

# Algebraic Expression – Biểu Thức Đại Số

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 26 tháng 3 năm 2023

## Tóm tắt nội dung

[EN] This text is a collection of problems, from easy to advanced, about algebraic expression. This text is also a supplementary material for my lecture note on Elementary Mathematics grade 7, which is stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 7/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_7/lecture)<sup>1</sup>. The latest version of this text has been stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 7/algebraic expression](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_7/algebraic_expression)<sup>2</sup>.

[VI] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài tập chọn lọc từ cơ bản đến nâng cao về biểu thức đại số. Tài liệu này là phần bài tập bổ sung cho tài liệu chính – bài giảng [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 7/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_7/lecture) của tác giả viết cho Toán Sơ Cấp lớp 7. Phiên bản mới nhất của tài liệu này được lưu trữ & có thể tải xuống ở link sau: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 7/algebraic expression](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_7/algebraic_expression).

**Nội dung.** Biểu thức số, biểu thức đại số; đa thức 1 biến, nghiệm của đa thức 1 biến; phép cộng, phép trừ đa thức 1 biến; phép nhân đa thức 1 biến; phép chia đa thức 1 biến.

## Mục lục

1	Biểu Thức Số. Biểu Thức Đại Số – Algebraic Expression . . . . .	2
2	Đa Thức 1 Biến. Nghiệm của Đa Thức 1 Biến . . . . .	4
3	Phép $\pm$ Đa Thức 1 Biến . . . . .	7
4	Phép Nhân Đa Thức 1 Biến . . . . .	8
5	Phép Chia Đa Thức 1 Biến . . . . .	10
6	Miscellaneous . . . . .	13
	Tài liệu . . . . .	15

---

\*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam  
e-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com); website: <https://nqbh.github.io>.

<sup>1</sup>URL: [https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary\\_mathematics/grade\\_7/NQBH\\_elementary\\_mathematics\\_grade\\_7.pdf](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_7/NQBH_elementary_mathematics_grade_7.pdf).

<sup>2</sup>URL: [https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary\\_mathematics/grade\\_7/algebraic\\_expression/NQBH\\_algebraic\\_expression.pdf](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_7/algebraic_expression/NQBH_algebraic_expression.pdf).

# 1 Biểu Thức Số. Biểu Thức Đại Số – Algebraic Expression

“In mathematics, an *algebraic expression* is an **expression** built up from constant **algebraic numbers**, **variables**, & the **algebraic operations** (addition, subtraction, multiplication, division, & exponentiation by an exponent that is a rational number).” – [Wikipedia/algebraic expression](#)

“**1** *Biểu thức số*. Các số được nối với nhau bởi dấu các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa tạo thành 1 *biểu thức số*. Đặc biệt, mỗi số đều được coi là 1 biểu thức số. Trong biểu thức số có thể có các dấu ngoặc để chỉ thứ tự thực hiện các phép tính. Khi thực hiện các phép tính trong 1 biểu thức số, ta nhận được 1 số. Số đó được gọi là *giá trị* của biểu thức số đã cho. **2** *Biểu thức đại số*. Các số, biến số được nối với nhau bởi dấu các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa làm thành 1 *biểu thức đại số*. Đặc biệt, biểu thức số cũng là biểu thức đại số. Trong biểu thức đại số có thể có các dấu ngoặc để chỉ thứ tự thực hiện các phép tính. Để tính giá trị của 1 biểu thức đại số tại những giá trị cho trước của các biến, ta thay những giá trị cho trước đó vào biểu thức rồi thực hiện các phép tính.” – Thái, 2022, Chap. VI, §1, p. 35

“**1** Các số được nối với nhau bởi dấu của các phép tính tạo thành 1 biểu thức số. Đặc biệt mỗi số đều được coi là 1 biểu thức số. Khi thực hiện các phép tính trong 1 biểu thức số ta được 1 số. Số này gọi là *giá trị* của biểu thức đã cho. **2** Biểu thức chỉ chứa chữ hoặc chứa cả số & chữ gọi chung là *biểu thức đại số*. Đặc biệt biểu thức số cũng được coi là biểu thức đại số. Trong 1 biểu thức đại số, các chữ (nếu có) dùng để thay thế hay đại diện cho những số nào đó được gọi là các *biến số* (gọi tắt là các *biến*). Khi thực hiện các phép tính trên các chữ ta có thể áp dụng những tính chất, quy tắc các phép tính như trên các số. **3** Để cho gọn: Ta không viết dấu nhân giữa các biến cũng như giữa số & biến. Trong các biểu thức đại số như  $\pm 1x$ , ta không viết thừa số 1. **4** Muốn tính giá trị của 1 biểu thức đại số tại những giá trị cho trước của biến ta thay giá trị đã cho của mỗi biến vào biểu thức rồi thực hiện các phép tính. **5** Quy ước đọc & viết 1 biểu thức đại số có nhiều phép tính: Phép tính nào làm sau cùng thì đọc trước tiên. Phép tính nào làm trước tiên thì đọc sau.” – Tuyên, 2022, Chap. III, §1, p. 37

Biểu thức	Thứ tự thực hiện các phép tính	Cách đọc
$(x + y)^2$	Tính tổng $\rightarrow$ Tính bình phương	Bình phương của tổng 2 số $x, y$
$(x - y)^2$	Tính hiệu $\rightarrow$ Tính bình phương	Bình phương của hiệu 2 số $x, y$
$(x + y)^3$	Tính tổng $\rightarrow$ Tính lập phương	Lập phương của tổng 2 số $x, y$
$(x - y)^3$	Tính hiệu $\rightarrow$ Tính lập phương	Lập phương của hiệu 2 số $x, y$
$x^2 + y^2$	Tính bình phương của $x, y \rightarrow$ Tính tổng	Tổng các bình phương của 2 số $x, y$
$x^2 - y^2$	Tính bình phương của $x, y \rightarrow$ Tính hiệu	Hiệu các bình phương của 2 số $x, y$
$x^3 + y^3$	Tính lập phương của $x, y \rightarrow$ Tính tổng	Tổng các lập phương của 2 số $x, y$
$x^3 - y^3$	Tính lập phương của $x, y \rightarrow$ Tính hiệu	Hiệu các lập phương của 2 số $x, y$
$(x + y)(x - y)$	Tính tổng & hiệu $\rightarrow$ Tính tích	Tích của tổng 2 số $x, y$ với hiệu của chúng

**Bài toán 1** (Thái et al., 2022, 6., p. 46). *Lãi suất ngân hàng quy định cho kỳ hạn 1 năm là  $r\%$ /năm. Viết biểu thức đại số biểu thị số tiền lãi & tổng tiền gốc lẫn tiền lãi khi hết kỳ hạn 1 năm nếu gửi ngân hàng  $A$  đồng.*

**Bài toán 2** (Thái et al., 2022, 7., p. 46). *Các nhà khoa học đã đưa ra cách ước tính chiều cao của trẻ em khi trưởng thành dựa trên chiều cao  $b$  của bố & chiều cao  $m$  của mẹ ( $b, m$  tính theo đơn vị cm) như sau: Chiều cao của con trai  $= \frac{1}{2} \cdot 1.08(b + m)$ , Chiều cao của con gái  $= \frac{1}{2}(0.923b + m)$ . (a) Với chiều cao nào của bố, mẹ thì con trai cao hơn, bằng, thấp hơn con gái?*

**Bài toán 3** (Thái, 2022, Ví dụ 1, pp. 35–36). *Viết biểu thức số biểu thị: (a) Quãng đường bay được của 1 con chim ưng, biết vận tốc bay của nó là 96km/h & thời gian bay là  $\frac{3}{4}$  giờ. (b) Quãng đường bay được của 1 con chim ưng, biết vận tốc bay của nó là  $v$ km/h & thời gian bay là  $t_0$  giờ. (c) Quãng đường bay được của 1 con ong mật, biết vận tốc bay của nó là 8km/h & thời gian bay là 15 phút. (d) Quãng đường bay được của 1 con ong mật, biết vận tốc bay của nó là  $v$ km/h & thời gian bay là  $t$  phút. (e) Cho hình thang vuông  $ABCD$  vuông tại  $A, D$  có  $AB = 30$  cm,  $AD = 25$  cm,  $CD = 50$  cm. Tính diện tích của hình thang  $ABCD$  & diện tích của  $\Delta ABC$ .*

**Bài toán 4** (Thái, 2022, Ví dụ 2, p. 36). *Mạng điện thoại di động mà bác Khôi sử dụng có cước phí nhắn tin nội mạng là 200 đồng/tin nhắn, ngoại mạng là 250 đồng/tin nhắn. (a) Viết biểu thức biểu thị số tiền bác Khôi phải trả khi nhắn  $t$  tin nhắn nội mạng &  $l$  tin nhắn ngoại mạng. (b) Tính số tiền bác Khôi phải trả khi nhắn 33 tin nhắn nội mạng & 27 tin nhắn ngoại mạng.*

**Bài toán 5** (Thái, 2022, Ví dụ 3, p. 36). *Viết biểu thức đại số biểu thị: (a) Tích của tổng 2 số  $x, y$  & tổng các bình phương của 2 số đó. (b) Hiệu các bình phương  $x, y$ . (c) Tổng của tích 2 số  $x, y$  với 5 lần bình phương của tổng 2 số đó.*

**Bài toán 6** (Thái, 2022, 1., p. 37). *Trống đồng Ngọc Lũ là 1 trong những chiếc trống đồng cổ hiện được lưu trữ ở Bảo tàng Lịch sử Quốc gia. Mặt chiếc trống đồng Ngọc Lũ đó có dạng hình tròn với đường kính 79.3 cm. Tính diện tích của mặt chiếc trống đồng Ngọc Lũ đó.*

**Bài toán 7** (Thái, 2022, 2., p. 37). *Viết biểu thức số biểu thị diện tích phần bể được lát gạch (xung quanh bể & đáy bể) của 1 bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài 15m, chiều rộng 10m, & chiều cao 1.2m (biết diện tích phần mạch vữa không đáng kể).*

**Bài toán 8** (Thái, 2022, 3., p. 37). *Mỗi ngày lượng nước 1 người cần uống (tính theo đơn vị lít) bằng khối lượng cơ thể (tính theo đơn vị kilogram) nhân với 0.03, sau đó cộng với lượng nước tăng cường cho thời gian vận động (cứ mỗi 30 phút vận động*

cộng thêm 0.335l nước). (a) Dung 7 tuổi nặng 23kg, mỗi ngày em đạp xe 15 phút & tham gia các hoạt động vận động khác trong 105 phút. Viết biểu thức số biểu thị lượng nước Dung cần uống mỗi ngày. (b) Áp dụng cách tính trên, tính lượng nước mà mỗi thành viên trong gia đình em cần uống mỗi ngày.

**Bài toán 9** (Thái, 2022, 4., p. 37). 1 ngày hè người ta đo được nhiệt độ vào buổi sáng là  $t^{\circ}\text{C}$ , buổi trưa nhiệt độ tăng thêm  $3^{\circ}\text{C}$  so với buổi sáng & buổi đêm nhiệt độ giảm đi  $y^{\circ}\text{C}$  so với buổi trưa. (a) Viết biểu thức đại số biểu thị nhiệt độ lúc buổi đêm của ngày mùa hè đó. (b) Tính nhiệt độ lúc buổi đêm của ngày mùa hè đó, biết  $t = 30$  &  $y = 5$ .

**Bài toán 10** (Thái, 2022, 5., p. 38). Viết biểu thức đại số biểu thị: (a) Tổng các bình phương của  $x, y$ . (b) Tổng của  $x, y$  bình phương. (c) Tổng các lập phương của  $x, y$ . (d) Lập phương của tổng  $x, y$ .

**Bài toán 11** (Thái, 2022, 6., p. 38). (a) Biểu thức đại số biểu thị diện tích của hình thang có đáy lớn  $2am$ , đáy bé  $bm$ , đường cao  $2hm$ ? (b) Biểu thức đại số biểu thị tích của tổng  $x, y$  với hiệu của  $x, y$ ?

**Bài toán 12** (Thái, 2022, 7., p. 38). Hà có  $x\text{kg}$  mơ. Để làm ô mai mơ gừng chua ngọt, Hà cần chuẩn bị thêm lượng đường trắng bằng  $\frac{1}{2}$  lượng mơ, lượng gừng tươi bằng  $\frac{1}{2}$  lượng mơ, lượng muối bằng  $\frac{1}{10}$  lượng mơ. (a) Viết biểu thức biểu thị khối lượng các nguyên liệu Hà cần chuẩn bị thêm theo  $x$ . (b) Nếu Hà có 15kg mơ để làm ô mai thì khối lượng các nguyên liệu cần chuẩn bị thêm là bao nhiêu?

**Bài toán 13** (Thái, 2022, 8., p. 38). 1 mảnh vườn có dạng hình chữ nhật với chiều dài  $x\text{m}$ , chiều rộng bằng  $\frac{3}{5}$  chiều dài. Ở giữa vườn người ta xây 1 cái bể hình tròn đường kính  $dm$ . (a) Viết biểu thức biểu thị diện tích phần đất còn lại của mảnh vườn đó. (b) Tính diện tích phần đất còn lại của mảnh vườn đó biết  $x = 35$ ,  $d = 4$ .

**Bài toán 14** (Thái, 2022, 9., p. 38). 1 khu vườn có dạng hình chữ nhật có chiều dài  $a\text{m}$ , chiều rộng ngắn hơn chiều dài  $8\text{m}$ . Trên khu vườn ấy, bác An đào 1 cái ao hình vuông có cạnh là  $b\text{m}$  ( $b < a - 8$ ). (a) Viết biểu thức biểu thị diện tích còn lại của khu vườn đó. (b) Tính diện tích còn lại của khu vườn đó khi  $a = 50$ ,  $b = 10$ .

**Bài toán 15** (Thái, 2022, 10., p. 39). Trên mảnh đất có dạng hình chữ nhật với chiều dài là  $x\text{m}$ , chiều rộng là  $y\text{m}$ , người ta dự định làm 1 vườn hoa hình chữ nhật & bớt ra 1 phần đường đi rộng  $2\text{m}$  (1 hình chữ nhật nằm trong 1 hình chữ nhật lớn hơn sao cho cạnh của hình chữ nhật nhỏ cách cạnh tương ứng của hình chữ nhật lớn 1 khoảng  $2\text{m}$ ). (a) Viết biểu thức biểu thị chu vi & diện tích của vườn hoa trên mảnh đất đó. (b) Tính chu vi & diện tích của vườn hoa trên mảnh đất đó, biết  $x = 15$ ,  $y = 10$ .

**Bài toán 16** (Thái, 2022, 11., p. 39). Viết biểu thức đại số biểu thị: (a) Khối lượng của 1 vật có thể tích  $V\text{m}^3$  & khối lượng riêng  $D\text{kg/m}^3$ . (b) Diện tích của tam giác vuông có 2 cạnh góc vuông là  $a\text{cm}$  &  $b\text{cm}$ . (c) Sản lượng lúa thu hoạch được trên 1 ruộng lúa có diện tích là  $x\text{ha}$  & năng suất lúa là  $y\text{tạ/ha}$ .

