

Fraction – Phân Số \mathbb{Q}

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 8 tháng 3 năm 2023

Tóm tắt nội dung

[EN] This text is a collection of problems, from easy to advanced, about *fraction*. This text is also a supplementary material for my lecture note on Elementary Mathematics grade 6, which is stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 6/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_6/lecture)¹. The latest version of this text has been stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 6/fraction](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_6/fraction)².

[VI] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài tập chọn lọc từ cơ bản đến nâng cao về *phân số*. Tài liệu này là phần bài tập bổ sung cho tài liệu chính – bài giảng [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 6/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_6/lecture) của tác giả viết cho Toán Sơ Cấp lớp 6. Phiên bản mới nhất của tài liệu này được lưu trữ & có thể tải xuống ở link sau: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 6/fraction](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_6/fraction).

Nội dung. Phân số với tử & mẫu là số nguyên; các phép tính với phân số; số thập phân; các phép tính với số thập phân; tỷ số, tỷ số phần trăm, làm tròn số.

Mục lục

1	Phân Số với Tử & Mẫu Là Số Nguyên	3
1.1	Khái niệm phân số	3
1.2	Phân số bằng nhau	3
1.3	Tính chất cơ bản của phân số	3
1.3.1	Tính chất cơ bản	3
1.3.2	Rút gọn về phân số tối giản	4
1.3.3	Quy đồng mẫu nhiều phân số	4
2	Tính chất Cơ Bản của Phân Số	5
3	Rút Gọn Phân Số	8
4	Quy Đồng Mẫu Số Nhiều Phân Số	8
5	So Sánh Các Phân Số	8
6	Hỗn Số Dương	9
7	1 Số Phương Pháp Đặc Biệt để So Sánh 2 Phân Số	9
8	Phép Cộng, Phép Trừ Phân Số	9
8.1	Phép Cộng Phân Số	9
8.1.1	Quy tắc cộng phân số	9
8.1.2	Tính chất của phép cộng phân số	10
8.2	Phép Trừ Phân Số	10
8.2.1	Số đối của 1 phân số	10
8.2.2	Quy tắc trừ phân số	10
8.3	Quy tắc dấu ngoặc	11
8.4	Biểu diễn phân số trên trục số nằm ngang	11
9	Phép Nhân, Phép Chia Phân Số	11
9.1	Phép Nhân Phân số	12
9.1.1	Tính chất của phép nhân phân số	12
9.2	Phép Chia Phân số	12

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

¹URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_6/NQBH_elementary_mathematics_grade_6.pdf.

²URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_6/fraction/NQBH_fraction.pdf.

10 Tổng Các Phân Số Viết Theo Quy Luật	13
11 Số Thập Phân. Làm Tròn Số Thập Phân. Các Phép Tính với Số Thập Phân	13
12 Tìm Giá Trị Phân Số của 1 Số Cho Trước. Tìm 1 Số Biết Giá Trị 1 Phân Số của Nó	13
13 Tìm Tỷ Số & Tỷ Số % của 2 Đại Lượng	13
14 Toán về Công Việc Làm Đồng Thời	13
15 Miscellaneous	13
Tài liệu	13

1 Phân Số với Tử & Mẫu Là Số Nguyên

1.1 Khái niệm phân số

Định nghĩa 1 (Phân số). *Kết quả của phép chia số nguyên a cho số nguyên b khác 0 có thể viết dưới dạng $\frac{a}{b}$, gọi là phân số. Ký hiệu: $\frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.*

Phân số $\frac{a}{b}$ đọc là: a phần b , a là tử số (còn gọi tắt là tử, b là mẫu số (còn gọi tắt là mẫu). Mọi số nguyên $a \in \mathbb{Z}$ có thể viết ở dạng phân số là $\frac{a}{1}$, i.e., $a = \frac{a}{1}$, $\forall a \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 1 (Thái, Đạt, et al., 2022a, Ví dụ 1, 1, p. 26). *Viết & đọc phân số trong mỗi trường hợp sau: (a) Tử là 11, mẫu là -3. (b) Tử là -7, mẫu là -5. (c) Tử là -6, mẫu là 17. (d) Tử là -12, mẫu là -37.*

Giải. (a) Viết: $\frac{11}{-3}$, đọc: mười một phần âm ba. (b) Viết: $\frac{-7}{-5}$, đọc: âm bảy phần âm năm. (c) Viết: $\frac{-6}{17}$, đọc: âm sáu phần mười bảy. (d) Viết: $\frac{-12}{-37}$, đọc: âm mười hai phần âm ba mươi bảy. \square

Bài toán 2 (Thái, Đạt, et al., 2022a, 2, p. 26). *Cách viết nào sau đây cho ta phân số: (a) $\frac{4}{-9}$; (b) $\frac{0.25}{9}$; (c) $\frac{-9}{0}$?*

Giải. (a) $\frac{4}{-9}$ là phân số. (b) $\frac{0.25}{9}$ không là phân số theo 1 vì $0.25 \notin \mathbb{Z}$. (c) $\frac{-9}{0}$ không là phân số, thậm chí không có nghĩa (về mặt toán học) vì phép chia cho 0 không có nghĩa. \square

Mọi số nguyên a đều có thể viết ở dạng phân số là $\frac{a}{1}$, i.e., $a = \frac{a}{1}$, $\forall a \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 3 (Thái, Đạt, et al., 2022a, Ví dụ 2, p. 26). *Viết mỗi số nguyên sau dưới dạng phân số: 19, -7, 0.*

Giải. $19 = \frac{19}{1}$, $-7 = \frac{-7}{1}$, $0 = \frac{0}{1}$. \square

1.2 Phân số bằng nhau

Định nghĩa 2 (2 phân số bằng nhau). *2 phân số được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng biểu diễn 1 giá trị.*

Định lý 1. *Xét 2 phân số $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $bd \neq 0$. Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì $ad = bc$. Ngược lại, nếu $ad = bc$ thì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.*

Với $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, luôn có: $\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$ & $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$.

Bài toán 4 (Thái, Đạt, et al., 2022a, Ví dụ 3, 3, p. 27). *Các cặp phân số sau có bằng nhau không? Vì sao? (a) $\frac{3}{-7}$ & $\frac{3}{7}$; (b) $\frac{2}{5}$ & $\frac{4}{10}$; (c) $\frac{4}{8}$ & $\frac{-1}{2}$; (d) $\frac{1}{-6}$ & $\frac{-3}{18}$.*

Giải. (a) Vì $3 \cdot 7 = (-7) \cdot (-3) = 21$ nên $\frac{3}{-7} = \frac{3}{7}$. (b) Vì $2 \cdot (-10) \neq 5 \cdot 4$ ($-20 \neq 20$) nên $\frac{2}{5} \neq \frac{4}{10}$. (c) Vì $4 \cdot (-2) = 8 \cdot (-1) = -8$ nên $\frac{4}{8} = \frac{-1}{2}$. (d) Vì $1 \cdot (-18) \neq (-6) \cdot (-3)$ ($-18 \neq 18$) nên $\frac{1}{-6} \neq \frac{-3}{18}$. \square

1.3 Tính chất cơ bản của phân số

1.3.1 Tính chất cơ bản

Định lý 2. *Nếu ta nhân cả tử & mẫu của 1 phân số với cùng 1 số nguyên khác 0 thì ta được 1 phân số bằng phân số đã cho. Nếu ta chia cả tử & mẫu của 1 phân số cho cùng 1 ước chung của chúng thì ta được 1 phân số bằng phân số đã cho.*

$\frac{a}{b} = \frac{am}{an}$, $\forall a, b, m \in \mathbb{Z}$, $bm \neq 0$ (i.e., $b \neq 0$ & $m \neq 0$). $\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \text{ƯC}(a, b)$. Mỗi phân số đều đưa được về 1 phân số bằng nó & có mẫu là số dương.

Bài toán 5 (Thái, Đạt, et al., 2022a, Ví dụ 4, p. 28). *Viết mỗi phân số sau thành phân số bằng nó & có mẫu là số dương: (a) $\frac{3}{-5}$; (b) $\frac{-2}{-9}$.*

Giải. Theo tính chất cơ bản của phân số: (a) $\frac{3}{-5} = \frac{3 \cdot (-1)}{(-5) \cdot (-1)} = \frac{-3}{5}$. (b) $\frac{-2}{-9} = \frac{(-2) \cdot (-1)}{(-9) \cdot (-1)} = \frac{2}{9}$. \square

Bài toán 6 (Thái, Đạt, et al., 2022a, 4, p. 28). *Viết phân số sau thành phân số bằng nó & có mẫu là số dương: $\frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$.*

Giải. Vì $b \in \mathbb{N}^*$ nên $b > 0$. Theo tính chất cơ bản của phân số: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot (-1)}{(-b) \cdot (-1)} = \frac{-a}{b}$. \square

Nếu bỏ đi điều kiện $b \in \mathbb{N}^*$ trong bài toán trên, ta được mở rộng sau:

Bài toán 7 (Mở rộng Thái, Đạt, et al., 2022a, 4, p. 28). *Viết phân số sau thành phân số bằng nó & có mẫu là số dương: $\frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.*

Giải. Nếu $b < 0$, phân số $\frac{a}{b}$ đã có mẫu số dương $-b > 0$ nên không cần làm gì thêm. Nếu $b > 0$, theo bài toán trên: $\frac{a}{-b} = \frac{a \cdot (-1)}{(-b) \cdot (-1)} = \frac{-a}{b}$. Có thể viết gom 2 trường hợp này lại thành³: $\frac{a}{-b} = \frac{a \operatorname{sign} b}{|b|}$ với $\operatorname{sign} b$ là hàm dấu⁴ của b . \square

1.3.2 Rút gọn về phân số tối giản

Định nghĩa 3 (Phân số tối giản). Phân số tối giản là phân số mà tử & mẫu chỉ có ước chung là ± 1 .

$\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ là phân số tối giản $\Leftrightarrow \text{ƯC}(a, b) = \{\pm 1\} \Leftrightarrow \text{ƯCLN}(a, b) = 1$.

Dựa vào tính chất cơ bản của phân số, để rút gọn phân số với tử & mẫu là số nguyên về phân số tối giản ta thường làm như sau: *Bước 1*: Tìm ƯCLN của tử & mẫu sau khi đã bỏ đi dấu “-” (nếu có). *Bước 2*: Chia cả tử & mẫu cho ƯCLN vừa tìm được, ta có phân số tối giản cần tìm.

$$\frac{a}{b} = \frac{a : \text{ƯCLN}(a, b)}{b : \text{ƯCLN}(a, b)} = \frac{a : \text{ƯCLN}(a, b) \operatorname{sign} b}{|b| : \text{ƯCLN}(a, b)}, \forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0.$$

Bài toán 8 (Thái, Đạt, et al., 2022a, Ví dụ 5, p. 28). Rút gọn mỗi phân số sau về phân số tối giản: (a) $\frac{12}{-15}$; (b) $\frac{-24}{36}$.

