Problem & Solution: Trigonometry – Bài Tập & Lời Giải Lượng Giác

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 4 tháng 7 năm 2023

Mục lục

1 Hệ Thức về Cạnh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông

Trong 1 tam giác vuông, nếu biết 2 cạnh, hoặc 1 cạnh & 1 góc nhọn thì có thể tính được các góc & các cạnh còn lại của tam giác đó.

Bài toán 1. *Xét ΔABC vuông tại A, cạnh huyền $BC = a$, 2 cạnh góc vuông $AC = b$, $AB = c$. Gọi $AH = h$ là đường cao ứng với cạnh huyền BC[1] & $CH = b'$, $BH = c'$ lần lượt là hình chiếu của AC, AB trên cạnh huyền BC. Chứng minh: (a) $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$. (b) Định lý Pythagore $a^2 = b^2 + c^2$. (c) $h^2 = b'c'$. (d) $bc = ah$. (e) $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.*

Chứng minh. (a) $\Delta AHC \backsim \Delta BAC$ (g.g) vì 2 tam giác vuông này có chung $\widehat{C}$ nhọn, nên $\frac{CH}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC^2 = BC \cdot CH \Leftrightarrow b^2 = ab'$. Tương tự, $\Delta BHA \backsim \Delta BAC$ (g.g) vì 2 tam giác vuông này có chung $\widehat{B}$ nhọn, nên $\frac{BH}{AB} = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow AB^2 = BC \cdot BH \Leftrightarrow c^2 = ac'$. (b) Theo (a), $b^2 + c^2 = ab' + ac' = a(b' + c') = a \cdot a = a^2$. (c) Vì $\Delta AHC \backsim \Delta BAC$ & $\Delta BHA \backsim \Delta BAC$ nên $\Delta AHC \backsim \Delta BHA$, suy ra $\frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH} \Rightarrow AH^2 = BH \cdot CH \Leftrightarrow h^2 = b'c'$. (d) Tính diện tích ΔABC theo 2 cách: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot AC \Leftrightarrow AH \cdot BC = AB \cdot AC \Leftrightarrow ah = bc$. (e) $ah = bc \Leftrightarrow a^2h^2 = b^2c^2 \Leftrightarrow (b^2 + c^2)h^2 = b^2c^2 \Leftrightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{b^2+c^2}{b^2c^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$. □

Lưu ý 1. *Các hệ thức trên có thể được suy ra trực tiếp từ các tỷ số đồng dạng của bộ 3 tam giác đồng dạng: $\Delta BHA \backsim \Delta AHC \backsim \Delta BAC$. Thật vậy, $\Delta AHC \backsim \Delta BAC \Leftrightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{HC}{AC} = \frac{AC}{BC} \Leftrightarrow \frac{h}{c} = \frac{b'}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow bh = b'c$, $b^2 = ab'$, & $ah = bc$. $\Delta BHA \backsim \Delta BAC \Leftrightarrow \frac{HB}{AB} = \frac{AH}{AC} = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow \frac{c'}{c} = \frac{h}{b} = \frac{c}{a} \Rightarrow hc = bc'$, $ah = bc$, & $c^2 = ac'$. $\Delta AHC \backsim \Delta BHA \Leftrightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH} = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow \frac{h}{c'} = \frac{b'}{h} = \frac{b}{c} \Rightarrow h^2 = b'c'$, $bh = b'c$, & $ch = bc'$. Hơn nữa, $\widehat{BAH} = \widehat{C}$ & $\widehat{CAH} = \widehat{B}$.*

Định lý 1 (Hệ thức giữa cạnh góc vuông & hình chiếu của nó trên cạnh huyền)**.** *Trong 1 tam giác vuông, bình phương mỗi cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền & hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền. Nói cách khác, mỗi cạnh góc vuông là trung bình nhân của cạnh huyền & hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền. $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$*

3 hệ thức về đường cao trong tam giác vuông:

Định lý 2. *Trong 1 tam giác vuông, bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tích 2 hình chiếu của 2 cạnh góc vuông trên cạnh huyền. Nói cách khác, đường cao ứng với cạnh huyền là trung bình nhân của 2 đoạn thẳng mà nó định ra trên cạnh huyền. $h^2 = b'c'$.*

Định lý 3. *Trong 1 tam giác vuông, tích 2 cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền & đường cao tương ứng. $bc = ah$.*

Định lý 4. *Trong 1 tam giác vuông, nghịch đảo của bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tổng nghịch đảo của bình phương 2 cạnh góc vuông. $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.*

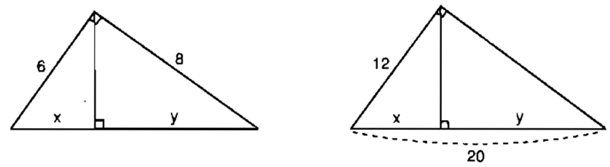
Bài toán 2. *Cho ΔABC có độ dài 2 cạnh góc vuông là b & c. Tính độ dài đường cao h xuất phát từ đỉnh góc vuông theo b, c.*

Giải. Có $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \Rightarrow h^2 = \frac{b^2c^2}{b^2+c^2}$. □

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

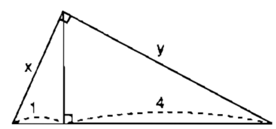
[1] AB, AC là đường cao ứng với nhau.

Bài toán 3 ([Chí+23], 1., p. 68)**.** *Tính x, y:*



Giải. (a) Áp dụng định lý Pythagore, cạnh huyền dài $x + y = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. Áp dụng định lý 1 được $6^2 = (x + y)x = 10x \Rightarrow x = \frac{6^2}{10} = 3.6$, $y = 10 - x = 10 - 3.6 = 6.4$ (hoặc $8^2 = (x + y)y = 10y \Rightarrow y = \frac{8^2}{10} = 6.4$). (b) Áp dụng định lý 1 được $12^2 = 20x \Rightarrow x = \frac{12^2}{20} = 7.2$, $y = 20 - x = 20 - 7.2 = 12.8$. □

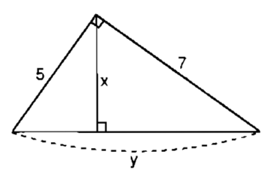
Bài toán 4 ([Chí+23], 2., p. 68)**.** *Tính x, y:*



1st giải. Áp dụng định lý 1 được $x^2 = (1 + 4) \cdot 1 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}$, $y = (1 + 4)4 = 20 \Rightarrow y = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. □

2nd giải. Áp dụng định lý 1 được $x^2 = (1 + 4) \cdot 1 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}$. Áp dụng định lý Pythagore: $y = \sqrt{(1 + 4)^2 - x^2} = \sqrt{5^2 - 5} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. □

Bài toán 5 ([Chí+23], 3., p. 69)**.** *Tính x, y:*

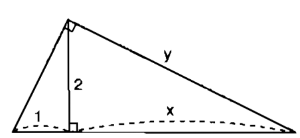


1st giải. Áp dụng định lý Pythagore: $y = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74}$. Áp dụng định lý 3 được $5 \cdot 7 = xy \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 7}{y} = \frac{35}{\sqrt{74}}$. □

2nd giải. Áp dụng định lý Pythagore: $y = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74}$. Áp dụng định lý 4 được $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} = \frac{74}{1225} \Rightarrow x^2 = \frac{1225}{74} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1225}{74}} = \frac{35}{\sqrt{74}}$. □

3rd giải. Áp dụng định lý 4 được $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} = \frac{74}{1225} \Rightarrow x^2 = \frac{1225}{74} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1225}{74}} = \frac{35}{\sqrt{74}}$, & định lý 3 được $5 \cdot 7 = xy \Rightarrow y = \frac{5 \cdot 7}{x} = \frac{5 \cdot 7\sqrt{74}}{35} = \sqrt{74}$. □

