Problem & Solution: Trigonometry – Bài Tập Lượng Giác & Lời Giải

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 22 tháng 5 năm 2023

Tóm tắt nội dung

Mục lục

1 Hệ Thức về Cạnh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông

Trong 1 tam giác vuông, nếu biết 2 cạnh, hoặc 1 cạnh & 1 góc nhọn thì có thể tính được các góc & các cạnh còn lại của tam giác đó.

Bài toán 1. *Xét ΔABC vuông tại A, cạnh huyền $BC = a$, 2 cạnh góc vuông $AC = b$, $AB = c$. Gọi $AH = h$ là đường cao ứng với cạnh huyền BC[1] & $CH = b'$, $BH = c'$ lần lượt là hình chiếu của AC, AB trên cạnh huyền BC. Chứng minh: (a) $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$. (b) Định lý Pythagore $a^2 = b^2 + c^2$. (c) $h^2 = b'c'$. (d) $bc = ah$. (e) $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.*

Chứng minh. (a) $\Delta AHC \backsim \Delta BAC$ (g.g) vì 2 tam giác vuông này có chung $\widehat{C}$, nên $\frac{CH}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC^2 = BC \cdot CH \Leftrightarrow b^2 = ab'$. Tương tự, $\Delta BHA \backsim \Delta BAC$ (g.g) vì 2 tam giác vuông này có chung $\widehat{B}$, nên $\frac{BH}{AB} = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow AB^2 = BC \cdot BH \Leftrightarrow c^2 = ac'$. (b) Theo (a), $b^2 + c^2 = ab' + ac' = a(b' + c') = a \cdot a = a^2$. (c) Vì $\Delta AHC \backsim \Delta BAC$ & $\Delta BHA \backsim \Delta BAC$ nên $\Delta AHC \backsim \Delta BHA$, suy ra $\frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH} \Rightarrow AH^2 = BH \cdot CH \Leftrightarrow h^2 = b'c'$. (d) Tính diện tích ΔABC theo 2 cách: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot AC \Leftrightarrow AH \cdot BC = AB \cdot AC \Leftrightarrow ah = bc$. (e) $ah = bc \Leftrightarrow a^2h^2 = b^2c^2 \Leftrightarrow (b^2 + c^2)h^2 = b^2c^2 \Leftrightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{b^2+c^2}{b^2c^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$. □

Lưu ý 1. *Các hệ thức trên có thể được suy ra trực tiếp từ các tỷ số đồng dạng của bộ 3 tam giác đồng dạng: $\Delta BHA \backsim \Delta AHC \backsim \Delta BAC$. Thật vậy, $\Delta AHC \backsim \Delta BAC \Leftrightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{HC}{AC} = \frac{AC}{BC} \Leftrightarrow \frac{h}{c} = \frac{b'}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow bh = b'c$, $b^2 = ab'$, & $ah = bc$. $\Delta BHA \backsim \Delta BAC \Leftrightarrow \frac{HB}{AB} = \frac{AH}{AC} = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow \frac{c'}{c} = \frac{h}{b} = \frac{c}{a} \Rightarrow hc = bc'$, $ah = bc$, & $c^2 = ac'$. $\Delta AHC \backsim \Delta BHA \Leftrightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH} = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow \frac{h}{c'} = \frac{b'}{h} = \frac{b}{c} \Rightarrow h^2 = b'c'$, $bh = b'c$, & $ch = bc'$. Hơn nữa, $\widehat{BAH} = \widehat{C}$ & $\widehat{CAH} = \widehat{B}$.*

Định lý 1 (Hệ thức giữa cạnh góc vuông & hình chiếu của nó trên cạnh huyền)**.** *Trong 1 tam giác vuông, bình phương mỗi cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền & hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền. Nói cách khác, mỗi cạnh góc vuông là trung bình nhân của cạnh huyền & hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền. $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$*

3 hệ thức về đường cao trong tam giác vuông:

Định lý 2. *Trong 1 tam giác vuông, bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tích 2 hình chiếu của 2 cạnh góc vuông trên cạnh huyền. Nói cách khác, đường cao ứng với cạnh huyền là trung bình nhân của 2 đoạn thẳng mà nó định ra trên cạnh huyền. $h^2 = b'c'$.*

