

Problem & Solution: Trigonometry – Bài Tập Lượng Giác & Lời Giải

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 22 tháng 5 năm 2023

Tóm tắt nội dung

Mục lục

1 Hệ Thức về Cạnh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông	1
2 Tỷ Số Lượng Giác của Góc Nhọn	6
3 Hệ Thức về Cạnh & Góc Trong Tam Giác Vuông	7
4 Miscellaneous	7
Tài liệu	7

1 Hệ Thức về Cạnh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông

Trong 1 tam giác vuông, nếu biết 2 cạnh, hoặc 1 cạnh & 1 góc nhọn thì có thể tính được các góc & các cạnh còn lại của tam giác đó.

Bài toán 1. Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , cạnh huyền $BC = a$, 2 cạnh góc vuông $AC = b$, $AB = c$. Gọi $AH = h$ là đường cao ứng với cạnh huyền BC ¹ & $CH = b'$, $BH = c'$ lần lượt là hình chiếu của AC, AB trên cạnh huyền BC . Chứng minh: (a) $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$. (b) Định lý Pythagore $a^2 = b^2 + c^2$. (c) $h^2 = b'c'$. (d) $bc = ah$. (e) $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

Chứng minh. (a) $\triangle AHC \sim \triangle BAC$ (g.g) vì 2 tam giác vuông này có chung \widehat{C} nhọn, nên $\frac{CH}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC^2 = BC \cdot CH \Leftrightarrow b^2 = ab'$. Tương tự, $\triangle BHA \sim \triangle BAC$ (g.g) vì 2 tam giác vuông này có chung \widehat{B} nhọn, nên $\frac{BH}{AB} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB^2 = BC \cdot BH \Leftrightarrow c^2 = ac'$. (b) Theo (a), $b^2 + c^2 = ab' + ac' = a(b' + c') = a \cdot a = a^2$. (c) Vì $\triangle AHC \sim \triangle BAC$ & $\triangle BHA \sim \triangle BAC$ nên $\triangle AHC \sim \triangle BHA$, suy ra $\frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH} \Rightarrow AH^2 = BH \cdot CH \Leftrightarrow h^2 = b'c'$. (d) Tính diện tích $\triangle ABC$ theo 2 cách: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot AC \Leftrightarrow AH \cdot BC = AB \cdot AC \Leftrightarrow ah = bc$. (e) $ah = bc \Leftrightarrow a^2h^2 = b^2c^2 \Leftrightarrow (b^2 + c^2)h^2 = b^2c^2 \Leftrightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{b^2+c^2}{b^2c^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$. \square

Lưu ý 1. Các hệ thức trên có thể được suy ra trực tiếp từ các tỷ số đồng dạng của bộ 3 tam giác đồng dạng: $\triangle BHA \sim \triangle AHC \sim \triangle BAC$. Thật vậy, $\triangle AHC \sim \triangle BAC \Leftrightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{HC}{AC} = \frac{AC}{BC} \Leftrightarrow \frac{h}{c} = \frac{b'}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow bh = b'c$, $b^2 = ab'$, & $ah = bc$. $\triangle BHA \sim \triangle BAC \Leftrightarrow \frac{HB}{AB} = \frac{AH}{AC} = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow \frac{c'}{c} = \frac{h}{b} = \frac{c}{a} \Rightarrow hc = bc'$, $ah = bc$, & $c^2 = ac'$. $\triangle AHC \sim \triangle BHA \Leftrightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH} = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow \frac{h}{c'} = \frac{b'}{h} = \frac{b}{c} \Rightarrow h^2 = b'c'$, $bh = b'c$, & $ch = bc'$. Hơn nữa, $\widehat{BAH} = \widehat{C}$ & $\widehat{CAH} = \widehat{B}$.