Giải. (a) $\text{ƯCLN}(12, 15) = 3$, $\frac{12}{-15} = \frac{12:3}{-15:3} = \frac{4}{-5}$. (b) $\text{ƯCLN}(24, 36) = 12$, $\frac{-24}{36} = \frac{-24:12}{36:12} = \frac{-2}{3}$. \square

Bài toán 9 (Thái, Đạt, et al., 2022a, Ví dụ 6, p. 29). (a) Rút gọn phân số $\frac{-2}{6}$ về phân số tối giản. (b) Viết tất cả các phân số bằng phân số $\frac{-2}{6}$ mà mẫu là số tự nhiên có 1 chữ số.

Giải. (a) $\text{ƯCLN}(2, 6) = 2$, $\frac{-2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{2:2}{6:2} = \frac{1}{3}$. (b) $\frac{-2}{6} = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$, $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{3}{9}$. Vậy phân số $\frac{-2}{6}$ bằng các phân số có mẫu là số tự nhiên có 1 chữ số: $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$. \square

1.3.3 Quy đồng mẫu nhiều phân số

Dựa vào tính chất cơ bản của phân số ta có thể quy đồng mẫu nhiều phân số có tử & mẫu là số nguyên. Để quy đồng mẫu nhiều phân số, ta thường làm như sau: *Bước 1*: Viết các phân số đã cho về phân số có mẫu dương. Tìm BCNN của các mẫu dương đó để làm mẫu chung. *Bước 2*: Tìm thừa số phụ của mỗi mẫu (bằng cách chia mẫu chung cho từng mẫu). *Bước 3*: Nhân tử & mẫu của mỗi phân số ở *Bước 1* với thừa số phụ tương ứng.

Bài toán 10 (Thái, Đạt, et al., 2022a, Ví dụ 7, p. 29). Quy đồng mẫu những phân số sau: (a) $\frac{-1}{2}$, $\frac{3}{-5}$; (b) $\frac{3}{-20}$, $\frac{-7}{20}$, $\frac{-11}{-30}$.

Giải. (a) $\frac{3}{-5} = \frac{-3}{5}$, $\text{BCNN}(2, 5) = 10$, $10 : 2 = 5$, $10 : 5 = 2$. Vậy $\frac{-1}{2} = \frac{-1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{-5}{10}$, $\frac{3}{-5} = \frac{-3}{5} = \frac{(-3) \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{-6}{10}$. (b) $\frac{3}{-20} = \frac{-3}{20}$, $\text{BCNN}(20, 15, 30) = 60$, $60 : 20 = 3$, $60 : 15 = 4$, $60 : 30 = 2$. Vậy $\frac{3}{-20} = \frac{-3}{20} = \frac{-3 \cdot 3}{20 \cdot 3} = \frac{-9}{60}$, $\frac{-7}{15} = \frac{-7 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{-28}{60}$, $\frac{-11}{-30} = \frac{11}{30} = \frac{11 \cdot 2}{30 \cdot 2} = \frac{22}{60}$. \square

Bài toán 11 (Thái, Đạt, et al., 2022a, 5, p. 30). Quy đồng mẫu những phân số sau: $\frac{-3}{8}$, $\frac{2}{-3}$, $\frac{3}{72}$.

Tóm tắt kiến thức. “Phân số có dạng $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, có thể hiểu là phép chia số nguyên a cho số nguyên b khác 0. Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì $ad = bc$. Ngược lại, nếu $ad = bc$ thì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $bd \neq 0$. Có $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$, $\forall a, b, m \in \mathbb{Z}$, $bm \neq 0$; $\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \text{ƯC}(a, b)$. Phân số tối giản là phân số mà tử & mẫu chỉ có ước chung là ± 1 .” – Thái, 2022, Chap. V, §1, p. 29

Bài toán 12 (Thái, Đạt, et al., 2022a, 1., p. 30). Viết & đọc phân số trong mỗi trường hợp sau: (a) Tử số là -43 , mẫu số là 19; (b) Tử số là -123 , mẫu số là -63 .

Bài toán 13 (Thái, Đạt, et al., 2022a, 2., p. 30). Các cặp phân số sau có bằng nhau không? Vì sao? (a) $\frac{-2}{9}$, $\frac{6}{-27}$; (b) $\frac{-1}{5}$, $\frac{4}{25}$.

Bài toán 14 (Thái, Đạt, et al., 2022a, 3., p. 30). Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết: (a) $\frac{-28}{35} = \frac{16}{x}$; (b) $\frac{x+7}{15} = \frac{-24}{36}$.

Bài toán 15 (Thái, Đạt, et al., 2022a, 4., p. 30). Rút gọn mỗi phân số sau về phân số tối giản: $\frac{14}{21}$, $\frac{-36}{48}$, $\frac{28}{-52}$, $\frac{-54}{-90}$.

Bài toán 16 (Thái, Đạt, et al., 2022a, 5., p. 30). (a) Rút gọn phân số $\frac{-21}{39}$ về phân số tối giản. (b) Viết tất cả các phân số bằng $\frac{-21}{39}$ mà mẫu là số tự nhiên có 2 chữ số.

Bài toán 17 (Thái, Đạt, et al., 2022a, 6., p. 30). Quy đồng mẫu những phân số sau: (a) $\frac{-5}{14}$, $\frac{1}{-21}$; (b) $\frac{17}{60}$, $\frac{-5}{18}$, $\frac{-64}{90}$.

Bài toán 18 (Thái, Đạt, et al., 2022a, 7., p. 30). Trong các phân số sau, tìm phân số không bằng phân số nào trong các phân số còn lại: $\frac{6}{25}$, $\frac{-4}{50}$, $\frac{-27}{54}$, $\frac{-18}{-75}$, $\frac{28}{-56}$.

³Suy ra trực tiếp từ đẳng thức: $|x| = x \operatorname{sign} x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị tuyệt đối của 1 số thực bằng số đó nhân với hàm dấu của nó.

⁴Hàm dấu của 1 số thực $x \in \mathbb{R}$ được xác định như sau:

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{nếu } x > 0, \\ 0, & \text{nếu } x = 0, \\ -1, & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Bài toán 19 (Thái, 2022, Ví dụ 1, p. 29). *Viết tất cả các phân số $\frac{a}{b}$ biết a, b được chọn trong các số: $-3, 0, 5$. Có tất cả bao nhiêu phân số?*

Giải. Vì $b \neq 0$ nên có 2 trường hợp: (1) $b = -3$, có 3 phân số: $\frac{-3}{-3}, \frac{0}{-3}, \frac{5}{-3}$. (2) $b = 5$, có 3 phân số: $\frac{-3}{5}, \frac{0}{5}, \frac{5}{5}$. Viết được tất cả 6 phân số. \square

Bài toán 20 (Mở rộng Thái, 2022, Ví dụ 1, p. 29). *Viết tất cả các phân số $\frac{a}{b}$ biết a, b được chọn trong các số: a_1, a_2, \dots, a_n , với $n \in \mathbb{N}^*$, phân biệt cho trước. Có tất cả bao nhiêu phân số?*

Giải. Xét 2 trường hợp sau: (1) Nếu trong n số a_i đã cho có 1 số bằng 0 (lúc nào cũng chỉ có tối đa 1 số bằng 0 vì các số này phân biệt), i.e., có 1 chỉ số $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho $a_{i_0} = 0$ & $a_i \neq 0, \forall i \neq i_0$. Khi đó, có thể viết được các phân số $\frac{a_i}{b} = \frac{a_i}{a_j}, \forall i = 1, 2, \dots, n, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, j \neq i_0$. Có tất cả $n(n-1)$ phân số trong trường hợp này. (2) Nếu tất cả các số a_i đã cho đều khác 0, i.e., $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$ thì có thể viết được các phân số $\frac{a_i}{b} = \frac{a_i}{a_j}, \forall i, j = 1, 2, \dots, n$. Có tất cả $n \cdot n = n^2$ phân số trong trường hợp này. \square

Bài toán 21 (Thái, 2022, Ví dụ 2, p. 29). *1 trường học có số học sinh giỏi chiếm $\frac{12}{35}$ số học sinh toàn trường, số học sinh khá chiếm $\frac{13}{25}$ số học sinh toàn trường. Số học sinh giỏi & số học sinh khá của trường đó có bằng nhau không? Vì sao?*

Giải. $12 \cdot 25 \neq 35 \cdot 13 \Rightarrow \frac{12}{35} \neq \frac{13}{25}$, nên số học sinh giỏi & số học sinh khá của trường đó không bằng nhau. \square

Lưu ý 1. Có thể thay $\frac{12}{35}, \frac{13}{25}$ trong bài toán trên bằng 2 phân số $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, a, b, c, d \in \mathbb{Z}, bd \neq 0$. Theo tính chất của 2 phân số bằng nhau: Nếu $ad = bc$ thì số học sinh giỏi & số học sinh khá của trường đó bằng nhau. Ngược lại, nếu $ad \neq bc$ thì số học sinh giỏi & số học sinh khá của trường đó không bằng nhau.

Bài toán 22 (Thái, 2022, Ví dụ 3, p. 30). *Rút gọn về phân số tối giản: (a) $\frac{3510-135}{4680-180}$. (b) $\frac{2^4 \cdot 3^2}{6^2 \cdot 5}$. (c) $\frac{11 \cdot 2^n}{6^m}$ với $m, n \in \mathbb{N}$.*

Giải. (a) $\frac{3510-135}{4680-180} = \frac{3 \cdot 45 \cdot (26-1)}{4 \cdot 45 \cdot (26-1)} = \frac{3}{4}$. (b) $\frac{2^4 \cdot 3^2}{6^2 \cdot 5} = \frac{2^4 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = \frac{2^2}{5} = \frac{4}{5}$. (c) Nếu $m > n$, $\frac{11 \cdot 2^n}{6^m} = \frac{11 \cdot 2^n}{2^m \cdot 3^m} = \frac{11}{2^{m-n} \cdot 3^n}$. Nếu $m = n$, $\frac{11 \cdot 2^n}{6^m} = \frac{11 \cdot 2^n}{2^m \cdot 3^m} = \frac{11}{3^n}$. (c) Nếu $m < n$, $\frac{11 \cdot 2^n}{6^m} = \frac{11 \cdot 2^n}{2^m \cdot 3^m} = \frac{11 \cdot 2^{n-m}}{3^n}$. \square

Bài toán 23 (Thái, 2022, 3., p. 30). *Trong các cách viết sau, cách viết nào cho ta phân số? (a) $-\frac{9 \cdot 4}{11 \cdot 5}$. (b) $\frac{-8}{0}$. (c) $\frac{7}{1}$. (d) $\frac{n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.*

Bài toán 24 (Thái, 2022, 4., p. 31). *Trong các cặp phân số sau, cặp phân số nào bằng nhau? Vì sao? $\frac{3}{7}$ & $\frac{6}{-14}$, $\frac{12}{-4}$ & $\frac{-9}{3}$, $\frac{-13}{9}$ & $\frac{13}{-9}$, -5 & $\frac{-10}{2}$, $\frac{2x}{6}$ & $\frac{x}{3}, x \in \mathbb{Z}$.*

