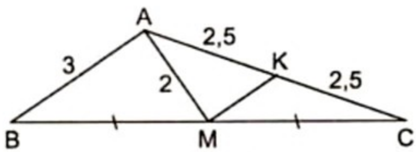
Từ (3), (4), (5) suy ra

$$S_{AKC} + S_{BHA} + S_{CIB} = \frac{2}{5}S + \frac{3}{10}S + \frac{1}{5}S = \frac{9}{10}S.$$

Do đó $$S_{HIK} = S - \frac{9}{10}S = \frac{1}{10}S.$$

**113.** (h.156) Gọi K là trung điểm của AC. Ta chứng minh được $\Delta AMK$ thoả mãn định lý Py-ta-go đảo nên

$$\widehat{AMK} = 90^o.$$



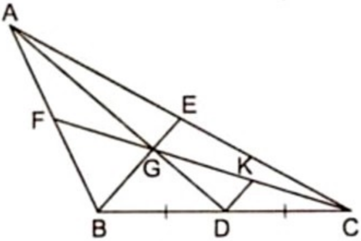
*Hình 156*

Ta tính được $S_{AMK} = 1,5 \text{ cm}^2$.

Từ đó $S_{ABC} = 6 \text{ cm}^2$.

**114.** (h.157)

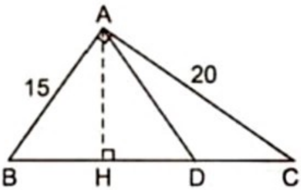
Gọi G là trọng tâm của $\Delta ABC$ có đường trung tuyến $AD = 36$ cm. Vẽ K là trung điểm của GC. Chú ý rằng $\Delta DGK$ vuông tại D.



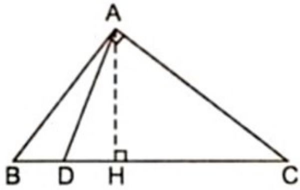
*Hình 157*

*Đáp số :* $S_{ABC} = 360 \text{ cm}^2$.

**115.** a) (h.158) Vẽ $AH \perp BC$. Ta tính được $BC = 25$ cm, $AH = 12$ cm, $BH = 9$ cm. Vậy $BD = 18$ cm.



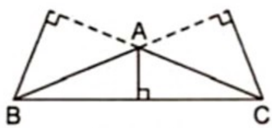
*Hình 158*



*Hình 159*

b) (h.159) *Đáp số :* $AD = 13$ cm.

**116.** Tam giác cân có đáy bằng 8000 cm, đường cao ứng với đáy bằng $\frac{1}{2}$ cm (h.160). Diện tích tam giác bằng :



*Hình 160*

$$\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.8000 = 2000 \ (\text{cm}^2),$$

các đường cao đều nhỏ hơn 1 cm.

**117.** Ta chứng minh được $2S \leq ab$, $2S \leq ac$, $2S \leq bc$ nên

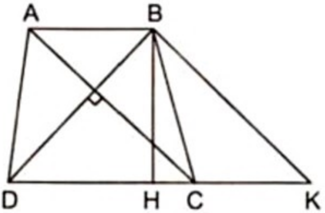
$$6S \leq ab + bc + ca. \qquad (1)$$

Ta cũng chứng minh được

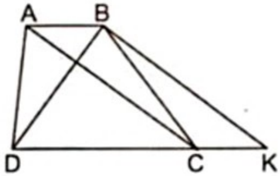
$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $6S \leq a^2 + b^2 + c^2$.

**118.** (h.161) Xét hình thang cân ABCD có AB // CD, AC $\perp$ BD. Qua B vẽ đường thẳng song song với AC, cắt DC ở K. Chứng minh rằng $\Delta$BDK vuông cân. *Đáp số* : $h^2$.




*Hình 161*

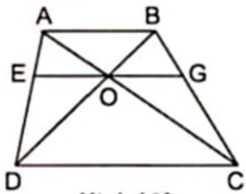



*Hình 162*

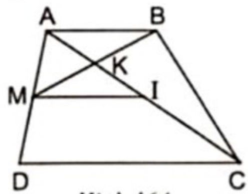
**119.** (h.162) Xét hình thang ABCD có AB // CD, BD = 9 m, AC = 12 m, AB + CD = 15 m. Qua B vẽ đường thẳng song song với AC, cắt DC ở K. Chứng minh rằng $\Delta$BDK vuông tại B. *Đáp số* : 54 $m^2$.

**120.** (h.163) Trước hết chứng minh rằng $S_{AOD} = S_{BOC}$. Do đó

$\frac{1}{2}OE \cdot h = \frac{1}{2}OG \cdot h$ (h là chiều cao hình thang) suy ra OE = OG.




*Hình 163*



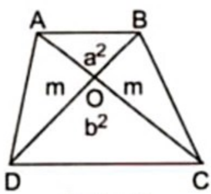

*Hình 164*

**121.** (h.164). Gọi I là trung điểm của AC.

Ta có $MI = \frac{1}{2}DC = AB$,

$$S_{ABK} = \frac{1}{2}S_{ABM} = \frac{1}{2}S_{AMI} = \frac{1}{8}S_{ADC}.$$

Ta lại có $S_{ADC} = \frac{2}{3}S$. Suy ra $S_{ABK} = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3}S = \frac{1}{12}S$.




*Hình 165*

**122.** (h.165) Gọi $S_{AOD} = S_{BOC} = m$.

Ta có $OA : OC = S_{AOB} : S_{COB} = a^2 : m$,

$OA : OC = S_{AOD} : S_{COD} = m : b^2$.

Suy ra $\frac{a^2}{m} = \frac{m}{b^2}$ nên $m^2 = a^2b^2$, do đó m = ab.

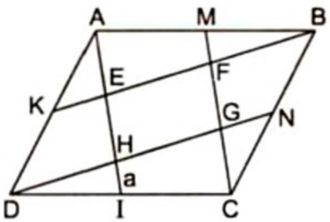
Vậy $S_{ABCD} = a^2 + b^2 + 2m = a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$.

