

# Solution: Square-, Cube-, & $n$ th Roots

## Lời Giải: Căn Bậc 2, Căn Bậc 3, & Căn Bậc $n$

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 17 tháng 5 năm 2023

### Tóm tắt nội dung

[en] This text is a collection of problems, from basic to advanced, on *square-, cube-, &  $n$ th roots*.

**Keyword.** Square root, cube root,  $n$ th root.

[vi] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài toán, từ cơ bản đến nâng cao, về *căn bậc 2, căn bậc 3, & căn bậc  $n$* .

**Từ khóa.** Căn bậc 2, căn bậc 3, căn bậc  $n$ , số hữu tỷ, số vô tỷ, căn thức.

- Lecture note – Bài giảng: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/square- & cube roots](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_9/square- & cube roots)<sup>1</sup>.
- Cheatsheet – Công thức: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/cheatsheet: square- & cube roots](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_9/cheatsheet: square- & cube roots)<sup>2</sup>.
- Problem – Bài tập: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/problem: square- & cube roots](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_9/problem: square- & cube roots)<sup>3</sup>.
- Solution – Lời giải: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/solution: square- & cube roots](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_9/solution: square- & cube roots)<sup>4</sup>.

## Mục lục

1 Square Root & Irrationals – Căn Bậc 2 & Số Vô Tỷ . . . . .	2
2 Căn Thức Bậc 2 & Hằng Đẳng Thức $\sqrt{A^2} =  A $ . . . . .	5
3 Liên Hệ Giữa Phép Nhân, Phép Chia & Phép Khai Phương . . . . .	8
4 Biến Đổi Đơn Giản Biểu Thức Chứa Căn Thức Bậc 2 . . . . .	9
5 Rút Gọn Biểu Thức Có Chứa Căn Thức Bậc 2 . . . . .	10
6 Cube Root, $n$ th Root – Căn Bậc 3, Căn Bậc $n$ . . . . .	12
7 Miscellaneous . . . . .	13
Tài liệu . . . . .	16

---

\*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam

e-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com); website: <https://nqbh.github.io>.

<sup>1</sup>URL: [https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary\\_mathematics/grade\\_9/square\\_root\\_cube\\_root/NQBH\\_square\\_root\\_cube\\_root.pdf](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/NQBH_square_root_cube_root.pdf).

<sup>2</sup>[https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary\\_mathematics/grade\\_9/square\\_root\\_cube\\_root/cheatsheet/NQBH\\_square\\_root\\_cube\\_root\\_cheatsheet.pdf](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/cheatsheet/NQBH_square_root_cube_root_cheatsheet.pdf).

<sup>3</sup>[https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary\\_mathematics/grade\\_9/square\\_root\\_cube\\_root/problem/NQBH\\_square\\_root\\_cube\\_root\\_problem.pdf](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/problem/NQBH_square_root_cube_root_problem.pdf).

<sup>4</sup>[https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary\\_mathematics/grade\\_9/square\\_root\\_cube\\_root/solution/NQBH\\_square\\_root\\_cube\\_root\\_solution.pdf](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/solution/NQBH_square_root_cube_root_solution.pdf).

# 1 Square Root & Irrationals – Căn Bậc 2 & Số Vô Tỷ

**Bài toán 1** ([Chí+23], ?1–?3, pp. 4–5). (a) Tìm các căn bậc 2 của  $9, \frac{4}{9}, 0.25, 2$ . (b) Tìm căn bậc 2 số học của  $49, 64, 81, 1.21$ . (c) Tìm căn bậc 2 của  $49, 64, 81, 1.21$ .

**Bài toán 2** ([Chí+23], Ví dụ 2, ?4, pp. 5–6). So sánh: (a) 1 &  $\sqrt{2}$ . (b) 2 &  $\sqrt{5}$ . (c) 4 &  $\sqrt{15}$ . (d)  $\sqrt{11}$  & 3.

**Bài toán 3** ([Chí+23], Ví dụ 3, ?5, p. 6). (a) Tìm  $x \in \mathbb{R}$  thỏa: (a)  $\sqrt{x} > 2$ . (b)  $\sqrt{x} < 1$ . (c)  $\sqrt{x} > 1$ . (d)  $\sqrt{x} < 3$ .

**Bài toán 4** ([Chí+23], 1., p. 6). Tìm căn bậc 2 số học của mỗi số sau rồi suy ra căn bậc 2 của chúng: 121, 144, 169, 225, 256, 324, 361, 400.

**Bài toán 5** ([Chí+23], 2., p. 6). So sánh: (a) 2 &  $\sqrt{3}$ . (b) 6 &  $\sqrt{41}$ . (c) 7 &  $\sqrt{47}$ .

**Bài toán 6** ([Chí+23], 3., p. 6). Tìm  $x \in \mathbb{R}$  thỏa mãn các phương trình sau & sau đó làm tròn đến chữ số thập phân thứ 3: (a)  $x^2 = 2$ . (b)  $x^2 = 3$ . (c)  $x^2 = 3.5$ . (d)  $x^2 = 4.12$ .

Hint. Nghiệm của phương trình bậc 2  $x^2 = a$  với  $a \geq 0$  là các căn bậc 2 của  $a$ .

**Bài toán 7** ([Chí+23], 4., p. 7). Tìm  $x \in \mathbb{R}$  thỏa: (a)  $\sqrt{x} = 15$ . (b)  $2\sqrt{x} = 14$ . (c)  $\sqrt{x} < \sqrt{2}$ . (d)  $\sqrt{2x} < 4$ .

**Bài toán 8** ([Chí+23], 5., p. 7). Tính cạnh 1 hình vuông biết diện tích của nó bằng diện tích của hình chữ nhật có chiều rộng 3.5 m & chiều dài 14 m.

**Bài toán 9** ([Thā+23], 1., p. 5). Tính căn bậc 2 số học của 0.01, 0.04, 0.49, 0.64, 0.25, 0.81, 0.09, 0.16, 0,  $-1$ .

*Giải.* Căn bậc 2 số học của: 0.01, 0.04, 0.49, 0.64, 0.25, 0.81, 0.09, 0.16, 0 lần lượt là  $\sqrt{0.01} = 0.1$ ,  $\sqrt{0.04} = 0.2$ ,  $\sqrt{0.49} = 0.7$ ,  $\sqrt{0.64} = 0.8$ ,  $\sqrt{0.25} = 0.5$ ,  $\sqrt{0.81} = 0.9$ ,  $\sqrt{0.09} = 0.3$ ,  $\sqrt{0.16} = 0.4$ ,  $\sqrt{0} = 0$ . Riêng  $-1$  không có căn bậc 2 (số học) vì  $-1 < 0$ .  $\square$

**Lưu ý 1.** Căn bậc 2 số học của số thực không âm  $a \geq 0$  là  $\sqrt{a}$ . Căn bậc 2 của  $a \geq 0$  là  $\pm\sqrt{a}$  (i.e., bao gồm  $\sqrt{a}$  &  $-\sqrt{a}$ ), đặc biệt: căn bậc 2 của 0 là  $\pm\sqrt{0} = 0$ . Mọi số thực âm  $a < 0$  không có căn bậc 2.

**Bài toán 10** ([Thā+23], 2., p. 5). Tìm  $x \in \mathbb{R}$  thỏa: (a)  $x^2 = 5$ . (b)  $x^2 = 6$ . (c)  $x^2 = 2.5$ . (d)  $x^2 = \sqrt{5}$ . (e)  $x^2 = -1$ .

*Giải.* (a)  $x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$ . (b)  $x^2 = 6 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}$ . (c)  $x^2 = 2.5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2.5}$ . (d)  $x^2 = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\sqrt{5}} = \pm\sqrt[4]{5}$ . (e)  $x^2 = -1$  vô nghiệm vì  $x^2 \geq 0 > -1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Lưu ý 2** (Phương trình bậc 2  $x^2 = a$ ). *Giải & biện luận theo tham số a phương trình  $x^2 = a$  với  $a \in \mathbb{R}$  cho trước. Xét 3 trường hợp:* (a) Trường hợp  $a = 0$ :  $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . (b) Trường hợp  $a > 0$ :  $x^2 = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$ . (c) Trường hợp  $a < 0$ : phương trình bậc 2  $x^2 = a$  vô nghiệm vì  $x^2 \geq 0 > a$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

**Bài toán 11** ([Thā+23], 3., p. 5). Số nào có căn bậc 2 là: (a)  $\sqrt{5}$ . (b) 1.5. (c)  $-0.1$ . (d)  $-\sqrt{9}$ .

*Giải.* (a) 5 có 1 căn bậc 2 là  $\sqrt{5}$ . (b)  $1.5^2 = 2.25$  có 1 căn bậc 2 là 1.5. (c)  $(-0.1)^2 = 0.01$  có 1 căn bậc 2 là  $-0.1$ . (d) 9 có 1 căn bậc 2 là  $-\sqrt{9}$ .  $\square$

**Lưu ý 3.** Số có căn bậc 2 là  $a$  là số  $a^2$ . Cụ thể hơn,  $a^2$  có căn bậc 2 là  $\pm a$ , trong đó căn bậc 2 số học của  $a^2$  là  $|a|$ .

**Bài toán 12** ([Thā+23], 4., p. 5). Tìm  $x \in \mathbb{R}$ : (a)  $\sqrt{x} = 3$ . (b)  $\sqrt{x} = \sqrt{5}$ . (c)  $\sqrt{x} = 0$ . (d)  $\sqrt{x} = -2$ .

*Giải.* ĐKXD cho cả 4 ý:  $x \geq 0$ . (a)  $\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 3^2 = 9$  (thỏa ĐKXD: nhận). Vậy  $x = 9$ . (b)  $\sqrt{x} = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = 5$  (thỏa ĐKXD: nhận). Vậy  $x = 5$ . (c)  $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (thỏa ĐKXD: nhận). Vậy  $x = 0$ . (d) Cách 1: Phương trình  $\sqrt{x} = -2$  vô nghiệm vì  $\sqrt{x} \geq 0 > -2$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Cách 2: Căn bậc 2 số học thì không âm nên không tồn tại  $x \in \mathbb{R}$  thỏa mãn  $\sqrt{x} = -2$ .  $\square$

**Lưu ý 4** (Phương trình bậc 2  $\sqrt{x} = a$ ). *Giải & biện luận theo tham số a phương trình  $\sqrt{x} = a$  với  $a \in \mathbb{R}$  cho trước. ĐKXD:  $x \geq 0$ . Xét 3 trường hợp:* (a) Trường hợp  $a = 0$ :  $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (thỏa ĐKXD: nhận). (b) Trường hợp  $a > 0$ :  $\sqrt{x} = a \Leftrightarrow x = a^2 > 0$  (thỏa ĐKXD: nhận). (c) Trường hợp  $a < 0$ : phương trình vô tỷ  $\sqrt{x} = a$  vô nghiệm vì  $\sqrt{x} \geq 0 > a$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

**Bài toán 13** ([Thā+23], 5., p. 6). Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, so sánh: (a) 2 &  $\sqrt{2} + 1$ . (b) 1 &  $\sqrt{3} - 1$ . (c)  $2\sqrt{31}$  & 10. (d)  $-3\sqrt{11}$  &  $-12$ .

Hint. Sử dụng tính chất:  $0 \leq a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ .

