

# Problem: Square Root & Cube Root – Bài Tập Căn Bậc 2 & 3

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 25 tháng 4 năm 2023

## Tóm tắt nội dung

## Mục lục

1 Square Root & Irrationals – Căn Bậc 2 & Số Vô Tỷ . . . . .	1
2 Căn Thức Bậc 2 & Hằng Đẳng Thức $\sqrt{A^2} =  A $ . . . . .	1
3 Liên Hệ Giữa Phép Nhân, Phép Chia & Phép Khai Phương . . . . .	2
4 Biến Đổi Đơn Giản Biểu Thức Chứa Căn Thức Bậc 2 . . . . .	4
5 Rút Gọn Biểu Thức Có Chứa Căn Thức Bậc 2 . . . . .	4
6 Cube Root, $n$ th Root – Căn Bậc 3, Căn Bậc $n$ . . . . .	6
7 Miscellaneous . . . . .	7
Tài liệu . . . . .	9

## 1 Square Root & Irrationals – Căn Bậc 2 & Số Vô Tỷ

**Bài toán 1** ([Tuy22], Thí dụ 1, p. 5). Cho số thực  $x \geq 0$ . So sánh  $\sqrt{x}$  với  $x$ .

**Bài toán 2** ([Bin23], Ví dụ 2, p. 5). Chứng minh tổng của 1 số hữu tỷ với 1 số vô tỷ là 1 số vô tỷ.

**Bài toán 3** ([Bin23], Ví dụ 3, p. 5). Xét xem các số  $a, b$  có thể là số vô tỷ hay không, nếu: (a)  $a + b$  &  $a - b$  là các số hữu tỷ. (b)  $a - b$  &  $ab$  là các số hữu tỷ.

**Bài toán 4** ([Bin23], Ví dụ 4, p. 5). Chứng minh: Nếu số tự nhiên  $a$  không là số chính phương thì  $\sqrt{a}$  là số vô tỷ.

**Bài toán 5** ([Bin23], 2., p. 6). Chứng minh các số sau là số vô tỷ: (a)  $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ . (b)  $m + \frac{\sqrt{3}}{n}$  với  $m, n \in \mathbb{Q}$ ,  $n \neq 0$ .

**Bài toán 6** ([Bin23], 3., p. 6). Xét xem các số  $a, b$  có thể là số vô tỷ hay không nếu: (a)  $ab$  &  $\frac{a}{b}$  là các số hữu tỷ. (b)  $a + b$  &  $\frac{a}{b}$  là các số hữu tỷ ( $a + b \neq 0$ ). (c)  $a + b$ ,  $a^2$ , &  $b^2$  là các số hữu tỷ ( $a + b \neq 0$ ).

**Bài toán 7** ([Bin23], 4., p. 6). So sánh 2 số: (a)  $2\sqrt{3}$  &  $3\sqrt{2}$ . (b)  $6\sqrt{5}$  &  $5\sqrt{6}$ . (c)  $\sqrt{24} + \sqrt{45}$  & 12. (d)  $\sqrt{37} - \sqrt{15}$  & 2.

**Bài toán 8** ([Bin23], 5., p. 6). (a) Cho 1 ví dụ để chứng tỏ khẳng định  $\sqrt{a} \leq a$  với mọi số  $a$  không âm là sai. (b) Cho  $a > 0$ . Với giá trị nào của  $a$  thì  $\sqrt{a} > a$ ?

**Bài toán 9** ([Bin23], 6\*, pp. 6–7). (a) Chỉ ra 1 số thực  $x$  mà  $x - \frac{1}{x}$  là số nguyên ( $x \neq \pm 1$ ). (b) Chứng minh nếu  $x - \frac{1}{x}$  là số nguyên &  $x \neq \pm 1$  thì  $x$  &  $x + \frac{1}{x}$  là số vô tỷ. Khi đó  $(x + \frac{1}{x})^{2n}$  &  $(x + \frac{1}{x})^{2n+1}$  là số hữu tỷ hay số vô tỷ?

## 2 Căn Thức Bậc 2 & Hằng Đẳng Thức $\sqrt{A^2} = |A|$

**Bài toán 10** ([Tuy22], Thí dụ 2, p. 5). Cho  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ ,  $abc \neq 0$  &  $a = b + c$ . Chứng minh  $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \in \mathbb{Q}$ .

**Bài toán 11** ([Tuy22], 1., p. 6). Tính  $A = \sqrt{\frac{8^{10} - 4^{10}}{4^{11} - 8^4}}$ .

\*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam  
e-mail: nguyentuanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

**Bài toán 12** ([Tuy22], 2., p. 6). Cho  $A = \underbrace{99 \dots 9}_{10's} \underbrace{400 \dots 0}_{10's} 9$ . Tính  $\sqrt{A}$ .

**Bài toán 13** ([Tuy22], 3., p. 6). Không dùng máy tính hoặc bảng số, so sánh: (a)  $\sqrt{8} + \sqrt{15}$  &  $\sqrt{65} - 1$ . (b)  $\frac{13 - 2\sqrt{3}}{6}$  &  $\sqrt{2}$ .

**Bài toán 14** ([Tuy22], 4., p. 6). Tìm DKXD của các biểu thức: (a)  $\sqrt{2 - x^2}$ . (b)  $\frac{x}{\sqrt{5x^2 - 3}}$ . (c)  $\sqrt{-4x^2 + 4x - 1}$ . (d)  $\frac{1}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$ .

**Bài toán 15** ([Tuy22], 5., p. 6). Cho  $a, b, c \in \mathbb{Q}$  khác nhau đôi một. Chứng minh  $A = \sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}} \in \mathbb{Q}$ .

**Bài toán 16** ([Tuy22], 6., p. 6). Cho  $a, b, c \in \mathbb{Q}$  thỏa mãn điều kiện  $ab + bc + ca = 1$ . Chứng minh  $\sqrt{(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)} \in \mathbb{Q}$ .

**Bài toán 17** ([Tuy22], 7., p. 6-7). (a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $A = \sqrt{-x^2 + x} + \frac{3}{4}$ . (b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $B = \sqrt{4x^4 - 4x^2(x+1) + (x+1)^2 + 9}$ . (c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $C = \sqrt{25x^2 - 20x + 4} + \sqrt{25x^2}$ .

