

# Rational – Số Hữu Tỷ $\mathbb{Q}$

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 5 tháng 12 năm 2022

## Tóm tắt nội dung

[EN] This text is a collection of problems, from easy to advanced, about rational. This text is also a supplementary material for my lecture note on Elementary Mathematics grade 7, which is stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 7/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary-mathematics/grade-7/lecture)<sup>1</sup>. The latest version of this text has been stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 7/rational](https://github.com/NQBH/hobby/elementary-mathematics/grade-7/rational)  $\mathbb{Q}$ <sup>2</sup>.

[vi] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài tập chọn lọc từ cơ bản đến nâng cao về phân thức đại số & phân thức đại số hữu tỷ. Tài liệu này là phần bài tập bổ sung cho tài liệu chính – bài giảng [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 7/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary-mathematics/grade-7/lecture) của tác giả viết cho Toán Sơ Cấp lớp 7. Phiên bản mới nhất của tài liệu này được lưu trữ & có thể tải xuống ở link sau: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 7/rational](https://github.com/NQBH/hobby/elementary-mathematics/grade-7/rational)  $\mathbb{Q}$ .

## Mục lục

<b>1 Problem</b>	<b>1</b>
1.1 Tập Hợp $\mathbb{Q}$ Các Số Hữu Tỷ	1
1.2 $\pm, \cdot, :$ Trên $\mathbb{Q}$	2
1.3 Lũy Thừa của 1 Số Hữu Tỷ	4
1.4 Thứ Tự Thực Hiện Các Phép Tính. Quy Tắc Chuyển Vế	7
1.5 Biểu Diễn Thập Phân của Số Hữu Tỷ	8
1.6 Phần Nguyên, Phần Lẻ của 1 Số Hữu Tỷ	9
1.7 Miscellaneous	10
<b>Tài liệu</b>	<b>10</b>

## 1 Problem

### 1.1 Tập Hợp $\mathbb{Q}$ Các Số Hữu Tỷ

**“1. Số hữu tỷ** là số viết được dưới dạng  $\frac{a}{b}$  với  $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ . Tập hợp các số hữu tỷ được ký hiệu là  $\mathbb{Q}$ . **2. Biểu diễn số hữu tỷ trên trục số:** Trên trục số, điểm biểu diễn số hữu tỷ  $x$  gọi là *điểm*  $x$ . Các số khác nhau biểu diễn bởi những điểm khác nhau. **3. Số đối** của 1 số hữu tỷ: Trên trục số, 2 số hữu tỷ có điểm biểu diễn nằm về 2 phía của gốc  $O$  & cách đều gốc  $O$  được gọi là 2 số đối nhau. Số đối của số hữu tỷ  $x$  ký hiệu là  $-x$ . Số đối của 0 là 0. **4. So sánh các số hữu tỷ:** Để so sánh  $x, y \in \mathbb{Q}$  ta làm như sau: Viết  $x, y$  dưới dạng 2 phân số có cùng mẫu dương  $x = \frac{a}{m}, y = \frac{b}{m}, m > 0$ . Sau đó so sánh các tử số: **•** Nếu  $a < b$  thì  $x < y$ . **•** Nếu  $a = b$  thì  $x = y$ . **•** Nếu  $a > b$  thì  $x > y$ . Số hữu tỷ lớn hơn 0 gọi là *số hữu tỷ dương*. Số hữu tỷ nhỏ hơn 0 gọi là *số hữu tỷ âm*. Số 0 không là số hữu tỷ dương, cũng không là số hữu tỷ âm. **5.** Cho các số hữu tỷ  $x = \frac{a}{b}$  &  $y = \frac{c}{d}, a, b, c, d \in \mathbb{Z}, b > 0, d > 0$ . Luôn có: **•**  $x = y \Leftrightarrow ad = bc, x < y \Leftrightarrow ad < bc, x > y \Leftrightarrow ad > bc$ . **•**  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ .” – Tuyên, 2022, §1, pp. 4–5

Với phân số  $\frac{a}{b}$  tối giản,  $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, \text{UCLN}(a, b) = 1$  thì các phân số có dạng  $\frac{na}{nb}, \forall n \in \mathbb{Z}^*,$  đều biểu diễn phân số  $\frac{a}{b}$ . Để so sánh 2 hay nhiều số hữu tỷ, chuyển chúng về cùng 1 trong 2 dạng: dạng phân số hoặc dạng biểu diễn thập phân, rồi so sánh chúng dựa vào các quy tắc đã học ở Toán 6.

**Bài toán 1** (Trọng et al., 2022, 10., p. 6). So sánh 2 số hữu tỷ  $\frac{a}{b}$  ( $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ ) với số 0 khi  $a, b$  cùng dấu & khi  $a, b$  khác dấu.

\*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam  
e-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com); website: <https://nqbh.github.io>.

<sup>1</sup>URL: [https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary-mathematics/grade-7/NQBH\\_elementary\\_mathematics\\_grade\\_7.pdf](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary-mathematics/grade-7/NQBH_elementary_mathematics_grade_7.pdf).

<sup>2</sup>URL: [https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary-mathematics/grade-7/rational/NQBH\\_rational.pdf](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary-mathematics/grade-7/rational/NQBH_rational.pdf).

*Giải.*  $a = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = 0$ ,  $ab > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} > 0$ , &  $ab < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} < 0$ . □

**Bài toán 2** (Trọng et al., 2022, 11., p. 6). Giả sử  $x = \frac{a}{m}$ ,  $y = \frac{b}{m}$ , ( $a, b, m \in \mathbb{Z}$ ,  $m > 0$ ) &  $x < y$ . Chứng minh  $x < z < y$  với  $z := \frac{a+b}{2m}$  ( $z$  là trung bình cộng của  $x$  &  $y$ , i.e.,  $z = \frac{x+y}{2}$ ).

*Chứng minh.*  $x < y \Rightarrow x + x < x + y < y + y \Rightarrow x < \frac{x+y}{2} < y$ , mà  $\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{m} + \frac{b}{m} \right) = \frac{a+b}{2m} = z$ , nên  $x < z < y$ . □

**Bài toán 3** (Trọng et al., 2022, 12., p. 6). Tìm 2013 số hữu tỷ thỏa mãn 3 điều kiện sau: (a) Có cùng mẫu; (b) Tử khác nhau; (c) Nằm giữa 2 phân số  $\frac{-1}{1007}$  &  $\frac{1}{1007}$ .

**Bài toán 4** (Tuyên, 2022, Ví dụ 1, p. 5). Cho  $x = \frac{12}{b-15}$  với  $b \in \mathbb{Z}$ . Xác định  $b$  để: (a)  $x$  là 1 số hữu tỷ; (b)  $x$  là 1 số hữu tỷ dương; (c)  $x$  là 1 số hữu tỷ âm; (d)  $0 < x < 1$ . Ans: (a)  $b \neq 15$ . (b)  $b > 15$ . (c)  $b < 15$ . (d)  $b > 27$ .

**Bài toán 5** (Tuyên, 2022, Ví dụ 2, p. 5). So sánh các số hữu tỷ sau:  $\frac{-16}{27}$ ,  $\frac{-16}{29}$ ,  $\frac{-19}{27}$ . Ans:  $\frac{-19}{27} < \frac{-16}{27} < \frac{-16}{29}$ .

**Bài toán 6** (Tuyên, 2022, 1., p. 5). Cho các số hữu tỷ  $x = \frac{-5}{7}$ ,  $y = \frac{-2}{3}$ . Các số hữu tỷ này còn được biểu diễn bởi phân số nào trong các phân số sau:  $\frac{9}{11}$ ,  $\frac{4}{-6}$ ,  $\frac{15}{-21}$ ,  $\frac{-35}{49}$ ,  $\frac{-10}{15}$ ,  $\frac{-6}{-9}$ . Ans:  $x = \frac{15}{-21} = \frac{-35}{49}$ ,  $y = \frac{4}{-6} = \frac{-10}{15}$ .

**Bài toán 7** (Tuyên, 2022, 2., p. 6). Sắp xếp các số hữu tỷ sau theo thứ tự tăng dần: (a)  $\frac{19}{33}$ ,  $\frac{6}{11}$ ,  $\frac{13}{22}$ ; (b)  $\frac{-18}{12}$ ,  $\frac{-10}{7}$ ,  $\frac{-8}{5}$ . Ans: (a)  $\frac{6}{11} < \frac{19}{33} < \frac{13}{22}$ . (b)  $\frac{-8}{5} < \frac{-18}{12} < \frac{-10}{7}$ .

**Bài toán 8** (Tuyên, 2022, 3., p. 6). So sánh các số hữu tỷ sau bằng cách nhanh nhất: (a)  $-5$  &  $\frac{1}{63}$ ; (b)  $\frac{-18}{17}$  &  $\frac{-999}{1000}$ ; (c)  $\frac{-43}{85}$  &  $\frac{-19}{28}$ . Ans: (a)  $-5 < \frac{1}{63}$ . (b)  $\frac{-18}{17} < \frac{-999}{1000}$ . (c)  $\frac{-17}{35} > \frac{-43}{85}$ . (d)  $-0.76 < \frac{-19}{28}$ .

**Bài toán 9** (Tuyên, 2022, 4., p. 6). Tìm các số hữu tỷ biểu diễn dưới dạng phân số có mẫu số bằng 10, lớn hơn  $\frac{-7}{13}$  nhưng nhỏ hơn  $-\frac{4}{13}$ . Ans:  $\frac{-4}{10}$ ,  $\frac{-5}{10}$ .

**Bài toán 10** (Tuyên, 2022, 5., p. 6). Dùng 4 chữ số 1 & dấu  $-$  (nếu cần thiết) để biểu diễn (không dùng phép tính lũy thừa): (a) Các số nguyên  $-1$ ,  $-111$ ; (b) Số hữu tỷ âm lớn nhất. Ans: (a)  $\frac{-11}{11} = -1$ ,  $\frac{-111}{1} = -111$ . (b)  $\frac{-1}{111}$ .