Định lý 3. *Trong 1 tam giác vuông, tích 2 cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền & đường cao tương ứng. $bc = ah$.*

Định lý 4. *Trong 1 tam giác vuông, nghịch đảo của bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tổng nghịch đảo của bình phương 2 cạnh góc vuông. $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.*

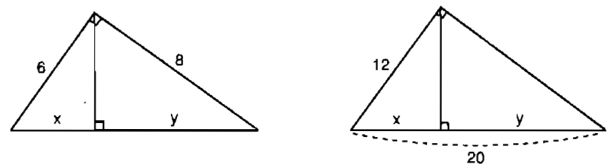
*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

[1] AB, AC là đường cao ứng với nhau.

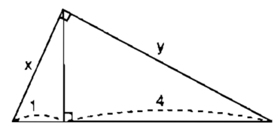
Bài toán 2. *Cho ΔABC có độ dài 2 cạnh góc vuông là b & c. Tính độ dài đường cao h xuất phát từ đỉnh góc vuông theo b, c.*

Giải. Có $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \Rightarrow h^2 = \frac{b^2c^2}{b^2+c^2}$. □

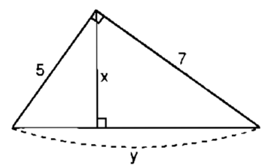
Bài toán 3 ([Chí+23], 1., p. 68)**.** *Tính x, y:*



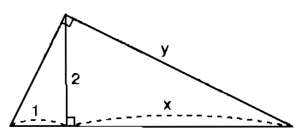
Bài toán 4 ([Chí+23], 2., p. 68)**.** *Tính x, y:*



Bài toán 5 ([Chí+23], 3., p. 69)**.** *Tính x, y:*



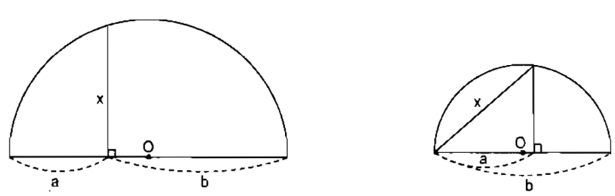
Bài toán 6 ([Chí+23], 4., p. 69)**.** *Tính x, y:*



Bài toán 7 ([Chí+23], 5., p. 69)**.** *Trong tam giác vuông với các cạnh góc vuông có độ dài là 3 & 4, kẻ đường cao ứng với cạnh huyền. Tính đường cao này & độ dài các đoạn thẳng mà nó định ra trên cạnh huyền.*

Bài toán 8 ([Chí+23], 6., p. 69)**.** *Đường cao của 1 tam giác vuông chia cạnh huyền thành 2 đoạn thẳng có độ dài là 1 & 2. Tính các cạnh góc vuông của tam giác này.*

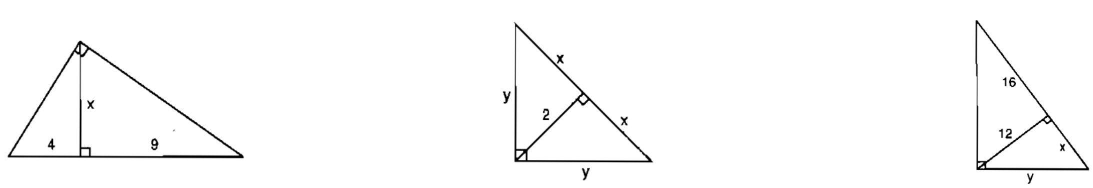
Bài toán 9 ([Chí+23], 7., p. 69–70)**.** *Người ta đưa ra 2 cách vẽ đoạn trung bình nhân x của 2 đoạn thẳng a, b (i.e., $x^2 = ab$ hay $x = \sqrt{ab}$) như trong 2 hình:*



Chứng minh các cách vẽ trên là đúng.

Hint. Nếu 1 tam giác có đường trung tuyến ứng với 1 cạnh bằng nửa cạnh đó thì tam giác đó là tam giác vuông.

