

Elementary Mathematics/Grade 10

Nguyễn Quân Bá Hồng

Ngày 2 tháng 4 năm 2022

Tóm tắt nội dung

Tóm tắt kiến thức Toán lớp 10 theo chương trình giáo dục của Việt Nam & một số chủ đề nâng cao.

Mục lục

1	Mệnh Đề & Tập Hợp	2
1.1	Mệnh Đề	2
1.1.1	Mệnh đề, mệnh đề chứa biến	2
1.1.2	Mệnh đề phủ định	2
1.1.3	Mệnh đề kéo theo, mệnh đề đảo	2
1.1.4	Mệnh đề tương đương	2
1.1.5	Mệnh đề có chứa ký hiệu \forall, \exists	2
1.2	Tập Hợp & Các Phép Toán Trên Tập Hợp	3
1.2.1	Các khái niệm cơ bản về tập hợp	3
1.2.2	Các tập hợp số	3
1.2.3	Các phép toán trên tập hợp	3
2	Bất Phương Trình & Hệ Bất Phương Trình Bậc Nhất 2 Ẩn	4
2.1	Bất Phương Trình Bậc Nhất 2 Ẩn	4
2.1.1	Bất phương trình bậc nhất 2 ẩn	4
2.1.2	Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất 2 ẩn trên mặt phẳng tọa độ	4
2.2	Hệ Bất Phương Trình Bậc Nhất 2 Ẩn	4
2.2.1	Hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn	4
2.2.2	Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn trên mặt phẳng tọa độ	5
2.2.3	Ứng dụng của hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn	5
3	Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác	5
3.1	Giá Trị Lượng Giác của 1 Góc $\in [0^\circ, 180^\circ]$	5
3.1.1	Giá trị lượng giác của 1 góc	5
4	Vector	5
5	Các Số Đặc Trưng của Mẫu Số Liệu Không Ghép Nhóm	5
6	Hàm Số, Đồ thị & Ứng Dụng	5
7	Phương Pháp Tọa Độ Trong Mặt Phẳng	6
8	Đại Số Tổ Hợp	6
9	Tính Xác Suất Theo Định Nghĩa Cổ Điển	6
	Tài liệu	6

Principles/Nguyên Tắc

Về nguyên tắc cá nhân của tôi trong việc dạy & học Toán Sơ Cấp, xem [GitHub/NQBH/elementary-math/principle](https://github.com/NQBH/elementary-math/principle).

1 Mệnh Đề & Tập Hợp

Nội dung. “... cung cấp những khái niệm & ký hiệu logic thường dùng, củng cố & mở rộng hiểu biết ban đầu về lý thuyết tập hợp đã được học ở các lớp dưới. Từ đó góp phần hình thành khả năng suy luận có lý, khả năng tiếp nhận, diễn đạt các vấn đề 1 cách chính xác, tạo cơ sở để học tốt các nội dung toán học khác.” – Khoái et al., 2022a, p. 5

1.1 Mệnh Đề

1.1.1 Mệnh đề, mệnh đề chứa biến

1.1.1.1 Mệnh đề.

Định nghĩa 1.1 (Mệnh đề). *Những khẳng định có tính đúng hoặc sai là 1 mệnh đề logic (gọi tắt là mệnh đề).*

“Những câu không xác định được tính đúng sai không phải là mệnh đề.” – Khoái et al., 2022a, p. 6

Proposition 1.1. *Mỗi mệnh đề phải hoặc đúng hoặc sai. 1 mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.*

Lưu ý 1.1. “Người ta thường sử dụng các chữ cái P, Q, R, \dots để biểu thị các mệnh đề.” – Khoái et al., 2022a, p. 6

“Thông thường, những câu nghi vấn, câu cảm thán, câu cầu khiến không phải là mệnh đề.” – Khoái et al., 2022a, p. 6

Định nghĩa 1.2 (Mệnh đề toán học). *Những mệnh đề liên quan đến toán học được gọi là mệnh đề toán học.*

1.1.1.2 Mệnh đề chứa biến. Câu $P(n)$ với $P(n)$ là 1 mệnh đề đúng hoặc sai với mỗi giá trị của n được gọi là 1 mệnh đề chứa biến.