**Bài toán 11** (Tuyên, 2022, 6., p. 6). Cho các số nguyên dương  $a < b < c < d < m < n$ . Chứng minh:  $\frac{a+c+m}{a+b+c+d+m+n} < \frac{1}{2}$ .

**Bài toán 12** (Tuyên, 2022, 7., p. 6). Với cùng 1 khối lượng thành phẩm, vàng 4 số 9 & vàng 3 số 9, loại nào có hàm lượng vàng nhiều hơn? Ans: Vàng 4 số 9 nhiều hơn.

## 1.2 ±, ·, : Trên $\mathbb{Q}$

“1. Ta có thể cộng, trừ, nhân, chia 2 số hữu tỷ bằng cách viết chúng dưới dạng phân số rồi áp dụng quy tắc cộng, trừ, nhân, chia phân số. Nếu 2 số hữu tỷ cùng viết dưới dạng số thập phân thì có thể cộng, trừ, nhân, chia 2 số đó theo quy tắc cộng, trừ, nhân, chia số thập phân. 2. Tính chất: • Phép cộng các số hữu tỷ cũng có các tính chất giao hoán, kết hợp, cộng với số 0, cộng với số đối như phép cộng các số nguyên. • Phép trừ 2 số hữu tỷ có thể chuyển thành phép cộng với số đối của số trừ.  $x - y = x + (-y)$ . • Phép nhân các số hữu tỷ cũng có các tính chất giao hoán, kết hợp, nhân với 1, phân phối đối với phép cộng & phép trừ. • Phép chia số hữu tỷ  $x$  cho số hữu tỷ  $y \neq 0$  có thể chuyển thành phép nhân với số nghịch đảo của số chia  $x : y = x \cdot \frac{1}{y}$ ,  $y \neq 0$ . 3. Quy tắc chuyển về: Khi chuyển 1 số hạng từ về này sang về kia của 1 đẳng thức, ta phải đổi dấu số hạng đó.  $x + y = z \Leftrightarrow x - z = -y$ ,  $x - y = z \Leftrightarrow x - z = y$ . 4. Trong  $\mathbb{Q}$  cũng có những tổng đại số trong đó có thể đổi chỗ các số hạng, đặt dấu ngoặc để nhóm các số hạng 1 cách tùy ý như các tổng đại số trong  $\mathbb{Z}$ . 5.  $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$ .” – Tuyên, 2022, §2, pp. 6–7

**Bài toán 13** (Tuyên, 2022, Ví dụ 3, p. 7). Tính bằng cách hợp lý (nếu có thể):

(a)  $-\frac{5}{18} + \frac{32}{45} - \frac{9}{10}$ ; (b)  $(-\frac{1}{4} + \frac{7}{33} - \frac{5}{3}) - (-\frac{15}{12} + \frac{6}{11} - \frac{48}{49})$ . Ans: (a)  $-\frac{7}{15}$ . (b)  $-\frac{1}{49}$ .

**Bài toán 14** (Tuyên, 2022, Ví dụ 4, p. 7). So sánh các tích sau bằng cách hợp lý nhất:  $P_1 = (-\frac{43}{51}) \cdot (-\frac{19}{80})$ ,  $P_2 = (-\frac{7}{13}) \cdot (-\frac{4}{65}) \cdot (-\frac{8}{31})$ ,  $P_3 = \frac{-5}{10} \cdot \frac{-4}{10} \cdot \frac{-3}{10} \cdots \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{10}$ . Ans:  $P_2 < P_3 < P_1$ .

**Bài toán 15** (Tuyên, 2022, Ví dụ 5, p. 7). Tìm giá trị của  $x \in \mathbb{Q}$  để biểu thức sau có giá trị dương  $P = (x+5)(x+9)$ . Ans:  $x > -5 \vee x < -9$ .

**Bài toán 16** (Tuyên, 2022, 8., p. 7). Tìm  $x$  biết:  $\frac{11}{13} - (\frac{5}{42} - x) = -(\frac{15}{28} - \frac{11}{13})$ . Ans:  $-\frac{5}{12}$ .

**Bài toán 17** (Tuyên, 2022, 9., p. 7). Cho  $S = (a+b+c) - (a-b+c) + (a-b-c) + c$  với  $a = 0.1$ ,  $b = 0.01$ ,  $c = 0.001$ . Tính  $S$ . Ans:  $S = 0.11$ .

**Bài toán 18** (Tuyên, 2022, 10., p. 7). Tính bằng cách hợp lý:

(a)  $\frac{11}{125} - \frac{17}{18} - \frac{5}{7} + \frac{4}{9} + \frac{17}{14}$ ; (b)  $1 - \frac{1}{2} + 2 - \frac{2}{3} + 3 - \frac{3}{4} + 4 - \frac{1}{4} - 3 - \frac{1}{3} - 2 - \frac{1}{2} - 1$ . Ans: (a)  $\frac{11}{125}$ . (b) 1.

**Bài toán 19** (Tuyên, 2022, 11., p. 7). Cho các số hữu tỷ  $x = \frac{a}{9}$  &  $y = \frac{b}{9}$  trong đó  $a$  là các số nguyên âm liên tiếp từ  $-5$  đến  $-1$ ;  $b$  là các số nguyên dương liên tiếp từ  $1$  đến  $8$ . Tính tổng  $x + y$ . **Ans:**  $\frac{7}{3}$ .

**Bài toán 20** (Tuyên, 2022, 12., p. 8). Cho  $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ ;  $B = \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{9}{8} + \frac{17}{16} + \frac{33}{32} - 6$ . Tính  $A$  &  $B$ . **Ans:**  $A = \frac{31}{32}$ ,  $B = -\frac{1}{32}$ .

**Bài toán 21** (Tuyên, 2022, 13., p. 8). Cho 31 số hữu tỷ sao cho bất kỳ 3 số nào trong chúng cũng có tổng là 1 số âm. Chứng minh tổng của 31 số đó là 1 số âm.

**Bài toán 22** (Tuyên, 2022, 14., p. 8). Tìm  $x$  biết: (a)  $(\frac{1}{7}x - \frac{2}{7})(-\frac{1}{5}x + \frac{3}{5})(\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}) = 0$ ; (b)  $\frac{1}{6}x + \frac{1}{10}x - \frac{4}{15}x + 1 = 0$ . **Ans:** (a)  $x \in \{2, 3, -4\}$ . (b)  $\bar{\mathbb{R}}$ .

**Bài toán 23** (Tuyên, 2022, 15., p. 8). Tính sau bằng cách hợp lý nhất: (a)  $(-\frac{40}{51} \cdot 0.32 \cdot \frac{17}{20}) : \frac{64}{75}$ ; (b)  $-\frac{10}{11} \cdot \frac{8}{9} + \frac{7}{18} \cdot \frac{10}{11}$ ; (c)  $\frac{3}{14} : \frac{1}{28} - \frac{13}{21} : \frac{1}{28} + \frac{29}{42} : \frac{1}{28} - 8$ ; (d)  $-1\frac{5}{7} \cdot 15 + \frac{2}{7}(-15) + (-105) \cdot (\frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{7})$ . **Ans:** (a)  $-\frac{1}{4}$ . (b)  $-\frac{5}{11}$ . (c)  $0$ . (d)  $-31$ .

**Bài toán 24** (Tuyên, 2022, 16., p. 8). Tính giá trị các biểu thức sau: (a)  $A = 7x - 2x - \frac{2}{3}y + \frac{7}{9}y$  với  $x = -\frac{1}{10}$ ,  $y = 4.8$ ; (b)  $B = x + \frac{0.2 - 0.375 + \frac{5}{11}}{-0.3 + \frac{9}{16} - \frac{15}{22}}$  với  $x = -\frac{1}{3}$ . **Ans:** (a)  $\frac{1}{30}$ . (b)  $-1$ .

**Bài toán 25** (Tuyên, 2022, 17., p. 8). Tìm giá trị của  $x$  để các biểu thức sau có giá trị dương: (a)  $A = x^2 + 4x$ ; (b)  $B = (x - 3)(x + 7)$ ; (c)  $C = (\frac{1}{2} - x)(\frac{1}{3} - x)$ . **Ans:** (a)  $x > 0 \vee x < -4$ . (b)  $x > 3 \vee x < -7$ . (c)  $x < \frac{1}{3} \vee x > \frac{1}{2}$ .

**Bài toán 26** (Tuyên, 2022, 18., p. 8). Tìm các giá trị của  $x$  để các biểu thức sau có giá trị âm: (a)  $D = x^2 - \frac{2}{3}x$ ; (b)  $E = \frac{x-2}{x-6}$ . **Ans:** (a)  $0 < x < \frac{2}{3}$ . (b)  $2 < x < 6$ .

**Bài toán 27** (Tuyên, 2022, 19., p. 8). Tìm  $x, y \in \mathbb{Q}$ ,  $y \neq 0$  thỏa  $x - y = xy = x : y$ . **Ans:**  $x = -\frac{1}{2}$ ,  $y = -1$ .

**Bài toán 28** (Tuyên, 2022, 20., p. 8). Cho 100 số hữu tỷ trong đó tích của bất kỳ 3 số nào cũng là 1 số âm. Chứng minh: (a) Tích của 100 số đó là 1 số dương; (b) Tất cả 100 số đó đều là số âm.

**Bài toán 29** (Bình, 2022, Ví dụ 1, p. 3). Tính  $A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \dots$  ( $A$  có 300 số hạng). **Ans:**  $-99$ .

**Bài toán 30** (Bình, 2022, Ví dụ 2, p. 4). Cho phân số  $\frac{a}{b} \neq 1$ . (a) Tìm phân số  $x$  sao cho nhân  $x$  với  $\frac{a}{b}$  cũng bằng cộng  $x$  với  $\frac{a}{b}$ . (b) Tìm giá trị của  $x$  trong câu (a) nếu  $\frac{a}{b} = \frac{7}{5}$ , nếu  $\frac{a}{b} = \frac{8}{11}$ . **Ans:** (a)  $x = \frac{a}{a-b}$ . (b)  $x = -\frac{8}{3}$ .

