

Similar Triangles – Các Tam Giác Đồng Dạng

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 26 tháng 2 năm 2023

Tóm tắt nội dung

[EN] This text is a collection of problems, from easy to advanced, about *similar triangles*. This text is also a supplementary material for my lecture note on Elementary Mathematics grade 8, which is stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_8/lecture)¹. The latest version of this text has been stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/similar triangles](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_8/similar_triangles)².

[VI] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài tập chọn lọc từ cơ bản đến nâng cao về *các tam giác đồng dạng*. Tài liệu này là phần bài tập bổ sung cho tài liệu chính – bài giảng [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_8/lecture) của tác giả viết cho Toán Sơ Cấp lớp 8. Phiên bản mới nhất của tài liệu này được lưu trữ & có thể tải xuống ở link sau: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/similar triangles](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_8/similar_triangles).

Nội dung. Định lý Thales, tam giác đồng dạng.

Mục lục

1 Định Lý Thales Trong Tam Giác	2
2 Định Lý Đảo & Hệ Quả của Định Lý Thales	4
3 Tính Chất Đường Phân Giác của Tam Giác	7
4 Khái Niệm 2 Tam Giác Đồng Dạng	8
5 Trường Hợp Đồng Dạng Thứ Nhất	9
6 Trường Hợp Đồng Dạng Thứ 2	10
7 Trường Hợp Đồng Dạng Thứ 3	10
8 Các Trường Hợp Đồng Dạng của Tam Giác Vuông	11
9 Ứng Dụng Thực Tế của Tam Giác Đồng Dạng	12
10 Miscellaneous	13
Tài liệu	13

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

¹URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/NQBH_elementary_mathematics_grade_8.pdf.

²URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/similar_triangle/NQBH_similar_triangle.pdf.

1 Định Lý Thales Trong Tam Giác

Định nghĩa 1 (Tỷ số của 2 đoạn thẳng). Tỷ số của 2 đoạn thẳng là tỷ số độ dài của chúng theo cùng 1 đơn vị đo.

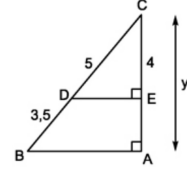
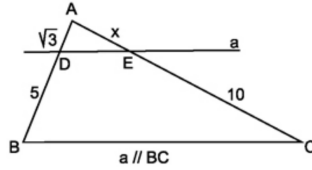
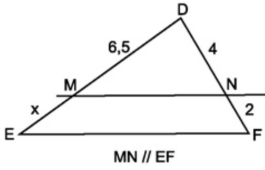
Tỷ số của 2 đoạn thẳng AB, CD được ký hiệu là $\frac{AB}{CD}$. Tỷ số của 2 đoạn thẳng không phụ thuộc vào cách chọn đơn vị đo, e.g., $\frac{2\text{km}}{3\text{km}} = \frac{2\cancel{\text{km}}}{3\cancel{\text{km}}} = \frac{2}{3}$, $\frac{3\text{cm}}{4\text{cm}} = \frac{3\cancel{\text{cm}}}{4\cancel{\text{cm}}} = \frac{3}{4}$, $\frac{4\text{mm}}{5\text{mm}} = \frac{4\cancel{\text{mm}}}{5\cancel{\text{mm}}} = \frac{4}{5}$ (1 cách dễ hiểu: 2 đơn vị trên tử & mẫu sẽ triệt tiêu lẫn nhau).

Định nghĩa 2 (2 đoạn thẳng tỷ lệ). 2 đoạn thẳng AB, CD gọi là tỷ lệ với 2 đoạn thẳng $A'B', C'D'$ nếu có tỷ lệ thức: $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$ hay $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$.

Định lý 1 (Thales). Nếu 1 đường thẳng song song với 1 cạnh của tam giác cắt 2 cạnh còn lại thì nó định ra trên 2 cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ.

$$\text{GT: } \triangle ABC, B'C' \parallel BC, B' \in AB, C' \in AC. \text{ KL: } \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}, \frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C} = \frac{B'C'}{BC-B'C'}, \frac{B'B}{AB} = \frac{C'C}{AC} = \frac{BC-B'C'}{B'C'}.$$

Bài toán 1 (Chính et al., 2022, ?4, p. 58). (a) Cho $\triangle DEF$. Đường thẳng $MN \parallel EF$ cắt 2 cạnh DE, DF lần lượt tại M, N . Biết $DM = 6.5, DN = 4, NF = 2$. Tính EF . (b) Cho $\triangle ABC$. Đường thẳng $al \parallel BC$ cắt 2 cạnh AB, AC lần lượt tại D, E . Biết $AD = \sqrt{3}, BD = 5, CE = 10$. Tính AE . (c) Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Trên BC, AC lần lượt lấy D, E sao cho $DE \parallel AB$. Biết $CD = 5, BD = 3.5, CE = 4$. Tính AC, AB .



Giải. (a) Vì $MN \parallel EF$, theo định lý Thales: $\frac{DM}{ME} = \frac{DN}{NF} \Leftrightarrow \frac{6.5}{ME} = \frac{4}{2} \Rightarrow ME = \frac{2 \cdot 6.5}{4} = 3.25$. (b) Vì $DE \parallel BC$, theo định lý Thales: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{AE}{10} \Rightarrow AE = \frac{10\sqrt{3}}{5} = 2\sqrt{3}$. (c) Vì $DE \parallel AB$, theo định lý Thales: $\frac{CD}{CB} = \frac{CE}{CA} = \frac{DE}{AB} \Leftrightarrow \frac{5}{5+3.5} = \frac{4}{AC} = \frac{\sqrt{5^2-4^2}}{AB}$, suy ra $AC = \frac{8.5 \cdot 4}{5} = 6.8$ & $AB = \frac{8.5 \cdot 3}{5} = 5.1$. \square

Nhận xét 1. Ở (c), có thể tính được độ dài cạnh AB bằng cách sử dụng định lý Pythagore cho $\triangle ABC$ vuông tại A , thay vì định lý Thales, sau khi đã biết được $AC = 6.8$ như sau: $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{8.5^2 - 6.8^2} = 5.1$.

Bài toán 2 (Chính et al., 2022, 1., p. 58). Viết tỷ số của các cặp đoạn thẳng có độ dài sau: (a) $AB = 5\text{cm}$ & $CD = 15\text{cm}$; (b) $EF = 48\text{cm}$ & $GH = 16\text{dm}$; (c) $PQ = 1.2\text{m}$ & $MN = 24\text{cm}$.

Giải. (a) $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$. (b) $\frac{EF}{GH} = \frac{48}{160} = \frac{3}{10}$. (c) $\frac{PQ}{MN} = \frac{120}{24} = 5$. \square

Bài toán 3 (Chính et al., 2022, 2., p. 59). Cho biết $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{4}$, $CD = 12\text{cm}$. Tính AB .

Giải. $AB = \frac{3}{4}CD = \frac{3}{4} \cdot 12 = 9\text{cm}$. \square

Bài toán 4 (Chính et al., 2022, 3., p. 59). (a) Cho biết độ dài của AB gấp 5 lần độ dài của CD & độ dài của $A'B'$ gấp 12 lần độ dài của CD . Tính tỷ số của 2 đoạn thẳng $AB, A'B'$. (b) Cho biết độ dài của AB gấp a lần độ dài của CD & độ dài của $A'B'$ gấp b lần độ dài của CD với $a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$. Tính tỷ số của 2 đoạn thẳng $AB, A'B'$.

Giải. (a) $AB = 5CD, A'B' = 12CD \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{5CD}{12CD} = \frac{5}{12}$. (b) Tương tự, $AB = aCD, A'B' = bCD \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{aCD}{bCD} = \frac{a}{b}$. \square

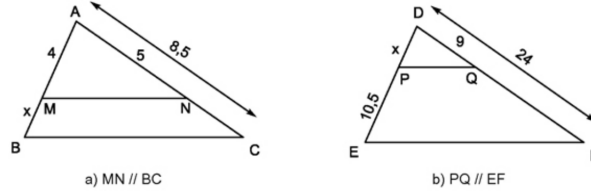
Bài toán 5 (Chính et al., 2022, 4., p. 59). Cho $\triangle ABC, B' \in AB, C' \in AC$. Cho biết $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$. Chứng minh: (a) $\frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}$. (b) $\frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC}$.

Giải. (a) $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} \Leftrightarrow \frac{AB'}{AB'} = \frac{AC'}{AC'} \Leftrightarrow \frac{AB}{AB'} - 1 = \frac{AC}{AC'} - 1 \Leftrightarrow \frac{AB-AB'}{AB'} = \frac{AC-AC'}{AC'} \Leftrightarrow \frac{BB'}{AB'} = \frac{CC'}{AC'} \Leftrightarrow \frac{AB'}{BB'} = \frac{AC'}{CC'}$. (b) $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} \Leftrightarrow 1 - \frac{AB'}{AB} = 1 - \frac{AC'}{AC} \Leftrightarrow \frac{AB-AB'}{AB} = \frac{AC-AC'}{AC} \Leftrightarrow \frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC}$. \square

Nhận xét 2. Ở (a), ta có thể áp dụng trực tiếp tính chất sau của tỷ lệ thức: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \neq 1 \Leftrightarrow \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, bd \neq 0, a \neq b, c \neq d$, cho $a = AB', b = AB, c = AC', d = AC$. Tương tự, ở (b), ta có thể áp dụng tính chất sau của tỷ lệ thức: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b-a}{b} = \frac{d-c}{d}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, bd \neq 0$ cho $a = AB', b = AB, c = AC', d = AC$. Chứng minh các tính chất này hoàn toàn tương tự như trong lời giải trên:

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \neq 1 \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \neq 1 \Leftrightarrow \frac{b}{a} - 1 = \frac{d}{c} - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \frac{b-a}{a} = \frac{d-c}{c} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, bd \neq 0, a \neq b, c \neq d$. Chú ý ở bước biến đổi tương đương cuối cùng: vì các phân số khác 0 nên mới có thể nghịch đảo chúng trong phép biến đổi đại số tương đương này.
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow 1 - \frac{a}{b} = 1 - \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b-a}{b} = \frac{d-c}{d}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, bd \neq 0$. Chú ý đẳng thức này vẫn đúng nếu $a = b, c = d$, i.e., $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = 1$, trong khi tính chất thứ nhất chỉ đúng cho $a \neq b, c \neq d$, i.e., $\frac{a}{b} \neq 1, \frac{c}{d} \neq 1$. Điểm khác biệt này là bởi vì không có bất kỳ phép nghịch đảo phân số nào được thực hiện trong các phép biến đổi đại số tương đương cho tính chất thứ 2.

Bài toán 6 (Chính et al., 2022, 5., p. 59). Tìm x .



