

# Fraction – Phân Số $\mathbb{Q}$

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 8 tháng 3 năm 2023

## Tóm tắt nội dung

[EN] This text is a collection of problems, from easy to advanced, about *fraction*. This text is also a supplementary material for my lecture note on Elementary Mathematics grade 6, which is stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 6/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_6/lecture)<sup>1</sup>. The latest version of this text has been stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 6/fraction](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_6/fraction)<sup>2</sup>.

[VI] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài tập chọn lọc từ cơ bản đến nâng cao về *phân số*. Tài liệu này là phần bài tập bổ sung cho tài liệu chính – bài giảng [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 6/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_6/lecture) của tác giả viết cho Toán Sơ Cấp lớp 6. Phiên bản mới nhất của tài liệu này được lưu trữ & có thể tải xuống ở link sau: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 6/fraction](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_6/fraction).

**Nội dung.** Phân số với tử & mẫu là số nguyên; các phép tính với phân số; số thập phân; các phép tính với số thập phân; tỷ số, tỷ số phần trăm, làm tròn số.

## Mục lục

<b>1</b>	<b>Phân Số với Tử &amp; Mẫu Là Số Nguyên</b>	<b>3</b>
1.1	Khái niệm phân số	3
1.2	Phân số bằng nhau	3
1.3	Tính chất cơ bản của phân số	3
1.3.1	Tính chất cơ bản	3
1.3.2	Rút gọn về phân số tối giản	4
1.3.3	Quy đồng mẫu nhiều phân số	4
<b>2</b>	<b>Tính chất Cơ Bản của Phân Số</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Rút Gọn Phân Số</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Quy Đồng Mẫu Số Nhiều Phân Số</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>So Sánh Các Phân Số</b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>Hỗn Số Dương</b>	<b>9</b>
<b>7</b>	<b>1 Số Phương Pháp Đặc Biệt để So Sánh 2 Phân Số</b>	<b>9</b>
<b>8</b>	<b><math>\pm</math> Phân Số</b>	<b>9</b>
8.1	+ Phân Số	9
8.1.1	Quy tắc cộng phân số	9
8.1.2	Tính chất của phép cộng phân số	10
8.2	– Phân Số	10
8.2.1	Số đối của 1 phân số	10
8.2.2	Quy tắc trừ phân số	10
8.3	Quy tắc dấu ngoặc	11
8.4	Biểu diễn phân số trên trục số nằm ngang	12
<b>9</b>	<b><math>;</math>: Phân Số</b>	<b>12</b>
<b>10</b>	<b>Tổng Các Phân Số Viết Theo Quy Luật</b>	<b>12</b>
<b>11</b>	<b>Số Thập Phân. Làm Tròn Số Thập Phân. Các Phép Tính với Số Thập Phân</b>	<b>12</b>

\*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam

e-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com); website: <https://nqbh.github.io>.

<sup>1</sup>URL: [https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary\\_mathematics/grade\\_6/NQBH\\_elementary\\_mathematics\\_grade\\_6.pdf](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_6/NQBH_elementary_mathematics_grade_6.pdf).

<sup>2</sup>URL: [https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary\\_mathematics/grade\\_6/fraction/NQBH\\_fraction.pdf](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_6/fraction/NQBH_fraction.pdf).

12 Tìm Giá Trị Phân Số của 1 Số Cho Trước. Tìm 1 Số Biết Giá Trị 1 Phân Số của Nó . . . . .	12
13 Tìm Tỷ Số & Tỷ Số % của 2 Đại Lượng . . . . .	12
14 Toán về Công Việc Làm Đồng Thời . . . . .	12
15 Miscellaneous . . . . .	12
Tài liệu . . . . .	12

# 1 Phân Số với Tử & Mẫu Là Số Nguyên

## 1.1 Khái niệm phân số

**Định nghĩa 1** (Phân số). *Kết quả của phép chia số nguyên  $a$  cho số nguyên  $b$  khác 0 có thể viết dưới dạng  $\frac{a}{b}$ , gọi là phân số. Ký hiệu:  $\frac{a}{b}$ , với  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ .*

Phân số  $\frac{a}{b}$  đọc là:  $a$  phần  $b$ ,  $a$  là tử số (còn gọi tắt là tử,  $b$  là mẫu số (còn gọi tắt là mẫu). Mọi số nguyên  $a \in \mathbb{Z}$  có thể viết ở dạng phân số là  $\frac{a}{1}$ , i.e.,  $a = \frac{a}{1}$ ,  $\forall a \in \mathbb{Z}$ .

**Bài toán 1** (Thái, Đạt, et al., 2022a, Ví dụ 1, 1, p. 26). *Viết & đọc phân số trong mỗi trường hợp sau: (a) Tử là 11, mẫu là -3. (b) Tử là -7, mẫu là -5. (c) Tử là -6, mẫu là 17. (d) Tử là -12, mẫu là -37.*

*Giải.* (a) Viết:  $\frac{11}{-3}$ , đọc: mười một phần âm ba. (b) Viết:  $\frac{-7}{-5}$ , đọc: âm bảy phần âm năm. (c) Viết:  $\frac{-6}{17}$ , đọc: âm sáu phần mười bảy. (d) Viết:  $\frac{-12}{-37}$ , đọc: âm mười hai phần âm ba mươi bảy.  $\square$

**Bài toán 2** (Thái, Đạt, et al., 2022a, 2, p. 26). *Cách viết nào sau đây cho ta phân số: (a)  $\frac{4}{-9}$ ; (b)  $\frac{0.25}{9}$ ; (c)  $\frac{-9}{0}$ ?*

*Giải.* (a)  $\frac{4}{-9}$  là phân số. (b)  $\frac{0.25}{9}$  không là phân số theo 1 vì  $0.25 \notin \mathbb{Z}$ . (c)  $\frac{-9}{0}$  không là phân số, thậm chí không có nghĩa (về mặt toán học) vì phép chia cho 0 không có nghĩa.  $\square$

Mọi số nguyên  $a$  đều có thể viết ở dạng phân số là  $\frac{a}{1}$ , i.e.,  $a = \frac{a}{1}$ ,  $\forall a \in \mathbb{Z}$ .

**Bài toán 3** (Thái, Đạt, et al., 2022a, Ví dụ 2, p. 26). *Viết mỗi số nguyên sau dưới dạng phân số: 19, -7, 0.*

*Giải.*  $19 = \frac{19}{1}$ ,  $-7 = \frac{-7}{1}$ ,  $0 = \frac{0}{1}$ .  $\square$

## 1.2 Phân số bằng nhau

**Định nghĩa 2** (2 phân số bằng nhau). *2 phân số được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng biểu diễn 1 giá trị.*

**Định lý 1.** *Xét 2 phân số  $\frac{a}{b}$  &  $\frac{c}{d}$ , với  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ,  $bd \neq 0$ . Nếu  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  thì  $ad = bc$ . Ngược lại, nếu  $ad = bc$  thì  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ .*

Với  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ , luôn có:  $\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$  &  $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$ .

**Bài toán 4** (Thái, Đạt, et al., 2022a, Ví dụ 3, 3, p. 27). *Các cặp phân số sau có bằng nhau không? Vì sao? (a)  $\frac{3}{-7}$  &  $\frac{3}{7}$ ; (b)  $\frac{2}{5}$  &  $\frac{4}{10}$ ; (c)  $\frac{4}{8}$  &  $\frac{-1}{2}$ ; (d)  $\frac{1}{-6}$  &  $\frac{-3}{18}$ .*

*Giải.* (a) Vì  $3 \cdot 7 = (-7) \cdot (-3) = 21$  nên  $\frac{3}{-7} = \frac{3}{7}$ . (b) Vì  $2 \cdot (-10) \neq 5 \cdot 4$  ( $-20 \neq 20$ ) nên  $\frac{2}{5} \neq \frac{4}{10}$ . (c) Vì  $4 \cdot (-2) = 8 \cdot (-1) = -8$  nên  $\frac{4}{8} = \frac{-1}{2}$ . (d) Vì  $1 \cdot (-18) \neq (-6) \cdot (-3)$  ( $-18 \neq 18$ ) nên  $\frac{1}{-6} \neq \frac{-3}{18}$ .  $\square$

## 1.3 Tính chất cơ bản của phân số

### 1.3.1 Tính chất cơ bản

**Định lý 2.** *Nếu ta nhân cả tử & mẫu của 1 phân số với cùng 1 số nguyên khác 0 thì ta được 1 phân số bằng phân số đã cho. Nếu ta chia cả tử & mẫu của 1 phân số cho cùng 1 ước chung của chúng thì ta được 1 phân số bằng phân số đã cho.*

$\frac{a}{b} = \frac{am}{an}$ ,  $\forall a, b, m \in \mathbb{Z}$ ,  $bm \neq 0$  (i.e.,  $b \neq 0$  &  $m \neq 0$ ).  $\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $\forall n \in \text{ƯC}(a, b)$ . Mỗi phân số đều đưa được về 1 phân số bằng nó & có mẫu là số dương.

