

# Problem: Calculus on Set $\mathbb{N}$ of Naturals

## Bài Tập: Các Phép Tính Trên Tập Hợp Các Số Tự Nhiên

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 26 tháng 7 năm 2023

### Tóm tắt nội dung

Last updated version: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 6/natural/natural calculus/problem: calculus on set  \$\mathbb{N}\$  of naturals](https://github.com/NQBH/hobby/grade6/natural/natural_calculus/problem:calculus_on_set_N_of_naturals) [pdf].<sup>1</sup> [TeX]<sup>2</sup>.

## Mục lục

<b>1</b>	<b>Phép <math>\pm, \cdot, :</math> on <math>\mathbb{N}</math></b>	<b>1</b>
1.1	Phối Hợp Các Phép Tính	4
1.2	Use Inequalities – Sử Dụng Bất Đẳng Thức	4
<b>2</b>	<b>Exponentiation on <math>\mathbb{N}</math> – Lũy Thừa với Số Mũ Tự Nhiên</b>	<b>5</b>
2.1	Compare Exponentiations – So Sánh Các Lũy Thừa	6
2.2	Last Digit of Products & Exponentiations – Chữ Số Tận Cùng của Các Tích & Lũy Thừa	6
<b>3</b>	<b>Miscellaneous</b>	<b>6</b>
	<b>Tài liệu</b>	<b>6</b>

## 1 Phép $\pm, \cdot, :$ on $\mathbb{N}$

- ([Tuy23], Ví dụ 3, p. 8). 1 học sinh khi nhân 1 số với 31 đã đặt các tích riêng thẳng hàng như trong phép cộng nên tích đã giảm đi 540 đơn vị so với tích đúng. Tìm tích đúng.
- ([Tuy23], Ví dụ 4, p. 8). Cho 2 số không chia hết cho 3, khi chia cho 3 được các số dư khác nhau. Chứng minh tổng của 2 số đó chia hết cho 3.
- ([Tuy23], 14., p. 9). Tính hợp lý: (a)  $38 + 41 + 117 + 159 + 62$ . (b)  $73 + 86 + 978 + 914 + 3022$ . (c)  $341 \cdot 67 + 341 \cdot 16 + 659 \cdot 83$ . (d)  $42 \cdot 53 + 47 \cdot 156 - 47 \cdot 114$ .
- ([Tuy23], 15., p. 9). Tính giá trị của biểu thức: (a)  $A = (100 - 1) \cdot (100 - 2) \cdots (100 - n)$  với  $n \in \mathbb{N}^*$  & tích trên có đúng 100 thừa số. (b)  $B = 13a + 19b + 4a - 2b$  với  $a + b = 100$ .
- ([Tuy23], 16., p. 9). Không tính giá trị cụ thể, so sánh giá trị 2 biểu thức: (a)  $A = 199 \cdot 201$  &  $B = 200 \cdot 200$ . (b)  $C = 35 \cdot 53 - 18$  &  $D = 35 + 53 \cdot 34$ .
- ([Tuy23], 17., p. 9). Tính hợp lý: (a)  $(44 \cdot 52 \cdot 60) : (11 \cdot 13 \cdot 15)$ . (b)  $123 \cdot 456456 - 456 \cdot 123123$ . (c)  $(98 \cdot 7676 - 9898 \cdot 76) : (2021 \cdot 2022 \cdot 2023 \cdots 2030)$ .
- ([Tuy23], 18., p. 9). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:  $A = 2021 - 1021 : (999 - x)$ .
- ([Tuy23], 20., p. 9). Tìm số hạng thứ 5, thứ  $n$  của dãy số: (a) 2, 3, 7, 25, ... (b) 8, 30, 72, 140, ...
- ([Tuy23], 21., p. 9). Tìm  $x$ : (a)  $(x + 74) - 318 = 200$ . (b)  $3636 : (12x - 91) = 36$ . (c)  $(x : 23 + 45) \cdot 67 = 8911$ .
- ([Tuy23], 22., p. 9). 1 nong tầm là 5 nong kén. 1 nong kén là 9 nén tơ. Hỏi muốn được 540 nén tơ thì phải chăn bao nhiêu nong tầm?
- ([Tuy23], 23., p. 9). 2 số tự nhiên  $a, b$  chia hết cho  $m$  có cùng số dư,  $a \geq b$ . Chứng tỏ  $a - b$  chia hết cho  $m$ .

\*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam  
e-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com); website: <https://nqbh.github.io>.

<sup>1</sup>URL: [https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary\\_mathematics/grade\\_6/natural/natural\\_calculus/NQBH\\_natural\\_calculus\\_problem.pdf](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_6/natural/natural_calculus/NQBH_natural_calculus_problem.pdf).

<sup>2</sup>URL: [https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary\\_mathematics/grade\\_6/natural/natural\\_calculus/NQBH\\_natural\\_calculus\\_problem.tex](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_6/natural/natural_calculus/NQBH_natural_calculus_problem.tex).

