Problem & Solution: Square-, Cube-, & nth Roots
Bài Tập Căn Bậc 2, Căn Bậc 3, & Căn Bậc n & Lời Giải

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 13 tháng 6 năm 2023

Tóm tắt nội dung

[en] This text is a collection of problems, from basic to advanced, on *square-, cube-, & nth roots*.
Keyword. Square root, cube root, nth root.

[vi] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài toán, từ cơ bản đến nâng cao, về *căn bậc 2, căn bậc 3, & căn bậc n*.
Từ khóa. Căn bậc 2, căn bậc 3, căn bậc n, số hữu tỷ, số vô tỷ, căn thức.

- Lecture note – Bài giảng: GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/square- & cube roots[1].
- Cheatsheet – Công thức: GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/cheatsheet: square- & cube roots[2].
- Problem – Bài tập: GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/problem: square- & cube roots[3].
- Solution – Lời giải: GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/solution: square- & cube roots[4].

Mục lục

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

[1] URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/NQBH_square_root_cube_root.pdf.

[2] https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/cheatsheet/NQBH_square_root_cube_root_cheatsheet.pdf.

[3] https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/problem/NQBH_square_root_cube_root_problem.pdf.

[4] https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/solution/NQBH_square_root_cube_root_solution.pdf.

1 Square Root & Irrationals – Căn Bậc 2 & Số Vô Tỷ

Bài toán 1 ([Chí+23], ?1–?3, pp. 4–5)**.** *(a) Tìm các căn bậc 2 của* $9, \frac{4}{9}, 0.25, 2$*. (b) Tìm căn bậc 2 số học của* $49, 64, 81, 1.21$*. (c) Tìm căn bậc 2 của* $49, 64, 81, 1.21$*.*

Giải. (a) Căn bậc 2 của $9, \frac{4}{9}, 0.25, 2$ lần lượt là $\pm 3, \pm\frac{2}{3}, \pm 0.5, \pm\sqrt{2}$. (b) Căn bậc 2 số học của $49, 64, 81, 1.21$ lần lượt là $7, 8, 9, 1.1$. (c) Căn bậc 2 của $49, 64, 81, 1.21$ lần lượt là $\pm 7, \pm 8, \pm 9, \pm 1.1$. □

Bài toán 2 ([Chí+23], Ví dụ 2, ?4, pp. 5–6)**.** *So sánh: (a)* 1 *&* $\sqrt{2}$*. (b)* 2 *&* $\sqrt{5}$*. (c)* 4 *&* $\sqrt{15}$*. (d)* $\sqrt{11}$ *&* 3*.*

Giải. (a) $1 < 2 \Leftrightarrow \sqrt{1} = 1 < \sqrt{2}$. (b) $4 < 5 \Leftrightarrow \sqrt{4} = 2 < \sqrt{5}$. (c) $16 > 15 \Leftrightarrow \sqrt{16} = 4 > \sqrt{15}$. (d) $11 > 9 \Leftrightarrow \sqrt{11} > \sqrt{9} = 3$. □

Bài toán 3. *Biện luận theo* $a, b \in \mathbb{R}$ *để so sánh* a *&* $\sqrt{b}$*.*

Giải. ĐKXĐ: $b \ge 0$. Xét các trường hợp:

- *Trường hợp* $a < 0$: vì $\sqrt{b} \ge 0$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $b \ge 0$, suy ra $a < \sqrt{b}$.
- *Trường hợp* $a \ge 0$: Xét các trường hợp con:
  - Trường hợp $0 \le a < \sqrt{b} \Leftrightarrow 0 \le a$ & $a^2 < b$.
  - Trường hợp $0 \le a = \sqrt{b} \Leftrightarrow 0 \le a$ & $a^2 = b$.
  - Trường hợp $a > \sqrt{b} \Leftrightarrow a > 0$ & $a^2 > b \ge 0$.

Tổng hợp các trường hợp đã xét:

$$\begin{cases} a < \sqrt{b}, & \text{nếu } (a < 0 \land b \ge 0) \lor (a \ge 0 \land a^2 < b), \\ a = \sqrt{b}, & \text{nếu } a \ge 0 \land a^2 = b, \\ a > \sqrt{b}, & \text{nếu } a > 0 \land a^2 > b. \end{cases}$$

Biện luận hoàn tất. □

Bài toán 4 ([Chí+23], Ví dụ 3, ?5, p. 6)**.** *(a) Tìm* $x \in \mathbb{R}$ *thỏa: (a)* $\sqrt{x} > 2$*. (b)* $\sqrt{x} < 1$*. (c)* $\sqrt{x} > 1$*. (d)* $\sqrt{x} < 3$*.*

Giải. (a) $\sqrt{x} > 2 \Leftrightarrow x > 2^2 = 4$. Vậy $x > 4$, $S = (4, \infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} | x > 4\}$. (b) ĐKXĐ: $x \ge 0$, $\sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow 0 \le x < 1^2 = 1$. Vậy $0 \le x < 1$, $S = [0, 1) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} | 0 \le x < 1\}$. (c) $\sqrt{x} > 1 \Leftrightarrow x > 1^2 = 1$. Vậy $x > 1$, $S = (1, \infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$. (d) ĐKXĐ: $x \ge 0$, $\sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow 0 \le x < 3^2 = 9$. Vậy $0 \le x < 9$, $S = [0, 9) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} | 0 \le x < 9\}$. □

Lưu ý 1. *Ta quy ước* S *ký hiệu* tập nghiệm *của cả phương trình & bất phương trình.*

Bài toán 5 ([Chí+23], 1., p. 6)**.** *Tìm căn bậc 2 số học của mỗi số sau rồi suy ra căn bậc 2 của chúng:* 121, 144, 169, 225, 256, 324, 361, 400.

Giải. Căn bậc 2 số học của 121, 144, 169, 225, 256, 324, 361, 400 lần lượt là 11, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 20. Căn bậc 2 của 121, 144, 169, 225, 256, 324, 361, 400 lần lượt là $\pm 11, \pm 12, \pm 13, \pm 15, \pm 16, \pm 18, \pm 19, \pm 20$. □

Bài toán 6 ([Chí+23], 2., p. 6)**.** *So sánh: (a)* 2 *&* $\sqrt{3}$*. (b)* 6 *&* $\sqrt{41}$*. (c)* 7 *&* $\sqrt{47}$*.*

Giải. (a) $4 > 3 \Leftrightarrow \sqrt{4} = 2 > \sqrt{3}$. (b) $36 < 41 \Leftrightarrow \sqrt{36} = 6 < \sqrt{41}$. (c) $49 > 47 \Leftrightarrow \sqrt{49} = 7 > \sqrt{47}$. □

Bài toán 7 ([Chí+23], 3., p. 6)**.** *Tìm* $x \in \mathbb{R}$ *thỏa mãn các phương trình sau & sau đó làm tròn đến chữ số thập phân thứ 3: (a)* $x^2 = 2$*. (b)* $x^2 = 3$*. (c)* $x^2 = 3.5$*. (d)* $x^2 = 4.12$*.*

Hint. Nghiệm của phương trình bậc 2 $x^2 = a$ với $a \ge 0$ là các căn bậc 2 của a.

Giải. (a) $x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x \approx \pm 1.414$. (b) $x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x \approx \pm 1.732$. (c) $x^2 = 3.5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3.5} \Rightarrow x \approx \pm 1.871$. (d) $x^2 = 4.12 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4.12} \Rightarrow x \approx \pm 2.030$. □

Bài toán 8 ([Chí+23], 4., p. 7)**.** *Tìm* $x \in \mathbb{R}$ *thỏa: (a)* $\sqrt{x} = 15$*. (b)* $2\sqrt{x} = 14$*. (c)* $\sqrt{x} < \sqrt{2}$*. (d)* $\sqrt{2x} < 4$*.*

Giải. ĐKXĐ: $x \ge 0$. (a) $\sqrt{x} = 15 \Leftrightarrow x = 15^2 = 225 > 0$: nhận. Vậy $x = 225$, $S = \{225\}$. (b) $2\sqrt{x} = 14 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{14}{2} = 7 \Leftrightarrow x = 7^2 = 49 > 0$: nhận. Vậy $x = 49$, $S = \{49\}$. (c) $\sqrt{x} < \sqrt{2} \Leftrightarrow 0 \le x < 2$. Vậy $0 \le x < 2$, $S = [0, 2) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} | 0 \le x < 2\}$. (d) $\sqrt{2x} < 4 \Leftrightarrow 0 \le 2x < 4^2 = 16 \Leftrightarrow 0 \le x < \frac{16}{2} = 8$. Vậy $0 \le x < 8$, $S = [0, 8) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} | 0 \le x < 8\}$. □

Bài toán 9. *Biện luận theo tham số* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *để giải bất phương trình: (a)* $\sqrt{x} < a$*. (b)* $\sqrt{x} > a$*. (c)* $\sqrt{x} \le a$*. (d)* $\sqrt{x} \ge a$*. (e)* $\sqrt{ax+b} > c$*,* $a \ne 0$*. (f)* $\sqrt{ax+b} < c$*,* $a \ne 0$*. (g)* $\sqrt{ax+b} \le c$*,* $a \ne 0$*. (h)* $\sqrt{ax+b} \ge c$*,* $a \ne 0$*. (i)* $\sqrt{ax+b} < \sqrt{cx+d}$*,* $ac \ne 0$*. (j)* $\sqrt{ax+b} > \sqrt{cx+d}$*,* $ac \ne 0$*. (k)* $\sqrt{ax+b} \le \sqrt{cx+d}$*,* $ac \ne 0$*. (l)* $\sqrt{ax+b} \ge \sqrt{cx+d}$*,* $ac \ne 0$*.*

Giải. (a) ĐKXĐ: $x \ge 0$. Xét các trường hợp:

- Trường hợp $a \le 0$: Vì $\sqrt{x} \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \ge 0$, nên bất phương trình $\sqrt{x} < a$ vô nghiệm.

- Trường hợp $a > 0$: $\sqrt{x} < a \Leftrightarrow 0 \le x < a^2$.

Vậy

$$S = \begin{cases} \emptyset, & \text{nếu } a \le 0, \\ [0, a^2) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} | 0 \le x < a^2\}, & \text{nếu } a > 0. \end{cases}$$

(b) ĐKXĐ: $x \ge 0$. Xét các trường hợp:

- Trường hợp $a < 0$: Vì $\sqrt{x} \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \ge 0$, nên bất phương trình $\sqrt{x} > a$ luôn đúng $\forall x \ge 0$.
- Trường hợp $a = 0$: $\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$.
- Trường hợp $a > 0$: $\sqrt{x} > a \Leftrightarrow x > a^2$.

Vậy

$$S = \begin{cases} [0, \infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} | x \ge 0\}, & \text{nếu } a < 0, \\ (0, \infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}, & \text{nếu } a = 0, \\ (a^2, \infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} | x > a^2\}, & \text{nếu } a > 0. \end{cases}$$

(c) ĐKXĐ: $x \ge 0$. Xét các trường hợp:

- Trường hợp $a < 0$: Vì $\sqrt{x} \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \ge 0$, nên bất phương trình $\sqrt{x} \le a$ vô nghiệm.
- Trường hợp $a = 0$: $\sqrt{x} \le 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- Trường hợp $a > 0$: $\sqrt{x} \le a \Leftrightarrow 0 \le x \le a^2$.

Vậy

$$S = \begin{cases} \emptyset, & \text{nếu } a < 0, \\ \{0\}, & \text{nếu } a = 0, \\ [0, a^2] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} | 0 \le x \le a^2\}, & \text{nếu } a > 0. \end{cases}$$

(d) ĐKXĐ: $x \ge 0$. Xét các trường hợp:

- Trường hợp $a \le 0$: Vì $\sqrt{x} \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \ge 0$, nên bất phương trình $\sqrt{x} \ge a$ đúng $\forall x \ge 0$.
- Trường hợp $a > 0$: $\sqrt{x} \ge a \Leftrightarrow x \ge a^2$.

Vậy

$$S = \begin{cases} [0, \infty), & \text{nếu } a \le 0, \\ [a^2, \infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} | x \ge a^2\}, & \text{nếu } a > 0. \end{cases}$$

(e) $\sqrt{ax+b} > c$. (f) $\sqrt{ax+b} < c$. (g) $\sqrt{ax+b} \le c$. (h) $\sqrt{ax+b} \ge c$. (i) $\sqrt{ax+b} < \sqrt{cx+d}$. (j) $\sqrt{ax+b} > \sqrt{cx+d}$. (k) $\sqrt{ax+b} \le \sqrt{cx+d}$. (l) $\sqrt{ax+b} \ge \sqrt{cx+d}$. □

Bài toán 10. *Viết chương trình* Pascal, Python, C/C++ *để giải & biện luận theo tham số $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ để giải bất phương trình: (a) $\sqrt{x} < a$. (b) $\sqrt{x} > a$. (c) $\sqrt{x} \le a$. (d) $\sqrt{x} \ge a$. (e) $\sqrt{ax+b} > c$, $a \ne 0$. (f) $\sqrt{ax+b} < c$, $a \ne 0$. (g) $\sqrt{ax+b} \le c$, $a \ne 0$. (h) $\sqrt{ax+b} \ge c$, $a \ne 0$. (i) $\sqrt{ax+b} < \sqrt{cx+d}$, $ac \ne 0$. (j) $\sqrt{ax+b} > \sqrt{cx+d}$, $ac \ne 0$. (k) $\sqrt{ax+b} \le \sqrt{cx+d}$, $ac \ne 0$. (l) $\sqrt{ax+b} \ge \sqrt{cx+d}$, $ac \ne 0$.*

Bài toán 11 ([Chí+23], 5., p. 7)**.** *Tính cạnh 1 hình vuông biết diện tích của nó bằng diện tích của hình chữ nhật có chiều rộng* 3.5 m *& chiều dài* 14 m.

Giải. $S_{\text{hv}} = S_{\text{hcn}} = 3.5 \cdot 14 = 49 \Rightarrow a = \sqrt{S_{\text{hv}}} = \sqrt{49} = 7$ m. □

Bài toán 12 ([Thâ+23], 1., p. 5)**.** *Tính căn bậc 2 số học của* 0.01, 0.04, 0.49, 0.64, 0.25, 0.81, 0.09, 0.16, 0, -1.

Giải. Căn bậc 2 số học của: 0.01, 0.04, 0.49, 0.64, 0.25, 0.81, 0.09, 0.16, 0 lần lượt là $\sqrt{0.01} = 0.1$, $\sqrt{0.04} = 0.2$, $\sqrt{0.49} = 0.7$, $\sqrt{0.64} = 0.8$, $\sqrt{0.25} = 0.5$, $\sqrt{0.81} = 0.9$, $\sqrt{0.09} = 0.3$, $\sqrt{0.16} = 0.4$, $\sqrt{0} = 0$. Riêng -1 không có căn bậc 2 (số học) vì $-1 < 0$. □

Lưu ý 2. *Căn bậc 2 số học của số thực không âm $a \ge 0$ là $\sqrt{a}$. Căn bậc 2 của $a \ge 0$ là $\pm\sqrt{a}$ (i.e., bao gồm $\sqrt{a}$ & $-\sqrt{a}$), đặc biệt: căn bậc 2 của 0 là $\pm\sqrt{0} = 0$. Mọi số thực âm $a < 0$ không có căn bậc 2.*

Bài toán 13 ([Thâ+23], 2., p. 5)**.** *Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $x^2 = 5$. (b) $x^2 = 6$. (c) $x^2 = 2.5$. (d) $x^2 = \sqrt{5}$. (e) $x^2 = -1$.*

Giải. (a) $x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$. (b) $x^2 = 6 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}$. (c) $x^2 = 2.5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2.5}$. (d) $x^2 = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\sqrt{5}} = \pm\sqrt[4]{5}$. (e) $x^2 = -1$ vô nghiệm vì $x^2 \ge 0 > -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. □

Lưu ý 3 (Phương trình bậc 2 $x^2 = a$)**.** *Giải & biện luận theo tham số a phương trình $x^2 = a$ với $a \in \mathbb{R}$ cho trước. Xét 3 trường hợp: (a) Trường hợp $a = 0$: $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. (b) Trường hợp $a > 0$: $x^2 = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$. (c) Trường hợp $a < 0$: phương trình bậc 2 $x^2 = a$ vô nghiệm vì $x^2 \ge 0 > a$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

Bài toán 14 ([Thâ+23], 3., p. 5). *Số nào có căn bậc 2 là: (a)* $\sqrt{5}$*. (b)* 1.5*. (c)* -0.1*. (d)* $-\sqrt{9}$*.*

Giải. (a) 5 có 1 căn bậc 2 là $\sqrt{5}$. (b) $1.5^2 = 2.25$ có 1 căn bậc 2 là 1.5. (c) $(-0.1)^2 = 0.01$ có 1 căn bậc 2 là -0.1. (d) 9 có 1 căn bậc 2 là $-\sqrt{9}$. □

Lưu ý 4. *Số có căn bậc 2 là a là số* a^2*. Cụ thể hơn,* a^2 *có căn bậc 2 là* $\pm a$*, trong đó căn bậc 2 số học của* a^2 *là* $|a|$*.*

Bài toán 15 ([Thâ+23], 4., p. 5). *Tìm* $x \in \mathbb{R}$*: (a)* $\sqrt{x} = 3$*. (b)* $\sqrt{x} = \sqrt{5}$*. (c)* $\sqrt{x} = 0$*. (d)* $\sqrt{x} = -2$*.*

Giải. ĐKXĐ cho cả 4 ý: $x \ge 0$. (a) $\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 3^2 = 9$ (thỏa ĐKXĐ: nhận). Vậy $x = 9$. (b) $\sqrt{x} = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = 5$ (thỏa ĐKXĐ: nhận). Vậy $x = 5$. (c) $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa ĐKXĐ: nhận). Vậy $x = 0$. (d) Cách 1: Phương trình $\sqrt{x} = -2$ vô nghiệm vì $\sqrt{x} \ge 0 > -2, \forall x \in \mathbb{R}$. Cách 2: Căn bậc 2 số học thì không âm nên không tồn tại $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\sqrt{x} = -2$. □

Lưu ý 5 (Phương trình bậc 2 $\sqrt{x} = a$). *Giải & biện luận theo tham số a phương trình* $\sqrt{x} = a$ *với* $a \in \mathbb{R}$ *cho trước. ĐKXĐ:* $x \ge 0$*. Xét 3 trường hợp: (a) Trường hợp* $a = 0$*:* $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(thỏa ĐKXĐ: nhận). (b) Trường hợp* $a > 0$*:* $\sqrt{x} = a \Leftrightarrow x = a^2 > 0$ *(thỏa ĐKXĐ: nhận). (c) Trường hợp* $a < 0$*: phương trình vô tỷ* $\sqrt{x} = a$ *vô nghiệm vì* $\sqrt{x} \ge 0 > a, \forall x \in \mathbb{R}$*.*

Bài toán 16 ([Thâ+23], 5., p. 6). *Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, so sánh: (a)* 2 *&* $\sqrt{2}+1$*. (b)* 1 *&* $\sqrt{3}-1$*. (c)* $2\sqrt{31}$ *&* 10*. (d)* $-3\sqrt{11}$ *&* -12*.*

Hint. Sử dụng tính chất: $0 \le a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

1st giải. (a) $1 < 2 \Leftrightarrow \sqrt{1} = 1 < \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 + 1 < \sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow 2 < 1 + \sqrt{2}$. Vậy $2 < 1 + \sqrt{2}$. (b) $4 > 3 \Leftrightarrow \sqrt{4} = 2 > \sqrt{3} \Leftrightarrow 2 - 1 > \sqrt{3} - 1 \Leftrightarrow 1 > \sqrt{3} - 1$. Vậy $1 > \sqrt{3} - 1$. (c) $31 > 25 \Leftrightarrow \sqrt{31} > \sqrt{25} = 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{31} > 2 \cdot 5 = 10$. Vậy $2\sqrt{31} > 10$. (d) $11 < 16 \Leftrightarrow \sqrt{11} < \sqrt{16} = 4 \Leftrightarrow -3\sqrt{11} > -3 \cdot 4 = -12$. Vậy $-3\sqrt{11} > -12$. □

Có thể bình phương 2 vế của 2 biểu thức cần so sánh như sau (đương nhiên sẽ tốn công hơn nhưng bù lại tự nhiên hơn Cách 1 đã được "tỉa gọt", i.e., giấu các bước suy luận lòng vòng ngoài nháp để trình bày lời giải 'chỉ 1 dòng biến đổi tương đương'):

2nd giải. (a) $(\sqrt{2}+1)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} + 1 = 3 + 2\sqrt{2} > 3 + 2\sqrt{1} = 3 + 2 = 5 > 4 = 2^2 \Rightarrow \sqrt{2} + 1 > 2$. (b) $(\sqrt{3}-1)^2 = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1^2 = 4 - 2\sqrt{3} < 4 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 4 - 3 = 1$, trong đó đã sử dụng $-2 < -\sqrt{3}$. Vậy $1 > \sqrt{3} - 1$. (c) $(2\sqrt{31})^2 = 2^2(\sqrt{31})^2 = 4 \cdot 31 = 124 > 100 = 10^2 \Rightarrow 2\sqrt{31} > 10$. Vậy $2\sqrt{31} > 10$. (d) $(3\sqrt{11})^2 = 3^2(\sqrt{11})^2 = 9 \cdot 11 = 99 < 144 = 12^2 \Rightarrow 3\sqrt{11} < 12 \Leftrightarrow -3\sqrt{11} > -12$. Vậy $-3\sqrt{11} > -12$. □

Bài toán 17 ([Thâ+23], 6., p. 6). Đ/S? *(a) Căn bậc 2 của* 0.36 *là* 0.6*. (b) Căn bậc 2 của* 0.36 *là* 0.06*. (c)* $\sqrt{0.36} = 0.6$*. (d) Căn bậc 2 của* 0.36 *là* 0.6 *&* -0.6*. (e)* $\sqrt{0.36} = \pm 0.6$*.*

Giải. (a) S: Căn bậc 2 của 0.36 là ± 0.6 (chứ không phải mỗi 0.6). (b) S: Căn bậc 2 của 0.36 là 0.6 (chứ không phải 0.06). (c) Đ: $\sqrt{0.36} = 0.6$. (d) Đ: Căn bậc 2 của 0.36 là 0.6 & -0.6. (e) S: $\sqrt{0.36} = 0.6$ vì $-\sqrt{0.36} = -0.6$ & $\pm\sqrt{0.36} = \pm 0.6$ mới đúng. □

Bài toán 18 ([Thâ+23], 7., p. 6). *Trong các số* $\sqrt{(-5)^2}, \sqrt{5^2}, -\sqrt{5^2}, -\sqrt{(-5)^2}$*, số nào là căn bậc 2 số học của 25?*

Giải. Có $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$, $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$, $-\sqrt{5^2} = -\sqrt{25} = -5$, $-\sqrt{(-5)^2} = -\sqrt{25} = -5$, mà căn bậc 2 số học của 25 là 5 nên suy ra $\sqrt{(\pm 5)^2}$ là căn bậc 2 số học của 25. □

Lưu ý 6. *Cả 4 số* $\sqrt{(-5)^2}, \sqrt{5^2}, -\sqrt{5^2}, -\sqrt{(-5)^2}$ *đều là căn bậc 2 của* $5^2 = 25$*, trong đó* $\sqrt{(\pm 5)^2} = \sqrt{25} = 5 > 0$ *là căn bậc 2 số học của* $5^2 = 25$*.*

