

# Problem: Trigonometry – Bài Tập Lượng Giác

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 8 tháng 5 năm 2023

## Tóm tắt nội dung

## Mục lục

1 Hệ Thức về Cạnh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông . . . . .	1
2 Tỷ Số Lượng Giác của Góc Nhọn . . . . .	2
3 Hệ Thức về Cạnh & Góc Trong Tam Giác Vuông . . . . .	3
4 Miscellaneous . . . . .	3
Tài liệu . . . . .	4

## 1 Hệ Thức về Cạnh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông

**Bài toán 1** ([Tuy23], Thí dụ 1, p. 103). Cho hình thang  $ABCD$  có  $\widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ$ , 2 đường chéo vuông góc với nhau tại  $H$ . Biết  $AB = 3\sqrt{5}$  cm,  $HA = 3$  cm. Chứng minh: (a)  $HA : HB : HC : HD = 1 : 2 : 4 : 8$ . (b)  $\frac{1}{AB^2} - \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{HB^2} - \frac{1}{HC^2}$ .

**Bài toán 2** ([Tuy23], 1., p. 105). Cho hình thang  $ABCD$ ,  $AB \parallel CD$ , 2 đường chéo vuông góc với nhau. Biết  $AC = 16$  cm,  $BD = 12$  cm. Tính chiều cao của hình thang.

**Bài toán 3** ([Tuy23], 2., p. 105). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ , đường phân giác  $AD$ . Biết  $BH = 63$  cm,  $CH = 112$  cm, tính  $HD$ .

**Bài toán 4** ([Tuy23], 3., p. 105). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ . 2 đường trung tuyến  $AD, BE$  vuông góc với nhau tại  $G$ . Biết  $AB = \sqrt{6}$  cm. Tính cạnh huyền  $BC$ .

**Bài toán 5** ([Tuy23], 4., p. 105). Gọi  $a, b, c$  là các cạnh của 1 tam giác vuông,  $h$  là đường cao ứng với cạnh huyền  $a$ . Chứng minh tam giác có các cạnh  $a + h, b + c$ , &  $h$  cũng là 1 tam giác vuông.

**Bài toán 6** ([Tuy23], 5., p. 105). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Gọi  $I, K$  thứ tự là hình chiếu của  $H$  trên  $AB, AC$ . Đặt  $c = AB$ ,  $b = AC$ . (a) Tính  $AI, AK$  theo  $b, c$ . (b) Chứng minh  $\frac{BI}{CK} = \frac{c^3}{b^3}$ .

**Bài toán 7** ([Tuy23], 6., p. 105). Cho  $\triangle ABC$ ,  $AB = 1$ ,  $\widehat{A} = 105^\circ$ ,  $\widehat{B} = 60^\circ$ . Trên cạnh  $BC$  lấy điểm  $E$  sao cho  $BE = 1$ . Vẽ  $ED \parallel AB$ ,  $D \in AC$ . Chứng minh:  $\frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{4}{3}$ .

**Bài toán 8** ([Tuy23], 7., p. 105). Cho hình chữ nhật  $ABCD$ ,  $AB = 2BC$ . Trên cạnh  $BC$  lấy điểm  $E$ . Tia  $AE$  cắt đường thẳng  $CD$  tại  $F$ . Chứng minh:  $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{4AF^2}$ .

**Bài toán 9** ([Tuy23], 8., p. 105). Cho 3 đoạn thẳng có độ dài  $a, b, c$ . Dựng đoạn thẳng  $x$  sao cho  $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ .

**Bài toán 10** ([Tuy23], 9., p. 105). Cho hình thoi  $ABCD$  có  $\widehat{A} = 120^\circ$ . 1 đường thẳng  $d$  không cắt các cạnh của hình thoi. Chứng minh: tổng các bình phương hình chiếu của 4 cạnh với 2 lần bình phương hình chiếu của đường chéo  $AC$  trên đường thẳng  $d$  không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng  $d$ .

**Bài toán 11** ([Tuy23], 10., p. 106). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ . Từ 1 điểm  $O$  ở trong tam giác ta vẽ  $OD \perp BC$ ,  $OE \perp CA$ ,  $OF \perp AB$ . Xác định vị trí của  $O$  để  $OD^2 + OE^2 + OF^2$  nhỏ nhất.

\*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam  
e-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com); website: <https://nqbh.github.io>.