- 12 ([Tuy23], 24., p. 9). Trong 1 phép chia có số bị chia là 155, số dư là 12. Tìm số chia & thương.
- 13 ([Tuy23], 25., p. 9). Viết tập hợp  $A$  các số tự nhiên  $x$  biết lấy  $x$  chia cho 12 ta được thương bằng số dư.
- 14 ([Tuy23], 26., p. 10). Chia 129 cho 1 số ta được số dư là 10. Chia 61 cho số đó ta cũng được số dư là 10. Tìm số chia.
- 15 ([Tuy23], 27., p. 10). Cho 3 chữ số  $a, b, c$  khác nhau & khác 0. Với cùng cả 3 chữ số này có thể lập được bao nhiêu số có 3 chữ số?
- 16 ([Tuy23], 28., p. 10). Cho 4 chữ số khác nhau & khác 0. (a) Với cùng cả 4 chữ số này có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số? (b) Có thể lập được bao nhiêu số có 2 chữ số khác nhau trong 4 chữ số đã cho?
- 17 ([Tuy23], 29., p. 10). Cho 4 chữ số khác nhau trong đó có 1 chữ số 0. Với cùng cả 4 chữ số này có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số?
- 18 ([Tuy23], 30., p. 10). Anh Bách đi mua bánh kẹo tại 1 siêu thị, thanh toán bằng 1 phiếu mua hàng trị giá 100000 đồng. Siêu thị không trả lại số tiền thừa. Giúp anh Bách chọn mua vừa hết số tiền ghi trong phiếu. Bảng giá 1 số mặt hàng có bán:

STT	Tên hàng	Đơn vị	Giá bán
1	Bánh đậu xanh	Hộp	31 500 đồng
2	Bánh bông lan	Gói	23 500 đồng
3	Bánh gạo	Gói	19 000 đồng
4	Bánh gạo chiên	Gói	17 800 đồng
5	Bánh quy	Gói	13 500 đồng
6	Bánh xốp	Gói	5 300 đồng
7	Kẹo hương dâu	Gói	2 500 đồng

- 19 ([Bin22], Ví dụ 4, p. 7). Cho  $A = 137 \cdot 454 + 206$ ,  $B = 453 \cdot 138 - 110$ . Không tính giá trị của  $A$  &  $B$ , chứng tỏ  $A = B$ .
- 20 ([Bin22], Ví dụ 5, p. 8). Tìm kết quả của phép nhân:  $A = \underbrace{33 \dots 3}_{50} \cdot \underbrace{99 \dots 9}_{50}$ .
- 21 ([Bin22], Ví dụ 6, p. 8). Tổng của 2 số tự nhiên khác nhau gấp 3 hiệu của chúng. Tìm thương của 2 số tự nhiên đó.
- 22 ([Bin22], Ví dụ 7, p. 8). Khi chia số tự nhiên  $a$  cho 54, ta được số dư là 38. Chia số  $a$  cho 18, ta được thương là 14 & còn dư. Tìm  $a$ .
- 23 ([Bin22], Ví dụ 8, p. 8). Tìm 2 số tự nhiên lớn hơn 0 sao cho tích của 2 số ấy gấp đôi tổng của chúng.
- 24 ([Bin22], Ví dụ 9, p. 9). Điền các số tự nhiên 1, 2, 3, 4, 5 vào các dấu  $*$  để kết quả phép tính bằng 6:  $* + * - * * : *$ .
- 25 ([Bin22], Ví dụ 10, p. 9). Giá tiền 7 quyển vở nhiều hơn giá tiền 8 bút chì. Hỏi giá tiền 8 quyển vở & giá tiền 9 bút chì, đồng nào nhiều hơn?
- 26 ([Bin22], Ví dụ 11, p. 9). Cho 6 số tự nhiên khác nhau có tổng bằng 50. Chứng minh trong 6 số đó tồn tại 3 số có tổng lớn hơn hoặc bằng 30.
- 27 ([Bin22], 13., p. 10). Có thể viết được hay không 9 số vào 1 bảng vuông  $3 \times 3$ , sao cho: Tổng các số trong 3 dòng theo thứ tự bằng 352, 463, 541; tổng các số trong 3 cột theo thứ tự bằng 335, 687, 234?
- 28 ([Bin22], 14., p. 10). Cho 9 số xếp vào 9 ô thành 1 hàng ngang, trong đó số đầu tiên là 4, số cuối cùng là 8, & tổng 3 số ở 3 ô liền nhau bất kỳ bằng 17. Tìm 9 số đó.
- 29 ([Bin22], 15., p. 10). Tìm số có 3 chữ số, biết chữ số hàng trăm gấp 4 lần chữ số hàng đơn vị & nếu viết số ấy theo thứ tự ngược lại thì nó giảm đi 594 đơn vị.
- 30 ([Bin22], 16., p. 10). Thay các dấu  $*$  bởi các chữ số thích hợp:  $**** - *** = **$  biết số bị trừ, số trừ & hiệu đều không đổi nếu đọc mỗi số từ phải sang trái.
- 31 ([Bin22], 19., p. 10). Hiệu của 2 số là 4. Nếu tăng 1 số gấp 3 lần, giữ nguyên số kia thì hiệu của chúng bằng 60. Tìm 2 số đó.
- 32 ([Bin22], 20., p. 10). Cho số 123456789. Đặt 1 số dấu “+” & “-” vào giữa các chữ số để kết quả của phép tính bằng 100.
- 33 ([Bin22], 21., p. 10). Cho số 987654321. Đặt 1 số dấu “+” & “-” vào giữa các chữ số để kết quả của phép tính bằng: 100, 99.
- 34 ([Bin22], 22., p. 10). Tìm giá trị lớn nhất của hiệu  $\overline{bd} - \overline{ac}$  biết  $a < b < c < d$ .
- 35 ([Bin22], 23., p. 10). Tìm 6 chữ số khác nhau  $a, b, c, d, e, f$  sao cho  $A = \overline{abc} - \overline{def}$  có giá trị nhỏ nhất.
- 36 ([Bin22], 24., p. 11). Cho 6 chữ số khác nhau  $a, b, c, d, e, f$ . Gọi  $A = \overline{abc} + \overline{bcd} + \overline{cde} + \overline{def}$ . Tìm giá trị lớn nhất & giá trị nhỏ nhất của  $A$ .

