

Fraction – Phân Số

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 21 tháng 2 năm 2023

Tóm tắt nội dung

[EN] This text is a collection of problems, from easy to advanced, about *fraction*. This text is also a supplementary material for my lecture note on Elementary Mathematics grade 6, which is stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 6/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_6/lecture)¹. The latest version of this text has been stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 6/fraction](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_6/fraction)².

[VI] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài tập chọn lọc từ cơ bản đến nâng cao về *phân số*. Tài liệu này là phần bài tập bổ sung cho tài liệu chính – bài giảng [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 6/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_6/lecture) của tác giả viết cho Toán Sơ Cấp lớp 6. Phiên bản mới nhất của tài liệu này được lưu trữ & có thể tải xuống ở link sau: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 6/fraction](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_6/fraction).

Nội dung. Phân số với tử & mẫu là số nguyên; các phép tính với phân số; số thập phân; các phép tính với số thập phân; tỷ số, tỷ số phần trăm, làm tròn số.

Mục lục

1	Wikipedia/Fraction	2
2	Phân Số với Tử & Mẫu Là Số Nguyên	2
2.1	Khái niệm phân số	2
2.2	Phân số bằng nhau	2
3	Phân Số. Tính chất Cơ Bản của Phân Số. Rút Gọn Phân Số	3
4	Quy Đồng Mẫu Số Nhiều Phân Số. So Sánh Phân Số. Hỗn Số Dương	5
5	1 Số Phương Pháp Đặc Biệt để So Sánh 2 Phân Số	7
6	± Phân Số	7
7	·, : Phân Số	7
8	Tổng Các Phân Số Viết Theo Quy Luật	7
9	Số Thập Phân. Làm Tròn Số Thập Phân. Các Phép Tính với Số Thập Phân	7
10	Tìm Giá Trị Phân Số của 1 Số Cho Trước. Tìm 1 Số Biết Giá Trị 1 Phân Số của Nó	7
11	Tìm Tỷ Số & Tỷ Số % của 2 Đại Lượng	7
12	Toán về Công Việc Làm Đồng Thời	7
13	Miscellaneous	7
	Tài liệu	7

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

¹URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_6/NQBH_elementary_mathematics_grade_6.pdf.

²URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_6/fraction/NQBH_fraction.pdf.

1 Wikipedia/Fraction

“A *fraction* (from Latin: *fractus*, “broken”) represents a part of a whole or, more generally, any number of equal parts. When spoken in everyday English, a fraction describes how many parts of a certain size there are, e.g., one-half $\frac{1}{2}$, eight-fifths $\frac{8}{5}$, three-quarters $\frac{3}{4}$. A *common*, *vulgar*, or *simple* fraction (e.g., $\frac{1}{2}$, $\frac{17}{3}$) consists of a *numerator*, displayed above a line (or before a slash like $1/2$), & a nonzero *denominator*, displayed below (or after) that line. Numerators & denominators are also used in fractions that are not *common*, including compound fractions, complex fractions, & mixed numerals.

In positive common fractions, the numerator & denominator are **natural numbers**, i.e., $\frac{a}{b} > 0$, with $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$. The numerator represents a number of equal parts, & the denominator indicates how many of those parts make up a unit or a whole. The denominator cannot be zero, because zero parts can never make up a whole. E.g., in the fraction $\frac{3}{4}$, the numerator 3 indicates that the fraction represents 3 equal parts, & the denominator 4 indicates that 4 parts make up a whole.

A common fraction is a numeral which represents a **rational number** $r \in \mathbb{Q}$. That same number can also be represented as a **decimal**, a percent, or with a negative **exponent**. E.g., 0.01, 1%, & 10^{-2} are all equal to the fraction $\frac{1}{100}$. An **integer** can be thought of as having an implicit denominator of 1 (e.g., $7 = \frac{7}{1}$).

Other uses for fractions are to represent **ratios** & **division**. Thus the fraction $\frac{3}{4}$ can also be used to represent the ratio 3:4 (the ratio of the part to the whole), & the division $3 \div 4$ (3 divided by 4). The nonzero denominator rule, which applies when representing a division as a fraction, is an example of the rule that **division by zero** is undefined.

We can also write negative fractions, which represent the opposite of a positive fraction. E.g., if $\frac{1}{2}$ represents a half-dollar profit, then $-\frac{1}{2}$ represents a half-dollar loss. Because of the rules of division of signed numbers (which states in part that negative divided by positive is negative), $-\frac{1}{2}$, $\frac{-1}{2}$, & $\frac{1}{-2}$ all represent the same fraction – negative one-half. & because a negative divided by a negative produces a positive, $\frac{-1}{-2}$ represents positive one-half.

