Elementary Mathematics/Grade 6

Nguyễn Quản Bá Hồng

Ngày 18 tháng 3 năm 2022

Tóm tắt nội dung

Tóm tắt kiến thức Toán lớp 6 & một số chủ đề nâng cao.

Mục lục

Notation/Ký Hiệu

- $x \in [a, b]$: $x \geq a$ và $x \leq b$.

Principles/Nguyên Tắc

Về nguyên tắc cá nhân của tôi trong việc dạy & học Toán Sơ Cấp, xem GitHub/NQBH/elementary math/principle.

Câu hỏi 0.1. *Học Toán để làm gì? Tại sao phải học Toán?*

"...được tiến thêm 1 bước trên con đường khám phá thế giới bí ẩn & đẹp đẽ của Toán học, đặc biệt là được "làm giàu" về vốn văn hóa chung & có cơ hội "Mang cuộc sống vào bài học – Đưa bài học vào cuộc sống". [...] sẽ ngày càng tiến bộ & cảm thấy vui sướng khi nhận ra ý nghĩa: Học Toán rất có ích cho cuộc sống hằng ngày." – **Toan6**

1 Số Tự Nhiên

Nội dung. Tập hợp; tập hợp các số tự nhiên; các phép tính trong tập hợp số tự nhiên; quan hệ chia hết, số nguyên tố; ước chung & bội chung.

1.1 Tập Hợp

1.1.1 Ký hiệu & cách viết tập hợp

Khái niệm tập hợp (set) thường gặp trong toán học & trong đời sống. Người ta thường dùng các chữ cái in hoa để đặt tên cho 1 tập hợp. Các phần tử của 1 tập hợp được viết trong 2 dấu ngoặc nhọn { }, cách nhau bởi dấu ";". Mỗi phần tử được liệt kê 1 lần, thứ tự liệt kê tùy ý.

1.1.2 Phần tử thuộc tập hợp

a là 1 phần tử của tập hợp A, viết $a \in A$, đọc là *a thuộc A*. *b không là 1 phần tử của tập hợp B*, viết $b \notin B$, đọc là *b không thuộc B*.

1.1.3 Cách cho 1 tập hợp

Có 2 cách cho 1 tập hợp:

- Liệt kê các phần tử của tập hợp;
- Chỉ ra tính đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.

1.1.4 Biểu đồ Ven (Venn diagram)

Người ta còn minh họa tập hợp bằng 1 vòng kín, mỗi phần tử của tập hợp được biểu diễn bởi 1 chấm bên trong vòng kín, còn phần tử không thuộc tập hợp đó được biểu diễn bởi 1 chấm bên ngoài vòng kín. Cách minh họa tập hợp này gọi là *biểu đồ Venn*, do nhà toán học người Anh John Venn (1834–1923) đưa ra.

1.2 Tập Hợp Các Số Tự Nhiên

1.2.1 Tập hợp các số tự nhiên

Tập hợp $\mathbb{N}$ & tập hợp $\mathbb{N}^\star$.

Định nghĩa 1.1. Tập hợp các số tự nhiên *được ký hiệu là* $\mathbb{N} \coloneqq \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$. Tập hợp các số tự nhiên khác 0 *được ký hiệu là* $N^\star \coloneqq \{1; 2; 3; 4; \ldots\}$.

Hiển nhiên $N^\star \subset \mathbb{N}$, i.e., $x \in \mathbb{N}^\star \Rightarrow x \in \mathbb{N}$ nhưng $x \in \mathbb{N} \not\Rightarrow x \in \mathbb{N}^\star$ vì $0 \in \mathbb{N}$ nhưng $0 \notin \mathbb{N}^\star$ (cũng là phản ví dụ duy nhất trong trường hợp này). Chú ý: $\mathbb{N} = \mathbb{N}^\star \cup \{0\}$.

Cách đọc & viết số tự nhiên. Khi viết các số tự nhiên có từ 4 chữ số trở lên, người ta thường viết tách riêng từng nhóm 3 chữ số kể từ phải sang trái cho dễ đọc (why).

1.2.2 Biểu diễn số tự nhiên

Biểu diễn số tự nhiên trên tia số. Các số tự nhiên được biểu diễn trên tia số. Mỗi số tự nhiên ứng với 1 điểm trên tia số.

