

Problem: Square Root & Cube Root – Bài Tập Căn Bậc 2 & 3

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 24 tháng 4 năm 2023

Tóm tắt nội dung

Mục lục

1 Square Root & Irrationals – Căn Bậc 2 & Số Vô Tỷ	1
2 Căn Thức Bậc 2 & Hằng Đẳng Thức $\sqrt{A^2} = A $	1
3 Liên Hệ Giữa Phép Nhân, Phép Chia & Phép Khai Phương	2
4 Biến Đổi Đơn Giản Biểu Thức Chứa Căn Thức Bậc 2	4
5 Rút Gọn Biểu Thức Có Chứa Căn Thức Bậc 2	4
6 Cube Root, n th Root – Căn Bậc 3, Căn Bậc n	5
7 Miscellaneous	6
Tài liệu	8

1 Square Root & Irrationals – Căn Bậc 2 & Số Vô Tỷ

Bài toán 1 ([Tuy22], Thí dụ 1, p. 5). Cho số thực $x \geq 0$. So sánh \sqrt{x} với x .

Bài toán 2 ([Bin23], Ví dụ 2, p. 5). Chứng minh tổng của 1 số hữu tỷ với 1 số vô tỷ là 1 số vô tỷ.

Bài toán 3 ([Bin23], Ví dụ 3, p. 5). Xét xem các số a, b có thể là số vô tỷ hay không, nếu: (a) $a + b$ & $a - b$ là các số hữu tỷ. (b) $a - b$ & ab là các số hữu tỷ.

Bài toán 4 ([Bin23], Ví dụ 4, p. 5). Chứng minh: Nếu số tự nhiên a không là số chính phương thì \sqrt{a} là số vô tỷ.

Bài toán 5 ([Bin23], 2., p. 6). Chứng minh các số sau là số vô tỷ: (a) $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$. (b) $m + \frac{\sqrt{3}}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Q}$, $n \neq 0$.

Bài toán 6 ([Bin23], 3., p. 6). Xét xem các số a, b có thể là số vô tỷ hay không nếu: (a) ab & $\frac{a}{b}$ là các số hữu tỷ. (b) $a + b$ & $\frac{a}{b}$ là các số hữu tỷ ($a + b \neq 0$). (c) $a + b$, a^2 , & b^2 là các số hữu tỷ ($a + b \neq 0$).

Bài toán 7 ([Bin23], 4., p. 6). So sánh 2 số: (a) $2\sqrt{3}$ & $3\sqrt{2}$. (b) $6\sqrt{5}$ & $5\sqrt{6}$. (c) $\sqrt{24} + \sqrt{45}$ & 12. (d) $\sqrt{37} - \sqrt{15}$ & 2.

Bài toán 8 ([Bin23], 5., p. 6). (a) Cho 1 ví dụ để chứng tỏ khẳng định $\sqrt{a} \leq a$ với mọi số a không âm là sai. (b) Cho $a > 0$. Với giá trị nào của a thì $\sqrt{a} > a$?

Bài toán 9 ([Bin23], 6*, pp. 6–7). (a) Chỉ ra 1 số thực x mà $x - \frac{1}{x}$ là số nguyên ($x \neq \pm 1$). (b) Chứng minh nếu $x - \frac{1}{x}$ là số nguyên & $x \neq \pm 1$ thì x & $x + \frac{1}{x}$ là số vô tỷ. Khi đó $(x + \frac{1}{x})^{2n}$ & $(x + \frac{1}{x})^{2n+1}$ là số hữu tỷ hay số vô tỷ?

2 Căn Thức Bậc 2 & Hằng Đẳng Thức $\sqrt{A^2} = |A|$

Bài toán 10 ([Tuy22], Thí dụ 2, p. 5). Cho $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $abc \neq 0$ & $a = b + c$. Chứng minh $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \in \mathbb{Q}$.

Bài toán 11 ([Tuy22], 1., p. 6). Tính $A = \sqrt{\frac{8^{10} - 4^{10}}{4^{11} - 8^4}}$.

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyentuanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

Bài toán 12 ([Tuy22], 2., p. 6). Cho $A = \underbrace{99 \dots 9}_{10's} \underbrace{400 \dots 0}_{10's} 9$. Tính \sqrt{A} .

Bài toán 13 ([Tuy22], 3., p. 6). Không dùng máy tính hoặc bảng số, so sánh: (a) $\sqrt{8} + \sqrt{15}$ & $\sqrt{65} - 1$. (b) $\frac{13 - 2\sqrt{3}}{6}$ & $\sqrt{2}$.