Giải. (a) Vì $MN \parallel BC$, theo định lý Thales: $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Leftrightarrow \frac{4}{x} = \frac{5}{8.5-5} \Leftrightarrow x = \frac{4 \cdot 3.5}{5} = 2.8$. (b) Vì $PQ \parallel EF$, theo định lý Thales: $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF} \Leftrightarrow \frac{9}{10.5} = \frac{x}{24-9} \Leftrightarrow x = \frac{10.5 \cdot 9}{15} = 6.3$. \square

Bài toán 7 (Thân et al., 2022, 1., p. 82). Viết tỷ số của các cặp đoạn thẳng sau: (a) $AB = 125\text{cm}$, $CD = 625\text{cm}$; (b) $EF = 45\text{cm}$, $E'F' = 13.5\text{dm}$; (c) $MN = 555\text{cm}$, $M'N' = 999\text{cm}$; (d) $PQ = 10101\text{cm}$, $P'Q' = 303.03\text{m}$.

Giải. (a) $\frac{AB}{CD} = \frac{125}{625} = \frac{1}{5}$. (b) $\frac{EF}{E'F'} = \frac{45}{135} = \frac{1}{3}$. (c) $\frac{MN}{M'N'} = \frac{555}{999} = \frac{5}{9}$. (d) $\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{10101}{30303} = \frac{1}{3}$. \square

Bài toán 8 (Thân et al., 2022, 2., p. 82). Đoạn thẳng AB gấp 5 lần đoạn thẳng CD ; đoạn thẳng $A'B'$ gấp 7 lần đoạn thẳng CD . (a) Tính tỷ số của 2 đoạn thẳng $AB, A'B'$. (b) Cho biết đoạn thẳng $MN = 505\text{cm}$ & đoạn thẳng $M'N' = 707\text{cm}$, hỏi 2 đoạn thẳng $AB, A'B'$ có tỷ lệ với 2 đoạn thẳng $MN, M'N'$ không?

Giải. $AB = 5CD$, $A'B' = 7CD$. (a) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{5CD}{7CD} = \frac{5}{7}$. (b) $\frac{MN}{M'N'} = \frac{505}{707} = \frac{5}{7}$, nên $\frac{AB}{A'B'} = \frac{MN}{M'N'}$, suy ra $AB, A'B'$ tỷ lệ với $MN, M'N'$. \square

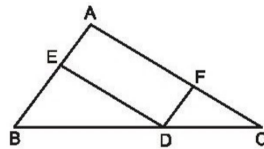
Bài toán 9 (Thân et al., 2022, 3., p. 82). (a) Cho $\triangle ABC$, M, N lần lượt nằm trên AB, AC sao cho $MN \parallel BC$. Biết $AM = 17$, $BM = 10$, $CN = 9$. Tính AN . (b) Cho $\triangle PQR$, E, F lần lượt nằm trên PQ, PR sao cho $EF \parallel QR$. Biết $PE = 16$, $PF = 20$, $RF = 15$. Tính PQ .

Giải. (a) Áp dụng định lý Thales: $MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Leftrightarrow \frac{17}{10} = \frac{x}{9} \Leftrightarrow x = \frac{17 \cdot 9}{10} = 15.3\text{cm}$. (b) Áp dụng định lý Thales: $EF \parallel QR \Rightarrow \frac{EP}{PQ} = \frac{PF}{PR} \Leftrightarrow \frac{16}{x} = \frac{20}{20+15} \Leftrightarrow x = \frac{16 \cdot 35}{20} = 28\text{cm}$. \square

Bài toán 10 (Thân et al., 2022, 4., p. 83). Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$ & $AB < CD$. Đường thẳng song song với đáy AB cắt các cạnh bên AD, BC theo thứ tự tại M, N . Chứng minh: (a) $\frac{MA}{AD} = \frac{NB}{BC}$; (b) $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC}$; (c) $\frac{MD}{DA} = \frac{NC}{CB}$.

Chứng minh. (a) $MN \parallel AB \parallel CD$ (gt). Kéo dài DA & CB cắt nhau tại E , áp dụng định lý Thales vào $\triangle EMN, \triangle ECD$: $\frac{EA}{MA} = \frac{EB}{NB} \Leftrightarrow \frac{EA}{EB} = \frac{MA}{NB}$ & $\frac{EA}{AD} = \frac{EB}{BC} \Leftrightarrow \frac{EA}{EB} = \frac{AD}{BC}$. Kết hợp 2 điều này suy ra $\frac{MA}{NB} = \frac{AD}{BC}$ hay $\frac{MA}{AD} = \frac{NB}{BC}$. (b) Áp dụng tính chất của tỷ lệ thức: $\frac{MA}{AD} = \frac{NB}{BC} \Leftrightarrow \frac{MA}{AD-MA} = \frac{NB}{BC-NB} \Leftrightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC}$. (c) $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC} \Leftrightarrow \frac{MD}{MA} = \frac{NC}{NB} \Leftrightarrow \frac{MD}{MA+MD} = \frac{NC}{NB+NC} \Leftrightarrow \frac{MD}{DA} = \frac{NC}{CB}$. \square

Bài toán 11 (Thân et al., 2022, 5., p. 83). Cho $\triangle ABC$. Từ điểm D trên cạnh BC , kẻ các đường thẳng song song với các cạnh AB, AC , chúng cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự tại E, F . Chứng minh: $\frac{AE}{AB} + \frac{AF}{AC} = 1$.

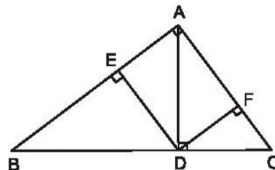


Chứng minh. Xét $\triangle ABC$, vì $DE \parallel AC$ (gt), áp dụng định lý Thales: $\frac{AE}{AB} = \frac{CD}{CB}$. Mặt khác, vì $DF \parallel AB$ (gt), áp dụng định lý Thales: $\frac{AF}{AC} = \frac{BD}{BC}$. Cộng 2 đẳng thức trên, vẽ theo vế: $\frac{AE}{AB} + \frac{AF}{AC} = \frac{CD}{CB} + \frac{BD}{BC} = \frac{CD+BD}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1$. \square

Bài toán 12 (Thân et al., 2022, 1.1., p. 83). 2 đoạn thẳng $AB = 35\text{cm}$, $CD = 105\text{cm}$ tỷ lệ với 2 đoạn thẳng $A'B' = 75\text{cm}$ & $C'D'$. Tính $C'D'$.

Giải. $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \Leftrightarrow \frac{35}{105} = \frac{75}{C'D'} \Leftrightarrow C'D' = \frac{105 \cdot 75}{35} = 225\text{cm}$. \square

Bài toán 13 (Thân et al., 2022, 1.2., p. 83). $\triangle ABC$ vuông tại A có đường cao là AD , $D \in BC$. Từ D , kẻ $DE \perp AB$, $E \in AB$, & $DF \perp AC$, $F \in AC$. Hỏi khi độ dài các cạnh AB, AC thay đổi thì tổng $\frac{AE}{AB} + \frac{AF}{AC}$ có thay đổi không? Vì sao?



1st giải. $DE \perp AB$ & $CA \perp AB \Rightarrow DE \parallel AC$. Theo định lý Thales: $\frac{AE}{AB} = \frac{CD}{CB}$. Tương tự, $DF \perp AC$ & $AB \perp AC \Rightarrow DF \parallel AB$. Theo định lý Thales: $\frac{AF}{AC} = \frac{BD}{BC}$. Cộng 2 đẳng thức trên, về theo về: $\frac{AE}{AB} + \frac{AF}{AC} = \frac{CD}{CB} + \frac{BD}{BC} = \frac{CD+BD}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1$. Vậy khi độ dài các cạnh AB, AC thay đổi thì tổng $\frac{AE}{AB} + \frac{AF}{AC}$ không thay đổi vì luôn có giá trị bằng 1. \square

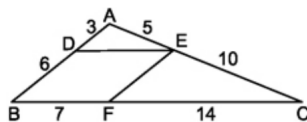
2nd giải. Bài toán này là 1 trường hợp đặc biệt của Bài toán 11 khi D là chân đường cao ứng với BC . Theo kết quả Bài toán 11: $\frac{AE}{AB} + \frac{AF}{AC} = 1$ nên không đổi khi độ dài các cạnh AB, AC thay đổi. \square

2 Định Lý Đảo & Hệ Quả của Định Lý Thales

Định lý 2 (Thales đảo). Nếu 1 đường thẳng cắt 2 cạnh của 1 tam giác & định ra trên 2 cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

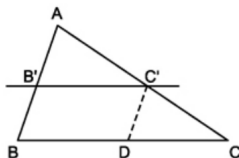
GT: $\triangle ABC$, $B' \in AB$, $C' \in AC$, $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$. KL: $B'C' \parallel BC$.

Bài toán 14 (Chính et al., 2022, ?2, p. 60). Cho $\triangle ABC$. $D \in AB$, $E \in AC$, $F \in BC$, $AD = 3$, $BD = 6$, $AE = 5$, $CE = 10$, $BF = 7$, $CF = 14$. (a) Có bao nhiêu cặp đường thẳng song song với nhau. (b) Tứ giác $BDEF$ là hình gì? (c) So sánh các tỷ số $\frac{AD}{AB}$, $\frac{AE}{AC}$, $\frac{DE}{BC}$ & cho nhận xét về mối liên hệ giữa các cặp cạnh tương ứng của $\triangle ADE$ & $\triangle ABC$.



Giải. (a) Vì $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ($\frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$), theo định lý Thales đảo: $DE \parallel BC$. Vì $\frac{CE}{EA} = \frac{CF}{FB}$ ($\frac{10}{5} = \frac{14}{7} = 2$), theo định lý Thales đảo: $EF \parallel AB$. Vậy trong hình có 2 cặp đường thẳng song song với nhau: $DE \parallel BC$, $EF \parallel AB$. (b) Tứ giác $BDEF$ là hình bình hành vì 2 cặp cạnh đối của nó song song với nhau: $DE \parallel BF$, $BD \parallel EF$ (đã chứng minh ở (a)). (c) $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{3+6} = \frac{1}{3}$, $\frac{AE}{AC} = \frac{5}{5+10} = \frac{1}{3}$. Vì $BDEF$ là hình bình hành (đã chứng minh ở (b)) nên $DE = BF = 7$, suy ra $\frac{DE}{BC} = \frac{7}{7+14} = \frac{1}{3}$. Suy ra $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3}$ nên các cặp cạnh tương ứng của $\triangle ADE$ & $\triangle ABC$ tỷ lệ với nhau (có thể viết dạng tỷ lệ thức: $AD : DE : EA = AB : BC : CA$). \square

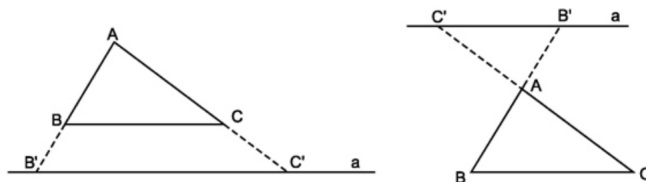
Hệ quả 1. Nếu 1 đường thẳng cắt 2 cạnh của 1 tam giác & song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành 1 tam giác mới có 3 cạnh tương ứng tỷ lệ với 3 cạnh của tam giác đã cho.