Bài toán 19 (Mở rộng [Thâ+23], 7., p. 6). *Trong các số* $\sqrt{(-a)^2}, \sqrt{a^2}, -\sqrt{a^2}, -\sqrt{(-a)^2}$*, số nào là căn bậc 2 số học của* a^2 *với* $a \in \mathbb{R}$ *bất kỳ?*

Giải. Có $\sqrt{(-a)^2} = \sqrt{a^2} = |a|$, $\sqrt{a^2} = \sqrt{a^2} = |a|$, $-\sqrt{a^2} = -\sqrt{a^2} = -|a|$, $-\sqrt{(-a)^2} = -\sqrt{a^2} = -|a|$, mà căn bậc 2 số học của a^2 là a nên suy ra $\sqrt{(\pm a)^2}$ là căn bậc 2 số học của a^2. □

Lưu ý 7. *Cả 4 số* $\sqrt{(-a)^2}, \sqrt{a^2}, -\sqrt{a^2}, -\sqrt{(-a)^2}$ *đều là căn bậc 2 của* a^2*, trong đó* $\sqrt{(\pm a)^2} = \sqrt{a^2} = |a| \ge 0$ *là căn bậc 2 số học của* a^2*,* $\forall a \in \mathbb{R}$*.*

Bài toán 20 ([Thâ+23], 8., p. 6). *Chứng minh:* $\sqrt{1^3 + 2^3} = 1 + 2$*,* $\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3} = 1 + 2 + 3$*,* $\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3} = 1 + 2 + 3 + 4$*. Viết tiếp 1 số đẳng thức tương tự.*

Chứng minh. $\sqrt{1^3 + 2^3} = \sqrt{1 + 8} = \sqrt{9} = 3 = 1 + 2$, $\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3} = \sqrt{1 + 8 + 27} = \sqrt{36} = 6 = 1 + 2 + 3$, $\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3} = \sqrt{1 + 8 + 27 + 64} = \sqrt{100} = 10 = 1 + 2 + 3 + 4$. Ta có các đẳng thức:

$$\sqrt{1^3} = 1,$$
$$\sqrt{1^3 + 2^3} = 1 + 2,$$
$$\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3} = 1 + 2 + 3,$$
$$\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3} = 1 + 2 + 3 + 4,$$
$$\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5,$$

$$\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3} = 1+2+3+4+5+6,$$
$$\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3} = 1+2+3+4+5+6+7,$$
$$\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3} = 1+2+3+4+5+6+7+8,$$
$$\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3} = 1+2+3+4+5+6+7+8+9,$$
$$\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3+10^3} = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10.$$

Dự đoán đẳng thức tổng quát:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n i^3} = \sqrt{1^3+2^3+\cdots+n^3} = \sum_{i=1}^n i = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}^\star.$$

Đẳng thức này đúng & có thể được chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học. □

Lưu ý 8. *Công thức tính tổng lập phương của n số nguyên dương đầu tiên:*

$$\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left(\sum_{i=1}^n i\right)^2 = (1+2+\cdots+n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},\ \forall n\in\mathbb{N}^\star. \quad (1)$$

Ta có thể kiểm nghiệm công thức trên bằng máy tính:

Bài toán 21. *Viết chương trình* Pascal, Python, C/C++ *tính: (a) tổng n số nguyên dương đầu tiên. (b) tổng bình phương của n số nguyên dương đầu tiên. (c) tổng lập phương của n số nguyên dương đầu tiên. (d) Từ câu (a) & (c), kiểm tra đẳng thức (1). (e) tổng lũy thừa bậc $m\in\mathbb{R}$ của n số nguyên dương đầu tiên*[5].

Bài toán 22 ([Thâ+23], 9., p. 6)**.** *Cho $a,b\in\mathbb{R}$, $a,b\ge 0$. Chứng minh: (a) $a<b\Rightarrow\sqrt{a}<\sqrt{b}$. (b) $\sqrt{a}<\sqrt{b}\Rightarrow a<b$.*

Chứng minh. (a) Vì $a,b\ge 0$ & $a<b$ nên $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a}+\sqrt{a}=2\sqrt{a}\ge 0$ ($\star$). Có $a<b\Rightarrow 0>a-b=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ ($\star\star$). Từ ($\star$) & ($\star\star$), suy ra $\sqrt{a}-\sqrt{b}<0$ hay $\sqrt{a}<\sqrt{b}$. (b) $\sqrt{a}<\sqrt{b}\Leftrightarrow\sqrt{a}-\sqrt{b}<0$, kết hợp điều này & ($\star$), suy ra $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})<0\Leftrightarrow a-b<0\Leftrightarrow a<b$. □

Lưu ý 9. *Từ chứng minh trên, ta thấy $a-b$ & $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ luôn cùng dấu:*

$$(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = \begin{cases} =0, & \textit{if } a=b,\\ >0, & \textit{if } a\ne b,\end{cases},\ \forall a,b\in\mathbb{R},\ a,b\ge 0.$$

Chặt chẽ & ngắn gọn hơn về công thức toán học, đẳng thức trên tương đương với đẳng thức:

$$\operatorname{sign}(a-b)=\operatorname{sign}(\sqrt{a}-\sqrt{b}),\ \forall a,b\in\mathbb{R},\ a,b\ge 0,$$

trong đó $\operatorname{sign}:\mathbb{R}\to\{0,\pm1\}$, $x\mapsto\operatorname{sign}x$ *là* hàm dấu *xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$ bởi công thức:*

$$\operatorname{sign}x = \begin{cases} 1, & \textit{if } x>0,\\ 0, & \textit{if } x=0,\\ -1, & \textit{if } x<0.\end{cases}$$

Bài toán 23 ([Thâ+23], 10., p. 6)**.** *Cho $m\in\mathbb{R}$, $m>0$. Chứng minh: (a) $m>1\Rightarrow\sqrt{m}>1$. (b) $m<1\Rightarrow\sqrt{m}<1$.*

Chứng minh. Áp dụng Bài toán 22 (a) lần lượt với $(a,b)=(1,m)$ & $(a,b)=(m,1)$, ta được: (a) $m>1\Rightarrow\sqrt{m}>\sqrt{1}=1$. (b) $m<1\Rightarrow\sqrt{m}<\sqrt{1}=1$. □

Bài toán 24 ([Thâ+23], 11., p. 6)**.** *Cho $m\in\mathbb{R}$, $m>0$. Chứng minh: (a) $m>1\Rightarrow m>\sqrt{m}>1$. (b) $m<1\Rightarrow m<\sqrt{m}<1$.*

Chứng minh. (a) Theo Bài toán 23 (a): $m>1\Rightarrow\sqrt{m}>1$. Nhân cả 2 vế của bất đẳng thức cuối với $\sqrt{m}>0$, ta được $m>\sqrt{m}$. (b) Theo Bài toán 23 (b): $m<1\Rightarrow\sqrt{m}<1$. Nhân cả 2 vế của bất đẳng thức cuối với $\sqrt{m}>0$, ta được $\sqrt{m}\cdot\sqrt{m}=m<\sqrt{m}$. □

Bài toán 25 (Program to print out 1st n square roots)**.** *Với $n\in\mathbb{N}^\star$ được nhập từ bàn phím, viết chương trình* Pascal, C/C++, Python *xuất ra: (a) Căn bậc 2 của n. (b) Căn bậc 2 của n số nguyên dương đầu tiên.*

Pascal:

[5] Lũy thừa bậc thực của 1 số thực, i.e., a^b với $a,b\in\mathbb{R}$, $a^2+b^2\ne 0$, sẽ được học ở chương trình Toán Giải tích 11.

```
program square_root;
var num, sqrt_num: real;
begin
    write('Enter a number num = ');
    readln(num);
    sqrt_num := Sqrt(num);
    writeln('sqrt of ', num,' = ', sqrt_num)
end.
```

Bài toán 26 (Số chính phương)**.** *Viết chương trình* Pascal, C/C++, Python *để kiểm tra 1 số $n \in \mathbb{N}^\star$ được nhập từ bàn phím có phải là số chính phương hay không.*

Bài toán 27 ([Tuy23], Thí dụ 1, p. 5)**.** *Cho số thực $x \ge 0$. So sánh $\sqrt{x}$ với x.*

Giải. Vì $x \ge 0$ nên $\sqrt{x}$ có nghĩa/xác định & $\sqrt{x} \ge 0$. Xét các trường hợp: (a) $\sqrt{x} = x \Leftrightarrow x = x^2 \Leftrightarrow x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$. (b) $\sqrt{x} < x \Leftrightarrow x < x^2 \Leftrightarrow x - x^2 < 0 \Leftrightarrow x(1-x) < 0$, mà $x \ge 0$ nên suy ra $1 - x < 0$, hay $x > 1$. (c) $\sqrt{x} > x \Leftrightarrow x > x^2 \Leftrightarrow x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x(1-x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$. Vậy: $x \in \{0, 1\} \Leftrightarrow \sqrt{x} = x$, $x > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} < x$, & $0 < x < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} > x$. □

Nhận xét 1. *Về mặt phương pháp để so sánh 2 số không âm ta có thể so sánh các bình phương của 2 số đó: $a \ge b > 0 \Leftrightarrow a^2 \ge b^2$. Về kết quả, khi so sánh $\sqrt{x}$ với x ta thấy có thể xảy ra cả 3 trường hợp: lớn hơn, nhỏ hơn, hoặc bằng nhau tùy theo x ở trong khoảng giá trị nào, cụ thể: $x \in \{0, 1\} \Leftrightarrow \sqrt{x} = x$, $x > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} < x$, & $0 < x < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} > x$.*

Bài toán 28 ([Bìn23], Ví dụ 2, p. 5)**.** *Chứng minh tổng & hiệu của 1 số hữu tỷ với 1 số vô tỷ là 1 số vô tỷ.*

Giải. Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tồn tại 2 số $a \in \mathbb{Q}$ & $b \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ sao cho $c = a + b \in \mathbb{Q}$. Ta có $b = c - a$, mà hiệu của 2 số hữu tỷ c, a là 1 số hữu tỷ nên $b \in \mathbb{Q}$, mâu thuẫn với giả thiết, nên c phải là số vô tỷ. Chứng minh tương tự cho hiệu. □

Bài toán 29 ([Bìn23], Ví dụ 3, p. 5)**.** *Xét xem các số a, b có thể là số vô tỷ hay không, nếu: (a) $a + b$ & $a - b$ là các số hữu tỷ. (b) $a - b$ & ab là các số hữu tỷ.*

Bài toán 30 ([Bìn23], Ví dụ 4, p. 5)**.** *Chứng minh: Nếu số tự nhiên a không là số chính phương thì $\sqrt{a}$ là số vô tỷ.*

Bài toán 31 ([Bìn23], 2., p. 6)**.** *Chứng minh các số sau là số vô tỷ: (a) $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$. (b) $m + \frac{\sqrt{3}}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Q}$, $n \ne 0$.*

Bài toán 32 ([Bìn23], 3., p. 6)**.** *Xét xem các số a, b có thể là số vô tỷ hay không nếu: (a) ab & $\frac{a}{b}$ là các số hữu tỷ. (b) $a + b$ & $\frac{a}{b}$ là các số hữu tỷ $(a + b \ne 0)$. (c) $a + b$, a^2, & b^2 là các số hữu tỷ $(a + b \ne 0)$.*

Bài toán 33 ([Bìn23], 4., p. 6)**.** *So sánh 2 số: (a) $2\sqrt{3}$ & $3\sqrt{2}$. (b) $6\sqrt{5}$ & $5\sqrt{6}$. (c) $\sqrt{24} + \sqrt{45}$ & 12. (d) $\sqrt{37} - \sqrt{15}$ & 2.*

Bài toán 34 ([Bìn23], 5., p. 6)**.** *(a) Cho 1 ví dụ để chứng tỏ khẳng định $\sqrt{a} \le a$ với mọi số a không âm là sai. (b) Cho $a > 0$. Với giá trị nào của a thì $\sqrt{a}?a$?*

Bài toán 35 ([Bìn23], $6^\star$., pp. 6–7)**.** *(a) Chỉ ra 1 số thực x mà $x - \frac{1}{x}$ là số nguyên $(x \ne \pm 1)$. (b) Chứng minh nếu $x - \frac{1}{x}$ là số nguyên & $x \ne \pm 1$ thì x & $x + \frac{1}{x}$ là số vô tỷ. Khi đó $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n}$ & $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n+1}$ là số hữu tỷ hay số vô tỷ?*

2 Căn Thức Bậc 2 & Hằng Đẳng Thức $\sqrt{A^2} = |A|$

Bài toán 36 ([Chí+23], ?1, p. 8)**.** *Hình chữ nhật $ABCD$ có đường chéo dài a cm & cạnh $BC = x$ cm. tính AB.*

Giải. Áp dụng định lý Pythagore cho ΔABC vuông tại B: $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$. □

Bài toán 37 ([Chí+23], Ví dụ 1, ?2, p. 8)**.** *Với giá trị nào của $x \in \mathbb{R}$ thì: (a) $\sqrt{3x}$ xác định. (b) $\sqrt{5 - 2x}$ xác định?*

Giải. (a) $\sqrt{3x}$ xác định $\Leftrightarrow 3x \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 0$. (b) $\sqrt{5 - 2x}$ xác định $\Leftrightarrow 5 - 2x \ge 0 \Leftrightarrow 2x \le 5 \Leftrightarrow x \le \frac{5}{2} = 2.5$. □

Bài toán 38. *Với giá trị nào của $x \in \mathbb{R}$ thì $\sqrt{ax + b}$ xác định với $a, b \in \mathbb{R}$, $a \ne 0$.*

Giải. $\sqrt{ax + b}$ xác định $\Leftrightarrow ax + b \ge 0 \Leftrightarrow ax \ge -b \Leftrightarrow x \ge -\frac{b}{a}$ nếu $a > 0$ & $x \le -\frac{b}{a}$ nếu $a < 0$. □

Bài toán 39 ([Chí+23], ĐL, p. 9)**.** *Chứng minh: $\sqrt{a^2} = |a|$, $\forall a \in \mathbb{R}$.*

Chứng minh. Theo định nghĩa giá trị tuyệt đối thì $|a| \ge 0$. Nếu $a \ge 0$ thì $|a| = a$, nên $(|a|)^2 = a^2$. Nếu $a < 0$ thì $|a| = -a$, nên $(|a|)^2 = (-a)^2 = a^2$. Do đó, $(|a|)^2 = a^2$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Vậy $|a|$ chính là căn bậc 2 số học của a^2, i.e., $\sqrt{a^2} = |a|$. □

Bài toán 40 ([Chí+23], Ví dụ 2, p. 9)**.** *Tính: (a) $\sqrt{12^2}$. (b) $\sqrt{(-7)^2}$.*

Giải. (a) $\sqrt{12^2} = |12| = 12$. (b) $\sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7$. □

Bài toán 41 ([Chí+23], Ví dụ 3, p. 9). *Rút gọn: (a)* $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$. *(b)* $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$.

Giải. $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$ (vì $2 > 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} > \sqrt{1} = 1$). Vậy $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2}-1$. (b) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2$ (vì $5 > 4 \Leftrightarrow \sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$). Vậy $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}-2$. □

Bài toán 42 ([Chí+23], Ví dụ 4, p. 10). *Rút gọn: (a)* $\sqrt{(x-2)^2}$ *với* $x \ge 2$. *(b)* $\sqrt{a^6}$ *với* $a < 0$.

Giải. (a) $\sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = x-2$ (vì $x \ge 2$). (b) $\sqrt{a^6} = \sqrt{(a^3)^2} = |a^3| = -a^3$ vì $a < 0 \Leftrightarrow a^3 < 0$. □

Bài toán 43 ([Chí+23], 6., p. 10). *Với giá trị nào của* $a \in \mathbb{R}$ *thì mỗi căn thức sau có nghĩa? (a)* $\sqrt{\frac{a}{3}}$. *(b)* $\sqrt{-5a}$. *(c)* $\sqrt{4-a}$. *(d)* $\sqrt{3a+7}$.

Giải. (a) $\sqrt{\frac{a}{3}}$ xác định $\Leftrightarrow \frac{a}{3} \ge 0 \Leftrightarrow a \ge 0$. (b) $\sqrt{-5a}$ xác định $\Leftrightarrow -5a \ge 0 \Leftrightarrow a \le 0$. (c) $\sqrt{4-a}$ xác định $\Leftrightarrow 4-a \ge 0 \Leftrightarrow a \le 4$. (d) $\sqrt{3a+7}$ xác định $\Leftrightarrow 3a+7 \ge 0 \Leftrightarrow 3a \ge -7 \Leftrightarrow a \ge -\frac{7}{3}$. □

Bài toán 44 ([Chí+23], 7., p. 10). *Tính: (a)* $\sqrt{(0.1)^2}$. *(b)* $\sqrt{(-0.3)^2}$. *(c)* $-\sqrt{(-1.3)^2}$. *(d)* $-0.4\sqrt{(-0.4)^2}$.

Giải. (a) $\sqrt{(0.1)^2} = |0.1| = 0.1$. (b) $\sqrt{(-0.3)^2} = |-0.3| = 0.3$. (c) $-\sqrt{(-1.3)^2} = -|-1.3| = -1.3$. (d) $-0.4\sqrt{(-0.4)^2} = -0.4|-0.4| = -0.4 \cdot 0.4 = -0.16$. □

Bài toán 45 ([Chí+23], 8., p. 10). *Rút gọn các biểu thức: (a)* $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$. *(b)* $\sqrt{(3-\sqrt{11})^2}$. *(c)* $2\sqrt{a^2}$ *với* $a \ge 0$. *(d)* $3\sqrt{(a-2)^2}$ *với* $a < 2$.

Giải. (a) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = |2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3}$ (vì $4 > 3 \Leftrightarrow \sqrt{4} = 2 > \sqrt{3}$). (b) $\sqrt{(3-\sqrt{11})^2} = |3-\sqrt{11}| = \sqrt{11}-3$ (vì $9 < 11 \Leftrightarrow \sqrt{9} = 3 < \sqrt{11}$). (c) $2\sqrt{a^2} = 2|a| = 2a$ với $a \ge 0$. (d) $3\sqrt{(a-2)^2} = 3|a-2| = 3(2-a)$ vì $a < 2 \Leftrightarrow a-2 < 0$. □

Bài toán 46 ([Chí+23], 9., p. 11). *Tìm x thỏa: (a)* $\sqrt{x^2} = 7$. *(b)* $\sqrt{x^2} = |-8|$. *(c)* $\sqrt{4x^2} = 6$. *(d)* $\sqrt{9x^2} = |-12|$.

Giải. (a) $\sqrt{x^2} = 7 \Leftrightarrow |x| = 7 \Leftrightarrow x = \pm 7$. (b) $\sqrt{x^2} = |-8| \Leftrightarrow |x| = 8 \Leftrightarrow x = \pm 8$. (c) $\sqrt{4x^2} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{(2x)^2} = 6 \Leftrightarrow |2x| = 6 \Leftrightarrow 2|x| = 6 \Leftrightarrow |x| = \frac{6}{2} = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3$. (d) $\sqrt{9x^2} = |-12| \Leftrightarrow \sqrt{(3x)^2} = 12 \Leftrightarrow |3x| = 12 \Leftrightarrow 3|x| = 12 \Leftrightarrow |x| = \frac{12}{3} = 4 \Leftrightarrow x = \pm 4$. □

Bài toán 47. *Giải & biện luận phương trình ẩn x theo các tham số* $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$*: (a)* $\sqrt{ax^2} = b$. *(b)* $\sqrt{(ax+b)^2} = c$. *(c)* $\sqrt{a(bx+c)^2} = d$. *(d)* $\sqrt{ax^2} = \sqrt{bx^2}$. *(e)* $\sqrt{(ax+b)^2} = \sqrt{cx^2}$. *(f)* $\sqrt{(ax+b)^2} = \sqrt{(cx+d)^2}$. *(g)* $\sqrt{a(bx+c)^2} = \sqrt{dx^2}$. *(h)* $\sqrt{a(bx+c)^2} = \sqrt{(dx+e)^2}$. *(i)* $\sqrt{a(bx+c)^2} = \sqrt{d(ex+f)^2}$.

Bài toán 48 ([Chí+23], 10., p. 11). *Chứng minh: (a)* $(\sqrt{3}-1)^2 = 4-2\sqrt{3}$. *(b)* $\sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{3} = -1$.

Giải. (a) $(\sqrt{3}-1)^2 = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1 = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = 4 - 2\sqrt{3}$. (b) Từ (a): $4-2\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{4-2\sqrt{3}} = |\sqrt{3}-1| = \sqrt{3}-1 \Leftrightarrow \sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{3} = -1$. □

Bài toán 49 ([Chí+23], 11., p. 11). *Tính: (a)* $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25} + \sqrt{196} : \sqrt{49}$. *(b)* $36 : \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 18} - \sqrt{169}$. *(c)* $\sqrt{\sqrt{81}}$. *(d)* $\sqrt{3^2+4^2}$.

Giải. (a) $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25} + \sqrt{196} : \sqrt{49} = \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{5^2} + \sqrt{14^2} : \sqrt{7^2} = |4||5| + |14| : |7| = 4 \cdot 5 + 14 : 7 = 20 + 2 = 22$. (b) $36 : \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 18} - \sqrt{169} = 36 : \sqrt{18 \cdot 18} - \sqrt{13^2} = 36 : \sqrt{(18)^2} - \sqrt{13^2} = 36 : |18| - |13| = 36 : 18 - 13 = 2 - 13 = -11$. (c) $\sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{\sqrt{9^2}} = \sqrt{|9|} = \sqrt{9} = \sqrt{3^2} = |3| = 3$. (d) $\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = \sqrt{5^2} = |5| = 5$. □

Bài toán 50 ([Chí+23], 12., p. 11). *Tìm x để mỗi căn thức sau có nghĩa: (a)* $\sqrt{2x+7}$. *(b)* $\sqrt{-3x+4}$. *(c)* $\sqrt{\frac{1}{x-1}}$. *(d)* $\sqrt{1+x^2}$.

Giải. (a) $\sqrt{2x+7}$ xác định $\Leftrightarrow 2x+7 \ge 0 \Leftrightarrow 2x \ge -7 \Leftrightarrow x \ge -\frac{7}{2} = -3.5$. (b) $\sqrt{-3x+4}$ xác định $\Leftrightarrow -3x+4 \ge 0 \Leftrightarrow 3x \le 4 \Leftrightarrow x \le \frac{4}{3}$. (c) $\sqrt{\frac{1}{x-1}}$ xác định $\Leftrightarrow \frac{1}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. (d) $\sqrt{1+x^2}$ xác định $\Leftrightarrow 1+x^2 > 0$: luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R}$ vì $x^2+1 \ge 0+1 = 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Vậy $\sqrt{1+x^2}$ xác định $\forall x \in \mathbb{R}$. □

Bài toán 51 ([Chí+23], 13., p. 11). *Rút gọn các biểu thức: (a)* $2\sqrt{a^2}-5a$ *với* $a < 0$. *(b)* $\sqrt{25a^2}+3a$ *với* $a \ge 0$. *(c)* $\sqrt{9a^4}+3a^2 = \sqrt{(3a^2)^2}+3a^2 = |3a^2|+3a^2 = 3a^2+3a^2 = 6a^2$. *(d)* $5\sqrt{4a^6} - 3a^3$ *với* $a < 0$.