Câu hỏi 1.1. *Tại sao cần/phải biểu diễn số tự nhiên trên tia số?*

Trả lời. Làm việc trên hình vẽ để trực quan, tiện trong nhiều mục đích khác, e.g., so sánh 2 số tự nhiên, so sánh 2 tập hợp con của $\mathbb{N}$, etc. □

Cấu tạo thập phân của số tự nhiên. Số tự nhiên được viết trong hệ thập phân bởi 1, 2, hay nhiều chữ số. Các chữ số được dùng là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Khi 1 số gồm 2 chữ số trở lên thì chữ số đầu tiên (tính từ trái sang phải) khác 0, i.e.,

$$\overline{a_na_{n-1}\ldots a_1a_0}|_{10},\quad \text{với } n\in\mathbb{N},\ a_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\ \forall i=0,\ldots,n,\ a_n\neq 0. \tag{1.1}$$

Trong các viết 1 số tự nhiên có nhiều chữ số, mỗi chữ số ở những vị trí khác nhau có giá trị khác nhau.

Chỉ số chân (subscript) 10 ở đây ám chỉ hệ thập phân. Do hệ thập phân được sử dụng đa số, nên chỉ số chân 10 này thường được lược bỏ & được hiểu ngầm là đang sử dụng hệ thập phân.

Chú ý, công thức (1.1) còn được viết cụ thể hơn dưới dạng tổng là:

$$\overline{a_na_{n-1}\ldots a_1a_0}|_{10} = a_n10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_110 + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i10^i. \tag{1.2}$$

Lưu ý 1.1 (Mở rộng cho hệ cơ số nguyên bất kỳ)**.** *Cơ số $b\in\mathbb{N}^\star$, $b\ge 2$ bất kỳ:*

$$\overline{a_na_{n-1}\ldots a_1a_0}|_b,\quad \text{với } n\in\mathbb{N},\ a_i\in\{0,1,\ldots,b-1\},\ \forall i=0,\ldots,n,\ a_n\neq 0. \tag{1.3}$$

Tương tự (1.2), biểu diễn (1.3) còn được viết cụ thể hơn dưới dạng tổng là:

$$\overline{a_na_{n-1}\ldots a_1a_0}|_b = a_nb^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1b + a_0 = \sum_{i=0}^n a_ib^i. \tag{1.4}$$

E.g., hệ nhị phân ($b=2$), và hệ thập lục phân ($b=16$) được xử dụng chủ yếu trong Tin học, hay chính xác hơn là Khoa học Máy tính (Computer Science). Hệ nhị phân được dùng để thiết kế ngôn ngữ máy tính. `[insert more details]`

Số La Mã. Cách ghi số La Mã: I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII, XVIII, XIX, XX, XXI, XXII, XXIII, XXIV, XXV, XXVI, XXVII, XXVIII, XXIX, XXX.

Nguyên tắc. Chữ số I, II, III khi nằm bên trái V, X có nghĩa là "trừ ra", và khi nằm bên phải V, X có nghĩa là "cộng thêm".

1.2.3 So sánh các số tự nhiên

Trong 2 số tự nhiên $a,b\in\mathbb{N}$ khác nhau, có 1 số nhỏ hơn số kia. Nếu số a nhỏ hơn số b thì viết $a<b$ hay $b>a$.

Tính chất bắc cầu. Nếu $a<b$ & $b<c$ thì $a<c$, biểu thức logic:

$$(a<b)\wedge(b<c)\Rightarrow(a<c).$$

Hiểu 1 cách trực quan, biểu diễn 3 số $a,b,c\in\mathbb{N}$ trên tia số, khi đó $a<b$ có nghĩa là "a nằm bên trái b", $b<c$ có nghĩa là "b nằm bên trái c". Nhìn vào tia số, ta thấy a nằm bên trái c, nghĩa là $a<c$.

`Add partial ordering set.` See, e.g., Halmos, 1960; Halmos, 1974; Kaplansky, 1977; Kaplansky, 1977.