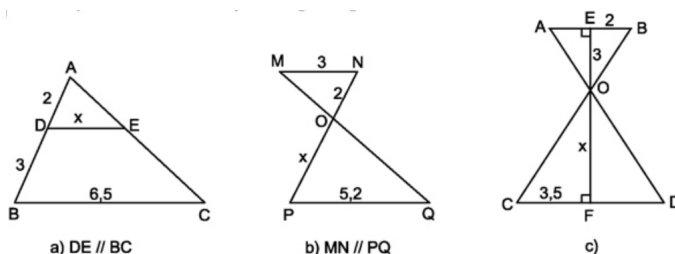
GT: $\triangle ABC$, $B'C' \parallel BC$, $B' \in AB$, $C' \in AC$. KL: $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$.

Chứng minh. Vì $B'C' \parallel BC$ nên theo định lý Thales: $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$ (1). Từ C' kẻ $C'D \parallel AB$, $D \in BC$, theo định lý Thales: $\frac{AC'}{AC} = \frac{BD}{BC}$ (2). Tứ giác $B'C'DB$ là hình bình hành (vì có các cặp cạnh đối song song) nên $B'C' = BD$. Từ (1) & (2), thay BD bằng $B'C'$: $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$. \square

Hệ quả 1 vẫn đúng cho trường hợp đường thẳng a song song với 1 cạnh của tam giác & cắt phần kéo dài của 2 cạnh còn lại: $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$.

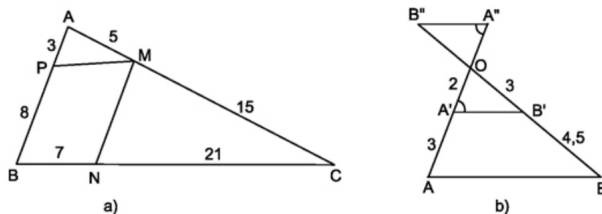


Bài toán 15 (Chính et al., 2022, ?3, p. 62). Tính x .



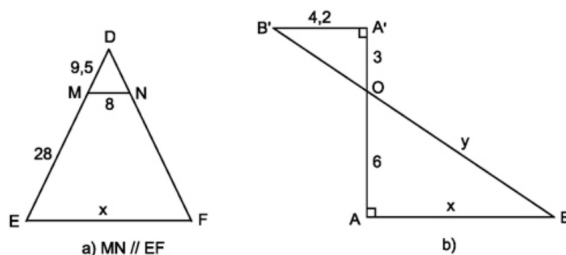
định lý Thales: $\frac{OE}{OF} = \frac{BE}{CF} \Leftrightarrow \frac{3}{x} = \frac{2}{3.5} \Leftrightarrow x = \frac{3 \cdot 3.5}{2} = 5.25.$ □

Bài toán 16 (Chính et al., 2022, 6., p. 62). *Tìm các đường thẳng song song & chứng minh:*



Giải. (a) Vì $\frac{AP}{PB} \neq \frac{AM}{MB}$ ($\frac{3}{8} \neq \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$), theo mệnh đề phản đảo của định lý Thales, suy ra $PM \nparallel BC$. Vì $\frac{CM}{MA} = \frac{CN}{NB}$ ($\frac{15}{5} = \frac{21}{7} = 3$), theo định lý Thales đảo, suy ra $MN \parallel AB$. (b) Vì $\widehat{A''} = \widehat{OA'B'}$ (2 góc so le trong) nên $A'B' \parallel A''B''$. Vì $\frac{OA'}{A'A} = \frac{OB'}{B'B}$ ($\frac{2}{3} = \frac{3}{4.5}$), theo định lý Thales đảo, suy ra $A'B' \parallel AB$. Vậy $AB \parallel A'B' \parallel A''B''$. \square

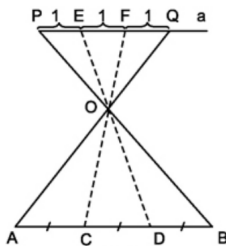
Bài toán 17 (Chính et al., 2022, 7., p. 62). *Tính x, y :*



Giải. Vì $MN \parallel EF$, theo định lý Thales: $\frac{DM}{DE} = \frac{MN}{EF} \Leftrightarrow \frac{9.5}{9.5+28} = \frac{x}{8} \Leftrightarrow x = \frac{8 \cdot 9.5}{9.5} = \frac{600}{19}$. (b) Vì $AA' \perp AB$ & $AA' \perp A'B' \Rightarrow AB \parallel A'B'$, theo định lý Thales: $\frac{OA'}{AA'} = \frac{OB'}{AB'} = \frac{AB}{A'B'} \Leftrightarrow \frac{6}{3} = \frac{y}{\sqrt{3^2+4 \cdot 2^2}} = \frac{x}{4.2} \Rightarrow x = \frac{6 \cdot 4.2}{3} = 8.4, y = \frac{6 \cdot \sqrt{3^2+4 \cdot 2^2}}{3} = \frac{6\sqrt{74}}{5}$. \square

Lưu ý 1. Sau khi đã tính được x , ta cũng có thể tính y bằng cách áp dụng định lý Pythagore cho $\triangle OAB$ vuông tại A : $y = \sqrt{x^2 + 6^2} = \sqrt{8.4^2 + 6^2} = \frac{6\sqrt{74}}{5}$ thay vì sử dụng tỷ lệ thức như trong lời giải trên cho (b).

Bài toán 18 (Chính et al., 2022, 8., p. 63). (a) Để chia đoạn thẳng AB thành 3 đoạn thẳng bằng nhau, người ta đã làm như hình sau:



Mô tả cách làm trên & giải thích vì sao các đoạn thẳng AC, CD, DB bằng nhau? (b) Bằng cách tương tự, chia đoạn thẳng AB cho trước thành 5 đoạn bằng nhau. Hỏi có cách nào khác với cách làm như trên mà vẫn có thể chia đoạn thẳng AB cho trước thành 5 đoạn thẳng bằng nhau?

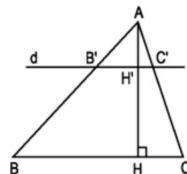
Giải. (a) Cách làm: Vẽ đường thẳng $a \parallel AB$. Trên a , lấy 4 điểm P, E, F, Q theo thứ tự đó sao cho $PE = EF = FQ = 1$. Lấy O là giao điểm của AQ, BP . Lấy C, D lần lượt là giao điểm của OE, OF với đoạn AB . Vì $a \parallel AB$, theo hệ quả 1 của định lý Thales: $\frac{AC}{CQ} = \frac{CD}{DQ} = \frac{DE}{EQ} \Leftrightarrow \frac{AC}{1} = \frac{CD}{1} = \frac{DB}{1} \Leftrightarrow AC = CD = DB$. (b) Tương tự (a), cách làm thứ nhất: Vẽ đường thẳng $a \parallel AB$. Trên a , lấy 6 điểm $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ theo thứ tự đó sao cho $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6 = 1$. Lấy O là giao điểm của AA_6, BA_1 . Với $i = 2, 3, 4, 5$, lấy B_i lần lượt là giao điểm của OA_i với đoạn AB . Vì $a \parallel AB$, theo hệ quả 1 của định lý Thales: $\frac{AB_5}{A_5A_6} = \frac{B_4A_5}{A_4A_5} = \frac{B_3A_4}{A_3A_4} = \frac{B_2A_3}{A_2A_3} = \frac{BB_2}{A_1A_2} \Leftrightarrow \frac{AB_5}{1} = \frac{B_4B_5}{1} = \frac{B_3B_4}{1} = \frac{B_2B_3}{1} = \frac{BB_2}{1} \Leftrightarrow AB_5 = B_4B_5 = B_3B_4 = B_2B_3 = BB_2$. \square

Nhận xét 3. Hoàn toàn tương tự, với $n \in \mathbb{N}^*$ cho trước, ta có thể chia đoạn thẳng AB thành n đoạn thẳng bằng nhau. Cách làm: Vẽ đường thẳng $a \parallel AB$. Trên a , lấy $n + 1$ điểm A_i , $i = 1, 2, \dots, n, n + 1$, theo thứ tự đó sao cho $A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{n-1}A_n = A_nA_{n+1} = 1$. Lấy O là giao điểm của AA_{n+1}, BA_1 . Với $i = 2, 3, \dots, n$, lấy B_i lần lượt là giao điểm của OA_i với đoạn AB . Vì $a \parallel AB$, theo hệ quả 1 của định lý Thales: $\frac{AB_n}{A_nA_{n+1}} = \frac{B_{n-1}B_n}{A_{n-1}A_n} = \dots = \frac{B_2B_3}{A_2A_3} = \frac{BB_2}{A_1A_2} \Leftrightarrow \frac{AB_n}{1} = \frac{B_{n-1}B_n}{1} = \dots = \frac{B_2B_3}{1} = \frac{BB_2}{1} \Leftrightarrow AB_n = B_{n-1}B_n = B_{n-2}B_{n-1} = \dots = B_2B_3 = BB_2$.

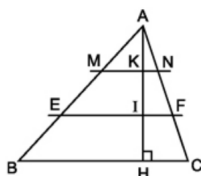
Bài toán 19 (Chính et al., 2022, 9., p. 63). Cho $\triangle ABC$ & $D \in AB$ sao cho $AD = 13.5\text{cm}$, $BD = 4.5\text{cm}$. Tính tỷ số các khoảng cách từ các điểm D & B đến cạnh AC .

Giải. Gọi H, K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ B, D xuống AC . Vì $BH \perp AC$ & $DK \perp AC \Rightarrow BH \parallel DK$, theo hệ quả 1 của định lý Thales: $\frac{DK}{BH} = \frac{AD}{AB} \Leftrightarrow \frac{DK}{BH} = \frac{13.5}{13.5+4.5} = \frac{3}{4}$. \square

Bài toán 20 (Chính et al., 2022, 10., p. 63). $\triangle ABC$ có đường cao AH . Đường thẳng d song song với BC , cắt các cạnh AB, AC , & đường cao AH theo thứ tự tại các điểm B', C' , & H' . (a) Chứng minh: $\frac{AH'}{AH} = \frac{B'C'}{BC}$. (b) Áp dụng: Cho biết $AH' = \frac{1}{3}AH$ & diện tích $\triangle ABC$ là 67.5cm^2 . Tính diện tích $\triangle AB'C'$.



Bài toán 21 (Chính et al., 2022, 11., p. 63). $\triangle ABC$ có $BC = 15\text{cm}$. Trên đường cao AH lấy các điểm I, K sao cho $AK = KI = IH$. Qua I, K vẽ các đường $EF \parallel BC$, $MN \parallel BC$. (a) Tính độ dài các đoạn thẳng MN, EF . (b) Tính diện tích tứ giác $MNFE$ biết diện tích $\triangle ABC$ là 270cm^2 .