In mathematics the set of all numbers that can be expressed in the form $\frac{a}{b}$, where $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, is called the set of rational numbers & is represented by the symbol \mathbb{Q} , which stands for **quotient**. A number is a rational number precisely when it can be written in that form (i.e., as a common fraction). However, the word *fraction* can also be used to describe mathematical expressions that are not rational numbers. Examples of these usages include **algebraic fractions** (quotients of algebraic expressions), & expressions that contain **irrational numbers**, e.g., $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (see **square root of 2**) & $\frac{\pi}{4}$ (see **proof that π is irrational**).” – Wikipedia/fraction

2 Phân Số với Tử & Mẫu Là Số Nguyên

2.1 Khái niệm phân số

Định nghĩa 1 (Phân số). *Kết quả của phép chia số nguyên a cho số nguyên b khác 0 có thể viết dưới dạng $\frac{a}{b}$, gọi là phân số. Ký hiệu: $\frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.*

Phân số $\frac{a}{b}$ đọc là: a phần b , a là *tử số* (còn gọi tắt là *tử*, b là *mẫu số* (còn gọi tắt là *mẫu*). Mọi số nguyên $a \in \mathbb{Z}$ có thể viết ở dạng phân số là $\frac{a}{1}$, i.e., $a = \frac{a}{1}$, $\forall a \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 1 (Thái et al., 2022, Ví dụ 1, p. 26). *Viết \mathcal{E} đọc phân số trong mỗi trường hợp sau: (a) Tử là 11, mẫu là -3 . (b) Tử là -7 , mẫu là -5 . (c) Tử là -6 , mẫu là 17. (d) Tử là -12 , mẫu là -37 .*

2.2 Phân số bằng nhau

Định nghĩa 2 (2 phân số bằng nhau). *2 phân số được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng biểu diễn 1 giá trị.*

Định lý 1. *Xét 2 phân số $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $bd \neq 0$. Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì $ad = bc$. Ngược lại, nếu $ad = bc$ thì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.*

Với $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, luôn có: $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ & $-\frac{a}{-b} = \frac{a}{b}$.

“Phân số có dạng $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, có thể hiểu là phép chia số nguyên a cho số nguyên b khác 0. Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì $ad = bc$. Ngược lại, nếu $ad = bc$ thì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $bd \neq 0$. Có $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$, $\forall a, b, m \in \mathbb{Z}$, $bm \neq 0$; $\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \text{ƯC}(a, b)$. *Phân số tối giản* là phân số mà tử & mẫu chỉ có ước chung là ± 1 .” – Thái, 2022, Chap. V, §1, p. 29

Bài toán 2 (Thái, 2022, Ví dụ 1, p. 29). *Viết tất cả các phân số $\frac{a}{b}$ biết a, b được chọn trong các số: $-3, 0, 5$. Có tất cả bao nhiêu phân số?*

Giải. Vì $b \neq 0$ nên có 2 trường hợp: (1) $b = -3$, có 3 phân số: $\frac{-3}{-3}, \frac{0}{-3}, \frac{5}{-3}$. (2) $b = 5$, có 3 phân số: $\frac{-3}{5}, \frac{0}{5}, \frac{5}{5}$. Viết được tất cả 6 phân số. \square

Bài toán 3 (Mở rộng Thái, 2022, Ví dụ 1, p. 29). *Viết tất cả các phân số $\frac{a}{b}$ biết a, b được chọn trong các số: a_1, a_2, \dots, a_n , với $n \in \mathbb{N}^*$, phân biệt cho trước. Có tất cả bao nhiêu phân số?*

Giải. Xét 2 trường hợp sau: (1) Nếu trong n số a_i đã cho có 1 số bằng 0 (lúc nào cũng chỉ có tối đa 1 số bằng 0 vì các số này phân biệt), i.e., có 1 chỉ số $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho $a_{i_0} = 0$ & $a_i \neq 0$, $\forall i \neq i_0$. Khi đó, có thể viết được các phân số $\frac{a}{b} = \frac{a_i}{a_j}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \neq i_0$. Có tất cả $n(n-1)$ phân số trong trường hợp này. (2) Nếu tất cả các số a_i đã cho đều khác 0, i.e., $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$ thì có thể viết được các phân số $\frac{a}{b} = \frac{a_i}{a_j}$, $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$. Có tất cả $n \cdot n = n^2$ phân số trong trường hợp này. \square

Bài toán 4 (Thái, 2022, Ví dụ 2, p. 29). 1 trường học có số học sinh giỏi chiếm $\frac{12}{35}$ số học sinh toàn trường, số học sinh khá chiếm $\frac{13}{25}$ số học sinh toàn trường. Số học sinh giỏi & số học sinh khá của trường đó có bằng nhau không? Vì sao?

Giải. $12 \cdot 25 \neq 35 \cdot 13 \Rightarrow \frac{12}{35} \neq \frac{13}{25}$, nên số học sinh giỏi & số học sinh khá của trường đó không bằng nhau. \square

Lưu ý 1. Có thể thay $\frac{12}{35}, \frac{13}{25}$ trong bài toán trên bằng 2 phân số $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $bd \neq 0$. Theo tính chất của 2 phân số bằng nhau: Nếu $ad = bc$ thì số học sinh giỏi & số học sinh khá của trường đó bằng nhau. Ngược lại, nếu $ad \neq bc$ thì số học sinh giỏi & số học sinh khá của trường đó không bằng nhau.

Bài toán 5 (Thái, 2022, Ví dụ 3, p. 30). Rút gọn về phân số tối giản: (a) $\frac{3510-135}{4680-180}$. (b) $\frac{2^4 \cdot 3^2}{6^2 \cdot 5}$. (c) $\frac{11 \cdot 2^n}{6^m}$ với $m, n \in \mathbb{N}$.

