Some Topics in Elementary Mathematics/Grade 11

Nguyễn Quản Bá Hồng[1]

Ngày 18 tháng 8 năm 2022

[1]Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

Mục lục

Phần I

Đại Số & Giải Tích – Algebra & Analysis

Chương 1

Hàm Số Lượng Giác & Phương Trình Lượng Giác – Trigonometric Function & Trigonometric Equation

"Nhiều hiện tượng tuần hoàn đơn giản trong thực tế được mô tả bởi những hàm số lượng giác. Chương này cung cấp những kiến thức cơ bản về các *hàm số lượng giác* & cách giải các *phương trình lượng giác* đơn giản." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, p. 3

> **Nội dung.** *Tính chất tuần hoàn của các hàm số lượng giác & phương pháp sử dụng đường tròn lượng giác để tìm nghiệm của các phương trình lượng giác cơ bản, kỹ năng biến đổi lượng giác & kỹ năng giải các dạng phương trình lượng giác.*

1.1 Công Thức Lượng Giác

Nội dung. *1 số công thức lượng giác cơ bản, trình bày số phức dưới dạng lượng giác & ứng dụng.*

1.1.1 Công thức lượng giác cơ bản

1.1.1.1 Công thức cộng

$$\boxed{\begin{cases}\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,\\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,\\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.\end{cases}\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}.} \tag{ctc}$$

Có thể viết tắt (ctc)bằng cách sử dụng các ký hiệu $\pm,\mp$ như sau:

$$\boxed{\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta,\ \sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}.}$$

Chứng minh (ctc). **(a)** "Ta chỉ cần chứng minh công thức đầu tiên rồi từ đó dùng giá trị lượng giác của các góc liên kết để suy ra các công thức còn lại. Giả sử các điểm M & N nằm trên đường tròn lượng giác tâm O, gốc A sao cho góc lượng giác $(OA,OM)=\alpha$, $(OA,ON)=\beta$ thì $\overrightarrow{OM}$ có tọa độ $(\cos\alpha;\sin\alpha)$, $\overrightarrow{ON}$ có tọa độ $(\cos\beta;\sin\beta)$, từ đó tích vô hướng $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$. Mặt khác, $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=|\overrightarrow{OM}||\overrightarrow{ON}|\cos\widehat{NOM}=\cos\widehat{NOM}=\cos(ON,OM)$ $=\cos[(OA,OM)-(OA,ON)]=\cos(\alpha-\beta)$, nên suy ra $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$." – Quỳnh, Dũng, et al., 2010, pp. 5–6. **(b)** Thay β trong công thức vừa thu được ở (a) bởi $-\beta$, $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$. **(c)** $\sin(\alpha-\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$, trong đó ta sử dụng công thức $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$[1] & công thức vừa chứng minh ở (b) với α được thay bởi $\frac{\pi}{2}-\alpha$. **(d)** Thay β trong công thức vừa thu được ở (c) bởi $-\beta$. Các công thức cộng (ctc) được chứng minh. □

[1] I.e., với 2 góc phụ nhau, sin 1 góc bất kỳ bằng côsin góc còn lại.

Kiểm tra nhanh tính hợp lý của (ctc):

$$\begin{aligned}
&\sin^2(\alpha-\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)=(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)^2+(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)^2\\
&\quad=\sin^2\alpha\cos^2\beta-2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta\\
&\quad=\sin^2\alpha\cos^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\beta+\cos^2\beta)=1,\\
&\sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)^2+(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)^2\\
&\quad=\sin^\alpha\cos^2\beta+2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta\\
&\quad=\sin^2\alpha\cos^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\beta+\cos^2\beta)=1.
\end{aligned}$$

Từ (ctc) dễ suy ra:

$$\boxed{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},\ \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta},\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}\text{ s.t. }\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha\pm\beta)\neq0,\ \tan\alpha\tan\beta\neq\pm1.}\tag{ctc'}$$

Công thức (ctc') cũng được gọi là công thức cộng. Có thể viết tắt (ctc')bằng cách sử dụng các ký hiệu $\pm,\mp$ như sau:

$$\boxed{\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta},\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}\text{ s.t. }\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha\pm\beta)\neq0,\ \tan\alpha\tan\beta\neq\pm1.}$$

1st Chứng minh (ctc'). Sử dụng (ctc), với $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ thỏa giả thiết,

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},$$

trong đó đẳng thức thứ 3 thu được bằng cách chia cả tử thức & mẫu thức cho $\cos\alpha\cos\beta$ (phép chia này có nghĩa vì $\cos\alpha\cos\beta\neq0$). Thay β bởi $-\beta$ trong biểu thức vừa thu được, ta thu được biểu thức còn lại. □

Ta vừa chứng minh (ctc') từ vế trái sang vế phải (i.e., LHS $=\cdots=$ RHS[2], hay VT $=\cdots=$ VP), cách chứng minh sau đi theo chiều ngược lại (i.e., RHS $=\cdots=$ LHS, hay VP $=\cdots=$ VT).

2nd Chứng minh (ctc'). Với $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ thỏa giả thiết,

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\tan(\alpha+\beta),$$

trong đó đẳng thức thứ 3 sử dụng (ctc). Thay β bởi $-\beta$ trong biểu thức vừa thu được, ta thu được biểu thức còn lại. □

1.1.1.2 Công thức nhân đôi, nhân 3

Áp dụng công thức cộng (ctc)–(ctc') với $\alpha=\beta$,

$$\boxed{\begin{cases}\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha,\ \sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}\\ \tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha},\ \forall\alpha\in\mathbb{R}\text{ s.t. }\cos2\alpha\neq0,\ \tan\alpha\neq\pm1.\end{cases}}\tag{ctn2}$$

& áp dụng tiếp (ctc) với $(\alpha,\beta)=(\alpha,2\alpha)$,

$$\boxed{\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha,\ \sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}.}\tag{ctn3}$$

Chứng minh (ctn2). Với $\alpha\in\mathbb{R}$ bất kỳ, áp dụng (ctc) với $(\alpha,\beta)=(\alpha,2\alpha)$:

$$\begin{aligned}
&\cos3\alpha=\cos(\alpha+2\alpha)=\cos\alpha(2\cos^2\alpha-1)-2\sin^2\alpha\cos\alpha=\cos\alpha(2\cos^2\alpha-1)-2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha,\\
&\sin3\alpha=\sin(\alpha+2\alpha)=\sin\alpha\cos2\alpha+\cos\alpha\sin2\alpha=\sin\alpha(1-2\sin^2\alpha)+2\sin\alpha\cos^2\alpha\\
&\quad=\sin\alpha(1-2\sin^2\alpha)+2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha.
\end{aligned}$$

Hoàn tất chứng minh. □

[2] LHS is the abbreviation of 'Left Hand Side' & RHS is the abbreviation of 'Right Hand Side'. In many English texts in mathematics, the abbreviations l.h.s. & r.h.s. are also used. In Vietnamese texts in mathematics, the abbreviations VT (vế trái) & VP/VF (vế phải) are commonly used.

Lưu ý 1.1.1 (Các khai triển khác của $\sin 3\alpha, \cos 3\alpha$). *Sử dụng các biểu thức khác của* $\sin 2\alpha$ *&* $\cos 2\alpha$*, ta cũng thu được:*

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha = \cos\alpha - 4\sin^2\alpha\cos\alpha,$$
$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 4\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin\alpha = \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha\cos^2\alpha.$$

Tuy nhiên, 2 công thức của (ctn3) *mang lại nhiều lợi thế hơn do chúng là 2 đa thức bậc 3 của hàm* $\sin\alpha$ *&* $\cos\alpha$*, chứ không phải là 1 biểu thức đại số gồm cả* $\sin\alpha$ *&* $\cos\alpha$*.*

1.1.1.3 Công thức hạ bậc

Từ công thức nhân đôi (ctn2) suy ra công thức hạ bậc:

$$\boxed{\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2},\ \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},\ \forall\alpha\in\mathbb{R}.} \tag{cthb}$$

1.1.1.4 Công thức biến đổi tích thành tổng & công thức biến đổi tổng thành tích

"Từ các công thức cộng (ctc), dễ dàng suy ra

$$\boxed{\begin{cases}\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)], & \sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)],\\ \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)], & \cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)],\end{cases}\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}.}$$

Trong các công thức đó, đặt $x \coloneqq \alpha+\beta$, $y \coloneqq \alpha-\beta$ thì suy ra

$$\boxed{\begin{cases}\cos x+\cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, & \cos x-\cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},\\ \sin x+\sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, & \sin x-\sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},\end{cases}\ \forall x,y\in\mathbb{R}.}$$

Tất cả các công thức trên được dùng nhiều khi giải phương trình lượng giác." – Quỳnh, Dũng, et al., 2010, p. 7

1.1.2 Số phức & dạng lượng giác của nó – Complex number & its trigonometric representation

1.1.2.1 Số phức – Complex number

"Người ta xây dựng được 1 tập hợp số gọi là *tập hợp số phức*, ký hiệu $\mathbb{C}$, chứa tập hợp số thực $\mathbb{R}$, trong đó có 2 phép toán cộng & nhân (mà khi thu hẹp lên $\mathbb{R}$ thì đó là phép toán cộng, nhân số thực) thỏa mãn các tính chất tương tự phép toán cộng & nhân số thực (giao, hoán, kết hợp, phân phối, …), trong đó mọi số thực âm đều có căn bậc 2, mọi phương trình đa thức đều có nghiệm. Cụ thể là:

(a) Mỗi số phức được viết dưới dạng $z = a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$, i là *đơn vị ảo* ($i^2=-1$), a gọi là phần thực của z, b gọi là *phần ảo của* z.

`Skipped due to Toan 12`" – Quỳnh, Dũng, et al., 2010, p. 7

1.2 Các Hàm Số Lượng Giác – Trigonometric Functions

"Các hàm số lượng giác/trigonometric[3] [4] functions thường được dùng để mô tả những hiện tượng thay đổi 1 cách tuần hoàn hay gặp trong thực tiễn, khoa học & kỹ thuật." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, p. 4

[3]**trigonometric** [a] (also **trigonometrical**) (*mathematics*) connected with the types of mathematics that deals with the relationship between the sides & angles of triangles.

[4]**trigonometry** [n] [uncountable] the type of mathematics that deals with the relationship between the sides & angles of triangles.

1.2.1 Các hàm số $y = \sin x$ & $y = \cos x$

1.2.1.1 Khái niệm

Định nghĩa 1.2.1 (Hàm số sin, cos)**.** *Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực $x \in \mathbb{R}$ với* sin *của góc lượng giác có số đo radian bằng x được gọi là* hàm số sin*, ký hiệu là $y = \sin x$. Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực $x \in \mathbb{R}$ với côsin của góc lượng giác có số đo radian bằng x được gọi là* hàm số côsin*, ký hiệu là $y = \cos x$.*

"Tập xác định của các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ là $\mathbb{R}$. Do đó các hàm số sin & côsin được viết là:

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin x \end{aligned}, \qquad \begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos x \end{aligned}.$$

Hàm số $y = \sin x$ là 1 *hàm số lẻ* vì $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, trong khi hàm số $y = \cos x$ là 1 *hàm số chẵn* vì $\cos(-x) = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, p. 4. Về định nghĩa & tính chất của hàm số chẵn & hàm số lẻ, xem Sect. A.1. Có thể xem thêm Wikipedia/hàm số chẵn & lẻ & Wikipedia/even & odd functions.