Bài toán 14 ([Tuy22], 4., p. 6). Tìm DKXD của các biểu thức: (a) $\sqrt{2 - x^2}$. (b) $\frac{x}{\sqrt{5x^2 - 3}}$. (c) $\sqrt{-4x^2 + 4x - 1}$. (d) $\frac{1}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$.

Bài toán 15 ([Tuy22], 5., p. 6). Cho $a, b, c \in \mathbb{Q}$ khác nhau đôi một. Chứng minh $A = \sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}} \in \mathbb{Q}$.

Bài toán 16 ([Tuy22], 6., p. 6). Cho $a, b, c \in \mathbb{Q}$ thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh $\sqrt{(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)} \in \mathbb{Q}$.

Bài toán 17 ([Tuy22], 7., p. 6-7). (a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sqrt{-x^2 + x} + \frac{3}{4}$. (b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = \sqrt{4x^4 - 4x^2(x+1) + (x+1)^2 + 9}$. (c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = \sqrt{25x^2 - 20x + 4} + \sqrt{25x^2}$.

Bài toán 18 ([Tuy22], 8., p. 7). Cho $x < 0$, rút gọn biểu thức $A = |2x - \sqrt{(5x-1)^2}|$.

Bài toán 19 ([Tuy22], 9., p. 7). Cho biểu thức $A = 4x - \sqrt{9x^2 - 12x + 4}$. (a) Rút gọn A. (b) Tính giá trị của A với $x = \frac{2}{7}$.

Bài toán 20 ([Tuy22], 10., p. 7). Cho biểu thức $A = 5x + \sqrt{x^2 + 6x + 9}$. (a) Rút gọn A. (b) Tìm x để $B = -9$.

Bài toán 21 ([Tuy22], 11., p. 7). Tìm $x \in \mathbb{R}$ biết $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} \leq 5 - x$.

Bài toán 22 ([Tuy22], 12., p. 7). Giải phương trình: (a) $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{x + 1}$. (b) $\sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 0$. (c) $\sqrt{x^2 - 4} - x^2 + 4 = 0$.

Bài toán 23 ([Tuy22], 13., p. 7). Giải phương trình: (a) $\sqrt{x^2 - 4x + 5} + \sqrt{x^2 - 4x + 8} + \sqrt{x^2 - 4x + 9} = 3 + \sqrt{5}$. (b) $\sqrt{2 - x^2 + 2x} + \sqrt{-x^2 - 6x - 8} = 1 + \sqrt{3}$. (c) $\sqrt{9x^2 - 6x + 2} + \sqrt{45x^2 - 30x + 9} = \sqrt{6x - 9x^2 + 8}$.

Bài toán 24 ([Bin23], Ví dụ 5, p. 7). Cho biểu thức $A = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4x + 4}}$. (a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức A. (b) Rút gọn biểu thức A.

Bài toán 25 ([Bin23], Ví dụ 6, p. 8). Tìm điều kiện xác định của các biểu thức: (a) $A = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}$. (b) $B = \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2x + 1}}}$.

Bài toán 26 ([Bin23], Ví dụ 7, p. 8). Tìm các giá trị của x sao cho $\sqrt{x+1} < x+3$.

Bài toán 27 ([Bin23], 7., p. 9). Tìm điều kiện xác định của các biểu thức: (a) $3 - \sqrt{1 - 16x^2}$. (b) $\frac{1}{1 - \sqrt{x^2 - 3}}$. (c) $\sqrt{8x - x^2 - 15}$.

(d) $\frac{2}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$. (e) $A = \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}}$. (f) $B = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{\sqrt{2x + 1}} + \sqrt{x^2 - 8x + 14}$.

Bài toán 28 ([Bin23], 8., p. 9). Cho biểu thức $A = \sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{x^2 + 6x + 9}$. (a) Rút gọn biểu thức A. (b) Tìm các giá trị của x để $A = 1$.

Bài toán 29 ([Bin23], 9., p. 9). Tìm các giá trị của x sao cho: (a) $\sqrt{x^2 - 3} \leq x^2 - 3$. (b) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} > x - 6$.

Bài toán 30 ([Bin23], 10., p. 9). Cho $a + b + c = 0$ & $abc \neq 0$. Chứng minh hằng đẳng thức: $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right|$.

3 Liên Hệ Giữa Phép Nhân, Phép Chia & Phép Khai Phương

Bài toán 31 ([Tuy22], Thí dụ 3, p. 9). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}}$.

Bài toán 32 ([Tuy22], Thí dụ 4, p. 10). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sqrt{x - 5} + \sqrt{13 - x}$.

Bài toán 33 ([Tuy22], 14., p. 11). Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{3}} - \sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{7} - 2}}$.