- 37 ([Bin22], 25., p. 11). Tìm 2 số biết tổng của chúng gấp 5 lần hiệu của chúng, tích của chúng gấp 24 lần hiệu của chúng.
- 38 ([Bin22], 26., p. 11). Tìm 2 số biết tổng của chúng gấp 7 lần hiệu của chúng, còn tích của chúng gấp 192 lần hiệu của chúng.
- 39 ([Bin22], 27., p. 11). Tích của 2 số là 6210. Nếu giảm 1 thừa số đi 7 đơn vị thì tích mới là 5265. Tìm các thừa số của tích.
- 40 ([Bin22], 28., p. 11). Bảo làm 1 phép nhân, trong đó số nhân là 102. Nhưng khi viết số nhân, Bảo đã quên không viết chữ số 0 nên tích bị giảm đi 21870 đơn vị so với tích đúng. Tìm số bị nhân của phép nhân đó.
- 41 ([Bin22], 29., p. 11). 1 học sinh nhân 78 với số nhân là số có 2 chữ số, trong đó chữ số hàng chục gấp 3 lần chữ số hàng đơn vị. Do nhầm lẫn bạn đó viết đổi thứ tự 2 chữ số của số nhân, nên tích giảm đi 2808 đơn vị so với tích đúng. Tìm số nhân đúng.
- 42 ([Bin22], 30., p. 11). 1 học sinh nhân 1 số với 463. Vì bạn đó viết các chữ số tận cùng của các tích riêng ở cùng 1 cột nên tích bằng 30524. Tìm số bị nhân.
- 43 ([Bin22], 31., p. 11). Chứng minh hiệu sau có thể viết được thành 1 tích của 2 thừa số bằng nhau:  $11111111 - 2222$ .
- 44 ([Bin22], 32., p. 11). Chỉ ra 2 số khác nhau sao cho nếu nhân mỗi số với 7 thì ta được kết quả là các số gồm toàn các chữ số 9.
- 45 ([Bin22], 33., p. 11). Tìm kết quả của phép nhân sau:  $\underbrace{3 \dots 3}_{50} \cdot \underbrace{3 \dots 3}_{50}$ .
- 46 ([Bin22], 34., p. 11). Tìm tổng các chữ số của tích: (a)  $A = \underbrace{88 \dots 8}_{21} \cdot \underbrace{99 \dots 9}_{21}$ . (b)  $B = \underbrace{99 \dots 9}_{94} \cdot \underbrace{44 \dots 4}_{94}$ .
- 47 ([Bin22], 35., p. 11). Chứng minh các số sau có thể viết được thành 1 tích của 2 số tự nhiên liên tiếp: 111222, 444222.
- 48 ([Bin22], 36., p. 11). Tìm 2 số tự nhiên có thương bằng 35 biết nếu số bị chia tăng thêm 1056 đơn vị thì thương bằng 57.
- 49 ([Bin22], 37., p. 11). Tìm số bị chia  $\ell$  số chia biết thương bằng 6, số dư bằng 49, tổng của số bị chia, số chia,  $\ell$  số dư bằng 595.
- 50 ([Bin22], 38., p. 11). 1 phép chia có thương bằng 4, số dư bằng 25. Tổng của số bị chia, số chia  $\ell$  số dư bằng 210. Tìm số bị chia  $\ell$  số chia.
- 51 ([Bin22], 39., p. 11). Trong hội trường có 680 người ngồi. Tất cả có 25 dãy ghế, mỗi dãy ghế có 30 chỗ ngồi. Ít nhất có bao nhiêu dãy ghế có số chỗ ngồi như nhau?
- 52 ([Bin22], 40., p. 12). (a) Trong 1 năm, có ít nhất  $\ell$  nhiều nhất bao nhiêu ngày Chủ nhật? (b) Ngày 1.1 năm nay rơi vào ngày Chủ nhật. Ngày 1.1 năm sau rơi vào ngày thứ mấy?
- 53 ([Bin22], 41., p. 12). Tháng 8 của 1 năm có 4 ngày thứ Năm  $\ell$  5 ngày thứ 4. Hỏi ngày đầu tiên của tháng đó là ngày thứ mấy?
- 54 ([Bin22], 42., p. 12). Ngày 19.8.2002 vào ngày thứ Hai. Tính xem ngày 19.8.1945 vào ngày nào trong tuần?
- 55 ([Bin22], 43., p. 12). Tìm thương của 1 phép nhân, biết nếu thêm 15 vào số bị chia  $\ell$  thêm 5 vào số chia thì thương  $\ell$  số dư không đổi.
- 56 ([Bin22], 44., p. 12). Tìm thương của 1 phép chia, biết nếu tăng số bị chia 90 đơn vị, tăng số chia 6 đơn vị thì thương  $\ell$  số dư không đổi.
- 57 ([Bin22], 45., p. 12). Tìm thương của 1 phép chia, biết nếu tăng số bị chia 73 đơn vị, tăng số chia 4 đơn vị thì thương không đổi, còn số dư tăng 5 đơn vị.
- 58 ([Bin22], 46., p. 12). Xác định phép chia, biết số bị chia, số chia, thương  $\ell$  số dư là 4 số trong các số sau: (a) 3, 4, 16, 64, 256, 772. (b) 2, 3, 9, 27, 81, 243, 567.
- 59 ([Bin22], 47., p. 12). Khi chia 1 số tự nhiên gồm 3 chữ số như nhau cho 1 số tự nhiên gồm 3 chữ số như nhau, ta được thương là 2  $\ell$  còn dư. Nếu xóa 1 chữ số ở số bị chia  $\ell$  xóa 1 chữ số ở số chia thì thương của phép chia vẫn bằng 3 nhưng số dư giảm hơn trước là 100. Tìm số bị chia  $\ell$  số chia lúc đầu.
- 60 ([Bin22], 48., p. 12). Trong 1 phép chia có dư, số bị chia gồm 4 chữ số như nhau, số chia gồm 3 chữ số như nhau, thương bằng 13  $\ell$  còn dư. Nếu xóa 1 chữ số ở số bị chia, xóa 1 chữ số ở số chia thì thương không đổi, còn số dư giảm hơn trước là 100 đơn vị. Tìm số bị chia  $\ell$  số chia lúc đầu.