**Bài toán 17** (Thái, 2022, 12., p. 39). 1 ngôi nhà có 3 phòng: sân phòng khách có dạng hình vuông cạnh  $a\text{m}$ , sân phòng ngủ & sân phòng bếp có dạng hình chữ nhật với cùng chiều dài  $a\text{m}$  & cùng chiều rộng  $b\text{m}$  ( $a > b$ ). Viết biểu thức biểu thị tổng diện tích 3 mặt sân trên của ngôi nhà đó.

**Bài toán 18** (Thái, 2022, 13., p. 39). Tính giá trị của mỗi biểu thức sau: (a)  $A = 3.2x^2y^3$  tại  $x = 1$ ,  $y = -1$ . (b)  $B = 3m - 2n$  tại  $m = -1$ ,  $n = 2$ . (c)  $C = 7m + 2n - 5$  tại  $m = -2$ ,  $n = -\frac{1}{2}$ . (d)  $D = 3x^2 - 5y + 1$  tại  $x = \sqrt{3}$ ,  $y = -1$ .

**Bài toán 19** (Thái, 2022, 14., p. 39). Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  để biểu thức: (a)  $A = \frac{1}{50-x}$ , với  $x \neq 50$ , đạt giá trị lớn nhất. (b)  $B = \frac{4}{x-8}$ , với  $x \neq 8$ , đạt giá trị nhỏ nhất.

**Bài toán 20** (Thái, 2022, 15., pp. 39–40). Để đánh giá thể trạng của 1 người, người ta thường dùng chỉ số BMI. Chỉ số BMI được tính bằng công thức:  $\text{BMI} = \frac{m}{h^2}$  (chỉ số này thường được làm tròn đến hàng phần mười) với  $m$  là cân nặng (tính theo kg) &  $h$  là chiều cao (tính theo m). Nếu  $18.5 \leq \text{BMI} \leq 22.9$  thì được coi là thể trạng bình thường đối với người trên 20 tuổi. 2 chị Hằng 25 tuổi, 50kg, 152cm & Bình 25 tuổi, 72kg, 160cm, người nào đạt thể trạng bình thường?

**Bài toán 21** (Thái, 2022, 16., p. 40). Nguyên đã mua 5 quyển vở, giá mỗi quyển là 7000 đồng & mua  $x$  chiếc bút chì, giá mỗi chiếc là 4000 đồng. (a) Viết biểu thức biểu thị số tiền Nguyên phải trả. (b) Đức chỉ mua bút chì & mua nhiều hơn Nguyên 5 chiếc bút chì cùng loại với giá 4000 đồng/chiếc. Viết biểu thức biểu thị số tiền Đức phải trả.

**Bài toán 22** (Tuyên, 2022, Ví dụ 42, p. 37). Cho  $y = 5x$ , tính giá trị của biểu thức  $A = \frac{4x+y}{6x-y}$ .

**Bài toán 23** (Mở rộng Tuyên, 2022, Ví dụ 42, p. 37). Cho  $y = kx$ , tính giá trị của biểu thức:

$$A = \frac{ax + by}{cx + dy}, \quad B = \frac{ax^2 + bxy + cy^2}{dx^2 + exy + fy^2}, \quad C = \frac{a_1x^3 + a_2x^2y + a_3xy^2 + a_4y^3}{b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3},$$

$$D = \frac{\sum_{i=0}^n a_i x^{n-i} y^i}{\sum_{i=0}^n b_i x^{n-i} y^i} = \frac{a_1x^n + a_2x^{n-1}y + \dots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n}{b_1x^n + b_2x^{n-1}y + \dots + b_{n-1}xy^{n-1} + b_ny^n},$$

với  $a, b, c, d, e, f, a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ .

**Bài toán 24** (Tuyên, 2022, Ví dụ 43, p. 37). Tính giá trị của biểu thức:  $B = x^2 + 4xy - 3y^3$  với  $|x| = 5$ ,  $|y| = 1$ .

**Nhận xét 1.** “Biểu thức  $B$  có chứa 2 biến  $x, y$ . Biến  $x$  nhận 2 giá trị, biến  $y$  nhận 2 giá trị do đó ta phải xét đủ 4 trường hợp các cặp giá trị của  $x, y$  dẫn đến biểu thức  $B$  có 4 giá trị khác nhau.” – Tuyên, 2022, p. 38

**Bài toán 25** (Tuyên, 2022, 150., p. 38). Cho  $A$  là tổng lập phương các số tự nhiên từ 1 đến  $n$  &  $B$  là bình phương của tổng các số tự nhiên từ 1 đến  $n$ . Người ta đã chứng minh được  $A = B$ . Kiểm nghiệm lại bằng cách cho  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ .

**Bài toán 26** (Tuyên, 2022, 151., p. 38). Tính giá trị của các biểu thức sau với  $x = \sqrt{2}$ : (a)  $(x+1)(x^2-2)$ . (b)  $(x-1)(x^2+1)+3$ .

**Bài toán 27** (Tuyên, 2022, 152., p. 38). Tính giá trị của biểu thức  $M = \frac{2x^2+3x-2}{x+2}$  tại: (a)  $x = -1$ . (b)  $|x| = 3$ .

**Bài toán 28** (Tuyên, 2022, 153., p. 38). Tính giá trị của biểu thức  $N = \frac{6x^2+x-3}{2x-1}$  với  $|x| = \frac{1}{2}$ .

**Bài toán 29** (Tuyên, 2022, 154., p. 38). Tính giá trị của biểu thức  $P = 9x^2 - 7x|y| - \frac{1}{4}y^3$  tại  $x = \frac{1}{3}$ ,  $y = -6$ .

**Bài toán 30** (Tuyên, 2022, 155., p. 38). Tìm các giá trị của biến để: (a) Biểu thức  $(x+1)(y^2-6)$  có giá trị bằng 0. (b) Biểu thức  $x^2 - 12x + 7$  có giá trị lớn hơn 7.

**Bài toán 31** (Tuyên, 2022, 156., p. 38). Tính giá trị của biểu thức  $Q = \frac{5x^2+3y^2}{10x^2-3y^2}$  với  $\frac{x}{3} = \frac{y}{5}$ .

Bài toán này là 1 trường hợp nhỏ của Bài toán 23:  $B = \frac{ax^2+bx+cy^2}{dx^2+exy+fy^2}$  khi  $k = \frac{5}{3}$ ,  $a = 5, b = 0, c = 3, d = 10, e = 0, f = -3$ .

**Bài toán 32** (Tuyên, 2022, 157., p. 38). Cho  $x, y, z \in \mathbb{R}$ ,  $x, y, z \neq 0$ ,  $x - y - z = 0$ . Tính giá trị của biểu thức  $M = (1 - \frac{z}{x})(1 - \frac{x}{y})(1 + \frac{y}{z})$ .

**Bài toán 33** (Tuyên, 2022, 158., p. 38). (a) Tìm GTNN của biểu thức  $G: A = (x+2)^2 + (y - \frac{1}{5})^2 - 10$ . (b) Tìm GTLN của biểu thức:  $B = \frac{4}{(2x-3)^2+5}$ .

**Bài toán 34** (Tuyên, 2022, 159., p. 38). Cho biểu thức  $C = \frac{5-x}{x-2}$ . Tìm giá trị nguyên của  $x$  để: (a)  $C$  có giá trị nguyên. (b)  $C$  có giá trị nhỏ nhất.

“Để tính giá trị của 1 biểu thức đại số ứng với 1 giá trị nào đó của biến, ta thường thay giá trị đó của biến vào biểu thức rồi làm các phép tính theo thứ tự thực hiện đã được quy ước. Tuy nhiên trong 1 số bài, cần quan sát biểu thức để tính toán 1 cách hợp lý.” – Bình, 2022, p. 4

**Bài toán 35** (Bình, 2022, Ví dụ 1, p. 4). Tính giá trị của biểu thức:  $A = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 19^2 + 20^2)(a+b)(a+2b)(a+3b)$  với  $a = \frac{3}{5}$ ,  $b = -0.2$ .

**Bài toán 36** (Bình, 2022, Ví dụ 2, p. 4). Cho đa thức  $P(x) = ax^2 + bx + c$  với  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Biết  $P(0), P(1), P(2)$  có giá trị nguyên. Chứng minh: (a)  $2a, 2b$  có giá trị nguyên. (b)  $P(3), P(4), P(5)$  cũng có giá trị nguyên.

**Bài toán 37** (Bình, 2022, Ví dụ 3, p. 4). 2 đa thức  $ax + b$  &  $a'x + b'$  có giá trị bằng nhau với mọi giá trị  $x \in \mathbb{R}$ . Chứng minh

## 2 Đa Thức 1 Biến. Nghiệm của Đa Thức 1 Biến

“**[1]** Đơn thức 1 biến. Đơn thức 1 biến là biểu thức đại số chỉ gồm 1 số hoặc tích của 1 số với lũy thừa có số mũ nguyên dương của biến đó. Mỗi đơn thức (biến  $x$ ) nếu không phải là 1 số thì có dạng  $ax^k$ , trong đó  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ . Lúc đó, số  $a$  được gọi là *hệ số* của đơn thức  $ax^k$ . Đặc biệt, 1 số thực khác 0 được coi là đơn thức với số mũ của biến bằng 0. Để cộng/trừ 2 đơn thức có cùng số mũ của biến, ta cộng/trừ 2 hệ số với nhau & giữ nguyên phần biến:  $ax^k + bx^k = (a+b)x^k$ ,  $ax^k - bx^k = (a-b)x^k$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ .**[2]** Đa thức 1 biến. Đa thức 1 biến là tổng những đơn thức của cùng 1 biến. Mỗi số được xem là 1 đa thức (1 biến). Số 0 được gọi là *đa thức không*. Mỗi đơn thức cũng là 1 đa thức. Thông thường ta ký hiệu đa thức 1 biến  $x$  là  $P(x), Q(x), R(x)$  hoặc  $A(x), B(x), \dots$ . Thu gọn đa thức 1 biến là làm cho đa thức đó không còn 2 đơn thức nào có cùng số mũ của biến. Sắp xếp đa thức (1 biến) theo số mũ giảm dần/tăng dần của biến là sắp xếp các đơn thức trong dạng thu gọn của đa thức đó theo mũ giảm dần/tăng dần của biến. *Bậc* của đa thức 1 biến (khác đa thức không, đã thu gọn) là số mũ cao nhất của biến trong đa thức đó. Đặc biệt, 1 số khác 0 là đa thức bậc 0, đa thức không (số 0) là đa thức không có bậc. Trong dạng thu gọn của đa thức, hệ số của lũy thừa với số mũ cao nhất của biến còn gọi là *hệ số cao nhất* của đa thức; số hạng không chứa biến còn gọi là *hệ số tự do* của đa thức.**[3]** Nghiệm của đa thức 1 biến. Giá trị của đa thức  $P(x)$  tại  $x = a$  được ký hiệu là  $P(a)$ . Nếu tại  $x = a$ , đa thức  $P(x)$  có giá trị bằng 0 thì ta nói  $a$  (hoặc  $x = a$ ) là 1 *nghiệm* của đa thức đó. Ta có  $x = a$  là nghiệm của đa thức  $P(x)$  nếu  $P(a) = 0$ . 1 đa thức (khác đa thức không) có thể có 1 nghiệm, 2 nghiệm,  $\dots$ , hoặc không có nghiệm. Số nghiệm của 1 đa thức không vượt quá bậc của đa thức đó.” – Thái, 2022, Chap. VI, §2, pp. 40–41

“**[1]** Đơn thức 1 biến là biểu thức đại số chỉ gồm 1 số hoặc 1 tích của 1 số thực với lũy thừa có số mũ nguyên dương của biến đó. Số thực gọi là *hệ số*, số mũ của lũy thừa gọi là *bậc* của đơn thức. E.g., đơn thức  $-3x^4$  có hệ số là  $-3$ , bậc 4. Số 5 là đơn thức có hệ số là 5, bậc 0 (vì  $5 = 5x^0$ ). Số 0 cũng coi là 1 đơn thức nhưng nó không có bậc.**[2]** Với các đơn thức 1 biến ta có thể: Cộng/trừ 2 đơn thức cùng bậc bằng cách cộng/trừ các hệ số với nhau & giữ nguyên lũy thừa của biến. Nhân 2 đơn thức tùy ý bằng cách nhân 2 hệ số với nhau & nhân 2 lũy thừa của biến với nhau.**[3]** Đa thức 1 biến là tổng của những đơn thức của cùng 1 biến. Mỗi đơn thức trong tổng gọi là 1 *hạng tử* của đa thức. Đặc biệt, số 0 cũng được coi là 1 đa thức, gọi là *đa thức không*. Ta thường ký hiệu đa thức (1 biến) bằng 1 chữ cái in hoa. E.g.,  $A(x)$  là đa thức 1 biến  $x$  còn  $A(y)$  là đa thức 1 biến  $y$ .

<sup>3</sup>Có thể viết gọn 2 công thức lại thành:  $ax^k \pm bx^k = (a \pm b)x^k$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ .



**4** Thu gọn đa thức (1 biến) là làm cho đa thức đó không còn 2 đơn thức nào có cùng bậc của biến. Sắp xếp đa thức (1 biến) theo số mũ giảm dần (hoặc tăng dần) của biến là sắp xếp các hạng tử trong dạng đã thu gọn của đa thức đó theo số mũ giảm dần (hoặc tăng dần). **5** Bậc của 1 đa thức 1 biến đã thu gọn (khác đa thức không) là số mũ cao nhất của biến trong đa thức đó. *Chú ý:* Trong dạng thu gọn của đa thức, hệ số của lũy thừa với số mũ cao nhất của biến gọi là *hệ số cao nhất* của đa thức. Hạng tử không chứa biến gọi là *hạng tử tự do* của đa thức. **6** Nghiệm của đa thức 1 biến: Nếu tại  $x = a$  mà đa thức  $P(x)$  có giá trị bằng 0 (i.e.,  $P(a) = 0$ ) thì  $x = a$  là 1 nghiệm của đa thức. **7** 1 đa thức (khác đa thức không) có thể có 1 nghiệm, 2 nghiệm, ... hoặc không có nghiệm nào (0 nghiệm). 1 đa thức bậc  $n$  có không quá  $n$  nghiệm. **8** Mỗi đa thức bậc nhất biến  $x$  đều có thể viết dưới dạng  $ax + b$  trong đó hệ số  $a, b$  là các số cho trước (hằng số),  $a \neq 0$ . Ta gọi đa thức  $ax + b$  như thế là *nhị thức bậc nhất*. Mỗi đa thức bậc 2 biến  $x$  đều có thể viết dưới dạng  $ax^2 + bx + c$  trong đó các hệ số  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ <sup>4</sup>, là các số cho trước (hằng số thực). Ta gọi đa thức  $ax^2 + bx + c$  như thế là *tam thức bậc 2*.” – Tuyên, 2022, Chap. III, §2, p. 39

**Bài toán 38** (Thái et al., 2022, 3., p. 52–53). Cho 2 đa thức  $P(y) = -12y^4 + 5y^4 + 13y^3 - 6y^3 + y - 1 + 9$ ,  $Q(y) = -20y^3 + 31y^3 + 6y - 8y + y - 7 + 11$ . (a) Thu gọn mỗi đa thức trên rồi sắp xếp mỗi đa thức theo số mũ giảm dần của biến. (b) Tìm bậc, hệ số cao nhất & hệ số tự do của mỗi đa thức đó.

