

Problems in Elementary Mathematics/Grade 11

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 18 tháng 8 năm 2022

Tóm tắt nội dung

1 bộ sưu tập các bài toán chọn lọc từ cơ bản đến nâng cao cho Toán học sơ cấp lớp 11. Tài liệu này là phần bài tập bổ sung cho tài liệu chính [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 11/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_11/lecture)¹ của tác giả viết cho Toán lớp 11. Phiên bản mới nhất của tài liệu này được lưu trữ ở link sau: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 11/problem](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_11/problem)².

Mục lục

1	Hàm Số Lượng Giác & Phương Trình Lượng Giác – Trigonometric Function & Trigonometric Equation	2
2	Tổ Hợp & Xác Suất – Combinatorics & Probability	2
2.1	2 quy tắc đếm cơ bản – 2 basic rules of counting	2
2.2	Hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp – Permutation, arrangement, combination	2
2.3	Nhị thức Newton – Newton’s binomial theorem	3
2.4	Biến Cố & Xác Suất của Biến Cố – Event & Probability of Event	3
3	Dãy Số. Cấp Số Cộng & Cấp Số Nhân – Series. Arithmetic Progression/Sequence & Geometric Progression/Sequence	4
4	Giới Hạn – Limits	4
5	Đạo Hàm – Derivative	4
6	Phép Dời Hình & Phép Đồng Dạng Trong Mặt Phẳng	4
6.1	Phép tịnh tiến	4
6.2	Phép đối xứng trục	4
6.3	Phép đối xứng tâm	4
7	Đường Thẳng & Mặt Phẳng Trong Không Gian – Line & Plane in Euclidean Space \mathbb{R}^n	4
8	Vector Trong Không Gian. Quan Hệ Vuông Góc – Vector in Euclidean Space \mathbb{R}^n. Perpendicular Relation	4
9	Solutions	4
	Tài liệu	4

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam

e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

¹Explicitly, https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_11/NQBH_elementary_mathematics_grade_11.pdf.

²Explicitly, https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_11/problem/NQBH_elementary_mathematics_grade_11_problem.pdf.

1 Hàm Số Lượng Giác & Phương Trình Lượng Giác – Trigonometric Function & Trigonometric Equation

2 Tổ Hợp & Xác Suất – Combinatorics & Probability

2.1 2 quy tắc đếm cơ bản – 2 basic rules of counting

Bài toán 2.1 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, Ví dụ 2, p. 81). Trong 1 kỳ thi đại học, trong số các thí sinh dự thi vào trường Đại học Sư phạm ở khối A có 51 em đạt điểm giỏi môn Toán, 73 em đạt điểm giỏi môn Vật lý, 64 em đạt điểm giỏi môn Hóa học, 32 em đạt điểm giỏi cả 2 môn Toán & Vật lý, 45 em đạt điểm giỏi cả 2 môn Vật lý & Hóa học, 21 em đạt điểm giỏi cả 2 môn Toán & Hóa học & 10 em đạt điểm giỏi cả 3 môn Toán, Vật lý, Hóa học. Có 767 em mà cả 3 môn đều không có môn nào đạt điểm giỏi. Hỏi có bao nhiêu thí sinh dự thi vào trường Đại học Sư phạm ở khối A?

Bài toán 2.2 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, 1., p. 83). Có bao nhiêu số nguyên dương không vượt quá 1000 mà chia hết cho 3 hoặc chia hết cho 5.

Bài toán 2.3 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, 2., p. 83). Trong 1 khu phố gồm 53 hộ, thống kê cho thấy có 30 hộ đặt mua báo A, 18 hộ đặt mua báo B & 26 hộ đặt mua báo C. Có 9 hộ đặt mua báo A & B; 16 hộ đặt mua báo A & C; 8 hộ đặt mua báo B & C. Có 47 hộ đặt mua ít nhất 1 tờ báo. Hỏi: (a) Có bao nhiêu hộ không mua tờ báo nào? (b) Có bao nhiêu hộ mua cả 3 tờ báo? (c) Có bao nhiêu hộ mua báo A & B nhưng không mua báo C? (d) Có bao nhiêu hộ chỉ mua báo A mà không mua báo B & C?