Giải. (a) $\frac{3510-135}{4680-180} = \frac{3 \cdot 45 \cdot (26-1)}{4 \cdot 45 \cdot (26-1)} = \frac{3}{4}$. (b) $\frac{2^4 \cdot 3^2}{6^2 \cdot 5} = \frac{2^4 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = \frac{2^2}{5} = \frac{4}{5}$. (c) Nếu $m > n$, $\frac{11 \cdot 2^n}{6^m} = \frac{11 \cdot 2^n}{2^m \cdot 3^m} = \frac{11}{2^{m-n} \cdot 3^n}$. Nếu $m = n$, $\frac{11 \cdot 2^n}{6^m} = \frac{11 \cdot 2^n}{2^m \cdot 3^m} = \frac{11}{3^n}$. (c) Nếu $m < n$, $\frac{11 \cdot 2^n}{6^m} = \frac{11 \cdot 2^n}{2^m \cdot 3^m} = \frac{11 \cdot 2^{n-m}}{3^n}$. \square

Bài toán 6 (Thái, 2022, 3., p. 30). Trong các cách viết sau, cách viết nào cho ta phân số? (a) $-\frac{9 \cdot 4}{11 \cdot 5}$. (b) $\frac{-8}{0}$. (c) $\frac{7}{1}$. (d) $\frac{n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 7 (Thái, 2022, 4., p. 31). Trong các cặp phân số sau, cặp phân số nào bằng nhau? Vì sao? $\frac{3}{7}$ & $\frac{6}{-14}$, $\frac{12}{-4}$ & $\frac{-9}{3}$, $\frac{-13}{9}$ & $\frac{13}{-9}$, -5 & $\frac{-10}{2}$, $\frac{2x}{6}$ & $\frac{x}{3}$, $x \in \mathbb{Z}$.

3 Phân Số. Tính chất Cơ Bản của Phân Số. Rút Gọn Phân Số

“1. Ta gọi $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ là 1 phân số, a là tử, b là mẫu của phân số. Ta có thể viết thương của phép chia $a \in \mathbb{Z}$ cho $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ dưới dạng $\frac{a}{b}$ & cũng gọi $\frac{a}{b}$ là phân số. $a \in \mathbb{Z}$ có thể viết dưới dạng phân số $\frac{a}{1}$. 2. 2 phân số bằng nhau. Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$. Nếu $ad = bc$ thì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ngược lại nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì $ad = bc$. 3. 2 tính chất cơ bản của phân số: $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$, $\forall a, b, m \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $m \neq 0$. $\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}$, $\forall a, b, n \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $n \in \text{ƯC}(a, b)$. 4. Rút gọn phân số: Muốn rút gọn 1 phân số, ta chia cả tử & mẫu của phân số đó cho 1 ước chung khác ± 1 của chúng. Phân số tối giản là phân số mà tử & mẫu chỉ có ước chung là ± 1 , i.e., $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $\text{ƯCLN}(a, b) = 1$. 5. Nếu đổi dấu cả tử & mẫu của 1 phân số thì được 1 phân số mới bằng phân số đã cho. $\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$, $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. 6. Nếu $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản thì mọi phân số bằng nó đều có dạng $\frac{am}{bm}$ với $m \in \mathbb{Z}$ & $m \neq 0$.” – Tuyên, 2022, Chap. 3, §1, p. 45

“Số có dạng $\frac{a}{b}$ trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ được gọi là phân số. Số nguyên $n \in \mathbb{Z}$ được đồng nhất với phân số $\frac{n}{1}$. Tính chất cơ bản của phân số: $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{a:n}{b:n}$ với $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, $n \in \text{ƯC}(a, b)$. Nếu $\text{ƯCLN}(|a|, |b|) = 1$ thì $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Nếu $\frac{m}{n}$ là dạng tối giản của phân số $\frac{a}{b}$ thì tồn tại số nguyên $k \in \mathbb{Z}$ sao cho $a = mk$, $b = nk$.” – Bình, 2022, Chap. III, §1, p. 4

Bài toán 8 (Tuyên, 2022, Ví dụ 49, p. 45). Cho $A = \{-5, 0, 9\}$. Viết tất cả các phân số $\frac{a}{b}$ với $a, b \in A$. Có bao nhiêu phân số thỏa mãn?

Giải. Số 0 không thể lấy làm mẫu của phân số. Lấy -5 làm mẫu: $\frac{-5}{-5}, \frac{0}{-5}, \frac{9}{-5}$. Lấy 9 làm mẫu: $\frac{-5}{9}, \frac{0}{9}, \frac{9}{9}$. Có 6 phân số thỏa mãn. \square

Bài toán 9 (Mở rộng Tuyên, 2022, Ví dụ 49, p. 45). Cho $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{Z}$. Viết tất cả các phân số $\frac{a}{b}$ với $a, b \in A$. Có bao nhiêu phân số thỏa mãn?