Bài tập phụ thuộc hình vẽ: Chính et al., 2022, 12.–13., p. 64.

Bài toán 22 (Chính et al., 2022, 11., p. 64). Cho 3 đoạn thẳng có độ dài là m, n, p (cùng đơn vị đo). Dựng đoạn thẳng có độ dài x sao cho: (a) $\frac{x}{m} = 2$; (b) $\frac{x}{n} = \frac{2}{3}$; (c) $\frac{m}{x} = \frac{n}{p}$.

Bài toán 23 (Thân et al., 2022, 6., p. 84). Cho $\triangle ABC$ có cạnh $BC = a$. Trên cạnh AB lấy các điểm D, E sao cho $AD = DE = EB$. Từ D, E kẻ các đường thẳng song song với BC , cắt cạnh AC theo thứ tự tại M, N . Tính DM, EN theo a .

Bài toán 24 (Thân et al., 2022, 7., p. 84). Cho hình thang $MNCB$, $MN \parallel BC$, 2 đường chéo MC, BN cắt nhau tại A . Biết $AM = 16\text{cm}$, $AN = 10\text{cm}$, $AB = 25\text{cm}$, $BC = 45\text{cm}$. Tính MN, AC .

Bài toán 25 (Thân et al., 2022, 8., p. 84). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , M, N lần lượt nằm trên AB, AC sao cho $MN \parallel BC$. Biết $AB = 24\text{cm}$, $AM = 16\text{cm}$, $AN = 12\text{cm}$. Tính BC, CN .

Bài toán 26 (Thân et al., 2022, 9., p. 84). Hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$, có 2 đường chéo AC, BD cắt nhau tại O . Chứng minh $OA \cdot OD = OB \cdot OC$.

Bài toán 27 (Thân et al., 2022, 10., p. 84). Cho hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$. Đường thẳng song song với đáy AB cắt các cạnh bên & các đường chéo AD, BD, AC, BC theo thứ tự tại các điểm M, N, P, Q . Chứng minh $MN = PQ$.

Bài toán 28 (Thân et al., 2022, 11., p. 85). Cho hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$. Trên cạnh bên AD lấy điểm E sao cho $\frac{AE}{ED} = \frac{p}{q}$. Qua E kẻ đường thẳng song song với đáy & cắt BC tại F . Chứng minh $EF = \frac{pCD + qAB}{p+q}$.

Hint. Kẻ thêm đường chéo AC , cắt EF ở I , rồi áp dụng hệ quả của định lý Thales vào $\triangle ADC, \triangle CAB$.

Bài toán 29 (Thân et al., 2022, 12., p. 85). Hình thang cân $ABCD$, $AB \parallel CD$, có 2 đường chéo AC, BD cắt nhau tại O . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BD, AC . Biết $MD = 3MO$, đáy lớn $CD = 5.6\text{cm}$. (a) Tính MN, AB . (b) So sánh MN với nửa hiệu các độ dài của CD, AB .

Bài toán 30 (Thân et al., 2022, 13., p. 85). Cho hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB < CD$. Gọi trung điểm của các đường chéo AC, BD thứ tự là N, M . Chứng minh: (a) $MN \parallel AB$; (b) $MN = \frac{CD-AB}{2}$.

Bài toán 31 (Thân et al., 2022, 14., p. 85). Hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$, có 2 đường chéo AC, BD cắt nhau tại O . Đường thẳng qua O & song song với đáy AB cắt các cạnh bên AD, BC theo thứ tự tại M, N . Chứng minh $OM = ON$.

Bài toán 32 (Thân et al., 2022, 15., p. 86). Cho trước 3 đoạn thẳng có độ dài tương ứng là m, n, p . Dựng đoạn thẳng thứ 4 có độ dài q sao cho $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$.

Bài toán 33 (Thân et al., 2022, 16., p. 86). Cho 3 đoạn thẳng $AB = 3\text{cm}$, $CD = 5\text{cm}$, $EF = 2\text{cm}$. Dựng đoạn thẳng thứ 4 có độ dài a sao cho $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{a}$ hay $\frac{3}{5} = \frac{2}{a}$. Tính giá trị của a .

Bài toán 34 (Thân et al., 2022, 2.1., p. 86). Cho hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$, có 2 đường chéo AC, BD cắt nhau tại O . 1 đường thẳng qua O cắt 2 cạnh AB, CD lần lượt tại M, N . Biết $BM = 1\text{cm}$, $OB = 1.5\text{cm}$, $OD = 4.5\text{cm}$, $ON = 5\text{cm}$. Tính MO, NO .

Bài toán 35 (Thân et al., 2022, 2.2., p. 86). $\triangle ABC$ có 2 đường trung tuyến BM, CN cắt nhau tại O . Chứng minh: $OM \cdot OC = ON \cdot OB$.

Bài toán 36 (Thân et al., 2022, 2.3., p. 86). Hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$, có 2 đường chéo AC, BD cắt nhau tại O . Gọi M, K, N, H lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ O xuống các cạnh AB, BC, CD, DA . Chứng minh: (a) $\frac{OM}{ON} = \frac{AB}{CD}$; (b) $\frac{OH}{OK} = \frac{BC}{AD}$.

3 Tính Chất Đường Phân Giác của Tam Giác

Định lý 3. Trong tam giác, đường phân giác của 1 góc chia cạnh đối diện thành 2 đoạn thẳng tỷ lệ với 2 cạnh kề 2 đoạn ấy.

GT: $\triangle ABC$, AD là tia phân giác của \widehat{BAC} , $D \in BC$. KL: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Định lý vẫn đúng đối với tia phân giác của góc ngoài của tam giác.

1st chứng minh. Qua đỉnh B vẽ đường thẳng song song với AC , cắt đường thẳng AD tại điểm E . Có: $\widehat{BAE} = \widehat{CAE}$ (giả thiết). $BE \parallel AC \Rightarrow \widehat{BEA} = \widehat{CAE}$ (so le trong). Suy ra $\widehat{BAE} = \widehat{BEA}$. Do đó $\triangle ABE$ cân tại B , suy ra $BE = AB$ (1). Áp dụng hệ quả 1 của định lý Thales đối với $\triangle DAC$: $\frac{DB}{DC} = \frac{BE}{AC}$ (2). Từ (1) & (2) suy ra $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$. \square

Cách chứng minh sau dựa vào công thức lượng giác tính diện tích tam giác.

2nd chứng minh. Gọi AH là đường cao của $\triangle ABC$ ứng với cạnh BC , $H \in BC$. Có $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2}BD \cdot AH}{\frac{1}{2}CD \cdot AH} = \frac{DB}{DC}$. Cũng có:

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2}AD \cdot AB \sin \widehat{DAB}}{\frac{1}{2}AD \cdot AC \sin \widehat{DAC}} = \frac{\frac{1}{2}AD \cdot AB \sin \frac{\widehat{A}}{2}}{\frac{1}{2}AD \cdot AC \sin \frac{\widehat{A}}{2}} = \frac{AB}{AC}.$$

Kết hợp 2 đẳng thức trên suy ra $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$. \square

Cách chứng minh thứ 2 cho ta 1 kết quả tổng quát hơn khi AD không phải là tia phân giác:

Bài toán 37. Cho $\triangle ABC$, $D \in BC$. Chứng minh $\frac{DB}{DC} = \frac{AB \sin \widehat{DAB}}{AC \sin \widehat{DAC}}$.

Chứng minh. Gọi AH là đường cao của $\triangle ABC$ ứng với cạnh BC , $H \in BC$. Có $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2}BD \cdot AH}{\frac{1}{2}CD \cdot AH} = \frac{DB}{DC}$. Cũng có:

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2}AD \cdot AB \sin \widehat{DAB}}{\frac{1}{2}AD \cdot AC \sin \widehat{DAC}} = \frac{AB \sin \widehat{DAB}}{AC \sin \widehat{DAC}}.$$

Kết hợp 2 đẳng thức trên suy ra $\frac{DB}{DC} = \frac{AB \sin \widehat{DAB}}{AC \sin \widehat{DAC}}$. \square

Bài tập phụ thuộc hình vẽ: Chính et al., 2022, ?2-?3, 15. p. 67.

Bài toán 38 (Chính et al., 2022, 16., p. 67). $\triangle ABC$ có độ dài các cạnh $AB = m$, $AC = n$, ℓ AD là đường phân giác. Chứng minh tỷ số diện tích của $\triangle ABD$ & diện tích của $\triangle ACD$ bằng $\frac{m}{n}$.

Bài toán 39 (Chính et al., 2022, 17., p. 68). Cho $\triangle ABC$ với đường trung tuyến AM . Tia phân giác của góc AMB cắt cạnh AB ở D , tia phân giác của góc AMC cắt cạnh AC ở E . Chứng minh $DE \parallel BC$.

Bài toán 40 (Chính et al., 2022, 18., p. 68). $\triangle ABC$ có $AB = 5\text{cm}$, $AC = 6\text{cm}$, ℓ $BC = 7\text{cm}$. Tia phân giác của góc BAC cắt cạnh BC tại E . Tính các đoạn EB, EC .

Bài toán 41 (Chính et al., 2022, 19., p. 68). Cho hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$. Đường thẳng a song song với DC , cắt các cạnh AD, BC theo thứ tự tại E, F . Chứng minh: (a) $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$; (b) $\frac{AE}{AD} = \frac{BF}{BC}$; (c) $\frac{DE}{DA} = \frac{CF}{CB}$.

Bài toán 42 (Chính et al., 2022, 20., p. 68). Cho hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$. 2 đường chéo AC, BD cắt nhau tại O . Đường thẳng a qua O & song song với đáy của hình thang cắt các cạnh bên AD, BC theo thứ tự tại E, F . Chứng minh $OE = OF$.

Bài toán 43 (Chính et al., 2022, 21., p. 68). (a) Cho $\triangle ABC$ với đường trung tuyến AM & đường phân giác AD . Tính diện tích $\triangle ADM$ biết $AB = m$, $AC = n$, $n > m$, & diện tích của $\triangle ABC$ là S . (b) Cho $n = 7\text{cm}$, $m = 3\text{cm}$, hỏi diện tích $\triangle ADM$ chiếm bao nhiêu % diện tích $\triangle ABC$?

Bài toán 44 (Chính et al., 2022, 22., p. 68). Cho A, B, C, D, E, F, G thẳng hàng theo thứ tự đó & O nằm ngoài đường thẳng chứa 7 điểm đó sao cho $\widehat{OAB} = \widehat{OBC} = \widehat{OCD} = \widehat{ODE} = \widehat{OEF} = \widehat{OFG}$. Đặt $OA = a, OB = b, OC = c, OD = d, OE = e, OF = f, OG = g, AB = x, BC = y, CD = z, DE = t, EF = u, FG = v$. Thiết lập những tỷ lệ thức từ các kích thước đã cho.