Định lý 1 (Hệ thức giữa cạnh góc vuông & hình chiếu của nó trên cạnh huyền). Trong 1 tam giác vuông, bình phương mỗi cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền & hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền. Nói cách khác, mỗi cạnh góc vuông là trung bình nhân của cạnh huyền & hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền. $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$

3 hệ thức về đường cao trong tam giác vuông:

Định lý 2. Trong 1 tam giác vuông, bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tích 2 hình chiếu của 2 cạnh góc vuông trên cạnh huyền. Nói cách khác, đường cao ứng với cạnh huyền là trung bình nhân của 2 đoạn thẳng mà nó định ra trên cạnh huyền. $h^2 = b'c'$.

Định lý 3. Trong 1 tam giác vuông, tích 2 cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền & đường cao tương ứng. $bc = ah$.

Định lý 4. Trong 1 tam giác vuông, nghịch đảo của bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tổng nghịch đảo của bình phương 2 cạnh góc vuông. $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam

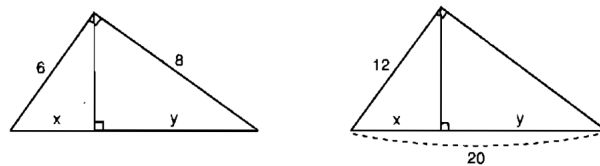
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

¹ AB, AC là đường cao ứng với nhau.

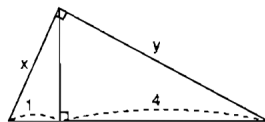
Bài toán 2. Cho $\triangle ABC$ có độ dài 2 cạnh góc vuông là b & c . Tính độ dài đường cao h xuất phát từ đỉnh góc vuông theo b, c .

Giải. Có $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \Rightarrow h^2 = \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2}$. □

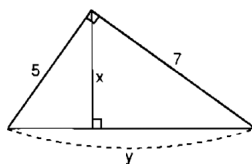
Bài toán 3 ([Chí+23], 1., p. 68). Tính x, y :



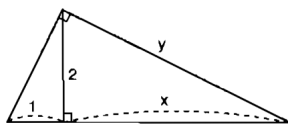
Bài toán 4 ([Chí+23], 2., p. 68). Tính x, y :



Bài toán 5 ([Chí+23], 3., p. 69). Tính x, y :



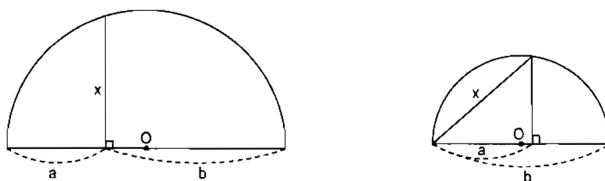
Bài toán 6 ([Chí+23], 4., p. 69). Tính x, y :



Bài toán 7 ([Chí+23], 5., p. 69). Trong tam giác vuông với các cạnh góc vuông có độ dài là 3 & 4, kẻ đường cao ứng với cạnh huyền. Tính đường cao này & độ dài các đoạn thẳng mà nó định ra trên cạnh huyền.

Bài toán 8 ([Chí+23], 6., p. 69). Đường cao của 1 tam giác vuông chia cạnh huyền thành 2 đoạn thẳng có độ dài là 1 & 2. Tính các cạnh góc vuông của tam giác này.

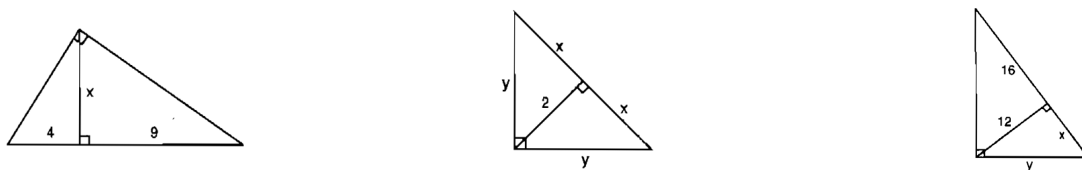
Bài toán 9 ([Chí+23], 7., p. 69–70). Người ta đưa ra 2 cách vẽ đoạn trung bình nhân x của 2 đoạn thẳng a, b (i.e., $x^2 = ab$ hay $x = \sqrt{ab}$) như trong 2 hình:



Chứng minh các cách vẽ trên là đúng.