1.2.1.2 Tính chất tuần hoàn của các hàm số $y = \sin x$ & $y = \cos x$

"Với mỗi $k \in \mathbb{Z}$, số $k2\pi$ thỏa mãn: $\sin(x + k2\pi) = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Ngược lại, có thể chứng minh rằng số T sao cho $\sin(x + T) = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ phải có dạng $T = k2\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$. Rõ ràng, trong các số dạng $k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), số dương nhỏ nhất là 2π. Vậy đối với hàm số $y = \sin x$, số $T = 2\pi$ là số dương nhỏ nhất thỏa mãn $\sin(x + T) = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = \cos x$ cũng có tinh chất tương tự. Ta nói 2 hàm số đó là những *hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π.*

Từ tính chất tuần hoàn với chu kỳ 2π, ta thấy khi biết giá trị các hàm số $y = \sin x$ & $y = \cos x$ trên 1 đoạn có độ dài 2π (e.g., đoạn $[0; 2\pi]$ hay đoạn $[-\pi; \pi]$) thì ta tính được giá trị của chúng tại mọi $x \in \mathbb{R}$. (Cứ mỗi khi biến số được cộng thêm 2π thì giá trị của các hàm số đó lại trở về như cũ; điều này giải thích từ "tuần hoàn")." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, p. 4–5

1.2.1.3 Sự biến thiên & đồ thị của hàm số $y = \sin x$

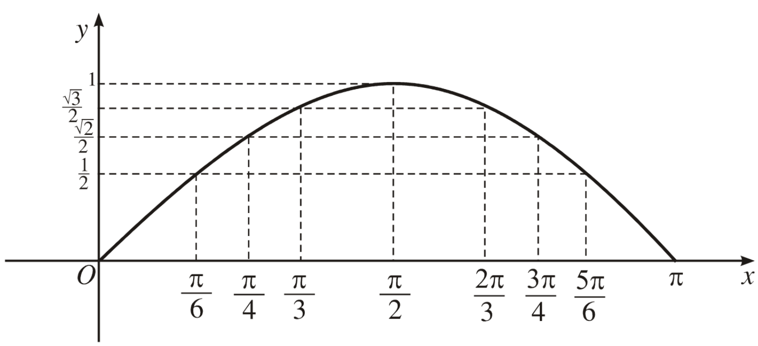
"Do hàm số $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π nên ta chỉ cần khảo sát hàm số đó trên 1 đoạn có độ dài 2π, e.g., trên đoạn $[-\pi; \pi]$."

- **Chiều biến thiên.** *Bảng biến thiên của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$:*

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$y = \sin x$	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	1 ↘	0

Hình 1.1: Bảng biến thiên của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$.

- **Đồ thị.** "Khi vẽ đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$, ta nên để ý rằng: Hàm số $y = \sin x$ là 1 hàm số lẻ, do đó đồ thị của nó nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng. Vì vậy, đầu tiên ta vẽ đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; \pi]$.



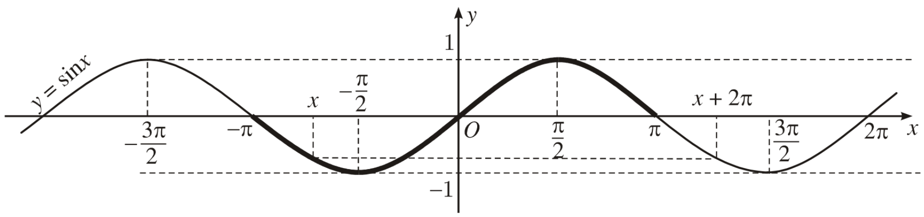
Hình 1.2: Đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0, \pi]$.

Trên đoạn $[0; \pi]$, đồ thị của hàm số $y = \sin x$ (Fig. 1.2) đi qua các điểm có tọa độ $(x; y)$ trong bảng sau:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$y = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Bảng 1.1: Các giá trị của hàm $y = \sin x$ tại 1 số điểm $\in [0; \pi]$.

Phần đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; \pi]$ cùng với hình đối xứng của nó qua gốc O lập thành đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi, \pi]$ (Fig. 1.3).



Hình 1.3: Đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên $\mathbb{R}$ – *đường hình sin*.

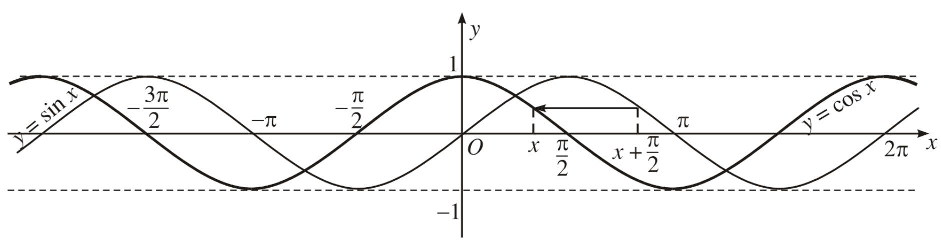
Tịnh tiến phần đồ thị vừa vẽ sang trái, sang phải những đoạn có độ dài $2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$ thì được toàn bộ đồ thị hàm số $y = \sin x$. Đồ thị đó được gọi là 1 *đường hình sin* (Fig. 1.3)." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, pp. 6–7

Nhận xét 1.2.1. *1. "Khi x thay đổi, hàm số $y = \sin x$ nhận mọi giá trị thuộc đoạn $[-1; 1]$. Ta nói* tập giá trị *của hàm số $y = \sin x$ là đoạn $[-1; 1]$.*

2. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Từ đó, do tính chất tuần hoàn với chu kỳ 2π, hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, p. 7

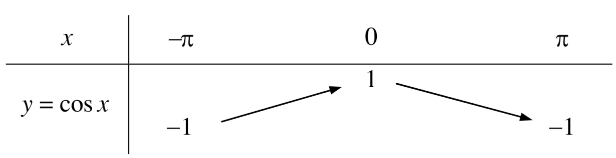
1.2.1.4 Sự biến thiên & đồ thị của hàm số $y = \cos x$

"Ta có thể tiến hành khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số $y = \cos x$ tương tự như đã làm đối với hàm số $y = \sin x$ trên đây. Tuy nhiên, ta nhận thấy $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, nên bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = \sin x$ sang trái 1 đoạn có độ dài $\frac{\pi}{2}$, ta được đồ thị hàm số $y = \cos x$ (nó cũng được gọi là 1 *đường hình sin*) (Fig. 1.4).



Hình 1.4: Đồ thị của hàm số $y = \cos x$ trên $\mathbb{R}$.

Căn cứ vào đồ thị của hàm số $y = \cos x$, ta lập được bảng biến thiên của hàm số đó trên đoạn $[-\pi; \pi]$ (Fig. 1.5):



Hình 1.5: Bảng biến thiên của hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$.

Nhận xét 1.2.2. *1. Khi x thay đổi, hàm số $y = \cos x$ nhận mọi giá trị thuộc đoạn $[-1; 1]$. Ta nói* tập giá trị *của hàm số $y = \cos x$ là đoạn $[-1; 1]$.*

2. Do hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn nên đồ thị của hàm số $y = \cos x$ nhận trục tung làm trục đối xứng.

3. Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $(-\pi; 0)$. Từ đó do tính chất tuần hoàn với chu kỳ 2π, hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, pp. 8–9

Hàm số $y = \sin x$	**Hàm số** $y = \cos x$
Có tập xác định là $\mathbb{R}$	Có tập xác định là $\mathbb{R}$
Có tập giá trị là $[-1;1]$	Có tập giá trị là $[-1;1]$
Là hàm số lẻ	Là hàm số chẵn
Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π	Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π
Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$ & nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$	Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi+k2\pi;k2\pi)$ & nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi;\pi+k2\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$
Có đồ thị là 1 đường hình sin	Có đồ thị là 1 đường hình sin

Bảng 1.2: So sánh tính chất của 2 hàm số $y = \sin x$ & $y = \cos x$.

1.2.2 Các hàm số $y = \tan x$ & $y = \cot x$

1.2.2.1 Định nghĩa

- "Với mỗi số thực $x \in \mathbb{R}$ mà $\cos x \neq 0$, i.e., $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, ta xác định được số thực $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Đặt $\mathcal{D}_1 \coloneqq \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

  Định nghĩa 1.2.2 (Hàm số tan)**.** *Quy tắc đặt tương ứng mỗi số $x \in \mathcal{D}_1$ với số thực $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ được gọi là* hàm số tang, *ký hiệu là $y = \tan x$.*

  Vậy hàm số $y = \tan x$ có tập xác định $\mathcal{D}_1$; ta viết

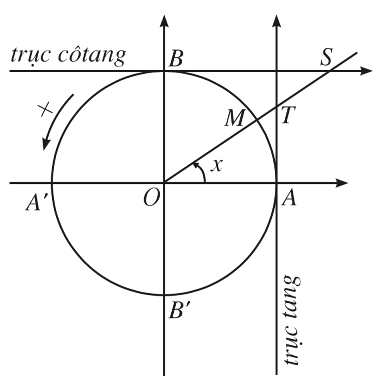
$$\begin{aligned}\tan : \mathcal{D}_1 &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \tan x.\end{aligned}$$

- Với mỗi số thực $x \in \mathbb{R}$ mà $\sin x \neq 0$, i.e., $x \neq k\pi$tan $(k \in \mathbb{Z})$, ta xác định được số thực $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Đặt $\mathcal{D}_2 \coloneqq \mathbb{R}\backslash\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$.

  Định nghĩa 1.2.3 (Hàm số cot)**.** *Quy tắc đặt tương ứng mỗi số $x \in \mathcal{D}_2$ với số thực $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ được gọi là* hàm số côtang, *ký hiệu là $y = \cot x$.*

  Vậy hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là $\mathcal{D}_2$; ta viết

$$\begin{aligned}\cot : \mathcal{D}_2 &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \cot x.\end{aligned}$$



Hình 1.6: Trục tang & trục côtang.

Trên hình 1.6, ta có $(OA, OM) = x$, $\tan x = \overline{AT}$, $\cot x = \overline{BS}$.

Nhận xét 1.2.3. 1. *Hàm số $y = \tan x$ là 1* hàm số lẻ *vì nếu $x \in \mathcal{D}_1$ thì $-x \in \mathcal{D}_1$ & $\tan(-x) = -\tan x$.*

2. *Hàm số $y = \cot x$ cũng là 1* hàm số lẻ *vì nếu $x \in \mathcal{D}_2$ thì $-x \in \mathcal{D}_2$ & $\cot(-x) = -\cot x$." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, pp. 9–10*

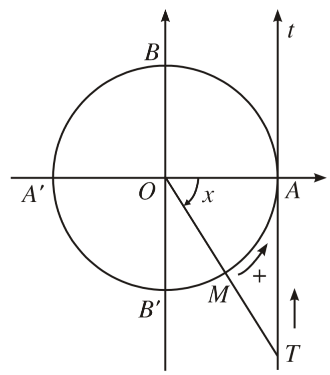
1.2.2.2 Tính chất tuần hoàn

"Có thể chứng minh rằng $T = \pi$ là số dương nhỏ nhất thỏa mãn $\tan(x+T) = \tan x$, $\forall x \in \mathcal{D}_1$, & $T = \pi$ cũng là số dương nhỏ nhất thỏa mãn $\cot(x+T) = \cot x$, $\forall x \in \mathcal{D}_2$. Ta nói các hàm số $y = \tan x$ & $y = \cot x$ là những *hàm số tuần hoàn với chu kỳ π*." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, p. 10

1.2.2.3 Sự biến thiên & đồ thị của hàm số $y = \tan x$

"Do tính chất tuần hoanf với chu kỳ π của hàm số $y = \tan x$, ta chỉ cần khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của nó trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \subset \mathcal{D}_1$, rồi tịnh tiến phần đồ thị vừa vẽ sang trái, sang phải các đoạn của độ dài $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ thì được toàn bộ đồ thị của hàm số $y = \tan x$.