Giải. Xét 2 trường hợp: (a) Nếu $0 \notin A$, i.e., $a_i \neq 0$, $\forall i = 1, \dots, n$. Tất cả các phân số $\frac{a_i}{a_j}$ với $a, b \in A$: $\frac{a_i}{a_j}$, $\forall i, j = 1, \dots, n$, có tổng cộng n^2 phân số thỏa mãn. (b) Nếu $0 \in A$, i.e., tồn tại chỉ số $k \in \{1, \dots, n\}$ sao cho $a_k = 0$, ngoài ra $a_i \neq 0$, $\forall i = 1, \dots, n$, $i \neq k$ (vì A là 1 tập hợp nên không có các phần tử trùng nhau). Tất cả các phân số $\frac{a_i}{a_j}$ với $a, b \in A$: $\frac{a_i}{a_j}$, $\forall i, j = 1, \dots, n$, $j \neq k$ có tổng cộng $n(n-1) = n^2 - n$ phân số thỏa mãn. \square

Nhận xét 1. “Mẫu của 1 phân số phải khác 0 nhưng tử của phân số có thể bằng 0, khi đó giá trị của phân số đúng bằng 0, i.e., $\frac{0}{b} = 0$, $\forall b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Tử & mẫu của 1 phân số có thể bằng nhau, khi đó giá trị của phân số đúng bằng 1, i.e., $\frac{a}{a} = 1$, $\forall a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$.” – Tuyên, 2022, p. 46

Bài toán 10 (Tuyên, 2022, Ví dụ 50, p. 46). Viết tập hợp B các phân số bằng phân số $\frac{7}{-15}$ với mẫu dương có 2 chữ số.

Giải. $\frac{7}{-15} = \frac{-7}{15}$. Phân số này là 1 phân số tối giản với mẫu dương. Mọi phân số bằng nó đều có dạng $\frac{-7m}{15m}$ với $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$. Mẫu số của các phân số cần phải tìm là 1 số có 2 chữ số nên chọn $m \in \mathbb{Z}$ sao cho $10 \leq 15m \leq 99$, suy ra $\frac{10}{15} \leq m \leq \frac{99}{15}$, i.e., $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Vậy $B = \{\frac{-7}{15}, \frac{-14}{30}, \frac{-21}{45}, \frac{-28}{60}, \frac{-35}{75}, \frac{-42}{90}\}$. \square

Bài toán 11 (Mở rộng Tuyên, 2022, Ví dụ 50, p. 46). Cho trước $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, & $n \in \mathbb{N}^*$. Viết tập hợp B các phân số bằng phân số $\frac{a}{b}$ với mẫu dương có n chữ số.

Bài toán 12 (Tuyên, 2022, Ví dụ 51, p. 46). Tìm phân số bằng phân số $\frac{32}{60}$, biết tổng của tử & mẫu là 115.

$$3m \in \mathbb{Z} \wedge (10 \leq 15m \leq 99) \Leftrightarrow \lfloor \frac{15}{10} \rfloor = 1 \leq m \leq \lfloor \frac{99}{15} \rfloor = 6.$$

Giải. Có $\frac{32}{60} = \frac{8}{15} = \frac{8m}{15m}, \forall m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$. Tổng của tử & mẫu là 115 $\Rightarrow 8m + 15m = 115 \Rightarrow 23m = 115 \Rightarrow m = \frac{115}{23} = 5$. Phân số cần tìm: $\frac{8 \cdot 5}{15 \cdot 5} = \frac{40}{75}$. \square

Nhận xét 2. “Nếu không rút gọn phân số $\frac{32}{60}$ thành phân số tối giản $\frac{8}{15}$ mà khẳng định các phân số bằng phân số $\frac{32}{60}$ có dạng $\frac{32m}{60m}$ thì sẽ mắc sai lầm là bỏ sót rất nhiều phân số bằng phân số $\frac{32}{60}$ do đó không thể tìm được đáp số của bài toán trên.” – Tuyên, 2022, p. 46

Bài toán 13 (Mở rộng Tuyên, 2022, Ví dụ 51, p. 46). Cho trước $a, b, n \in \mathbb{Z}, b \neq 0$. Tìm phân số bằng phân số $\frac{a}{b}$, biết tổng của tử & mẫu là n .

Bài toán 14 (Tuyên, 2022, 236., p. 47). Trong các phân số sau, những phân số nào bằng nhau? $\frac{15}{60}, \frac{-7}{5}, \frac{6}{15}, \frac{28}{-20}, \frac{3}{12}$.

Bài toán 15 (Tuyên, 2022, 237., p. 47). Cho $A = \frac{3n-5}{n+4}$. Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để $A \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 16 (Tuyên, 2022, 238., p. 47). Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để cho các phân số sau đồng thời có giá trị nguyên: $\frac{-12}{n}, \frac{15}{n-2}, \frac{8}{n+1}$.

Bài toán 17 (Tuyên, 2022, 239., p. 47). Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết: (a) $\frac{x-1}{9} = \frac{8}{3}$; (b) $\frac{-x}{4} = \frac{-9}{x}$; (c) $\frac{x}{4} = \frac{18}{x+1}$.

Bài toán 18 (Tuyên, 2022, 240., p. 47). Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa $\frac{x-4}{y-3} = \frac{4}{3}$ & $x - y = 5$.

Bài toán 19 (Tuyên, 2022, 241., p. 47). Viết dạng tổng quát các phân số bằng phân số $\frac{-12}{30}$.

Bài toán 20 (Tuyên, 2022, 242., p. 47). Rút gọn phân số: (a) $\frac{990}{2610}$; (b) $\frac{374}{506}$; (c) $\frac{3600-75}{8400-175}$; (d) $\frac{9^{14} \cdot 25^5 \cdot 8^7}{18^{12} \cdot 625^3 \cdot 24^3}$.