**Bài toán 5** (Thái, Đạt, et al., 2022a, Ví dụ 4, p. 28). *Viết mỗi phân số sau thành phân số bằng nó & có mẫu là số dương: (a)  $\frac{3}{-5}$ ; (b)  $\frac{-2}{-9}$ .*

*Giải.* Theo tính chất cơ bản của phân số: (a)  $\frac{3}{-5} = \frac{3 \cdot (-1)}{(-5) \cdot (-1)} = \frac{-3}{5}$ . (b)  $\frac{-2}{-9} = \frac{(-2) \cdot (-1)}{(-9) \cdot (-1)} = \frac{2}{9}$ .  $\square$

**Bài toán 6** (Thái, Đạt, et al., 2022a, 4, p. 28). *Viết phân số sau thành phân số bằng nó & có mẫu là số dương:  $\frac{a}{b}$ ,  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{N}^*$ .*

*Giải.* Vì  $b \in \mathbb{N}^*$  nên  $b > 0$ . Theo tính chất cơ bản của phân số:  $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot (-1)}{(-b) \cdot (-1)} = \frac{-a}{b}$ .  $\square$

Nếu bỏ đi điều kiện  $b \in \mathbb{N}^*$  trong bài toán trên, ta được mở rộng sau:

**Bài toán 7** (Mở rộng Thái, Đạt, et al., 2022a, 4, p. 28). *Viết phân số sau thành phân số bằng nó & có mẫu là số dương:  $\frac{a}{b}$ ,  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .*

*Giải.* Nếu  $b < 0$ , phân số  $\frac{a}{b}$  đã có mẫu số dương  $-b > 0$  nên không cần làm gì thêm. Nếu  $b > 0$ , theo bài toán trên:  $\frac{a}{-b} = \frac{a \cdot (-1)}{(-b) \cdot (-1)} = \frac{-a}{b}$ . Có thể viết gom 2 trường hợp này lại thành<sup>3</sup>:  $\frac{a}{-b} = \frac{a \operatorname{sign} b}{|b|}$  với  $\operatorname{sign} b$  là hàm dấu<sup>4</sup> của  $b$ .  $\square$

### 1.3.2 Rút gọn về phân số tối giản

**Định nghĩa 3** (Phân số tối giản). Phân số tối giản là phân số mà tử & mẫu chỉ có ước chung là  $\pm 1$ .

$$\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \text{ là phân số tối giản} \Leftrightarrow \text{ƯC}(a, b) = \{\pm 1\} \Leftrightarrow \text{ƯCLN}(a, b) = 1.$$

Dựa vào tính chất cơ bản của phân số, để rút gọn phân số với tử & mẫu là số nguyên về phân số tối giản ta thường làm như sau: *Bước 1*: Tìm ƯCLN của tử & mẫu sau khi đã bỏ đi dấu “-” (nếu có). *Bước 2*: Chia cả tử & mẫu cho ƯCLN vừa tìm được, ta có phân số tối giản cần tìm.

$$\frac{a}{b} = \frac{a : \text{ƯCLN}(a, b)}{b : \text{ƯCLN}(a, b)} = \frac{a : \text{ƯCLN}(a, b) \operatorname{sign} b}{|b| : \text{ƯCLN}(a, b)}, \forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0.$$

**Bài toán 8** (Thái, Đạt, et al., 2022a, Ví dụ 5, p. 28). Rút gọn mỗi phân số sau về phân số tối giản: (a)  $\frac{12}{-15}$ ; (b)  $\frac{-24}{36}$ .

*Giải.* (a)  $\text{ƯCLN}(12, 15) = 3$ ,  $\frac{12}{-15} = \frac{12:3}{-15:3} = \frac{4}{-5}$ . (b)  $\text{ƯCLN}(24, 36) = 12$ ,  $\frac{-24}{36} = \frac{-24:12}{36:12} = \frac{-2}{3}$ .  $\square$

**Bài toán 9** (Thái, Đạt, et al., 2022a, Ví dụ 6, p. 29). (a) Rút gọn phân số  $\frac{-2}{6}$  về phân số tối giản. (b) Viết tất cả các phân số bằng phân số  $\frac{-2}{6}$  mà mẫu là số tự nhiên có 1 chữ số.

*Giải.* (a)  $\text{ƯCLN}(2, 6) = 2$ ,  $\frac{-2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{2:2}{6:2} = \frac{1}{3}$ . (b)  $\frac{-2}{6} = \frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$ ,  $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{3}{9}$ . Vậy phân số  $\frac{-2}{6}$  bằng các phân số có mẫu là số tự nhiên có 1 chữ số:  $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}$ .  $\square$

### 1.3.3 Quy đồng mẫu nhiều phân số

Dựa vào tính chất cơ bản của phân số ta có thể quy đồng mẫu nhiều phân số có tử & mẫu là số nguyên. Để quy đồng mẫu nhiều phân số, ta thường làm như sau: *Bước 1*: Viết các phân số đã cho về phân số có mẫu dương. Tìm BCNN của các mẫu dương đó để làm mẫu chung. *Bước 2*: Tìm thừa số phụ của mỗi mẫu (bằng cách chia mẫu chung cho từng mẫu). *Bước 3*: Nhân tử & mẫu của mỗi phân số ở *Bước 1* với thừa số phụ tương ứng.

**Bài toán 10** (Thái, Đạt, et al., 2022a, Ví dụ 7, p. 29). Quy đồng mẫu những phân số sau: (a)  $\frac{-1}{2}, \frac{3}{-5}$ ; (b)  $\frac{3}{-20}, \frac{-7}{20}, \frac{-11}{-30}$ .

*Giải.* (a)  $\frac{3}{-5} = \frac{-3}{5}$ ,  $\text{BCNN}(2, 5) = 10$ ,  $10 : 2 = 5$ ,  $10 : 5 = 2$ . Vậy  $\frac{-1}{2} = \frac{-1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{-5}{10}$ ,  $\frac{3}{-5} = \frac{-3}{5} = \frac{(-3) \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{-6}{10}$ . (b)  $\frac{3}{-20} = \frac{-3}{20}$ ,  $\text{BCNN}(20, 15, 30) = 60$ ,  $60 : 20 = 3$ ,  $60 : 15 = 4$ ,  $60 : 30 = 2$ . Vậy  $\frac{3}{-20} = \frac{-3}{20} = \frac{-3 \cdot 3}{20 \cdot 3} = \frac{-9}{60}$ ,  $\frac{-7}{15} = \frac{-7 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{-28}{60}$ ,  $\frac{-11}{-30} = \frac{11}{30} = \frac{11 \cdot 2}{30 \cdot 2} = \frac{22}{60}$ .  $\square$

**Bài toán 11** (Thái, Đạt, et al., 2022a, 5, p. 30). Quy đồng mẫu những phân số sau:  $\frac{-3}{8}, \frac{2}{-3}, \frac{3}{72}$ .

**Tóm tắt kiến thức.** “Phân số có dạng  $\frac{a}{b}$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ , có thể hiểu là phép chia số nguyên  $a$  cho số nguyên  $b$  khác 0. Nếu  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  thì  $ad = bc$ . Ngược lại, nếu  $ad = bc$  thì  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, bd \neq 0$ . Có  $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$ ,  $\forall a, b, m \in \mathbb{Z}, bm \neq 0$ ;  $\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{Z}, \forall n \in \text{ƯC}(a, b)$ . Phân số tối giản là phân số mà tử & mẫu chỉ có ước chung là  $\pm 1$ .” – Thái, 2022, Chap. V, §1, p. 29

**Bài toán 12** (Thái, Đạt, et al., 2022a, 1., p. 30). Viết & đọc phân số trong mỗi trường hợp sau: (a) Tử số là  $-43$ , mẫu số là  $19$ ; (b) Tử số là  $-123$ , mẫu số là  $-63$ .

**Bài toán 13** (Thái, Đạt, et al., 2022a, 2., p. 30). Các cặp phân số sau có bằng nhau không? Vì sao? (a)  $\frac{-2}{9}, \frac{6}{-27}$ ; (b)  $\frac{-1}{5}, \frac{4}{25}$ .

**Bài toán 14** (Thái, Đạt, et al., 2022a, 3., p. 30). Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  biết: (a)  $\frac{-28}{35} = \frac{16}{x}$ ; (b)  $\frac{x+7}{15} = \frac{-24}{36}$ .

**Bài toán 15** (Thái, Đạt, et al., 2022a, 4., p. 30). Rút gọn mỗi phân số sau về phân số tối giản:  $\frac{14}{21}, \frac{-36}{48}, \frac{28}{-52}, \frac{-54}{-90}$ .

**Bài toán 16** (Thái, Đạt, et al., 2022a, 5., p. 30). (a) Rút gọn phân số  $\frac{-21}{39}$  về phân số tối giản. (b) Viết tất cả các phân số bằng  $\frac{-21}{39}$  mà mẫu là số tự nhiên có 2 chữ số.

**Bài toán 17** (Thái, Đạt, et al., 2022a, 6., p. 30). Quy đồng mẫu những phân số sau: (a)  $\frac{-5}{14}, \frac{1}{-21}$ ; (b)  $\frac{17}{60}, \frac{-5}{18}, \frac{-64}{90}$ .

**Bài toán 18** (Thái, Đạt, et al., 2022a, 7., p. 30). Trong các phân số sau, tìm phân số không bằng phân số nào trong các phân số còn lại:  $\frac{6}{25}, \frac{-4}{50}, \frac{-27}{54}, \frac{-18}{-75}, \frac{28}{-56}$ .

<sup>3</sup>Suy ra trực tiếp từ đẳng thức:  $|x| = x \operatorname{sign} x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Giá trị tuyệt đối của 1 số thực bằng số đó nhân với hàm dấu của nó.