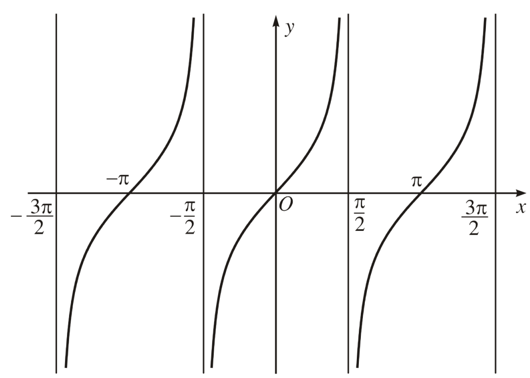
- *Chiều biến thiên*:



Hình 1.7: Chiều biến thiên của hàm $y = \tan x$.

Khi cho $x = (OA, OM)$ tăng từ $-\frac{\pi}{2}$ đến $\frac{\pi}{2}$ (không kể $\pm\frac{\pi}{2}$) thì điểm M chạy trên đường tròn lượng giác theo chiều dương từ B' đến B (không kể B' & B). Khi đó điểm T thuộc trục tang At sao cho $\overline{AT} = \tan x$ chạy dọc theo At suốt từ dưới lên trên, nên $\tan x$ *tăng từ $-\infty$ đến $+\infty$* (qua quá trị 0 khi $x = 0$)."

- *Đồ thị*: "Đồ thị của hàm số $y = \tan x$ có dạng như ở hình 1.8.



Hình 1.8: Đồ thị của hàm $y = \tan x$.

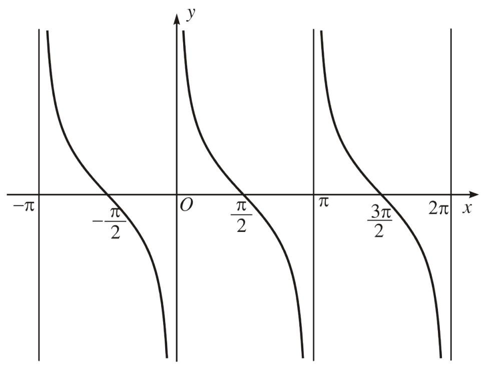
Nhận xét 1.2.4. 1. *Khi x thay đổi, hàm số $y = \tan x$ nhận mọi giá trị thực. Ta nói* tập giá trị *của hàm số $y = \tan x$ là $\mathbb{R}$.*

2. *Vì hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ nên đồ thị của nó nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.*

3. *Hàm số $y = \tan x$ không xác định tại $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Với mỗi $k \in \mathbb{Z}$, đường thẳng vuông góc với trục hành, đi qua điểm $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi; 0\right)$ gọi là 1* đường tiệm cận *của đồ thị hàm số $y = \tan x$. (Từ "tiệm cận" có nghĩa là ngày càng gần. E.g., nói đường thẳng $x = \frac{\pi}{2}$ là 1 đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \tan x$ nhằm diễn tả tính chất: điểm M trên đồ thị có hoành độ càng gần $\frac{\pi}{2}$ thì M càng gần đường thẳng $x = \frac{\pi}{2}$)." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, pp. 11–12*

1.2.2.4 Sự biến thiên & đồ thị của hàm số $y = \cot x$

"Hàm số $y = \cot x$ xác định trên $\mathcal{D}_2 = \mathbb{R}\backslash\{k\pi|k \in \mathbb{Z}\}$ là 1 hàm số tuần hoàn với chu kỳ π. Ta có thể khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của nó tương tự như đã làm đối với hàm số $y = \tan x$. Đồ thị của hàm số $y = \cot x$ có dạng như hình 1.9.



Hình 1.9: Đồ thị của hàm $y = \cot x$.

Nó nhận mỗi đường thẳng vuông góc với trục hoành, đi qua điểm $(k\pi; 0)$, $k \in \mathbb{Z}$ làm 1 đường tiệm cận." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, p. 12

Hàm số $y = \tan x$	**Hàm số** $y = \cot x$
Có tập xác định là $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi|k \in \mathbb{Z}\right\}$	Có tập xác định là $\mathcal{D}_2 = \mathbb{R}\backslash\{k\pi|k \in \mathbb{Z}\}$
Có tập giá trị là $\mathbb{R}$	Có tập giá trị là $\mathbb{R}$
Là hàm số lẻ	Là hàm số lẻ
Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ π	Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ π
Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$	Nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$
Có đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ làm 1 đường tiệm cận	Có đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ làm 1 đường tiệm cận

Bảng 1.3: So sánh tính chất của 2 hàm số $y = \tan x$ & $y = \cot x$.

1.2.3 Về khái niệm hàm số tuần hoàn

"Các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ là những hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π; các hàm số $y = \tan x$, $y = \cot x$ là những hàm số tuần hoàn với chu kỳ π. 1 cách tổng quát:

Định nghĩa 1.2.4 (Hàm số tuần hoàn). *Hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp $\mathcal{D}$ được gọi là* hàm số tuần hoàn *nếu có số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in \mathcal{D}$ ta có $x + T \in \mathcal{D}$, $x - T \in \mathcal{D}$ & $f(x + T) = f(x)$. Nếu có số T dương nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên thì hàm số đó được gọi là 1* hàm số tuần hoàn với chu kỳ *T." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, p. 13*

Ví dụ 1.2.1. *Các hàm số có dạng $y = a\sin bx$, với $a, b \in \mathbb{R}^\star := \mathbb{R}\backslash\{0\}$ là những hàm số tuần hoàn.*

1.2.4 Dao động điều hòa

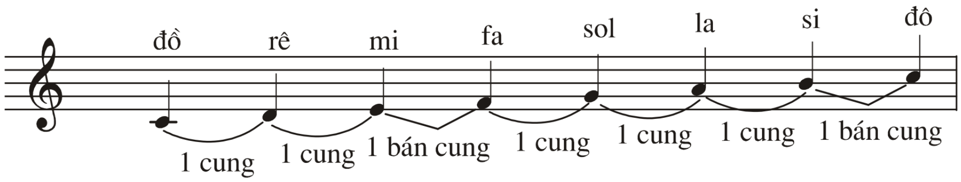
"Nhiều hiện tượng tự nhiên thay đổi có tính chất tuần hoàn (lặp đi lặp lại sau khoảng thời gian xác định) như: Chuyển động của các hành tinh trong hệ mặt trời, chuyển động của guồng nước quay, chuyển động của quả lắc đồng hồ, sự biến thiên của cường độ dòng điện xoay chiều, ... Hiện tượng tuần hoàn đơn giản nhất là *dao động điều hòa* được mô tả bởi hàm số $y = A\sin(\omega x + \alpha) + B$, trong đó A, B, ω & α là những hằng số; A & ω khác 0. Đó là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $\frac{2\pi}{|\omega|}$; $|A|$ gọi là *biên độ*. Đồ thị của nó là 1 *đường hình sin* có được từ đồ thị của hàm số $y = A\sin\omega x$ bằng cách tịnh tiến thích hợp (theo vector $-\frac{\alpha}{\omega}\vec{i}$ rồi theo vector $B\vec{j}$, i.e., tịnh tiến theo vector $-\frac{\alpha}{\omega}\vec{i} + B\vec{j}$)." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, pp. 15–16

1.2.5 Âm thanh

"Âm thanh được tạo nên bởi sự thay đổi áp suất của môi trường vật chất (chất khí, chất lỏng, chất rắn) 1 cách tuần hoàn theo thời gian (dao động tuần hoàn) & được lan truyền trong môi trường đó (sóng âm thanh).

Nếu dao động tuần hoàn ấy có chu kỳ T (đo bằng đơn vị thời gian là giây) thì $\frac{1}{T}$ gọi là *tần số* của dao động (i.e., số chu kỳ trong 1 giây); đơn vị của tần số là Hertz (abbr., Hz). Âm thanh tai người nghe được là dao động có tần số trong khoảng từ 17–20 Hz đến 20000 Hz. Dao động có tần số cao hơn 20000 Hz được gọi là *siêu âm*.

Trong âm nhạc (nghệ thuật phối hợp các âm thanh) người ta thường dùng những nốt nhạc để ghi những âm có tần số xác định. Tần số dao động càng lớn thì âm càng cao. Khi tăng tần số 1 âm lên gấp đôi thì ta nói cao độ của âm đó được tăng thêm 1 quãng 8. Người ta thường chia quãng 8 đó thành 12 quãng bằng nhau, mỗi quãng gọi là 1 bán cung để đo chênh lệch cao độ giữa các âm (xem SGK Âm nhạc & Mỹ thuật lớp 7). Với 2 âm cách nhau 1 bán cung, tỷ số các tần số của chúng bằng $\sqrt[12]{2}$; với 2 âm cách nhau 1 cung (i.e., 2 bán cung), tỷ số các tần số của chúng bằng $(\sqrt[12]{2})^2 = \sqrt[6]{2}$. Ở khuông nhạc dưới đây có ghi các nốt nhạc của 1 "âm giai" (quãng 8) cùng khoảng cách cao độ giữa 2 âm ứng với 2 nốt kề nhau. Âm *la* của âm giai đó có tần số 440 Hz (do đó, e.g., âm *si* kế đó có tần số $440\sqrt[6]{2}$ Hz).



Hình 1.10: Khuông nhạc.

Trong âm nhạc, ngoài các âm riêng lẻ còn có hợp âm (kết hợp các âm thanh). Nhà toán học Pháp Joseph Fourier (1768–1830) đã chứng minh rằng 1 hàm số tuần hoàn với chu kỳ T có thể phân tích thành "tổng" của 1 hằng số với những hàm số tuần hoàn có đồ thị là những đường hình sin với chu kỳ $\frac{T}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^\star)$. Điều đó giúp ta hiểu sâu hơn về hợp âm, hòa âm, âm bội & âm sắc." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, p. 18

1.3 Phương Trình Lượng Giác Cơ Bản – Basic Trigonometric Equation

"Trên thực tế, có nhiều bài toán dẫn đến việc giải các phương trình có 1 trong các dạng $\sin x = m$, $\cos x = m$, $\tan x = m$, & $\cot x = m$, trong đó x là ẩn số $(x \in \mathbb{R})$ & m là 1 số cho trước. Đó là các *phương trình lượng giác cơ bản*." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, p. 19

1.3.1 Phương trình $\sin x = m$

"Giả sử m là 1 số đã cho. Xét phương trình

$$\sin x = m. \tag{sin}$$

Hiển nhiên phương trình (sin) xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta đã biết $|\sin x| \le 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó phương trình (sin) vô nghiệm khi $|m| > 1$. Mặt khác, khi x thay đổi, $\sin x$ nhận mọi giá trị từ -1 đến 1 nên phương trình (sin) luôn có nghiệm khi $|m| \le 1$." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, p. 20

Nếu α là 1 nghiệm của phương trình (sin), i.e., $\sin\alpha = m$ thì

$$\sin x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}). \tag{1.3.1}$$

"Ta nói rằng $x = \alpha + k2\pi$ & $x = \pi - \alpha + k2\pi$ là 2 *họ nghiệm* của phương trình (sin).