Giải. (a) $2\sqrt{a^2} - 5a = 2|a| - 5a = -2a - 5a = -7a$ với $a < 0$. (b) $\sqrt{25a^2} + 3a = \sqrt{(5a)^2} + 3a = |5a| + 3a = 5a + 3a = 8a$ vì $a \ge 0 \Leftrightarrow 5a \ge 0$. (c) $\sqrt{9a^4} + 3a^2$. (d) $5\sqrt{4a^6} - 3a^3 = 5\sqrt{(2a^3)^2} - 3a^3 = 5|2a^3| - 3a^3 = -10a^3 - 3a^3 = -13a^3$ vì $a < 0 \Leftrightarrow a^3 < 0 \Leftrightarrow 2a^3 < 0$. □

Bài toán 52 ([Chí+23], 14., p. 11). *Phân tích thành nhân tử: (a)* x^2-3. *(b)* x^2-6. *(c)* $x^2+2\sqrt{3}x+3$. *(d)* $x^2-2\sqrt{5}x+5$.

Hint. $a = (\sqrt{a})^2$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \ge 0$.

Giải. (a) $x^2 - 3 = x^2 - (\sqrt{3})^2 = (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$. (b) $x^2 - 6 = x^2 - (\sqrt{6})^2 = (x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})$. (c) $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = x^2 + 2x\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = (x+\sqrt{3})^2$. (d) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 5 = x^2 - 2x\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = (x-\sqrt{5})^2$. □

Bài toán 53 ([Chí+23], 15., p. 11). *Giải phương trình: (a)* $x^2 - 5 = 0$. *(b)* $x^2 - 2\sqrt{11}x + 11 = 0$.

Giải. (a) $x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$. Vậy $x = \pm\sqrt{5}$, $S = \{\pm\sqrt{5}\}$. (b) $x^2 - 2\sqrt{11}x + 11 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x\sqrt{11} + (\sqrt{11})^2 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{11})^2 = 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{11} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{11}$. Vậy $x = \sqrt{11}$, $S = \{\sqrt{11}\}$. □

Bài toán 54 ([Chí+23], 16., p. 12). *Tìm chỗ sai trong phép chứng minh "Con muỗi nặng bằng con voi" sau: Giả sử con muỗi nặng m g, còn con voi nặng V g. Ta có: $m^2 + V^2 = V^2 + m^2$. Cộng cả 2 vế với $-2mV$, ta có: $m^2 - 2mV + V^2 = V^2 - 2mV + m^2$, hay $(m - V)^2 = (V - m)^2$. Lấy căn bậc 2 mỗi vế của đẳng thức trên, ta được: $\sqrt{(m - V)^2} = \sqrt{(V - m)^2}$. Do đó $m - V = V - m$. Từ đó ta có $2m = 2V$, suy ra $m = V$. Vậy con muỗi nặng bằng con voi!*

Giải. Chỗ sai ở bước khai căn: $\sqrt{(m - V)^2} = \sqrt{(V - m)^2} \Leftrightarrow |m - V| = |V - m|$, chứ không phải $\sqrt{(m - V)^2} = \sqrt{(V - m)^2} \Rightarrow m - V = V - m$, vì $\sqrt{(m - V)^2} = \sqrt{(V - m)^2} \Leftrightarrow m - V = \pm(V - m)$. Lời giải trên thiếu dấu giá trị tuyệt đối sau khi khai phương nên sai. □

Bài toán 55 ([Thâ+23], 12., p. 7). *Tìm $x \in \mathbb{R}$ để căn thức sau có nghĩa: (a)* $\sqrt{-2x + 3}$. *(b)* $\sqrt{\frac{2}{x^2}}$. *(c)* $\sqrt{\frac{4}{x + 3}}$. *(d)* $\sqrt{\frac{-5}{x^2 + 6}}$.

1st giải. (a) $\sqrt{-2x + 3}$ xác định $\Leftrightarrow -2x + 3 \ge 0 \Leftrightarrow -2x \ge -3 \Leftrightarrow x \le \frac{3}{2} = 1.5$. (b) $\sqrt{\frac{2}{x^2}}$ xác định $\Leftrightarrow \frac{2}{x^2} \ge 0$. Vì $x^2 \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $\frac{2}{x^2} \ge 0 \Leftrightarrow x \ne 0$ (để cho $\frac{2}{x^2}$ có nghĩa). (c) $\sqrt{\frac{4}{x+3}}$ xác định $\Leftrightarrow \frac{4}{x+3} \ge 0$. Vì $4 > 0$ nên $\frac{4}{x+3} \ge 0 \Leftrightarrow x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$. (d) Vì $x^2 \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $x^2 + 6 > 0$. Suy ra $\frac{-5}{x^2+6} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy không tồn tại $x \in \mathbb{R}$ để $\sqrt{\frac{-5}{x^2+6}}$ có nghĩa. □

2nd giải. (a) $\sqrt{-2x + 3}$ xác định $\Leftrightarrow -2x + 3 \ge 0 \Leftrightarrow 2x \le 3 \Leftrightarrow x \le \frac{3}{2} = 1.5$. (b) $\sqrt{\frac{2}{x^2}}$ xác định $\Leftrightarrow \frac{2}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x^2 > 0 \Leftrightarrow x \ne 0$. (c) $\sqrt{\frac{4}{x+3}}$ xác định $\Leftrightarrow \frac{4}{x+3} > 0 \Leftrightarrow x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$. (d) $\sqrt{\frac{-5}{x^2+6}}$ xác định $\Leftrightarrow \frac{-5}{x^2+6} > 0 \Leftrightarrow x^2+6 < 0$ vô lý vì $x^2+6 \ge 0+6 = 6 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Vậy $\sqrt{\frac{-5}{x^2+6}}$ luôn không có nghĩa/xác định. □

Bài toán 56 ([Thâ+23], 13., p. 7). *Rút gọn rồi tính: (a)* $5\sqrt{(-2)^4}$. *(b)* $-4\sqrt{(-3)^6}$. *(c)* $\sqrt{\sqrt{(-5)^8}}$. *(d)* $2\sqrt{(-5)^6} + 3\sqrt{(-2)^8}$.

1st giải. (a) $5\sqrt{(-2)^4} = 5\sqrt{((-2)^2)^2} = 5|(-2)^2| = 5|4| = 5 \cdot 4 = 20$. (b) $-4\sqrt{(-3)^6} = -4\sqrt{((-3)^3)^2} = -4|(-3)^3| = -4|-27| = -4 \cdot 27 = -108$. (c) $\sqrt{\sqrt{(-5)^8}} = \sqrt{\sqrt{((-5)^4)^2}} = \sqrt{|(-5)^4|} = \sqrt{((-5)^2)^2} = |(-5)^2| = |25| = 25$. (d) $2\sqrt{(-5)^6} + 3\sqrt{(-2)^8} = 2\sqrt{((-5)^3)^2} + 3\sqrt{((-2)^4)^2} = 2|(-5)^3| + 3|(-2)^4| = 2|-125| + 3|16| = 2 \cdot 125 + 3 \cdot 16 = 250 + 48 = 298$. □

2nd giải. Sử dụng tính chất $a^{2n} = (-a)^{2n}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $a^2 + n^2 \ne 0$.[6] (a) $5\sqrt{(-2)^4} = 5\sqrt{2^4} = 5\sqrt{(2^2)^2} = 5|2^2| = 5|4| = 5 \cdot 4 = 20$. (b) $-4\sqrt{(-3)^6} = -4\sqrt{3^6} = -4\sqrt{(3^3)^2} = -4|3^3| = -4 \cdot 27 = -108$. (c) $\sqrt{\sqrt{(-5)^8}} = \sqrt{\sqrt{5^8}} = \sqrt{\sqrt{(5^4)^2}} = \sqrt{|5^4|} = \sqrt{5^4} = \sqrt{(5^2)^2} = |5^2| = |25| = 25$. (d) $2\sqrt{(-5)^6} + 3\sqrt{(-2)^8} = 2\sqrt{5^6} + 3\sqrt{2^8} = 2\sqrt{(5^3)^2} + 3\sqrt{(2^4)^2} = 2|5^3| + 3|2^4| = 2|125| + 3|16| = 2 \cdot 125 + 3 \cdot 16 = 250 + 48 = 298$. □

Bài toán 57 ([Thâ+23], 14., p. 7). *Rút gọn các biểu thức: (a)* $\sqrt{(4 + \sqrt{2})^2}$. *(b)* $\sqrt{(3 - \sqrt{3})^2}$. *(c)* $\sqrt{(4 - \sqrt{17})^2}$. *(d)* $2\sqrt{3} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}$.

Giải. (a) $\sqrt{(4 + \sqrt{2})^2} = |4 + \sqrt{2}| = 4 + \sqrt{2}$ vì $4 + \sqrt{2} > 4 > 0$. (b) $\sqrt{(3 - \sqrt{3})^2} = |3 - \sqrt{3}| = 3 - \sqrt{3}$ vì $9 > 3 \Leftrightarrow \sqrt{9} = 3 > \sqrt{3}$. (c) $\sqrt{(4 - \sqrt{17})^2} = |4 - \sqrt{17}| = \sqrt{17} - 4$ vì $16 < 17 \Leftrightarrow \sqrt{16} = 4 < \sqrt{17}$. (d) $2\sqrt{3} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3} + |2 - \sqrt{3}| = 2\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$ vì $4 > 3 \Leftrightarrow \sqrt{4} = 2 > \sqrt{3}$. □

Bài toán 58 ([Thâ+23], 15., p. 7). *Chứng minh: (a)* $9 + 4\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 2)^2$. *(b)* $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = -2$. *(c)* $(4 - \sqrt{7})^2 = 23 - 8\sqrt{7}$. *(d)* $\sqrt{23 + 8\sqrt{7}} - \sqrt{7} = 4$.

1st giải (VT → VP). (a) $9 + 4\sqrt{5} = 5 + 2 \cdot 2\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = (\sqrt{5} + 2)^2$. (b) $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} \cdot 2 + 2^2} - \sqrt{5} = \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} - \sqrt{5} = |\sqrt{5} - 2| - \sqrt{5} = \sqrt{5} - 2 - \sqrt{5} = -2$ vì $5 > 4 \Leftrightarrow \sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$. (c) $(4 - \sqrt{7})^2 = 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{7} + (\sqrt{7})^2 = 16 - 8\sqrt{7} + 7 = 23 - 8\sqrt{7}$. (d) $\sqrt{23 + 8\sqrt{7}} - \sqrt{7} = \sqrt{4^2 + 2 \cdot 4\sqrt{7} + (\sqrt{7})^2} - \sqrt{7} = \sqrt{(4 + \sqrt{7})^2} - \sqrt{7} = |4 + \sqrt{7}| - \sqrt{7} = 4 + \sqrt{7} - \sqrt{7} = 4$. □

2nd giải (VP → VT). (a) $(\sqrt{5} + 2)^2 = (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} \cdot 2 + 2^2 = 5 + 4\sqrt{5} + 4 = 9 + 4\sqrt{5}$. (b) $(\sqrt{5} - 2)^2 = (\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} \cdot 2 + 2^2 = 5 - 4\sqrt{5} + 4 = 9 - 4\sqrt{5} \Leftrightarrow |\sqrt{5} - 2| = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} \Leftrightarrow \sqrt{5} - 2 = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} \Leftrightarrow \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = -2$ vì $5 > 4 \Leftrightarrow \sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$. (c) $23 - 8\sqrt{7} = 4^2 - 2 \cdot 4\sqrt{7} + (\sqrt{7})^2 = (4 - \sqrt{7})^2$. (d) $(4 + \sqrt{7})^2 = 4^2 + 2 \cdot 4\sqrt{7} + (\sqrt{7})^2 = 16 + 8\sqrt{7} + 7 = 23 + 8\sqrt{7} \Leftrightarrow |4 + \sqrt{7}| = \sqrt{23 + 8\sqrt{7}} \Leftrightarrow 4 + \sqrt{7} = \sqrt{23 + 8\sqrt{7}} \Leftrightarrow \sqrt{23 + 8\sqrt{7}} - \sqrt{7} = 4$. □

[6] Điều kiện $a^2 + n^2 \ne 0$ nghĩa là $(a, n) \ne (0, 0)$, i.e., a & n không thể cùng bằng 0, nhưng có thể có nhiều nhất 1 trong 2 số bằng 0. Tổng quát hơn, điều kiện $\sum_{i=1}^n a_i^2 \ne 0 \Leftrightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n) \ne (0, 0, \dots, 0)$.

Bài toán 59 ([Thâ+23], 16., p. 7)**.** *Biểu thức sau đây xác định với giá trị nào của x? (a)* $\sqrt{(x-1)(x-3)}$*. (b)* $\sqrt{x^2-4}$*. (c)* $\sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$*. (d)* $\sqrt{\dfrac{2+x}{5-x}}$*.*

Bài toán 60 ([Thâ+23], 17., p. 8)**.** *Tìm* $x \in \mathbb{R}$ *thỏa: (a)* $\sqrt{9x^2} = 2x+1$*. (b)* $\sqrt{x^2+6x+9} = 3x-1$*. (c)* $\sqrt{1-4x+4x^2} = 5$*. (d)* $\sqrt{x^4} = 7$*.*

Bài toán 61 ([Thâ+23], 18., p. 8)**.** *Phân tích nhân tử: (a)* x^2-7*. (b)* $x^2-2\sqrt{2}x+2$*. (c)* $x^2+2\sqrt{13}x+13$*.*

Giải. (a) $x^2-7 = x^2-(\sqrt{7})^2 = (x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})$. (b) $x^2-2\sqrt{2}x+2 = (x-\sqrt{2})^2$. (c) $x^2+2\sqrt{13}x+13 = (x+\sqrt{13})^2$. □

Bài toán 62 ([Thâ+23], 19., p. 8)**.** *Tìm ĐKXĐ rồi rút gọn các phân thức: (a)* $\dfrac{x^2-5}{x+\sqrt{5}}$*. (b)* $\dfrac{x^2+2\sqrt{2}x+2}{x^2-2}$*.*

Giải. (a) ĐKXĐ: $x \ne -\sqrt{5}$, $\dfrac{x^2-5}{x+\sqrt{5}} = \dfrac{(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})}{x+\sqrt{5}} = x-\sqrt{5}$. (b) ĐKXĐ: $x^2 \ne 2 \Leftrightarrow x \ne \pm\sqrt{2}$, $\dfrac{x^2+2\sqrt{2}x+2}{x^2-2} = \dfrac{(x+\sqrt{2})^2}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} = \dfrac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}$. □

Bài toán 63 ([Thâ+23], 20., p. 8)**.** *Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, so sánh: (a)* $6+2\sqrt{2}$ *& 9. (b)* $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ *& 3. (c)* $9+4\sqrt{5}$ *& 16. (d)* $\sqrt{11}-\sqrt{3}$ *& 2.*

Bài toán 64 ([Thâ+23], 21., p. 8)**.** *Rút gọn biểu thức: (a)* $\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{3}$*. (b)* $\sqrt{11+6\sqrt{2}}-3+\sqrt{2}$*. (c)* $\sqrt{9x^2}-2x$ *với* $x<0$ *&* $x \in \mathbb{R}$*. (d)* $x-4+\sqrt{16-8x+x^2}$ *với* $x>4$ *&* $x \in \mathbb{R}$*.*

Bài toán 65 ([Thâ+23], 22., p. 8)**.** *(a) Chứng minh:* $\sqrt{(n+1)^2}+\sqrt{n^2} = (n+1)^2-n^2$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*. Viết đẳng thức trên với* $n = 1,2,\ldots,10$*. (b) Tính* $\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{x^2}$ *với* $x \in \mathbb{R}$ *rồi so sánh với* $|(x+1)^2-x^2|$*.*

Giải. (a) $\sqrt{(n+1)^2}+\sqrt{n^2} = |n+1|+|n| = n+1+n = 2n+1$ $(\star)$ vì $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 > n \ge 0$. Mặt khác, $(n+1)^2-n^2 = n^2+2n+1-n^2 = 2n+1$ $(\star\star)$. Từ $(\star)$ & $(\star\star)$, suy ra $\sqrt{(n+1)^2}+\sqrt{n^2} = (n+1)^2-n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Với $n = 1,2,\ldots,10$:

$$\begin{aligned}&\sqrt{2^2}+\sqrt{1^2} = 2^2-1^2,\ \sqrt{3^2}+\sqrt{2^2} = 3^2-2^2,\ \sqrt{4^2}+\sqrt{3^2} = 4^2-3^2,\ \sqrt{5^2}+\sqrt{4^2} = 5^2-4^2,\ \sqrt{6^2}+\sqrt{5^2} = 6^2-5^2,\\ &\sqrt{7^2}+\sqrt{6^2} = 7^2-6^2,\ \sqrt{8^2}+\sqrt{7^2} = 8^2-7^2,\ \sqrt{9^2}+\sqrt{8^2} = 9^2-8^2,\ \sqrt{10^2}+\sqrt{9^2} = 10^2-9^2,\ \sqrt{11^2}+\sqrt{10^2} = 11^2-10^2.\end{aligned}$$

(b) Có:

$$\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{x^2} = |x+1|+|x| = \begin{cases} 2x+1, & \text{nếu } x \ge 0,\\ 1, & \text{nếu } -1 \le x < 0,\\ -2x-1, & \text{nếu } x < -1.\end{cases}\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$|(x+1)^2-x^2| = |x^2+2x+1-x^2| = |2x+1| = \begin{cases} 2x+1, & \text{nếu } x \ge -\frac{1}{2},\\ -2x-1, & \text{nếu } x < -\frac{1}{2}.\end{cases}\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{x^2} = |(x+1)^2-x^2| \Leftrightarrow x \ge 0$ or $x \le -1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}\backslash(-1,0) = (-\infty,-1] \cup [0,\infty)$. □

Lưu ý 10. *Để tính* $(x+1)^2-x^2$*, ta cũng có thể áp dụng hằng đẳng thức* $A^2-B^2 = (A-B)(A+B)$*, thay vì áp dụng hằng đẳng thức* $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$ *như trên, như sau:* $(x+1)^2-x^2 = (x+1-x)(x+1+x) = 1\cdot(2x+1) = 2x+1$*,* $\forall x \in \mathbb{R}$*.*

Bài toán 66 ([Tuy23], Thí dụ 2, p. 5)**.** *Cho* $a,b,c \in \mathbb{Q}$*,* $abc \ne 0$ *&* $a = b+c$*. Chứng minh* $A = \sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}} \in \mathbb{Q}$*.*

Giải. $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2} = \left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)^2+2\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{ac}-\dfrac{1}{bc}\right) = \left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)^2+\dfrac{2(c+b-a)}{abc} = \left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)^2$ vì $a = b+c$. Suy ra $A = \sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)^2} = \left|\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right|$. Có $a,b,c \in \mathbb{Q}^\star \Rightarrow \dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{c} \in \mathbb{Q} \Rightarrow A = \left|\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right| \in \mathbb{Q}$. □

Bài toán 67. *Cho* $a,b,c \in \mathbb{Q}$*,* $abc \ne 0$ *&* $a+b+c = 0$*. Chứng minh* $A = \sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}} \in \mathbb{Q}$*.*

1st giải. $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2} = \left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^2-2\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\right) = \left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^2-\dfrac{2(a+b+c)}{abc} = \left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^2$ vì $a+b+c = 0$. Suy ra $A = \sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^2} = \left|\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right|$. Có $a,b,c \in \mathbb{Q}^\star \Rightarrow \dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{c} \in \mathbb{Q} \Rightarrow A = \left|\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right| \in \mathbb{Q}$. □

2nd giải. $a+b+c=0 \Leftrightarrow -a=b+c$, nên ta có thể áp dụng bài toán 66 cho bộ 3 số $(-a,b,c)\in\mathbb{Q}^3$, $-abc\neq 0$ để thu được $\sqrt{\frac{1}{(-a)^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\in\mathbb{Q}$, i.e., $A=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\in\mathbb{Q}$. □

Nhận xét 2 (Proof of $\in\mathbb{Q}$)**.** *Để chứng minh 1 số là số hữu tỷ ta biểu diễn số đó thành 1 biểu thức gồm các phép tính cộng, trừ, nhân, chia (cho 1 số khác 0) của các số hữu tỷ.*

Bài toán 68. *(a) Cho $a,b,c\in\mathbb{R}$, $abc\neq 0$, khi nào thì $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$? (b) Cho $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $abcd\neq 0$, khi nào thì $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}$? (c) Cho $a,b,c,d,e\in\mathbb{R}$, $abcde\neq 0$, khi nào thì $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}+\frac{1}{e^2}$? (d) Cho $n\in\mathbb{N}^\star$, $a_i\in\mathbb{R}$, $\forall i=1,2,\ldots,n$, $\prod_{i=1}^n a_i=a_1a_2\ldots a_n\neq 0$, khi nào thì xảy ra đẳng thức sau?*

$$\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}\right)^2=\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i^2},\ \textit{i.e.,}\ \left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)^2=\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}.$$

Bài toán 69. *Cho $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$, $abcd\neq 0$ & $ab+ac+ad+bc+bd+cd=0$. Chứng minh $A=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}}\in\mathbb{Q}$.*

Bài toán 70. *Cho $a,b,c,d,e\in\mathbb{Q}$, $abcde\neq 0$ & $abc+abd+abe+acd+ace+ade+bcd+bce+bde+cde=0$. Chứng minh $A=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}+\frac{1}{e^2}}\in\mathbb{Q}$.*

Bài toán 71. *Cho $n\in\mathbb{N}^\star$, $a_i\in\mathbb{Q}$, $\forall i=1,2,\ldots,n$, $\prod_{i=1}^n a_i=a_1a_2\ldots a_n\neq 0$, & $\sum_{\rm cyc}a_1a_2\ldots a_{n-2}=0$. Chứng minh:*

$$A=\sqrt{\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i^2}}=\sqrt{\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}}\in\mathbb{Q}.$$

Lưu ý 11 (Cyclic sum)**.** *Ký hiệu $\sum_{\rm cyc}$ được gọi là tổng cyclic. Xem định nghĩa & ví dụ tại, e.g., AoPS/cyclic sum[7].*

Bài toán 72 ([Tuy23], 1., p. 6)**.** *Tính $A=\sqrt{\frac{8^{10}-4^{10}}{4^{11}-8^4}}$.*

Phân tích. 4, 8 đều là lũy thừa của 2 nên sẽ tiện hơn nếu đưa tất cả các lũy thừa trong A về lũy thừa với cơ số 2.

