Polynomial – Đa Thức

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 12 tháng 12 năm 2022

Tóm tắt nội dung

[EN] This text is a collection of problems, from easy to advanced, about polynomial. This text is also a supplementary material for my lecture note on Elementary Mathematics grade 8, which is stored & downloadable at the following link: GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/lecture[1]. The latest version of this text has been stored & downloadable at the following link: GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/polynomial[2].

[VI] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài tập chọn lọc từ cơ bản đến nâng cao về đa thức. Tài liệu này là phần bài tập bổ sung cho tài liệu chính – bài giảng GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/lecture của tác giả viết cho Toán Sơ Cấp lớp 8. Phiên bản mới nhất của tài liệu này được lưu trữ & có thể tải xuống ở link sau: GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/polynomial.

Mục lục

1 Nhân Đa Thức

"**1.** Muốn nhân 1 đơn thức với 1 đa thức, ta nhân đơn thức với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các tích với nhau. **2.** Muốn nhân 1 đa thức với 1 đa thức, ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau. **3.** Quy tắc nhân 1 đơn thức với 1 đa thức còn được vận dụng theo chiều ngược lại: $AB + AC = A(B + C)$. **4.** Nếu 2 đa thức $P(x), Q(x)$ luôn có giá trị bằng nhau với mọi giá trị của biến thì 2 đa thức đó gọi là *2 đa thức đồng nhất*, ký hiệu $P(x) \equiv Q(x)$. 2 đa thức $P(x), Q(x)$ (viết dưới dạng thu gọn) là *đồng nhất* khi & chỉ khi hệ số của các lũy thừa cùng bậc bằng nhau. Đặc biệt, nếu $P(x) = \sum_{i=0}^n a_ix^i = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ luôn bằng 0 với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$, i.e., $a_i = 0$, $\forall i = 0, 1, \ldots, n$." – Tuyên, 2022, Chap. 1, §1, p. 4

Bài toán 1 (Tuyên, 2022, Ví dụ 1, p. 4)**.** *Cho $P = (x + 5)(ax^2 + bx + 25)$ & $Q = x^3 + 125$. (a) Viết P dưới dạng 1 đa thức thu gọn theo lũy thừa giảm dần của x. (b) Với giá trị nào của a, b thì $P = Q$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

[1] URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/NQBH_elementary_mathematics_grade_8.pdf.

[2] URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/polynomial/NQBH_polynomial.pdf.

Giải. (a) $P = (x+5)(ax^2+bx+25) = ax^3+bx^2+25x+5ax^2+5bx+125 = ax^3+(5a+b)x^2+(5b+25)x+125$. (b) $P = Q$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow ax^3+(5a+b)x^2+(5b+25)x+125 = x^3+125, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (a=1)\wedge(5a+b=0)\wedge(5b+25=0) \Leftrightarrow (a=1)\wedge(b=-5)$. □

Nhận xét. "Phương pháp giải (b) dựa vào tính chất: 2 đa thức P, Q (viết dưới dạng thu gọn) là đồng nhất khi & chỉ khi mọi hệ số của các đơn thức đồng dạng chứa trong 2 đa thức đó phải bằng nhau." – Tuyên, 2022, p. 5

Bài toán 2 (Tuyên, 2022, **1.**, p. 5)**.** *Tính giá trị của các biểu thức sau bằng cách hợp lý:*
(a) $A = x^5-100x^4+100x^3-100x^2+100x-9$ *tại* $x = 99$. *(b)* $B = x^6-20x^5-20x^4-20x^3-20x^2-20x+3$ *tại* $x = 21$.
(c) $C = x^7-26x^6+27x^5-47x^4-77x^3+50x^2+x-24$ *tại* $x = 25$.

Bài toán 3 (Tuyên, 2022, **2.**, p. 5)**.** *Cho* $x, y \in \mathbb{Z}$. *Chứng minh: (a) Nếu* $A = 5x+y \,\vdots\, 19$ *thì* $B = 4x-3y \,\vdots\, 19$. *(b) Nếu* $C = 4x+3y \,\vdots\, 13$ *thì* $D = 7x+2y \,\vdots\, 13$.

Bài toán 4 (Tuyên, 2022, **3.**, p. 5)**.** *Cho 4 số lẻ liên tiếp. Chứng minh hiệu của tích 2 số cuối với tích 2 số đầu chia hết cho* 16.

Bài toán 5 (Tuyên, 2022, **4.**, pp. 5–6)**.** *Cho 4 số nguyên liên tiếp. (a) Hỏi tích của số đầu với số cuối nhỏ hơn tích của 2 số ở giữa bao nhiêu đơn vị? (b) Giả sử tích của số đầu với số thứ 3 nhỏ hơn tích của số thứ 2 & số thứ 4 là* 99, *tìm 4 số nguyên đó.*

Bài toán 6 (Tuyên, 2022, **5.**, p. 6)**.** *Cho* $b+c = 10$. *Chứng minh đẳng thức* $(10a+b)(10a+c) = 100a(a+1)+bc$. *Áp dụng để tính nhẩm:* $62 \cdot 68$, $43 \cdot 47$.

Bài toán 7 (Tuyên, 2022, **6.**, p. 6)**.** *Xác định các hệ số* a, b, c *biết: (a)* $(2x-5)(3x+b) = ax^2+x+c$.
(b) $(ax+b)(x^2-x-1) = ax^3+cx^2-1$.

Bài toán 8 (Tuyên, 2022, **7.**, p. 6)**.** *Cho* $m \in \mathbb{N}^\star$, $m < 30$. *Có bao nhiêu giá trị của* m *để đa thức* $x^2+mx+72$ *là tích của 2 đa thức bậc nhất với hệ số nguyên?*

2 Các Hằng Đẳng Thức Đáng Nhớ

"**1.** $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$. **2.** $(A-B)^2 = A^2-2AB+B^2$. **3.** $(A-B)(A+B) = A^2-B^2$. **4.** $(A+B)^3 = A^3+3A^2B+3AB^2+B^3 = A^3+B^3+3AB(A+B)$. **5.** $(A-B)^3 = A^3-3A^2B+3AB^2-B^3 = A^3-B^3-3AB(A+B)$. **6.** $(A+B)(A^2-AB+B^2) = A^3+B^3$. **7.** $(A-B)(A^2+AB+B^2) = A^3-B^3$. **8.** Bình phương của đa thức: $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$, $(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd, \ldots$. **9.** Lũy thừa bậc n của 1 nhị thức (nhị thức Newton):

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^0 = 1,\\
&(a+b)^1 = 1a+1b,\\
&(a+b)^2 = 1a^2+2ab+1b^2,\\
&(a+b)^3 = 1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3,\\
&(a+b)^4 = 1a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+1b^4,\\
&(a+b)^5 = 1a^5+5a^4b+10a^3b^2++10a^2b^3+5ab^4+1b^5.
\end{aligned}
$$

Ta thấy khi khai triển $(a+b)^n$ ta được 1 đa thức có $n+1$ hạng tử, hạng tử dầu là a^n, hạng tử cuối là b^n, các hạng tử còn lại đều chứa các nhân tử a & b. Vì vậy $(a+b)^n = B(a)+b^n = B(b)+a^n$. **10.** Nếu viết riêng các hệ số ở vế phải ta được bảng sau (gọi là *tam giác Pascal*):

$$
\begin{array}{llllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\ldots
\end{array}
$$