Hint. Nếu 1 tam giác có đường trung tuyến ứng với 1 cạnh bằng nửa cạnh đó thì tam giác đó là tam giác vuông.

Bài toán 10 ([Chí+23], 8., p. 70). Tính x, y :



Bài toán 11 ([Chí+23], 9., p. 70). Cho hình vuông $ABCD$. Gọi I là 1 điểm nằm giữa A & B . Tia DI & tia CB cắt nhau ở K . Kẻ đường thẳng qua D , vuông góc với DI . Đường thẳng này cắt đường thẳng BC tại L . Chứng minh: (a) $\triangle DIL$ là 1 tam giác cân. (b) Tổng $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2}$ không đổi khi I thay đổi trên cạnh AB .

Bài toán 12 ([Thâ+23], 1., p. 102). Tính x, y :



Bài toán 13 ([Thâ+23], 2., p. 102). Tính x, y :



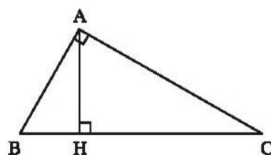
Bài toán 14 ([Thâ+23], 3., p. 103). Tính x, y :



Bài toán 15 ([Thâ+23], 4., p. 103). Tính x, y :



Bài toán 16 ([Thâ+23], 5., p. 103). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH :



Giải bài toán trong mỗi trường hợp sau: (a) Cho $AH = 16$, $BH = 25$. Tính AB, AC, BC, CH . (b) Cho $AB = 12$, $BH = 6$. Tính AH, AC, BC, CH .

Bài toán 17 ([Thâ+23], 6., p. 103). Cho tam giác vuông với các cạnh góc vuông có độ dài là 5 và 7, kẻ đường cao ứng với cạnh huyền. Tính đường cao này và các đoạn thẳng mà nó chia ra trên cạnh huyền.

Bài toán 18 ([Thâ+23], 7., p. 103). Đường cao của 1 tam giác vuông chia cạnh huyền thành 2 đoạn thẳng có độ dài là 3 và 4. Tính các cạnh góc vuông của tam giác này.

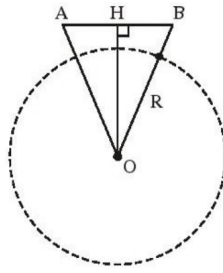
Bài toán 19 ([Thâ+23], 8., p. 103). Cạnh huyền của 1 tam giác vuông lớn hơn 1 cạnh góc vuông là 1 cm và tổng của 2 cạnh góc vuông lớn hơn cạnh huyền 4 cm. Tính các cạnh của tam giác vuông này.

Bài toán 20 ([Thâ+23], 9., p. 104). 1 tam giác vuông có cạnh huyền là 5 và đường cao ứng với cạnh huyền là 2. Tính cạnh nhỏ nhất của tam giác vuông này.

Bài toán 21 ([Thâ+23], 10., p. 104). Cho 1 tam giác vuông. Biết tỷ số 2 cạnh góc vuông là 3 : 4 và cạnh huyền là 125 cm. Tính độ dài các cạnh góc vuông và hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền.

Bài toán 22 ([Thâ+23], 11., p. 104). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Biết $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{6}$, đường cao $AH = 30$ cm. Tính HB, HC .

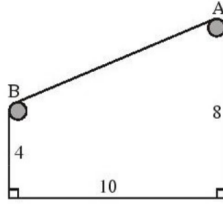
Bài toán 23 ([Thâ+23], 12., p. 104). 2 vệ tinh đang bay ở vị trí A và B cùng cách mặt đất 230 km có nhìn thấy nhau hay không nếu khoảng cách giữa chúng theo đường thẳng là 2200 km? Biết bán kính R của Trái Đất gần bằng 6370 km và 2 vệ tinh nhìn thấy nhau nếu $OH > R$.



