Problem & Solution: Trigonometry – Bài Tập Lượng Giác & Lời Giải

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 22 tháng 5 năm 2023

Tóm tắt nội dung

Mục lục

1 Hệ Thức về Cạnh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông

Trong 1 tam giác vuông, nếu biết 2 cạnh, hoặc 1 cạnh & 1 góc nhọn thì có thể tính được các góc & các cạnh còn lại của tam giác đó.

Bài toán 1. *Xét ΔABC vuông tại A, cạnh huyền $BC = a$, 2 cạnh góc vuông $AC = b$, $AB = c$. Gọi $AH = h$ là đường cao ứng với cạnh huyền BC[1] & $CH = b'$, $BH = c'$ lần lượt là hình chiếu của AC, AB trên cạnh huyền BC. Chứng minh: (a) $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$. (b) Định lý Pythagore $a^2 = b^2 + c^2$. (c) $h^2 = b'c'$. (d) $bc = ah$. (e) $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.*

Chứng minh. (a) $\Delta AHC \backsim \Delta BAC$ (g.g) vì 2 tam giác vuông này có chung $\widehat{C}$ nhọn, nên $\frac{CH}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC^2 = BC \cdot CH \Leftrightarrow b^2 = ab'$. Tương tự, $\Delta BHA \backsim \Delta BAC$ (g.g) vì 2 tam giác vuông này có chung $\widehat{B}$ nhọn, nên $\frac{BH}{AB} = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow AB^2 = BC \cdot BH \Leftrightarrow c^2 = ac'$. (b) Theo (a), $b^2 + c^2 = ab' + ac' = a(b' + c') = a \cdot a = a^2$. (c) Vì $\Delta AHC \backsim \Delta BAC$ & $\Delta BHA \backsim \Delta BAC$ nên $\Delta AHC \backsim \Delta BHA$, suy ra $\frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH} \Rightarrow AH^2 = BH \cdot CH \Leftrightarrow h^2 = b'c'$. (d) Tính diện tích ΔABC theo 2 cách: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot AC \Leftrightarrow AH \cdot BC = AB \cdot AC \Leftrightarrow ah = bc$. (e) $ah = bc \Leftrightarrow a^2h^2 = b^2c^2 \Leftrightarrow (b^2 + c^2)h^2 = b^2c^2 \Leftrightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{b^2+c^2}{b^2c^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$. □

Lưu ý 1. *Các hệ thức trên có thể được suy ra trực tiếp từ các tỷ số đồng dạng của bộ 3 tam giác đồng dạng: $\Delta BHA \backsim \Delta AHC \backsim \Delta BAC$. Thật vậy, $\Delta AHC \backsim \Delta BAC \Leftrightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{HC}{AC} = \frac{AC}{BC} \Leftrightarrow \frac{h}{c} = \frac{b'}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow bh = b'c$, $b^2 = ab'$, & $ah = bc$. $\Delta BHA \backsim \Delta BAC \Leftrightarrow \frac{HB}{AB} = \frac{AH}{AC} = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow \frac{c'}{c} = \frac{h}{b} = \frac{c}{a} \Rightarrow hc = bc'$, $ah = bc$, & $c^2 = ac'$. $\Delta AHC \backsim \Delta BHA \Leftrightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH} = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow \frac{h}{c'} = \frac{b'}{h} = \frac{b}{c} \Rightarrow h^2 = b'c'$, $bh = b'c$, & $ch = bc'$. Hơn nữa, $\widehat{BAH} = \widehat{C}$ & $\widehat{CAH} = \widehat{B}$.*

Định lý 1 (Hệ thức giữa cạnh góc vuông & hình chiếu của nó trên cạnh huyền)**.** *Trong 1 tam giác vuông, bình phương mỗi cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền & hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền. Nói cách khác, mỗi cạnh góc vuông là trung bình nhân của cạnh huyền & hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền. $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$*

3 hệ thức về đường cao trong tam giác vuông:

Định lý 2. *Trong 1 tam giác vuông, bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tích 2 hình chiếu của 2 cạnh góc vuông trên cạnh huyền. Nói cách khác, đường cao ứng với cạnh huyền là trung bình nhân của 2 đoạn thẳng mà nó định ra trên cạnh huyền. $h^2 = b'c'$.*

Định lý 3. *Trong 1 tam giác vuông, tích 2 cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền & đường cao tương ứng. $bc = ah$.*

Định lý 4. *Trong 1 tam giác vuông, nghịch đảo của bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tổng nghịch đảo của bình phương 2 cạnh góc vuông. $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.*

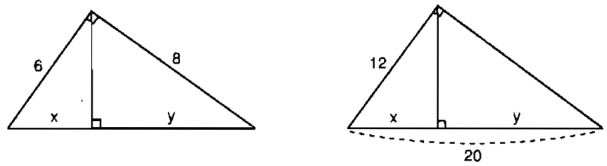
*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

[1] AB, AC là đường cao ứng với nhau.