Bài toán 2.4 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, 3., p. 83). 1 nhóm 9 người gồm 3 đàn ông, 4 phụ nữ & 2 đứa trẻ đi xem phim. Hỏi có bao nhiêu cách xếp họ ngồi trên 1 hàng ghế sao cho mỗi đứa trẻ ngồi giữa 2 người phụ nữ & không có 2 người đàn ông nào ngồi cạnh nhau?

Bài toán 2.5 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, 4., p. 83). Tìm số các số nguyên dương không lớn hơn 1000 mà chia hết cho 4 hoặc cho 7.

Bài toán 2.6 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, 5., p. 84). Người ta phỏng vấn 100 người về 3 bộ phim A, B, C đang chiếu thì thu được kết quả sau: Bộ phim A có 28 người đã xem. Bộ phim B có 26 người đã xem. Bộ phim C có 14 người đã xem. Có 8 người đã xem 2 bộ phim A & B. Có 4 người đã xem 2 bộ phim B & C. Có 3 người đã xem 2 bộ phim A & C. Có 2 người xem cả 3 bộ phim A, B, C. Xác định số người không đi xem bất cứ phim nào trong 3 bộ phim ấy.

Bài toán 2.7 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, 6., p. 84). Trong 1 trường có 3 câu lạc bộ (CLB) Toán, Văn, & Ngoại ngữ. Có 28 học sinh tham gia ít nhất 1 trong 3 CLB. Biết rằng: (a) Số học sinh chỉ tham gia CLB Toán, Văn bằng số học sinh chỉ tham gia duy nhất CLB Toán. (b) Số học sinh chỉ tham gia CLB Văn, Ngoại ngữ gấp 5 lần số học sinh tham gia cả 3 CLB. (c) Có 6 học sinh chỉ tham gia CLB Toán, Ngoại ngữ. (d) Không có học sinh nào chỉ tham gia duy nhất 1 CLB Văn hoặc duy nhất 1 CLB ngoại ngữ. (e) Số học sinh tham gia cả 3 CLB là 1 số nguyên dương chẵn. Tìm số học sinh chỉ tham gia CLB Toán & Văn & số học sinh tham gia cả 3 CLB.

Bài toán 2.8 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, 7., p. 84). 1 con bò có thể mang virus A, virus B, hoặc virus C; có thể mang đồng thời 2 hoặc nhiều hơn các virus nói trên; & cũng có thể không mang virus nào. Trong bản báo cáo của 1 nông trường nuôi bò cho biết: “Kiểm tra 1200 con bò thì có 675 con có virus A; 682 con có virus B; 684 con có virus C; 195 con có virus A & B; 467 con có virus A & C; 318 con có virus B & C; 165 con có virus A, B, C”. Chỉ ra rằng các số liệu trong báo cáo là không chính xác.

2.2 Hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp – Permutation, arrangement, combination

Mở rộng Quỳnh, Dũng, et al., 2010, Ví dụ 1, p. 87 cho trường hợp tổng quát n điểm phân biệt:

Bài toán 2.9. (a) Trong mặt phẳng cho 1 tập hợp P gồm 6 điểm phân biệt. Có bao nhiêu vector (khác $\vec{0}$) có điểm đầu & điểm cuối thuộc P ? (b) Trong mặt phẳng cho 1 tập hợp Q gồm 7 điểm phân biệt, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Có bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh đều thuộc Q ?

Bài toán 2.10 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, Ví dụ 3, p. 88). Chứng minh hằng đẳng thức

$$C_{2n}^2 = 2C_n^2 + n^2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

(a) Bằng biến đổi đại số. (b) Bằng suy luận tổ hợp.