Bài toán 24 ([Thâ+23], 13., p. 104). Cho 2 đoạn thẳng có độ dài là a, b . Dựng các đoạn thẳng có độ dài tương ứng bằng: (a) $\sqrt{a^2 + b^2}$. (b) $\sqrt{a^2 - b^2}$ ($a > b$).

Bài toán 25 ([Thâ+23], 14., p. 104). Cho 2 đoạn thẳng có độ dài là a, b . Dựng đoạn thẳng \sqrt{ab} như thế nào?

Bài toán 26 ([Thâ+23], 15., p. 104). Giữa 2 tòa nhà (kho & phân xưởng) của 1 nhà máy người ta xây dựng 1 băng chuyền AB để chuyển vật liệu. Khoảng cách giữa 2 tòa nhà là 10 m, còn 2 vòng quay của băng chuyền được đặt ở độ cao 8 m & 4 m so với mặt đất. Tìm độ dài AB của băng chuyền.



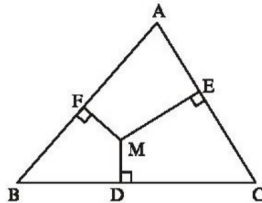
Bài toán 27 ([Thâ+23], 16., p. 104). Cho tam giác có độ dài các cạnh là 5, 12, 13. Tìm góc của tam giác đối diện với cạnh có độ dài 13.

Bài toán 28 ([Thâ+23], 17., p. 104). Cho hình chữ nhật ABCD. Đường phân giác của góc B cắt đường chéo AC thành 2 đoạn $4\frac{2}{7}$ m & $5\frac{5}{7}$ m. Tính các kích thước của hình chữ nhật.

Bài toán 29 ([Thâ+23], 18., p. 105). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, vẽ đường cao AH. Chu vi của $\triangle ABH$ là 30 cm & chu vi $\triangle ACH$ là 40 cm. Tính chu vi của $\triangle ABC$.

Bài toán 30 ([Thâ+23], 19., p. 105). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có cạnh $AB = 6$ cm & $AC = 8$ cm. Các đường phân giác trong & ngoài của góc B cắt đường thẳng ABC lần lượt tại M, N. Tính độ dài các đoạn thẳng AM, AN.

Bài toán 31 ([Thâ+23], 20., p. 105). Cho $\triangle ABC$. Từ 1 điểm M bất kỳ trong tam giác kẻ MD, ME, MF lần lượt vuông góc với các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh: $BD^2 + CE^2 + AF^2 = CD^2 + AE^2 + BF^2$.



Bài toán 32 ([Thâ+23], 1.1., p. 105). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB : AC = 3 : 4$ & đường cao AH bằng 9 cm. Tính độ dài đoạn thẳng CH.

Bài toán 33 ([Thâ+23], 1.2., p. 105). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB : AC = 4 : 5$ & đường cao AH bằng 12 cm. Tính độ dài đoạn thẳng BH.

Bài toán 34 ([Thâ+23], 1.3., p. 105). (a) Tính h, b, c nếu biết $b' = 36, c' = 64$. (b) Tính h, b, b', c' nếu biết $a = 9, c = 6$.

Bài toán 35 ([Thâ+23], 1.4., p. 105). Biểu thị b', c' qua a, b, c .

Bài toán 36 ([Thâ+23], 1.5., p. 105). Chứng minh: (a) $h = \frac{bc}{a}$. (b) $\frac{b^2}{c^2} = \frac{b'}{c'}$.

Bài toán 37 ([Thâ+23], 1.6., p. 106). Đường cao của 1 tam giác vuông kẻ từ đỉnh góc vuông chia cạnh huyền thành 2 đoạn, trong đó đoạn lớn hơn bằng 9 cm. Tính cạnh huyền của tam giác vuông đó nếu 2 cạnh góc vuông có tỷ lệ 6 : 5.

Bài toán 38 ([Thâ+23], 1.7., p. 106). Trong tam giác có các cạnh là 5 cm, 12 cm, 13 cm, kẻ đường cao đến cạnh lớn nhất. Tính các đoạn thẳng mà đường cao này chia ra trên cạnh lớn nhất đó.