Bài toán 2. *Cho ΔABC có độ dài 2 cạnh góc vuông là b & c. Tính độ dài đường cao h xuất phát từ đỉnh góc vuông theo b, c.*

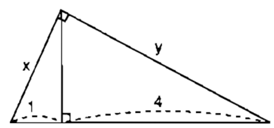
Giải. Có $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \Rightarrow h^2 = \frac{b^2c^2}{b^2+c^2}$. □

Bài toán 3 ([Chí+23], 1., p. 68)**.** *Tính x, y:*



Giải. (a) Áp dụng định lý Pythagore, cạnh huyền dài $x + y = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. Áp dụng định lý 1 được $6^2 = (x + y)x = 10x \Rightarrow x = \frac{6^2}{10} = 3.6$, $y = 10 - x = 10 - 3.6 = 6.4$ (hoặc $8^2 = (x + y)y = 10y \Rightarrow y = \frac{8^2}{10} = 6.4$). (b) Áp dụng định lý 1 được $12^2 = 20x \Rightarrow x = \frac{12^2}{20} = 7.2$, $y = 20 - x = 20 - 7.2 = 12.8$. □

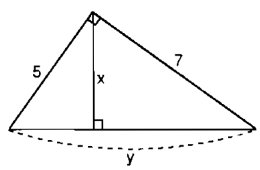
Bài toán 4 ([Chí+23], 2., p. 68)**.** *Tính x, y:*



1st giải. Áp dụng định lý 1 được $x^2 = (1 + 4) \cdot 1 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}$, $y = (1 + 4)4 = 20 \Rightarrow y = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. □

2nd giải. Áp dụng định lý 1 được $x^2 = (1 + 4) \cdot 1 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}$. Áp dụng định lý Pythagore: $y = \sqrt{(1 + 4)^2 - x^2} = \sqrt{5^2 - 5} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. □

Bài toán 5 ([Chí+23], 3., p. 69)**.** *Tính x, y:*

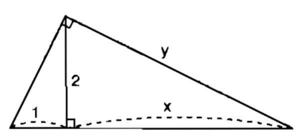


1st giải. Áp dụng định lý Pythagore: $y = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74}$. Áp dụng định lý 3, ta có $5 \cdot 7 = xy \Rightarrow x = \dfrac{5 \cdot 7}{y} = \dfrac{35}{\sqrt{74}} = \dfrac{35\sqrt{74}}{74}$. □

2nd giải. Áp dụng định lý Pythagore: $y = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74}$. Áp dụng định lý 4 được $x = \sqrt{\dfrac{5^2 + 7^2}{5^2 \cdot 7^2}} = \dfrac{35\sqrt{74}}{74}$. □

3rd giải. Áp dụng định lý 4 được $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{5^2} + \dfrac{1}{7^2} \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{5^2 + 7^2}{5^2 \cdot 7^2}} = \dfrac{35\sqrt{74}}{74}$. Áp dụng định lý 3 được $5 \cdot 7 = xy \Rightarrow y = \dfrac{5 \cdot 7}{x} = \dfrac{5 \cdot 7\sqrt{74}}{35} = \sqrt{74}$. □

Bài toán 6 ([Chí+23], 4., p. 69)**.** *Tính x, y:*



1st giải. Áp dụng định lý 2 được $2^2 = 1 \cdot x \Leftrightarrow x = 4$. Áp dụng định lý Pythagore: $y = \sqrt{x^2 + 2^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. □

1st giải. Áp dụng định lý 2 được $2^2 = 1 \cdot x \Leftrightarrow x = 4$. Áp dụng định lý 1 được $y^2 = (1 + x)x = (1 + 4) \cdot 4 = 20 \Rightarrow y = 2\sqrt{5}$. □

Bài toán 7 ([Chí+23], 5., p. 69)**.** *Trong tam giác vuông với các cạnh góc vuông có độ dài là 3 & 4, kẻ đường cao ứng với cạnh huyền. Tính đường cao này & độ dài các đoạn thẳng mà nó định ra trên cạnh huyền.*

Giải. $b = 3$, $c = 4$. Áp dụng định lý Pythagore: $a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Áp dụng định lý 3 được $h = \frac{bc}{a} = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2.4$. Áp dụng định lý 1 được $b^2 = ab' \Rightarrow b' = \frac{b^2}{a} = \frac{3^2}{5} = 1.8$, $c' = a - b' = 5 - 1.8 = 3.2$. □

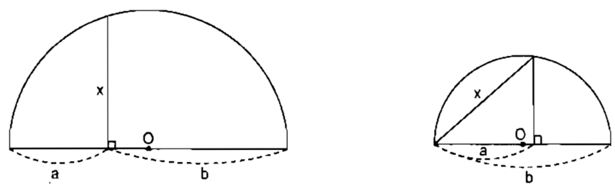
Bài toán 8 ([Chí+23], 6., p. 69)**.** *Đường cao của 1 tam giác vuông chia cạnh huyền thành 2 đoạn thẳng có độ dài là 1 & 2. Tính các cạnh góc vuông của tam giác này.*

Giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $b' = 1$, $c' = 2$. Có $a = b' + c' = 1 + 2 = 3$, $b^2 = ab' = 3 \cdot 1 = 3 \Rightarrow b = \sqrt{3}$, $c^2 = ac' = 3 \cdot 2 = 6 \Rightarrow c = \sqrt{6}$ (hoặc áp dụng định lý Pythagore: $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3^2 - 3} = \sqrt{6}$). □