**Bài toán 12** ([Bin+23], Ví dụ 1, p. 5). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Biết  $AB : AC = 3 : 4$  &  $AB + AC = 21$  cm. (a) Tính các cạnh của  $\triangle ABC$ . (b) Tính độ dài các đoạn  $AH, BH, CH$ .

**Bài toán 13** (Mở rộng [Bin+23], Ví dụ 1, p. 5). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Biết  $AB : AC = m : n$  &  $AB + AC = p$  cm. (a) Tính các cạnh của  $\triangle ABC$ . (b) Tính độ dài các đoạn  $AH, BH, CH$ .

**Bài toán 14** ([Bin+23], Ví dụ 2, p. 6). Cho hình thang  $ABCD$  có  $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ ,  $\widehat{B} = 60^\circ$ ,  $CD = 30$  cm,  $CA \perp CB$ . Tính diện tích của hình thang.

**Bài toán 15** ([Bin+23], Ví dụ 3, p. 7). Cho  $\triangle ABC$  nhọn, đường cao  $CK$ ,  $H$  là trực tâm. Gọi  $M$  là 1 điểm trên  $CK$  sao cho  $\widehat{AMB} = 90^\circ$ .  $S, S_1, S_2$  theo thứ tự là diện tích các  $\triangle AMB, \triangle ABC, \triangle ABH$ . Chứng minh  $S = \sqrt{S_1 S_2}$ .

**Bài toán 16** ([Bin+23], 1.1., p. 7). Cho  $\triangle ABC$  vuông cân tại  $A$  & điểm  $M$  nằm giữa  $B$  &  $C$ . Gọi  $D, E$  lần lượt là hình chiếu của điểm  $M$  lên  $AB, AC$ . Chứng minh  $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$ .

**Bài toán 17** ([Bin+23], 1.2., p. 7). Cho hình chữ nhật  $ABCD$  & điểm  $O$  nằm trong hình chữ nhật đó. Chứng minh  $OA^2 + OC^2 = OB^2 + CD^2$ .

**Bài toán 18** ([Bin+23], 1.3., p. 8). Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AD = 6$  cm,  $CD = 8$  cm. Đường thẳng kẻ từ  $D$  vuông góc với  $AC$  tại  $E$ , cắt cạnh  $AB$  tại  $F$ . Tính độ dài các đoạn thẳng  $DE, DF, AE, CE, AF, BF$ .

**Bài toán 19** ([Bin+23], 1.4., p. 8). Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 3$  cm,  $BC = 4$  cm,  $AC = 5$  cm. Đường cao, đường phân giác, đường trung tuyến của tam giác kẻ từ đỉnh  $B$  chia tam giác thành 4 gam giác không có điểm trong chung. Tính diện tích của mỗi tam giác đó.

**Bài toán 20** ([Bin+23], 1.5., p. 8). Trong 1 tam giác vuông tỷ số giữa đường cao & đường trung tuyến kẻ từ đỉnh góc vuông bằng  $40 : 41$ . Tính độ dài các cạnh góc vuông của tam giác đó, biết cạnh huyền bằng  $\sqrt{41}$  cm.

**Bài toán 21** ([Bin+23], 1.6., p. 8). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Kẻ  $HE \perp AB$ ,  $HF \perp AC$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $AH$  &  $EF$ . Chứng minh  $HB \cdot HC = 4OE \cdot OF$ .

**Bài toán 22** ([Bin+23], 1.7., p. 8).

**Bài toán 23** ([Bin+23], 1.8., p. 8).

**Bài toán 24** ([Bin+23], 1.9., p. 8).

**Bài toán 25** ([Bin+23], 1.10., p. 8).

**Bài toán 26** ([Bin+23], 1.11., p. 8).

**Bài toán 27** ([Bin+23], 1.12., p. 8).

**Bài toán 28** ([Bin+23], 1.13., p. 9).

**Bài toán 29** ([Bin+23], 1.14., p. 9).

**Bài toán 30** ([Bin+23], 1.15., p. 9).

**Bài toán 31** ([Bin+23], 1.16., p. 9).

## 2 Tỷ Số Lượng Giác của Góc Nhọn

**Bài toán 32** ([Tuy23], Thí dụ 2, p. 107). Cho  $\cot \alpha = \frac{a^2 - b^2}{2ab}$  trong đó  $\alpha$  là góc nhọn,  $a > b > 0$ . Tính  $\cos \alpha$ .