Bài toán 10 ([Chí+23], 8., p. 70)**.** *Tính x, y:*



Bài toán 11 ([Chí+23], 9., p. 70)**.** *Cho hình vuông ABCD. Gọi I là 1 điểm nằm giữa A & B. Tia DI & tia CB cắt nhau ở K. Kẻ đường thẳng qua D, vuông góc với DI. Đường thẳng này cắt đường thẳng BC tại L. Chứng minh: (a) ΔDIL là 1 tam giác cân. (b) Tổng $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2}$ không đổi khi I thay đổi trên cạnh AB.*

Bài toán 12 ([Tuy23], Thí dụ 1, p. 103). *Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{B}=\widehat{C}=90^\circ$, 2 đường chéo vuông góc với nhau tại H. Biết $AB=3\sqrt{5}$ cm, $HA=3$ cm. Chứng minh: (a) $HA:HB:HC:HD=1:2:4:8$. (b) $\frac{1}{AB^2}-\frac{1}{CD^2}=\frac{1}{HB^2}-\frac{1}{HC^2}$.*

Bài toán 13 ([Tuy23], 1., p. 105). *Cho hình thang $ABCD$, $AB\parallel CD$, 2 đường chéo vuông góc với nhau. Biết $AC=16$ cm, $BD=12$ cm. Tính chiều cao của hình thang.*

Bài toán 14 ([Tuy23], 2., p. 105). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH, đường phân giác AD. Biết $BH=63$ cm, $CH=112$ cm, tính HD.*

Bài toán 15 ([Tuy23], 3., p. 105). *Cho ΔABC vuông tại A. 2 đường trung tuyến AD,BE vuông góc với nhau tại G. Biết $AB=\sqrt{6}$ cm. Tính cạnh huyền BC.*

Bài toán 16 ([Tuy23], 4., p. 105). *Gọi a,b,c là các cạnh của 1 tam giác vuông, h là đường cao ứng với cạnh huyền a. Chứng minh tam giác có các cạnh $a+h,b+c$, & h cũng là 1 tam giác vuông.*

Bài toán 17 ([Tuy23], 5., p. 105). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I,K thứ tự là hình chiếu của H trên AB,AC. Đặt $c=AB$, $b=AC$. (a) Tính AI,AK theo b,c. (b) Chứng minh $\frac{BI}{CK}=\frac{c^3}{b^3}$.*

Bài toán 18 ([Tuy23], 6., p. 105). *Cho ΔABC, $AB=1$, $\widehat{A}=105^\circ$, $\widehat{B}=60^\circ$. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE=1$. Vẽ $ED\parallel AB$, $D\in AC$. Chứng minh: $\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AD^2}=\frac{4}{3}$.*

Bài toán 19 ([Tuy23], 7., p. 105). *Cho hình chữ nhật $ABCD$, $AB=2BC$. Trên cạnh BC lấy điểm E. Tia AE cắt đường thẳng CD tại F. Chứng minh: $\frac{1}{AB^2}=\frac{1}{AE^2}+\frac{1}{4AF^2}$.*

Bài toán 20 ([Tuy23], 8., p. 105). *Cho 3 đoạn thẳng có độ dài a,b,c. Dựng đoạn thẳng x sao cho $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.*

Bài toán 21 ([Tuy23], 9., p. 105). *Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A}=120^\circ$. 1 đường thẳng d không cắt các cạnh của hình thoi. Chứng minh: tổng các bình phương hình chiếu của 4 cạnh với 2 lần bình phương hình chiếu của đường chéo AC trên đường thẳng d không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d.*

Bài toán 22 ([Tuy23], 10., p. 106). *Cho ΔABC vuông tại A. Từ 1 điểm O ở trong tam giác ta vẽ $OD\perp BC$, $OE\perp CA$, $OF\perp AB$. Xác định vị trí của O để $OD^2+OE^2+OF^2$ nhỏ nhất.*

Bài toán 23 ([Bìn+23], Ví dụ 1, p. 5). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $AB:AC=3:4$ & $AB+AC=21$ cm. (a) Tính các cạnh của ΔABC. (b) Tính độ dài các đoạn AH,BH,CH.*

Bài toán 24 (Mở rộng [Bìn+23], Ví dụ 1, p. 5). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $AB:AC=m:n$ & $AB+AC=p$ cm. (a) Tính các cạnh của ΔABC. (b) Tính độ dài các đoạn AH,BH,CH.*