Nhận xét: Mỗi dòng đều bắt đầu bằng 1 & kết thúc bằng 1. Mỗi số trên 1 dòng kể từ dòng thứ 2 đều bằng số liền trên cộng với số bên trái của số liền trên." – Tuyên, 2022, §2, pp. 6–7

Bài toán 9 (Tuyên, 2022, Ví dụ 2, p. 7). *Cho $x+y=9$, $xy=14$. Tính giá trị của các biểu thức sau: (a) $x-y$; (b) x^2+y^2; (c) x^3+y^3.*

Giải. (a) $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=9^2-4\cdot 14=25 \Rightarrow x-y=\pm 5$. (b) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=9^2-2\cdot 14=53$. (c) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=9^3-3\cdot 14\cdot 9=351$. □

Lưu ý 2.1. *"2 số có bình phương bằng nhau thì chúng đối nhau hoặc bằng nhau. Ngược lại, 2 số đối nhau hoặc bằng nhau thì có bình phương bằng nhau. $(a-b)^2=(b-a)^2=a^2-2ab+b^2$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$." – Tuyên, 2022, p. 8*

Bài toán 10 (Mở rộng Tuyên, 2022, p. 7). *Cho $x+y=a$, $xy=b$, với $a,b\in\mathbb{R}$, $a^2\ge 4b$. Tính giá trị của các biểu thức sau theo a,b: (a) $x-y$; (b) x^2+y^2; (c) x^2-y^2; (d) x^3+y^3; (e) x^3-y^3.*

Giải. (a) $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=a^2-4\cdot b \Rightarrow x-y=\pm\sqrt{a^2-4b}$. (b) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=a^2-2\cdot b$. (c) $x^2-y^2=(x-y)(x+y)=\pm a\sqrt{a^2-4b}$. (d) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=a^3-3ab$. (e) $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)=\pm\sqrt{a^2-4b}(a^2-2b+b)=\pm\sqrt{a^2-4b}(a^2-b)$. □

Bài toán 11 (Tuyên, 2022, Ví dụ 3, p. 8). *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=(x+3y-5)^2-6xy+26$.*

Giải. $A=x^2+9y^2+25+6xy-10x-30y-6xy+26=(x^2-10x+25)+(9y^2-30y+25)+1=(x-5)^2+(3y-5)^2+1\ge 1$, $\forall x,y\in\mathbb{R}\Rightarrow \min A=1\Leftrightarrow (x=5)\wedge\left(y=\frac{5}{3}\right)$. □

Lưu ý 2.2. *(a) "Các hằng đẳng thức được vận dụng theo 2 chiều ngược nhau, e.g., $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ hoặc ngược lại $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$. (b) Bình phương của mọi số thực đều không âm: $x^2\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=0$; hay tương đương với $(a-b)^2\ge 0$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$, "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$." – Tuyên, 2022, p. 9*

Bài toán 12 (Tuyên, 2022, **8.**, p. 9). *Chứng minh các đẳng thức: (a) $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)=2^{32}-1$; (b) $100^2+103^2+105^2+94^2=101^2+98^2+96^2+107^2$.*

Bài toán 13 (Tuyên, 2022, **9.**, p. 9). *Tính giá trị của biểu thức bằng cách hợp lý: (a) $A=\frac{258^2-242^2}{254^2-246^2}$; (b) $B=263^2+74\cdot 263+37^2$; (c) $C=136^2-92\cdot 136+46^2$; (d) $D=(50^2+48^2+46^2+\cdots+2^2)-(49^2+47^2+45^2+\cdots+1^2)$.*

Bài toán 14 (Tuyên, 2022, **10.**, p. 9). *Cho biết $2(a^2+b^2)=(a-b)^2$. Chứng minh a & b đối nhau.*

Bài toán 15 (Tuyên, 2022, **11.**, p. 9). *Cho $a,b,x,y\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Biết $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2$. Tìm hệ thức giữa 4 số a,b,x,y.*

Bài toán 16 (Tuyên, 2022, **12.**, p. 9). *Cho $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$. Chứng minh $a=b=c$.*

Bài toán 17 (Tuyên, 2022, **13.**, p. 9). *Chứng minh không có các số $x,y\in\mathbb{R}$ nào thỏa mãn mỗi đẳng thức sau: (a) $3x^2+y^2+10x-2xy+26=0$; (b) $4x^2+3y^2-4x+30y+78=0$; (c) $3x^2+6y^2-12x-20y+40=0$.*

Bài toán 18 (Tuyên, 2022, **14.**, p. 10). *Tìm $x\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}$ thỏa $x^2+2x+4^n-2^{n+1}+2=0$.*

Bài toán 19 (Tuyên, 2022, **15.**, p. 10). *Chứng minh: (a) Biểu thức $A=x^2+x+1$ luôn luôn dương với mọi số thực x; (b) Biểu thức $B=x^2-xy+y^2$ luôn luôn dương với mọi số thực x,y không đồng thời bằng 0; (c) Biểu thức $C=4x-10-x^2$ luôn luôn âm với mọi số thực x.*

Bài toán 20 (Tuyên, 2022, **16.**, p. 10). *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: (a) $A=25x^2+3y^2-10x+11$; (b) $B=(x-3)^2+(x-11)^2$; (c) $C=(x+1)(x-2)(x-3)(x-6)$.*

Bài toán 21 (Tuyên, 2022, **17.**, p. 10). *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: (a) $A=2x-x^2$; (b) $B=19-6x-9x^2$.*

Bài toán 22 (Tuyên, 2022, **18.**, p. 10). *Chứng minh: (a) 2 số chẵn hơn kém nhau 4 đơn vị thì hiệu các bình phương của chúng chia hết cho 16; (b) 2 số lẻ hơn kém nhau 6 đơn vị thì hiệu các bình phương của chúng chia hết cho 24.*

Bài toán 23 (Tuyên, 2022, **19.**, p. 10). *Cho $x>y>0$ & $x-y=7$, $xy=60$. Không tính x,y, tính: (a) x^2-y^2; (b) x^4+y^4.*

Bài toán 24 (Tuyên, 2022, **20.**, p. 10). *Cho $a+b+c=2p$. Chứng minh: (a) $a^2-b^2-c^2+2abc=4(p-b)(p-c)$; (b) $p^2+(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2=a^2+b^2+c^2$.*

Bài toán 25 (Tuyên, 2022, **21.**, p. 10). *Cho $a=m^2+n^2$, $b=m^2-n^2$, $c=2mn$. Chứng minh nếu $m>n>0$ thì a,b,c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác vuông.*

Bài toán 26 (Tuyên, 2022, **22.**, p. 11). *Tính giá trị của biểu thức: $A=x^3+9x^2+27x+27$ với $x=-103$; (b) $B=x^3-15x^2+75x$ với $x=25$; (c) $C=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ với $x=-3$.*

Bài toán 27 (Tuyên, 2022, **23.**, p. 11). *Cho $x-y=2$, tính giá trị của biểu thức: $A=2(x^3-y^3)-3(x+y)^2$.*