Định lý 1.1. *Trong 2 số tự nhiên có số chữ số khác nhau: Số nào có nhiều chữ số hơn thì lớn hơn, số nào có ít chữ số hơn thì nhỏ hơn, i.e.:*

$$\left.\begin{array}{l} a=\overline{a_ma_{m-1}\ldots a_1a_0},\ b=\overline{b_nb_{n-1}\ldots b_1b_0},\ m,n\in\mathbb{N}^\star,\\ a_i,b_j\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\ \forall i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n,\ a_m\neq 0,\ b_n\neq 0,\\ m>n, \end{array}\right\}\Rightarrow a>b. \tag{1.5}$$

Chứng minh. Từ biểu diễn thập phân (1.5), xét $a-b$, nếu $a-b>0$ thì $a>b$. Thật vậy, vì $m>n$,

$$\begin{aligned} a-b &= \overline{a_ma_{m-1}\ldots a_1a_0} - \overline{b_nb_{n-1}\ldots b_1b_0} = \sum_{i=0}^m a_i10^i - \sum_{i=0}^n b_i10^i = \sum_{i=0}^n a_i10^i + \sum_{i=n+1}^m a_i10^i - \sum_{i=0}^n b_i10^i \\ &= \sum_{i=0}^n (a_i-b_i)10^i + \sum_{i=n+1}^m a_i10^i \ge \sum_{i=0}^n -9\cdot 10^i + 10^m = -9\sum_{i=0}^n 10^i + 10^m = -9\frac{10^{n+1}-1}{10-1} + 10^m = 10^m - 10^{n+1} + 1 > 0, \end{aligned}$$

trong đó giả thiết $m>n$, tức $m\ge n+1$ (do $m,n\in\mathbb{N}$[1]) được sử dụng để tách tổng trong biểu diễn của a thành 2 tổng con và dùng trong phép so sánh $10^m\ge 10^{n+1}$, trong khi giả thiết thứ 2 $a_i,b_j\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, với mọi $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$ được dùng trong đánh giá hiển nhiên $a_i-b_i\ge -9$ vì trường hợp xấu nhất (the worst case) xảy ra khi $a_i=0$ và $b_i=9$, và đánh giá $a_i\ge 0$, với mọi $i=n+1,\ldots,m-1$ được dùng trong $a_i10^i\ge 0$, và đánh giá $a_m\ge 1$ được dùng trong $a^m10^m\ge 10^m$. □

[1]Đây chính là giả thiết được thêm, hay kỹ thuật *siết chặt bất đẳng thức* khi làm việc với các bài toán trên tập số tự nhiên $\mathbb{N}$ hay rộng hơn xíu là tập số nguyên $\mathbb{Z}$, đặc biệt là các bài giải phương trình hàm trên tập số nguyên. Điều này không có được khi làm việc trên các tập số thực $\mathbb{R}$ hay tập số phức $\mathbb{C}$. Cf. Tao, 2006, Problem 3.1, p. 36–38.

Lưu ý 1.2. *Chú ý tổng $\sum_{i=0}^{n} 10^i$ được tính bằng công thức liên quan tới cấp số nhân hay đơn giản hơn là hằng đẳng thức:*

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \begin{cases} \dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}, & \forall a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \\ n+1, & \text{if } a = 1. \end{cases}$$

> Để so sánh 2 số tự nhiên có số chữ số bằng nhau, ta lần lượt so sánh từng cặp chữ số trên cùng 1 hàng (tính từ trái sang phải), cho đến khi xuất hiện cặp chữ số đầu tiên khác nhau. Ở cặp chữ số khác nhau đó, chữ số nào lớn hơn thì số tự nhiên chứa chữ số đó lớn hơn.

Viết dưới dạng *thuật toán* (algorithm) như sau:
Giả sử $a, b \in \mathbb{N}$ là 2 số tự nhiên có số chữ số bằng nhau, i.e.,

$$a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0},\ b = \overline{b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0},\ n \in \mathbb{N},\ a_i, b_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\ \forall i = 1,\ldots,n,\ a_n \neq 0,\ b_n \neq 0.$$

Algorithm 1 So sánh 2 số tự nhiên có cùng chữ số

1: **for** $i = n$ to 0 (từ trái sang phải) **do** So sánh a_i và b_i.

- Nếu $a_i > b_i$ thì dừng vòng lặp for và kết luận $a > b$.
- Nếu $a_i < b_i$ thì dừng vòng lặp for và kết luận $a < b$.
- Nếu $a_i = b_i$ thì xét:
  - Nếu $i = 0$ (vòng lặp cuối của vòng lặp for) thì kết luận $a = b$ (vì mỗi cặp chữ số tương ứng của a & b đều bằng nhau).
  - Nếu $i > 0$ thì gán $i \leftarrow i - 1$ và so sánh cặp chữ số tiếp theo ở ngay bên phải cặp chữ số vừa được so sánh.