Bài toán 25 ([Bìn+23], Ví dụ 2, p. 6). *Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A}=\widehat{D}=90^\circ$, $\widehat{B}=60^\circ$, $CD=30$ cm, $CA\perp CB$. Tính diện tích của hình thang.*

Bài toán 26 ([Bìn+23], Ví dụ 3, p. 7). *Cho ΔABC nhọn, đường cao CK, H là trực tâm. Gọi M là 1 điểm trên CK sao cho $\widehat{AMB}=90^\circ$. S,S_1,S_2 theo thứ tự là diện tích các $\Delta AMB,\Delta ABC,\Delta ABH$. Chứng minh $S=\sqrt{S_1S_2}$.*

Bài toán 27 ([Bìn+23], 1.1., p. 7). *Cho ΔABC vuông cân tại A & điểm M nằm giữa B & C Gọi D,E lần lượt là hình chiếu của điểm M lên AB,AC. Chứng minh $MB^2+MC^2=2MA^2$.*

Bài toán 28 ([Bìn+23], 1.2., p. 7). *Cho hình chữ nhật $ABCD$ & điểm O nằm trong hình chữ nhật đó. Chứng minh $OA^2+OC^2=OB^2+CD^2$.*

Bài toán 29 ([Bìn+23], 1.3., p. 8). *Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD=6$ cm, $CD=8$ cm. Đường thẳng kẻ từ D vuông góc với AC tại E, cắt cạnh AB tại F. Tính độ dài các đoạn thẳng DE,DF,AE,CE,AF,BF.*

Bài toán 30 ([Bìn+23], 1.4., p. 8). *Cho ΔABC có $AB=3$ cm, $BC=4$ cm, $AC=5$ cm. Đường cao, đường phân giác, đường trung tuyến của tam giác kẻ từ đỉnh B chia tam giác thành 4 gam giác không có điểm trong chung. Tính diện tích của mỗi tam giác đó.*

Bài toán 31 ([Bìn+23], 1.5., p. 8). *Trong 1 tam giác vuông tỷ số giữa đường cao & đường trung tuyến kẻ từ đỉnh góc vuông bằng $40:41$. Tính độ dài các cạnh góc vuông của tam giác đó, biết cạnh huyền bằng $\sqrt{41}$ cm.*

Bài toán 32 ([Bìn+23], 1.6., p. 8). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Kẻ $HE\perp AB$, $HF\perp AC$. Gọi O là giao điểm của AH & EF. Chứng minh $HB\cdot HC=4OE\cdot OF$.*

Bài toán 33 ([Bìn+23], 1.7., p. 8).

Bài toán 34 ([Bìn+23], 1.8., p. 8).

Bài toán 35 ([Bìn+23], 1.9., p. 8).

Bài toán 36 ([Bìn+23], 1.10., p. 8).

Bài toán 37 ([Bìn+23], 1.11., p. 8).

Bài toán 38 ([Bìn+23], 1.12., p. 8).

Bài toán 39 ([Bìn+23], 1.13., p. 9).

Bài toán 40 ([Bìn+23], 1.14., p. 9).

Bài toán 41 ([Bìn+23], 1.15., p. 9).

Bài toán 42 ([Bìn+23], 1.16., p. 9).

2 Tỷ Số Lượng Giác của Góc Nhọn

Bài toán 43 ([Tuy23], Thí dụ 2, p. 107). *Cho* $\cot\alpha = \frac{a^2-b^2}{2ab}$ *trong đó* α *là góc nhọn,* $a > b > 0$. *Tính* $\cos\alpha$.

Bài toán 44 ([Tuy23], 11., p. 108, định lý sin). *Cho* ΔABC *nhọn,* $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. *Chứng minh:* $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. *Đẳng thức này còn đúng với tam giác vuông & tam giác tù hay không?*

Bài toán 45 ([Tuy23], 12., p. 108). *Chứng minh: (a)* $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$. *(b)* $1+\cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$. *(c)* $\cot^2\alpha - \cos^2\alpha = \cot^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$. *(d)* $\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$.