Bài toán 9 (Mở rộng [Chí+23], 6., p. 69)**.** *Đường cao của 1 tam giác vuông chia cạnh huyền thành 2 đoạn thẳng có độ dài là b' & c'. Tính các cạnh góc vuông của tam giác này theo b', c'.*

Giải. $a = b' + c'$, $b^2 = ab' = (b' + c')b' \Rightarrow b = \sqrt{b'(b' + c')}$, $c^2 = ac' = (b' + c')c' \Rightarrow c = \sqrt{c'(b' + c')}$ (hoặc áp dụng định lý Pythagore: $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(b' + c')^2 - b'(b' + c')} = \sqrt{c'(b' + c')}$). □

Bài toán 10 ([Chí+23], 7., p. 69–70)**.** *Người ta đưa ra 2 cách vẽ đoạn trung bình nhân x của 2 đoạn thẳng a, b (i.e., $x^2 = ab$ hay $x = \sqrt{ab}$) như trong 2 hình sau. Chứng minh các 2 vẽ này là đúng.*



Hint. Nếu 1 tam giác có đường trung tuyến ứng với 1 cạnh bằng nửa cạnh đó thì tam giác đó là tam giác vuông.

Chứng minh. 2 tam giác tạo nội tiếp (nửa) đường tròn ngoại tiếp ở 2 hình đều có trung tuyến ứng với cạnh dài nhất bằng nửa cạnh ấy nên là 2 tam giác vuông (vì trung tuyến là 1 bán kính, còn cạnh ứng với trung tuyến đó là 1 đường kính của hình tròn). Với hình đầu, áp dụng định lý 2 được $x^2 = ab$. Với hình sau, áp dụng định lý 1 được $x^2 = ab$. Cả 2 trường hợp đều cho $x^2 = ab$, hay $x = \sqrt{ab}$, i.e., x là trung bình nhân của 2 đoạn thẳng a, b. □

Bài toán 11. *Chứng minh: Nếu 1 tam giác có đường trung tuyến ứng với 1 cạnh bằng nửa cạnh đó thì tam giác đó là tam giác vuông.*

1st chứng minh. Giả sử ΔABC có đường trung tuyến $AM = \frac{1}{2}BC$ với M là trung điểm BC. $MA = MB = MC \Rightarrow \Delta AMB, \Delta AMC$ đều cân tại M, suy ra $\widehat{B} = \widehat{BAM}$, $\widehat{C} = \widehat{CAM}$. Cộng 2 đẳng thức, vế theo vế, suy ra $\widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{BAM} + \widehat{CAM} = \widehat{A}$, mà $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$, suy ra $\widehat{A} = \widehat{B} + \widehat{C} = \frac{180°}{2} = 90°$. Vậy ΔABC vuông tại A. □

2nd chứng minh. Giả sử ΔABC có đường trung tuyến $AM = \frac{1}{2}BC$ với M là trung điểm BC. $MA = MB = MC$ nên ΔABC nội tiếp đường tròn tâm M đường kính BC. Vì BC là đường kính nên $\widehat{A} = 90°$. □

3rd chứng minh. Giả sử ΔABC có đường trung tuyến $AM = \frac{1}{2}BC$ với M là trung điểm BC. Công thức tính độ dài đường trung tuyến $m_a \coloneqq AM = \sqrt{\dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}}$.

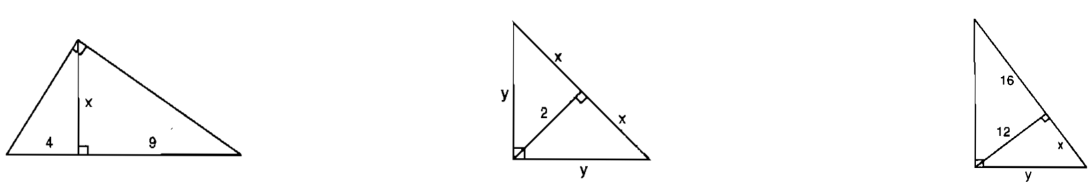
$$AM = \frac{1}{2}BC \Leftrightarrow m_a^2 = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow 2b^2 + 2c^2 - a^2 = a^2 \Leftrightarrow 2b^2 + 2c^2 = 2a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2.$$

Áp dụng định lý Pythagore đảo: ΔABC vuông tại A. □

Lưu ý 2. *Công thức tính độ dài 3 đường trung tuyến của ΔABC (xem, e.g., Wikipedia/trung tuyến):*

$$m_a = \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}},\ m_b = \sqrt{\frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4}},\ m_c = \sqrt{\frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}}.$$

Bài toán 12 ([Chí+23], 8., p. 70)**.** *Tính x, y:*



1st giải. (a) Áp dụng định lý 2 được $x^2 = 4 \cdot 9 = 36 \Rightarrow x = \sqrt{36} = 6$. (b) Áp dụng định lý 2 được $2^2 = x \cdot x = x^2 \Rightarrow x = 2$. Áp dụng định lý Pythagore: $y^2 + y^2 = (x + x)^2 \Leftrightarrow 2y^2 = 4x^2 \Rightarrow y = x\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. (c) Áp dụng định lý 2 được $12^2 = 16x \Rightarrow x = \frac{12^2}{16} = 9$. Áp dụng định lý 1 được $y^2 = (x + 16)x = (9 + 16) \cdot 9 = 25 \cdot 9 \Rightarrow y = \sqrt{25 \cdot 9} = 5 \cdot 3 = 15$. □

