

# Problem: Algebraic Expression Transformation

## Bài Tập: Biến Đổi Biểu Thức Đại Số

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 9 tháng 7 năm 2023

### Mục lục

<b>1 Rational Expression Transformation – Biến Đổi Biểu Thức Hữu Tỷ</b>	<b>1</b>
1.1 Rational expression simplification – Rút gọn biểu thức hữu tỷ	1
1.2 Biểu thức có tính quy luật	2
1.3 Tính giá trị của biểu thức có điều kiện	2
1.4 Generalization – Tổng Quát Hóa	3
<b>Tài liệu</b>	<b>4</b>

## 1 Rational Expression Transformation – Biến Đổi Biểu Thức Hữu Tỷ

**Definition 1** (Rational expression). A rational expression is the ratio of 2 polynomials. If  $f$  is a rational expression then  $f$  can be written in the form  $\frac{p}{q}$  where  $p, q$  are polynomials.

Like polynomials or any other type of expression, the basic arithmetic operations, namely addition  $+$ , subtraction  $-$ , multiplication  $\cdot$ , & division  $:$  or  $/$ , can be performed on rational expressions. A nice property of rational expressions is that when any of these operations are performed on 2 rational expressions, the result is always another rational expression. Contrary to polynomials, it is generally easy to multiply or divide but difficult to add or subtract 2 rational expressions.

**Notation 1** (Rational vs. irrational). Denote by  $\mathbb{Q}_{\text{fn}} := \left\{ \frac{a}{2^m \cdot 5^n} \mid a \in \mathbb{Z}, m, n \in \mathbb{N} \right\}$ ,  $\mathbb{Q}_{\text{ifn}} := \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}_{\text{fn}}$ , &  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  the set of all finite rationals, the set of all periodic infinite rationals, & the set of irrationals, respectively.

**Ký hiệu 1.** Ký hiệu  $\mathbb{Q}_{\text{fn}} := \left\{ \frac{a}{2^m \cdot 5^n} \mid a \in \mathbb{Z}, m, n \in \mathbb{N} \right\}$ ,  $\mathbb{Q}_{\text{ifn}} := \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}_{\text{fn}}$ , &  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  lần lượt là các tập hợp tất cả các số hữu tỷ hữu hạn, các số hữu tỷ vô hạn tuần hoàn, & các số vô tỷ.

### 1.1 Rational expression simplification – Rút gọn biểu thức hữu tỷ

**1** ([LAT23], Ví dụ 1, p. 5, chuyên Toán Quảng Ngãi 2018–2019). Cho biểu thức  $A = \frac{5x+1}{x^3-1} - \frac{1-2x}{x^2+x+1} - \frac{2}{1-x}$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Rút gọn  $A$ . (c) Biện luận theo tham số  $m \in \mathbb{R}$  để giải phương trình  $A = m$ . (d) Chứng minh  $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow A \in \mathbb{Q}$ . Tìm  $x \in \mathbb{R}$  rồi  $x \in \mathbb{Z}$  để  $A$  lần lượt thuộc các tập hợp:  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}_{\text{fn}}, \mathbb{Q}_{\text{ifn}}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R}_{<0}, \mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\leq 0}$ .

**2** ([LAT23], Ví dụ 2, p. 5). Cho biểu thức  $A = \frac{2x^3 - 7x^2 - 12x + 45}{3x^3 - 19x^2 + 33x - 9}$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Rút gọn  $A$ . (c) Biện luận theo tham số  $m \in \mathbb{R}$  để giải phương trình  $A = m$ . (d) Chứng minh  $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow A \in \mathbb{Q}$ . Tìm  $x \in \mathbb{R}$  rồi  $x \in \mathbb{Z}$  để  $A$  lần lượt thuộc các tập hợp:  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}_{\text{fn}}, \mathbb{Q}_{\text{ifn}}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R}_{<0}, \mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\leq 0}$ .