*1st giải.* (a)  $1 < 2 \Leftrightarrow \sqrt{1} = 1 < \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 + 1 < \sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow 2 < 1 + \sqrt{2}$ . Vậy  $2 < 1 + \sqrt{2}$ . (b)  $4 > 3 \Leftrightarrow \sqrt{4} = 2 > \sqrt{3} \Leftrightarrow 2 - 1 > \sqrt{3} - 1 \Leftrightarrow 1 > \sqrt{3} - 1$ . Vậy  $1 > \sqrt{3} - 1$ . (c)  $31 > 25 \Leftrightarrow \sqrt{31} > \sqrt{25} = 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{31} > 2 \cdot 5 = 10$ . Vậy  $2\sqrt{31} > 10$ . (d)  $11 < 16 \Leftrightarrow \sqrt{11} < \sqrt{16} = 4 \Leftrightarrow -3\sqrt{11} > -3 \cdot 4 = -12$ . Vậy  $-3\sqrt{11} > -12$ .  $\square$

Có thể bình phương 2 vế của 2 biểu thức cần so sánh như sau (đương nhiên sẽ tốn công hơn nhưng bù lại tự nhiên hơn Cách 1 đã được ‘tĩa gọt’, i.e., giấu các bước suy luận lòng vòng ngoài nháp để trình bày lời giải ‘chỉ 1 dòng biến đổi tương đương’):

*2nd giải.* (a)  $(\sqrt{2}+1)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} + 1 = 3 + 2\sqrt{2} > 3 + 2\sqrt{1} = 3 + 2 = 5 > 4 = 2^2 \Rightarrow \sqrt{2}+1 > 2$ . (b)  $(\sqrt{3}-1)^2 = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1^2 = 4 - 2\sqrt{3} < 4 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 4 - 3 = 1$ , trong đó đã sử dụng  $-2 < -\sqrt{3}$ . Vậy  $1 > \sqrt{3} - 1$ . (c)  $(2\sqrt{31})^2 = 2^2(\sqrt{31})^2 = 4 \cdot 31 = 124 > 100 = 10^2 \Rightarrow 2\sqrt{31} > 10$ . Vậy  $2\sqrt{31} > 10$ . (d)  $(3\sqrt{11})^2 = 3^2(\sqrt{11})^2 = 9 \cdot 11 = 99 < 144 = 12^2 \Rightarrow 3\sqrt{11} < 12 \Leftrightarrow -3\sqrt{11} > -12$ . Vậy  $-3\sqrt{11} > -12$ .  $\square$

**Bài toán 14** ([Thâ+23], 6., p. 6). Đ/S? (a) Căn bậc 2 của 0.36 là 0.6. (b) Căn bậc 2 của 0.36 là 0.06. (c)  $\sqrt{0.36} = 0.6$ . (d) Căn bậc 2 của 0.36 là 0.6 &  $-0.6$ . (e)  $\sqrt{0.36} = \pm 0.6$ .

*Giải.* (a) S: Căn bậc 2 của 0.36 là  $\pm 0.6$  (chứ không phải mỗi 0.6). (b) S: Căn bậc 2 của 0.36 là 0.6 (chứ không phải 0.06). (c) Đ:  $\sqrt{0.36} = 0.6$ . (d) Đ: Căn bậc 2 của 0.36 là 0.6 &  $-0.6$ . (e) S:  $\sqrt{0.36} = 0.6$  vì  $-\sqrt{0.36} = -0.6$  &  $\pm\sqrt{0.36} = \pm 0.6$  mới đúng.  $\square$

**Bài toán 15** ([Thâ+23], 7., p. 6). Trong các số  $\sqrt{(-5)^2}, \sqrt{5^2}, -\sqrt{5^2}, -\sqrt{(-5)^2}$ , số nào là căn bậc 2 số học của 25?

*Giải.* Có  $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$ ,  $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$ ,  $-\sqrt{5^2} = -\sqrt{25} = -5$ ,  $-\sqrt{(-5)^2} = -\sqrt{25} = -5$ , mà căn bậc 2 số học của 25 là 5 nên suy ra  $\sqrt{(\pm 5)^2}$  là căn bậc 2 số học của 25.  $\square$

**Lưu ý 5.** Cả 4 số  $\sqrt{(-5)^2}, \sqrt{5^2}, -\sqrt{5^2}, -\sqrt{(-5)^2}$  đều là căn bậc 2 của  $5^2 = 25$ , trong đó  $\sqrt{(\pm 5)^2} = \sqrt{25} = 5 > 0$  là căn bậc 2 số học của  $5^2 = 25$ .

**Bài toán 16** (Mở rộng [Thâ+23], 7., p. 6). Trong các số  $\sqrt{(-a)^2}, \sqrt{a^2}, -\sqrt{a^2}, -\sqrt{(-a)^2}$ , số nào là căn bậc 2 số học của  $a^2$  với  $a \in \mathbb{R}$  bất kỳ?

*Giải.* Có  $\sqrt{(-a)^2} = \sqrt{a^2} = |a|$ ,  $\sqrt{a^2} = \sqrt{a^2} = |a|$ ,  $-\sqrt{a^2} = -\sqrt{a^2} = -|a|$ ,  $-\sqrt{(-a)^2} = -\sqrt{a^2} = -|a|$ , mà căn bậc 2 số học của  $a^2$  là  $a$  nên suy ra  $\sqrt{(\pm a)^2}$  là căn bậc 2 số học của  $a^2$ .  $\square$

**Lưu ý 6.** Cả 4 số  $\sqrt{(-a)^2}, \sqrt{a^2}, -\sqrt{a^2}, -\sqrt{(-a)^2}$  đều là căn bậc 2 của  $a^2$ , trong đó  $\sqrt{(\pm a)^2} = \sqrt{a^2} = |a| \geq 0$  là căn bậc 2 số học của  $a^2$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$ .

**Bài toán 17** ([Thâ+23], 8., p. 6). Chứng minh:  $\sqrt{1^3 + 2^3} = 1 + 2$ ,  $\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3} = 1 + 2 + 3$ ,  $\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3} = 1 + 2 + 3 + 4$ . Viết tiếp 1 số đẳng thức tương tự.

*Chứng minh.*  $\sqrt{1^3 + 2^3} = \sqrt{1 + 8} = \sqrt{9} = 3 = 1 + 2$ ,  $\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3} = \sqrt{1 + 8 + 27} = \sqrt{36} = 6 = 1 + 2 + 3$ ,  $\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3} = \sqrt{1 + 8 + 27 + 64} = \sqrt{100} = 10 = 1 + 2 + 3 + 4$ . Ta có các đẳng thức:

$$\begin{aligned}\sqrt{1^3} &= 1, \\ \sqrt{1^3 + 2^3} &= 1 + 2, \\ \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3} &= 1 + 2 + 3, \\ \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3} &= 1 + 2 + 3 + 4, \\ \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5, \\ \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6, \\ \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7, \\ \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8, \\ \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9, \\ \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 + 10^3} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10.\end{aligned}$$

Dự đoán đẳng thức tổng quát:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n i^3} = \sqrt{1^3 + 2^3 + \dots + n^3} = \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Đẳng thức này đúng & có thể được chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.  $\square$

**Lưu ý 7.** Công thức tính tổng lập phương của  $n$  số nguyên dương đầu tiên:

$$\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\sum_{i=1}^n i\right)^2 = (1 + 2 + \dots + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

Ta có thể kiểm nghiệm công thức trên bằng máy tính:

**Bài toán 18.** Viết chương trình Pascal, Python, C/C++ tính: (a) tổng  $n$  số nguyên dương đầu tiên. (b) tổng bình phương của  $n$  số nguyên dương đầu tiên. (c) tổng lập phương của  $n$  số nguyên dương đầu tiên. (d) Từ câu (a) & (c), kiểm tra đẳng thức (1). (e) tổng lũy thừa bậc  $m \in \mathbb{R}$  của  $n$  số nguyên dương đầu tiên<sup>5</sup>.

**Bài toán 19** ([Thâ+23], 9., p. 6). Cho  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a, b \geq 0$ . Chứng minh: (a)  $a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$ . (b)  $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Rightarrow a < b$ .

<sup>5</sup>Lũy thừa bậc thực của 1 số thực, i.e.,  $a^b$  với  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a^2 + b^2 \neq 0$ , sẽ được học ở chương trình Toán Giải tích 11.

*Chứng minh.* (a) Vì  $a, b \geq 0$  &  $a < b$  nên  $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a} + \sqrt{a} = 2\sqrt{a} \geq 0$  (\*). Có  $a < b \Rightarrow 0 > a - b = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$  (\*\*). Từ (\*) & (\*\*), suy ra  $\sqrt{a} - \sqrt{b} < 0$  hay  $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ . (b)  $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} < 0$ , kết hợp điều này & (\*), suy ra  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) < 0 \Leftrightarrow a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$ .  $\square$

**Lưu ý 8.** Từ chứng minh trên, ta thấy  $a - b$  &  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$  luôn cùng dấu:

$$(a - b)(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \begin{cases} = 0, & \text{if } a = b, \\ > 0, & \text{if } a \neq b, \end{cases}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0.$$

Chặt chẽ & ngắn gọn hơn về công thức toán học, đẳng thức trên tương đương với đẳng thức:

$$\text{sign}(a - b) = \text{sign}(\sqrt{a} - \sqrt{b}), \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0,$$

trong đó  $\text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \{0, \pm 1\}$ ,  $x \mapsto \text{sign } x$  là hàm dấu xác định trên tập số thực  $\mathbb{R}$  bởi công thức:

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1, & \text{if } x > 0, \\ 0, & \text{if } x = 0, \\ -1, & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

**Bài toán 20** ([Thă+23], 10., p. 6). Cho  $m \in \mathbb{R}$ ,  $m > 0$ . Chứng minh: (a)  $m > 1 \Rightarrow \sqrt{m} > 1$ . (b)  $m < 1 \Rightarrow \sqrt{m} < 1$ .

*Chứng minh.* Áp dụng Bài toán 19 (a) lần lượt với  $(a, b) = (1, m)$  &  $(a, b) = (m, 1)$ , ta được: (a)  $m > 1 \Rightarrow \sqrt{m} > \sqrt{1} = 1$ . (b)  $m < 1 \Rightarrow \sqrt{m} < \sqrt{1} = 1$ .  $\square$

**Bài toán 21** ([Thă+23], 11., p. 6). Cho  $m \in \mathbb{R}$ ,  $m > 0$ . Chứng minh: (a)  $m > 1 \Rightarrow m > \sqrt{m} > 1$ . (b)  $m < 1 \Rightarrow m < \sqrt{m} < 1$ .

*Chứng minh.* (a) Theo Bài toán 20 (a):  $m > 1 \Rightarrow \sqrt{m} > 1$ . Nhân cả 2 vế của bất đẳng thức cuối với  $\sqrt{m} > 0$ , ta được  $m > \sqrt{m}$ . (b) Theo Bài toán 20 (b):  $m < 1 \Rightarrow \sqrt{m} < 1$ . Nhân cả 2 vế của bất đẳng thức cuối với  $\sqrt{m} > 0$ , ta được  $\sqrt{m} \cdot \sqrt{m} = m < \sqrt{m}$ .  $\square$

**Bài toán 22** (Program to print out 1st  $n$  square roots). Với  $n \in \mathbb{N}^*$  được nhập từ bàn phím, viết chương trình Pascal, C/C++, Python xuất ra: (a) Căn bậc 2 của  $n$ . (b) Căn bậc 2 của  $n$  số nguyên dương đầu tiên.

Pascal:

```
program square_root;
var num, sqrt_num: real;
begin
  write('Enter a number num = ');
  readln(num);
  sqrt_num := Sqrt(num);
  writeln('sqrt of ', num, ' = ', sqrt_num)
end.
```

**Bài toán 23** (Số chính phương). Viết chương trình Pascal, C/C++, Python để kiểm tra 1 số  $n \in \mathbb{N}^*$  được nhập từ bàn phím có phải là số chính phương hay không.

**Bài toán 24** ([Tuy23], Thí dụ 1, p. 5). Cho số thực  $x \geq 0$ . So sánh  $\sqrt{x}$  với  $x$ .

*Giải.* Vì  $x \geq 0$  nên  $\sqrt{x}$  có nghĩa/xác định &  $\sqrt{x} \geq 0$ . Xét các trường hợp: (a)  $\sqrt{x} = x \Leftrightarrow x = x^2 \Leftrightarrow x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  hoặc  $x = 1$ . (b)  $\sqrt{x} < x \Leftrightarrow x < x^2 \Leftrightarrow x - x^2 < 0 \Leftrightarrow x(1 - x) < 0$ , mà  $x \geq 0$  nên suy ra  $1 - x < 0$ , hay  $x > 1$ . (c)  $\sqrt{x} > x \Leftrightarrow x > x^2 \Leftrightarrow x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x(1 - x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ . Vậy:  $x \in \{0, 1\} \Leftrightarrow \sqrt{x} = x$ ,  $x > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} < x$ , &  $0 < x < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} > x$ .  $\square$

**Nhận xét 1.** Về mặt phương pháp để so sánh 2 số không âm ta có thể so sánh các bình phương của 2 số đó:  $a \geq b > 0 \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$ . Về kết quả, khi so sánh  $\sqrt{x}$  với  $x$  ta thấy có thể xảy ra cả 3 trường hợp: lớn hơn, nhỏ hơn, hoặc bằng nhau tùy theo  $x$  ở trong khoảng giá trị nào, cụ thể:  $x \in \{0, 1\} \Leftrightarrow \sqrt{x} = x$ ,  $x > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} < x$ , &  $0 < x < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} > x$ .