2 Tính chất Cơ Bản của Phân Số

“1. Ta gọi $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ là 1 phân số, a là tử, b là mẫu của phân số. Ta có thể viết thương của phép chia $a \in \mathbb{Z}$ cho $b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ dưới dạng $\frac{a}{b}$ & cũng gọi $\frac{a}{b}$ là phân số. $a \in \mathbb{Z}$ có thể viết dưới dạng phân số $\frac{a}{1}$. 2. 2 phân số bằng nhau. Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, b \neq 0, d \neq 0$. Nếu $ad = bc$ thì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ngược lại nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì $ad = bc$. 3. 2 tính chất cơ bản của phân số: $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}, \forall a, b, m \in \mathbb{Z}, b \neq 0, m \neq 0$. $\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}, \forall a, b, n \in \mathbb{Z}, b \neq 0, n \in \text{ƯC}(a, b)$. 4. Rút gọn phân số: Muốn rút gọn 1 phân số, ta chia cả tử & mẫu của phân số đó cho 1 ước chung khác ± 1 của chúng. Phân số tối giản là phân số mà tử & mẫu chỉ có ước chung là ± 1 , i.e., $\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, \text{ƯCLN}(a, b) = 1$. 5. Nếu đổi dấu cả tử & mẫu của 1 phân số thì được 1 phân số mới bằng phân số đã cho. $\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}, \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}, \forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$. 6. Nếu $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản thì mọi phân số bằng nó đều có dạng $\frac{am}{bm}$ với $m \in \mathbb{Z} \text{ & } m \neq 0$.”

– Tuyên, 2022, Chap. 3, §1, p. 45

“Số có dạng $\frac{a}{b}$ trong đó $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ được gọi là phân số. Số nguyên $n \in \mathbb{Z}$ được đồng nhất với phân số $\frac{n}{1}$. Tính chất cơ bản của phân số: $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{a:n}{b:n}$ với $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0, n \in \text{ƯC}(a, b)$. Nếu $\text{ƯCLN}(|a|, |b|) = 1$ thì $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Nếu $\frac{m}{n}$ là dạng tối giản của phân số $\frac{a}{b}$ thì tồn tại số nguyên $k \in \mathbb{Z}$ sao cho $a = mk, b = nk$.” – Bình, 2022, Chap. III, §1, p. 4

Bài toán 25 (Tuyên, 2022, Ví dụ 49, p. 45). *Cho $A = \{-5, 0, 9\}$. Viết tất cả các phân số $\frac{a}{b}$ với $a, b \in A$. Có bao nhiêu phân số thỏa mãn?*

Giải. Số 0 không thể lấy làm mẫu của phân số. Lấy -5 làm mẫu: $\frac{-5}{-5}, \frac{0}{-5}, \frac{9}{-5}$. Lấy 9 làm mẫu: $\frac{-5}{9}, \frac{0}{9}, \frac{9}{9}$. Có 6 phân số thỏa mãn. \square

Bài toán 26 (Mở rộng Tuyên, 2022, Ví dụ 49, p. 45). *Cho $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{Z}$. Viết tất cả các phân số $\frac{a}{b}$ với $a, b \in A$. Có bao nhiêu phân số thỏa mãn?*

Giải. Xét 2 trường hợp: (a) Nếu $0 \notin A$, i.e., $a_i \neq 0, \forall i = 1, \dots, n$. Tất cả các phân số $\frac{a_i}{a_j}$ với $a, b \in A: \frac{a_i}{a_j}, \forall i, j = 1, \dots, n$, có tổng cộng n^2 phân số thỏa mãn. (b) Nếu $0 \in A$, i.e., tồn tại chỉ số $k \in \{1, \dots, n\}$ sao cho $a_k = 0$, ngoài ra $a_i \neq 0, \forall i = 1, \dots, n, i \neq k$ (vì A là 1 tập hợp nên không có các phần tử trùng nhau). Tất cả các phân số $\frac{a_i}{a_j}$ với $a, b \in A: \frac{a_i}{a_j}, \forall i, j = 1, \dots, n, j \neq k$ có tổng cộng $n(n-1) = n^2 - n$ phân số thỏa mãn. \square

Nhận xét 1. “Mẫu của 1 phân số phải khác 0 nhưng tử của phân số có thể bằng 0, khi đó giá trị của phân số đúng bằng 0, i.e., $\frac{0}{b} = 0, \forall b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$. Tử & mẫu của 1 phân số có thể bằng nhau, khi đó giá trị của phân số đúng bằng 1, i.e., $\frac{a}{a} = 1, \forall a \in \mathbb{Z}, a \neq 0$.” – Tuyên, 2022, p. 46

Bài toán 27 (Tuyên, 2022, Ví dụ 50, p. 46). Viết tập hợp B các phân số bằng phân số $\frac{7}{-15}$ với mẫu dương có 2 chữ số.

Giải. $\frac{7}{-15} = \frac{-7}{15}$. Phân số này là 1 phân số tối giản với mẫu dương. Mọi phân số bằng nó đều có dạng $\frac{-7m}{15m}$ với $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$. Mẫu số của các phân số cần phải tìm là 1 số có 2 chữ số nên chọn $m \in \mathbb{Z}$ sao cho $10 \leq 15m \leq 99$, suy ra⁵ $1 \leq m \leq 6$, i.e., $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Vậy $B = \{\frac{-7}{15}, \frac{-14}{30}, \frac{-21}{45}, \frac{-28}{60}, \frac{-35}{75}, \frac{-42}{90}\}$. \square

Bài toán 28 (Mở rộng Tuyên, 2022, Ví dụ 50, p. 46). Cho trước $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, \& n \in \mathbb{N}^*$. Viết tập hợp B các phân số bằng phân số $\frac{a}{b}$ với mẫu dương có n chữ số.

Bài toán 29 (Tuyên, 2022, Ví dụ 51, p. 46). Tìm phân số bằng phân số $\frac{32}{60}$, biết tổng của tử & mẫu là 115.

Giải. Có $\frac{32}{60} = \frac{8}{15} = \frac{8m}{15m}, \forall m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$. Tổng của tử & mẫu là 115 $\Rightarrow 8m + 15m = 115 \Rightarrow 23m = 115 \Rightarrow m = \frac{115}{23} = 5$. Phân số cần tìm: $\frac{8 \cdot 5}{15 \cdot 5} = \frac{40}{75}$. \square

Nhận xét 2. “Nếu không rút gọn phân số $\frac{32}{60}$ thành phân số tối giản $\frac{8}{15}$ mà khẳng định các phân số bằng phân số $\frac{32}{60}$ có dạng $\frac{32m}{60m}$ thì sẽ mắc sai lầm là bỏ sót rất nhiều phân số bằng phân số $\frac{32}{60}$ do đó không thể tìm được đáp số của bài toán trên.” – Tuyên, 2022, p. 46

Bài toán 30 (Mở rộng Tuyên, 2022, Ví dụ 51, p. 46). Cho trước $a, b, n \in \mathbb{Z}, b \neq 0$. Tìm phân số bằng phân số $\frac{a}{b}$, biết tổng của tử & mẫu là n .

Bài toán 31 (Tuyên, 2022, 236., p. 47). Trong các phân số sau, những phân số nào bằng nhau? $\frac{15}{60}, \frac{-7}{5}, \frac{6}{15}, \frac{28}{-20}, \frac{3}{12}$.

Bài toán 32 (Tuyên, 2022, 237., p. 47). Cho $A = \frac{3n-5}{n+4}$. Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để $A \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 33 (Tuyên, 2022, 238., p. 47). Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để cho các phân số sau đồng thời có giá trị nguyên: $\frac{-12}{n}, \frac{15}{n-2}, \frac{8}{n+1}$.

Bài toán 34 (Tuyên, 2022, 239., p. 47). Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết: (a) $\frac{x-1}{9} = \frac{8}{3}$; (b) $\frac{-x}{4} = \frac{-9}{x}$; (c) $\frac{x}{4} = \frac{18}{x+1}$.

Bài toán 35 (Tuyên, 2022, 240., p. 47). Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa $\frac{x-4}{y-3} = \frac{4}{3}$ & $x - y = 5$.

Bài toán 36 (Tuyên, 2022, 241., p. 47). Viết dạng tổng quát các phân số bằng phân số $\frac{-12}{30}$.

Bài toán 37 (Tuyên, 2022, 242., p. 47). Rút gọn phân số: (a) $\frac{990}{2610}$; (b) $\frac{374}{506}$; (c) $\frac{3600-75}{8400-175}$; (d) $\frac{9^{14} \cdot 25^5 \cdot 8^7}{18^{12} \cdot 625^3 \cdot 24^3}$.

Bài toán 38 (Tuyên, 2022, 243., p. 47). Cho phân số $\frac{a}{b}$. Chứng minh: Nếu $\frac{a-x}{b-y} = \frac{a}{b}$ thì $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$.

Bài toán 39 (Tuyên, 2022, 244., p. 47). Cho phân số $A = \frac{1+3+5+\dots+19}{21+23+25+\dots+39}$. (a) Rút gọn A ; (b) Xóa 1 số hạng ở tử & xóa 1 số hạng ở mẫu để được 1 phân số mới vẫn bằng A .

Bài toán 40 (Tuyên, 2022, 245., p. 47). Rút gọn phân số $A = \frac{71 \cdot 52 + 53}{530 \cdot 71 - 180}$ mà không cần thực hiện các phép tính ở tử.

Bài toán 41 (Tuyên, 2022, 246., p. 47). 2 phân số sau có bằng nhau không? $\frac{\overline{abab}}{\overline{cdcd}}, \frac{\overline{ababab}}{\overline{cdcdcd}}$.

Bài toán 42 (Tuyên, 2022, 247., p. 47). Chứng minh: (a) $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 39}{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot \dots \cdot 40} = \frac{1}{2^{20}}$; (b) $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(n+1)(n+2)(n+3) \cdot \dots \cdot 2n} = \frac{1}{2^n}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài toán 43 (Tuyên, 2022, 248., p. 47). Tìm phân số $\frac{a}{b}$ bằng phân số $\frac{60}{108}$ biết: (a) $\text{ƯCLN}(a, b) = 15$; (b) $\text{BCNN}(a, b) = 180$.

Bài toán 44 (Tuyên, 2022, 249., p. 48). Tìm phân số bằng phân số $\frac{200}{520}$ sao cho: (a) Tổng của tử & mẫu là 306; (b) Hiệu của tử & mẫu là 184; (c) Tích của tử & mẫu là 2340.

Bài toán 45 (Tuyên, 2022, 250., p. 48). Chứng minh: $\forall n \in \mathbb{Z}$, các phân số sau là các phân số tối giản: (a) $\frac{3n-2}{4n-3}$; (b) $\frac{4n+1}{6n+1}$.