Bài toán 6 ([Chí+23], 4., p. 69)**.** *Tính x, y:*



1st giải. Áp dụng định lý 2 được $2^2 = 1 \cdot x \Leftrightarrow x = 4$. Áp dụng định lý Pythagore: $y = \sqrt{x^2 + 2^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. □

1st giải. Áp dụng định lý 2 được $2^2 = 1 \cdot x \Leftrightarrow x = 4$. Áp dụng định lý 1 được $y^2 = (1 + x)x = (1 + 4) \cdot 4 = 20 \Rightarrow y = 2\sqrt{5}$. □

Bài toán 7 ([Chí+23], 5., p. 69)**.** *Trong tam giác vuông với các cạnh góc vuông có độ dài là 3 & 4, kẻ đường cao ứng với cạnh huyền. Tính đường cao này & độ dài các đoạn thẳng mà nó định ra trên cạnh huyền.*

Giải. $b = 3$, $c = 4$. Áp dụng định lý Pythagore: $a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Áp dụng định lý 3 được $h = \frac{bc}{a} = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2.4$. Áp dụng định lý 1 được $b^2 = ab' \Rightarrow b' = \frac{b^2}{a} = \frac{3^2}{5} = 1.8$, $c' = a - b' = 5 - 1.8 = 3.2$. □

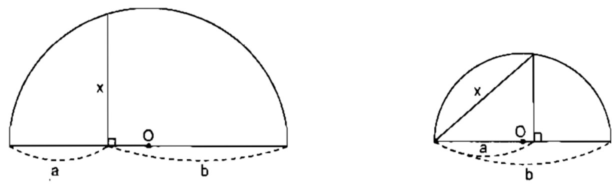
Bài toán 8 ([Chí+23], 6., p. 69)**.** *Đường cao của 1 tam giác vuông chia cạnh huyền thành 2 đoạn thẳng có độ dài là 1 & 2. Tính các cạnh góc vuông của tam giác này.*

Giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $b' = 1$, $c' = 2$. Có $a = b' + c' = 1 + 2 = 3$, $b^2 = ab' = 3 \cdot 1 = 3 \Rightarrow b = \sqrt{3}$, $c^2 = ac' = 3 \cdot 2 = 6 \Rightarrow c = \sqrt{6}$ (hoặc áp dụng định lý Pythagore: $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3^2 - 3} = \sqrt{6}$). □

Bài toán 9 (Mở rộng [Chí+23], 6., p. 69)**.** *Đường cao của 1 tam giác vuông chia cạnh huyền thành 2 đoạn thẳng có độ dài là b' & c'. Tính các cạnh góc vuông của tam giác này theo b', c'.*

Giải. $a = b' + c'$, $b^2 = ab' = (b' + c')b' \Rightarrow b = \sqrt{b'(b' + c')}$, $c^2 = ac' = (b' + c')c' \Rightarrow c = \sqrt{c'(b' + c')}$ (hoặc áp dụng định lý Pythagore: $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(b' + c')^2 - b'(b' + c')} = \sqrt{c'(b' + c')}$). □

Bài toán 10 ([Chí+23], 7., p. 69–70)**.** *Người ta đưa ra 2 cách vẽ đoạn trung bình nhân x của 2 đoạn thẳng a, b (i.e., $x^2 = ab$ hay $x = \sqrt{ab}$) như trong 2 hình sau. Chứng minh các 2 vẽ này là đúng.*



Hint. Nếu 1 tam giác có đường trung tuyến ứng với 1 cạnh bằng nửa cạnh đó thì tam giác đó là tam giác vuông.

Chứng minh. 2 tam giác tạo nội tiếp (nửa) đường tròn ngoại tiếp ở 2 hình đều có trung tuyến ứng với cạnh dài nhất bằng nửa cạnh ấy nên là 2 tam giác vuông (vì trung tuyến là 1 bán kính, còn cạnh ứng với trung tuyến đó là 1 đường kính của hình tròn). Với hình đầu, áp dụng định lý 2 được $x^2 = ab$. Với hình sau, áp dụng định lý 1 được $x^2 = ab$. Cả 2 trường hợp đều cho $x^2 = ab$, hay $x = \sqrt{ab}$, i.e., x là trung bình nhân của 2 đoạn thẳng a, b. □

Bài toán 11. *Chứng minh: Nếu 1 tam giác có đường trung tuyến ứng với 1 cạnh bằng nửa cạnh đó thì tam giác đó là tam giác vuông.*

1st chứng minh. Giả sử ΔABC có đường trung tuyến $AM = \frac{1}{2}BC$ với M là trung điểm BC. $MA = MB = MC \Rightarrow \Delta AMB, \Delta AMC$ đều cân tại M, suy ra $\widehat{B} = \widehat{BAM}$, $\widehat{C} = \widehat{CAM}$. Cộng 2 đẳng thức, vế theo vế, suy ra $\widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{BAM} + \widehat{CAM} = \widehat{A}$, mà $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$, suy ra $\widehat{A} = \widehat{B} + \widehat{C} = \frac{180°}{2} = 90°$. Vậy ΔABC vuông tại A. □

2nd chứng minh. Giả sử ΔABC có đường trung tuyến $AM = \frac{1}{2}BC$ với M là trung điểm BC. $MA = MB = MC$ nên ΔABC nội tiếp đường tròn tâm M đường kính BC. Vì BC là đường kính nên $\widehat{A} = 90°$. □

3rd chứng minh. Giả sử ΔABC có đường trung tuyến $AM = \frac{1}{2}BC$ với M là trung điểm BC. Công thức tính độ dài đường trung tuyến $m_a \coloneqq AM = \sqrt{\dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}}$.

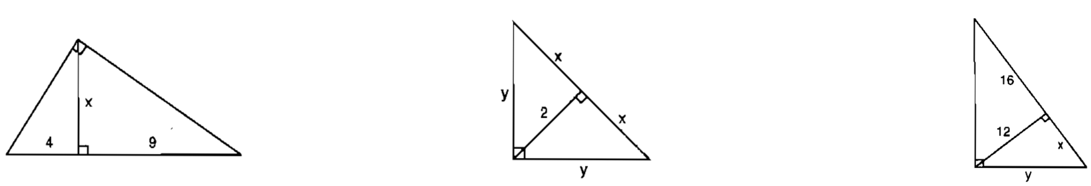
$$AM = \frac{1}{2}BC \Leftrightarrow m_a^2 = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow 2b^2 + 2c^2 - a^2 = a^2 \Leftrightarrow 2b^2 + 2c^2 = 2a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2.$$

Áp dụng định lý Pythagore đảo: ΔABC vuông tại A. □

Lưu ý 2. *Công thức tính độ dài 3 đường trung tuyến của ΔABC (xem, e.g., Wikipedia/trung tuyến):*

$$m_a = \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}},\ m_b = \sqrt{\frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4}},\ m_c = \sqrt{\frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}}.$$

Bài toán 12 ([Chí+23], 8., p. 70)**.** *Tính x, y:*



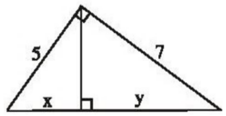
1st giải. (a) Áp dụng định lý 2 được $x^2 = 4 \cdot 9 = 36 \Rightarrow x = \sqrt{36} = 6$. (b) Áp dụng định lý 2 được $2^2 = x \cdot x = x^2 \Rightarrow x = 2$. Áp dụng định lý Pythagore: $y^2 + y^2 = (x + x)^2 \Leftrightarrow 2y^2 = 4x^2 \Rightarrow y = x\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. (c) Áp dụng định lý 2 được $12^2 = 16x \Rightarrow x = \frac{12^2}{16} = 9$. Áp dụng định lý 1 được $y^2 = (x + 16)x = (9 + 16) \cdot 9 = 25 \cdot 9 \Rightarrow y = \sqrt{25 \cdot 9} = 5 \cdot 3 = 15$. □