**Bài toán 25** ([Bin23], Ví dụ 2, p. 5). Chứng minh tổng & hiệu của 1 số hữu tỷ với 1 số vô tỷ là 1 số vô tỷ.

*Giải.* Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tồn tại 2 số  $a \in \mathbb{Q}$  &  $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  sao cho  $c = a + b \in \mathbb{Q}$ . Ta có  $b = c - a$ , mà hiệu của 2 số hữu tỷ  $c, a$  là 1 số hữu tỷ nên  $b \in \mathbb{Q}$ , mâu thuẫn với giả thiết, nên  $c$  phải là số vô tỷ. Chứng minh tương tự cho hiệu.  $\square$

**Bài toán 26** ([Bin23], Ví dụ 3, p. 5). Xét xem các số  $a, b$  có thể là số vô tỷ hay không, nếu: (a)  $a + b$  &  $a - b$  là các số hữu tỷ. (b)  $a - b$  &  $ab$  là các số hữu tỷ.

**Bài toán 27** ([Bin23], Ví dụ 4, p. 5). Chứng minh: Nếu số tự nhiên  $a$  không là số chính phương thì  $\sqrt{a}$  là số vô tỷ.

**Bài toán 28** ([Bin23], 2., p. 6). Chứng minh các số sau là số vô tỷ: (a)  $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ . (b)  $m + \frac{\sqrt{3}}{n}$  với  $m, n \in \mathbb{Q}$ ,  $n \neq 0$ .

**Bài toán 29** ([Bìn23], 3., p. 6). Xét xem các số  $a, b$  có thể là số vô tỷ hay không nếu: (a)  $ab$  &  $\frac{a}{b}$  là các số hữu tỷ. (b)  $a + b$  &  $\frac{a}{b}$  là các số hữu tỷ ( $a + b \neq 0$ ). (c)  $a + b, a^2, \& b^2$  là các số hữu tỷ ( $a + b \neq 0$ ).

**Bài toán 30** ([Bìn23], 4., p. 6). So sánh 2 số: (a)  $2\sqrt{3}$  &  $3\sqrt{2}$ . (b)  $6\sqrt{5}$  &  $5\sqrt{6}$ . (c)  $\sqrt{24} + \sqrt{45}$  & 12. (d)  $\sqrt{37} - \sqrt{15}$  & 2.

**Bài toán 31** ([Bìn23], 5., p. 6). (a) Cho 1 ví dụ để chứng tỏ khẳng định  $\sqrt{a} \leq a$  với mọi số  $a$  không âm là sai. (b) Cho  $a > 0$ . Với giá trị nào của  $a$  thì  $\sqrt{a} > a$ ?

**Bài toán 32** ([Bìn23], 6\*, pp. 6-7). (a) Chỉ ra 1 số thực  $x$  mà  $x - \frac{1}{x}$  là số nguyên ( $x \neq \pm 1$ ). (b) Chứng minh nếu  $x - \frac{1}{x}$  là số nguyên &  $x \neq \pm 1$  thì  $x$  &  $x + \frac{1}{x}$  là số vô tỷ. Khi đó  $(x + \frac{1}{x})^{2n}$  &  $(x + \frac{1}{x})^{2n+1}$  là số hữu tỷ hay số vô tỷ?

## 2 Căn Thức Bậc 2 & Hằng Đẳng Thức $\sqrt{A^2} = |A|$

**Bài toán 33** ([Chí+23], ?1, p. 8). Hình chữ nhật  $ABCD$  có đường chéo dài 5 cm & cạnh  $BC = x$  cm. tính  $AB$ .

**Bài toán 34** ([Chí+23], ?2, p. 8). Với giá trị nào của  $x \in \mathbb{R}$  thì  $\sqrt{5-2x}$  xác định?

**Bài toán 35** ([Chí+23], ĐL, p. 9). Chứng minh:  $\sqrt{a^2} = |a|, \forall a \in \mathbb{R}$ .

**Bài toán 36** ([Chí+23], Ví dụ 2, p. 9). Tính: (a)  $\sqrt{12^2}$ . (b)  $\sqrt{(-7)^2}$ .

**Bài toán 37** ([Chí+23], Ví dụ 3, p. 9). Rút gọn: (a)  $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$ . (b)  $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$ .

**Bài toán 38** ([Chí+23], Ví dụ 4, p. 10). Rút gọn: (a)  $\sqrt{(x-2)^2}$  với  $x \geq 2$ . (b)  $\sqrt{a^6}$  với  $a < 0$ .

**Bài toán 39** ([Chí+23], 6., p. 10). Với giá trị nào của  $a \in \mathbb{R}$  thì mỗi căn thức sau có nghĩa? (a)  $\sqrt{\frac{a}{3}}$ . (b)  $\sqrt{-5a}$ . (c)  $\sqrt{4-a}$ . (d)  $\sqrt{3a+7}$ .

**Bài toán 40** ([Chí+23], 7., p. 10). Tính: (a)  $\sqrt{(0.1)^2}$ . (b)  $\sqrt{(-0.3)^2}$ . (c)  $-\sqrt{(-1.3)^2}$ . (d)  $-0.4\sqrt{(-0.4)^2}$ .

**Bài toán 41** ([Chí+23], 8., p. 10). Rút gọn các biểu thức: (a)  $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$ . (b)  $\sqrt{(3-\sqrt{11})^2}$ . (c)  $2\sqrt{a^2}$  với  $a \geq 0$  & với  $a \in \mathbb{R}$ . (d)  $3\sqrt{(a-2)^2}$  với  $a < 2$  & với  $a \in \mathbb{R}$ .

**Bài toán 42** ([Chí+23], 9., p. 11). Tìm  $x$  thỏa: (a)  $\sqrt{x^2} = 7$ . (b)  $\sqrt{x^2} = |-8|$ . (c)  $\sqrt{4x^2} = 6$ . (d)  $\sqrt{9x^2} = |-12|$ .

**Bài toán 43** ([Chí+23], 10., p. 11). Chứng minh: (a)  $(\sqrt{3}-1)^2 = 4-2\sqrt{3}$ . (b)  $\sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{3} = -1$ .

**Bài toán 44** ([Chí+23], 11., p. 11). Tính: (a)  $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25} + \sqrt{196} : \sqrt{49}$ . (b)  $36 : \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 18} - \sqrt{169}$ . (c)  $\sqrt{\sqrt{81}}$ . (d)  $\sqrt{3^2+4^2}$ .

**Bài toán 45** ([Chí+23], 12., p. 11). Tìm  $x$  để mỗi căn thức sau có nghĩa: (a)  $\sqrt{2x+7}$ . (b)  $\sqrt{-3x+4}$ . (c)  $\sqrt{\frac{1}{-1+x}}$ . (d)  $\sqrt{1+x^2}$ .

**Bài toán 46** ([Chí+23], 13., p. 11). Rút gọn các biểu thức: (a)  $2\sqrt{a^2} - 5a$  với  $a < 0$  &  $a \in \mathbb{R}$ . (b)  $\sqrt{25a^2} + 3a$  với  $a \geq 0$  &  $a \in \mathbb{R}$ . (c)  $\sqrt{9a^4} + 3a^2$ . (d)  $5\sqrt{4a^6} - 3a^3$  với  $a < 0$  &  $a \in \mathbb{R}$ .

**Bài toán 47** ([Chí+23], 14., p. 11). Phân tích thành nhân tử: (a)  $x^2 - 3$ . (b)  $x^2 - 6$ . (c)  $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3$ . (d)  $x^2 - 2\sqrt{5}x + 5$ .

Hint.  $a = (\sqrt{a})^2, \forall a \in \mathbb{R}, a \geq 0$ .

**Bài toán 48** ([Chí+23], 15., p. 11). Giải phương trình: (a)  $x^2 - 5 = 0$ . (b)  $x^2 - 2\sqrt{11}x + 11 = 0$ .

**Bài toán 49** ([Chí+23], 16., p. 12). Tìm chỗ sai trong phép chứng minh “Con muỗi nặng bằng con voi” sau: Giả sử con muỗi nặng  $m$  g, còn con voi nặng  $V$  g. Ta có:  $m^2 + V^2 = V^2 + m^2$ . Cộng cả 2 vế với  $-2mV$ , ta có:  $m^2 - 2mV + V^2 = V^2 - 2mV + m^2$ , hay  $(m-V)^2 = (V-m)^2$ . Lấy căn bậc 2 mỗi vế của đẳng thức trên, ta được:  $\sqrt{(m-V)^2} = \sqrt{(V-m)^2}$ . Do đó  $m-V = V-m$ . Từ đó ta có  $2m = 2V$ , suy ra  $m = V$ . Vậy con muỗi nặng bằng con voi!

**Bài toán 50** ([Thâ+23], 12., p. 7). Tìm  $x \in \mathbb{R}$  để căn thức sau có nghĩa: (a)  $\sqrt{-2x+3}$ . (b)  $\sqrt{\frac{2}{x^2}}$ . (c)  $\sqrt{\frac{4}{x+3}}$ . (d)  $\sqrt{\frac{-5}{x^2+6}}$ .

**Bài toán 51** ([Thâ+23], 13., p. 7). Rút gọn rồi tính: (a)  $5\sqrt{(-2)^4}$ . (b)  $-4\sqrt{(-3)^6}$ . (c)  $\sqrt{\sqrt{(-5)^8}}$ . (d)  $2\sqrt{(-5)^6} + 3\sqrt{(-2)^8}$ .

**Bài toán 52** ([Thâ+23], 14., p. 7). Rút gọn các biểu thức: (a)  $\sqrt{(4+\sqrt{2})^2}$ . (b)  $\sqrt{(3-\sqrt{3})^2}$ . (c)  $\sqrt{(4-\sqrt{17})^2}$ . (d)  $2\sqrt{3} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$ .

**Bài toán 53** ([Thâ+23], 15., p. 7). Chứng minh: (a)  $9+4\sqrt{5} = (\sqrt{5}+2)^2$ . (b)  $\sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = -2$ . (c)  $(4-\sqrt{7})^2 = 23-8\sqrt{7}$ . (d)  $\sqrt{23+8\sqrt{7}} - \sqrt{7} = 4$ .

**Bài toán 54** ([Thh+23], 16., p. 7). Biểu thức sau đây xác định với giá trị nào của  $x$ ? (a)  $\sqrt{(x-1)(x-3)}$ . (b)  $\sqrt{x^2-4}$ . (c)  $\sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$ . (d)  $\sqrt{\frac{2+x}{5-x}}$ .

**Bài toán 55** ([Thh+23], 17., p. 8). Tìm  $x \in \mathbb{R}$  thỏa: (a)  $\sqrt{9x^2} = 2x + 1$ . (b)  $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = 3x - 1$ . (c)  $\sqrt{1 - 4x + 4x^2} = 5$ . (d)  $\sqrt{x^4} = 7$ .

**Bài toán 56** ([Thh+23], 18., p. 8). Phân tích nhân tử: (a)  $x^2 - 7$ . (b)  $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$ . (c)  $x^2 + 2\sqrt{13}x + 13$ .

**Bài toán 57** ([Thh+23], 19., p. 8). Tìm DKXD rồi rút gọn các phân thức: (a)  $\frac{x^2-5}{x+\sqrt{5}}$ . (b)  $\frac{x^2+2\sqrt{2}x+2}{x^2-2}$ .

**Bài toán 58** ([Thh+23], 20., p. 8). Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, so sánh: (a)  $6 + 2\sqrt{2}$  & 9. (b)  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  & 3. (c)  $9 + 4\sqrt{5}$  & 16. (d)  $\sqrt{11} - \sqrt{3}$  & 2.