<sup>4</sup>Hàm dấu của 1 số thực  $x \in \mathbb{R}$  được xác định như sau:

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{nếu } x > 0, \\ 0, & \text{nếu } x = 0, \\ -1, & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

**Bài toán 19** (Thái, 2022, Ví dụ 1, p. 29). *Viết tất cả các phân số  $\frac{a}{b}$  biết  $a, b$  được chọn trong các số:  $-3, 0, 5$ . Có tất cả bao nhiêu phân số?*

*Giải.* Vì  $b \neq 0$  nên có 2 trường hợp: (1)  $b = -3$ , có 3 phân số:  $\frac{-3}{-3}, \frac{0}{-3}, \frac{5}{-3}$ . (2)  $b = 5$ , có 3 phân số:  $\frac{-3}{5}, \frac{0}{5}, \frac{5}{5}$ . Viết được tất cả 6 phân số.  $\square$

**Bài toán 20** (Mở rộng Thái, 2022, Ví dụ 1, p. 29). *Viết tất cả các phân số  $\frac{a}{b}$  biết  $a, b$  được chọn trong các số:  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , với  $n \in \mathbb{N}^*$ , phân biệt cho trước. Có tất cả bao nhiêu phân số?*

*Giải.* Xét 2 trường hợp sau: (1) Nếu trong  $n$  số  $a_i$  đã cho có 1 số bằng 0 (lúc nào cũng chỉ có tối đa 1 số bằng 0 vì các số này phân biệt), i.e., có 1 chỉ số  $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$  sao cho  $a_{i_0} = 0$  &  $a_i \neq 0, \forall i \neq i_0$ . Khi đó, có thể viết được các phân số  $\frac{a_i}{b} = \frac{a_i}{a_j}, \forall i = 1, 2, \dots, n, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, j \neq i_0$ . Có tất cả  $n(n-1)$  phân số trong trường hợp này. (2) Nếu tất cả các số  $a_i$  đã cho đều khác 0, i.e.,  $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$  thì có thể viết được các phân số  $\frac{a_i}{b} = \frac{a_i}{a_j}, \forall i, j = 1, 2, \dots, n$ . Có tất cả  $n \cdot n = n^2$  phân số trong trường hợp này.  $\square$

**Bài toán 21** (Thái, 2022, Ví dụ 2, p. 29). *1 trường học có số học sinh giỏi chiếm  $\frac{12}{35}$  số học sinh toàn trường, số học sinh khá chiếm  $\frac{13}{25}$  số học sinh toàn trường. Số học sinh giỏi & số học sinh khá của trường đó có bằng nhau không? Vì sao?*

*Giải.*  $12 \cdot 25 \neq 35 \cdot 13 \Rightarrow \frac{12}{35} \neq \frac{13}{25}$ , nên số học sinh giỏi & số học sinh khá của trường đó không bằng nhau.  $\square$

**Lưu ý 1.** *Có thể thay  $\frac{12}{35}, \frac{13}{25}$  trong bài toán trên bằng 2 phân số  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, a, b, c, d \in \mathbb{Z}, bd \neq 0$ . Theo tính chất của 2 phân số bằng nhau: Nếu  $ad = bc$  thì số học sinh giỏi & số học sinh khá của trường đó bằng nhau. Ngược lại, nếu  $ad \neq bc$  thì số học sinh giỏi & số học sinh khá của trường đó không bằng nhau.*

**Bài toán 22** (Thái, 2022, Ví dụ 3, p. 30). *Rút gọn về phân số tối giản: (a)  $\frac{3510-135}{4680-180}$ . (b)  $\frac{2^4 \cdot 3^2}{6^2 \cdot 5}$ . (c)  $\frac{11 \cdot 2^n}{6^m}$  với  $m, n \in \mathbb{N}$ .*

*Giải.* (a)  $\frac{3510-135}{4680-180} = \frac{3 \cdot 45 \cdot (26-1)}{4 \cdot 45 \cdot (26-1)} = \frac{3}{4}$ . (b)  $\frac{2^4 \cdot 3^2}{6^2 \cdot 5} = \frac{2^4 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = \frac{2^2}{5} = \frac{4}{5}$ . (c) Nếu  $m > n$ ,  $\frac{11 \cdot 2^n}{6^m} = \frac{11 \cdot 2^n}{2^m \cdot 3^m} = \frac{11}{2^{m-n} \cdot 3^n}$ . Nếu  $m = n$ ,  $\frac{11 \cdot 2^n}{6^m} = \frac{11 \cdot 2^n}{2^m \cdot 3^m} = \frac{11}{3^n}$ . (c) Nếu  $m < n$ ,  $\frac{11 \cdot 2^n}{6^m} = \frac{11 \cdot 2^n}{2^m \cdot 3^m} = \frac{11 \cdot 2^{n-m}}{3^n}$ .  $\square$

**Bài toán 23** (Thái, 2022, 3., p. 30). *Trong các cách viết sau, cách viết nào cho ta phân số? (a)  $-\frac{9 \cdot 4}{11 \cdot 5}$ . (b)  $\frac{-8}{0}$ . (c)  $\frac{7}{1}$ . (d)  $\frac{n}{2}, n \in \mathbb{Z}$ .*

**Bài toán 24** (Thái, 2022, 4., p. 31). *Trong các cặp phân số sau, cặp phân số nào bằng nhau? Vì sao?  $\frac{3}{7}$  &  $\frac{6}{-14}$ ,  $\frac{12}{-4}$  &  $\frac{-9}{3}$ ,  $\frac{-13}{9}$  &  $\frac{13}{-9}$ ,  $-5$  &  $\frac{-10}{2}$ ,  $\frac{2x}{6}$  &  $\frac{x}{3}, x \in \mathbb{Z}$ .*

## 2 Tính chất Cơ Bản của Phân Số

“1. Ta gọi  $\frac{a}{b}$  với  $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$  là 1 phân số,  $a$  là tử,  $b$  là mẫu của phân số. Ta có thể viết thương của phép chia  $a \in \mathbb{Z}$  cho  $b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$  dưới dạng  $\frac{a}{b}$  & cũng gọi  $\frac{a}{b}$  là phân số.  $a \in \mathbb{Z}$  có thể viết dưới dạng phân số  $\frac{a}{1}$ . 2. 2 phân số bằng nhau. Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, b \neq 0, d \neq 0$ . Nếu  $ad = bc$  thì  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , ngược lại nếu  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  thì  $ad = bc$ . 3. 2 tính chất cơ bản của phân số:  $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}, \forall a, b, m \in \mathbb{Z}, b \neq 0, m \neq 0$ .  $\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}, \forall a, b, n \in \mathbb{Z}, b \neq 0, n \in \text{ƯC}(a, b)$ . 4. Rút gọn phân số: Muốn rút gọn 1 phân số, ta chia cả tử & mẫu của phân số đó cho 1 ước chung khác  $\pm 1$  của chúng. Phân số tối giản là phân số mà tử & mẫu chỉ có ước chung là  $\pm 1$ , i.e.,  $\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, \text{ƯCLN}(a, b) = 1$ . 5. Nếu đổi dấu cả tử & mẫu của 1 phân số thì được 1 phân số mới bằng phân số đã cho.  $\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}, \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}, \forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ . 6. Nếu  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản thì mọi phân số bằng nó đều có dạng  $\frac{am}{bm}$  với  $m \in \mathbb{Z} \text{ & } m \neq 0$ .”

– Tuyên, 2022, Chap. 3, §1, p. 45

“Số có dạng  $\frac{a}{b}$  trong đó  $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$  được gọi là phân số. Số nguyên  $n \in \mathbb{Z}$  được đồng nhất với phân số  $\frac{n}{1}$ . Tính chất cơ bản của phân số:  $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{a:n}{b:n}$  với  $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0, n \in \text{ƯC}(a, b)$ . Nếu  $\text{ƯCLN}(|a|, |b|) = 1$  thì  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Nếu  $\frac{m}{n}$  là dạng tối giản của phân số  $\frac{a}{b}$  thì tồn tại số nguyên  $k \in \mathbb{Z}$  sao cho  $a = mk, b = nk$ .” – Bình, 2022, Chap. III, §1, p. 4

**Bài toán 25** (Tuyên, 2022, Ví dụ 49, p. 45). *Cho  $A = \{-5, 0, 9\}$ . Viết tất cả các phân số  $\frac{a}{b}$  với  $a, b \in A$ . Có bao nhiêu phân số thỏa mãn?*

*Giải.* Số 0 không thể lấy làm mẫu của phân số. Lấy  $-5$  làm mẫu:  $\frac{-5}{-5}, \frac{0}{-5}, \frac{9}{-5}$ . Lấy 9 làm mẫu:  $\frac{-5}{9}, \frac{0}{9}, \frac{9}{9}$ . Có 6 phân số thỏa mãn.  $\square$

**Bài toán 26** (Mở rộng Tuyên, 2022, Ví dụ 49, p. 45). *Cho  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{Z}$ . Viết tất cả các phân số  $\frac{a}{b}$  với  $a, b \in A$ . Có bao nhiêu phân số thỏa mãn?*

*Giải.* Xét 2 trường hợp: (a) Nếu  $0 \notin A$ , i.e.,  $a_i \neq 0, \forall i = 1, \dots, n$ . Tất cả các phân số  $\frac{a_i}{a_j}$  với  $a, b \in A: \frac{a_i}{a_j}, \forall i, j = 1, \dots, n$ , có tổng cộng  $n^2$  phân số thỏa mãn. (b) Nếu  $0 \in A$ , i.e., tồn tại chỉ số  $k \in \{1, \dots, n\}$  sao cho  $a_k = 0$ , ngoài ra  $a_i \neq 0, \forall i = 1, \dots, n, i \neq k$  (vì  $A$  là 1 tập hợp nên không có các phần tử trùng nhau). Tất cả các phân số  $\frac{a_i}{a_j}$  với  $a, b \in A: \frac{a_i}{a_j}, \forall i, j = 1, \dots, n, j \neq k$  có tổng cộng  $n(n-1) = n^2 - n$  phân số thỏa mãn.  $\square$

**Nhận xét 1.** “Mẫu của 1 phân số phải khác 0 nhưng tử của phân số có thể bằng 0, khi đó giá trị của phân số đúng bằng 0, i.e.,  $\frac{0}{b} = 0, \forall b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ . Tử & mẫu của 1 phân số có thể bằng nhau, khi đó giá trị của phân số đúng bằng 1, i.e.,  $\frac{a}{a} = 1, \forall a \in \mathbb{Z}, a \neq 0$ .” – Tuyên, 2022, p. 46

**Bài toán 27** (Tuyên, 2022, Ví dụ 50, p. 46). Viết tập hợp  $B$  các phân số bằng phân số  $\frac{7}{-15}$  với mẫu dương có 2 chữ số.