Bài toán 39 ([Thâ+23], 1.8., p. 106). $\triangle ABC$ vuông tại A có đường cao AH bằng 12 cm. Tính cạnh huyền BC nếu biết $HB : HC = 1 : 3$.

Bài toán 40 ([Thâ+23], 1.9., p. 106). Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A , đường trung tuyến BM . Gọi D là chân đường vuông góc kẻ từ C đến BM & H là chân đường vuông góc kẻ từ D đến AC . Đ/S? (a) $\triangle HCD \sim \triangle ABM$. (b) $AH = 2HD$.

Bài toán 41 ([Thâ+23], 1.10., p. 106). Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A có cạnh đáy AB bằng 6 cm, cạnh bên AD bằng 4 cm & 2 đường chéo vuông góc với nhau. Tính độ dài các cạnh CD, BC , & đường chéo BD .

Bài toán 42 ([Tuy23], Thí dụ 1, p. 103). Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ$, 2 đường chéo vuông góc với nhau tại H . Biết $AB = 3\sqrt{5}$ cm, $HA = 3$ cm. Chứng minh: (a) $HA : HB : HC : HD = 1 : 2 : 4 : 8$. (b) $\frac{1}{AB^2} - \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{HB^2} - \frac{1}{HC^2}$.

Bài toán 43 ([Tuy23], 1., p. 105). Cho hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$, 2 đường chéo vuông góc với nhau. Biết $AC = 16$ cm, $BD = 12$ cm. Tính chiều cao của hình thang.

Bài toán 44 ([Tuy23], 2., p. 105). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH , đường phân giác AD . Biết $BH = 63$ cm, $CH = 112$ cm, tính HD .

Bài toán 45 ([Tuy23], 3., p. 105). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . 2 đường trung tuyến AD, BE vuông góc với nhau tại G . Biết $AB = \sqrt{6}$ cm. Tính cạnh huyền BC .

Bài toán 46 ([Tuy23], 4., p. 105). Gọi a, b, c là các cạnh của 1 tam giác vuông, h là đường cao ứng với cạnh huyền a . Chứng minh tam giác có các cạnh $a + h, b + c$, & h cũng là 1 tam giác vuông.

Bài toán 47 ([Tuy23], 5., p. 105). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Gọi I, K thứ tự là hình chiếu của H trên AB, AC . Đặt $c = AB$, $b = AC$. (a) Tính AI, AK theo b, c . (b) Chứng minh $\frac{BI}{CK} = \frac{c^3}{b^3}$.

Bài toán 48 ([Tuy23], 6., p. 105). Cho $\triangle ABC$, $AB = 1$, $\widehat{A} = 105^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = 1$. Vẽ $ED \parallel AB$, $D \in AC$. Chứng minh: $\frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{4}{3}$.

Bài toán 49 ([Tuy23], 7., p. 105). Cho hình chữ nhật $ABCD$, $AB = 2BC$. Trên cạnh BC lấy điểm E . Tia AE cắt đường thẳng CD tại F . Chứng minh: $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{4AF^2}$.

Bài toán 50 ([Tuy23], 8., p. 105). Cho 3 đoạn thẳng có độ dài a, b, c . Dựng đoạn thẳng x sao cho $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

Bài toán 51 ([Tuy23], 9., p. 105). Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 120^\circ$. 1 đường thẳng d không cắt các cạnh của hình thoi. Chứng minh: tổng các bình phương hình chiếu của 4 cạnh với 2 lần bình phương hình chiếu của đường chéo AC trên đường thẳng d không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d .

Bài toán 52 ([Tuy23], 10., p. 106). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Từ 1 điểm O ở trong tam giác ta vẽ $OD \perp BC$, $OE \perp CA$, $OF \perp AB$. Xác định vị trí của O để $OD^2 + OE^2 + OF^2$ nhỏ nhất.