Bài toán 46 (Tuyên, 2022, 251., p. 48). Cho $\frac{a}{b}$ là 1 phân số chưa tối giản. Chứng minh các phân số sau chưa tối giản: (a) $\frac{a}{a-b}$; (b) $\frac{2a}{a-2b}$.

Bài toán 47 (Tuyên, 2022, 252., p. 48). 1 mẫu Bắc Bộ bằng 3600m². Hỏi 1 mẫu Bắc Bộ bằng mấy phần của 1 hecta?

Bài toán 48 (Bình, 2022, Ví dụ 1, p. 4). Tìm $n \in \mathbb{N}$ để phân số $A = \frac{n+10}{2n-8} \in \mathbb{Z}$ (i.e., có giá trị là 1 số nguyên).

⁵ $m \in \mathbb{Z} \wedge (10 \leq 15m \leq 99) \Leftrightarrow \lfloor \frac{15}{10} \rfloor = 1 \leq m \leq \lfloor \frac{99}{15} \rfloor = 6$.

Giải. Để phân số A có giá trị là 1 số nguyên, tử phải chia hết cho mẫu: $n + 10 : 2n - 8 \Rightarrow n + 10 : n - 4 \Rightarrow n - 4 + 14 : n - 4 \Rightarrow 14 : n - 4 \Rightarrow n - 4 \in \mathbb{U}(14) \cap \mathbb{Z} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14\}$. Vì $n - 4 \geq -4$ (vì $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$) nên $n - 4 \in \{1, 2, 7, 14\}$. Nếu $n - 4 = 1$, $n = 5$, $A = \frac{15}{2}$ (loại). Nếu $n - 4 = -1$, $n = 3$, $A = \frac{13}{-2}$ (loại). Nếu $n - 4 = 2$, $n = 6$, $A = \frac{16}{4} = 4$. Nếu $n - 4 = -2$, $n = 2$, $A = \frac{12}{-4} = -3$. Nếu $n - 4 = 7$, $n = 11$, $A = \frac{21}{14} = \frac{3}{2}$ (loại). Nếu $n - 4 = 14$, $n = 18$, $A = \frac{28}{14} = 2$. Vậy $n \in \{2, 6, 18\}$. \square

Bài toán 49 (Mở rộng Bình, 2022, Ví dụ 1, p. 4). Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $c^2 + d^2 \neq 0$. Tìm $n \in \mathbb{N}$ để phân số $A = \frac{an+b}{cn+d} \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 50 (Bình, 2022, Ví dụ 2, p. 5). Tìm $n \in \mathbb{N}$ để phân số $A = \frac{21n+3}{6n+4}$ rút gọn được.

Bài toán 51 (Mở rộng Bình, 2022, Ví dụ 2, p. 5). Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $c^2 + d^2 \neq 0$. Tìm $n \in \mathbb{N}$ để phân số $A = \frac{an+b}{cn+d}$ rút gọn được.

Bài toán 52 (Bình, 2022, Ví dụ 3, p. 5). Tìm $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ nhỏ nhất sao cho $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$, $\frac{b}{c} = \frac{12}{21}$, $\frac{c}{d} = \frac{6}{11}$.

Bài toán 53 (Bình, 2022, Ví dụ 4, p. 5). Tìm số tự nhiên lớn nhất có 3 chữ số sao cho số đó bằng mỗi tổng $a + b, c + d, e + f$
 $\text{§} \frac{a}{b} = \frac{35}{49}, \frac{c}{d} = \frac{130}{143}, \frac{e}{f} = \frac{7}{13}$.

Bài toán 54 (Bình, 2022, 1., p. 6). Rút gọn phân số: (a) $\frac{199...9}{99...95}$ (10 chữ số 9 ở tử, 10 chữ số 9 ở mẫu); (b) $\frac{121212}{424242}$; (c) $\frac{187187187}{221221221}$; (d) $\frac{3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 39 - 10101}{505050 + 70707}$.

Bài toán 55 (Bình, 2022, 2., p. 6). Chứng minh các phân số sau có giá trị là số tự nhiên: (a) $\frac{10^{2002}+2}{3}$; (b) $\frac{10^{2003}+8}{9}$.

Bài toán 56 (Bình, 2022, 3., p. 6). Chứng minh các phân số sau bằng nhau: (a) $\frac{1717}{2929}$ § $\frac{171717}{292929}$; (b) $\frac{3210-34}{4170-41}$ § $\frac{6420-68}{8340-82}$; (c) $\frac{2106}{7320}$, $\frac{4212}{14640}$, § $\frac{6318}{21960}$.

Bài toán 57 (Bình, 2022, 4., p. 6). Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa: (a) $\frac{x}{3} = \frac{y}{5}$; (b) $\frac{x}{28} = \frac{y}{35}$.

Bài toán 58 (Bình, 2022, 5., p. 6). Tìm các phân số $\frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^*$, có giá trị bằng: (a) $\frac{36}{45}$ biết BCNN(a, b) = 300; (b) $\frac{21}{35}$ biết ƯCLN(a, b) = 30; (c) $\frac{15}{35}$ biết ƯCLN(a, b) · BCNN(a, b) = 3549.

Bài toán 59 (Bình, 2022, 6., p. 7). Chứng minh các phân số sau tối giản với mọi $n \in \mathbb{N}$. (a) $\frac{n+1}{2n+3}$; (b) $\frac{2n+3}{4n+8}$; (c) $\frac{3n+2}{5n+3}$.

Bài toán 60 (Bình, 2022, 7., p. 7). Cho phân số $A = \frac{63}{3n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. (a) Với giá trị nào của n thì A rút gọn được? (b) Với giá trị nào của n thì $A \in \mathbb{N}$?

Bài toán 61 (Bình, 2022, 8., p. 7). Tìm các số tự nhiên n để các phân số sau là phân số tối giản: (a) $\frac{2n+3}{4n+1}$; (b) $\frac{3n+2}{7n+1}$; (c) $\frac{2n+7}{5n+2}$.

Bài toán 62 (Bình, 2022, 9., p. 7). Có bao nhiêu số nguyên dương n không vượt quá 1000 để phân số $\frac{n+12}{n^2+9n-13}$ là phân số tối giản?

Bài toán 63 (Bình, 2022, 10., p. 7). Tìm $n \in \mathbb{N}$ để phân số $\frac{n+3}{2n-2} \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 64 (Bình, 2022, 11., p. 7). Tìm các số nguyên n sao cho các phân số sau có giá trị là số nguyên: (a) $\frac{12}{3n-1}$; (b) $\frac{2n+3}{7}$.

Bài toán 65 (Bình, 2022, 12., p. 7). Tìm $n \in \mathbb{N}$ để phân số $A = \frac{8n+193}{4n+3}$: (a) Có giá trị là số tự nhiên; (b) Là phân số tối giản; (c) Với giá trị nào của n trong khoảng từ 150 đến 170 thì phân số A rút gọn được?

Bài toán 66 (Bình, 2022, 13., p. 7). Tìm các phân số tối giản nhỏ hơn 1 có tử § mẫu đều dương, biết tích của tử § mẫu của phân số bằng 120.

Bài toán 67 (Bình, 2022, 14., p. 7). Tìm $n \in \mathbb{N}$ nhỏ nhất để các phân số sau đều là phân số tối giản: $\frac{5}{n+8}, \frac{6}{n+9}, \frac{7}{n+10}, \dots, \frac{17}{n+20}$.

Bài toán 68 (Bình, 2022, 15., p. 7). Cho 3 phân số $\frac{15}{42}, \frac{49}{56}, \frac{36}{51}$. Biến đổi 3 phân số trên thành các phân số bằng chúng sao cho mẫu của phân số thứ nhất bằng tử của phân số thứ 2, mẫu của phân số thứ 2 bằng tử của phân số thứ 3.

Bài toán 69 (Bình, 2022, 16., p. 7). Cho 3 phân số $\frac{5}{8}, \frac{11}{20}, \frac{4}{15}$. Tìm 3 phân số (có tử § mẫu dương) theo thứ tự bằng 3 phân số trên sao cho hiệu của mẫu § tử của mỗi phân số này đều bằng nhau § hiệu đó có giá trị nhỏ nhất.

Bài toán 70 (Bình, 2022, 17., p. 8). Tìm các phân số lớn hơn $\frac{1}{5}$ § khác số tự nhiên biết nếu lấy mẫu nhân với 1 số, lấy tử cộng với số đó thì giá trị của phân số không đổi.

Bài toán 71 (Bình, 2022, 18., p. 8). Cho phân số $A = \frac{23+22+21+\dots+13}{11+10+9+\dots+1}$. Nêu cách xóa 1 số hạng ở tử § 1 số hạng ở mẫu của A để được 1 phân số mới vẫn bằng phân số A .

Bài toán 72 (Bình, 2022, 19., p. 8, Bộ sử Hume). Người Anh có thói quen xếp bộ sử nước Anh của Hume (David Hume, nhà sử học Scotland) gồm 9 tập ở tủ sách đặc biệt gồm 2 ngăn: ngăn trên xếp 5 cuốn, ngăn dưới xếp 4 cuốn, ở gáy các cuốn sách đó ghi các số 1, 2, 3, ..., 9. Nếu chủ nhân xếp $\frac{13458}{6729}$ (phân số này có giá trị bằng 2) thì chứng tỏ chủ nhân đã đọc 2 tập (riêng trường hợp mới đọc 1 tập thì xếp $\frac{12345}{6789}$). Nêu cách xếp 9 cuốn sách đó để chứng tỏ chủ nhân của bộ sách đã đọc 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 tập.

3 Rút Gọn Phân Số

4 Quy Đồng Mẫu Số Nhiều Phân Số

5 So Sánh Các Phân Số

Trong 2 số nguyên $a, b \in \mathbb{Z}$ khác nhau ($a \neq b$), luôn có 1 số nhỏ hơn số kia, i.e., $a < b$ hoặc $a > b$. Cũng như số nguyên, trong 2 phân số $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ khác nhau ($\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$) luôn có 1 phân số nhỏ hơn phân số kia, i.e., $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ hoặc $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$. Nếu phân số $\frac{a}{b}$ nhỏ hơn phân số $\frac{c}{d}$ thì ta viết $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ hoặc $\frac{c}{d} > \frac{a}{b}$. Phân số lớn hơn 0 gọi là *phân số dương*. Phân số nhỏ hơn 0 gọi là *phân số âm*. Tính chất bắc cầu: Nếu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ & $\frac{c}{d} < \frac{e}{f}$ thì $\frac{a}{b} < \frac{e}{f}$.

$$\left(\frac{a}{b} < \frac{c}{d}\right) \wedge \left(\frac{c}{d} < \frac{e}{f}\right) \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{e}{f}, \forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}, bd \neq 0.$$

Cách so sánh 2 phân số: *Bước 1*: Quy đồng mẫu 2 phân số đã cho (về cùng 1 mẫu dương). *Bước 2*: So sánh tử của các phân số: Phân số nào có tử lớn hơn thì lớn hơn.