Bài toán 21 (Tuyên, 2022, 243., p. 47). Cho phân số $\frac{a}{b}$. Chứng minh: Nếu $\frac{a-x}{b-y} = \frac{a}{b}$ thì $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$.

Bài toán 22 (Tuyên, 2022, 244., p. 47). Cho phân số $A = \frac{1+3+5+\dots+19}{21+23+25+\dots+39}$. (a) Rút gọn A ; (b) Xóa 1 số hạng ở tử & xóa 1 số hạng ở mẫu để được 1 phân số mới vẫn bằng A .

Bài toán 23 (Tuyên, 2022, 245., p. 47). Rút gọn phân số $A = \frac{71 \cdot 52 + 53}{530 \cdot 71 - 180}$ mà không cần thực hiện các phép tính ở tử.

Bài toán 24 (Tuyên, 2022, 246., p. 47). 2 phân số sau có bằng nhau không? $\frac{\overline{abab}}{\overline{cdcd}}, \frac{\overline{ababab}}{\overline{cdcdcd}}$.

Bài toán 25 (Tuyên, 2022, 247., p. 47). Chứng minh: (a) $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 39}{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot \dots \cdot 40} = \frac{1}{2^{20}}$; (b) $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(n+1)(n+2)(n+3) \cdot \dots \cdot 2n} = \frac{1}{2^n}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài toán 26 (Tuyên, 2022, 248., p. 47). Tìm phân số $\frac{a}{b}$ bằng phân số $\frac{60}{108}$ biết: (a) $\text{ƯCLN}(a, b) = 15$; (b) $\text{BCNN}(a, b) = 180$.

Bài toán 27 (Tuyên, 2022, 249., p. 48). Tìm phân số bằng phân số $\frac{200}{520}$ sao cho: (a) Tổng của tử & mẫu là 306; (b) Hiệu của tử & mẫu là 184; (c) Tích của tử & mẫu là 2340.

Bài toán 28 (Tuyên, 2022, 250., p. 48). Chứng minh: $\forall n \in \mathbb{Z}$, các phân số sau là các phân số tối giản: (a) $\frac{3n-2}{4n-3}$; (b) $\frac{4n+1}{6n+1}$.

Bài toán 29 (Tuyên, 2022, 251., p. 48). Cho $\frac{a}{b}$ là 1 phân số chưa tối giản. Chứng minh các phân số sau chưa tối giản: (a) $\frac{a}{a-b}$; (b) $\frac{2a}{a-2b}$.

Bài toán 30 (Tuyên, 2022, 252., p. 48). 1 mẫu Bắc Bộ bằng 3600m². Hỏi 1 mẫu Bắc Bộ bằng mấy phần của 1 hecta?

Bài toán 31 (Bình, 2022, Ví dụ 1, p. 4). Tìm $n \in \mathbb{N}$ để phân số $A = \frac{n+10}{2n-8} \in \mathbb{Z}$ (i.e., có giá trị là 1 số nguyên).

Giải. Để phân số A có giá trị là 1 số nguyên, tử phải chia hết cho mẫu: $n+10 : 2n-8 \Rightarrow n+10 : n-4 \Rightarrow n-4+14 : n-4 \Rightarrow 14 : n-4 \Rightarrow n-4 \in \text{Ư}(14) \cap \mathbb{Z} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14\}$. Vì $n-4 \geq -4$ (vì $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$) nên $n-4 \in \{1, 2, 7, 14\}$. Nếu $n-4 = 1, n = 5, A = \frac{15}{2}$ (loại). Nếu $n-4 = -1, n = 3, A = \frac{13}{-2}$ (loại). Nếu $n-4 = 2, n = 6, A = \frac{16}{4} = 4$. Nếu $n-4 = -2, n = 2, A = \frac{12}{-4} = -3$. Nếu $n-4 = 7, n = 11, A = \frac{21}{14} = \frac{3}{2}$ (loại). Nếu $n-4 = 14, n = 18, A = \frac{28}{28} = 1$. Vậy $n \in \{2, 6, 18\}$. \square

Bài toán 32 (Mở rộng Bình, 2022, Ví dụ 1, p. 4). Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, c^2 + d^2 \neq 0$. Tìm $n \in \mathbb{N}$ để phân số $A = \frac{an+b}{cn+d} \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 33 (Bình, 2022, Ví dụ 2, p. 5). Tìm $n \in \mathbb{N}$ để phân số $A = \frac{21n+3}{6n+4}$ rút gọn được.

Bài toán 34 (Mở rộng Bình, 2022, Ví dụ 2, p. 5). Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, c^2 + d^2 \neq 0$. Tìm $n \in \mathbb{N}$ để phân số $A = \frac{an+b}{cn+d}$ rút gọn được.

Bài toán 35 (Bình, 2022, Ví dụ 3, p. 5). Tìm $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ nhỏ nhất sao cho $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}, \frac{b}{c} = \frac{12}{21}, \frac{c}{d} = \frac{6}{11}$.