*Giải.*  $\frac{7}{-15} = -\frac{7}{15}$ . Phân số này là 1 phân số tối giản với mẫu dương. Mọi phân số bằng nó đều có dạng  $-\frac{7m}{15m}$  với  $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$ . Mẫu số của các phân số cần phải tìm là 1 số có 2 chữ số nên chọn  $m \in \mathbb{Z}$  sao cho  $10 \leq 15m \leq 99$ , suy ra<sup>5</sup>  $1 \leq m \leq 6$ , i.e.,  $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Vậy  $B = \{-\frac{7}{15}, -\frac{14}{30}, -\frac{21}{45}, -\frac{28}{60}, -\frac{35}{75}, -\frac{42}{90}\}$ .  $\square$

**Bài toán 28** (Mở rộng Tuyên, 2022, Ví dụ 50, p. 46). Cho trước  $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, \& n \in \mathbb{N}^*$ . Viết tập hợp  $B$  các phân số bằng phân số  $\frac{a}{b}$  với mẫu dương có  $n$  chữ số.

**Bài toán 29** (Tuyên, 2022, Ví dụ 51, p. 46). Tìm phân số bằng phân số  $\frac{32}{60}$ , biết tổng của tử & mẫu là 115.

*Giải.* Có  $\frac{32}{60} = \frac{8}{15} = \frac{8m}{15m}, \forall m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$ . Tổng của tử & mẫu là 115  $\Rightarrow 8m + 15m = 115 \Rightarrow 23m = 115 \Rightarrow m = \frac{115}{23} = 5$ . Phân số cần tìm:  $\frac{8 \cdot 5}{15 \cdot 5} = \frac{40}{75}$ .  $\square$

**Nhận xét 2.** “Nếu không rút gọn phân số  $\frac{32}{60}$  thành phân số tối giản  $\frac{8}{15}$  mà khẳng định các phân số bằng phân số  $\frac{32}{60}$  có dạng  $\frac{32m}{60m}$  thì sẽ mắc sai lầm là bỏ sót rất nhiều phân số bằng phân số  $\frac{32}{60}$  do đó không thể tìm được đáp số của bài toán trên.” – Tuyên, 2022, p. 46

**Bài toán 30** (Mở rộng Tuyên, 2022, Ví dụ 51, p. 46). Cho trước  $a, b, n \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ . Tìm phân số bằng phân số  $\frac{a}{b}$ , biết tổng của tử & mẫu là  $n$ .

**Bài toán 31** (Tuyên, 2022, 236., p. 47). Trong các phân số sau, những phân số nào bằng nhau?  $\frac{15}{60}, \frac{-7}{5}, \frac{6}{15}, \frac{28}{-20}, \frac{3}{12}$ .

**Bài toán 32** (Tuyên, 2022, 237., p. 47). Cho  $A = \frac{3n-5}{n+4}$ . Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để  $A \in \mathbb{Z}$ .

**Bài toán 33** (Tuyên, 2022, 238., p. 47). Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để cho các phân số sau đồng thời có giá trị nguyên:  $\frac{-12}{n}, \frac{15}{n-2}, \frac{8}{n+1}$ .

**Bài toán 34** (Tuyên, 2022, 239., p. 47). Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  biết: (a)  $\frac{x-1}{9} = \frac{8}{3}$ ; (b)  $\frac{-x}{4} = \frac{-9}{x}$ ; (c)  $\frac{x}{4} = \frac{18}{x+1}$ .

**Bài toán 35** (Tuyên, 2022, 240., p. 47). Tìm  $x, y \in \mathbb{Z}$  thỏa  $\frac{x-4}{y-3} = \frac{4}{3}$  &  $x - y = 5$ .

**Bài toán 36** (Tuyên, 2022, 241., p. 47). Viết dạng tổng quát các phân số bằng phân số  $\frac{-12}{30}$ .

**Bài toán 37** (Tuyên, 2022, 242., p. 47). Rút gọn phân số: (a)  $\frac{990}{2610}$ ; (b)  $\frac{374}{506}$ ; (c)  $\frac{3600-75}{8400-175}$ ; (d)  $\frac{9^{14} \cdot 25^5 \cdot 8^7}{18^{12} \cdot 625^3 \cdot 24^3}$ .

**Bài toán 38** (Tuyên, 2022, 243., p. 47). Cho phân số  $\frac{a}{b}$ . Chứng minh: Nếu  $\frac{a-x}{b-y} = \frac{a}{b}$  thì  $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ .

**Bài toán 39** (Tuyên, 2022, 244., p. 47). Cho phân số  $A = \frac{1+3+5+\dots+19}{21+23+25+\dots+39}$ . (a) Rút gọn  $A$ ; (b) Xóa 1 số hạng ở tử & xóa 1 số hạng ở mẫu để được 1 phân số mới vẫn bằng  $A$ .

**Bài toán 40** (Tuyên, 2022, 245., p. 47). Rút gọn phân số  $A = \frac{71 \cdot 52 + 53}{530 \cdot 71 - 180}$  mà không cần thực hiện các phép tính ở tử.

**Bài toán 41** (Tuyên, 2022, 246., p. 47). 2 phân số sau có bằng nhau không?  $\frac{\overline{abab}}{\overline{cdcd}}, \frac{\overline{ababab}}{\overline{cdcdcd}}$ .

**Bài toán 42** (Tuyên, 2022, 247., p. 47). Chứng minh: (a)  $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 39}{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot \dots \cdot 40} = \frac{1}{2^{20}}$ ; (b)  $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(n+1)(n+2)(n+3) \cdot \dots \cdot 2n} = \frac{1}{2^n}$  với  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Bài toán 43** (Tuyên, 2022, 248., p. 47). Tìm phân số  $\frac{a}{b}$  bằng phân số  $\frac{60}{108}$  biết: (a)  $\text{ƯCLN}(a, b) = 15$ ; (b)  $\text{BCNN}(a, b) = 180$ .

**Bài toán 44** (Tuyên, 2022, 249., p. 48). Tìm phân số bằng phân số  $\frac{200}{520}$  sao cho: (a) Tổng của tử & mẫu là 306; (b) Hiệu của tử & mẫu là 184; (c) Tích của tử & mẫu là 2340.

**Bài toán 45** (Tuyên, 2022, 250., p. 48). Chứng minh:  $\forall n \in \mathbb{Z}$ , các phân số sau là các phân số tối giản: (a)  $\frac{3n-2}{4n-3}$ ; (b)  $\frac{4n+1}{6n+1}$ .

**Bài toán 46** (Tuyên, 2022, 251., p. 48). Cho  $\frac{a}{b}$  là 1 phân số chưa tối giản. Chứng minh các phân số sau chưa tối giản: (a)  $\frac{a}{a-b}$ ; (b)  $\frac{2a}{a-2b}$ .

**Bài toán 47** (Tuyên, 2022, 252., p. 48). 1 mẫu Bắc Bộ bằng 3600m<sup>2</sup>. Hỏi 1 mẫu Bắc Bộ bằng mấy phần của 1 hecta?

**Bài toán 48** (Bình, 2022, Ví dụ 1, p. 4). Tìm  $n \in \mathbb{N}$  để phân số  $A = \frac{n+10}{2n-8} \in \mathbb{Z}$  (i.e., có giá trị là 1 số nguyên).

<sup>5</sup> $m \in \mathbb{Z} \wedge (10 \leq 15m \leq 99) \Leftrightarrow \lfloor \frac{15}{10} \rfloor = 1 \leq m \leq \lfloor \frac{99}{15} \rfloor = 6$ .



**Giải.** Để phân số  $A$  có giá trị là 1 số nguyên, tử phải chia hết cho mẫu:  $n + 10 : 2n - 8 \Rightarrow n + 10 : n - 4 \Rightarrow n - 4 + 14 : n - 4 \Rightarrow 14 : n - 4 \Rightarrow n - 4 \in \mathbb{U}(14) \cap \mathbb{Z} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14\}$ . Vì  $n - 4 \geq -4$  (vì  $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$ ) nên  $n - 4 \in \{1, 2, 7, 14\}$ . Nếu  $n - 4 = 1$ ,  $n = 5$ ,  $A = \frac{15}{2}$  (loại). Nếu  $n - 4 = -1$ ,  $n = 3$ ,  $A = \frac{13}{-2}$  (loại). Nếu  $n - 4 = 2$ ,  $n = 6$ ,  $A = \frac{16}{4} = 4$ . Nếu  $n - 4 = -2$ ,  $n = 2$ ,  $A = \frac{12}{-4} = -3$ . Nếu  $n - 4 = 7$ ,  $n = 11$ ,  $A = \frac{21}{14} = \frac{3}{2}$  (loại). Nếu  $n - 4 = 14$ ,  $n = 18$ ,  $A = \frac{28}{14} = 2$ . Vậy  $n \in \{2, 6, 18\}$ .  $\square$

**Bài toán 49** (Mở rộng Bình, 2022, Ví dụ 1, p. 4). Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ,  $c^2 + d^2 \neq 0$ . Tìm  $n \in \mathbb{N}$  để phân số  $A = \frac{an+b}{cn+d} \in \mathbb{Z}$ .

**Bài toán 50** (Bình, 2022, Ví dụ 2, p. 5). Tìm  $n \in \mathbb{N}$  để phân số  $A = \frac{21n+3}{6n+4}$  rút gọn được.

**Bài toán 51** (Mở rộng Bình, 2022, Ví dụ 2, p. 5). Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ,  $c^2 + d^2 \neq 0$ . Tìm  $n \in \mathbb{N}$  để phân số  $A = \frac{an+b}{cn+d}$  rút gọn được.

**Bài toán 52** (Bình, 2022, Ví dụ 3, p. 5). Tìm  $a, b, c, d \in \mathbb{N}$  nhỏ nhất sao cho  $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$ ,  $\frac{b}{c} = \frac{12}{21}$ ,  $\frac{c}{d} = \frac{6}{11}$ .

**Bài toán 53** (Bình, 2022, Ví dụ 4, p. 5). Tìm số tự nhiên lớn nhất có 3 chữ số sao cho số đó bằng mỗi tổng  $a + b, c + d, e + f$   
 $\mathcal{E} \frac{a}{b} = \frac{35}{49}$ ,  $\frac{c}{d} = \frac{130}{143}$ ,  $\frac{e}{f} = \frac{7}{13}$ .