Bài toán 45 (Thân et al., 2022, 17., p. 87). $\triangle ABC$ có $AB = 15\text{cm}$, $AC = 20\text{cm}$, $BC = 25\text{cm}$. Đường phân giác góc BAC cắt cạnh BC tại D . (a) Tính DB, DC . (b) Tính tỷ số diện tích của $\triangle ABD, \triangle ACD$.

Bài toán 46 (Thân et al., 2022, 18., p. 87). $\triangle ABC$ có các đường phân giác AD, BE, CF . Chứng minh: $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$.

Bài toán 47 (Thân et al., 2022, 19., p. 87). $\triangle ABC$ cân tại B có $BA = BC = a$, $AC = b$. Đường phân giác góc A cắt BC tại M , đường phân giác góc C cắt BA tại N . (a) Chứng minh $MN \parallel AC$. (b) Tính MN theo a, b .

Bài toán 48 (Thân et al., 2022, 20., p. 87). $\triangle ABC$ có $AB = 12\text{cm}$, $AC = 20\text{cm}$, $BC = 28\text{cm}$. Đường phân giác góc A cắt BC tại D . Qua D kẻ $DE \parallel AB$, $E \in AC$. (a) Tính BD, CD, DE . (b) Cho biết diện tích $\triangle ABC$ là S , tính diện tích $\triangle ABD, \triangle ADE, \triangle DCE$.

Bài toán 49 (Thân et al., 2022, 21., p. 88). Cho tam giác vuông ABC , $\hat{A} = 90^\circ$, $AB = 21\text{cm}$, $AC = 28\text{cm}$; đường phân giác góc A cắt BC tại D , đường thẳng qua D ẽ song song với AB , cắt AC tại E . (a) Tính BD, CD, DE . (b) Tính diện tích $\triangle ABD$ ẽ $\triangle ACD$.

Bài toán 50 (Thân et al., 2022, 22., p. 88). Cho $\triangle ABC$ cân tại A , $AB = AC$, đường phân giác góc B cắt AC tại D ẽ biết $AB = 15\text{cm}$, $BC = 10\text{cm}$. (a) Tính AD, CD . (b) Đường vuông góc với BD tại B cắt đường thẳng AC kéo dài tại E . Tính EC .

Bài toán 51 (Thân et al., 2022, 23., p. 88). $\triangle ABC$ vuông tại A , $AB = 12\text{cm}$, $AC = 16\text{cm}$; đường phân giác góc A cắt BC tại D . (a) Tính BC, BD, CD . (b) Vẽ đường cao AH , tính AH, DH, AD .

Bài toán 52 (Thân et al., 2022, 24., p. 88). $\triangle ABC$ vuông tại A , $AB = a\text{cm}$, $AC = b\text{cm}$, $a < b$, trung tuyến AM , đường phân giác AD , $M, D \in BC$. (a) Tính BC, BD, CD, AM, DM theo a, b . (b) Tính BC, BD, CD, AM, DM khi $a = 4.15\text{cm}$, $b = 7.25\text{cm}$.

Bài toán 53 (Thân et al., 2022, 3.1., p. 89). $\triangle ABC$ vuông tại A có đường phân giác AD . Biết độ dài của các cạnh góc vuông $AB = 3.75\text{cm}$, $AC = 4.5\text{cm}$. Tính BD, CD .

Bài toán 54 (Thân et al., 2022, 3.2., p. 89). Hình bình hành $ABCD$ có độ dài cạnh $AB = a = 12.5\text{cm}$, $BC = b = 7.25\text{cm}$. Đường phân giác của góc B cắt đường chéo AC tại E , đường phân giác của góc D cắt đường chéo AC tại F . Tính AC biết $EF = m = 3.45\text{cm}$.

4 Khái Niệm 2 Tam Giác Đồng Dạng

Định nghĩa 3 (2 tam giác đồng dạng). $\triangle A'B'C'$ gọi là đồng dạng với $\triangle ABC$ nếu: $\hat{A}' = \hat{A}$, $\hat{B}' = \hat{B}$, $\hat{C}' = \hat{C}$, $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$.

$\triangle A'B'C'$ đồng dạng với $\triangle ABC$ được ký hiệu là $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ (viết theo thứ tự cặp đỉnh tương ứng). Tỷ số các cạnh tương ứng $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k$ gọi là tỷ số đồng dạng.

Bài toán 55 (Chính et al., 2022, ?2., p. 70). (a) Nếu $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ thì $\triangle A'B'C'$ có đồng dạng với $\triangle ABC$ không? Tỷ số đồng dạng là bao nhiêu? (b) Nếu $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ theo tỷ số k thì $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ theo tỷ số nào?

Định lý 4 (Tính chất 2 tam giác đồng dạng). (a) Mỗi tam giác đồng dạng với chính nó với tỷ số đồng dạng $k = 1$. (b) Nếu $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ với tỷ số đồng dạng k thì $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ với tỷ số đồng dạng $\frac{1}{k}$. (c) Nếu $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ với tỷ số đồng dạng k' ẽ $\triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C''$ với tỷ số đồng dạng k'' thì $\triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$ với tỷ số đồng dạng $k = k'k''$.

Do tính chất (b) ta nói $\triangle ABC$ & $\triangle A'B'C'$ đồng dạng (với nhau).

Bài toán 56 (Chính et al., 2022, ?3., p. 70). Cho $\triangle ABC$. Kẻ đường thẳng a song song với cạnh BC ẽ cắt 2 cạnh AB, AC theo thứ tự tại M, N . $\triangle AMN$ ẽ $\triangle ABC$ có các góc ẽ các cạnh tương ứng như thế nào?

Định lý 5. Nếu 1 đường thẳng cắt 2 cạnh của tam giác ẽ song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành 1 tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho.

GT: $\triangle ABC$, $MN \parallel BC$, $M \in AB$, $N \in AC$. KL: $\triangle AMN \sim \triangle ABC$. Định lý cũng đúng cho trường hợp đường thẳng a cắt phần kéo dài 2 cạnh của tam giác & song song với cạnh còn lại.

Chứng minh. Xét $\triangle ABC$ & $MN \parallel BC$. $\triangle AMN$ & $\triangle ABC$ cos: $\widehat{AMN} = \widehat{ABC}$, $\widehat{ANM} = \widehat{ACB}$ (các cặp góc đồng vị); \widehat{BAC} là góc chung. Mặt khác, theo hệ quả 1 của định lý Thales, $\triangle AMN$ & $\triangle ABC$ có 3 cặp cạnh tương ứng tỷ lệ: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$. Vậy $\triangle AMN \sim \triangle ABC$. \square

Bài toán 57 (Chính et al., 2022, 23., p. 71). Đ/S? (a) 2 tam giác bằng nhau thì đồng dạng với nhau. (b) 2 tam giác đồng dạng với nhau thì bằng nhau.

Bài toán 58 (Chính et al., 2022, 24., p. 72). $\triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C''$ theo tỷ số đồng dạng k_1 , $\triangle A''B''C'' \sim \triangle ABC$ theo tỷ số đồng dạng k_2 . Hỏi $\triangle A'B'C'$ đồng dạng với $\triangle ABC$ theo tỷ số nào?

Bài toán 59 (Chính et al., 2022, 25., p. 72). Cho $\triangle ABC$. Vẽ 1 tam giác đồng dạng với $\triangle ABC$ theo tỷ số $\frac{1}{2}$.

Bài toán 60 (Chính et al., 2022, 26., p. 72). Cho $\triangle ABC$, vẽ $\triangle A'B'C'$ đồng dạng với $\triangle ABC$ theo tỷ số đồng dạng $k = \frac{2}{3}$.

Bài toán 61 (Chính et al., 2022, 27., p. 72). Từ điểm M thuộc cạnh AB của $\triangle ABC$ với $AM = \frac{1}{2}MB$, kẻ các tia song song với AC, BC , chúng cắt BC, AC lần lượt tại L, N . (a) Nêu tất cả các cặp tam giác đồng dạng. (b) Đối với mỗi cặp tam giác đồng dạng, viết các cặp góc bằng nhau & tỷ số đồng dạng tương ứng.

Bài toán 62 (Chính et al., 2022, 28., p. 72). $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ theo tỷ số đồng dạng $k = \frac{3}{5}$. (a) Tính tỷ số chu vi của 2 tam giác đã cho. (b) Tính tỷ số diện tích của 2 tam giác đã cho. (c) Cho biết hiệu chu vi của 2 tam giác trên là 40dm, tính chu vi của mỗi tam giác.

Bài toán 63 (Thân et al., 2022, 25., p. 89). Cho $\triangle A'B'C', \triangle ABC$ đồng dạng với nhau theo tỷ số k . Chứng minh tỷ số chu vi của 2 tam giác cũng bằng k .

Bài toán 64 (Thân et al., 2022, 26., p. 89). $\triangle ABC$ có $AB = 3\text{cm}, BC = 5\text{cm}, CA = 7\text{cm}$. $\triangle A'B'C'$ đồng dạng với $\triangle ABC$ có cạnh nhỏ nhất là 4.5cm. Tính các cạnh còn lại của $\triangle A'B'C'$.

Bài toán 65 (Thân et al., 2022, 27., p. 90). Cho $\triangle ABC$ có $AB = 16.2\text{cm}, BC = 24.3\text{cm}, AC = 32.7\text{cm}$. Tính độ dài các cạnh của $\triangle A'B'C'$ biết $\triangle A'B'C'$ đồng dạng với $\triangle ABC$ &: (a) $A'B'$ lớn hơn AB 10.8cm; (b) $A'B'$ bé hơn AB 5.4cm.

Bài toán 66 (Thân et al., 2022, 28., p. 90). Hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$, có $CD = 2AB$. Gọi E là trung điểm của CD . Chứng minh $\triangle ADE, \triangle ABE, \triangle BEC$ đồng dạng với nhau từng đôi một.

Bài toán 67 (Thân et al., 2022, 4.1., p. 90). $\triangle ABC$ có tổng độ dài 2 cạnh $AB + AC = 10.75\text{cm}$ & đồng dạng với $\triangle A'B'C'$ có độ dài các cạnh $A'B' = 8.5\text{cm}, A'C' = 7.35\text{cm}, B'C' = 6.25\text{cm}$. Tính chu vi $\triangle ABC$.