**Bài toán 31** (Bình, 2022, Ví dụ 3, p. 4). Tìm  $x \in \mathbb{Q}$ ,  $x < 0$  để  $\frac{4}{x-1} \in \mathbb{Z}$ . **Ans:**  $-1, -3, -\frac{1}{3}$ .

**Bài toán 32** (Bình, 2022, Ví dụ 4, p. 5). Tân đạp xe từ trường về nhà với thời gian dự kiến. Nhưng Tân đã dùng  $\frac{2}{3}$  thời gian dự kiến để đi  $\frac{3}{4}$  quãng đường với vận tốc  $v_1$ , rồi đi quãng đường còn lại với vận tốc  $v_2$  & đã về nhà đúng thời điểm dự kiến. Tính tỷ số  $v_1 : v_2$ . **Ans:**  $\frac{3}{2}$ .

**Bài toán 33** (Bình, 2022, Mở rộng Ví dụ 4, p. 5). Tân đạp xe từ trường về nhà với thời gian dự kiến. Nhưng Tân đã dùng  $a$  thời gian dự kiến để đi  $b$  quãng đường với vận tốc  $v_1$ ,  $a, b > 0$ ,  $a + b < 1$ , rồi đi quãng đường còn lại với vận tốc  $v_2$  & đã về nhà đúng thời điểm dự kiến. Tính tỷ số  $v_1 : v_2$  theo  $a, b$ .

**Bài toán 34** (Bình, 2022, 1., p. 5). So sánh các số hữu tỷ: (a)  $-\frac{18}{91}$  &  $-\frac{23}{114}$ ; (b)  $-\frac{22}{35}$  &  $-\frac{103}{177}$ . **Ans:** (a)  $-\frac{18}{91} > -\frac{23}{114}$ . (b)  $-\frac{22}{35} < -\frac{103}{177}$ .

**Bài toán 35** (Bình, 2022, 2., p. 5). Tìm 2 phân số có tử bằng 9, biết giá trị của mỗi phân số đó lớn hơn  $-\frac{11}{13}$  & nhỏ hơn  $-\frac{11}{15}$ . **Ans:**  $\frac{9}{-11}$ ,  $\frac{9}{-12}$ .

**Bài toán 36** (Bình, 2022, 3., p. 5). Cho các số hữu tỷ  $\frac{a}{b}$  &  $\frac{c}{d}$  với mẫu dương, trong đó  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ . Chứng minh: (a)  $ab < bc$ ; (b)  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ . **Hint:** (b) Xét 2 hiệu  $\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b}$ ,  $\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d}$ .

**Bài toán 37** (Bình, 2022, 4., p. 5). Tính: (a)  $\frac{-2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{-1}{6} + \frac{-2}{5}$ ; (b)  $\frac{-2}{3} + \frac{-1}{5} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6} - \frac{-7}{10}$ ; (c)  $\frac{1}{2} - \frac{-2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{5}{7} - \frac{-1}{6} + \frac{-4}{35} + \frac{1}{41}$ ; (d)  $\frac{1}{100 \cdot 99} - \frac{1}{99 \cdot 98} - \frac{1}{98 \cdot 97} - \dots - \frac{1}{3 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 1}$ . **Ans:** (a)  $-\frac{3}{20}$ . (b)  $-\frac{1}{4}$ . (c)  $2\frac{1}{41}$ . (d)  $-\frac{9799}{9900}$ .

**Bài toán 38** (Bình, 2022, 5., pp. 5-6). Ký hiệu  $[x]$  là số nguyên lớn nhất không vượt quá  $x$ , được gọi là phần nguyên của  $x$ , e.g.,  $[1.5] = 1$ ,  $[5] = 5$ ,  $[-2.5] = -3$ . (a) Tính  $[-\frac{1}{7}]$ ,  $[3.7]$ ,  $[-4]$ ,  $[-\frac{43}{10}]$ . (b) Cho  $x = 3.7$ . So sánh:  $A = [x] + [x + \frac{1}{5}] + [x + \frac{2}{5}] + [x + \frac{3}{5}] + [x + \frac{4}{5}]$  &  $B = [5x]$ . (c) Tính  $[\frac{100}{3}] + [\frac{100}{3^2}] + [\frac{100}{3^3}] + [\frac{100}{3^4}]$ . (d) Tính  $[\frac{50}{2}] + [\frac{50}{2^2}] + [\frac{50}{2^3}] + [\frac{50}{2^4}] + [\frac{50}{2^5}]$ . (e) Cho  $x \in \mathbb{Q}$ . So sánh  $[x]$  với  $x$ , so sánh  $[x]$  với  $y$  trong đó  $y \in \mathbb{Z}$ ,  $y < x$ .

**Ans:** (a)  $-1, 3, -4, -5$ . (b)  $'='$ . (c)  $48$ . (d)  $47$ . (e)  $y \leq [x] \leq x$ .

**Bài toán 39** (Bình, 2022, 6., p. 6). Cho các số hữu tỷ  $x$  bằng 1.4089, 0.1398,  $-0.4771$ ,  $-1.2592$ . (a) Viết các số đó dưới dạng tổng của 1 số nguyên  $a$  & 1 số thập phân  $b$  không âm nhỏ hơn 1. (b) Tính tổng các số hữu tỷ trên bằng 2 cách: tính theo cách thông thường, tính tổng các số được viết dưới dạng ở (a). (c) So sánh  $a \text{ \& } \lfloor x \rfloor$  trong trường hợp ở câu (a). Lưu ý: Trong cách viết này,  $a$  là phần nguyên của  $x$ , còn  $b$  là phần lẻ của  $x$ . Ký hiệu phần lẻ của  $x$  là  $\{x\}$  thì  $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ .

Ans: (a)  $1 + 0.1089$ ,  $0 + 0.1398$ ,  $-1 + 0.5229$ ,  $-2 + 0.7408$ . (b)  $-0.1876$ ,  $-0.1876$ . (c) '='.

**Bài toán 40** (Bình, 2022, 7., p. 6). Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để phân số sau có giá trị là 1 số nguyên & tính giá trị đó: (a)  $A = \frac{3n+9}{n-4}$ ; (b)  $B = \frac{6n+5}{2n-1}$ .

Ans: (a)  $n \in \{-17, -3, 1, 3, 5, 7, 11, 25\}$ . (b)  $n \in \{0, 1\}$ .

**Bài toán 41** (Bình, 2022, 8., p. 6). Tìm  $x, y \in \mathbb{Z}$ , biết:  $\frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8}$ .

Ans:  $(x, y) \in \{(40, 0), (-40, 1), (8, -2), (-8, 3)\}$ .

**Bài toán 42** (Bình, 2022, 9., p. 6). Viết tất cả các số nguyên có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 20 theo thứ tự tùy ý. Lấy mỗi số trừ đi số thứ tự của nó ta được 1 hiệu. Tổng của tất cả các hiệu đó bằng bao nhiêu?

Ans:  $-780$ .

**Bài toán 43** (Bình, 2022, 10., p. 6). Tính:

(a)  $\left(\frac{3}{10} - \frac{4}{15} - \frac{7}{20}\right) \cdot \frac{5}{19}$ ; (b)  $\frac{(1+2+\dots+100)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) \cdot (6.3 \cdot 12 - 21 \cdot 3.6)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}}$ ; (c)  $\frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11}}{\frac{4}{9} - \frac{4}{7} - \frac{4}{11}} + \frac{\frac{3}{5} - \frac{3}{25} - \frac{3}{125} - \frac{3}{625}}{\frac{4}{5} - \frac{4}{25} - \frac{4}{125} - \frac{4}{625}}$ .

Ans: (a)  $\frac{5}{24}$ . (b) 0. (c) 1.

**Bài toán 44** (Bình, 2022, 11., p. 7). Tìm  $x \in \mathbb{Q}$ , biết: (a)  $\frac{2}{3}x - 4 = -12$ ; (b)  $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} : x = -3$ ; (c)  $|3x - 5| = 4$ ; (d)  $\frac{x+1}{10} + \frac{x+1}{11} + \frac{x+1}{12} = \frac{x+1}{13} + \frac{x+1}{14}$ ; (e)  $\frac{x+4}{2000} + \frac{x+3}{2001} = \frac{x+2}{2002} + \frac{x+1}{2003}$ .

Ans: (a)  $-12$ . (b)  $-\frac{1}{15}$ . (c) 3,  $\frac{1}{3}$ . (d)  $-1$ . (e)  $-2004$ .

**Bài toán 45** (Bình, 2022, 12., p. 7). Cho phân số  $\frac{a}{b}$  với  $a, b \in \mathbb{N}^*$ . Tìm phân số  $x$  sao cho  $\frac{a}{b} - x = \frac{a}{b} \cdot x$ .

Ans:  $\frac{a}{a+b}$ .

**Bài toán 46** (Bình, 2022, 13., p. 7). Trung bình cộng của 2 số lớn hơn số thứ nhất 75% thì nhỏ hơn số thứ 2 bao nhiêu %?

Ans: 30%.

**Bài toán 47** (Bình, 2022, 14., p. 7). Chứng minh:

(a)  $\sum_{i=1}^{99} \frac{i}{(i+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{99}{100!} < 1$ . (b)  $\sum_{i=1}^{99} \frac{i(i+1)-1}{(i+1)!} = \frac{1 \cdot 2 - 1}{2!} + \frac{2 \cdot 3 - 1}{3!} + \frac{3 \cdot 4 - 1}{4!} + \dots + \frac{99 \cdot 100 - 1}{100!} < 2$ .

**Bài toán 48** (Bình, 2022, 15., p. 7). (a) Người ta viết 7 số hữu tỷ trên 1 vòng tròn. Tìm các số đó, biết tích của 2 số bất kỳ cạnh nhau bằng 16. (b) Cũng hỏi như trên đối với  $n$  số. Ans: (a) 7 số 4 hoặc 7 số  $-4$ . (b)  $n$  lẻ:  $n$  số 4 hoặc  $n$  số  $-4$ .  $n$  chẵn:  $a_1 = a_3 = \dots = a_{n-1} = m \in \mathbb{Q}$ ,  $m \neq 0$  tùy ý,  $a_2 = a_4 = \dots = a_n = \frac{16}{m}$ .