**Bài toán 54** (Bình, 2022, 1., p. 6). Rút gọn phân số: (a)  $\frac{199...9}{99...95}$  (10 chữ số 9 ở tử, 10 chữ số 9 ở mẫu); (b)  $\frac{121212}{424242}$ ; (c)  $\frac{187187187}{221221221}$ ; (d)  $\frac{3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 39 - 10101}{505050 + 70707}$ .

**Bài toán 55** (Bình, 2022, 2., p. 6). Chứng minh các phân số sau có giá trị là số tự nhiên: (a)  $\frac{10^{2002}+2}{3}$ ; (b)  $\frac{10^{2003}+8}{9}$ .

**Bài toán 56** (Bình, 2022, 3., p. 6). Chứng minh các phân số sau bằng nhau: (a)  $\frac{1717}{2929}$   $\mathcal{E}$   $\frac{171717}{292929}$ ; (b)  $\frac{3210-34}{4170-41}$   $\mathcal{E}$   $\frac{6420-68}{8340-82}$ ; (c)  $\frac{2106}{7320}$ ,  $\frac{4212}{14640}$ ,  $\mathcal{E}$   $\frac{6318}{21960}$ .

**Bài toán 57** (Bình, 2022, 4., p. 6). Tìm  $x, y \in \mathbb{Z}$  thỏa: (a)  $\frac{x}{3} = \frac{y}{5}$ ; (b)  $\frac{x}{28} = \frac{y}{35}$ .

**Bài toán 58** (Bình, 2022, 5., p. 6). Tìm các phân số  $\frac{a}{b}$ ,  $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}^*$ , có giá trị bằng: (a)  $\frac{36}{45}$  biết  $\text{BCNN}(a, b) = 300$ ; (b)  $\frac{21}{35}$  biết  $\text{ƯCLN}(a, b) = 30$ ; (c)  $\frac{15}{35}$  biết  $\text{ƯCLN}(a, b) \cdot \text{BCNN}(a, b) = 3549$ .

**Bài toán 59** (Bình, 2022, 6., p. 7). Chứng minh các phân số sau tối giản với mọi  $n \in \mathbb{N}$ . (a)  $\frac{n+1}{2n+3}$ ; (b)  $\frac{2n+3}{4n+8}$ ; (c)  $\frac{3n+2}{5n+3}$ .

**Bài toán 60** (Bình, 2022, 7., p. 7). Cho phân số  $A = \frac{63}{3n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . (a) Với giá trị nào của  $n$  thì  $A$  rút gọn được? (b) Với giá trị nào của  $n$  thì  $A \in \mathbb{N}$ ?

**Bài toán 61** (Bình, 2022, 8., p. 7). Tìm các số tự nhiên  $n$  để các phân số sau là phân số tối giản: (a)  $\frac{2n+3}{4n+1}$ ; (b)  $\frac{3n+2}{7n+1}$ ; (c)  $\frac{2n+7}{5n+2}$ .

**Bài toán 62** (Bình, 2022, 9., p. 7). Có bao nhiêu số nguyên dương  $n$  không vượt quá 1000 để phân số  $\frac{n+12}{n^2+9n-13}$  là phân số tối giản?

**Bài toán 63** (Bình, 2022, 10., p. 7). Tìm  $n \in \mathbb{N}$  để phân số  $\frac{n+3}{2n-2} \in \mathbb{Z}$ .

**Bài toán 64** (Bình, 2022, 11., p. 7). Tìm các số nguyên  $n$  sao cho các phân số sau có giá trị là số nguyên: (a)  $\frac{12}{3n-1}$ ; (b)  $\frac{2n+3}{7}$ .

**Bài toán 65** (Bình, 2022, 12., p. 7). Tìm  $n \in \mathbb{N}$  để phân số  $A = \frac{8n+193}{4n+3}$ : (a) Có giá trị là số tự nhiên; (b) Là phân số tối giản; (c) Với giá trị nào của  $n$  trong khoảng từ 150 đến 170 thì phân số  $A$  rút gọn được?

**Bài toán 66** (Bình, 2022, 13., p. 7). Tìm các phân số tối giản nhỏ hơn 1 có tử  $\mathcal{E}$  mẫu đều dương, biết tích của tử  $\mathcal{E}$  mẫu của phân số bằng 120.

**Bài toán 67** (Bình, 2022, 14., p. 7). Tìm  $n \in \mathbb{N}$  nhỏ nhất để các phân số sau đều là phân số tối giản:  $\frac{5}{n+8}, \frac{6}{n+9}, \frac{7}{n+10}, \dots, \frac{17}{n+20}$ .

**Bài toán 68** (Bình, 2022, 15., p. 7). Cho 3 phân số  $\frac{15}{42}, \frac{49}{56}, \frac{36}{51}$ . Biến đổi 3 phân số trên thành các phân số bằng chúng sao cho mẫu của phân số thứ nhất bằng tử của phân số thứ 2, mẫu của phân số thứ 2 bằng tử của phân số thứ 3.

**Bài toán 69** (Bình, 2022, 16., p. 7). Cho 3 phân số  $\frac{5}{8}, \frac{11}{20}, \frac{4}{15}$ . Tìm 3 phân số (có tử  $\mathcal{E}$  mẫu dương) theo thứ tự bằng 3 phân số trên sao cho hiệu của mẫu  $\mathcal{E}$  tử của mỗi phân số này đều bằng nhau  $\mathcal{E}$  hiệu đó có giá trị nhỏ nhất.

**Bài toán 70** (Bình, 2022, 17., p. 8). Tìm các phân số lớn hơn  $\frac{1}{5}$   $\mathcal{E}$  khác số tự nhiên biết nếu lấy mẫu nhân với 1 số, lấy tử cộng với số đó thì giá trị của phân số không đổi.

**Bài toán 71** (Bình, 2022, 18., p. 8). Cho phân số  $A = \frac{23+22+21+\dots+13}{11+10+9+\dots+1}$ . Nêu cách xóa 1 số hạng ở tử  $\mathcal{E}$  1 số hạng ở mẫu của  $A$  để được 1 phân số mới vẫn bằng phân số  $A$ .

**Bài toán 72** (Bình, 2022, 19., p. 8, Bộ sử Hume). Người Anh có thói quen xếp bộ sử nước Anh của Hume (David Hume, nhà sử học Scotland) gồm 9 tập ở tủ sách đặc biệt gồm 2 ngăn: ngăn trên xếp 5 cuốn, ngăn dưới xếp 4 cuốn, ở gáy các cuốn sách đó ghi các số 1, 2, 3, ..., 9. Nếu chủ nhân xếp  $\frac{13458}{6729}$  (phân số này có giá trị bằng 2) thì chứng tỏ chủ nhân đã đọc 2 tập (riêng trường hợp mới đọc 1 tập thì xếp  $\frac{12345}{6789}$ ). Nêu cách xếp 9 cuốn sách đó để chứng tỏ chủ nhân của bộ sách đã đọc 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 tập.

### 3 Rút Gọn Phân Số

### 4 Quy Đồng Mẫu Số Nhiều Phân Số

### 5 So Sánh Các Phân Số

Trong 2 số nguyên  $a, b \in \mathbb{Z}$  khác nhau ( $a \neq b$ ), luôn có 1 số nhỏ hơn số kia, i.e.,  $a < b$  hoặc  $a > b$ . Cũng như số nguyên, trong 2 phân số  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  khác nhau ( $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ ) luôn có 1 phân số nhỏ hơn phân số kia, i.e.,  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  hoặc  $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ . Nếu phân số  $\frac{a}{b}$  nhỏ hơn phân số  $\frac{c}{d}$  thì ta viết  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  hoặc  $\frac{c}{d} > \frac{a}{b}$ . Phân số lớn hơn 0 gọi là *phân số dương*. Phân số nhỏ hơn 0 gọi là *phân số âm*. Tính chất bắc cầu: Nếu  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  &  $\frac{c}{d} < \frac{e}{f}$  thì  $\frac{a}{b} < \frac{e}{f}$ .

$$\left(\frac{a}{b} < \frac{c}{d}\right) \wedge \left(\frac{c}{d} < \frac{e}{f}\right) \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{e}{f}, \forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}, bd \neq 0.$$

Cách so sánh 2 phân số: *Bước 1*: Quy đồng mẫu 2 phân số đã cho (về cùng 1 mẫu dương). *Bước 2*: So sánh tử của các phân số: Phân số nào có tử lớn hơn thì lớn hơn.

**Mệnh đề 1.** Để so sánh 2 phân số không cùng mẫu, ta quy đồng mẫu 2 phân số đó (về cùng 1 mẫu dương) rồi so sánh các tử với nhau: Phân số nào có tử lớn hơn thì phân số đó lớn hơn.

**Bài toán 73** (Thái, Đạt, et al., 2022b, Ví dụ 1, 1, p. 32). So sánh: (a)  $\frac{5}{-9}$  &  $\frac{2}{-9}$ ; (b)  $\frac{5}{-6}$  &  $\frac{-6}{7}$ ; (c)  $\frac{7}{-11}$  &  $\frac{8}{-11}$ ; (d)  $\frac{-5}{3}$  &  $\frac{5}{-4}$ .