5 Trường Hợp Đồng Dạng Thứ Nhất

Định lý 6. Nếu 3 cạnh của tam giác này tỷ lệ với 3 cạnh của tam giác kia thì 2 tam giác đó đồng dạng.

$$\text{GT: } \triangle ABC, \triangle A'B'C', \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \quad (1). \text{ KL: } \triangle A'B'C' \sim \triangle ABC.$$

Chứng minh. Đặt trên tia AB đoạn thẳng $AM = A'B'$. Vẽ đường thẳng $MN \parallel BC$, $N \in AC$. Xét $\triangle AMN, \triangle ABC, \triangle A'B'C'$. $MN \parallel BC \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ (2). Từ (1) & (2), với chú ý $AM = A'B'$, ta có $\frac{A'C'}{AC} = \frac{AN}{AC}$ & $\frac{B'C'}{BC} = \frac{MN}{BC}$, suy ra $AN = A'C'$ & $MN = B'C'$. $\triangle AMN$ & $\triangle A'B'C'$ có 3 cạnh bằng nhau từng đôi một: $AM = A'B'$ (cách dựng), $AN = A'C'$, & $MN = B'C'$ (theo chứng minh trên). Do đó $\triangle AMN = \triangle A'B'C'$ (c.c.c). $\triangle AMN = \triangle ABC \Rightarrow \triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$. \square

Bài toán 68 (Chính et al., 2022, 29., pp. 74–75). Cho $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ có $AB = 6, BC = 12, CA = 9, A'B' = 4, B'C' = 8, C'A' = 6$. (a) $\triangle ABC$ & $\triangle A'B'C'$ có đồng dạng với nhau không? Vì sao? (b) Tính tỷ số chu vi của 2 tam giác đó. (c) Tính tỷ số diện tích của 2 tam giác đó.

Bài toán 69 (Chính et al., 2022, 30., p. 75). $\triangle ABC$ có độ dài các cạnh là $AB = 3\text{cm}, AC = 5\text{cm}, BC = 7\text{cm}$. $\triangle A'B'C'$ đồng dạng với $\triangle ABC$ & có chu vi bằng 55cm. Tính độ dài các cạnh của $\triangle A'B'C'$.

Bài toán 70 (Chính et al., 2022, 31., p. 75). Cho 2 tam giác đồng dạng có tỷ số chu vi là $\frac{15}{17}$ & hiệu độ dài 2 cạnh tương ứng của chúng là 12.5cm. Tính 2 cạnh đó.

Giải. Giả sử 2 tam giác đó là $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$, $\frac{P_{\triangle A'B'C'}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{15}{17}$. Giả sử 2 cạnh đó là $AB, A'B'$. Vì $\frac{15}{17} < 1$, nên $A'B' < AB$. Theo giả thiết, $AB - A'B' = 12.5$ (1), & $\frac{AB}{A'B'} = \frac{P_{\triangle A'B'C'}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{15}{17}$ (2). Thay $A'B' = \frac{15}{17}AB$ vào phương trình (1): $AB - \frac{15}{17}AB = 12.5 \Leftrightarrow AB = \frac{12.5}{1 - \frac{15}{17}} = 106.25\text{cm}$. Suy ra $A'B' = AB - 12.5 = 106.25 - 12.5 = 93.75\text{cm}$. Vậy 2 cạnh đó dài 93.75cm, 106.25cm. \square

Bài toán 71 (Thân et al., 2022, 29., p. 90). 2 tam giác mà các cạnh có độ dài như sau có đồng dạng không? (a) 4cm, 5cm, 6cm, & 8mm, 10mm, 12mm; (b) 3cm, 4cm, 6cm, & 9cm, 15cm, 18cm; (c) 1dm, 2dm, 2dm, & 1dm, 1dm, 0.5dm.

Giải. (c) Vì $\frac{1}{0.5} = \frac{2}{1} = \frac{2}{1} = 2$ nên 2 tam giác đó đồng dạng. \square

Bài toán 72 (Thân et al., 2022, 30., p. 90). $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 6\text{cm}, AC = 8\text{cm}$, & $\triangle A'B'C'$ vuông tại A' có $A'B' = 9\text{cm}, B'C' = 15\text{cm}$. $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ có đồng dạng với nhau không? Vì sao?

Bài toán 73 (Thân et al., 2022, 31., p. 90). $\triangle ABC$ có 3 đường trung tuyến cắt nhau tại O . Gọi P, Q, R thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng OA, OB, OC . Chứng minh $\triangle PQR$ đồng dạng với $\triangle ABC$.

Bài toán 74 (Thân et al., 2022, 32., p. 91). $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn & có trục tâm là điểm H . Gọi K, M, N lần lượt là trung điểm của AH, BH, CH . Chứng minh $\triangle KMN$ đồng dạng với $\triangle ABC$ với tỷ số đồng dạng $k = \frac{1}{2}$.

Bài toán 75 (Thân et al., 2022, 33., p. 91). Cho $\triangle ABC$ & 1 điểm O nằm trong tam giác đó. Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của OA, OB, OC . (a) Chứng minh $\triangle PQR$ đồng dạng với $\triangle ABC$. (b) Tính chu vi $\triangle PQR$ biết $\triangle ABC$ có chu vi p bằng 543cm.

Bài toán 76 (Thân et al., 2022, 34., p. 91). Cho trước $\triangle ABC$. Dựng 1 tam giác đồng dạng với $\triangle ABC$ theo tỷ số $k = \frac{2}{3}$.

Bài toán 77 (Thân et al., 2022, 5.1., p. 91). 2 tam giác nào có độ dài 3 cạnh sau đây đồng dạng với nhau? (a) 1.5cm, 2cm, 3cm, & 4.5cm, 6cm, 9cm. (b) 2.5cm, 4cm, 5cm, & 5cm, 12cm, 8cm. (c) 3.5cm, 6cm, 7cm, & 15cm, 12cm, 7cm. (d) 2cm, 5cm, 6.5cm, & 13cm, 10cm, 4cm.

Bài toán 78 (Thân et al., 2022, 5.2., p. 91). Cho $\triangle ABC$ nhọn & 1 điểm O bất kỳ trong tam giác đó. 3 điểm D, E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CA . 3 điểm M, P, Q theo thứ tự là trung điểm của OA, OB, OC . (a) $\triangle DEF, \triangle MPQ$ có đồng dạng với nhau không? Vì sao? Tỷ số đồng dạng? (b) Khi nào lục giác $DPEQFM$ có tất cả các cạnh bằng nhau? Vẽ hình trong trường hợp đó.

6 Trường Hợp Đồng Dạng Thứ 2

Định lý 7. Nếu 2 cạnh của tam giác này tỷ lệ với 2 cạnh của tam giác kia & 2 góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau, thì 2 tam giác đồng dạng.

GT: $\triangle ABC, \triangle A'B'C', \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$ (1), $\widehat{A'} = \widehat{A}$. KL: $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

Chứng minh. Trên tia AB , đặt đoạn thẳng $AM = A'B'$. Qua M kẻ đường thẳng $MN \parallel BC, N \in AC$. Ta có $\triangle AMN \sim \triangle ABC$, do đó $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$. Vì $AM = A'B'$, nên suy ra $\frac{A'B'}{AB} = \frac{AN}{AC}$. Từ (1) & (2), suy ra $AN = A'C'$. $\triangle AMN$ & $\triangle A'B'C'$ có $AM = A'B'$ (cách dựng), $\widehat{A} = \widehat{A'}$ (giả thiết), & $AN = A'C'$ (chứng minh ở trên), nên chúng bằng nhau (c.g.c). Từ $\triangle AMN = \triangle A'B'C'$ suy ra $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$. \square

Bài toán 79 (Chính et al., 2022, ?3, p. 77). (a) Vẽ $\triangle ABC$ có $\widehat{BAC} = 50^\circ, AB = 5\text{cm}, AC = 7.5\text{cm}$. (b) Lấy trên các cạnh AB, AC lần lượt 2 điểm D, E sao cho $AD = 3\text{cm}, AE = 2\text{cm}$. $\triangle AED, \triangle ABC$ có đồng dạng với nhau không? Vì sao?

Bài toán 80 (Chính et al., 2022, 32., p. 77). Trên 1 cạnh của góc $xOy, xOy \neq 180^\circ$, đặt các đoạn thẳng $OA = 5\text{cm}, OB = 16\text{cm}$. Trên cạnh thứ 2 của góc đó, đặt các đoạn thẳng $OC = 8\text{cm}, OD = 10\text{cm}$. (a) Chứng minh $\triangle OCB, \triangle OAD$ đồng dạng. (b) Gọi giao điểm của các cạnh AD, BC là I , chứng minh $\triangle IAB, \triangle ICD$ có các góc bằng nhau từng đôi một.

Bài toán 81 (Chính et al., 2022, 33., p. 77). Chứng minh nếu $\triangle A'B'C'$ đồng dạng với $\triangle ABC$ theo tỷ số k , thì tỷ số của 2 đường trung tuyến tương ứng của 2 tam giác đó cũng bằng k .

Bài toán 82 (Chính et al., 2022, 34., p. 77). Dựng $\triangle ABC$ biết $\widehat{A} = 60^\circ$, tỷ số $\frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$, & đường cao $AH = 6\text{cm}$.

Bài toán 83 (Thân et al., 2022, 35., p. 92). Cho $\triangle ABC$ có $AB = 12\text{cm}, AC = 15\text{cm}, BC = 18\text{cm}$. Trên cạnh AB , đặt đoạn thẳng $AM = 10\text{cm}$, trên cạnh AC đặt đoạn thẳng $AN = 8\text{cm}$ Tính MN .

Bài toán 84 (Thân et al., 2022, 36., p. 92). Hình thang $ABCD, AB \parallel CD, AB = 4\text{cm}, CD = 16\text{cm}, BD = 8\text{cm}$. Chứng minh $\widehat{BAD} = \widehat{DBC}$ & $BC = 2AD$.

Bài toán 85 (Thân et al., 2022, 37., p. 92). Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 60^\circ, AB = 6\text{cm}, AC = 9\text{cm}$. (a) Dựng tam giác đồng dạng với $\triangle ABC$ theo tỷ số đồng dạng $k = \frac{1}{3}$. (b) Nêu 1 vài cách dựng khác & vẽ hình trong từng trường hợp cụ thể.

Bài toán 86 (Thân et al., 2022, 38., p. 92). Cho $\triangle ABC$ có $AB = 10\text{cm}, AC = 20\text{cm}$. Trên cạnh AC , đặt đoạn thẳng $AD = 5\text{cm}$. Chứng minh $\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$.

Bài tập phụ thuộc vào hình vẽ: Thân et al., 2022, 6.1., pp. 92–93.

Bài toán 87 (Thân et al., 2022, 6.2., p. 93). Hình bình hành $ABCD$ có 2 đường chéo AC, BD cắt nhau tại O & $AC = 2AB$. (a) Vẽ trung tuyến BE của $\triangle ABO$. Chứng minh $\widehat{ABE} = \widehat{ACB}$. (b) Gọi M là trung điểm cạnh BC , chứng minh EM vuông góc với đường chéo BD .

7 Trường Hợp Đồng Dạng Thứ 3

Định lý 8. Nếu 2 góc của tam giác này lần lượt bằng 2 góc của tam giác kia thì 2 tam giác đó đồng dạng với nhau.