## 1.1 Phối Hợp Các Phép Tính

**61** ([Bin22], 49., p. 12). *Tính nhanh: (a)  $19 \cdot 64 + 76 \cdot 34$ . (b)  $35 \cdot 12 + 65 \cdot 13$ . (c)  $136 \cdot 68 + 16 \cdot 272$ . (d)  $(2 + 4 + 6 + \dots + 100) \cdot (36 \cdot 333 - 108 \cdot 111)$ . (e)  $19991999 \cdot 19981998 \cdot 1999$ .*

**62** ([Bin22], 50., p. 12). *Không tính cụ thể các giá trị của  $A$  &  $B$ , cho biết số nào lớn hơn & lớn hơn bao nhiêu? (a)  $A = 1998 \cdot 1998$ ,  $B = 1996 \cdot 2000$ . (b)  $A = 2000 \cdot 2000$ ,  $B = 1990 \cdot 2010$ . (c)  $A = 25 \cdot 33 - 10$ ,  $B = 31 \cdot 26 + 10$ . (d)  $A = 32 \cdot 53 - 31$ ,  $B = 53 \cdot 31 + 32$ .*

Bài toán trên có thể được tổng quát như sau:

**63.** Cho  $n, k \in \mathbb{N}^*$ . Không tính cụ thể các giá trị của  $A_i$  &  $B_i$ ,  $i = 1, 2$ , cho biết số nào lớn hơn & lớn hơn bao nhiêu? (a)  $A_1 = n \cdot n = n^2$ ,  $B_1 = (n - k)(n + k)$ . (b)  $A_2 = n^3$ ,  $B_2 = (n - k)n(n + k)$ .

*Giải.* (a) Khai triển  $B_1$  hoặc dùng hằng đẳng thức đáng nhớ  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ , ta có  $B_1 = (n - k)(n + k) = n^2 + nk - kn - k^2 = n^2 - k^2 = A_1 - k^2 < A_1$  do  $k \geq 1$ . Vậy  $A_1 > B_1$  & lớn hơn 1 lượng bằng  $k^2$ . (b) Nhận thấy  $A_2 = nA_1$ ,  $B_2 = nB_1$ , nên  $A_2 - B_2 = n(A_1 - B_1) = nk^2 > 0$ .  $\square$

Bài toán trên có thể được tổng quát hơn nữa như sau, ý tưởng giải vẫn là sử dụng nhiều lần hằng đẳng thức  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ , 1 cách thích hợp:

**64.** Cho  $m, n, k \in \mathbb{N}^*$ . Không tính cụ thể các giá trị của  $A_i$  &  $B_i$ ,  $i = 1, 2$ , cho biết số nào lớn hơn & lớn hơn bao nhiêu? (a)  $A_1 = n^{2m}$ ,  $B_1 = (n - mk)(n - (m - 1)k) \dots (n - k)(n + k) \dots (n + mk)$ . (b)  $A_2 = n^{2m+1}$ ,  $B_2 = (n - mk)(n - (m - 1)k) \dots (n - k)n(n + k) \dots (n + mk)$ .