1.1.2 Mệnh đề phủ định

“Để phủ định 1 mệnh đề P , người ta thường thêm/bớt từ “không” hoặc “không phải” vào trước vị ngữ của mệnh đề P . Ta ký hiệu mệnh đề phủ định của mệnh đề P là \bar{P} .”

Proposition 1.2. *Mệnh đề P & mệnh đề \bar{P} là 2 phát biểu trái ngược nhau. Nếu P đúng thì \bar{P} sai, còn nếu P sai thì \bar{P} đúng.*

1.1.3 Mệnh đề kéo theo, mệnh đề đảo

1.1.3.1 Mệnh đề kéo theo.

Định nghĩa 1.3 (Mệnh đề kéo theo). *Mệnh đề “Nếu P thì Q ” được gọi là 1 mệnh đề kéo theo & ký hiệu là $P \Rightarrow Q$.*

Định nghĩa 1.4. *Các định lý toán học là những mệnh đề đúng & thường có dạng $P \Rightarrow Q$. Khi đó ta nói: P là giả thiết của định lý, Q là kết luận của định lý, hoặc “ P là điều kiện đủ để có Q ” hoặc “ Q là điều kiện cần để có P ”.*

1.1.3.2 Mệnh đề đảo.

Định nghĩa 1.5. *Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.*

Lưu ý 1.2. “Mệnh đề đảo của 1 mệnh đề đúng không nhất thiết là đúng.” – Khoái et al., 2022a, p. 9 I.e., $(P \Rightarrow Q) \nRightarrow (Q \Rightarrow P)$.

Dùng biểu đồ Venn để illustrate.

1.1.4 Mệnh đề tương đương

Định nghĩa 1.6 (Mệnh đề tương đương). *Mệnh đề “ P nếu & chỉ nếu Q ” được gọi là 1 mệnh đề tương đương & ký hiệu $P \Leftrightarrow Q$.*

Lưu ý 1.3. “Nếu cả 2 mệnh đề $P \Rightarrow Q$ & $Q \Rightarrow P$ đều đúng thì mệnh đề tương đương $P \Leftrightarrow Q$ đúng. Khi đó ta nói “ P tương đương với Q ” hoặc “ P là điều kiện cần & đủ để có Q ” hoặc “ P khi & chỉ khi Q ”. – Khoái et al., 2022a, p. 9. I.e., $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)) \Rightarrow (P \Leftrightarrow Q)$.

1.1.5 Mệnh đề có chứa ký hiệu \forall, \exists

Ký hiệu \forall đọc là “với mọi”, ký hiệu \exists đọc là “tồn tại”.

“Logic mệnh đề lần đầu tiên được phát triển 1 cách có hệ thống bởi nhà triết học Hy Lạp Aristotle hơn 2300 năm trước & được thảo luận bởi nhà toán học người Anh George Boole vào năm 1854 trong cuốn sách “The Laws of Think.” – Khoái et al., 2022a, p. 11

1.2 Tập Hợp & Các Phép Toán Trên Tập Hợp

1.2.1 Các khái niệm cơ bản về tập hợp

1.2.1.1 Tập hợp. “Có thể mô tả 1 tập hợp bằng 1 trong 2 cách sau:

- *Cách 1.* Liệt kê các phần tử của tập hợp;
- *Cách 2.* Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.

$a \in S$: phần tử a thuộc tập hợp S . $a \notin S$: phần tử a không thuộc tập hợp S .¹ – Khoái et al., 2022a, p. 13

Lưu ý 1.4. Số phần tử của tập hợp S được ký hiệu là $n(S)$, hoặc $|S|$, $\#S$.

Định nghĩa 1.7 (Tập rỗng). Tập hợp không chứa phần tử nào được gọi là tập rỗng, ký hiệu là \emptyset .

1.2.1.2 Tập hợp con.

Định nghĩa 1.8 (Tập hợp con). Nếu mọi phần tử của tập hợp T đều là phần tử của tập hợp S thì ta nói T là 1 tập hợp con (tập con) của S & viết là $T \subset S$ (đọc là T chứa trong S hoặc T là tập con của S .)