Bài toán 46 ([Tuy23], 13., p. 108). *Rút gọn biểu thức: (a)* $A = \frac{1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$. *(b)* $B = (1+\tan^2\alpha)(1-\sin^2\alpha) - (1+\cot^2\alpha)(1-\cos^2\alpha)$. *(c)* $C = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

Bài toán 47 ([Tuy23], 14., p. 108). *Tính giá trị của biểu thức* $A = 5\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha$ *biết* $\sin\alpha = \frac{2}{3}$.

Bài toán 48 ([Tuy23], 15., p. 108). *Không dùng máy tính hoặc bảng số, tính: (a)* $A = \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 70^\circ$. *(b)* $B = \sin^2 5^\circ + \sin^2 25^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 65^\circ + \sin^2 85^\circ$.

Bài toán 49 ([Tuy23], 16., p. 108). *Cho* $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. *Chứng minh:* $\sin\alpha < \tan\alpha$, $\cos\alpha < \cot\alpha$. *Áp dụng: (a) Sắp xếp các số sau theo thứ tự tăng dần:* $\sin 65^\circ, \cos 65^\circ, \tan 65^\circ$. *(b) Xác định* α *thỏa mãn điều kiện:* $\tan\alpha > \sin\alpha > \cos\alpha$.

Bài toán 50 ([Tuy23], 17., p. 108). *Cho* ΔABC *vuông tại* A. *Biết* $\sin B = \frac{1}{4}$, *tính* $\tan C$.

Bài toán 51 ([Tuy23], 18., p. 108). *Cho biết* $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, *tính* $\tan\alpha$.

Bài toán 52 ([Tuy23], 19., p. 109). ΔABC, *đường trung tuyến* AM. *Chứng minh nếu* $\cot B = 3\cot C$ *thì* $AM = AC$.

Bài toán 53 ([Tuy23], 20., p. 109). *Cho* ΔABC, *trực tâm* H *là trung điểm của đường cao* AD. *Chứng minh* $\tan B\tan C = 2$.

Bài toán 54 ([Tuy23], 21., p. 109). *Cho* ΔABC *nhọn, 2 đường cao* BD, CE. *Chứng minh: (a)* $S_{\Delta ADE} = S_{\Delta ABC}\cos^2 A$. *(b)* $S_{BCDE} = S_{\Delta ABC}\sin^2 A$.

Bài toán 55 ([Tuy23], 22., p. 109). *Cho* ΔABC *nhọn. Từ 1 điểm* M *nằm trong tam giác vẽ* $MD\perp BC$, $ME\perp AC$, $MF\perp AB$. *Chứng minh* $\max\{MA, MB, MC\} \geq 2\min\{MD, ME, MF\}$, *trong đó* $\max\{MA, MB, MC\}$ *là đoạn thẳng lớn nhất trong các đoạn thẳng* MA, MB, MC *&* $\min\{MD, ME, MF\}$ *là đoạn thẳng nhỏ nhất trong các đoạn thẳng* MD, ME, MF.

3 Hệ Thức về Cạnh & Góc Trong Tam Giác Vuông

Bài toán 56 ([Tuy23], Thí dụ 3, p. 109). *Tứ giác* $ABCD$ *có 2 đường chéo cắt nhau tại* O. *Cho biết* $\widehat{AOD} = 70^\circ$, $AC = 5.3$ cm, $BD = 4$ cm. *Tính diện tích tứ giác* $ABCD$.

Bài toán 57 ([Tuy23], 23., p. 110). *Chứng minh: (a) Diện tích của 1 tam giác bằng nửa tích của 2 cạnh nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa 2 cạnh ấy. (b) Diện tích hình bình hành bằng tích của 2 cạnh kề nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa 2 cạnh ấy.*

Bài toán 58 ([Tuy23], 24., p. 110). *Cho hình bình hành* $ABCD$, $BD\perp BC$. *Biết* $AB = a$, $\widehat{A} = \alpha$, *tính diện tích hình bình hành đó.*

Bài toán 59 ([Tuy23], 25., p. 110). *Cho* ΔABC, $\widehat{A} = 120^\circ$, $\widehat{B} = 35^\circ$, $AB = 12.25$ dm. *Giải* ΔABC.