**3** ([LAT23], 1., p. 6). Cho biểu thức  $A = \left( \frac{x}{x^2-4} + \frac{2}{2-x} + \frac{1}{x+2} \right) : \left( x-2 + \frac{10-x^2}{x+2} \right)$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Rút gọn  $A$ . (c) Tìm  $x \in \mathbb{R}$  rồi  $x \in \mathbb{Z}$  để  $A$  lần lượt thuộc các tập hợp:  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}_{\text{fn}}, \mathbb{Q}_{\text{ifn}}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R}_{<0}, \mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\leq 0}$ .

**4** ([LAT23], 2., p. 6). Cho biểu thức  $A = \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8}$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Rút gọn  $A$ . (c) Tìm  $x \in \mathbb{R}$  rồi  $x \in \mathbb{Z}$  để  $A$  lần lượt thuộc các tập hợp:  $\mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R}_{<0}, \mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\leq 0}$ .

**5** ([LAT23], 3., p. 6). Cho biểu thức  $A = \left( \frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3}$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Rút gọn  $A$ . (c) Tìm  $x \in \mathbb{R}$  rồi  $x \in \mathbb{Z}$  để  $A$  lần lượt thuộc các tập hợp:  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}_{\text{fn}}, \mathbb{Q}_{\text{ifn}}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R}_{<0}, \mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\leq 0}$ .

\*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam  
e-mail: nguyentuanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

## 1.2 Biểu thức có tính quy luật

6 ([LAT23], Ví dụ 1, p. 7, chuyên Toán Lam Sơn, Thanh Hóa 2018–2019). Cho biểu thức

$$A(n) = \left(1 - \frac{1}{1+2}\right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{1+2+\cdots+n}\right), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

(a) Tính  $A(2018)$ . (b) Tính  $A(n)$  với  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .

7 ([LAT23], Ví dụ 2, p. 7, HSG Quảng Ngãi 2017–2018). Cho biểu thức  $A = \sum_{i=1}^n \frac{i}{1+i^2+i^4} = \frac{1}{1+1^2+1^4} + \frac{2}{1+2^2+2^4} + \frac{3}{1+3^2+3^4} + \cdots + \frac{n}{1+n^2+n^4}$ . (a) Tính  $A(n)$  với  $n \in \mathbb{N}^*$ . (b) Tính  $A(2019)$ .

8 ([LAT23], Ví dụ 3, p. 8, THPT 391). Cho biểu thức  $A = \prod_{i=2}^n \frac{i^3-1}{i^3+1} = \frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdots \frac{n^3-1}{n^3+1}$ . (a) Tính  $A(n)$  với  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ . (b) Tính  $A(2019)$ .

9 ([LAT23], Ví dụ 5, p. 8, THPT 435). So sánh  $A = \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{2019^i}\right) = \left(1 + \frac{1}{2019}\right) \left(1 + \frac{1}{2019^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2019^n}\right)$  với  $n \in \mathbb{N}^*$ , &  $B = \frac{2019^2-1}{2018^2-1}$ .

10 ([LAT23], 1., p. 9). Cho  $A = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ . (a) Tính  $A(n)$  với  $n \in \mathbb{N}^*$ . (b) Tính  $A(2016)$ .

11 ([LAT23], 2., p. 9, THPT 496). Tính tổng  $A = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{35} + \frac{1}{56} + \frac{1}{84} + \frac{1}{120} + \frac{1}{165} + \frac{1}{220}$ .

12 ([LAT23], 3., p. 9, THPT 446). Cho  $A = \sum_{i=1}^{2018} \frac{i}{19^i} = \frac{1}{19} + \frac{2}{19^2} + \frac{3}{19^3} + \cdots + \frac{2018}{19^{2018}}$ . So sánh  $A^{2017}$  &  $A^{2018}$ .

13 ([LAT23], 4., p. 10, THPT 404). So sánh  $A = 2018 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{8} \cdots \frac{995}{998} \cdot \frac{997}{1000}$  &  $B = 2019 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{6}{9} \cdots \frac{996}{999} \cdot \frac{998}{1001}$ .