Giải. $A=\sqrt{\frac{(2^3)^{10}-(2^2)^{10}}{(2^2)^{11}-(2^3)^4}}=\sqrt{\frac{2^{30}-2^{20}}{2^{22}-2^{12}}}=\sqrt{\frac{2^{20}(2^{10}-1)}{2^{12}(2^{10}-1)}}=\sqrt{2^8}=2^4=16.$ □

Bài toán 73 ([Tuy23], 2., p. 6)**.** *Cho $A=\underbrace{99\ldots9}_{10's}4\underbrace{00\ldots0}_{10's}9$. Tính $\sqrt{A}$.*

1st giải. $A=\underbrace{99\ldots9}_{10's}4\cdot1\underbrace{00\ldots0}_{11's}+9=(\underbrace{99\ldots9}_{10's}7-3)(\underbrace{99\ldots9}_{10's}7+3)+9=\underbrace{99\ldots9}_{10's}7^2-3^2+9=\underbrace{99\ldots9}_{10's}7^2\Rightarrow\sqrt{A}=\underbrace{99\ldots9}_{10's}7.$ □

2nd giải. $A=(10^{10}-1)\cdot10^{12}+4\cdot10^{11}+9=10^{22}-10^{12}+4\cdot10^{11}+9=10^{22}-10\cdot10^{11}+4\cdot10^{11}+9=10^{22}-6\cdot10^{11}+9=(10^{11}-3)^2\Rightarrow\sqrt{A}=10^{11}-3=\underbrace{99\ldots9}_{10's}7.$ □

Bài toán 74 ([Tuy23], 3., p. 6)**.** *Không dùng máy tính hoặc bảng số, so sánh: (a) $\sqrt{8}+\sqrt{15}$ & $\sqrt{65}-1$. (b) $\frac{13-2\sqrt{3}}{6}$ & $\sqrt{2}$.*

Hint. Tìm các số chính phương gần với các số dưới dấu căn để đơn giản dấu căn 1 cách hợp lý.

Giải. (a) $\sqrt{8}+\sqrt{15}<\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$, & $\sqrt{65}-1>\sqrt{64}-1=8-1=7$. Suy ra $\sqrt{8}+\sqrt{15}<\sqrt{65}-1$. (b) $\frac{13-2\sqrt{3}}{6}>\frac{13-2\sqrt{4}}{6}=\frac{3}{2}=1.5$. Mặt khác, $(1.5)^2=2.25>2\Leftrightarrow 1.5>\sqrt{2}$, nên $\frac{13-2\sqrt{3}}{6}>\sqrt{2}$. □

Bài toán 75 ([Tuy23], 4., p. 6)**.** *Tìm điều kiện xác định (ĐKXĐ) & tập xác định (TXĐ) của các biểu thức: (a) $\sqrt{2-x^2}$. (b) $\frac{x}{\sqrt{5x^2-3}}$. (c) $\sqrt{-4x^2+4x-1}$. (d) $\frac{1}{\sqrt{x^2+x-2}}$.*

[7] URL: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Cyclic_sum.

Giải. (a) $\sqrt{2-x^2}$ xác định $\Leftrightarrow 2-x^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 \le 2 \Leftrightarrow |x| \le \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$. ĐKXĐ: $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$. TXĐ: $D = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. (b) $\frac{x}{\sqrt{5x^2-3}}$ xác định $\Leftrightarrow 5x^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow x^2 > \frac{3}{5} \Leftrightarrow |x| > \sqrt{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow x > \sqrt{\frac{3}{5}}$ hoặc $x < -\sqrt{\frac{3}{5}}$. ĐKXĐ: $x > \sqrt{\frac{3}{5}}$ hoặc $x < -\sqrt{\frac{3}{5}}$. TXĐ: $D = \left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \infty\right)$. (c) $\sqrt{-4x^2+4x-1}$ xác định $\Leftrightarrow -4x^2+4x-1 \ge 0 \Leftrightarrow -(2x-1)^2 \ge 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 \le 0 \Leftrightarrow 2x-1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. ĐKXĐ: $x = \frac{1}{2}$. TXĐ: $D = \left\{\frac{1}{2}\right\}$. (d) $\frac{1}{\sqrt{x^2+x-2}}$ xác định $\Leftrightarrow x^2+x-2 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ hoặc $x < -2$. ĐKXĐ: $x > 1$ hoặc $x < -2$. TXĐ: $D = (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$. □

Bài toán 76 ([Tuy23], 5., p. 6)**.** *Cho $a,b,c \in \mathbb{Q}$ khác nhau đôi một. Chứng minh* $A = \sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}} \in \mathbb{Q}$.

1st giải. $\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)}\right) = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)^2 - \frac{2(c-a+a-b+b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)^2 \Rightarrow A = \left|\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right|$. Vì $a,b,c \in \mathbb{Q}$ khác nhau đôi một nghĩa là $(a-b)(b-c)(c-a) \ne 0$, suy ra $\frac{1}{a-b}, \frac{1}{b-c}, \frac{1}{c-a} \in \mathbb{Q} \Rightarrow A = \left|\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right| \in \mathbb{Q}$. □

2nd giải. Vì $(a-b)+(b-c)+(c-a) = 0$, & vì $a,b,c \in \mathbb{Q}$ khác nhau đôi một nghĩa là $(a-b)(b-c)(c-a) \ne 0$ nên có thể áp dụng Bài toán 67 cho bộ 3 số $(a-b, b-c, c-a)$ để thu được $A = \sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}} \in \mathbb{Q}$. □

Bài toán 77 ([Tuy23], 6., p. 6)**.** *Cho $a,b,c \in \mathbb{Q}$ thỏa mãn $ab+bc+ca = 1$. Chứng minh* $A = \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} \in \mathbb{Q}$.

Giải. $a^2+1 = a^2+ab+bc+ca = (a+b)(a+c)$, $b^2+1 = b^2+ab+bc+ca = (b+c)(b+a)$, $c^2+1 = c^2+ab+bc+ca = (c+a)(c+b)$, nên $A = \sqrt{(a+b)(a+c)(b+c)(b+a)(c+a)(c+b)} = \sqrt{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2} = |(a+b)(b+c)(c+a)|$. Có: $a,b,c \in \mathbb{Q} \Rightarrow A = |(a+b)(b+c)(c+a)| \in \mathbb{Q}$. □

Bài toán 78 ([Tuy23], 7., p. 6–7)**.** *(a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sqrt{-x^2+x+\frac{3}{4}}$. (b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = \sqrt{4x^4 - 4x^2(x+1) + (x+1)^2 + 9}$. (c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = \sqrt{25x^2 - 20x + 4} + \sqrt{25x^2}$.*

Bài toán 79 ([Tuy23], 8., p. 7)**.** *Cho $x < 0$, rút gọn biểu thức $A = |2x - \sqrt{(5x-1)^2}|$.*

Bài toán 80 ([Tuy23], 9., p. 7)**.** *Cho biểu thức $A = 4x - \sqrt{9x^2 - 12x + 4}$. (a) Rút gọn A. (b) Tính giá trị của A với $x = \frac{2}{7}$.*

Bài toán 81 ([Tuy23], 10., p. 7)**.** *Cho biểu thức $A = 5x + \sqrt{x^2 + 6x + 9}$. (a) Rút gọn A. (b) Tìm x để $B = -9$.*

Bài toán 82 ([Tuy23], 11., p. 7)**.** *Tìm $x \in \mathbb{R}$ biết $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} \le 5 - x$.*

Bài toán 83 ([Tuy23], 12., p. 7)**.** *Giải phương trình: (a) $\sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{x+1}$. (b) $\sqrt{x^2-9} + \sqrt{x^2-6x+9} = 0$. (c) $\sqrt{x^2-4} - x^2 + 4 = 0$.*

Bài toán 84 ([Tuy23], 13., p. 7)**.** *Giải phương trình: (a) $\sqrt{x^2-4x+5} + \sqrt{x^2-4x+8} + \sqrt{x^2-4x+9} = 3 + \sqrt{5}$. (b) $\sqrt{2-x^2+2x} + \sqrt{-x^2-6x-8} = 1 + \sqrt{3}$. (c) $\sqrt{9x^2-6x+2} + \sqrt{45x^2-30x+9} = \sqrt{6x-9x^2+8}$.*

Bài toán 85 ([Bìn23], Ví dụ 5, p. 7)**.** *Cho biểu thức $A = \sqrt{x - \sqrt{x^2-4x+4}}$. (a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức A. (b) Rút gọn biểu thức A.*

Bài toán 86 ([Bìn23], Ví dụ 6, p. 8)**.** *Tìm điều kiện xác định của các biểu thức: (a) $A = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x-1}}$. (b) $B = \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2x+1}}}$.*

Bài toán 87 ([Bìn23], Ví dụ 7, p. 8)**.** *Tìm các giá trị của x sao cho $\sqrt{x+1} < x+3$.*

Bài toán 88 ([Bìn23], 7., p. 9)**.** *Tìm điều kiện xác định của các biểu thức: (a) $3 - \sqrt{1-16x^2}$. (b) $\frac{1}{1-\sqrt{x^2-3}}$. (c) $\sqrt{8x-x^2-15}$. (d) $\frac{2}{\sqrt{x^2-x+1}}$. (e) $A = \frac{1}{\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}$. (f) $B = \frac{\sqrt{16-x^2}}{\sqrt{2x+1}} + \sqrt{x^2-8x+14}$.*

Bài toán 89 ([Bìn23], 8., p. 9)**.** *Cho biểu thức $A = \sqrt{x^2-6x+9} - \sqrt{x^2+6x+9}$. (a) Rút gọn biểu thức A. (b) Tìm các giá trị của x để $A = 1$.*

Bài toán 90 ([Bìn23], 9., p. 9)**.** *Tìm các giá trị của x sao cho: (a) $\sqrt{x^2-3} \le x^2 - 3$. (b) $\sqrt{x^2-6x+9} > x - 6$.*

Bài toán 91 ([Bìn23], 10., p. 9)**.** *Cho $a+b+c = 0$ & $abc \ne 0$. Chứng minh hằng đẳng thức: $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right|$.*

3 Liên Hệ Giữa Phép Nhân, Phép Chia & Phép Khai Phương

Bài toán 92 ([Chí+23], ?1, p. 12). *Tính & so sánh:* $\sqrt{16\cdot 25}$ *&* $\sqrt{16}\cdot\sqrt{25}$.

Bài toán 93 ([Chí+23], ĐL, p. 12). *Chứng minh: (a)* $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $a,b\ge 0$. *(b)*

$$\sqrt{\prod_{i=1}^n a_i}=\prod_{i=1}^n\sqrt{a_i},\ \textit{i.e.},\ \sqrt{a_1a_2\cdots a_n}=\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\cdots\sqrt{a_n},\ \forall n\in\mathbb{N}^\star,\ \forall a_i\in\mathbb{R},\ a_i\ge 0,\ \forall i=1,2,\ldots,n.$$

Bài toán 94 ([Chí+23], Ví dụ 1, ?2, p. 13). *Áp dụng quy tắc khai phương 1 tích, tính: (a)* $\sqrt{49\cdot 1.44\cdot 25}$. *(b)* $\sqrt{810\cdot 40}$. *(c)* $\sqrt{0.16\cdot 0.64\cdot 225}$. *(d)* $\sqrt{250\cdot 360}$.

Bài toán 95 ([Chí+23], Ví dụ 2, ?3, pp. 13–14). *Tính: (a)* $\sqrt{5}\sqrt{20}$. *(b)* $\sqrt{1.3}\sqrt{52}\sqrt{10}$. *(c)* $\sqrt{3}\sqrt{75}$. *(d)* $\sqrt{20}\sqrt{72}\sqrt{4.9}$.

Bài toán 96 ([Chí+23], Ví dụ 3, ?4, p. 14). *Tìm ĐKXĐ rồi rút gọn biểu thức: (a)* $\sqrt{3a}\sqrt{27a}$ *với* $a\ge 0$. *(b)* $\sqrt{9a^2b^4}$. *(c)* $\sqrt{3a^3}\sqrt{12a}$. *(d)* $\sqrt{2a\cdot 32ab^2}$.

Bài toán 97 ([Chí+23], 17., p. 14). *Áp dụng quy tắc khai phương 1 tích, tính: (a)* $\sqrt{0.09\cdot 64}$. *(b)* $\sqrt{2^4\dot{(}-7)^2}$. *(c)* $\sqrt{12.1\cdot 360}$. *(d)* $\sqrt{2^2\cdot 3^4}$.

Bài toán 98 ([Chí+23], 18., p. 14). *Áp dụng quy tắc nhân các căn bậc 2, tính: (a)* $\sqrt{7}\sqrt{63}$. *(b)* $\sqrt{2.5}\sqrt{30}\sqrt{48}$. *(c)* $\sqrt{0.4}\cdot\sqrt{6.4}$. *(d)* $\sqrt{2.7}\sqrt{5}\sqrt{1.5}$.

Bài toán 99 ([Chí+23], 19., p. 15). *Rút gọn biểu thức: (a)* $\sqrt{0.36a^2}$ *với* $a<0$ *&* $a\in\mathbb{R}$. *(b)* $\sqrt{a^4(3-a)^2}$ *với* $a\ge 3$ *&* $a\in\mathbb{R}$. *(c)* $\sqrt{27\cdot 48(1-a)^2}$ *với* $a>1$ *&* $a\in\mathbb{R}$. *(d)* $\frac{1}{a-b}\sqrt{a^4(a-b)^2}$ *với* $a>b$.

Bài toán 100 ([Chí+23], 20., p. 15). *Rút gọn biểu thức: (a)* $\sqrt{\frac{2a}{3}}\sqrt{\frac{3a}{8}}$ *với* $a\ge 0$. *(b)* $\sqrt{13a}\sqrt{\frac{52}{a}}$ *với* $a>0$. *(c)* $\sqrt{5a}\sqrt{45a}-3a$ *với* $a\ge 0$. *(d)* $(3-a)^2-\sqrt{0.2}\sqrt{180a^2}$.

Bài toán 101 ([Chí+23], 21., p. 15). *Khai phương tích* $12\cdot 30\cdot 40$ *được bao nhiêu?*

Bài toán 102 ([Chí+23], 22., p. 15). *Tính hợp lý: (a)* $\sqrt{13^2-12^2}$. *(b)* $\sqrt{17^2-8^2}$. *(c)* $\sqrt{117^2-108^2}$. *(d)* $\sqrt{313^2-312^2}$.

Bài toán 103 (Mở rộng [Chí+23], 22., p. 15). *Rút gọn biểu thức:*

$$\sqrt{\left(\frac{m^2+n^2}{2}\right)^2-\left(\frac{m^2-n^2}{2}\right)^2},\ \forall m,n\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 104 ([Chí+23], 23., p. 15). *Chứng minh: (a)* $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$. *(b)* $\sqrt{2006}\pm\sqrt{2005})$ *là 2 số nghịch đảo của nhau.*

Bài toán 105 (Mở rộng [Chí+23], 23., p. 15). *Chứng minh: (a)* $(n-\sqrt{n^2-1})(n+\sqrt{n^2-1})=1$, $\forall n\in\mathbb{R}$, $|n|\ge 1$. *(b)* $\sqrt{n+1}\pm\sqrt{n})$ *là 2 số nghịch đảo của nhau,* $\forall n\in\mathbb{R}$, $n\ge 0$.

Bài toán 106 ([Chí+23], 24., p. 15). *Rút gọn & tìm giá trị (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 3) của các căn thức: (a)* $\sqrt{4(1+6x+9x^2)^2}$ *tại* $x=-\sqrt{2}$. *(b)* $\sqrt{9a^2(b^2+4-4b)}$ *tại* $a=-2$, $b=-\sqrt{3}$.

Bài toán 107 ([Chí+23], 25., p. 16). *Tìm* $x\in\mathbb{R}$ *thỏa: (a)* $\sqrt{16x}=8$. *(b)* $\sqrt{4x}=\sqrt{5}$. *(c)* $\sqrt{9(x-1)}=21$. *(d)* $\sqrt{4(1-x)^2}-6=0$.

Bài toán 108 ([Chí+23], 26., p. 16). *(a) So sánh* $\sqrt{25+9}$ *&* $\sqrt{25}+\sqrt{9}$. *(b) Chứng minh* $\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $a,b>0$. *(c) Chứng minh* $\sqrt{a+b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $a,b\ge 0$.

Bài toán 109 ([Chí+23], 27., p. 16). *So sánh: (a)* 4 *&* $2\sqrt{3}$. *(b)* $-\sqrt{5}$ *&* -2.

Bài toán 110 ([Thâ+23], 23., p. 9). *Tính: (a)* $\sqrt{10}\sqrt{40}$. *(b)* $\sqrt{5}\sqrt{45}$. *(c)* $\sqrt{52}\sqrt{13}$. *(d)* $\sqrt{2}\sqrt{162}$.

Bài toán 111 ([Thâ+23], 24., p. 9). *Tính: (a)* $\sqrt{45\cdot 80}$. *(b)* $\sqrt{75\cdot 48}$. *(c)* $\sqrt{90\cdot 6.4}$. *(d)* $\sqrt{2.5\cdot 14.4}$.

Bài toán 112 ([Thâ+23], 25., p. 9). *Rút gọn rồi tính: (a)* $\sqrt{6.8^2-3.2^2}$. *(b)* $\sqrt{21.8^2-18.2^2}$. *(c)* $\sqrt{117.5^2-26.5^2-1440}$. *(d)* $\sqrt{146.5^2-109.5^2+27.256}$.

Bài toán 113 ([Thâ+23], 26., p. 9). *Chứng minh: (a)* $\sqrt{9-\sqrt{17}}\sqrt{9+\sqrt{17}}=8$. *(b)* $2\sqrt{2}(\sqrt{3}-2)+(1+2\sqrt{2})^2-2\sqrt{6}=9$.

Bài toán 114 ([Thâ+23], 27., p. 9). *Rút gọn: (a)* $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{14}}{2\sqrt{3}+\sqrt{28}}$. *(b)* $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{16}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$.

Bài toán 115 ([Thâ+23], 28., p. 9). *Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, so sánh: (a)* $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ *&* $\sqrt{10}$. *(b)* $\sqrt{3}+2$ *&* $\sqrt{2}+\sqrt{6}$. *(c)* 16 *&* $\sqrt{15}\sqrt{17}$. *(d)* 8 *&* $\sqrt{15}+\sqrt{17}$.

Bài toán 116 ([Thâ+23], 29., p. 9). *Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, so sánh: (a)* $\sqrt{2003}+\sqrt{2005}$ *&* $2\sqrt{2004}$.

Bài toán 117 ([Thâ+23], 30., p. 9). *Cho 2 biểu thức* $A=\sqrt{x+2}\sqrt{x-3}$, $B=\sqrt{(x+2)(x-3)}$. *(a) Tìm* $x\in\mathbb{R}$ *lần lượt để* A,B *có nghĩa. (b) Với giá trị nào của* x *thì* $A=B$*?*

Bài toán 118 ([Thâ+23], 31., p. 10). *Biểu diễn* $\sqrt{ab}$ *ở dạng tích các căn bậc 2 với* $a<0$ *&* $b<0$. *Áp dụng tính* $\sqrt{(-25)\cdot(-64)}$.

Bài toán 119 ([Thâ+23], 32., p. 10). *Rút gọn các biểu thức: (a)* $\sqrt{4(a-3)^2}$ *với* $a\ge 3$ *&* $a\in\mathbb{R}$. *(b)* $\sqrt{9(b-2)^2}$ *với* $b<2$ *&* $b\in\mathbb{R}$. *(c)* $\sqrt{a^2(a+1)^2}$ *với* $a>0$ *&* $a\in\mathbb{R}$. *(d)* $\sqrt{b^2(b-1)^2}$ *với* $b<0$ *&* $b\in\mathbb{R}$.

Bài toán 120 ([Thâ+23], 33., p. 10). *(a) Tìm ĐKXĐ & biến đổi các biểu thức sau về dạng tích:* $A(x)=\sqrt{x^2-4}+2\sqrt{x-2}$, $B(x)=3\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}$. *(b) Giải phương trình* $A(x)=0$ *&* $B(x)=0$.

Bài toán 121 ([Thâ+23], 34., p. 10). *Tìm* $x\in\mathbb{R}$ *thỏa: (a)* $\sqrt{x-5}=3$. *(b)* $\sqrt{x-10}=-2$. *(c)* $\sqrt{2x-1}=\sqrt{5}$. *(d)* $\sqrt{4-5x}=12$.

Bài toán 122 ([Thâ+23], 35., p. 10). *(a) Chứng minh:* $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2=\sqrt{(2n+1)^2}-\sqrt{(2n+1)^2-1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. *Viết đẳng thức trên khi* $n=1,2,3,4$. *(b) Đẳng thức trên còn đúng khi* $n\in\mathbb{Z}$ *&* $n\in\mathbb{R}$ *không?*

Bài toán 123 ([Chí+23], ?1, p. 16). *Tính & so sánh: (a)* $\sqrt{\frac{16}{25}}$ *&* $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}$. *(b)* $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}$ *&* $\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}}$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $b\ne 0$.

Giải. (a) $\sqrt{\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{4^2}{5^2}}=\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\left|\frac{4}{5}\right|=\frac{4}{5}$ & $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{4^2}}{\sqrt{5^2}}=\frac{|4|}{|5|}=\frac{4}{5}$, suy ra $\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}=\frac{4}{5}$. (b) Tương tự, $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $b\ne 0$, có $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}=\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2}=\left|\frac{a}{b}\right|$ & $\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}}=\frac{|a|}{|b|}$, mà $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$, suy ra $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}=\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}}=\left|\frac{a}{b}\right|$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $b\ne 0$. □

Bài toán 124 ([Chí+23], ĐL, p. 16). *Chứng minh:* $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $a\ge 0$, $b>0$.

Chứng minh. Vì $a\ge 0$, $b>0$ nên $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ xác định & không âm. Có $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}=\frac{a}{b}$, suy ra $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ là căn bậc 2 số học của $\frac{a}{b}$, i.e., $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $a\ge 0$, $b>0$. □

Bài toán 125 ([Chí+23], Ví dụ 1, ?2, p. 17). *Áp dụng quy tắc khai phương 1 thương, tính: (a)* $\sqrt{\frac{25}{121}}$. *(b)* $\sqrt{\frac{9}{16}:\frac{25}{36}}$. *(a)* $\sqrt{\frac{225}{256}}$. *(d)* $\sqrt{0.0196}$.

1st giải. (a) $\sqrt{\frac{25}{121}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{121}}=\frac{\sqrt{5^2}}{\sqrt{11^2}}=\frac{|5|}{|11|}=\frac{5}{11}$. (b) $\sqrt{\frac{9}{16}:\frac{25}{36}}$. (c) $\sqrt{\frac{225}{256}}$. (d) $\sqrt{0.0196}$. □

2nd giải. (a) $\sqrt{\frac{25}{121}}=\sqrt{\frac{5^2}{11^2}}=\sqrt{\left(\frac{5}{11}\right)^2}=\left|\frac{5}{11}\right|=\frac{5}{11}$. (b) $\sqrt{\frac{9}{16}:\frac{25}{36}}=\sqrt{\frac{9}{16}\cdot\frac{36}{25}}=\frac{\sqrt{9\cdot 36}}{\sqrt{16\cdot 25}}=\frac{\sqrt{9}\cdot\sqrt{36}}{\sqrt{16}\cdot\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{6^2}}{\sqrt{4^2}\cdot\sqrt{5^2}}=\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}=\frac{9}{10}$. (c) $\sqrt{\frac{225}{256}}=\frac{\sqrt{225}}{\sqrt{256}}=\frac{\sqrt{15^2}}{\sqrt{16^2}}=\frac{15}{16}$. (d) $\sqrt{0.0196}=\sqrt{\frac{196}{10000}}=\frac{\sqrt{196}}{\sqrt{10000}}=\frac{14}{100}=0.14$. □

Bài toán 126 ([Chí+23], Ví dụ 2, ?3, pp. 17–18). *Tính: (a)* $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$. *(b)* $\sqrt{\frac{49}{8}}:\sqrt{3\frac{1}{8}}$. *(c)* $\frac{\sqrt{999}}{\sqrt{111}}$. *(d)* $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}}$.