*Giải.* (a)  $\frac{5}{-9} = \frac{-5}{9}$ ,  $\frac{2}{-9} = \frac{-2}{9}$ . Vì  $-5 < -2$  nên  $\frac{-5}{9} < \frac{-2}{9}$ . Vậy  $\frac{5}{-9} < \frac{2}{-9}$ . (b)  $\square$

**“1. Quy tắc quy đồng mẫu nhiều phân số với mẫu dương: Bước 1.** Tìm BCNN của các mẫu để làm mẫu chung. *Bước 2.* Tìm thừa số phụ của mỗi mẫu. *Bước 3.* Nhân tử & mẫu của mỗi phân số với thừa số phụ tương ứng. **2. So sánh 2 phân số:** Muốn so sánh 2 phân số không cùng mẫu ta viết chúng dưới dạng 2 phân số có cùng mẫu dương rồi so sánh các tử với nhau, phân số nào có tử lớn hơn thì phân số đó lớn hơn. **3. Hỗn số dương:** 1 phân số lớn hơn 1 có thể viết dưới dạng 1 hỗn số. Đó là 1 số gồm phần nguyên kèm theo 1 phân số nhỏ hơn 1. **4.** Trong 2 phân số có tử & mẫu đều dương, nếu 2 tử số bằng nhau, phân số nào có mẫu nhỏ hơn thì phân số đó sẽ lớn hơn & ngược lại. **5.** Phân số có tử & mẫu là 2 số nguyên cùng dấu thì lớn hơn 0 & gọi là *phân số dương*. Phân số có tử & mẫu là 2 số nguyên khác dấu thì nhỏ hơn 0 & gọi là *phân số âm*.” – Tuyên, 2022, Chap. III, §2, p. 48

“Để so sánh 2 phân số có tử & mẫu đều dương, ngoài cách quy đồng tử hoặc quy đồng mẫu, người ta thường dùng 1 phân số trung gian & sử dụng tính chất bắc cầu của bất đẳng thức.

Thường sử dụng các tính chất sau: (a) Trong 2 phân số cùng tử, phân số nào có mẫu nhỏ hơn thì phân số đó lớn hơn. (b) Trong 2 phân số nhỏ hơn 1, phân số nào có phần bù đến 1 nhỏ hơn thì phân số đó lớn hơn:  $1 - \frac{a}{b} < 1 - \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ . (c) Nếu  $0 < a < 1$  &  $m < n$  thì  $a^m > a^n$ .” – Bình, 2022, Chap. 1, §2, p. 8

**Bài toán 74** (Công thức hỗn số dương). *Chứng minh:*

$$\frac{ac+b}{c} = a + \frac{b}{c} = a\frac{b}{c}, \forall a, b, c \in \mathbb{Z}, c \neq 0. \quad \frac{a}{b} = \frac{\lfloor \frac{a}{b} \rfloor b + \{\frac{a}{b}\}}{b} = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + \frac{\{\frac{a}{b}\}}{b} = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + \frac{\{\frac{a}{b}\}}{b}.$$

**Bài toán 75** (Tuyên, 2022, Ví dụ 52, p. 48). So sánh 2 phân số  $\frac{-101}{-100}$  &  $\frac{200}{201}$ .

*Giải.*  $\frac{-101}{-100} = \frac{101}{100} > \frac{100}{100} = 1 = \frac{201}{201} > \frac{200}{201}$ . Vậy  $\frac{-101}{-100} > \frac{200}{201}$ .  $\square$

**Bài toán 76** (Mở rộng Tuyên, 2022, Ví dụ 52, p. 48). Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ ,  $a > b > 0$ ,  $d > c > 0$ . So sánh:  $\frac{\pm a}{\pm b}$  &  $\frac{\pm c}{\pm d}$ .

**Bài toán 77** (Tuyên, 2022, Ví dụ 53, p. 48). Sắp xếp các phân số sau theo thứ tự tăng dần:  $\frac{5}{8}$ ;  $\frac{9}{16}$ ;  $\frac{2}{-3}$ ;  $\frac{-7}{12}$ .

**Bài toán 78** (Bình, 2022, Ví dụ 5, p. 8). So sánh  $A = \frac{10^{15}+1}{10^{16}+1}$  &  $B = \frac{10^{16}+1}{10^{17}+1}$ .

**Bài toán 79** (Bình, 2022, Ví dụ 6, p. 9). 1 phân số có tử & mẫu đều là số nguyên dương. Nếu cộng tử & mẫu của phân số đó với cùng  $n \in \mathbb{N}^*$  thì phân số thay đổi thế nào?

**Bài toán 80** (Bình, 2022, Ví dụ 7, p. 9). So sánh  $\left(\frac{1}{32}\right)^7$  &  $\left(\frac{1}{16}\right)^9$ .

**Bài toán 81** (Bình, 2022, Ví dụ 8, p. 9). Chứng minh  $95^8$  là 1 số có 16 chữ số khi viết kết quả của nó trong hệ thập phân.

**Bài toán 82** (Bình, 2022, Ví dụ 9, p. 10). Cho  $a, b \in \mathbb{N}^*$  thỏa  $\frac{5}{7} < \frac{a}{b} < \frac{9}{11}$ . Tìm  $a + b$  khi  $b$  nhỏ nhất.

**Bài toán 83** (Bình, 2022, 20., p. 10). So sánh  $a, b \in \mathbb{N}$  biết  $\frac{1+2+3+\dots+a}{a} < \frac{1+2+3+\dots+b}{b}$ .

**Bài toán 84** (Bình, 2022, 21., p. 10). So sánh: (a)  $\frac{18}{91}$  &  $\frac{23}{114}$ ; (b)  $\frac{21}{52}$  &  $\frac{213}{523}$ ; (c)  $\frac{1313}{9191}$  &  $\frac{1111}{7373}$ .

**Bài toán 85** (Bình, 2022, 22., p. 10). So sánh các phân số sau, với  $n \in \mathbb{N}$ : (a)  $\frac{n}{n+1}$  &  $\frac{n+2}{n+3}$ ; (b)  $\frac{n+1}{n+4}$  &  $\frac{n}{n+5}$ ; (c)  $\frac{n}{2n+1}$  &  $\frac{3n+1}{6n+3}$ .



**Bài toán 86** (Bình, 2022, 23., p. 11). So sánh  $A$  &  $B$ : (a)  $A = \frac{20}{39} + \frac{22}{27} + \frac{18}{43}$ ,  $B = \frac{14}{39} + \frac{22}{29} + \frac{18}{41}$ ; (b)  $A = \frac{3}{8^3} + \frac{7}{8^4}$ ,  $B = \frac{7}{8^3} + \frac{3}{8^4}$ ; (c)  $A = \frac{10^7+5}{10^7-8}$ ,  $B = \frac{10^8+6}{10^8-7}$ ; (d)  $A = \frac{10^{1992}+1}{10^{1991}+1}$ ,  $B = \frac{10^{1993}+1}{10^{1992}+1}$ .

**Bài toán 87** (Bình, 2022, 24., p. 11). Tìm  $x \in \mathbb{N}$  sao cho  $\frac{4}{11} < \frac{x}{20} < \frac{5}{11}$ .

**Bài toán 88** (Bình, 2022, 25., p. 11). Tìm 2 phân số có các mẫu bằng 9, các tử là 2 số tự nhiên liên tiếp sao cho phân số  $\frac{4}{7}$  nằm giữa 2 phân số đó.

**Bài toán 89** (Bình, 2022, 26., p. 11). Tìm 2 phân số có các tử bằng 1, các mẫu là 2 số tự nhiên liên tiếp sao cho phân số  $\frac{13}{84}$  nằm giữa 2 phân số đó.

**Bài toán 90** (Bình, 2022, 27., p. 11). Tìm 2 phân số có mẫu bằng 21 biết nó lớn hơn  $\frac{5}{7}$  & nhỏ hơn  $\frac{5}{6}$ .

**Bài toán 91** (Bình, 2022, 28., p. 11). Tìm phân số  $\frac{a}{b}$  sao cho  $a$  là số tự nhiên nhỏ nhất thỏa mãn  $\frac{4}{15} < \frac{a}{b} < \frac{1}{3}$ .

**Bài toán 92** (Bình, 2022, 29., p. 11). Tìm phân số  $\frac{a}{b}$  lớn nhất nhỏ hơn 1 với  $a, b$  là các số nguyên dương có 1 chữ số.

**Bài toán 93** (Bình, 2022, 30., p. 11). So sánh 2 phân số  $(\frac{1}{243})^9$  &  $(\frac{1}{83})^{13}$ .

## 6 Hỗn Số Dương

## 7 1 Số Phương Pháp Đặc Biệt để So Sánh 2 Phân Số

## 8 $\pm$ Phân Số

### 8.1 + Phân Số

#### 8.1.1 Quy tắc cộng phân số

**Mệnh đề 2** (Cộng các phân số cùng mẫu). Muốn cộng 2 hay nhiều phân số có cùng mẫu, ta cộng các tử & giữ nguyên các mẫu:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}, \forall a, b, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0,$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b} = \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b} + \dots + \frac{a_n}{b} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{b}, \forall a_i, b \in \mathbb{Z}, \forall i = 1, 2, \dots, n, b \neq 0.$$

**Ví dụ 1.** (a)  $\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{1+3}{5} = \frac{4}{5}$ . (b)  $\frac{-1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{-1+3}{5} = \frac{2}{5}$ . (c)  $\frac{2}{-3} + \frac{-7}{-3} = \frac{2+(-7)}{-3} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$ .

**Bài toán 94** (Thái, Đạt, et al., 2022a, 1, p. 34). Tính:  $\frac{11}{-9} + \frac{5}{-6}$ .

*Hint.* Trước hết, chuyển các mẫu âm của các phân số này thành mẫu dương bằng quy tắc  $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$ , rồi quy đồng mẫu số để 2 phân số có cùng mẫu, rồi cộng 2 phân số theo quy tắc cộng 2 phân số có cùng mẫu.

*Giải.* Quy đồng mẫu 2 phân số trước hết, chuyển các phân số về mẫu dương:  $\frac{11}{-9} = \frac{-11}{9}$ ,  $\frac{5}{-6} = \frac{-5}{6}$ ,  $\text{BCNN}(9, 6) = 18$ ,  $18 : 9 = 2$ ,  $18 : 6 = 3$ .  $\frac{11}{-9} = \frac{-11 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{-22}{18}$ ,  $\frac{5}{-6} = \frac{-5 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{-15}{18}$ . Suy ra  $\frac{11}{-9} + \frac{5}{-6} = \frac{-22}{18} + \frac{-15}{18} = \frac{-22+(-15)}{18} = \frac{-37}{18}$ . Vậy  $\frac{11}{-9} + \frac{5}{-6} = \frac{-37}{18}$ .  $\square$

**Lưu ý 2.** Khi tính toán với các phân số, luôn chuyển các mẫu âm thành các mẫu dương bằng cách sử dụng công thức:  $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ .

**Mệnh đề 3** (Cộng các phân số khác mẫu). Muốn cộng 2 hay nhiều phân số không cùng mẫu, ta quy đồng mẫu những phân số đó rồi cộng các tử & giữ nguyên mẫu chung.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot \frac{\text{BCNN}(b, d)}{b}}{\text{BCNN}(b, d)} + \frac{c \cdot \frac{\text{BCNN}(b, d)}{d}}{\text{BCNN}(b, d)} = \frac{a \cdot \frac{\text{BCNN}(b, d)}{b} + c \cdot \frac{\text{BCNN}(b, d)}{d}}{\text{BCNN}(b, d)}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}, bd \neq 0,$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i \cdot \frac{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}{b_i}}{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}{b_i}}{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}, \forall a_i, b_i \in \mathbb{Z}, b_i \neq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Công thức này nhìn lướt qua có vẻ phức tạp nhưng thực ra dễ hiểu bằng cách chú ý ở phân số  $\frac{a}{b}$ , ta đã nhân cả tử & mẫu cho thừa số phụ  $\frac{\text{BCNN}(b, d)}{b}$ , còn ở phân số  $\frac{c}{d}$ , ta đã nhân cả tử & mẫu cho thừa số phụ  $\frac{\text{BCNN}(b, d)}{d}$ . Không dùng ký hiệu tổng  $\sigma$ , công thức thứ 2 có thể viết cụ thể hơn như sau:

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 \cdot \frac{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}{b_1}}{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)} + \frac{a_2 \cdot \frac{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}{b_2}}{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)} + \dots + \frac{a_n \cdot \frac{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}{b_n}}{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}$$

$$= \frac{a_1 \cdot \frac{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}{b_1} + a_2 \cdot \frac{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}{b_2} + \dots + a_n \cdot \frac{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}{b_n}}{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}, \forall a_i, b_i \in \mathbb{Z}, b_i \neq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

**Bài toán 95** (Thái, Đạt, et al., 2022a, Ví dụ 1, 1, p. 35). *Tính:* (a)  $\frac{2}{3} + \frac{2}{-3}$ ; (b)  $\frac{-5}{6} + \frac{-3}{8}$ ; (c)  $\frac{-3}{7} + \frac{2}{7}$ ; (d)  $\frac{-4}{9} + \frac{2}{-3}$ .

*Giải.* (a)  $\frac{2}{3} + \frac{2}{-3} = \frac{2}{3} + \frac{-2}{3} = \frac{2+(-2)}{3} = \frac{0}{3} = 0$ . (b)  $\frac{-5}{6} + \frac{-3}{8} = \frac{-5 \cdot 4}{6 \cdot 4} + \frac{-3 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{-20}{24} + \frac{-9}{24} = \frac{-20-9}{24} = \frac{-29}{24}$ . (c)  $\frac{-3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{-3+2}{7} = \frac{-1}{7}$ . (d)  $\frac{-4}{9} + \frac{2}{-3} = \frac{-4}{9} + \frac{-2}{3} = \frac{-4}{9} + \frac{-2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{-4}{9} + \frac{-6}{9} = \frac{-4-6}{9} = \frac{-10}{9}$ .  $\square$

### 8.1.2 Tính chất của phép cộng phân số

Giống như phép cộng số tự nhiên, phép cộng phân số cũng có các tính chất: giao hoán, kết hợp, cộng với số 0:

- *Giao hoán:*  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$ ,  $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ,  $bd \neq 0$ . (Chú ý  $bd \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 0 \text{ \& } d \neq 0$ .)
- *Kết hợp:*  $(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + (\frac{c}{d} + \frac{e}{f})$ ,  $\forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$ ,  $bdf \neq 0$ . (Chú ý  $bdf \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 0 \text{ \& } d \neq 0 \text{ \& } f \neq 0$ .)
- *Cộng với số 0:*  $\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ .

**Bài toán 96** (Thái, Đạt, et al., 2022a, Ví dụ 2, 2, p. 35). *Tính hợp lý:* (a)  $\frac{3}{13} + \frac{-3}{7} + \frac{10}{13} + \frac{-4}{7}$ . (b)  $\frac{-5}{9} + \frac{4}{11} + \frac{7}{11}$ . (c)  $\frac{-2}{5} + \frac{3}{8} + \frac{-3}{5} + \frac{13}{8}$ .

*Giải.* (a)  $\frac{3}{13} + \frac{-3}{7} + \frac{10}{13} + \frac{-4}{7} = \frac{3}{13} + \frac{10}{13} + \frac{-3}{7} + \frac{-4}{7} = (\frac{3}{13} + \frac{10}{13}) + (\frac{-3}{7} + \frac{-4}{7}) = \frac{3+10}{13} + \frac{-3+(-4)}{7} = 1 + (-1) = 0$ . (b)  $\frac{-5}{9} + \frac{4}{11} + \frac{7}{11} = \frac{-5}{9} + (\frac{4}{11} + \frac{7}{11}) = \frac{-5}{9} + \frac{4+7}{11} = \frac{-5}{9} + \frac{11}{11} = \frac{-5}{9} + 1 = \frac{-5}{9} + \frac{9}{9} = \frac{-5+9}{9} = \frac{4}{9}$ . (c)  $\frac{-2}{5} + \frac{3}{8} + \frac{-3}{5} + \frac{13}{8} = (\frac{-2}{5} + \frac{-3}{5}) + (\frac{3}{8} + \frac{13}{8}) = \frac{-2+(-3)}{5} + \frac{3+13}{8} = \frac{-5}{5} + \frac{16}{8} = -1 + 2 = 1$ .  $\square$

## 8.2 – Phân Số

### 8.2.1 Số đối của 1 phân số

Giống như số nguyên, mỗi phân số đều có số đối sao cho tổng của 2 số đó bằng 0.

**Định nghĩa 4** (Số đối của phân số). Số đối của phân số  $\frac{a}{b}$  ký hiệu là  $-\frac{a}{b}$ . Có:  $\frac{a}{b} + (-\frac{a}{b}) = 0$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ .

Có:  $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ , i.e., dấu  $-$  có thể đặt trước 1 phân số, cũng có thể đem lên tử, hoặc đem xuống mẫu thì phân số vẫn không đổi giá trị. Số đối của  $-\frac{a}{b}$  là  $\frac{a}{b}$ , i.e.,  $-(-\frac{a}{b}) = \frac{a}{b}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ .

**Ví dụ 2.** Số đối của phân số  $\frac{2}{5}$  là  $-\frac{2}{5}$ . Số đối của phân số  $\frac{-3}{7}$  là  $-(-\frac{3}{7}) = \frac{-(-3)}{7} = \frac{3}{7}$ .

### 8.2.2 Quy tắc trừ phân số

**Mệnh đề 4** (Trừ các phân số cùng mẫu). Muốn trừ 2 hay nhiều phân số có cùng mẫu, ta trừ tử của số bị trừ cho tử của số trừ  $\mathcal{B}$  giữ nguyên mẫu:

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}, \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0.$$

Có thể ghi gộp lại quy tắc cộng/trừ 2 hay nhiều phân số cùng mẫu như sau (với các dấu  $+$ ,  $-$  được sắp xếp tương ứng với dấu của biểu thức ban đầu):

$$\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} = \frac{a \pm b}{m}, \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0,$$

$$\sum_{i=1}^n \pm \frac{a_i}{b} = \pm \frac{a_1}{b} \pm \frac{a_2}{b} \pm \dots \pm \frac{a_n}{b} = \frac{\pm a_1 \pm a_2 + \dots \pm a_n}{b} = \frac{\sum_{i=1}^n \pm a_i}{b}, \quad \forall a_i, b \in \mathbb{Z}, \forall i = 1, 2, \dots, n, b \neq 0.$$

**Ví dụ 3.** (a)  $\frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{4-3}{5} = \frac{1}{5}$ . (b)  $\frac{-1}{5} - \frac{3}{5} = \frac{-1-3}{5} = \frac{-4}{5}$ .

**Bài toán 97** (Thái, Đạt, et al., 2022a, 3, p. 36). *Tính:*  $\frac{13}{-9} - \frac{7}{-6}$ .

*Hint.* Trước hết, chuyển các mẫu âm của các phân số này thành mẫu dương bằng quy tắc  $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$ , rồi quy đồng mẫu số để 2 phân số có cùng mẫu, rồi trừ 2 phân số theo quy tắc trừ 2 phân số có cùng mẫu.

*Giải.* Quy đồng mẫu 2 phân số:  $\frac{13}{-9} = \frac{-13}{9}$ ,  $\frac{7}{-6} = \frac{-7}{6}$ , BCNN(9,6) = 18,  $18 : 9 = 2$ ,  $18 : 6 = 3$ ,  $\frac{13}{-9} = \frac{-13 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{-26}{18}$ ,  $\frac{7}{-6} = \frac{-7 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{-21}{18}$ . Suy ra  $\frac{13}{-9} - \frac{7}{-6} = \frac{-26}{18} - \frac{-21}{18} = \frac{-26-(-21)}{18} = \frac{-5}{18}$ . Vậy  $\frac{13}{-9} - \frac{7}{-6} = \frac{-5}{18}$ .  $\square$

s

**Mệnh đề 5** (Trừ các phân số khác mẫu). Muốn trừ 2 phân số không cùng mẫu, ta quy đồng mẫu những phân số đó rồi trừ tử của số bị trừ cho tử của số trừ  $\mathcal{B}$  giữ nguyên mẫu chung.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot \frac{\text{BCNN}(b,d)}{b}}{\text{BCNN}(b,d)} - \frac{c \cdot \frac{\text{BCNN}(b,d)}{d}}{\text{BCNN}(b,d)} = \frac{a \cdot \frac{\text{BCNN}(b,d)}{b} - c \cdot \frac{\text{BCNN}(b,d)}{d}}{\text{BCNN}(b,d)}, \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}, bd \neq 0,$$

$$\sum_{i=1}^n \pm \frac{a_i}{b_i} = \sum_{i=1}^n \pm \frac{a_i \cdot \frac{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}{b_i}}{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)} = \frac{\sum_{i=1}^n \pm a_i \cdot \frac{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}{b_i}}{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}, \quad \forall a_i, b_i \in \mathbb{Z}, b_i \neq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