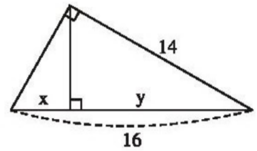
2nd giải. (b) Tam giác vuông này có đường cao ứng với cạnh huyền đồng thời là trung tuyến nên nó là tam giác vuông cân. Vì trung tuyến dài bằng nửa cạnh huyền nên $x = 2$. Tam giác vuông cân có $y = x\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. (c) Áp dụng định lý 2 được $12^2 = 16x \Rightarrow x = \frac{12^2}{16} = 9$. Áp dụng định lý Pythagore: $y = \sqrt{x^2 + 12^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$. □

Bài toán 13 ([Chí+23], 9., p. 70)**.** *Cho hình vuông $ABCD$. Gọi I là 1 điểm nằm giữa A & B. Tia DI & tia CB cắt nhau ở K. Kẻ đường thẳng qua D, vuông góc với DI. Đường thẳng này cắt đường thẳng BC tại L. Chứng minh: (a) ΔDIL là 1 tam giác cân. (b) Tổng $\dfrac{1}{DI^2} + \dfrac{1}{DK^2}$ không đổi khi I thay đổi trên cạnh AB.*

Chứng minh. (a) Xét 2 tam giác vuông ΔDAI & ΔDCL: $AD = CD$ (2 cạnh hình vuông $ABCD$), $\widehat{ADI} = \widehat{CDL}$ (cùng phụ $\widehat{CDI}$). Suy ra $\Delta DAI = \Delta DCL$ (cgv–gn) $\Rightarrow DI = DL \Rightarrow \Delta DIL$ cân tại D. (b) Xét ΔDKL vuông tại D, áp dụng định lý 4 được: $\dfrac{1}{DL^2} + \dfrac{1}{DK^2} = \dfrac{1}{CD^2}$, mà $DI = DL$, suy ra $\dfrac{1}{DI^2} + \dfrac{1}{DK^2} = \dfrac{1}{CD^2}$ không đổi khi I thay đổi trên cạnh AB. □

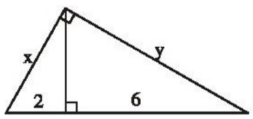
Bài toán 14 ([Thâ+23], 1., p. 102)**.** *Tính x, y:*

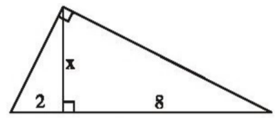




Giải. (a) Áp dụng định lý Pythagore: $x + y = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74}$. Áp dụng định lý 1 được $5^2 = (x + y)x = \sqrt{74}x \Rightarrow x = \frac{5^2}{\sqrt{74}} = \frac{25}{\sqrt{74}}$, $7^2 = (x + y)y = \sqrt{74}y \Rightarrow y = \frac{7^2}{\sqrt{74}} = \frac{49}{\sqrt{74}}$ (hoặc $y = \sqrt{74} - x = \sqrt{74} - \frac{25}{\sqrt{74}} = \frac{49}{\sqrt{74}}$). (b) Áp dụng định lý 1 được $14^2 = 16y \Rightarrow y = \frac{14^2}{16} = 12.25$, $x = 16 - y = 16 - 12.25 = 3.75$. □

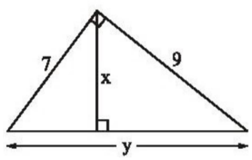
Bài toán 15 ([Thâ+23], 2., p. 102)**.** *Tính x, y:*

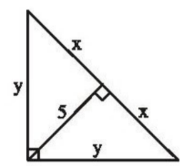




Giải. (a) Áp dụng định lý 1 được $x^2 = (2 + 6) \cdot 2 = 16 \Rightarrow x = 4$, $y^2 = (2 + 6) \cdot 6 = 48 \Rightarrow y = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ (hoặc áp dụng định lý Pythagore: $y = \sqrt{(2 + 6)^2 - x^2} = \sqrt{8^2 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$). (b) Áp dụng định lý 2 được $x^2 = 2 \cdot 8 = 16 \Rightarrow x = \sqrt{16} = 4$. □

Bài toán 16 ([Thâ+23], 3., p. 103)**.** *Tính x, y:*

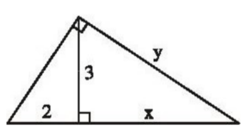


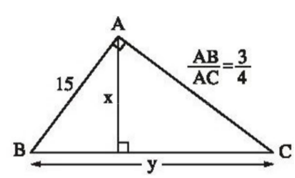


1st giải. (a) Áp dụng định lý Pythagore: $y = \sqrt{7^2 + 9^2} = \sqrt{130}$. Áp dụng định lý 3 được $xy = 7 \cdot 9 \Rightarrow x = \frac{7 \cdot 9}{y} = \frac{63}{\sqrt{130}}$. (b) Áp dụng định lý 2 được $5^2 = x \cdot x = x^2 \Rightarrow x = 5$. Áp dụng định lý Pythagore: $y^2 + y^2 = (x + x)^2 \Leftrightarrow 2y^2 = 4x^2 \Rightarrow y = x\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$. □

2nd giải. (a) Áp dụng định lý Pythagore: $y = \sqrt{7^2 + 9^2} = \sqrt{130}$. Áp dụng định lý 4 được $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{7^2 \cdot 9^2}{7^2 + 9^2}} = \frac{63}{\sqrt{130}}$. (b) Tam giác vuông này có đường cao ứng với cạnh huyền đồng thời là trung tuyến nên nó là tam giác vuông cân. Vì trung tuyến dài bằng nửa cạnh huyền nên $x = 5$. Tam giác vuông cân có $y = x\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$. □

Bài toán 17 ([Thâ+23], 4., p. 103)**.** *Tính x, y:*

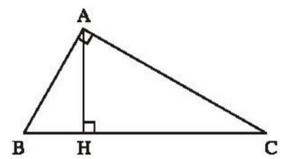




1st giải. (a) Áp dụng định lý 2 được $3^2 = 2x \Rightarrow x = \frac{3^2}{2} = 4.5$. Áp dụng định lý Pythagore: $y = \sqrt{x^2 + 3^2} = \sqrt{4.5^2 + 3^2} = \frac{3\sqrt{13}}{2}$. (b) $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow AC = \frac{4}{3}AB = \frac{4}{3} \cdot 15 = 20$. Áp dụng định lý Pythagore: $y = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$. Áp dụng định lý 3 được $xy = 15 \cdot 20 \Rightarrow x = \frac{15 \cdot 20}{y} = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12$. □

2nd giải. Áp dụng định lý 2 được $3^2 = 2x \Rightarrow x = \frac{3^2}{2} = 4.5$. Áp dụng định lý 1 được $y^2 = (x + 2)x = (4.5 + 2) \cdot 4.5 = \frac{117}{4} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{117}{4}} = \frac{3\sqrt{13}}{2}$. (b) $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow AC = \frac{4}{3}AB = \frac{4}{3} \cdot 15 = 20$. Áp dụng định lý Pythagore: $y = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$. Áp dụng định lý 4 được $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{15^2} + \frac{1}{20^2} = \frac{1}{144} \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x = \sqrt{144} = 12$. □

Bài toán 18 ([Thâ+23], 5., p. 103). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH:*



Giải bài toán trong mỗi trường hợp sau: (a) Cho $AH = 16$, $BH = 25$. Tính AB, AC, BC, CH. (b) Cho $AB = 12$, $BH = 6$. Tính AH, AC, BC, CH.