Bài toán 60 ([Tuy23], 26., p. 110)**.** *Cho* ΔABC *nhọn,* $\widehat{A} = 75°$*,* $AB = 30$ mm*,* $BC = 35$ mm*. Giải* ΔABC*.*

Bài toán 61 ([Tuy23], 27., p. 110)**.** *Cho* ΔABC *cân tại* A*, đường cao* BH*. Biết* $BH = h$*,* $\widehat{C} = \alpha$*. Giải* ΔABC*.*

Bài toán 62 ([Tuy23], 28., p. 110)**.** *Hình bình hành* $ABCD$ *có* $\widehat{A} = 120°$*,* $AB = a$*,* $BC = b$*. Các đường phân giác của 4 góc cắt nhau tạo thành tứ giác* $MNPQ$*. Tính diện tích tứ giác* $MNPQ$*.*

Bài toán 63 ([Tuy23], 29., p. 110)**.** *Cho* ΔABC*, các đường phân giác* AD*, đường cao* BH*, đường trung tuyến* CE *đồng quy tại điểm* O*. Chứng minh* $AC\cos A = BC\cos C$*.*

4 Miscellaneous

Bài toán 64 ([Tuy23], Thí dụ 4, p. 111)**.** *Cho* ΔABC *vuông tại* A*. Gọi* M, N *lần lượt là 2 điểm trên cạnh* AB, AC *sao cho* $AM = \frac{1}{3}AB$*,* $AN = \frac{1}{3}AC$*. Biết độ dài* $BN = \sin\alpha$*,* $CM = \cos\alpha$ *với* $0° < \alpha < 90°$*. Tính cạnh huyền* BC*.*

Bài toán 65 ([Tuy23], 30., p. 112)**.** *Cho* ΔABC *nhọn,* $BC = a$*,* $AC = b$*,* $CA = b$ *trong đó* $b - c = \frac{a}{k}$*,* $k > 1$*. Gọi* h_a, h_b, h_c *lần lượt là các đường cao hạ từ* A, B, C*. Chứng minh: (a)* $\sin A = k(\sin B - \sin C)$*. (b)* $\frac{1}{h_a} = k\left(\frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)$*.*

Bài toán 66 ([Tuy23], 31., p. 112)**.** *Giải* ΔABC *biết* $AB = 14$*,* $BC = 15$*,* $CA = 13$*.*

Bài toán 67 ([Tuy23], 32., p. 112)**.** *Cho hình hộp chữ nhật* $ABCD.A'B'C'D'$*. Biết* $\widehat{DC'D'} = 45°$*,* $\widehat{BC'B'} = 60°$*. Tính* $\widehat{BC'D}$*.*

Bài toán 68 ([Tuy23], 33., p. 112)**.** *Cho* ΔABC*,* $AB = AC = 1$*,* $\widehat{A} = 2\alpha$*,* $0° < \alpha < 45°$*. Vẽ các đường cao* AD, BE*. (a) Các tỷ số lượng giác* $\sin\alpha, \cos\alpha, \sin 2\alpha, \cos 2\alpha$ *được biểu diễn bởi các đoạn thẳng nào? (b) Chứng minh* $\Delta ADC \backsim \Delta BEC$*, từ đó suy ra các hệ thức sau:* $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$*,* $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$*. (c) Chứng minh:* $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$*,* $\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$*.*

Bài toán 69 ([Tuy23], 34., p. 112)**.** *Cho* $\alpha = 22°30'$*, tính* $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$*.*

Bài toán 70 ([Tuy23], 35., p. 112)**.** *Cho* ΔABC*, đường phân giác* AD*. Biết* $AB = c$*,* $AC = b$*,* $\widehat{A} = 2\alpha$*,* $\alpha < 45°$*. Chứng minh* $AD = \dfrac{2bc\cos\alpha}{b + c}$*.*

Tài liệu

[Bìn+23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Ngọc Đạm, Nguyễn Bá Đang, Lê Quốc Hán, and Hồ Quang Vinh. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 9. Tập 2: Hình Học*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 240.

[Chí+23] Phan Đức Chính, Tôn Thân, Vũ Hữu Bình, Trần Phương Dung, Ngô Hữu Dũng, Lê Văn Hồng, and Nguyễn Hữu Thảo. *Toán 9 Tập 1*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 128.

[Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.