

# Bến Tre Mathematical Olympiad

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 3 tháng 7 năm 2023

## Tóm tắt nội dung

## Mục lục

1 Châu Thành, Bến Tre 2022–2023	1
2 Thành Phố Bến Tre 2022–2023	1
3 Bến Tre 2022–2023	1

## 1 Châu Thành, Bến Tre 2022–2023

## 2 Thành Phố Bến Tre 2022–2023

**Bài toán 1.** Cho biểu thức:

$$A = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} + \frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}} \text{ với } a > 0, a \neq 1.$$

(a) Chứng minh  $A > 4$ . (b) Tìm các giá trị của  $a$  để biểu thức  $\frac{6}{A}$  nhận giá trị nguyên.

**Bài toán 2.** Phân tích đa thức thành nhân tử:  $x^2(y-2z) + y^2(z-x) + 2z^2(x-y) + xyz$ .

**Bài toán 3.** (a) Giải phương trình:  $(x^2-4x+11)(x^4-8x^2+21)=35$ . (b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = (x+2)(y+2), \\ \left(\frac{x}{y+2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x+2}\right)^2 = 1. \end{cases}$$

**Bài toán 4.** (a) Tìm tất cả các số tự nhiên  $n$  để  $B = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + 1$  là số nguyên tố. (b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$C = \frac{\sqrt{x+6\sqrt{x-9}} + \sqrt{x-6\sqrt{x-9}}}{\sqrt{\frac{81}{x^2} - \frac{18}{x} + 1}} \text{ với } x > 9.$$

**Bài toán 5.** Cho  $\triangle ABC$  nhọn, 3 đường cao  $AK, BD, CE$  cắt nhau tại  $H$ . (a) Chứng minh  $BH \cdot BD = BC \cdot BK$  &  $BH \cdot BD + CH \cdot CE = BC^2$ . (b) Chứng minh:  $BH = AC \cot \widehat{ABC}$ . (c) Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Đường thẳng qua  $A$  vuông góc với  $AM$  cắt các đường thẳng  $BD, CE$  lần lượt tại  $Q, P$ . Chứng minh  $MP = MQ$ .

## 3 Bến Tre 2022–2023

**Bài toán 6.** (a) Tính giá trị biểu thức:  $A = \sqrt{4+\sqrt{15}} + \sqrt{4-\sqrt{15}} - 2\sqrt{3-\sqrt{5}}$ . (b) Rút gọn biểu thức:

$$B = \frac{x-5+2\sqrt{x+6\sqrt{x}+9}}{x+3\sqrt{x}+2}, \quad x \geq 0,$$

© tìm  $x$  sao cho  $B = \frac{2022}{2023}$ .

**Bài toán 7.** Tìm tất cả các cặp số nguyên  $(x, y)$  thỏa  $\frac{x^2 + y^2}{x + y} = \frac{85}{13}$ .

**Bài toán 8.** Giải phương trình:  $9\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 - 10\left(\frac{x^2-4}{x^2-1}\right) = 0$ .

**Bài toán 9.** Cho  $a, b, c$  là các số thực không âm. Chứng minh:

$$a\sqrt{3a^2 + 6b^2} + b\sqrt{3b^2 + 6c^2} + c\sqrt{3c^2 + 6a^2} \geq (a + b + c)^2.$$

**Bài toán 10.** Cho  $\triangle ABC$  biết  $\widehat{ACB} = 45^\circ$ , gọi  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$  &  $H$  là trực tâm của  $\triangle ABC$ . Đường thẳng qua  $O$  & vuông góc với  $CO$  cắt  $AC$  &  $BC$  lần lượt tại điểm  $K$  & điểm  $L$ . Chứng minh: chu vi  $\triangle HKL$  bằng với đường kính của  $(O)$ .

**Bài toán 11.** Cho 2 đường tròn  $(O_1), (O_2)$  tiếp xúc ngoài nhau tại điểm  $T$ . 2 đường tròn này nằm trong đường tròn  $(O_3)$  & tiếp xúc với  $(O_3)$  lần lượt tại điểm  $M \in (O_1)$  & điểm  $N \in (O_2)$ . Tiếp tuyến chung tại  $T$  của  $(O_1), (O_2)$  cắt  $(O_3)$  tại điểm  $P$  ( $P$  &  $O_3$  nằm cùng phía của đường thẳng  $MN$ ). Đường thẳng  $PM$  cắt  $(O_1)$  tại  $A \neq M$ , đường thẳng  $PN$  cắt  $(O_2)$  tại  $D \neq N$ , & đường thẳng  $MN$  cắt  $(O_1)$  &  $(O_2)$  lần lượt tại  $B \neq M$  &  $C \neq N$ . Gọi  $E$  là giao điểm của  $AB$  &  $CD$ . (a) Tứ giác  $AEDP$  là hình gì? Giải thích. (b) Chứng minh  $\widehat{EBC} = \widehat{EDA}$ .