**Bài toán 18** ([Tuy22], 8., p. 7). Cho  $x < 0$ , rút gọn biểu thức  $A = |2x - \sqrt{(5x-1)^2}|$ .

**Bài toán 19** ([Tuy22], 9., p. 7). Cho biểu thức  $A = 4x - \sqrt{9x^2 - 12x + 4}$ . (a) Rút gọn  $A$ . (b) Tính giá trị của  $A$  với  $x = \frac{2}{7}$ .

**Bài toán 20** ([Tuy22], 10., p. 7). Cho biểu thức  $A = 5x + \sqrt{x^2 + 6x + 9}$ . (a) Rút gọn  $A$ . (b) Tìm  $x$  để  $B = -9$ .

**Bài toán 21** ([Tuy22], 11., p. 7). Tìm  $x \in \mathbb{R}$  biết  $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} \leq 5 - x$ .

**Bài toán 22** ([Tuy22], 12., p. 7). Giải phương trình: (a)  $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{x + 1}$ . (b)  $\sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 0$ . (c)  $\sqrt{x^2 - 4} - x^2 + 4 = 0$ .

**Bài toán 23** ([Tuy22], 13., p. 7). Giải phương trình: (a)  $\sqrt{x^2 - 4x + 5} + \sqrt{x^2 - 4x + 8} + \sqrt{x^2 - 4x + 9} = 3 + \sqrt{5}$ . (b)  $\sqrt{2 - x^2 + 2x} + \sqrt{-x^2 - 6x - 8} = 1 + \sqrt{3}$ . (c)  $\sqrt{9x^2 - 6x + 2} + \sqrt{45x^2 - 30x + 9} = \sqrt{6x - 9x^2 + 8}$ .

**Bài toán 24** ([Bin23], Ví dụ 5, p. 7). Cho biểu thức  $A = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4x + 4}}$ . (a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức  $A$ . (b) Rút gọn biểu thức  $A$ .

**Bài toán 25** ([Bin23], Ví dụ 6, p. 8). Tìm điều kiện xác định của các biểu thức: (a)  $A = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}$ . (b)  $B = \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2x + 1}}}$ .

**Bài toán 26** ([Bin23], Ví dụ 7, p. 8). Tìm các giá trị của  $x$  sao cho  $\sqrt{x+1} < x+3$ .

**Bài toán 27** ([Bin23], 7., p. 9). Tìm điều kiện xác định của các biểu thức: (a)  $3 - \sqrt{1 - 16x^2}$ . (b)  $\frac{1}{1 - \sqrt{x^2 - 3}}$ . (c)  $\sqrt{8x - x^2 - 15}$ .

(d)  $\frac{2}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$ . (e)  $A = \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}}$ . (f)  $B = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{\sqrt{2x + 1}} + \sqrt{x^2 - 8x + 14}$ .

**Bài toán 28** ([Bin23], 8., p. 9). Cho biểu thức  $A = \sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{x^2 + 6x + 9}$ . (a) Rút gọn biểu thức  $A$ . (b) Tìm các giá trị của  $x$  để  $A = 1$ .

**Bài toán 29** ([Bin23], 9., p. 9). Tìm các giá trị của  $x$  sao cho: (a)  $\sqrt{x^2 - 3} \leq x^2 - 3$ . (b)  $\sqrt{x^2 - 6x + 9} > x - 6$ .

**Bài toán 30** ([Bin23], 10., p. 9). Cho  $a + b + c = 0$  &  $abc \neq 0$ . Chứng minh hằng đẳng thức:  $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right|$ .

### 3 Liên Hệ Giữa Phép Nhân, Phép Chia & Phép Khai Phương

**Bài toán 31** ([Tuy22], Thí dụ 3, p. 9). Rút gọn biểu thức  $A = \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}}$ .

**Bài toán 32** ([Tuy22], Thí dụ 4, p. 10). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $A = \sqrt{x - 5} + \sqrt{13 - x}$ .

**Bài toán 33** ([Tuy22], 14., p. 11). Rút gọn biểu thức  $A = \frac{\sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{3}} - \sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{7} - 2}}$ .

**Bài toán 34** ([Tuy22], 15., p. 11). Cho 2 số có tổng bằng  $\sqrt{19}$  & có hiệu bằng  $\sqrt{7}$ . Tính tích của 2 số đó.

**Bài toán 35** ([Tuy22], 16., p. 11). Tính  $\sqrt{A}$  biết: (a)  $A = 13 - 2\sqrt{42}$ . (b)  $A = 46 + 6\sqrt{5}$ . (c)  $A = 12 - 3\sqrt{15}$ .

**Bài toán 36** ([Tuy22], 17., p. 12). Rút gọn biểu thức: (a)  $A = \sqrt{6 + 2\sqrt{2}\sqrt{3 - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}}$ . (b)  $B = \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$ . (c)  $C = \sqrt{3 - \sqrt{5}(\sqrt{10} - \sqrt{2})(3 + \sqrt{5})}$ .

**Bài toán 37** ([Tuy22], 18., p. 12). Rút gọn biểu thức  $A = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ .

**Bài toán 38** ([Tuy22], 19., p. 12). Cho  $a > 0$ , so sánh  $\sqrt{a+1} + \sqrt{a+3}$  với  $2\sqrt{a+2}$ .

**Bài toán 39** ([Tuy22], 20., p. 12). Cho  $a, b, x, y > 0$ . Chứng minh  $\sqrt{ax} + \sqrt{by} \leq \sqrt{(a+b)(x+y)}$ .

**Bài toán 40** ([Tuy22], 21., p. 12). (a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $A = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-8}$ . (b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $B = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$ .

**Bài toán 41** ([Tuy22], 22., p. 12). Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} \left[ \sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3} \right]}{2 + \sqrt{1-x^2}}.$$

**Bài toán 42** ([Tuy22], 23., p. 12). Tìm  $x, y$  biết  $x + y + 12 = 4\sqrt{x} + 6\sqrt{y-1}$ .

**Bài toán 43** ([Tuy22], 24., p. 12). Tìm  $x, y, z$  biết  $\sqrt{x-a} + \sqrt{y-b} + \sqrt{z-c} = \frac{1}{2}(x+y+z)$ , trong đó  $a+b+c=3$ .