Bài toán 28 (Tuyên, 2022, **24.**, p. 11). *Cho $x+y+z=0$. Chứng minh $x^3+y^3+z^3=3xyz$.*

Bài toán 29 (Tuyên, 2022, **25.**, p. 11). *Rút gọn biểu thức $A=(x-y-1)^3-(x-y+1)^3+6(x-y)^2$.*

Bài toán 30 (Tuyên, 2022, **26.**, p. 11). *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases}(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)=0,\\(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)=16.\end{cases}$$

Bài toán 31 (Tuyên, 2022, **27.**, p. 11). *Chứng minh: (a) $742^3-692^3 \vdots 200$; (b) $685^3+315^3 \vdots 25000$.*

Bài toán 32 (Tuyên, 2022, **28⋆.**, p. 11). *Cho $a+b+c+d=0$. Chứng minh $a^3+b^3+c^3+d^3=3(b+c)(ad-bc)$.*

Bài toán 33 (Tuyên, 2022, **29.**, p. 11). *Cho $a+b+c=0$. Chứng minh: (a) $(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$; (b) $a^4+b^4+c^4=2(ab+bc+ca)^2$.*

Bài toán 34 (Tuyên, 2022, **30.**, p. 11). *Xác định các hệ số a,b để đa thức $A=x^4-2x^3+3x^2+ax+b$ là bình phương của 1 đa thức.*

Bài toán 35 (Tuyên, 2022, **31.**, p. 11). *Cho $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh $a^4+b^4+c^4=\frac{1}{2}$.*

Bài toán 36 (Tuyên, 2022, **32.**, pp. 11–12). *Cho a,b,c là 3 số thực không đồng thời bằng 0. Chứng minh có ít nhất 1 trong các biểu thức sau có giá trị dương: $x=(a-b+c)^2+8ab$, $y=(a-b+c)^2+8bc$, $z=(a-b+c)^2-8ca$.*

Bài toán 37 (Tuyên, 2022, **33.**, p. 12). *Tính tổng các hệ số của tất cả các hạng tử trong khai triển của nhị thức: (a) $(5x-3)^6$; (b) $(3x-4y)^{20}$.*

Bài toán 38 (Tuyên, 2022, **34.**, p. 12). *Đa thức $(x+y)^5$ được khai triển theo lũy thừa giảm của x. Biết hạng tử thứ 2 & hạng tử thứ 3 có giá trị bằng nhau khi cho $x=a$, $y=b$ trong đó a,b là các số thực dương & $a-b=1$. Tìm a,b.*

Bài toán 39 (Tuyên, 2022, **35.**, p. 12). *Tính: (a) $(x+2)^2$; (b) $(x-1)^6$; (c) $(x-1)^5$.*

Bài toán 40 (Tuyên, 2022, **36.**, p. 12). *Tìm số dư của phép chia 38^{10} cho 13 & 38^9 cho 13.*

Bài toán 41 (Tuyên, 2022, **37.**, p. 12). *Chứng minh 2 chữ số tận cùng của 7^{43} là 43.*

3 Phân Tích Đa Thức Thành Nhân Tử

"**1.** Phân tích đa thức thành nhân tử là biến đổi đa thức đó thành 1 tích của những đa thức. **2.** Các phương pháp thông thường: • *Phương pháp đặt nhân tử chung*: $AB+AC-AD=A(B+C-D)$. • *Phương pháp dùng hằng đẳng thức*: $A^2\pm 2AB+B^2=(A\pm B)^2$, $A^3\pm 3A^2B+3AB^2\pm B^3=(A\pm B)^3$, $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$, $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$, $A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$. • *Phương pháp nhóm các hạng tử*: $AC-AD+BC-BD=A(C-D)+B(C-D)=(A+B)(C-D)$. **3.** Dạng tổng quát của các hằng đẳng thức hiệu 2 bình phương, hiệu 2 lập phương: $A^n-B^n=(A-B)\sum_{i=0}^{n-1}A^{n-1-i}B^i=(A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+\cdots+AB^{n-2}+B^{n-1})$. **4.** Dạng tổng quát của hằng đẳng thức tổng 2 lập phương: $A^n+B^n=(A+B)\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^iA^{n-1-i}B^i=(A-B)(A^{n-1}-A^{n-2}B+A^{n-3}B^2-\cdots+AB^{n-2}+B^{n-1})$ với n lẻ. **5.** Áp dụng vào tính chất chia hết: $A^n-B^n \vdots A-B$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $A\neq B$; $A^n+B^n \vdots A+B$, $\forall n\in\mathbb{N}$, n lẻ, $A\neq -B$; $A^{2k}-B^{2k} \vdots A^2-B^2$, $\forall k\in\mathbb{N}$, $A\neq B$." – Tuyên, 2022, §3, pp. 12–13

Bài toán 42 (Tuyên, 2022, Ví dụ 4, p. 13). *Cho $x,y\in\mathbb{R}$, $x\neq y$, thỏa mãn điều kiện $9x(x-y)-10(y-x)^2=0$. Chứng minh $x=10y$.*

Giải. $0=9x(x-y)-10(y-x)^2=9x(x-y)-10(x-y)^2=(x-y)[9x-10(x-y)]=(x-y)(-x+10y)\Rightarrow(x=y)\vee(x=10y)$, mà $x\neq y$, nên $x=10y$. □

"Phân tích đa thức thành nhân tử có nhiều ứng dụng như để tính giá trị của biểu thức, chứng minh tính chia hết hoặc như trong ví dụ trên, để tìm mối quan hệ giữa các biến, ..." – Tuyên, 2022, p. 14

Bài toán 43 (Tuyên, 2022, **38.**, p. 14). *Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: (a) $5x(x-2y)+2(2y-x)^2$; (b) $7x(y-4)^2-(4-y)^3$; (c) $(4x-8)(x^2+6)-(4x-8)(x+7)+9(8-4x)$.*

Bài toán 44 (Tuyên, 2022, **39.**, p. 14). *Chứng minh: (a) $43^2+43\cdot 17 \vdots 60$; (b) $27^5-3^{11} \vdots 80$.*

Bài toán 45 (Tuyên, 2022, **40.**, p. 14). *Tìm 1 số biết 3 lần bình phương của nó đúng bằng 2 lần lập phương của số ấy.*

Bài toán 46 (Tuyên, 2022, **41.**, p. 14). *Có các số nguyên x, y, z nào thỏa mãn hệ phương trình sau không?*

$$\begin{cases} x^3 + xyz = 957, \\ y^3 + xyz = 795, \\ z^3 + xyz = 579. \end{cases}$$

Bài toán 47 (Tuyên, 2022, **42.**, p. 14). *Chứng minh số $\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{22\ldots2}_{n}$ là tích của 2 số nguyên liên tiếp.*

Bài toán 48 (Tuyên, 2022, **43.**, p. 15). *Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: (a) $100x^2 - (x^2+25)^2$; (b) $(x-y+5)^2 - 2(x-y+5)+1$.*

Bài toán 49 (Tuyên, 2022, **44.**, p. 15). *Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^2+4y^2-5)^2 - 16(x^2y^2+2xy+1)$.*

Bài toán 50 (Tuyên, 2022, **45.**, p. 15). *Cho $A = 4a^2b^2 - (a^2+b^2+c^2)$ trong đó a, b, c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Chứng minh $A > 0$.*