Bài toán 127 ([Chí+23], Ví dụ 3, ?4, p. 18). *Rút gọn biểu thức: (a)* $\sqrt{\frac{4a^2}{25}}$. *(b)* $\frac{\sqrt{27a}}{\sqrt{3a}}$ *với* $a>0$. *(c)* $\sqrt{\frac{2a^2b^4}{50}}$. *(d)* $\frac{\sqrt{2ab^2}}{\sqrt{162}}$ *với* $a\ge 0$.

Bài toán 128 ([Chí+23], 28., p. 18). *Tính: (a)* $\sqrt{\frac{289}{225}}$. *(b)* $\sqrt{2\frac{14}{25}}$. *(c)* $\sqrt{\frac{0.25}{9}}$. *(d)* $\sqrt{\frac{8.1}{1.6}}$.

Bài toán 129 ([Chí+23], 29., p. 19). *Tính: (a)* $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$. *(b)* $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{735}}$. *(c)* $\frac{\sqrt{12500}}{\sqrt{500}}$. *(d)* $\frac{\sqrt{6^5}}{\sqrt{2^3\cdot 3^5}}$.

Bài toán 130 ([Chí+23], 30., p. 19). *Rút gọn biểu thức: (a)* $\frac{y}{x}\sqrt{\frac{x^2}{y^4}}$ *với* $x>0$ *&* $y\ne 0$. *(b)* $2y^2\sqrt{\frac{x^4}{4y^2}}$ *với* $y<0$. *(c)* $5xy\sqrt{\frac{25x^2}{y^6}}$ *với* $x<0$, $y>0$. *(d)* $0.2x^3y^3\sqrt{\frac{16}{x^4y^8}}$ *với* $xy\ne 0$.

Bài toán 131 ([Chí+23], 31., p. 19). *(a) So sánh* $\sqrt{25-16}$ *&* $\sqrt{25}-\sqrt{16}$. *(b) Chứng minh:* $\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $a>b>0$.

Bài toán 132 ([Chí+23], 32., p. 19)**.** *Tính: (a)* $\sqrt{1\frac{9}{16}\cdot 5\frac{4}{9}\cdot 0.01}$. *(b)* $\sqrt{1.44\cdot 1.21-1.44\cdot 0.4}$. *(c)* $\sqrt{\frac{165^2-124^2}{164}}$. *(d)* $\sqrt{\frac{149^2-76^2}{457^2-384^2}}$.

Bài toán 133 ([Chí+23], 33., p. 19)**.** *Giải phương trình: (a)* $\sqrt{2}x-\sqrt{50}=0$. *(b)* $\sqrt{3}x+\sqrt{3}=\sqrt{12}+\sqrt{27}$. *(c)* $\sqrt{3}x^2-\sqrt{12}=0$. *(d)* $\frac{x^2}{\sqrt{5}}-\sqrt{20}=0$.

Bài toán 134 ([Chí+23], 34., pp. 19–20)**.** *Rút gọn biểu thức: (a)* $ab^2\sqrt{\frac{3}{a^2b^4}}$ *với* $a<b$, $b\neq 0$. *(b)* $\sqrt{\frac{27(a-3)^2}{48}}$ *với* $a>3$. *(c)* $\sqrt{\frac{9+12a+4a^2}{b^2}}$ *với* $a\ge -1.5$ *&* $b<0$. *(d)* $(a-b)\sqrt{\frac{ab}{(a-b)^2}}$ *với* $a<b<0$.

Bài toán 135 ([Chí+23], 35., p. 20)**.** *Tìm* $x\in\mathbb{R}$ *thỏa: (a)* $\sqrt{(x-3)^2}=9$. *(b)* $\sqrt{4x^2+4x+1}=6$.

Giải. (a) ĐKXĐ: $\forall x\in\mathbb{R}$. $\sqrt{(x-3)^2}=9\Leftrightarrow |x-3|=9\Leftrightarrow x-3=\pm 9\Leftrightarrow x=12$ or $x=-6$. Vậy $S=\{-6,12\}$. (b) ĐKXĐ: $\forall x\in\mathbb{R}$. $\sqrt{4x^2+4x+1}=6\Leftrightarrow\sqrt{(2x+1)^2}=6\Leftrightarrow|2x+1|=6\Leftrightarrow 2x+1=\pm 6\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$ or $x=-\frac{7}{2}$. Vậy $S=\left\{-\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right\}$. □

Bài toán 136 (Mở rộng [Chí+23], 35., p. 20)**.** *Biện luận theo 3 tham số* $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$ *để giải phương trình* $\sqrt{(ax+b)^2}=\sqrt{a^2x^2+2abx+b^2}=c$.

Giải. ĐKXĐ: $\forall x\in\mathbb{R}$. Xét các trường hợp tương ứng với giá trị của c:

- *Trường hợp* $c<0$: VT$\ge 0>$ VP, nên phương trình vô nghiệm trong trường hợp này.
- *Trường hợp* $c=0$: $\sqrt{(ax+b)^2}=0\Leftrightarrow|ax+b|=0\Leftrightarrow ax+b=0\Leftrightarrow x=-\frac{b}{a}$ (xác định vì $a\neq 0$), nên phương trình có duy nhất 1 nghiệm $x=-\frac{b}{a}$ trong trường hợp này.
- *Trường hợp* $c>0$:$\sqrt{(ax+b)^2}=c\Leftrightarrow|ax+b|=c\Leftrightarrow ax+b=\pm c\Leftrightarrow x=\frac{c-b}{a}$ or $x=\frac{-c-b}{a}$ (cả 2 đều xác định vì $a\neq 0$), nên phương trình có 2 nghiệm $x=\frac{\pm c-b}{a}$.

Vậy tập nghiệm

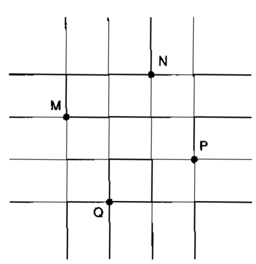
$$S=\begin{cases}\emptyset, & \text{nếu } c<0,\\ \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}, & \text{nếu } c=0,\\ \left\{\dfrac{\pm c-b}{a}\right\}, & \text{nếu } c>0,\end{cases}$$

Biện luận hoàn tất. □

Bài toán 137 ([Chí+23], 36., p. 20)**.** Đ/S? *(a)* $0.01=\sqrt{0.0001}$. *(b)* $-0.5=\sqrt{-0.25}$. *(c)* $6<\sqrt{39}<7$. *(d)* $(4-\sqrt{13})2x<\sqrt{3}(4-\sqrt{13})\Leftrightarrow 2x<\sqrt{3}$.

Giải. (a) Đ vì $\sqrt{0.0001}=\sqrt{0.01^2}=0.01$. (b) S: $\sqrt{-0.25}$ không xác định vì $-0.25<0$. (c) Đ: $36<39<49\Leftrightarrow\sqrt{36}=6<\sqrt{39}<\sqrt{49}=7$. (d) Đ vì $16>13\Leftrightarrow\sqrt{16}=4>\sqrt{13}\Leftrightarrow 4-\sqrt{3}>0$. □

Bài toán 138 ([Chí+23], 37., p. 20)**.** *Trên lưới ô vuông, mỗi hình vuông cạnh* 1 cm*, cho 4 điểm* M,N,P,Q*:*



Xác định số đo cạnh, đường chéo & diện tích tứ giác $MNPQ$*.*

Giải. Áp dụng định lý Pythagore: cạnh hình vuông $=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$, đường chéo hình vuông $=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$ (hoặc áp dụng công thức tính đường chéo hình vuông: $d=a\sqrt{2}$ với a là độ dài cạnh hình vuông). Diện tích hình vuông $MNPQ$: $S_{MNPQ}=(\sqrt{5})^2=5$. □

Bài toán 139 ([Thâ+23], 36., p. 10)**.** *Áp dụng quy tắc khai phương 1 thương, tính: (a)* $\sqrt{\frac{9}{169}}$. *(b)* $\sqrt{\frac{25}{144}}$. *(c)* $\sqrt{1\frac{9}{16}}$. *(d)* $\sqrt{2\frac{7}{81}}$.

Giải. (a) $\sqrt{\frac{9}{169}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{169}} = \frac{3}{13}$. (b) $\sqrt{\frac{25}{144}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{144}} = \frac{5}{12}$. (c) $\sqrt{1\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{1\cdot 16+9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4}$. (d) $\sqrt{2\frac{7}{81}} = \sqrt{\frac{2\cdot 81+7}{81}} = \sqrt{\frac{169}{81}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{81}} = \frac{13}{9}$. □

Bài toán 140 ([Thâ+23], 37., p. 11)**.** *Áp dụng quy tắc chia căn bậc 2, tính: (a)* $\frac{\sqrt{2300}}{\sqrt{23}}$. *(b)* $\frac{\sqrt{12.5}}{\sqrt{0.5}}$. *(c)* $\frac{\sqrt{192}}{\sqrt{12}}$. *(d)* $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{150}}$.

Giải. (a) $\frac{\sqrt{2300}}{\sqrt{23}} = \sqrt{\frac{2300}{23}} = \sqrt{100} = 10$. (b) $\frac{\sqrt{12.5}}{\sqrt{0.5}} = \sqrt{\frac{12.5}{0.5}} = \sqrt{25} = 5$. (c) $\frac{\sqrt{192}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{192}{12}} = \sqrt{16} = 4$. (d) *Cách 1*: $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{150}} = \sqrt{\frac{6}{150}} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5} = 0.2$. *Cách 2*: $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{150}} = \sqrt{\frac{6}{150}} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \sqrt{0.04} = 0.2$. □

Bài toán 141 ([Thâ+23], 38., p. 11)**.** *Cho các biểu thức* $A = \sqrt{\frac{2x+3}{x-3}}$, $B = \frac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x-3}}$. *(a) Tìm* $x \in \mathbb{R}$ *lần lượt để* A, B *có nghĩa. (b) Với giá trị nào của* $x \in \mathbb{R}$ *thì* $A = B$*?*

Giải. (a) A có nghĩa $\Leftrightarrow \frac{2x+3}{x-3} \ge 0 \Leftrightarrow (x \neq 3) \wedge ((2x+3 \ge 0 \wedge x-3 > 0) \vee (2x+3 \le 0 \wedge x-3 < 0))$. □

Bài toán 142 ([Thâ+23], 39., p. 11)**.** *Biểu diễn* $\sqrt{\frac{a}{b}}$ *với* $a, b < 0$ *ở dạng thương của 2 căn thức. Áp dụng tính* $\sqrt{\frac{-49}{-81}}$.

Bài toán 143 ([Thâ+23], 40., p. 11)**.** *Rút gọn biểu thức: (a)* $\frac{\sqrt{63y^3}}{\sqrt{7y}}$, $y > 0$. *(b)* $\frac{\sqrt{48x^3}}{\sqrt{3x^5}}$, $x > 0$. *(c)* $\frac{\sqrt{45mn^2}}{\sqrt{20m}}$, $m, n > 0$. *(d)* $\frac{\sqrt{16a^4b^6}}{\sqrt{128a^6b^6}}$, $a < 0$, $b \neq 0$.

Bài toán 144 ([Thâ+23], 41., pp. 11–12)**.** *Rút gọn biểu thức: (a)* $\sqrt{\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}+1}}$, $x \ge 0$. *(b)* $\frac{x-1}{\sqrt{y}-1}\sqrt{\frac{y-2\sqrt{y}+1}{(x-1)^4}}$, $x \neq 1$, $y \neq 1$, $y \ge 0$.

Bài toán 145 ([Thâ+23], 42., p. 12)**.** *Rút gọn biểu thức với điều kiện đã cho của x rồi tính giá trị của nó: (a)* $\sqrt{\frac{(x-2)^4}{(3-x)^2}} + \frac{x^2-1}{x-3}$, $x < 3$, *tại* $x = 0.5$. *(b)* $4x - \sqrt{8} + \frac{\sqrt{x^3+2x^2}}{\sqrt{x+2}}$, $x > -2$, *tại* $x = -\sqrt{2}$.

Bài toán 146 ([Thâ+23], 43., p. 12)**.** *Tìm* $x \in \mathbb{R}$ *thỏa: (a)* $\sqrt{\frac{2x-3}{x-1}} = 2$. *(b)* $\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} = 2$. *(c)* $\sqrt{\frac{4x+3}{x+1}} = 3$. *(d)* $\frac{\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+1}} = 3$.

Bài toán 147 ([Thâ+23], 44., p. 12)**.** *Chứng minh bất đẳng thức Cauchy cho 2 số không âm:*

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab},\ \forall a, b \in \mathbb{R},\ a, b \ge 0.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 148 ([Thâ+23], 45., p. 12)**.** *Chứng minh:*

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}} \ge \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2},\ \forall a, b \in \mathbb{R},\ a, b \ge 0.$$

Bài toán 149 ([Thâ+23], 46., p. 12)**.** *Chứng minh:* $a + \frac{1}{a} \ge 2$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Bài toán 150 ([Thâ+23], 52., p. 13)**.** *Chứng* $\sqrt{2}$ *là số vô tỷ.*

Bài toán 151 ([Thâ+23], 53., p. 13)**.** *Chứng minh: (a)* $\sqrt{3}$ *là số vô tỷ. (b)* $5\sqrt{2}, 3+\sqrt{2}$ *đều là số vô tỷ.*

Bài toán 152 ([Thâ+23], 54., p. 14)**.** *Tìm tập hợp các số thực x thỏa mãn bất đẳng thức* $\sqrt{x} > 2$ *& biểu diễn tập hợp đó trên trục số.*

Bài toán 153 ([Thâ+23], 55., p. 14)**.** *Tìm tập hợp các số thực x thỏa mãn bất đẳng thức* $\sqrt{x} < 3$ *& biểu diễn tập hợp đó trên trục số.*

Bài toán 154 ([Tuy23], Thí dụ 3, p. 9)**.** *Rút gọn biểu thức* $A = \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}$.

Bài toán 155 ([Tuy23], Thí dụ 4, p. 10)**.** *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $A = \sqrt{x-5} + \sqrt{13-x}$.

Bài toán 156 ([Tuy23], 14., p. 11). *Rút gọn biểu thức* $A = \dfrac{\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{3}} - \sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{7}-2}}$.

Bài toán 157 ([Tuy23], 15., p. 11). *Cho 2 số có tổng bằng* $\sqrt{19}$ *& có hiệu bằng* $\sqrt{7}$. *Tính tích của 2 số đó.*

Bài toán 158 ([Tuy23], 16., p. 11). *Tính* $\sqrt{A}$ *biết: (a)* $A = 13 - 2\sqrt{42}$. *(b)* $A = 46 + 6\sqrt{5}$. *(c)* $A = 12 - 3\sqrt{15}$.

Bài toán 159 ([Tuy23], 17., p. 12). *Rút gọn biểu thức: (a)* $A = \sqrt{6 + 2\sqrt{2}\sqrt{3 - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}}$. *(b)* $B = \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$. *(c)* $C = \sqrt{3 - \sqrt{5}}(\sqrt{10} - \sqrt{2})(3 + \sqrt{5})$.

Bài toán 160 ([Tuy23], 18., p. 12). *Rút gọn biểu thức* $A = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$.

Bài toán 161 ([Tuy23], 19., p. 12). *Cho* $a > 0$, *so sánh* $\sqrt{a+1} + \sqrt{a+3}$ *với* $2\sqrt{a+2}$.

Bài toán 162 ([Tuy23], 20., p. 12). *Cho* $a, b, x, y > 0$. *Chứng minh* $\sqrt{ax} + \sqrt{by} \le \sqrt{(a+b)(x+y)}$.

Bài toán 163 ([Tuy23], 21., p. 12). *(a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $A = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-8}$. *(b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $B = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$.

Bài toán 164 ([Tuy23], 22., p. 12). *Rút gọn biểu thức:*

$$A = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3}\right]}{2 + \sqrt{1-x^2}}.$$

Bài toán 165 ([Tuy23], 23., p. 12). *Tìm* x, y *biết* $x + y + 12 = 4\sqrt{x} + 6\sqrt{y-1}$.

Bài toán 166 ([Tuy23], 24., p. 12). *Tìm* x, y, z *biết* $\sqrt{x-a} + \sqrt{y-b} + \sqrt{z-c} = \frac{1}{2}(x+y+z)$, *trong đó* $a + b + c = 3$.

Bài toán 167 ([Tuy23], 25., p. 12). *Giải phương trình* $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 + 6\sqrt{x-1}} = 5$.

Bài toán 168 ([Tuy23], 26., p. 12). *Giải phương trình* $\sqrt{x^2 - 5x + 6} + \sqrt{x+1} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2 - 2x - 3}$.

Bài toán 169 ([Tuy23], 27., p. 12). *Chứng minh bất đẳng thức* $\sqrt{n+a} + \sqrt{n-a} < 2\sqrt{n}$ *vpwos* $0 < |a| \le n$. *Áp dụng (không dùng máy tính hoặc bảng số): Chứng minh:* $\sqrt{101} - \sqrt{99} > 0.1$.

Bài toán 170 ([Tuy23], 28., p. 13). *Chứng minh:* $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Áp dụng: Cho* $S = \sum_{i=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{100}}$. *Chứng minh* $18 < S < 19$.

Bài toán 171 ([Tuy23], 29., p. 13). *Chứng minh:* $\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Áp dụng: Chứng minh:* $S = \sum_{i=1}^{2500} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2500}} < 100$.

Bài toán 172 ([Tuy23], 30., p. 13). *Cho* $x, y, z > 0$. *Chứng minh* $x + y + z \ge \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$.

Bài toán 173 ([Tuy23], 31., p. 13). *Cho* $A = \sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}$. *Chứng minh* $A \le 4$.

Bài toán 174 ([Tuy23], 32., p. 13). *Cho* $B = \dfrac{x^3}{1+y} + \dfrac{y^3}{1+x}$ *trong đó* x, y *là các số thực dương thỏa mãn điều kiện* $xy = 1$. *Chứng minh* $B \ge 1$.

Bài toán 175 ([Tuy23], 33., p. 13). *Cho* $x, y, z > 0$ *thỏa mãn điều kiện* $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y+1} + \dfrac{1}{z+1} = 2$. *Chứng minh* $xyz \le \frac{1}{8}$.

Bài toán 176 ([Tuy23], 34., p. 13). *Tìm các số dương* x, y, z *sao cho* $x + y + z = 3$ *&* $x^4 + y^4 + z^4 = 3xyz$.

Bài toán 177 ([Tuy23], 35., p. 13). *Cho* $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 10$. *Chứng minh:* $x + y \ge 20$.

Bài toán 178 ([Tuy23], 36., p. 13). *Cho* $x, y, z \ge 0$ *thỏa mãn điều kiện* $x+y+z = 1$. *Chứng minh:* $\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} \le \sqrt{6}$.

Bài toán 179 ([Bìn23], Ví dụ 8, p. 10). *Rút gọn biểu thức* $A = \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} - \sqrt{x - \sqrt{2x-1}}$.

Bài toán 180 ([Bìn23], Ví dụ 9, p. 11). *Chứng minh số* $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ *là số vô tỷ.*

Bài toán 181 ([Bìn23], 11., pp. 11–12). *Rút gọn biểu thức: (a)* $\sqrt{11 - 2\sqrt{10}}$. *(b)* $\sqrt{9 - 2\sqrt{14}}$. *(c)* $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$. *(d)* $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$. *(e)* $\sqrt{4 - \sqrt{7}} - \sqrt{4 + \sqrt{7}}$. *(f)* $\dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}}{\sqrt{2} + \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}}$. *(g)* $\sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}}$. *(h)* $\sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$. *(i)* $\sqrt{94 - 42\sqrt{5}} - \sqrt{94 + 42\sqrt{5}}$.

Bài toán 182 ([Bìn23], 12., p. 12)**.** *Tính: (a)* $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$*. (b)* $\sqrt{3-\sqrt{5}}(\sqrt{10}-\sqrt{2})(3+\sqrt{5})$*.*
(c) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$*.*

Bài toán 183 ([Bìn23], 13., p. 12)**.** *Chứng minh các hằng đẳng thức sau với* $b\ge 0$*,* $a\ge\sqrt{b}$*: (a)* $\sqrt{a+\sqrt{b}}\pm\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2(a\pm\sqrt{a^2-b})}$*. (b)* $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$*.*

Bài toán 184 ([Bìn23], 14., p. 12)**.** *Rút gọn biểu thức* $A=\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}+\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$*.*

Bài toán 185 ([Bìn23], 15., p. 12)**.** *Cho biểu thức* $A=\dfrac{x+\sqrt{x^2-2x}}{x-\sqrt{x^2-2x}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-2x}}{x+\sqrt{x^2-2x}}$*. (a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức A. (b) Rút gọn biểu thức A. (c) Tìm giá trị của x để* $A<2$*.*

Bài toán 186 ([Bìn23], 16., p. 12)**.** *Lập 1 phương trình bậc 2 với các hệ số nguyên, trong đó: (a)* $2+\sqrt{3}$ *là 1 nghiệm của phương trình. (b)* $6-4\sqrt{2}$ *là 1 nghiệm của phương trình.*

Bài toán 187 ([Bìn23], 17., p. 13)**.** *Chứng minh các số sau là số vô tỷ: (a)* $\sqrt{3}-\sqrt{2}$*. (b)* $2\sqrt{2}+\sqrt{3}$*.*

Bài toán 188 ([Bìn23], 18., p. 13)**.** *Có tồn tại các số hữu tỷ dương* a,b *hay không nếu: (a)* $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2}$*. (b)* $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{\sqrt{2}}$*.*

Bài toán 189 ([Bìn23], 19., p. 13)**.** *Cho 3 số* $x,y,\sqrt{x}+\sqrt{y}$ *là các số hữu tỷ. Chứng minh mỗi số* $\sqrt{x},\sqrt{y}$ *đều là số hữu tỷ.*

Bài toán 190 ([Bìn23], 20., p. 13)**.** *Cho* a,b,c,d *là các số dương. Chứng minh tồn tại 1 số dương trong 2 số* $2a+b-2\sqrt{cd}$ *&* $2c+d-2\sqrt{ab}$*.*

Bài toán 191 ([Bìn23], 21*., p. 13)**.** *(a) Rút gọn biểu thức* $A=\sqrt{1+\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{(a+1)^2}}$ *với* $a>0$*. (b) Tính giá trị của tổng* $B=\sum_{i=1}^{99}\sqrt{1+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{(i+1)^2}}=\sqrt{1+\dfrac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\dfrac{1}{99^2}+\dfrac{1}{100^2}}$*.*

Bài toán 192 ([Bìn23], 22*., p. 13)**.** *(a) Nêu 1 cách tính nhẩm* 997^2*. (b) Tính tổng các chữ số của A biết* $\sqrt{A}=99\ldots96$ *(có* 100 *chữ số* 9*).*

4 Biến Đổi Đơn Giản Biểu Thức Chứa Căn Thức Bậc 2

Bài toán 193 ([Chí+23], ?1, p. 24)**.** *Chứng minh:* $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$*,* $\forall a,b\in\mathbb{R}$*,* $a,b\ge 0$*.*

Bài toán 194 ([Chí+23], Ví dụ 1–2, ?2, pp. 24–25)**.** *Rút gọn: (a)* $\sqrt{2\cdot 3^2}$*. (b)* $\sqrt{20}$*. (c)* $3\sqrt{5}+\sqrt{20}+\sqrt{5}$*. (d)* $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{50}$*. (e)* $4\sqrt{3}+\sqrt{27}-\sqrt{45}+\sqrt{5}$*.*