Bài toán 34 ([Tuy22], 15., p. 11). Cho 2 số có tổng bằng $\sqrt{19}$ & có hiệu bằng $\sqrt{7}$. Tính tích của 2 số đó.

Bài toán 35 ([Tuy22], 16., p. 11). Tính \sqrt{A} biết: (a) $A = 13 - 2\sqrt{42}$. (b) $A = 46 + 6\sqrt{5}$. (c) $A = 12 - 3\sqrt{15}$.

Bài toán 36 ([Tuy22], 17., p. 12). Rút gọn biểu thức: (a) $A = \sqrt{6 + 2\sqrt{2}\sqrt{3 - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}}$. (b) $B = \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$. (c) $C = \sqrt{3 - \sqrt{5}(\sqrt{10} - \sqrt{2})(3 + \sqrt{5})}$.

Bài toán 37 ([Tuy22], 18., p. 12). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$.

Bài toán 38 ([Tuy22], 19., p. 12). Cho $a > 0$, so sánh $\sqrt{a+1} + \sqrt{a+3}$ với $2\sqrt{a+2}$.

Bài toán 39 ([Tuy22], 20., p. 12). Cho $a, b, x, y > 0$. Chứng minh $\sqrt{ax} + \sqrt{by} \leq \sqrt{(a+b)(x+y)}$.

Bài toán 40 ([Tuy22], 21., p. 12). (a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-8}$. (b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$.

Bài toán 41 ([Tuy22], 22., p. 12). Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} \left[\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3} \right]}{2 + \sqrt{1-x^2}}.$$

Bài toán 42 ([Tuy22], 23., p. 12). Tìm x, y biết $x + y + 12 = 4\sqrt{x} + 6\sqrt{y-1}$.

Bài toán 43 ([Tuy22], 24., p. 12). Tìm x, y, z biết $\sqrt{x-a} + \sqrt{y-b} + \sqrt{z-c} = \frac{1}{2}(x+y+z)$, trong đó $a+b+c=3$.

Bài toán 44 ([Tuy22], 25., p. 12). Giải phương trình $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8+6\sqrt{x-1}} = 5$.

Bài toán 45 ([Tuy22], 26., p. 12). Giải phương trình $\sqrt{x^2-5x+6} + \sqrt{x+1} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2-2x-3}$.

Bài toán 46 ([Tuy22], 27., p. 12). Chứng minh bất đẳng thức $\sqrt{n+a} + \sqrt{n-a} < 2\sqrt{n}$ vptos $0 < |a| \leq n$. Áp dụng (không dùng máy tính hoặc bảng số): Chứng minh: $\sqrt{101} - \sqrt{99} > 0.1$.

Bài toán 47 ([Tuy22], 28., p. 13). Chứng minh: $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Áp dụng: Cho $S = \sum_{i=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}}$. Chứng minh $18 < S < 19$.

Bài toán 48 ([Tuy22], 29., p. 13). Chứng minh: $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Áp dụng: Chứng minh: $S = \sum_{i=1}^{2500} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2500}} < 100$.

Bài toán 49 ([Tuy22], 30., p. 13). Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh $x + y + z \geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$.

Bài toán 50 ([Tuy22], 31., p. 13). Cho $A = \sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}$. Chứng minh $A \leq 4$.

Bài toán 51 ([Tuy22], 32., p. 13). Cho $B = \frac{x^3}{1+y} + \frac{y^3}{1+x}$ trong đó x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy = 1$. Chứng minh $B \geq 1$.

Bài toán 52 ([Tuy22], 33., p. 13). Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 2$. Chứng minh $xyz \leq \frac{1}{8}$.

Bài toán 53 ([Tuy22], 34., p. 13). Tìm các số dương x, y, z sao cho $x + y + z = 3$ & $x^4 + y^4 + z^4 = 3xyz$.

Bài toán 54 ([Tuy22], 35., p. 13). Cho $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 10$. Chứng minh: $x + y \geq 20$.

Bài toán 55 ([Tuy22], 36., p. 13). Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$. Chứng minh: $\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} \leq \sqrt{6}$.

Bài toán 56 ([Bin23], Ví dụ 8, p. 10). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x+\sqrt{2x-1}} - \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$.

Bài toán 57 ([Bin23], Ví dụ 9, p. 11). Chứng minh số $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ là số vô tỷ.