Bài toán 36 (Bình, 2022, Ví dụ 4, p. 5). Tìm số tự nhiên lớn nhất có 3 chữ số sao cho số đó bằng mỗi tổng $a+b, c+d, e+f$ & $\frac{a}{b} = \frac{35}{49}, \frac{c}{d} = \frac{130}{143}, \frac{e}{f} = \frac{7}{13}$.

Bài toán 37 (Bình, 2022, 1., p. 6). Rút gọn phân số: (a) $\frac{199...9}{99...95}$ (10 chữ số 9 ở tử, 10 chữ số 9 ở mẫu); (b) $\frac{121212}{424242}$; (c) $\frac{187187187}{221221221}$; (d) $\frac{3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 39 - 10101}{505050 + 70707}$.

Bài toán 38 (Bình, 2022, 2., p. 6). Chứng minh các phân số sau có giá trị lỵa số tự nhiên: (a) $\frac{10^{2002}+2}{3}$; (b) $\frac{10^{2003}+8}{9}$.

Bài toán 39 (Bình, 2022, 3., p. 6). Chứng minh các phân số sau bằng nhau: (a) $\frac{1717}{2929}$ & $\frac{171717}{292929}$; (b) $\frac{3210-34}{4170-41}$ & $\frac{6420-68}{8340-82}$; (c) $\frac{2106}{7320}$, $\frac{4212}{14640}$, & $\frac{6318}{21960}$.

Bài toán 40 (Bình, 2022, 4., p. 6). Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa: (a) $\frac{x}{3} = \frac{y}{5}$; (b) $\frac{x}{28} = \frac{y}{35}$.

Bài toán 41 (Bình, 2022, 5., p. 6). Tìm các phân số $\frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^*$, có giá trị bằng: (a) $\frac{36}{45}$ biết $\text{BCNN}(a, b) = 300$; (b) $\frac{21}{35}$ biết $\text{ƯCLN}(a, b) = 30$; (c) $\frac{15}{35}$ biết $\text{ƯCLN}(a, b) \cdot \text{BCNN}(a, b) = 3549$.

Bài toán 42 (Bình, 2022, 6., p. 7). Chứng minh các phân số sau tối giản với mọi $n \in \mathbb{N}$. (a) $\frac{n+1}{2n+3}$; (b) $\frac{2n+3}{4n+8}$; (c) $\frac{3n+2}{5n+3}$.

Bài toán 43 (Bình, 2022, 7., p. 7). Cho phân số $A = \frac{63}{3n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. (a) Với giá trị nào của n thì A rút gọn được? (b) Với giá trị nào của n thì $A \in \mathbb{N}$?

Bài toán 44 (Bình, 2022, 8., p. 7). Tìm các số tự nhiên n để các phân số sau là phân số tối giản: (a) $\frac{2n+3}{4n+1}$; (b) $\frac{3n+2}{7n+1}$; (c) $\frac{2n+7}{5n+2}$.

Bài toán 45 (Bình, 2022, 9., p. 7). Có bao nhiêu số nguyên dương n không vượt quá 1000 để phân số $\frac{n+12}{n^2+9n-13}$ là phân số tối giản?

Bài toán 46 (Bình, 2022, 10., p. 7). Tìm $n \in \mathbb{N}$ để phân số $\frac{n+3}{2n-2} \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 47 (Bình, 2022, 11., p. 7). Tìm các số nguyên n sao cho các phân số sau có giá trị là số nguyên: (a) $\frac{12}{3n-1}$; (b) $\frac{2n+3}{7}$.

Bài toán 48 (Bình, 2022, 12., p. 7). Tìm $n \in \mathbb{N}$ để phân số $A = \frac{8n+193}{4n+3}$: (a) Có giá trị là số tự nhiên; (b) Là phân số tối giản; (c) Với giá trị nào của n trong khoảng từ 150 đến 170 thì phân số A rút gọn được?

Bài toán 49 (Bình, 2022, 13., p. 7). Tìm các phân số tối giản nhỏ hơn 1 có tử & mẫu đều dương, biết tích của tử & mẫu của phân số bằng 120.

Bài toán 50 (Bình, 2022, 14., p. 7). Tìm $n \in \mathbb{N}$ nhỏ nhất để các phân số sau đều là phân số tối giản: $\frac{5}{n+8}, \frac{6}{n+9}, \frac{7}{n+10}, \dots, \frac{17}{n+20}$.

Bài toán 51 (Bình, 2022, 15., p. 7). Cho 3 phân số $\frac{15}{42}, \frac{49}{56}, \frac{36}{51}$. Biến đổi 3 phân số trên thành các phân số bằng chúng sao cho mẫu của phân số thứ nhất bằng tử của phân số thứ 2, mẫu của phân số thứ 2 bằng tử của phân số thứ 3.

Bài toán 52 (Bình, 2022, 16., p. 7). Cho 3 phân số $\frac{5}{8}, \frac{11}{20}, \frac{4}{15}$. Tìm 3 phân số (có tử & mẫu đều dương) theo thứ tự bằng 3 phân số trên sao cho hiệu của mẫu & tử của mỗi phân số này đều bằng nhau & hiệu đó có giá trị nhỏ nhất.

Bài toán 53 (Bình, 2022, 17., p. 8). Tìm các phân số lớn hơn $\frac{1}{5}$ & khác số tự nhiên biết nếu lấy mẫu nhân với 1 số, lấy tử cộng với số đó thì giá trị của phân số không đổi.