**Bài toán 44** ([Tuy22], 25., p. 12). Giải phương trình  $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8+6\sqrt{x-1}} = 5$ .

**Bài toán 45** ([Tuy22], 26., p. 12). Giải phương trình  $\sqrt{x^2-5x+6} + \sqrt{x+1} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2-2x-3}$ .

**Bài toán 46** ([Tuy22], 27., p. 12). Chứng minh bất đẳng thức  $\sqrt{n+a} + \sqrt{n-a} < 2\sqrt{n}$  vpwos  $0 < |a| \leq n$ . Áp dụng (không dùng máy tính hoặc bảng số): Chứng minh:  $\sqrt{101} - \sqrt{99} > 0.1$ .

**Bài toán 47** ([Tuy22], 28., p. 13). Chứng minh:  $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Áp dụng: Cho  $S = \sum_{i=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}}$ . Chứng minh  $18 < S < 19$ .

**Bài toán 48** ([Tuy22], 29., p. 13). Chứng minh:  $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Áp dụng: Chứng minh:  $S = \sum_{i=1}^{2500} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2500}} < 100$ .

**Bài toán 49** ([Tuy22], 30., p. 13). Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh  $x + y + z \geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$ .

**Bài toán 50** ([Tuy22], 31., p. 13). Cho  $A = \sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}$ . Chứng minh  $A \leq 4$ .

**Bài toán 51** ([Tuy22], 32., p. 13). Cho  $B = \frac{x^3}{1+y} + \frac{y^3}{1+x}$  trong đó  $x, y$  là các số thực dương thỏa mãn điều kiện  $xy = 1$ . Chứng minh  $B \geq 1$ .

**Bài toán 52** ([Tuy22], 33., p. 13). Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn điều kiện  $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 2$ . Chứng minh  $xyz \leq \frac{1}{8}$ .

**Bài toán 53** ([Tuy22], 34., p. 13). Tìm các số dương  $x, y, z$  sao cho  $x + y + z = 3$  &  $x^4 + y^4 + z^4 = 3xyz$ .

**Bài toán 54** ([Tuy22], 35., p. 13). Cho  $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 10$ . Chứng minh:  $x + y \geq 20$ .

**Bài toán 55** ([Tuy22], 36., p. 13). Cho  $x, y, z \geq 0$  thỏa mãn điều kiện  $x+y+z=1$ . Chứng minh:  $\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} \leq \sqrt{6}$ .

**Bài toán 56** ([Bin23], Ví dụ 8, p. 10). Rút gọn biểu thức  $A = \sqrt{x+\sqrt{2x-1}} - \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$ .

**Bài toán 57** ([Bin23], Ví dụ 9, p. 11). Chứng minh số  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$  là số vô tỷ.

**Bài toán 58** ([Bin23], 11., pp. 11–12). Rút gọn biểu thức: (a)  $\sqrt{11-2\sqrt{10}}$ . (b)  $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$ . (c)  $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$ . (d)  $\sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{9+4\sqrt{5}}$ . (e)  $\sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}}$ . (f)  $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{2} + \sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{7+2\sqrt{10}}}$ . (g)  $\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{7}+4\sqrt{3}}}$ . (h)  $\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ . (i)  $\sqrt{94-42\sqrt{5}} - \sqrt{94+42\sqrt{5}}$ .

**Bài toán 59** ([Bin23], 12., p. 12). Tính: (a)  $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$ . (b)  $\sqrt{3-\sqrt{5}}(\sqrt{10}-\sqrt{2})(3+\sqrt{5})$ .

(c)  $\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ .

**Bài toán 60** ([Bin23], 13., p. 12). Chứng minh các hằng đẳng thức sau với  $b \geq 0$ ,  $a \geq \sqrt{b}$ : (a)  $\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2(a \pm \sqrt{a^2-b})}$ . (b)  $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$ .

**Bài toán 61** ([Bin23], 14., p. 12). Rút gọn biểu thức  $A = \sqrt{x+2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$ .

**Bài toán 62** ([Bìn23], 15., p. 12). Cho biểu thức  $A = \frac{x + \sqrt{x^2 - 2x}}{x - \sqrt{x^2 - 2x}} - \frac{x - \sqrt{x^2 - 2x}}{x + \sqrt{x^2 - 2x}}$ . (a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức  $A$ . (b) Rút gọn biểu thức  $A$ . (c) Tìm giá trị của  $x$  để  $A < 2$ .

**Bài toán 63** ([Bìn23], 16., p. 12). Lập 1 phương trình bậc 2 với các hệ số nguyên, trong đó: (a)  $2 + \sqrt{3}$  là 1 nghiệm của phương trình. (b)  $6 - 4\sqrt{2}$  là 1 nghiệm của phương trình.

**Bài toán 64** ([Bìn23], 17., p. 13). Chứng minh các số sau là số vô tỷ: (a)  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ . (b)  $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$ .

**Bài toán 65** ([Bìn23], 18., p. 13). Có tồn tại các số hữu tỷ dương  $a, b$  hay không nếu: (a)  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2}$ . (b)  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{\sqrt{2}}$ .

**Bài toán 66** ([Bìn23], 19., p. 13). Cho 3 số  $x, y, \sqrt{x} + \sqrt{y}$  là các số hữu tỷ. Chứng minh mỗi số  $\sqrt{x}, \sqrt{y}$  đều là số hữu tỷ.

**Bài toán 67** ([Bìn23], 20., p. 13). Cho  $a, b, c, d$  là các số dương. Chứng minh tồn tại 1 số dương trong 2 số  $2a + b - 2\sqrt{cd}$  &  $2c + d - 2\sqrt{ab}$ .

**Bài toán 68** ([Bìn23], 21\*, p. 13). (a) Rút gọn biểu thức  $A = \sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}}$  với  $a > 0$ . (b) Tính giá trị của tổng  $B = \sum_{i=1}^{99} \sqrt{1 + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(i+1)^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}}$ .

