

# 3D Vector – Vector Trong Không Gian

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 16 tháng 2 năm 2023

## Tóm tắt nội dung

[EN] This text is a collection of problems, from easy to advanced, about 3D vector. This text is also a supplementary material for my lecture note on Elementary Mathematics grade 11, which is stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 11/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_11/lecture)<sup>1</sup>. The latest version of this text has been stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 11/3D vector](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_11/3D_vector)<sup>2</sup>.

[VI] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài tập chọn lọc từ cơ bản đến nâng cao về biểu thức đại số. Tài liệu này là phần bài tập bổ sung cho tài liệu chính – bài giảng [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 11/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_11/lecture) của tác giả viết cho Toán Sơ Cấp lớp 11. Phiên bản mới nhất của tài liệu này được lưu trữ & có thể tải xuống ở link sau: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 11/3D vector](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_11/3D_vector).

**Nội dung.** Vector trong không gian, 2 đường thẳng vuông góc trong không gian, đường thẳng vuông góc với mặt phẳng, 2 mặt phẳng vuông góc, khoảng cách trong không gian.

## Mục lục

1	Vector Trong Không Gian	2
2	2 Đường Thẳng Vuông Góc	3
3	Đường Thẳng Vuông Góc với Mặt Phẳng	4
4	2 Mặt Phẳng Vuông Góc	4
5	Khoảng Cách	5
	Tài liệu	5

---

\*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam

e-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com); website: <https://nqbh.github.io>.

<sup>1</sup>URL: [https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary\\_mathematics/grade\\_11/NQBH\\_elementary\\_mathematics\\_grade\\_11.pdf](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_11/NQBH_elementary_mathematics_grade_11.pdf).

<sup>2</sup>URL: [https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary\\_mathematics/grade\\_11/3D\\_vector/NQBH\\_3D\\_vector.pdf](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_11/3D_vector/NQBH_3D_vector.pdf).

# 1 Vector Trong Không Gian

**Bài toán 1** (Hạo et al., 2022, 1, p. 85). Cho tứ diện  $ABCD$ . Chỉ ra các vector có điểm đầu là  $A$  & điểm cuối là các đỉnh còn lại của hình tứ diện. Các vector đó có cùng nằm trong 1 mặt phẳng không?

**Bài toán 2** (Hạo et al., 2022, 2, p. 85). Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Kể tên các vector có điểm đầu & điểm cuối là các đỉnh của hình hộp & bằng  $\overrightarrow{AB}$ .

**Bài toán 3** (Hạo et al., 2022, Ví dụ 1, p. 86). Cho tứ diện  $ABCD$ . Chứng minh:  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ .

**Bài toán 4** (Hạo et al., 2022, 3, p. 86). Cho hình hộp  $ABCD.EFGH$ . Thực hiện các phép toán: (a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH}$ ; (b)  $\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CH}$ .

**Bài toán 5** (Hạo et al., 2022, Ví dụ 2, p. 87). Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD, BC$ , &  $G$  là trọng tâm của  $\triangle BCD$ . Chứng minh: (a)  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$ ; (b)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$ .

**Bài toán 6** (Hạo et al., 2022, 4, p. 87). Trong không gian cho 2 vector  $\vec{a}, \vec{b}$  đều khác vector không. Xác định các vector  $\vec{m} = 2\vec{a}$ ,  $\vec{n} = -3\vec{b}$ , &  $\vec{p} = \vec{m} + \vec{n}$ .

**Bài toán 7** (Hạo et al., 2022, Ví dụ 3, p. 88). Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$ . Chứng minh 3 vector  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{MN}$  đồng phẳng.

**Bài toán 8** (Hạo et al., 2022, 5, p. 89). Cho hình hộp  $ABCD.EFGH$ . Gọi  $I, K$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC$ . Chứng minh các đường thẳng  $IK, ED$  song song với mặt phẳng  $(AFC)$ . Từ đó suy ra 3 vector  $\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{ED}$  đồng phẳng.

**Bài toán 9** (Hạo et al., 2022, 6, p. 89). Cho 2 vector  $\vec{a}, \vec{b}$  đều khác vector  $\vec{0}$ . Xác định vector  $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$  & giải thích tại sao 3 vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng.

**Bài toán 10** (Hạo et al., 2022, 7, p. 89). Cho 3 vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  trong không gian. Chứng minh nếu  $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$  & 1 số trong 3 số  $m, n, p \in \mathbb{R}$  khác 0 thì 3 vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng.