Kể từ đây, để cho gọn ta quy ước rằng nếu trong 1 biểu thức nghiệm của phương trình lượng giác có chứa k mà không giải thích gì thêm thì ta hiểu rằng k nhận mọi giá trị thuộc $\mathbb{Z}$. E.g., $x = \alpha + k2\pi$ có nghĩa là x lấy mọi giá trị thuộc tập hợp $\{\alpha, \alpha \pm 2\pi, \alpha \pm 4\pi, \alpha \pm 6\pi, \ldots\}$." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, p. 21

"Trong mặt phẳng tọa độ, nếu vẽ đồ thị (G) của hàm số $y = \sin x$ & đường thẳng (d): $y = m$ thì hoành độ mỗi giao điểm của (d) & (G) (nếu có) là 1 nghiệm của phương trình $\sin x = m$." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, p. 22

Lưu ý 1.3.1. *1. "Khi $m \in \{0; \pm1\}$, công thức (1.3.1) có thể viết gọn như sau:*

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi.$$

2. *Dễ thấy rằng với m cho trước mà $|m| \le 1$, phương trình $\sin x = m$ có đúng 1 nghiệm nằm trong đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Người ta thường ký hiệu đó là $\arcsin m$. Khi đó*

$$\boxed{\sin x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin m + k2\pi, \\ x = \pi - \arcsin m + k2\pi. \end{array}\right.}$$

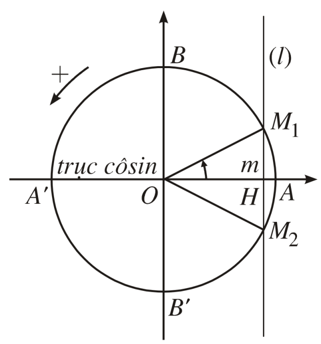
3. *Từ (1.3.1) ta thấy rằng: Nếu α & β là 2 số thực thì $\sin\beta = \sin\alpha$ khi & chỉ khi có số nguyên k để $\beta = \alpha + k2\pi$ hoặc $\beta = \pi - \alpha + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, pp. 22–23*

1.3.2 Phương trình $\cos x = m$

"Xét phương trình

$$\cos x = m, \tag{cos}$$

trong đó m là 1 số cho trước. Hiển nhiên phương trình (cos) xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Dễ thấy rằng: Khi $|m| > 1$, phương trình (cos) vô nghiệm. Khi $|m| \le 1$, phương trình (II) luôn có nghiệm. Để tìm tất cả các nghiệm của (II), trên trục côsin ta lấy điểm H sao cho $\overline{OH} = m$. Gọi (l) là đường thẳng đi qua H & vuông góc với trục côsin (Fig. 1.11).



Hình 1.11: Trục côsin.

Do $|m| \le 1$ nên đường thẳng (l) cắt đường tròn lượng giác tại 2 điểm M_1 & M_2. 2 điểm này đối xứng với nhau qua trục côsin (chúng trùng nhau nếu $m = \pm 1$). Ta thấy số đo của các góc lượng giác (OA, OM_1) & (OA, OM_2) là tất cả các nghiệm của (cos). Nếu α là số đo của 1 góc trong chúng, nói cách khác, nếu α là 1 nghiệm của (cos) thì các góc đó có các số đo là $\pm\alpha + k2\pi$. Vậy ta có

> Nếu α là 1 nghiệm của phương trình (cos), i.e., $\cos\alpha = m$ thì
>
> $$\cos x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi, \\ x = -\alpha + k2\pi. \end{array}\right. \tag{1.3.2}$$

Lưu ý 1.3.2. 1. *Đặc biệt, khi $m \in \{0; \pm 1\}$, công thức (1.3.2) có thể viết gọn như sau:*

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi,\ \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi,\ \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

2. *Dễ thấy rằng với mọi số m cho trước mà $|m| \le 1$, phương trình $\cos x = m$ có đúng 1 nghiệm nằm trong đoạn $[0; \pi]$. Người ta thường ký hiệu nghiệm đó là $\arccos m$. Khi đó*

$$\cos x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arccos m + k2\pi, \\ x = -\arccos m + k2\pi, \end{array}\right.$$

mà cũng thường được viết là $x = \pm\arccos m + k2\pi$.

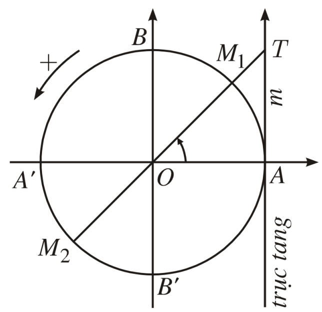
3. *Từ (1.3.2) ta thấy rằng: Nếu α & β là 2 số thực thì $\cos\beta = \cos\alpha$ khi & chỉ khi có số nguyên k để $\beta = \alpha + k2\pi$ hoặc $\beta = -\alpha + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, pp. 23–24*

1.3.3 Phương trình $\tan x = m$

"Cho m là 1 số tùy ý. Xét phương trình

$$\tan x = m. \tag{tan}$$

Điều kiện xác định (ĐKXĐ) của phương trình (tan) là $\cos x \neq 0$. Ta đã biết, khi x thay đổi, $\tan x$ nhận mọi giá trị từ $-\infty$ đến $+\infty$. Do đó phương trình (tan) luôn có nghiệm. Để tìm tất cả các nghiệm của (tan), trên tục tang, ta lấy điểm T sao cho $\overline{AT} = m$. Đường thẳng OT cắt đường tròn lượng giác tại 2 điểm M_1 & M_2 (Fig. 1.12).



Hình 1.12: Trục tang.

Ta có: $\tan(OA, OM_1) = \tan(OA, OM_2) = \overline{AT} = m$. Gọi số đo của 1 trong các góc lượng giác (OA, OM_1) & (OA, OM_2) là α; i.e., α là 1 nghiệm nào đó của phương trình (tan). Khi đó, các góc lượng giác (OA, OM_1) & (OA, OM_2). Khi đó, các góc lượng giác (OA, OM_1) & (OA, OM_2) có các số đo là $\alpha + k\pi$. Đó là tất cả các nghiệm của phương trình (tan) (hiển nhiên chúng thỏa mãn ĐKXĐ của (tan)). Vậy ta có:

Nếu α là 1 nghiệm của phương trình (tan), i.e., $\tan\alpha = m$ thì

$$\tan x = m \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi. \tag{1.3.3}$$

Lưu ý 1.3.3. *1. Dễ thấy rằng với mọi số $m \in \mathbb{R}$ cho trước, phương trình $\tan x = m$ có đúng 1 nghiệm nằm trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Người ta thường ký hiệu nghiệm đó là $\arctan m$. Khi đó*

$$\boxed{\tan x = m \Leftrightarrow x = \arctan m + k\pi.}$$

2. Từ (1.3.3) ta thấy rằng: Nếu α & β là 2 số thực mà $\tan\alpha$, $\tan\beta$ xác định thì $\tan\beta = \tan\alpha$ khi & chỉ khi có số nguyên k để $\beta = \alpha + k\pi$." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, pp. 25–26

1.3.4 Phương trình $\cot x = m$

"Cho $m \in \mathbb{R}$ là 1 số tùy ý, xét phương trình

$$\cot x = m. \tag{cot}$$

ĐKXĐ của phương trình (cot) là $\sin x \neq 0$. Tương tự như đối với phương trình $\tan x = m$, ta có

Nếu α là 1 nghiệm của phương trình (cot), i.e., $\cot\alpha = m$ thì

$$\cot x = m \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi. \tag{1.3.4}$$

" – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, pp. 26–27

Lưu ý 1.3.4. *Dễ thấy rằng với mọi số $m \in \mathbb{R}$ cho trước, phương trình $\cot x = m$ có đúng 1 nghiệm nằm trong khoảng $(0; \pi)$. Người ta thường ký hiệu nghiệm đó là $\operatorname{arccot} m$. Khi đó:*

$$\boxed{\cot x = m \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} m + k\pi.}$$

1.3.5 1 số điều cần lưu ý

1. Khi đã cho số m, ta có thể tính được các giá trị $\arcsin m, \arccos m$ (với $|m| \le 1$), $\arctan m$ bằng máy tính bỏ túi với các phím $\sin^{-1}, \cos^{-1}$ & $\tan^{-1}$.
2. $\arcsin m, \arccos m$ (với $|m| \le 1$), $\arctan m$ & $\operatorname{arccot} m$ có giá trị là những số thực. Do đó ta viết, e.g., $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ mà không viết $\arctan 1 = 45°$.
3. Khi xét các phương trình lượng giác ta đã coi ẩn số x là số đo radian của các góc lượng giác. Trên thực tế, ta còn gặp những bài toán yêu cầu tìm số đo độ của các góc (cung) lượng giác sao cho sin (côsin, tang hoặc côtang) của chúng bằng số $m \in \mathbb{R}$ cho trước e.g. $\sin(x + 20°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Khi giải các phương trình này (mà làm dụng ngôn ngữ, ta vẫn gọi là giải các phương trình lượng giác), ta có thể áp dụng các công thức nêu trên & lưu ý sử dụng ký hiệu số đo độ trong "công thức nghiệm" cho thống nhất, e.g., viết $x = 30° + k360°$ chứ không viết $x = 30° + k2\pi$.

   Tuy nhiên, ta quy ước rằng nếu không có giải thích gì thêm hoặc trong phương trình lượng giác không sử dụng đơn vị đo góc là độ thì mặc nhiên ẩn số là số đo radian của góc lượng giác." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, p. 27

1.3.6 Dùng máy tính bỏ túi để tìm 1 góc khi biết 1 giá trị lượng giác của nó

"Các phím $\sin^{-1}, \cos^{-1}$ & $\tan^{-1}$ của máy tính bỏ túi CASIO *fx-500MS* được dùng để tìm số đo (độ hoặc radian) của 1 góc khi biết 1 trong các giá trị lượng giác của nó. Muốn thế đối với máy tính CASIO *fx-500MS* ta thực hiện 2 bước sau:

1. *Ấn định đơn vị đo góc (độ hoặc radian).* Muốn tìm số đo độ, ta ấn $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{1}$. Lúc này dòng trên cùng của màn hình xuất hiện chữ nhỏ $\boxed{\text{D}}$. Muốn tìm số đo radian, ta ấn $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{2}$. Lúc này dòng trên cùng của màn hình xuất hiện chữ nhỏ $\boxed{\text{R}}$.
2. *Tìm số đo góc.* Khi biết sin, côsin hay tang của góc α cần tìm bằng m, ta lần lượt ấn phím $\boxed{\text{SHIFT}}$, & 1 trong các phím $\boxed{\sin^{-1}}$, $\boxed{\cos^{-1}}$, $\boxed{\tan^{-1}}$, rồi nhập giá trị lượng giác m & cuối cùng ấn phím $=$. Lúc này, trên màn hình cho kết quả là số đo của góc α (độ hay radian tùy theo bước 1).