2nd giải. (b) Tam giác vuông này có đường cao ứng với cạnh huyền đồng thời là trung tuyến nên nó là tam giác vuông cân. Vì trung tuyến dài bằng nửa cạnh huyền nên $x = 2$. Tam giác vuông cân có $y = x\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. (c) Áp dụng định lý 2 được $12^2 = 16x \Rightarrow x = \frac{12^2}{16} = 9$. Áp dụng định lý Pythagore: $y = \sqrt{x^2 + 12^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$. □

Bài toán 13 ([Chí+23], 9., p. 70)**.** *Cho hình vuông $ABCD$. Gọi I là 1 điểm nằm giữa A & B. Tia DI & tia CB cắt nhau ở K. Kẻ đường thẳng qua D, vuông góc với DI. Đường thẳng này cắt đường thẳng BC tại L. Chứng minh: (a) ΔDIL là 1 tam giác cân. (b) Tổng $\dfrac{1}{DI^2} + \dfrac{1}{DK^2}$ không đổi khi I thay đổi trên cạnh AB.*

Bài toán 14 ([Thâ+23], 1., p. 102)**.** *Tính x, y:*

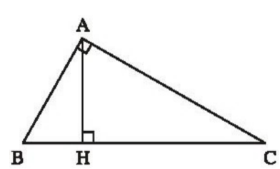
Chứng minh. (a) Xét 2 tam giác vuông ΔDAI & ΔDCL: $AD = CD$ (2 cạnh hình vuông $ABCD$), $\widehat{ADI} = \widehat{CDL}$ (cùng phụ $\widehat{CDI}$). Suy ra $\Delta DAI = \Delta DCL$ (cgv–gn) $\Rightarrow DI = DL \Rightarrow \Delta DIL$ cân tại D. (b) Xét ΔDKL vuông tại D, áp dụng định lý 4 được: $\dfrac{1}{DK^2} + \dfrac{1}{DL^2} = \dfrac{1}{CD^2}$, mà $DI = DL$, suy ra $\dfrac{1}{DI^2} + \dfrac{1}{DK^2} = \dfrac{1}{CD^2}$ không đổi khi I thay đổi trên cạnh AB. □

Bài toán 15 ([Thâ+23], 2., p. 102)**.** *Tính x, y:*

Bài toán 16 ([Thâ+23], 3., p. 103)**.** *Tính x, y:*

Bài toán 17 ([Thâ+23], 4., p. 103)**.** *Tính x, y:*

Bài toán 18 ([Thâ+23], 5., p. 103)**.** *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH:*



Giải bài toán trong mỗi trường hợp sau: (a) Cho $AH = 16$, $BH = 25$. Tính AB, AC, BC, CH. (b) Cho $AB = 12$, $BH = 6$. Tính AH, AC, BC, CH.

Bài toán 19 ([Thâ+23], 6., p. 103)**.** *Cho tam giác vuông với các cạnh góc vuông có độ dài là 5 & 7, kẻ đường cao ứng với cạnh huyền. Tính đường cao này & các đoạn thẳng mà nó chia ra trên cạnh huyền.*

Bài toán 20 ([Thâ+23], 7., p. 103)**.** *Đường cao của 1 tam giác vuông chia cạnh huyền thành 2 đoạn thẳng có độ dài là 3 & 4. Tính các cạnh góc vuông của tam giác này.*

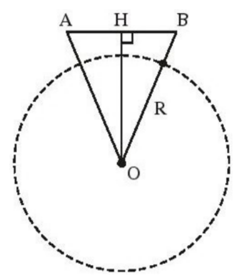
Bài toán 21 ([Thâ+23], 8., p. 103)**.** *Cạnh huyền của 1 tam giác vuông lớn hơn 1 cạnh góc vuông là 1 cm & tổng của 2 cạnh góc vuông lớn hơn cạnh huyền 4 cm. Tính các cạnh của tam giác vuông này.*

Bài toán 22 ([Thâ+23], 9., p. 104). *1 tam giác vuông có cạnh huyền là* 5 *& đường cao ứng với cạnh huyền là* 2. *Tính cạnh nhỏ nhất của tam giác vuông này.*

Bài toán 23 ([Thâ+23], 10., p. 104). *Cho 1 tam giác vuông. Biết tỷ số 2 cạnh góc vuông là* $3:4$ *& cạnh huyền là* 125 cm. *Tính độ dài các cạnh góc vuông & hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền.*

Bài toán 24 ([Thâ+23], 11., p. 104). *Cho* ΔABC *vuông tại* A. *Biết* $\frac{AB}{AC}=\frac{5}{6}$, *đường cao* $AH = 30$ cm. *Tính* HB, HC.

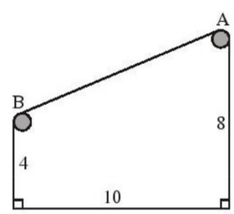
Bài toán 25 ([Thâ+23], 12., p. 104). *2 vệ tinh đang bay ở vị trí* A *&* B *cùng cách mặt đất* 230 km *có nhìn thấy nhau hay không nếu khoảng cách giữa chúng theo đường thẳng là* 2200 km*? Biết bán kính* R *của Trái Đất gần bằng* 6370 km *& 2 vệ tinh nhìn thấy nhau nếu* $OH > R$.