Bài toán 2.11 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, 8., p. 88). Hỏi có bao nhiêu số có 5 chữ số khác nhau chia hết cho 5 mà trong biểu diễn thập phân của nó không có các chữ số 7, 8, 9?

Bài toán 2.12 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, 9., p. 88). *Chứng minh*

$$C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k, \forall n, k \in \mathbb{N}^*, 3 \leq k \leq n.$$

Bài toán 2.13 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, 10., p. 88). *Chứng minh*

$$\sum_{k=0}^r C_n^k C_m^{r-k} = C_{m+n}^r, \forall m, n, r \in \mathbb{N}^*, r < \min\{m, n\}.$$

Bài toán 2.14 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, 11., p. 88). *Chứng minh bằng quy nạp*

$$\sum_{k=0}^r C_{n+k}^k = C_{n+r+1}^r, \forall n, r \in \mathbb{N}^*.$$

Bài toán 2.15 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, 12., p. 88). *Trong 1 nhóm có 5 người A, B, C, D, E. (a) Có bao nhiêu cách xếp 5 người này thành hàng ngang sao cho A & B đứng cạnh nhau? (b) Có bao nhiêu cách xếp 5 người này thành hàng ngang sao cho C & D không đứng cạnh nhau?*

Bài toán 2.16 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, 13., p. 88). *Có bao nhiêu số có 5 chữ số khác nhau mà biểu diễn thập phân không có các chữ số 6, 7, 8, 9?*

Bài toán 2.17 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, 14., p. 88). *1 lớp học có n học sinh ($n > 3$). Thầy chủ nhiệm cần chọn ra 1 nhóm & chỉ định 1 em trong nhóm làm nhóm trưởng. Số học sinh trong nhóm phải $\in (1; n)$. Gọi T là số cách chọn. (a) Chứng minh $T = \sum_{k=2}^{n-1} kC_n^k$. (b) Chứng minh $T = n(2^{n-1} - 2)$. (c) Từ đó suy ra đẳng thức $\sum_{k=1}^n kC_n^k = n2^{n-1}$.*

2.3 Nhị thức Newton – Newton’s binomial theorem

Bài toán 2.18 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, Ví dụ 2, p. 92). *Chứng minh công thức khai triển nhị thức Newton bằng suy luận tổ hợp.*

Bài toán 2.19 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, 15., p. 94). *Tìm số hạng không chứa x (số hạng tự do) trong khai triển của $(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4})^n$ nếu biết $C_n^2 - C_n^1 = 44$.*

Bài toán 2.20 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, 16., p. 94). *Tìm hệ số của x^8 trong khai triển của $(1 + x^2 - x^3)^8$.*

Bài toán 2.21 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, 16., p. 94). *Tìm hệ số của x^4 trong khai triển của $(x^2 - \frac{2}{x})^8$.*

Bài toán 2.22 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, 17., p. 94). *Tìm hệ số của x^7 trong khai triển của $(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x})^{20}$.*

Bài toán 2.23 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, 18., p. 94). *Tìm hệ số của x^7 trong khai triển của $(\sqrt{x} + \frac{1}{x})^{12}$.*

Bài toán 2.24 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, 18., p. 94). *Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Newton của $(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5})^n$ biết $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$.*

1 vài tổng quát cho các bài toán trên.

2.4 Biến Cố & Xác Suất của Biến Cố – Event & Probability of Event

Bài toán 2.25 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, Ví dụ 2, p. 97). *Trong 1 nhóm có k người. Biết không có ai sinh vào năm nhuận. (a) Mô tả không gian mẫu. (b) Gọi A là biến cố: “Trong nhóm k người không có 2 người nào có ngày sinh trùng nhau”. Xác định tập con A mô tả biến cố A. (c) Gọi B là biến cố: “Không có người nào trong nhóm có ngày sinh trùng với ngày Quốc khánh 2.9”. Xác định tập con B mô tả biến cố B. (d) Giả thiết rằng các phần tử của không gian mẫu là đồng khả năng. Tính $P(A)$ & $P(B)$. (e) Ký hiệu $P(k)$ là xác suất để trong nhóm k người không có 2 người nào có ngày sinh trùng nhau & $Q(k)$ là xác suất để trong nhóm k người không có người nào trong nhóm có ngày sinh trùng với ngày Quốc khánh 2.9. Chứng minh $P(k), Q(k)$ giảm theo k.*