1st giải. (a) Áp dụng định lý Pythagore cho ΔABH vuông tại H: $AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{16^2 + 25^2} = \sqrt{881}$. Áp dụng định lý 2 được $AH^2 = BH \cdot CH \Leftrightarrow CH = \frac{AH^2}{BH} = \frac{16^2}{25} = 10.24$. $BC = BH + CH = 25 + 10.24 = 35.24$. Áp dụng định lý Pythagore cho ΔACH vuông tại H: $AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{16^2 + \left(\frac{256}{25}\right)^2} = \frac{16\sqrt{881}}{25}$. (b) Áp dụng định lý Pythagore cho ΔABH vuông tại H: $BH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}$. Áp dụng định lý 2 được $AH^2 = BH \cdot CH \Leftrightarrow CH = \frac{AH^2}{BH} = \frac{(6\sqrt{3})^2}{6} = 18$. $BC = BH + CH = 6 + 18 = 24$. Áp dụng định lý Pythagore cho ΔACH vuông tại H: $AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 + 18^2} = 12\sqrt{3}$. □

2nd giải. (a) Áp dụng định lý 2 được $AH^2 = BH \cdot CH \Leftrightarrow CH = \frac{AH^2}{BH} = \frac{16^2}{25} = 10.24$. $BC = BH + CH = 25 + 10.24 = 35.24$. Áp dụng đinh lý 1 được $AB^2 = BC \cdot BH = 35.24 \cdot 25 = 881 \Rightarrow AB = \sqrt{881}$, $AC^2 = BC \cdot CH = 35.24 \cdot 10.24 = \frac{225536}{625} \Rightarrow AC = \frac{16\sqrt{881}}{25}$. (b) □

Bài toán 19 ([Thâ+23], 6., p. 103). *Cho tam giác vuông với các cạnh góc vuông có độ dài là 5 & 7, kẻ đường cao ứng với cạnh huyền. Tính đường cao này & các đoạn thẳng mà nó chia ra trên cạnh huyền.*

Bài toán 20 ([Thâ+23], 7., p. 103). *Đường cao của 1 tam giác vuông chia cạnh huyền thành 2 đoạn thẳng có độ dài là 3 & 4. Tính các cạnh góc vuông của tam giác này.*

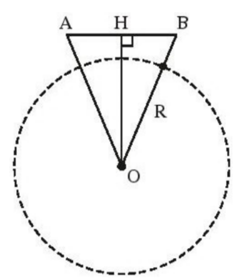
Bài toán 21 ([Thâ+23], 8., p. 103). *Cạnh huyền của 1 tam giác vuông lớn hơn 1 cạnh góc vuông là 1 cm & tổng của 2 cạnh góc vuông lớn hơn cạnh huyền 4 cm. Tính các cạnh của tam giác vuông này.*

Bài toán 22 ([Thâ+23], 9., p. 104). *1 tam giác vuông có cạnh huyền là 5 & đường cao ứng với cạnh huyền là 2. Tính cạnh nhỏ nhất của tam giác vuông này.*

Bài toán 23 ([Thâ+23], 10., p. 104). *Cho 1 tam giác vuông. Biết tỷ số 2 cạnh góc vuông là $3:4$ & cạnh huyền là 125 cm. Tính độ dài các cạnh góc vuông & hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền.*

Bài toán 24 ([Thâ+23], 11., p. 104). *Cho ΔABC vuông tại A. Biết $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{6}$, đường cao $AH = 30$ cm. Tính HB, HC.*

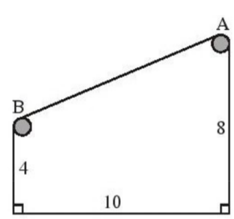
Bài toán 25 ([Thâ+23], 12., p. 104). *2 vệ tinh đang bay ở vị trí A & B cùng cách mặt đất 230 km có nhìn thấy nhau hay không nếu khoảng cách giữa chúng theo đường thẳng là 2200 km? Biết bán kính R của Trái Đất gần bằng 6370 km & 2 vệ tinh nhìn thấy nhau nếu $OH > R$.*



Bài toán 26 ([Thâ+23], 13., p. 104). *Cho 2 đoạn thẳng có độ dài là a, b. Dựng các đoạn thẳng có độ dài tương ứng bằng: (a) $\sqrt{a^2 + b^2}$. (b) $\sqrt{a^2 - b^2}$ $(a > b)$.*

Bài toán 27 ([Thâ+23], 14., p. 104). *Cho 2 đoạn thẳng có độ dài là a, b. Dựng đoạn thẳng $\sqrt{ab}$ như thế nào?*

Bài toán 28 ([Thâ+23], 15., p. 104). *Giữa 2 tòa nhà (kho & phân xưởng) của 1 nhà máy người ta xây dựng 1 băng chuyền AB để chuyển vật liệu. Khoảng cách giữa 2 tòa nhà là 10 m, còn 2 vòng quay của băng chuyền được đặt ở độ cao 8 m & 4 m so với mặt đất. Tìm độ dài AB của băng chuyền.*



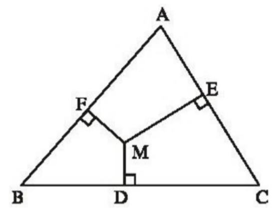
Bài toán 29 ([Thâ+23], 16., p. 104)**.** *Cho tam giác có độ dài các cạnh là* $5, 12, 13$*. Tìm góc của tam giác đối diện với cạnh có độ dài* 13*.*

Bài toán 30 ([Thâ+23], 17., p. 104)**.** *Cho hình chữ nhật* $ABCD$*. Đường phân giác của góc* B *cắt đường chéo* AC *thành 2 đoạn* $4\frac{2}{7}$ m *&* $5\frac{5}{7}$ m*. Tính các kích thước của hình chữ nhật.*

Bài toán 31 ([Thâ+23], 18., p. 105)**.** *Cho* ΔABC *vuông tại* A*, vẽ đường cao* AH*. Chu vi của* ΔABH *là* 30 cm *& chu vi* ΔACH *là* 40 cm*. Tính chu vi của* ΔABC*.*

Bài toán 32 ([Thâ+23], 19., p. 105)**.** *Cho* ΔABC *vuông tại* A *có cạnh* $AB = 6$ cm *&* $AC = 8$ cm*. Các đường phân giác trong & ngoài của góc* B *cắt đường thẳng* ABC *lần lượt tại* M, N*. Tính độ dài các đoạn thẳng* AM, AN*.*

Bài toán 33 ([Thâ+23], 20., p. 105)**.** *Cho* ΔABC*. Từ 1 điểm* M *bất kỳ trong tam giác kẻ* MD, ME, MF *lần lượt vuông góc với các cạnh* BC, CA, AB*. Chứng minh:* $BD^2 + CE^2 + AF^2 = CD^2 + AE^2 + BF^2$*.*



Bài toán 34 ([Thâ+23], 1.1., p. 105)**.** *Cho* ΔABC *vuông tại* A *có* $AB : AC = 3 : 4$ *& đường cao* AH *bằng* 9 cm*. Tính độ dài đoạn thẳng* CH*.*

Bài toán 35 ([Thâ+23], 1.2., p. 105)**.** *Cho* ΔABC *vuông tại* A *có* $AB : AC = 4 : 5$ *& đường cao* AH *bằng* 12 cm*. Tính độ dài đoạn thẳng* BH*.*

Bài toán 36 ([Thâ+23], 1.3., p. 105)**.** *(a) Tính* h, b, c *nếu biết* $b' = 36$*,* $c' = 64$*. (b) Tính* h, b, b', c' *nếu biết* $a = 9$*,* $c = 6$*.*