**Bài toán 39** (Thái et al., 2022, 3., pp. 52–53). Cho đa thức  $P(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ . Chứng tỏ: (a)  $P(0) = c$ . (b)  $P(1) = a + b + c$ . (c)  $P(-1) = a - b + c$ . (d) Tính  $P(2), P(-2), P(3), P(-3), P(\frac{1}{2}), P(-\frac{1}{2})$ . (e) Tính  $P(x) + P(-x)$  với  $x \in \mathbb{R}$ . (f) Tính  $P(x) + P(\frac{1}{x})$  với  $x \in \mathbb{R}$ .

**Bài toán 40** (Thái et al., 2022, 6., p. 53). Theo tiêu chuẩn của Tổ chức Y tế Thế Giới (WHO), đối với bé gái, công thức tính cân nặng chuẩn là  $C = 9 + 2(N - 1)$  kg, công thức tính chiều cao chuẩn là  $H = 75 + 5(N - 1)$  cm, trong đó  $N$  là số tuổi của bé gái. (a) Tính cân nặng chuẩn, chiều cao chuẩn của 1 bé gái 3 tuổi. (b) 1 bé gái 3 tuổi nặng 13.5kg & cao 86cm. Bé gái đó có đạt tiêu chuẩn về cân nặng & chiều cao của Tổ chức Y tế Thế giới hay không?

**Bài toán 41** (Thái et al., 2022, 7., p. 52–53). Nhà bác học Galileo Galilei (1564–1642) là người đầu tiên phát hiện ra quãng đường chuyển động của vật rơi tự do tỷ lệ thuận với bình phương của thời gian chuyển động. Quan hệ giữa quãng đường chuyển động  $y$  m & thời gian chuyển động  $x$  s được biểu diễn gần đúng bởi công thức  $y = 5x^2$ . Trong 1 thí nghiệm vật lý, người ta thả 1 vật nặng từ độ cao 180m xuống đất (coi sức cản của không khí không đáng kể). (a) Sau 3s thì vật nặng còn cách mặt đất bao nhiêu m? (b) Khi vật nặng còn cách mặt đất 100m thì nó đã rơi được thời gian bao lâu? (c) Sau bao lâu thì vật chạm đất?

**Bài toán 42** (Thái et al., 2022, 8., p. 53). Pound là 1 đơn vị đo khối lượng truyền thống của Anh, Mỹ & 1 số quốc gia khác. Công thức tính khối lượng  $y$  kg theo  $x$  pound là  $y = 0.45359237x$ . (a) Tính giá trị của  $y$  kg khi  $x = 100$  pound. (b) 1 hãng hàng không quốc tế quy định mỗi hành khách được mang 2 va li không tính cước; mỗi va li cân nặng không vượt quá 23 kg. Hỏi với va li cân nặng 50.99 pound sau khi quy đổi sang kilogram & được phép làm tròn đến hàng đơn vị thì có vượt quá quy định trên hay không?

**Bài toán 43** (Thái, 2022, Ví dụ 1, p. 41). Biểu thức nào sau đây là đa thức 1 biến? Tìm biến & bậc của đa thức đó. (a)  $x^2 + 2$ . (b)  $2t^5 - 25t^4 + 2t + 1$ . (c)  $\sqrt{2}x^4 - \sqrt{3}x^3 + \sqrt{5} + 1$ . (d)  $4x + 2y$ . (e)  $\frac{1}{x-2}$ . (f)  $\frac{-3x^2y^3}{5}$ . (g)  $5x^3 - 4x^2 + 2$ . (h)  $-6t^7 + 4t + 8t^9 - 1$ .

**Bài toán 44** (Thái, 2022, Ví dụ 2, p. 42). Cho 2 đa thức:  $P(x) = x - 2x^2 + 3x^5 + x^4 + x$ ,  $Q(x) = 3 - 2x - 2x^2 + x^4 - 3x^6 - x^4 + 4x^2$ . (a) Thu gọn & sắp xếp mỗi đa thức trên theo số mũ giảm dần của biến. (b) Xác định bậc, hệ số cao nhất & hệ số tự do của mỗi đa thức đó. (c) Chứng minh  $x = 0$  là nghiệm của  $P(x)$  nhưng không là nghiệm của  $Q(x)$ .

**Bài toán 45** (Thái, 2022, 17., p. 42). Lực  $F(N)$  của gió khi thổi vuông góc vào cánh bướm tỷ lệ thuận với bình phương vận tốc  $vm/s$  của gió, ta có công thức  $F = 30v^2$ . (a) Tính lực  $F$  khi  $v = 15$ ,  $v = 20$ . (b) Biết cánh bướm chỉ có thể chịu được áp lực tối đa là 12000N, hỏi con thuyền có thể đi được trong gió bão với vận tốc gió 90km/h không?

**Bài toán 46** (Thái, 2022, 18., pp. 42–43). Dung tích phổi của mỗi người phụ thuộc vào 1 số yếu tố, trong đó có 2 yếu tố quan trọng là chiều cao & độ tuổi. Các nhà khoa học đã đưa ra công thức ước tính dung tích chuẩn phổi của mỗi người theo giới tính như sau: Nam:  $P = 0.057h - 0.022a - 4.23$ ; Nữ:  $Q = 0.041h - 0.018a - 2.69$ . Trong đó:  $h$  là chiều cao tính bằng cm;  $a$  là tuổi tính bằng năm;  $P, Q$  là dung tích chuẩn của phổi tính bằng l. (a) Theo công thức trên, nếu Chi (nữ) 13 tuổi, cao 150cm & Hùng (nam) 13 tuổi, cao 160cm thì dung tích chuẩn phổi của mỗi bạn là bao nhiêu? (b) Tính dung tích chuẩn phổi của mình theo công thức trên.

**Bài toán 47** (Thái, 2022, 19., p. 43). Cho đa thức  $R(x) = x^2 + 5x^4 - 3x^3 + x^2 + 4x^4 + 3x^3 - x + 5$ . (a) Thu gọn & sắp xếp đa thức  $R(x)$  theo số mũ giảm dần của biến. (b) Tìm bậc của đa thức  $R(x)$ . (c) Tìm hệ số cao nhất & hệ số tự do của đa thức  $R(x)$ . (d) Tính  $R(-1), R(0), R(1), R(-a)$  với  $a \in \mathbb{R}$ .

**Bài toán 48** (Thái, 2022, 20., p. 43). Cho đa thức  $P(x) = 4x^4 + 2x^3 - x^4 - x^2$ . (a) Tìm bậc, hệ số cao nhất, hệ số tự do của đa thức  $P(x)$ . (b) Mỗi phần tử của tập hợp  $\{-1, \frac{1}{2}\}$  có là nghiệm của đa thức  $P(x)$  không? Vì sao?

**Bài toán 49** (Thái, 2022, 21., p. 43). Tìm bậc của mỗi đa thức sau: (a)  $2 - 3x^2 + 5x^4 - x - x^2 - 5x^4 + 3x^3$ . (b)  $2x^3 - 6x^7$ . (c)  $1 - x$ . (d)  $-3$ . (e) 0.

**Bài toán 50** (Thái, 2022, 22., p. 43). Kiểm tra xem: (a)  $x = \pm \frac{1}{2}$  có là nghiệm của đa thức  $P(x) = 2x - 1$  không. (b)  $x = 2$ ,  $x = -\frac{1}{2}$  có là nghiệm của đa thức  $P(x) = -3x + 6$  không. (c)  $t = 0$ ,  $t = 2$  có là nghiệm của đa thức  $R(t) = t^2 + 2t$  không. (d)  $t = 0$ ,  $t = \pm 1$  có là nghiệm của đa thức  $H(t) = t^3 - t$  không.

<sup>4</sup>Vì nếu  $a = 0$ ,  $ax^2 + bx + c$  trở thành đa thức bậc nhất  $bx + c$  chứ không còn là 1 đa thức bậc 2 nữa.

**Bài toán 51** (Thái, 2022, 23., p. 43). Chứng tỏ các đa thức sau không có nghiệm: (a)  $x^2 + 4$ . (b)  $10x^2 + \frac{3}{4}$ . (c)  $(x - 1)^2 + 7$ .

**Bài toán 52** (Tuyên, 2022, Ví dụ 44, p. 40). Cho các đơn thức  $A = -\frac{4}{9}ax^3$ ,  $B = \frac{3}{8}ax^5$  trong đó  $a \in \mathbb{R}$  là số đã biết (hằng số). Có giá trị nào của biến  $x$  làm cho  $A$  &  $B$  cùng có giá trị âm không?

**Nhận xét 2.** “Trong đơn thức cũng như trong đa thức nói chung, ngoài chữ chỉ biến số có thể còn có những chữ khác đại diện cho những số đã biết mà ta gọi là hằng số.” – Tuyên, 2022, p. 40

**Bài toán 53** (Tuyên, 2022, Ví dụ 45, p. 40). Cho các đa thức  $f(x) = ax^3 + 4x(x^2 - 1) + 8$ ,  $g(x) = x^3 - 4x(bx + 1) + c - 3$  trong đó  $a, b, c \in \mathbb{R}$  là những hằng số. (a) Thu gọn & sắp xếp mỗi đa thức trên theo số mũ giảm dần của biến. (b) Xác định các hệ số  $a, b, c$  để  $f(x) = g(x)$ .

**Nhận xét 3.** “2 đa thức cùng biến bằng nhau  $\Leftrightarrow$  các hệ số của lũy thừa cùng bậc bằng nhau.” – Tuyên, 2022, p. 40

I.e., với  $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $Q(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\forall j = 1, \dots, m$ , thì

$$P(x) = Q(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m = n, \\ a_i = b_i, \forall i = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

**Bài toán 54** (Tuyên, 2022, Ví dụ 46, p. 40). Cho đa thức  $f(x) = x^2 + 4x - 5$ . (a) Số  $-5$  có phải là nghiệm của  $f(x)$  không? (b) Viết tập hợp  $S$  tất cả ác nghiệm của  $f(x)$ .

**Nhận xét 4.** “Đa thức có tổng các hệ số bằng 0 thì có 1 nghiệm là 1. Nếu tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng các hệ số bậc lẻ thì đa thức có 1 nghiệm là  $-1$ ” – Tuyên, 2022, p. 40

I.e., với  $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ , thì

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i &= 0 \Leftrightarrow P(1) = 0, \\ \sum_{i=0, i \text{ chẵn}}^n a_i &= \sum_{i=0, i \text{ lẻ}}^n a_i \Leftrightarrow P(-1) = 0. \end{aligned}$$

Thật vậy, vì  $P(1) = \sum_{i=0}^n a_i 1^i = a_n 1^n + a_{n-1} 1^{n-1} + \dots + a_1 1 + a_0 = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i$  &  $P(-1) = \sum_{i=0}^n a_i (-1)^i = a_n (-1)^n + a_{n-1} (-1)^{n-1} + \dots + a_1 (-1) + a_0 = \sum_{i=0, i \text{ chẵn}}^n a_i - \sum_{i=0, i \text{ lẻ}}^n a_i$ .

**Bài toán 55** (Tuyên, 2022, 160., p. 40). Cho biểu thức  $M = (4a + 1)x^3$  với  $a \in \mathbb{R}$  là hằng số. Hỏi biểu thức  $M$  có phải là đơn thức không? Nếu  $M$  là đơn thức thì cho biết bậc của  $M$  & hệ số của nó.

**Bài toán 56** (Tuyên, 2022, 161., p. 40). Viết đơn thức  $64x^6$  dưới dạng lũy thừa của 1 đơn thức.

**Bài toán 57** (Tuyên, 2022, 162., p. 40). Cho 3 đơn thức  $M = -5x$ ,  $N = 11x$ ,  $P = \frac{7}{5}x^2$ . Chứng minh 3 đơn thức này không thể có cùng giá trị dương.

**Bài toán 58** (Tuyên, 2022, 163., p. 41). Cho đơn thức  $A = 5m(x^2)^2$ ,  $B = -\frac{2}{m}x^4$  trong đó  $m$  là hằng số dương. (a) 2 đơn thức  $A$  &  $B$  có cùng bậc không? (b) Tính hiệu  $A - B$ . (c) Tính giá trị nhỏ nhất của hiệu  $A - B$ .

**Bài toán 59** (Tuyên, 2022, 164., p. 41). Viết các số tự nhiên sau dưới dạng 1 đa thức thu gọn: (a)  $\overline{xx}$ . (b)  $\overline{x1x2}$ .

**Bài toán 60** (Tuyên, 2022, 165., p. 41). Cho đa thức  $A(x) = x^8 - 101x^7 + 101x^6 - 101x^5 + \dots + 101x^2 - 101x + 25$ . Tính  $A(100)$ .

**Bài toán 61** (Tuyên, 2022, 166., p. 41). Cho  $f(x) = (8x^2 + 5x - 10)^{49}(3x^3 - 10x^2 + 6x + 1)^{50}$ . Sau khi thu gọn thì tổng các hệ số của  $f(x)$  là bao nhiêu?

**Bài toán 62** (Tuyên, 2022, 167., p. 41). Cho tam thức bậc 2  $f(x) = ax^2 + bx + c$  trong đó  $7a + b = 0$ . Hỏi  $f(10)f(-3)$  có thể là số âm không?

**Bài toán 63** (Tuyên, 2022, 168., p. 41). Cho nhị thức bậc nhất  $f(x) = ax + b$ . Xác định các hệ số  $a, b$ . Biết  $f(1) = 2$ ,  $f(3) = 8$ .

**Bài toán 64** (Tuyên, 2022, 169., p. 41). Cho tam thức bậc 2  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Xác định các hệ số  $a, b, c$  biết  $f(1) = 4$ ,  $f(-1) = 8$ , &  $a - c = -4$ .

**Bài toán 65** (Tuyên, 2022, 170., p. 41). Cho  $f(x) = 2x^2 + ax + 4$  ( $a \in \mathbb{R}$  là hằng số),  $g(x) = x^2 - 5x - b$  ( $b \in \mathbb{R}$  là hằng số). Tìm các hệ số  $a, b$  sao cho  $f(1) = g(2)$  &  $f(-1) = g(5)$ .