Bài toán 195 ([Chí+23], Ví dụ 3, ?3, p. 25)**.** *Đưa thừa số ra ngoài dấu căn: (a)* $\sqrt{4x^2y}$ *với* $x,y\ge 0$*. (b)* $\sqrt{18xy^2}$ *với* $x\ge 0$*,* $y<0$*. (c)* $\sqrt{28a^4b^2}$ *với* $b\ge 0$*. (d)* $\sqrt{72a^2b^4}$ *với* $a<0$*.*

Bài toán 196 ([Chí+23], Ví dụ 4, ?4, p. 26)**.** *Đưa thừa số vào trong dấu căn: (a)* $3\sqrt{7}$*. (b)* $-2\sqrt{3}$*. (c)* $5a^2\sqrt{2a}$ *với* $a\ge 0$*. (d)* $-3a^2\sqrt{2ab}$ *với* $ab\ge 0$*. (e)* $3\sqrt{5}$*. (f)* $1.2\sqrt{5}$*. (g)* $ab^4\sqrt{a}$ *với* $a\ge 0$*. (h)* $-2ab^2\sqrt{5a}$ *với* $a\ge 0$*.*

Bài toán 197 ([Chí+23], Ví dụ 5, p. 26)**.** *So sánh* $3\sqrt{7}$ *&* $\sqrt{28}$*.*

Bài toán 198 ([Chí+23], 43., p. 27)**.** *Viết các số hoặc biểu thức dưới dấu căn thành dạng tích rồi đưa thừa số ra ngoài dấu căn: (a)* $\sqrt{54}$*. (b)* $\sqrt{108}$*. (c)* $0.1\sqrt{20000}$*. (d)* $-0.05\sqrt{28800}$*. (e)* $\sqrt{7\cdot 63a^2}$*.*

Bài toán 199 ([Chí+23], 44., p. 27)**.** *Đưa thừa số vào trong dấu căn:* $3\sqrt{5},-5\sqrt{2},-\frac{2}{3}\sqrt{xy}$ *với* $xy\ge 0$*,* $x\sqrt{\frac{2}{x}}$ *với* $x>0$*.*

Bài toán 200 ([Chí+23], 45., p. 27)**.** *So sánh: (a)* $3\sqrt{3}$ *&* $\sqrt{12}$*. (b)* 7 *&* $3\sqrt{5}$*. (c)* $\frac{1}{3}\sqrt{51}$ *&* $\frac{1}{5}\sqrt{150}$*. (d)* $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ *&* $6\sqrt{\frac{1}{2}}$*.*

Bài toán 201 ([Chí+23], 46., p. 27)**.** *Rút gọn các biểu thức sau với* $x\ge 0$*: (a)* $2\sqrt{3x}-4\sqrt{3x}+27-3\sqrt{3x}$*. (b)* $3\sqrt{2x}-5\sqrt{8x}+7\sqrt{18x}+28$*.*

Bài toán 202 ([Chí+23], 47., p. 27)**.** *Rút gọn: (a)* $\dfrac{2}{x^2-y^2}\sqrt{\dfrac{3(x+y)^2}{2}}$ *với* $x\ge 0$*,* $y\ge 0$*, &* $x\ne y$*. (b)* $\frac{2}{2a-1}\sqrt{5a^2(1-4a+4a^2)}$ *với* $a>0.5$*.*

Bài toán 203 ([Thâ+23], 56., p. 14)**.** *Đưa thừa số ra ngoài dấu căn: (a)* $\sqrt{7x^2}$ *với* $x>0$*. (b)* $\sqrt{8y^2}$ *với* $y<0$*. (c)* $\sqrt{25x^3}$ *với* $x>0$*. (d)* $\sqrt{48y^4}$*.*

Bài toán 204 ([Thâ+23], 57., p. 14). *Đưa thừa số vào trong dấu căn: (a) $x\sqrt{5}$ với $x \ge 0$. (b) $x\sqrt{13}$ với $x < 0$. (c) $x\sqrt{\frac{11}{x}}$ với $x > 0$. (d) $x\sqrt{\frac{-29}{x}}$ với $x < 0$.*

Bài toán 205 ([Thâ+23], 58., p. 14). *Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{75}+\sqrt{48}-\sqrt{300}$. (b) $\sqrt{98}-\sqrt{72}+0.5\sqrt{8}$. (c) $\sqrt{9a}-\sqrt{16a}+\sqrt{49a}$ với $a \ge 0$. (d) $\sqrt{16b}+2\sqrt{40b}-3\sqrt{90b}$ với $b \ge 0$.*

Bài toán 206 ([Thâ+23], 59., p. 14). *Rút gọn biểu thức: (a) $(2\sqrt{3}+\sqrt{5})\sqrt{3}-\sqrt{60}$. (b) $(5\sqrt{2}+2\sqrt{5})\sqrt{5}-\sqrt{250}$. (c) $(\sqrt{28}-\sqrt{12}-\sqrt{7})\sqrt{7}+2\sqrt{21}$. (d) $(\sqrt{99}-\sqrt{18}-\sqrt{11})\sqrt{11}+3\sqrt{22}$.*

Bài toán 207 ([Thâ+23], 60., p. 15). *Rút gọn biểu thức: (a) $2\sqrt{40\sqrt{12}}-2\sqrt{\sqrt{75}}-3\sqrt{5\sqrt{48}}$. (b) $2\sqrt{8\sqrt{3}}-2\sqrt{5\sqrt{3}}-3\sqrt{20\sqrt{3}}$.*

Bài toán 208 ([Thâ+23], 61., p. 15). *Khai triển & rút gọn các biểu thức với $x,y \ge 0$. (a) $(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x}+x)$. (b) $(\sqrt{x}+2)(x-2\sqrt{x}+4)$. (c) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+y+\sqrt{xy})$. (d) $(x+\sqrt{y})(x^2+y-x\sqrt{y})$.*

Bài toán 209 ([Thâ+23], 62., p. 15). *Khai triển & rút gọn các biểu thức với $x,y \ge 0$. (a) $(4\sqrt{x}-\sqrt{2x})(\sqrt{x}-\sqrt{2x})$. (b) $(2\sqrt{x}+\sqrt{y})(3\sqrt{x}-2\sqrt{y})$.*

Bài toán 210 ([Thâ+23], 63., p. 15). *Chứng minh: (a) $\dfrac{(x\sqrt{y}+y\sqrt{x})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{xy}} = x-y$ với $x,y > 0$. (b) $\dfrac{\sqrt{x^3}-1}{\sqrt{x}-1} = x+\sqrt{x}+1$ với $x \ge 0$ & $x \ne 1$.*

Bài toán 211 ([Thâ+23], 64., p. 15). *(a) Chứng minh: $x+2\sqrt{2x-4} = (\sqrt{2}+\sqrt{x-2})^2$ với $x \ge 2$. (b) Rút gọn biểu thức $\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}+\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$ với $x \ge 2$.*

Bài toán 212 ([Thâ+23], 65., p. 15). *Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{25x} = 35$. (b) $\sqrt{4x} \le 162$. (c) $3\sqrt{x} = \sqrt{12}$. (d) $2\sqrt{x} \ge \sqrt{10}$.*

Bài toán 213 ([Thâ+23], 66., p. 15). *Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{x^2-9}-3\sqrt{x-3} = 0$. (b) $\sqrt{x^2-4}-2\sqrt{x+2} = 0$.*

Bài toán 214 ([Thâ+23], 67., p. 15). *Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số không âm, chứng minh: (a) Trong các hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất. (b) Trong các hình chữ nhật có cùng diện tích thì hình vuông có chu vi nhỏ nhất.*

Bài toán 215 ([Thâ+23], 6.1., p. 15). *Rút gọn biểu thức $3\sqrt{x^2y}+x\sqrt{y}$ với $x < 0$, $y \ge 0$.*

Bài toán 216 ([Chí+23], Ví dụ 1, ?1, p. 28). *Khử mẫu của biểu thức lấy căn: (a) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. (b) $\sqrt{\dfrac{5a}{7b}}$ với $ab > 0$. (c) $\sqrt{\dfrac{4}{5}}$. (d) $\sqrt{\dfrac{3}{125}}$. (e) $\sqrt{\dfrac{3}{2a^3}}$ với $a > 0$.*

Bài toán 217 ([Chí+23], Ví dụ 2, ?2, pp. 28–29). *Trục căn thức ở mẫu: (a) $\dfrac{5}{2\sqrt{3}}$. (b) $\dfrac{10}{\sqrt{3}+1}$. (c) $\dfrac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$. (d) $\dfrac{5}{3\sqrt{8}}, \dfrac{2}{\sqrt{b}}$ với $b > 0$. (e) $\dfrac{5}{5-2\sqrt{3}}, \dfrac{2a}{1-\sqrt{a}}$ với $a \ge 0$, $a \ne 1$. (f) $\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}, \dfrac{6a}{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ với $a > b > 0$.*

Bài toán 218 ([Chí+23], 48., p. 29). *Khử mẫu của biểu thức lấy căn: $\sqrt{\dfrac{1}{600}}, \sqrt{\dfrac{11}{540}}, \sqrt{\dfrac{3}{50}}, \sqrt{\dfrac{5}{98}}, \sqrt{\dfrac{(1-\sqrt{3})^2}{27}}$.*

Bài toán 219 ([Chí+23], 49., p. 29). *Tìm ĐKXĐ rồi khử mẫu của biểu thức lấy căn: $ab\sqrt{\dfrac{a}{b}}, \dfrac{a}{b}\sqrt{\dfrac{b}{a}}, \sqrt{\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{b^2}}, \sqrt{\dfrac{9a^3}{36b}}, 3xy\sqrt{\dfrac{2}{xy}}$.*

Bài toán 220 ([Chí+23], 50., p. 30). *Tìm ĐKXĐ rồi trục căn thức: $\dfrac{5}{\sqrt{10}}, \dfrac{5}{2\sqrt{5}}, \dfrac{1}{3\sqrt{20}}, \dfrac{2\sqrt{2}+2}{5\sqrt{2}}, \dfrac{y+b\sqrt{y}}{b\sqrt{y}}$.*

Bài toán 221 ([Chí+23], 51., p. 30). *Tìm ĐKXĐ rồi trục căn thức: $\dfrac{3}{\sqrt{3}+1}, \dfrac{2}{\sqrt{3}-1}, \dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}, \dfrac{b}{3+\sqrt{b}}, \dfrac{p}{2\sqrt{p}-1}$.*

Bài toán 222 ([Chí+23], 52., p. 30). *Tìm ĐKXĐ rồi trục căn thức: $\dfrac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}, \dfrac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}, \dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}, \dfrac{2ab}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.*

Bài toán 223 ([Chí+23], 53., p. 30). *Tìm ĐKXĐ rồi rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{18(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$. (b) $ab\sqrt{1+\dfrac{1}{a^2b^2}}$. (c) $\sqrt{\dfrac{a}{b^3}+\dfrac{a}{b^4}}$. (d) $\dfrac{a+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.*

Bài toán 224 ([Chí+23], 54., p. 30). *Tìm ĐKXĐ rồi rút gọn biểu thức: $\dfrac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}, \dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}, \dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2}, \dfrac{a-\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}, \dfrac{p-2\sqrt{p}}{\sqrt{p}-2}$.*

Bài toán 225 ([Chí+23], 55., p. 30). *Phân tích thành nhân tử với* $a,b,x,y\in\mathbb{R}$, $a,b,x,y\ge 0$: *(a)* $ab+b\sqrt{a}+\sqrt{a}+1$. *(b)* $\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}+\sqrt{x^2y}-\sqrt{xy^2}$.

Bài toán 226 ([Chí+23], 56., p. 30). *Sắp xếp theo thứ tự tăng dần: (a)* $3\sqrt{5},2\sqrt{6},\sqrt{29},4\sqrt{2}$. *(b)* $6\sqrt{2},\sqrt{38},3\sqrt{7},2\sqrt{14}$.

Bài toán 227 ([Chí+23], 57., p. 30). *Giải phương trình* $\sqrt{25x}-\sqrt{16x}=9$.

Bài toán 228 ([Thâ+23], 68., p. 16). *Khử mẫu của mỗi biểu thức lấy căn & rút gọn (nếu được): (a)* $\sqrt{\frac{2}{3}}$. *(b)* $\sqrt{\frac{x^2}{5}}$ *với* $x\ge 0$. *(c)* $\sqrt{\frac{3}{x}}$ *với* $x>0$. *(d)* $\sqrt{x^2-\frac{x^2}{7}}$ *với* $x<0$.

Bài toán 229 ([Thâ+23], 69., p. 16). *Trục căn thức ở mẫu & rút gọn (nếu được): (a)* $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. *(b)* $\frac{26}{5-2\sqrt{3}}$. *(c)* $\frac{2\sqrt{10}-5}{4-\sqrt{10}}$. *(d)* $\frac{9-2\sqrt{3}}{3\sqrt{6}-2\sqrt{2}}$.

Bài toán 230 ([Thâ+23], 70., p. 16). *Rút gọn biểu thức: (a)* $\frac{2}{\sqrt{3}-1}-\frac{2}{\sqrt{3}+1}$. *(b)* $\frac{5}{12(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})}-\frac{5}{12(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})}$. *(c)* $\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}+\frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}$. *(d)* $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}$.

Bài toán 231 ([Thâ+23], 71., p. 16). *Chứng minh đẳng thức:*

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Bài toán 232 ([Thâ+23], 72., p. 17). *Xác định giá trị biểu thức sau theo cách thích hợp:* $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}$.

Bài toán 233 ([Thâ+23], 73., p. 17). *Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, so sánh:* $\sqrt{2005}-\sqrt{2004}$ & $\sqrt{2004}-\sqrt{2003}$.

Bài toán 234 ([Thâ+23], 74., p. 17). *Rút gọn*

$$\frac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{8}}-\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{9}}.$$

Bài toán 235 ([Thâ+23], 75., p. 17). *Rút gọn biểu thức: (a)* $\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ *với* $x,y\ge 0$, $x\ne y$. *(b)* $\frac{x-\sqrt{3x}+3}{x\sqrt{x}+3\sqrt{3}}$ *với* $x\ge 0$.

Bài toán 236 ([Thâ+23], 76., p. 17). *Trục căn thức ở mẫu: (a)* $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$. *(b)* $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+2}$.

Bài toán 237 ([Thâ+23], 77., p. 17). *Tìm* $x\in\mathbb{R}$ *thỏa: (a)* $\sqrt{2x+3}=1+\sqrt{2}$. *(b)* $\sqrt{10+\sqrt{3}x}=2+\sqrt{6}$. *(c)* $\sqrt{3x-2}=2-\sqrt{3}$. *(d)* $\sqrt{x+1}=\sqrt{5}-3$.

Bài toán 238 ([Thâ+23], 78., p. 17). *Tìm tập hợp các giá trị* $x\in\mathbb{R}$ *thỏa mãn điều kiện sau & biểu diễn tập hợp đó trên trục số: (a)* $\sqrt{x-2}\ge\sqrt{3}$. *(b)* $\sqrt{3-2x}\le\sqrt{5}$.

Bài toán 239 ([Thâ+23], 79., pp. 17–18). *Cho các số* $x,y\in\mathbb{R}$ *có dạng* $x=a_1\sqrt{2}+b_1$ & $y=a_2\sqrt{2}+b_2$, *trong đó* $a_i,b_i\in\mathbb{Q}$, $i=1,2$. *Chứng minh: (a)* $x+y$ & xy *cũng có dạng* $a\sqrt{2}+b$ *với* $a,b\in\mathbb{Q}$. *(b)* $\frac{x}{y}$ *với* $y\ne 0$ *cũng có dạng* $a\sqrt{2}+b$ *với* $a,b\in\mathbb{Q}$.

Bài toán 240 ([Thâ+23], 7.1., p. 18). *Rút gọn biểu thức* $x\sqrt{\frac{x}{y^3}}$ *với* $x,y<0$.

Bài toán 241 ([Thâ+23], 7.2., p. 18). *Tính* $\frac{6}{\sqrt{7}-1}$.

Bài toán 242 ([Bìn23], Ví dụ 10, p. 14). *Rút gọn biểu thức* $A=\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}$.

Bài toán 243 ([Bìn23], Ví dụ 11, p. 14). *Tính giá trị của biểu thức*

$$M=\sum_{i=1}^{24}\frac{1}{(i+1)\sqrt{i}+i\sqrt{i+1}}=\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{25\sqrt{24}+24\sqrt{25}}.$$

Bài toán 244 ([Bìn23], 23., p. 15). *Rút gọn biểu thức* $A=\sqrt{1-a}+\sqrt{a(a-1)}+a\sqrt{\frac{a-1}{a}}$.

Bài toán 245 ([Bìn23], 24., p. 15). *Chứng minh các hằng đẳng thức: (a)* $\sqrt{10+\sqrt{60}-\sqrt{24}-\sqrt{40}}=\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2}$. *(b)* $\sqrt{6+\sqrt{24}+\sqrt{12}+\sqrt{8}}-\sqrt{3}=\sqrt{2}+1$.

Bài toán 246 ([Bìn23], 25., p. 15). *Cho* $A=\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}$. *Biểu diễn A dưới dạng tổng của 3 căn thức.*

Bài toán 247 ([Bìn23], 26., p. 15). *Rút gọn biểu thức* $A=\dfrac{x+3+2\sqrt{x^2-9}}{2x-6+\sqrt{x^2-9}}$.

Bài toán 248 ([Bìn23], 27., p. 15). *Rút gọn biểu thức* $B=\dfrac{x^2+5x+6+x\sqrt{9-x^2}}{3x-x^2+(x+2)\sqrt{9-x^2}}$.

Bài toán 249 ([Bìn23], 28., p. 15). *Rút gọn biểu thức:*

$$A=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}}=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}},$$
$$B=\sum_{i=1}^{24}\frac{1}{\sqrt{i}-\sqrt{i+1}}=\frac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}}-\cdots-\frac{1}{\sqrt{24}-\sqrt{25}}.$$

5 Rút Gọn Biểu Thức Có Chứa Căn Thức Bậc 2

Bài toán 250 ([Chí+23], Ví dụ 1, ?1, p. 31). *Rút gọn: (a)* $5\sqrt{a}+6\sqrt{\frac{a}{4}}-a\sqrt{\frac{4}{a}}+\sqrt{5}$ *với* $a>0$. *(b)* $3\sqrt{5a}-\sqrt{20a}+4\sqrt{45a}+\sqrt{a}$ *với* $a\ge 0$.

Bài toán 251 ([Chí+23], Ví dụ 2, p. 31). *Chứng minh:* $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})=2\sqrt{2}$.

Bài toán 252 ([Chí+23], ?2, p. 31). *Chứng minh:* $\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $a,b>0$.

Bài toán 253 ([Chí+23], ?2, p. 31). *Cho biểu thức* $P=\left(\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2\left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)$ *với* $a\in\mathbb{R}$. *(a) Tìm ĐKXĐ. (b) Rút gọn biểu thức P. (c) Tìm giá trị của* $a\in\mathbb{R}$ *để* $P<0$.

Bài toán 254 ([Chí+23], ?3, p. 32). *Tìm ĐKXĐ & rút gọn biểu thức: (a)* $\dfrac{x^2-3}{x+\sqrt{3}}$. *(b)* $\dfrac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}$.

Bài toán 255 ([Chí+23], 58., p. 32). *Rút gọn biểu thức: (a)* $5\sqrt{\frac{1}{5}}+\frac{1}{2}\sqrt{20}+\sqrt{5}$. *(b)* $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{4.5}+\sqrt{12.5}$. *(c)* $\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{18}+\sqrt{72}$. *(d)* $0.1\sqrt{200}+2\sqrt{0.08}+0.4\sqrt{50}$.

Bài toán 256 ([Chí+23], 59., p. 32). *Tìm ĐKXĐ & rút gọn biểu thức: (a)* $5\sqrt{a}-4b\sqrt{25a^3}+5a\sqrt{16ab^2}-2\sqrt{9a}$. *(b)* $5a\sqrt{64ab^3}-\sqrt{3}\sqrt{12a^3b^3}+2ab\sqrt{9ab}-5b\sqrt{81a^3b}$.

Bài toán 257 ([Chí+23], 60., p. 33). *Cho biểu thức* $A=\sqrt{16x+16}-\sqrt{9x+9}+\sqrt{4x+4}+\sqrt{x+1}$. *(a) Tìm ĐKXĐ. (b) Rút gọn biểu thức A. (c) Tìm* $x\in\mathbb{R}$ *sao cho* $A=16$.

Bài toán 258 ([Chí+23], 61., p. 33). *Chứng minh đẳng thức:* $\frac{3}{2}\sqrt{6}+2\sqrt{\frac{2}{3}}-4\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$. *(b)* $\left(x\sqrt{\frac{6}{x}}+\sqrt{\frac{2x}{3}}+\sqrt{6x}\right):\sqrt{6x}=2\frac{1}{3}$ *với* $x>0$.

Bài toán 259 ([Chí+23], 62., p. 33). *Rút gọn biểu thức: (a)* $\frac{1}{2}\sqrt{48}-2\sqrt{75}-\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}}+5\sqrt{1\frac{1}{3}}$. *(b)* $\sqrt{150}+\sqrt{1.6}\sqrt{60}+4.5\sqrt{2\frac{2}{3}}-\sqrt{6}$. *(c)* $(\sqrt{28}-2\sqrt{3}+\sqrt{7})\sqrt{7}+\sqrt{84}$. *(d)* $(\sqrt{6}+\sqrt{5})^2-\sqrt{120}$.

Bài toán 260 ([Chí+23], 63., p. 33). *Tìm ĐKXĐ & rút gọn biểu thức: (a)* $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{ab}+\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}$. *(b)* $\sqrt{\dfrac{m}{1-2x+x^2}}\sqrt{\dfrac{4m-8mx+4mx^2}{81}}$.

Bài toán 261 ([Chí+23], 64., p. 33). *Chứng minh đẳng thức: (a)* $\left(\dfrac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)\left(\dfrac{1-\sqrt{a}}{1-a}\right)^2=1$, $\forall a\in\mathbb{R}$, $a\ge 0$, $a\ne 1$. *(b)* $\dfrac{a+b}{b^2}\sqrt{\dfrac{a^2b^4}{a^2+2ab+b^2}}=|a|$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $a+b>0$, $b\ne 0$.

Bài toán 262 ([Chí+23], 65., p. 34). *Tìm ĐKXĐ & rút gọn rồi so sánh giá trị của A với 1 biết:*

$$A=\left(\frac{1}{a-\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{a}-1}\right):\frac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1}.$$

Bài toán 263 ([Chí+23], 66., p. 34). *Tính* $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$.

Bài toán 264 ([Thâ+23], 80., p. 18). *Tìm ĐKXĐ & rút gọn biểu thức: (a)* $(2-\sqrt{2})(-5\sqrt{2})-(3\sqrt{2}-5)^2$. *(b)* $2\sqrt{3a}-\sqrt{75a}+a\sqrt{\frac{13.5}{2a}}-\frac{2}{5}\sqrt{300a^3}$

Bài toán 265 ([Thâ+23], 81., p. 18). *Tìm ĐKXĐ & rút gọn biểu thức: (a)* $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. *(b)* $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{a-b}$.