Mệnh đề 1. Để so sánh 2 phân số không cùng mẫu, ta quy đồng mẫu 2 phân số đó (về cùng 1 mẫu dương) rồi so sánh các tử với nhau: Phân số nào có tử lớn hơn thì phân số đó lớn hơn.

Bài toán 73 (Thái, Đạt, et al., 2022b, Ví dụ 1, 1, p. 32). So sánh: (a) $\frac{5}{-9}$ & $\frac{2}{-9}$; (b) $\frac{5}{-6}$ & $\frac{-6}{7}$; (c) $\frac{7}{-11}$ & $\frac{8}{-11}$; (d) $\frac{-5}{3}$ & $\frac{5}{-4}$.

Giải. (a) $\frac{5}{-9} = \frac{-5}{9}$, $\frac{2}{-9} = \frac{-2}{9}$. Vì $-5 < -2$ nên $\frac{-5}{9} < \frac{-2}{9}$. Vậy $\frac{5}{-9} < \frac{2}{-9}$. (b) \square

“1. Quy tắc quy đồng mẫu nhiều phân số với mẫu dương: Bước 1. Tìm BCNN của các mẫu để làm mẫu chung. *Bước 2.* Tìm thừa số phụ của mỗi mẫu. *Bước 3.* Nhân tử & mẫu của mỗi phân số với thừa số phụ tương ứng. **2. So sánh 2 phân số:** Muốn so sánh 2 phân số không cùng mẫu ta viết chúng dưới dạng 2 phân số có cùng mẫu dương rồi so sánh các tử với nhau, phân số nào có tử lớn hơn thì phân số đó lớn hơn. **3. Hỗn số dương:** 1 phân số lớn hơn 1 có thể viết dưới dạng 1 hỗn số. Đó là 1 số gồm phần nguyên kèm theo 1 phân số nhỏ hơn 1. **4.** Trong 2 phân số có tử & mẫu đều dương, nếu 2 tử số bằng nhau, phân số nào có mẫu nhỏ hơn thì phân số đó sẽ lớn hơn & ngược lại. **5.** Phân số có tử & mẫu là 2 số nguyên cùng dấu thì lớn hơn 0 & gọi là *phân số dương*. Phân số có tử & mẫu là 2 số nguyên khác dấu thì nhỏ hơn 0 & gọi là *phân số âm*.” – Tuyên, 2022, Chap. III, §2, p. 48

“Để so sánh 2 phân số có tử & mẫu đều dương, ngoài cách quy đồng tử hoặc quy đồng mẫu, người ta thường dùng 1 phân số trung gian & sử dụng tính chất bắc cầu của bất đẳng thức.

Thường sử dụng các tính chất sau: (a) Trong 2 phân số cùng tử, phân số nào có mẫu nhỏ hơn thì phân số đó lớn hơn. (b) Trong 2 phân số nhỏ hơn 1, phân số nào có phần bù đến 1 nhỏ hơn thì phân số đó lớn hơn: $1 - \frac{a}{b} < 1 - \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$. (c) Nếu $0 < a < 1$ & $m < n$ thì $a^m > a^n$.” – Bình, 2022, Chap. 1, §2, p. 8

Bài toán 74 (Công thức hỗn số dương). *Chứng minh:*

$$\frac{ac+b}{c} = a + \frac{b}{c} = a\frac{b}{c}, \forall a, b, c \in \mathbb{Z}, c \neq 0. \quad \frac{a}{b} = \frac{\lfloor \frac{a}{b} \rfloor b + \{\frac{a}{b}\}}{b} = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + \frac{\{\frac{a}{b}\}}{b} = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + \frac{\{\frac{a}{b}\}}{b}.$$

Bài toán 75 (Tuyên, 2022, Ví dụ 52, p. 48). So sánh 2 phân số $\frac{-101}{-100}$ & $\frac{200}{201}$.

Giải. $\frac{-101}{-100} = \frac{101}{100} > \frac{100}{100} = 1 = \frac{201}{201} > \frac{200}{201}$. Vậy $\frac{-101}{-100} > \frac{200}{201}$. \square

Bài toán 76 (Mở rộng Tuyên, 2022, Ví dụ 52, p. 48). Cho $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $a > b > 0$, $d > c > 0$. So sánh: $\frac{\pm a}{\pm b}$ & $\frac{\pm c}{\pm d}$.

Bài toán 77 (Tuyên, 2022, Ví dụ 53, p. 48). Sắp xếp các phân số sau theo thứ tự tăng dần: $\frac{5}{8}$; $\frac{9}{16}$; $\frac{2}{-3}$; $\frac{-7}{12}$.

Bài toán 78 (Bình, 2022, Ví dụ 5, p. 8). So sánh $A = \frac{10^{15}+1}{10^{16}+1}$ & $B = \frac{10^{16}+1}{10^{17}+1}$.

Bài toán 79 (Bình, 2022, Ví dụ 6, p. 9). 1 phân số có tử & mẫu đều là số nguyên dương. Nếu cộng tử & mẫu của phân số đó với cùng $n \in \mathbb{N}^*$ thì phân số thay đổi thế nào?

Bài toán 80 (Bình, 2022, Ví dụ 7, p. 9). So sánh $\left(\frac{1}{32}\right)^7$ & $\left(\frac{1}{16}\right)^9$.

Bài toán 81 (Bình, 2022, Ví dụ 8, p. 9). Chứng minh 95^8 là 1 số có 16 chữ số khi viết kết quả của nó trong hệ thập phân.

Bài toán 82 (Bình, 2022, Ví dụ 9, p. 10). Cho $a, b \in \mathbb{N}^*$ thỏa $\frac{5}{7} < \frac{a}{b} < \frac{9}{11}$. Tìm $a + b$ khi b nhỏ nhất.

Bài toán 83 (Bình, 2022, 20., p. 10). So sánh $a, b \in \mathbb{N}$ biết $\frac{1+2+3+\dots+a}{a} < \frac{1+2+3+\dots+b}{b}$.

Bài toán 84 (Bình, 2022, 21., p. 10). So sánh: (a) $\frac{18}{91}$ & $\frac{23}{114}$; (b) $\frac{21}{52}$ & $\frac{213}{523}$; (c) $\frac{1313}{9191}$ & $\frac{1111}{7373}$.

Bài toán 85 (Bình, 2022, 22., p. 10). So sánh các phân số sau, với $n \in \mathbb{N}$: (a) $\frac{n}{n+1}$ & $\frac{n+2}{n+3}$; (b) $\frac{n+1}{n+4}$ & $\frac{n}{n+5}$; (c) $\frac{n}{2n+1}$ & $\frac{3n+1}{6n+3}$.

Bài toán 86 (Bình, 2022, 23., p. 11). So sánh A & B : (a) $A = \frac{20}{39} + \frac{22}{27} + \frac{18}{43}$, $B = \frac{14}{39} + \frac{22}{29} + \frac{18}{41}$; (b) $A = \frac{3}{8^3} + \frac{7}{8^4}$, $B = \frac{7}{8^3} + \frac{3}{8^4}$; (c) $A = \frac{10^7+5}{10^7-8}$, $B = \frac{10^8+6}{10^8-7}$; (d) $A = \frac{10^{1992}+1}{10^{1991}+1}$, $B = \frac{10^{1993}+1}{10^{1992}+1}$.

Bài toán 87 (Bình, 2022, 24., p. 11). Tìm $x \in \mathbb{N}$ sao cho $\frac{4}{11} < \frac{x}{20} < \frac{5}{11}$.

Bài toán 88 (Bình, 2022, 25., p. 11). Tìm 2 phân số có các mẫu bằng 9, các tử là 2 số tự nhiên liên tiếp sao cho phân số $\frac{4}{7}$ nằm giữa 2 phân số đó.

Bài toán 89 (Bình, 2022, 26., p. 11). Tìm 2 phân số có các tử bằng 1, các mẫu là 2 số tự nhiên liên tiếp sao cho phân số $\frac{13}{84}$ nằm giữa 2 phân số đó.

Bài toán 90 (Bình, 2022, 27., p. 11). Tìm 2 phân số có mẫu bằng 21 biết nó lớn hơn $\frac{5}{7}$ & nhỏ hơn $\frac{5}{6}$.

Bài toán 91 (Bình, 2022, 28., p. 11). Tìm phân số $\frac{a}{b}$ sao cho a là số tự nhiên nhỏ nhất thỏa mãn $\frac{4}{15} < \frac{a}{b} < \frac{1}{3}$.

Bài toán 92 (Bình, 2022, 29., p. 11). Tìm phân số $\frac{a}{b}$ lớn nhất nhỏ hơn 1 với a, b là các số nguyên dương có 1 chữ số.

Bài toán 93 (Bình, 2022, 30., p. 11). So sánh 2 phân số $(\frac{1}{243})^9$ & $(\frac{1}{83})^{13}$.

6 Hỗn Số Dương

7 1 Số Phương Pháp Đặc Biệt để So Sánh 2 Phân Số

8 Phép Cộng, Phép Trừ Phân Số

8.1 Phép Cộng Phân Số

8.1.1 Quy tắc cộng phân số

Mệnh đề 2 (Cộng các phân số cùng mẫu). Muốn cộng 2 hay nhiều phân số có cùng mẫu, ta cộng các tử & giữ nguyên các mẫu:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}, \forall a, b, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0,$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b} = \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b} + \dots + \frac{a_n}{b} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{b}, \forall a_i, b \in \mathbb{Z}, \forall i = 1, 2, \dots, n, b \neq 0.$$

Ví dụ 1. (a) $\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{1+3}{5} = \frac{4}{5}$. (b) $\frac{-1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{-1+3}{5} = \frac{2}{5}$. (c) $\frac{2}{-3} + \frac{-7}{-3} = \frac{2+(-7)}{-3} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$.

Bài toán 94 (Thái, Đạt, et al., 2022a, 1, p. 34). Tính: $\frac{11}{-9} + \frac{5}{-6}$.

Hint. Trước hết, chuyển các mẫu âm của các phân số này thành mẫu dương bằng quy tắc $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$, rồi quy đồng mẫu số để 2 phân số có cùng mẫu, rồi cộng 2 phân số theo quy tắc cộng 2 phân số có cùng mẫu.

Giải. Quy đồng mẫu 2 phân số trước hết, chuyển các phân số về mẫu dương: $\frac{11}{-9} = \frac{-11}{9}$, $\frac{5}{-6} = \frac{-5}{6}$, $\text{BCNN}(9, 6) = 18$, $18 : 9 = 2$, $18 : 6 = 3$. $\frac{11}{-9} = \frac{-11 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{-22}{18}$, $\frac{5}{-6} = \frac{-5 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{-15}{18}$. Suy ra $\frac{11}{-9} + \frac{5}{-6} = \frac{-22}{18} + \frac{-15}{18} = \frac{-22+(-15)}{18} = \frac{-37}{18}$. Vậy $\frac{11}{-9} + \frac{5}{-6} = \frac{-37}{18}$. \square

Lưu ý 2. Khi tính toán với các phân số, luôn chuyển các mẫu âm thành các mẫu dương bằng cách sử dụng công thức: $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$.