Khi  $m = 1$ , bài toán tổng quát này trở thành bài toán trước đó.

**65** ([Bin22], 51., p. 12). *Tìm thương của phép chia sau mà không tính kết quả cụ thể của số bị chia & số chia:  $\frac{37 \cdot 13 - 13}{24 + 37 \cdot 12}$ .*

**66** ([Bin22], 52., p. 13). *Tính: (a)  $A = \frac{\sum_{i=1}^{101} i}{\sum_{i=1}^{101} (-1)^{i+1} i} = \frac{101 + 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1}{101 - 100 + 99 - 98 + \dots + 3 - 2 + 1}$ . (b)  $B = \frac{3737 \cdot 43 - 4343 \cdot 37}{2 + 4 + 6 + \dots + 100}$ .*

**67** ([Bin22], 53., p. 13). *Vận dụng tính chất các phép tính để tìm các kết quả bằng cách nhanh chóng: (a)  $1990 \cdot 1990 - 1992 \cdot 1988$ . (b)  $(1374 \cdot 57 + 687 \cdot 86) : (26 \cdot 13 + 74 \cdot 14)$ . (c)  $(124 \cdot 237 + 152) : (870 + 235 \cdot 122)$ . (d)  $\frac{423134 \cdot 846267 - 423133}{846267 \cdot 423133 + 423134}$ .*

**68** ([Bin22], 54., p. 13). *Tìm  $a \in \mathbb{N}$  biết: (a)  $697 : \frac{15a + 364}{a} = 17$ . (b)  $92 \cdot 4 - 27 = \frac{a + 350}{a} + 315$ .*

**69** ([Bin22], 55., p. 13). *Tìm  $x \in \mathbb{N}$  biết: (a)  $720 : [41 - (2x - 5)] = 40$ . (b)  $(x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + \dots + (x + 100) = 5750$ .*

**70** ([Bin22], 56., p. 13). *Cho số 12345678. Đặt các dấu phép tính & dấu ngoặc để kết quả của phép tính bằng 9.*

**71** ([Bin22], 57., p. 13). *Viết 5 dãy tính có kết quả bằng 100, với 6 chữ số 5 cùng với dấu các phép tính (& dấu ngoặc nếu cần).*

**72** ([Bin22], 58., p. 13). *(a) Viết dãy tính có kết quả bằng 100, với 5 chữ số như nhau cùng với dấu các phép tính (& dấu ngoặc nếu cần). (b) Cũng hỏi như vậy với 6 chữ số khác nhau.*

**73** ([Bin22], 59., p. 13). *(a) Tính (kết quả khá đặc biệt):  $1 \cdot 8 + 1$ ,  $12 \cdot 8 + 2$ ,  $123 \cdot 8 + 3$ ,  $1234 \cdot 8 + 4$ . (b) Viết tiếp 4 dòng nữa theo quy luật trên.*

**74** ([Bin22], 60., p. 13). *Điền các số 1, 2, 3, 4, 5 vào các dấu \* để kết quả của phép tính bằng 3:  $* + * - * \cdot * : *$ .*

## 1.2 Use Inequalities – Sử Dụng Bất Đẳng Thức

**75** ([Bin22], 61., p. 13). *Giá tiền 1 quyển sách, 6 quyển vở, 3 chiếc bút là 7700 đồng, giá tiền 8 quyển sách, 6 quyển vở, 6 chiếc bút là 16000 đồng. So sánh giá tiền 1 quyển sách & 1 quyển vở.*

**76** ([Bin22], 62., p. 13). *Viết liên tiếp các số tự nhiên từ 1 đến 15, được:  $A = 1234 \dots 1415$ . Xóa đi 15 chữ số của số  $A$  để các chữ số còn lại (vẫn giữ nguyên thứ tự như trước) tạo thành: (a) Số nhỏ nhất. (b) Số lớn nhất.*

**77** ([Bin22], 63., p. 14). *Cho số  $123 \dots 20$ , i.e., viết liên tiếp các số tự nhiên từ 1 đến 20. Xóa đi 20 chữ số để số còn lại có giá trị: (a) Nhỏ nhất. (b) Lớn nhất.*

**78** ([Bin22], 64., p. 14). *Tìm giá trị nhỏ nhất của hiệu giữa 1 số tự nhiên có 2 chữ số với tổng các chữ số của nó.*

**79** ([Bin22], 65., p. 14). *Tìm số chia & số dư biết số bị chia bằng 112, thương bằng 5.*

**80** ([Bin22], 66., p. 14). *Tìm số chia & số dư biết số bị chia bằng 813, thương bằng 15, số dư gồm 2 chữ số như nhau.*