Bài toán 266 ([Thâ+23], 82., pp. 18–19). *(a) Chứng minh* $x^2+x\sqrt{3}+1=\left(x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$. *(b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $x^2+x\sqrt{3}+1$. *Giá trị đó đạt được khi x bằng bao nhiêu?*

Bài toán 267 ([Thâ+23], 83., p. 19). *Chứng tỏ giá trị các biểu thức sau là số hữu tỷ: (a)* $\dfrac{2}{\sqrt{7}-5}-\dfrac{2}{\sqrt{7}+5}$. *(b)* $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$.

Bài toán 268 ([Thâ+23], 84., p. 19). *Tìm $x\in\mathbb{R}$ thỏa: (a)* $\sqrt{4x+20}-3\sqrt{5+x}+\dfrac{4}{3}\sqrt{9x+45}=6$. *(b)* $\sqrt{25x-25}-\dfrac{15}{2}\sqrt{\dfrac{x-1}{9}}=6+\sqrt{x-1}$.

Bài toán 269 ([Thâ+23], 85., p. 19). *Cho biểu thức* $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$. *(a) Tìm ĐKXĐ. (b) Rút gọn A. (c) Tìm $x\in\mathbb{R}$ để $A=2$.*

Bài toán 270 ([Thâ+23], 86., p. 19). *Cho biểu thức* $A=\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}-1}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right):\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2}-\dfrac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1}\right)$. *(a) Tìm ĐKXĐ. (b) Rút gọn A. (c) Tìm $a\in\mathbb{R}$ để $A>0$.*

Bài toán 271 ([Thâ+23], 87., p. 19). *(a) Chứng minh bất đẳng thức:* $a+b+c\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$, $a,b,c\ge 0$. *(b) Mở rộng kết quả cho trường hợp $4,5$ số không âm. (c) Mở rộng kết quả cho trường hợp $n\in\mathbb{N}^\star$ số không âm.*

Bài toán 272 ([Thâ+23], 88., p. 19). *Giải bất phương trình* $\sqrt{32}x-(\sqrt{8}+\sqrt{2})x>\sqrt{2}$.

Bài toán 273 ([Tuy23], Thí dụ 5, p. 14). *Cho* $A=\sqrt{11+\sqrt{96}}$ & $B=\dfrac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$. *Không dùng máy tính hoặc bảng số, so sánh A & B.*

Bài toán 274 ([Tuy23], Thí dụ 6, p. 15). *Cho biểu thức* $A=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}-\dfrac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}\right)\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x}-x}\right)$. *(a) Tìm ĐKXĐ rồi rút gọn A. (b) Tính giá trị của A với $x=3-2\sqrt{2}$.*

Bài toán 275 ([Tuy23], 37., pp. 15–16). *Không dùng máy tính hoặc bảng số, so sánh các số sau: (a)* $-3\sqrt{11}$ & $-7\sqrt{2}$. *(b)* $\dfrac{7}{2}\sqrt{\dfrac{1}{12}}$ & $\dfrac{9}{4}\sqrt{\dfrac{1}{5}}$. *(c)* $\sqrt{\dfrac{4}{27}}$ & $\sqrt{\dfrac{3}{26}}$.

Bài toán 276 ([Tuy23], 38., p. 16). *Không dùng máy tính hoặc bảng số, chứng minh* $4\sqrt{5}-3\sqrt{2}<5$.

Bài toán 277 ([Tuy23], 39., p. 16). *Cho* $A=\sqrt{x^2+1}-x-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$ *trong đó $x\in\mathbb{R}$. Xác định $x\in\mathbb{R}$ để giá trị của A là 1 số tự nhiên.*

Bài toán 278 ([Tuy23], 40., p. 16). *Trục căn thức ở mẫu của các biểu thức sau: (a)* $A=\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{2c}}$ *trong đó $a,b,c>0$ thỏa mãn điều kiện c là trung bình nhân của a & b. (b)* $B=\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$ *trong đó $a,b,c,d>0$ thỏa mãn điều kiện $ab=cd$ & $a+b\ne c+d$.*

Bài toán 279 ([Tuy23], 41., p. 16). *Tìm $x,y\in\mathbb{N}$ sao cho $x>y>0$ thỏa mãn điều kiện* $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{931}$.

Bài toán 280 ([Tuy23], 42., p. 16). *Chứng minh:* $\dfrac{2\sqrt{mn}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{m+n}}=\sqrt{m}+\sqrt{n}-\sqrt{m+n}$. *Áp dụng tính* $\dfrac{2\sqrt{10}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$.

Bài toán 281 ([Tuy23], 43., p. 16). *Chứng minh:* $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. *Áp dụng tính tổng:* $S=\sum_{i=1}^{399}\dfrac{1}{(i+1)\sqrt{i}+i\sqrt{i+1}}=\dfrac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{400\sqrt{399}+399\sqrt{400}}$.

Bài toán 282 ([Tuy23], 44., p. 16). *Tìm $n \in \mathbb{N}$ nhỏ nhất sao cho $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 0.05$.*

Bài toán 283 ([Tuy23], 45., p. 17). *Cho $A = \sum_{i=1}^{120} \frac{1}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}$, $B = \sum_{i=1}^{35} \frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{35}}$. Chứng minh $A < B$.*

Bài toán 284 ([Tuy23], 46., p. 17). *Cho $x, y, z > 0$ & khác nhau đôi một. Chứng minh giá trị của biểu thức*

$$A = \frac{x}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{z})} + \frac{y}{(\sqrt{y}-\sqrt{z})(\sqrt{y}-\sqrt{z})} + \frac{z}{(\sqrt{z}-\sqrt{x})(\sqrt{z}-\sqrt{y})}$$

không phụ thuộc vào giá trị của các biến.

Bài toán 285 ([Tuy23], 47., p. 17). *Cho biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{5}{x-\sqrt{x}-6} - \frac{\sqrt{x}-2}{3-\sqrt{x}}$. (a) Rút gọn A. (b) Tìm giá trị lớn nhất của A.*

Bài toán 286 ([Tuy23], 48., p. 17). *Cho $A = \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{1-\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{1-+\sqrt{xy}}\right) : \left(1 + \frac{x+y+2xy}{1-xy}\right)$. (a) Rút gọn A. (b) Tính giá trị của P với $x = \frac{2}{2+\sqrt{3}}$. (c) Tìm giá trị lớn nhất của A.*

Bài toán 287 ([Tuy23], 49., p. 17). *Cho $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1} + \frac{2\sqrt{z}}{\sqrt{zx}+2\sqrt{z}+2}$. Biết $xyz = 4$, tính $\sqrt{P}$.*

Bài toán 288 ([Bìn23], Ví dụ 12, p. 15). *Tính: $A = \left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right) : \left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} - \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right)$.*

Bài toán 289 ([Bìn23], Ví dụ 13, p. 16). *Rút gọn biểu thức $A = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.*

Bài toán 290 ([Bìn23], Ví dụ 14, p. 16). *Cho $A = \frac{\sqrt{a}+6}{\sqrt{a}+1}$. (a) Tìm các số nguyên a để A là số nguyên. (b) Chứng minh với $a = \frac{4}{9}$ thì A là số nguyên. (c) Tìm các số hữu tỷ a để A là số nguyên.*

Bài toán 291 ([Bìn23], 29., p. 18). *Rút gọn biểu thức: (a) $A = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$. (b) $B = \left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)\left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-a}\right)^2$. (c) $C = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}} : \left[\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\frac{1}{x+y+2\sqrt{xy}} + \frac{2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\right]$ với $x = 2-\sqrt{3}$ & $y = 2+\sqrt{3}$.*

Bài toán 292 ([Bìn23], 30., p. 18). *Rút gọn biểu thức $A = \frac{1-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}$.*

Bài toán 293 ([Bìn23], 31., p. 18). *Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2-y^2}} - \sqrt{x-\sqrt{x^2-y^2}}}{\sqrt{2(x-y)}}$ với $x > y > 0$.*

Bài toán 294 ([Bìn23], 32., p. 18). *Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$ với $x = \frac{a^2+b^2}{2ab}$ & $b > a > 0$.*

Bài toán 295 ([Bìn23], 33., p. 18). *Rút gọn biểu thức $B = \frac{2a\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$ với $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}} - \sqrt{\frac{a}{1-a}}\right)$ & $0 < a < 1$.*

Bài toán 296 ([Bìn23], 34., p. 18). *Rút gọn biểu thức $A = a + b - \sqrt{\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{c^2+1}}$ với $a, b, c > 0$ & $ab + bc + ca = 1$.*

Bài toán 297 ([Bìn23], 35., p. 18). *Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}} \cdot \sqrt{2x-1}$.*

Bài toán 298 ([Bìn23], 36., p. 18). *Chứng minh hằng đẳng thức sau với $x \ge 2$*

$$\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{\frac{x^2-4}{x}}} + \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{\frac{x^2-4}{x}}} = \sqrt{\frac{2x+4}{\sqrt{x}}}.$$

Bài toán 299 ([Bìn23], 37., p. 18). *Cho* $a = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}$. *Tính* $a^7 + b^7$.

Bài toán 300 ([Bìn23], 38., p. 19). *Cho biết* $\sqrt{x^2-6x+13} - \sqrt{x^2-6x+10} = 1$. *Tính* $\sqrt{x^2-6x+13} + \sqrt{x^2-6x+10}$.

Bài toán 301 ([Bìn23], 39., p. 19). *Cho biểu thức* $A = \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-2}$. *(a) Tìm các số nguyên a để A là số nguyên. (b) Tìm các số hữu tỷ a để A là số nguyên.*

Bài toán 302 ([Bìn23], 40., p. 19). *Cho* $a = \sqrt{2}-1$. *(a) Viết* a^2, a^3 *dưới dạng* $\sqrt{m} - \sqrt{m-1}$ *trong đó m là số tự nhiên. (b) Chứng minh với mọi số nguyên dương n, số* a^n *viết được dưới dạng trên.*

6 Cube Root, nth Root – Căn Bậc 3, Căn Bậc n

Bài toán 303 (Program to print out 1st n cube roots). *Viết chương trình* Pascal, C/C++, Python *xuất ra căn bậc 3 của n số tự nhiên đầu tiên với* $n \in \mathbb{N}^\star$ *được nhập từ bàn phím.*

Bài toán 304. *Viết chương trình* Pascal, C/C++, Python *để kiểm tra 1 số* $n \in \mathbb{N}^\star$ *được nhập từ bàn phím có phải là lập phương của 1 số tự nhiên hay không.*

Bài toán 305 (Program to print out 1st n nth roots). *Viết chương trình* Pascal, C/C++, Python *xuất ra căn bậc n của m số tự nhiên đầu tiên với* $m, n \in \mathbb{N}^\star$ *được nhập từ bàn phím.*

Bài toán 306. *Viết chương trình* Pascal, C/C++, Python *để kiểm tra 1 số m được nhập từ bàn phím có phải là lũy thừa bậc n của 1 số tự nhiên hay không với* $m, n \in \mathbb{N}^\star$ *được nhập từ bàn phím.*

Bài toán 307 ([Chí+23], ?1, p. 35). *Tìm căn bậc 3 của:* $27, -64, 0, \frac{1}{125}$.

Bài toán 308 ([Chí+23], Ví dụ 2, p. 35). *So sánh* 2 *&* $\sqrt[3]{7}$.

Bài toán 309 ([Chí+23], Ví dụ 3, p. 36). *Rút gọn* $\sqrt[3]{8a^3} - 5a$.

Bài toán 310 ([Chí+23], ?2, p. 36). *Tính* $\sqrt[3]{1728} : \sqrt[3]{64}$ *theo 2 cách.*

Bài toán 311 ([Chí+23], 67., p. 36). *Tính:* $\sqrt[3]{512}, \sqrt[3]{-729}, \sqrt[3]{0.064}, \sqrt[3]{-0.216}, \sqrt[3]{-0.008}$.

Bài toán 312 ([Chí+23], 68., p. 36). *Tính: (a)* $\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{-8} - \sqrt[3]{125}$. *(b)* $\frac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}} - \sqrt[3]{54}\sqrt[3]{4}$.

Bài toán 313 ([Chí+23], 69., p. 36). *So sánh: (a)* 5 *&* $\sqrt[3]{123}$. *(b)* $5\sqrt[3]{6}$ *&* $6\sqrt[3]{5}$.

Bài toán 314 ([Thâ+23], 88., p. 20). *Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, tính:* $\sqrt[3]{-343}, \sqrt[3]{0.027}, \sqrt[3]{1.331}, \sqrt[3]{-0.512}$.

Bài toán 315 ([Thâ+23], 89., p. 20). *Tìm* $x \in \mathbb{R}$ *thỏa: (a)* $\sqrt[3]{x} = -1.5$. *(b)* $\sqrt[3]{x-5} = 0.9$.

Bài toán 316 (Mở rộng [Thâ+23], 89., p. 20). *Tìm* $x \in \mathbb{R}$ *thỏa: (a)* $\sqrt[3]{x} = a \in \mathbb{R}$. *(b)* $\sqrt[3]{ax+b} = c$. *(c)* $\sqrt[3]{ax^2+bx+c} = d$.

Bài toán 317 ([Thâ+23], 90., p. 20). *Chứng minh: (a)* $\sqrt[3]{a^3b} = a\sqrt[3]{b}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. *(b)* $\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}} = \frac{1}{b}\sqrt[3]{ab}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

Bài toán 318 ([Thâ+23], 92., p. 20). *Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, so sánh: (a)* $2\sqrt[3]{3}$ *&* $\sqrt[3]{23}$. *(b)* 33 *&* $3\sqrt[3]{1333}$.

Bài toán 319 ([Thâ+23], 93., p. 20). *Tìm tập hợp các giá trị* $x \in \mathbb{R}$ *thỏa mãn điều kiện sau & biểu diễn tập hợp đó trên trục số: (a)* $\sqrt[3]{x} \geq 2$. *(b)* $\sqrt[3]{x} \leq -1.5$.

Bài toán 320 ([Thâ+23], 94., pp. 20–21). *Chứng minh:*

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)\left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right], \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Từ đó, chứng tỏ:

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq xyz, \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}, \ x, y, z \geq 0,$$
$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \ \forall a, b, c \in \mathbb{R}, \ a, b, c \geq 0.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 321 ([Thâ+23], 95., p. 20). *Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số không âm, chứng minh: (a) Trong các hình hộp chữ nhật có cùng tổng 3 kích thước thì hình lập phương có thể tích lớn nhất. (b) Trong các hình hộp chữ nhật có cùng thể tích thì hình lập phương có tổng 3 kích thước bé nhất.*

Bài toán 322 (Mở rộng [Tuy23], Thí dụ 1, p. 5). *Cho $x \in \mathbb{R}$. So sánh $\sqrt[3]{x}$ với x.*

Giải. $\sqrt[3]{x}$ xác định $\forall x \in \mathbb{R}$. Xét các trường hợp: (a) $\sqrt[3]{x} = x \Leftrightarrow x = x^3 \Leftrightarrow x - x^3 = 0 \Leftrightarrow x(1-x^2) = 0 \Leftrightarrow x(1-x)(1+x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \pm 1\}$. (b) $\sqrt[3]{x} < x \Leftrightarrow x < x^3 \Leftrightarrow x - x^3 < 0 \Leftrightarrow x(1-x^2) < 0 \Leftrightarrow x(1-x)(1+x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$ hoặc $x > 1$, trong đó phép biến đổi tương đương cuối cùng thu được nhờ lập bảng xét dấu. (c) $\sqrt[3]{x} > x \Leftrightarrow x > x^3 \Leftrightarrow x - x^3 > 0 \Leftrightarrow x(1-x^2) > 0 \Leftrightarrow x(1-x)(1+x) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ hoặc $0 < x < 1$, trong đó phép biến đổi tương đương cuối cùng cũng thu được nhờ lập bảng xét dấu. Vậy: $\sqrt[3]{x} = x \Leftrightarrow x \in \{0, \pm 1\}$, $\sqrt[3]{x} < x \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$, $\sqrt[3]{x} > x \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$. □

Bài toán 323 (Mở rộng [Tuy23], Thí dụ 1, p. 5). *Cho $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^\star$. So sánh $\sqrt[n]{x}$ với x.*

Bài toán 324 ([Tuy23], Thí dụ 7, p. 19). *Tính $x = \sqrt[3]{17\sqrt{5} + 38} - \sqrt[3]{17\sqrt{5} - 38}$.*

Bài toán 325 ([Tuy23], Thí dụ 8, p. 20). *Giải & biện luận phương trình $(x-a)^n = a^2 - 2a + 1$ với $n \in \mathbb{N}^\star$, a là tham số.*

Bài toán 326 ([Tuy23], 50., p. 21). *Tính: (a) $\sqrt[3]{8\sqrt{5} - 16}\sqrt[3]{8\sqrt{5} + 16}$. (b) $\sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} + \sqrt[6]{8}$. (c) $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{1 - \sqrt{3}}\sqrt[6]{4 + 2\sqrt{3}}$.*

Bài toán 327 ([Tuy23], 51., p. 21). *(a) Tính $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3} - 1} - \dfrac{4}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1}$. (b) Cho $x = \dfrac{2}{2\sqrt[3]{2} + 2 + \sqrt[3]{4}}$, $y = \dfrac{6}{2\sqrt[3]{2} - 2 + \sqrt[3]{4}}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{xy}{x+y}$.*

Bài toán 328 ([Tuy23], 52., p. 21). *Cho $x = \dfrac{\sqrt[3]{8 - 3\sqrt{5}} + \sqrt[6]{64 - 12\sqrt{20}}}{\sqrt[3]{57}}\sqrt[3]{8 + 3\sqrt{5}}$, $y = \dfrac{\sqrt[3]{9} - \sqrt{2}}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{2}} + \dfrac{\sqrt{2} - 9\sqrt[3]{9}}{\sqrt[4]{2} - \sqrt[3]{81}}$. Tính xy.*

Bài toán 329 ([Tuy23], 53., p. 22). *Tính: (a) $x = \sqrt[3]{5 + 2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5 - 2\sqrt{13}}$. (b) $x = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$. (c) $x = \sqrt[3]{182 + \sqrt{33125}} + \sqrt[3]{182 - \sqrt{33125}}$.*

Bài toán 330 ([Tuy23], 54., p. 22). *Cho $A = \sqrt[3]{60 + \sqrt[3]{60 + \sqrt[3]{60 + \cdots + \sqrt[3]{60}}}}$. Chứng minh $3 < A < 3$. Tìm $\lfloor A \rfloor$.*

Bài toán 331 ([Tuy23], 55., p. 22). *Cho $A = \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \cdots + \sqrt{20}}}}$, $B = \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \cdots + \sqrt[3]{24}}}}$. Chứng minh $7 < A + B < 8$. Tìm $\lfloor A + B \rfloor$.*

Bài toán 332 ([Tuy23], 56., p. 22). *So sánh $a = \sqrt[3]{5\sqrt{2}}$ & $b = \sqrt{5\sqrt[3]{2}}$.*

Bài toán 333 ([Tuy23], 57., p. 22). *Cho $ax^3 = by^3 = cz^3$ & $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$. Chứng minh $\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$.*

Bài toán 334 ([Tuy23], 58., p. 22). *Giải phương trình: (a) $x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3}$. (b) $x^3 + 2x^2 - 4x = -\frac{8}{3}$.*

Bài toán 335 ([Tuy23], 59., p. 22). *Giải phương trình: (a) $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{5x}$. (b) $2\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2} = \sqrt[3]{x^2 - 4}$.*

Bài toán 336 ([Tuy23], 60., p. 22). *Giải phương trình: $\sqrt[3]{x-5} + \sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{3x+2} = -2$.*

Bài toán 337 ([Tuy23], 61., p. 22). *Giải phương trình: $\sqrt[n]{(x-2)^2} + 4\sqrt[n]{x^2 - 4} = 5\sqrt[n]{(x+2)^2}$.*

Bài toán 338 ([Tuy23], 62., p. 22). *Cho $A = (a+b)(b+c)(c+a)$ trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh $A + 1 \ge 3(a+b+c)$.*

Bài toán 339 ([Bìn23], Ví dụ 15, p. 20). *Chứng tỏ số $m = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$ là 1 nghiệm của phương trình $x^3 + 3x - 4 = 0$.*

Bài toán 340 ([Bìn23], Ví dụ 16, p. 20). *Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$.*

Bài toán 341 ([Bìn23], 41., p. 20). *Tính: (a) $\dfrac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 2}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$. (b) $\sqrt{3 + \sqrt{3} + \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}}$. (c) $\dfrac{4 + 2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}}$.*

Bài toán 342 ([Bìn23], 42., p. 21). *Số $m = \sqrt[3]{4 + \sqrt{80}} - \sqrt[3]{4 - \sqrt{80}}$ có phải là nghiệm của phương trình $x^3 + 12x - 8 = 0$ không?*

Bài toán 343 ([Bìn23], 43., p. 21). *Lập 1 phương trình bậc 3 với các hệ số nguyên, trong đó: (a) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ là 1 nghiệm của phương trình. (b) $\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}$ là 1 nghiệm của phương trình.*

Bài toán 344 ([Bìn23], 44., p. 21). *Tính: (a) $A = \sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10}$. (b) $B = \sqrt[3]{5 + 2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5 - 2\sqrt{13}}$. (c) $C = \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$. (d) $D = \sqrt[3]{2 + 10\sqrt{\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{2 - 10\sqrt{\frac{1}{27}}}$. (e) $E = \sqrt[3]{4 + \frac{5}{3}\sqrt{\frac{31}{3}}} + \sqrt[3]{4 - \frac{5}{3}\sqrt{\frac{31}{3}}}$.*

Bài toán 345 ([Bìn23], 45., p. 21). *Tìm x biết: (a) $\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{2-x} = 1$. (b) $2x^3 = (x-1)^3$.*

Bài toán 346 ([Bìn23], 46., p. 21). *Cho $am^3 = bn^3 = cp^3$ & $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1$. Chứng minh: $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{am^2 + bn^2 + cp^2}$.*

Bài toán 347 ([Bìn23], 47., p. 21). *Tính: (a) $\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}(\sqrt[6]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}})$. (b) $\sqrt[4]{17 + 12\sqrt{2}} - \sqrt{2}$. (c) $\sqrt[4]{56 - 24\sqrt{5}}$. (d) $1 + \sqrt[4]{28 - 16\sqrt{3}}$. (e) $\dfrac{2}{\sqrt{4 - 3\sqrt[4]{5} + 2\sqrt{5} - \sqrt[4]{125}}}$.*

7 Miscellaneous

Bài toán 348 ([Chí+23], 1–5, p. 39). *(a) Nêu điều kiện để $x \in \mathbb{R}$ là căn bậc 2 số học của số $a \in \mathbb{R}$ không âm. Cho ví dụ. (b) Chứng minh $\sqrt{a^2} = |a|$, $\forall a \in \mathbb{R}$. (c) Biểu thức A phải thỏa điều kiện gì để $\sqrt{A}$ xác định? (d) Phát biểu & chứng minh định lý về mối liên hệ giữa phép nhân & phép khai phương. Cho ví dụ. (e) Phát biểu & chứng minh định lý về mối liên hệ giữa phép chia & phép khai phương. Cho ví dụ.*

Bài toán 349 ([Chí+23], 70., p. 40). *Tính: (a)* $\sqrt{\frac{25}{81}\cdot\frac{16}{49}\cdot\frac{196}{9}}$. *(b)* $\sqrt{3\frac{1}{16}\cdot 2\frac{14}{25}\cdot 2\frac{34}{81}}$. *(c)* $\frac{\sqrt{640}\sqrt{34.3}}{\sqrt{567}}$. *(d)* $\sqrt{21.6}\sqrt{810}\sqrt{11^2-5^2}$.