Mệnh đề 3 (Cộng các phân số khác mẫu). Muốn cộng 2 hay nhiều phân số không cùng mẫu, ta quy đồng mẫu những phân số đó rồi cộng các tử & giữ nguyên mẫu chung.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot \frac{\text{BCNN}(b,d)}{b}}{\text{BCNN}(b,d)} + \frac{c \cdot \frac{\text{BCNN}(b,d)}{d}}{\text{BCNN}(b,d)} = \frac{a \cdot \frac{\text{BCNN}(b,d)}{b} + c \cdot \frac{\text{BCNN}(b,d)}{d}}{\text{BCNN}(b,d)}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}, bd \neq 0,$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i \cdot \frac{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}{b_i}}{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}{b_i}}{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}, \forall a_i, b_i \in \mathbb{Z}, b_i \neq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Công thức này nhìn lướt qua có vẻ phức tạp nhưng thực ra dễ hiểu bằng cách chú ý ở phân số $\frac{a}{b}$, ta đã nhân cả tử & mẫu cho thừa số phụ $\frac{\text{BCNN}(b,d)}{b}$, còn ở phân số $\frac{c}{d}$, ta đã nhân cả tử & mẫu cho thừa số phụ $\frac{\text{BCNN}(b,d)}{d}$. Không dùng ký hiệu tổng σ , công thức thứ 2 có thể viết cụ thể hơn như sau:

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 \cdot \frac{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}{b_1}}{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)} + \frac{a_2 \cdot \frac{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}{b_2}}{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)} + \dots + \frac{a_n \cdot \frac{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}{b_n}}{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}$$

$$= \frac{a_1 \cdot \frac{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}{b_1} + a_2 \cdot \frac{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}{b_2} + \dots + a_n \cdot \frac{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}{b_n}}{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}, \forall a_i, b_i \in \mathbb{Z}, b_i \neq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Bài toán 95 (Thái, Đạt, et al., 2022a, Ví dụ 1, 1, p. 35). *Tính: (a) $\frac{2}{3} + \frac{2}{-3}$; (b) $\frac{-5}{6} + \frac{-3}{8}$; (c) $\frac{-3}{7} + \frac{2}{7}$; (d) $\frac{-4}{9} + \frac{2}{-3}$.*

Giải. (a) $\frac{2}{3} + \frac{2}{-3} = \frac{2}{3} + \frac{-2}{3} = \frac{2+(-2)}{3} = \frac{0}{3} = 0$. (b) $\frac{-5}{6} + \frac{-3}{8} = \frac{-5 \cdot 4}{6 \cdot 4} + \frac{-3 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{-20}{24} + \frac{-9}{24} = \frac{-20-9}{24} = \frac{-29}{24}$. (c) $\frac{-3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{-3+2}{7} = \frac{-1}{7}$. (d) $\frac{-4}{9} + \frac{2}{-3} = \frac{-4}{9} + \frac{-2}{3} = \frac{-4}{9} + \frac{-2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{-4}{9} + \frac{-6}{9} = \frac{-4-6}{9} = \frac{-10}{9}$. \square

8.1.2 Tính chất của phép cộng phân số

Giống như phép cộng số tự nhiên, phép cộng phân số cũng có các tính chất: giao hoán, kết hợp, cộng với số 0:

- Giao hoán:* $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$, $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $bd \neq 0$ (chú ý $bd \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 0 \& d \neq 0$).
- Kết hợp:* $(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$, $\forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$, $bdf \neq 0$ (chú ý $bdf \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 0 \& d \neq 0 \& f \neq 0$).
- Cộng với số 0:* $\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

Bài toán 96 (Thái, Đạt, et al., 2022a, Ví dụ 2, 2, p. 35). *Tính hợp lý: (a) $\frac{3}{13} + \frac{-3}{7} + \frac{10}{13} + \frac{-4}{7}$. (b) $\frac{-5}{9} + \frac{4}{11} + \frac{7}{11}$. (c) $\frac{-2}{5} + \frac{3}{8} + \frac{-3}{5} + \frac{13}{8}$.*

Giải. (a) $\frac{3}{13} + \frac{-3}{7} + \frac{10}{13} + \frac{-4}{7} = \frac{3}{13} + \frac{10}{13} + \frac{-3}{7} + \frac{-4}{7} = (\frac{3}{13} + \frac{10}{13}) + (\frac{-3}{7} + \frac{-4}{7}) = \frac{3+10}{13} + \frac{-3+(-4)}{7} = 1 + (-1) = 0$. (b) $\frac{-5}{9} + \frac{4}{11} + \frac{7}{11} = \frac{-5}{9} + (\frac{4}{11} + \frac{7}{11}) = \frac{-5}{9} + \frac{4+7}{11} = \frac{-5}{9} + \frac{11}{11} = \frac{-5}{9} + 1 = \frac{-5}{9} + \frac{9}{9} = \frac{-5+9}{9} = \frac{4}{9}$. (c) $\frac{-2}{5} + \frac{3}{8} + \frac{-3}{5} + \frac{13}{8} = (\frac{-2}{5} + \frac{-3}{5}) + (\frac{3}{8} + \frac{13}{8}) = \frac{-2+(-3)}{5} + \frac{3+13}{8} = \frac{-5}{5} + \frac{16}{8} = -1 + 2 = 1$. \square

8.2 Phép Trừ Phân Số

8.2.1 Số đối của 1 phân số

Giống như số nguyên, mỗi phân số đều có số đối sao cho tổng của 2 số đó bằng 0.

Định nghĩa 4 (Số đối của phân số). Số đối của phân số $\frac{a}{b}$ ký hiệu là $-\frac{a}{b}$. Có: $\frac{a}{b} + (-\frac{a}{b}) = 0$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

Có: $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, i.e., dấu $-$ có thể đặt trước 1 phân số, cũng có thể đem lên tử, hoặc đem xuống mẫu thì phân số vẫn không đổi giá trị. Số đối của $-\frac{a}{b}$ là $\frac{a}{b}$, i.e., $-(-\frac{a}{b}) = \frac{a}{b}$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

Ví dụ 2. Số đối của phân số $\frac{2}{5}$ là $-\frac{2}{5}$. Số đối của phân số $\frac{-3}{7}$ là $-(-\frac{3}{7}) = \frac{-(-3)}{7} = \frac{3}{7}$.

8.2.2 Quy tắc trừ phân số

Mệnh đề 4 (Trừ các phân số cùng mẫu). Muốn trừ 2 hay nhiều phân số có cùng mẫu, ta trừ tử của số bị trừ cho tử của số trừ $\&$ giữ nguyên mẫu:

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}, \forall a, b \in \mathbb{Z}, m \neq 0.$$

Có thể ghi gộp lại quy tắc cộng/trừ 2 hay nhiều phân số cùng mẫu như sau (với các dấu $+$, $-$ được sắp xếp tương ứng với dấu của biểu thức ban đầu):

$$\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} = \frac{a \pm b}{m}, \forall a, b \in \mathbb{Z}, m \neq 0,$$

$$\sum_{i=1}^n \pm \frac{a_i}{b} = \pm \frac{a_1}{b} \pm \frac{a_2}{b} \pm \dots \pm \frac{a_n}{b} = \frac{\pm a_1 \pm a_2 + \dots \pm a_n}{b} = \frac{\sum_{i=1}^n \pm a_i}{b}, \forall a_i, b \in \mathbb{Z}, \forall i = 1, 2, \dots, n, b \neq 0.$$

Ví dụ 3. (a) $\frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{4-3}{5} = \frac{1}{5}$. (b) $\frac{-1}{5} - \frac{3}{5} = \frac{-1-3}{5} = \frac{-4}{5}$.

Bài toán 97 (Thái, Đạt, et al., 2022a, 3, p. 36). *Tính: $\frac{13}{-9} - \frac{7}{-6}$.*

Hint. Trước hết, chuyển các mẫu âm của các phân số này thành mẫu dương bằng quy tắc $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$, rồi quy đồng mẫu số để 2 phân số có cùng mẫu, rồi trừ 2 phân số theo quy tắc trừ 2 phân số có cùng mẫu.

Giải. Quy đồng mẫu 2 phân số: $\frac{13}{-9} = \frac{-13}{9}$, $\frac{7}{-6} = \frac{-7}{6}$, BCNN(9,6) = 18, $18 : 9 = 2$, $18 : 6 = 3$, $\frac{13}{-9} = \frac{-13 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{-26}{18}$, $\frac{7}{-6} = \frac{-7 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{-21}{18}$. Suy ra $\frac{13}{-9} - \frac{7}{-6} = \frac{-26}{18} - \frac{-21}{18} = \frac{-26-(-21)}{18} = \frac{-5}{18}$. Vậy $\frac{13}{-9} - \frac{7}{-6} = \frac{-5}{18}$. \square

s

Mệnh đề 5 (Trừ các phân số khác mẫu). Muốn trừ 2 phân số không cùng mẫu, ta quy đồng mẫu những phân số đó rồi trừ tử của số bị trừ cho tử của số trừ $\&$ giữ nguyên mẫu chung.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot \frac{\text{BCNN}(b,d)}{b}}{\text{BCNN}(b,d)} - \frac{c \cdot \frac{\text{BCNN}(b,d)}{d}}{\text{BCNN}(b,d)} = \frac{a \cdot \frac{\text{BCNN}(b,d)}{b} - c \cdot \frac{\text{BCNN}(b,d)}{d}}{\text{BCNN}(b,d)}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}, bd \neq 0,$$

$$\sum_{i=1}^n \pm \frac{a_i}{b_i} = \sum_{i=1}^n \pm \frac{a_i \cdot \frac{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}{b_i}}{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)} = \frac{\sum_{i=1}^n \pm a_i \cdot \frac{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}{b_i}}{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}, \forall a_i, b_i \in \mathbb{Z}, b_i \neq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Bài toán 98 (Thái, Đạt, et al., 2022a, Ví dụ 4, 3, p. 37). *Tính: (a) $\frac{1}{3} - \frac{2}{-3}$. (b) $\frac{-5}{6} - \frac{-7}{8}$. (c) $\frac{7}{-10} - \frac{9}{10}$.*

Giải. (a) $\frac{1}{3} - \frac{2}{-3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1+2}{3} = \frac{3}{3} = 1$. (b) $\frac{-5}{6} - \frac{-7}{8} = \frac{-5 \cdot 4}{6 \cdot 4} - \frac{-7 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{-20}{24} - \frac{-21}{24} = \frac{-20-(-21)}{24} = \frac{1}{24}$. (c) $\frac{7}{-10} - \frac{9}{10} = \frac{-7}{10} - \frac{9}{10} = \frac{-7-9}{10} = \frac{-16}{10} = \frac{-8}{5}$. \square