Bài toán 53 ([Bin+23], Ví dụ 1, p. 5). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Biết $AB : AC = 3 : 4$ & $AB + AC = 21$ cm. (a) Tính các cạnh của $\triangle ABC$. (b) Tính độ dài các đoạn AH, BH, CH .

Bài toán 54 (Mở rộng [Bin+23], Ví dụ 1, p. 5). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Biết $AB : AC = m : n$ & $AB + AC = p$ cm. (a) Tính các cạnh của $\triangle ABC$. (b) Tính độ dài các đoạn AH, BH, CH .

Bài toán 55 ([Bin+23], Ví dụ 2, p. 6). Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $CD = 30$ cm, $CA \perp CB$. Tính diện tích của hình thang.

Bài toán 56 ([Bin+23], Ví dụ 3, p. 7). Cho $\triangle ABC$ nhọn, đường cao CK , H là trực tâm. Gọi M là 1 điểm trên CK sao cho $\widehat{AMB} = 90^\circ$. S, S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích các $\triangle AMB, \triangle ABC, \triangle ABH$. Chứng minh $S = \sqrt{S_1 S_2}$.

Bài toán 57 ([Bin+23], 1.1., p. 7). Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A & điểm M nằm giữa B & C . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của điểm M lên AB, AC . Chứng minh $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$.

Bài toán 58 ([Bin+23], 1.2., p. 7). Cho hình chữ nhật $ABCD$ & điểm O nằm trong hình chữ nhật đó. Chứng minh $OA^2 + OC^2 = OB^2 + CD^2$.

Bài toán 59 ([Bin+23], 1.3., p. 8). Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 6$ cm, $CD = 8$ cm. Đường thẳng kẻ từ D vuông góc với AC tại E , cắt cạnh AB tại F . Tính độ dài các đoạn thẳng DE, DF, AE, CE, AF, BF .

Bài toán 60 ([Bin+23], 1.4., p. 8). Cho $\triangle ABC$ có $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $AC = 5$ cm. Đường cao, đường phân giác, đường trung tuyến của tam giác kẻ từ đỉnh B chia tam giác thành 4 gam giác không có điểm trong chung. Tính diện tích của mỗi tam giác đó.

Bài toán 61 ([Bin+23], 1.5., p. 8). Trong 1 tam giác vuông tỷ số giữa đường cao & đường trung tuyến kẻ từ đỉnh góc vuông bằng $40 : 41$. Tính độ dài các cạnh góc vuông của tam giác đó, biết cạnh huyền bằng $\sqrt{41}$ cm.

Bài toán 62 ([Bin+23], 1.6., p. 8). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Kẻ $HE \perp AB$, $HF \perp AC$. Gọi O là giao điểm của AH & EF . Chứng minh $HB \cdot HC = 4OE \cdot OF$.

Bài toán 63 ([Bin+23], 1.7., p. 8).

Bài toán 64 ([Bin+23], 1.8., p. 8).

Bài toán 65 ([Bin+23], 1.9., p. 8).

Bài toán 66 ([Bin+23], 1.10., p. 8).

Bài toán 67 ([Bin+23], 1.11., p. 8).

Bài toán 68 ([Bin+23], 1.12., p. 8).

Bài toán 69 ([Bin+23], 1.13., p. 9).

Bài toán 70 ([Bin+23], 1.14., p. 9).

Bài toán 71 ([Bin+23], 1.15., p. 9).

Bài toán 72 ([Bin+23], 1.16., p. 9).

2 Tỷ Số Lượng Giác của Góc Nhọn

Bài toán 73 ([Tuy23], Thí dụ 2, p. 107). Cho $\cot \alpha = \frac{a^2 - b^2}{2ab}$ trong đó α là góc nhọn, $a > b > 0$. Tính $\cos \alpha$.

Bài toán 74 ([Tuy23], 11., p. 108, định lý sin). Cho $\triangle ABC$ nhọn, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. Dạng thức này còn đúng với tam giác vuông & tam giác tù hay không?

Bài toán 75 ([Tuy23], 12., p. 108). Chứng minh: (a) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$. (b) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$. (c) $\cot^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \cot^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$. (d) $\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$.

