3D Vector – Vector Trong Không Gian

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 16 tháng 2 năm 2023

Tóm tắt nội dung

[EN] This text is a collection of problems, from easy to advanced, about 3D vector. This text is also a supplementary material for my lecture note on Elementary Mathematics grade 11, which is stored & downloadable at the following link: GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 11/lecture[1]. The latest version of this text has been stored & downloadable at the following link: GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 11/3D vector[2].

[VI] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài tập chọn lọc từ cơ bản đến nâng cao về biểu thức đại số. Tài liệu này là phần bài tập bổ sung cho tài liệu chính – bài giảng GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 11/lecture của tác giả viết cho Toán Sơ Cấp lớp 11. Phiên bản mới nhất của tài liệu này được lưu trữ & có thể tải xuống ở link sau: GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 11/3D vector.

Nội dung. Vector trong không gian, 2 đường thẳng vuông góc trong không gian, đường thẳng vuông góc với mặt phẳng, 2 mặt phẳng vuông góc, khoảng cách trong không gian.

Mục lục

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

[1] URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_11/NQBH_elementary_mathematics_grade_11.pdf.

[2] URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_11/3D_vector/NQBH_3D_vector.pdf.

1 Vector Trong Không Gian

Bài toán 1 (Hạo et al., 2022, 1, p. 85)**.** *Cho tứ diện $ABCD$. Chỉ ra các vector có điểm đầu là A & điểm cuối là các đỉnh còn lại của hình tứ diện. Các vector đó có cùng nằm trong 1 mặt phẳng không?*

Bài toán 2 (Hạo et al., 2022, 2, p. 85)**.** *Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Kể tên các vector có điểm đầu & điểm cuối là các đỉnh của hình hộp & bằng $\overrightarrow{AB}$.*

Bài toán 3 (Hạo et al., 2022, Ví dụ 1, p. 86)**.** *Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.*

Bài toán 4 (Hạo et al., 2022, 3, p. 86)**.** *Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Thực hiện các phép toán: (a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GH}$; (b) $\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{CH}$.*

Bài toán 5 (Hạo et al., 2022, Ví dụ 2, p. 87)**.** *Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AD,BC, & G là trọng tâm của ΔBCD. Chứng minh: (a) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$; (b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.*

Bài toán 6 (Hạo et al., 2022, 4, p. 87)**.** *Trong không gian cho 2 vector $\vec{a},\vec{b}$ đều khác vector không. Xác định các vector $\vec{m}=2\vec{a}$, $\vec{n}=-3\vec{b}$, & $\vec{p}=\vec{m}+\vec{n}$.*

Bài toán 7 (Hạo et al., 2022, Ví dụ 3, p. 88)**.** *Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD. Chứng minh 3 vector $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.*

Bài toán 8 (Hạo et al., 2022, 5, p. 89)**.** *Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi I,K lần lượt là trung điểm của AB,BC. Chứng minh các đường thẳng IK,ED song song với mặt phẳng (AFC). Từ đó suy ra 3 vector $\overrightarrow{AF},\overrightarrow{IK},\overrightarrow{ED}$ đồng phẳng.*

Bài toán 9 (Hạo et al., 2022, 6, p. 89)**.** *Cho 2 vector $\vec{a},\vec{b}$ đều khác vector $\vec{0}$. Xác định vector $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$ & giải thích tại sao 3 vector $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng.*

Bài toán 10 (Hạo et al., 2022, 7, p. 89)**.** *Cho 3 vector $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ trong không gian. Chứng minh nếu $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$ & 1 số trong 3 số $m,n,p\in\mathbb{R}$ khác 0 thì 3 vector $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng.*

Bài toán 11 (Hạo et al., 2022, Ví dụ 4, p. 89)**.** *Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB & CD. Trên các cạnh AD,BC lần lượt lấy các điểm P,Q sao cho $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ & $\overrightarrow{BQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. Chứng minh 4 điểm M,N,P,Q cùng thuộc 1 mặt phẳng.*

Bài toán 12 (Hạo et al., 2022, Ví dụ 5, p. 91)**.** *Cho hình hộp $ABCD.EFGH$ có $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$. Gọi I là trung điểm của BG. Biểu thị vector $\overrightarrow{AI}$ qua 3 vector $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.*

Bài toán 13 (Hạo et al., 2022, 1., p. 91)**.** *Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(P0$ cắt các cạnh bên AA',BB',CC',DD' lần lượt tại I,K,L,M. Xét các vector có các điểm đầu là các điểm I,K,L,M & có các điểm cuối là các đỉnh của hình lăng trụ. Chỉ ra các vector: (a) Cùng phương với $\overrightarrow{IA}$; (b) Cùng hướng với $\overrightarrow{IA}$; (c) Ngược hướng với $\overrightarrow{IA}$.*