14 ([LAT23], 5., p. 10, THPT 463). Cho  $A = \sum_{i=1}^{49} \frac{1}{i(i+1)^2} = \frac{1}{1 \cdot 2^2} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \cdots + \frac{1}{49 \cdot 50^2}$  &  $B = \sum_{i=2}^{50} \frac{1}{i^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{50^2}$ . So sánh  $A$  &  $B$  với  $\frac{1}{2}$ .

15 ([LAT23], 6., p. 11, THPT 329). Chứng minh: (a)  $A = \sum_{i=1}^{2019} \frac{2020}{2019^2+i} = \frac{2020}{2019^2+1} + \frac{2020}{2019^2+2} + \cdots + \frac{2020}{2019^2+n} \notin \mathbb{N}^*$ . (b) Tổng quát:  $A(n) = \sum_{i=1}^n \frac{n+1}{n^2+i} = \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+1}{n^2+2} + \cdots + \frac{n+1}{n^2+n} \notin \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

16 ([LAT23], 7., p. 11, THPT 492). Chứng minh: (a)  $\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{4035}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2018}} > \frac{2019}{4036}$ . (b)  $2n \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) > (n+1) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

## 1.3 Tính giá trị của biểu thức có điều kiện

17 ([LAT23], Ví dụ 1, p. 12, THPT 377). Cho 2 đa thức  $f(x) = (x-2)^{2018} + (2x-3)^{2017} + 2016x$  &  $g(y) = y^{2019} - 2017y^{2018} + 2015y^{2017}$ . Giả sử sau khi thu gọn & khai triển ta tìm được tổng tất cả các hệ số của nó là  $s$ . Tính  $s, g(s)$ .

18 ([LAT23], Ví dụ 2, p. 12, Pi 2/5 2018). Xét các số thực  $x, y, z$  khác 0, đôi một khác nhau & thỏa mãn điều kiện  $x^2 - xy = y^2 - yz = z^2 - zx$ . Tìm tất cả các giá trị có thể của biểu thức  $A = \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x}$ .

19 ([LAT23], Ví dụ 3, p. 12). Cho  $x + y = 3$ . Tính giá trị của biểu thức  $A = x^2 + y^2 + 2xy - 4x - 4y + 2018$ .

20 ([LAT23], Ví dụ 4, p. 13). Cho  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \neq 0$ . Tính giá trị của biểu thức  $A = 2018 \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right) + 2019$ .

21 ([LAT23], Ví dụ 5, p. 13, chuyên Toán Phú Thọ 2016–2017). Tính giá trị biểu thức  $A = \frac{1}{2x+2xz+1} + \frac{2xy}{y+2xy+10} + \frac{10z}{10z+yz+10}$  với  $x, y, z \in \mathbb{R}$  thỏa mãn  $xyz = 5$  &  $A$  có nghĩa.

**22** ([LAT23], Ví dụ 6, p. 13, chuyên Toán Hà Nội 2016–2017). Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}$  đôi một khác nhau thỏa mãn  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$  &  $abc \neq 0$ . Tính  $A = \frac{ab^2}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{bc^2}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{ca^2}{c^2 + a^2 - b^2}$ .

**23** ([LAT23], 1., p. 14, chuyên ĐHSPT Hà Nội 2018–2019). Cho  $x_1, x_2, \dots, x_9 \in \mathbb{Z}$  thỏa mãn  $\prod_{i=1}^9 (1 + x_i) = \prod_{i=1}^9 (1 - x_i) = x$ , i.e.,  $(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_9) = (1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_9) = x$ . Tính  $A = x \prod_{i=1}^9 x_i = xx_1x_2 \cdots x_9$ .

**24** ([LAT23], 2., p. 14, HSG Phú Thọ 2017–2018). Cho  $a^2(b + c) = b^2(c + a) = 2018$  với  $a, b, c \in \mathbb{R}$  đôi một khác nhau & khác 0. Tính giá trị của biểu thức  $c^2(a + b)$ .

**25** ([LAT23], 3., p. 15, HSG Hải Dương 2018–2019). Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $x + y + z + \sqrt{xyz} = 4$ . Chứng minh  $\sqrt{x(4 - y)(4 - z)} + \sqrt{y(4 - z)(4 - x)} + \sqrt{z(4 - x)(4 - y)} = 8 + \sqrt{xyz}$ .