Bài toán 99 (Thái, Đạt, et al., 2022a, 4, p. 37). (a) *Phân số $\frac{2}{5}$ có phải là số đối của phân số $\frac{2}{-5}$ không?* (b) *Tính & so sánh: $\frac{-3}{7} - \frac{2}{-5}$ & $\frac{-3}{7} + \frac{2}{5}$.*

Giải. (a) Phân số $\frac{2}{5}$ là số đối của phân số $\frac{2}{-5}$ vì $-\frac{2}{5} = \frac{2}{-5}$. (b) $\frac{-3}{7} - \frac{2}{-5} = \frac{-3}{7} + \frac{2}{5} = \frac{-3 \cdot 5}{7 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{-15}{35} + \frac{14}{35} = \frac{-15+14}{35} = \frac{-1}{35}$. Vậy $\frac{-3}{7} - \frac{2}{-5} = \frac{-3}{7} + \frac{2}{5} = \frac{-1}{35}$. \square

Mệnh đề 6. *Muốn trừ 2 phân số, ta cộng số bị trừ với số đối của số trừ:*

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \left(-\frac{c}{d}\right), \forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}, bd \neq 0.$$

Bài toán 100 (Thái, Đạt, et al., 2022a, Ví dụ 5, 4, p. 37). *Tính: (a) $\frac{2}{-9} - \frac{5}{-12}$. (b) $\frac{7}{12} - \frac{-9}{20}$.*

Giải. (a) $\frac{2}{-9} - \frac{5}{-12} = \frac{-2}{9} + \frac{5}{12} = \frac{-2 \cdot 4}{9 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{-8}{36} + \frac{15}{36} = \frac{-8+15}{36} = \frac{7}{36}$. (b) $\frac{7}{12} - \frac{-9}{20} = \frac{7}{12} + \frac{9}{20} = \frac{7 \cdot 5}{12 \cdot 5} + \frac{9 \cdot 3}{20 \cdot 3} = \frac{35}{60} + \frac{27}{60} = \frac{35+27}{60} = \frac{62}{60} = \frac{31}{30}$. \square

8.3 Quy tắc dấu ngoặc

Quy tắc dấu ngoặc đối với phân số giống như quy tắc dấu ngoặc đối với số nguyên.

Bài toán 101 (Thái, Đạt, et al., 2022a, Ví dụ 6, 5, p. 37). *Tính hợp lý: (a) $\frac{14}{13} + \left(\frac{-1}{13} - \frac{19}{20}\right)$. (b) $\frac{-24}{17} - \left(\frac{-7}{17} - \frac{1}{16}\right)$. (c) $\frac{-2}{49} - \left(\frac{47}{49} + \frac{5}{-3}\right)$.*

Giải. (a) $\frac{14}{13} + \left(\frac{-1}{13} - \frac{19}{20}\right) = \frac{14}{13} + \frac{-1}{13} - \frac{19}{20} = \left(\frac{14}{13} + \frac{-1}{13}\right) - \frac{19}{20} = \frac{14-1}{13} - \frac{19}{20} = \frac{13}{13} - \frac{19}{20} = 1 - \frac{19}{20} = \frac{20}{20} - \frac{19}{20} = \frac{20-19}{20} = \frac{1}{20}$. (b) $\frac{-24}{17} - \left(\frac{-7}{17} - \frac{1}{16}\right) = \frac{-24}{17} - \frac{-7}{17} + \frac{1}{16} = \left(\frac{-24}{17} + \frac{7}{17}\right) + \frac{1}{16} = \frac{-24+7}{17} + \frac{1}{16} = \frac{-17}{17} + \frac{1}{16} = -1 + \frac{1}{16} = \frac{-16}{16} + \frac{1}{16} = \frac{-16+1}{16} = \frac{-15}{16}$. (c) $\frac{-2}{49} - \left(\frac{47}{49} + \frac{5}{-3}\right) = \frac{-2}{49} - \frac{47}{49} - \frac{5}{-3} = \left(\frac{-2}{49} - \frac{47}{49}\right) + \frac{5}{3} = \frac{-2-47}{49} + \frac{5}{3} = \frac{-49}{49} + \frac{5}{3} = -1 + \frac{5}{3} = \frac{-3}{3} + \frac{5}{3} = \frac{-3+5}{3} = \frac{2}{3}$. \square

Bài toán 102 (Thái, Đạt, et al., 2022a, 1, p. 38). *Tính: (a) $\frac{-2}{9} + \frac{7}{-9}$. (b) $\frac{1}{-6} + \frac{13}{-15}$. (c) $\frac{5}{-6} + \frac{-5}{12} + \frac{7}{18}$.*

Bài toán 103 (Thái, Đạt, et al., 2022a, 2, p. 38). *Tính hợp lý: (a) $\frac{2}{9} + \frac{-3}{10} + \frac{-7}{10}$. (b) $\frac{-11}{6} + \frac{2}{5} + \frac{-1}{6}$. (c) $\frac{-5}{8} + \frac{12}{7} + \frac{13}{8} + \frac{2}{7}$.*

Bài toán 104 (Thái, Đạt, et al., 2022a, 3, p. 38). *Tìm số đối của mỗi phân số sau: $\frac{9}{25}, \frac{-8}{27}, -\frac{15}{31}, \frac{-3}{-5}, \frac{5}{-6}$.*

Bài toán 105 (Thái, Đạt, et al., 2022a, 4, p. 38). *Tính: (a) $\frac{5}{16} - \frac{5}{24}$. (b) $\frac{2}{11} + \left(\frac{-5}{11} - \frac{9}{11}\right)$. (c) $\frac{1}{10} - \left(\frac{5}{12} - \frac{1}{15}\right)$.*

Bài toán 106 (Thái, Đạt, et al., 2022a, 5, p. 38). *Tính hợp lý: (a) $\frac{27}{13} - \frac{106}{111} + \frac{-5}{111}$. (b) $\frac{12}{11} - \frac{-7}{19} + \frac{12}{19}$. (c) $\frac{5}{17} - \frac{25}{31} + \frac{12}{17} + \frac{-6}{31}$.*

Bài toán 107 (Thái, Đạt, et al., 2022a, 6, p. 38). *Tìm x: (a) $x - \frac{5}{6} = \frac{1}{2}$. (b) $\frac{-3}{4} - x = \frac{-7}{12}$.*

Bài toán 108 (Thái, Đạt, et al., 2022a, 7, p. 38). *1 xí nghiệp trong tháng Giêng đạt $\frac{3}{8}$ kế hoạch của Quý I, tháng 2 đạt $\frac{2}{7}$ kế hoạch của Quý I. Tháng 3 xí nghiệp phải đạt được bao nhiêu phần kế hoạch của Quý I?*

Bài toán 109 (Thái, Đạt, et al., 2022a, 8, p. 38). *4 tổ của lớp 6A đóng góp sách cho góc thư viện như sau: tổ I góp $\frac{1}{4}$ số sách của lớp, tổ II góp $\frac{9}{40}$ số sách của lớp, tổ III góp $\frac{1}{5}$ số sách của lớp, tổ IV góp phần sách còn lại. Tổ IV đã góp bao nhiêu phần số sách của lớp?*

8.4 Biểu diễn phân số trên trục số nằm ngang

Tương tự như đối với các số nguyên, ta có thể biểu diễn mọi phân số trên trục số. Trên trục số, phân số & số đối của phân số đó có điểm biểu diễn nằm về 2 phía của gốc 0 & cách đều gốc 0. Trên trục số nằm ngang, nếu điểm biểu diễn phân số $\frac{a}{b}$ nằm bên trái điểm biểu diễn phân số $\frac{c}{d}$ (hay điểm biểu diễn phân số $\frac{c}{d}$ nằm bên phải điểm biểu diễn phân số $\frac{a}{b}$) thì ta có phân số $\frac{a}{b}$ nhỏ hơn phân số $\frac{c}{d}$, i.e., $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ (hay phân số $\frac{c}{d}$ lớn hơn phân số $\frac{a}{b}$, i.e., $\frac{c}{d} > \frac{a}{b}$). Tính chất bắc cầu: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ \& } \frac{c}{d} < \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{e}{f}$.

9 Phép Nhân, Phép Chia Phân Số

Bài toán 110 (Thái, Đạt, et al., 2022a, p. 40). *Gấu nước được nhà sinh vật học người Ý L. Spallanzani đặt tên là Tardigrada vào năm 1776. 1 con gấu nước dài $\approx \frac{1}{2}$ mm. 1 con gấu nước Bắc Cực trưởng thành dài $\approx \frac{5}{2}$ mm. Chiều dài con gấu nước Bắc Cực trưởng thành gấp bao nhiêu lần chiều dài con gấu nước?*

9.1 Phép Nhân Phân số

Mệnh đề 7. Muốn nhân 2 phân số, ta nhân các tử với nhau & nhân các mẫu với nhau:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}, bd \neq 0,$$

$$\prod_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdots \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{b_1 b_2 \cdots b_n} = \frac{\prod_{i=1}^n a_i}{\prod_{i=1}^n b_i}, \quad \forall a_i, b_i \in \mathbb{Z}, b_i \neq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Ví dụ 4. (a) $\frac{91}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{91 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{273}{8}$. (b) $\frac{-2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{-2 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{-6}{35}$.

Bài toán 111 (Thái, Đạt, et al., 2022a, Ví dụ 1, p. 40). Tính tích & viết kết quả ở dạng phân số tối giản: (a) $\frac{-2}{5} \cdot \frac{3}{7}$. (b) $\frac{-8}{9} \cdot \frac{3}{-4}$. (c) $\frac{-9}{10} \cdot \frac{25}{12}$. (d) $(-\frac{3}{8}) \cdot \frac{-12}{5}$.

Giải. (a) $\frac{-2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{-2 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{-6}{35}$. (b) $\frac{-8}{9} \cdot \frac{3}{-4} = \frac{-8 \cdot 3}{9 \cdot (-4)} = \frac{-24}{-36} = \frac{-24 \cdot 12}{-36 \cdot 12} = \frac{2}{3}$. (c) $\frac{-9}{10} \cdot \frac{25}{12} = \frac{-9 \cdot 25}{10 \cdot 12} = \frac{-225}{120} = \frac{-225 \cdot 15}{120 \cdot 15} = \frac{-15}{8}$. (d) $(-\frac{3}{8}) \cdot \frac{-12}{5} = \frac{-3 \cdot (-12)}{8 \cdot 5} = \frac{36}{40} = \frac{36 \cdot 4}{40 \cdot 4} = \frac{9}{10}$. \square

Mệnh đề 8 (Phép nhân số nguyên với phân số). Muốn nhân 1 số nguyên với 1 phân số (hoặc nhân 1 phân số với 1 số nguyên)⁶, ta nhân số nguyên với tử của phân số & giữ nguyên mẫu của phân số đó:

$$m \cdot \frac{a}{b} = \frac{ma}{b}, \quad \frac{a}{b} \cdot n = \frac{an}{b}, \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0.$$

Bài toán 112 (Thái, Đạt, et al., 2022a, Ví dụ 2, p. 41). Tính tích & viết kết quả ở dạng phân số tối giản: (a) $4 \cdot \frac{-5}{9}$. (b) $\frac{-7}{11} \cdot (-9)$. (c) $8 \cdot \frac{-5}{6}$. (d) $\frac{5}{21} \cdot (-14)$.

