

# Divisor Ư Multiplier – Ước Ư Bội

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 20 tháng 11 năm 2022

## Tóm tắt nội dung

1 số bài tập về ước, ước chung, ước chung lớn nhất, bội, bội chung, bội chung nhỏ nhất.

## Mục lục

|  |          |
|--|----------|
| <b>1 Cheatsheet</b>                    | <b>1</b> |
| <b>2 Ước &amp; Bội</b>                 | <b>1</b> |
| <b>3 Ước Chung, Ước Chung Lớn Nhất</b> | <b>3</b> |
| <b>Tài liệu</b>                        | <b>3</b> |

## 1 Cheatsheet

**§12. Ước chung & ước chung lớn nhất.** ƯC & ƯCLN của 2 số:  $((a : n) \wedge (b : n)) \Leftrightarrow ((a \in B(n)) \wedge (b \in B(n))) \Leftrightarrow ((n|a) \wedge (n|b)) \Leftrightarrow ((n \in U(a)) \wedge (n \in U(b))) \Leftrightarrow n \in \text{ƯC}(a, b)$ .  $n = \max \text{ƯC}(a, b) \Leftrightarrow n = \text{ƯCLN}(a, b)$ .  $\text{ƯC}(a, b) \in U(\text{ƯCLN}(a, b))$ ,  $\text{ƯC}(a, b) | \text{ƯCLN}(a, b)$ ,  $\text{ƯCLN}(a, b) : \text{ƯC}(a, b)$ ,  $\text{ƯCLN}(a, b) \in B(\text{ƯC}(a, b))$ . ƯC & ƯCLN của 3 số:  $((a : n) \wedge (b : n) \wedge (c : n)) \Leftrightarrow ((a \in B(n)) \wedge (b \in B(n)) \wedge (c \in B(n))) \Leftrightarrow ((n|a) \wedge (n|b) \wedge (n|c)) \Leftrightarrow ((n \in U(a)) \wedge (n \in U(b)) \wedge (n \in U(c))) \Leftrightarrow n \in \text{ƯC}(a, b, c)$ .  $n = \max \text{ƯC}(a, b, c) \Leftrightarrow n = \text{ƯCLN}(a, b, c)$ .  $\text{ƯC}(a, b, c) \in U(\text{ƯCLN}(a, b, c))$ ,  $\text{ƯC}(a, b, c) | \text{ƯCLN}(a, b, c)$ ,  $\text{ƯCLN}(a, b, c) : \text{ƯC}(a, b, c)$ ,  $\text{ƯCLN}(a, b, c) \in B(\text{ƯC}(a, b, c))$ . ƯC & ƯCLN của  $n$  số:  $(a_i : m, \forall i = 1, \dots, n) \Leftrightarrow (a_i \in B(m), \forall i = 1, \dots, n) \Leftrightarrow (m|a_i, \forall i = 1, \dots, n) \Leftrightarrow (m \in U(a_i), \forall i = 1, \dots, n) \Leftrightarrow m \in \text{ƯC}(a_1, \dots, a_n)$ .  $m = \max \text{ƯC}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow m = \text{ƯCLN}(a_1, \dots, a_n)$ .  $\text{ƯC}(a_1, \dots, a_n) \in U(\text{ƯCLN}(a_1, \dots, a_n))$ ,  $\text{ƯC}(a_1, \dots, a_n) | \text{ƯCLN}(a_1, \dots, a_n)$ ,  $\text{ƯCLN}(a_1, \dots, a_n) : \text{ƯC}(a_1, \dots, a_n)$ ,  $\text{ƯCLN}(a_1, \dots, a_n) \in B(\text{ƯC}(a_1, \dots, a_n))$ . Tìm ƯCLN bằng cách phân tích các số ra thừa số nguyên tố:  $a = \prod_{i=1}^n p_i^{a_i}$ ,  $b = \prod_{i=1}^n p_i^{b_i}$ ,  $\text{ƯCLN}(a, b) = \prod_{i=1}^n p_i^{\min\{a_i, b_i\}}$ .  $p, q$  nguyên tố cùng nhau  $\Leftrightarrow \text{ƯCLN}(p, q) = 1 \Leftrightarrow \text{BCNN}(p, q) = pq$ .  $\forall a, b \in \mathbb{N}$ ,  $b \neq 0$ ,  $\frac{a}{b}$  tối giản  $\Leftrightarrow \text{ƯCLN}(a, b) = 1$ . **§13. Bội chung & bội chung nhỏ nhất.** BC & BCNN của 2 số:  $((n : a) \wedge (n : b)) \Leftrightarrow ((n \in B(a)) \wedge (n \in B(b))) \Leftrightarrow ((a|n) \wedge (b|n)) \Leftrightarrow \{a; b\} \subset U(n) \Leftrightarrow n \in \text{BC}(a, b)$ .  $n = \min(\text{BC}(a, b) \setminus \{0\}) \Leftrightarrow n = \text{BCNN}(a, b)$ . BC & BCNN của 3 số:  $((n : a) \wedge (n : b) \wedge (n : c)) \Leftrightarrow ((n \in B(a)) \wedge (n \in B(b)) \wedge (n \in B(c))) \Leftrightarrow ((a|n) \wedge (b|n) \wedge (c|n)) \Leftrightarrow \{a; b; c\} \subset U(n) \Leftrightarrow n \in \text{BC}(a, b, c)$ .  $n = \min(\text{BC}(a, b, c) \setminus \{0\}) \Leftrightarrow n = \text{BCNN}(a, b, c)$ . BC & BCNN của  $n$  số:  $(m : a_i, \forall i = 1, \dots, n) \Leftrightarrow (m \in B(a_i), \forall i = 1, \dots, n) \Leftrightarrow (a_i|m, \forall i = 1, \dots, n) \Leftrightarrow (a_i \in U(m)) \Leftrightarrow m \in \text{BC}(a_1, \dots, a_n)$ .  $n = \min(\text{BC}(a_1, \dots, a_n) \setminus \{0\}) \Leftrightarrow n = \text{BCNN}(a_1, \dots, a_n)$ . Tìm BCNN bằng cách phân tích các số ra thừa số nguyên tố:  $a = \prod_{i=1}^n p_i^{a_i}$ ,  $b = \prod_{i=1}^n p_i^{b_i}$ ,  $\text{BCNN}(a, b) = \prod_{i=1}^n p_i^{\max\{a_i, b_i\}}$ .  $a : b \Leftrightarrow \text{BCNN}(a, b) = a \Leftrightarrow \text{ƯCLN}(a, b) = b$ . Tính tổng các phân số cùng mẫu số:  $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{b}$ , i.e.,  $\frac{a_1}{b} + \dots + \frac{a_n}{b} = \frac{a_1 + \dots + a_n}{b}$ ,  $\forall a_i, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ . Tính tổng các phân số khác mẫu số: Quy đồng mẫu số các phân số đó với mẫu số chung là BCNN của các mẫu số các phân số đó rồi cộng lại:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \frac{\text{BCNN}(b_1, \dots, b_n)}{b_i}}{\text{BCNN}(b_1, \dots, b_n)}, \quad \frac{a_1}{b_1} + \dots + \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 \frac{\text{BCNN}(b_1, \dots, b_n)}{b_1} + \dots + a_n \frac{\text{BCNN}(b_1, \dots, b_n)}{b_n}}{\text{BCNN}(b_1, \dots, b_n)}, \quad \forall a_i, b_i \in \mathbb{Z}, b_i \neq 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

## 2 Ước & Bội

“Bằng cách phân tích 1 số ra thừa số nguyên tố, ta có thể dễ dàng tìm được ước (ước số) của số đó.” – Bình, 2022, §8, p. 33

\*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam  
e-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com); website: <https://nqbh.github.io>.