Bài toán 51 (Tuyên, 2022, **46.**, p. 15). *Chứng minh: (a) $21^{10} - 1 \vdots 200$; (b) $39^{20} + 39^{13} \vdots 40$; (c) $2^{60} + 5^{30} \vdots 41$; (d) $2005^{2007} + 2007^{2005} \vdots 2006$.*

Bài toán 52 (Tuyên, 2022, **47.**, p. 15). *Cho n là 1 số tự nhiên lẻ. Chứng minh $24^n + 1$ chia hết cho 25 nhưng không chia hết cho 23.*

Bài toán 53 (Tuyên, 2022, **48.**, p. 15). *Cho a là 1 số nguyên lẻ, $a > 1$. Chứng minh $(a-1)^{\frac{1}{2}(a-1)} - 1 \vdots a-2$.*

Bài toán 54 (Tuyên, 2022, **49.**, p. 15). *Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: (a) $x^2 - xz - 9y^2 + 3yz$; (b) $x^3 - x^2 - 5x + 125$; (c) $x^3 + 2x^2 - 6x - 27$; (d) $12x^3 + 4x^2 - 27x - 9$.*

Bài toán 55 (Tuyên, 2022, **50.**, p. 15). *Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: (a) $x^4 - 25x^2 + 20x - 4$; (b) $x^2(x^2-6) - x^2 + 9$; (c) $ab(x^2+y^2) - xy(a^2+b^2)$.*

Bài toán 56 (Tuyên, 2022, **51.**, p. 15). *Tìm $x, y \in \mathbb{R}$ sao cho $x - y = xy - 1$.*

Bài toán 57 (Tuyên, 2022, **52.**, p. 15). *Cho $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ sao cho $x^2 - y = y^2 - x$. Tính giá trị của biểu thức $A = x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 3y$.*

Bài toán 58 (Tuyên, 2022, **53.**, p. 16). *Cho $\frac{a-b}{b-c} = \frac{c-d}{d-a}$. Chứng minh hoặc $a = c$ hoặc $a + c = b + d$.*

Bài toán 59 (Tuyên, 2022, **54.**, p. 16). *Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: (a) $4x^4 + 4x^3 - x^2 - x$; (b) $x^6 - x^4 - 9x^3 + 9x^2$; (c) $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16$.*

Bài toán 60 (Tuyên, 2022, **55.**, p. 16). *Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: (a) $(xy+4)^2 - 4(x+y)^2$; (b) $(ab-xy)^2 - (bx-ay)^2$; (c) $(x^2+8x-34)^2 - (3x^2-8x-2)^2$.*

Bài toán 61 (Tuyên, 2022, **56.**, p. 16). *Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: (a) $(a+b+c)^2 + (a-b+c)^2 - 4b^2$; (b) $a(b^2-c^2) - b(c^2-a^2) + c(a^2-b^2)$; (c) $a^5 + b^5 - (a+b)^5$.*

Bài toán 62 (Tuyên, 2022, **57.**, p. 16). *Chứng minh: (a) $999^4 + 999$ có tận cùng bằng 3 chữ số 0; (b) $49^5 - 49 \vdots 100$.*

Bài toán 63 (Tuyên, 2022, **58.**, p. 16). *Chứng minh: (a) Lập phương của 1 số nguyên trừ đi số nguyên đó thì chia hết cho 6; (b) Nếu tổng của 3 số nguyên chia hết cho 6 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 6.*

Bài toán 64 (Tuyên, 2022, **59.**, p. 16). *Cho $a \neq \pm b$ & $a(a+b)(a+c) = b(b+c)(b+a)$. Chứng minh $a + b + c = 0$.*

Bài toán 65 (Tuyên, 2022, **60.**, p. 16). *Cho $x^2y - y^2x + x^2z - z^2x + y^2z + z^2y = 2xyz$. Chứng minh trong 3 số x, y, z ít nhất cũng có 2 số bằng nhau hoặc đối nhau.*

3.1 Phương Pháp Tách 1 Hạng Tử Thành Nhiều Hạng Tử

Bài toán 66 (Tuyên, 2022, Ví dụ 5, p. 17). *Phân tích đa thức thành nhân tử: $A = 4x^2 - 8x + 3$.*

1st Giải. (Tách hạng tử cuối) $A = 4x^2 - 8x + 4 - 1 = (2x-2)^2 - 1^2 = (2x-2-1)(2x-2+1) = (2x-3)(2x-1)$. □

2nd Giải. (Tách hạng tử 2nd) $A = 4x^2 - 2x - 6x + 3 = 2x(2x-1) - 3(2x-1) = (2x-1)(2x-3)$. □

3rd Giải. (Tách hạng tử 2nd) $A = 4x^2 - 6x - 2x + 3 = 2x(2x-3) - (2x-3) = (2x-3)(2x-1)$. □

4th Giải. $A = 4x^2 - 9 - 8x + 12 = (2x-3)(2x+3) - 4(2x-3) = (2x-3)(2x+3-4) = (2x-3)(2x-1)$. □

Nhận xét. "**1.** Ta nhận thấy với các phương pháp thông thường thì không thể phân tích A thành nhân tử được vì A không có nhân tử chung, không có dạng 1 hằng đẳng thức nào. Đa thức A chỉ có 3 hạng tử nên cũng không thể dùng phương pháp nhóm hạng tử. Vì vậy ta đã tách 1 hạng tử thành 2 hạng tử để xuất hiện những nhóm hạng tử sao cho: • Hoặc có thể dùng hằng đẳng thức để phân tích tiếp; • Hoặc có thể đặt nhân tử chung. **2.** Trong cách giải 2nd, ta đã tách hạng tử thứ 2 là $-8x$ thành $-2x-6x$. Ta thấy $(-2)(-6) = 12$. Trong khi đó tích các hệ số đầu & cuối là $4 \cdot 3 = 12$. 2 tích này đúng bằng nhau. 1 cách tổng quát, để phân tích tam thức bậc 2 $ax^2 + bx + c$ thành nhân tử, ta tách hạng tử bậc nhất bx thành $b_1x + b_2x$ sao cho $b_1b_2 = ac$ sau đó đặt nhân tử chung theo từng nhóm. **3.** Đối với các đa thức có bậc 3 trở lên thì tùy theo đặc điểm của các hệ số mà có cách tách riêng cho phù hợp." – Tuyên, 2022, pp. 17–18

Bài toán 67 (Tuyên, 2022, p. 18)**.** *Phân tích đa thức thành nhân tử:* $A = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$.

1st Giải. $A = x^3 - x^2 + 6x^2 - 6x + 9x - 9 = x^2(x-1) + 6x(x-1) + 9(x-1) = (x-1)(x^2+6x+9) = (x-1)(x+3)^2$. □

2nd Giải. $A = x^3+3x^2+2x^2+6x-3x-9 = x^2(x+3)+2x(x+3)-3(x+3) = (x+3)(x^2+2x-3) = (x+3)(x-1)(x+3) = (x-1)(x+3)^2$. □

Trong đó có nhiều cách phân tích $B \coloneqq x^2 + 2x - 3$ thành nhân tử, e.g.: • $B = x^2 - x + 3x - 3 = x(x-1) + 3(x-1) = (x-1)(x+3)$. • $B = x^2 + 3x - x - 3 = x(x+3) - (x+3) = (x+3)(x-1)$. • $B = x^2 + 2x + 1 - 4 = (x+1)^2 - 4 = (x+1-2)(x+1+2) = (x-1)(x+3)$.