2: **end for**

Với số tự nhiên $a \in \mathbb{N}$ cho trước, viết $x \le a$ để chỉ $x < a$ hoặc $x = a$, viết $x \ge a$ để chỉ $x > a$ hoặc $x = a$, i.e.,

$$(x \le a) \Leftrightarrow (x < a) \vee (x = a),\ (x \ge a) \Leftrightarrow (x > a) \vee (x = a),$$

Lưu ý 1.3. *Ký hiệu ngoặc nhọn { (hay }) dùng để biểu thị "và" (logical and) trong khi ký hiệu ngoặc vuông [(hay]) dùng để biểu thị "hoặc" (logical or), i.e.,*

$$a \text{ và } b \Leftrightarrow a \text{ and } b \Leftrightarrow a \wedge b \Leftrightarrow \begin{cases} a \\ b \end{cases},$$

$$a \text{ hoặc } b \Leftrightarrow a \text{ or } b \Leftrightarrow a \vee b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \\ b \end{array}\right.$$

1.2.4 Số La Mã

"Đế quốc La Mã là 1 đế quốc hùng mạnh tồn tại từ thế kỷ III trước Công nguyên đến thế kỷ V sau Công nguyên, bao gồm những vùng lãnh thổ rộng lớn ở Địa Trung Hải, Bắc PHi & Tây Á." – **Toan6**

Hệ thống các chữ số & số đặc biệt. Có 7 chữ số La Mã cơ bản là (ký hiệu & giá trị tương ứng trong hệ thập phân): I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000. Có 6 số đặc biệt là (ký hiệu & giá trị tương ứng trong hệ thập phân): IV = 4, IX = 9, XL = 40, XC = 90, CD = 400, CM = 900. I chỉ có thể đứng trước V hoặc X; X chỉ có thể đứng trước L hoặc C; C chỉ có thể đứng trước D hoặc M. Trong các chữ số La Mã, không có ký hiệu để chỉ số 0.

Cách ghi số La Mã.

- Trong 1 số La Mã tính từ trái sang phải, giá trị của các chữ số cơ bản & các số đặc biệt giảm dần.
- Mỗi chữ số I, X, C, M không viết liền nhau quá 3 lần.
- Mỗi chữ số V, L, D không viết liền nhau.

Cách tính giá trị tương ứng trong hệ thập phân của số La Mã. "Giá trị tương ứng trong hệ thập phân của số La Mã bằng tổng giá trị của các chữ số cơ bản & các số đặc biệt tính theo thứ tự từ trái sang phải." – **Toan6**

Lưu ý 1.4 (Ứng dụng của số La Mã)**.** *"Chữ số La Mã được sử dụng rộng rãi cho đến thế kỷ XIV thì không còn được sử dụng nhiều nữa vì hệ thống chữ số Ả Rập (được tạo thành bởi các chữ số từ 0 đến 9) tiện dụng hơn. Tuy nhiên, chúng vẫn còn được sử dụng trong việc đánh số trên mặt đồng hồ, thế kỷ, âm nhạc hay các sự kiện chính trị – văn hóa – thể thao lớn như Thế vận hội Olympic, ..."* [2]

1.3 Phép Cộng, Phép Trừ Các Số Tự Nhiên

1.3.1 Phép cộng +

$\boxed{a+b=c}$, trong đó $a,b\in\mathbb{N}$ là các *số hạng*, & c được gọi là *tổng* của a & b.

Định lý 1.2 (Tính chất của phép cộng các số tự nhiên)**.** *Phép cộng các số tự nhiên có các tính chất:*

- *(Giao hoán) Khi đổi chỗ các số hạng trong 1 tổng thì tổng không thay đổi, i.e.,*

$$a+b=b+a,\ \forall a,b\in\mathbb{N}.$$

- *(Kết hợp) Muốn cộng 1 tổng 2 số với số thứ 3, ta có thể cộng số thứ nhất với tổng của số thứ 2 & số thứ 3, i.e.,*

$$(a+b)+c=a+(b+c),\ \forall a,b,c\in\mathbb{N}.$$

- *(Cộng với số 0) Bất kỳ số tự nhiên nào cộng với số 0 cũng bằng chính nó, i.e.,*

$$a+0=0+a=a,\ \forall a\in\mathbb{N}.$$

Do tính chất kết hợp nên giá trị của biểu thức $a+b+c$ có thể được tính theo 1 trong 2 cách sau: $a+b+c=(a+b)+c$ hoặc $a+b+c=a+(b+c)$.