**Bài toán 33** ([Tuy23], 11., p. 108, định lý sin). Cho  $\triangle ABC$  nhọn,  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Chứng minh:  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ . Dạng thức này còn đúng với tam giác vuông & tam giác tù hay không?

**Bài toán 34** ([Tuy23], 12., p. 108). Chứng minh: (a)  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ . (b)  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ . (c)  $\cot^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \cot^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$ . (d)  $\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$ .

**Bài toán 35** ([Tuy23], 13., p. 108). Rút gọn biểu thức: (a)  $A = \frac{1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$ . (b)  $B = (1 + \tan^2 \alpha)(1 - \sin^2 \alpha) - (1 + \cot^2 \alpha)(1 - \cos^2 \alpha)$ . (c)  $C = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$ .

**Bài toán 36** ([Tuy23], 14., p. 108). Tính giá trị của biểu thức  $A = 5 \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha$  biết  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ .

**Bài toán 37** ([Tuy23], 15., p. 108). Không dùng máy tính hoặc bảng số, tính: (a)  $A = \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 70^\circ$ . (b)  $B = \sin^2 5^\circ + \sin^2 25^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 65^\circ + \sin^2 85^\circ$ .

**Bài toán 38** ([Tuy23], 16., p. 108). Cho  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Chứng minh:  $\sin \alpha < \tan \alpha$ ,  $\cos \alpha < \cot \alpha$ . Áp dụng: (a) Sắp xếp các số sau theo thứ tự tăng dần:  $\sin 65^\circ, \cos 65^\circ, \tan 65^\circ$ . (b) Xác định  $\alpha$  thỏa mãn điều kiện:  $\tan \alpha > \sin \alpha > \cos \alpha$ .

**Bài toán 39** ([Tuy23], 17., p. 108). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ . Biết  $\sin B = \frac{1}{4}$ , tính  $\tan C$ .

**Bài toán 40** ([Tuy23], 18., p. 108). Cho biết  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}$ ,  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ , tính  $\tan \alpha$ .

**Bài toán 41** ([Tuy23], 19., p. 109).  $\triangle ABC$ , đường trung tuyến  $AM$ . Chứng minh nếu  $\cot B = 3 \cot C$  thì  $AM = AC$ .

**Bài toán 42** ([Tuy23], 20., p. 109). Cho  $\triangle ABC$ , trực tâm  $H$  là trung điểm của đường cao  $AD$ . Chứng minh  $\tan B \tan C = 2$ .

**Bài toán 43** ([Tuy23], 21., p. 109). Cho  $\triangle ABC$  nhọn, 2 đường cao  $BD, CE$ . Chứng minh: (a)  $S_{\triangle ADE} = S_{\triangle ABC} \cos^2 A$ . (b)  $S_{BCDE} = S_{\triangle ABC} \sin^2 A$ .

**Bài toán 44** ([Tuy23], 22., p. 109). Cho  $\triangle ABC$  nhọn. Từ 1 điểm  $M$  nằm trong tam giác vẽ  $MD \perp BC$ ,  $ME \perp AC$ ,  $MF \perp AB$ . Chứng minh  $\max\{MA, MB, MC\} \geq 2 \min\{MD, ME, MF\}$ , trong đó  $\max\{MA, MB, MC\}$  là đoạn thẳng lớn nhất trong các đoạn thẳng  $MA, MB, MC$  &  $\min\{MD, ME, MF\}$  là đoạn thẳng nhỏ nhất trong các đoạn thẳng  $MD, ME, MF$ .

### 3 Hệ Thức về Cạnh & Góc Trong Tam Giác Vuông

**Bài toán 45** ([Tuy23], Thí dụ 3, p. 109). Tứ giác  $ABCD$  có 2 đường chéo cắt nhau tại  $O$ . Cho biết  $\widehat{AOD} = 70^\circ$ ,  $AC = 5.3$  cm,  $BD = 4$  cm. Tính diện tích tứ giác  $ABCD$ .

**Bài toán 46** ([Tuy23], 23., p. 110). Chứng minh: (a) Diện tích của 1 tam giác bằng nửa tích của 2 cạnh nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa 2 cạnh ấy. (b) Diện tích hình bình hành bằng tích của 2 cạnh kề nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa 2 cạnh ấy.