Bài toán 26 ([Thâ+23], 13., p. 104). *Cho 2 đoạn thẳng có độ dài là* a, b. *Dựng các đoạn thẳng có độ dài tương ứng bằng: (a)* $\sqrt{a^2+b^2}$. *(b)* $\sqrt{a^2-b^2}$ $(a > b)$.

Bài toán 27 ([Thâ+23], 14., p. 104). *Cho 2 đoạn thẳng có độ dài là* a, b. *Dựng đoạn thẳng* $\sqrt{ab}$ *như thế nào?*

Bài toán 28 ([Thâ+23], 15., p. 104). *Giữa 2 tòa nhà (kho & phân xưởng) của 1 nhà máy người ta xây dựng 1 băng chuyền* AB *để chuyển vật liệu. Khoảng cách giữa 2 tòa nhà là* 10 m, *còn 2 vòng quay của băng chuyền được đặt ở độ cao* 8 m *&* 4 m *so với mặt đất. Tìm độ dài* AB *của băng chuyền.*



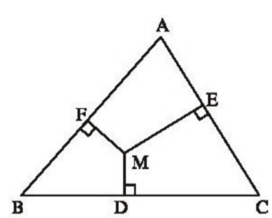
Bài toán 29 ([Thâ+23], 16., p. 104). *Cho tam giác có độ dài các cạnh là* $5, 12, 13$. *Tìm góc của tam giác đối diện với cạnh có độ dài* 13.

Bài toán 30 ([Thâ+23], 17., p. 104). *Cho hình chữ nhật* $ABCD$. *Đường phân giác của góc* B *cắt đường chéo* AC *thành 2 đoạn* $4\frac{2}{7}$ m *&* $5\frac{5}{7}$ m. *Tính các kích thước của hình chữ nhật.*

Bài toán 31 ([Thâ+23], 18., p. 105). *Cho* ΔABC *vuông tại* A, *vẽ đường cao* AH. *Chu vi của* ΔABH *là* 30 cm *& chu vi* ΔACH *là* 40 cm. *Tính chu vi của* ΔABC.

Bài toán 32 ([Thâ+23], 19., p. 105). *Cho* ΔABC *vuông tại* A *có cạnh* $AB = 6$ cm *&* $AC = 8$ cm. *Các đường phân giác trong & ngoài của góc* B *cắt đường thẳng* ABC *lần lượt tại* M, N. *Tính độ dài các đoạn thẳng* AM, AN.

Bài toán 33 ([Thâ+23], 20., p. 105). *Cho* ΔABC. *Từ 1 điểm* M *bất kỳ trong tam giác kẻ* MD, ME, MF *lần lượt vuông góc với các cạnh* BC, CA, AB. *Chứng minh:* $BD^2 + CE^2 + AF^2 = CD^2 + AE^2 + BF^2$.



Bài toán 34 ([Thâ+23], 1.1., p. 105). *Cho* ΔABC *vuông tại* A *có* $AB : AC = 3 : 4$ *& đường cao* AH *bằng* 9 cm. *Tính độ dài đoạn thẳng* CH.

Bài toán 35 ([Thâ+23], 1.2., p. 105). *Cho* ΔABC *vuông tại* A *có* $AB : AC = 4 : 5$ *& đường cao* AH *bằng* 12 cm. *Tính độ dài đoạn thẳng* BH.

Bài toán 36 ([Thâ+23], 1.3., p. 105). *(a) Tính* h, b, c *nếu biết* $b' = 36$, $c' = 64$. *(b) Tính* h, b, b', c' *nếu biết* $a = 9$, $c = 6$.

Bài toán 37 ([Thâ+23], 1.4., p. 105). *Biểu thị b', c' qua a, b, c.*

Bài toán 38 ([Thâ+23], 1.5., p. 105). *Chứng minh: (a) $h = \frac{bc}{a}$. (b) $\frac{b^2}{c^2} = \frac{b'}{c'}$.*

Bài toán 39 ([Thâ+23], 1.6., p. 106). *Đường cao của 1 tam giác vuông kẻ từ đỉnh góc vuông chia cạnh huyền thành 2 đoạn, trong đó đoạn lớn hơn bằng* 9 cm. *Tính cạnh huyền của tam giác vuông đó nếu 2 cạnh góc vuông có tỷ lệ* $6 : 5$.

Bài toán 40 ([Thâ+23], 1.7., p. 106). *Trong tam giác có các cạnh là* 5 cm, 12 cm, 13 cm, *kẻ đường cao đến cạnh lớn nhất. Tính các đoạn thẳng mà đường cao này chia ra trên cạnh lớn nhất đó.*

Bài toán 41 ([Thâ+23], 1.8., p. 106). *ΔABC vuông tại A có đường cao AH bằng* 12 cm. *Tính cạnh huyền BC nếu biết $HB : HC = 1 : 3$.*

Bài toán 42 ([Thâ+23], 1.9., p. 106). *Cho ΔABC vuông cân tại A, đường trung tuyến BM. Gọi D là chân đường vuông góc kẻ từ C đến BM & H là chân đường vuông góc kẻ từ D đến AC. Đ/S? (a) $\Delta HCD \backsim \Delta ABM$. (b) $AH = 2HD$.*