**123.** (h.166)

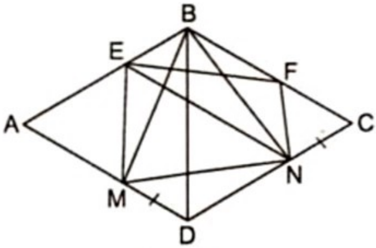
a) AMCI là hình bình hành nên AI // MC. Tương tự, KB // DN. Vậy EFGH là hình bình hành.

b) Đặt HI = a, ta tính được CG = 2a, EG = 2a, EH = 2a, AE = 2a nên $EH = \frac{2}{5}AI$.

Ta có $S_{EFGH} = \frac{2}{5}S_{AICM}$ mà $S_{AICM} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ nên $S_{EFGH} = \frac{1}{5}S_{ABCD}$.




*Hình 166*

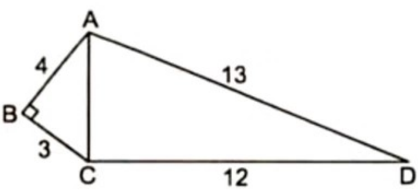



*Hình 167*

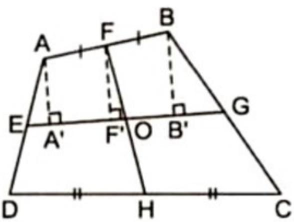
**124.** (h.167) Kẻ ME // NF // BD.

Hãy chứng minh BENF là hình thang có hai đường chéo bằng nhau để suy ra ΔCFN đều, do đó Δ CBD đều. *Đáp số* : $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

**125.** (h.168) Chú ý rằng ΔACD vuông tại C. *Đáp số* : 36 $cm^2$.




*Hình 168*




*Hình 169*

**126.** Gọi E, F, G, H là trung điểm của các cạnh của tứ giác ABCD (h.169). Trước hết chứng minh

$$S_{AOD} + S_{BOC} = S_{EFGH}. \quad (1)$$

sau đó chứng minh $\quad S_{EFGH} = \frac{1}{2}S_{ABCD}. \quad (2)$

Chứng minh (1) như sau : Vẽ AA', BB', FF' vuông góc với EG, chú ý rằng $OE = OG = \frac{1}{2}EG$, ta có

$$S_{OAE} + S_{OBG} = OE.\frac{AA'}{2} + OG.\frac{BB'}{2} = \frac{EG}{2}.\frac{AA' + BB'}{2}$$

$$= \frac{EG}{2}.FF' = S_{EFG}. \quad (3)$$

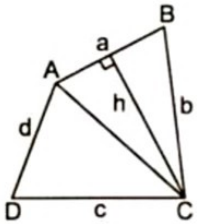
Tương tự, $\quad S_{ODE} + S_{OCG} = S_{EHG}. \quad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra (1). Chứng minh (2) dành cho bạn đọc.

*Chú ý :* Tổng quát hơn, xem bài 156a.

**127.** Có ba đáp số : $360 \text{ cm}^2$, $225 \text{ cm}^2$, $200 \text{ cm}^2$.

**128.** (h.170)



*Hình 170*

a) Gọi h là chiều cao ứng với cạnh a, ta có $S = \frac{1}{2}ah$

nên $\quad 4S = 2ah \le 2ab \le a^2 + b^2$.

Vậy $S \le (a^2 + b^2) : 4$.

Xảy ra dấu bằng $\Leftrightarrow$ h = b, a = b, $\Delta ABC$ vuông cân.

b) Theo câu a) $S_{ABC} \le (a^2 + b^2) : 4$, $S_{ADC} \le (c^2 + d^2) : 4$. Do đó

$$S \le (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) : 4.$$

Xảy ra dấu bằng $\Leftrightarrow$ $\Delta ABC$ vuông cân tại B, $\Delta ACD$ vuông cân tại D $\Leftrightarrow$ ABCD là hình vuông.

**129.** (h.170)

a) Ta có $2S_{ABC} \le ab$, $2S_{ADC} \le cd$ nên $2S \le ab + cd$ (xảy ra dấu bằng $\Leftrightarrow \widehat{B} = \widehat{D} = 90^o$). Tương tự, $2S \le bc + ad$ (xảy ra dấu bằng $\Leftrightarrow \widehat{A} = \widehat{C} = 90^o$).

Suy ra $\quad 4S \le ab + cd + bc + ad = (a + c)(b + d). \quad (1)$

Xảy ra dấu bằng $\Leftrightarrow$ ABCD là hình chữ nhật.

b) Ta sẽ chứng minh rằng

$$(a + b + c + d)^2 \geq 4(a + c)(b + d). \quad (2)$$

Thật vậy, đặt $a + c = x$, $b + d = y$, (2) $\Leftrightarrow (x + y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$.

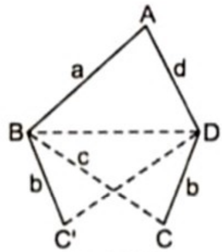
Từ (1) và (2) suy ra đ.p.c.m. Xảy ra dấu bằng $\Leftrightarrow$ ABCD là hình chữ nhật và $a + c = b + d \Leftrightarrow$ ABCD là hình vuông.

**130.** a) Trường hợp a và b là hai cạnh kề (xem bài 129a).

b) Trường hợp a và b là hai cạnh đối (h.171) : Vẽ C' đối xứng với C qua đường trung trực của BD ;

$$S_{ABCD} = S_{ABC'D}.$$

Theo câu a) : $\quad S_{ABC'D} \leq \frac{1}{2}(ab + cd)$.



*Hình 171*

Xảy ra dấu bằng $\Leftrightarrow \widehat{ABC'} = \widehat{ADC'} = 90^o$.

*Chú ý :* Điều kiện xảy ra dấu bằng ở câu a) có thể diễn đạt : ABCD là tứ giác nội tiếp trong đường tròn có đường kính AC.

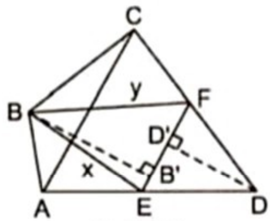
Điều kiện xảy ra dấu bằng ở câu b) có thể diễn đạt : ABC'D là tứ giác nội tiếp trong đường tròn có đường kính AC' $\Leftrightarrow$ ABCD là tứ giác nội tiếp trong đường tròn có đường kính AC' ($\widehat{ACC'} = 90^o$) $\Leftrightarrow$ ABCD là tứ giác nội tiếp có AC $\perp$ BD.

