Problems in Elementary Inequality

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 18 tháng 5 năm 2023

Tóm tắt nội dung

A problem set for elementary inequality.

Mục lục

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: `nguyenquanbahong@gmail.com`; website: https://nqbh.github.io.

1 Easy Problems

Bài toán 1 ([Sơn+21], Bổ đề 1.1, p. 5)**.** *Chứng minh:* $4ab \le (a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$, *hay có thể viết dưới dạng* $\frac{a^2+b^2}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, $ab \le \frac{(a+b)^2}{4}$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Hint. $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \ge 0$, $2(a^2+b^2) - (a+b)^2 = (a-b)^2 \ge 0$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$. "$=$" $\Leftrightarrow a = b$. $\square$

Bài toán 2 ([Sơn+21], Bổ đề 1.2, p. 5)**.** *Chứng minh:* $3(ab+bc+ca) \le (a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)$, *hay có thể viết dưới dạng* $ab+bc+ca \le \frac{1}{3}(a+b+c)^2$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Hint. $(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] \ge 0$, $3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2 = (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$. "$=$" $\Leftrightarrow a = b = c$. $\square$

Bài toán 3 ([Sơn+21], Bổ đề 1.3, p. 6)**.** *Chứng minh:* $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b}$, *hay có thể viết dưới dạng* $\frac{1}{a+b} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$, $\forall a,b > 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Hint. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a+b} = \frac{(a-b)^2}{ab(a+b)} \ge 0$, $\forall a,b > 0$. "$=$" $\Leftrightarrow a = b > 0$. $\square$

Bài toán 4 ([Sơn+21], Bổ đề 1.4, p. 6)**.** *Chứng minh:* $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c}$, *hay có thể viết dưới dạng* $\frac{1}{a+b+c} \le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$, $\forall a,b,c > 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Bài toán 5 ([Sơn+21], Mở rộng Bổ đề 1.3–1.4, p. 6 cho n số)**.** *Chứng minh:*

$$\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} \ge \frac{n^2}{a_1+\cdots+a_n},\ \textit{i.e.},\ \frac{1}{a_1+\cdots+a_n} \le \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right),\ \forall a_i > 0,\ \forall i = 1,\ldots,n,$$

hay có thể được viết gọn lại như sau:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \ge \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n a_i},\ \textit{i.e.},\ \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i} \le \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i},\ \forall a_i > 0,\ \forall i = 1,\ldots,n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 6 ([Sơn+21], Bổ đề 1.5, p. 7)**.** *Chứng minh:* $\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b} \le \sqrt{2(a+b)}$, $\forall a,b \ge 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Bài toán 7 ([Sơn+21], Mở rộng Bổ đề 1.5, p. 7)**.** *Chứng minh:* $\sqrt{a+b+c} \le \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \le \sqrt{3(a+b+c)}$, $\forall a,b,c \ge 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Bài toán 8 ([Sơn+21], Mở rộng Bổ đề 1.5, p. 7 cho n số)**.** *Chứng minh:* $\sqrt{a_1+\cdots+a_n} \le \sqrt{a_1}+\cdots+\sqrt{a_n} \le \sqrt{n(a_1+\cdots+a_n)}$, $\forall a_i \ge 0$, $\forall i = 1,\ldots,n$, *hay có thể được viết gọn lại như sau:*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i} \le \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \le \sqrt{n\sum_{i=1}^n a_i},\ \forall a_i \ge 0,\ \forall i = 1,\ldots,n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 9 ([Sơn+21], Bổ đề 1.6, p. 7)**.** *Chứng minh:* $a^3+b^3 \ge ab(a+b)$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a+b \ge 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Hint. $a^3+b^3-ab(a+b) = (a+b)(a-b)^2 \ge 0$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a+b \ge 0$. "$=$" $\Leftrightarrow a = \pm b$. $\square$

Bài toán 10 ([Sơn+21], Mở rộng Bổ đề 1.6, p. 7)**.** *Chứng minh:* $a^4+b^4 \ge ab(a^2+b^2)$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Bài toán 11 ([Sơn+21], Bổ đề 1.7, p. 7)**.** *Chứng minh:* $a+b \ge 2\sqrt{ab}$, $\forall a,b \ge 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Bài toán 12 ([Sơn+21], Bổ đề 1.8, p. 7)**.** *Chứng minh:* $a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$, $\forall a,b,c \ge 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Tài liệu

[Sơn+21] Nguyễn Ngọc Sơn, Chu Đình Nghiệp, Lê Hải Trung, and Võ Quốc Bá Cẩn. *Các Chủ Đề Bất Đẳng Thức Ôn Thi Vào Lớp 10.* Tái bản lần thứ 3. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2021, p. 143.