Bài toán 14 (Hạo et al., 2022, 2., p. 91)**.** *Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh: (a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AC'}$; (b) $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{D'D}-\overrightarrow{B'D'}=\overrightarrow{BB'}$; (c) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C'D}=\vec{0}$.*

Bài toán 15 (Hạo et al., 2022, 3., p. 91)**.** *Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi S là 1 điểm nằm ngoài mặt phẳng chứa hình bình hành. Chứng minh: $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$*

Bài toán 16 (Hạo et al., 2022, 4., p. 92)**.** *Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD. Chứng minh: (a) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$; (b) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})$.*

Bài toán 17 (Hạo et al., 2022, 5., p. 92)**.** *Cho tứ diện $ABCD$. Xác định 2 điểm E,F sao cho: (a) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$; (b) $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$.*

Bài toán 18 (Hạo et al., 2022, 6., p. 92)**.** *Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của ΔABC. Chứng minh: $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{DG}$.*

Bài toán 19 (Hạo et al., 2022, 7., p. 92)**.** *Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AC,BD của tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm của MN & P là 1 điểm bất kỳ trong không gian. Chứng minh: (a) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$; (b) $\overrightarrow{PI}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD})$.*

Bài toán 20 (Hạo et al., 2022, 8., p. 92). *Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Phân tích (hay biểu thị) các vector $\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{BC'}$ qua các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.*

Bài toán 21 (Hạo et al., 2022, 9., p. 92). *Cho ΔABC. Lấy điểm S nằm ngoài mặt phẳng (ABC). Trên đoạn SA lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{MS} = -2\overrightarrow{MA}$ & trên đoạn BC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{NB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$. Chứng minh 3 vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC}$ đồng phẳng.*

Bài toán 22 (Hạo et al., 2022, 10., p. 92). *Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi K là giao điểm của AH & DE, I là giao điểm của BH & DF. Chứng minh 3 vector $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KI}, \overrightarrow{FG}$ đồng phẳng.*

2 2 Đường Thẳng Vuông Góc

Bài toán 23 (Hạo et al., 2022, 1, p. 93). *Cho tứ diện đều $ABCD$ có H là trung điểm của AB. Tính góc giữa các cặp vector: (a) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$; (c) $\overrightarrow{CH}, \overrightarrow{AC}$.*

Bài toán 24 (Hạo et al., 2022, Ví dụ 1, p. 93). *Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc & $OA = OB = OC = 1$. Gọi M là trung điểm của AB. Tính góc giữa 2 vector $\overrightarrow{OM}$ & $\overrightarrow{BC}$.*

Bài toán 25 (Hạo et al., 2022, 2, p. 94). *Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. (a) Phân tích các vector $\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{BD}$ theo 3 vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$. (b) Tính $\cos(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{BD})$ & từ đó suy ra $\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{BD}$ vuông góc với nhau.*

Bài toán 26 (Hạo et al., 2022, 3, p. 95). *Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau: (a) $AB, B'C'$' (b) $AC, B'C'$; (c) $A'C', B'C$.*

Bài toán 27 (Hạo et al., 2022, Ví dụ 2, p. 96). *Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ & $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa 2 đường thẳng AB, SC.*

Bài toán 28 (Hạo et al., 2022, Ví dụ 3, p. 97). *Cho tứ diện $ABCD$ có $AB\perp AC$ & $AB\perp BD$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB, CD. Chứng minh AB, PQ là 2 đường thẳng vuông góc với nhau.*

Bài toán 29 (Hạo et al., 2022, 4, p. 97). *Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Nêu tên các đường thẳng đi qua 2 đỉnh của hình lập phương đã cho & vuông góc với: (a) đường thẳng AB; (b) đường thẳng AC.*

Bài toán 30 (Hạo et al., 2022, 5, p. 97). *Tìm những hình ảnh trong thực tế minh họa cho sự vuông góc của 2 đường thẳng trong không gian (trường hợp cắt nhau & trường hợp chéo nhau).*

Bài toán 31 (Hạo et al., 2022, 1., p. 97). *Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Xác định góc giữa các cặp vector: (a) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}$; (b) $\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EG}$; (c) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DH}$.*

Bài toán 32 (Hạo et al., 2022, 2., p. 97). *Cho tứ diện $ABCD$. (a) Chứng minh $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$. (b) Từ đẳng thức trên suy ra: Nếu tứ diện $ABCD$ có $AB\perp CD$ & $AC\perp DB$ thì $AD\perp BC$.*

Bài toán 33 (Hạo et al., 2022, 3., p. 97). *(a) Trong không gian nếu 2 đường thẳng a, b cùng vuông góc với đường thẳng c thì a, b có song song với nhau không? (b) Trong không gian nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b & đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì a có vuông góc với c không?*

Bài toán 34 (Hạo et al., 2022, 4., p. 98). *Trong không gian cho 2 tam giác đều $ABC, A'B'C'$ có chung cạnh AB & nằm trong 2 mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của $AC, CB, BC', C'A$. Chứng minh: (a) $AB\perp CC'$; (b) Tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.*