“Thay cho $T \subset S$, ta còn viết $S \supset T$ (đọc là S chứa T). Ký hiệu $T \not\subset S$ để chỉ T không là tập con của S .” – Khoái et al., 2022a, p. 14

Lưu ý 1.5. Từ định nghĩa 1.8, T là tập con của S nếu mệnh đề sau đúng: $\forall x, x \in T \Rightarrow x \in S$. Quy ước tập rỗng là tập con của mọi tập hợp, i.e., $\emptyset \subset A, \forall$ tập hợp A .

“Người ta thường minh họa 1 tập hợp bằng 1 hình phẳng được bao quanh bởi 1 đường kín, gọi là *biểu đồ Venn*.”² – Khoái et al., 2022a, p. 14

1.2.1.3 2 Tập hợp bằng nhau.

Định nghĩa 1.9 (2 tập hợp bằng nhau). 2 tập hợp S & T được gọi là 2 tập hợp bằng nhau nếu mỗi phần tử của T cũng là phần tử của tập hợp S & ngược lại. Ký hiệu là $S = T$.

“Nếu $S \subset T$ & $T \subset S$ thì $S = T$.” – Khoái et al., 2022a, p. 14. I.e., $((S \subset T) \wedge (T \subset S)) \Rightarrow (S = T)$.

1.2.2 Các tập hợp số

1.2.2.1 Mối quan hệ giữa các tập hợp số. Tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N} := \{0; 1; 2; 3; \dots\}$. Tập hợp các số nguyên \mathbb{Z} gồm các số tự nhiên & các số nguyên âm: $\mathbb{Z} := \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$. Tập hợp các số hữu tỷ \mathbb{Q} gồm các số viết được dưới dạng phân số $\frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$, i.e., $\mathbb{Q} := \{\frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$. Số hữu tỷ còn được biểu diễn dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn. Tập hợp các số thực \mathbb{R} gồm các số hữu tỷ & các số vô tỷ. Số vô tỷ là các số thập phân vô hạn không tuần hoàn.

Định lý 1.1 (Mối quan hệ giữa các tập số). $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

1.2.2.2 Các tập con thường dùng của \mathbb{R} . “1 số tập con thường dùng của tập số thực \mathbb{R} : Khoảng $(a, b) := \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$, $(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$, $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$, $(-\infty, +\infty)$, đoạn $[a, b] := \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$, nửa khoảng $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$, $[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$, $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$. Ký hiệu $+\infty$ đọc là *dương vô cực/dương vô cùng*. Ký hiệu $-\infty$ đọc là *âm vô cực/âm vô cùng*. a, b được gọi là các *đầu mút* của đoạn, khoảng hay nửa khoảng.

1.2.3 Các phép toán trên tập hợp

1.2.3.1 Giao của 2 tập hợp.

Định nghĩa 1.10 (Giao của 2 tập hợp). Tập hợp các phần tử thuộc cả 2 tập hợp S & T gọi là giao của 2 tập hợp S & T , ký hiệu là $S \cap T$. $S \cap T = \{x; x \in S \text{ & } x \in T\}$.

1.2.3.2 Hợp của 2 tập hợp.

Định nghĩa 1.11 (Hợp của 2 tập hợp). Tập hợp gồm các phần tử thuộc tập hợp S hoặc thuộc tập hợp T gọi là hợp của 2 tập hợp S & T , ký hiệu là $S \cup T$. $S \cup T = \{x; x \in S \text{ hoặc } x \in T\}$.

¹ S ở đây viết tắt của *set*, i.e., tập hợp.

²EN: *Venn diagram*, đối tượng này đã được nhắc đến trong Thái et al., 2022.

1.2.3.3 Hiệu của 2 tập hợp.

Định nghĩa 1.12 (Hiệu của 2 tập hợp). Hiệu của 2 tập hợp S & T là tập hợp gồm các phần tử thuộc S nhưng không thuộc T , ký hiệu là $S \setminus T$. $S \setminus T = \{x; x \in S \text{ & } x \notin T\}$. Nếu $T \subset S$ thì $S \setminus T$ được gọi là phần bù của T trong S , ký hiệu $C_S T$.

Lưu ý 1.6. $C_S S = \emptyset$.