**131.** (h.172) Dễ thấy $S_{ABCD} = 2S_{BEDF}$.

Ta cần chứng minh $S_{BEDF} < \frac{a^2}{4}$,

dùng $S_{BEF}$ làm trung gian : Vẽ BB', DD' vuông góc với EF, dễ thấy BB' > DD' nên

$$S_{BEDF} < 2S_{BEF}. \quad (1)$$



*Hình 172*

Mặt khác, đặt BE = x, BF = y thì $2S_{BEF} \leq xy$, mà $xy \leq \frac{(x + y)^2}{4} = \frac{a^2}{4}$ nên

$$2S_{BEF} \leq \frac{a^2}{4}. \quad (2)$$

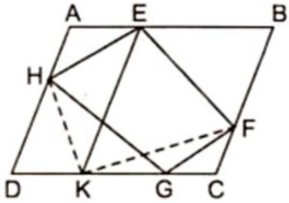
Từ (1) và (2) suy ra $S_{BEDF} < \frac{a^2}{4}$, do đó $S_{ABCD} < \frac{a^2}{2}$.

**132.** (h.173) Vẽ EK // AD. Ta có :

$$S_{EFKH} = \frac{1}{2}(S_{EBCK} + S_{EADK}) = \frac{1}{2}S_{ABCD}$$

mà $S_{EFGH} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ suy ra $S_{EFKH} = S_{EFGH}$,

do đó $S_{FKH} = S_{FGH}$ nên HF // KG.

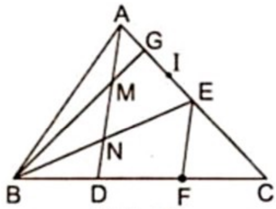


*Hình 173*

**133.** (h.174). Gọi F là trung điểm của DC thì EF // AD nên BN = NE. Gọi I là trung điểm của GE thì NI // MG nên AM = MN. Ta có

$$S_{AMG} = \frac{1}{2}S_{ANG} = \frac{1}{6}S_{ANE}$$

nên $$S_{MNEG} = \frac{5}{6}S_{ANE} = \frac{5}{12}S_{ABE} = \frac{5}{24}S_{ABC}.$$



*Hình 174*

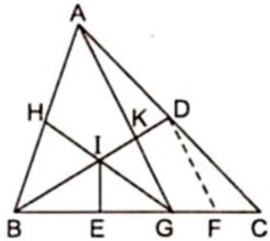
**134.** (h.175) Gọi F là trung điểm của GC.

Ta có KG // DF, BG = $\frac{4}{5}$BF nên chứng minh được

$$KG = \frac{4}{5}DF = \frac{2}{5}AG.$$

Đặt $$S_{IKG} = a \qquad (1)$$

thì $S_{AIG} = \frac{5}{2}a$, $S_{BIG} = \frac{5}{2}a$, $S_{IEG} = \frac{5}{4}a$. (2)



*Hình 175*

Từ (1), (2) suy ra

$$S_{EIKG} = \frac{5}{4}a + a = \frac{9}{4}a. \qquad (3)$$

Ta lại có $S_{BKG} = \frac{5}{2}a + a = \frac{7}{2}a$ nên

$$S_{ABG} = \frac{7}{2}a.\frac{5}{2} = \frac{35}{4}a, \ S_{ABC} = \frac{35a}{4}.\frac{3}{2} = \frac{105}{8}a. \qquad (4)$$

Từ (3), (4) suy ra $S_{EIKG} : S_{ABC} = \frac{9}{4} : \frac{105}{8} = \frac{6}{35}$.

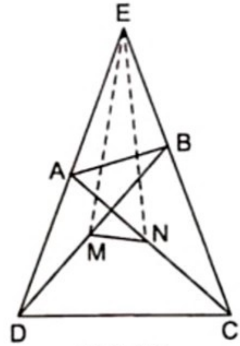
**135.** Gọi M, N là trung điểm các đường chéo BD, AC của tứ giác ABCD, E là giao điểm của AD, BC (h.176). Ta có

$$S_{EMN} = S_{EDC} - S_{EMD} - S_{ENC} - S_{DMC} - S_{MNC}$$

$$= S_{EDC} - \frac{1}{2}S_{EBD} - \frac{1}{2}S_{EAC} - \frac{1}{2}S_{DBC} - \frac{1}{2}S_{AMC}$$

$$= \frac{1}{2}(S_{EDC} - S_{EBD} - S_{DBC}) +$$

$$+ \frac{1}{2}(S_{EDC} - S_{EAC} - S_{AMC})$$



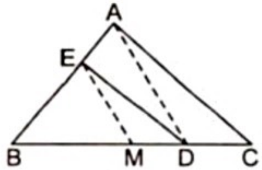
*Hình 176*

$$= 0 + \frac{1}{2}(S_{ADM} + S_{CDM}) = \frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

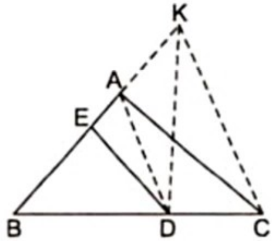
*Chú ý :* Nếu tứ giác ABCD có F là giao điểm của AB và CD thì từ bài toán trên ta cũng có $S_{FMN} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$. Suy ra E và F cách đều đường thẳng MN. Do đó đường thẳng MN đi qua trung điểm của EF. Đường thẳng đi qua M, N và trung điểm của EF gọi là *đường thẳng Gau-xơ.*

**136.** Lấy $BD = \frac{1}{4}BA$, $CE = \frac{1}{3}CA$, $AF = \frac{1}{2}AD$.

**137.** *Cách 1* (h.177) Nếu D là trung điểm của BC thì DA là đường thẳng phải dựng. Nếu D không là trung điểm của BC, qua trung điểm M của BC kẻ đường thẳng song song với DA cắt cạnh của tam giác ở E, DE là đường thẳng phải dựng.