Bài toán 54 (Bình, 2022, 18., p. 8). Cho phân số $A = \frac{23+22+21+\dots+13}{11+10+9+\dots+1}$. Nêu cách xóa 1 số hạng ở tử & 1 số hạng ở mẫu của A để được 1 phân số mới vẫn bằng phân số A .

Bài toán 55 (Bình, 2022, 19., p. 8, Bộ sử Hume). Người Anh có thói quen xếp bộ sử nước Anh của Hume (David Hume, nhà sử học Scotland) gồm 9 tập ở tử sách đặc biệt gồm 2 ngăn: ngăn trên xếp 5 cuốn, ngăn dưới xếp 4 cuốn, ở gáy các cuốn sách đó ghi các số 1, 2, 3, ..., 9. Nếu chủ nhân xếp $\frac{13458}{6729}$ (phân số này có giá trị bằng 2) thì chứng tỏ chủ nhân đã đọc 2 tập (riêng trường hợp mới đọc 1 tập thì xếp $\frac{12345}{6789}$). Nêu cách xếp 9 cuốn sách đó để chứng tỏ chủ nhân của bộ sách đã đọc 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 tập.

4 Quy Đồng Mẫu Số Nhiều Phân Số. So Sánh Phân Số. Hỗn Số Dương

“1. Quy tắc quy đồng mẫu nhiều phân số với mẫu dương: Bước 1. Tìm BCNN của các mẫu để làm mẫu chung. Bước 2. Tìm thừa số phụ của mỗi mẫu. Bước 3. Nhân tử & mẫu của mỗi phân số với thừa số phụ tương ứng. 2. So sánh 2 phân số: Muốn so sánh 2 phân số không cùng mẫu ta viết chúng dưới dạng 2 phân số có cùng mẫu dương rồi so sánh các tử với nhau, phân số nào có tử lớn hơn thì phân số đó lớn hơn. 3. Hỗn số dương: 1 phân số lớn hơn 1 có thể viết dưới dạng 1 hỗn số. Đó là 1 số gồm phần nguyên kèm theo 1 phân số nhỏ hơn 1. 4. Trong 2 phân số có tử & mẫu đều dương, nếu 2 tử số bằng nhau, phân số nào có mẫu nhỏ hơn thì phân số đó sẽ lớn hơn & ngược lại. 5. Phân số có tử & mẫu là 2 số nguyên cùng dấu thì lớn hơn 0 & gọi là phân số dương. Phân số có tử & mẫu là 2 số nguyên khác dấu thì nhỏ hơn 0 & gọi là phân số âm.” – Tuyên, 2022, Chap. III, §2, p. 48

“Để so sánh 2 phân số có tử & mẫu đều dương, ngoài cách quy đồng tử hoặc quy đồng mẫu, người ta thường dùng 1 phân số trung gian & sử dụng tính chất bắc cầu của bất đẳng thức.

Thường sử dụng các tính chất sau: (a) Trong 2 phân số cùng tử, phân số nào có mẫu nhỏ hơn thì phân số đó lớn hơn. (b) Trong 2 phân số nhỏ hơn 1, phân số nào có phần bù đến 1 nhỏ hơn thì phân số đó lớn hơn: $1 - \frac{a}{b} < 1 - \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$. (c) Nếu $0 < a < 1$ & $m < n$ thì $a^m > a^n$.” – Bình, 2022, Chap. 1, §2, p. 8

Bài toán 56 (Công thức hỗn số dương). *Chứng minh:*

$$\frac{ac+b}{c} = a + \frac{b}{c} = a\frac{b}{c}, \forall a, b, c \in \mathbb{Z}, c \neq 0. \quad \frac{a}{b} = \frac{\lfloor \frac{a}{b} \rfloor b + \{\frac{a}{b}\}}{b} = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + \frac{\{\frac{a}{b}\}}{b} = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \frac{\{\frac{a}{b}\}}{b}.$$

Bài toán 57 (Tuyên, 2022, Ví dụ 52, p. 48). *So sánh 2 phân số $\frac{-101}{-100}$ & $\frac{200}{201}$.*

Giải. $\frac{-101}{-100} = \frac{101}{100} > \frac{100}{100} = 1 = \frac{201}{201} > \frac{200}{201}$. Vậy $\frac{-101}{-100} > \frac{200}{201}$. □

Bài toán 58 (Mở rộng Tuyên, 2022, Ví dụ 52, p. 48). *Cho $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $a > b > 0$, $d > c > 0$. So sánh: $\frac{\pm a}{\pm b}$ & $\frac{\pm c}{\pm d}$.*

Bài toán 59 (Tuyên, 2022, Ví dụ 53, p. 48). *Sắp xếp các phân số sau theo thứ tự tăng dần: $\frac{5}{8}, \frac{9}{16}, \frac{2}{-3}, \frac{-7}{12}$.*

Bài toán 60 (Bình, 2022, Ví dụ 5, p. 8). *So sánh $A = \frac{10^{15}+1}{10^{16}+1}$ & $B = \frac{10^{16}+1}{10^{17}+1}$.*