**Bài toán 49** (Bình, 2022, 16., p. 7). Có tồn tại hay không 2 số dương  $a, b$  khác nhau sao cho  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a-b}$ ?

Ans:  $\bar{\exists}$ .

**Bài toán 50** (Mở rộng Bình, 2022, 16., p. 7). Có tồn tại hay không 2 số  $a, b$  khác nhau sao cho  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a-b}$ ?

Ans:  $\bar{\exists}$ .

**Bài toán 51** (Bình, 2022, 17.\*, p. 7). (a) Chứng minh:  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{49 \cdot 50} = \frac{1}{26} + \frac{1}{27} + \frac{1}{28} + \dots + \frac{1}{50}$ . (b) Cho  $B = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$ . Chứng minh  $\frac{7}{12} < B < \frac{5}{6}$ .

**Bài toán 52** (Bình, 2022, 18., p. 7). Tìm  $a, b \in \mathbb{Q}$  sao cho: (a)  $a - b = 2(a + b) = a : b$ . (b)  $a + b = ab = a : b$ .

Ans: (a)  $a = -2.25$ ,  $b = 0.75$ . (b)  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = -1$ .

**Bài toán 53** (Bình, 2022, 19.\*, p. 7). Tìm  $x \in \mathbb{Q}$ , sao cho tổng của số đó với số nghịch đảo của nó là 1 số nguyên.

Ans:  $\pm 1$ .

**Bài toán 54** (Bình, 2022, 20.\*, p. 8). Viết tất cả các số hữu tỷ dương thành dãy gồm các nhóm phân số có tổng của tử & mẫu lần lượt bằng 2, 3, 4, 5, ..., các phân số trong cùng 1 nhóm được đặt trong dấu ngoặc:  $\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{2}{1}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right), \dots$ . Tìm phân số thứ 200 của dãy.

Ans:  $\frac{11}{10}$ .

### 1.3 Lũy Thừa của 1 Số Hữu Tỷ

“1. Lũy thừa với số mũ tự nhiên  $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_n$ ,  $\forall x \in \mathbb{Q}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ . Nếu  $x = \frac{a}{b}$  thì  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ . Quy

ước:  $x^0 = 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{Q}$ ,  $x \neq 0$ ,  $x^1 = x$ ,  $\forall x \in \mathbb{Q}$ . 2.  $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ ,  $x^m : x^n = \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ ,  $(x^m)^n = x^{mn}$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{Q}$ ,  $x \neq 0$ ,

$\forall m, n \in \mathbb{N}^*$ ,  $m \geq n$ ;  $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$ ,  $y \neq 0$ . 3. Lũy thừa với số mũ nguyên âm  $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ ,  $\forall x \in \mathbb{Q}$ ,  $x \neq 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . 4. So sánh 2

lũy thừa: (a) Cùng cơ số: Với  $m > n > 0$  thì:  $\bullet x > 1 \Rightarrow x^m > x^n$ ;  $\bullet x = 1 \Rightarrow x^m = x^n$ ;  $\bullet 0 < x < 1 \Rightarrow x^m > x^n$ . (b) Cùng số mũ:  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ :  $\bullet$  Với  $x, y > 0$ , nếu  $x > y$  thì  $x^n > y^n$ ;  $\bullet x > y \Leftrightarrow x^{2n+1} > y^{2n+1}$ ;  $\bullet (-x)^{2n} = x^{2n}$ ;  $\bullet (-x)^{2n+1} = -x^{2n+1}$ .”

– Tuyên, 2022, §3, pp. 8–9

**Bài toán 55** (Tuyên, 2022, Ví dụ 6, p. 9). Chứng minh: Không tồn tại 3 số hữu tỷ  $x, y, z$  sao cho  $xy = \frac{13}{15}$ ,  $yz = \frac{11}{3}$ ,  $zx = -\frac{3}{13}$ .

**Bài toán 56** (Tuyên, 2022, Ví dụ 7, p. 9). Tìm  $x$  biết  $(3^x)^2 : 3^3 = \frac{1}{243}$ . Ans:  $-1$ .

**Bài toán 57** (Tuyên, 2022, Ví dụ 8, p. 9). Tìm  $x$  biết:  $(3x^2 - 51)^{2n} = (-24)^{2n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Ans:  $\pm 3, \pm 5$ .

**Bài toán 58** (Tuyên, 2022, 21., p. 10). Viết các số sau dưới dạng 1 lũy thừa với số mũ tự nhiên lớn hơn 1: (a) 64, 81,  $-216$ ; (b)  $-\frac{1}{27}$ ,  $\frac{8}{729}$ ,  $\frac{16}{625}$ . Ans: (a)  $64 = (\pm 8)^2 = (\pm 2)^6 = 4^3$ ,  $81 = (\pm 9)^2 = (\pm 3)^4$ ,  $-216 = (-6)^3$ . (b)  $-\frac{1}{27} = \left(-\frac{1}{3}\right)^3$ ,  $\frac{8}{729} = \left(\frac{2}{9}\right)^3$ ,  $\frac{16}{256} = \left(\pm \frac{2}{5}\right)^4 = \left(\pm \frac{4}{25}\right)^2$ .

**Bài toán 59** (Tuyên, 2022, 22., p. 10). Dùng lũy thừa với số mũ nguyên âm để viết gọn các số sau: (a) Đường kính của nguyên tử cỡ  $0.000000001\text{m}$ ; (a) Đường kính của hạt nhân nguyên tử cỡ  $0.000000000000001\text{m}$ ; (c) Khối lượng hạt nhân nguyên tử cỡ  $0.\underbrace{000\dots 00}_\text{23 số 0}1 \text{ gam}$ . Ans: (a)  $10^{-9}\text{m}$ . (b)  $10^{-15}\text{m}$ . (c)  $10^{-24}\text{g}$ .

**Bài toán 60** (Tuyên, 2022, 23., p. 10). Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa của 1 số nguyên: (a)  $12^3 : (3^{-4} \cdot 64)$ ; (b)  $\left(\frac{3}{7}\right)^5 \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^6 : \left(\frac{343}{625}\right)^{-2}$ ; (c)  $5^4 \cdot 125 \cdot (2.5)^{-5} \cdot 0.04$ . Ans: (a)  $3^7$ . (b)  $5^{-2}$ . (c)  $2^5$ .

**Bài toán 61** (Tuyên, 2022, 24., p. 10). Cho  $A = (ax + by)^2$ ,  $B = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ . So sánh giá trị của 2 biểu thức A & B biết:  $a = 2$ ,  $b = -1$ ,  $x = \frac{8}{11}$ ,  $y = \frac{-5}{11}$ . Ans:  $A = \frac{441}{121} < \frac{445}{121} = B$ .

**Bài toán 62** (Tuyên, 2022, 25., p. 10). So sánh  $\left(\frac{1}{8}\right)^6$  với  $\left(\frac{1}{32}\right)^4$ . Ans:  $\left(\frac{1}{8}\right)^6 > \left(\frac{1}{32}\right)^4$ .

**Bài toán 63** (Tuyên, 2022, 26., p. 10). So sánh  $4^{30}$  với  $1000 \cdot 32^{10}$ . Ans:  $4^{30} > 1000 \cdot 32^{10}$ .

**Bài toán 64** (Tuyên, 2022, 27., p. 10). Tìm  $x$  biết: (a)  $5^x \cdot (5^3)^2 = 625$ ; (b)  $\left(\frac{12}{25}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)^4$ ; (c)  $\left(-\frac{3}{4}\right)^{3x-1} = \frac{256}{81}$ . Ans: (a)  $-2$ . (b)  $2$ . (c)  $-1$ .

**Bài toán 65** (Tuyên, 2022, 28., p. 10). Tìm  $x \in \mathbb{N}$  biết: (a)  $8 < 2^x \leq 2^9 : 2^5$ ; (b)  $27 < 81^3 : 3^x < 243$ ; (c)  $\left(\frac{2}{5}\right)^x > \left(\frac{5}{2}\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^2$ . Ans: (a)  $4$ . (b)  $8$ . (c)  $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

**Bài toán 66** (Tuyên, 2022, 29., p. 10). Tìm  $x$  biết: (a)  $(5x + 1)^2 = \frac{36}{49}$ ; (b)  $\left(x - \frac{2}{9}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^6$ ; (c)  $(8x - 1)^{2n+1} = 5^{2n+1}$ , với  $n \in \mathbb{N}$  nào đó. Ans: (a)  $-\frac{1}{35}$ ,  $-\frac{13}{35}$ . (b)  $\frac{2}{3}$ . (c)  $\frac{3}{4}$ .

**Bài toán 67** (Tuyên, 2022, 30., p. 10). Tìm  $x, y$  biết: (a)  $x^2 + \left(y - \frac{1}{10}\right)^4 = 0$ ; (b)  $\left(\frac{1}{2}x - 5\right)^{20} + \left(y^2 - \frac{1}{4}\right)^{10} \leq 0$ . Ans: (a)  $x = 0$ ,  $y = \frac{1}{10}$ . (b)  $x = 10$ ,  $y = \pm \frac{1}{2}$ .

**Bài toán 68** (Tuyên, 2022, 31., p. 10). Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  biết:  $(x - 7)^{x+1} - (x - 7)^{x+11} = 0$ . Ans:  $6, 7, 8$ .

**Bài toán 69** (Tuyên, 2022, 32., p. 10). Tìm  $x, y$  biết:  $x(x - y) = \frac{3}{10}$ ,  $y(x - y) = -\frac{3}{50}$ . Ans:  $(x, y) \in \left\{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{10}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{10}\right)\right\}$ .

**Bài toán 70** (Tuyên, 2022, 33., p. 11). Tìm: (a) Giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức  $A = \left(2x + \frac{1}{3}\right)^2 - 1$ ; (b) Giá trị lớn nhất (GTLN) của biểu thức  $B = -\left(\frac{4}{9}x - \frac{2}{15}\right)^6 + 3$ . Ans: (a)  $\min A = -1$ ,  $x = -\frac{1}{6}$ . (b)  $\max B = 3$ ,  $x = \frac{3}{10}$ .