3rd Giải. $A = x^3 + 6x^2 + 9x - x^2 - 6x - 9 = x(x^2+6x-9) - (x^2+6x+9) = (x-1)(x^2+6x+9) = (x-1)(x+3)^2$. □

4th Giải. $A = x^3+2x^2-3x+3x^2+6x-9 = x(x^2+2x-3)+3(x^2+2x-3) = (x+3)(x^2+2x-3) = (x+3)(x+3)(x-1) = (x+3)^2(x-1)$, trong đó các cách phân tích x^2+2x-3 thành nhân tử đã được trình bày ở 2nd Giải. □

3.2 Phương Pháp Thêm Bớt Cùng Hạng Tử

Bài toán 68 (Tuyên, 2022, Ví dụ 6, p. 18)**.** *Phân tích đa thức thành nhân tử* $A = 4x^4 + y^4$.

1st Giải. $A = 4x^4 + 4x^2y^2 + y^4 - 4x^2y^2 = (2x^2+y^2)^2 - (2xy)^2 = (2x^2 - 2xy + y^2)(2x^2 + 2xy + y^2)$. □

Nhận xét. "Ta dễ dàng nhận thấy các phương pháp thông thường không dùng được. Ta tăng thêm các hạng tử của A bằng cách thêm bớt cùng 1 hạng tử là $4x^2y^2$. Lúc này xuất hiện dạng khai triển của bình phương 1 tổng & ta tiếp tục phân tích bằng cách áp dụng hằng đẳng thức. Như vậy mục đích của việc thêm bớt cùng 1 hạng tử là để xuất hiện những nhóm hạng tử sao cho có thể dùng hằng đẳng thức hoặc đặt nhân tử chung." – Tuyên, 2022, p. 18

3.3 Phương Pháp Đổi Biến

Bài toán 69 (Tuyên, 2022, Ví dụ 7, p. 18)**.** *Phân tích đa thức thành nhân tử* $A = (x^2-3x-1)^2 - 12(x^2-3x-1) + 27$.

Giải. Đặt $y \coloneqq x^2 - 3x - 1$ ta được $A = y^2 - 12y + 27 = (y-3)(y-9) = (x^2-3x-1-3)(x^2-3x-1-9) = (x^2-3x-4)(x^2-3x-10) = (x+1)(x-4)(x+2)(x-5)$. □

Trong đó có thể phân tích $B \coloneqq y^2 - 12y + 27$ thành nhân tử bằng nhiều cách, e.g.: • $B = y^2-12y+36-9 = (y-6)^2-3^2 = (y-6-3)(y-6+3) = (y-9)(y-3)$. • $B = y^2-3y-9y+27 = y(y-3)-9(y-3) = (y-3)(y-9)$. • $B = y^2-9y-3y+27 = y(y-9)-3(y-9) = (y-9)(y-3)$. • $B = y^2-3^2-12y+36 = (y-3)(y+3)-12(y-3) = (y-3)(y+3-12) = (y-3)(y-9)$. • $B = y^2 - 9^2 - 12y + 108 = (y-9)(y+9) - 12(y-9) = (y-9)(y+9-12) = (y-9)(y-3)$.
Nhận xét. "Trong cách giải trên, nhờ cách đổi biến $y \coloneqq x^2 - 3x - 1$ ta đã đưa 1 đa thức bậc 4 đối với x rất phức tạp trở thành 1 đa thức bậc 2 đối với y rất đơn giản, nhờ đó phân tích thành nhân tử được dễ dàng." – Tuyên, 2022, p. 19

3.4 Phương Pháp Đồng Nhất Hệ Số/Phương Pháp Hệ Số Bất Định

Bài toán 70 (Tuyên, 2022, Ví dụ 8, p. 18)**.** *Phân tích đa thức* $A = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 5x + 3$ *thành tích của 2 tam thức bậc 2 với hệ số nguyên.*

Giải. Sau khi phân tích thì A có dạng $(x^2+ax+1)(x^2+bx+3)$ hoặc $(x^2+ax-1)(x^2+bx-3)$. Trường hợp 2 hạng tử bậc 2 của mỗi tam thức là $-x^2$ & $-x^2$ thì ta chỉ cần đổi dấu cả 2 tam thức. Xét trường hợp $A = (x^2+ax+1)(x^2+bx+3)$, i.e., $x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 5x + 3 = x^4 + (a+b)x^3 + (ab+4)x^2 + (3a+b)x + 3$. 2 đa thức trên đồng nhất với nhau nên ta có:

$$\begin{cases} a+b=-3, \\ ab+4=6, \\ 3a+b=-5. \end{cases}$$

Suy ra[3] $a = -1$, $b = -2$. Vậy $A = (x^2 - x + 1)(x^2 - 2x + 3)$. □

Nhận xét. **1.** Nếu trường hợp 2 hệ số tự do là 1 & 3 không thỏa mãn thì ta xét trường hợp 2 hệ số tự do là -1 & -3 bằng cách tương tự như trên. **2.** Phương pháp giải như trên gọi là *phương pháp đồng nhất hệ số* (hay *phương pháp hệ số bất định*). Cơ sở phương pháp này là: 2 đa thức (viết dưới dạng thu gọn) là đồng nhất khi & chỉ khi mọi hệ số của các đơn thức đồng dạng chứa trong 2 đa thức đó phải bằng nhau." – Tuyên, 2022, p. 20

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử.

Bài toán 71 (Tuyên, 2022, **61.**, p. 20)**.** *(a)* $3x^2 - 11x + 6$; *(b)* $8x^2 + 10x - 3$; *(c)* $8x^2 - 2x - 1$.

Bài toán 72 (Tuyên, 2022, **62.**, p. 20)**.** *(a)* $6x^2 + 7xy + 2y^2$; *(b)* $9x^2 - 9xy - 4y^2$; *(c)* $x^2 - y^2 + 10x - 6y + 16$.

Bài toán 73 (Tuyên, 2022, **63.**, p. 20)**.** *(a)* $x^3 + x + 2$; *(b)* $x^3 - 2x - 1$; *(c)* $x^3 + 3x^2 - 4$.

Bài toán 74 (Tuyên, 2022, **64.**, p. 20)**.** *(a)* $x^3y^3 + x^2y^2 + 4$; *(b)* $x^3 + 3x^2y - 9xy^2 + 5y^3$.

Bài toán 75 (Tuyên, 2022, **65.**, p. 20)**.** *(a)* $x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 5$; *(b)* $x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 12x + 36$; *(c)* $x^8y^8 + x^4y^4 + 1$.

Bài toán 76 (Tuyên, 2022, **66.**, p. 21)**.** *(a)* $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$; *(b)* $x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 2$.

Bài toán 77 (Tuyên, 2022, **67.**, p. 21)**.** *(a)* $x^4 + y^4 + (x+y)^4$; *(b)* $2(x^2 + x + 1)^2 - (2x+1)^2 - (x^2 + 2x)^2$.