**Bài toán 98** (Thái, Đạt, et al., 2022a, Ví dụ 4, 3, p. 37). *Tính: (a)  $\frac{1}{3} - \frac{2}{-3}$ . (b)  $\frac{-5}{6} - \frac{-7}{8}$ . (c)  $\frac{7}{-10} - \frac{9}{10}$ .*

*Giải.* (a)  $\frac{1}{3} - \frac{2}{-3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1+2}{3} = \frac{3}{3} = 1$ . (b)  $\frac{-5}{6} - \frac{-7}{8} = \frac{-5 \cdot 4}{6 \cdot 4} - \frac{-7 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{-20}{24} - \frac{-21}{24} = \frac{-20-(-21)}{24} = \frac{1}{24}$ . (c)  $\frac{7}{-10} - \frac{9}{10} = \frac{-7}{10} - \frac{9}{10} = \frac{-7-9}{10} = \frac{-16}{10} = \frac{-8}{5}$ .  $\square$

**Bài toán 99** (Thái, Đạt, et al., 2022a, 4, p. 37). (a) *Phân số  $\frac{2}{5}$  có phải là số đối của phân số  $\frac{2}{-5}$  không?* (b) *Tính & so sánh:  $\frac{-3}{7} - \frac{2}{-5}$  &  $\frac{-3}{7} + \frac{2}{5}$ .*

*Giải.* (a) Phân số  $\frac{2}{5}$  là số đối của phân số  $\frac{2}{-5}$  vì  $-\frac{2}{5} = \frac{2}{-5}$ . (b)  $\frac{-3}{7} - \frac{2}{-5} = \frac{-3}{7} + \frac{2}{5} = \frac{-3}{7} + \frac{2}{5} = \frac{-3 \cdot 5}{7 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{-15}{35} + \frac{14}{35} = \frac{-15+14}{35} = \frac{-1}{35}$ . Vậy  $\frac{-3}{7} - \frac{2}{-5} = \frac{-3}{7} + \frac{2}{5} = \frac{-1}{35}$ .  $\square$

**Mệnh đề 6.** *Muốn trừ 2 phân số, ta cộng số bị trừ với số đối của số trừ:*

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \left(-\frac{c}{d}\right), \forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}, bd \neq 0.$$

**Bài toán 100** (Thái, Đạt, et al., 2022a, Ví dụ 5, 4, p. 37). *Tính: (a)  $\frac{2}{-9} - \frac{5}{-12}$ . (b)  $\frac{7}{12} - \frac{-9}{20}$ .*

*Giải.* (a)  $\frac{2}{-9} - \frac{5}{-12} = \frac{-2}{9} + \frac{5}{12} = \frac{-2 \cdot 4}{9 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{-8}{36} + \frac{15}{36} = \frac{-8+15}{36} = \frac{7}{36}$ . (b)  $\frac{7}{12} - \frac{-9}{20} = \frac{7}{12} + \frac{9}{20} = \frac{7 \cdot 5}{12 \cdot 5} + \frac{9 \cdot 3}{20 \cdot 3} = \frac{35}{60} + \frac{27}{60} = \frac{35+27}{60} = \frac{62}{60} = \frac{31}{30}$ .  $\square$

### 8.3 Quy tắc dấu ngoặc

Quy tắc dấu ngoặc đối với phân số giống như quy tắc dấu ngoặc đối với số nguyên.

**Bài toán 101** (Thái, Đạt, et al., 2022a, Ví dụ 6, 5, p. 37). *Tính hợp lý: (a)  $\frac{14}{13} + \left(\frac{-1}{13} - \frac{19}{20}\right)$ . (b)  $\frac{-24}{17} - \left(\frac{-7}{17} - \frac{1}{16}\right)$ . (c)  $\frac{-2}{49} - \left(\frac{47}{49} + \frac{5}{-3}\right)$ .*

*Giải.* (a)  $\frac{14}{13} + \left(\frac{-1}{13} - \frac{19}{20}\right) = \frac{14}{13} + \frac{-1}{13} - \frac{19}{20} = \left(\frac{14}{13} + \frac{-1}{13}\right) - \frac{19}{20} = \frac{14-1}{13} - \frac{19}{20} = \frac{13}{13} - \frac{19}{20} = 1 - \frac{19}{20} = \frac{20}{20} - \frac{19}{20} = \frac{20-19}{20} = \frac{1}{20}$ . (b)  $\frac{-24}{17} - \left(\frac{-7}{17} - \frac{1}{16}\right) = \frac{-24}{17} - \frac{-7}{17} + \frac{1}{16} = \left(\frac{-24}{17} + \frac{7}{17}\right) + \frac{1}{16} = \frac{-24+7}{17} + \frac{1}{16} = \frac{-17}{17} + \frac{1}{16} = -1 + \frac{1}{16} = \frac{-16}{16} + \frac{1}{16} = \frac{-16+1}{16} = \frac{-15}{16}$ . (c)  $\frac{-2}{49} - \left(\frac{47}{49} + \frac{5}{-3}\right) = \frac{-2}{49} - \frac{47}{49} - \frac{5}{-3} = \left(\frac{-2}{49} - \frac{47}{49}\right) + \frac{5}{3} = \frac{-2-47}{49} + \frac{5}{3} = \frac{-49}{49} + \frac{5}{3} = -1 + \frac{5}{3} = \frac{-3}{3} + \frac{5}{3} = \frac{-3+5}{3} = \frac{2}{3}$ .  $\square$

**Bài toán 102** (Thái, Đạt, et al., 2022a, 1, p. 38). *Tính: (a)  $\frac{-2}{9} + \frac{7}{-9}$ . (b)  $\frac{1}{-6} + \frac{13}{-15}$ . (c)  $\frac{5}{-6} + \frac{-5}{12} + \frac{7}{18}$ .*

**Bài toán 103** (Thái, Đạt, et al., 2022a, 2, p. 38). *Tính hợp lý: (a)  $\frac{2}{9} + \frac{-3}{10} + \frac{-7}{10}$ . (b)  $\frac{-11}{6} + \frac{2}{5} + \frac{-1}{6}$ . (c)  $\frac{-5}{8} + \frac{12}{7} + \frac{13}{8} + \frac{2}{7}$ .*

**Bài toán 104** (Thái, Đạt, et al., 2022a, 3, p. 38). *Tìm số đối của mỗi phân số sau:  $\frac{9}{25}$ ,  $\frac{-8}{27}$ ,  $-\frac{15}{31}$ ,  $\frac{-3}{-5}$ ,  $\frac{5}{-6}$ .*

**Bài toán 105** (Thái, Đạt, et al., 2022a, 4, p. 38). *Tính: (a)  $\frac{5}{16} - \frac{5}{24}$ . (b)  $\frac{2}{11} + \left(\frac{-5}{11} - \frac{9}{11}\right)$ . (c)  $\frac{1}{10} - \left(\frac{5}{12} - \frac{1}{15}\right)$ .*

**Bài toán 106** (Thái, Đạt, et al., 2022a, 5, p. 38). *Tính hợp lý: (a)  $\frac{27}{13} - \frac{106}{111} + \frac{-5}{111}$ . (b)  $\frac{12}{11} - \frac{-7}{19} + \frac{12}{19}$ . (c)  $\frac{5}{17} - \frac{25}{31} + \frac{12}{17} + \frac{-6}{31}$ .*

**Bài toán 107** (Thái, Đạt, et al., 2022a, 6, p. 38). *Tìm x: (a)  $x - \frac{5}{6} = \frac{1}{2}$ . (b)  $\frac{-3}{4} - x = \frac{-7}{12}$ .*

**Bài toán 108** (Thái, Đạt, et al., 2022a, 7, p. 38). *1 xí nghiệp trong tháng Giêng đạt  $\frac{3}{8}$  kế hoạch của Quý I, tháng 2 đạt  $\frac{2}{7}$  kế hoạch của Quý I. Tháng 3 xí nghiệp phải đạt được bao nhiêu phần kế hoạch của Quý I?*

**Bài toán 109** (Thái, Đạt, et al., 2022a, 8, p. 38). *4 tổ của lớp 6A đóng góp sách cho góc thư viện như sau: tổ I góp  $\frac{1}{4}$  số sách của lớp, tổ II góp  $\frac{9}{40}$  số sách của lớp, tổ III góp  $\frac{1}{5}$  số sách của lớp, tổ IV góp phần sách còn lại. Tổ IV đã góp bao nhiêu phần số sách của lớp?*

#### 8.4 Biểu diễn phân số trên trục số nằm ngang

### 9 ., : Phân Số

#### 10 Tổng Các Phân Số Viết Theo Quy Luật

#### 11 Số Thập Phân. Làm Tròn Số Thập Phân. Các Phép Tính với Số Thập Phân

#### 12 Tìm Giá Trị Phân Số của 1 Số Cho Trước. Tìm 1 Số Biết Giá Trị 1 Phân Số của Nó

#### 13 Tìm Tỷ Số & Tỷ Số % của 2 Đại Lượng

#### 14 Toán về Công Việc Làm Đồng Thời

#### 15 Miscellaneous

### Tài liệu

Bình, Vũ Hữu (2022). *Nâng Cao & Phát Triển Toán 6 Tập 2*. Tái bản lần thứ nhất. Kết nối tri thức với cuộc sống. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 152.

Thái, Đỗ Đức (2022). *Bài Tập Toán 6 Tập 2*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, p. 111.

Thái, Đỗ Đức, Đỗ Tiến Đạt, et al. (2022a). *Toán 6 Tập 2*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, p. 108.

— (2022b). *Toán 7 Tập 2*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, p. 127.

Tuyên, Bùi Văn (2022). *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 6*. Tái bản lần thứ 1. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 184.