**Bài toán 71** (Bình, 2022, Ví dụ 5, p. 8). (a) Chứng minh:  $2^{10} \approx 10^3$  &  $9^{10} \approx 80^5$ . (b) Dùng nhận xét ở (a) để chứng minh  $9^{10} \approx 3.2 \cdot 10^9$ .

**Bài toán 72** (Bình, 2022, Ví dụ 6, p. 8). Tính:  $A = \sum_{i=1}^{10} \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{10}{2^{10}}$ . Ans:  $\frac{509}{256}$ .

**Bài toán 73** (Bình, 2022, Ví dụ 7, p. 9). (a) Có thể khẳng định  $x^2$  luôn luôn lớn hơn  $x$  hay không? (b) Khi nào thì  $x^2 < x$ ? Ans: (a) Không. (b)  $0 < x < 1$ .

**Bài toán 74** (Bình, 2022, Ví dụ 8, p. 9). Tìm  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ , biết:  $ab = 2$ ,  $bc = 3$ ,  $ca = 54$ . Ans:  $(a, b, c) \in \left\{\left(6, \frac{1}{3}, 9\right), \left(-6, -\frac{1}{3}, -9\right)\right\}$ .

**Bài toán 75** (Bình, 2022, Ví dụ 9, p. 9). Rút gọn:  $A = \sum_{i=0}^{50} 5^i = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{49} + 5^{50}$ . Ans:  $\frac{5^{51}-1}{4}$ .

**Bài toán 76** (Bình, 2022, Ví dụ 10, p. 9). Cho  $B = \sum_{i=1}^{99} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{98} + \left(\frac{1}{2}\right)^{99}$ . Chứng minh  $B < 1$ .

**Bài toán 77** (Bình, 2022, 21., p. 10). Chứng minh: (a)  $7^6 + 7^5 - 7^4 : 55$ ; (b)  $16^5 + 2^{15} : 33$ ; (c)  $81^7 - 27^9 - 9^{13} : 405$ . Hint: (a)  $7^4 \cdot 55$ . (b)  $2^{15} \cdot 33$ . (c)  $3^{26} \cdot 5$ .



**Bài toán 78** (Bình, 2022, 22., p. 10). Điền vào chỗ chấm (...) các từ “bằng nhau” hoặc “đối nhau” cho đúng: (a) Nếu 2 số đối nhau thì bình phương của chúng .... (b) Nếu 2 số đối nhau thì lập phương của chúng .... (c) Lũy thừa chẵn cùng bậc của 2 số đối nhau thì .... (d) Lũy thừa lẻ cùng bậc của 2 số đối nhau thì ....

Ans: (a) bằng nhau. (b) đối nhau. (c) bằng nhau. (d) đối nhau.

**Bài toán 79** (Bình, 2022, 23., p. 10 & mở rộng). Các đẳng thức sau có đúng với mọi  $a, b \in \mathbb{Q}$  hay không? (a)  $-a^3 = (-a)^3$ ; (b)  $-a^5 = (-a)^5$ ; (c)  $-a^2 = (-a)^2$ ; (d)  $-a^4 = (-a)^4$ ; (e)  $-a^{2n+1} = (-a)^{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ ; (f)  $a^{2n} = (-a)^{2n}, \forall n \in \mathbb{N}$ ; (g)  $(a-b)^2 = (b-a)^2$ ; (h)  $(a-b)^3 = -(b-a)^3$ ; (i)  $(a-b)^{2n} = (b-a)^{2n}, \forall n \in \mathbb{N}$ ; (j)  $(a-b)^{2n+1} = -(b-a)^{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Ans: (a) D. (b) D. (c) S. (d) S. (e) D. (f) D. (g) D. (h) D. (i) D. (j) D.

**Bài toán 80** (Bình, 2022, 24., p. 10). Tính: (a)  $(\frac{1}{2})^{15} \cdot (\frac{1}{4})^{20}$ ; (b)  $(\frac{1}{9})^{25} : (\frac{1}{3})^{30}$ ; (c)  $(\frac{1}{16})^3 : (\frac{1}{8})^2$ ; (d)  $(x^3)^2 : (x^2)^3$  với  $x \neq 0$ .

Ans: (a)  $(\frac{1}{2})^{55}$ . (b)  $(\frac{1}{3})^{30}$ . (c)  $(\frac{1}{2})^6$ . (d) 1.

**Bài toán 81** (Bình, 2022, 25., p. 10). Viết số 64 dưới dạng  $a^n$  với  $a \in \mathbb{Z}$ . Có bao nhiêu cách viết?

Ans: 6 cách viết:  $64^1 = (\pm 8)^2 = 4^3 = (\pm 2)^6$ .

**Bài toán 82** (Bình, 2022, 26., p. 10). Rút gọn biểu thức:  $A = \frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 2^0}$ .

Ans:  $-\frac{1}{3}$ .

**Bài toán 83** (Bình, 2022, 27., p. 10). (a) Chứng minh:  $2^{10} \approx 10^3$  &  $3^{16} \approx 80^4$ . (b) Dùng nhận xét ở (a) để chứng minh  $3^{16} \approx 40000000$ .

**Bài toán 84** (Bình, 2022, 28., p. 10). Cho  $S_n = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} i = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (-1)^{n-1} n$  với  $n \in \mathbb{N}^*$ . Tính  $S_{35} + S_{60}$ .  
Ans:  $-30 + 18 = -12$ .

**Bài toán 85** (Bình, 2022, 29., p. 10). Cho  $A = 1 - 5 + 9 - 13 + 17 - 21 + 25 - \dots$  ( $n$  số hạng, giá trị tuyệt đối của số sau lớn hơn giá trị tuyệt đối của số hạng trước 4 đơn vị, các dấu + & - xen kẽ). (a) Tính  $A$  theo  $n$ . (b) Viết số hạng thứ  $n$  của biểu thức  $A$  theo  $n$  (chú ý dùng lũy thừa để biểu thị dấu của số hạng đó).

Ans: (a)  $A = -2n$  với  $n$  chẵn,  $A = 2n - 1$  với  $n$  lẻ. (b)  $(-1)^{n-1}(4n - 3) = (-1)^{n+1}(4n - 3)$ .

**Bài toán 86** (Bình, 2022, 30., p. 11). Với giá trị nào của các chữ thì các biểu thức sau có giá trị là số 0, số dương, số âm?

(a)  $P = \frac{a^2 b}{c}$ ; (b)  $Q = \frac{x^3}{yz}$ .

Ans: (a)  $P = 0 \Leftrightarrow a = 0, c \neq 0$  hoặc  $b = 0, c \neq 0$ .  $P > 0 \Leftrightarrow a \neq 0, b$  &  $c$  cùng dấu.

$P < 0 \Leftrightarrow a \neq 0, b$  &  $c$  trái dấu. (b)  $Q = 0 \Leftrightarrow x = 0, y \neq 0, z \neq 0$ .  $Q > 0 \Leftrightarrow$  trong  $x, y, z$  hoặc cả 3 số cùng dương hoặc có 2 số âm & 1 số dương.  $Q < 0 \Leftrightarrow$  trong  $x, y, z$  hoặc cả 3 số cùng âm hoặc có 1 số âm & 2 số dương.

**Bài toán 87** (Bình, 2022, 31., p. 11). Cho 2 số hữu tỷ  $a$  &  $b$  trái dấu trong đó  $|a| = b^5$ . Xác định dấu của mỗi số. Ans:  $a < 0, b > 0$ .

**Bài toán 88** (Bình, 2022, 32., p. 11). Viết các số sau dưới dạng lũy thừa của 2: 16, 64,  $1, \frac{1}{32}, \frac{1}{8}, 0.5, 0.25$ .

Ans:  $2^4, 2^6, 2^0, 2^{-5}, 2^{-3}, 2^{-1}, 2^{-2}$ .

**Bài toán 89** (Bình, 2022, 33., p. 11). (a) Viết các số sau thành lũy thừa với số mũ âm:  $\frac{1}{1000000}, 0.00000002$ . (b) Viết các số sau dưới dạng số thập phân:  $10^{-7}, 2.5 \cdot 10^{-6}$ .

Ans: (a)  $10^{-6}, 2 \cdot 10^{-8}$ . (b)  $0.0000001, 0.0000025$ .

**Bài toán 90** (Bình, 2022, 34., p. 11). Tính xem  $A$  gấp mấy lần  $B$ : (a)  $A = 3.4 \cdot 10^{-8}, B = 34 \cdot 10^{-9}$ ; (b)  $A = 10^{-4} + 10^{-3} + 10^{-2}, B = 10^{-9}$ .

Ans: (a)  $A = B$ . (b)  $A = 0.0111 = 11100000B$ .

**Bài toán 91** (Bình, 2022, 35., p. 11). So sánh: (a)  $(-\frac{1}{16})^{100}$  &  $(-\frac{1}{2})^{500}$ ; (b)  $(-32)^9$  &  $(-18)^{13}$ ; (c)  $a = 2^{100}, b = 3^{75}, c = 5^{50}$ .

Ans: (a)  $(-\frac{1}{16})^{100} > (-\frac{1}{2})^{500}$ . (b)  $(-32)^9 > (-18)^{13}$ . (c)  $a = 16^{25} < c = 25^{25} < b = 27^{25}$ .

**Bài toán 92** (Bình, 2022, 36., p. 11). Trong các câu sau, câu nào đúng với mọi  $a \in \mathbb{Q}$ ? (a) Nếu  $a < 0$  thì  $a^2 > 0$ ; (b) Nếu  $a^2 > 0$  thì  $a > 0$ ; (c) Nếu  $a < 0$  thì  $a^2 > a$ ; (d) Nếu  $a^2 > a$  thì  $a > 0$ ; (e) Nếu  $a^2 > a$  thì  $a < 0$ .

Ans: (a) D. (b) S. (c) D. (d) S. (e) S.