**Bài toán 2.1** (Bình, 2022, Ví dụ 36, p. 33). *Tìm số chia & thương của 1 phép chia có số bị chia bằng 145, số dư bằng 12 biết thương khác 1 (số chia & thương là các số tự nhiên).*

*Giải.* Gọi  $b, q$  lần lượt là số chia & thương:  $145 = bq + 12, b > 12, q \neq 1$ , hay  $bq = 145 - 12 = 133 = 7 \cdot 19$ , suy ra  $b \in \mathcal{U}(133)$ , mà  $b > 12$ , nên  $b \in \{19; 133\}$ . Xét 2 trường hợp: • Nếu  $b = 19$ , thì  $q = 7$ : nhận. • Nếu  $b = 133$ , thì  $q = 1$ : loại do mâu thuẫn với giả thiết  $q \neq 1$ . Vậy số chia bằng 19, thương bằng 7.  $\square$

**Dạng toán 2.1.** *Tìm số chia & thương của 1 phép chia có số bị chia bằng  $a$ , số dư bằng  $r$ .*

TỔNG QUÁT. Đẳng thức  $a = bq + r$  gồm 4 số: số bị chia  $a$ , số chia  $b$ , thương  $q$ , & số dư  $r$ .

**Bài toán 2.2** (Bình, 2022, Ví dụ 37, p. 33). *Tìm số tự nhiên có 2 chữ số khác nhau sao cho nếu xóa bất kỳ chữ số nào của nó thì số nhận được vẫn là ước của số ban đầu.*

*Giải.* Gọi số cần tìm là  $\overline{ab}$ ,  $a \neq b$ ,  $\overline{ab} : a$ ,  $\overline{ab} : b$ . Có  $\overline{ab} : a \Leftrightarrow 10a + b : a \Leftrightarrow b : a$ . Đặt  $b = ka$ ,  $k \neq 1$  do  $b \neq a$ . Có  $\overline{ab} : b \Leftrightarrow 10a + b : b \Leftrightarrow 10a : b \Rightarrow 10a : ka \Rightarrow 10 : k \Rightarrow k \in \{2; 5\}$ . Xét 2 trường hợp: • Nếu  $k = 2$ ,  $b = 2a$ ,  $\overline{ab} \in \{12; 24; 36; 48\}$ . • Nếu  $k = 5$ ,  $b = 5a$ ,  $\overline{ab} = 15$ . Đáp số: 12, 24, 36, 48, 15.  $\square$

**Bài toán 2.3** (Bình, 2022, Ví dụ 38, p. 33). *1 tổ sản xuất được thưởng 840 nghìn đồng. Số tiền thưởng chia đều cho số người trong tổ. Sau khi chia xong, tổ phát hiện đã bỏ sót không chia cho 1 người vắng mặt, do đó mỗi người được chia đã góp 2 nghìn đồng & kết quả là người vắng mặt cũng được nhận số tiền như những người có mặt. Tính số tiền mỗi người đã được thưởng (số tiền đó là 1 số tự nhiên với đơn vị nghìn đồng).*

*Phân tích.* Nếu gọi số người của tổ là  $a \in \mathbb{N}^*$  thì ban đầu mỗi người trong  $a - 1$  người có mặt được nhận  $\frac{840}{a-1}$  nghìn đồng. Sau khi phát hiện 1 người vắng mặt (chưa được chia tiền thưởng), mỗi người trong  $a - 1$  người đã được chia góp cho người vắng mặt 2 nghìn đồng, nên tổng cộng người vắng mặt nhận được  $2(a - 1)$  nghìn đồng, & số tiền này cũng bằng với  $a - 1$  người còn lại nên mỗi người nhận được  $\frac{840}{a-1} - 2 = 2(a - 1)$ . Tổng cộng có  $a$  người, nên tổng số tiền sẽ là  $\left(\frac{840}{a-1} - 2\right)a = 2a(a - 1) = 840$ . Ở đây có thể giải 1 trong 3 phương trình:  $\left(\frac{840}{a-1} - 2\right)a = 2a(a - 1)$ ,  $\left(\frac{840}{a-1} - 2\right)a = 840$ , hoặc  $2a(a - 1) = 840$  để tìm  $a$ . Phương trình cuối có vẻ dễ giải nhất vì nó có dạng đơn giản hơn so với 2 phương trình còn lại.