**Bài toán 59** ([Thh+23], 21., p. 8). Rút gọn biểu thức: (a)  $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{3}$ . (b)  $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - 3 + \sqrt{2}$ . (c)  $\sqrt{9x^2} - 2x$  với  $x < 0$  &  $x \in \mathbb{R}$ . (d)  $x - 4 + \sqrt{16 - 8x + x^2}$  với  $x > 4$  &  $x \in \mathbb{R}$ .

**Bài toán 60** ([Thh+23], 22., p. 8). Chứng minh:  $\sqrt{(n+1)^2} + \sqrt{n^2} = (n+1)^2 - n^2, \forall n \in \mathbb{N}$ . Viết đẳng thức trên với  $n = 1, 2, \dots, 10$ .

**Bài toán 61** ([Tuy23], Thí dụ 2, p. 5). Cho  $a, b, c \in \mathbb{Q}, abc \neq 0$  &  $a = b + c$ . Chứng minh  $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \in \mathbb{Q}$ .

*Giải.*  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} - \frac{1}{bc}\right) = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + \frac{2(c+b-a)}{abc} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2$  vì  $a = b + c$ . Suy ra  $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2} = \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right|$ . Có  $a, b, c \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \in \mathbb{Q} \Rightarrow A = \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right| \in \mathbb{Q}$ .  $\square$

**Bài toán 62.** Cho  $a, b, c \in \mathbb{Q}, abc \neq 0$  &  $a + b + c = 0$ . Chứng minh  $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \in \mathbb{Q}$ .

*1st giải.*  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 - \frac{2(a+b+c)}{abc} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2$  vì  $a+b+c=0$ . Suy ra  $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2} = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right|$ . Có  $a, b, c \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \in \mathbb{Q} \Rightarrow A = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right| \in \mathbb{Q}$ .  $\square$

*2nd giải.*  $a + b + c = 0 \Leftrightarrow -a = b + c$ , nên ta có thể áp dụng bài toán 61 cho bộ 3 số  $(-a, b, c) \in \mathbb{Q}^3, -abc \neq 0$  để thu được  $\sqrt{\frac{1}{(-a)^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \in \mathbb{Q}$ , i.e.,  $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \in \mathbb{Q}$ .  $\square$

**Nhận xét 2** (Proof of  $\in \mathbb{Q}$ ). Để chứng minh 1 số là số hữu tỷ ta biểu diễn số đó thành 1 biểu thức gồm các phép tính cộng, trừ, nhân, chia (cho 1 số khác 0) của các số hữu tỷ.

**Bài toán 63.** (a) Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}, abc \neq 0$ , khi nào thì  $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ ? (b) Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{R}, abcd \neq 0$ , khi nào thì  $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}$ ? (c) Cho  $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}, abcde \neq 0$ , khi nào thì  $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} + \frac{1}{e^2}$ ? (d) Cho  $n \in \mathbb{N}^*, a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, n, \prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$ , khi nào thì xảy ra đẳng thức sau?

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2}, \text{ i.e., } \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)^2 = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}.$$

**Bài toán 64.** Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{Q}, abcd \neq 0$  &  $ab + ac + ad + bc + bd + cd = 0$ . Chứng minh  $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}} \in \mathbb{Q}$ .

**Bài toán 65.** Cho  $a, b, c, d, e \in \mathbb{Q}, abcde \neq 0$  &  $abc + abd + abe + acd + ace + ade + bcd + bce + bde + cde = 0$ . Chứng minh  $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} + \frac{1}{e^2}} \in \mathbb{Q}$ .

**Bài toán 66.** Cho  $n \in \mathbb{N}^*, a_i \in \mathbb{Q}, \forall i = 1, 2, \dots, n, \prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$ , &  $\sum_{\text{cyc}} a_1 a_2 \dots a_{n-2} = 0$ . Chứng minh:

$$A = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2}} = \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}} \in \mathbb{Q}.$$



**Lưu ý 9** (Cyclic sum). Ký hiệu  $\sum_{\text{cyc}}$  được gọi là tổng cyclic. Xem định nghĩa & ví dụ tại, e.g., [AoPS/cyclic sum](#)<sup>6</sup>.

**Bài toán 67** ([Tuy23], 1., p. 6). Tính  $A = \sqrt{\frac{8^{10} - 4^{10}}{4^{11} - 8^4}}$ .

Phân tích. 4, 8 đều là lũy thừa của 2 nên sẽ tiện hơn nếu đưa tất cả các lũy thừa trong  $A$  về lũy thừa với cơ số 2.

*Giải.*  $A = \sqrt{\frac{(2^3)^{10} - (2^2)^{10}}{(2^2)^{11} - (2^3)^4}} = \sqrt{\frac{2^{30} - 2^{20}}{2^{22} - 2^{12}}} = \sqrt{\frac{2^{20}(2^{10} - 1)}{2^{12}(2^{10} - 1)}} = \sqrt{2^8} = 2^4 = 16.$  □

**Bài toán 68** ([Tuy23], 2., p. 6). Cho  $A = \underbrace{99 \dots 9}_{10's} \underbrace{400 \dots 0}_{10's} 9$ . Tính  $\sqrt{A}$ .

*1st giải.*  $A = \underbrace{99 \dots 9}_{10's} 4 \cdot \underbrace{100 \dots 0}_{11's} + 9 = (\underbrace{99 \dots 9}_{10's} 7 - 3)(\underbrace{99 \dots 9}_{10's} 7 + 3) + 9 = \underbrace{99 \dots 9}_{10's} 7^2 - 3^2 + 9 = \underbrace{99 \dots 9}_{10's} 7^2 \Rightarrow \sqrt{A} = \underbrace{99 \dots 9}_{10's} 7.$  □

*2nd giải.*  $A = (10^{10} - 1) \cdot 10^{12} + 4 \cdot 10^{11} + 9 = 10^{22} - 10^{12} + 4 \cdot 10^{11} + 9 = 10^{22} - 10 \cdot 10^{11} + 4 \cdot 10^{11} + 9 = 10^{22} - 6 \cdot 10^{11} + 9 = (10^{11} - 3)^2 \Rightarrow \sqrt{A} = 10^{11} - 3 = \underbrace{99 \dots 9}_{10's} 7.$  □

**Bài toán 69** ([Tuy23], 3., p. 6). Không dùng máy tính hoặc bảng số, so sánh: (a)  $\sqrt{8} + \sqrt{15}$  &  $\sqrt{65} - 1$ . (b)  $\frac{13 - 2\sqrt{3}}{6}$  &  $\sqrt{2}$ .

Hint. Tìm các số chính phương gần với các số dưới dấu căn để đơn giản dấu căn 1 cách hợp lý.

*Giải.* (a)  $\sqrt{8} + \sqrt{15} < \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$ , &  $\sqrt{65} - 1 > \sqrt{64} - 1 = 8 - 1 = 7$ . Suy ra  $\sqrt{8} + \sqrt{15} < \sqrt{65} - 1$ . (b)  $\frac{13 - 2\sqrt{3}}{6} > \frac{13 - 2\sqrt{4}}{6} = \frac{3}{2} = 1.5$ . Mặt khác,  $(1.5)^2 = 2.25 > 2 \Leftrightarrow 1.5 > \sqrt{2}$ , nên  $\frac{13 - 2\sqrt{3}}{6} > \sqrt{2}$ . □

**Bài toán 70** ([Tuy23], 4., p. 6). Tìm điều kiện xác định (DKXD) & tập xác định (TXD) của các biểu thức: (a)  $\sqrt{2 - x^2}$ . (b)  $\frac{x}{\sqrt{5x^2 - 3}}$ . (c)  $\sqrt{-4x^2 + 4x - 1}$ . (d)  $\frac{1}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$ .

*Giải.* (a)  $\sqrt{2 - x^2}$  xác định  $\Leftrightarrow 2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 2 \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ . DKXD:  $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ . TXD:  $D = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ . (b)  $\frac{x}{\sqrt{5x^2 - 3}}$  xác định  $\Leftrightarrow 5x^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow x^2 > \frac{3}{5} \Leftrightarrow |x| > \sqrt{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow x > \sqrt{\frac{3}{5}}$  hoặc  $x < -\sqrt{\frac{3}{5}}$ . DKXD:  $x > \sqrt{\frac{3}{5}}$  hoặc  $x < -\sqrt{\frac{3}{5}}$ . TXD:  $D = (-\infty, -\sqrt{\frac{3}{5}}) \cup (\sqrt{\frac{3}{5}}, \infty)$ . (c)  $\sqrt{-4x^2 + 4x - 1}$  xác định  $\Leftrightarrow -4x^2 + 4x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow -(2x - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ . DKXD:  $x = \frac{1}{2}$ . TXD:  $D = \{\frac{1}{2}\}$ . (d)  $\frac{1}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$  xác định  $\Leftrightarrow x^2 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2) > 0 \Leftrightarrow x > 1$  hoặc  $x < -2$ . DKXD:  $x > 1$  hoặc  $x < -2$ . TXD:  $D = (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$ . □

**Bài toán 71** ([Tuy23], 5., p. 6). Cho  $a, b, c \in \mathbb{Q}$  khác nhau đôi một. Chứng minh  $A = \sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}} \in \mathbb{Q}$ .

*1st giải.*  $\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)}\right) = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)^2 - \frac{2(c-a+a-b+b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)^2 \Rightarrow A = \left|\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right|$ . Vì  $a, b, c \in \mathbb{Q}$  khác nhau đôi một nghĩa là  $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ , suy ra  $\frac{1}{a-b}, \frac{1}{b-c}, \frac{1}{c-a} \in \mathbb{Q} \Rightarrow A = \left|\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right| \in \mathbb{Q}$ . □

*2nd giải.* Vì  $(a-b) + (b-c) + (c-a) = 0$ , & vì  $a, b, c \in \mathbb{Q}$  khác nhau đôi một nghĩa là  $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$  nên có thể áp dụng Bài toán 62 cho bộ 3 số  $(a-b, b-c, c-a)$  để thu được  $A = \sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}} \in \mathbb{Q}$ . □

**Bài toán 72** ([Tuy23], 6., p. 6). Cho  $a, b, c \in \mathbb{Q}$  thỏa mãn  $ab + bc + ca = 1$ . Chứng minh  $A = \sqrt{(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)} \in \mathbb{Q}$ .

*Giải.*  $a^2 + 1 = a^2 + ab + bc + ca = (a+b)(a+c)$ ,  $b^2 + 1 = b^2 + ab + bc + ca = (b+c)(b+a)$ ,  $c^2 + 1 = c^2 + ab + bc + ca = (c+a)(c+b)$ , nên  $A = \sqrt{(a+b)(a+c)(b+c)(b+a)(c+a)(c+b)} = \sqrt{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2} = |(a+b)(b+c)(c+a)|$ . Có:  $a, b, c \in \mathbb{Q} \Rightarrow A = |(a+b)(b+c)(c+a)| \in \mathbb{Q}$ . □

**Bài toán 73** ([Tuy23], 7., p. 6-7). (a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $A = \sqrt{-x^2 + x + \frac{3}{4}}$ . (b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $B = \sqrt{4x^4 - 4x^2(x+1) + (x+1)^2 + 9}$ . (c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $C = \sqrt{25x^2 - 20x + 4} + \sqrt{25x^2}$ .

**Bài toán 74** ([Tuy23], 8., p. 7). Cho  $x < 0$ , rút gọn biểu thức  $A = |2x - \sqrt{(5x-1)^2}|$ .

**Bài toán 75** ([Tuy23], 9., p. 7). Cho biểu thức  $A = 4x - \sqrt{9x^2 - 12x + 4}$ . (a) Rút gọn  $A$ . (b) Tính giá trị của  $A$  với  $x = \frac{2}{7}$ .

<sup>6</sup>URL: [https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Cyclic\\_sum](https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Cyclic_sum).

**Bài toán 76** ([Tuy23], 10., p. 7). Cho biểu thức  $A = 5x + \sqrt{x^2 + 6x + 9}$ . (a) Rút gọn  $A$ . (b) Tìm  $x$  để  $B = -9$ .

**Bài toán 77** ([Tuy23], 11., p. 7). Tìm  $x \in \mathbb{R}$  biết  $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} \leq 5 - x$ .

**Bài toán 78** ([Tuy23], 12., p. 7). Giải phương trình: (a)  $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{x + 1}$ . (b)  $\sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 0$ . (c)  $\sqrt{x^2 - 4} - x^2 + 4 = 0$ .