Bài toán 37 ([Thâ+23], 1.4., p. 105)**.** *Biểu thị* b', c' *qua* a, b, c*.*

Giải. Từ định lý 4: $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$, suy ra $b' = \frac{b^2}{a}$, $c' = \frac{c^2}{a}$. □

Bài toán 38 ([Thâ+23], 1.5., p. 105)**.** *Chứng minh: (a)* $h = \dfrac{bc}{a}$*. (b)* $\dfrac{b^2}{c^2} = \dfrac{b'}{c'}$*.*

Chứng minh. (a) Từ định lý 3: $bc = ah \Rightarrow h = \frac{bc}{a}$. (b) Từ định lý 4: $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$, suy ra $\frac{b^2}{c^2} = \frac{ab'}{ac'} = \frac{b'}{c'}$. □

Bài toán 39 ([Thâ+23], 1.6., p. 106)**.** *Đường cao của 1 tam giác vuông kẻ từ đỉnh góc vuông chia cạnh huyền thành 2 đoạn, trong đó đoạn lớn hơn bằng* 9 cm*. Tính cạnh huyền của tam giác vuông đó nếu 2 cạnh góc vuông có tỷ lệ* $6 : 5$*.*

Bài toán 40 ([Thâ+23], 1.7., p. 106)**.** *Trong tam giác có các cạnh là* 5 cm*,* 12 cm*,* 13 cm*, kẻ đường cao đến cạnh lớn nhất. Tính các đoạn thẳng mà đường cao này chia ra trên cạnh lớn nhất đó.*

Bài toán 41 ([Thâ+23], 1.8., p. 106)**.** ΔABC *vuông tại* A *có đường cao* AH *bằng* 12 cm*. Tính cạnh huyền* BC *nếu biết* $HB : HC = 1 : 3$*.*

Bài toán 42 ([Thâ+23], 1.9., p. 106)**.** *Cho* ΔABC *vuông cân tại* A*, đường trung tuyến* BM*. Gọi* D *là chân đường vuông góc kẻ từ* C *đến* BM *&* H *là chân đường vuông góc kẻ từ* D *đến* AC*. Đ/S? (a)* $\Delta HCD \backsim \Delta ABM$*. (b)* $AH = 2HD$*.*

Bài toán 43 ([Thâ+23], 1.10., p. 106)**.** *Cho hình thang* $ABCD$ *vuông tại* A *có cạnh đáy* AB *bằng* 6 cm*, cạnh bên* AD *bằng* 4 cm *& 2 đường chéo vuông góc với nhau. Tính độ dài các cạnh* CD, BC*, & đường chéo* BD*.*

Bài toán 44 ([Tuy23], Thí dụ 1, p. 103)**.** *Cho hình thang* $ABCD$ *có* $\widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ$*, 2 đường chéo vuông góc với nhau tại* H*. Biết* $AB = 3\sqrt{5}$ cm*,* $HA = 3$ cm*. Chứng minh: (a)* $HA : HB : HC : HD = 1 : 2 : 4 : 8$*. (b)* $\dfrac{1}{AB^2} - \dfrac{1}{CD^2} = \dfrac{1}{HB^2} - \dfrac{1}{HC^2}$*.*

Để chứng minh HA, HB, HC, HD tỷ lệ với 1, 2, 4, 8, ta cần tính độ dài của 4 đoạn thẳng đó. Để tính chúng, có nhiều cách. Sau đây là 2 luồng tính: **1.** HB (Pythagore) $\to HC$ (ĐL 2) $\to HD$ (ĐL 2. **2.** AC (ĐL 1) $\to HC \to HB$ (ĐL 2) $\to HD$ (ĐL 2).

1st chứng minh. (a) Áp dụng định lý Pythagore cho ΔABH: $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 - 3^2} = 6$ cm. Áp dụng định lý 2 vào ΔABC vuông & ΔBCD vuông: $HB^2 = HA \cdot HC \Rightarrow HC = \dfrac{HB^2}{HC} = \dfrac{6^2}{3} = 12$ cm, & $HC^2 = HB \cdot HD \Rightarrow HD = \dfrac{HC^2}{HB} = \dfrac{12^2}{6} = 24$ cm. Suy ra $HA : HB : HC : HD = 3 : 6 : 12 : 24 = 1 : 2 : 4 : 8$. (b) Ta tính biểu thức $\dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{BC^2} + \dfrac{1}{CD^2}$ theo 2 cách: Áp dụng định lý 4 cho ΔABC vuông & ΔBCD vuông: $\dfrac{1}{HB^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{BC^2}$ & $\dfrac{1}{HC^2} = \dfrac{1}{BC^2} + \dfrac{1}{CD^2}$. Suy ra $\dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{BC^2} + \dfrac{1}{CD^2} = \dfrac{1}{HB^2} + \dfrac{1}{CD^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{HC^2} \Rightarrow \dfrac{1}{HB^2} - \dfrac{1}{HC^2} = \dfrac{1}{AB^2} - \dfrac{1}{CD^2}$. □

2nd chứng minh. (a) Áp dụng định lý 1 vào ΔABC: $AB^2 = AH \cdot AC \Rightarrow AC = \dfrac{AB^2}{AH} = \dfrac{(3\sqrt{5})^2}{3} = 15$ cm $\Rightarrow HC = AC - AH = 15 - 3 = 12$ cm. Áp dụng định lý 2 cho ΔABC vuông & ΔBCD vuông: $BH^2 = HA \cdot HC \Rightarrow BH = \sqrt{HA \cdot HC} = \sqrt{3 \cdot 12} = 6$ cm & $HC^2 = HB \cdot HD \Rightarrow HD = \dfrac{HC^2}{HB} = \dfrac{12^2}{6} = 24$ cm. Suy ra $HA : HB : HC : HD = 3 : 6 : 12 : 24 = 1 : 2 : 4 : 8$. (b) Áp dụng định lý 4 cho ΔABC vuông & ΔBCD vuông: $\dfrac{1}{HB^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{BC^2}$, $\dfrac{1}{HC^2} = \dfrac{1}{BC^2} + \dfrac{1}{CD^2}$. Trừ từng vế của 2 đẳng thức được: $\dfrac{1}{HB^2} - \dfrac{1}{HC^2} = \dfrac{1}{AB^2} - \dfrac{1}{CD^2}$. □

Nhận xét 1. *Nếu đẳng thức hình học cần chứng minh có xuất hiện các dấu hiệu như tổng/hiệu nghịch đảo bình phương (hoặc cả 2) của các đoạn thẳng thì nghĩ ngay đến việc áp dụng hệ thức $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ cho (các) tam giác vuông thích hợp để suy ra đẳng thức hình học cần chứng minh.*

Bài toán 45 ([Tuy23], 1., p. 105)**.** *Cho hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$, 2 đường chéo vuông góc với nhau. Biết $AC = 16$ cm, $BD = 12$ cm. Tính chiều cao của hình thang.*

Bài toán 46 ([Tuy23], 2., p. 105)**.** *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH, đường phân giác AD. Biết $BH = 63$ cm, $CH = 112$ cm, tính HD.*

Bài toán 47 ([Tuy23], 3., p. 105)**.** *Cho ΔABC vuông tại A. 2 đường trung tuyến AD, BE vuông góc với nhau tại G. Biết $AB = \sqrt{6}$ cm. Tính cạnh huyền BC.*

Bài toán 48 ([Tuy23], 4., p. 105)**.** *Gọi a, b, c là các cạnh của 1 tam giác vuông, h là đường cao ứng với cạnh huyền a. Chứng minh tam giác có các cạnh $a + h, b + c$, & h cũng là 1 tam giác vuông.*

Bài toán 49 ([Tuy23], 5., p. 105)**.** *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, K thứ tự là hình chiếu của H trên AB, AC. Đặt $c = AB$, $b = AC$. (a) Tính AI, AK theo b, c. (b) Chứng minh $\dfrac{BI}{CK} = \dfrac{c^3}{b^3}$.*