Bài toán 78 (Tuyên, 2022, **68.**, p. 21)**.** *(a)* $xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) + 3xyz$; *(b)* $xy(x+y) - yz(y+z) - zx(z-x)$; *(c)* $x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)$.

Bài toán 79 (Tuyên, 2022, **69.**, p. 21)**.** *Chứng minh* $a^5 - a \,\vdots\, 30$, $\forall a \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 80 (Tuyên, 2022, **70***⋆***.**, p. 21)**.** *Cho* $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x > y > z$. *Chứng minh biểu thức* $A = x^4(y-z) + y^4(z-x) + z^4(x-y)$ *luôn dương.*

Bài toán 81 (Tuyên, 2022, **71.**, p. 21)**.** *Cho* x, y, z *là các số thực dương thỏa* $(x+y)(y+z)(z+x) = 8xyz$. *Chứng minh* $x = y = z$.

Bài toán 82 (Tuyên, 2022, **72.**, p. 21)**.** *(a)* $x^4 + 5x^3 + 10x - 4$; *(b)* $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

Bài toán 83 (Tuyên, 2022, **73.**, p. 21)**.** *(a)* $x^7 + x^2 + 1$; *(b)* $x^8 + x + 1$.

Bài toán 84 (Tuyên, 2022, **74.**, p. 21)**.** *(a)* $x^5 + x^4 + 1$; *(b)* $x^{10} + x^5 + 1$.

Bài toán 85 (Tuyên, 2022, **75.**, p. 21)**.** *Cho* $x \in \mathbb{Z}$. *Chứng minh* $x^{200} + x^{100} + 1 \,\vdots\, x^4 + x^2 + 1$.

Bài toán 86 (Tuyên, 2022, **76.**, p. 21)**.** *(a)* $A = x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 3y - 4$; *(b)* $B = (12x^2 - 12xy + 3y^2) - 10(2x - y) + 8$.

Bài toán 87 (Tuyên, 2022, **77.**, p. 21)**.** *(a)* $A = (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$; *(b)* $B = (a+b-2c)^3 + (b+c-2a)^3 + (c+a-2b)^3$.

Bài toán 88 (Tuyên, 2022, **78.**, p. 21)**.** *(a) Chứng minh:* $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x+y)(y+z)(z+x)$. *(b) Phân tích đa thức thành nhân tử:* $A = (a+b+c)^3 + (a-b-c)^3 + (b-c-a)^3 + (c-a-b)^3$.

Bài toán 89 (Tuyên, 2022, **79.**, p. 21)**.** *(a)* $A = (x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 1) - 6$; *(b)* $B = (x^2 + 4x - 3)^2 - 5x(x^2 + 4x - 3) + 6x^2$; *(c)* $C = (x^2 + x + 4)^2 + 8x(x^2 + x + 4) + 15x^2$.

Bài toán 90 (Tuyên, 2022, **80.**, p. 21)**.** $2(x^2 - 6x + 1)^2 + 5(x^2 - 6x + 1)(x^2 + 1) + 2(x^2 + 1)^2$.

Bài toán 91 (Tuyên, 2022, **81.**, p. 21)**.** *Cho* $M = 4(x-2)(x-1)(x+4)(x+8) + 25x^2$. *Chứng minh* M *không có giá trị âm.*

Bài toán 92 (Tuyên, 2022, **82.**, p. 21)**.** *Phân tích đa thức* A *thành tích của 1 nhị thức bậc nhất với 1 đa thức bậc 3 với hệ số nguyên sao cho hệ số cao nhất của đa thức bậc 3 là 1:* $A = 3x^4 + 11x^3 - 7x^2 - 2x + 1$.

Bài toán 93 (Tuyên, 2022, **83.**, p. 21)**.** *Phân tích đa thức* B *thành tích của 2 tam thức bậc 2 với hệ số nguyên:* $B = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1$.

Bài toán 94 (Tuyên, 2022, **84.**, p. 21)**.** *Phân tích đa thức* C *thành tích của 2 tam thức bậc 2 với hệ số nguyên & các hệ số cao nhất đều mang dấu dương:* $C = x^4 - x^3 + 2x^2 - 11x - 5$.

[3] Thay vì giải hệ gồm 3 phương trình nhưng chỉ có 2 ẩn trên, ta chỉ cần giải/sử dụng máy tính bỏ túi để giải hệ gồm 2 phương trình đầu & cuối:

$$\begin{cases} a + b = -3, \\ 3a + b = -5. \end{cases}$$

4 Chia Đa Thức

"**1.** Chia đơn thức A cho đơn thức B: • Chia hệ số của A cho hệ số của B; • Chia lũy thừa của từng biến trong A cho lũy thừa của cùng biến đó trong B; Nhân các kết quả với nhau. **2.** Chia đa thức A cho đơn thức B: Ta chia mỗi hạng tử của A cho B rồi cộng các kết quả với nhau. **3.** Chia đa thức A cho đa thức B: Cho A, B là 2 đa thức tùy ý của cùng 1 biến, $B \neq 0$, khi đó tồn tại duy nhất 1 cặp đa thức Q, R sao cho $A = BQ + R$, trong đó $R = 0$ hoặc bậc của R nhỏ hơn bậc của B. Q gọi là *đa thức thương* & R là *đa thức dư* của phép chia A cho B. Nếu $R = 0$ thì phép chia A cho B là *phép chia hết*.

Định lý 4.1 (Định lý Bézout)**.** *Số dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho nhị thức bậc nhất $x - a$ đúng bằng $f(a)$.*

Ví dụ 4.1. *Với $f(x) = x^3 - 6x + 5$. Số dư trong phép chia $f(x)$ cho $x - 2$ là $f(2) = 8 - 12 + 5 = 1$. Số dư trong phép chia $f(x)$ cho $x - 1$ là $f(1) = 1 - 6 + 5 = 9$, i.e., $f(x) \vdots x - 1$.*

Hệ quả 4.1. *Nếu a là nghiệm của đa thức $f(x)$ thì $f(x) \vdots x - a$. Đặc biệt, nếu tổng các hệ số của đa thức $f(x)$ bằng 0 thì 1 là nghiệm & $f(x) \vdots x - 1$; nếu $f(x)$ có tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng các hệ số bậc lẻ thì -1 là nghiệm & $f(x) \vdots x - (-1)$, i.e., $f(x) \vdots x + 1$.*

4. *Áp dụng hệ quả của định lý Bézout vào việc phân tích đa thức thành nhân tử.* Nếu đa thức $f(x)$ có nghiệm $x = a$ thì khi phân tích $f(x)$ thành nhân tử, tích sẽ chứa nhân tử $(x - a)$. **5.** *Cách nhẩm nghiệm nguyên, nghiệm hữu tỷ của đa thức $f(x)$ với hệ số nguyên.* Nếu $f(x)$ có nghiệm nguyên thì nghiệm đó phải là ước của hệ số tự do. Nếu $f(x)$ có nghiệm hữu tỷ thì nghiệm đó có dạng $\frac{p}{q}$, ƯCLN$(p, q) = 1$ trong đó p là ước của hệ số tự do, q là ước dương của hệ số cao nhất." – Tuyên, 2022, §4, pp. 22–24