Bài toán 43 ([Thâ+23], 1.10., p. 106). *Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A có cạnh đáy AB bằng* 6 cm, *cạnh bên AD bằng* 4 cm *& 2 đường chéo vuông góc với nhau. Tính độ dài các cạnh CD, BC, & đường chéo BD.*

Bài toán 44 ([Tuy23], Thí dụ 1, p. 103). *Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{B} = \widehat{C} = 90°$, 2 đường chéo vuông góc với nhau tại H. Biết $AB = 3\sqrt{5}$* cm, *$HA = 3$* cm. *Chứng minh: (a) $HA : HB : HC : HD = 1 : 2 : 4 : 8$. (b) $\frac{1}{AB^2} - \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{HB^2} - \frac{1}{HC^2}$.*

Bài toán 45 ([Tuy23], 1., p. 105). *Cho hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$, 2 đường chéo vuông góc với nhau. Biết $AC = 16$* cm, *$BD = 12$* cm. *Tính chiều cao của hình thang.*

Bài toán 46 ([Tuy23], 2., p. 105). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH, đường phân giác AD. Biết $BH = 63$* cm, *$CH = 112$* cm, *tính HD.*

Bài toán 47 ([Tuy23], 3., p. 105). *Cho ΔABC vuông tại A. 2 đường trung tuyến AD, BE vuông góc với nhau tại G. Biết $AB = \sqrt{6}$* cm. *Tính cạnh huyền BC.*

Bài toán 48 ([Tuy23], 4., p. 105). *Gọi a, b, c là các cạnh của 1 tam giác vuông, h là đường cao ứng với cạnh huyền a. Chứng minh tam giác có các cạnh $a + h, b + c$, & h cũng là 1 tam giác vuông.*

Bài toán 49 ([Tuy23], 5., p. 105). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, K thứ tự là hình chiếu của H trên AB, AC. Đặt $c = AB$, $b = AC$. (a) Tính AI, AK theo b, c. (b) Chứng minh $\frac{BI}{CK} = \frac{c^3}{b^3}$.*

Bài toán 50 ([Tuy23], 6., p. 105). *Cho ΔABC, $AB = 1$, $\widehat{A} = 105°$, $\widehat{B} = 60°$. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = 1$. Vẽ $ED \parallel AB$, $D \in AC$. Chứng minh: $\frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{4}{3}$.*

Bài toán 51 ([Tuy23], 7., p. 105). *Cho hình chữ nhật $ABCD$, $AB = 2BC$. Trên cạnh BC lấy điểm E. Tia AE cắt đường thẳng CD tại F. Chứng minh: $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{4AF^2}$.*

Bài toán 52 ([Tuy23], 8., p. 105). *Cho 3 đoạn thẳng có độ dài a, b, c. Dựng đoạn thẳng x sao cho $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.*

Bài toán 53 ([Tuy23], 9., p. 105). *Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 120°$. 1 đường thẳng d không cắt các cạnh của hình thoi. Chứng minh: tổng các bình phương hình chiếu của 4 cạnh với 2 lần bình phương hình chiếu của đường chéo AC trên đường thẳng d không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d.*

Bài toán 54 ([Tuy23], 10., p. 106). *Cho ΔABC vuông tại A. Từ 1 điểm O ở trong tam giác ta vẽ $OD \perp BC$, $OE \perp CA$, $OF \perp AB$. Xác định vị trí của O để $OD^2 + OE^2 + OF^2$ nhỏ nhất.*

Bài toán 55 ([Bìn+23], Ví dụ 1, p. 5). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $AB : AC = 3 : 4$ & $AB + AC = 21$* cm. *(a) Tính các cạnh của ΔABC. (b) Tính độ dài các đoạn AH, BH, CH.*

Bài toán 56 (Mở rộng [Bìn+23], Ví dụ 1, p. 5). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $AB : AC = m : n$ & $AB + AC = p$* cm. *(a) Tính các cạnh của ΔABC. (b) Tính độ dài các đoạn AH, BH, CH.*

Bài toán 57 ([Bìn+23], Ví dụ 2, p. 6). *Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90°$, $\widehat{B} = 60°$, $CD = 30$* cm, *$CA \perp CB$. Tính diện tích của hình thang.*

Bài toán 58 ([Bìn+23], Ví dụ 3, p. 7). *Cho ΔABC nhọn, đường cao CK, H là trực tâm. Gọi M là 1 điểm trên CK sao cho $\widehat{AMB} = 90°$. S, S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích các $\Delta AMB, \Delta ABC, \Delta ABH$. Chứng minh $S = \sqrt{S_1 S_2}$.*

Bài toán 59 ([Bìn+23], 1.1., p. 7). *Cho ΔABC vuông cân tại A & điểm M nằm giữa B & C Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của điểm M lên AB, AC. Chứng minh $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$.*

Bài toán 60 ([Bìn+23], 1.2., p. 7). *Cho hình chữ nhật $ABCD$ & điểm O nằm trong hình chữ nhật đó. Chứng minh $OA^2+OC^2 = OB^2+CD^2$.*

Bài toán 61 ([Bìn+23], 1.3., p. 8). *Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 6$ cm, $CD = 8$ cm. Đường thẳng kẻ từ D vuông góc với AC tại E, cắt cạnh AB tại F. Tính độ dài các đoạn thẳng DE, DF, AE, CE, AF, BF.*