**81** ([Bin22], 67., p. 14). *Tìm số chia & số dư của phép chia 542 cho 1 số tự nhiên, biết thương bằng 12.*

**82** ([Bin22], 68., p. 14). *1 học sinh trong 5 năm học từ lớp 5 đến lớp 9 đã qua 31 kỳ thi, trong đó số kỳ thi ở năm sau nhiều hơn số kỳ thi ở năm trước, & số kỳ thi ở năm cuối gấp 3 lần số kỳ thi ở năm đầu. Hỏi học sinh đó thi bao nhiêu kỳ ở năm thứ 4?*

**83** ([Bin22], 69., p. 14). *Tìm 2 số tự nhiên sao cho tổng của 2 số ấy bằng tích của chúng.*

**84** ([Bin22], 70., p. 14). *Tìm 3 số tự nhiên khác 0 biết tổng của 3 số ấy bằng tích của chúng.*

## 2 Exponentiation on $\mathbb{N}$ – Lũy Thừa với Số Mũ Tự Nhiên

**Định nghĩa 1** (Số chính phương). Số chính phương là số bằng bình phương của 1 số tự nhiên, i.e.,  $a$  là số chính phương  $\Leftrightarrow a = n^2$  với  $n \in \mathbb{N}$  nào đó.

**85** ([Tuy23], Ví dụ 5, p. 11). Chứng minh tổng  $\sum_{i=1}^5 i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$  là 1 số chính phương.

**86** ([Tuy23], Ví dụ 6, p. 11). Tìm  $x \in \mathbb{N}$  biết  $2 \cdot 3^x = 162$ .

**87** ([Tuy23], Ví dụ 7, p. 11). Tìm  $x \in \mathbb{N}$  biết  $(x+2)^4 = 5^2 \cdot 25$ .

**88** ([Tuy23], 31., p. 11). Trong các số  $2^4, 3^4, 4^2, 4^3, 99^0, 0^{99}, 1^n$  với  $n \in \mathbb{N}^*$ , các số nào bằng nhau? Số nào nhỏ nhất? Số nào lớn nhất?

**89** ([Tuy23], 32., p. 11). Kiểm tra đẳng thức  $152 - 5^3 = 10^2$  đúng hay sai. Nếu sai, di chuyển 1 chữ số đến vị trí khác để được đẳng thức đúng.

**90** ([Tuy23], 33., p. 11). Chứng minh mỗi tổng/hiệu sau là 1 số chính phương: (a)  $3^2 + 4^2$ . (b)  $13^2 - 5^2$ . (c)  $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$ .

**91** ([Tuy23], 34., pp. 11–12). Viết các tổng/hiệu sau dưới dạng 1 lũy thừa với số mũ lớn hơn 1. (a)  $17^2 - 15^2$ . (b)  $4^3 - 2^3 + 5^2$ .

**92** ([Tuy23], 35., p. 12). Viết số 729 dưới dạng 1 lũy thừa với 3 cơ số khác nhau & số mũ lớn hơn 1.

**93** ([Tuy23], 36., p. 12). Viết các tích/thương sau dưới dạng lũy thừa của 1 số: (a)  $2^5 \cdot 8^4$ . (b)  $25^6 \cdot 125^3$ . (c)  $625^5 : 25^7$ . (d)  $12^3 \cdot 3^3$ .

**94** ([Tuy23], 37., p. 12). Tính  $6^{3^1}, 3^{2^3}, 7^{1^{2^{3^4}}}, 2020^{3^{0^{1^0}}}$ .

**95** ([Tuy23], 38., p. 12). Tìm  $x \in \mathbb{N}$  biết: (a)  $(3x-2)^3 = 64$ . (b)  $(2x+5)^4 = 3^4 \cdot 5^4$ .

**96** ([Tuy23], 39., p. 12). Tìm  $x \in \mathbb{N}$  biết: (a)  $5^x + 5^{x+2} = 650$ . (b)  $3^{x+4} = 9^{2x-1}$ .

**97** ([Tuy23], 40., p. 12). Tìm  $x \in \mathbb{N}$  biết: (a)  $2^x - 15 = 17$ . (b)  $(7x-11)^3 = 2^5 \cdot 5^2 + 200$ .

**98** ([Tuy23], 41., p. 12). Tìm  $x \in \mathbb{N}$  biết: (a)  $x^{10} = 1^x$ . (b)  $x^{10} = x$ . (c)  $(2x-15)^5 = (2x-15)^3$ .

**99** ([Tuy23], 42., p. 12). Tìm  $m, n \in \mathbb{N}$  thỏa  $2^m + 2^n = 40$ .

**100** ([Tuy23], 43., p. 12). Số  $4^6 \cdot 5^{14}$  có bao nhiêu chữ số nếu viết trong hệ thập phân ở dạng thông thường (không có số mũ)?