**Bài toán 79** ([Tuy23], 13., p. 7). Giải phương trình: (a)  $\sqrt{x^2 - 4x + 5} + \sqrt{x^2 - 4x + 8} + \sqrt{x^2 - 4x + 9} = 3 + \sqrt{5}$ . (b)  $\sqrt{2 - x^2 + 2x} + \sqrt{-x^2 - 6x - 8} = 1 + \sqrt{3}$ . (c)  $\sqrt{9x^2 - 6x + 2} + \sqrt{45x^2 - 30x + 9} = \sqrt{6x - 9x^2 + 8}$ .

**Bài toán 80** ([Bin23], Ví dụ 5, p. 7). Cho biểu thức  $A = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4x + 4}}$ . (a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức  $A$ . (b) Rút gọn biểu thức  $A$ .

**Bài toán 81** ([Bin23], Ví dụ 6, p. 8). Tìm điều kiện xác định của các biểu thức: (a)  $A = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}$ . (b)  $B = \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2x + 1}}}$ .

**Bài toán 82** ([Bin23], Ví dụ 7, p. 8). Tìm các giá trị của  $x$  sao cho  $\sqrt{x + 1} < x + 3$ .

**Bài toán 83** ([Bin23], 7., p. 9). Tìm điều kiện xác định của các biểu thức: (a)  $3 - \sqrt{1 - 16x^2}$ . (b)  $\frac{1}{1 - \sqrt{x^2 - 3}}$ . (c)  $\sqrt{8x - x^2 - 15}$ .

(d)  $\frac{2}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$ . (e)  $A = \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}}$ . (f)  $B = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{\sqrt{2x + 1}} + \sqrt{x^2 - 8x + 14}$ .

**Bài toán 84** ([Bin23], 8., p. 9). Cho biểu thức  $A = \sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{x^2 + 6x + 9}$ . (a) Rút gọn biểu thức  $A$ . (b) Tìm các giá trị của  $x$  để  $A = 1$ .

**Bài toán 85** ([Bin23], 9., p. 9). Tìm các giá trị của  $x$  sao cho: (a)  $\sqrt{x^2 - 3} \leq x^2 - 3$ . (b)  $\sqrt{x^2 - 6x + 9} > x - 6$ .

**Bài toán 86** ([Bin23], 10., p. 9). Cho  $a + b + c = 0$  &  $abc \neq 0$ . Chứng minh hằng đẳng thức:  $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right|$ .

### 3 Liên Hệ Giữa Phép Nhân, Phép Chia & Phép Khai Phương

**Bài toán 87** ([Tuy23], Thí dụ 3, p. 9). Rút gọn biểu thức  $A = \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}}$ .

**Bài toán 88** ([Tuy23], Thí dụ 4, p. 10). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $A = \sqrt{x - 5} + \sqrt{13 - x}$ .

**Bài toán 89** ([Tuy23], 14., p. 11). Rút gọn biểu thức  $A = \frac{\sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{3}} - \sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{7} - 2}}$ .

**Bài toán 90** ([Tuy23], 15., p. 11). Cho 2 số có tổng bằng  $\sqrt{19}$  & có hiệu bằng  $\sqrt{7}$ . Tính tích của 2 số đó.

**Bài toán 91** ([Tuy23], 16., p. 11). Tính  $\sqrt{A}$  biết: (a)  $A = 13 - 2\sqrt{42}$ . (b)  $A = 46 + 6\sqrt{5}$ . (c)  $A = 12 - 3\sqrt{15}$ .

**Bài toán 92** ([Tuy23], 17., p. 12). Rút gọn biểu thức: (a)  $A = \sqrt{6 + 2\sqrt{2}\sqrt{3 - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}}$ . (b)  $B = \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$ . (c)  $C = \sqrt{3 - \sqrt{5}}(\sqrt{10} - \sqrt{2})(3 + \sqrt{5})$ .

**Bài toán 93** ([Tuy23], 18., p. 12). Rút gọn biểu thức  $A = \sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}}$ .

**Bài toán 94** ([Tuy23], 19., p. 12). Cho  $a > 0$ , so sánh  $\sqrt{a + 1} + \sqrt{a + 3}$  với  $2\sqrt{a + 2}$ .

**Bài toán 95** ([Tuy23], 20., p. 12). Cho  $a, b, x, y > 0$ . Chứng minh  $\sqrt{ax} + \sqrt{by} \leq \sqrt{(a + b)(x + y)}$ .

**Bài toán 96** ([Tuy23], 21., p. 12). (a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $A = \sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 8}$ . (b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $B = \sqrt{x - 1} + \sqrt{5 - x}$ .

**Bài toán 97** ([Tuy23], 22., p. 12). Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} \left[ \sqrt{(1 + x)^3} - \sqrt{(1 - x)^3} \right]}{2 + \sqrt{1 - x^2}}.$$

**Bài toán 98** ([Tuy23], 23., p. 12). Tìm  $x, y$  biết  $x + y + 12 = 4\sqrt{x} + 6\sqrt{y - 1}$ .

**Bài toán 99** ([Tuy23], 24., p. 12). Tìm  $x, y, z$  biết  $\sqrt{x - a} + \sqrt{y - b} + \sqrt{z - c} = \frac{1}{2}(x + y + z)$ , trong đó  $a + b + c = 3$ .

**Bài toán 100** ([Tuy23], 25., p. 12). Giải phương trình  $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 + 6\sqrt{x - 1}} = 5$ .

**Bài toán 101** ([Tuy23], 26., p. 12). Giải phương trình  $\sqrt{x^2 - 5x + 6} + \sqrt{x + 1} = \sqrt{x - 2} + \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ .



**Bài toán 102** ([Tuy23], 27., p. 12). Chứng minh bất đẳng thức  $\sqrt{n+a} + \sqrt{n-a} < 2\sqrt{n}$  vpos  $0 < |a| \leq n$ . Áp dụng (không dùng máy tính hoặc bảng số): Chứng minh:  $\sqrt{101} - \sqrt{99} > 0.1$ .

**Bài toán 103** ([Tuy23], 28., p. 13). Chứng minh:  $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Áp dụng: Cho  $S = \sum_{i=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}}$ . Chứng minh  $18 < S < 19$ .

**Bài toán 104** ([Tuy23], 29., p. 13). Chứng minh:  $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Áp dụng: Chứng minh:  $S = \sum_{i=1}^{2500} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2500}} < 100$ .

**Bài toán 105** ([Tuy23], 30., p. 13). Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh  $x + y + z \geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$ .

**Bài toán 106** ([Tuy23], 31., p. 13). Cho  $A = \sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}$ . Chứng minh  $A \leq 4$ .

**Bài toán 107** ([Tuy23], 32., p. 13). Cho  $B = \frac{x^3}{1+y} + \frac{y^3}{1+x}$  trong đó  $x, y$  là các số thực dương thỏa mãn điều kiện  $xy = 1$ . Chứng minh  $B \geq 1$ .

**Bài toán 108** ([Tuy23], 33., p. 13). Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn điều kiện  $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 2$ . Chứng minh  $xyz \leq \frac{1}{8}$ .

**Bài toán 109** ([Tuy23], 34., p. 13). Tìm các số dương  $x, y, z$  sao cho  $x + y + z = 3$  &  $x^4 + y^4 + z^4 = 3xyz$ .

**Bài toán 110** ([Tuy23], 35., p. 13). Cho  $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 10$ . Chứng minh:  $x + y \geq 20$ .

**Bài toán 111** ([Tuy23], 36., p. 13). Cho  $x, y, z \geq 0$  thỏa mãn điều kiện  $x+y+z = 1$ . Chứng minh:  $\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} \leq \sqrt{6}$ .

**Bài toán 112** ([Bin23], Ví dụ 8, p. 10). Rút gọn biểu thức  $A = \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} - \sqrt{x - \sqrt{2x-1}}$ .

**Bài toán 113** ([Bin23], Ví dụ 9, p. 11). Chứng minh số  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$  là số vô tỷ.

**Bài toán 114** ([Bin23], 11., pp. 11–12). Rút gọn biểu thức: (a)  $\sqrt{11 - 2\sqrt{10}}$ . (b)  $\sqrt{9 - 2\sqrt{14}}$ . (c)  $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ . (d)  $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$ . (e)  $\sqrt{4 - \sqrt{7}} - \sqrt{4 + \sqrt{7}}$ . (f)  $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}}{\sqrt{2} + \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}}$ . (g)  $\sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7} + 4\sqrt{3}}}$ . (h)  $\sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$ . (i)  $\sqrt{94 - 42\sqrt{5}} - \sqrt{94 + 42\sqrt{5}}$ .

**Bài toán 115** ([Bin23], 12., p. 12). Tính: (a)  $(4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$ . (b)  $\sqrt{3 - \sqrt{5}}(\sqrt{10} - \sqrt{2})(3 + \sqrt{5})$ . (c)  $\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ .

**Bài toán 116** ([Bin23], 13., p. 12). Chứng minh các hằng đẳng thức sau với  $b \geq 0$ ,  $a \geq \sqrt{b}$ : (a)  $\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2(a \pm \sqrt{a^2 - b})}$ . (b)  $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$ .

**Bài toán 117** ([Bin23], 14., p. 12). Rút gọn biểu thức  $A = \sqrt{x + 2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x - 2\sqrt{2x-4}}$ .

**Bài toán 118** ([Bin23], 15., p. 12). Cho biểu thức  $A = \frac{x + \sqrt{x^2 - 2x}}{x - \sqrt{x^2 - 2x}} - \frac{x - \sqrt{x^2 - 2x}}{x + \sqrt{x^2 - 2x}}$ . (a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức A. (b) Rút gọn biểu thức A. (c) Tìm giá trị của x để  $A < 2$ .

**Bài toán 119** ([Bin23], 16., p. 12). Lập 1 phương trình bậc 2 với các hệ số nguyên, trong đó: (a)  $2 + \sqrt{3}$  là 1 nghiệm của phương trình. (b)  $6 - 4\sqrt{2}$  là 1 nghiệm của phương trình.

**Bài toán 120** ([Bin23], 17., p. 13). Chứng minh các số sau là số vô tỷ: (a)  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ . (b)  $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$ .

**Bài toán 121** ([Bin23], 18., p. 13). Có tồn tại các số hữu tỷ dương  $a, b$  hay không nếu: (a)  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2}$ . (b)  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{\sqrt{2}}$ .

**Bài toán 122** ([Bin23], 19., p. 13). Cho 3 số  $x, y, \sqrt{x} + \sqrt{y}$  là các số hữu tỷ. Chứng minh mỗi số  $\sqrt{x}, \sqrt{y}$  đều là số hữu tỷ.

**Bài toán 123** ([Bin23], 20., p. 13). Cho  $a, b, c, d$  là các số dương. Chứng minh tồn tại 1 số dương trong 2 số  $2a + b - 2\sqrt{cd}$  &  $2c + d - 2\sqrt{ab}$ .

**Bài toán 124** ([Bin23], 21\*, p. 13). (a) Rút gọn biểu thức  $A = \sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}}$  với  $a > 0$ . (b) Tính giá trị của tổng  $B = \sum_{i=1}^{99} \sqrt{1 + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(i+1)^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}}$ .

**Bài toán 125** ([Bin23], 22\*, p. 13). (a) Nêu 1 cách tính nhẩm  $997^2$ . (b) Tính tổng các chữ số của A biết  $\sqrt{A} = 99 \dots 96$  (có 100 chữ số 9).

## 4 Biến Đổi Đơn Giản Biểu Thức Chứa Căn Thức Bậc 2

**Bài toán 126** ([Bin23], Ví dụ 10, p. 14). Rút gọn biểu thức  $A = \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$ .

**Bài toán 127** ([Bin23], Ví dụ 11, p. 14). Tính giá trị của biểu thức

$$M = \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{(i+1)\sqrt{i} + i\sqrt{i+1}} = \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{25\sqrt{24} + 24\sqrt{25}}.$$

**Bài toán 128** ([Bin23], 23., p. 15). Rút gọn biểu thức  $A = \sqrt{1-a} + \sqrt{a(a-1)} + a\sqrt{\frac{a-1}{a}}$ .

**Bài toán 129** ([Bin23], 24., p. 15). Chứng minh các hằng đẳng thức: (a)  $\sqrt{10 + \sqrt{60} - \sqrt{24} - \sqrt{40}} = \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{2}$ . (b)  $\sqrt{6 + \sqrt{24} + \sqrt{12} + \sqrt{8}} - \sqrt{3} = \sqrt{2} + 1$ .