**Bài toán 47** ([Tuy23], 24., p. 110). Cho hình bình hành  $ABCD$ ,  $BD \perp BC$ . Biết  $AB = a$ ,  $\widehat{A} = \alpha$ , tính diện tích hình bình hành đó.

**Bài toán 48** ([Tuy23], 25., p. 110). Cho  $\triangle ABC$ ,  $\widehat{A} = 120^\circ$ ,  $\widehat{B} = 35^\circ$ ,  $AB = 12.25$  dm. Giải  $\triangle ABC$ .

**Bài toán 49** ([Tuy23], 26., p. 110). Cho  $\triangle ABC$  nhọn,  $\widehat{A} = 75^\circ$ ,  $AB = 30$  mm,  $BC = 35$  mm. Giải  $\triangle ABC$ .

**Bài toán 50** ([Tuy23], 27., p. 110). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ , đường cao  $BH$ . Biết  $BH = h$ ,  $\widehat{C} = \alpha$ . Giải  $\triangle ABC$ .

**Bài toán 51** ([Tuy23], 28., p. 110). Hình bình hành  $ABCD$  có  $\widehat{A} = 120^\circ$ ,  $AB = a$ ,  $BC = b$ . Các đường phân giác của 4 góc cắt nhau tạo thành tứ giác  $MNPQ$ . Tính diện tích tứ giác  $MNPQ$ .

**Bài toán 52** ([Tuy23], 29., p. 110). Cho  $\triangle ABC$ , các đường phân giác  $AD$ , đường cao  $BH$ , đường trung tuyến  $CE$  đồng quy tại điểm  $O$ . Chứng minh  $AC \cos A = BC \cos C$ .

### 4 Miscellaneous

**Bài toán 53** ([Tuy23], Thí dụ 4, p. 111). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là 2 điểm trên cạnh  $AB, AC$  sao cho  $AM = \frac{1}{3}AB$ ,  $AN = \frac{1}{3}AC$ . Biết độ dài  $BN = \sin \alpha$ ,  $CM = \cos \alpha$  với  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Tính cạnh huyền  $BC$ .

**Bài toán 54** ([Tuy23], 30., p. 112). Cho  $\triangle ABC$  nhọn,  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $CA = b$  trong đó  $b - c = \frac{a}{k}$ ,  $k > 1$ . Gọi  $h_a, h_b, h_c$  lần lượt là các đường cao hạ từ  $A, B, C$ . Chứng minh: (a)  $\sin A = k(\sin B - \sin C)$ . (b)  $\frac{1}{h_a} = k \left( \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} \right)$ .

**Bài toán 55** ([Tuy23], 31., p. 112). Giải  $\triangle ABC$  biết  $AB = 14$ ,  $BC = 15$ ,  $CA = 13$ .

**Bài toán 56** ([Tuy23], 32., p. 112). Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$ . Biết  $\widehat{DC'D'} = 45^\circ$ ,  $\widehat{BC'B'} = 60^\circ$ . Tính  $\widehat{BC'D}$ .

**Bài toán 57** ([Tuy23], 33., p. 112). Cho  $\triangle ABC$ ,  $AB = AC = 1$ ,  $\widehat{A} = 2\alpha$ ,  $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ . Vẽ các đường cao  $AD, BE$ . (a) Các tỷ số lượng giác  $\sin \alpha, \cos \alpha, \sin 2\alpha, \cos 2\alpha$  được biểu diễn bởi các đoạn thẳng nào? (b) Chứng minh  $\triangle ADC \sim \triangle BEC$ , từ đó suy ra các hệ thức sau:  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ,  $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ . (c) Chứng minh:  $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ ,

$$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}.$$

**Bài toán 58** ([Tuy23], 34., p. 112). Cho  $\alpha = 22^\circ 30'$ , tính  $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ .

**Bài toán 59** ([Tuy23], 35., p. 112). Cho  $\triangle ABC$ , đường phân giác  $AD$ . Biết  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $\widehat{A} = 2\alpha$ ,  $\alpha < 45^\circ$ . Chứng minh  $AD = \frac{2bc \cos \alpha}{b + c}$ .

## Tài liệu

- [Bìn+23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Ngọc Đạm, Nguyễn Bá Đang, Lê Quốc Hán, and Hồ Quang Vinh. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 9. Tập 2: Hình Học*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 240.
- [Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.