**101** ([Tuy23], 44., p. 12). Trong âm nhạc, về trường độ thì: 1 nốt tròn bằng 2 nốt trắng, 1 nốt trắng bằng 2 nốt đen, 1 nốt đen bằng 2 nốt móc đơn, 1 nốt móc đơn bằng 2 nốt móc kép, 1 nốt móc kép bằng 2 nốt móc 3, 1 nốt móc 3 bằng 2 nốt móc 4. Dùng lũy thừa của 1 số tự nhiên để: (a) Diễn tả mối quan hệ về trường độ giữa nốt tròn với các nốt nhạc khác. (b) Cho biết nốt nhạc có trường độ gấp 8 lần nốt móc 3 là nốt nhạc nào?

**102** ([Tuy23], 45., p. 12, Phân bào). Tế bào lớn lên đến 1 kích thước nhất định thì phân chia thành 2 tế bào con. Mỗi tế bào con tiếp tục lớn lên cho đến khi bằng tế bào mẹ, sau đó phân chia thành 2 tế bào, quá trình cứ thế tiếp tục. Cho biết: (a) Số tế bào con sau lần phân chia thứ 3, thứ 5, thứ  $n \in \mathbb{N}^*$ . Viết kết quả dưới dạng lũy thừa cơ số 2. (b) Sau mấy lần phân chia thì số tế bào con là 128?

Về phân bào, see, e.g., [Wikipedia/phân bào](#) & [Wikipedia/spindle apparatus](#).

**103** ([Bin22], Ví dụ 12, p. 14). Không dùng máy tính, chứng minh  $A = 215216217 \cdot 218218220$  là số có 17 chữ số.

**104** ([Bin22], Ví dụ 13, p. 14). Sử dụng nhận xét  $2^{10} = 1024 \approx 10^3$ , chứng minh  $2^{64}$  có vào khoảng 20 chữ số.

**105** ([Bin22], Ví dụ 14, p. 15). Chứng minh  $A = 4 + \sum_{i=2}^{20} 2^i = 4 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20}$ .

**106** ([Bin22], Ví dụ 15, p. 15). So sánh  $63^7$  &  $16^{12}$ .

**107** ([Bin22], Ví dụ 16, p. 15). (a) Với 3 chữ số 2, viết thành 1 số tự nhiên có giá trị lớn nhất. (b) Cũng hỏi như vậy đối với 3 chữ số 4. (c) Cũng hỏi như vậy đối với 3 chữ số  $a \in \mathbb{N}$ .

**108** ([Bin22], Ví dụ 17, p. 16). Số  $2^2$  &  $5^2$  viết liền nhau được số 425 có 3 chữ số, số  $2^3$  &  $5^3$  viết liền nhau được số 8125 có 4 chữ số, số  $2^4$  &  $5^4$  viết liền nhau được số 16625 có 5 chữ số. Chứng minh số  $2^{1991}$  &  $5^{1991}$  viết liền nhau được số có 1992 chữ số.

**109** ([Bin22], 71., p. 16). Tính: (a)  $4^{10} \cdot 8^{15}$ . (b)  $4^{15} \cdot 5^{30}$ . (c)  $27^{16} : 9^{10}$ . (d)  $A = \frac{72^3 \cdot 54^2}{108^4}$ . (e)  $B = \frac{3^{10} \cdot 11 + 3^{10} \cdot 5}{3^9 \cdot 2^4}$ .

**110** ([Bin22], 72., p. 16). Tính giá trị của biểu thức: (a)  $\frac{2^{10} \cdot 13 + 2^{10} \cdot 65}{2^8 \cdot 104}$ .  
(b)  $(1+2+3+\dots+100)(1^2+2^2+3^2+\dots+10^2)(65 \cdot 111 - 13 \cdot 15 \cdot 37)$ .

**111** ([Bin22], 73., p. 16). Tìm  $x \in \mathbb{N}$  biết: (a)  $2^x \cdot 4 = 128$ . (b)  $x^{15} = x$ . (c)  $(2x+1)^3 = 125$ . (d)  $(x-5)^4 = (x-5)^6$ .