**26** ([LAT23], 4., p. 15, HSG Bắc Giang 2017–2018). Cho  $x, y, z \in \mathbb{R}$  thỏa mãn  $x + y + z = 7$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 23$ ,  $xyz = 3$ . Tính giá trị biểu thức  $H = \frac{1}{xy + z - 6} + \frac{1}{yz + x - 6} + \frac{1}{zx + y - 6}$ .

**27** ([LAT23], 5., p. 16, chuyên Toán Hải Dương 2017–2018). Cho 3 số  $x, y, z \in \mathbb{R}$  đôi một khác nhau & thỏa mãn điều kiện  $x + y + z = 0$ . Tính giá trị của biểu thức  $A = \frac{2018(x - y)(y - z)(z - x)}{2xy^2 + 2yz^2 + 2zx^2 + 3xyz}$ .

**28** ([LAT23], Ví dụ 1, p. 16). Cho  $a, b, c \in \mathbb{N}^*$  thỏa mãn  $2a^a + b^b = 3c^c$ . Tính giá trị của biểu thức  $A = 2015^{a-b} + 2016^{b-c} + 2017^{c-a} + 2018$ .

**29** ([LAT23], 1., p. 16). Cho các số thực dương  $a, b$  thỏa mãn:  $a^{2018} + b^{2018} = a^{2019} + b^{2019} = a^{2020} + b^{2020}$ . Tính giá trị biểu thức  $A = 2018(a^{2021} + b^{2021})$ .

**30** ([LAT23], 2., p. 16). Cho các số thực  $x, y, z$  khác 0 thỏa mãn đồng thời  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$  &  $\frac{2}{xy} - \frac{1}{z^2} = 4$ . Tính giá trị biểu thức  $A = (x + 2y + z)^{2018}$ .

## 1.4 Generalization – Tổng Quát Hóa

**31** (Rút gọn phân thức bậc 1/bậc 1). Cho biểu thức  $A = \frac{ax + b}{cx + d}$  là phân thức với tử thức & mẫu thức đều là đa thức bậc nhất ẩn  $x$ , trong đó  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $ac \neq 0$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Tìm điều kiện của  $a, b, c, d$  để  $A$  có thể rút gọn. (c) Tìm biểu thức rút gọn của  $A$ .

**32** (Rút gọn phân thức bậc 1/bậc 2 dạng rút gọn). Cho biểu thức  $A = \frac{x + a}{x^2 + bx + c}$  là phân thức với tử thức là đa thức bậc nhất ẩn  $x$  còn mẫu thức là đa thức bậc 2 ẩn  $x$ , trong đó  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Tìm điều kiện của  $a, b, c$  để  $A$  có thể rút gọn. (c) Tìm biểu thức rút gọn của  $A$ .

**33** (Rút gọn phân thức bậc 1/bậc 2). Cho biểu thức  $A = \frac{ax + b}{cx^2 + dx + e}$  là phân thức với tử thức là đa thức bậc nhất ẩn  $x$  còn mẫu thức là đa thức bậc 2 ẩn  $x$ , trong đó  $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ ,  $ac \neq 0$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Tìm điều kiện của  $a, b, c, d, e$  để  $A$  có thể rút gọn. (c) Tìm biểu thức rút gọn của  $A$ .

**34** (Rút gọn phân thức bậc 1/bậc 3 dạng rút gọn). Cho biểu thức  $A = \frac{x + a}{x^3 + bx^2 + cx + d}$  là phân thức với tử thức là đa thức bậc nhất ẩn  $x$  còn mẫu thức là đa thức bậc 3 ẩn  $x$ , trong đó  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Tìm điều kiện của  $a, b, c, d$  để  $A$  có thể rút gọn. (c) Tìm biểu thức rút gọn của  $A$ .

**35** (Rút gọn phân thức bậc 1/bậc 3). Cho biểu thức  $A = \frac{ax + b}{cx^3 + dx^2 + ex + f}$  là phân thức với tử thức là đa thức bậc nhất ẩn  $x$  còn mẫu thức là đa thức bậc 3 ẩn  $x$ , trong đó  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ ,  $ac \neq 0$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Tìm điều kiện của  $a, b, c, d, e, f$  để  $A$  có thể rút gọn. (c) Tìm biểu thức rút gọn của  $A$ .