*Hình 177*

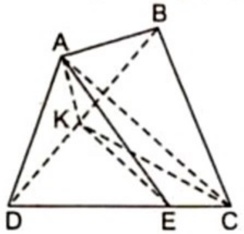


*Hình 178*

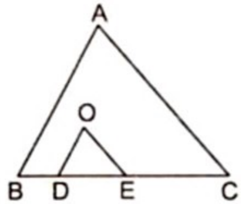
*Cách 2.* (h.178) Giả sử $DB \geq DC$.

Qua C vẽ đường thẳng song song với DA, cắt BA ở K. Như vậy, $\Delta ABC$ được biến đổi thành $\Delta DBK$ cùng diện tích. Để chia $\Delta DBK$ thành hai phần có diện tích bằng nhau, chỉ cần dựng đường trung tuyến DE của nó.

**138.** (h.179) Qua trung điểm K của BD, vẽ đường thẳng song song với AC, cắt DC ở E, AE là đoạn thẳng phải dựng.




*Hình 179*




*Hình 180*

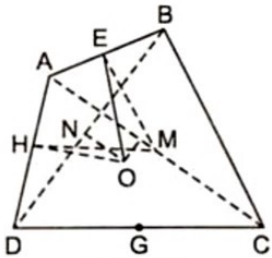
**139.** (h.180) Dựng D, E trên BC sao cho BD : DE : EC = 1 : 2 : 3. Qua D vẽ đường thẳng song song với AB, qua E vẽ đường thẳng song song với AC, chúng cắt nhau tại điểm O phải dựng.

**140.** (h.181) Gọi E, H là trung điểm của AB, AD, ta có

$$S_{OHAE} = \frac{1}{4}S_{ABCD}. \qquad (1)$$

Gọi M là trung điểm của AC, ta cũng có

$$S_{MHAE} = \frac{1}{4}S_{ABCD}. \qquad (2)$$




*Hình 181*

Từ (1) và (2) suy ra

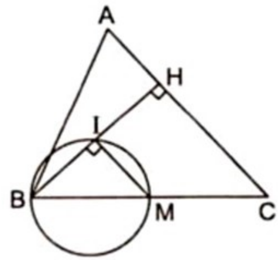
$$S_{OHAE} = S_{MHAE} \text{ nên } S_{OHE} = S_{MHE}.$$

Do đó OM // HE, OM // BD. (3)

Tương tự, gọi N là trung điểm của BD thì ON // AC (4). Hai điều kiện (3) và (4) xác định điểm O.

## TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

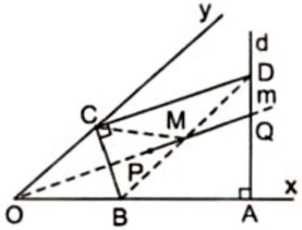
**141.** (h.182) Các điểm I nằm trên đường tròn có đường kính BM, trừ điểm B (M là trung điểm của BC).



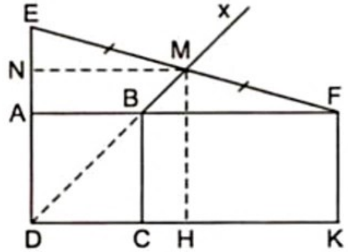

*Hình 182*

**142.** (h.183) $\Delta OCM = \Delta OBM$ (c.c.c) nên M thuộc tia phân giác Om của góc xOy.

*Giới hạn* : Khi B trùng A thì M trùng Q (Q là giao điểm của Om và d). Khi B tiến đến O thì D tiến đến Q, M tiến đến P (P là trung điểm của OQ). M nằm trên đoạn thẳng PQ thuộc tia phân giác Om, trừ điểm P.




*Hình 183*



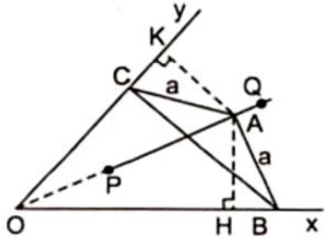

*Hình 184*

**143.** (h.184) Vẽ $MN \perp DA$ ; vẽ $MH \perp DC$. Ta có $2MN = AF$, $2MH = FK + DE$ nên $MN = MH$.

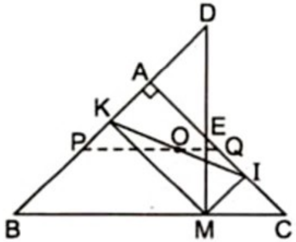
Các điểm M nằm trên tia Bx, tia đối của tia BD.

**144.** (h.185) Vẽ $AH \perp Ox$, $AK \perp Oy$. Ta có $\widehat{BAC} = \widehat{HAK}$ (cùng bù với $\widehat{xOy}$) nên $\widehat{KAC} = \widehat{HAB}$. Do đó $\Delta KAC = \Delta HAB$, suy ra $AK = AH$. Do đó A thuộc tia phân giác của góc xOy.

*Giới hạn* : Khi C trùng O hoặc B trùng O thì A trùng P ($OP = a$). Khi $AB \perp Ox$ (lúc đó $AC \perp Oy$) thì A trùng Q (Q cách Ox và Oy một khoảng bằng a).



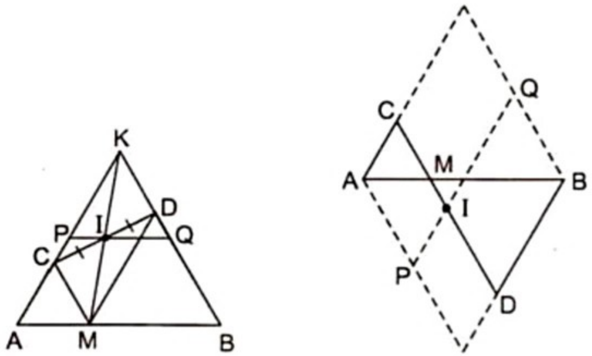

*Hình 185*




*Hình 186*

**145.** (h.186) Chú ý rằng AKMI là hình chữ nhật. Các điểm O nằm trên đường trung bình PQ của $\Delta ABC$ (PQ // BC).

**146.** a) (h.187a) I cách AB một khoảng không đổi. I nằm trên đường trung bình PQ của $\Delta$ KAB, trừ P và Q (KAB là tam giác đều).