Lưu ý 1.3.5. *1. Ở chế độ số đo radian, các phím* $\sin^{-1}, \cos^{-1}$ *cho kết quả (khi* $|m| \le 1$*) là* $\arcsin m, \arccos m$*; phím* $\tan^{-1}$ *cho kết quả là* $\arctan m$.

2. Ở chế độ số đo độ, các phím $\sin^{-1}$ *&* $\tan^{-1}$ *cho kết quả là số đo góc* α *từ* $-90°$ *đến* $90°$*; phím* $\cos^{-1}$ *cho kết quả là số đo góc* α *từ* $0°$ *đến* $180°$*. Các kết quả ấy được hiển thị dưới dạng số thập phân." – Quỳnh, Đoan, et al., 2020, p. 27*

Xem Quỳnh, Đoan, et al., 2020, Ví dụ 1–3, p. 31 để biết chi tiết thao tác bấm phím trên máy tính cầm tay.

1.4 1 Số Dạng Phương Trình Lượng Giác Cơ Bản

1.4.1 1 số dạng phương trình lượng giác đơn giản

1.4.1.1 Phương trình bậc nhất & bậc 2 đối với 1 hàm số lượng giác

Để giải các phương trình lượng giác có dạng $P(\sin x) = 0$, $P(\cos x) = 0$, $P(\tan x) = 0$, $P(\cot x) = 0$ với P là 1 đa thức có bậc 1 hoặc 2 (i.e., $\deg P \in \{1, 2\}$ [5]), ta chọn 1 biểu thức lượng giác thích hợp có mặt trong phương trình làm ẩn phụ & quy về phương trình bậc nhất hoặc bậc 2 đối với ẩn phụ đó (có thể nêu hoặc không nêu ký hiệu ẩn phụ).

1.4.1.1.1 Phương trình bậc nhất đối với 1 hàm số lượng giác. Xét các phương trình lượng giác có dạng $P(\sin x) = 0$, $P(\cos x) = 0$, $P(\tan x) = 0$, $P(\cot x) = 0$ với P là 1 đa thức có bậc 1 (i.e., $\deg P = 1$), i.e.:

$$a\sin(mx + n) + b = 0,\ a\cos(mx + n) + b = 0,\ a\tan(mx + n) + b = 0,\ a\cot(mx + n) + b = 0,\ a, b, m, n \in \mathbb{R},\ a \ne 0,\ m \ne 0.$$

Tổng quát hơn, giải các phương trình lượng giác sau:

$$a\sin f(x) + b = 0,\ a\cos f(x) + b = 0,\ a\tan f(x) + b = 0,\ a\cot f(x) + b = 0,$$

trong đó $a, b \in \mathbb{R}$, $a \ne 0$, & f là 1 hàm số (đa thức, phân thức, hàm căn thức) sao cho phương trình $f(x) = m$ có thể giải được/solvable (có nghiệm hoặc vô nghiệm) trên tập số thực $\mathbb{R}$.

[5]Ký deg là viết tắt của từ "degree" tức là "bậc".

1.4.1.1.2 Phương trình bậc 2 đối với 1 hàm số lượng giác. Xét các phương trình lượng giác có dạng $P(\sin x) = 0$, $P(\cos x) = 0$, $P(\tan x) = 0$, $P(\cot x) = 0$ với P là 1 đa thức có bậc 2 (i.e., $\deg P = 2$), i.e.,

$$a\sin^2(mx+n) + b\sin(mx+n) + c = 0,\ a\cos^2(mx+n) + b\cos(mx+n) + c = 0,$$
$$a\tan^2(mx+n) + b\tan(mx+n) + c = 0,\ a\cot^2(mx+n) + b\tan(mx+n) + c = 0,$$

trong đó $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $m \neq 0$. Tổng quát hơn, giải các phương trình lượng giác sau:

$$a\sin^2 f(x) + b\sin f(x) + c = 0,\ a\cos^2 f(x) + b\cos f(x) + c = 0,$$
$$a\tan^2 f(x) + b\tan f(x) + c = 0,\ a\cot^2 f(x) + b\cot f(x) + c = 0,\ ,$$

trong đó $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, & f là 1 hàm số (đa thức, phân thức, hàm căn thức) sao cho phương trình $f(x) = m$ có thể giải được (solvable) trên tập số thực $\mathbb{R}$.

1.4.1.1.3 Phương trình bậc $n \in \mathbb{N}$ đối với 1 hàm số lượng giác. Xét các phương trình lượng giác có dạng $P(\sin x) = 0$, $P(\cos x) = 0$, $P(\tan x) = 0$, $P(\cot x) = 0$ với P là 1 đa thức có bậc $n \in \mathbb{N}$ (i.e., $\deg P = n$), i.e., với $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, hệ số cao nhất $a_n \neq 0$, xét các phương trình lượng giác có dạng

$$P(\sin(mx+n)) = \sum_{i=0}^n a_i \sin^i(mx+n) = 0,\ P(\cos(mx+n)) = \sum_{i=0}^n a_i \cos^i(mx+n) = 0,$$
$$P(\tan(mx+n)) = \sum_{i=0}^n a_i \tan^i(mx+n) = 0,\ P(\cot(mx+n)) = \sum_{i=0}^n a_i \cot^i(mx+n) = 0.$$

Tổng quát hơn, giải các phương trình lượng giác sau:

$$P(\sin f(x)) = \sum_{i=0}^n a_i \sin^i f(x) = 0,\ P(\cos f(x)) = \sum_{i=0}^n a_i \cos^i f(x) = 0,$$
$$P(\tan f(x)) = \sum_{i=0}^n a_i \tan^i f(x) = 0,\ P(\cot f(x)) = \sum_{i=0}^n a_i \cot^i f(x) = 0.$$

Về đa thức tổng quát bậc n & các tính chất liên quan, có thể xem các tài liệu chuyên khảo về đa thức hoặc phần đầu của tài liệu của tác giả cho chương trình Toán lớp 8 ở link sau: GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/lecture[6].

[6]Explicitly, `https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/NQBH_elementary_mathematics_grade_8.pdf`.

Chương 2

Thống Kê – Statistics

See FaceBook/Statsystem – a funny Facebook page, including hilarious mathematical & statistical jokes, etc.

2.1 Mẫu Số Liệu & Trình Bày Mẫu Số Liệu – Data Sample & Representation of Data Sample

2.1.1 Định nghĩa của thống kê – Definiton of Statistics

"Những thông tin dưới dạng số liệu rất phổ biến trong khoa học & đời sống. Khi đọc 1 tờ báo, nghe 1 bản tin trên truyền hình, ... chúng ta thường bắt gặp các con số thống kê.

Định nghĩa 2.1.1 (Thống kê)**.** Thống kê *là khoa học về phương pháp thu thập, tổ chức, trình bày, phân tích & xử lý số liệu.*

Thống kê giúp ta thu thập, phân tích các số liệu 1 cách khoa học & rút ra các tri thức, thông tin chứa đựng trong các số liệu đó. Trên cơ sở này, chúng ta mới có thể đưa ra được những dự báo & những quyết định đúng đắn. Chính vì thế, thống kê đóng 1 vai trò cực kỳ quan trọng, 1 vai trò không thể thiếu trong rất nhiều hoạt động của con người, từ khoa học tự nhiên, kinh tế, nông nghiệp, y học cho tới khoa học xã hội, khoa học quản lý & hoạch định chính sách. Lenin[1] đã từng ví von rằng thống kê giống như tai, như mắt của Nhà nước; không có thống kê, Nhà nước như người mù & điếc. Ngay từ đầu thế kỷ 20, nhà khoa học người Anh H. D. Well đã cho rằng: `[translated]` "Trong tương lai không xa, kiến thức thống kê & tư duy thống kê phải trở thành 1 yếu tố không thể thiếu được trong học vấn phổ thông của mỗi công dân, giống như khả năng biết đọc biết viết vậy"." – Quỳnh, Dũng, et al., 2010, p.

Có thể xem thêm Wikipedia/Statistics.

2.1.2 Mẫu số liệu – Data sample

Xem Thái et al., 2022, Chap. IV: 1 Số Yếu Tố Thống Kê & Xác Suất, pp. 3–24 & tài liệu của tác giả cho chương trình Toán lớp 6 GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 6/lecture.

Định nghĩa 2.1.2 (Mẫu số liệu, kích thước mẫu, số liệu của mẫu)**.** *(i) "1 tập con hữu hạn các đơn vị điều tra được gọi là 1* mẫu*. Số phần tử của 1 mẫu được gọi là* kích thước mẫu*. Các giá trị của dấu hieuj thu được trên mẫu được gọi là 1* mẫu số liệu*. Mỗi giá trị trong mẫu số liệu được gọi là 1* số liệu của mẫu*. (ii) Nếu thực hiện việc điều tra trên mọi đơn vị điều tra thì đó là* điều tra toàn bộ*. (iii) Nếu chỉ điều tra trên 1 mẫu thì đó là điều tra mẫu." – Quỳnh, Dũng, et al., 2010, p. 62*

Lưu ý 2.1.1. *"Điều tra toàn bộ nói chung không được thực hiện khi số lượng các đơn vị điều tra quá lớn hoặc khi điều tra thì phải phá hủy đơn vị điều tra. Người ta thường chỉ điều tra mẫu & dựa trên các thông tin thu được, phân tích, suy diễn để rút ra những kết luận & dự báo cần thiết liên quan tới toàn bộ đơn vị điều tra." – Quỳnh, Dũng, et al., 2010, p. 62*

2.1.3 Trình bày 1 mẫu số liệu – Representation of a data sample

2.1.3.1 Bảng phân bố tần số – tần suất

Định nghĩa 2.1.3. *Giả sử trong 1 mẫu số liệu kích thước N có m giá trị khác nhau $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$. (i)* Tần số *của giá trị x_i (ký hiệu là n_i) là số lần xuất hiện của x_i trong mẫu số liệu. (ii)* Tần suất *của giá trị x_i (ký hiệu là f_i) là tỷ số giữa tần số n_i & kích thước mẫu N, $f_i = \frac{n_i}{N}$. Người ta thường viết tần suất dưới dạng phần trăm (%). (iii) Bảng sau đây được gọi là* bảng phân bố tần số – tần suất *(gọi tắt là* bảng tần số – tần suất*):*

[1] See, e.g., Wikipedia/Vladimir Ilyich Lenin & Wikipedia/Vladimir Lenin.

Giá trị	x_1	x_2	$\cdots$	x_m	
Tần số	n_1	n_2	$\cdots$	n_m	$N = \sum_{i=1}^m n_i$
Tần suất (%)	f_1	f_2	$\cdots$	f_m	

Lưu ý 2.1.2. *"Bảng tần số – tần suất ở trên có dạng "ngang" với 3 dòng & $m+2$ cột. Ta có thể trình bày bảng tần số – tần suất dưới dạng "dọc" (chuyển hàng thành cột). Khi đó bảng sẽ có 3 cột & $m+2$ dòng." – Quỳnh, Dũng, et al., 2010, p. 63*

2.1.3.2 Bảng phân bố tần số – tần suất ghép lớp

"Trong trường hợp ta có mẫu số liệu với kích thước lớn, ta thường thực hiện việc ghép số liệu thành các lớp sao cho mỗi số liệu thuộc vào 1 & chỉ 1 lớp. Mỗi lớp thường là 1 đoạn hoặc nửa khoảng. Việc phân lớp thế nào là tùy nhu cầu của ta trong mỗi tình huống cụ thể.