Bài toán 58 ([Bin23], 11., pp. 11–12). Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{11-2\sqrt{10}}$. (b) $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$. (c) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$. (d) $\sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{9+4\sqrt{5}}$. (e) $\sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}}$. (f) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{2} + \sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{7+2\sqrt{10}}}$. (g) $\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{7}+4\sqrt{3}}}$. (h) $\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$. (i) $\sqrt{94-42\sqrt{5}} - \sqrt{94+42\sqrt{5}}$.

Bài toán 59 ([Bin23], 12., p. 12). Tính: (a) $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$. (b) $\sqrt{3-\sqrt{5}}(\sqrt{10}-\sqrt{2})(3+\sqrt{5})$.

(c) $\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Bài toán 60 ([Bin23], 13., p. 12). Chứng minh các hằng đẳng thức sau với $b \geq 0$, $a \geq \sqrt{b}$: (a) $\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2(a \pm \sqrt{a^2-b})}$. (b) $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$.

Bài toán 61 ([Bin23], 14., p. 12). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x+2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$.

Bài toán 62 ([Bìn23], 15., p. 12). Cho biểu thức $A = \frac{x + \sqrt{x^2 - 2x}}{x - \sqrt{x^2 - 2x}} - \frac{x - \sqrt{x^2 - 2x}}{x + \sqrt{x^2 - 2x}}$. (a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức A . (b) Rút gọn biểu thức A . (c) Tìm giá trị của x để $A < 2$.

Bài toán 63 ([Bìn23], 16., p. 12). Lập 1 phương trình bậc 2 với các hệ số nguyên, trong đó: (a) $2 + \sqrt{3}$ là 1 nghiệm của phương trình. (b) $6 - 4\sqrt{2}$ là 1 nghiệm của phương trình.

Bài toán 64 ([Bìn23], 17., p. 13). Chứng minh các số sau là số vô tỷ: (a) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$. (b) $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Bài toán 65 ([Bìn23], 18., p. 13). Có tồn tại các số hữu tỷ dương a, b hay không nếu: (a) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2}$. (b) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{\sqrt{2}}$.

Bài toán 66 ([Bìn23], 19., p. 13). Cho 3 số $x, y, \sqrt{x} + \sqrt{y}$ là các số hữu tỷ. Chứng minh mỗi số \sqrt{x}, \sqrt{y} đều là số hữu tỷ.

Bài toán 67 ([Bìn23], 20., p. 13). Cho a, b, c, d là các số dương. Chứng minh tồn tại 1 số dương trong 2 số $2a + b - 2\sqrt{cd}$ & $2c + d - 2\sqrt{ab}$.

Bài toán 68 ([Bìn23], 21*, p. 13). (a) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}}$ với $a > 0$. (b) Tính giá trị của tổng $B = \sum_{i=1}^{99} \sqrt{1 + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(i+1)^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}}$.

Bài toán 69 ([Bìn23], 22*, p. 13). (a) Nêu 1 cách tính nhẩm 997^2 . (b) Tính tổng các chữ số của A biết $\sqrt{A} = 99 \dots 96$ (có 100 chữ số 9).

4 Biến Đổi Đơn Giản Biểu Thức Chứa Căn Thức Bậc 2

Bài toán 70 ([Bìn23], Ví dụ 10, p. 14). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$.

Bài toán 71 ([Bìn23], Ví dụ 11, p. 14). Tính giá trị của biểu thức

$$M = \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{(i+1)\sqrt{i} + i\sqrt{i+1}} = \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{25\sqrt{24} + 24\sqrt{25}}.$$

Bài toán 72 ([Bìn23], 23., p. 15). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{1-a} + \sqrt{a(a-1)} + a\sqrt{\frac{a-1}{a}}$.

Bài toán 73 ([Bìn23], 24., p. 15). Chứng minh các hằng đẳng thức: (a) $\sqrt{10 + \sqrt{60 - \sqrt{24 - \sqrt{40}}}} = \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{2}$. (b) $\sqrt{6 + \sqrt{24} + \sqrt{12} + \sqrt{8} - \sqrt{3}} = \sqrt{2} + 1$.

Bài toán 74 ([Bìn23], 25., p. 15). Cho $A = \sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}}$. Biểu diễn A dưới dạng tổng của 3 căn thức.

Bài toán 75 ([Bìn23], 26., p. 15). Rút gọn biểu thức $A = \frac{x + 3 + 2\sqrt{x^2 - 9}}{2x - 6 + \sqrt{x^2 - 9}}$.

Bài toán 76 ([Bìn23], 27., p. 15). Rút gọn biểu thức $B = \frac{x^2 + 5x + 6 + x\sqrt{9 - x^2}}{3x - x^2 + (x+2)\sqrt{9 - x^2}}$.