Bài toán 50 ([Tuy23], 6., p. 105)**.** *Cho ΔABC, $AB = 1$, $\widehat{A} = 105°$, $\widehat{B} = 60°$. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = 1$. Vẽ $ED \parallel AB$, $D \in AC$. Chứng minh: $\dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{4}{3}$.*

Bài toán 51 ([Tuy23], 7., p. 105)**.** *Cho hình chữ nhật $ABCD$, $AB = 2BC$. Trên cạnh BC lấy điểm E. Tia AE cắt đường thẳng CD tại F. Chứng minh: $\dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{AE^2} + \dfrac{1}{4AF^2}$.*

Bài toán 52 ([Tuy23], 8., p. 105)**.** *Cho 3 đoạn thẳng có độ dài a, b, c. Dựng đoạn thẳng x sao cho $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.*

Bài toán 53 ([Tuy23], 9., p. 105)**.** *Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 120°$. 1 đường thẳng d không cắt các cạnh của hình thoi. Chứng minh: tổng các bình phương hình chiếu của 4 cạnh với 2 lần bình phương hình chiếu của đường chéo AC trên đường thẳng d không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d.*

Bài toán 54 ([Tuy23], 10., p. 106)**.** *Cho ΔABC vuông tại A. Từ 1 điểm O ở trong tam giác ta vẽ $OD \perp BC$, $OE \perp CA$, $OF \perp AB$. Xác định vị trí của O để $OD^2 + OE^2 + OF^2$ nhỏ nhất.*

Bài toán 55 ([Bìn+23], Ví dụ 1, p. 5)**.** *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $AB : AC = 3 : 4$ & $AB + AC = 21$ cm. (a) Tính các cạnh của ΔABC. (b) Tính độ dài các đoạn AH, BH, CH.*

Bài toán 56 (Mở rộng [Bìn+23], Ví dụ 1, p. 5)**.** *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $AB : AC = m : n$ & $AB + AC = p$ cm. (a) Tính các cạnh của ΔABC. (b) Tính độ dài các đoạn AH, BH, CH.*

Bài toán 57 ([Bìn+23], Ví dụ 2, p. 6)**.** *Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90°$, $\widehat{B} = 60°$, $CD = 30$ cm, $CA \perp CB$. Tính diện tích của hình thang.*

Bài toán 58 ([Bìn+23], Ví dụ 3, p. 7)**.** *Cho ΔABC nhọn, đường cao CK, H là trực tâm. Gọi M là 1 điểm trên CK sao cho $\widehat{AMB} = 90°$. S, S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích các $\Delta AMB, \Delta ABC, \Delta ABH$. Chứng minh $S = \sqrt{S_1 S_2}$.*

Bài toán 59 ([Bìn+23], 1.1., p. 7)**.** *Cho ΔABC vuông cân tại A & điểm M nằm giữa B & C Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của điểm M lên AB, AC. Chứng minh $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$.*

Bài toán 60 ([Bìn+23], 1.2., p. 7)**.** *Cho hình chữ nhật $ABCD$ & điểm O nằm trong hình chữ nhật đó. Chứng minh $OA^2 + OC^2 = OB^2 + CD^2$.*

Bài toán 61 ([Bìn+23], 1.3., p. 8)**.** *Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 6$ cm, $CD = 8$ cm. Đường thẳng kẻ từ D vuông góc với AC tại E, cắt cạnh AB tại F. Tính độ dài các đoạn thẳng DE, DF, AE, CE, AF, BF.*

Bài toán 62 ([Bìn+23], 1.4., p. 8)**.** *Cho ΔABC có $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $AC = 5$ cm. Đường cao, đường phân giác, đường trung tuyến của tam giác kẻ từ đỉnh B chia tam giác thành 4 tam giác không có điểm trong chung. Tính diện tích của mỗi tam giác đó.*

Bài toán 63 ([Bìn+23], 1.5., p. 8). *Trong 1 tam giác vuông tỷ số giữa đường cao & đường trung tuyến kẻ từ đỉnh góc vuông bằng* $40:41$. *Tính độ dài các cạnh góc vuông của tam giác đó, biết cạnh huyền bằng* $\sqrt{41}$ cm.

Bài toán 64 ([Bìn+23], 1.6., p. 8). *Cho* ΔABC *vuông tại* A*, đường cao* AH*. Kẻ* $HE \perp AB$*,* $HF \perp AC$*. Gọi* O *là giao điểm của* AH *&* EF*. Chứng minh* $HB \cdot HC = 4OE \cdot OF$*.*

Bài toán 65 ([Bìn+23], 1.7., p. 8). *Cho* ΔABC *nhọn, 2 đường cao* BD, CE *cắt nhau tại* H*. Gọi* M, N *lần lượt là các điểm thuộc* CH, BH *sao cho* $\widehat{AMB} = \widehat{ANC} = 90^\circ$*.* ΔAMN *là tam giác gì? Vì sao?*

Bài toán 66 ([Bìn+23], 1.8., p. 8). *Cho hình vuông* $ABCD$ *cạnh bằng* a*. (a)* M *là 1 điểm trên cạnh* AD *sao cho* $\widehat{ABM} = 30^\circ$*. Tính* AM, BM *theo* a*. (b) Qua* A *kẻ đường thẳng vuông góc với* BM *tại* F*, đường thẳng này cắt* CD *tại* N*. Tính độ dài các đoạn thẳng* AF, MF, BF *theo* a*.*

Bài toán 67 ([Bìn+23], 1.9., p. 8). *Cho hình vuông* $ABCD$ *& điểm* I *thay đổi nằm giữa* A, B*. Tia* DI *cắt* BC *tại* E*. Đường thẳng kẻ qua* D *vuông góc với* DE *cắt* BC *tại* F*. Chứng minh tổng* $\dfrac{1}{DI^2} + \dfrac{1}{DE^2}$ *không phụ thuộc vào vị trí của điểm* I*.*

Bài toán 68 ([Bìn+23], 1.10., p. 8). *Cho* ΔABC*, đường cao* BH*. Đặt* $BC = a$*,* $CA = b$*,* $AB = c$*,* $AH = c'$*. Chứng minh: (a) Nếu* $\widehat{A} < 90^\circ$ *thì* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc'$*. (b) Nếu* $\widehat{A} > 90^\circ$ *thì* $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc'$*.*

Bài toán 69 ([Bìn+23], 1.11., p. 8). *Cho* ΔABC*, đường cao* AH*. Biết* $AB = 8$ cm*,* $BC - AC = 2$ cm*,* $\widehat{BAH} = 30^\circ$*. Tính diện tích* ΔABC*.*

Bài toán 70 ([Bìn+23], 1.12., p. 8). *Cho* ΔABC*, các đường cao ứng với các cạnh* a, b, c *lần lượt là* h_a, h_b, h_c*. Chứng minh nếu* $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2}$ *thì* ΔABC *vuông tại* A*.*

Bài toán 71 ([Bìn+23], 1.13., p. 9). *Cho* ΔABC*, 2 đường phân giác* BD, CE *cắt nhau tại* I *thỏa mãn* $BD \cdot CE = 2BI \cdot CI$*.* ΔABC *là tam giác gì? Vì sao?*

Bài toán 72 ([Bìn+23], 1.14., p. 9). *Cho* ΔABC*,* $\widehat{A} = 90^\circ$*,* $BC = 2a$*, đường cao* AH*. Kẻ* $HD \perp AC$*,* $HE \perp AB$*. Tìm giá trị lớn nhất của: (a) Độ dài đoạn thẳng* DE*. (b) Diện tích tứ giác* $ADHE$*.*