**Bài toán 69** ([Bìn23], 22\*, p. 13). (a) Nêu 1 cách tính nhẩm  $997^2$ . (b) Tính tổng các chữ số của  $A$  biết  $\sqrt{A} = 99 \dots 96$  (có 100 chữ số 9).

## 4 Biến Đổi Đơn Giản Biểu Thức Chứa Căn Thức Bậc 2

**Bài toán 70** ([Bìn23], Ví dụ 10, p. 14). Rút gọn biểu thức  $A = \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$ .

**Bài toán 71** ([Bìn23], Ví dụ 11, p. 14). Tính giá trị của biểu thức

$$M = \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{(i+1)\sqrt{i} + i\sqrt{i+1}} = \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{25\sqrt{24} + 24\sqrt{25}}.$$

**Bài toán 72** ([Bìn23], 23., p. 15). Rút gọn biểu thức  $A = \sqrt{1-a} + \sqrt{a(a-1)} + a\sqrt{\frac{a-1}{a}}$ .

**Bài toán 73** ([Bìn23], 24., p. 15). Chứng minh các hằng đẳng thức: (a)  $\sqrt{10 + \sqrt{60} - \sqrt{24} - \sqrt{40}} = \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{2}$ . (b)  $\sqrt{6 + \sqrt{24} + \sqrt{12} + \sqrt{8}} - \sqrt{3} = \sqrt{2} + 1$ .

**Bài toán 74** ([Bìn23], 25., p. 15). Cho  $A = \sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}}$ . Biểu diễn  $A$  dưới dạng tổng của 3 căn thức.

**Bài toán 75** ([Bìn23], 26., p. 15). Rút gọn biểu thức  $A = \frac{x + 3 + 2\sqrt{x^2 - 9}}{2x - 6 + \sqrt{x^2 - 9}}$ .

**Bài toán 76** ([Bìn23], 27., p. 15). Rút gọn biểu thức  $B = \frac{x^2 + 5x + 6 + x\sqrt{9 - x^2}}{3x - x^2 + (x+2)\sqrt{9 - x^2}}$ .

**Bài toán 77** ([Bìn23], 28., p. 15). Rút gọn biểu thức:

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}},$$

$$B = \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{\sqrt{i} - \sqrt{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{1} - \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{4}} - \dots - \frac{1}{\sqrt{24} - \sqrt{25}}.$$

## 5 Rút Gọn Biểu Thức Có Chứa Căn Thức Bậc 2

**Bài toán 78** ([Tuy22], Thí dụ 5, p. 14). Cho  $A = \sqrt{11 + \sqrt{96}}$  &  $B = \frac{2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$ . Không dùng máy tính hoặc bảng số, so sánh  $A$  &  $B$ .

**Bài toán 79** ([Tuy22], Thí dụ 6, p. 15). Cho biểu thức  $A = \left( \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} - \frac{x-3}{\sqrt{x-1} - \sqrt{2}} \right) \left( \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{2x} - x} \right)$ . (a) Rút gọn  $A$ . (b) Tính giá trị của  $A$  với  $x = 3 - 2\sqrt{2}$ .

**Bài toán 80** ([Tuy22], 37., pp. 15–16). Không dùng máy tính hoặc bảng số, so sánh các số sau: (a)  $-3\sqrt{11}$  &  $-7\sqrt{2}$ . (b)  $\frac{7}{2}\sqrt{\frac{1}{12}}$  &  $\frac{9}{4}\sqrt{\frac{1}{5}}$ . (c)  $\sqrt{\frac{4}{27}}$  &  $\sqrt{\frac{3}{26}}$ .

**Bài toán 81** ([Tuy22], 38., p. 16). Không dùng máy tính hoặc bảng số, chứng minh  $4\sqrt{5} - 3\sqrt{2} < 5$ .

**Bài toán 82** ([Tuy22], 39., p. 16). Cho  $A = \sqrt{x^2 + 1} - x - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$  trong đó  $x \in \mathbb{R}$ . Xác định  $x \in \mathbb{R}$  để giá trị của  $A$  là 1 số tự nhiên.

**Bài toán 83** ([Tuy22], 40., p. 16). Trục căn thức ở mẫu của các biểu thức sau: (a)  $A = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{2c}}$  trong đó  $a, b, c > 0$  thỏa mãn điều kiện  $c$  là trung bình nhân của  $a$  &  $b$ . (b)  $B = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}}$  trong đó  $a, b, c, d > 0$  thỏa mãn điều kiện  $ab = cd$  &  $a + b \neq c + d$ .

**Bài toán 84** ([Tuy22], 41., p. 16). Tìm  $x, y \in \mathbb{N}$  sao cho  $x > y > 0$  thỏa mãn điều kiện  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{931}$ .

**Bài toán 85** ([Tuy22], 42., p. 16). Chứng minh:  $\frac{2\sqrt{mn}}{\sqrt{m} + \sqrt{n} + \sqrt{m+n}} = \sqrt{m} + \sqrt{n} - \sqrt{m+n}$ . Áp dụng tính  $\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}}$ .

**Bài toán 86** ([Tuy22], 43., p. 16). Chứng minh:  $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Áp dụng tính tổng:  $S = \sum_{i=1}^{399} \frac{1}{(i+1)\sqrt{i} + i\sqrt{i+1}} = \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{400\sqrt{399} + 399\sqrt{400}}$ .

**Bài toán 87** ([Tuy22], 44., p. 16). Tìm  $n \in \mathbb{N}$  nhỏ nhất sao cho  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 0.05$ .

**Bài toán 88** ([Tuy22], 45., p. 17). Cho  $A = \sum_{i=1}^{120} \frac{1}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{120} + \sqrt{121}}$ ,  $B = \sum_{i=1}^{35} \frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{35}}$ . Chứng minh  $A < B$ .

**Bài toán 89** ([Tuy22], 46., p. 17). Cho  $x, y, z > 0$  & khác nhau đôi một. Chứng minh giá trị của biểu thức

$$A = \frac{x}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{z})} + \frac{y}{(\sqrt{y} - \sqrt{z})(\sqrt{y} - \sqrt{x})} + \frac{z}{(\sqrt{z} - \sqrt{x})(\sqrt{z} - \sqrt{y})}$$

không phụ thuộc vào giá trị của các biến.