Định nghĩa 2.1.4 (Tần số/tần suất ghép lớp)**.** *Giả sử ta xác định m lớp $C_1, C_2, \ldots, C_m$. (i)* Tần số của lớp C_i *(ký hiệu n_i) là số số liệu của mẫu nằm trong lớp C_i. (ii)* Tần suất của lớp C_i *(ký hiệu f_i) là tỷ số giữa tần số n_i của lớp C_i & kích thước mẫu N, $f_i = \frac{n_i}{N}$.*

Bảng sau đây được gọi là *bảng phân bố tần số – tần suất ghép lớp của mẫu số liệu*:

Lớp	Tần số	Tần suất (%)
C_1	n_1	f_1
C_2	n_2	f_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
C_m	n_m	f_m
	$N = \sum_{i=1}^m n_i$	

Bảng 2.1: Bảng phân bố tần số – tần suất ghép lớp của mẫu số liệu.

Trong nhiều trường hợp, ta ghép lớp theo các nửa khoảng sao cho mút bên phải của 1 nửa khoảng cũng là mút bên trái của nửa khoảng tiếp theo." – Quỳnh, Dũng, et al., 2010, pp. 64–65

2.1.3.3 Biểu đồ

"Tục ngữ có những câu: "Trăm nghe không bằng 1 thấy"; "1 hình ảnh có giá trị hơn ngàn lời nói". Chính vì thế, để trình bày mẫu số liệu 1 cách trực quan sinh động, dễ nhớ & gây ấn tượng, người ta sử dụng biểu đồ. Sau đây là 1 số biểu đồ thông dụng nhất:

(i) *Biểu đồ tần số, tần suất hình cột.* Đây là cách thể hiện rất tốt bảng phân bố tần số – tần suất. Trên mỗi đoạn (hay nửa khoảng) xác định lớp, ta dựng 1 hình chữ nhật với đáy là đoạn đó (hay nửa khoảng đó) & chiều cao bằng tần số của lớp. Khi đó ta có biểu đồ tần số hình cột." "Nếu trên mỗi đoạn (hay nửa khoảng) xác định lớp, ta dựng 1 hình chữ nhật với đáy là đoạn đó (hay nửa khoảng đó) & chiều cao bằng tần suất của lớp thì ta có biểu đồ tần suất hình cột.

(ii) *Biểu đồ tần suất hình quạt.* Biểu đồ hình quạt rất thích hợp cho việc thể hiện bảng phân bố tần suất ghép lớp. Hình tròn được chia thành những hình quạt. Mỗi lớp được tương ứng với 1 hình quạt mà diện tích của nó tỷ lệ với tần suất của lớp đó." – Quỳnh, Dũng, et al., 2010, pp. 65–66

2.2 Các Số Đặc Trưng của Mẫu Số Liệu

"Để nhanh chóng nắm bắt được những thông tin quan trọng chứa đựng trong mẫu số liệu, ta đưa ra 1 vài chỉ số gọi là *các số đặc trưng của mẫu số liệu.*" – Quỳnh, Dũng, et al., 2010, p. 69

2.2.1 Số trung bình

"Cho mẫu số liệu kích thước N: $\{x_i\}_{i=1}^N = \{x_1, \ldots, x_N\}$. *Số trung bình* của mẫu số liệu này, ký hiệu là $\overline{x}$, được tính bởi công thức sau:

$$\overline{x} := \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}. \tag{2.2.1}$$

Nếu mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số:

Giá trị	x_1	x_2	$\cdots$	x_m	
Tần số	n_1	n_2	$\ldots\ldots$	n_m	$N=\sum_{i=1}^m n_i$

thì trong tổng $\sum_{i=1}^N x_i$ mỗi giá trị x_i xuất hiện đúng n_i lần. Thành thử công thứ tính số trung bình trở thành

$$\overline{x} := \frac{\sum_{i=1}^m n_i x_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^m n_i x_i}{\sum_{i=1}^m n_i}.$$

Nếu mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số – tần suất ghép lớp thì ta thường tính gần đúng số trung bình theo cách sau: Giả sử các số liệu được chia thành m lớp $C_1, C_2, \ldots, C_m$, trong đó mỗi lớp C_i là 1 đoạn $[a_i; b_i]$ hoặc 1 nửa khoảng $[a_i; b_i)$. Ta gọi giá trị $x_i = \frac{a_i+b_i}{2}$ là *giá trị đại diện* của lớp C_i. Các gía trị thuộc lớp C_i có thể coi như xấp xỉ bằng x_i. Gọi n_i là tần số của lớp C_i. Khi đó số trung bình của mẫu số liệu này được tính xấp xỉ theo công thức

$$\overline{x} \approx \frac{\sum_{i=1}^m n_i x_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^m n_i(a_i+b_i)}{2\sum_{i=1}^m n_i}.$$

Ý nghĩa của số trung bình. *Số trung bình của mẫu số liệu dùng làm đại diện cho các giá tri trong mẫu số liệu.*" – Quỳnh, Dũng, et al., 2010, pp. 69–70

2.2.2 Số trung vị

"Giả sử ta có 1 mẫu số liệu kích thước N. Sắp xếp các số liệu trong mẫu theo thứ tự không giảm $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_N$. Nếu N là 1 số lẻ thì số liệu $x_{\frac{N+1}{2}}$ (số liệu đứng chính giữa) được gọi là *số trung vị*. Nếu N là 1 số chẵn thì trung bình cộng của $x_{\frac{N}{2}}$ & $x_{\frac{N}{2}+1}$, i.e., $\frac{1}{2}\left(x_{\frac{N}{2}} + x_{\frac{N}{2}+1}\right)$ được gọi là *số trung vị*. Số trung vị được ký hiệu là M_e." – Quỳnh, Dũng, et al., 2010, p. 70

Lưu ý 2.2.1. *"Khi các số liệu trong mẫu có sự chênh lệch rất lớn với nhau thì số trung bình & số trung vị cũng khác biệt lớn. Khi đó số trung bình không đại diện tốt cho các số liệu trong mẫu, số trung vị làm đại diện tốt hơn." "Khi các số liệu trong mẫu không có sự chênh lệch rất lớn với nhau thì số trung bình & số trung vị xấp xỉ nhau." – Quỳnh, Dũng, et al., 2010, p. 71*

"Nếu mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số – tần suất ghép lớp thì ta thường tính gần đúng số trung vị theo cách sau: Giả sử mẫu số liệu kích thước N được chia làm m lớp, trong đó mỗi lớp là 1 nửa khoảng có độ dài h:

Lớp	Tần số
$[a_1; a_2)$	n_1
$[a_2; a_3)$	n_2
$\vdots$	$\vdots$
$[a_m; a_{m+1})$	n_m
	N

ký hiệu $S_l = \sum_{i=1}^l n_i$. Ta xác định số nguyên dương k thỏa mãn bất đẳng thức $S_{k-1} < \frac{N}{2} \le S_k$, i.e., trong dãy $S_1 < S_2 < \cdots < S_m = N$, k là số nguyên dương đầu tiên thỏa mãn $S_k \ge \frac{N}{2}$. Đặt $p := \frac{N}{2} - S_{k-1}$. Khi đó số trung vị được tính xấp xỉ bởi công thức $M_e \approx a_k + \frac{hp}{n_k}$." – Quỳnh, Dũng, et al., 2010, pp. 71–72

2.2.3 Mốt – Mode

"Cho mẫu số liệu dưới dạng bảng phân bố tần số:

Giá trị	x_1	x_2	$\cdots$	x_m	
Tần số	n_1	n_2	$\cdots$	n_m	$N=\sum_{i=1}^m n_i$

Bảng 2.2: Bảng phân bố tần số.

Định nghĩa 2.2.1 (Mốt)**.** *Giá trị có tần số lớn nhất được gọi là* mốt *của mẫu số liệu & ký hiệu là M_0, i.e., $M_0 = x_k$ nếu $n_k \ge n_i$, $\forall i = 1, \ldots, m$.*

Lưu ý 2.2.2. *Từ định nghĩa ta thấy 1 mẫu số liệu có thể có 1 hay nhiều mốt." – Quỳnh, Dũng, et al., 2010, p. 73*

"Nếu mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số – tần suất ghép lớp thì ta thường tính gần đúng mốt theo cách sau: Giả sử mẫu số liệu kích thước N được chia làm m lớp, trong đó mỗi lớp là 1 đoạn hoặc 1 nửa khoảng. Ta xác định lớp có tần số cao nhất & giá trị đại diện của lớp có tần số cao nhất này được xem là mốt của bảng phân bố tần số ghép lớp." – Quỳnh, Dũng, et al., 2010, p. 74

2.2.4 Phương sai & độ lệch chuẩn

"Cho mẫu số liệu kích thước N là $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ có $\overline{x}$ là số trung bình. *Phương sai* của mẫu số liệu này, ký hiệu là s^2, được tính bởi công thức sau:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \overline{x})^2}{N}. \tag{2.2.2}$$

Căn bậc 2 của phương sai, ký hiệu là s, được gọi là *độ lệch chuẩn*

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \overline{x})^2}{N}}. \tag{2.2.3}$$

Lưu ý 2.2.3. *Phương sai có thể tính theo công thức sau đây:*

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2 = \frac{C}{N} - \frac{B^2}{N^2}, \text{ với } B = \sum_{i=1}^N x_i,\ C = \sum_{i=1}^N x_i^2. \tag{2.2.4}$$

Công thức này thường được sử dụng trong tính toán. Thật vậy, ta có $B = N\overline{x}$. *Vậy* $\sum_{i=1}^N (x_i - \overline{x})^2 = C - 2B\overline{x} + N\overline{x}^2 = C - 2N\overline{x}^2 + N\overline{x}^2 = C - N\overline{x}^2 = C - \frac{B^2}{N}$. *Suy ra* $s^2 = \frac{C}{N} - \frac{B^2}{N^2}$.*" – Quỳnh, Dũng, et al., 2010, pp. 74–75*

"Nếu mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số 2.2 thì trong tổng $\sum_{i=1}^N x_i$ & $\sum_{i=1}^N x_i^2$, mỗi giá trị x_i xuất hiện đúng n_i lần. Thành thử công thức tính phương sai (2.2.4) trở thành:

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^m n_i x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^m n_i x_i\right)^2.$$

Nếu mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số – tần suất ghép lớp thì ta thường tính gần đúng số trung bình theo cách sau: Các số liệu được chia thành m lớp $C_1, C_2, \ldots, C_m$, trong đó mỗi lớp C_i là 1 đoạn $[a_i; b_i]$ hoặc 1 nửa khoảng $[a_i; b_i)$. Ta gọi giá trị $x_i = \frac{a_i + b_i}{2}$ là giá trị đại diện của lớp C_i. Các giá trị thuộc lớp C_i có thể coi như xấp xỉ bằng x_i. Gọi n_i là tần số của lớp C_i. Khi đó phương sai của mẫu số liệu này được tính xấp xỉ theo công thức

$$s^2 \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^m n_i x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^m n_i x_i\right)^2.$$

Ý nghĩa của phương sai & độ lệch chuẩn. Từ công thức tính phương sai trong định nghĩa ta thấy phương sai là trung bình cộng của bình phương khoảng cách từ mỗi số liệu tới số trung bình. Như vậy phương sai đo mức độ phân tán của các số liệu trong mẫu quanh số trung bình. Khi số liệu có đơn vị (thứ nguyên) thì đơn vị của phương sai là bình phương đơn vị của số liệu. Độ lệch chuẩn là căn bậc 2 của phương sai, do đó nó cũng là 1 số đo mức độ phân tán của các số liệu trong mẫu quanh số trung bình. Khi số liệu có đơn vị (thứ nguyên) thì độ lệch chuẩn & số liệu có cùng đơn vị." – Quỳnh, Dũng, et al., 2010, pp. 76–77

Chương 3

Tổ Hợp & Xác Suất – Combinatorics & Probability

3.1 2 Quy Tắc Đếm Cơ Bản

Nội dung. *2 quy tắc đếm cơ bản* – [goal] nhờ đó có thể tính chính xác & nhanh chóng số phần tử của 1 tập hợp mà không cần đếm trực tiếp bằng cách liệt kê.