**Bài toán 66** (Tuyên, 2022, 171., p. 41). Tìm nghiệm của đa thức sau: (a)  $(x - 3)(4 - 5x)$ . (b)  $x^2 - 2$ . (c)  $x^2 - \sqrt{3}$ . (d)  $x^2 + 2x$ .

**Bài toán 67** (Tuyên, 2022, 172., p. 41). Thu gọn rồi tìm nghiệm của đa thức sau: (a)  $f(x) = x(1 - 2x) + (2x^2 - x + 4)$ . (b)  $g(x) = x(x - 5) - x(x + 2) + 7x$ .

**Bài toán 68** (Tuyên, 2022, 173., p. 41). Xác định hệ số  $m$  để các đa thức sau nhận 1 là nghiệm: (a)  $mx^2 + 2x + 8$ . (b)  $7x^2 + mx - 1$ . (c)  $x^5 - 3x^2 + m$ .

**Bài toán 69** (Tuyên, 2022, 174., p. 41). Cho đa thức  $f(x) = x^2 + mx + 2$ . (a) Xác định  $m$  để  $f(x)$  nhận  $-2$  là 1 nghiệm. (b) Tìm tập hợp các nghiệm của  $f(x)$  ứng với giá trị vừa tìm được của  $m$ .

**Bài toán 70** (Tuyên, 2022, 175., p. 41). Cho các nhị thức bậc nhất  $f(x) = ax + b$  &  $g(x) = bx + a$ . Chứng minh nếu  $x_0$  là nghiệm của  $f(x)$  thì  $\frac{1}{x_0}$  là nghiệm của  $g(x)$ .

**Bài toán 71** (Tuyên, 2022, 176., p. 41). Cho biết  $(x-1)f(x) = (x+4)f(x+8)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Chứng minh  $f(x)$  có ít nhất 2 nghiệm.

**Bài toán 72** (Mở rộng Tuyên, 2022, 176., p. 41). Cho biết  $(x+a)f(x+b) = (x+c)f(x+d)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , với  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , khác nhau đôi một. Chứng minh  $f(x)$  có ít nhất 2 nghiệm.

### 3 Phép $\pm$ Đa Thức 1 Biến

“**[1]** Cộng 2 đa thức 1 biến. Để cộng 2 đa thức 1 biến (theo cột dọc), ta có thể làm như sau: (a) Thu gọn mỗi đa thức & sắp xếp 2 đa thức đó cùng theo số mũ giảm dần/tăng dần của biến; (b) Đặt 2 đơn thức có cùng số mũ của biến ở cùng cột; (c) Cộng 2 đơn thức trong từng cột, ta có tổng cần tìm. Để cộng 2 đa thức 1 biến (theo hàng ngang), ta có thể làm như sau: (a) Thu gọn mỗi đa thức & sắp xếp đa thức đó cùng theo số mũ giảm dần/tăng dần của biến; (b) Viết tổng 2 đa thức theo hàng ngang; (c) Nhóm các đơn thức có cùng số mũ của biến với nhau; (d) Thực hiện phép tính trong từng nhóm, ta được tổng cần tìm. **[2]** Trừ 2 đa thức 1 biến. Để trừ đa thức  $P(x)$  cho đa thức  $Q(x)$  (theo cột dọc), ta có thể làm như sau: (a) Thu gọn mỗi đa thức & sắp xếp 2 đa thức đó cùng theo số mũ giảm dần/tăng dần của biến; (b) Đặt đơn thức có cùng số mũ của biến ở cùng cột sao cho đơn thức của  $P(x)$  ở trên & đơn thức của  $Q(x)$  ở dưới; (c) Trừ 2 đơn thức trong từng cột, ta có hiệu cần tìm. Để trừ đa thức  $P(x)$  cho đa thức  $Q(x)$  (theo hàng ngang), ta có thể làm như sau: (a) Thu gọn mỗi đa thức & sắp xếp 2 đa thức đó cùng theo số mũ giảm dần/tăng dần của biến; (b) Viết hiệu  $P(x) - Q(x)$  theo hàng ngang, trong đó đa thức  $Q(x)$  được đặt trong dấu ngoặc; (c) Sau khi bỏ dấu ngoặc & đổi dấu mỗi đơn thức trong dạng thu gọn của đa thức  $Q(x)$ , nhóm các đơn thức có cùng số mũ của biến với nhau; (d) Thực hiện phép tính trong từng nhóm, ta được hiệu cần tìm.” – Thái, 2022, §3, pp. 44–45

“**[1]** Để cộng 2 đa thức 1 biến theo hàng ngang ta thực hiện theo các bước sau: (a) Viết mỗi đa thức vào trong ngoặc & nối với nhau bởi dấu cộng. (b) Bỏ dấu ngoặc rồi nhóm các hạng tử cùng bậc theo thứ tự giảm dần/tăng dần. (c) Thực hiện phép tính trong từng nhóm ta được tổng cần tìm. Ta cũng có thể cộng 2 đa thức 1 biến theo cột dọc bằng cách: (a) Thu gọn & sắp xếp mỗi đa thức theo thứ tự giảm dần/tăng dần. (b) Đặt các đa thức theo cột dọc, các hạng tử cùng bậc thẳng cột với nhau. (c) Cộng từng cột ta được tổng cần tìm. **[2]** Để trừ 2 đa thức 1 biến theo hàng ngang ta thực hiện như sau: (a) Viết mỗi đa thức vào trong ngoặc & nối với nhau bởi dấu trừ. (b) Bỏ dấu ngoặc rồi nhóm các hạng tử cùng bậc theo thứ tự bậc giảm dần/tăng dần. (c) Thực hiện phép tính trong từng nhóm ta được hiệu cần tìm. Ta cũng có thể trừ 2 đa thức theo cột dọc, tương tự như cộng 2 đa thức theo cột dọc. **[3]** Phép cộng đa thức cũng có tính chất như phép cộng các số thực.” – Tuyên, 2022, Chap. III, §3, p. 42

**Bài toán 73.** Tính: (a)  $ax^k + bx^k$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ . (b)  $ax^k + bx^k + cx^k$ ,  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ . (c)  $\sum_{i=1}^n a_i x^k = a_1 x^k + a_2 x^k + \dots + a_n x^k$ ,  $\forall a_i \in \mathbb{R}$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .

**Bài toán 74** (Thái et al., 2022, Ví dụ 1, p. 55). Tính tổng của 2 đa thức:  $P(x) = 5x^3 + 2x^2 + 3x + 1$  &  $Q(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x + 2$ .

**Bài toán 75** (Thái et al., 2022, 1., p. 59). Cho 2 đa thức:  $R(x) = -8x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 5x + 1$  &  $S(x) = x^4 - 8x^3 + 2x + 3$ . Tính: (a)  $R(x) + S(x)$ . (b)  $R(x) - S(x)$ .

**Bài toán 76** (Thái et al., 2022, 2., p. 59). Xác định bậc của 2 đa thức là tổng, hiệu của:  $A(x) = -8x^5 + 6x^4 + 2x^2 - 5x + 1$  &  $B(x) = 8x^5 + 8x^3 + 2x - 3$ .

**Bài toán 77** (Thái et al., 2022, 3., p. 59). Bác Ngọc gửi ngân hàng thứ nhất 90 triệu đồng với kỳ hạn 1 năm, lãi suất  $x\%/năm$ . Bác Ngọc gửi ngân hàng thứ 2 80 triệu đồng với kỳ hạn 1 năm, lãi suất  $(x + 1.5)\%/năm$ . Hết kỳ hạn 1 năm, bác Ngọc có được cả gốc & lãi là bao nhiêu: (a) Ở ngân hàng thứ 2? (b) Ở cả 2 ngân hàng?

**Bài toán 78** (Thái et al., 2022, 4., p. 59). Người ta rót nước từ 1 can đựng 10 lít nước sang 1 bể rỗng có dạng hình lập phương với độ dài cạnh 20cm. Khi mực nước trong bể cao  $h$  cm thì thể tích nước trong can còn lại là bao nhiêu? Biết  $1l = 1dm^3$ .

**Bài toán 79** (Thái et al., 2022, 5., p. 59). Đ/S? (a) Tổng của 2 đa thức bậc 4 luôn luôn là đa thức bậc 4. (b) Hiệu của 2 đa thức bậc 4 luôn luôn là đa thức bậc 4. (c) Tổng & hiệu của 2 đa thức bậc  $n \in \mathbb{N}$  luôn là đa thức bậc  $n$ .

Giải. (a) S, e.g., chọn  $P(x) = x^4$ ,  $Q(x) = -x^4$  thì  $P(x) + Q(x) = 0$  là đa thức bậc 0. (b) S, e.g., chọn  $P(x) = x^4$ ,  $Q(x) = x^4$  thì  $P(x) - Q(x) = 0$  là đa thức bậc 0. (c)  $\square$

**Bài toán 80** (Thái, 2022, Ví dụ 1, p. 45). Cho 2 đa thức:  $M(x) = x^3 - 2x^2 + 7x - 1$ ,  $N(x) = x^3 - 2x^2 - x - 1$ . (a) Tính  $M(x) + N(x)$ ,  $M(x) - N(x)$  theo cột dọc. (b)  $x = 0$ ,  $x = -1$  có là nghiệm của đa thức  $M(x) + N(x)$  hoặc  $M(x) - N(x)$  hay không? (c) Tính giá trị của 2 biểu thức  $M(x) + N(x)$ ,  $M(x) - N(x)$  tại  $x = -\frac{3}{2}$ .

**Bài toán 81** (Thái, 2022, Ví dụ 2, p. 46). *Tính: (a)  $(x^5 - 3x^4 + x^2 - 5) - (2x^4 + 7x^3 - x^2 + 6)$ . (b)  $(x^5 - 3x^4 + x^2 - 5) + (2x^4 + 7x^3 - x^2 + 6)$ .*

**Bài toán 82** (Thái, 2022, 25., p. 46). *Cho đa thức  $F(x) = x^7 - \frac{1}{2}x^3 + x + 1$ . (a) Tìm đa thức  $Q(x)$  sao cho  $F(x) + Q(x) = x^5 - x^3 + 2$ . (b) Tìm đa thức  $R(x)$  sao cho  $F(x) - R(x) = 2$ .*

**Bài toán 83** (Thái, 2022, 26., p. 45). *Tìm các đa thức  $P(x), Q(x)$  biết  $P(x) + Q(x) = x^2 + 1$  và  $P(x) - Q(x) = 2x$ .*

**Bài toán 84** (Thái, 2022, 27., p. 46). *Cho 2 đa thức  $F(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x - 9$ ,  $G(x) = -x^4 + 2x^2 - x + 8$ . (a) Tìm đa thức  $H(x)$  sao cho  $H(x) = F(x) + G(x)$ . (b) Tìm bậc của đa thức  $H(x)$ . (c) Kiểm tra xem  $x = 0$ ,  $x = \pm 1$  có là nghiệm của đa thức  $H(x)$  không. (d) Tìm đa thức  $K(x)$  sao cho  $H(x) - K(x) = \frac{1}{2}x^2$ .*

**Bài toán 85** (Thái, 2022, 28., p. 47). *(a) Cho các đa thức:  $A(x) = x^2 - 0.45x + 1.2$ ,  $B(x) = 0.8x^2 - 1.2x$ ,  $C(x) = 1.6x^2 - 2x$ . Tính  $A(x) + B(x) - C(x)$ . (b) Cho các đa thức:  $M(y) = y^2 - 1.75y - 3.2$ ,  $N(y) = 0.3y^2 + 4$ ,  $P(y) = 2y - 7.2$ . Tính  $M(y) - N(y) - P(y)$ .*

**Bài toán 86** (Thái, 2022, 29., p. 47). *Mỗi chiếc bút bi được bán với giá  $x$  đồng. Mỗi kẹp tóc có giá đắt hơn mỗi chiếc bút bi là 7000 đồng, mỗi quyển truyện tranh có giá đắt gấp 5 lần mỗi chiếc bút bi. Khanh mua 4 chiếc kẹp tóc và 5 chiếc bút bi. Dung mua 1 quyển truyện tranh, 3 chiếc kẹp tóc, và 10 chiếc bút bi. (a) Tính số tiền mỗi bạn phải trả theo  $x$ . (b) Tính tổng số tiền mà cửa hàng nhận được từ 2 bạn Khanh và Dung theo  $x$ . (c) Nếu Minh chỉ có 70000 đồng và muốn mua hàng sao cho có đủ cả 3 món đồ (bút bi, kẹp tóc, truyện tranh) thì Minh có thể mua được nhiều nhất bao nhiêu chiếc kẹp tóc, biết giá mỗi chiếc bút bi là 5000 đồng?*

**Bài toán 87** (Thái, 2022, 30., p. 47). *Cho 2 đa thức:  $F(x) = 2x^4 - x^3 + x - 3$ ,  $G(x) = -x^3 + 5x^2 + 4x + 2$ . (a) Tìm đa thức  $H(x)$  sao cho  $F(x) + H(x) = 0$ . (b) Tìm đa thức  $K(x)$  sao cho  $K(x) - G(x) = F(x)$ .*

**Bài toán 88** (Tuyên, 2022, Ví dụ 47, p. 42). *Cho các đa thức biến  $x$ :  $A = 7x + 5a$ ,  $B = 2x - 9a$ ,  $C = x + 10a$ , trong đó  $a$  là hằng số,  $a, x \in \mathbb{Z}$ . Không cần thực hiện phép nhân, cho biết tích  $ABC$  có giá trị là 1 số chẵn hay lẻ?*

**Nhận xét 5.** “Trong phép nhân các số nguyên, tích là 1 số lẻ thì tất cả các thừa số đều là số lẻ. Tích là số chẵn thì có ít nhất 1 thừa số là số chẵn.”

I.e.,  $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \cdots a_n : 2 \Leftrightarrow \exists i \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ s.t. } a_i : 2$  (ký hiệu  $\exists$  là tồn tại).  $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \cdots a_n \not: 2 \Leftrightarrow a_i \not: 2, \forall i = 1, 2, \dots, n$ .