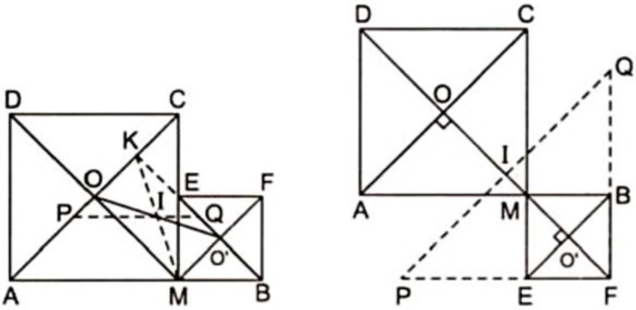



a) b)

*Hình 187*

b) (h.187b) Các đường thẳng AC và BD cố định. I nằm trên đoạn thẳng PQ cách đều hai đường thẳng đó, trừ P và Q.

**147.** a) (h.188a) I nằm trên đường trung bình PQ của ΔKAB vuông cân, trừ P và Q (PQ // AB).



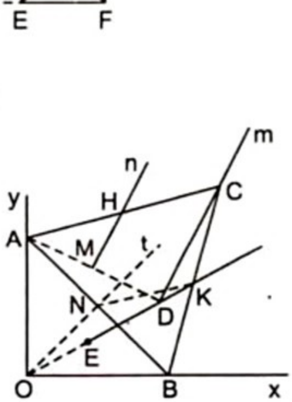

a) b)

*Hình 188*

b) (h.188b) I nằm trên đoạn thẳng PQ song song cách đều AC và BE, trừ P và Q.

**148.** (h.189) a) Vẽ ΔAOD đều (D nằm trong góc xOy) thì D là điểm cố định thuộc tập hợp điểm phải tìm. Hãy chứng minh CD ⊥ AD.

Các điểm C nằm trên tia Dm ⊥ AD tại D và thuộc miền trong góc xOy.




*Hình 189*

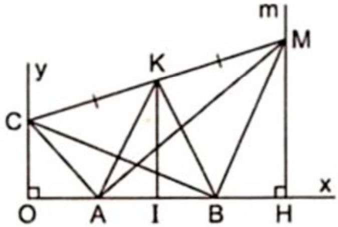
b) Gọi M là trung điểm của AD thì M là điểm cố định. Các điểm H nằm trên tia Mn // Dm.

c) Ta sẽ chứng minh rằng $\widehat{KOx} = 30^o$. Gọi N là trung điểm của AB thì NK = NA = NB = NO, các tam giác BNO, KNO, KNA cân. Gọi Nt là tia đối của tia NO, ta có $\widehat{KOx} = \widehat{BON} - \widehat{KON} = \frac{1}{2}(\widehat{BNt} - \widehat{KNt}) = \frac{1}{2}\widehat{BNK} = 30^o$.

Các điểm K nằm trên tia ED (E là trung điểm của OD).

**149.** (h.190). Gọi K là trung điểm của CM. Vẽ KI, MH $\perp$ Ox thì OI = IH. Ta lại có KA = KB (cùng bằng $\frac{CM}{2}$) $\Rightarrow$ IA = IB $\Rightarrow$ I là trung điểm của AB và là điểm cố định. Do đó H là điểm cố định (OH = 2OI).

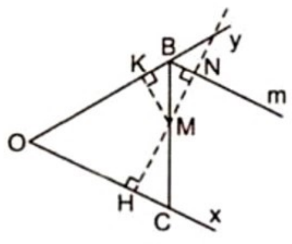
Các điểm M nằm trên tia Hm $\perp$ Ox tại H và thuộc miền trong góc xOy, trừ điểm H.



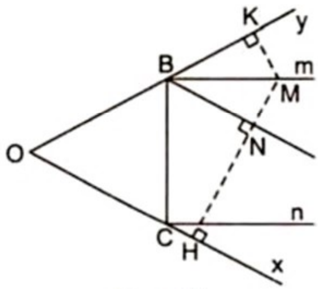

*Hình 190*

**150.** a) (h.191). Gọi MH, MK thứ tự là khoảng cách từ M đến Ox, Oy. Để làm xuất hiện tổng MH + MK, trên tia đối của tia MH lấy N sao cho MN = MK thì HN = HM + MN = MH + MK = h.

Qua N vẽ đường thẳng song song với Ox, cắt Oy ở B. Như vậy, BN là đường thẳng cố định. M cách đều hai cạnh của góc OBN cố định nên M thuộc tia phân giác của góc đó (giới hạn : M nằm trên đoạn thẳng BC).




*Hình 191*




*Hình 192*

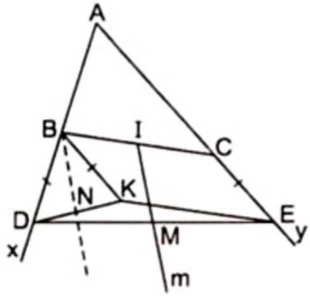
b) (h.192). Vẽ MH $\perp$ Ox, MK $\perp$ Oy. Xét MH > MK. Trên MH lấy N sao cho MN = MK thì NH = h. Qua N vẽ đường thẳng song song với Ox, cắt Oy ở B. Ta có đường thẳng BN cố định. M thuộc tia Bm, tia phân giác của góc NBy.

Tương tự, với MK > MH, M thuộc tia Cn (các tia Bm, Cn vuông góc với BC).

**151.** (h.193) Qua M kẻ đường thẳng song song với BC, cắt AB và AC ở I và K. Kẻ DF // BC. Dễ dàng chứng minh được AF = AD = CE, FK = KE nên K là trung điểm của AC. Tương tự, I là trung điểm của AB.

Điểm M nằm trên đoạn thẳng IK nối các trung điểm của AB và AC.


*Hình 193*



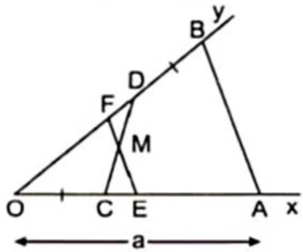

*Hình 194*

**152.** (h.194) *Dự đoán.* Trung điểm I của BC là một điểm của đường phải tìm, đường phải tìm có điểm vô tận. Ta dự đoán đường phải tìm là tia Im. Vẽ hình bình hành ECBK. Gọi N là trung điểm của KD. Trước hết, ta thấy các điểm K nằm trên tia BK // Ay.