Dễ chứng minh: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

2 Bất Phương Trình & Hệ Bất Phương Trình Bậc Nhất 2 Ẩn

Nội dung. “Các bất phương trình bậc nhất 2 ẩn & hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn xuất hiện trong nhiều bài toán kinh tế, như là những ràng buộc trong các bài toán sản xuất, bài toán phân phối hàng hóa, ...” “... cung cấp cách biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình & hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn trên mặt phẳng tọa độ.” – Khoái et al., 2022a, p. 22

2.1 Bất Phương Trình Bậc Nhất 2 Ẩn

2.1.1 Bất phương trình bậc nhất 2 ẩn

Định nghĩa 2.1 (Bất phương trình bậc nhất 2 ẩn). Bất phương trình bậc nhất 2 ẩn x, y có dạng tổng quát là: $ax + by \leq c$ ($ax + by \geq c$, $ax + by < c$, $ax + by > c$) trong đó a, b, c là những số thực đã cho, a & b không đồng thời bằng 0, x & y là các ẩn số.

Định nghĩa 2.2 (Nghiệm của bất phương trình bậc nhất 2 ẩn). Cặp số (x_0, y_0) được gọi là 1 nghiệm của bất phương trình bậc nhất 2 ẩn $ax + by \leq c$ nếu bất đẳng thức $ax_0 + by_0 \leq c$ đúng.

Lưu ý 2.1. “Bất phương trình bậc nhất 2 ẩn luôn có vô số nghiệm.” – Khoái et al., 2022a, p. 23

2.1.2 Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất 2 ẩn trên mặt phẳng tọa độ

Định nghĩa 2.3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$ được gọi là miền nghiệm của bất phương trình đó.

“Người ta chứng minh được rằng đường thẳng d có phương trình $ax + by = c$ chia mặt phẳng tọa độ Oxy thành 2 nửa mặt phẳng bờ d :

- 1 nửa mặt phẳng (không kể bờ d) gồm các điểm có tọa độ (x, y) thỏa mãn $ax + by > c$;
- Nửa mặt phẳng còn lại (không kể bờ d) gồm các điểm có tọa độ (x, y) thỏa mãn $ax + by < c$.

Bờ d gồm các điểm có tọa độ (x, y) thỏa mãn $ax + by = c$.” – Khoái et al., 2022a, p. 24

“Cách biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất 2 ẩn $ax + by \leq c$.

- Vẽ đường thẳng $d: ax + by = c$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy .
- Lấy 1 điểm $M_0(x_0, y_0)$ không thuộc d .
- Tính $ax_0 + by_0$ & so sánh với c .
- Nếu $ax_0 + by_0 < c$ thì nửa mặt phẳng bờ d chứa M_0 là miền nghiệm của bất phương trình. Nếu $ax_0 + by_0 > c$ thì nửa mặt phẳng bờ d không chứa M_0 là miền nghiệm của bất phương trình.

Nếu $c \neq 0$, ta thường chọn M_0 chính là gốc tọa độ $(0, 0)$. Nếu $c = 0$, ta thường chọn M_0 có tọa độ $(1, 0)$ hoặc $(0, 1)$.” – Khoái et al., 2022a, p. 24

Lưu ý 2.2. “Miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$ là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$ bỏ đi đường thẳng $ax + by = c$ & biểu diễn đường thẳng bằng nét đứt.” – Khoái et al., 2022a, p. 24

2.2 Hệ Bất Phương Trình Bậc Nhất 2 Ẩn

2.2.1 Hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn

Định nghĩa 2.4 (Hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn, nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn). Hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn là 1 hệ gồm 2 hay nhiều bất phương trình bậc nhất 2 ẩn. Cặp số (x_0, y_0) là nghiệm của 1 hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn khi (x_0, y_0) đồng thời là nghiệm của tất cả các bất phương trình trong hệ đó.