**Bài toán 130** ([Bin23], 25., p. 15). Cho  $A = \sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}}$ . Biểu diễn  $A$  dưới dạng tổng của 3 căn thức.

**Bài toán 131** ([Bin23], 26., p. 15). Rút gọn biểu thức  $A = \frac{x+3+2\sqrt{x^2-9}}{2x-6+\sqrt{x^2-9}}$ .

**Bài toán 132** ([Bin23], 27., p. 15). Rút gọn biểu thức  $B = \frac{x^2+5x+6+x\sqrt{9-x^2}}{3x-x^2+(x+2)\sqrt{9-x^2}}$ .

**Bài toán 133** ([Bin23], 28., p. 15). Rút gọn biểu thức:

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}},$$

$$B = \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{\sqrt{i} - \sqrt{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{1} - \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{4}} - \cdots - \frac{1}{\sqrt{24} - \sqrt{25}}.$$

## 5 Rút Gọn Biểu Thức Có Chứa Căn Thức Bậc 2

**Bài toán 134** ([Tuy23], Thí dụ 5, p. 14). Cho  $A = \sqrt{11 + \sqrt{96}}$  &  $B = \frac{2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$ . Không dùng máy tính hoặc bảng số, so sánh  $A$  &  $B$ .

**Bài toán 135** ([Tuy23], Thí dụ 6, p. 15). Cho biểu thức  $A = \left( \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} - \frac{x-3}{\sqrt{x-1} - \sqrt{2}} \right) \left( \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{2x} - x} \right)$ .  
(a) Rút gọn  $A$ . (b) Tính giá trị của  $A$  với  $x = 3 - 2\sqrt{2}$ .

**Bài toán 136** ([Tuy23], 37., pp. 15–16). Không dùng máy tính hoặc bảng số, so sánh các số sau: (a)  $-3\sqrt{11}$  &  $-7\sqrt{2}$ . (b)  $\frac{7}{2}\sqrt{\frac{1}{12}}$  &  $\frac{9}{4}\sqrt{\frac{1}{5}}$ . (c)  $\sqrt{\frac{4}{27}}$  &  $\sqrt{\frac{3}{26}}$ .

**Bài toán 137** ([Tuy23], 38., p. 16). Không dùng máy tính hoặc bảng số, chứng minh  $4\sqrt{5} - 3\sqrt{2} < 5$ .

**Bài toán 138** ([Tuy23], 39., p. 16). Cho  $A = \sqrt{x^2+1} - x - \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x}$  trong đó  $x \in \mathbb{R}$ . Xác định  $x \in \mathbb{R}$  để giá trị của  $A$  là 1 số tự nhiên.

**Bài toán 139** ([Tuy23], 40., p. 16). Trục căn thức ở mẫu của các biểu thức sau: (a)  $A = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{2c}}$  trong đó  $a, b, c > 0$  thỏa mãn điều kiện  $c$  là trung bình nhân của  $a$  &  $b$ . (b)  $B = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}}$  trong đó  $a, b, c, d > 0$  thỏa mãn điều kiện  $ab = cd$  &  $a + b \neq c + d$ .

**Bài toán 140** ([Tuy23], 41., p. 16). Tìm  $x, y \in \mathbb{N}$  sao cho  $x > y > 0$  thỏa mãn điều kiện  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{931}$ .

**Bài toán 141** ([Tuy23], 42., p. 16). Chứng minh:  $\frac{2\sqrt{mn}}{\sqrt{m} + \sqrt{n} + \sqrt{m+n}} = \sqrt{m} + \sqrt{n} - \sqrt{m+n}$ . Áp dụng tính  $\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}}$ .

**Bài toán 142** ([Tuy23], 43., p. 16). Chứng minh:  $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Áp dụng tính tổng:

$$S = \sum_{i=1}^{399} \frac{1}{(i+1)\sqrt{i} + i\sqrt{i+1}} = \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{400\sqrt{399} + 399\sqrt{400}}.$$

**Bài toán 143** ([Tuy23], 44., p. 16). Tìm  $n \in \mathbb{N}$  nhỏ nhất sao cho  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 0.05$ .

**Bài toán 144** ([Tuy23], 45., p. 17). Cho  $A = \sum_{i=1}^{120} \frac{1}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{120} + \sqrt{121}}$ ,  $B = \sum_{i=1}^{35} \frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{35}}$ . Chứng minh  $A < B$ .

**Bài toán 145** ([Tuy23], 46., p. 17). Cho  $x, y, z > 0$  & khác nhau đôi một. Chứng minh giá trị của biểu thức

$$A = \frac{x}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{z})} + \frac{y}{(\sqrt{y} - \sqrt{z})(\sqrt{y} - \sqrt{x})} + \frac{z}{(\sqrt{z} - \sqrt{x})(\sqrt{z} - \sqrt{y})}$$

không phụ thuộc vào giá trị của các biến.

**Bài toán 146** ([Tuy23], 47., p. 17). Cho biểu thức  $A = \frac{1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{5}{x - \sqrt{x} - 6} - \frac{\sqrt{x} - 2}{3 - \sqrt{x}}$ . (a) Rút gọn  $A$ . (b) Tìm giá trị lớn nhất của  $A$ .

**Bài toán 147** ([Tuy23], 48., p. 17). Cho  $A = \left( \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left( 1 + \frac{x + y + 2xy}{1 - xy} \right)$ . (a) Rút gọn  $A$ . (b) Tính giá trị của  $P$  với  $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$ . (c) Tìm giá trị lớn nhất của  $A$ .

**Bài toán 148** ([Tuy23], 49., p. 17). Cho  $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy} + \sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 1} + \frac{2\sqrt{z}}{\sqrt{zx} + 2\sqrt{z} + 2}$ . Biết  $xyz = 4$ , tính  $\sqrt{P}$ .

**Bài toán 149** ([Bin23], Ví dụ 12, p. 15). Tính:  $A = \left( \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \right) : \left( \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} - \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \right)$ .

**Bài toán 150** ([Bin23], Ví dụ 13, p. 16). Rút gọn biểu thức  $A = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$ .

**Bài toán 151** ([Bin23], Ví dụ 14, p. 16). Cho  $A = \frac{\sqrt{a} + 6}{\sqrt{a} + 1}$ . (a) Tìm các số nguyên  $a$  để  $A$  là số nguyên. (b) Chứng minh với  $a = \frac{4}{9}$  thì  $A$  là số nguyên. (c) Tìm các số hữu tỷ  $a$  để  $A$  là số nguyên.

**Bài toán 152** ([Bin23], 29., p. 18). Rút gọn biểu thức: (a)  $A = \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1 - \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}}$ .

(b)  $B = \left( \frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \left( \frac{1 - \sqrt{a}}{1 - a} \right)^2$ . (c)  $C = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}} : \left[ \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \frac{1}{x + y + 2\sqrt{xy}} + \frac{2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^3} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \right]$  với  $x = 2 - \sqrt{3}$  &  $y = 2 + \sqrt{3}$ .

**Bài toán 153** ([Bin23], 30., p. 18). Rút gọn biểu thức  $A = \frac{1 - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}$ .

**Bài toán 154** ([Bin23], 31., p. 18). Rút gọn biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x^2 - y^2}} - \sqrt{x - \sqrt{x^2 - y^2}}}{\sqrt{2(x-y)}}$  với  $x > y > 0$ .

**Bài toán 155** ([Bin23], 32., p. 18). Rút gọn biểu thức  $A = \left( \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) : \left( \frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right)$  với  $x = \frac{a^2 + b^2}{2ab}$  &  $b > a > 0$ .

**Bài toán 156** ([Bin23], 33., p. 18). Rút gọn biểu thức  $B = \frac{2a\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$  với  $x = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{1-a}{a}} - \sqrt{\frac{a}{1-a}} \right)$  &  $0 < a < 1$ .

**Bài toán 157** ([Bin23], 34., p. 18). Rút gọn biểu thức  $A = a + b - \sqrt{\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{c^2+1}}$  với  $a, b, c > 0$  &  $ab + bc + ca = 1$ .

**Bài toán 158** ([Bin23], 35., p. 18). Rút gọn biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}} \cdot \sqrt{2x-1}$ .

**Bài toán 159** ([Bin23], 36., p. 18). Chứng minh hằng đẳng thức sau với  $x \geq 2$

$$\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{\frac{x^2-4}{x}}} + \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{\frac{x^2-4}{x}}} = \sqrt{\frac{2x+4}{\sqrt{x}}}.$$

**Bài toán 160** ([Bin23], 37., p. 18). Cho  $a = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$ ,  $b = \frac{-1 - \sqrt{2}}{2}$ . Tính  $a^7 + b^7$ .

**Bài toán 161** ([Bin23], 38., p. 19). Cho biết  $\sqrt{x^2 - 6x + 13} - \sqrt{x^2 - 6x + 10} = 1$ . Tính  $\sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{x^2 - 6x + 10}$ .

**Bài toán 162** ([Bin23], 39., p. 19). Cho biểu thức  $A = \frac{\sqrt{a} + 2}{\sqrt{a} - 2}$ . (a) Tìm các số nguyên  $a$  để  $A$  là số nguyên. (b) Tìm các số hữu tỷ  $a$  để  $A$  là số nguyên.

**Bài toán 163** ([Bin23], 40., p. 19). Cho  $a = \sqrt{2} - 1$ . (a) Viết  $a^2, a^3$  dưới dạng  $\sqrt{m} - \sqrt{m-1}$  trong đó  $m$  là số tự nhiên. (b) Chứng minh với mọi số nguyên dương  $n$ , số  $a^n$  viết được dưới dạng trên.

## 6 Cube Root, nth Root – Căn Bậc 3, Căn Bậc $n$

**Bài toán 164** (Program to print out 1st  $n$  cube roots). Viết chương trình Pascal, C/C++, Python xuất ra căn bậc 3 của  $n$  số tự nhiên đầu tiên với  $n \in \mathbb{N}^*$  được nhập từ bàn phím.

**Bài toán 165.** Viết chương trình Pascal, C/C++, Python để kiểm tra 1 số  $n \in \mathbb{N}^*$  được nhập từ bàn phím có phải là lập phương của 1 số tự nhiên hay không.

**Bài toán 166** (Program to print out 1st  $n$  nth roots). Viết chương trình Pascal, C/C++, Python xuất ra căn bậc  $n$  của  $m$  số tự nhiên đầu tiên với  $m, n \in \mathbb{N}^*$  được nhập từ bàn phím.

**Bài toán 167.** Viết chương trình Pascal, C/C++, Python để kiểm tra 1 số  $m$  được nhập từ bàn phím có phải là lũy thừa bậc  $n$  của 1 số tự nhiên hay không với  $m, n \in \mathbb{N}^*$  được nhập từ bàn phím.

**Bài toán 168** (Mở rộng [Tuy23], Thí dụ 1, p. 5). Cho  $x \in \mathbb{R}$ . So sánh  $\sqrt[3]{x}$  với  $x$ .

*Giải.*  $\sqrt[3]{x}$  xác định  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Xét các trường hợp: (a)  $\sqrt[3]{x} = x \Leftrightarrow x = x^3 \Leftrightarrow x - x^3 = 0 \Leftrightarrow x(1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow x(1 - x)(1 + x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \pm 1\}$ . (b)  $\sqrt[3]{x} < x \Leftrightarrow x < x^3 \Leftrightarrow x - x^3 < 0 \Leftrightarrow x(1 - x^2) < 0 \Leftrightarrow x(1 - x)(1 + x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$  hoặc  $x > 1$ , trong đó phép biến đổi tương đương cuối cùng thu được nhờ lập bảng xét dấu. (c)  $\sqrt[3]{x} > x \Leftrightarrow x > x^3 \Leftrightarrow x - x^3 > 0 \Leftrightarrow x(1 - x^2) > 0 \Leftrightarrow x(1 - x)(1 + x) > 0 \Leftrightarrow x < -1$  hoặc  $0 < x < 1$ , trong đó phép biến đổi tương đương cuối cùng cũng thu được nhờ lập bảng xét dấu. Vậy:  $\sqrt[3]{x} = x \Leftrightarrow x \in \{0, \pm 1\}$ ,  $\sqrt[3]{x} < x \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$ ,  $\sqrt[3]{x} > x \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$ .  $\square$

**Bài toán 169** (Mở rộng [Tuy23], Thí dụ 1, p. 5). Cho  $x \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . So sánh  $\sqrt[n]{x}$  với  $x$ .