**Bài toán 93** (Bình, 2022, 37., p. 11). (a) Cho  $a^m = a^n$  ( $a \in \mathbb{Q}, m, n \in \mathbb{N}$ ). Tìm  $m, n$ . (b) Cho  $a^m > a^n$  ( $a \in \mathbb{Q}, a > 0, m, n \in \mathbb{N}$ ). So sánh  $m$  &  $n$ . Ans: (a) Nếu  $a = 0: \forall m, n \in \mathbb{N}^*$ . Nếu  $a = 1: \forall m, n \in \mathbb{N}$ . Nếu  $a = -1$ , thì  $m$  &  $n$  là các số chẵn tùy ý hoặc các số lẻ tùy ý. Nếu  $a \neq 0, a \neq \pm 1$  thì  $m = n$ . (b) Nếu  $a > 1$  thì  $m > n$ . Nếu  $0 < a < 1$  thì  $m < n$ .

**Bài toán 94** (Bình, 2022, 38., p. 11). Tìm  $x \in \mathbb{Q}$ , biết: (a)  $(2x - 1)^4 = 81$ ; (b)  $(x - 1)^5 = -32$ ; (c)  $(2x - 1)^6 = (2x - 1)^8$ .

Ans: (a) -1, 2. (b) -1. (c) 0,  $\frac{1}{2}, 1$ .

**Bài toán 95** (Bình, 2022, 39., p. 11). Tìm  $x \in \mathbb{N}$ , biết: (a)  $5^x + 5^{x+2} = 650$ ; (b)  $3^{x-1} + 5 \cdot 3^{x-1} = 162$ . Ans: (a) 2. (b) 4.

**Bài toán 96** (Bình, 2022, 40., p. 11). Tìm  $x, y \in \mathbb{N}$ , biết: (a)  $2^{x+1} \cdot 3^y = 12^x$ ; (b)  $10^x : 5^y = 20^y$ ; (c)  $2^x = 4^{y-1}$  &  $27^y = 3^{x+8}$ .

Ans: (a)  $x = y = 1$ . (b)  $x = 2y$ . (c)  $x = 10, y = 6$ .

**Bài toán 97** (Bình, 2022, 41., p. 11). Tìm  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ , biết: (a)  $ab = \frac{3}{5}$ ,  $bc = \frac{4}{5}$ ,  $ca = \frac{3}{4}$ . (b)  $a(a+b+c) = -12$ ,  $b(a+b+c) = 18$ ,  $c(a+b+c) = 30$ ; (c)  $ab = c$ ,  $bc = 4a$ ,  $ac = 9b$ . **Ans:** (a)  $(a, b, c) \in \left\{ \left( \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1 \right), \left( -\frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, -1 \right) \right\}$ . (b)  $(a, b, c) \in \{(-2, 3, 5), (2, -3, -5)\}$ . (c)  $(a, b, c) \in \{(0, 0, 0), (3, 2, 6), (-3, -2, 6), (3, -2, -6), (-3, 2, -6)\}$ .

**Bài toán 98** (Bình, 2022, 42.\*, p. 12). Cho  $a, b, c, d, e \in \mathbb{N}$  thỏa mãn  $a^b = b^c = c^d = d^e = e^a$ . Chứng minh  $a = b = c = d = e$ .

**Bài toán 99** (Bình, 2022, 43., p. 12). Cho  $A = \prod_{i=2}^{100} \left( \frac{1}{i^2} - 1 \right) = \left( \frac{1}{2^2} - 1 \right) \left( \frac{1}{3^2} - 1 \right) \left( \frac{1}{4^2} - 1 \right) \cdots \left( \frac{1}{100^2} - 1 \right)$ . So sánh  $A$  với  $-\frac{1}{2}$ . **Ans:**  $A < -\frac{1}{2}$ .

**Bài toán 100** (Bình, 2022, 44., p. 12). Rút gọn  $A = \sum_{i=1}^{100} (-1)^i 2^i = 2^{100} - 2^{99} + 2^{98} - 2^{97} + \cdots + 2^2 - 2$ . **Ans:**  $\frac{2^{101}-2}{3}$ .

**Bài toán 101** (Bình, 2022, 45., p. 12). Rút gọn  $B = \sum_{i=1}^{100} (-1)^i 3^i = 3^{100} - 3^{99} + 3^{98} - 3^{97} + \cdots + 3^2 - 3 + 1$ . **Ans:**  $\frac{1+3^{101}}{4}$ .

**Bài toán 102** (Bình, 2022, 46., p. 12). Cho  $C = \sum_{i=1}^{99} \frac{1}{3^i} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{99}}$ . Chứng minh  $C < \frac{1}{2}$ .

**Bài toán 103** (Bình, 2022, 47., p. 12). Chứng minh  $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \cdots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2} < 1$ .

**Bài toán 104** (Bình, 2022, 48.\*, p. 12). Chứng minh  $\sum_{i=1}^{100} \frac{i}{3^i} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots + \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4}$ .

**Bài toán 105** (Bình, 2022, 49., p. 12). Ta không có  $2^m + 2^n = 2^{m+n}$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$ . Nhưng có những số nguyên dương  $m, n$  có tính chất trên. Tìm các số đó. **Ans:**  $m = n = 1$ .

**Bài toán 106** (Bình, 2022, 50.\*, p. 12). Tìm  $m, n \in \mathbb{N}^*$  sao cho  $2^m - 2^n = 256$ . **Ans:**  $m = 9, n = 8$ .

**Bài toán 107** (Bình, 2022, 51.\*, p. 12). Cho 1 bảng vuông  $3 \times 3$  ô. Trong mỗi ô của bảng viết số 1 hoặc số  $-1$ . Gọi  $d_i$  là tích các số trên dòng  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $c_k$  là tích các số trên cột  $k$  ( $k = 1, 2, 3$ ). (a) Chứng minh không thể xảy ra  $d_1 + d_2 + d_3 + c_1 + c_2 + c_3 = 0$ . (b) Xét bài toán trên đối với bảng vuông  $n \times n$ .

**Bài toán 108** (Bình, 2022, 52.\*, p. 12). Cho  $n$  số  $x_1, \dots, x_n$ , mỗi số bằng 1 hoặc  $-1$ . Biết tổng của  $n$  tích  $x_1 x_2, x_2 x_3, x_3 x_4, \dots, x_n x_1$  bằng 0. Chứng minh  $n \vdots 4$ .

## 1.4 Thứ Tự Thực Hiện Các Phép Tính. Quy Tắc Chuyển Vế

“1. Thứ tự thực hiện các phép tính đối với số hữu tỷ cũng tương tự như thứ tự thực hiện các phép tính đối với số tự nhiên, số nguyên, phân số. 2. Quy tắc chuyển vế: Khi chuyển 1 số hạng từ vế này sang vế kia của 1 đẳng thức, ta phải đổi dấu số hạng đó. 3. Quy tắc dấu ngoặc đối với số hữu tỷ cũng tương tự quy tắc dấu ngoặc đối với các số nguyên, phân số, số thập phân. 4. Nếu đưa các số hạng vào trong dấu ngoặc & có dấu “-” đằng trước thì phải đổi dấu các số hạng đó.” – Tuyên, 2022, §4, p. 11

**Bài toán 109** (Tuyên, 2022, Ví dụ 9, p. 11). Tính:  $A = \frac{2}{5} - \left( \frac{7}{10} \right)^2 : \frac{28}{25} + \left( \frac{1}{2} \right)^3 \cdot (-3)$ . **Ans:**  $-\frac{33}{80}$ .

**Bài toán 110** (Tuyên, 2022, Ví dụ 10, p. 11). Tính:  $B = \frac{3 + \frac{1}{6} - \frac{2}{5}}{5 - \frac{1}{6} + \frac{7}{10}} - \frac{3}{2}$ . **Ans:**  $-1$ .

**Bài toán 111** (Tuyên, 2022, Ví dụ 11, p. 12). Tìm  $x$  biết:  $\frac{3}{7} \left( x - \frac{14}{9} \right) = -\frac{11}{7} \left( x + \frac{14}{11} \right)$ . **Ans:**  $-\frac{2}{3}$ .

**Bài toán 112** (Tuyên, 2022, 34., p. 12). Tính:  $2\frac{1}{8} : 1\frac{11}{40} - (2^4 - 7\frac{13}{18}) : 11\frac{1}{27}$ . **Ans:**  $\frac{11}{12}$ .

**Bài toán 113** (Tuyên, 2022, 35., p. 12). Tính:  $1\frac{13}{15} \cdot \frac{3}{4} - \left[ \frac{2^3}{4^2-1} + \left( \frac{1}{2} \right)^2 \right] \cdot \frac{24}{47}$ . **Ans:** 1.

**Bài toán 114** (Tuyên, 2022, 36., p. 12). Tính giá trị của biểu thức:  $A = \frac{2 - \frac{1}{3} + 2^{-2}}{2 + \frac{1}{6} - 2^{-2}} - 2^0$ . **Ans:** 0.

**Bài toán 115** (Tuyên, 2022, 37., p. 12). Tìm  $x$  biết:  $2\frac{1}{4} \cdot \left( x - 7\frac{1}{3} \right) = 1.5$ . **Ans:** 8.

**Bài toán 116** (Tuyên, 2022, 38., p. 12). Tìm  $x$  biết:  $\left( 12\frac{7}{18} - 10\frac{13}{18} \right) : x - 1\frac{7}{33} : \frac{8}{11} = 1\frac{2}{3}$ . **Ans:**  $\frac{1}{2}$ .

**Bài toán 117** (Tuyên, 2022, 39., p. 12). Cho biểu thức  $A = \frac{12}{17} : \frac{5}{51} - \frac{8}{35} \cdot 7$ . (a) Tính giá trị của biểu thức  $A$ . (b) Đặt thêm dấu ngoặc để biểu thức  $A$  có giá trị là 48.8. **Ans:** (a)  $\frac{28}{5}$ . (b) 48.8.

**Bài toán 118** (Tuyên, 2022, 40., p. 12). Ông Phú gửi tiết kiệm 100 triệu đồng tại 1 ngân hàng với kỳ hạn 1 năm, lãi suất 5%/năm. Hết thời hạn 1 năm, tiền lãi gộp vào số tiền gửi ban đầu & lại gửi theo thể thức cũ. Cứ như thế sau 3 năm thì số tiền cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu? **Ans:** 115.7625 triệu.