**Lưu ý 2.1.** *Trong đa số trường hợp thì phương trình có dạng đa thức sẽ dễ giải hơn phương trình có chứa phân thức  $\frac{A}{B}$  hoặc căn thức  $\sqrt{A}$ , với  $A, B$  là các biểu thức chứa biến. Căn thức sẽ được học ở Toán 7, Thái et al., 2022.*

*Giải.* Gọi số người của tổ là  $a \in \mathbb{N}^*$  thì số người có mặt là  $a - 1$ . Số tiền mỗi người được thưởng là  $2(a - 1)$  nghìn đồng. Có  $2a(a - 1) = 840 \Leftrightarrow a(a - 1) = 420 = 21 \cdot 20 \Rightarrow a = 21$ . Số người của tổ sản xuất là 21 người. Mỗi người được thưởng  $840 : 21 = 40$  nghìn đồng.  $\square$

**Bài toán 2.4** (Bình, 2022, Ví dụ 39, p. 33). *Trong 1 buổi họp mặt của 2 câu lạc bộ  $A$  &  $B$ , mỗi người bắt tay 1 lần với tất cả những người còn lại. Tính số người của mỗi câu lạc bộ, biết có tất cả 496 cái bắt tay, trong đó có 241 cái bắt tay của 2 người trong cùng 1 câu lạc bộ.*

**Bài toán 2.5** (Bình, 2022, Ví dụ 40, p. 34). *Tìm 5 số tự nhiên khác nhau, biết khi nhân từng cặp 2 số thì tích nhỏ nhất bằng 28, tích lớn nhất bằng 240 & 1 tích khác bằng 128.*

**Bài toán 2.6** (Bình, 2022, Ví dụ 41\*, p. 34). *Viết số 108 dưới dạng tổng các số tự nhiên liên tiếp lớn hơn 0.*

**Bài toán 2.7** (Bình, 2022, 200., p. 35). *Tìm  $x, y \in \mathbb{N}$  sao cho: (a)  $(2x + 1)(y - 3) = 10$ . (b)  $(3x - 2)(2y - 3) = 1$ . (c)  $(x + 1)(2y - 1) = 12$ . (d)  $x + 6 = y(x - 1)$ . (e)  $x - 3 = y(x + 2)$ .*

**Bài toán 2.8** (Bình, 2022, 201., p. 35). *1 phép chia số tự nhiên có số bị chia bằng 3193. Tìm số chia & thương của phép chia đó, biết số chia có 2 chữ số.*

**Bài toán 2.9** (Bình, 2022, 202., p. 35). *Tìm số chia của 1 phép chia, biết: Số bị chia bằng 236, số dư bằng 15, số chia là số tự nhiên có 2 chữ số.*

**Bài toán 2.10** (Bình, 2022, 203., p. 35). *Tìm ước của 161 trong khoảng từ 10 đến 150.*

**Bài toán 2.11** (Bình, 2022, 204., p. 35). *Tìm 2 số tự nhiên liên tiếp có tích bằng 600.*

**Bài toán 2.12** (Bình, 2022, 205., p. 35). *Tìm 3 số tự nhiên liên tiếp có tích bằng 2730.*

**Bài toán 2.13** (Bình, 2022, 206., p. 35). *Tìm 3 số lẻ liên tiếp có tích bằng 12075.*

**Bài toán 2.14** (Bình, 2022, 207., p. 35). *Có 1 số số tự nhiên khác nhau được viết trên bảng. Tích của 2 số nhỏ nhất là 16, tích của 2 số lớn nhất là 225. Tính tổng của tất cả các số tự nhiên đó.*