**Bài toán 11** (Hạo et al., 2022, Ví dụ 4, p. 89). Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  &  $CD$ . Trên các cạnh  $AD, BC$  lần lượt lấy các điểm  $P, Q$  sao cho  $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$  &  $\overrightarrow{BQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ . Chứng minh 4 điểm  $M, N, P, Q$  cùng thuộc 1 mặt phẳng.

**Bài toán 12** (Hạo et al., 2022, Ví dụ 5, p. 91). Cho hình hộp  $ABCD.EFGH$  có  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AE} = \vec{c}$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $BG$ . Biểu thị vector  $\overrightarrow{AI}$  qua 3 vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .

**Bài toán 13** (Hạo et al., 2022, 1., p. 91). Cho hình lăng trụ tứ giác  $ABCD.A'B'C'D'$ . Mặt phẳng  $(P_0)$  cắt các cạnh bên  $AA', BB', CC', DD'$  lần lượt tại  $I, K, L, M$ . Xét các vector có các điểm đầu là các điểm  $I, K, L, M$  & có các điểm cuối là các đỉnh của hình lăng trụ. Chỉ ra các vector: (a) Cùng phương với  $\overrightarrow{IA}$ ; (b) Cùng hướng với  $\overrightarrow{IA}$ ; (c) Ngược hướng với  $\overrightarrow{IA}$ .

**Bài toán 14** (Hạo et al., 2022, 2., p. 91). Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Chứng minh: (a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'}$ ; (b)  $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{BB'}$ ; (c)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \vec{0}$ .

**Bài toán 15** (Hạo et al., 2022, 3., p. 91). Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $S$  là 1 điểm nằm ngoài mặt phẳng chứa hình bình hành. Chứng minh:  $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$

**Bài toán 16** (Hạo et al., 2022, 4., p. 92). Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$ . Chứng minh: (a)  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ ; (b)  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$ .

**Bài toán 17** (Hạo et al., 2022, 5., p. 92). Cho tứ diện  $ABCD$ . Xác định 2 điểm  $E, F$  sao cho: (a)  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ ; (b)  $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$ .

**Bài toán 18** (Hạo et al., 2022, 6., p. 92). Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của  $\triangle ABC$ . Chứng minh:  $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DG}$ .

**Bài toán 19** (Hạo et al., 2022, 7., p. 92). Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AC, BD$  của tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $MN$  &  $P$  là 1 điểm bất kỳ trong không gian. Chứng minh: (a)  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$ ; (b)  $\overrightarrow{PI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD})$ .

**Bài toán 20** (Hạo et al., 2022, 8., p. 92). Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ . Phân tích (hay biểu thị) các vector  $\overrightarrow{B'C}$ ,  $\overrightarrow{BC'}$  qua các vector  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ .

**Bài toán 21** (Hạo et al., 2022, 9., p. 92). Cho  $\triangle ABC$ . Lấy điểm  $S$  nằm ngoài mặt phẳng  $(ABC)$ . Trên đoạn  $SA$  lấy điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{MS} = -2\overrightarrow{MA}$  & trên đoạn  $BC$  lấy điểm  $N$  sao cho  $\overrightarrow{NB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$ . Chứng minh 3 vector  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{MN}$ ,  $\overrightarrow{SC}$  đồng phẳng.

**Bài toán 22** (Hạo et al., 2022, 10., p. 92). Cho hình hộp  $ABCD.EFGH$ . Gọi  $K$  là giao điểm của  $AH$  &  $DE$ ,  $I$  là giao điểm của  $BH$  &  $DF$ . Chứng minh 3 vector  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{KI}$ ,  $\overrightarrow{FG}$  đồng phẳng.

## 2 2 Đường Thẳng Vuông Góc

**Bài toán 23** (Hạo et al., 2022, 1, p. 93). Cho tứ diện đều  $ABCD$  có  $H$  là trung điểm của  $AB$ . Tính góc giữa các cặp vector: (a)  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ; (c)  $\overrightarrow{CH}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ .

**Bài toán 24** (Hạo et al., 2022, Ví dụ 1, p. 93). Cho tứ diện  $OABC$  có các cạnh  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc &  $OA = OB = OC = 1$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Tính góc giữa 2 vector  $\overrightarrow{OM}$  &  $\overrightarrow{BC}$ .

**Bài toán 25** (Hạo et al., 2022, 2, p. 94). Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . (a) Phân tích các vector  $\overrightarrow{AC'}$ ,  $\overrightarrow{BD}$  theo 3 vector  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{AA'}$ . (b) Tính  $\cos(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{BD})$  & từ đó suy ra  $\overrightarrow{AC'}$ ,  $\overrightarrow{BD}$  vuông góc với nhau.