## 1.5 Biểu Diễn Thập Phân của Số Hữu Tỷ

“**1.** Số thập phân hữu hạn & số thập phân vô hạn tuần hoàn: • Xét phép chia  $47 : 20 = 2.35$ . Số thập phân 2.35 chỉ có 2 chữ số sau dấu phẩy được gọi là *số thập phân hữu hạn*. • Xét phép chia  $49 : 30 = 1.63333 \dots$ . Trong phần thập phân của thương, chữ số 3 xuất hiện liên tiếp mãi. Ta nói số thập phân  $1.63333 \dots$  là *số thập phân vô hạn tuần hoàn* có chu kỳ là 3 & viết gọn  $1.63333 \dots = 1.6(3)$ . Chu kỳ của 1 số thập phân vô hạn tuần hoàn có thể có 1 chữ số hoặc nhiều chữ số, có thể bắt đầu ngay sau dấu phẩy hoặc không bắt đầu ngay sau dấu phẩy. **2.** *Biểu diễn thập phân của số hữu tỷ*: Mỗi số hữu tỷ được biểu diễn bởi 1 số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn. Ngược lại, mỗi số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn biểu diễn 1 số hữu tỷ. • Các phân số tối giản với mẫu dương mà mẫu không có ước nguyên tố khác 2 & 5 thì viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn. • Các phân số tối giản với mẫu dương mà mẫu có ước nguyên tố khác 2 & 5 thì được viết dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn. **3.**  $\frac{1}{9} = 0.111 \dots = 0.(1)$ ,  $\frac{1}{99} = 0.0101 \dots = 0.(01)$ ,  $\frac{1}{999} = 0.001001 \dots = 0.(001)$ . Ta thừa nhận kết quả sau:  $0.(1) = \frac{1}{9}$ ,  $0.(01) = \frac{1}{99}$ ,  $0.(001) = \frac{1}{999}$ .” – Tuyên, 2022, §5, pp. 12–13

Tổng quát,

$$0.\underbrace{(0 \dots 0 1)}_{n \text{ số } 0} = \frac{1}{\underbrace{9 \dots 9}_{n+1 \text{ số } 9}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Chứng minh.*  $\forall n \in \mathbb{N}$ , đặt  $a_n = 0.\underbrace{(0 \dots 0 1)}_{n \text{ số } 0}$ . Có  $10^{n+1}a_n = 1.\underbrace{(0 \dots 0 1)}_{n \text{ số } 0} = 1 + 0.\underbrace{(0 \dots 0 1)}_{n \text{ số } 0} = 1 + a_n \Leftrightarrow (10^{n+1} - 1)a_n = 1 \Leftrightarrow$

$$a_n = \frac{1}{10^{n+1} - 1} = \frac{1}{1 \underbrace{0 \dots 0}_{n+1 \text{ số } 0}} = \frac{1}{\underbrace{9 \dots 9}_{n+1 \text{ số } 9}}. \quad \square$$

**Bài toán 119** (Tuyên, 2022, Ví dụ 12, p. 13). *Viết các số thập phân sau dưới dạng phân số tối giản: (a) 0.555; (b) 0.555...*  
**Ans:** (a)  $\frac{111}{200}$ . (b)  $\frac{5}{9}$ .

**Lưu ý 1.1** (Số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn). “Các số 0.555..., 4.272727... là những số thập phân vô hạn tuần hoàn có chu kỳ ngay sau dấu phẩy gọi là số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn.” – Tuyên, 2022, p. 13

**Bài toán 120** (Tuyên, 2022, Ví dụ 13, p. 13). *Viết số thập phân 0.25454... dưới dạng phân số tối giản.* **Ans:**  $\frac{14}{55}$ .

**Lưu ý 1.2** (Số thập phân vô hạn tuần hoàn tạp). Số 0.25454... có chu kỳ không bắt đầu ngay sau dấu phẩy gọi là số thập phân vô hạn tuần hoàn tạp. Để viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn tạp dưới dạng phân số tối giản, trước hết phải đưa chúng về dạng vô hạn tuần hoàn đơn.” – Tuyên, 2022, p. 13

**Bài toán 121** (Tuyên, 2022, Ví dụ 14, p. 13). *Tính:  $1.(6) \cdot 2.(3) : 0.(7)$ .* **Ans:** 5.

*Cách giải:* “Trước hết viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn dưới dạng phân số tối giản rồi làm các phép tính đối với phân số.” – Tuyên, 2022, p. 13

**Bài toán 122** (Tuyên, 2022, 41., p. 14). *Không làm phép chia, cho biết trong các phân số sau, phân số nào viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn, phân số nào viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn?*  $\frac{7}{32}$ ,  $\frac{2}{35}$ ,  $\frac{6}{75}$ ,  $\frac{-35}{42}$ ,  $\frac{3^2}{11^2-1}$ .

**Ans:** Thập phân hữu hạn:  $\frac{7}{32}$ ,  $\frac{2}{25}$ ,  $\frac{3}{40}$ ; thập phân vô hạn tuần hoàn:  $\frac{2}{35}$ ,  $-\frac{5}{6}$ .

**Bài toán 123** (Tuyên, 2022, 42., p. 14). *Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn dưới dạng phân số tối giản: (a) 0.333...; (b) 0.454545...; (c) 0.162162...; (d) 5.272727...*  
**Ans:** (a)  $\frac{1}{3}$ . (b)  $\frac{5}{11}$ . (c)  $\frac{6}{37}$ . (d)  $\frac{58}{11}$ .

**Bài toán 124** (Tuyên, 2022, 43., p. 14). *Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn tạp dưới dạng phân số tối giản: (a) 0.7666...; (b) 0.507575...; (c) 1.2148148....*  
**Ans:** (a)  $\frac{23}{30}$ . (b)  $\frac{67}{132}$ . (c)  $\frac{164}{135}$ .

**Bài toán 125** (Tuyên, 2022, 44., p. 14). *Tính: (a)  $0.2777 \dots 0.3555 \dots$ ; (b)  $1.5454 \dots - 0.8181 \dots - 0.75$ ; (c)  $1 : 10.2(6) : 0.41(6) \cdot 0.42(7)$ .* **Ans:** (a)  $\frac{19}{30}$ . (b)  $-\frac{1}{44}$ . (c)  $\frac{1}{10}$ .

**Bài toán 126** (Tuyên, 2022, 45., p. 14). *Cho  $x$  &  $y$  là các số nguyên tố. Tìm  $x$  &  $y$  để các phân số sau viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn: (a)  $P = \frac{x}{3 \cdot 5 \cdot y}$ ; (b)  $Q = \frac{15x}{14y}$ .* **Ans:** (a)  $x = 3$ ,  $y \in \{2, 5\}$ . (b)  $x = 7$ ,  $y \in \{2, 3, 5\}$ .

**Bài toán 127** (Tuyên, 2022, 46., p. 14). *Tìm 1 phân số dương tối giản nhỏ hơn 1, biết khi chia tử cho mẫu ta được 1 số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn chu kỳ có 3 chữ số & phân số này bằng lập phương của 1 phân số khác.* **Ans:**  $\frac{1}{27}$ ,  $\frac{8}{27}$ .



## 1.6 Phần Nguyên, Phần Lẻ của 1 Số Hữu Tỷ

**“1. Phần nguyên** của  $x \in \mathbb{Q}$ , ký hiệu  $[x]$  là số nguyên lớn nhất không vượt quá  $x$ . Như vậy  $[x]$  là 1 số nguyên sao cho:  $[x] \leq x < [x] + 1$ . Khi  $x \in \mathbb{Z}$  thì  $[x] = x$ . E.g.,  $[8.9] = 8$ ,  $[-3.2] = -4$ ,  $[-2] = -2$ . **2. Phần lẻ** của 1 số hữu tỷ  $x \in \mathbb{Q}$ , ký hiệu  $\{x\}$  &  $\{x\} = x - [x]$ . Như vậy  $\{x\}$  là 1 số hữu tỷ sao cho  $0 \leq \{x\} < 1$ . Khi  $x \in \mathbb{Z}$  thì  $\{x\} = 0$ . E.g.,  $\{8.9\} = 8.9 - [8.9] = 8.9 - 8 = 0.9$ ,  $\{-3.2\} = -3.2 - [-3.2] = -3.2 - (-4) = 0.8$ ,  $\{-2\} = -2 - [-2] = -2 - (-2) = 0$ . **3. Tính chất** quan trọng để tìm phần nguyên của 1 số hữu tỷ: Nếu số hữu tỷ  $x$  bị “kẹp giữa” 2 số nguyên liên tiếp thì  $[x]$  bằng số nhỏ hơn trong 2 số đó. Nếu  $a \leq x < a + 1$ ,  $a \in \mathbb{Z}$  thì  $[x] = a$ . **4. Với khái niệm** phần nguyên, ta có thể trình bày nguyên lý Dirichlet 1 cách tổng quát như sau: Nếu nhốt  $a$  con thỏ vào  $b$  chiếc chuồng mà phép chia  $\frac{a}{b}$  còn dư thì tồn tại 1 chuồng nhốt  $[\frac{a}{b}] + 1$  con thỏ trở lên.” – Tuyên, 2022, §6, pp. 14–15

**Bài toán 128** (Tuyên, 2022, Ví dụ 15, p. 15). *Tìm  $[x]$  biết  $x < 9 < x + 0.4$ .*

**Ans:** 8.

**Bài toán 129** (Tuyên, 2022, Ví dụ 16, p. 15). *Tìm  $x$  biết  $[\frac{x}{3}] = -5$ .*

**Ans:**  $-15 \leq x \leq -12$ .

**Bài toán 130** (Tuyên, 2022, Ví dụ 17, p. 15). *Tích  $A = 1000! = \prod_{i=1}^{1000} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 1000$  có bao nhiêu thừa số 3 khi phân tích ra thừa số nguyên tố?*

**Ans:** 498.

“Tổng quát, số thừa số nguyên tố  $p$  khi phân tích  $A = n! = \prod_{i=1}^n i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$  ra thừa số nguyên tố là:  $\sum_{i=1}^k [\frac{n}{p^i}] = [\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p^2}] + \cdots + [\frac{n}{p^k}]$  với  $k$  là số mũ lớn nhất sao cho  $p^k \leq n$ .” – Tuyên, 2022, p. 15