Bài toán 61 (Bình, 2022, Ví dụ 6, p. 9). *1 phân số có tử & mẫu đều là số nguyên dương. Nếu cộng tử & mẫu của phân số đó với cùng $n \in \mathbb{N}^*$ thì phân số thay đổi thế nào?*

Bài toán 62 (Bình, 2022, Ví dụ 7, p. 9). *So sánh $(\frac{1}{32})^7$ & $(\frac{1}{16})^9$.*

Bài toán 63 (Bình, 2022, Ví dụ 8, p. 9). *Chứng minh 95^8 là 1 số có 16 chữ số khi viết kết quả của nó trong hệ thập phân.*

Bài toán 64 (Bình, 2022, Ví dụ 9, p. 10). *Cho $a, b \in \mathbb{N}^*$ thỏa $\frac{5}{7} < \frac{a}{b} < \frac{9}{11}$. Tìm $a + b$ khi b nhỏ nhất.*

Bài toán 65 (Bình, 2022, 20., p. 10). *So sánh $a, b \in \mathbb{N}$ biết $\frac{1+2+3+\dots+a}{a} < \frac{1+2+3+\dots+b}{b}$.*

Bài toán 66 (Bình, 2022, 21., p. 10). *So sánh: (a) $\frac{18}{91}$ & $\frac{23}{114}$; (b) $\frac{21}{52}$ & $\frac{213}{523}$; (c) $\frac{1313}{9191}$ & $\frac{1111}{7373}$.*

Bài toán 67 (Bình, 2022, 22., p. 10). *So sánh các phân số sau, với $n \in \mathbb{N}$: (a) $\frac{n}{n+1}$ & $\frac{n+2}{n+3}$; (b) $\frac{n+1}{n+4}$ & $\frac{n}{n+5}$; (c) $\frac{n}{2n+1}$ & $\frac{3n+1}{6n+3}$.*

Bài toán 68 (Bình, 2022, 23., p. 11). *So sánh A & B : (a) $A = \frac{20}{39} + \frac{22}{27} + \frac{18}{43}$, $B = \frac{14}{39} + \frac{22}{29} + \frac{18}{41}$; (b) $A = \frac{3}{8^3} + \frac{7}{8^4}$, $B = \frac{7}{8^3} + \frac{3}{8^4}$; (c) $A = \frac{10^7+5}{10^7-8}$, $B = \frac{10^8+6}{10^8-7}$; (d) $A = \frac{10^{1992}+1}{10^{1991}+1}$, $B = \frac{10^{1993}+1}{10^{1992}+1}$.*

Bài toán 69 (Bình, 2022, 24., p. 11). *Tìm $x \in \mathbb{N}$ sao cho $\frac{4}{11} < \frac{x}{20} < \frac{5}{11}$.*

Bài toán 70 (Bình, 2022, 25., p. 11). *Tìm 2 phân số có các mẫu bằng 9, các tử là 2 số tự nhiên liên tiếp sao cho phân số $\frac{4}{7}$ nằm giữa 2 phân số đó.*

Bài toán 71 (Bình, 2022, 26., p. 11). *Tìm 2 phân số có các tử bằng 1, các mẫu là 2 số tự nhiên liên tiếp sao cho phân số $\frac{13}{84}$ nằm giữa 2 phân số đó.*

Bài toán 72 (Bình, 2022, 27., p. 11). *Tìm 2 phân số có mẫu bằng 21 biết nó lớn hơn $\frac{5}{7}$ & nhỏ hơn $\frac{5}{6}$.*

Bài toán 73 (Bình, 2022, 28., p. 11). *Tìm phân số $\frac{a}{b}$ sao cho a là số tự nhiên nhỏ nhất thỏa mãn $\frac{4}{15} < \frac{a}{b} < \frac{1}{3}$.*

Bài toán 74 (Bình, 2022, 29., p. 11). *Tìm phân số $\frac{a}{b}$ lớn nhất nhỏ hơn 1 với a, b là các số nguyên dương có 1 chữ số.*

Bài toán 75 (Bình, 2022, 30., p. 11). *So sánh 2 phân số $(\frac{1}{243})^9$ & $(\frac{1}{83})^{13}$.*

- 5 1 Số Phương Pháp Đặc Biệt để So Sánh 2 Phân Số
- 6 \pm Phân Số
- 7 $., :$ Phân Số
- 8 Tổng Các Phân Số Viết Theo Quy Luật
- 9 Số Thập Phân. Làm Tròn Số Thập Phân. Các Phép Tính với Số Thập Phân
- 10 Tìm Giá Trị Phân Số của 1 Số Cho Trước. Tìm 1 Số Biết Giá Trị 1 Phân Số của Nó
- 11 Tìm Tỷ Số & Tỷ Số % của 2 Đại Lượng
- 12 Toán về Công Việc Làm Đồng Thời
- 13 Miscellaneous

Tài liệu

Bình, Vũ Hữu (2022). *Nâng Cao & Phát Triển Toán 6 Tập 2*. Tái bản lần thứ nhất. Kết nối tri thức với cuộc sống. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 152.

Thái, Đỗ Đức (2022). *Bài Tập Toán 6 Tập 2*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, p. 111.

Thái, Đỗ Đức et al. (2022). *Toán 6 Tập 2*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, p. 108.

Tuyên, Bùi Văn (2022). *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 6*. Tái bản lần thứ 1. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 184.