Bài toán 77 ([Bìn23], 28., p. 15). Rút gọn biểu thức:

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}},$$

$$B = \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{\sqrt{i} - \sqrt{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{1} - \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{4}} - \dots - \frac{1}{\sqrt{24} - \sqrt{25}}.$$

5 Rút Gọn Biểu Thức Có Chứa Căn Thức Bậc 2

Bài toán 78 ([Bìn23], Ví dụ 12, p. 15). Tính: $A = \left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \right) : \left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} - \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \right)$.

Bài toán 79 ([Bìn23], Ví dụ 13, p. 16). Rút gọn biểu thức $A = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

Bài toán 80 ([Bìn23], Ví dụ 14, p. 16). Cho $A = \frac{\sqrt{a+6}}{\sqrt{a+1}}$. (a) Tìm các số nguyên a để A là số nguyên. (b) Chứng minh với $a = \frac{4}{9}$ thì A là số nguyên. (c) Tìm các số hữu tỷ a để A là số nguyên.

Bài toán 81 ([Bin23], 29., p. 18). Rút gọn biểu thức: (a) $A = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$. (b) $B = \left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right) \left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-a}\right)^2$. (c) $C = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}} : \left[\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \frac{1}{x+y+2\sqrt{xy}} + \frac{2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)\right]$ với $x = 2 - \sqrt{3}$ & $y = 2 + \sqrt{3}$.

Bài toán 82 ([Bin23], 30., p. 18). Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}$.

Bài toán 83 ([Bin23], 31., p. 18). Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x^2 - y^2}} - \sqrt{x - \sqrt{x^2 - y^2}}}{\sqrt{2(x-y)}}$ với $x > y > 0$.

Bài toán 84 ([Bin23], 32., p. 18). Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$ với $x = \frac{a^2+b^2}{2ab}$ & $b > a > 0$.

Bài toán 85 ([Bin23], 33., p. 18). Rút gọn biểu thức $B = \frac{2a\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$ với $x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1-a}{a}} - \sqrt{\frac{a}{1-a}}\right)$ & $0 < a < 1$.

Bài toán 86 ([Bin23], 34., p. 18). Rút gọn biểu thức $A = a + b - \sqrt{\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{c^2+1}}$ với $a, b, c > 0$ & $ab + bc + ca = 1$.

Bài toán 87 ([Bin23], 35., p. 18). Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}} \cdot \sqrt{2x-1}$.

Bài toán 88 ([Bin23], 36., p. 18). Chứng minh hằng đẳng thức sau với $x \geq 2$

$$\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{\frac{x^2-4}{x}}} + \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{\frac{x^2-4}{x}}} = \sqrt{\frac{2x+4}{\sqrt{x}}}.$$

Bài toán 89 ([Bin23], 37., p. 18). Cho $a = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}$. Tính $a^7 + b^7$.

Bài toán 90 ([Bin23], 38., p. 19). Cho biết $\sqrt{x^2-6x+13} - \sqrt{x^2-6x+10} = 1$. Tính $\sqrt{x^2-6x+13} + \sqrt{x^2-6x+10}$.

Bài toán 91 ([Bin23], 39., p. 19). Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{a+2}}{\sqrt{a-2}}$. (a) Tìm các số nguyên a để A là số nguyên. (b) Tìm các số hữu tỷ a để A là số nguyên.

Bài toán 92 ([Bin23], 40., p. 19). Cho $a = \sqrt{2} - 1$. (a) Viết a^2, a^3 dưới dạng $\sqrt{m} - \sqrt{m-1}$ trong đó m là số tự nhiên. (b) Chứng minh với mọi số nguyên dương n , số a^n viết được dưới dạng trên.

6 Cube Root, nth Root – Căn Bậc 3, Căn Bậc n

Bài toán 93 ([Bin23], Ví dụ 15, p. 20). Chứng tỏ số $m = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ là 1 nghiệm của phương trình $x^3 + 3x - 4 = 0$.

Bài toán 94 ([Bin23], Ví dụ 16, p. 20). Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$.

Bài toán 95 ([Bin23], 41., p. 20). Tính: (a) $\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 2}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$. (b) $\sqrt{3+\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}$. (c) $\frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}$.

Bài toán 96 ([Bin23], 42., p. 21). Số $m = \sqrt[3]{4+\sqrt{80}} - \sqrt[3]{4-\sqrt{80}}$ có phải là nghiệm của phương trình $x^3 + 12x - 8 = 0$ không?

Bài toán 97 ([Bin23], 43., p. 21). Lập 1 phương trình bậc 3 với các hệ số nguyên, trong đó: (a) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ là 1 nghiệm của phương trình. (b) $\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}$ là 1 nghiệm của phương trình.