**Bài toán 90** ([Tuy22], 47., p. 17). Cho biểu thức  $A = \frac{1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{5}{x - \sqrt{x} - 6} - \frac{\sqrt{x} - 2}{3 - \sqrt{x}}$ . (a) Rút gọn  $A$ . (b) Tìm giá trị lớn nhất của  $A$ .

**Bài toán 91** ([Tuy22], 48., p. 17). Cho  $A = \left( \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left( 1 + \frac{x + y + 2xy}{1 - xy} \right)$ . (a) Rút gọn  $A$ . (b) Tính giá trị của  $P$  với  $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$ . (c) Tìm giá trị lớn nhất của  $A$ .

**Bài toán 92** ([Tuy22], 49., p. 17). Cho  $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy} + \sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 1} + \frac{2\sqrt{z}}{\sqrt{zx} + 2\sqrt{z} + 2}$ . Biết  $xyz = 4$ , tính  $\sqrt{P}$ .

**Bài toán 93** ([Bin23], Ví dụ 12, p. 15). Tính:  $A = \left( \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \right) : \left( \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} - \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \right)$ .

**Bài toán 94** ([Bin23], Ví dụ 13, p. 16). Rút gọn biểu thức  $A = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$ .

**Bài toán 95** ([Bin23], Ví dụ 14, p. 16). Cho  $A = \frac{\sqrt{a} + 6}{\sqrt{a} + 1}$ . (a) Tìm các số nguyên  $a$  để  $A$  là số nguyên. (b) Chứng minh với  $a = \frac{4}{9}$  thì  $A$  là số nguyên. (c) Tìm các số hữu tỷ  $a$  để  $A$  là số nguyên.

**Bài toán 96** ([Bin23], 29., p. 18). Rút gọn biểu thức: (a)  $A = \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1 - \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}}$ . (b)  $B = \left( \frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \left( \frac{1 - \sqrt{a}}{1 - a} \right)^2$ . (c)  $C = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}} : \left[ \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \frac{1}{x + y + 2\sqrt{xy}} + \frac{2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^3} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \right]$  với  $x = 2 - \sqrt{3}$  &  $y = 2 + \sqrt{3}$ .

**Bài toán 97** ([Bin23], 30., p. 18). Rút gọn biểu thức  $A = \frac{1 - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}$ .

**Bài toán 98** ([Bin23], 31., p. 18). Rút gọn biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x^2 - y^2}} - \sqrt{x - \sqrt{x^2 - y^2}}}{\sqrt{2(x-y)}}$  với  $x > y > 0$ .

**Bài toán 99** ([Bin23], 32., p. 18). Rút gọn biểu thức  $A = \left( \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) : \left( \frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right)$  với  $x = \frac{a^2 + b^2}{2ab}$  &  $b > a > 0$ .

**Bài toán 100** ([Bin23], 33., p. 18). Rút gọn biểu thức  $B = \frac{2a\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$  với  $x = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{1-a}{a}} - \sqrt{\frac{a}{1-a}} \right)$  &  $0 < a < 1$ .

**Bài toán 101** ([Bin23], 34., p. 18). Rút gọn biểu thức  $A = a + b - \sqrt{\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{c^2+1}}$  với  $a, b, c > 0$  &  $ab + bc + ca = 1$ .

**Bài toán 102** ([Bin23], 35., p. 18). Rút gọn biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}} \cdot \sqrt{2x-1}$ .

**Bài toán 103** ([Bin23], 36., p. 18). Chứng minh hằng đẳng thức sau với  $x \geq 2$

$$\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{\frac{x^2-4}{x}}} + \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{\frac{x^2-4}{x}}} = \sqrt{\frac{2x+4}{\sqrt{x}}}.$$

**Bài toán 104** ([Bin23], 37., p. 18). Cho  $a = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$ ,  $b = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}$ . Tính  $a^7 + b^7$ .

**Bài toán 105** ([Bin23], 38., p. 19). Cho biết  $\sqrt{x^2-6x+13} - \sqrt{x^2-6x+10} = 1$ . Tính  $\sqrt{x^2-6x+13} + \sqrt{x^2-6x+10}$ .

**Bài toán 106** ([Bin23], 39., p. 19). Cho biểu thức  $A = \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-2}$ . (a) Tìm các số nguyên  $a$  để  $A$  là số nguyên. (b) Tìm các số hữu tỷ  $a$  để  $A$  là số nguyên.

**Bài toán 107** ([Bin23], 40., p. 19). Cho  $a = \sqrt{2} - 1$ . (a) Viết  $a^2, a^3$  dưới dạng  $\sqrt{m} - \sqrt{m-1}$  trong đó  $m$  là số tự nhiên. (b) Chứng minh với mọi số nguyên dương  $n$ , số  $a^n$  viết được dưới dạng trên.

## 6 Cube Root, nth Root – Căn Bậc 3, Căn Bậc n

**Bài toán 108** ([Tuy22], Thí dụ 7, p. 19). Tính  $x = \sqrt[3]{17\sqrt{5}+38} - \sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}$ .

**Bài toán 109** ([Tuy22], Thí dụ 8, p. 20). Giải & biện luận phương trình  $(x-a)^n = a^2 - 2a + 1$  với  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a$  là tham số.

**Bài toán 110** ([Tuy22], 50., p. 21). Tính: (a)  $\sqrt[3]{8\sqrt{5}-16}\sqrt[3]{8\sqrt{5}+16}$ . (b)  $\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} + \sqrt[6]{8}$ . (c)  $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}$ .

**Bài toán 111** ([Tuy22], 51., p. 21). (a) Tính  $\frac{2}{\sqrt[3]{3}-1} - \frac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}$ . (b) Cho  $x = \frac{2}{2\sqrt[3]{2}+2+\sqrt[3]{4}}$ ,  $y = \frac{6}{2\sqrt[3]{2}-2+\sqrt[3]{4}}$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = \frac{xy}{x+y}$ .