2.2.2 Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn trên mặt phẳng tọa độ

“Phương trình của trục Ox là $y = 0$ & phương trình của trục Oy là $x = 0$.” – Khoái et al., 2022a, p. 27

Định nghĩa 2.5 (Miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn). Trong mặt phẳng tọa độ, tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn là miền nghiệm của hệ bất phương trình đó. Miền nghiệm của hệ là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

“Cách xác định miền nghiệm của 1 hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn:

- Trên cùng 1 mặt phẳng tọa độ, xác định miền nghiệm của mỗi bất phương trình bậc nhất 2 ẩn trong hệ & gạch bỏ miền còn lại.
- Miền không bị gạch là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.” – Khoái et al., 2022a, p. 28

2.2.3 Ứng dụng của hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn

Lưu ý 2.3. “Tổng quát, người ta chứng minh được rằng giá trị lớn nhất/nhỏ nhất của biểu thức $F(x, y) = ax + by$, với (x, y) là tọa độ các điểm thuộc miền đa giác $A_1A_2 \dots A_n$, i.e., các điểm nằm bên trong hay nằm trên các cạnh của đa giác, đạt được tại 1 trong các đỉnh của đa giác đó.” – Khoái et al., 2022a, p. 29

3 Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác

“Lượng giác được phát triển từ nhu cầu tính toán góc & khoảng cách trong rất nhiều lĩnh vực như thiên văn học, lập bản đồ, bản vẽ thiết kế, khảo sát & tìm tằm bắn của pháo binh.” – Khoái et al., 2022a, p. 33

3.1 Giá Trị Lượng Giác của 1 Góc $\in [0^\circ, 180^\circ]$

3.1.1 Giá trị lượng giác của 1 góc

“Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , nửa đường tròn tâm O , bán kính $R = 1$ nằm phía trên trục hoành được gọi là nửa đường tròn đơn vị. Cho trước 1 góc $\alpha \in [0^\circ, 180^\circ]$. Khi đó, có duy nhất điểm $M(x_0, y_0)$ trên nửa đường tròn đơn vị nói trên để $\widehat{xOM} = \alpha$.” [...] “Mở rộng khái niệm tỷ số lượng giác của 1 góc nhọn cho 1 góc bất kỳ $\in [0^\circ, 180^\circ]$, ta có định nghĩa sau: Với mỗi góc $\alpha \in [0^\circ, 180^\circ]$, gọi $M(x_0, y_0)$ là điểm trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$. Khi đó:

- \sin của góc α là tung độ y_0 của điểm M , được ký hiệu là $\sin \alpha$;
- \cos của góc α là hoành độ x_0 của điểm M , được ký hiệu là $\cos \alpha$;
- Khi $\alpha \neq 90^\circ$ (hay là $x_0 \neq 0$), \tan của α là $\frac{y_0}{x_0}$, được ký hiệu là $\tan \alpha$;
- Khi $\alpha \neq 0^\circ$ & $\alpha \neq 180^\circ$ (hay là $y_0 \neq 0$), \cot của α là $\frac{x_0}{y_0}$, được ký hiệu là $\cot \alpha$.

Từ định nghĩa trên, ta có:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\alpha \neq 0^\circ, \alpha \neq 180^\circ), \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} \quad (\alpha \notin \{0^\circ, 90^\circ, 180^\circ\}).$$

– Khoái et al., 2022a, p. 34

4 Vector

5 Các Số Đặc Trưng của Mẫu Số Liệu Không Ghép Nhóm

Hoạt Động Thực Hành & Trải Nghiệm

6 Hàm Số, Đồ thị & Ứng Dụng

Khoái et al., 2022b

7 Phương Pháp Tọa Độ Trong Mặt Phẳng

8 Đại Số Tổ Hợp

9 Tính Xác Suất Theo Định Nghĩa Cổ Điển

Hoạt Động Thực Hành & Trải Nghiệm

Tài liệu

[NQBH/elementary math] Nguyễn Quân Bá Hồng. *Some Topics in Elementary Mathematics: Problems, Theories, Applications, & Bridges to Advanced Mathematics*. Mar 2022–now.

Tài liệu

Khoái, Hà Huy et al. (2022a). *Toán 10, tập 1*. Kết Nối Tri Thức Với Cuộc Sống. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 103.
 — (2022b). *Toán 10, tập 2*. Kết Nối Tri Thức Với Cuộc Sống. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 99.
 Thái, Đỗ Đức et al. (2022). *Toán 6, tập 1*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, p. 128.