1.3.2 Phép trừ −

$\boxed{a-b=c}$ $(a\ge b)$ trong đó a là *số bị trừ*, b là *số trừ*, c là *hiệu*.
Tính chất. Nếu $a-b=c$ thì $a=b+c$. Nếu $a+b=c$ thì $a=c-b$ & $b=c-a$.

1.4 Phép Nhân, Phép Chia Các Số Tự Nhiên

1.4.1 Phép nhân ×/·

$\boxed{a\times b=c}$, trong đó $a,b\in\mathbb{N}$ là các *thừa số*, & c là *tích*.
Quy ước.

- Trong 1 tích, có thể thay dấu nhân × bằng dấu ·, i.e., $a\cdot b\coloneqq a\times b$.

  Lưu ý 1.5 (Chuẩn quốc tế về dấu nhân)**.** *Trong SGK* **Toan6***, p. 18, các tác giả dùng dấu chấm . thay dấu ×, nhưng điều này thực ra nguy hiểm, vì chuẩn quốc tế của dấu nhân là dấu · (dấu chấm nằm giữa, không phải nằm dưới chân), thay vì dấu . dùng để ngăn cách phần nguyên & phần thập phân của số thực, e.g.,* $\pi=3.1416\ldots$ *chứ không phải* $\pi=3\cdot1416\ldots$. *Vì vậy, cá nhân tôi sẽ dùng dấu · thay cho dấu × trong tài liệu này, chú ý ký hiệu này vẫn được sử dụng ở Toán Cao Cấp.*

- Trong 1 tích mà các thừa số đều bằng chữ hoặc chỉ có 1 thừa số bằng số, ta có thể không cần viết dấu nhân giữa các thừa số, i.e.,

$$a\times b=a\cdot b=ab.$$

[2] Nói tóm lại, sử dụng chữ số La Mã để thể hiện tính trang trọng & đôi khi màu mè/fancy.

Nhân 2 số có nhiều chữ số. Cho 2 số $a, b \in \mathbb{N}$. Nếu 1 trong chúng bằng 0 thì hiển nhiên tích $ab = 0$. Nếu cả 2 số a, b đều khác 0, tức $a, b \in \mathbb{N}^\star$, thì để tính tích ab, trước tiên ta biểu diễn a & b dưới dạng thập phân (1.1):

$$\begin{cases} a = \overline{a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0},\ b = \overline{b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0},\ \text{với } m, n \in \mathbb{N},\\ a_i, b_j \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\ \forall i = 0,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n,\ a_m \neq 0,\ b_n \neq 0,\end{cases}$$

sau đó sử dụng công thức (1.2) để tính tích ab như sau:

$$ab = \overline{a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0} \cdot \overline{b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0} = \left(\sum_{i=0}^m a_i 10^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^n b_j 10^j\right) = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^m a_i 10^i\right) b_j 10^j = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_i b_j 10^{i+j},$$

trong đó $\sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^m a_i 10^i\right) b_j 10^j$ chính là cách thường được sử dụng để tính tích 2 số nguyên dương: tính tích riêng thứ nhất, tính tích riêng thứ 2 & viết tích này lùi sang bên trái 1 cột so với tích riêng thứ nhất, tính tích riêng thứ 3 & viết tích này lùi sang bên trái 2 cột so với tích riêng thứ nhất, etc (xem ví dụ ở **Toan6**, p. 18).

Tính chất của phép nhân.

Định lý 1.3 (Các tính chất của phép nhân các số tự nhiên)**.** *Phép nhân các số tự nhiên có các tính chất sau:*

- *Giao hoán:* $ab = ba$.
- *Kết hợp:* $(ab)c = a(bc)$.
- *Nhân với số 1:* $a1 = 1a = a$.
- *Phân phối đối với phép cộng & phép trừ:* $a(b + c) = ab + ac$, $a(b - c) = ab - ac$.