Bài toán 76 ([Tuy23], 13., p. 108). Rút gọn biểu thức: (a) $A = \frac{1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$. (b) $B = (1 + \tan^2 \alpha)(1 - \sin^2 \alpha) - (1 + \cot^2 \alpha)(1 - \cos^2 \alpha)$. (c) $C = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$.

Bài toán 77 ([Tuy23], 14., p. 108). Tính giá trị của biểu thức $A = 5 \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha$ biết $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.

Bài toán 78 ([Tuy23], 15., p. 108). Không dùng máy tính hoặc bảng số, tính: (a) $A = \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 70^\circ$. (b) $B = \sin^2 5^\circ + \sin^2 25^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 65^\circ + \sin^2 85^\circ$.

Bài toán 79 ([Tuy23], 16., p. 108). Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Chứng minh: $\sin \alpha < \tan \alpha$, $\cos \alpha < \cot \alpha$. Áp dụng: (a) Sắp xếp các số sau theo thứ tự tăng dần: $\sin 65^\circ$, $\cos 65^\circ$, $\tan 65^\circ$. (b) Xác định α thỏa mãn điều kiện: $\tan \alpha > \sin \alpha > \cos \alpha$.

Bài toán 80 ([Tuy23], 17., p. 108). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Biết $\sin B = \frac{1}{4}$, tính $\tan C$.

Bài toán 81 ([Tuy23], 18., p. 108). Cho biết $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, tính $\tan \alpha$.

Bài toán 82 ([Tuy23], 19., p. 109). $\triangle ABC$, đường trung tuyến AM . Chứng minh nếu $\cot B = 3 \cot C$ thì $AM = AC$.

Bài toán 83 ([Tuy23], 20., p. 109). Cho $\triangle ABC$, trực tâm H là trung điểm của đường cao AD . Chứng minh $\tan B \tan C = 2$.

Bài toán 84 ([Tuy23], 21., p. 109). Cho $\triangle ABC$ nhọn, 2 đường cao BD, CE . Chứng minh: (a) $S_{\triangle ADE} = S_{\triangle ABC} \cos^2 A$. (b) $S_{BCDE} = S_{\triangle ABC} \sin^2 A$.

Bài toán 85 ([Tuy23], 22., p. 109). Cho $\triangle ABC$ nhọn. Từ 1 điểm M nằm trong tam giác vẽ $MD \perp BC$, $ME \perp AC$, $MF \perp AB$. Chứng minh $\max\{MA, MB, MC\} \geq 2 \min\{MD, ME, MF\}$, trong đó $\max\{MA, MB, MC\}$ là đoạn thẳng lớn nhất trong các đoạn thẳng MA, MB, MC & $\min\{MD, ME, MF\}$ là đoạn thẳng nhỏ nhất trong các đoạn thẳng MD, ME, MF .

3 Hệ Thức về Cạnh & Góc Trong Tam Giác Vuông

Bài toán 86 ([Tuy23], Thí dụ 3, p. 109). *Tứ giác ABCD có 2 đường chéo cắt nhau tại O. Cho biết $\widehat{AOD} = 70^\circ$, $AC = 5.3$ cm, $BD = 4$ cm. Tính diện tích tứ giác ABCD.*

Bài toán 87 ([Tuy23], 23., p. 110). *Chứng minh: (a) Diện tích của 1 tam giác bằng nửa tích của 2 cạnh nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa 2 cạnh ấy. (b) Diện tích hình bình hành bằng tích của 2 cạnh kề nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa 2 cạnh ấy.*

Bài toán 88 ([Tuy23], 24., p. 110). *Cho hình bình hành ABCD, $BD \perp BC$. Biết $AB = a$, $\widehat{A} = \alpha$, tính diện tích hình bình hành đó.*

Bài toán 89 ([Tuy23], 25., p. 110). *Cho $\triangle ABC$, $\widehat{A} = 120^\circ$, $\widehat{B} = 35^\circ$, $AB = 12.25$ dm. Giải $\triangle ABC$.*