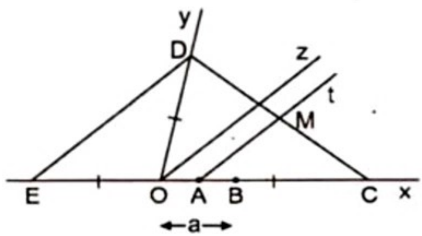
Tam giác BDK cân tại B, có BN là đường trung tuyến nên BN là tia phân giác của góc KBx. Điểm N nằm trên tia phân giác của góc KBx nên điểm M nằm trên tia Im // BN.

**153.** a) (h.195) Khi D trùng O thì C trùng A (OA = a), khi đó M trùng với E, trung điểm của OA. Khi C trùng O thì D trùng B (OB = a), khi đó M trùng với F, trung điểm của OB.

Như vậy ΔOAB cân cố định và OC = BD. Giải như bài 151, các điểm M nằm trên đoạn thẳng EF.




*Hình 195*



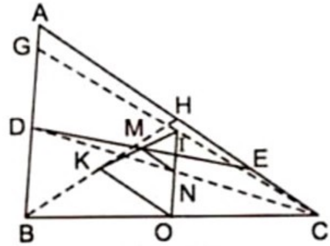

*Hình 196*

b) (h.196) Khi D trùng O thì C trùng B (OB = a), M ở vị trí A, trung điểm của OB. Khi D chạy xa vô tận trên Oy thì C chạy xa vô tận trên Ox, M cũng chạy xa vô tận. Ta dự đoán M chạy trên một tia gốc A.

Ta có $OC - OD = a$, $OC - OB = a \Rightarrow OD = BC$. Trên tia đối của tia Ox lấy điểm E sao cho A là trung điểm của CE thì AM là đường trung bình của $\Delta CDE$, do đó AM // DE. Chú ý rằng $\Delta ODE$ cân tại O nên nếu vẽ Oz là tia phân giác của góc xOy thì DE // Oz, do đó AM // Oz.

Các điểm M nằm trên tia At song song với tia phân giác của góc xOy (A thuộc Ox, $OA = \frac{a}{2}$).

**154.** (h.197) Khi E trùng C thì D trùng G ($BG = a$), M ở vị trí I, trung điểm của CG. Khi D trùng B thì E trùng H ($CH = a$), M ở vị trí K, trung điểm của BH. Ta sẽ chứng minh rằng K, M, I thẳng hàng.



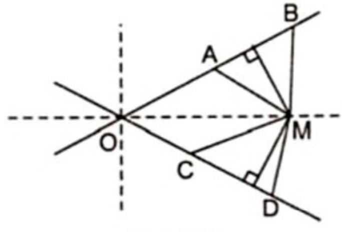
*Hình 197*

Thật vậy, gọi O là trung điểm của BC, N là trung điểm của CD. Ta có O, N, I thẳng hàng. Ta có $2OK = CH$, $2OI = BG$, $CH = BG = a$ nên $\Delta IOK$ cân. TA có $2NM = CE$, $2NI = DG$, $CE = DG$ nên $\Delta INM$ cân. Các tam giác cân IOK, INM có góc ở đỉnh bằng nhau nên $\widehat{NIM} = \widehat{OIK}$, do đó I, M, K thẳng hàng. Các điểm M nằm trên đoạn thẳng KI.

**155.** Xét ba trường hợp :

1. Các đường thẳng AB và CD cắt nhau ở O (h.198) :

Các điểm M nằm trên hai đường thẳng chứa các tia phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng, trừ giao điểm O của chúng.



*Hình 198*

2. AB // CD. Các điểm M nằm trên đường thẳng song song cách đều AB và CD.

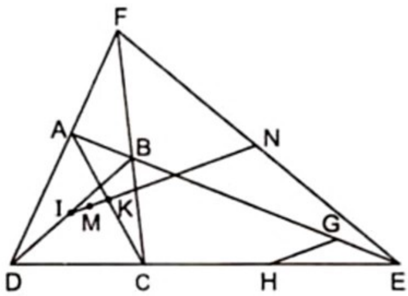
3. AB, CD thuộc cùng một đường thẳng a : Các điểm M nằm trên toàn mặt phẳng, trừ đường thẳng a.

**156.** (h.199)

a) Các điểm I, K thuộc đường phải tìm vì

$$S_{IAB} + S_{ICD} = \frac{1}{2}S_{ABD} + \frac{1}{2}S_{BCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}, \text{ cũng vậy đối với K.}$$

Ta sẽ chứng minh rằng M thuộc đoạn thẳng IK. "Dồn" các đoạn thẳng AB, CD về E : trên tia EA lấy EG = AB, trên tia ED lấy EH = CD.



*Hình 199*

Ta có :

$$S_{IHG} + S_{EHG} = S_{IHEG} = S_{IHE} + S_{IGE} =$$

$$= S_{ICD} + S_{IAB} = \frac{1}{2}S_{ABCD}, \qquad (1)$$

$$S_{KHG} + S_{EHG} = S_{KHEG} = S_{KHE} + S_{KGE}$$

$$= S_{KCD} + S_{KAB} = \frac{1}{2}S_{ABCD}. \qquad (2)$$

$$S_{MHG} + S_{EHG} = S_{MHEG} = S_{MHE} + S_{MGE} = S_{MCD} + S_{MAB} = \frac{1}{2}S_{ABCD}. (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $S_{IGH} = S_{KGH} = S_{MGH}$. Do đó khoảng cách từ I, K, M đến HG như nhau nên I, K, M thuộc cùng một đường thẳng song song với HG. Các điểm M nằm trên phần đường thẳng IK thuộc miền tứ giác ABCD.

b) Để chứng minh rằng N thẳng hàng với IK, ta sẽ chứng minh $S_{NHG} + S_{EHG} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. Thật vậy :

$$S_{NHG} + S_{EHG} = S_{NHE} - S_{NGE}$$

$$= S_{NCD} - S_{NAB} = \frac{1}{2}(S_{FCD} - S_{FAB}) = \frac{1}{2}S_{ABCD}. \qquad (4)$$

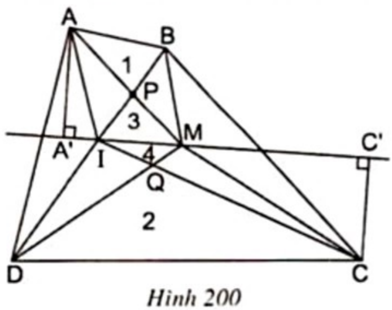
Từ (1), (2), (4) suy ra $S_{IHG} = S_{KHG} = S_{NHG}$, tức là I, K, N có khoảng cách đến HG như nhau. Vậy I, K, N thẳng hàng (chú ý rằng I, K, M, N thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ HG).