Do tính chất kết hợp nên giá trị của biểu thức abc có thể được tính theo 1 trong 2 cách sau: $abc = (ab)c$ hoặc $abc = a(bc)$.

1.4.2 Phép Chia :

Phép chia hết. Phép chia hết 1 số tự nhiên cho 1 số tự nhiên khác 0: $\boxed{a : b = q}$ $(b \neq 0)$, trong đó a là *số bị chia*, b là *số chia*, q là *thương*.
Tính chất. Nếu $a : b = q$ thì $a = bq$. Nếu $a : b = q$ & $q \neq 0$ thì $a : q = b$ (trường hợp $q = 0$ xảy ra khi & chỉ khi $a = 0$, $b \neq 0$, i.e., $b \in \mathbb{N}^\star$, & khi đó biểu thức $0 : b = 0$ đúng, nhưng $0 : 0 = b \neq 0$ lại vô nghĩa!).

Phép chia có dư.

Định lý 1.4. *Cho 2 số tự nhiên $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^\star$. Khi đó luôn tìm được đúng 2 số tự nhiên q & r sao cho $a = bq + r$, trong đó $0 \le r < b$.*

Chứng minh. Xem *thuật toán chia Euclid* (Euclide's division algorithm). □

Lưu ý 1.6. *Khi $r = 0$ ta có phép chia hết. Khi $r \neq 0$ ta có phép chia có dư. Ta nói: a chia cho b được thương là q & số dư là r. Ký hiệu: $a : b = q$ (dư r).*

1.5 Phép Tính Lũy Thừa với Số Mũ Tự Nhiên

Câu hỏi 1.2. *Tại sao cần phép tính lũy thừa?*

Trả lời. Phép nhân dùng để tiện viết gọn phép cộng cùng 1 số hạng nhiều lần. Phép lấy lũy thừa dùng để viết gọn phép nhân cùng 1 số hạng nhiều lần. □

1.5.1 Phép nâng lên lũy thừa

2 Số Nguyên

3 Hình Học Trực Quan

4 Một Số Yếu Tố Thống kê & Xác Suất

4.1 Xác Suất Thực Nghiệm Trong 1 Số Trò Chơi & Thí Nghiệm Đơn Giản

4.1.1 Xác Suất Thực Nghiệm Trong Trò Chơi Tung Đồng Xu

Định nghĩa 4.1 (Xác suất thực nghiệm)**.** Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N *khi tung đồng xu nhiều lần bằng:*

$$\frac{\textit{Số lần mặt } N \textit{ xuất hiện}}{\textit{Tổng số lần tung đồng xu}} = \frac{\textit{Số lần mặt } N \textit{ xuất hiện}}{\textit{Số lần mặt } N \textit{ xuất hiện} + \textit{Số lần mặt } S \textit{ xuất hiện}} \in [0,1].$$

Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S *khi tung đồng xu nhiều lần bằng:*

$$\frac{\textit{Số lần mặt } S \textit{ xuất hiện}}{\textit{Tổng số lần tung đồng xu}} = \frac{\textit{Số lần mặt } S \textit{ xuất hiện}}{\textit{Số lần mặt } N \textit{ xuất hiện} + \textit{Số lần mặt } S \textit{ xuất hiện}} \in [0,1].$$

Từ định nghĩa, xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N (hoặc mặt S) phản ảnh số lần xuất hiện mặt đó so với tổng số lần tiền hành thực nghiệm.

Nhận xét.

- Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N bằng 0 khi và chỉ khi không có mặt N nào trong tất cả lần tung đồng xu.
- Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N bằng 1 khi và chỉ khi không có mặt S nào trong tất cả lần tung đồng xu.
- Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt s bằng 0 khi và chỉ khi không có mặt S nào trong tất cả lần tung đồng xu.
- Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S bằng 1 khi và chỉ khi không có mặt N nào trong tất cả lần tung đồng xu.