Bài toán 73 ([Bìn+23], 1.15., p. 9). *Cho* ΔABC *đều có cạnh bằng* 60 cm*. Trên đoạn* BC *lấy điểm* D *sao cho* $BD = 20$ cm*. Đường trung trực của* AD *cắt* AB *tại* E*, cắt* AC *tại* F*. Tính độ dài các cạnh của* ΔDEF*.*

Bài toán 74 ([Bìn+23], 1.16., p. 9). *Cho* ΔABC*. Đường trung tuyến* AD*, đường cao* BH*, đường phân giác* CE *đồng quy. Chứng minh đẳng thức* $(AB + CA)(BC^2 + CA^2 - AB^2) = 2BC \cdot CA^2$ *hay* $(b + c)(a^2 + b^2 - c^2) = 2ab^2$*.*

Bài toán 75 (Tổng quát $\star$). *Cho* ΔABC *vuông tại* A*. (a) Cho trước 2 trong 6 số* a, b, c, b', c', h*. Tính 4 số còn lại theo 2 số đã cho. (c) Cho trước 2 trong 8 số* a, b, c, b', c', h, p, S*. Tính 6 số còn lại theo 2 số đã cho. (b) Cho trước 2 trong 14 số* $a, b, c, b', c', h, m_a, m_b, m_c, d_a, d_b, d_c, p, S$ *với* d_a, d_b, d_c *lần lượt là 3 đường phân giác ứng với* BC, CA, AB*. Tính 12 số còn lại theo 2 số đã cho. Viết các chương trình* Pascal, Python, C/C++ *để mô phỏng.*

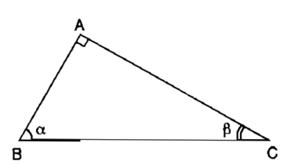
2 Tỷ Số Lượng Giác của Góc Nhọn

Bài toán 76 ([Chí+23], ?1, p. 71). *Xét* ΔABC *vuông tại* A *có* $\widehat{B} = \alpha$*. Chứng minh: (a)* $\alpha = 45^\circ \Leftrightarrow \frac{AC}{AB} = 1$*. (b)* $\alpha = 60^\circ \Leftrightarrow \frac{AC}{AB} = \sqrt{3}$*.*

Bài toán 77 ([Chí+23], ?2, Ví dụ 1–2, p. 73). *Cho* ΔABC *vuông tại* A *có* $\widehat{C} = \beta$*. (a) Viết các tỷ số lượng giác của góc* β*. (b) Viết cụ thể các tỷ số lượng giác của góc* β *với* $\beta = 45^\circ$*. (c) Viết cụ thể các tỷ số lượng giác của góc* β *với* $\beta = 60^\circ$*.*

Bài toán 78 ([Chí+23], Ví dụ 3–4, ?3, p. 73–74). *Dựng góc nhọn* α, β *biết: (a)* $\tan\alpha = \frac{2}{3}$*. (b)* $\sin\beta = 0.5$*.*

Bài toán 79 ([Chí+23], ?4, p. 74). *Cho biết tổng số đo của góc* α, β *trong hình vẽ. Lập các tỷ số lượng giác của góc* α *& góc* β*. Trong các tỷ số này, cho biết các cặp tỷ số bằng nhau.*



Bài toán 80 ([Chí+23], 10., p. 76). *Vẽ 1 tam giác vuông có 1 góc nhọn* 34° *rồi viết các tỷ số lượng giác của góc* 34°*.*

Bài toán 81 ([Chí+23], 11., p. 76). *Cho* ΔABC *vuông tại* C*, trong đó* $AC = 0.9$ m*,* $BC = 1.2$ m*. Tính các tỷ số lượng giác của góc* B*, từ đó suy ra các tỷ số lượng giác của góc* A*.*

Bài toán 82 ([Chí+23], 12., p. 76). *Viết các tỷ số lượng giác sau thành tỷ số lượng giác của các góc nhỏ hơn* 45°*:* $\sin 60^\circ, \cos 75^\circ, \sin 52^\circ 30', \cot 82^\circ, \tan 80^\circ$.

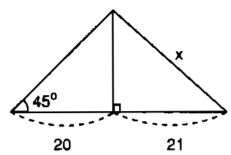
Bài toán 83 ([Chí+23], 13., p. 77). *Dựng góc nhọn α biết: (a)* $\sin\alpha = \frac{2}{3}$. *(b)* $\cos\alpha = 0.6$. *(c)* $\tan\alpha = \frac{3}{4}$. *(d)* $\cot\alpha = \frac{3}{2}$.

Bài toán 84 ([Chí+23], 14., p. 77). *Sử dụng định nghĩa các tỷ số lượng giác của 1 góc nhọn để chứng minh: Với góc nhọn α tùy ý: (a)* $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\tan\alpha\cot\alpha = 1$. *(b)* $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Bài toán 85 ([Chí+23], 15., p. 77). *Cho ΔABC vuông tại A. Biết $\cos B = 0.8$, tính các tỷ số lượng giác của góc C.*

Bài toán 86 ([Chí+23], 16., p. 77). *Cho tam giác vuông có 1 góc 60° & cạnh huyền có độ dài là 8. Tìm độ dài của cạnh đối diện với góc 60°.*

Bài toán 87 ([Chí+23], 17., p. 77). *Tìm x:*



Bài toán dựng 1 góc khi biết 1 trong 4 tỷ số lượng giác của góc đó bằng 1 số hữu tỷ dương:

Bài toán 88. *Dựng góc nhọn α bằng thước thẳng có chia cm, êke, & compa nếu biết: (a)* $\sin\alpha = r \in \mathbb{Q}$, *Q. (b)* $\cos\alpha = r \in \mathbb{Q}$, $0 < r < 1$. *(c)* $\tan\alpha = r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$. *(d)* $\cot\alpha = r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$.

Bài toán 89. *Dựng góc nhọn α bằng thước thẳng có chia cm, êke, & compa nếu biết: (a)* $\sin\alpha = \sqrt{r}$, $r \in \mathbb{Q}^\star$. *(b)* $\cos\alpha = \sqrt{r}$, $r \in \mathbb{Q}$, $0 < r < 1$. *(c)* $\tan\alpha = \sqrt{r}$, $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$. *(d)* $\cot\alpha = \sqrt{r}$, $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$.

Bài toán 90. *Chứng minh: Trong 1 tam giác vuông, nếu biết tỷ số độ dài của 2 cạnh thì có biết được độ lớn của các góc nhọn.*

Bài toán 91 ([Tuy23], Thí dụ 2, p. 107). *Cho* $\cot\alpha = \dfrac{a^2 - b^2}{2ab}$ *trong đó α là góc nhọn, $a > b > 0$. Tính $\cos\alpha$.*

Bài toán 92 ([Tuy23], 11., p. 108, định lý sin). *Cho ΔABC nhọn, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh:* $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$. *Đẳng thức này còn đúng với tam giác vuông & tam giác tù hay không?*

Bài toán 93 ([Tuy23], 12., p. 108). *Chứng minh: (a)* $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$. *(b)* $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$. *(c)* $\cot^2\alpha - \cos^2\alpha = \cot^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$. *(d)* $\dfrac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}$.

Bài toán 94 ([Tuy23], 13., p. 108). *Rút gọn biểu thức: (a)* $A = \dfrac{1 + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$. *(b)* $B = (1 + \tan^2\alpha)(1 - \sin^2\alpha) - (1 + \cot^2\alpha)(1 - \cos^2\alpha)$. *(c)* $C = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

Bài toán 95 ([Tuy23], 14., p. 108). *Tính giá trị của biểu thức* $A = 5\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha$ *biết* $\sin\alpha = \frac{2}{3}$.