3.1.1 Quy tắc cộng

3.1.1.1 Quy tắc cộng

"Quy tắc cộng có thể phát biểu dưới dạng sau: (i) Giả sử 1 công việc nào đó có thể thực hiện theo phương án A hoặc phương án B. Có n cách thực hiện phương án A & có m cách thực hiện phương án B. Khi đó công việc có thể thực hiện theo $n+m$ cách. (ii) 1 cách tổng quát, giả sử 1 công việc nào đó có thể thực hiện theo 1 trong k phương án $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Phương án A_i có n_i cách thực hiện ($i = 1, 2, \ldots, k$). Khi đó công việc có thể thực hiện theo $\sum_{i=1}^k n_i = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ cách." – Quỳnh, Dũng, et al., 2010, p. 79

3.1.1.2 Tính số phần tử của hợp 2 tập hợp

"Bản chất toán học của quy tắc cộng (i) là công thức tính số phần tử của hợp 2 tập hợp không giao nhau: *Nếu A & B là 2 tập hợp hữu hạn không giao nhau thì* $|A \cup B| = |A| + |B|$. 1 cách tổng quát, bản chất toán học của quy tắc cộng (ii) là công thức tính số phần tử của tập n tập hợp hữu hạn đôi một không giao nhau. Quy tắc cộng cho nhiều phần tử đôi một không giao nhau được phát biểu như sau: *Cho n tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_k$ đôi một không giao nhau. Khi đó:* $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^k |A_i|$. Trong nhiều bài toán tổ hợp, chúng ta phải tính số phần tử của hợp 2 tập hợp bất kỳ (có thể không rời nhau)." – Quỳnh, Dũng, et al., 2010, pp. 79–80

Định lý 3.1.1 (Công thức tính số phần tử của hợp 2 tập hợp bất kỳ)**.** *Cho A & B là 2 tập hợp hữu hạn bất kỳ. Khi đó ta có*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{3.1.1}$$

Chứng minh. B & $A \backslash B$ là 2 tập hợp không giao nhau & $A \cup B = B \cup (A \backslash B)$ nên $|A \cup B| = |B| + |A \backslash B|$. Mặt khác, $A \cap B$ & $A \backslash B$ là 2 tập hợp không giao nhau & $A = (A \cap B) \cup (A \backslash B)$ nên $|A| = |A \cap B| + |A \backslash B|$, do đó $|A \backslash B| = |A| - |A \cap B|$. Kết hợp 2 biểu thức vừa thu được suy ra (3.1.1). □

3.1.1.3 Tính số phần tử của hợp 3 tập hợp

Với 3 tập hợp bất kỳ, ta có định lý sau:

Định lý 3.1.2 (Công thức tính số phần tử của hợp 3 tập hợp bất kỳ)**.** *Cho A, B, C là 3 tập hợp. Khi đó:*

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|. \tag{3.1.2}$$

Chứng minh. Theo định lý 3.1.1 ta có $|A \cup B \cup C| = |A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)|$. Mặt khác cũng theo Định lý 1, $|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C|$ & $|A \cap (B \cup C)| = |(A \cap B) \cup (A \cap C)| = |A \cap B| + |A \cap C| - |(A \cap B) \cap (A \cap C)| = |A \cap B| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C|$. Kết hợp 3 biểu thức vừa thu được suy ra (3.1.2). □

3.1.2 Quy tắc nhân

3.1.2.1 Quy tắc nhân

(i) "Giả sử 1 công việc nào đó bao gồm 2 công đoạn A & B. Công đoạn A có thể làm theo n cách. Với mỗi cách thực hiện công đoạn A thì công đoạn B có thể làm theo m cách. Khi đó công việc có thể thực hiện theo mn cách. (ii) Giả sử 1 công việc nào đó bao gồm k công đoạn $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Giả sử rằng công đoạn A_1 có thể làm theo n_1 cách. Với mỗi $i \geq 2$ & với mỗi cách thực hiện các công đoạn $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}$ thì công đoạn A_i có thể thực hiện theo n_i cách. Khi đó công việc có thể thực hiện theo $\prod_{i=1}^k n_i = n_1 n_2 \cdots n_k$ cách." – Quỳnh, Dũng, et al., 2010, p. 82

3.1.2.2 Tính số phần tử của tích Descartes của 2 tập hợp

"Giả sử công đoạn đầu có thể tiến hành theo n cách: $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Công đoạn thứ 2 có thể tiến hành theo m cách $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Như vậy nếu công đoạn đầu tiến hành theo cách a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, công đoạn thứ 2 tiến hành theo cách b_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ thì việc thực hiện công việc được mô tả bởi cặp (a_i, b_j). Thành thử tập hợp tất cả các cách thực hiện công việc được mô tả bởi tập hợp tất cả các cặp $\{(a_i, b_j)\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m)$, i.e., tích Descartes $A \times B$ của 2 tập hợp A & B." – Quỳnh, Dũng, et al., 2010, p. 82. Như vậy bản chất toán học của quy tắc nhân là:

Định lý 3.1.3. *Số phần tử của tích Descartes $A \times B$ của 2 tập hợp hữu hạn A & B bằng số phần tử của A nhân với số phần tử của B, $|A \times B| = |A||B|$.*

3.1.2.3 Tính số phần tử của tích Descartes của nhiều tập hợp

"1 cách tổng quát, bản chất toán học của quy tắc nhân (ii) cho công việc nhiều công đoạn là công thức tính số phần tử của tích Descartes của nhiều tập hợp." – Quỳnh, Dũng, et al., 2010, p. 82

Định lý 3.1.4. *Cho k tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Tập hợp tất cả các bộ $\{(a_1, a_2, \ldots, a_k)\}$ với $a_i \in A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ được gọi là* tích Descartes của k tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *& ký hiệu là $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$. Ta có quy tắc nhân sau đây:*

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = \prod_{i=1}^k |A_i| = |A_1||A_2| \cdots |A_k|.$$

Chứng minh. Sử dụng phương pháp quy nạp & nhận xét $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \times A_{k+1} = (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) \times A_{k+1}$. □

3.2 Hoán Vị, Chỉnh Hợp & Tổ Hợp

3.2.1 Hoán vị

Định nghĩa 3.2.1 (Hoán vị)**.** *Cho tập hợp A có n phần tử. Mỗi cách sắp xếp n phần tử này theo 1 thứ tự cho ta 1 hoán vị của tập hợp A. Số các hoán vị của tập hợp có n phần tử được ký hiệu là P_n.*

Ký hiệu P được lấy từ chữ cái đầu của từ *permutation*[1], i.e., hoán vị.

Định lý 3.2.1 (Công thức tính số các hoán vị)**.**

$$P_n = n! := \prod_{i=1}^n i = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^\star. \tag{3.2.1}$$

Chứng minh. "Việc sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A có n phần tử là công việc gồm n công đoạn. Công đoạn 1 là chọn phần tử để xếp vào vị trí thứ nhất: có n cách thực hiện. Sau khi thực hiện công đoạn 1, công đoạn 2 là chọn phần tử xếp vào vị trí thứ 2: có $n-1$ cách thực hiện. Sau khi thực hiện xong $i-1$ công đoạn (chọn $i-1$ phần tử của A vào các vị trí thứ $1, 2, \ldots, i-1$), công đoạn thứ i tiếp theo là chọn phần tử xếp vào vị trí thứ i: có $n-i+1$ cách thực hiện. Công đoạn cuối cùng (công đoạn thứ n) có 1 cách thực hiện. Theo quy tắc nhân, ta có $n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$ cách sắp xếp thứ tự n phần tử của tập A, i.e., có $n!$ hoán vị." – Quỳnh, Dũng, et al., 2010, p. 85 □

[1] **permutation** [n] any of the different ways in which a set or number of things can be ordered or arranged.

3.2.2 Chỉnh hợp

Định nghĩa 3.2.2 (Chỉnh hợp). *Cho tập hợp A gồm n phần tử & số nguyên dương k với $1 \le k \le n$. Khi lấy ra k phần tử của A & sắp xếp chúng theo 1 thứ tự ta được 1* chỉnh hợp chập k của n phần tử của A *(gọi tắt là 1* chỉnh hợp chập k của *A). Số các chỉnh hợp chập k của tập hợp có n phần tử được ký hiệu là A_n^k.*

Nhận xét 3.2.1. *"Từ định nghĩa, ta thấy 1 hoán vị của tập hợp A có n phần tử là 1 chỉnh hợp chập n của A." – Quỳnh, Dũng, et al., 2010, p. 85*

Định lý 3.2.2 (Công thức tính số các chỉnh hợp).

$$A_n^k = \prod_{i=n-k+1}^{n} i = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{P_n}{P_{n-k}},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall k \in \mathbb{N},\ k \le n. \tag{3.2.2}$$

Chứng minh. "Việc thiết lập 1 chỉnh hợp chập k của tập A có n phần tử là công việc gồm k công đoạn. Công đoạn 1 là chọn phần tử để xếp vào vị trí thứ nhất: có n cách thực hiện. Sau khi thực hiện công đoạn 1, công đoạn 2 là chọn phần tử xếp vào vị trí thứ 2: có $n-1$ cách thực hiện. Sau khi thực hiện xong $i-1$ công đoạn (chọn $i-1$ phần tử của A vào các vị trí thứ $1, 2, \ldots, i-1$), công đoạn thứ i tiếp theo là chọn phần tử xếp vào vị trí thứ i: có $n-i+1$ cách thực hiện. Công đoạn cuối cùng (công đoạn thứ k) có $n-k+1$ cách thực hiện. Theo quy tắc nhân, ta có $\prod_{i=n-k+1}^n i = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ cách lập 1 chỉnh hợp chập k của tập A có n phần tử, i.e., có $\prod_{i=n-k+1}^n i = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ chỉnh hợp chập k của tập A có n phần tử." – Quỳnh, Dũng, et al., 2010, p. 86 ☐

3.2.3 Tổ hợp

Định nghĩa 3.2.3 (Tổ hợp). *Cho tập hợp A gồm n phần tử & $k \in \mathbb{N}^\star$ với $1 \le k \le n$. Mỗi tập con có k phần tử của A được gọi là 1* tổ hợp chập k của n phần tử của A *(gọi tắt là 1* tổ hợp chập k *của A). Số các tổ hợp chập k của tập hợp có n phần tử được ký hiệu là C_n^k.*

Định lý 3.2.3 (Công thức tính số các tổ hợp).