Bài toán 90 ([Tuy23], 26., p. 110). *Cho $\triangle ABC$ nhọn, $\widehat{A} = 75^\circ$, $AB = 30$ mm, $BC = 35$ mm. Giải $\triangle ABC$.*

Bài toán 91 ([Tuy23], 27., p. 110). *Cho $\triangle ABC$ cân tại A, đường cao BH. Biết $BH = h$, $\widehat{C} = \alpha$. Giải $\triangle ABC$.*

Bài toán 92 ([Tuy23], 28., p. 110). *Hình bình hành ABCD có $\widehat{A} = 120^\circ$, $AB = a$, $BC = b$. Các đường phân giác của 4 góc cắt nhau tạo thành tứ giác MNPQ. Tính diện tích tứ giác MNPQ.*

Bài toán 93 ([Tuy23], 29., p. 110). *Cho $\triangle ABC$, các đường phân giác AD, đường cao BH, đường trung tuyến CE đồng quy tại điểm O. Chứng minh $AC \cos A = BC \cos C$.*

4 Miscellaneous

Bài toán 94 ([Tuy23], Thí dụ 4, p. 111). *Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Gọi M, N lần lượt là 2 điểm trên cạnh AB, AC sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$, $AN = \frac{1}{3}AC$. Biết độ dài $BN = \sin \alpha$, $CM = \cos \alpha$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Tính cạnh huyền BC.*

Bài toán 95 ([Tuy23], 30., p. 112). *Cho $\triangle ABC$ nhọn, $BC = a$, $AC = b$, $CA = b$ trong đó $b - c = \frac{a}{k}$, $k > 1$. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là các đường cao hạ từ A, B, C. Chứng minh: (a) $\sin A = k(\sin B - \sin C)$. (b) $\frac{1}{h_a} = k\left(\frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)$.*

Bài toán 96 ([Tuy23], 31., p. 112). *Giải $\triangle ABC$ biết $AB = 14$, $BC = 15$, $CA = 13$.*

Bài toán 97 ([Tuy23], 32., p. 112). *Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Biết $\widehat{DC'D'} = 45^\circ$, $\widehat{BC'B'} = 60^\circ$. Tính $\widehat{BC'D}$.*

Bài toán 98 ([Tuy23], 33., p. 112). *Cho $\triangle ABC$, $AB = AC = 1$, $\widehat{A} = 2\alpha$, $0^\circ < \alpha < 45^\circ$. Vẽ các đường cao AD, BE. (a) Các tỷ số lượng giác $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ được biểu diễn bởi các đoạn thẳng nào? (b) Chứng minh $\triangle ADC \sim \triangle BEC$, từ đó suy ra các hệ thức sau: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$. (c) Chứng minh: $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$, $\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$.*

Bài toán 99 ([Tuy23], 34., p. 112). *Cho $\alpha = 22^\circ 30'$, tính $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$.*

Bài toán 100 ([Tuy23], 35., p. 112). *Cho $\triangle ABC$, đường phân giác AD. Biết $AB = c$, $AC = b$, $\widehat{A} = 2\alpha$, $\alpha < 45^\circ$. Chứng minh $AD = \frac{2bc \cos \alpha}{b + c}$.*

Tài liệu

- [Bin+23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Ngọc Dạm, Nguyễn Bá Đang, Lê Quốc Hán, and Hồ Quang Vinh. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 9. Tập 2: Hình Học*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 240.
- [Chí+23] Phan Đức Chính, Tôn Thân, Vũ Hữu Bình, Trần Phương Dung, Ngô Hữu Dũng, Lê Văn Hồng, and Nguyễn Hữu Thảo. *Toán 9 Tập 1*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 128.
- [Thâ+23] Tôn Thân, Vũ Hữu Bình, Trần Phương Dung, Lê Văn Hồng, and Nguyễn Hữu Thảo. *Bài Tập Toán 9 Tập 1*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 216.
- [Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.