Bài toán 2.26 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, Ví dụ 4, p. 100). *1 chiếc hộp có 9 thẻ đánh số từ 1–9. Rút ngẫu nhiên 2 thẻ rồi nhân 2 số ghi trên 2 thẻ với nhau. Tính xác suất để kết quả nhận được là 1 số chẵn, bằng ít nhất 2 cách khác nhau.*

Bài toán 2.27 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, Ví dụ 5, p. 100). *1 hộp đựng 4 viên bi xanh, 3 viên bi đỏ, & 2 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 2 viên bi. (a) Tính xác suất để chọn được 2 viên bi cùng màu. (b) Tính xác suất để chọn được 2 viên bi khác màu.*

3 Dãy Số. Cấp Số Cộng & Cấp Số Nhân – Series. Arithmetic Progression/Sequence & Geometric Progression/Sequence

Bài toán 3.1. Chứng minh bằng quy nạp quy tắc cộng & quy tắc nhân tổng quát.

Bài toán 3.2. Chứng minh bằng quy nạp công thức tính số phần tử của hợp n , $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ tập hợp bất kỳ.

4 Giới Hạn – Limits

5 Đạo Hàm – Derivative

6 Phép Dời Hình & Phép Đồng Dạng Trong Mặt Phẳng

6.1 Phép tịnh tiến

6.2 Phép đối xứng trục

Bài toán 6.1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(a_1; a_2)$ & đường thẳng d có phương trình $ax + by + c = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$). Tìm ảnh của A & đường thẳng d qua phép đối xứng trục d_1 có phương trình $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ($a_1^2 + b_1^2 \neq 0$). Suy ra các trường hợp riêng khi d_1 là Ox hoặc Oy .

6.3 Phép đối xứng tâm

Bài toán 6.2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(a_1; a_2)$ & đường thẳng d có phương trình $ax + by + c = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$). Tìm ảnh của A & đường thẳng d qua phép đối xứng tâm O & phép đối xứng tâm $O_1(o_1; o_2)$.

7 Đường Thẳng & Mặt Phẳng Trong Không Gian – Line & Plane in Euclidean Space \mathbb{R}^n

8 Vector Trong Không Gian. Quan Hệ Vuông Góc – Vector in Euclidean Space \mathbb{R}^n . Perpendicular Relation

9 Solutions

Tài liệu: Hạo, Tuấn, et al., 2022; Quỳnh, Doan, et al., 2020; Hạo, Hy, et al., 2022; Quỳnh, Cường, et al., 2020; Quỳnh, Dũng, et al., 2010; Quỳnh, Ban, et al., 2014.

Tài liệu

- Hạo, Trần Văn, Nguyễn Mộng Hy, et al. (2022). *Hình Học 11*. Tái bản lần thứ 15. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 136.
- Hạo, Trần Văn, Vũ Tuấn, et al. (2022). *Đại Số & Giải Tích 11*. Tái bản lần thứ 15. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 191.
- Quỳnh, Đoàn, Phạm Khắc Ban, et al. (2014). *Tài Liệu Chuyên Toán Hình Học 11*. Tái bản lần thứ 4. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 320.
- Quỳnh, Đoàn, Văn Như Cường, et al. (2020). *Hình Học 11 nâng cao*. Tái bản lần thứ 13. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 132.
- Quỳnh, Đoàn, Nguyễn Huy Doan, et al. (2020). *Đại Số & Giải Tích 11 nâng cao*. Tái bản lần thứ 13. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 241.
- Quỳnh, Đoàn, Trần Nam Dũng, et al. (2010). *Tài Liệu Chuyên Toán Đại Số & Giải Tích 11*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 327.