Bài toán 98 ([Bin23], 44., p. 21). Tính: (a) $A = \sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$. (b) $B = \sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$. (c) $C = \sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$. (d) $D = \sqrt[3]{2+10\sqrt{\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{2-10\sqrt{\frac{1}{27}}}$. (e) $E = \sqrt[3]{4+\frac{5}{3}\sqrt{\frac{31}{3}}} + \sqrt[3]{4-\frac{5}{3}\sqrt{\frac{31}{3}}}$.

Bài toán 99 ([Bin23], 45., p. 21). Tìm x biết: (a) $\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{2-x} = 1$. (b) $2x^3 = (x-1)^3$.

Bài toán 100 ([Bin23], 46., p. 21). Cho $am^3 = bn^3 = cp^3$ & $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1$. Chứng minh: $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{am^2 + bn^2 + cp^2}$.

Bài toán 101 ([Bin23], 47., p. 21). Tính: (a) $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}(\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}})$. (b) $\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}} - \sqrt{2}$. (c) $\sqrt[4]{56-24\sqrt{5}}$. (d) $1 + \sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}$. (e) $\frac{2}{\sqrt{4-3\sqrt{5}}+2\sqrt{5}-\sqrt[4]{125}}$.

7 Miscellaneous

Bài toán 102 ([BNS23], Ví dụ 1.1, p. 5). *Rút gọn biểu thức* $A = \sqrt{(7 + 4\sqrt{3})(a - 1)^2}$.

Bài toán 103 ([BNS23], Ví dụ 1.2, p. 6). *Cho biểu thức* $A = \sqrt{a + 2\sqrt{a - 1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a - 1}}$. (a) *Tìm điều kiện xác định của A.* (b) *Rút gọn biểu thức A với* $1 \leq a < 2$. (c) *Rút gọn biểu thức A với* $a \geq 2$.

Bài toán 104 ([BNS23], Ví dụ 1.3, p. 6). *Đơn giản biểu thức* $A = (\sqrt{8 + 2\sqrt{7}} + 2\sqrt{8 - 2\sqrt{7}})(\sqrt{63} + 1)$.

Bài toán 105 ([BNS23], Ví dụ 1.4, p. 6). *Tính tổng* $A = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}}$.

Bài toán 106 ([BNS23], Ví dụ 1.5, p. 6). *Tính* $A = \frac{\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}(7 + 2\sqrt{10})(74 - 22\sqrt{10})}{\sqrt{125} - 4\sqrt{50} + 5\sqrt{20} + \sqrt{8}}$.

Bài toán 107 ([BNS23], Ví dụ 1.6, p. 7). *Cho* $a = \sqrt{3 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}} + \sqrt{3 - \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}$. *Chứng minh:* $a^2 - 2a - 2 = 0$.

Bài toán 108 ([BNS23], Ví dụ 1.7, p. 7). *Cho* $a = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$. *Tính*

$$A = \frac{a^4 - 4a^3 + a^2 + 6a + 4}{a^2 - 2a + 12}.$$

Bài toán 109 ([BNS23], Ví dụ 1.8, p. 7). *Cho* $f(x) = \frac{1 + \sqrt{1 + x}}{x + 1} + \frac{1 + \sqrt{1 - x}}{x - 1}$ *với* $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$. *Tính* $f(a)$.

Bài toán 110 ([BNS23], Ví dụ 1.9, p. 8). *Giả thiết* $x, y, z > 0$ *và* $xy + yz + zx = a$. *Chứng minh*

$$x\sqrt{\frac{(a + y^2)(a + z^2)}{a + x^2}} + y\sqrt{\frac{(a + z^2)(a + x^2)}{a + y^2}} + z\sqrt{\frac{(a + x^2)(a + y^2)}{a + z^2}} = 2a.$$

Bài toán 111 ([BNS23], 1.1, p. 8). *Biểu diễn* $\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}$ *thành* $a + b\sqrt{5}$ *với* $a, b \in \mathbb{Q}$.

Bài toán 112 ([BNS23], 1.2, p. 8). *Đơn giản biểu thức* $A = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{18} + \sqrt{28 - 16\sqrt{3}}$.

Bài toán 113 ([BNS23], 1.3, p. 8). *Chứng minh* $\sqrt{10 + 2\sqrt{24}} - \sqrt{10 - 2\sqrt{24}} = 4$.

Bài toán 114 ([BNS23], 1.4, p. 8). *Tính* $A = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$.