GT: $\triangle ABC, \triangle A'B'C', \widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{B} = \widehat{B'}$. KL: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Chứng minh. Đặt trên tia AB đoạn thẳng $AM = A'B'$. Qua M kẻ đường thẳng $MN \parallel BC, N \in AC$. $MN \parallel BC \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$. Xét $\triangle AMN$ & $\triangle A'B'C'$: $\widehat{A} = \widehat{A'}$ (giả thiết), $AM = A'B'$ (theo cách dựng), $\widehat{AMN} = \widehat{B}$ (2 góc đồng vị). Nhưng $\widehat{B} = \widehat{B'}$ (giả thiết), do đó $\widehat{AMN} = \widehat{B'}$. Vậy $\triangle AMN = \triangle A'B'C'$ (g.c.g), suy ra $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$. \square

Bài toán 88 (Chính et al., 2022, ?2, p. 79). Cho $\triangle ABC, AB = 3\text{cm}, AC = 4.5\text{cm}, \widehat{ABD} = \widehat{BCA}$. (a) Có bao nhiêu tam giác? Có cặp tam giác nào đồng dạng với nhau không? (b) Tính AD, CD . (c) Cho biết thêm BD là tia phân giác của góc B . Tính độ dài các đoạn thẳng BC, BD .

Bài toán 89 (Chính et al., 2022, 35., p. 79). Chứng minh nếu $\triangle A'B'C'$ đồng dạng với $\triangle ABC$ theo tỷ số k thì tỷ số của 2 đường phân giác tương ứng của chúng cũng bằng k .

Bài toán 90 (Chính et al., 2022, 36., p. 79). Cho hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 12.5$, $CD = 28.5$, $\widehat{DAB} = \widehat{DBC}$. Tính BD .

Bài toán 91 (Chính et al., 2022, 37., p. 79). Cho hình thang vuông $ACDE$, $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^\circ$. Lấy $B \in AC$. Biết $AE = 10\text{cm}$, $AB = 15\text{cm}$, $BC = 12\text{cm}$, $\widehat{ABE} = \widehat{BDC}$. (a) Có bao nhiêu tam giác vuông? Kể tên. (b) Tính CD, BE, BD, DE . (c) So sánh diện tích $\triangle BDE$ với tổng diện tích của $\triangle AEB$ & $\triangle BCD$.

Bài tập phụ thuộc hình vẽ: Chính et al., 2022, 38., p. 79.

Bài toán 92 (Chính et al., 2022, 39., pp. 79–80). Cho hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$. Gọi O là giao điểm của 2 đường chéo AC, BD . (a) Chứng minh $OA \cdot OD = OB \cdot OC$. (b) Đường thẳng qua O vuông góc với AB, CD theo thứ tự tại H, K . Chứng minh $\frac{OH}{OK} = \frac{AB}{CD}$.

Bài toán 93 (Chính et al., 2022, 40., p. 80). Cho $\triangle ABC$, trong đó $AB = 15\text{cm}$, $AC = 20\text{cm}$. Trên 2 cạnh AB, AC lần lượt lấy 2 điểm D, E sao cho $AD = 8\text{cm}$, $AE = 6\text{cm}$. $\triangle ABC, \triangle ADE$ có đồng dạng với nhau không? Vì sao?

Bài toán 94 (Chính et al., 2022, 41., p. 80). Tìm các dấu hiệu để nhận biết 2 tam giác cân đồng dạng.

Bài toán 95 (Chính et al., 2022, 42., p. 80). So sánh các trường hợp đồng dạng của tam giác với các trường hợp bằng nhau của tam giác (nên lên những điểm giống nhau & khác nhau).

Bài toán 96 (Chính et al., 2022, 43., p. 80). Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 12\text{cm}$, $BC = 7\text{cm}$. Trên cạnh AB lấy 1 điểm E sao cho $AE = 8\text{cm}$. Đường thẳng DE cắt cạnh CB kéo dài tại F . (a) Có bao nhiêu cặp tam giác đồng dạng với nhau? Viết các cặp tam giác đồng dạng với nhau theo các đỉnh tương ứng. (b) Tính EF, BF biết $DE = 10\text{cm}$.

Bài toán 97 (Chính et al., 2022, 44., p. 80). Cho $\triangle ABC$, $AB = 24\text{cm}$, $AC = 28\text{cm}$. Tia phân giác của góc A cắt cạnh BC tại D . Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của B, C trên đường thẳng AD . (a) Tính tỷ số $\frac{BM}{CN}$. (b) Chứng minh $\frac{AM}{AN} = \frac{DM}{DN}$.

Bài toán 98 (Chính et al., 2022, 45., p. 80). $\triangle ABC, \triangle DEF$ có $\widehat{A} = \widehat{D}, \widehat{B} = \widehat{E}, AB = 8\text{cm}, BC = 10\text{cm}, DE = 6\text{cm}$. Tính AC, DF, EF biết AC dài hơn DF 3cm.

Bài toán 99 (Thân et al., 2022, 39., p. 93). Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E là trung điểm của AB , F là trung điểm của CD . Chứng minh $\triangle ADE, \triangle CBF$ đồng dạng với nhau.

Bài toán 100 (Thân et al., 2022, 40., p. 93). Tam giác vuông ABC có $\widehat{A} = 90^\circ$ & đường cao AH . Từ điểm H hạ đường HK vuông góc với AC . (a) Hỏi trong hình đã cho có bao nhiêu tam giác đồng dạng với nhau? (b) Viết các cặp tam giác đồng dạng với nhau theo thứ tự các đỉnh tương ứng & tỷ lệ thức giữa các cặp cạnh tương ứng của chúng.

Bài toán 101 (Thân et al., 2022, 41., p. 94). Hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$, có $AB = 2.5\text{cm}$, $AD = 3.5\text{cm}$, $BD = 5\text{cm}$ & $\widehat{DAB} = \widehat{DBC}$. (a) Chứng minh $\triangle ADB \sim \triangle BCD$. (b) Tính độ dài các cạnh BC, CD . (c) Sau khi tính, vẽ lại hình chính xác bằng thước & compa.

Bài toán 102 (Thân et al., 2022, 42., p. 94). Cho tam giác vuông ABC , $\widehat{A} = 90^\circ$. Dựng AD vuông góc với BC , $D \in BC$. Đường phân giác BE cắt AD tại F . Chứng minh $\frac{FD}{FA} = \frac{EA}{EC}$.

Bài toán 103 (Thân et al., 2022, 43., p. 94). Chứng minh nếu $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ đồng dạng với nhau thì: (a) Tỷ số của 2 đường phân giác tương ứng bằng tỷ số đồng dạng. (b) Tỷ số của 2 trung tuyến tương ứng bằng tỷ số đồng dạng.

Bài toán 104 (Thân et al., 2022, 7.1., p. 94). $\triangle ABC$ có 2 đường cao AD, BE cắt nhau tại H . Đếm số cặp tam giác đồng dạng với nhau.

Bài toán 105 (Thân et al., 2022, 7.2., p. 94). Hình thang vuông, $AB \parallel CD$, có đường chéo BD vuông góc với cạnh BC tại B & có độ dài $BD = m = 7.25\text{cm}$. Tính độ dài các cạnh của hình thang biết $BC = n = 10.75\text{cm}$.

8 Các Trường Hợp Đồng Dạng của Tam Giác Vuông

Định lý 9 (2 tam giác vuông đồng dạng). 2 tam giác vuông đồng dạng với nhau nếu: (a) Tam giác vuông này có 1 góc nhọn bằng góc nhọn của tam giác vuông kia; hoặc (b) Tam giác vuông này có 2 cạnh góc vuông tỷ lệ với 2 cạnh góc vuông của tam giác vuông kia; hoặc (c) Nếu cạnh huyền & 1 cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỷ lệ với cạnh huyền & cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì 2 tam giác vuông đó đồng dạng.

$$\text{GT: } \triangle ABC, \triangle A'B'C', \widehat{A} = \widehat{A'} = 90^\circ, \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'B'}{AB} \quad (1). \text{ KL: } \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

Chứng minh. Từ giả thiết (1), bình phương 2 vế, ta được: $\frac{B'C'^2}{BC^2} = \frac{A'B'^2}{AB^2}$. Theo tính chất của dãy tỷ số bằng nhau, ta có: $\frac{B'C'^2}{BC^2} = \frac{A'B'^2}{AB^2} = \frac{B'C'^2 - A'B'^2}{BC^2 - AB^2} = \frac{A'C'^2}{AC^2}$ (đẳng thức cuối suy ra từ định lý Pythagore). Lấy căn bậc 2, thu được: $\frac{B'C'}{BC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$. Vậy $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ (c.c.c). \square

Định lý 10. Tỷ số 2 đường cao tương ứng của 2 tam giác đồng dạng bằng tỷ số đồng dạng.

Chứng minh. Cho $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ với tỷ số đồng dạng $k = \frac{AB}{A'B'}$, 2 đường cao tương ứng là $AH, A'H'$. Xét $\triangle ABH, \triangle A'B'H'$: $\widehat{B} = \widehat{B'}$ (vì $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$), $\widehat{AHB} = \widehat{A'H'B'} = 90^\circ$. Suy ra $\triangle ABH \sim \triangle A'B'H'$ (g.g.g), suy ra $\frac{AH}{A'H'} = \frac{AB}{A'B'} = k$. \square

Định lý 11. Tỷ số diện tích của 2 tam giác đồng dạng bằng bình phương tỷ số đồng dạng.

Chứng minh. Cho $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ với tỷ số đồng dạng $k = \frac{AB}{A'B'}$, 2 đường cao tương ứng là $AH, A'H'$. Theo định lý 10, $\frac{AH}{A'H'} = k$. Suy ra $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2}AH \cdot BC}{\frac{1}{2}A'H' \cdot B'C'} = \frac{AH}{A'H'} \cdot \frac{BC}{B'C'} = k \cdot k = k^2$. \square

46., p. 84.

Bài toán 106 (Chính et al., 2022, 47., p. 84). $\triangle ABC$ có độ dài các cạnh là 3cm, 4cm, 5cm. $\triangle A'B'C'$ đồng dạng với $\triangle ABC$ & có diện tích là 54cm^2 . Tính độ dài các cạnh $\triangle A'B'C'$.

Bài toán 107 (Chính et al., 2022, 48., p. 84). Bóng của 1 cột điện trên mặt đất có độ dài 4.5m. Cùng thời điểm đó, 1 thanh sắt cao 2.1m cắm vuông góc với mặt đất có bóng dài 0.6m. Tính chiều cao của cột điện.

Bài toán 108 (Chính et al., 2022, 49., p. 84). Cho $\triangle ABC$ vuông ở A & có đường cao AH , $AB = 12.45\text{cm}$, $AC = 20.5\text{cm}$. (a) Có bao nhiêu cặp tam giác đồng dạng với nhau (chỉ rõ từng cặp tam giác đồng dạng & viết theo các đỉnh tương ứng). (b) Tính BC, AH, BH, CH .

Bài toán 109 (Chính et al., 2022, 50., p. 84). Bóng của 1 ống khói nhà máy trên mặt đất có độ dài là 36.9m. Cùng thời điểm đó, 1 thanh sắt cao 2.1m cắm vuông góc với mặt đất có bóng dài 1.62m. Tính chiều cao của ống khói.