- 112 ([Bin22], 74., p. 16). Cho  $A = \sum_{i=1}^{100} 3^i = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}$ . Tìm  $n \in \mathbb{N}$  biết  $2A + 3 = 3^n$ .
- 113 ([Bin22], 75., p. 16). Tính tổng của 100 số:  $\sum_{i=1}^{100} \underbrace{9}_i = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99\dots9}_{100}$ .
- 114 ([Bin22], 76., p. 16). Tìm số tự nhiên có 3 chữ số, biết bình phương của chữ số hàng chục bằng tích của 2 chữ số kia & số tự nhiên đó trừ đi số gồm 3 chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại bằng 495.
- 115 ([Bin22], 77., pp. 16–17). (a) Viết dãy tính có kết quả bằng 1000000, với 5 chữ số như nhau cùng với dấu các phép tính & dấu ngoặc nếu cần. (b) Cũng hỏi như vậy với 6 chữ số khác nhau.
- 116 ([Bin22], 78., p. 17). So sánh  $A$  &  $B$ : (a)  $A = \sum_{i=1}^{1000} i = 1 + 2 + 3 + \dots + 1000$ ,  $B = 11! = \prod_{i=1}^{11} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 11$ . (b)  $A = 20! = \prod_{i=1}^{20} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 20$ ,  $B = \sum_{i=1}^{1000000} i = 1 + 2 + 3 + \dots + 1000000$ .
- 117 ([Bin22], 79., p. 17). So sánh: (a)  $3^{500}$  &  $7^{300}$ . (b)  $8^5$  &  $3 \cdot 4^7$ . (c)  $99^{20}$  &  $9999^{10}$ . (d)  $202^{303}$  &  $303^{202}$ . (e)  $3^{21}$  &  $2^{31}$ . (f)  $11^{1979}$  &  $37^{1320}$ . (g)  $10^{10}$  &  $48 \cdot 50^5$ . (h)  $1990^{10} + 1990^9 + 1991^{10}$ .
- 118 ([Bin22], 80., p. 17). So sánh: (a)  $5^{299}$  &  $3^{501}$ . (b)  $3^{23}$  &  $5^{15}$ . (c)  $127^{23}$  &  $513^{18}$ .
- 119 ([Bin22], 81., p. 17). Chứng minh:  $5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$ .
- 120 ([Bin22], 82., p. 17). Viết liền nhau các kết quả của các lũy thừa  $4^{50}$  &  $25^{50}$ , ta được 1 số tự nhiên có bao nhiêu chữ số?
- 121 ([Bin22], 83., p. 17). Tìm số tự nhiên có 4 chữ số biết số đó có thể phân tích thành tích của 2 thừa số có tổng bằng 100 & 1 trong 2 thừa số ấy có dạng  $a^a$ .

## 2.1 Compare Exponentiations – So Sánh Các Lũy Thừa

- 122 ([Tuy23], Ví dụ 8, p. 13). So sánh  $3^7$  &  $2^{11}$ .
- 123 ([Tuy23], Ví dụ 9, p. 13). So sánh  $16^{19}$  &  $8^{25}$ .
- 124 ([Tuy23], Ví dụ 10, p. 13). So sánh  $3^{4040}$  &  $2^{6060}$ .
- 125 ([Tuy23], 46., p. 14). So sánh: (a)  $27^{11}$  &  $81^8$ . (b)  $625^5$  &  $125^7$ .
- 126 ([Tuy23], 47., p. 14). So sánh: (a)  $5^{36}$  &  $11^{24}$ . (b)  $3^{2n}$  &  $2^{3n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .
- 127 ([Tuy23], 48., p. 14). So sánh  $A = 2 \cdot 3^{54}$  &  $B = 6 \cdot 5^{32}$ .
- 128 ([Tuy23], 49., p. 14). Chứng minh:  $5^{60n} < 2^{140n} < 3^{100n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .
- 129 ([Tuy23], 50., p. 14). Sắp xếp 3 số  $3^{539}$ ,  $7^{308}$ ,  $2^{847}$  theo thứ tự tăng dần.
- 130 ([Tuy23], 51., p. 14). So sánh: (a)  $5^{75}$  &  $7^{60}$ . (b)  $3^{21}$  &  $2^{31}$ .
- 131 ([Tuy23], 52., p. 14). So sánh: (a)  $5^{23}$  &  $6 \cdot 5^{22}$ . (b)  $7 \cdot 2^{13}$  &  $2^{16}$ . (c)  $21^{15}$  &  $27^5 \cdot 49^8$ .
- 132 ([Tuy23], 53., p. 14). So sánh: (a)  $199^{20}$  &  $2003^{15}$ . (b)  $3^{39}$  &  $11^{21}$ .
- 133 ([Tuy23], 54., p. 14). So sánh 2 hiệu  $A = 72^{45} - 72^{44}$  &  $B = 72^{44} - 72^{43}$ .
- 134 ([Tuy23], 55., p. 14). Tìm  $x \in \mathbb{N}$  biết: (a)  $16^x < 128^4$ . (b)  $5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x+2} \leq \underbrace{100\dots0}_{18} : 2^{18}$ .
- 135 ([Tuy23], 56., p. 14). Tìm  $n \in \mathbb{N}$  biết  $2^5 \cdot 3^n \cdot 3^{n+2} \leq 32 \cdot 3^6 \cdot 3^4$ .
- 136 ([Tuy23], 57., p. 14). So sánh  $A = \sum_{i=0}^9 2^i = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9$  &  $B = 5 \cdot 2^8$ .
- 137 ([Tuy23], 58., p. 14). Viết số lớn nhất bằng cách dùng 3 chữ số 1, 2, 3 với điều kiện mỗi chữ số chỉ dùng 1 lần.

## 2.2 Last Digit of Products & Exponentiations – Chữ Số Tận Cùng của Các Tích & Lũy Thừa

## 3 Problem on Naturals – Bài Toán về Số Tự Nhiên

## 4 Miscellaneous

### Tài liệu

- [Bin22] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 6 Tập 1*. Tái bản lần thứ nhất. Kết nối tri thức với cuộc sống. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2022, p. 200.
- [Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 6*. Tái bản lần thứ 1. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 184.