**Bài toán 2.15** (Bình, 2022, 208., p. 35). Trên 1 tấm bia có các vòng tròn tính điểm là 18, 23, 28, 33, 38. Muốn trúng thưởng, phải bắn 1 số phát tên để đạt đúng 100 điểm. Hỏi phải bắn bao nhiêu phát tên  $\mathcal{E}$  vào những vòng nào?

**Bài toán 2.16** (Bình, 2022, 209., p. 35). 1 tờ hóa đơn bị dây mực, chỗ dây mực biểu thị bởi dấu  $\star$ . Phục hồi lại các chữ số bị dây mực (dấu  $\star$  thay cho 1 hay nhiều chữ số). Giá mua 1 hộp bút: 3200 đồng. Số hộp bút đã bán:  $\star$  chiếc. Giá bán 1 hộp bút:  $\star 00$  đồng. Thành tiền: 107300 đồng.

**Bài toán 2.17** (Bình, 2022, 210., p. 36). Tìm  $n \in \mathbb{N}$ , biết:  $\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = 820$ .

**Bài toán 2.18** (Bình, 2022, 211., p. 36). Viết số 100 dưới dạng tổng các số lẻ liên tiếp.

**Bài toán 2.19** (Bình, 2022, 212., p. 36). Tân  $\mathcal{E}$  Hùng gặp nhau trong hội nghị học sinh giỏi Toán. Tân hỏi số nhà Hùng, Hùng trả lời: - Nhà mình ở chính giữa phố, đoạn phố ấy có tổng các số nhà bằng 161. Nghĩ 1 chút, Tân nói: - Bạn ở số nhà 23 chứ gì! Hỏi Tân đã tìm ra như thế nào?

**Bài toán 2.20** (Bình, 2022, 213., p. 36). Đặt 4 số tự nhiên khác nhau, khác 0, nhỏ hơn 100 vào các vị trí A, B, C, D ở Bình, 2022, Hình 6, p. 36 sao cho mỗi tên đi từ 1 số đến ước của nó  $\mathcal{E}$  số ở vị trí A có giá trị lớn nhất trong các giá trị nó có thể nhận được.

**Bài toán 2.21** (Bình, 2022, 214., p. 36). Tìm  $n \in \mathbb{N}$ , sao cho: (a)  $n + 4 : n + 1$ . (b)  $n^2 + 4 : n + 2$ . (c)  $13n : n - 1$ .

**Bài toán 2.22** (Bình, 2022, 215.\*, p. 36). Tìm số tự nhiên có 3 chữ số, biết nó tăng gấp  $n$  lần nếu cộng mỗi chữ số của nó với  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ , có thể gồm 1 hoặc nhiều chữ số).

**Bài toán 2.23** (Bình, 2022, 216., p. 36). 2 công ty A  $\mathcal{E}$  B năm trước có số nhân viên bằng nhau. Năm sau, công ty A tuyển thêm số nhân viên mới bằng 4 lần số nhân viên cũ, còn công ty B cho nghỉ việc 5 nhân viên, do đó số nhân viên công ty A là bội của số nhân viên công ty B. Hỏi năm trước mỗi công ty có nhiều nhất bao nhiêu nhân viên?

### 3 Ước Chung. Ước Chung Lớn Nhất

#### Tài liệu

Bình, Vũ Hữu (2022). *Nâng Cao  $\mathcal{E}$  Phát Triển Toán 6, tập 1*. Tái bản lần thứ nhất. Kết nối tri thức với cuộc sống. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 200.

Thái, Đỗ Đức et al. (2022). *Toán 7, tập 1*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, p. 111.