Bài toán 35 (Hạo et al., 2022, 5., p. 98). *Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ & có $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Chứng minh $SA\perp BC$, $SB\perp AC$, $SC\perp AB$.*

Bài toán 36 (Hạo et al., 2022, 6., p. 98). *Trong không gian cho 2 hình vuông $ABCD, ABC'D'$ có chung cạnh AB & nằm trong 2 mặt phẳng khác nhau, lần lượt có tâm O, O'. Chứng minh $AB\perp OO'$ & tứ giác $CDD'C'$ là hình chữ nhật.*

Bài toán 37 (Hạo et al., 2022, 7., p. 98). *Cho S là diện tích của ΔABC. Chứng minh: $S = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2\cdot\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$.*

Bài toán 38 (Hạo et al., 2022, 8., p. 98). *Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ & $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Chứng minh: (a) $AB\perp CD$; (b) Nếu M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD thì $MN\perp AB$ & $MN\perp CD$.*

3 Đường Thẳng Vuông Góc với Mặt Phẳng

Bài toán 39 (Hạo et al., 2022, 2., p. 104). *Cho 2 đường thẳng phân biệt a, b & mặt phẳng (α).* Đ/S? *(a) Nếu $a \parallel (\alpha)$ & $b \perp (\alpha)$ thì $a \perp b$. (b) Nếu $a \parallel (\alpha)$ & $b \perp a$ thì $b \perp (\alpha)$. (c) Nếu $a \parallel (\alpha)$ & $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$. (d) Nếu $a \perp (\alpha)$ & $b \perp a$ thì $b \parallel (\alpha)$.*

Bài toán 40 (Hạo et al., 2022, 2., p. 104). *Cho tứ diện $ABCD$ có 2 mặt ABC & BCD là 2 tam giác cân có chung cạnh đáy BC. Gọi I là trung điểm của cạnh BC. (a) Chứng minh $BC \perp (ADI)$. (b) Gọi AH là đường cao của ΔADI, chứng minh $AH \perp (BCD)$.*

Bài toán 41 (Hạo et al., 2022, 3., pp. 104–105). *Cho hình chóp $S.ABCD$. có đáy là hình thoi $ABCD$ & có $SA = SB = SC = SD$. Gọi O là giao điểm của AC, BD. Chứng minh: (a) $SO \perp (ABCD)$; (b) $AC \perp (SBD)$ & $BD \perp (SAC)$.*

Bài toán 42 (Hạo et al., 2022, 4., p. 105). *Cho tứ diện $OABC$ có 3 cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ O tới mặt phẳng (ABC). Chứng minh: (a) H là trực tâm của ΔABC. (b) $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.*

Bài toán 43 (Hạo et al., 2022, 5., p. 105). *Trên mặt phẳng (α) cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC & BD, S là 1 điểm nằm ngoài mặt phẳng (α) sao cho $SA = SC$, $SB = SD$. Chứng minh: (a) $SO \perp (\alpha)$; (b) Nếu trong mặt phẳng (SAB) kẻ SH vuông góc với AB tại H thì AB vuông góc với mặt phẳng (SOH).*

Bài toán 44 (Hạo et al., 2022, 6., p. 105). *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ & có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi I, K là 2 điểm lần lượt lấy trên 2 cạnh SB, SD sao cho $\frac{SI}{SB} = \frac{SK}{SD}$. Chứng minh: (a) $BD \perp SC$; (b) $IK \perp (SAC)$.*

Bài toán 45 (Hạo et al., 2022, 7., p. 105). *Cho tứ diện $SABC$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) & có ΔABC vuông tại B. Trong mặt phẳng (SAB) kẻ AM vuông góc với SB tại M. Trên cạnh SC lấy điểm N sao cho $\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC}$. Chứng minh: (a) $BC \perp (SAB)$ & $AM \perp (SBC)$; (b) $SB \perp AN$.*

Bài toán 46 (Hạo et al., 2022, 8., p. 105). *Cho điểm S không thuộc mặt phẳng (α) có hình chiếu trên (α) là điểm H. Với điểm M bất kỳ trên (α) & M không trùng với H, gọi SM là đường xiên & đoạn HM là hình chiếu của đường xiên đó. Chứng minh: (a) 2 đường xiên bằng nhau $\Leftrightarrow$ 2 hình chiếu của chúng bằng nhau. (b) Với 2 đường xiên cho trước, đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn & ngược lại đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.*

4 2 Mặt Phẳng Vuông Góc

5 Khoảng Cách

Tài liệu

Hạo, Trần Văn, Nguyễn Mộng Hy, Khu Quốc Anh, Nguyễn Hà Thanh, and Phan Văn Viện (2022). *Hình Học 11*. Tái bản lần thứ 15. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 136.