Bài toán 4.1. *Tung 2 đồng xu cân đối & đồng chất T lần (T viết tắt của "tổng số"), trong đó:*

- *2 đồng xu sấp xuất hiện SS lần.*
- *1 đồng xu sấp, 1 đồng xu ngửa xuất hiện SN lần.*
- *2 đồng xu ngửa xuất hiện NN lần.*

Hiển nhiên: $T = SS + SN + NN$. Khi đó:

- *Xác suất thực nghiệm để có 1 đồng xu sấp, 1 đồng xu ngửa* $= \frac{SN}{T} = \frac{SN}{SS+SN+NN} \in [0,1]$.
- *Xác suất thực nghiệm để có 2 đồng xu đều ngửa* $= \frac{NN}{T} = \frac{NN}{SS+SN+NN} \in [0,1]$.
- *Xác suất thực nghiệm để có 2 đồng xu đều sấp* $= \frac{SS}{T} = \frac{SS}{SS+SN+NN} \in [0,1]$.
- *Xác suất thực nghiệm để có ít nhất 1 đồng xu sấp* $= \frac{SS+SN}{T} = \frac{SS+SN}{SS+SN+NN} \in [0,1]$.
- *Xác suất thực nghiệm để có ít nhất 1 đồng xu ngửa* $= \frac{SN+NN}{T} = \frac{SN+NN}{SS+SN+NN} \in [0,1]$.

5 Phân Số & Số Thập Phân

5.1 Phân Số với Tử & Mẫu là Số Nguyên

Định nghĩa 5.1 (Phân số/Fractionals)**.** *1* phân số *có tử và mẫu số là số nguyên là biểu thức có dạng* $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. *a: tử số (numerator), b: mẫu số (denominator).*

Phân số $\frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^\star$, *được gọi là* phân số tối giản *nếu* $\gcd(a,b) = 1$, *ở đây* gcd *ký hiệu* ước chung lớn nhất *(greatest common divisor).*[3]

[3] Hoặc ký hiệu Việt Nam là: $\text{UCLN}(a,b)$.

5.1.1 Khái niệm 2 phân số bằng nhau.

2 phân số được gọi là *bằng nhau* nếu chúng cùng biểu diễn một giá trị, i.e. (tức/nghĩa là),

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow b \neq 0, d \neq 0,\ ad = bc.} \tag{5.1}$$

Vế sau có nghĩa là *nhân chéo chia ngang*, hay được gọi là *quy tắc bằng nhau của 2 phân số*.

Chú ý. luôn nhớ điều kiện mẫu số 2 phân số phải khác 0.

Ví dụ 5.1. *Trong Sách Giáo Khoa Toán 6, Cánh Diều, của Đỗ Đức Thái chủ biên, có viết:*

> *"Xét 2 phân số $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$. Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì $ad = bc$[4]. Ngược lại, nếu $ad = bc$ thì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$."*

Phản ví dụ: $a = 0$, $b = 0$ thì $ad = bc = 0$, nhưng $\frac{0}{0} \neq \frac{c}{d}$ và phân số $\frac{0}{0}$ không có nghĩa.

Mẹo nhanh. Xét dấu (sign) của tử số và mẫu số khi so sánh 2 phân số $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$. Nếu trong 4 số a, b, c, d, có 1 hoặc 3 số âm, còn lại dương, thì 2 phân số không bằng nhau.

5.1.2 Tính Chất Cơ Bản của Phân Số

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc},\ \frac{a}{b} = \frac{a:c}{b:c},\ a, b, c \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ c \neq 0.} \tag{5.2}$$

trong đó đẳng thức thứ 2 yêu cầu $c \in \mathrm{UC}(a, b)$ để phân số đều có tử và mẫu nguyên.

Rút gọn về phân số tối giản. Để rút gọn phân số với tử và mẫu là số nguyên về phân số tối giản:

1. Tìm UCLN của tử và mẫu sau khi đã bỏ dấu $-$ (nếu có).
2. Chia cả tử và mẫu cho UCLN vừa tìm được.

Quy đồng mẫu nhiều phân số.

Câu hỏi 5.1. *Tại sao phải quy đồng mẫu nhiều phân số?*

Answer.
- Để tiện so sánh 2 phân số.
- Để tiện cho việc giải phương trình.

□

Câu hỏi 5.2. *Cách để quy đồng mẫu nhiều phân số?*

Để quy đồng mẫu nhiều phân số:

1. Viết các phân số đã cho về phân số có mẫu dương. Tìm BCNN của các mẫu dương đó để làm mẫu chung.
   Note. Nếu các mẫu số nguyên tố cùng nhau, thì BCNN của chúng chính là tích của chúng.
2. Tìm thừa số phụ của mỗi mẫu (bằng cách chia mẫu chung cho từng mẫu).
3. Nhân tử và mẫu của mỗi phân số ở Bước 1 với thừa số phụ tương ứng.