**Bài toán 112** ([Tuy22], 52., p. 21). Cho  $x = \frac{\sqrt[3]{8-3\sqrt{5}} + \sqrt[3]{64-12\sqrt{20}}}{\sqrt[3]{57}} \sqrt[3]{8+3\sqrt{5}}$ ,  $y = \frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[4]{2}} + \frac{\sqrt{2}-9\sqrt[3]{9}}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[3]{81}}$ . Tính  $xy$ .

**Bài toán 113** ([Tuy22], 53., p. 22). Tính: (a)  $x = \sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$ . (b)  $x = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ . (c)  $x = \sqrt[3]{182+\sqrt{33125}} + \sqrt[3]{182-\sqrt{33125}}$ .

**Bài toán 114** ([Tuy22], 54., p. 22). Cho  $A = \sqrt[3]{60 + \sqrt[3]{60 + \sqrt[3]{60 + \cdots + \sqrt[3]{60}}}}$ . Chứng minh  $3 < A < 3$ . Tìm  $\lfloor A \rfloor$ .

**Bài toán 115** ([Tuy22], 55., p. 22). Cho  $A = \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \cdots + \sqrt{20}}}}$ ,  $B = \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \cdots + \sqrt[3]{24}}}}$ . Chứng minh  $7 < A + B < 8$ . Tìm  $\lfloor A + B \rfloor$ .

**Bài toán 116** ([Tuy22], 56., p. 22). So sánh  $a = \sqrt[3]{5\sqrt{2}}$  &  $b = \sqrt{5\sqrt[3]{2}}$ .

**Bài toán 117** ([Tuy22], 57., p. 22). Cho  $ax^3 = by^3 = cz^3$  &  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ . Chứng minh  $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$ .



**Bài toán 118** ([Tuy22], 58., p. 22). *Giải phương trình: (a)  $x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3}$ . (b)  $x^3 + 2x^2 - 4x = -\frac{8}{3}$ .*

**Bài toán 119** ([Tuy22], 59., p. 22). *Giải phương trình: (a)  $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{5x}$ . (b)  $2\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2} = \sqrt[3]{x^2-4}$ .*

**Bài toán 120** ([Tuy22], 60., p. 22). *Giải phương trình:  $\sqrt[3]{x-5} + \sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{3x+2} = -2$ .*

**Bài toán 121** ([Tuy22], 61., p. 22). *Giải phương trình:  $\sqrt[3]{(x-2)^2} + 4\sqrt[3]{x^2-4} = 5\sqrt[3]{(x+2)^2}$ .*

**Bài toán 122** ([Tuy22], 62., p. 22). *Cho  $A = (a+b)(b+c)(c+a)$  trong đó  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn điều kiện  $abc = 1$ . Chứng minh  $A + 1 \geq 3(a+b+c)$ .*

**Bài toán 123** ([Bìn23], Ví dụ 15, p. 20). *Chứng tỏ số  $m = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$  là 1 nghiệm của phương trình  $x^3 + 3x - 4 = 0$ .*

**Bài toán 124** ([Bìn23], Ví dụ 16, p. 20). *Tính giá trị của biểu thức  $A = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ .*

**Bài toán 125** ([Bìn23], 41., p. 20). *Tính: (a)  $\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 2}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$ . (b)  $\sqrt{3 + \sqrt{3} + \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}}$ . (c)  $\frac{4 + 2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}}$ .*

**Bài toán 126** ([Bìn23], 42., p. 21). *Số  $m = \sqrt[3]{4 + \sqrt{80}} - \sqrt[3]{4 - \sqrt{80}}$  có phải là nghiệm của phương trình  $x^3 + 12x - 8 = 0$  không?*

**Bài toán 127** ([Bìn23], 43., p. 21). *Lập 1 phương trình bậc 3 với các hệ số nguyên, trong đó: (a)  $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$  là 1 nghiệm của phương trình. (b)  $\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}$  là 1 nghiệm của phương trình.*

**Bài toán 128** ([Bìn23], 44., p. 21). *Tính: (a)  $A = \sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$ . (b)  $B = \sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$ . (c)  $C = \sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$ . (d)  $D = \sqrt[3]{2+10\sqrt{\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{2-10\sqrt{\frac{1}{27}}}$ . (e)  $E = \sqrt[3]{4+\frac{5}{3}\sqrt{\frac{31}{3}}} + \sqrt[3]{4-\frac{5}{3}\sqrt{\frac{31}{3}}}$ .*

**Bài toán 129** ([Bìn23], 45., p. 21). *Tìm x biết: (a)  $\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{2-x} = 1$ . (b)  $2x^3 = (x-1)^3$ .*

**Bài toán 130** ([Bìn23], 46., p. 21). *Cho  $am^3 = bn^3 = cp^3$  &  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1$ . Chứng minh:  $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{am^2 + bn^2 + cp^2}$ .*

**Bài toán 131** ([Bìn23], 47., p. 21). *Tính: (a)  $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}(\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}})$ . (b)  $\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}} - \sqrt{2}$ . (c)  $\sqrt[4]{56-24\sqrt{5}}$ . (d)  $1 + \sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}$ . (e)  $\frac{2}{\sqrt{4-3\sqrt[4]{5}}+2\sqrt{5}-\sqrt[4]{125}}$ .*

## 7 Miscellaneous

**Bài toán 132** ([BNS23], Ví dụ 1.1, p. 5). *Rút gọn biểu thức  $A = \sqrt{(7+4\sqrt{3})(a-1)^2}$ .*

**Bài toán 133** ([BNS23], Ví dụ 1.2, p. 6). *Cho biểu thức  $A = \sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$ . (a) Tìm điều kiện xác định của A. (b) Rút gọn biểu thức A với  $1 \leq a < 2$ . (c) Rút gọn biểu thức A với  $a \geq 2$ .*

**Bài toán 134** ([BNS23], Ví dụ 1.3, p. 6). *Đơn giản biểu thức  $A = (\sqrt{8+2\sqrt{7}} + 2\sqrt{8-2\sqrt{7}})(\sqrt{63}+1)$ .*