**Bài toán 26** (Hạo et al., 2022, 3, p. 95). Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau: (a)  $AB$ ,  $B'C'$ ; (b)  $AC$ ,  $B'C'$ ; (c)  $A'C'$ ,  $B'C$ .

**Bài toán 27** (Hạo et al., 2022, Ví dụ 2, p. 96). Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA = SB = SC = AB = AC = a$  &  $BC = a\sqrt{2}$ . Tính góc giữa 2 đường thẳng  $AB$ ,  $SC$ .

**Bài toán 28** (Hạo et al., 2022, Ví dụ 3, p. 97). Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB \perp AC$  &  $AB \perp BD$ . Gọi  $P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$ . Chứng minh  $AB, PQ$  là 2 đường thẳng vuông góc với nhau.

**Bài toán 29** (Hạo et al., 2022, 4, p. 97). Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Nêu tên các đường thẳng đi qua 2 đỉnh của hình lập phương đã cho & vuông góc với: (a) đường thẳng  $AB$ ; (b) đường thẳng  $AC$ .

**Bài toán 30** (Hạo et al., 2022, 5, p. 97). Tìm những hình ảnh trong thực tế minh họa cho sự vuông góc của 2 đường thẳng trong không gian (trường hợp cắt nhau & trường hợp chéo nhau).

**Bài toán 31** (Hạo et al., 2022, 1., p. 97). Cho hình lập phương  $ABCD.EFGH$ . Xác định góc giữa các cặp vector: (a)  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{EG}$ ; (b)  $\overrightarrow{AF}$ ,  $\overrightarrow{EG}$ ; (c)  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{DH}$ .

**Bài toán 32** (Hạo et al., 2022, 2., p. 97). Cho tứ diện  $ABCD$ . (a) Chứng minh  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ . (b) Từ đẳng thức trên suy ra: Nếu tứ diện  $ABCD$  có  $AB \perp CD$  &  $AC \perp DB$  thì  $AD \perp BC$ .

**Bài toán 33** (Hạo et al., 2022, 3., p. 97). (a) Trong không gian nếu 2 đường thẳng  $a, b$  cùng vuông góc với đường thẳng  $c$  thì  $a, b$  có song song với nhau không? (b) Trong không gian nếu đường thẳng  $a$  vuông góc với đường thẳng  $b$  & đường thẳng  $b$  vuông góc với đường thẳng  $c$  thì  $a$  có vuông góc với  $c$  không?

**Bài toán 34** (Hạo et al., 2022, 4., p. 98). Trong không gian cho 2 tam giác đều  $ABC, A'B'C'$  có chung cạnh  $AB$  & nằm trong 2 mặt phẳng khác nhau. Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AC, CB, BC', C'A$ . Chứng minh: (a)  $AB \perp CC'$ ; (b) Tứ giác  $MNPQ$  là hình chữ nhật.

**Bài toán 35** (Hạo et al., 2022, 5., p. 98). Cho hình chóp tam giác  $S.ABC$  có  $SA = SB = SC$  & có  $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$ . Chứng minh  $SA \perp BC$ ,  $SB \perp AC$ ,  $SC \perp AB$ .

**Bài toán 36** (Hạo et al., 2022, 6., p. 98). Trong không gian cho 2 hình vuông  $ABCD, ABC'D'$  có chung cạnh  $AB$  & nằm trong 2 mặt phẳng khác nhau, lần lượt có tâm  $O, O'$ . Chứng minh  $AB \perp OO'$  & tứ giác  $CDD'C'$  là hình chữ nhật.

**Bài toán 37** (Hạo et al., 2022, 7., p. 98). Cho  $S$  là diện tích của  $\triangle ABC$ . Chứng minh:  $S = \frac{1}{2} \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$ .

**Bài toán 38** (Hạo et al., 2022, 8., p. 98). Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = AC = AD$  &  $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$ . Chứng minh: (a)  $AB \perp CD$ ; (b) Nếu  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$  thì  $MN \perp AB$  &  $MN \perp CD$ .

### 3 Đường Thẳng Vuông Góc với Mặt Phẳng

**Bài toán 39** (Hạo et al., 2022, 1, p. 100). Muốn chứng minh đường thẳng  $d$  vuông góc với 1 mặt phẳng  $(\alpha)$ , người ta phải làm như thế nào?

