

Problems in Elementary Inequality

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 5 tháng 11 năm 2022

Tóm tắt nội dung

A problem set for elementary inequality.

Mục lục

1 Easy Problems	2
Tài liệu	2

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

1 Easy Problems

Bài toán 1.1 (Sơn et al., 2021, Bổ đề 1.1, p. 5). *Chứng minh:* $4ab \leq (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, hay có thể viết dưới dạng $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Hint. $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \geq 0$, $2(a^2+b^2) - (a+b)^2 = (a-b)^2 \geq 0$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. “=” $\Leftrightarrow a = b$. □

Bài toán 1.2 (Sơn et al., 2021, Bổ đề 1.2, p. 5). *Chứng minh:* $3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$, hay có thể viết dưới dạng $ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Hint. $(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0$, $3(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c)^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$. “=” $\Leftrightarrow a = b = c$. □

Bài toán 1.3 (Sơn et al., 2021, Bổ đề 1.3, p. 6). *Chứng minh:* $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$, hay có thể viết dưới dạng $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$, $\forall a, b > 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Hint. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a+b} = \frac{(a-b)^2}{ab(a+b)} \geq 0$, $\forall a, b > 0$. “=” $\Leftrightarrow a = b > 0$. □

Bài toán 1.4 (Sơn et al., 2021, Bổ đề 1.4, p. 6). *Chứng minh:* $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$, hay có thể viết dưới dạng $\frac{1}{a+b+c} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$, $\forall a, b, c > 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Bài toán 1.5 (Sơn et al., 2021, Mở rộng Bổ đề 1.3–1.4, p. 6 cho n số). *Chứng minh:*

$$\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1 + \dots + a_n}, \text{ i.e., } \frac{1}{a_1 + \dots + a_n} \leq \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right), \forall a_i > 0, \forall i = 1, \dots, n,$$

hay có thể được viết gọn lại như sau:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n a_i}, \text{ i.e., } \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i} \leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}, \forall a_i > 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 1.6 (Sơn et al., 2021, Bổ đề 1.5, p. 7). *Chứng minh:* $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$, $\forall a, b \geq 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Bài toán 1.7 (Sơn et al., 2021, Mở rộng Bổ đề 1.5, p. 7). *Chứng minh:* $\sqrt{a+b+c} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{3(a+b+c)}$, $\forall a, b, c \geq 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Bài toán 1.8 (Sơn et al., 2021, Mở rộng Bổ đề 1.5, p. 7 cho n số). *Chứng minh:* $\sqrt{a_1 + \dots + a_n} \leq \sqrt{a_1} + \dots + \sqrt{a_n} \leq \sqrt{n(a_1 + \dots + a_n)}$, $\forall a_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n$, hay có thể được viết gọn lại như sau:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i} \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \leq \sqrt{n \sum_{i=1}^n a_i}, \forall a_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 1.9 (Sơn et al., 2021, Bổ đề 1.6, p. 7). *Chứng minh:* $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}, a+b \geq 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Hint. $a^3 + b^3 - ab(a+b) = (a+b)(a-b)^2 \geq 0$, $\forall a, b \in \mathbb{R}, a+b \geq 0$. “=” $\Leftrightarrow a = \pm b$. □

Bài toán 1.10 (Sơn et al., 2021, Mở rộng Bổ đề 1.6, p. 7). *Chứng minh:* $a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Bài toán 1.11 (Sơn et al., 2021, Bổ đề 1.7, p. 7). *Chứng minh:* $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $\forall a, b \geq 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Bài toán 1.12 (Sơn et al., 2021, Bổ đề 1.8, p. 7). *Chứng minh:* $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$, $\forall a, b, c \geq 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Tài liệu

Sơn, Nguyễn Ngọc et al. (2021). *Các Chủ Đề Bất Đẳng Thức Ôn Thi Vào Lớp 10*. 3rd ed. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, p. 143.