Bài toán 115 ([BNS23], 1.5, p. 9). *Tính tích* ab *với*

$$a = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{7 + \sqrt{2}}}, \quad b = \sqrt{3 + \sqrt{6 + \sqrt{7 + \sqrt{2}}}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{6 + \sqrt{7 + \sqrt{2}}}}.$$

Bài toán 116 ([BNS23], 1.6, p. 9). *Chứng minh* $\frac{4}{\sqrt{5} - 1} + \frac{3}{\sqrt{5} - 2} + \frac{16}{\sqrt{5} - 3} = -5$.

Bài toán 117 ([BNS23], 1.7, p. 9). *Chứng minh* $\left(\frac{2}{\sqrt{6} - 1} + \frac{3}{\sqrt{6} - 2} + \frac{3}{\sqrt{6} - 3}\right) \frac{5}{9\sqrt{6} + 4} = \frac{1}{2}$.

Bài toán 118 ([BNS23], 1.8, p. 9). *Cho* $f(x) = \frac{x + \sqrt{5}}{\sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{5}}} + \frac{x - \sqrt{5}}{\sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{5}}}$. *Tính* $f(3)$.

Bài toán 119 ([BNS23], 1.9, p. 9). *Cho* $f(x) = \frac{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}}$ *với* $a = \frac{4}{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}$. *Tính* $f(a)$.

Bài toán 120 ([BNS23], Ví dụ 2.1, p. 10). *Chứng minh với* $ab \neq 0$: $\frac{\sqrt[3]{a^5b^7}}{\sqrt[3]{a^2b}} - \frac{\sqrt[3]{a^4b^8}}{\sqrt[3]{ab^2}} = 0$.

Bài toán 121 ([BNS23], Ví dụ 2.2, p. 10). *Chứng minh với* $abc \neq 0$: $\frac{\sqrt[3]{a^4b^5c^7}}{\sqrt[3]{ab^2c}} = abc^2$.

Bài toán 122 ([BNS23], Ví dụ 2.3, p. 10). *Với* $a \geq 2 + \sqrt{2}$ *và*

$$u = \sqrt[3]{\left(a + \frac{2}{a}\right)^3 - 3a^2 - \frac{12}{a^2} + 3\left(a + \frac{2}{a}\right) - 13}, \quad v = \sqrt{a^2 + \frac{4}{a^2} - 8\left(a + \frac{2}{a}\right) + 20}.$$

Chứng minh $u - v = 3$.

Bài toán 123 ([BNS23], Ví dụ 2.4, p. 11). Đơn giản biểu thức $A = \sqrt[3]{8(7+5\sqrt{2})} + \sqrt[3]{216(7-5\sqrt{2})} + 4\sqrt{2} - 7$.

Bài toán 124 ([BNS23], Ví dụ 2.5, p. 11). Chứng minh $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1$.

Bài toán 125 ([BNS23], Ví dụ 2.6, p. 11). Chứng minh nếu $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ thì $a^3 + 3a = 4$.

Bài toán 126 ([BNS23], Ví dụ 2.7, p. 11). Chứng minh:

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}} + 3\sqrt[3]{2}\right)\sqrt{3}}}{3+\sqrt[6]{108}} = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}.$$

Bài toán 127 ([BNS23], Ví dụ 2.8, p. 12). Chứng minh nếu $\sqrt[3]{(a+1)^2} + \sqrt[3]{a^2-1} + \sqrt[3]{(a-1)^2} = 1$ thì $\sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a-1} = 2$.

Bài toán 128 ([BNS23], Ví dụ 2.9, p. 12). Đơn giản biểu thức $A = \frac{x+1}{2\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}+x+\frac{1}{x}}$ với $x \notin \{-1, 0\}$.

Bài toán 129 ([BNS23], Ví dụ 2.10, p. 12). Cho $a = \sqrt{2} + \sqrt{7 - \sqrt[3]{61+46\sqrt{5}}} + 1$. (a) Chứng minh $a^4 - 14a^2 + 9 = 0$. (b) Giả sử $f(x) = x^5 + 2x^4 - 14x^3 - 28x^2 + 9x + 19$. Tính $f(a)$.

Bài toán 130 ([BNS23], Ví dụ 2.11, p. 13). Cho $a, b, c > 0$. Giả sử m, n, p là những số nguyên dương lớn hơn 1 sao cho $bc = \sqrt[m]{a}$, $ca = \sqrt[n]{b}$, & $ab = \sqrt[p]{c}$. Chứng minh trong 3 số a, b, c phải có ít nhất 1 số bằng 1.

Bài toán 131 ([BNS23], Ví dụ 2.12, p. 13). Cho $a = \frac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}$. (a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận số a làm nghiệm. (b) Giả sử đa thức $f(x) = 3x^6 - 4x^5 - 7x^4 + 6x^3 + 6x^2 + x - 53\sqrt{2}$. Tính $f(a)$.