**Bài toán 89** (Tuyên, 2022, 177., p. 42). *Cho đa thức  $A = 7x^4 - 2x^3 + x - 9$ ,  $B = -5x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 6x - 1$ . Tính tổng  $A + B$  và hiệu  $A - B$  bằng 2 cách.*

**Bài toán 90** (Tuyên, 2022, 178., p. 42). *Tính tổng  $S = \overline{a1} + \overline{a17} + \overline{1a} - \overline{1a7}$ .*

**Bài toán 91** (Tuyên, 2022, 179., p. 42). *Chứng minh tổng của 4 số lẻ liên tiếp thì chia hết cho 8.*

**Bài toán 92** (Tuyên, 2022, 180., p. 42). *Cho đa thức  $A = 16x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 9$ ,  $B = -15x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 6$ ,  $C = 5x^3 + 3x^2 + 18$ . Chứng minh ít nhất 1 trong 3 đa thức này có giá trị dương với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .*

**Bài toán 93** (Tuyên, 2022, 181., p. 42). *Cho đa thức  $A = 2x^2 + |7x - 1| - (5 - x + 2x^2)$ . (a) Thu gọn  $A$ . (b) Tìm  $x \in \mathbb{R}$  để  $A$  có giá trị bằng 2.*

**Bài toán 94** (Tuyên, 2022, 182., p. 43). *Cho  $f(x) + g(x) = 6x^4 - 3x^2 - 5$ ,  $f(x) - g(x) = 4x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 8x - 9$ . Tìm các đa thức  $f(x), g(x)$ .*

**Bài toán 95** (Tuyên, 2022, 183., p. 43). *Cho  $f(x) = x^{2n} - x^{2n-1} + \cdots + x^2 - x + 1$ ,  $g(x) = -x^{2n+1} + x^{2n} - x^{2n-1} + \cdots + x^2 - x + 1$ , với  $n \in \mathbb{N}$ . Tính giá trị của hiệu  $f(x) - g(x)$  tại  $x = \frac{1}{10}$ .*

**Bài toán 96** (Tuyên, 2022, 184., p. 43). *Bên trong khu đất hình vuông cạnh  $3x$  m có khu vực chặn nuôi hình chữ nhật kích thước  $x$  m và  $5$  m. (a) Tính diện tích  $S$  còn lại để làm vườn cây. (b) Tìm nghiệm của đa thức  $S$ .*

## 4 Phép Nhân Đa Thức 1 Biến

“**[1]** Nhân đơn thức với đơn thức. Muốn nhân đơn thức  $A$  với đơn thức  $B$ , ta làm như sau: (a) Nhân hệ số của đơn thức  $A$  với hệ số của đơn thức  $B$ ; (b) Nhân lũy thừa của biến trong  $A$  với lũy thừa của biến đó trong  $B$ ; (c) Nhân các kết quả vừa tìm được với nhau.  $ax^m \cdot bx^n = a \cdot b \cdot x^m \cdot x^n = abx^{m+n}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall m, n \in \mathbb{N}$ . **[2]** Nhân đơn thức với đa thức. Muốn nhân 1 đơn thức với 1 đa thức, ta nhân đơn thức đó với từng đơn thức của đa thức rồi cộng các tích với nhau:  $A(B + C) = AB + AC$ ,  $A(B - C) = AB - AC$ . **[3]** Nhân đa thức với đa thức. Muốn nhân 1 đa thức với 1 đa thức, ta nhân mỗi đơn thức của đa thức này với từng đơn thức của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau:  $(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD$ .” – Thái, 2022, Chap. VI, §4, pp. 47–48

“**[1]** Muốn nhân 1 đơn thức với 1 đa thức, ta nhân đơn thức với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các tích với nhau.  $A(B + C) = AB + AC$ . **[2]** Muốn nhân 1 đa thức với 1 đa thức, ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau. **[3]** Phép nhân đa thức cũng có các tính chất giao hoán, kết hợp, phân phối của phép nhân đối với phép cộng.” – Tuyên, 2022, Chap. III, §4, p. 43

<sup>5</sup>Có thể viết gọn 2 công thức này lại thành:  $A(B \pm C) = AB \pm AC$ .



**Bài toán 97** (Thái et al., 2022, Ví dụ 1, 1, p. 60). *Tính: (a)  $2x^3 \cdot 5x^4$ . (b)  $-4x^m \cdot 6x^n, \forall m, n \in \mathbb{N}$ . (c)  $3x^5 \cdot 5x^8$ . (d)  $-2x^{m+2} \cdot 4x^{n-2}, \forall m, n \in \mathbb{N}, n > 2$ .*

*Giải.* (a)  $2x^3 \cdot 5x^4 = 2 \cdot 5x^{3+4} = 10x^{3+4} = 10x^7$ . (b)  $-4x^m \cdot 6x^n = -4 \cdot 6x^{m+n} = -24x^{m+n}$ . (c)  $3x^5 \cdot 5x^8 = 3 \cdot 5x^5x^8 = 15x^{5+8} = 15x^{13}$ . (d)  $-2x^{m+2} \cdot 4x^{n-2} = -2 \cdot 4x^{m+2+n-2} = -8x^{m+n}, \forall m, n \in \mathbb{N}, n > 2$ .  $\square$

**Bài toán 98** (Thái et al., 2022, p. 60). *Tính  $(x-1)(x^2+x+1)$ .*

*Giải.*  $(x-1)(x^2+x+1) = x^3+x^2+x-x^2-x-1 = x^3+x^2-x^2+x-x-1 = x^3-1$ .  $\square$

**Bài toán 99** (Thái et al., 2022, 3, p. 61). *Cho đơn thức  $P(x) = 2x$  và đa thức  $Q(x) = 3x^2 + 4x + 1$ . Tính: (a)  $P(x)Q(x)$ . (b)  $P^2(x)Q(x)$ . (c)  $P^3(x)Q(x)$ . (d)  $P^n(x)Q(x), \forall n \in \mathbb{N}$ .*

*Giải.* (a)  $P(x)Q(x) = 2x(3x^2 + 4x + 1) = 6x^3 + 8x^2 + 2x$ . (b)  $P^2(x)Q(x) = (2x)^2(3x^2 + 4x + 1) = 4x^2(3x^2 + 4x + 1) = 12x^4 + 16x^3 + 4x^2$ . (c)  $P^3(x)Q(x) = (2x)^3(3x^2 + 4x + 1) = 8x^3(3x^2 + 4x + 1) = 24x^5 + 32x^4 + 8x^3$ . (d)  $P^n(x)Q(x) = (2x)^n(3x^2 + 4x + 1) = 2^n x^n(3x^2 + 4x + 1) = 3 \cdot 2^n x^{n+2} + 2^{n+2} x^{n+1} + 2^n x^n, \forall n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Bài toán 100** (Thái et al., 2022, Ví dụ 2, 2, p. 60). *Tính: (a)  $x(4x-3)$ . (b)  $-3x^2(6x^2-8x+7)$ . (c)  $\frac{1}{2}x(6x-4)$ . (d)  $-x^2(\frac{1}{3}x^2-x-\frac{1}{4})$ .*

*Giải.* (a)  $x(4x-3) = 4x^2-3x$ . (b)  $-3x^2(6x^2-8x+7) = -18x^4+24x^3-21x^2$ . (c)  $\frac{1}{2}x(6x-4) = 3x^2-2x$ . (d)  $-x^2(\frac{1}{3}x^2-x-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{3}x^4+x^3+\frac{1}{4}x^2$ .  $\square$

**Bài toán 101** (Thái et al., 2022, 5, p. 60). *(a) Cho 2 đa thức  $P(x) = 2x+3, Q(x) = x+1$ . Tính  $P(x)Q(x)$ . (b) Cho  $P(x) = ax+b, Q(x) = cx+d$ . Tính  $P(x)Q(x)$ .*

*Giải.* (a)  $P(x)Q(x) = (2x+3)(x+1) = 2x^2+2x+3x+3 = 2x^2+5x+3$ . (b)  $P(x)Q(x) = (ax+b)(cx+d) = acx^2+adx+bcx+bd = acx^2+(adx+bc)x+bd$ .  $\square$

**Bài toán 102** (Thái et al., 2022, Ví dụ 3, p. 60). *Tính: (a) Tích của 2 đa thức:  $P(x) = x^2+x+1, Q(x) = x^2-x+1$ . (b)  $(x^2-6)(x^2+6)$ . (c)  $(x-1)(x^2+x+1)$ .*

**Bài toán 103** (Thái et al., 2022, 1., p. 63). *Tính: (a)  $\frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{6}{5}x^3$ . (b)  $y^2(\frac{5}{7}y^3-2y^2+0.25)$ . (c)  $(2x^2+x+4)(x^2-x-1)$ . (d)  $(3x-4)(2x+1)-(x-2)(6x+3)$ .*

**Bài toán 104** (Thái et al., 2022, 2., p. 63). *Tìm bậc, hệ số cao nhất, và hệ số tự do của mỗi đa thức sau: (a)  $P(x) = (-2x^2-3x+x-1)(3x^2-x-2)$ . (b)  $Q(x) = (x^5-5)(-2x^6-x^3+3)$ .*

**Bài toán 105** (Thái et al., 2022, 3., p. 63). *Xét đa thức  $P(x) = x^2(x^2+x+1)-3x(x-a)+\frac{1}{4}$  với  $a \in \mathbb{R}$ . (a) Thu gọn đa thức  $P(x)$  rồi sắp xếp đa thức đó theo số mũ giảm dần của biến. (b) Tìm  $a$  sao cho tổng các hệ số của đa thức  $P(x)$  bằng  $\frac{5}{2}$ .*

**Bài toán 106** (Thái et al., 2022, 4., p. 63). *Từ tấm bìa hình chữ nhật có kích thước 20cm và 30cm, Quân cắt đi ở mỗi góc của tấm bìa 1 hình vuông sao cho 4 hình vuông bị cắt đi có cùng độ dài cạnh, sau đó gấp lại để tạo thành hình hộp chữ nhật không nắp. Viết đa thức biểu diễn thể tích của hình hộp chữ nhật được tạo thành theo độ dài cạnh của hình vuông bị cắt đi.*

**Bài toán 107** (Thái et al., 2022, 5., p. 63). (Ảo thuật với đa thức) *Hạnh bảo Ngọc: “Nếu bạn lấy tuổi của 1 người bất kỳ cộng thêm 5. Được bao nhiêu đem nhân với 2. Lấy kết quả đó cộng với 10. Nhân kết quả vừa tìm được với 5. Đọc kết quả cuối cùng sau khi trừ đi 100. Mình sẽ đoán được tuổi của người đó.” Giải thích vì sao Hạnh lại đoán được tuổi người đó.*

**Bài toán 108** (Thái, 2022, Ví dụ 1, p. 48). *Tính: (a)  $5x^5 \cdot \frac{1}{5}x^7$ . (b)  $-3x^3 \cdot 7x^7$ . (c)  $-x^m \cdot 7x^n, \forall m, n \in \mathbb{N}$ . (d)  $(-\frac{1}{2}x^5) \cdot (-\frac{2}{7}x^8)$ .*

**Bài toán 109** (Thái, 2022, Ví dụ 2, p. 48). *1 mảnh vườn có dạng hình thang với độ dài 2 đáy bằng  $x$ m và  $\frac{2}{7}x$ m, chiều cao bằng  $\frac{8}{63}x$ m. (a) Tính diện tích của mảnh vườn đó theo  $x$ . (b) Tính diện tích của mảnh vườn đó khi  $x = 63$ .*

**Bài toán 110** (Thái, 2022, Ví dụ 3, p. 49). *Khu vườn trồng hoa của nhà bác Lan ban đầu có dạng 1 hình vuông cạnh  $x$ m sau đó được mở rộng bên phải thêm 3m, phía dưới thêm 10m nên trở thành 1 hình chữ nhật. (a) Tính diện tích của khu vườn sau khi được mở rộng theo  $x$ . (b) Tính diện tích của khu vườn sau khi được mở rộng khi  $x = 20$ .*

**Bài toán 111** (Thái, 2022, 31., p. 49). *Tính: (a)  $\frac{1}{4}x \cdot (\frac{1}{2}x^2) \cdot (-\frac{4}{5}x^3)$ . (b)  $0.5x^{m+1} \cdot 0.8x^{m-1}, m \in \mathbb{N}, m \geq 1$ . (c)  $(x^2-3x+\frac{1}{4})(-3x^3)$ . (d)  $(x-2)(x^2+x-1)-x(x^2-1)$ .*

**Bài toán 112** (Thái, 2022, 32., p. 49). *D/S? (a)  $(x+0.5)(x^2+2x-0.5) = x^3+2.5x^2-0.5x-0.25$ . (b)  $(x+0.5)(x-0.5) = x^2-0.25$ . (c)  $\frac{1}{2}x^3(2x-1)(\frac{1}{4}x+1) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{7}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3$ .*

**Bài toán 113** (Thái, 2022, 33., pp. 49–50). *Chứng minh giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến: (a)  $x(2x+1)-x^2(x+2)+(x^3-x+3)$ . (b)  $0.2(5x-3)-\frac{1}{2}(\frac{2}{3}x+6)+\frac{2}{3}(3-x)$ . (c)  $(2x-9)(2x+9)-4x^2$ . (d)  $(x^2+3x+9)(x-3)-(x^3+23)$ .*

**Bài toán 114** (Thái, 2022, 34., p. 50). *Chứng minh: (a)  $(x+1)(x^2-x+1) = x^3-1$ . (b)  $(x^3+x^2+x+1)(x-1) = x^4-1$ . (c)  $(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab, \forall a, b \in \mathbb{R}$ .*

**Bài toán 115** (Thái, 2022, 35., p. 50). Tính giá trị của mỗi biểu thức sau: (a)  $3(2x - 1) + 5(3 - x)$  tại  $x = -\frac{3}{2}$ . (b)  $2x(6x - 1) - 3x(4x - 1)$  tại  $x = -2022$ . (c)  $(x - 2)(x^2 + x + 1) - x(x^2 - 1)$  tại  $x = 0.25$ . (d)  $2x^2 + 3(x - 1)(x + 1)$  tại  $x = \frac{1}{3}$ .

**Bài toán 116** (Thái, 2022, 36., p. 50). Xét đa thức  $P(x) = (2x^2 + a)(2x^3 - 3) - 5a(x + 3) + 1$  với  $a \in \mathbb{R}$ . (a) Thu gọn & sắp xếp đa thức  $P(x)$  theo số mũ giảm dần của biến. (b) Tìm  $a \in \mathbb{R}$  sao cho tổng các hệ số của đa thức  $P(x)$  bằng  $-37$ .

**Bài toán 117** (Thái, 2022, 37., p. 50). Bể cá cảnh nhà Khôi có dạng hình lập phương với độ dài cạnh  $x$  dm. Ban đầu mực nước ở bể cao  $x - 1$  dm, Khôi đặt 1 khối đá dạng núi cảnh chìm vào nước trong bể thì mực nước ở bể cao thêm  $0.5$  dm. (a) Tính thể tích nước có ở bể lúc đầu theo  $x$ . (b) Tính thể tích khối đá mà Khôi thả chìm vào nước trong bể theo  $x$ . (c) Tính thể tích nước & khối đá mà Khôi thả chìm vào nước trong bể theo  $x$ .

Bài tập phụ thuộc hình vẽ: Thái, 2022, 38., p. 50

**Bài toán 118** (Thái, 2022, 39., p. 51). Từ 1 tấm bìa có dạng hình chữ nhật với độ dài các cạnh là  $37$  cm &  $27$  cm, người ta cắt đi ở 4 góc của tấm bìa 4 hình vuông cạnh là  $x$  cm & xếp phần còn lại thành 1 hình hộp chữ nhật không nắp. (a) Tính diện tích xung quanh  $S_{xq}(x)$ , diện tích toàn phần  $S_{tp}(x)$  của hình hộp chữ nhật trên theo  $x$ . (b) Tính giá trị của  $S(x)$  tại  $x = 2$ .