**Bài toán 135** ([BNS23], Ví dụ 1.4, p. 6). *Tính tổng  $A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$ .*

**Bài toán 136** ([BNS23], Ví dụ 1.5, p. 6). *Tính  $A = \frac{\sqrt{7-2\sqrt{10}}(7+2\sqrt{10})(74-22\sqrt{10})}{\sqrt{125-4\sqrt{50}+5\sqrt{20}+\sqrt{8}}}$ .*

**Bài toán 137** ([BNS23], Ví dụ 1.6, p. 7). *Cho  $a = \sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}} + \sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$ . Chứng minh:  $a^2 - 2a - 2 = 0$ .*

**Bài toán 138** ([BNS23], Ví dụ 1.7, p. 7). *Cho  $a = \sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ . Tính*

$$A = \frac{a^4 - 4a^3 + a^2 + 6a + 4}{a^2 - 2a + 12}.$$

**Bài toán 139** ([BNS23], Ví dụ 1.8, p. 7). *Cho  $f(x) = \frac{1+\sqrt{1+x}}{x+1} + \frac{1+\sqrt{1-x}}{x-1}$  &  $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Tính  $f(a)$ .*

**Bài toán 140** ([BNS23], Ví dụ 1.9, p. 8). *Giả thiết  $x, y, z > 0$  &  $xy + yz + zx = a$ . Chứng minh*

$$x\sqrt{\frac{(a+y^2)(a+z^2)}{a+x^2}} + y\sqrt{\frac{(a+z^2)(a+x^2)}{a+y^2}} + z\sqrt{\frac{(a+x^2)(a+y^2)}{a+z^2}} = 2a.$$

**Bài toán 141** ([BNS23], 1.1, p. 8). *Biểu diễn  $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$  thành  $a + b\sqrt{5}$  với  $a, b \in \mathbb{Q}$ .*

**Bài toán 142** ([BNS23], 1.2, p. 8). Đơn giản biểu thức  $A = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{18} + \sqrt{28 - 16\sqrt{3}}$ .

**Bài toán 143** ([BNS23], 1.3, p. 8). Chứng minh  $\sqrt{10 + 2\sqrt{24}} - \sqrt{10 - 2\sqrt{24}} = 4$ .

**Bài toán 144** ([BNS23], 1.4, p. 8). Tính  $A = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$ .

**Bài toán 145** ([BNS23], 1.5, p. 9). Tính tích  $ab$  với

$$a = \sqrt{2 + \sqrt{2}}\sqrt{3 + \sqrt{7 + \sqrt{2}}}, \quad b = \sqrt{3 + \sqrt{6 + \sqrt{7 + \sqrt{2}}}}\sqrt{3 - \sqrt{6 + \sqrt{7 + \sqrt{2}}}}.$$

**Bài toán 146** ([BNS23], 1.6, p. 9). Chứng minh  $\frac{4}{\sqrt{5} - 1} + \frac{3}{\sqrt{5} - 2} + \frac{16}{\sqrt{5} - 3} = -5$ .

**Bài toán 147** ([BNS23], 1.7, p. 9). Chứng minh  $\left(\frac{2}{\sqrt{6} - 1} + \frac{3}{\sqrt{6} - 2} + \frac{3}{\sqrt{6} - 3}\right) \frac{5}{9\sqrt{6} + 4} = \frac{1}{2}$ .

**Bài toán 148** ([BNS23], 1.8, p. 9). Cho  $f(x) = \frac{x + \sqrt{5}}{\sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{5}}} + \frac{x - \sqrt{5}}{\sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{5}}}$ . Tính  $f(3)$ .

**Bài toán 149** ([BNS23], 1.9, p. 9). Cho  $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$  và  $a = \frac{4}{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}$ . Tính  $f(a)$ .

**Bài toán 150** ([BNS23], Ví dụ 2.1, p. 10). Chứng minh với  $ab \neq 0$ :  $\frac{\sqrt[3]{a^5b^7}}{\sqrt[3]{a^2b}} - \frac{\sqrt[3]{a^4b^8}}{\sqrt[3]{ab^2}} = 0$ .

**Bài toán 151** ([BNS23], Ví dụ 2.2, p. 10). Chứng minh với  $abc \neq 0$ :  $\frac{\sqrt[3]{a^4b^5c^7}}{\sqrt[3]{ab^2c}} = abc^2$ .

**Bài toán 152** ([BNS23], Ví dụ 2.3, p. 10). Với  $a \geq 2 + \sqrt{2}$  và

$$u = \sqrt[3]{\left(a + \frac{2}{a}\right)^3 - 3a^2 - \frac{12}{a^2} + 3\left(a + \frac{2}{a}\right) - 13}, \quad v = \sqrt{a^2 + \frac{4}{a^2} - 8\left(a + \frac{2}{a}\right) + 20}.$$

Chứng minh  $u - v = 3$ .

**Bài toán 153** ([BNS23], Ví dụ 2.4, p. 11). Đơn giản biểu thức  $A = \sqrt[3]{8(7 + 5\sqrt{2})} + \sqrt[3]{216(7 - 5\sqrt{2})} + 4\sqrt{2} - 7$ .

**Bài toán 154** ([BNS23], Ví dụ 2.5, p. 11). Chứng minh  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1$ .

**Bài toán 155** ([BNS23], Ví dụ 2.6, p. 11). Chứng minh nếu  $a = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$  thì  $a^3 + 3a = 4$ .

**Bài toán 156** ([BNS23], Ví dụ 2.7, p. 11). Chứng minh:

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{9 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt[3]{2}} + 3\sqrt[3]{2}\right)\sqrt{3}}}{3 + \sqrt[6]{108}} = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}.$$

**Bài toán 157** ([BNS23], Ví dụ 2.8, p. 12). Chứng minh nếu  $\sqrt[3]{(a+1)^2} + \sqrt[3]{a^2-1} + \sqrt[3]{(a-1)^2} = 1$  thì  $\sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a-1} = 2$ .

**Bài toán 158** ([BNS23], Ví dụ 2.9, p. 12). Đơn giản biểu thức  $A = \frac{x+1}{2\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}+x+\frac{1}{x}}$  với  $x \notin \{-1, 0\}$ .