Bài toán 132 ([BNS23], Ví dụ 2.13, p. 14). Cho $a = \frac{7-4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}} - \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$. (a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận số a làm nghiệm. (b) Giả sử đa thức $f(x) = \frac{x^6+x^4+4x^2}{40(x^4+4x^2-144)}$. Tính $f(a)$.

Bài toán 133 ([BNS23], Ví dụ 2.14, p. 14). Cho $a = \sqrt[3]{38+17\sqrt{5}} + \sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}$. Giả sử ta có đa thức $f(x) = (x^3+3x+1935)^{2012}$. Tính $f(a)$.

Bài toán 134 ([BNS23], 2.1., p. 14). Biểu diễn $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ thành $a+b\sqrt{5}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$.

Bài toán 135 ([BNS23], 2.2., p. 14). Cho $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} + \sqrt[3]{1-\sqrt{11}}$. Chứng minh $a^9 - 6a^6 + 282a^3 = 8$.

Bài toán 136 ([BNS23], 2.3., p. 15). Cho $a = (\sqrt[3]{1+2\sqrt{6}} - \sqrt[6]{5+4\sqrt{6}})\sqrt[3]{2\sqrt{6}-1} + 1$. (a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận a làm nghiệm. (b) Giả sử $f(x) = \sum_{i=1}^{2012} ix^i + 2012$. Tính $f(a)$.

Bài toán 137 ([BNS23], 2.4., p. 15). Chứng minh:

$$\frac{a+2\sqrt{ab}+9b}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}-2\sqrt[4]{ab}} - 2\sqrt{b} = \left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right)^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0.$$

Bài toán 138 ([BNS23], 2.5., p. 15). Chứng minh:

$$\left(\sqrt[3]{a^4} + b^2\sqrt[3]{a^2} + b^4\right) \frac{\sqrt[3]{a^8} - b^6 + b^4\sqrt[3]{a^2} - a^2b^2}{a^2b^2 + b^2 - a^2b^8 - b^4} = a^2b^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, ab \neq 0, a \neq b^3.$$

Bài toán 139 ([BNS23], 2.6., p. 15). Cho $a, b > 0$. Đơn giản biểu thức

$$A = \frac{\sqrt{a^3+2a^2b} + \sqrt{a^4+2a^3b} - \sqrt{a^3} - a^2b}{\sqrt{(2a+b-\sqrt{a^2+2ab})\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[6]{a^5}+a\right)}}.$$

Bài toán 140 ([BNS23], 2.7., p. 15). Giả sử $u^3 \geq v^2$, $u, v \in \mathbb{Q}^+$. Xác định u, v để

$$\sqrt{\frac{u-8\sqrt[6]{u^3v^2}+4\sqrt[3]{v^2}}{\sqrt{u}-2\sqrt[3]{v}+2\sqrt[12]{u^3v^2}}} + 3\sqrt[3]{v} + \sqrt[6]{v} = 1.$$

Bài toán 141. Cho $a, b, c, A, B \in \mathbb{Z}$, $c \geq 0$ thỏa mãn đẳng thức $(a+b\sqrt{c})^2 = A+B\sqrt{c}$. (a) Tìm mối quan hệ của a, b, c, A, B . Biểu diễn (A, B) theo (a, b, c) . (b)* Biểu diễn (a, b) theo (c, A, B) .

Bài toán 142. Cho $a, b, c, A, B \in \mathbb{Z}$, $c \geq 0$ thỏa mãn đẳng thức $(a+b\sqrt{c})^3 = A+B\sqrt{c}$. (a) Tìm mối quan hệ của a, b, c, A, B . Biểu diễn (A, B) theo (a, b, c) . (b)* Biểu diễn (a, b) theo (c, A, B) .

Bài toán 143. Cho $a, b, c, A, B \in \mathbb{Z}$, $c \geq 0$ thỏa mãn đẳng thức $(a+b\sqrt[3]{c})^3 = A+B\sqrt[3]{c}+C\sqrt[3]{c^2}$. (a) Tìm mối quan hệ của a, b, c, A, B, C . Biểu diễn (A, B, C) theo (a, b, c) . (b)* Biểu diễn (a, b) theo (c, A, B, C) .

Tài liệu

- [Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.
- [BNS23] Vũ Hữu Bình, Phạm Thị Bạch Ngọc, and Nguyễn Tam Sơn. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 9. Tập 1: Đại Số*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 192.
- [Tuy22] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần thứ 17. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2022, p. 340.