Bài toán 95 (Tuyên, 2022, Ví dụ 9, p. 24)**.** *Xác định các hệ số a, b sao cho $x^4 + ax^3 + b \vdots x^2 - 1$.*

Bài toán 96 (Tuyên, 2022, Ví dụ 10, p. 25)**.** *Phân tích đa thức thành nhân tử $M = xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) + 2xyz$.*

Bài toán 97 (Tuyên, 2022, Ví dụ 11, p. 26)**.** *Phân tích đa thức thành nhân tử $A = x^3 - x^2 - 8x + 12$.*

"Phương pháp nhẩm nghiệm của đa thức để vận dụng hệ quả của định lý Bézout giúp ta định hướng nhanh chóng việc tách 1 hạng tử thành nhiều hạng tử 1 cách thích hợp." – Tuyên, 2022, p. 26

Bài toán 98 (Tuyên, 2022, **85.**, p. 27)**.** *Tìm $n \in \mathbb{N}$ để đơn thức $-7x^{n+1}y^6 \vdots 4x^5y^n$.*

Bài toán 99 (Tuyên, 2022, **86.**, p. 27)**.** *Chứng minh giá trị của biểu thức A luôn luôn không âm với mọi giá trị khác 0 của x, y: $A = (75x^5y^2 - 45x^4y^3) : 3x^3y^2 - \left(\frac{5}{2}x^2y^4 - 2xy^5\right) : \frac{1}{2}xy^3$.*

Bài toán 100 (Tuyên, 2022, **87.**, p. 27)**.** *Tìm $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa: $[(x - 2y)(x - 7y) - x^2 + 4y^2] : (x - 2y) = 18$.*

Bài toán 101 (Tuyên, 2022, **88.**, p. 27)**.** *Tìm giá trị nhỏ nhất của thương: $(4x^5 + 2x^4 + 4x^3 - x - 1) : (2x^3 + x - 1)$.*

Bài toán 102 (Tuyên, 2022, **89.**, p. 27)**.** *Tìm các giá trị nguyên của x để thương có giá trị nguyên. (a) $(3x^3 + 13x^2 - 7x + 5) : (3x - 2)$; (b) $(2x^5 + 4x^4 - 7x^3 - 44) : (2x^2 - 7)$.*

Bài toán 103 (Tuyên, 2022, **90.**, p. 27)**.** *Chứng minh không tồn tại $n \in \mathbb{N}$ để giá trị của biểu thức $n^6 - n^4 - 2n^2 + 9$ chia hết cho giá trị của biểu thức $n^4 + n^2$.*

Bài toán 104 (Tuyên, 2022, **91.**, p. 27)**.** *Không làm phép chia đa thức, tìm số dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $g(x)$ trong các trường hợp sau: (a) $f(x) = x^{21} + x^{20} + x^{19} + 101$, $g(x) = x + 1$. (b) $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 2x + 7$, $g(x) = x + 2$. (c) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x - 10$, $g(x) = x - 5$.*

Bài toán 105 (Tuyên, 2022, **92.**, p. 27)**.** *Chứng minh $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^{31} - (x^2 - 4x + 5)^{30} + 2 \vdots x - 2$.*

Bài toán 106 (Tuyên, 2022, **93.**, p. 27)**.** *Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: (a) $x^3 - 9x^2 + 15x + 25$; (b) $x^3 - 4x^2 - 11x + 30$; (c) $2x^4 + x^3 - 22x^2 + 15x - 36$.*

Bài toán 107 (Tuyên, 2022, **94.**, p. 27)**.** *Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: (a) $3x^3 + 5x^2 - 14x + 4$; (b) $2x^3 - x^2 - 3x - 1$.*

Bài toán 108 (Tuyên, 2022, **95.**, p. 28)**.** *Tìm đa thức dư trong phép chia $(x^{54} + x^{45} + x^{36} + \cdots + x^9 + 1) : (x^2 - 1)$.*

Bài toán 109 (Tuyên, 2022, **96.**, p. 28)**.** *Xác định đa thức $f(x)$ thỏa mãn cả 3 điều kiện sau: (a) Khi chia cho $x - 1$ dư 4; (b) Khi chia cho $x + 2$ dư 1; (c) Khi chia cho $(x - 1)(x + 2)$ thì được thương là $5x^2$ & còn dư.*

Bài toán 110 (Tuyên, 2022, **97.**, p. 28)**.** *Cho đa thức $A = ax^2 + bx + c$. Xác định hệ số b biết khi chia A cho $x - 1$, chia A cho $x + 1$ đều có cùng 1 số dư.*

Bài toán 111 (Tuyên, 2022, **98.**, p. 28)**.** *Chứng minh nếu $x^4 - 4x^3 + 5ax^2 - 4bx + c \vdots x^3 + 3x^2 - 9x - 3$ thì $a + b + c = 0$.*

Bài toán 112 (Tuyên, 2022, **99.**, p. 28)**.** *Đa thức $4x^3 + ax + b$ chia hết cho 2 đa thức $x - 2, x + 1$. Tính $2a - 3b$.*

5 Số Chính Phương

"**1.** *Số chính phương* là số bằng bình phương của 1 số tự nhiên. 20 số chính phương đầu tiên: $0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 4, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400$. **2.** 1 số tính chất của số chính phương: (a) Số chính phương không tận cùng bởi các chữ số $2, 3, 7, 8$. (b) Khi phân tích 1 số chính phương ra thừa số nguyên tố ta được các thừa số là lũy thừa của số nguyên tố với số mũ chẵn, e.g., $3600 = 60^2 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. Từ đó suy ra số chính phương N chia hết cho 2 thì N chia hết cho $2^2 = 4$; số chính phương N chia hết cho $2^3 = 8$ thì N chia hết cho $2^4 = 16$. Tổng quát, nếu số chính phương N chia hết cho p^{2k+1} thì N chia hết cho p^{2k+2} (p là số nguyên tố, $k \in \mathbb{Z}$). (c) Số chính phương chia cho 3 chỉ có thể dư 0 hoặc dư 1. Thực vậy, xét các trường hợp: $(3k)^2 = 9k^2 \,\vdots\, 3$, $(3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1$ chia cho 3 dư 1, $(3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4$ chia cho 3 dư 1. Tương tự, 1 số chính phương chia cho 4 chỉ có thể dư 0 hoặc dư 1, chia cho 5 dư 0 hoặc dư 1 hoặc dư 4. Số chính phương lẻ chia cho 4 hoặc chia cho 8 đều dư 1. (d) Giữa 2 số chính phương liên tiếp không có số chính phương nào. $n^2 < x^2 < (n+1)^2 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $n^2 < x^2 < (n+1)^2$. $n^2 < x^2 < (n+2)^2 \Rightarrow x^2 = (n+1)^2$. (e) Nếu 2 số nguyên liên tiếp có tích là 1 số chính phương thì 1 trong 2 số nguyên đó là số 0. **3.** *Nhận biết 1 số chính phương*: (a) Để chứng minh N là 1 số chính phương ta có thể: • Biến đổi N thành bình phương của 1 số tự nhiên (hoặc số nguyên). • Vận dụng tính chất: nếu $a, b \in \mathbb{N}$ nguyên tố cùng nhau có tích là 1 số chính phương thì mỗi số a, b cũng là 1 số chính phương. (b) Để chứng minh N không phải là số chính phương ta có thể: • Chứng minh N có chữ số tận cùng là $2, 3, 7, 8$ hoặc có *1 số lẻ* chữ số 0 tận cùng. • Chứng minh N chứa số nguyên tố với số mũ lẻ. • Xét số dư khi chia N cho 3 hoặc cho 4 hoặc cho 5, hoặc cho 8, … E.g., nếu N chia cho 3 có số dư là 2, hoặc N chia cho 4, cho 5 có số dư là 2, 3 thì N không phải là số chính phương. • Chứng minh N nằm giữa 2 số chính phương liên tiếp." – Tuyên, 2022, pp. 28–29