Giải. (a) $4 \cdot \frac{-5}{9} = \frac{4 \cdot (-5)}{9} = \frac{-20}{9}$. (b) $\frac{-7}{11} \cdot (-9) = \frac{-7 \cdot (-9)}{11} = \frac{63}{11}$. (c) $8 \cdot \frac{-5}{6} = \frac{8 \cdot (-5)}{6} = \frac{-40}{6} = \frac{-40 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{-20}{3}$. (d) $\frac{5}{21} \cdot (-14) = \frac{5 \cdot (-14)}{21} = \frac{-70}{21} = \frac{-70 \cdot 7}{21 \cdot 7} = \frac{-10}{3}$. \square

9.1.1 Tính chất của phép nhân phân số

Giống như phép nhân số tự nhiên, phép nhân phân số cũng có các tính chất: giao hoán, kết hợp, nhân với số 1, phân phối của phép nhân đối với phép cộng & phép trừ.

- **Giao hoán:** $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}, \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}, bd \neq 0$ (chú ý: $bd \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 0 \text{ \& } d \neq 0$).
- **Kết hợp:** $(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot (\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}, \quad \forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}, bdf \neq 0$ (chú ý: $bdf \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 0 \text{ \& } d \neq 0 \text{ \& } f \neq 0$).
- **Nhân với số 1:** $\frac{a}{b} \cdot 1 = 1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}, \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$.
- **Phân phối của phép nhân đối với phép cộng & phép trừ:** $\frac{a}{b} \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}, \quad \frac{a}{b} \left(\frac{c}{d} - \frac{e}{f} \right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$, có thể viết gọn chung lại thành $\frac{a}{b} \left(\frac{c}{d} \pm \frac{e}{f} \right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \pm \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}, \quad \forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}, bdf \neq 0$.

Bài toán 113 (Thái, Đạt, et al., 2022a, Ví dụ 3, p. 41). Tính hợp lý: (a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{-3}{7} \cdot \frac{-5}{2}$. (b) $\frac{5}{7} \cdot \frac{-2}{11} - \frac{5}{7} \cdot \frac{9}{11}$. (c) $\frac{-9}{7} \cdot (\frac{14}{15} - \frac{-7}{9})$.

Giải. (a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{-3}{7} \cdot \frac{-5}{2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{-5}{2} \cdot \frac{-3}{7} = (\frac{2}{5} \cdot \frac{-5}{2}) \cdot \frac{-3}{7} = -1 \cdot \frac{-3}{7} = \frac{3}{7}$. (b) $\frac{5}{7} \cdot \frac{-2}{11} - \frac{5}{7} \cdot \frac{9}{11} = \frac{5}{7} \cdot (\frac{-2}{11} - \frac{9}{11}) = \frac{5}{7} \cdot \frac{-11}{11} = \frac{5}{7} \cdot (-1) = \frac{-5}{7}$. (c) $\frac{-9}{7} \cdot (\frac{14}{15} - \frac{-7}{9}) = \frac{-9}{7} \cdot \frac{14}{15} - \frac{-9}{7} \cdot \frac{-7}{9} = \frac{-9 \cdot 14}{7 \cdot 15} - \frac{-9 \cdot (-7)}{7 \cdot 9} = \frac{-6}{5} - 1 = \frac{-6}{5} - \frac{5}{5} = \frac{-6-5}{5} = \frac{-11}{5}$. \square

9.2 Phép Chia Phân số

Định nghĩa 5 (Phân số nghịch đảo). Phân số $\frac{b}{a}$ gọi là phân số nghịch đảo của phân số $\frac{a}{b}, \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$.

Ví dụ 5 (Thái, Đạt, et al., 2022a, Ví dụ 4, p. 42). (a) Phân số nghịch đảo của phân số $\frac{7}{3}$ là phân số $\frac{3}{7}$. (b) Phân số nghịch đảo của phân số $\frac{-7}{9}$ là phân số $\frac{-9}{7}$. (c) Phân số nghịch đảo của phân số $\frac{-2}{13}$ là phân số $\frac{-13}{2}$. (d) Phân số nghịch đảo của phân số $\frac{-4}{11}$ là $\frac{11}{-4}$. (e) Phân số nghịch đảo của phân số $\frac{-7}{17}$ là $\frac{-17}{7}$.

Mệnh đề 9. Tích của 1 phân số với phân số nghịch đảo của nó thì bằng 1, i.e., $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1, \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}, ab \neq 0$.

Mệnh đề 10. Muốn chia 1 phân số cho 1 phân số khác 0, ta nhân số bị chia với phân số nghịch đảo của số chia: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}, bcd \neq 0$.

Bài toán 114 (Thái, Đạt, et al., 2022a, Ví dụ 5, p. 42). Tính thương & viết kết quả ở dạng phân số tối giản: (a) $\frac{2}{3} : \frac{-4}{5}$. (b) $(-5) : \frac{-3}{7}$. (c) $\frac{-9}{5} : \frac{8}{3}$. (d) $\frac{-7}{9} : (-5)$.

⁶ Điều này tương đương với nhau do tính chất giao hoán của phép nhân phân số.

Giải. (a) $\frac{2}{3} : \frac{-4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{-4} = \frac{10}{-12} = \frac{10:(-2)}{-12:(-2)} = \frac{-5}{6}$. (b) $-5 : \frac{-3}{7} = -5 \cdot \frac{7}{-3} = \frac{-5 \cdot 7}{-3} = \frac{-35}{-3} = \frac{35}{3}$. (c) $\frac{-9}{5} : \frac{8}{3} = \frac{-9}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{-9 \cdot 3}{5 \cdot 8} = \frac{-27}{40}$. (d) $\frac{-7}{9} : (-5) = \frac{-7}{9} : (-5) \cdot \frac{1}{-5} = \frac{-7}{9 \cdot (-5)} = \frac{-7}{-45} = \frac{7}{45}$. \square

Mệnh đề 11 (Phép chia số nguyên với phân số). *Muốn chia 1 số nguyên với 1 phân số (hoặc chia 1 phân số với 1 số nguyên)⁷:*

$$a : \frac{c}{d} = a \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{c}, \forall a, c, d \in \mathbb{Z}, cd \neq 0,$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}, \forall a, b, c \in \mathbb{Z}, bc \neq 0.$$

Thứ tự thực hiện các phép tính với phân số (trong biểu thức không chứa dấu ngoặc hoặc có chứa dấu ngoặc) cũng giống như thứ tự thực hiện các phép tính với số nguyên: $() \rightarrow [] \rightarrow \{\}, \wedge \rightarrow \cdot, : \rightarrow \pm$.

Bài toán 115 (Thái, Đạt, et al., 2022a, 1., p. 43). *Tính tích & viết kết quả ở dạng phân số tối giản: (a) $\frac{-5}{9} \cdot \frac{12}{35}$. (b) $(-\frac{5}{8}) \cdot \frac{-6}{55}$. (c) $-7 \cdot \frac{2}{5}$. (d) $\frac{-3}{8} \cdot (-6)$.*

Bài toán 116 (Thái, Đạt, et al., 2022a, 2., p. 43). *Tìm x: (a) $\frac{-2}{3} \cdot \frac{x}{4} = \frac{1}{2}$. (b) $\frac{x}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{-5}{12}$. (c) $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{x} = \frac{1}{4}$.*

Bài toán 117 (Thái, Đạt, et al., 2022a, 3., p. 43). *Tìm phân số nghịch đảo của mỗi phân số sau: (a) $\frac{-9}{19}$. (b) $-\frac{21}{13}$. (c) $\frac{1}{-9}$.*

Bài toán 118 (Thái, Đạt, et al., 2022a, 4., p. 43). *Tính thương & viết kết quả ở dạng phân số tối giản: (a) $\frac{3}{10} : (-\frac{2}{3})$. (b) $(-\frac{7}{12}) : (-\frac{5}{6})$. (c) $-15 : \frac{9}{10}$.*

Bài toán 119 (Thái, Đạt, et al., 2022a, 5., p. 43). *Tìm x: (a) $\frac{3}{16} : \frac{x}{8} = \frac{3}{4}$. (b) $\frac{1}{25} : \frac{-3}{x} = \frac{-1}{15}$. (c) $\frac{x}{12} : \frac{-4}{9} = \frac{-3}{16}$.*

Bài toán 120 (Thái, Đạt, et al., 2022a, 6., p. 43). *Tìm x: (a) $\frac{4}{7} \cdot x - \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$. (b) $\frac{4}{5} + \frac{5}{7} : x = \frac{1}{6}$.*

Bài toán 121 (Thái, Đạt, et al., 2022a, 7., p. 43). *Tính: (a) $\frac{17}{8} : (\frac{27}{8} + \frac{11}{2})$. (b) $\frac{28}{15} \cdot \frac{1}{4^2} \cdot 3 + (\frac{8}{15} - \frac{69}{60} \cdot \frac{5}{23}) : \frac{51}{54}$.*

Bài toán 122 (Thái, Đạt, et al., 2022a, 8., p. 43). *Chim ruồi ong hiện là loài chim bé nhỏ nhất trên Trái Đất với chiều dài chỉ khoảng 5cm. Chim ruồi “khổng lồ” ở Nam Mỹ là thành viên lớn nhất của gia đình chim ruồi trên thế giới, nó dài gấp $\frac{33}{8}$ lần chim ruồi ong. Tính chiều dài của chim ruồi “khổng lồ” ở Nam Mỹ.*

10 Tổng Các Phân Số Viết Theo Quy Luật

11 Số Thập Phân. Làm Tròn Số Thập Phân. Các Phép Tính với Số Thập Phân

12 Tìm Giá Trị Phân Số của 1 Số Cho Trước. Tìm 1 Số Biết Giá Trị 1 Phân Số của Nó

13 Tìm Tỷ Số & Tỷ Số % của 2 Đại Lượng

14 Toán về Công Việc Làm Đồng Thời

15 Miscellaneous

Tài liệu

Bình, Vũ Hữu (2022). *Nâng Cao & Phát Triển Toán 6 Tập 2*. Tái bản lần thứ nhất. Kết nối tri thức với cuộc sống. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 152.

Thái, Đỗ Đức (2022). *Bài Tập Toán 6 Tập 2*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, p. 111.

Thái, Đỗ Đức, Đỗ Tiến Đạt, et al. (2022a). *Toán 6 Tập 2*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, p. 108.

— (2022b). *Toán 7 Tập 2*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, p. 127.

Tuyên, Bùi Văn (2022). *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 6*. Tái bản lần thứ 1. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 184.

⁷Chú ý 2 điều này không tương đương với nhau do phép chia phân số không có tính chất giao hoán như phép nhân phân số, i.e., $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \neq \frac{c}{d} : \frac{a}{b} = \frac{bd}{ac}$.