Bài toán 62 ([Bìn+23], 1.4., p. 8). *Cho ΔABC có $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $AC = 5$ cm. Đường cao, đường phân giác, đường trung tuyến của tam giác kẻ từ đỉnh B chia tam giác thành 4 gam giác không có điểm trong chung. Tính diện tích của mỗi tam giác đó.*

Bài toán 63 ([Bìn+23], 1.5., p. 8). *Trong 1 tam giác vuông tỷ số giữa đường cao & đường trung tuyến kẻ từ đỉnh góc vuông bằng $40:41$. Tính độ dài các cạnh góc vuông của tam giác đó, biết cạnh huyền bằng $\sqrt{41}$ cm.*

Bài toán 64 ([Bìn+23], 1.6., p. 8). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Kẻ $HE\perp AB$, $HF\perp AC$. Gọi O là giao điểm của AH & EF. Chứng minh $HB\cdot HC = 4OE\cdot OF$.*

Bài toán 65 ([Bìn+23], 1.7., p. 8).

Bài toán 66 ([Bìn+23], 1.8., p. 8).

Bài toán 67 ([Bìn+23], 1.9., p. 8).

Bài toán 68 ([Bìn+23], 1.10., p. 8).

Bài toán 69 ([Bìn+23], 1.11., p. 8).

Bài toán 70 ([Bìn+23], 1.12., p. 8).

Bài toán 71 ([Bìn+23], 1.13., p. 9).

Bài toán 72 ([Bìn+23], 1.14., p. 9).

Bài toán 73 ([Bìn+23], 1.15., p. 9).

Bài toán 74 ([Bìn+23], 1.16., p. 9).

2 Tỷ Số Lượng Giác của Góc Nhọn

Bài toán 75 ([Tuy23], Thí dụ 2, p. 107). *Cho $\cot\alpha = \dfrac{a^2-b^2}{2ab}$ trong đó α là góc nhọn, $a > b > 0$. Tính $\cos\alpha$.*

Bài toán 76 ([Tuy23], 11., p. 108, định lý sin). *Cho ΔABC nhọn, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$. Đẳng thức này còn đúng với tam giác vuông & tam giác tù hay không?*

Bài toán 77 ([Tuy23], 12., p. 108). *Chứng minh: (a) $1+\tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$. (b) $1+\cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$. (c) $\cot^2\alpha - \cos^2\alpha = \cot^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$. (d) $\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$.*

Bài toán 78 ([Tuy23], 13., p. 108). *Rút gọn biểu thức: (a) $A = \dfrac{1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$. (b) $B = (1+\tan^2\alpha)(1-\sin^2\alpha)-(1+\cot^2\alpha)(1-\cos^2\alpha)$. (c) $C = \sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.*

Bài toán 79 ([Tuy23], 14., p. 108). *Tính giá trị của biểu thức $A = 5\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha$ biết $\sin\alpha = \frac{2}{3}$.*

Bài toán 80 ([Tuy23], 15., p. 108). *Không dùng máy tính hoặc bảng số, tính: (a) $A = \cos^2 20^\circ+\cos^2 30^\circ+\cos^2 40^\circ+\cos^2 50^\circ+\cos^2 60^\circ+\cos^2 70^\circ$. (b) $B = \sin^2 5^\circ+\sin^2 25^\circ+\sin^2 45^\circ+\sin^2 65^\circ+\sin^2 85^\circ$.*

Bài toán 81 ([Tuy23], 16., p. 108). *Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Chứng minh: $\sin\alpha < \tan\alpha$, $\cos\alpha < \cot\alpha$. Áp dụng: (a) Sắp xếp các số sau theo thứ tự tăng dần: $\sin 65^\circ, \cos 65^\circ, \tan 65^\circ$. (b) Xác định α thỏa mãn điều kiện: $\tan\alpha > \sin\alpha > \cos\alpha$.*

Bài toán 82 ([Tuy23], 17., p. 108). *Cho ΔABC vuông tại A. Biết $\sin B = \frac{1}{4}$, tính $\tan C$.*

Bài toán 83 ([Tuy23], 18., p. 108). *Cho biết $\sin\alpha+\cos\alpha = \frac{7}{5}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, tính $\tan\alpha$.*

Bài toán 84 ([Tuy23], 19., p. 109). *ΔABC, đường trung tuyến AM. Chứng minh nếu $\cot B = 3\cot C$ thì $AM = AC$.*

Bài toán 85 ([Tuy23], 20., p. 109). *Cho ΔABC, trực tâm H là trung điểm của đường cao AD. Chứng minh $\tan B\tan C = 2$.*

Bài toán 86 ([Tuy23], 21., p. 109). *Cho ΔABC nhọn, 2 đường cao BD, CE. Chứng minh: (a) $S_{\Delta ADE} = S_{\Delta ABC}\cos^2 A$. (b) $S_{BCDE} = S_{\Delta ABC}\sin^2 A$.*

Bài toán 87 ([Tuy23], 22., p. 109). *Cho ΔABC nhọn. Từ 1 điểm M nằm trong tam giác vẽ $MD\perp BC$, $ME\perp AC$, $MF\perp AB$. Chứng minh $\max\{MA, MB, MC\} \ge 2\min\{MD, ME, MF\}$, trong đó $\max\{MA, MB, MC\}$ là đoạn thẳng lớn nhất trong các đoạn thẳng MA, MB, MC & $\min\{MD, ME, MF\}$ là đoạn thẳng nhỏ nhất trong các đoạn thẳng MD, ME, MF.*