**Bài toán 40** (Hạo et al., 2022, 2, p. 100). Cho 2 đường thẳng  $a, b$  song song với nhau. 1 đường thẳng  $d$  vuông góc với  $a, b$ . Khi đó đường thẳng  $d$  có vuông góc với mặt phẳng xác định bởi 2 đường thẳng song song  $a, b$  không?

**Bài toán 41** (Hạo et al., 2022, Ví dụ 1, p. 102). Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là  $\triangle ABC$  vuông tại  $B$  & có cạnh  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ . (a) Chứng minh  $BC \perp (SAB)$ . (b) Gọi  $AH$  là đường cao của  $\triangle SAB$ . Chứng minh  $AH \perp SC$ .

**Bài toán 42** (Hạo et al., 2022, Ví dụ 2, pp. 103–104). Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ , có cạnh  $SA = a\sqrt{2}$  &  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$ . (a) Gọi  $M, N$  lần lượt là hình chiếu của điểm  $A$  lên các đường thẳng  $SB, SD$ . Tính góc giữa đường thẳng  $SC$  & mặt phẳng  $(AMN)$ . (b) Tính góc giữa đường thẳng  $SC$  & mặt phẳng  $(ABCD)$ .

**Bài toán 43** (Hạo et al., 2022, 1., p. 104). Cho 2 đường thẳng phân biệt  $a, b$  & mặt phẳng  $(\alpha)$ . Đ/S? (a) Nếu  $a \parallel (\alpha)$  &  $b \perp (\alpha)$  thì  $a \perp b$ . (b) Nếu  $a \parallel (\alpha)$  &  $b \perp a$  thì  $b \perp (\alpha)$ . (c) Nếu  $a \parallel (\alpha)$  &  $b \parallel (\alpha)$  thì  $b \parallel a$ . (d) Nếu  $a \perp (\alpha)$  &  $b \perp a$  thì  $b \parallel (\alpha)$ .

**Bài toán 44** (Hạo et al., 2022, 2., p. 104). Cho tứ diện  $ABCD$  có 2 mặt  $ABC$  &  $BCD$  là 2 tam giác cân có chung cạnh đáy  $BC$ . Gọi  $I$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . (a) Chứng minh  $BC \perp (ADI)$ . (b) Gọi  $AH$  là đường cao của  $\triangle ADI$ , chứng minh  $AH \perp (BCD)$ .

**Bài toán 45** (Hạo et al., 2022, 3., pp. 104–105). Cho hình chóp  $S.ABCD$ . có đáy là hình thoi  $ABCD$  & có  $SA = SB = SC = SD$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC, BD$ . Chứng minh: (a)  $SO \perp (ABCD)$ ; (b)  $AC \perp (SBD)$  &  $BD \perp (SAC)$ .

**Bài toán 46** (Hạo et al., 2022, 4., p. 105). Cho tứ diện  $OABC$  có 3 cạnh  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc. Gọi  $H$  là chân đường vuông góc hạ từ  $O$  tới mặt phẳng  $(ABC)$ . Chứng minh: (a)  $H$  là trực tâm của  $\triangle ABC$ . (b)  $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ .

**Bài toán 47** (Hạo et al., 2022, 5., p. 105). Trên mặt phẳng  $(\alpha)$  cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  &  $BD$ ,  $S$  là 1 điểm nằm ngoài mặt phẳng  $(\alpha)$  sao cho  $SA = SC$ ,  $SB = SD$ . Chứng minh: (a)  $SO \perp (\alpha)$ ; (b) Nếu trong mặt phẳng  $(SAB)$  kẻ  $SH$  vuông góc với  $AB$  tại  $H$  thì  $AB$  vuông góc với mặt phẳng  $(SOH)$ .

**Bài toán 48** (Hạo et al., 2022, 6., p. 105). Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thoi  $ABCD$  & có cạnh  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$ . Gọi  $I, K$  là 2 điểm lần lượt lấy trên 2 cạnh  $SB, SD$  sao cho  $\frac{SI}{SB} = \frac{SK}{SD}$ . Chứng minh: (a)  $BD \perp SC$ ; (b)  $IK \perp (SAC)$ .

**Bài toán 49** (Hạo et al., 2022, 7., p. 105). Cho tứ diện  $SABC$  có cạnh  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$  & có  $\triangle ABC$  vuông tại  $B$ . Trong mặt phẳng  $(SAB)$  kẻ  $AM$  vuông góc với  $SB$  tại  $M$ . Trên cạnh  $SC$  lấy điểm  $N$  sao cho  $\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC}$ . Chứng minh: (a)  $BC \perp (SAB)$  &  $AM \perp (SBC)$ ; (b)  $SB \perp AN$ .