Bài toán 96 ([Tuy23], 15., p. 108). *Không dùng máy tính hoặc bảng số, tính: (a)* $A = \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 70^\circ$. *(b)* $B = \sin^2 5^\circ + \sin^2 25^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 65^\circ + \sin^2 85^\circ$.

Bài toán 97 ([Tuy23], 16., p. 108). *Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Chứng minh: $\sin\alpha < \tan\alpha$, $\cos\alpha < \cot\alpha$. Áp dụng: (a) Sắp xếp các số sau theo thứ tự tăng dần: $\sin 65^\circ, \cos 65^\circ, \tan 65^\circ$. (b) Xác định α thỏa mãn điều kiện: $\tan\alpha > \sin\alpha > \cos\alpha$.*

Bài toán 98 ([Tuy23], 17., p. 108). *Cho ΔABC vuông tại A. Biết $\sin B = \frac{1}{4}$, tính $\tan C$.*

Bài toán 99 ([Tuy23], 18., p. 108). *Cho biết $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, tính $\tan\alpha$.*

Bài toán 100 ([Tuy23], 19., p. 109). *ΔABC, đường trung tuyến AM. Chứng minh nếu $\cot B = 3\cot C$ thì $AM = AC$.*

Bài toán 101 ([Tuy23], 20., p. 109). *Cho ΔABC, trực tâm H là trung điểm của đường cao AD. Chứng minh $\tan B \tan C = 2$.*

Bài toán 102 ([Tuy23], 21., p. 109). *Cho ΔABC nhọn, 2 đường cao BD, CE. Chứng minh: (a) $S_{\Delta ADE} = S_{\Delta ABC}\cos^2 A$. (b) $S_{BCDE} = S_{\Delta ABC}\sin^2 A$.*

Bài toán 103 ([Tuy23], 22., p. 109). *Cho ΔABC nhọn. Từ 1 điểm M nằm trong tam giác vẽ $MD \perp BC$, $ME \perp AC$, $MF \perp AB$. Chứng minh $\max\{MA, MB, MC\} \ge 2\min\{MD, ME, MF\}$, trong đó $\max\{MA, MB, MC\}$ là đoạn thẳng lớn nhất trong các đoạn thẳng MA, MB, MC & $\min\{MD, ME, MF\}$ là đoạn thẳng nhỏ nhất trong các đoạn thẳng MD, ME, MF.*

3 Hệ Thức về Cạnh & Góc Trong Tam Giác Vuông

Bài toán 104 ([Tuy23], Thí dụ 3, p. 109). *Tứ giác $ABCD$ có 2 đường chéo cắt nhau tại O. Cho biết* $\widehat{AOD} = 70°$, $AC = 5.3$ cm, $BD = 4$ cm. *Tính diện tích tứ giác $ABCD$.*

Bài toán 105 ([Tuy23], 23., p. 110). *Chứng minh: (a) Diện tích của 1 tam giác bằng nửa tích của 2 cạnh nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa 2 cạnh ấy. (b) Diện tích hình bình hành bằng tích của 2 cạnh kề nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa 2 cạnh ấy.*

Bài toán 106 ([Tuy23], 24., p. 110). *Cho hình bình hành $ABCD$, $BD\perp BC$. Biết $AB = a$, $\widehat{A} = \alpha$, tính diện tích hình bình hành đó.*

Bài toán 107 ([Tuy23], 25., p. 110). *Cho ΔABC, $\widehat{A} = 120°$, $\widehat{B} = 35°$, $AB = 12.25$ dm. Giải ΔABC.*

Bài toán 108 ([Tuy23], 26., p. 110). *Cho ΔABC nhọn, $\widehat{A} = 75°$, $AB = 30$ mm, $BC = 35$ mm. Giải ΔABC.*

Bài toán 109 ([Tuy23], 27., p. 110). *Cho ΔABC cân tại A, đường cao BH. Biết $BH = h$, $\widehat{C} = \alpha$. Giải ΔABC.*

Bài toán 110 ([Tuy23], 28., p. 110). *Hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{A} = 120°$, $AB = a$, $BC = b$. Các đường phân giác của 4 góc cắt nhau tạo thành tứ giác $MNPQ$. Tính diện tích tứ giác $MNPQ$.*

Bài toán 111 ([Tuy23], 29., p. 110). *Cho ΔABC, các đường phân giác AD, đường cao BH, đường trung tuyến CE đồng quy tại điểm O. Chứng minh $AC\cos A = BC\cos C$.*

4 Miscellaneous

Bài toán 112 ([Tuy23], Thí dụ 4, p. 111). *Cho ΔABC vuông tại A. Gọi M, N lần lượt là 2 điểm trên cạnh AB, AC sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$, $AN = \frac{1}{3}AC$. Biết độ dài $BN = \sin\alpha$, $CM = \cos\alpha$ với $0° < \alpha < 90°$. Tính cạnh huyền BC.*

Bài toán 113 ([Tuy23], 30., p. 112). *Cho ΔABC nhọn, $BC = a$, $AC = b$, $CA = b$ trong đó $b - c = \frac{a}{k}$, $k > 1$. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là các đường cao hạ từ A, B, C. Chứng minh: (a) $\sin A = k(\sin B - \sin C)$. (b) $\frac{1}{h_a} = k\left(\frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)$.*

Bài toán 114 ([Tuy23], 31., p. 112). *Giải ΔABC biết $AB = 14$, $BC = 15$, $CA = 13$.*

Bài toán 115 ([Tuy23], 32., p. 112). *Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $\widehat{DC'D'} = 45°$, $\widehat{BC'B'} = 60°$. Tính $\widehat{BC'D}$.*

Bài toán 116 ([Tuy23], 33., p. 112). *Cho ΔABC, $AB = AC = 1$, $\widehat{A} = 2\alpha$, $0° < \alpha < 45°$. Vẽ các đường cao AD, BE. (a) Các tỷ số lượng giác $\sin\alpha, \cos\alpha, \sin 2\alpha, \cos 2\alpha$ được biểu diễn bởi các đoạn thẳng nào? (b) Chứng minh $\Delta ADC \backsim \Delta BEC$, từ đó suy ra các hệ thức sau: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$. (c) Chứng minh: $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$, $\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$.*

Bài toán 117 ([Tuy23], 34., p. 112). *Cho $\alpha = 22°30'$, tính $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$.*

Bài toán 118 ([Tuy23], 35., p. 112). *Cho ΔABC, đường phân giác AD. Biết $AB = c$, $AC = b$, $\widehat{A} = 2\alpha$, $\alpha < 45°$. Chứng minh $AD = \dfrac{2bc\cos\alpha}{b + c}$.*

Bài toán 119. *Chứng minh: Trong 1 tam giác vuông, chỉ cần biết 2 yếu tố trong các yếu tố sau:*

$$a, b, c, h, b', c', S, p, m_a, m_b, m_c, d_a, d_b, d_c, r, \sin A, \sin B$$

`inserting ...` *là có thể giải tam giác vuông đó, i.e., xác định tất cả các yếu tố còn lại của tam giác vuông đó. Viết thuật toán & chương trình* Pascal, Python, C/C++ *tương ứng.*

Tài liệu

[Bìn+23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Ngọc Đạm, Nguyễn Bá Đang, Lê Quốc Hán, and Hồ Quang Vinh. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 9. Tập 2: Hình Học.* Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 240.

[Chí+23] Phan Đức Chính, Tôn Thân, Vũ Hữu Bình, Trần Phương Dung, Ngô Hữu Dũng, Lê Văn Hồng, and Nguyễn Hữu Thảo. *Toán 9 Tập 1.* Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 128.

[Thâ+23] Tôn Thân, Vũ Hữu Bình, Trần Phương Dung, Lê Văn Hồng, and Nguyễn Hữu Thảo. *Bài Tập Toán 9 Tập 1.* Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 216.

[Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9.* Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.