*Chú ý :* Cách khác giải câu a) (h.200).

Ta thấy trung điểm I của BD cũng là một điểm thuộc đường phải tìm. Ta có

$$S_{AMB} + S_{CMD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$$

mà $\qquad S_{AIB} + S_{CID} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$



*Hình 200*

nên $$S_{AMB} + S_{CMD} = S_{AIB} + S_{CID}.$$

Trừ đi $S_1 + S_2$, ta được :

$$S_{BPM} + S_{CQM} = S_{API} + S_{DQI}$$

(P là giao điểm của AM và BD, Q là giao điểm của DM và CI).

Cộng thêm $S_3 + S_4$, ta được :

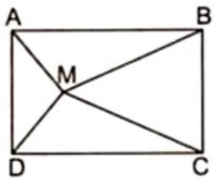
$$S_{BIM} + S_{CIM} = S_{AIM} + S_{DIM}.$$

Ta lại có $S_{BIM} = S_{DIM}$ nên $S_{CIM} = S_{AIM}$. Suy ra đường cao CC' bằng đường cao AA'.

Như vậy, AA'CC' là hình bình hành. Do đó A'C' đi qua trung điểm của AC, tức là IM đi qua trung điểm của AC.

Vậy M nằm trên đường thẳng đi qua trung điểm của hai đường chéo tứ giác ABCD (phần thuộc miền tứ giác).

**157.** (h.201)



*Hình 201*

a) Đẳng thức $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ (1)

luôn luôn đúng. Tập hợp phải tìm là toàn mặt phẳng.

b) $MA + MC = MB + MD$ (2)

$\Rightarrow (MA + MC)^2 = (MB + MD)^2$

$\Rightarrow MA^2 + MC^2 + 2MA . MC = MB^2 + MD^2 + 2MB . MD$

$\Rightarrow 2MA . MC = 2MB . MD$

$\Rightarrow MA . MC = MB . MD.$ (3)

Từ (1), (3) suy ra $(MA - MC)^2 = (MB - MD)^2$.

Do đó $MA - MC = MB - MD$ (4)

hoặc $MA - MC = MD - MB.$ (5)

Từ (4) và (2) suy ra MA = MB, do đó M thuộc đường trung trực của AB.

Từ (5) và (2) suy ra MA = MD, do đó M thuộc đường trung trực của AD.

Vậy tập hợp các điểm M phải tìm là hai trục đối xứng của hình chữ nhật.

## SỬ DỤNG CÔNG THỨC DIỆN TÍCH ĐỂ THIẾT LẬP QUAN HỆ VỀ ĐỘ DÀI CỦA CÁC ĐOẠN THẲNG

**158.** Có.

**159.** *Đáp số :* 4,8 cm.

**160.** $\left(\dfrac{h_a}{h_b}\right)^2 + \left(\dfrac{h_a}{h_c}\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{b}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{c}{a}\right)^2 = 1 \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$

$\Rightarrow$ Tam giác vuông tại A.

**161.** Tính tỉ số giữa các cạnh để suy ra tam giác vuông. Các cạnh góc vuông bằng 20 cm và 15 cm, cạnh huyền bằng 25 cm.

**162.** Gọi a, b, c là ba cạnh tương ứng với các đường cao $h_a, h_b, h_c$. Gọi S là diện tích tam giác. Ta có

$$a < b + c \Rightarrow \frac{2S}{h_a} < \frac{2S}{h_b} + \frac{2S}{h_c} \Rightarrow \frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

**163.** Xét $a + h_a = b + h_b$, ta có

$$a - b = h_b - h_a = \frac{2S}{b} - \frac{2S}{a} = 2S\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = 2S.\frac{a-b}{ab}$$

$$\Rightarrow (a-b)(1 - \frac{2S}{ab}) = 0$$

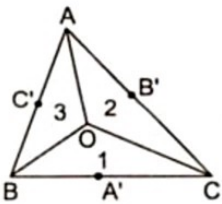
$\Rightarrow$ tam giác cân tại C hoặc vuông tại C. (1)

Tương tự, tam giác cân tại B hoặc vuông tại B (2)

tam giác cân tại A hoặc vuông tại A. (3)

Xảy ra cả (1), (2), (3) khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

**164.** (h.202) Gọi S là diện tích $\Delta ABC$, kí hiệu $S_1, S_2, S_3$ như hình vẽ. Ta có



*Hình 202*

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{S_2}{S_{OA'C}} = \frac{S_3}{S_{OA'B}} = \frac{S_2 + S_3}{S_1}, \quad (1)$$

$$\frac{OA'}{AA'} = \frac{S_{OA'C}}{S_{AA'C}} = \frac{S_{OA'B}}{S_{AA'B}} = \frac{S_{OA'C} + S_{OA'B}}{S_{AA'C} + S_{AA'B}} = \frac{S_1}{S}. \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $\dfrac{OA}{AA'} = \dfrac{S_2 + S_3}{S}$.

a) $\dfrac{OA'}{AA'} + \dfrac{OB'}{BB'} + \dfrac{OC'}{CC'} = \dfrac{S_1}{S} + \dfrac{S_2}{S} + \dfrac{S_3}{S} = 1$.

b) $\dfrac{OA}{AA'} + \dfrac{OB}{BB'} + \dfrac{OC}{CC'} = \dfrac{S_2 + S_3}{S} + \dfrac{S_1 + S_3}{S} + \dfrac{S_1 + S_2}{S} = 2$.