Bài toán 110 (Chính et al., 2022, 51., p. 84). Chân đường cao AH của tam giác vuông ABC chia cạnh huyền BC thành 2 đoạn thẳng có độ dài 25cm & 36cm. Tính chu vi & diện tích của tam giác vuông đó.

Bài toán 111 (Chính et al., 2022, 52., p. 85). Cho 1 tam giác vuông, trong đó cạnh huyền dài 20cm & 1 cạnh góc vuông dài 12cm. Tính độ dài hình chiếu cạnh góc vuông kia trên cạnh huyền.

Bài toán 112 (Thân et al., 2022, 44., p. 95). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $AC = 9\text{cm}$, $BC = 24\text{cm}$. Đường trung trực của BC cắt đường thẳng AC tại D , cắt BC tại M . Tính độ dài đoạn thẳng CD .

Bài toán 113 (Thân et al., 2022, 45., p. 95). Cho hình thang vuông $ABCD$, $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $AB = 6\text{cm}$, $CD = 12\text{cm}$, $AD = 17\text{cm}$. Trên cạnh AD , đặt đoạn thẳng $AE = 8\text{cm}$. Chứng minh $\widehat{BEC} = 90^\circ$.

Bài toán 114 (Thân et al., 2022, 46., p. 95). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $AC = 4\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$. Kẻ tia Cx vuông góc với BC , tia Cx & điểm A khác phía so với đường thẳng BC . Lấy trên tia Cx điểm D sao cho $BD = 9\text{cm}$. Chứng minh $BD \parallel AC$.

Bài toán 115 (Thân et al., 2022, 47., p. 95). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH , H nằm trên cạnh BC . Lấy điểm M nằm trên đoạn CH . N là hình chiếu vuông góc của M lên cạnh AC . Chỉ ra các tam giác đồng dạng & chứng minh.

Bài toán 116 (Thân et al., 2022, 48., p. 95). Cho $\triangle ABC$, $\widehat{A} = 90^\circ$, có đường cao AH . Chứng minh $AH^2 = BH \cdot CH$.

Bài toán 117 (Thân et al., 2022, 49., p. 96). Đường cao của 1 tam giác vuông xuất phát từ đỉnh góc vuông chia cạnh huyền thành 2 đoạn thẳng có độ dài là 9cm, 16cm. Tính độ dài các cạnh của tam giác vuông đó.

Bài toán 118 (Thân et al., 2022, 50., p. 96). Tam giác vuông ABC , $\widehat{A} = 90^\circ$, có đường cao AH & trung tuyến AM . Tính diện tích $\triangle AMH$ biết $BH = 4\text{cm}$, $CH = 9\text{cm}$.

Bài toán 119 (Thân et al., 2022, 8.1., p. 96). Cho góc nhọn xOy . Trên tia Ox lấy 1 điểm A sao cho $OA = 8.65\text{cm}$. Trên tia Oy lấy 1 điểm B sao cho $OB = 15.45\text{cm}$. Vẽ $AE \perp Oy$, $BF \perp Ox$. Biết $BF = 10.25\text{cm}$. Tính AE .

Bài toán 120 (Thân et al., 2022, 8.2., p. 96). $\triangle ABC$ vuông tại A có đường cao $AH = n = 10.85\text{cm}$ & cạnh $AB = m = 12.5\text{cm}$. Tính độ dài các cạnh còn lại của tam giác.

Bài toán 121 (Thân et al., 2022, 8.3., p. 96). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , chân H của đường cao AH chia cạnh huyền BC thành 2 đoạn có độ dài 4cm & 9cm. Gọi D, E là hình chiếu của H trên AB, AC . (a) Tính DE . (b) Các đường thẳng vuông góc với DE tại D & E cắt BC theo thứ tự tại M & N . Chứng minh M là trung điểm của BH, N là trung điểm CH . (c) Tính diện tích tứ giác $DENM$.

9 Ứng Dụng Thực Tế của Tam Giác Đồng Dạng

Bài toán 122 (Chính et al., 2022, 53., p. 92). 1 người đo chiều cao của 1 cây nhờ 1 cọc chôn xuống đất, cọc cao 2m & đặt xa cây 15m. Sau khi người ấy lùi ra xa cách cọc 0.8m thì nhìn thấy đầu cọc & đỉnh cây cùng nằm trên 1 đường thẳng. Hỏi cây cao bao nhiêu biết khoảng cách từ chân đến mắt người ấy là 1.6m?

Bài tập phụ thuộc hình vẽ: Chính et al., 2022, 54.–55., p. 87.

10 Miscellaneous

Bài toán 123 (Chính et al., 2022, 56., p. 92). *Xác định tỷ số của 2 đoạn thẳng AB, CD trong các trường hợp sau: (a) $AB = 5\text{cm}$, $CD = 15\text{cm}$; (b) $AB = 45\text{dm}$, $CD = 150\text{cm}$; (c) $AB = 5CD$.*

Bài toán 124 (Chính et al., 2022, 57., p. 92). *Cho $\triangle ABC$, $AB < AC$. Vẽ đường cao AH , đường phân giác AD , đường trung tuyến AM . Nhận xét về vị trí của 3 điểm H, D, M .*

Bài toán 125 (Chính et al., 2022, 58., p. 92). *Cho $\triangle ABC$ cân, $AB = AC$, vẽ các đường cao BH, CK . (a) Chứng minh $BK = CH$. (b) Chứng minh $KH \parallel BC$. (c) Cho biết $BC = a$, $AB = AC = b$. Tính HK .*

Bài toán 126 (Chính et al., 2022, 59., p. 92). *Hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$ có AC, BD cắt nhau tại O , AD, BC cắt nhau tại K . Chứng minh OK đi qua trung điểm của các cạnh AB, CD .*

Bài toán 127 (Chính et al., 2022, 60., p. 92). *Cho $\triangle ABC$ vuông, $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{C} = 30^\circ$, ℓ đường phân giác BD (D thuộc cạnh AC). (a) Tính tỷ số $\frac{AD}{CD}$. (b) Cho biết độ dài $AB = 12.5\text{cm}$, tính chu vi ℓ diện tích $\triangle ABC$.*

Bài toán 128 (Chính et al., 2022, 61., p. 92). *Tứ giác $ABCD$ có $AB = 4\text{cm}$, $BC = 20\text{cm}$, $CD = 25\text{cm}$, $DA = 8\text{cm}$, đường chéo $BD = 10\text{cm}$. (a) Nêu cách vẽ tứ giác $ABCD$ có kích thước đã cho. (b) $\triangle ABD, \triangle BDC$ có đồng dạng với nhau không? Vì sao? (c) Chứng minh $AB \parallel CD$.*

Bài toán 129 (Thân et al., 2022, 51., p. 97). *Cho $\triangle ABC$. (a) Tìm trên cạnh AB điểm M sao cho $\frac{AM}{BM} = \frac{2}{3}$, tìm trên cạnh AC điểm N sao cho $\frac{AN}{CN} = \frac{2}{3}$. (b) 2 đường thẳng MN, BC có song song với nhau không? Vì sao? (c) Cho biết chu vi, diện tích $\triangle ABC$ thứ tự là P, S . Tính chu vi ℓ diện tích $\triangle AMN$.*

Bài toán 130 (Thân et al., 2022, 52., p. 97). *Tứ giác $ABCD$ có 2 góc vuông tại đỉnh A, C , 2 đường chéo AC, BD cắt nhau tại O , $\widehat{BAO} = \widehat{BDC}$. Chứng minh: (a) $\triangle ABO \sim \triangle DCO$; (b) $\triangle BCO \sim \triangle ADO$.*

Bài toán 131 (Thân et al., 2022, 53., p. 97). *Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a = 12\text{cm}$, $BC = b = 9\text{cm}$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BD . (a) Chứng minh $\triangle AHD \sim \triangle BCD$. (b) Tính AH . (c) Tính diện tích $\triangle AHB$.*

Bài toán 132 (Thân et al., 2022, 54., pp. 97–98). *Tứ giác $ABCD$ có 2 đường chéo AC, BD cắt nhau tại O , $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$. Gọi E là giao điểm của 2 đường thẳng AD, BC . Chứng minh: (a) $\triangle AOB \sim \triangle DOC$; (b) $\triangle AOD \sim \triangle BOC$; (c) $EA \cdot ED = EB \cdot EC$.*

Bài toán 133 (Thân et al., 2022, 55., p. 98). *$\triangle ABC$ có 3 đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H . Chứng minh $AH \cdot DH = BH \cdot EH = CH \cdot FH$.*

Bài toán 134 (Thân et al., 2022, 56., p. 98). *2 điểm M, K thứ tự nằm trên cạnh AB, BC của $\triangle ABC$; 2 đoạn thẳng AK, CM cắt nhau tại điểm P . Biết $AP = 2PK$ ℓ $CP = 2PM$. Chứng minh AK, CM là các trung tuyến của $\triangle ABC$.*

Bài toán 135 (Thân et al., 2022, 57., p. 98). *Cho hình bình hành $ABCD$. Từ A kẻ $AM \perp BC$, $AN \perp CD$, $M \in BC$, $N \in CD$. Chứng minh $\triangle MAN$ đồng dạng với $\triangle ABC$.*

Bài toán 136 (Thân et al., 2022, 58., p. 98). *Giả sử AC là đường chéo lớn của hình bình hành $ABCD$. Từ C , vẽ đường vuông góc CE với đường thẳng AB , đường vuông góc CF với đường thẳng AD , E, F thuộc phần kéo dài của các cạnh AB, AD . Chứng minh $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$.*

Bài toán 137 (Thân et al., 2022, 59., p. 98). *$\triangle ABC$ có 2 đường cao là AD, BE , $D \in BC$, $E \in AC$. Chứng minh $\triangle DEC, \triangle ABC$ là 2 tam giác đồng dạng.*

Bài toán 138 (Thân et al., 2022, 60., p. 98). *$\triangle ABC$ có 2 trung tuyến AK, CL cắt nhau tại G . Từ 1 điểm P bất kỳ trên cạnh AC , vẽ các đường thẳng PE song song với AK , PF song song với CL , $E \in BC$, $F \in AB$. Các trung tuyến AK, CL cắt đoạn thẳng EF theo thứ tự tại M, N . Chứng minh các đoạn FM, MN, NE bằng nhau.*

Tài liệu

Chính, Phan Đức, Tôn Thân, Nguyễn Huy Doan, Lê Văn Hồng, Trương Công Thành, and Nguyễn Hữu Thảo (2022). *Toán 8 Tập 2*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 133.

Thân, Tôn, Nguyễn Huy Doan, Lê Văn Hồng, Trần Hữu Nam, Trương Công Thành, and Nguyễn Hữu Thảo (2022). *Bài Tập Toán 8 Tập 2*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 192.