**Bài toán 119** (Thái, 2022, 40., p. 51). 1 ngôi nhà có 4 ô cửa sổ, mỗi ô cửa sổ gồm 1 hình chữ nhật có độ dài các cạnh là  $x$  m,  $x + 2$  m & 1 nửa hình tròn có 1 đường kính trùng với 1 cạnh nhỏ hơn của hình chữ nhật & hướng ra ngoài hình chữ nhật. Người ta muốn ốp kính cường lực cho các ô cửa sổ đó. Hỏi cần bao nhiêu mét vuông kính? Biết diện tích của phần khung gỗ là  $0.42$  m<sup>2</sup>.

**Bài toán 120** (Tuyên, 2022, Ví dụ 48, p. 43). Rút gọn biểu thức  $A = (x + 5)(2x - 3) - 2x(x + 3) - (x - 15)$  rồi cho biết bậc của đa thức kết quả.

**Bài toán 121** (Tuyên, 2022, Ví dụ 49, p. 43). Cho biểu thức  $C = x(x + x^3) + (x - 1)(x^2 + x^3) + 1$ . Rút gọn biểu thức  $C$  rồi chứng minh với 2 giá trị đối nhau của  $x$  thì biểu thức  $C$  có cùng 1 giá trị.

**Bài toán 122** (Tuyên, 2022, 185., p. 44). Cho biểu thức  $B = 5x^2(3x - 2) - (4x + 7)(6x^2 - x) - (7x - 9x^3)$ . Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức  $B$  với  $x = -\frac{3}{4}$ .

**Bài toán 123** (Tuyên, 2022, 186., p. 44). Chứng minh giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến:  $A = (2x - 3)(x + 7) - 2x(x + 5) - x$ .

**Bài toán 124** (Tuyên, 2022, 187., p. 44). Cho  $ab = 1$ . Chứng minh đẳng thức:  $a(b + 1) + b(a + 1) = (a + 1)(b + 1)$ .

**Bài toán 125** (Tuyên, 2022, 188., p. 44). Tìm  $x$  biết:  $3(x - 2)(x + 3) - x(3x + 1) = 2$ .

**Bài toán 126** (Tuyên, 2022, 189., p. 44). Tính giá trị của biểu thức sau bằng cách hợp lý: (a)  $A = x^5 - 100x^4 + 100x^3 - 100x^2 + 100x + 9$  tại  $x = 99$ . (b)  $B = x^6 - 20x^5 - 20x^4 - 20x^3 - 20x^2 - 20x + 3$  tại  $x = 21$ . (c)  $C = x^7 - 26x^6 + 27x^5 - 47x^4 - 77x^3 + 50x^2 + x - 24$  tại  $x = 25$ .

**Bài toán 127** (Tuyên, 2022, 190., p. 44). Cho 4 số lẻ liên tiếp. Chứng minh hiệu của tích 2 số cuối với tích của 2 số đầu chia hết cho 16.

**Bài toán 128** (Tuyên, 2022, 191., p. 44). Cho 4 số nguyên liên tiếp. Hỏi tích của số đầu với số cuối nhỏ hơn tích của 2 số giữa bao nhiêu đơn vị?

**Bài toán 129** (Tuyên, 2022, 192., p. 44). Cho  $b + c = 100$ , chứng minh đẳng thức  $(10a + b)(10a + c) = 100a(a + 1) + bc$ . Áp dụng để tính nhẩm  $62 \cdot 68$ ,  $43 \cdot 47$ .

**Bài toán 130** (Tuyên, 2022, 193., p. 44). Xác định các hệ số  $a, b, c \in \mathbb{R}$  biết: (a)  $(2x - 5)(3x + b) = ax^2 + bx + c$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . (b)  $(ax + b)(x^2 - x - 1) = ax^3 + cx^2 - 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

**Bài toán 131** (Tuyên, 2022, 194., p. 44). Cho  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $m < 30$ . Có bao nhiêu giá trị của  $m$  để đa thức  $x^2 + mx + 72$  là tích của 2 đa thức bậc nhất với hệ số nguyên.

## 5 Phép Chia Đa Thức 1 Biến

“**1** Chia đơn thức cho đơn thức. Muốn chia đơn thức  $A$  cho đơn thức  $B \neq 0$  khi số mũ của biến trong  $A$  lớn hơn hoặc bằng số mũ của biến đó trong  $B$ , ta làm như sau: (a) Chia hệ số của đơn thức  $A$  cho hệ số của đơn thức  $B$ . (b) Chia lũy thừa của biến trong  $A$  cho lũy thừa của biến đó trong  $B$ . (c) Nhân các kết quả vừa tìm được với nhau. **2** Chia đa thức cho đơn thức. Muốn chia đa thức  $P$  cho đơn thức  $Q \neq 0$  khi số mũ của biến ở mỗi đơn thức của  $P$  lớn hơn hoặc bằng số mũ của biến đó trong  $Q$ , ta chia mỗi đơn thức của đa thức  $P$  cho đơn thức  $Q$  rồi cộng các thương với nhau. **3** Chia đa thức 1 biến đã sắp xếp. Để chia 1 đa thức cho 1 đa thức khác đa thức không (cả 2 đa thức đều đã thu gọn & sắp xếp các đơn thức theo số mũ giảm dần của biến) khi bậc của đa thức bị chia lớn hơn hoặc bằng bậc của đa thức chia, ta làm như sau: *Bước 1*: (a) Chia đơn thức bậc cao nhất của đa thức bị chia cho đơn thức bậc cao nhất của đa thức chia. (b) Nhân kết quả trên với đa thức chia & đặt tích dưới đa thức bị chia sao cho 2 đơn thức có cùng số mũ của biến ở cùng cột. (c) Lấy đa thức bị chia trừ đi tích đặt dưới để được đa thức mới. *Bước 2*: Tiếp tục quá trình trên cho đến khi nhận được đa thức không hoặc đa thức có bậc nhỏ hơn bậc của đa thức chia. **4** Người ta chứng minh được: Đối với 2 đa thức tùy ý  $A, B$  của cùng 1 biến ( $B \neq 0$ ), tồn tại duy nhất 1 cặp đa thức  $Q, R$  sao

cho  $A = BQ + R$ , trong đó  $R = 0$  hoặc bậc của  $R$  nhỏ hơn bậc của  $B$ . Như vậy, đa thức  $A$  chia hết cho đa thức  $B \Leftrightarrow R = 0$ .” – Thái, 2022, Chap. VI, §5, pp. 51–52

“**1** Chia đơn thức  $A$  cho đơn thức  $B$ ,  $B \neq 0$ , khi số mũ của biến trong  $A$  lớn hơn hoặc bằng số mũ của biến đó trong  $B$  ta làm như sau: (a) Chia hệ số của  $A$  cho hệ số của  $B$ . (b) Chia lũy thừa của biến trong  $A$  cho lũy thừa của biến đó trong  $B$ . (c) Nhân các kết quả với nhau:  $ax^m : bx^n = \frac{ax^m}{bx^n} = \frac{a}{b}x^{m-n}$ ,  $m \geq n$ . **2** Muốn chia đa thức  $P$  cho đơn thức  $Q$ ,  $Q \neq 0$ , khi số mũ của mỗi biến ở đơn thức  $P$  lớn hơn hoặc bằng số mũ của biến đó trong  $Q$  ta chia mỗi đơn thức của  $P$  cho đơn thức  $Q$  rồi cộng các thương với nhau. **3** Để chia 1 đa thức cho 1 đa thức khác đa thức không (cả 2 đa thức đều đã thu gọn & sắp xếp các đa thức theo số mũ giảm dần của biến), bậc của đa thức bị chia lớn hơn hoặc bằng bậc của đa thức chia ta làm như sau: *Bước 1*: (a) Chia đơn thức bậc cao nhất của đa thức bị chia cho đơn thức bậc cao nhất của đa thức chia. (b) Nhân kết quả trên với đa thức chia & đặt tích dưới đa thức bị chia sao cho 2 đơn thức có cùng số mũ của biến ở từng cột. (c) Lấy đa thức bị chia trừ đi tích đặt ở dưới để được đa thức mới (gọi là *đa thức dư thứ nhất*). *Bước 2*: Tiếp tục quá trình trên cho đến khi nhận được đa thức không hoặc đa thức có bậc nhỏ hơn bậc của đa thức chia. **4** Nhận xét: • Khi chia đa thức  $A$  cho đa thức  $B$  của cùng 1 biến,  $B \neq 0$ , có 2 khả năng xảy ra: (a) Phép chia có đa thức dư là đa thức không. Ta nói đa thức  $A$  *chia hết cho* đa thức  $B$ . (b) Phép chia có đa thức dư là đa thức  $R \neq 0$  có bậc nhỏ hơn bậc của  $B$  ( $\deg R < \deg B$ ). Ta nói phép chia này là phép chia có dư. • Đối với 2 đa thức tùy ý  $A, B$  của cùng 1 biến,  $B \neq 0$ , tồn tại duy nhất 1 cặp đa thức  $Q, R$  sao cho  $A = BQ + R$  trong đó  $R = 0$  hoặc bậc của  $R$  nhỏ hơn bậc của  $B$  ( $\deg R < \deg B$ ). Như vậy đa thức  $A$  chia hết cho đa thức  $B \Leftrightarrow R = 0$ .

**Định lý 1 (Bézout).** *Số dư trong phép chia đa thức  $f(x)$  cho nhị thức bậc nhất  $x - a$  đúng bằng  $f(a)$ .*

**Hệ quả 1.** *Nếu  $a$  là nghiệm của đa thức  $f(x)$  thì  $f(x)$  chia hết cho  $x - a$ .*

Đặc biệt: Nếu tổng các hệ số của đa thức  $f(x)$  bằng 0 thì 1 là nghiệm &  $f(x)$  chia hết cho  $x - 1$ . Nếu  $f(x)$  có tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng các hệ số bậc lẻ thì  $-1$  là nghiệm &  $f(x)$  chia hết cho  $x - (-1)$ , i.e.,  $f(x)$  chia hết cho  $x + 1$ .” – Tuyên, 2022, Chap. III, §5, pp. 44–45

**Bài toán 132** (Thái et al., 2022, Ví dụ 1, 1, p. 64). *Tính: (a)  $x^5 : x^3$ . (b)  $(4x^3) : x^2$ . (c)  $(ax^m) : (bx^n)$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ,  $b \neq 0$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq n$ . (d)  $(12x^4) : (6x^2)$ . (e)  $(-24x^m) : (6x^n)$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq n$ . (f)  $(3x^6) : (0.5x^4)$ . (g)  $(-12x^{m+2}) : (4x^{n+2})$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq n$ .*

**Bài toán 133** (Thái et al., 2022, Ví dụ 2, 2, p. 65). *Tính: (a) Cho đa thức  $P(x) = 4x^2 + 3x$  & đơn thức  $Q(x) = 2x$ . Tính  $P(x) : Q(x)$ . (b)  $(9x^6 + 6x^4 - x^2) : (3x^2)$ . (c)  $(\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + x) : (-\frac{1}{8}x)$ .*

**Bài toán 134** (Thái et al., 2022, 4, p. 65). *Tính: (a)  $(2x^2 + 5x + 2) : (2x + 1)$ . (b)  $(3x^3 - 5x^2 + 2) : (x^2 + 1)$ .*

*Giải.* Kết quả: (a)  $(2x^2 + 5x + 2) : (2x + 1) = x + 2$ . (b)  $(3x^3 - 5x^2 + 2) : (x^2 + 1) = 3x - 5$  (dư  $-3x + 7$ ), hay  $(3x^3 - 5x^2 + 2) = (x^2 + 1)(3x - 5) - 3x + 7$ .  $\square$

**Bài toán 135** (Thái et al., 2022, Ví dụ 3, 3, p. 66). *Tính: (a)  $(6x^2 - 13x + 6) : (-3x + 2)$ . (b)  $(8x^2 - 10x + 5) : (-2x + 1)$ . (c)  $(x^3 + 1) : (x^2 - x + 1)$ . (d)  $(8x^3 - 6x^2 + 5) : (x^2 - x + 1)$ .*

*Giải.* Kết quả: (a)  $(6x^2 - 13x + 6) : (-3x + 2) = -2x + 3$ . (b)  $(8x^2 - 10x + 5) : (-2x + 1) = -4x + 3$  (dư 2) hay  $8x^2 - 10x + 5 = (-2x + 1)(-4x + 3) + 2$ . (c)  $(x^3 + 1) : (x^2 - x + 1) = x + 1$ . (d)  $(8x^3 - 6x^2 + 5) : (x^2 - x + 1) = 8x + 2$  (dư  $-6x + 3$ ) hay  $8x^3 - 6x^2 + 5 = (x^2 - x + 1)(8x + 2) - 6x + 3$ .  $\square$

Khi chia đa thức  $A$  cho đa thức  $B$  của cùng 1 biến ( $B \neq 0$ ), có 2 khả năng xảy ra: Phép chia có dư bằng 0. Trong trường hợp này ta nói đa thức  $A$  *chia hết cho* đa thức  $B$ . Phép chia có dư là đa thức  $R \neq 0$  với bậc của  $R$  nhỏ hơn bậc của  $B$ . Phép chia trong trường hợp này được gọi là *phép chia có dư*. Đối với 2 đa thức tùy ý  $A, B$  của cùng 1 biến ( $B \neq 0$ ), tồn tại duy nhất 1 cặp đa thức  $Q, R$  sao cho  $A = BQ + R$ , trong đó  $R$  bằng 0 hoặc bậc của  $R$  nhỏ hơn bậc của  $B$ . Như vậy, đa thức  $A$  chia hết cho đa thức  $B$  khi & chỉ khi  $R = 0$ .