Bài toán 350 ([Chí+23], 71., p. 40). *Rút gọn biểu thức: (a)* $(\sqrt{8}-3\sqrt{2}+\sqrt{10})\sqrt{2}-\sqrt{5}$. *(b)* $0.2\sqrt{(-10)^2\cdot 3}+2\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}$. *(c)* $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}\sqrt{2}+\frac{4}{5}\sqrt{200}\right):\frac{1}{8}$. *(d)* $2\sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}+\sqrt{2(-3)^2}-5\sqrt{(-1)^4}$.

Bài toán 351 ([Chí+23], 72., p. 40). *Phân tích thành nhân tử với $a,b,x,y \in \mathbb{R}$, $a,b,x,y \ge 0$, $a \ge b$: (a)* $xy - y\sqrt{x}+\sqrt{x}-1$. *(b)* $\sqrt{ax}-\sqrt{by}+\sqrt{bx}-\sqrt{ay}$. *(c)* $\sqrt{a+b}+\sqrt{a^2-b^2}$. *(d)* $12-\sqrt{x}-x$.

Bài toán 352 ([Chí+23], 73., p. 40). *Tìm ĐKXĐ, rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức: (a)* $\sqrt{-9a}-\sqrt{9+12a+4a^2}$ *tại* $a=-9$. *(b)* $1+\frac{3m}{m-2}\sqrt{m^2-4m+4}$ *tại* $m=1.5$. *(c)* $\sqrt{1-10a+25a^2}-4a$ *tại* $a=\sqrt{2}$. *(d)* $4x-\sqrt{9x^2+6x+1}$ *tại* $x=-\sqrt{3}$.

Bài toán 353 ([Chí+23], 74., p. 40). *Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a)* $\sqrt{(2x-1)^2}=3$. *(b)* $\frac{5}{3}\sqrt{15x}-\sqrt{15x}-2=\frac{1}{3}\sqrt{15x}$.

Bài toán 354 ([Chí+23], 75., pp. 40–41). *Chứng minh: (a)* $\left(\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2}-\frac{\sqrt{216}}{3}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}=-1.5$. *(b)* $\left(\frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}\right):\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=-2$. *(c)* $\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}:\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=a-b$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a,b>0$, $a \ne b$. *(d)* $\left(1+\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right)\left(1-\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)=1-a$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \ge 0$, $a \ne 1$.

Bài toán 355 ([Chí+23], 76., p. 41). *Cho biểu thức* $A=\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}-\left(1+\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\right):\frac{b}{a-\sqrt{a^2-b^2}}$. *(a) Tìm ĐKXĐ. (b) Rút gọn A. (c) Tính Q khi $a=3b$.*

Bài toán 356 ([Thâ+23], 96., p. 21). *Giải phương trình* $\sqrt{3+\sqrt{x}}=3$.

Bài toán 357 ([Thâ+23], 97., p. 21). *Tính* $\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}+\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}$.

Bài toán 358 ([Thâ+23], 98., p. 22). *Chứng minh: (a)* $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{6}$. *(b)* $\sqrt{\frac{4}{(2-\sqrt{5})^2}}-\sqrt{\frac{4}{(2+\sqrt{5})^2}}=8$.

Bài toán 359 ([Thâ+23], 99., p. 22). *Cho* $A=\frac{\sqrt{4x^2-4x+1}}{4x-2}$. *Chứng minh* $|A|=0.5$ *với* $x \ne 0.5$.

Bài toán 360 ([Thâ+23], 100., p. 22). *Rút gọn biểu thức: (a)* $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$. *(b)* $\sqrt{15-6\sqrt{6}}+\sqrt{33-12\sqrt{6}}$. *(c)* $(15\sqrt{200}-3\sqrt{450}+2\sqrt{50}):\sqrt{10}$.

Bài toán 361 ([Thâ+23], 101., p. 22). *(a) Chứng minh:* $x-4\sqrt{x-4}=(\sqrt{x-4}-2)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \ge 4$. *(b) Tìm ĐKXĐ & rút gọn biểu thức* $A=\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}$.

Bài toán 362 ([Thâ+23], 102., p. 22). *Tìm ĐKXĐ của các biểu thức* $A=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$, $B=\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}$. *(a) Chứng minh $A \ge 1$ & $B \ge \sqrt{5}$. (b) Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa:* $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=1$, $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=2$.

Bài toán 363 ([Thâ+23], 103., p. 22). *Chứng minh:* $x-\sqrt{x}+1=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \ge 0$. *Từ đó, cho biết biểu thức* $\frac{1}{x-\sqrt{x}+1}$ *có giá trị lớn nhất là bao nhiêu? Giá trị đó đạt được khi x bằng bao nhiêu?*

Bài toán 364 ([Thâ+23], 104., p. 23). *Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để biểu thức* $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ *nhận giá trị nguyên.*

Bài toán 365 ([Thâ+23], 105., p. 23). *Chứng minh $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a,b \ge 0$, $a \ne 0$: (a)* $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{a}-2\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2\sqrt{a}+2\sqrt{b}}-\frac{2b}{b-a}=\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$. *(b)* $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2=1$.

Bài toán 366 ([Thâ+23], 106., p. 23). *Cho biểu thức* $A = \dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \dfrac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$. *(a) Tìm điều kiện để A có nghĩa. (b) Khi A có nghĩa, chứng tỏ giá trị của A không phụ thuộc vào a.*

Bài toán 367 ([Thâ+23], 107., p. 23). *Cho biểu thức* $A = \left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^3}-1} - \dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}\right)\left(\dfrac{1+\sqrt{x^3}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$. *(a) Tìm ĐKXĐ. (b) Rút gọn A. (c) Tìm* $x \in \mathbb{R}$ *để* $A = 3$.

Bài toán 368 ([Thâ+23], 108., p. 23). *Cho biểu thức* $A = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} + \dfrac{x+9}{9-x}\right) : \left(\dfrac{3\sqrt{x}+1}{x-3\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$. *(a) Tìm ĐKXĐ. (b) Rút gọn A. (c) Tìm* $x \in \mathbb{R}$ *sao cho* $C < -1$.

Bài toán 369 ([Thâ+23], I.1., p. 23). *Không dùng bảng số hoặc máy tính, so sánh* $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ *&* $\sqrt{5}+1$.

Bài toán 370 ([Tuy23], Thí dụ 15, pp. 29–30). *Cho biểu thức* $A = \left(\dfrac{1}{1-\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) : \left(\dfrac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \dfrac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}\right)$. *(a) Rút gọn A. (b) Tính giá trị của A với* $x = 7-4\sqrt{3}$. *(c) Tìm giá trị lớn nhất của a để* $P > a$.

Bài toán 371 ([Tuy23], 80., p. 31). *Chứng minh:* $\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{(a+b)^2}} = \left|\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a+b}\right|$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $ab(a+b) \neq 0$. *Áp dụng tính* $A = \sqrt{1+999^2+\dfrac{999^2}{1000^2}} + \dfrac{999}{1000}$.

Bài toán 372 ([Tuy23], 81., p. 31). *Rút gọn biểu thức* $A = (4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$.

Bài toán 373 ([Tuy23], 82., p. 31). *Không dùng máy tính hoặc bảng số, chứng minh:* $\sqrt{14}-\sqrt{13} < 2\sqrt{3}-\sqrt{11}$.

Bài toán 374 ([Tuy23], 83., p. 31). *Giải phương trình:* $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}} + \dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 1$.

Bài toán 375 ([Tuy23], 84., p. 31). *Tìm* x,y,z *biết* $x+y+z+35 = 2(2\sqrt{x+1}+3\sqrt{y+2}+4\sqrt{z+3})$.

Bài toán 376 ([Tuy23], 85., p. 31). *Cho* $a > 0$, $b > 0$ *&* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = 1$. *Chứng minh:* $\sqrt{a+b} = \sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}$.

Bài toán 377 ([Tuy23], 86., p. 31). *Chứng minh:* $A = \sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{2}+\sqrt{10}$.

Bài toán 378 ([Tuy23], 87., p. 31). *Chứng minh:*

$$\frac{1}{4} < \frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}} < \frac{3}{10},$$

(ở tử có n dấu căn, ở mẫu có $n-1$ *dấu căn).*

Bài toán 379 ([Tuy23], 88., p. 31). *Giải phương trình:* $\sqrt{x+2-3\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x-2+3\sqrt{2x-5}} = 2\sqrt{2}$.

Bài toán 380 ([Tuy23], 89., p. 31). *Giải phương trình:* $\sqrt[3]{(65+x)^2} + 4\sqrt[3]{(65-x)^2} = 5\sqrt[3]{65^2-x^2}$.

Bài toán 381 ([Tuy23], 90., p. 32). *Giải phương trình ẩn x:* $\dfrac{(a-x)\sqrt[4]{x-b}+(x-b)\sqrt[4]{a-x}}{\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{x-b}} = \frac{a-b}{2}$ *với* $a > b$.

Bài toán 382 ([Tuy23], 91., p. 32). *Cho biểu thức* $A = \sum_{i=1}^{199} \dfrac{1}{\sqrt{i(200-i)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1\cdot 199}} + \dfrac{1}{\sqrt{2\cdot 198}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{199\cdot 1}}$. *Chứng minh* $A > 1.99$.

Bài toán 383 ([Tuy23], 92., p. 32). *Cho n số dương* $a_1, a_2, \ldots, a_n$. *Chứng minh:*

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right) = (a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Bài toán 384 ([Tuy23], 93., p. 32). *Cho các số thực dương* a,b,c,d *thỏa mãn điều kiện* $abcd = 1$. *Chứng minh:* $a^2+b^2+c^2+d^2+a(b+c)+b(c+d)+c(d+a)+d(a+b) \geq 12$.

Bài toán 385 ([Tuy23], 94., p. 32). *Giải phương trình:* $\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x}} + \sqrt{\dfrac{x}{x^2+x+1}} = \frac{7}{4}$.

Bài toán 386 ([Tuy23], 95., p. 32). *Giải phương trình:* $\sqrt{x+x^2}+\sqrt{x-x^2}=x+1$.

Bài toán 387 ([Tuy23], 96., p. 32). *Cho* $A=\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}-\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$ *với* $0\le x\le 1$. *Rút gọn biểu thức* $B=1-\sqrt{A+x+1}$.

Bài toán 388 ([Tuy23], 97., p. 32). *Cho biểu thức* $A=\dfrac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3}-\dfrac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$. *(a) Rút gọn A. (b) Tính giá trị của A với* $x=14-6\sqrt{5}$. *(c) Tìm GTNN của A.*

Bài toán 389 ([BNS23], Ví dụ 1.1, p. 5). *Rút gọn biểu thức* $A=\sqrt{(7+4\sqrt{3})(a-1)^2}$.

Bài toán 390 ([BNS23], Ví dụ 1.2, p. 6). *Cho biểu thức* $A=\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$. *(a) Tìm điều kiện xác định của A. (b) Rút gọn biểu thức A với* $1\le a<2$. *(c) Rút gọn biểu thức A với* $a\ge 2$.

Bài toán 391 ([BNS23], Ví dụ 1.3, p. 6). *Đơn giản biểu thức* $A=\left(\sqrt{8+2\sqrt{7}}+2\sqrt{8-2\sqrt{7}}\right)(\sqrt{63}+1)$.

Bài toán 392 ([BNS23], Ví dụ 1.4, p. 6). *Tính tổng* $A=\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$.

Bài toán 393 ([BNS23], Ví dụ 1.5, p. 6). *Tính* $A=\dfrac{\sqrt{7-2\sqrt{10}}(7+2\sqrt{10})(74-22\sqrt{10})}{\sqrt{125}-4\sqrt{50}+5\sqrt{20}+\sqrt{8}}$.

Bài toán 394 ([BNS23], Ví dụ 1.6, p. 7). *Cho* $a=\sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}}+\sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$. *Chứng minh:* $a^2-2a-2=0$.

Bài toán 395 ([BNS23], Ví dụ 1.7, p. 7). *Cho* $a=\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$. *Tính*

$$A=\frac{a^4-4a^3+a^2+6a+4}{a^2-2a+12}.$$

Bài toán 396 ([BNS23], Ví dụ 1.8, p. 7). *Cho* $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{1+x}}{x+1}+\dfrac{1+\sqrt{1-x}}{x-1}$ *&* $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. *Tính* $f(a)$.

Bài toán 397 ([BNS23], Ví dụ 1.9, p. 8). *Giả thiết* $x,y,z>0$ *&* $xy+yz+zx=a$. *Chứng minh*

$$x\sqrt{\frac{(a+y^2)(a+z^2)}{a+x^2}}+y\sqrt{\frac{(a+z^2)(a+x^2)}{a+y^2}}+z\sqrt{\frac{(a+x^2)(a+y^2)}{a+z^2}}=2a.$$

Bài toán 398 ([BNS23], 1.1, p. 8). *Biểu diễn* $\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$ *thành* $a+b\sqrt{5}$ *với* $a,b\in\mathbb{Q}$.

Bài toán 399 ([BNS23], 1.2, p. 8). *Đơn giản biểu thức* $A=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{18}+\sqrt{28-16\sqrt{3}}$.

Bài toán 400 ([BNS23], 1.3, p. 8). *Chứng minh* $\sqrt{10+2\sqrt{24}}-\sqrt{10-2\sqrt{24}}=4$.

Bài toán 401 ([BNS23], 1.4, p. 8). *Tính* $A=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Bài toán 402 ([BNS23], 1.5, p. 9). *Tính tích ab với*

$$a=\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{3+\sqrt{7+\sqrt{2}}},\ b=\sqrt{3+\sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{2}}}}\sqrt{3-\sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{2}}}}.$$

Bài toán 403 ([BNS23], 1.6, p. 9). *Chứng minh* $\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}+\dfrac{3}{\sqrt{5}-2}+\dfrac{16}{\sqrt{5}-3}=-5$.

Bài toán 404 ([BNS23], 1.7, p. 9). *Chứng minh* $\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}-1}+\dfrac{3}{\sqrt{6}-2}+\dfrac{3}{\sqrt{6}-3}\right)\dfrac{5}{9\sqrt{6}+4}=\frac{1}{2}$.

Bài toán 405 ([BNS23], 1.8, p. 9). *Cho* $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{5}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{5}}}+\dfrac{x-\sqrt{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{5}}}$. *Tính* $f(3)$.

Bài toán 406 ([BNS23], 1.9, p. 9). *Cho* $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ *&* $a=\dfrac{4}{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}$. *Tính* $f(a)$.

Bài toán 407 ([BNS23], Ví dụ 2.1, p. 10). *Chứng minh với* $ab\ne 0$*:* $\dfrac{\sqrt[3]{a^5b^7}}{\sqrt[3]{a^2b}}-\dfrac{\sqrt[3]{a^4b^8}}{\sqrt[3]{ab^2}}=0$.

Bài toán 408 ([BNS23], Ví dụ 2.2, p. 10). *Chứng minh với* $abc \neq 0$: $\dfrac{\sqrt[3]{a^4b^5c^7}}{\sqrt[3]{ab^2c}} = abc^2$.

Bài toán 409 ([BNS23], Ví dụ 2.3, p. 10). *Với* $a \geq 2 + \sqrt{2}$ *&*

$$u = \sqrt[3]{\left(a + \frac{2}{a}\right)^3 - 3a^2 - \frac{12}{a^2} + 3\left(a + \frac{2}{a}\right) - 13}, \ v = \sqrt{a^2 + \frac{4}{a^2} - 8\left(a + \frac{2}{a}\right) + 20}.$$

Chứng minh $u - v = 3$.

Bài toán 410 ([BNS23], Ví dụ 2.4, p. 11). *Đơn giản biểu thức* $A = \sqrt[3]{8(7 + 5\sqrt{2})} + \sqrt[3]{216(7 - 5\sqrt{2})} + 4\sqrt{2} - 7$.

Bài toán 411 ([BNS23], Ví dụ 2.5, p. 11). *Chứng minh* $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1$.

Bài toán 412 ([BNS23], Ví dụ 2.6, p. 11). *Chứng minh nếu* $a = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$ *thì* $a^3 + 3a = 4$.

Bài toán 413 ([BNS23], Ví dụ 2.7, p. 11). *Chứng minh:*

$$\frac{\sqrt{\left(\dfrac{9 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt[3]{2}} + 3\sqrt[3]{2}\right)\sqrt{3}}}{3 + \sqrt[6]{108}} = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}.$$

Bài toán 414 ([BNS23], Ví dụ 2.8, p. 12). *Chứng minh nếu* $\sqrt[3]{(a+1)^2} + \sqrt[3]{a^2 - 1} + \sqrt[3]{(a-1)^2} = 1$ *thì* $\sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a-1} = 2$.

Bài toán 415 ([BNS23], Ví dụ 2.9, p. 12). *Đơn giản biểu thức* $A = \dfrac{x+1}{2\sqrt[3]{\sqrt{3} - \sqrt{2}}\sqrt[6]{5 + 2\sqrt{6}} + x + \frac{1}{x}}$ *với* $x \notin \{-1, 0\}$.

Bài toán 416 ([BNS23], Ví dụ 2.10, p. 12). *Cho* $a = \sqrt{2} + \sqrt{7 - \sqrt[3]{61 + 46\sqrt{5}} + 1}$. *(a) Chứng minh* $a^4 - 14a^2 + 9 = 0$. *(b) Giả sử* $f(x) = x^5 + 2x^4 - 14x^3 - 28x^2 + 9x + 19$. *Tính* $f(a)$.

Bài toán 417 ([BNS23], Ví dụ 2.11, p. 13). *Cho* $a, b, c > 0$. *Giả sử* m, n, p *là những số nguyên dương lớn hơn* 1 *sao cho* $bc = \sqrt[m]{a}$, $ca = \sqrt[n]{b}$, *&* $ab = \sqrt[p]{c}$. *Chứng minh trong 3 số* a, b, c *phải có ít nhất 1 số bằng* 1.

Bài toán 418 ([BNS23], Ví dụ 2.12, p. 13). *Cho* $a = \dfrac{\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}}{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{3}}$. *(a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận số a làm nghiệm. (b) Giả sử đa thức* $f(x) = 3x^6 - 4x^5 - 7x^4 + 6x^3 + 6x^2 + x - 53\sqrt{2}$. *Tính* $f(a)$.

Bài toán 419 ([BNS23], Ví dụ 2.13, p. 14). *Cho* $a = \dfrac{7 - 4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}} - \sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}}$. *(a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận số a làm nghiệm. (b) Giả sử đa thức* $f(x) = \dfrac{x^6 + x^4 + 4x^2}{40(x^4 + 4x^2 - 144)}$. *Tính* $f(a)$.

Bài toán 420 ([BNS23], Ví dụ 2.14, p. 14). *Cho* $a = \sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}} + \sqrt[3]{38 - 17\sqrt{5}}$. *Giả sử ta có đa thức* $f(x) = (x^3 + 3x + 1935)^{2012}$. *Tính* $f(a)$.

Bài toán 421 ([BNS23], 2.1., p. 14). *Biểu diễn* $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$ *thành* $a + b\sqrt{5}$ *với* $a, b \in \mathbb{Q}$.

Bài toán 422 ([BNS23], 2.2., p. 14). *Cho* $a = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{11}}$. *Chứng minh* $a^9 - 6a^6 + 282a^3 = 8$.

Bài toán 423 ([BNS23], 2.3., p. 15). *Cho* $a = (\sqrt[3]{1 + 2\sqrt{6}} - \sqrt[6]{5 + 4\sqrt{6}})\sqrt[3]{2\sqrt{6} - 1} + 1$. *(a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận a làm nghiệm. (b) Giả sử* $f(x) = \sum_{i=1}^{2012} ix^i + 2012$. *Tính* $f(a)$.

Bài toán 424 ([BNS23], 2.4., p. 15). *Chứng minh:*

$$\frac{a + 2\sqrt{ab} + 9b}{\sqrt{a} + 3\sqrt{b} - 2\sqrt[4]{ab}} - 2\sqrt{b} = \left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right)^2, \ \forall a, b \in \mathbb{R}, \ a, b > 0.$$

Bài toán 425 ([BNS23], 2.5., p. 15). *Chứng minh:*

$$\left(\sqrt[3]{a^4} + b^2\sqrt[3]{a^2} + b^4\right)\frac{\sqrt[3]{a^8} - b^6 + b^4\sqrt[3]{a^2} - a^2b^2}{a^2b^2 + b^2 - a^2b^8 - b^4} = a^2b^2, \ \forall a, b \in \mathbb{R}, \ ab \neq 0, \ a \neq b^3.$$

Bài toán 426 ([BNS23], 2.6., p. 15). *Cho* $a, b > 0$. *Đơn giản biểu thức*

$$A = \frac{\sqrt{a^3 + 2a^2b} + \sqrt{a^4 + 2a^3b} - \sqrt{a^3} - a^2b}{\sqrt{\left(2a + b - \sqrt{a^2 + 2ab}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[6]{a^5} + a\right)}}.$$

Bài toán 427 ([BNS23], 2.7., p. 15)**.** *Giả sử* $u^3 \ge v^2$, $u, v \in \mathbb{Q}^+$. *Xác định* u, v *để*

$$\sqrt{\frac{u - 8\sqrt[6]{u^3v^2} + 4\sqrt[3]{v^2}}{\sqrt{u} - 2\sqrt[3]{v} + 2\sqrt[12]{u^3v^2}} + 3\sqrt[3]{v}} + \sqrt[6]{v} = 1.$$

Bài toán 428. *Cho* $a, b, c, A, B \in \mathbb{Z}$, $c \ge 0$ *thỏa mãn đẳng thức* $(a + b\sqrt{c})^2 = A + B\sqrt{c}$. *(a) Tìm mối quan hệ của* a, b, c, A, B. *Biểu diễn* (A, B) *theo* (a, b, c). *(b)** *Biểu diễn* (a, b) *theo* (c, A, B).

Bài toán 429. *Cho* $a, b, c, A, B \in \mathbb{Z}$, $c \ge 0$ *thỏa mãn đẳng thức* $(a + b\sqrt{c})^3 = A + B\sqrt{c}$. *(a) Tìm mối quan hệ của* a, b, c, A, B. *Biểu diễn* (A, B) *theo* (a, b, c). *(b)** *Biểu diễn* (a, b) *theo* (c, A, B).

Bài toán 430. *Cho* $a, b, c, A, B \in \mathbb{Z}$, $c \ge 0$ *thỏa mãn đẳng thức* $(a + b\sqrt[3]{c})^3 = A + B\sqrt[3]{c} + C\sqrt[3]{c^2}$. *(a) Tìm mối quan hệ của* a, b, c, A, B, C. *Biểu diễn* (A, B, C) *theo* (a, b, c). *(b)** *Biểu diễn* (a, b) *theo* (c, A, B, C).

Tài liệu

[Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.

[BNS23] Vũ Hữu Bình, Phạm Thị Bạch Ngọc, and Nguyễn Tam Sơn. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 9. Tập 1: Đại Số*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 192.

[Chí+23] Phan Đức Chính, Tôn Thân, Vũ Hữu Bình, Trần Phương Dung, Ngô Hữu Dũng, Lê Văn Hồng, and Nguyễn Hữu Thảo. *Toán 9 Tập 1*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 128.

[Thâ+23] Tôn Thân, Vũ Hữu Bình, Trần Phương Dung, Lê Văn Hồng, and Nguyễn Hữu Thảo. *Bài Tập Toán 9 Tập 1*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 216.

[Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.