**Bài toán 50** (Hạo et al., 2022, 8., p. 105). Cho điểm  $S$  không thuộc mặt phẳng  $(\alpha)$  có hình chiếu trên  $(\alpha)$  là điểm  $H$ . Với điểm  $M$  bất kỳ trên  $(\alpha)$  &  $M$  không trùng với  $H$ , gọi  $SM$  là đường xiên & đoạn  $HM$  là hình chiếu của đường xiên đó. Chứng minh: (a) 2 đường xiên bằng nhau  $\Leftrightarrow$  2 hình chiếu của chúng bằng nhau. (b) Với 2 đường xiên cho trước, đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn & ngược lại đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.

### 4 2 Mặt Phẳng Vuông Góc

**Bài toán 51** (Hạo et al., 2022, Ví dụ, p. 107). Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là  $\triangle ABC$  đều cạnh  $a$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$  &  $SA = \frac{a}{2}$ . (a) Tính góc giữa 2 mặt phẳng  $(ABC)$  &  $(SBC)$ . (b) Tính  $S_{\triangle SBC}$ .

**Bài toán 52** (Hạo et al., 2022, 1, p. 109). Cho 2 mặt phẳng  $(\alpha), (\beta)$  vuông góc với nhau & cắt nhau theo giao tuyến  $d$ . Chứng minh nếu có 1 đường thẳng  $\Delta$  nằm trong  $(\alpha)$  &  $\Delta$  vuông góc với  $d$  thì  $\Delta$  vuông góc với  $(\beta)$ .

**Bài toán 53** (Hạo et al., 2022, 2, p. 109). Cho tứ diện  $ABCD$  có 3 cạnh  $AB, AC, AD$  đôi một vuông góc với nhau. Chứng minh các mặt phẳng  $(ABC), (ACD), (ADB)$  cũng đôi một vuông góc với nhau.

**Bài toán 54** (Hạo et al., 2022, 3, p. 109). Cho hình vuông  $ABCD$ . Dựng đoạn thẳng  $AS$  vuông góc với mặt phẳng chứa hình vuông  $ABCD$ . (a) Nêu tên các mặt phẳng lần lượt chứa các đường thẳng  $SB, SC, SD$  & vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$ . (b) Chứng minh mặt phẳng  $(SAC)$  vuông góc với mặt phẳng  $(SBD)$ .

**Bài toán 55** (Hạo et al., 2022, 4, p. 111). Đ/S? (a) Hình hộp là hình lăng trụ đứng. (b) Hình hộp chữ nhật là hình lăng trụ đứng. (c) Hình lăng trụ là hình hộp. (d) Có hình lăng trụ không phải là hình hộp.

**Bài toán 56** (Hạo et al., 2022, 5, p. 111). 6 mặt của hình hộp chữ nhật có phải là những hình chữ nhật không?

**Bài toán 57** (Hạo et al., 2022, Ví dụ, p. 111). Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Tính diện tích thiết diện của hình lập phương bị cắt bởi mặt phẳng trung trực  $(\alpha)$  của đoạn  $AC'$ .

**Bài toán 58** (Hạo et al., 2022, 6, p. 112). Chứng minh hình chóp đều có các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau.

**Bài toán 59** (Hạo et al., 2022, 7, p. 112). Có tồn tại 1 hình chóp tứ giác  $S.ABCD$  có 2 mặt bên  $(SAB), (SCD)$  cùng vuông góc với mặt phẳng đáy hay không?

**Bài toán 60** (Hạo et al., 2022, 1., p. 113). Cho 3 mặt phẳng  $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ . Đ/S? (a) Nếu  $(\alpha) \perp (\beta)$  &  $(\alpha) \parallel (\gamma)$  thì  $(\beta) \perp (\gamma)$ ; (b) Nếu  $(\alpha) \perp (\beta)$  &  $(\alpha) \perp (\gamma)$  thì  $(\beta) \parallel (\gamma)$ .

**Bài toán 61** (Hạo et al., 2022, 2., p. 113). Cho 2 mặt phẳng  $(\alpha), (\beta)$  vuông góc với nhau. Người ta lấy trên giao tuyến  $\Delta$  của 2 mặt phẳng đó 2 điểm  $A, B$  sao cho  $AB = 8\text{cm}$ . Gọi  $C$  là 1 điểm trên  $(\alpha)$  &  $D$  là 1 điểm trên  $(\beta)$  sao cho  $AC, BD$  cùng vuông góc với giao tuyến  $\Delta$  &  $AC = 6\text{cm}, BD = 24\text{cm}$ . Tính độ dài đoạn  $CD$ .