**Bài toán 136** (Thái et al., 2022, 1., p. 67). *Tính: (a)  $(4x^3) : (-2x^2)$ . (b)  $(-7x^2) : (6x)$ . (c)  $(-14x^4) : (-8x^3)$ .*

*Giải.* (a)  $(4x^3) : (-2x^2) = -2x$ . (b)  $(-7x^2) : (6x) = -\frac{7}{6}x$ . (c)  $(-14x^4) : (-8x^3) = \frac{-14}{-8}x = \frac{7}{4}x$ .  $\square$

**Bài toán 137** (Thái et al., 2022, 2., p. 67). *Tính: (a)  $(8x^3 + 2x^2 - 6x) : (4x)$ . (b)  $(5x^3 - 4x) : (-2x)$ . (c)  $(-15x^6 - 24x^3) : (-3x^2)$ .*

*Giải.* (a)  $(8x^3 + 2x^2 - 6x) : (4x) = 2x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ . (b)  $(5x^3 - 4x) : (-2x) = -\frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{x}$ . (c)  $(-15x^6 - 24x^3) : (-3x^2) = 5x^4 + 8x$ .  $\square$

**Bài toán 138** (Thái et al., 2022, 3., p. 67). *Tính: (a)  $(x^2 - 2x + 1) : (x - 1)$ . (b)  $(x^3 + 2x^2 + x) : (x^2 + x)$ . (c)  $(-16x^4 + 1) : (-4x^2 + 1)$ . (d)  $(-32x^5 + 1) : (-2x + 1)$ .*

**Bài toán 139** (Thái et al., 2022, 4., p. 67). *Tính: (a)  $(6x^2 - 2x + 1) : (3x - 1)$ . (b)  $(27x^3 + x^2 - x + 1) : (-2x + 1)$ . (c)  $(8x^3 + 2x^2 + x) : (2x^3 + x + 1)$ . (d)  $(3x^4 + 8x^3 - 2x^2 + x + 1) : (3x + 1)$ .*

**Bài toán 140** (Thái et al., 2022, 5., p. 67). *1 công ty sau khi tăng giá 30 nghìn đồng mỗi sản phẩm so với giá ban đầu là 2x (nghìn đồng) thì có doanh thu là  $6x^2 + 170x + 1200$  nghìn đồng. Tính số sản phẩm mà công ty đó đã bán được theo  $x$ .*

**Bài toán 141** (Thái et al., 2022, 6., p. 67). *1 hình hộp chữ nhật có thể tích là  $x^3 + 6x^2 + 11x + 6\text{cm}^3$ . Biết đáy là hình chữ nhật có các kích thước là  $x + 1\text{cm}$  &  $x + 2\text{cm}$ . Tính chiều cao của hình hộp chữ nhật đó theo  $x$ .*

**Bài toán 142** (Thái, 2022, Ví dụ 1, p. 52). *Tính: (a)  $(75x^5) : (3x^3)$ . (b)  $(-\frac{5}{2}x^4) : (\frac{1}{2}x)$ . (c)  $(-9x^3) : (-\frac{2}{5}x^2)$ . (d)  $(8x^{n+2}) : (3x^4)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .*

**Bài toán 143** (Thái, 2022, Ví dụ 2, p. 52). *Tính:  $(8x^9 - 4x^6 + 10x^3) : (2x^3)$ .*

**Bài toán 144** (Thái, 2022, Ví dụ 3, p. 53). *Tính: (a)  $(x^3 + 27) : (x^2 - 3x + 9)$ . (b)  $(2x^2 - 6x + 5) : (x + 3)$ .*

**Bài toán 145** (Thái, 2022, 41., p. 53). *Tính: (a)  $(\frac{3}{4}x^3) : (-\frac{1}{2}x^2)$ . (b)  $(5x^n) : (4x^2)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ . (c)  $(x^3 - 3x^2 + 6x) : (-\frac{1}{3}x)$ . (d)  $(x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{2}x^3) : (5x)$ .*

**Bài toán 146** (Thái, 2022, 42., p. 53). *(a) Cho đa thức  $P(x) = (6x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3) : (2x^3)$ . Rút gọn rồi tính giá trị của  $P(x)$  tại  $x = -2$ . (b) Cho đa thức  $Q(x) = 3(\frac{2x}{3} - 1) + (15x^2 - 10x) : (-5x) - (3x - 1)$ . Rút gọn rồi tính giá trị của  $Q(x)$  tại  $x = \frac{1}{3}$ .*

**Bài toán 147** (Thái, 2022, 43., p. 54). D/S? *Khi giải bài tập “Xét xem đa thức  $A(x) = -12x^4 + 5x^3 + 15x^2$  có chia hết cho đơn thức  $B(x) = 3x^2$  hay không?”, Hồng nói “Đa thức  $A(x)$  không chia hết cho đơn thức  $B(x)$  vì  $5 \nmid 3$ ”, còn Hà nói “Đa thức  $A(x)$  chia hết cho đơn thức  $B(x)$  vì số mũ của biến ở mỗi đơn thức của  $A(x)$  đều lớn hơn hoặc bằng số mũ của biến đó trong  $B(x)$ ”.*

**Bài toán 148** (Thái, 2022, 44., p. 54). *Tính: (a)  $(3x^3 - 7x^2 + 4x - 4) : (x - 2)$ . (b)  $(x^5 + x + 1) : (x^3 - x)$ .*

**Bài toán 149** (Thái, 2022, 45., p. 54). *Cho đa thức  $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5$ . Chia đa thức  $P(x)$  cho đa thức  $Q(x) \neq 0$  được thương là đa thức  $S(x) = 3x - 2$  & dư là đa thức  $R(x) = 3x + 3$ . Tìm  $Q(x)$ .*

**Bài toán 150** (Thái, 2022, 46., p. 54). *(a) Tìm số dư của phép chia đa thức  $4x^4 - 2x^2 + 7$  cho  $x + 3$ . (b) Tìm đa thức bị chia, biết đa thức chia là  $x^2 - 2x + 3$ , thương là  $x^2 - 2$ , dư là  $9x - 5$ .*

**Bài toán 151** (Thái, 2022, 47., p. 54). *(a) Tìm  $a \in \mathbb{R}$  sao cho  $10x^2 - 7x + a$  chia hết cho  $2x - 3$ . (b) Tìm  $a \in \mathbb{R}$  sao cho  $x^3 - 10x + a$  chia hết cho  $x - 2$ .*

**Bài toán 152** (Thái, 2022, 48., p. 54). *Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để  $2n^2 - n$  chia hết cho  $n + 1$ .*

**Bài toán 153** (Thái, 2022, 49., p. 54). *1 mảnh đất có dạng hình thang vuông với đáy bé  $AM = 10\text{m}$ , chiều cao là  $2x + 5\text{m}$ . Người ta mở rộng mảnh đất đó để được mảnh đất hình chữ nhật  $ABCD$  ( $M$  nằm giữa  $A, B$ ). Biết  $S_{\Delta MBC} = 6x^2 + 13x - 5\text{m}^2$ , tính diện tích của mảnh đất lúc ban đầu.*

**Bài toán 154** (Tuyên, 2022, Ví dụ 50, p. 45). *Tìm  $n \in \mathbb{N}$  để cả 2 phép chia sau đồng thời là phép chia không còn dư: (a)  $6x^5 : 3x^n$ . (b)  $15x^{n+2} : 5x^4$ .*

**Bài toán 155** (Tuyên, 2022, Ví dụ 51, p. 45). *Cho các đa thức  $A = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + mx - 5$ ,  $B = x^2 + 1$ . Tìm giá trị của  $m$  để  $A$  chia hết cho  $B$ .*

**Bài toán 156** (Tuyên, 2022, Ví dụ 52, p. 46). *Cho các đa thức  $A = 6x^3 - 15x^2 - 4x + 13$ ,  $B = 2x - 5$ . Tìm các giá trị nguyên của  $x$  để giá trị của  $A$  chia hết cho giá trị của  $B$ .*

**Bài toán 157** (Tuyên, 2022, 195., p. 46). *Tìm  $n \in \mathbb{N}$  để cả 2 phép chia sau đồng thời là phép chia không còn dư:  $15x^{n+2} : 3x^3$  &  $-\frac{1}{5}x^{n+3} : \frac{3}{10}x^{2n}$ .*

**Bài toán 158** (Tuyên, 2022, 196., p. 46). *Tính: (a)  $(x^3 + 2x + 3) : (x + 1)$ . (b)  $(x^4 - 3x^3 + 3x - 1) : (x^2 - 1)$ .*

**Bài toán 159** (Tuyên, 2022, 197., p. 46). *Xác định các hệ số  $a, b \in \mathbb{R}$  sao cho đa thức  $x^4 + ax^3 + b$  chia hết cho đa thức  $x^2 - 1$ .*

**Bài toán 160** (Tuyên, 2022, 198., p. 46). *Tìm các giá trị nguyên của  $x$  để thương có giá trị nguyên: (a)  $(3x^3 + 13x^2 - 7x + 5) : (3x - 2)$ . (b)  $(2x^5 + 4x^4 + 7x^3 - 49x - 44) : (2x^2 - 7)$ .*

**Bài toán 161** (Tuyên, 2022, 199., p. 46). *Chứng minh không tồn tại  $n \in \mathbb{N}$  để cho giá trị của biểu thức  $n^6 - n^4 - 2n^2 + 9$  chia hết cho giá trị của biểu thức  $n^4 + n^2$ .*

**Bài toán 162** (Tuyên, 2022, 200., p. 47). *Không thực hiện phép chia đa thức, tìm số dư trong phép chia đa thức  $f(x)$  cho đa thức  $g(x)$  trong các trường hợp sau: (a)  $f(x) = x^{21} + x^{20} + x^{19} + 101$ ,  $g(x) = x + 1$ . (b)  $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 2x + 7$ ,  $g(x) = x + 2$ . (c)  $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x - 10$ ,  $g(x) = x - 5$ .*

**Bài toán 163** (Tuyên, 2022, 201., p. 47). *Chứng minh  $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^{31} - (x^2 - 4x - 5)^{30} + 2$  chia hết cho  $x - 2$ .*

**Bài toán 164** (Tuyên, 2022, 202., p. 47). *Tìm đa thức dư trong phép chia  $(x^{54} + x^{45} + x^{36} + \dots + x^9 + 1) : (x^2 - 1)$ .*

**Bài toán 165** (Tuyên, 2022, 203., p. 47). *Xác định đa thức  $f(x)$  thỏa mãn cả 3 điều kiện sau: (a) Khi chia cho  $x - 1$  dư 4. (b) Khi chia cho  $x + 2$  dư 1. (c) Khi chia cho  $(x - 1)(x + 2)$  thì được thương là  $5x^2$  & còn dư.*

**Bài toán 166** (Tuyên, 2022, 204., p. 47). *Cho đa thức  $A = ax^2 + bx + c$ . Xác định hệ số  $b$  biết khi chia  $A$  cho  $x - 1$  hoặc chia  $A$  cho  $x + 1$  đều có cùng 1 đa thức dư.*

**Bài toán 167** (Tuyên, 2022, 205., p. 47). *Chứng minh nếu  $x^4 - 4x^3 + 5ax^2 - 4bx + c$  chia hết cho  $x^3 + 3x^2 - 9x - 3$  thì  $a + b + c = 0$ .*



## 6 Miscellaneous

**Nội dung.** Biểu thức số, biểu thức đại số, đa thức 1 biến; nghiệm của đa thức 1 biến, cộng & trừ đa thức 1 biến; Vận dụng quy tắc dấu ngoặc để nhóm các đơn thức có cùng bậc vào 1 nhóm rồi thực hiện phép tính trong từng nhóm. Nhân & chia đa thức 1 biến:  $(A + B) \cdot C = AC + BC$ ,  $(A + B) : C = A : C + B : C$ ,  $(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD$ ,  $(A + B) : (C + D)$  (Chia theo quy tắc chia các đa thức đã sắp xếp).

**Bài toán 168** (Thái et al., 2022, 1., p. 69). *Biểu thức nào sau đây là đa thức 1 biến? Tìm biến & bậc của đa thức đó.* (a)  $-7x + 5$ . (b)  $2021x^2 - 2022x + 2023$ . (c)  $2y^3 - \frac{3}{y+2} + 4$ . (d)  $-2t^m + 8t^2 + t - 1$ , với  $m \in \mathbb{N}$ .

**Bài toán 169** (Thái et al., 2022, 2., p. 69). *Tính giá trị của biểu thức:* (a)  $A = -5a - b - 20$  tại  $a = -4$ ,  $b = 18$ . (b)  $B = -8xyz + 2xy + 16y$  tại  $x = -1$ ,  $y = 3$ ,  $z = -2$ . (c)  $C = -x^{2021}y^2 + 9x^{2021}$  tại  $x = -1$ ,  $y = -3$ .

**Bài toán 170** (Thái et al., 2022, 3., p. 69). *Viết đa thức trong mỗi trường hợp sau:* (a) Đa thức bậc nhất có hệ số của biến bằng  $-2$  & hệ số tự do bằng 6. (b) Đa thức bậc 2 có hệ số tự do bằng 4. (c) Đa thức bậc 4 có hệ số của lũy thừa bậc 3 của biến bằng 0. (d) Đa thức bậc 6 trong đó tất cả hệ số của lũy thừa bậc lẻ của biến đều bằng 0.

3

**Bài toán 171** (Thái et al., 2022, 4., p. 69). *Kiểm tra xem trong các số  $-1, 0, 1, 2$ , số nào là nghiệm của mỗi đa thức sau:* (a)  $3x - 6$ . (b)  $x^4 - 1$ . (c)  $3x^2 - 4x$ . (d)  $x^2 + 9$ .

**Bài toán 172** (Thái et al., 2022, 5., p. 69). *Cho đa thức  $P(x) = -9x^6 + 4x + 3x^5 + 5x + 9x^6 - 1$ .* (a) Thu gọn đa thức  $P(x)$ . (b) Tìm bậc của đa thức  $P(x)$ . (c) Tính giá trị của đa thức  $P(x)$  tại  $x = -1$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ .

**Bài toán 173** (Thái et al., 2022, 6., p. 69). *Tính:* (a)  $-2x^2 + 6x^2$ . (b)  $4x^3 - 8x^3$ . (c)  $3x^4(-6x^2)$ . (d)  $(-24x^6) : (-4x^3)$ .

**Bài toán 174** (Thái et al., 2022, 7., p. 69). *Tính:* (a)  $(x^2 + 2x + 3) + (3x^2 - 5x + 1)$ . (b)  $(4x^3 - 2x^2 - 6) - (x^3 - 7x^2 + x - 5)$ . (c)  $-3x^2(6x^2 - 8x + 1)$ . (d)  $(4x^2 + 2x + 1)(2x - 1)$ . (e)  $(x^6 - 2x^4 + x^2) : (-2x^2)$ . (f)  $(x^5 - x^4 - 2x^3) : (x^2 + x)$ .

**Bài toán 175** (Thái et al., 2022, 8., p. 70). *Cho 2 đa thức:  $A(x) = 4x^4 + 6x^2 - 7x^3 - 5x - 6$ ,  $B(x) = -5x^2 + 7x^3 + 5x + 4 - 4x^4$ .* (a) Tìm đa thức  $M(x)$  sao cho  $M(x) = A(x) + B(x)$ . (b) Tìm đa thức  $C(x)$  sao cho  $A(x) = B(x) + C(x)$ .

**Bài toán 176** (Thái et al., 2022, 9., p. 70). *Cho  $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$  &  $Q(x) = x^4 - 1$ .* Tìm đa thức  $A(x)$  sao cho  $P(x)A(x) = Q(x)$ .