5.2 So Sánh Các Phân Số. Hỗn Số Dương

6 Hình Học Phẳng

6.1 Điểm. Đường Thẳng

Quy ước. Khi nói 2 điểm mà không nói gì thêm, ta hiểu đó là 2 điểm phân biệt.
Chú ý. Mỗi hình là tập hợp các điểm. Hình có thể chỉ gồm 1 điểm.

Lưu ý 6.1 (Phân biệt đường thẳng vs. đoạn thẳng)**.** *Đường thẳng không bị giới hạn về 2 phía, trong khi đoạn thẳng bị giới hạn về 2 phía bởi 2 đầu mút của nó.*

[4] Phép nhân: $a \times b = a \cdot b = ab$.

Định nghĩa 6.1. *Điểm A* thuộc/nằm trên *đường thẳng d (hay đường thẳng d* đi qua *điểm A) & được ký hiệu là $A \in d$. Điểm B* không thuộc/không nằm trên *đường thẳng d (hay đường thẳng d* không đi qua *điểm B) & được ký hiệu là $B \notin d$.*

Lưu ý 6.2. *Có vô số điểm thuộc 1 đoạn/đường thẳng.*

Thật vậy, đoạn thẳng AB có vô số điểm bởi vì: lấy M_1 là trung điểm của AB, lấy M_2 là trung điểm của đoạn AM_1, lấy M_3 là trung điểm của đoạn AM_2, tương tự như vậy, thì có vô số lần lấy trung điểm, tương ứng vô hạn điểm.

Định lý 6.1. *Có 1 & chỉ 1 đường thẳng đi qua 2 điểm A & B (phân biệt).*

Đường thẳng đi qua 2 điểm A, B còn được gọi là *đường thẳng AB*, hay *đường thẳng BA*.

Định nghĩa 6.2 (3 điểm thẳng hàng, không thẳng hàng)**.** *Khi 3 điểm cùng thuộc 1 đường thẳng, chúng được gọi là* thẳng hàng*. Khi 3 điểm không cùng thuộc bất kỳ đường thẳng nào, chúng được gọi là* không thẳng hàng*.*

Định lý 6.2. *Trong 3 điểm thẳng hàng, có 1 & chỉ 1 điểm nằm giữa 2 điểm còn lại.*

6.2 2 Đường Thẳng Cắt Nhau. 2 Đường Thẳng Song Song

Định nghĩa 6.3 (2 đường thẳng cắt nhau)**.** *2 đường thẳng chỉ có 1 điểm chung gọi là* 2 đường thẳng cắt nhau *& điểm chung được gọi là* giao điểm *của 2 đường đó.*

Định nghĩa 6.4 (2 đường thẳng song song)**.** *2 đường thẳng a & b không có điểm chung nào được gọi là* song song với nhau*. Viết $a//b$ hoặc $b//a$.*

Chú ý. 2 đường thẳng *trùng nhau* thì không thuộc vào 2 định nghĩa trên.

Tài liệu

[Toán 6] Đỗ Đức Thái (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên), Lê Tuấn Anh, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, Phạm Đức Quang. *Toán 6, Tập 1 & 2* (Cánh Diều). NXB ĐHSP.

[VHB] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 6, Tập 1, 2.* NXB GDVN.

Tài liệu

Halmos, Paul R. (1960). *Naive set theory.* The University Series in Undergraduate Mathematics. D. Van Nostrand Co., Princeton, N.J.-Toronto-London-New York, pp. vii+104.

— (1974). *Naive set theory.* Undergraduate Texts in Mathematics. Reprint of the 1960 edition. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, pp. vii+104.

Kaplansky, Irving (1977). *Set theory and metric spaces.* Second. Chelsea Publishing Co., New York, xii+140 pp. ISBN 0-8284-0298–1.

Tao, Terence (2006). *Solving mathematical problems.* A personal perspective. Oxford University Press, Oxford, pp. xii+103. ISBN: 978-0-19-920560-8; 0-19-920560-4.