**Bài toán 131** (Tuyên, 2022, 47., p. 16). *Tìm phần nguyên, phần lẻ của  $x \in \mathbb{Q}$  biết: (a)  $x = -3$ ; (b)  $x = 6.1$ ; (c)  $x = -\frac{6}{5}$ ; (d)  $x = \frac{1}{8}$ .*

**Ans:** (a)  $-3$ , 0. (b) 6, 0.1. (c)  $-2$ , 0.8. (d) 0, 0.125.

**Bài toán 132** (Tuyên, 2022, 48., p. 16). *Tìm  $[x]$  của  $x \in \mathbb{Q}$  biết: (a)  $13 < x < 13.4$ ; (b)  $-9.2 < x < -9$ .*

**Ans:** (a) 13. (b)  $-10$ .

**Bài toán 133** (Tuyên, 2022, 49., p. 16). *So sánh phần nguyên của các số hữu tỷ sau: (a)  $x = \frac{25}{8}$ ,  $y = \frac{24}{6}$ ,  $z = \frac{23}{7}$ ; (b)  $x = -3\frac{1}{9}$ ,  $y = -3\frac{8}{9}$ ,  $z = -4$ .*

**Ans:** (a)  $[x] = [z] < [y]$ . (b)  $[x] = [y] = [z]$ .

**Bài toán 134** (Tuyên, 2022, 50., p. 16). *Cho  $x \in \mathbb{Z}$ ,  $y \in \mathbb{Q}$ . So sánh  $\{x\}$  &  $\{y\}$ .*

**Ans:**  $\{x\} \leq \{y\}$

**Bài toán 135** (Tuyên, 2022, 51., p. 16). *Tìm  $[x]$  của  $x \in \mathbb{Q}$  biết: (a)  $x - 0.7 < 8 < x$ ; (b)  $x < -5 < x + \frac{1}{3}$ .*

**Ans:** (a) 8. (b)  $-6$ .

**Bài toán 136** (Tuyên, 2022, 52., p. 16). *Tính: (a)  $[\frac{12}{2}] + [\frac{13}{2}]$ ; (b)  $[\frac{12}{3}] + [\frac{13}{3}] + [\frac{14}{3}]$ ; (c)  $[\frac{-12}{3}] + [\frac{-13}{3}] + [\frac{-14}{3}]$ .*

**Ans:** (a) 12. (b) 12. (c)  $-14$ .

**Bài toán 137** (Tuyên, 2022, 53., p. 16). *Cho  $A = [\frac{n}{2}] + [\frac{n+1}{2}]$ ,  $B = [\frac{n}{3}] + [\frac{n+1}{3}] + [\frac{n+2}{3}]$  với giá trị nào của  $n \in \mathbb{Z}$  thì: (a)  $A : 2$ ; (b)  $B : 3$ .*

**Ans:** (a)  $A : 2 \Leftrightarrow n : 2$ . (b)  $B : 3 \Leftrightarrow n : 3$ .

**Bài toán 138** (Tuyên, 2022, 54., p. 16). *Tìm  $x$  biết: (a)  $[2x] = -1$ ; (b)  $[x + 0.4] = 3$ ; (c)  $[\frac{2}{3}x - 5] = 3$ .*

**Ans:** (a)  $-\frac{1}{2} \leq x < 0$ . (b)  $2.6 \leq x < 3.6$ . (c)  $12 \leq x < 13\frac{1}{2}$ .

**Bài toán 139** (Tuyên, 2022, 55., p. 16). *Chứng minh:  $[x + y] = [x] + [y]$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ .*

**Bài toán 140** (Tuyên, 2022, 56., p. 16). *Tìm  $x$  biết: (a)  $[3x - 4] = x$ ; (b)  $[x + 8] = -3x$ ; (c)  $[5x - 3] = 2x + 1$ .*

**Ans:** (a) 2. (b)  $-2$ . (c) 1.5

**Bài toán 141** (Tuyên, 2022, 57., p. 16). *Tích  $C = \prod_{i=201}^{600} i = 201 \cdot 202 \cdot 203 \cdots 600$  có bao nhiêu thừa số 3 khi phân tích ra thừa số nguyên tố?*

**Ans:** 200.

**Bài toán 142** (Tuyên, 2022, 58., p. 16). *Số 300! có tận cùng bằng bao nhiêu chữ số 0?*

**Ans:** 74.

**Bài toán 143** (Tuyên, 2022, 59., p. 16). *1 lớp học có 44 học sinh làm bài kiểm tra Toán. Điểm số là 1 số tự nhiên từ 6 đến 10. Biết cả lớp có 6 học sinh được điểm 10. Chứng minh: Ít nhất cũng có 10 học sinh có cùng 1 loại điểm.*

**Bài toán 144** (Tuyên, 2022, 60., p. 16). *1 tổ 11 học sinh thảo luận về học tập. Có 1 học sinh phát biểu 4 lần, các học sinh khác đều phát biểu nhưng số lần phát biểu ít hơn. Chứng minh: Ít nhất cũng có 4 học sinh có số lần phát biểu như nhau.*

**Bài toán 145** (Tuyên, 2022, 61., p. 16). *Có 50 quyển vở chia cho 11 học sinh. Chứng minh: (a) Ít nhất cũng có 1 học sinh được 5 quyển trở lên. (b) Với mọi cách chia (kể cả trường hợp có học sinh không được quyển nào) bao giờ cũng có ít nhất 2 học sinh được số quyển vở như nhau.*

## 1.7 Miscellaneous

**Nội dung.** Định nghĩa số hữu tỷ; các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, & lũy thừa với số mũ tự nhiên của 1 số hữu tỷ; thứ tự thực hiện các phép tính; quy tắc chuyển vế; số thập phân hữu hạn & số thập phân vô hạn tuần hoàn.

**Bài toán 146** (Tuyên, 2022, Ví dụ 18, p. 17). Cho biểu thức  $A = \left(\frac{1}{2.5-1}\right)^2 - \left(\frac{1}{3\frac{1}{2}-1}\right)^2$ . Tính giá trị của  $A$  rồi viết kết quả dưới dạng lũy thừa với số mũ tự nhiên của 1 số hữu tỷ. **Ans:**  $\frac{64}{225} = \left(\pm \frac{8}{15}\right)^2$ .

**Bài toán 147** (Tuyên, 2022, Ví dụ 19, p. 17). Tìm  $x$  biết:  $\left(1 - \frac{3}{10} - x\right) : \left(\frac{19}{10} - 1 - \frac{2}{5}\right) + \frac{4}{5} = 1$ . **Ans:**  $x = \frac{3}{5}$ .

**Bài toán 148** (Tuyên, 2022, 62., p. 18). Tính: (a)  $9.6 \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right)^2$ ; (b)  $6 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 12 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 18 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3$ . **Ans:** (a)  $\frac{1}{15}$ . (b)  $-4$ .

**Bài toán 149** (Tuyên, 2022, 63., p. 18). Cho  $A = \frac{17}{24} \cdot 9\frac{1}{2} - 3\frac{1}{4} \cdot \frac{17}{24}$ ,  $B = 3\frac{1}{2} \cdot 2\frac{13}{36} + 2\frac{13}{36} \cdot 2\frac{3}{4}$ . (a) Tính giá trị của thương  $\frac{A}{B}$ ; (b) Tính  $\left(\frac{A}{B} - \frac{1}{5}\right)^{-2}$ . **Ans:** (a)  $\frac{3}{10}$ . (b) 100.

**Bài toán 150** (Tuyên, 2022, 64., p. 18). Tính:  $\frac{3^6 \cdot 45^4 - 15^{13} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^9}{27^4 \cdot 25^3 + 45^6}$ . **Ans:**  $\frac{3}{25}$ .

**Bài toán 151** (Tuyên, 2022, 65., p. 18). Tính:  $\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot 5^7 + \left(\frac{9}{4}\right)^3 : \left(\frac{3}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 512}$ . **Ans:**  $\frac{1}{2}$ .

**Bài toán 152** (Tuyên, 2022, 66., p. 18). Tìm  $x \in \mathbb{Q}$  biết:  $30\left(x - \frac{7}{12}\right) - 24x = 100 + 6\left(x - \frac{3}{4}\right)$ . **Ans:**  $\overline{3}$ .

**Bài toán 153** (Tuyên, 2022, 67., p. 18). Tìm  $x$  sao cho: (a)  $(x-3)(x+4) > 0$ ; (b)  $(x+5)(x-1) < 0$ . **Ans:** (a)  $x > 3 \vee x < -4$ . (b)  $-5 < x < 1$ .

**Bài toán 154** (Tuyên, 2022, 68., p. 18). Muốn biết ngày ... tháng ... năm ... nào đó là ngày thứ mấy, làm theo 2 bước sau:

- Bước 1: Tìm  $S$  theo công thức:  $S = x - 1 + \lfloor \frac{x-1}{4} \rfloor - \lfloor \frac{x-1}{100} \rfloor + \lfloor \frac{x-1}{400} \rfloor + C$ , trong đó  $x$  là năm dương lịch,  $C$  là số ngày từ mùng 1 tháng giêng năm đó đến ngày cần tìm (kể cả ngày đầu tiên).
- Bước 2: Tìm số dư trong phép chia  $\frac{S}{7}$  rồi đối chiếu với bảng sau:

Thứ	CN	2	3	4	5	6	7
Số dư	0	1	2	3	4	5	6

(a) Ngày 01/01/2001 là ngày thứ mấy? (b) Ngày 03/02/2030 là ngày thứ mấy? **Ans:** (a) 2. (b) CN.

## Tài liệu

- Bình, Vũ Hữu (2022). *Nâng Cao & Phát Triển Toán 7, tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 152.  
 Trọng, Đặng Đức et al. (2022). *Bồi Dưỡng Năng Lực Tự Học Toán 7*. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, p. 200.  
 Tuyên, Bùi Văn (2022). *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 7*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 168.