**Bài toán 170** ([Tuy23], Thí dụ 7, p. 19). Tính  $x = \sqrt[3]{17\sqrt{5} + 38} - \sqrt[3]{17\sqrt{5} - 38}$ .

**Bài toán 171** ([Tuy23], Thí dụ 8, p. 20). Giải & biện luận phương trình  $(x - a)^n = a^2 - 2a + 1$  với  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a$  là tham số.

**Bài toán 172** ([Tuy23], 50., p. 21). Tính: (a)  $\sqrt[3]{8\sqrt{5} - 16} \sqrt[3]{8\sqrt{5} + 16}$ . (b)  $\sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} + \sqrt[6]{8}$ . (c)  $\sqrt[3]{4} \sqrt[3]{1 - \sqrt{3}} \sqrt[6]{4 + 2\sqrt{3}}$ .

**Bài toán 173** ([Tuy23], 51., p. 21). (a) Tính  $\frac{2}{\sqrt[3]{3} - 1} - \frac{4}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1}$ . (b) Cho  $x = \frac{2}{2\sqrt[3]{2} + 2 + \sqrt[3]{4}}$ ,  $y = \frac{6}{2\sqrt[3]{2} - 2 + \sqrt[3]{4}}$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = \frac{xy}{x + y}$ .

**Bài toán 174** ([Tuy23], 52., p. 21). Cho  $x = \frac{\sqrt[3]{8 - 3\sqrt{5}} + \sqrt[3]{64 - 12\sqrt{20}}}{\sqrt[3]{57}} \sqrt[3]{8 + 3\sqrt{5}}$ ,  $y = \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt{2}}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{2}} + \frac{\sqrt{2} - 9\sqrt[3]{9}}{\sqrt[4]{2} - \sqrt[3]{81}}$ . Tính  $xy$ .

**Bài toán 175** ([Tuy23], 53., p. 22). Tính: (a)  $x = \sqrt[3]{5 + 2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5 - 2\sqrt{13}}$ . (b)  $x = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$ . (c)  $x = \sqrt[3]{182 + \sqrt{33125}} + \sqrt[3]{182 - \sqrt{33125}}$ .

**Bài toán 176** ([Tuy23], 54., p. 22). Cho  $A = \sqrt[3]{60 + \sqrt[3]{60 + \sqrt[3]{60 + \cdots + \sqrt[3]{60}}}}$ . Chứng minh  $3 < A < 3$ . Tìm  $\lfloor A \rfloor$ .

**Bài toán 177** ([Tuy23], 55., p. 22). Cho  $A = \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \cdots + \sqrt{20}}}}$ ,  $B = \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \cdots + \sqrt[3]{24}}}}$ . Chứng minh  $7 < A + B < 8$ . Tìm  $\lfloor A + B \rfloor$ .

**Bài toán 178** ([Tuy23], 56., p. 22). So sánh  $a = \sqrt[3]{5\sqrt{2}}$  &  $b = \sqrt{5\sqrt[3]{2}}$ .

**Bài toán 179** ([Tuy23], 57., p. 22). Cho  $ax^3 = by^3 = cz^3$  &  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ . Chứng minh  $\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$ .

**Bài toán 180** ([Tuy23], 58., p. 22). Giải phương trình: (a)  $x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3}$ . (b)  $x^3 + 2x^2 - 4x = -\frac{8}{3}$ .

**Bài toán 181** ([Tuy23], 59., p. 22). Giải phương trình: (a)  $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{5x}$ . (b)  $2\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2} = \sqrt[3]{x^2 - 4}$ .

**Bài toán 182** ([Tuy23], 60., p. 22). Giải phương trình:  $\sqrt[3]{x-5} + \sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{3x+2} = -2$ .

**Bài toán 183** ([Tuy23], 61., p. 22). Giải phương trình:  $\sqrt[n]{(x-2)^2} + 4\sqrt[n]{x^2-4} = 5\sqrt[n]{(x+2)^2}$ .

**Bài toán 184** ([Tuy23], 62., p. 22). Cho  $A = (a+b)(b+c)(c+a)$  trong đó  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn điều kiện  $abc = 1$ . Chứng minh  $A + 1 \geq 3(a+b+c)$ .

**Bài toán 185** ([Bin23], Ví dụ 15, p. 20). Chứng tỏ số  $m = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$  là 1 nghiệm của phương trình  $x^3 + 3x - 4 = 0$ .

**Bài toán 186** ([Bin23], Ví dụ 16, p. 20). Tính giá trị của biểu thức  $A = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ .

**Bài toán 187** ([Bin23], 41., p. 20). Tính: (a)  $\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 2}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$ . (b)  $\sqrt{3 + \sqrt{3} + \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}}$ . (c)  $\frac{4 + 2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}}$ .

**Bài toán 188** ([Bin23], 42., p. 21). Số  $m = \sqrt[3]{4 + \sqrt{80}} - \sqrt[3]{4 - \sqrt{80}}$  có phải là nghiệm của phương trình  $x^3 + 12x - 8 = 0$  không?

**Bài toán 189** ([Bin23], 43., p. 21). Lập 1 phương trình bậc 3 với các hệ số nguyên, trong đó: (a)  $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$  là 1 nghiệm của phương trình. (b)  $\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}$  là 1 nghiệm của phương trình.

**Bài toán 190** ([Bin23], 44., p. 21). Tính: (a)  $A = \sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$ . (b)  $B = \sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$ . (c)  $C = \sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$ . (d)  $D = \sqrt[3]{2+10\sqrt{\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{2-10\sqrt{\frac{1}{27}}}$ . (e)  $E = \sqrt[3]{4+\frac{5}{3}\sqrt{\frac{31}{3}}} + \sqrt[3]{4-\frac{5}{3}\sqrt{\frac{31}{3}}}$ .

**Bài toán 191** ([Bin23], 45., p. 21). Tìm  $x$  biết: (a)  $\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{2-x} = 1$ . (b)  $2x^3 = (x-1)^3$ .

**Bài toán 192** ([Bin23], 46., p. 21). Cho  $am^3 = bn^3 = cp^3$  &  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1$ . Chứng minh:  $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{am^2 + bn^2 + cp^2}$ .

**Bài toán 193** ([Bin23], 47., p. 21). Tính: (a)  $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}(\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}})$ . (b)  $\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}} - \sqrt{2}$ . (c)  $\sqrt[4]{56-24\sqrt{5}}$ . (d)  $1 + \sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}$ . (e)  $\frac{2}{\sqrt{4-3\sqrt{5}+2\sqrt{5}-\sqrt[4]{125}}}$ .

## 7 Miscellaneous

**Bài toán 194** ([Tuy23], Thí dụ 15, pp. 29-30). Cho biểu thức  $A = \left( \frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left( \frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right)$ . (a) Rút gọn  $A$ . (b) Tính giá trị của  $A$  với  $x = 7 - 4\sqrt{3}$ . (c) Tìm giá trị lớn nhất của  $a$  để  $P > a$ .

**Bài toán 195** ([Tuy23], 80., p. 31). Chứng minh:  $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(a+b)^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} \right|$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}, ab(a+b) \neq 0$ . Áp dụng tính  $A = \sqrt{1 + 999^2 + \frac{999^2}{1000^2}} + \frac{999}{1000}$ .

**Bài toán 196** ([Tuy23], 81., p. 31). Rút gọn biểu thức  $A = (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$ .

**Bài toán 197** ([Tuy23], 82., p. 31). Không dùng máy tính hoặc bảng số, chứng minh:  $\sqrt{14} - \sqrt{13} < 2\sqrt{3} - \sqrt{11}$ .

**Bài toán 198** ([Tuy23], 83., p. 31). Giải phương trình:  $\frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 1$ .

**Bài toán 199** ([Tuy23], 84., p. 31). Tìm  $x, y, z$  biết  $x + y + z + 35 = 2(2\sqrt{x+1} + 3\sqrt{y+2} + 4\sqrt{z+3})$ .

**Bài toán 200** ([Tuy23], 85., p. 31). Cho  $a > 0, b > 0$  &  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ . Chứng minh:  $\sqrt{a+b} = \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1}$ .

**Bài toán 201** ([Tuy23], 86., p. 31). Chứng minh:  $A = \sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{2} + \sqrt{10}$ .

**Bài toán 202** ([Tuy23], 87., p. 31). Chứng minh:

$$\frac{1}{4} < \frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}} < \frac{3}{10},$$

(ở tử có  $n$  dấu căn, ở mẫu có  $n-1$  dấu căn).

**Bài toán 203** ([Tuy23], 88., p. 31). Giải phương trình:  $\sqrt{x+2-3\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x-2+3\sqrt{2x-5}} = 2\sqrt{2}$ .

**Bài toán 204** ([Tuy23], 89., p. 31). Giải phương trình:  $\sqrt[3]{(65+x)^2} + 4\sqrt[3]{(65-x)^2} = 5\sqrt[3]{65^2 - x^2}$ .

**Bài toán 205** ([Tuy23], 90., p. 32). Giải phương trình ẩn  $x$ :  $\frac{(a-x)\sqrt[4]{x-b} + (x-b)\sqrt[4]{a-x}}{\sqrt[4]{a-x} + \sqrt[4]{x-b}} = \frac{a-b}{2}$  với  $a > b$ .

**Bài toán 206** ([Tuy23], 91., p. 32). Cho biểu thức  $A = \sum_{i=1}^{199} \frac{1}{\sqrt{i(200-i)}} = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 199}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 198}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{199 \cdot 1}}$ . Chứng minh  $A > 1.99$ .

**Bài toán 207** ([Tuy23], 92., p. 32). Cho  $n$  số dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Chứng minh:

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

**Bài toán 208** ([Tuy23], 93., p. 32). Cho các số thực dương  $a, b, c, d$  thỏa mãn điều kiện  $abcd = 1$ . Chứng minh:  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + a(b+c) + b(c+d) + c(d+a) + d(a+b) \geq 12$ .

**Bài toán 209** ([Tuy23], 94., p. 32). Giải phương trình:  $\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x^2+x+1}} = \frac{7}{4}$ .

**Bài toán 210** ([Tuy23], 95., p. 32). Giải phương trình:  $\sqrt{x+x^2} + \sqrt{x-x^2} = x+1$ .

**Bài toán 211** ([Tuy23], 96., p. 32). Cho  $A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$  với  $0 \leq x \leq 1$ . Rút gọn biểu thức  $B = 1 - \sqrt{A+x+1}$ .

**Bài toán 212** ([Tuy23], 97., p. 32). Cho biểu thức  $A = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$ . (a) Rút gọn  $A$ . (b) Tính giá trị của  $A$  với  $x = 14 - 6\sqrt{5}$ . (c) Tìm GTNN của  $A$ .

**Bài toán 213** ([BNS23], Ví dụ 1.1, p. 5). Rút gọn biểu thức  $A = \sqrt{(7+4\sqrt{3})(a-1)^2}$ .

**Bài toán 214** ([BNS23], Ví dụ 1.2, p. 6). Cho biểu thức  $A = \sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$ . (a) Tìm điều kiện xác định của  $A$ . (b) Rút gọn biểu thức  $A$  với  $1 \leq a < 2$ . (c) Rút gọn biểu thức  $A$  với  $a \geq 2$ .

**Bài toán 215** ([BNS23], Ví dụ 1.3, p. 6). Đơn giản biểu thức  $A = \left( \sqrt{8+2\sqrt{7}} + 2\sqrt{8-2\sqrt{7}} \right) (\sqrt{63}+1)$ .