**Bài toán 159** ([BNS23], Ví dụ 2.10, p. 12). Cho  $a = \sqrt{2} + \sqrt{7 - \sqrt[3]{61 + 46\sqrt{5}}} + 1$ . (a) Chứng minh  $a^4 - 14a^2 + 9 = 0$ . (b) Giả sử  $f(x) = x^5 + 2x^4 - 14x^3 - 28x^2 + 9x + 19$ . Tính  $f(a)$ .

**Bài toán 160** ([BNS23], Ví dụ 2.11, p. 13). Cho  $a, b, c > 0$ . Giả sử  $m, n, p$  là những số nguyên dương lớn hơn 1 sao cho  $bc = \sqrt[m]{a}$ ,  $ca = \sqrt[n]{b}$ , và  $ab = \sqrt[p]{c}$ . Chứng minh trong 3 số  $a, b, c$  phải có ít nhất 1 số bằng 1.

**Bài toán 161** ([BNS23], Ví dụ 2.12, p. 13). Cho  $a = \frac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}$ . (a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận số  $a$  làm nghiệm. (b) Giả sử đa thức  $f(x) = 3x^6 - 4x^5 - 7x^4 + 6x^3 + 6x^2 + x - 53\sqrt{2}$ . Tính  $f(a)$ .



**Bài toán 162** ([BNS23], Ví dụ 2.13, p. 14). Cho  $a = \frac{7 - 4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}} - \sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}}$ . (a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận số  $a$  làm nghiệm. (b) Giả sử đa thức  $f(x) = \frac{x^6 + x^4 + 4x^2}{40(x^4 + 4x^2 - 144)}$ . Tính  $f(a)$ .

**Bài toán 163** ([BNS23], Ví dụ 2.14, p. 14). Cho  $a = \sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}} + \sqrt[3]{38 - 17\sqrt{5}}$ . Giả sử ta có đa thức  $f(x) = (x^3 + 3x + 1935)^{2012}$ . Tính  $f(a)$ .

**Bài toán 164** ([BNS23], 2.1., p. 14). Biểu diễn  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$  thành  $a + b\sqrt{5}$  với  $a, b \in \mathbb{Q}$ .

**Bài toán 165** ([BNS23], 2.2., p. 14). Cho  $a = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{11}}$ . Chứng minh  $a^9 - 6a^6 + 282a^3 = 8$ .

**Bài toán 166** ([BNS23], 2.3., p. 15). Cho  $a = (\sqrt[3]{1 + 2\sqrt{6}} - \sqrt[6]{5 + 4\sqrt{6}})\sqrt[3]{2\sqrt{6} - 1} + 1$ . (a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận  $a$  làm nghiệm. (b) Giả sử  $f(x) = \sum_{i=1}^{2012} ix^i + 2012$ . Tính  $f(a)$ .

**Bài toán 167** ([BNS23], 2.4., p. 15). Chứng minh:

$$\frac{a + 2\sqrt{ab} + 9b}{\sqrt{a} + 3\sqrt{b} - 2\sqrt[4]{ab}} - 2\sqrt{b} = \left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right)^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0.$$

**Bài toán 168** ([BNS23], 2.5., p. 15). Chứng minh:

$$\left(\sqrt[3]{a^4} + b^2\sqrt[3]{a^2} + b^4\right) \frac{\sqrt[3]{a^8} - b^6 + b^4\sqrt[3]{a^2} - a^2b^2}{a^2b^2 + b^2 - a^2b^8 - b^4} = a^2b^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, ab \neq 0, a \neq b^3.$$

**Bài toán 169** ([BNS23], 2.6., p. 15). Cho  $a, b > 0$ . Đơn giản biểu thức

$$A = \frac{\sqrt{a^3 + 2a^2b} + \sqrt{a^4 + 2a^3b} - \sqrt{a^3} - a^2b}{\sqrt{(2a + b - \sqrt{a^2 + 2ab})\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[6]{a^5} + a\right)}}.$$

**Bài toán 170** ([BNS23], 2.7., p. 15). Giả sử  $u^3 \geq v^2$ ,  $u, v \in \mathbb{Q}^+$ . Xác định  $u, v$  để

$$\sqrt{\frac{u - 8\sqrt[6]{u^3v^2} + 4\sqrt[3]{v^2}}{\sqrt{u} - 2\sqrt[3]{v} + 2\sqrt[12]{u^3v^2}}} + 3\sqrt[3]{v} + \sqrt[6]{v} = 1.$$

**Bài toán 171.** Cho  $a, b, c, A, B \in \mathbb{Z}$ ,  $c \geq 0$  thỏa mãn đẳng thức  $(a + b\sqrt{c})^2 = A + B\sqrt{c}$ . (a) Tìm mối quan hệ của  $a, b, c, A, B$ . Biểu diễn  $(A, B)$  theo  $(a, b, c)$ . (b)\* Biểu diễn  $(a, b)$  theo  $(c, A, B)$ .

**Bài toán 172.** Cho  $a, b, c, A, B \in \mathbb{Z}$ ,  $c \geq 0$  thỏa mãn đẳng thức  $(a + b\sqrt{c})^3 = A + B\sqrt{c}$ . (a) Tìm mối quan hệ của  $a, b, c, A, B$ . Biểu diễn  $(A, B)$  theo  $(a, b, c)$ . (b)\* Biểu diễn  $(a, b)$  theo  $(c, A, B)$ .

**Bài toán 173.** Cho  $a, b, c, A, B \in \mathbb{Z}$ ,  $c \geq 0$  thỏa mãn đẳng thức  $(a + b\sqrt[3]{c})^3 = A + B\sqrt[3]{c} + C\sqrt[3]{c^2}$ . (a) Tìm mối quan hệ của  $a, b, c, A, B, C$ . Biểu diễn  $(A, B, C)$  theo  $(a, b, c)$ . (b)\* Biểu diễn  $(a, b)$  theo  $(c, A, B, C)$ .

## Tài liệu

- [Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.
- [BNS23] Vũ Hữu Bình, Phạm Thị Bạch Ngọc, and Nguyễn Tam Sơn. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 9. Tập 1: Đại Số*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 192.
- [Tuy22] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần thứ 17. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2022, p. 340.