3 Hệ Thức về Cạnh & Góc Trong Tam Giác Vuông

Bài toán 88 ([Tuy23], Thí dụ 3, p. 109). *Tứ giác $ABCD$ có 2 đường chéo cắt nhau tại O. Cho biết $\widehat{AOD} = 70°$, $AC = 5.3$ cm, $BD = 4$ cm. Tính diện tích tứ giác $ABCD$.*

Bài toán 89 ([Tuy23], 23., p. 110). *Chứng minh: (a) Diện tích của 1 tam giác bằng nửa tích của 2 cạnh nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa 2 cạnh ấy. (b) Diện tích hình bình hành bằng tích của 2 cạnh kề nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa 2 cạnh ấy.*

Bài toán 90 ([Tuy23], 24., p. 110). *Cho hình bình hành $ABCD$, $BD \perp BC$. Biết $AB = a$, $\widehat{A} = \alpha$, tính diện tích hình bình hành đó.*

Bài toán 91 ([Tuy23], 25., p. 110). *Cho ΔABC, $\widehat{A} = 120°$, $\widehat{B} = 35°$, $AB = 12.25$ dm. Giải ΔABC.*

Bài toán 92 ([Tuy23], 26., p. 110). *Cho ΔABC nhọn, $\widehat{A} = 75°$, $AB = 30$ mm, $BC = 35$ mm. Giải ΔABC.*

Bài toán 93 ([Tuy23], 27., p. 110). *Cho ΔABC cân tại A, đường cao BH. Biết $BH = h$, $\widehat{C} = \alpha$. Giải ΔABC.*

Bài toán 94 ([Tuy23], 28., p. 110). *Hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{A} = 120°$, $AB = a$, $BC = b$. Các đường phân giác của 4 góc cắt nhau tạo thành tứ giác $MNPQ$. Tính diện tích tứ giác $MNPQ$.*

Bài toán 95 ([Tuy23], 29., p. 110). *Cho ΔABC, các đường phân giác AD, đường cao BH, đường trung tuyến CE đồng quy tại điểm O. Chứng minh $AC\cos A = BC\cos C$.*

4 Miscellaneous

Bài toán 96 ([Tuy23], Thí dụ 4, p. 111). *Cho ΔABC vuông tại A. Gọi M, N lần lượt là 2 điểm trên cạnh AB, AC sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$, $AN = \frac{1}{3}AC$. Biết độ dài $BN = \sin\alpha$, $CM = \cos\alpha$ với $0° < \alpha < 90°$. Tính cạnh huyền BC.*

Bài toán 97 ([Tuy23], 30., p. 112). *Cho ΔABC nhọn, $BC = a$, $AC = b$, $CA = b$ trong đó $b - c = \frac{a}{k}$, $k > 1$. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là các đường cao hạ từ A, B, C. Chứng minh: (a) $\sin A = k(\sin B - \sin C)$. (b) $\frac{1}{h_a} = k\left(\frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)$.*

Bài toán 98 ([Tuy23], 31., p. 112). *Giải ΔABC biết $AB = 14$, $BC = 15$, $CA = 13$.*

Bài toán 99 ([Tuy23], 32., p. 112). *Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $\widehat{DC'D'} = 45°$, $\widehat{BC'B'} = 60°$. Tính $\widehat{BC'D}$.*

Bài toán 100 ([Tuy23], 33., p. 112). *Cho ΔABC, $AB = AC = 1$, $\widehat{A} = 2\alpha$, $0° < \alpha < 45°$. Vẽ các đường cao AD, BE. (a) Các tỷ số lượng giác $\sin\alpha, \cos\alpha, \sin 2\alpha, \cos 2\alpha$ được biểu diễn bởi các đoạn thẳng nào? (b) Chứng minh $\Delta ADC \backsim \Delta BEC$, từ đó suy ra các hệ thức sau: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$. (c) Chứng minh: $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$, $\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$.*

Bài toán 101 ([Tuy23], 34., p. 112). *Cho $\alpha = 22°30'$, tính $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$.*

Bài toán 102 ([Tuy23], 35., p. 112). *Cho ΔABC, đường phân giác AD. Biết $AB = c$, $AC = b$, $\widehat{A} = 2\alpha$, $\alpha < 45°$. Chứng minh $AD = \dfrac{2bc\cos\alpha}{b + c}$.*

Tài liệu

[Bìn+23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Ngọc Đạm, Nguyễn Bá Đang, Lê Quốc Hán, and Hồ Quang Vinh. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 9. Tập 2: Hình Học*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 240.

[Chí+23] Phan Đức Chính, Tôn Thân, Vũ Hữu Bình, Trần Phương Dung, Ngô Hữu Dũng, Lê Văn Hồng, and Nguyễn Hữu Thảo. *Toán 9 Tập 1*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 128.

[Thâ+23] Tôn Thân, Vũ Hữu Bình, Trần Phương Dung, Lê Văn Hồng, and Nguyễn Hữu Thảo. *Bài Tập Toán 9 Tập 1*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 216.

[Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.