c) $M = \dfrac{S_2 + S_3}{S_1} + \dfrac{S_1 + S_3}{S_2} + \dfrac{S_1 + S_2}{S_3} =$

$$= \left(\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1}\right) + \left(\frac{S_2}{S_3} + \frac{S_3}{S_2}\right) + \left(\frac{S_3}{S_1} + \frac{S_1}{S_3}\right) \geq 2 + 2 + 2 = 6.$$

d) $N = \dfrac{(S_2 + S_3)(S_1 + S_3)(S_1 + S_2)}{S_1S_2S_3}$

$$\Rightarrow N^2 = \frac{(S_2 + S_3)^2(S_1 + S_3)^2(S_1 + S_2)^2}{(S_1S_2S_3)^2}$$

$$\geq \frac{4S_2S_3.4S_1S_3.4S_1S_2}{(S_1S_2S_3)^2} = 64 \Rightarrow N \geq 8.$$

Xảy ra dấu bằng trong hai câu c) và d) $\Leftrightarrow$ O là trọng tâm của tam giác.

**165.** a) Tổng các khoảng cách từ M đến hai cạnh bên bằng chiều cao ứng với cạnh bên.

b) Hiệu các khoảng cách từ M đến hai cạnh bên bằng chiều cao ứng với cạnh bên.

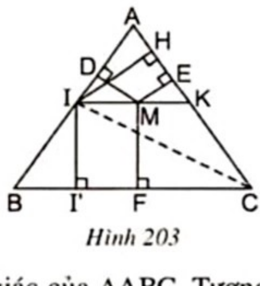
**166.** (h.203) Gọi MD, ME, MF là khoảng cách từ M đến AB, AC, BC. Theo đề bài :

$$MD + ME = MF. \quad (1)$$

Qua M vẽ IK // BC. Vẽ IH $\perp$AC, II' $\perp$ BC. Ta có :

$$MD + ME = IH, \quad (2)$$

$$MF = II'. \quad (3)$$



*Hình 203*

Từ (1), (2), (3) suy ra IH = II' $\Rightarrow$ CI là đường phân giác của $\Delta ABC$. Tương tự đối với BK. Tập hợp các điểm M là đoạn thẳng IK nối chân hai đường phân giác BK, CI.

**167.** Xét điểm M thuộc từng miền như ở ví dụ 28, tập hợp phải tìm là các cạnh của một lục giác (h.204).

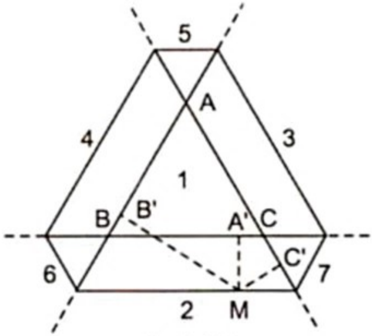
Chẳng hạn với M thuộc miền 2, kẻ $MA' \perp BC$, $MB' \perp AB$, $MC' \perp AC$, ta có

$$MA' + MB' + MC' = m.$$

$\Rightarrow MB' + MC' - MA' + 2MA' = m$

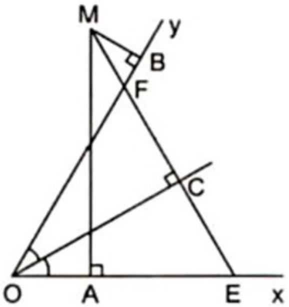
$\Rightarrow h + 2MA' = m$ (do $MB' + MC' - MA' = h$)

$\Rightarrow MA' = \dfrac{m-h}{2}.$

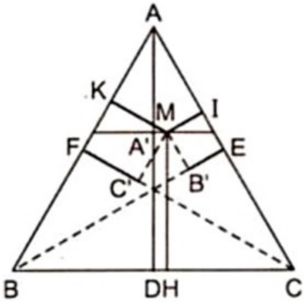


*Hình 204*

**168.** Chú ý rằng điểm M thuộc đường thẳng chứa cạnh của tam giác đều OEF (h.205). *Đáp số :* $OC = |MA - MB|$.



*Hình 205*



*Hình 206*

**169.** (h.206)

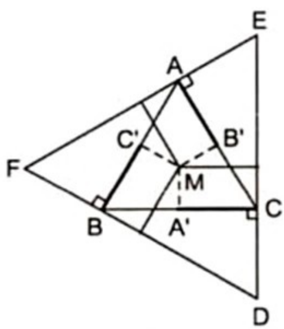
a) Kẻ $MH \perp BC$, $MI \perp AC$, $MK \perp AB$. Ta có

$A'D = MH$, $B'E = MI$, $C'F = MK$. Dễ dàng chứng minh tổng $A'D + B'E + C'F$ bằng h (h là chiều cao của $\Delta ABC$).

b) Dựa vào kết quả của câu a). Ta có

$$AA' + BB' + CC' = 3h - 2h = h.$$

**170.** (h.207) Vẽ các đường vuông góc từ M đến ba cạnh của $\Delta DEF$. Tổng các đường vuông góc này bằng $AB' + BC' + CA'$. Như vậy $AB' + BC' + CA'$ bằng chiều cao của tam giác đều DEF (đồng thời bằng nửa chu vi của $\Delta ABC$).



*Hình 207*

# MỤC LỤC

*Chịu trách nhiệm xuất bản :*
Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Tổng biên tập kiêm Phó Tổng Giám đốc NGUYỄN QUÝ THAO

*Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :*
Phó Tổng biên tập PHAN XUÂN THÀNH
Giám đốc CTCP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội PHAN KẾ THÁI

*Biên tập lần đầu :*
PHẠM BẢO KHUÊ
*Biên tập tái bản :*
NGUYỄN TRỌNG THIỆP
*Biên tập kĩ thuật :*
NGUYỄN PHƯƠNG YÊN
*Sửa bản in :*
VƯƠNG THỊ TRÌNH
*Chế bản :*
CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI



**NÂNG CAO VÀ PHÁT TRIỂN TOÁN 8 - Tập một**

Mã số : T8T23h2 - CPH
Số đăng kí KHXB : 21–2012/CXB/86–2095/GD
In 3.000 bản, ( QĐ: 39 ), khổ 17 x 24 cm
Tại trung tâm Nghiên Cứu và Sản Xuất Học Liệu
In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2012