**36** (Rút gọn phân thức bậc 1/bậc 4 trùng phương dạng rút gọn). Cho biểu thức  $A = \frac{x + a}{x^4 + bx^2 + c}$  là phân thức với tử thức là đa thức bậc nhất ẩn  $x$  còn mẫu thức là đa thức bậc 4 ẩn  $x$  dạng trùng phương, trong đó  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Tìm điều kiện của  $a, b, c$  để  $A$  có thể rút gọn. (c) Tìm biểu thức rút gọn của  $A$ .

**37** (Rút gọn phân thức bậc 1/bậc 4 trùng phương). Cho biểu thức  $A = \frac{ax + b}{cx^4 + dx^2 + e}$  là phân thức với tử thức là đa thức bậc nhất ẩn  $x$  còn mẫu thức là đa thức bậc 4 ẩn  $x$  dạng trùng phương, trong đó  $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ ,  $ac \neq 0$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Tìm điều kiện của  $a, b, c, d, e$  để  $A$  có thể rút gọn. (c) Tìm biểu thức rút gọn của  $A$ .

**38** (Rút gọn phân thức bậc 2/bậc 1 dạng rút gọn). Cho biểu thức  $A = \frac{x^2 + ax + b}{x + c}$  là phân thức với tử thức là đa thức bậc 2 ẩn  $x$  còn mẫu thức là đa thức bậc nhất ẩn  $x$ , trong đó  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Tìm điều kiện của  $a, b, c$  để  $A$  có thể rút gọn. (c) Tìm biểu thức rút gọn của  $A$ .

- 39** (Rút gọn phân thức bậc 2/bậc 1). Cho biểu thức  $A = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$  là phân thức với tử thức là đa thức bậc 2 ẩn  $x$  còn mẫu thức là đa thức bậc nhất ẩn  $x$ , trong đó  $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ ,  $ad \neq 0$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Tìm điều kiện của  $a, b, c, d, e$  để  $A$  có thể rút gọn. (c) Tìm biểu thức rút gọn của  $A$ .
- 40** (Rút gọn phân thức bậc 2/bậc 2 dạng rút gọn). Cho biểu thức  $A = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}$  là phân thức với tử thức & mẫu thức đều là đa thức bậc 2 ẩn  $x$ , trong đó  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Tìm điều kiện của  $a, b, c, d$  để  $A$  có thể rút gọn. (c) Tìm biểu thức rút gọn của  $A$ .
- 41** (Rút gọn phân thức bậc 2/bậc 2). Cho biểu thức  $A = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}$  là phân thức với tử thức & mẫu thức đều là đa thức bậc 2 ẩn  $x$ , trong đó  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ ,  $ad \neq 0$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Tìm điều kiện của  $a, b, c, d, e, f$  để  $A$  có thể rút gọn. (c) Tìm biểu thức rút gọn của  $A$ .
- 42** (Rút gọn phân thức bậc 3/bậc 1 dạng rút gọn). Cho biểu thức  $A = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x + d}$  là phân thức với tử thức là đa thức bậc 3 ẩn  $x$  còn mẫu thức là đa thức bậc nhất ẩn  $x$ , trong đó  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Tìm điều kiện của  $a, b, c, d$  để  $A$  có thể rút gọn. (c) Tìm biểu thức rút gọn của  $A$ .
- 43** (Rút gọn phân thức bậc 3/bậc 1). Cho biểu thức  $A = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{ex + f}$  là phân thức với tử thức là đa thức bậc 3 ẩn  $x$  còn mẫu thức là đa thức bậc nhất ẩn  $x$ , trong đó  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ ,  $ae \neq 0$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Tìm điều kiện của  $a, b, c, d, e, f$  để  $A$  có thể rút gọn. (c) Tìm biểu thức rút gọn của  $A$ .
- 44** (Rút gọn phân thức bậc 3/bậc 2 dạng rút gọn). Cho biểu thức  $A = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x^2 + dx + e}$  là phân thức với tử thức là đa thức bậc 3 ẩn  $x$  còn mẫu thức là đa thức bậc 2 ẩn  $x$ , trong đó  $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Tìm điều kiện của  $a, b, c, d, e$  để  $A$  có thể rút gọn. (c) Tìm biểu thức rút gọn của  $A$ .
- 45** (Rút gọn phân thức bậc 3/bậc 2). Cho biểu thức  $A = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{ex^2 + fx + g}$  là phân thức với tử thức là đa thức bậc 3 ẩn  $x$  còn mẫu thức là đa thức bậc 2 ẩn  $x$ , trong đó  $a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{R}$ ,  $ae \neq 0$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Tìm điều kiện của  $a, b, c, d, e, f, g$  để  $A$  có thể rút gọn. (c) Tìm biểu thức rút gọn của  $A$ .
- 46** (Rút gọn phân thức bậc 3/bậc 3 dạng rút gọn). Cho biểu thức  $A = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x^3 + dx^2 + ex + f}$  là phân thức với tử thức & mẫu thức đều là đa thức bậc 3 ẩn  $x$ , trong đó  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Tìm điều kiện của  $a, b, c, d, e, f$  để  $A$  có thể rút gọn. (c) Tìm biểu thức rút gọn của  $A$ .
- 47** (Rút gọn phân thức bậc 3/bậc 3). Cho biểu thức  $A = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{ex^3 + fx^2 + gx + h}$  là phân thức với tử thức & mẫu thức đều là đa thức bậc 3 ẩn  $x$ , trong đó  $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$ ,  $ae \neq 0$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Tìm điều kiện của  $a, b, c, d, e, f, g, h$  để  $A$  có thể rút gọn. (c) Tìm biểu thức rút gọn của  $A$ .