**Bài toán 216** ([BNS23], Ví dụ 1.4, p. 6). Tính tổng  $A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$ .

**Bài toán 217** ([BNS23], Ví dụ 1.5, p. 6). Tính  $A = \frac{\sqrt{7-2\sqrt{10}}(7+2\sqrt{10})(74-22\sqrt{10})}{\sqrt{125-4\sqrt{50}+5\sqrt{20}+\sqrt{8}}}$ .

**Bài toán 218** ([BNS23], Ví dụ 1.6, p. 7). Cho  $a = \sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}} + \sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$ . Chứng minh:  $a^2 - 2a - 2 = 0$ .

**Bài toán 219** ([BNS23], Ví dụ 1.7, p. 7). Cho  $a = \sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ . Tính

$$A = \frac{a^4 - 4a^3 + a^2 + 6a + 4}{a^2 - 2a + 12}.$$

**Bài toán 220** ([BNS23], Ví dụ 1.8, p. 7). Cho  $f(x) = \frac{1+\sqrt{1+x}}{x+1} + \frac{1+\sqrt{1-x}}{x-1}$  &  $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Tính  $f(a)$ .

**Bài toán 221** ([BNS23], Ví dụ 1.9, p. 8). Giả thiết  $x, y, z > 0$  &  $xy + yz + zx = a$ . Chứng minh

$$x\sqrt{\frac{(a+y^2)(a+z^2)}{a+x^2}} + y\sqrt{\frac{(a+z^2)(a+x^2)}{a+y^2}} + z\sqrt{\frac{(a+x^2)(a+y^2)}{a+z^2}} = 2a.$$

**Bài toán 222** ([BNS23], 1.1, p. 8). Biểu diễn  $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$  thành  $a+b\sqrt{5}$  với  $a, b \in \mathbb{Q}$ .

**Bài toán 223** ([BNS23], 1.2, p. 8). Đơn giản biểu thức  $A = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{18} + \sqrt{28-16\sqrt{3}}$ .

**Bài toán 224** ([BNS23], 1.3, p. 8). Chứng minh  $\sqrt{10+2\sqrt{24}} - \sqrt{10-2\sqrt{24}} = 4$ .

**Bài toán 225** ([BNS23], 1.4, p. 8). Tính  $A = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ .

**Bài toán 226** ([BNS23], 1.5, p. 9). Tính tích  $ab$  với

$$a = \sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{3+\sqrt{7+\sqrt{2}}}, \quad b = \sqrt{3+\sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{2}}}}\sqrt{3-\sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{2}}}}.$$



**Bài toán 227** ([BNS23], 1.6, p. 9). Chứng minh  $\frac{4}{\sqrt{5}-1} + \frac{3}{\sqrt{5}-2} + \frac{16}{\sqrt{5}-3} = -5$ .

**Bài toán 228** ([BNS23], 1.7, p. 9). Chứng minh  $\left(\frac{2}{\sqrt{6}-1} + \frac{3}{\sqrt{6}-2} + \frac{3}{\sqrt{6}-3}\right) \frac{5}{9\sqrt{6}+4} = \frac{1}{2}$ .

**Bài toán 229** ([BNS23], 1.8, p. 9). Cho  $f(x) = \frac{x+\sqrt{5}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{5}}} + \frac{x-\sqrt{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{5}}}$ . Tính  $f(3)$ .

**Bài toán 230** ([BNS23], 1.9, p. 9). Cho  $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$  và  $a = \frac{4}{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}$ . Tính  $f(a)$ .

**Bài toán 231** ([BNS23], Ví dụ 2.1, p. 10). Chứng minh với  $ab \neq 0$ :  $\frac{\sqrt[3]{a^5b^7}}{\sqrt[3]{a^2b}} - \frac{\sqrt[3]{a^4b^8}}{\sqrt[3]{ab^2}} = 0$ .

**Bài toán 232** ([BNS23], Ví dụ 2.2, p. 10). Chứng minh với  $abc \neq 0$ :  $\frac{\sqrt[3]{a^4b^5c^7}}{\sqrt[3]{ab^2c}} = abc^2$ .

**Bài toán 233** ([BNS23], Ví dụ 2.3, p. 10). Với  $a \geq 2 + \sqrt{2}$  và

$$u = \sqrt[3]{\left(a + \frac{2}{a}\right)^3 - 3a^2 - \frac{12}{a^2} + 3\left(a + \frac{2}{a}\right) - 13}, v = \sqrt{a^2 + \frac{4}{a^2} - 8\left(a + \frac{2}{a}\right) + 20}.$$

Chứng minh  $u - v = 3$ .

**Bài toán 234** ([BNS23], Ví dụ 2.4, p. 11). Đơn giản biểu thức  $A = \sqrt[3]{8(7+5\sqrt{2})} + \sqrt[3]{216(7-5\sqrt{2})} + 4\sqrt{2} - 7$ .

**Bài toán 235** ([BNS23], Ví dụ 2.5, p. 11). Chứng minh  $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1$ .

**Bài toán 236** ([BNS23], Ví dụ 2.6, p. 11). Chứng minh nếu  $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$  thì  $a^3 + 3a = 4$ .

**Bài toán 237** ([BNS23], Ví dụ 2.7, p. 11). Chứng minh:

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}} + 3\sqrt[3]{2}\right)\sqrt{3}}}{3+\sqrt[6]{108}} = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}.$$

**Bài toán 238** ([BNS23], Ví dụ 2.8, p. 12). Chứng minh nếu  $\sqrt[3]{(a+1)^2} + \sqrt[3]{a^2-1} + \sqrt[3]{(a-1)^2} = 1$  thì  $\sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a-1} = 2$ .

**Bài toán 239** ([BNS23], Ví dụ 2.9, p. 12). Đơn giản biểu thức  $A = \frac{x+1}{2\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}+x+\frac{1}{x}}$  với  $x \notin \{-1, 0\}$ .

**Bài toán 240** ([BNS23], Ví dụ 2.10, p. 12). Cho  $a = \sqrt{2} + \sqrt{7 - \sqrt[3]{61+46\sqrt{5}}} + 1$ . (a) Chứng minh  $a^4 - 14a^2 + 9 = 0$ . (b) Giải sử  $f(x) = x^5 + 2x^4 - 14x^3 - 28x^2 + 9x + 19$ . Tính  $f(a)$ .

**Bài toán 241** ([BNS23], Ví dụ 2.11, p. 13). Cho  $a, b, c > 0$ . Giả sử  $m, n, p$  là những số nguyên dương lớn hơn 1 sao cho  $bc = \sqrt[m]{a}$ ,  $ca = \sqrt[n]{b}$ , và  $ab = \sqrt[p]{c}$ . Chứng minh trong 3 số  $a, b, c$  phải có ít nhất 1 số bằng 1.

**Bài toán 242** ([BNS23], Ví dụ 2.12, p. 13). Cho  $a = \frac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}$ . (a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận số  $a$  làm nghiệm. (b) Giả sử đa thức  $f(x) = 3x^6 - 4x^5 - 7x^4 + 6x^3 + 6x^2 + x - 53\sqrt{2}$ . Tính  $f(a)$ .

**Bài toán 243** ([BNS23], Ví dụ 2.13, p. 14). Cho  $a = \frac{7-4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}} - \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$ . (a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận số  $a$  làm nghiệm. (b) Giả sử đa thức  $f(x) = \frac{x^6+x^4+4x^2}{40(x^4+4x^2-144)}$ . Tính  $f(a)$ .

**Bài toán 244** ([BNS23], Ví dụ 2.14, p. 14). Cho  $a = \sqrt[3]{38+17\sqrt{5}} + \sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}$ . Giả sử ta có đa thức  $f(x) = (x^3+3x+1935)^{2012}$ . Tính  $f(a)$ .

**Bài toán 245** ([BNS23], 2.1., p. 14). Biểu diễn  $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$  thành  $a + b\sqrt{5}$  với  $a, b \in \mathbb{Q}$ .

**Bài toán 246** ([BNS23], 2.2., p. 14). Cho  $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} + \sqrt[3]{1-\sqrt{11}}$ . Chứng minh  $a^9 - 6a^6 + 282a^3 = 8$ .

**Bài toán 247** ([BNS23], 2.3., p. 15). Cho  $a = (\sqrt[3]{1+2\sqrt{6}} - \sqrt[6]{5+4\sqrt{6}})\sqrt[3]{2\sqrt{6}-1} + 1$ . (a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận  $a$  làm nghiệm. (b) Giả sử  $f(x) = \sum_{i=1}^{2012} ix^i + 2012$ . Tính  $f(a)$ .

**Bài toán 248** ([BNS23], 2.4., p. 15). *Chứng minh:*

$$\frac{a + 2\sqrt{ab} + 9b}{\sqrt{a} + 3\sqrt{b} - 2\sqrt[4]{ab}} - 2\sqrt{b} = \left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right)^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0.$$

**Bài toán 249** ([BNS23], 2.5., p. 15). *Chứng minh:*

$$\left(\sqrt[3]{a^4} + b^2\sqrt[3]{a^2} + b^4\right) \frac{\sqrt[3]{a^8} - b^6 + b^4\sqrt[3]{a^2} - a^2b^2}{a^2b^2 + b^2 - a^2b^8 - b^4} = a^2b^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, ab \neq 0, a \neq b^3.$$

**Bài toán 250** ([BNS23], 2.6., p. 15). *Cho  $a, b > 0$ . Đơn giản biểu thức*

$$A = \frac{\sqrt{a^3 + 2a^2b} + \sqrt{a^4 + 2a^3b} - \sqrt{a^3} - a^2b}{\sqrt{(2a + b - \sqrt{a^2 + 2ab}) \left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[6]{a^5} + a\right)}}.$$

**Bài toán 251** ([BNS23], 2.7., p. 15). *Giả sử  $u^3 \geq v^2$ ,  $u, v \in \mathbb{Q}^+$ . Xác định  $u, v$  để*

$$\sqrt{\frac{u - 8\sqrt[6]{u^3v^2} + 4\sqrt[3]{v^2}}{\sqrt{u} - 2\sqrt[3]{v} + 2\sqrt[12]{u^3v^2}}} + 3\sqrt[3]{v} + \sqrt[6]{v} = 1.$$

**Bài toán 252.** *Cho  $a, b, c, A, B \in \mathbb{Z}$ ,  $c \geq 0$  thỏa mãn đẳng thức  $(a + b\sqrt{c})^2 = A + B\sqrt{c}$ . (a) Tìm mối quan hệ của  $a, b, c, A, B$ . Biểu diễn  $(A, B)$  theo  $(a, b, c)$ . (b)\* Biểu diễn  $(a, b)$  theo  $(c, A, B)$ .*

**Bài toán 253.** *Cho  $a, b, c, A, B \in \mathbb{Z}$ ,  $c \geq 0$  thỏa mãn đẳng thức  $(a + b\sqrt{c})^3 = A + B\sqrt{c}$ . (a) Tìm mối quan hệ của  $a, b, c, A, B$ . Biểu diễn  $(A, B)$  theo  $(a, b, c)$ . (b)\* Biểu diễn  $(a, b)$  theo  $(c, A, B)$ .*

**Bài toán 254.** *Cho  $a, b, c, A, B \in \mathbb{Z}$ ,  $c \geq 0$  thỏa mãn đẳng thức  $(a + b\sqrt[3]{c})^3 = A + B\sqrt[3]{c} + C\sqrt[3]{c^2}$ . (a) Tìm mối quan hệ của  $a, b, c, A, B, C$ . Biểu diễn  $(A, B, C)$  theo  $(a, b, c)$ . (b)\* Biểu diễn  $(a, b)$  theo  $(c, A, B, C)$ .*

## Tài liệu

- [Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.
- [BNS23] Vũ Hữu Bình, Phạm Thị Bạch Ngọc, and Nguyễn Tam Sơn. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 9. Tập 1: Đại Số*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 192.
- [Chí+23] Phan Đức Chính, Tôn Thân, Vũ Hữu Bình, Trần Phương Dung, Ngô Hữu Dũng, Lê Văn Hồng, and Nguyễn Hữu Thảo. *Toán 9 Tập 1*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 128.
- [Thâ+23] Tôn Thân, Vũ Hữu Bình, Trần Phương Dung, Lê Văn Hồng, and Nguyễn Hữu Thảo. *Bài Tập Toán 9 Tập 1*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 216.
- [Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.