**Bài toán 177** (Thái et al., 2022, 10., p. 70). *Nhân dịp lễ Giáng sinh, 1 cửa hàng bán quần áo trẻ em thông báo khi mua mỗi bộ quần áo sẽ được giảm giá 30% so với giá niêm yết. Giả sử giá niêm yết 1 bộ quần áo là  $x$  đồng. Viết biểu thức tính số tiền phải trả khi mua loại quần áo đó với số lượng:* (a) 1 bộ. (b) 3 bộ. (c)  $y$  bộ.

**Bài toán 178** (Thái et al., 2022, 11., p. 70). *1 doanh nghiệp kinh doanh cà phê nhận thấy: Sau khi rang xong, khối lượng cà phê giảm 12% so với trước khi rang. Gọi  $x$  là khối lượng (kg) cà phê trước khi rang,  $y$  là khối lượng (kg) cà phê sau khi rang.* (a) Tìm công thức chỉ mỗi liên hệ giữa  $x, y$ . (b) Để có được 2 tấn cà phê sau khi rang thì doanh nghiệp cần sử dụng bao nhiêu tấn cà phê trước khi rang?

**Bài toán 179** (Thái et al., 2022, 12., p. 70). *1 công ty sau khi tăng giá 50 nghìn đồng mỗi sản phẩm so với giá ban đầu là  $x$  nghìn đồng với  $x < 60$  thì có doanh thu là  $-50x^2 + 50x + 15000$  nghìn đồng. Tính số sản phẩm mà công ty đã bán được theo  $x$ .*

**Bài toán 180** (Thái et al., 2022, 13., p. 70). *1 công ty du lịch tổ chức đi tham quan cho 1 nhóm khách 50 người với mức giá 400 nghìn đồng/người. Công ty đặt ra chính sách khuyến mãi như sau: Sẽ giảm giá cho mỗi người 10 nghìn đồng khi cứ có thêm 1 khách tham gia ngoài 50 khách trên.* (a) Giả sử số khách tham gia thêm là  $x$ ,  $x < 40$ . Tính số tiền mà công ty thu được theo  $x$ . (b) Nếu số khách tăng thêm là 10 người thì số tiền công ty thu được là tăng hay giảm so với số tiền thu được chỉ với 50 khách ban đầu?

**Bài toán 181** (Thái, 2022, 50., p. 55). *Tính giá trị của biểu thức  $(x^2 - 8)(x + 3) - (x - 2)(x + 5)$  tại  $x = 3$ .*

**Bài toán 182** (Thái, 2022, 51., p. 55). *Biểu thức nào sau đây là đa thức 1 biến? Tìm biến, hệ số cao nhất, hệ số tự do, & bậc của đa thức đó.* (a)  $-2022x$ . (b)  $-6x^2 - 4x + 2$ . (c)  $3u^n - 8u^2 - 20$ , với  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 2$ . (d)  $\frac{1}{x} + x^3 - 2x^2 + 1$ .

**Bài toán 183** (Thái, 2022, 52., p. 55). *Tính giá trị của biểu thức:* (a)  $A = 56 - 5a + 6b$  tại  $a = 22$ ,  $b = 23$ . (b)  $B = 6xyz - 3xy - 19z$  tại  $x = 11$ ,  $y = 32$ ,  $z = 0$ . (c)  $C = x^{2021}y - 2022x^2 + 2023y^3 + 7$  tại  $x = -1$  &  $y = 1$ . (d)  $D = x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 17x + 21$  tại  $x = 16$ .

**Bài toán 184** (Thái, 2022, 53., p. 55). *1 bể đang chứa 500l nước. Người ta mở 1 vòi nước cho chảy vào bể đó, mỗi phút vòi nước đó chảy vào bể được 50l nước. Viết biểu thức biểu thị lượng nước có trong bể sau khi đã mở vòi nước đó được  $x$  phút, biết sau  $x$  phút bể nước đó chưa đầy.*

**Bài toán 185** (Thái, 2022, 54., p. 55). *Viết đa thức biến  $x$  trong mỗi trường hợp sau:* (a) Đa thức bậc nhất có hệ số của biến bằng  $-7$  & hệ số tự do bằng 0. (b) Đa thức bậc 3 có hệ số của lũy thừa bậc 2 & bậc nhất của biến đều bằng 5. (c) Đa thức bậc 4 có tổng hệ số của lũy thừa bậc 3 & bậc 2 của biến bằng 6 & hệ số tự do bằng  $-1$ . (d) Đa thức bậc 8 trong đó tất cả các hệ số của lũy thừa bậc lẻ của biến đều bằng 0.

**Bài toán 186** (Thái, 2022, 55., p. 55). Tìm giá trị của  $m \in \mathbb{R}$  để đa thức sau là đa thức bậc 3 theo biến  $x$ :  $P(x) = (m^2 - 25)x^4 + (20 + 4m)x^3 + 17x^2 - 23$ .

**Bài toán 187** (Thái, 2022, 56., p. 55). Cho đa thức  $A(x) = -11x^5 + 4x^3 - 12x^2 + 11x^5 + 13x^2 - 7x + 2$ . (a) Thu gọn & sắp xếp đa thức  $A(x)$  theo số mũ giảm dần của biến. (b) Tìm bậc của đa thức  $A(x)$ . (c) Tính giá trị của đa thức  $A(x)$  tại  $x = -1$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ .

**Bài toán 188** (Thái, 2022, 57., p. 56). Tính: (a)  $(-4x^3 - 13x^2 + 2x^5) + (13x^2 + 2x^3 - 12x - 1)$ . (b)  $(12x^6 - 11x^2 + 3x^3 + 9) - (13x^6 + 2x^3 - 11x^2 - 11x)$ . (c)  $(8x^3 - x^2 + 1)(x^2 - 1)$ . (d)  $(8x^3 + 6x^2 + 3x + 1) : (2x + 1)$ .

**Bài toán 189** (Thái, 2022, 58., p. 56). Tìm đa thức  $C(x)$  sao cho  $A(x) - C(x) = B(x)$  biết: (a)  $A(x) = x^3 + x^2 + x - 2$ ,  $B(x) = 9 - 2x + 11x^3 + x^4$ . (b)  $A(x) = -12x^5 + 2x^3 - 2$ ,  $B(x) = 9 - 2x - 11x^2 + 2x^3 - 11x^5$ .

**Bài toán 190** (Thái, 2022, 59., p. 56). Tìm đa thức  $Q(x)$  sao cho  $P(x)Q(x) = R(x)$  biết: (a)  $P(x) = x - 2$ ,  $R(x) = -x^3 + 8$ . (b)  $P(x) = x^2 - 3x + 2$ ,  $R(x) = 10 - 13x + 2x^2 + x^3$ .

**Bài toán 191** (Thái, 2022, 60., p. 56). Tìm hệ số  $a \in \mathbb{R}$  sao cho đa thức  $G(x) = x^4 + x^2 + a$  chia hết cho đa thức  $M(x) = x^2 - x + 1$ .

**Bài toán 192** (Thái, 2022, 61., p. 56). Đ/S? (a)  $x = 2$  &  $x = -3$  là nghiệm của đa thức  $P(x) = x^2 - 5x + 6$ . (b) Đa thức bậc 4 luôn có nhiều hơn 4 nghiệm. (c) Mỗi phân tử của tập hợp  $\{0, \pm 1\}$  là nghiệm của đa thức  $P(x) = x^3 - x$ .

**Bài toán 193** (Thái, 2022, 62., p. 56). Cho đa thức  $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ,  $a \neq 0$ , với  $a + b + c + d + e = 0$ . Chứng minh  $x = 1$  là nghiệm của đa thức  $P(x)$ .

**Bài toán 194** (Thái, 2022, 63., p. 56). Cho đa thức  $Q(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ . Chứng minh nếu  $Q(x)$  nhận  $\pm 1$  là nghiệm thì  $a, c$  là 2 số đối nhau.

**Bài toán 195** (Thái, 2022, 64., p. 56). 1 cửa hàng bán hoa sau khi tăng giá 50 nghìn đồng mỗi chậu hoa so với giá bán ban đầu là 3x nghìn đồng thì số tiền thu được là  $3x^2 + 53x + 50$  nghìn đồng. Tìm số chậu hoa mà cửa hàng đã bán theo x.

**Bài toán 196** (Thái, 2022, 65., pp. 56–57). Tháng 5 năm 2019, nhiều đại biểu trên cả nước đã “hội quân” trên 1 tàu kiểm ngư rời cảng biển quốc tế Cam Ranh để bắt đầu hải trình nổi tình yêu đất liền với biển đảo Trường Sa. Do thời tiết xấu, tàu kiểm ngư đã giảm 15% tốc độ so với tốc độ đã định. Giả sử tốc độ đã định của tàu kiểm ngư là x hải lý/h. Viết biểu thức biểu thị số hải lý mà tàu kiểm ngư đã đi với số thời gian: (a) 1h. (b) 4h. (c) yh.

**Bài toán 197** (Thái, 2022, 66., p. 57). Lượng khí thải gây hiệu ứng nhà kính do các hoạt động của con người là nguyên nhân gây ra nhiệt độ Trái Đất tăng 1 cách đáng kể. Các nhà khoa học đưa ra biểu thức dự báo nhiệt độ trung bình trên bề mặt Trái Đất như sau:  $T = 0.02x + 15$ . Trong đó,  $T$  là nhiệt độ trung bình của bề mặt Trái Đất tính theo độ C,  $x$  là số năm kể từ năm 1960. Tính nhiệt độ trung bình của bề mặt Trái Đất vào các năm 1965 & năm 2023 theo biểu thức dự báo trên.

**Bài toán 198** (Thái, 2022, 67., p. 57). Giá bán lẻ 1 hộp sữa là 7000 đồng, giá cho 1 lốc sữa 4 hộp là 26000 đồng. Nếu mua từ 4 lốc sữa trở lên thì cứ 2 lốc sữa được tặng 1 hộp. Vậy nếu bác Hoa mua 2a,  $a \in \mathbb{N}$ ,  $2 \leq a < 10$ , lốc sữa thì sẽ tiết kiệm bao nhiêu tiền so với mua lẻ từng hộp?

**Bài toán 199** (Thái, 2022, 68., p. 57). Nhân dịp cuối năm, 1 cửa hàng cần thanh lý 1 lô hàng (gồm 100 sản phẩm cùng loại) với giá bán là x đồng/chiếc. Lần đầu cửa hàng giảm 10% so với giá bán thì bán được 15 sản phẩm, lần sau cửa hàng giảm thêm 5% nữa (so với giá đã giảm lần đầu) thì bán được hết 85 sản phẩm còn lại. Viết biểu thức biểu thị số tiền của hàng thu được sau khi đã bán hết 100 sản phẩm trên.

**Bài toán 200** (Thái, 2022, 69., p. 57). Cho hình thang ABCD với đáy nhỏ  $BC = x$ dm. H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C lên cạnh AD. Biết  $BH = x$ dm,  $AH = 7$ dm,  $DK = 4$ dm. Tính diện tích hình thang ABCD theo x.

**Bài toán 201** (Tuyên, 2022, Ví dụ 53, p. 47). Cho đa thức  $A = 15x^4 - 20x^3 + 5x^2$  & các đơn thức  $B = 2x^3$ ,  $C = 5x^2$ . (a) A chia hết cho đơn thức nào? Tính thương trong trường hợp đó. (b) Tính giá trị của thương tại  $x = \frac{1}{3}$ . (c) Tính các nghiệm của thương.

**Bài toán 202** (Tuyên, 2022, Ví dụ 54, p. 48). Khi chia đa thức A cho đa thức  $x^2 + 2$  ta được thương là  $x^2 - 5$  & dư 9. Tìm đa thức A & cho biết bậc của đa thức này cùng các hệ số của đa thức.

**Bài toán 203** (Tuyên, 2022, 206., p. 48). Cho biểu thức  $A(x) = \frac{x+2}{x-1}$ . (a) Tìm giá trị của biến để cho biểu thức  $A(x)$  có nghĩa. (b) Tính  $A(7)$ . (c) Tìm x để  $A(x) = \frac{1}{4}$ . (d) Tìm x  $\in \mathbb{Z}$  để  $A(x)$  có giá trị nguyên. (e) Tìm x  $\in \mathbb{R}$  để  $A(x)$  có giá trị lớn hơn 1.

**Bài toán 204** (Tuyên, 2022, 207., p. 48). Tìm n  $\in \mathbb{N}$  lớn nhất sao cho  $n + 10$  là ước của  $n^3 + 2025$ .

**Bài toán 205** (Tuyên, 2022, 208., p. 48). Chứng minh các biểu thức sau luôn có giá trị là 1 số chẵn  $\forall x \in \mathbb{Z}$ . (a)  $A = (x-3) + |x+3|$ . (b)  $B = (x-5) - |x-5|$ .

**Bài toán 206** (Tuyên, 2022, 209., p. 48). Đa thức  $f(x)$  với hệ số nguyên có tính chất là: Nếu  $f(x)$  có nghiệm nguyên thì nghiệm đó phải là ước của hệ số tự do. Vận dụng tính chất này để tìm tập hợp các nghiệm của đa thức  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ .

**Bài toán 207** (Tuyên, 2022, 210., p. 48). Cho  $g(x) = 4x^2 + 3x + 1$ ,  $h(x) = 3x^2 - 2x - 3$ . (a) Tính  $f(x) = g(x) - h(x)$ . (b) Chứng minh  $-4$  là 1 nghiệm của  $f(x)$ . (c) Tìm tập hợp nghiệm của  $f(x)$ .

**Bài toán 208** (Tuyên, 2022, 211., p. 48). (a) Tính tổng của 5 số nguyên liên tiếp trong đó số ở giữa là  $a \in \mathbb{Z}$ . Có thể khẳng định tổng này chia hết cho (những) số nào? (b) Tính tổng của 5 số chẵn liên tiếp trong đó số đầu là  $2a$ ,  $a \in \mathbb{Z}$ . Có thể khẳng định tổng này chia hết cho (những) số nào?

**Bài toán 209** (Tuyên, 2022, 212., p. 48). Tìm  $m \in \mathbb{Z}$  sao cho đa thức  $(x + m)(x - 3) + 7$  phân tích được thành  $(x + a)(x + b)$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $a \leq b$ .

**Bài toán 210** (Tuyên, 2022, 213., p. 48). Thùng xe tải có dạng hình hộp chữ nhật, chiều rộng  $x + 5$  dm, chiều dài  $2x + 1$  dm. Biết thể tích của thùng xe là  $2x^3 + 15x^2 + 27x + 10$  dm<sup>3</sup>. Tính chiều cao của thùng xe.

## Tài liệu

Bình, Vũ Hữu (2022). *Nâng Cao & Phát Triển Toán 7 Tập 2*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 148.

Thái, Đỗ Đức (2022). *Bài Tập Toán 7 Tập 2*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, p. 124.

Thái, Đỗ Đức, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang (2022). *Toán 7 Tập 2*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, p. 127.

Tuyên, Bùi Văn (2022). *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 7*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 168.