Also: Phương trình trùng phương, phương trình quy về phương trình bậc 2, 3.

**48.** Cho các hàm phân thức  $A(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  với  $P(x), Q(x)$  thuộc tập hợp đa thức có bậc từ 1 đến 3 & các đa thức có thể quy về dạng đa thức bậc 2 hoặc bậc 3, e.g., hàm số bậc 4 trùng phương  $ax^4 + bx^2 + c = a(x^2)^2 + b(x^2) + c$ , phương trình  $ax^{2n} + bx^n + c$  quy được về phương trình bậc 2, &  $ax^{3n} + bx^{2n} + cx^n + d$ . Viết chương trình Pascal, Python, C/C++ để: (a) Tìm ĐKXD của  $A$ , tập xác định (TXD)  $D_A$  của  $A$ . (b) Kiểm tra thông qua giá trị của các hệ số của tử thức & mẫu thức để biết  $A$  có thể rút gọn được hay không nhờ các bài toán trên. (c) Nếu  $A$  có thể rút gọn, xuất ra biểu thức rút gọn của  $A$ .

- Input. Line 1: Số test  $t \in \mathbb{N}^*$ . Line chẵn:  $P(x)$ . Line lẻ  $\geq 3$ :  $Q(x)$ .
- Output. Xuất ra ĐKXD, TXD  $D_A$  của  $A$ . Thông báo  $A$  có thể rút gọn được hay không, e.g., A can be simplified or A cannot be simplified. Nếu được, xuất ra biểu thức rút gọn của  $A$ .
- Sample.

simplify_rational_expression.inp	simplify_rational_expression.out
1	$x \neq 3 \ \& \ x \neq 1/3, D_A = \mathbb{R} \setminus \{1, 1/3\}$
$2x^3 - 7x^2 - 12x + 45$	A can be simplified
$3x^3 - 19x^2 + 33x - 9$	$(2x + 5)/(3x - 1)$

## Tài liệu

[LAT23] Nguyễn Tiến Lâm, Trương Quang An, and Trịnh Khắc Tuấn. *Tuyển Chọn Các Chuyên Đề Bồi Dưỡng Học Sinh Giỏi Toán 9 Đại Số*. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2023, p. 323.