**Bài toán 62** (Hạo et al., 2022, 3., pp. 113–114). Trong mặt phẳng  $(\alpha)$  cho  $\Delta ABC$  vuông ở  $B$ . 1 đoạn thẳng  $AD$  vuông góc với  $(\alpha)$  tại  $A$ . Chứng minh: (a)  $\widehat{ABD}$  là góc giữa 2 mặt phẳng  $(ABC), (DBC)$ ; (b) Mặt phẳng  $(ABD)$  vuông góc với mặt phẳng  $(BCD)$ ; (c)  $HK \parallel BC$  với  $H, K$  lần lượt là giao điểm của  $DB, DC$  với mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $A$  & vuông góc với  $DB$ .

**Bài toán 63** (Hạo et al., 2022, 4., p. 114). Cho 2 mặt phẳng  $(\alpha), (\beta)$  cắt nhau & 1 điểm  $M$  không thuộc  $(\alpha)$  & không thuộc  $(\beta)$ . Chứng minh qua điểm  $M$  có 1 & chỉ 1 mặt phẳng  $(P)$  vuông góc với  $(\alpha), (\beta)$ . Nếu  $(\alpha)$  song song với  $(\beta)$  thì kết quả trên sẽ thay đổi như thế nào?

**Bài toán 64** (Hạo et al., 2022, 5., p. 114). Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Chứng minh: (a) Mặt phẳng  $(AB'C'D)$  vuông góc với mặt phẳng  $(BCD'A')$ ; (b) Đường thẳng  $AC'$  vuông góc với mặt phẳng  $(A'BD)$ .

**Bài toán 65** (Hạo et al., 2022, 6., p. 114). Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là 1 hình thoi cạnh  $a$  & có  $SA = SB = SC = a$ . Chứng minh: (a) Mặt phẳng  $(ABCD)$  vuông góc với mặt phẳng  $(SBD)$ ; (b)  $\Delta SBD$  là tam giác vuông.

**Bài toán 66** (Hạo et al., 2022, 7., p. 114). Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $AB = a, BC = b, CC' = c$ . (a) Chứng minh mặt phẳng  $(ADC'B')$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABB'A')$ . (b) Tính độ dài đường chéo  $AC'$  theo  $a, b, c$ .

**Bài toán 67** (Hạo et al., 2022, 8., p. 114). Tính độ dài đường chéo của 1 hình lập phương cạnh  $a$ .

**Bài toán 68** (Hạo et al., 2022, 9., p. 114). Cho hình chóp tam giác đều  $S.ABC$  có  $SH$  là đường cao. Chứng minh  $SA \perp BC, SB \perp AC$ .

**Bài toán 69** (Hạo et al., 2022, 10., p. 114). Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có các cạnh bên & các cạnh đáy đều bằng  $a$ . Gọi  $O$  là tâm của hình vuông  $ABCD$ . (a) Tính độ dài đoạn  $SO$ . (b) Gọi  $M$  là trung điểm của đoạn  $SC$ . Chứng minh 2 mặt phẳng  $(MBD)$  &  $(SAC)$  vuông góc với nhau. (c) Tính độ dài đoạn  $OM$  & tính góc giữa 2 mặt phẳng  $(MBD), (ABCD)$ .

**Bài toán 70** (Hạo et al., 2022, 11., p. 114). Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là 1 hình thoi tâm  $I$  cạnh  $a$  & có  $\widehat{A} = 60^\circ, SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ , &  $SC$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$ . (a) Chứng minh mặt phẳng  $(SBD)$  vuông góc với mặt phẳng  $(SAC)$ . (b) Trong  $\Delta SCA$  kẻ  $IK$  vuông góc với  $SA$  tại  $K$ . Tính độ dài  $IK$ . (c) Chứng minh  $\widehat{BKD} = 90^\circ$  & từ đó suy ra mặt phẳng  $(SAB)$  vuông góc với mặt phẳng  $(SAD)$ .

## 5 Khoảng Cách

### Tài liệu

Hạo, Trần Văn, Nguyễn Mộng Hy, Khu Quốc Anh, Nguyễn Hà Thanh, and Phan Văn Viện (2022). *Hình Học 11*. Tái bản lần thứ 15. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 136.