Bài toán 113 (Tuyên, 2022, Ví dụ 12, p. 29). *Cho* $A = \underbrace{11\ldots1}_{2n} - \underbrace{88\ldots8}_{n} + 1$. *Chứng minh A là 1 số chính phương.*

Bài toán 114 (Tuyên, 2022, Ví dụ 13, p. 30). *Chứng minh: (a) Tổng của 3 số chính phương liên tiếp không phải là 1 số chính phương. (b) Tổng* $S = \sum_{i=1}^{30} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + 30^2$ *không phải là 1 số chính phương.*

Bài toán 115 (Tuyên, 2022, **100.**, p. 31). *Có 2 số chính phương nào: (a) Có tổng bằng 4567? (b) Có hiệu bằng 7654?*

Bài toán 116 (Tuyên, 2022, **101.**, p. 31). *Chứng minh tổng của 20 số chính phương liên tiếp không thể là số chính phương.*

Bài toán 117 (Tuyên, 2022, **102.**, p. 31). *Cho 5 số chính phương bất kỳ có chữ số hàng đơn vị đều bằng 6 còn chữ số hàng chục thì khác nhau. Chứng minh tổng các chữ số hàng chục của 5 số chính phương đó cũng là 1 số chính phương.*

Bài toán 118 (Tuyên, 2022, **103.**, p. 31). *Cho a, b, c là các chữ số khác 0. (a) Tính tổng S của tất cả các số có 3 chữ số tạo thành bởi cả 3 chữ số a, b, c; (b) Chứng minh S không phải là số chính phương.*

Bài toán 119 (Tuyên, 2022, **104.**, p. 31). *Tìm 1 số chính phương có 4 chữ số biết 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau.*

Bài toán 120 (Tuyên, 2022, **105.**, p. 31). *Chứng minh nếu $n + 1$ & $2n + 1$ đều là số chính phương thì $n \,\vdots\, 24$.*

Bài toán 121 (Tuyên, 2022, **106.**, pp. 31–32). *Tìm $n \in \mathbb{N}$ biết trong 3 mệnh đề sau có 2 mệnh đề đúng & 1 mệnh đề sai: (a) n có chữ số tận cùng là 2. (b) $n + 20$ là 1 số chính phương. (c) $n - 69$ là 1 số chính phương.*

Bài toán 122 (Tuyên, 2022, **107.**, p. 32). *Cho N là tổng của 2 số chính phương. Chứng minh: (a) $2N$ cũng là tổng của 2 số chính phương; (b) N^2 cũng là tổng của 2 số chính phương.*

Bài toán 123 (Tuyên, 2022, **108.**, p. 32). *Cho A, B, C, D là 4 số chính phương. Chứng minh $(A + B)(C + D)$ là tổng của 2 số chính phương.*

Bài toán 124 (Tuyên, 2022, **109.**, p. 32). *Cho $x, y, z \in \mathbb{Z}$ sao cho $x = y + z$. Chứng minh $2(xy + xz - yz)$ là tổng của 3 số chính phương.*

Bài toán 125 (Tuyên, 2022, **110.**, p. 32). *Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện $a - b = c + d$. Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ luôn là tổng của 3 số chính phương.*

Bài toán 126 (Tuyên, 2022, **111.**, p. 32). *Cho 2 số chính phương liên tiếp. Chứng minh tổng của 2 số đó cộng với tích của chúng là 1 số chính phương lẻ.*

Bài toán 127 (Tuyên, 2022, **112.**, p. 32). *Cho* $a_n = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n$. *(a) Tính a_{n+1}; (b) Chứng minh $a_n + a_{n+1}$ là 1 số chính phương.*

Bài toán 128 (Tuyên, 2022, **113.**, p. 32). *Cho M là tích của 4 số nguyên liên tiếp. Chứng minh $M + 1$ là 1 số chính phương.*

Bài toán 129 (Tuyên, 2022, **114.**, p. 32)**.** *(a) Cho* $a = \underbrace{11\ldots1}_{n}5$, $b = \underbrace{11\ldots1}_{n}9$. *Chứng minh* $ab+4$ *là 1 số chính phương. (b) Cho* $a = \underbrace{11\ldots1}_{n}$, $b = 1\underbrace{00\ldots0}_{n-2}11$, $n \geq 2$. *Chứng minh* $ab+4$ *là 1 số chính phương.*

Bài toán 130 (Tuyên, 2022, **115.**, p. 32)**.** *Cho* $M = \underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{55\ldots5}_{n}+1$. *Chứng minh* M *là 1 số chính phương.*

Bài toán 131 (Tuyên, 2022, **116.**, p. 33)**.** *Chứng minh các số sau là số chính phương. (a)* $M_n = \underbrace{11\ldots1}_{2n}+\underbrace{44\ldots4}_{n}+1$, $\forall n \in \mathbb{N}$; *(b)* $N = \underbrace{11\ldots1}_{2n}+\underbrace{11\ldots1}_{n+1}+\underbrace{66\ldots6}_{n}+8$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Bài toán 132 (Tuyên, 2022, **117.**, p. 33)**.** *Cho* $a, b, c \in \mathbb{Z}$ *thỏa mãn điều kiện* $ab+bc+ca = 1$. *Chứng minh* $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$ *là 1 số chính phương.*

Bài toán 133 (Tuyên, 2022, **118.**, p. 33)**.** *Tìm tất cả* $n \in \mathbb{N}$ *sao cho* n^2+1234 *là 1 số chính phương.*

Bài toán 134 (Tuyên, 2022, **119.**, p. 33)**.** *Tìm tất cả* $k \in \mathbb{N}$ *để cho số* $2^k+2^4+2^7$ *là 1 số chính phương.*

Bài toán 135 (Tuyên, 2022, **120.**, p. 33)**.** *Tìm tất cả* $x \in \mathbb{N}$ *sao cho* $x^2+2x+200$ *là 1 số chính phương.*

Bài toán 136 (Tuyên, 2022, **121.**, p. 33)**.** *Tìm tất cả* $x \in \mathbb{Z}$ *sao cho* $A = x(x-1)(x-7)(x-8)$ *là 1 số chính phương.*

Bài toán 137 (Tuyên, 2022, **122.**, p. 33)**.** *Cho* $A = p^4$ *trong đó* p *là 1 số nguyên tố. (a) Số* A *có những ước dương nào? (b) Tìm các giá trị của* p *để tổng các ước dương của* A *là 1 số chính phương.*

6 Miscellaneous

Tài liệu

Tuyên, Bùi Văn (2022). *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 8.* Tái bản lần thứ 17. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 326.