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{n!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{P_n}{P_k P_{n-k}},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall k \in \mathbb{N},\ k \le n.$$

Chứng minh. "Từ định nghĩa, ta có mỗi hoán vị của 1 tổ hợp chập k của A cho ta 1 chỉnh hợp chập k của A. Do đó, từ 1 tổ hợp chập k của A, ta lập được $k!$ chỉnh hợp chập k của A. Vậy $A_n^k = k!C_n^k$." – Quỳnh, Dũng, et al., 2010, p. 86 ☐

Quy ước: $0! = 1$ & $C_n^0 = A_n^0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Với quy ước đó thì định lý 3.2.3–3.2.3 đúng cho cả $k = 0$ & $k = n$.

Định lý 3.2.4 (2 tính chất căn bản của số C_n^k). *(a)* $C_n^k = C_n^{n-k}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \le n$.

(b) (Hằng đẳng thức Pascal)

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1},\ \forall n, k \in \mathbb{N}^\star,\ k \le n. \tag{hdtP}$$

Chứng minh. (a) $C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \le n$. (b) $C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} + \frac{n!k}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = C_{n+1}^k$, $\forall n, k \in \mathbb{N}^\star$, $k \le n$. ☐

3.3 Nhị Thức Newton

3.3.1 Công thức nhị thức Newton – Newton's binomial theorem

"1 cách tổng quát, khai triển của $(a+b)^n$ được cho bởi công thức sau:

Định lý 3.3.1 (Công thức nhị thức Newton).

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k,\ \forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star. \tag{3.3.1}$$

Công thức này được gọi là *công thức nhị thức Newton* (gọi tắt là *nhị thức Newton*)." See, e.g., Wikipedia/định lý nhị thức & Wikipedia/binomial theorem.

Chứng minh. "Trước hết ta chứng minh khẳng định $P(n)$ sau: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Chứng minh bằng quy nạp theo n. Rõ ràng $P(1)$ đúng. Giả sử $P(n)$ đúng. Ta có $(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n = (1+x)\sum_{k=0}^n C_n^k x^k = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k + \sum_{k=0}^n C_n^k x^{k+1}$. Lại có $\sum_{k=0}^n C_n^k x^k = 1 + \sum_{k=1}^n C_n^k x^k$, $\sum_{k=0}^n C_n^k x^{k+1} = \sum_{k=1}^n C_n^{k-1} x^k + x^{n+1}$. Kết hợp 3 đẳng thức vừa thu được & áp dụng hằng đẳng thức Pascal (hdtP), ta được $(1+x)^{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^n (C_n^k + C_n^{k-1})x^k + x^{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^n C_{n+1}^k x^k + x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^k$. Vậy $P(n+1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp ta có $P(n)$ đúng, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Trở lại định lý. Nếu $a = 0$ thì công thức hiển nhiên đúng. Giả sử $a \neq 0$. Đặt $x = \frac{b}{a}$ & áp dụng $P(n)$ ta có $\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{b^k}{a^k}$. Thành thử $(a+b)^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = a^n \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{b^k}{a^k} = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$." – Quỳnh, Dũng, et al., 2010, pp. 90–91 □

Lưu ý 3.3.1. *Công thức trên là khai triển của $(a+b)^n$ theo lũy thừa giảm của a & lũy thừa tăng của b. Ta cũng có thể viết khai triển của $(a+b)^n$ theo lũy thừa tăng của a & lũy thừa giảm của b. $(a+b) = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$.*

Hệ quả 3.3.1 (Khai triển lũy thừa của hiệu)**.**

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k,\ \forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Suy ra

$$(a-b)^n = a^n - C_n^1 a^{n-1} b + \cdots - C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n,\ \forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ n \vdots 2,$$

$$(a-b)^n = a^n - C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} - b^n,\ \forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ n \not\vdots 2.$$

Có thể gộp chung 2 công thức thành:

$$(a-b)^n = \begin{cases} a^n - C_n^1 a^{n-1} b + \cdots - C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n, & \text{if } n \vdots 2, \\ a^n - C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} - b^n, & \text{if } n \not\vdots 2, \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Bài toán 3.3.1 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, Ví dụ 2, p. 92)**.** *Chứng minh công thức khai triển nhị thức Newton bằng suy luận tổ hợp.*

Chứng minh. "Khi khai triển $(a+b)^n = (a+b)(a+b)\cdots(a+b)$ (n thừa số $(a+b)$) theo quy tắc phân phối của phép nhân, ta được 1 tổng các đơn thức dạng $x_1 x_2 \cdots x_n$ trong đó $x_i \in \{a, b\}$. Bây giờ ta thực hiện việc ghép các số hạng đồng dạng. Khi tất cả n giá trị x_i bằng a, ta nhận được đơn thức a^n. Chỉ có 1 đơn thức như vậy. Khi $n-1$ giá trị x_i bằng a & giá trị còn lại bằng b, ta nhận được đơn thức $a^{n-1}b$. Số các đơn thức như thế bằng số cách chọn 1 số bằng b trong n số $x_1, x_2, \ldots, x_n$, i.e., bằng C_n^1. Do đó ta thu được số hạng $C_n^1 a^{n-1} b$. Khi $n-2$ giá trị x_i bằng a & 2 giá trị còn lại bằng b, ta nhận được đơn thức $a^{n-2}b^2$. Số các đơn thức như thế bằng số cách chọn 2 số bằng b trong n số $x_1, x_2, \ldots, x_n$, i.e., bằng C_n^2. Do đó ta thu được số hạng $C_n^2 a^{n-2} b^2$. Tiếp tục như vậy, khi $n-k$ giá trị x_i bằng a & k giá trị còn lại bằng b, ta nhận được đơn thức $a^{n-k}b^k$. Số các đơn thức như thế bằng số cách chọn k số bằng b trong n số $x_1, \ldots, x_n$, i.e., bằng C_n^k. Do đó ta thu được số hạng $C_n^k a^{n-k} b^k$. Cuối cùng, khi tất cả n giá trị bằng b, ta được đơn thức b^n. Chỉ có 1 đơn thức như vậy. Vậy $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$." – Quỳnh, Dũng, et al., 2010, pp. 92–93 □

3.3.2 Tam giác Pascal

"Tam giác Pascal là 1 bảng số được lập theo quy luật sau: Đỉnh của tam giác được ghi số 1. Hàng thứ nhất được ghi 2 số 1. Nếu đã có hàng thứ $n \in \mathbb{N}^\star$ thì hàng thứ $n+1$ tiếp theo được thiết lập bằng cách cộng 2 số liên tiếp của hàng thứ n rồi viết kết quả xuống hàng dưới ở vị trí giữa 2 số này. Sau đó viết số 1 ở đầu & cuối hàng.

Định lý 3.3.2. *Các số ở hàng thứ $n \in \mathbb{N}^\star$ trong tam giác Pascal là dãy gồm các số $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{n-1}, C_n^n$.*

Chứng minh. Chứng minh bằng quy nạp. Với $n = 1$, khẳng định đúng. Giả sử khẳng định đúng với n. Xét hàng thứ $n+1$: Giả sử các số ở hàng này là $a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$. Theo cách xây dựng tam giác, ta có $a_0 = 1 = C_{n+1}^0$, $a_{n+1} = 1 = C_{n+1}^{n+1}$. Xét $1 \le k \le n$. Theo cách xây dựng tam giác & giả thiết quy nạp, ta có $a_k = C_n^k + C_n^{k-1}$. Mặt khác, theo hằng đẳng thức Pascal $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$. Thành thử $a_k = C_{n+1}^k$. Vậy khẳng định đúng với $n+1$. Theo nguyên lý quy nạp, khẳng định đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^\star$." – Quỳnh, Dũng, et al., 2010, pp. 93–94 □

3.4 Biến Cố & Xác Suất của Biến Cố – Event & Probability of Event

3.5 Các Quy Tắc Tính Xác Suất – Rules of Probability

3.6 Biến Ngẫu Nhiên Rời Rạc – Discrete Random Variable

Chương 4

Dãy Số. Cấp Số Cộng & Cấp Số Nhân – Series. Arithmetic Progression/Sequence & Geometric Progression/Sequence

4.1 Phương Pháp Quy Nạp Toán Học

4.2 Dãy Số

4.3 Cấp Số Cộng

4.4 Cấp Số Nhân

Chương 5

Giới Hạn – Limit

5.1 Dãy Số Có Giới Hạn 0

5.2 Dãy Số Có Giới Hạn Hữu Hạn

5.3 Dãy Số Có Giới Hạn Vô Cực

5.4 Định Nghĩa & 1 Số Định Lý về Giới Hạn của Hàm Số

5.5 Giới Hạn 1 Bên

5.6 1 Vài Quy Tắc Tìm Giới Hạn Vô Cực

5.7 Các Dạng Vô Hình

5.8 Hàm Số Liên Tục

Chương 6

Đạo Hàm – Derivative

6.1 Khái Niệm Đạo Hàm

6.2 Các Quy Tắc Tính Đạo Hàm

6.3 Đạo Hàm của Các Hàm Số Lượng Giác

6.4 Vi Phân

6.5 Đạo Hàm Cấp Cao

Phần II

Hình Học – Geometry

Chương 7

Phép Dời Hình & Phép Đồng Dạng Trong Mặt Phẳng

"Bức tranh của họa sĩ Hà Lan M.C. Escher gồm những hình bằng nhau mô tả các chiến binh trên lưng ngựa. Các hình này phủ kín mặt phẳng. 2 chiến binh & ngựa cùng màu (trắng hoặc đen) tương ứng với nhau qua 1 phép tịnh tiến. 2 chiến binh & ngựa khác màu thì tương ứng với nhau qua 1 phép đối xứng trục & tiếp theo là 1 phép tịnh tiến. Nghệ thuật dùng những hình bằng nhau để lấp đầy mặt phẳng được phát triển mạnh mẽ vào thế kỷ XIII ở nước Ý/Italia." – Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 3

Nội dung. *Các phép dời hình & đồng dạng trong mặt phẳng: phép tịnh tiến, phép đối xứng trục, phép quay, phép vị tự, ...; 2 hình bằng nhau, 2 hình đồng dạng 1 cách tổng quát.*

7.1 Mở Đầu về Phép Biến Hình

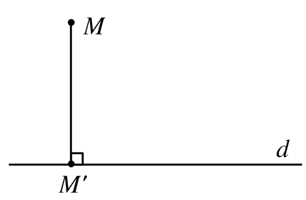
7.1.1 Phép biến hình

Khái niệm "hàm số" – 1 khái niệm quan trọng trong Đại số: "Nếu có 1 quy tắc để với mỗi số $x \in \mathbb{R}$, xác định được 1 số duy nhất $y \in \mathbb{R}$ thì quy tắc đó gọi là *1 hàm số xác định trên tập số thực* $\mathbb{R}$. Bây giờ, trong mệnh đề trên ta thay *số thực* bằng *điểm thuộc mặt phẳng* thì ta được khái niệm về phép biến hình trong mặt phẳng. Cụ thể là: Nếu có 1 quy tắc để với mỗi điểm M thuộc mặt phẳng, xác định được 1 điểm duy nhất M' thuộc mặt phẳng ấy thì quy tắc đó gọi là *1 phép biến hình (trong mặt phẳng)*." – Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 4

Định nghĩa 7.1.1 (Phép biến hình).

- *"Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M của mặt phẳng với 1 điểm xác định duy nhất M' của mặt phẳng đó được gọi là* phép biến hình *trong mặt phẳng." "Nếu ký hiệu phép biến hình là F thì ta viết $F(M) = M'$ hay $M' = F(M)$ & gọi điểm M' là* ảnh *của điểm M qua phép biến hình F." – Hạo, Hy, et al., 2022, p. 4*
- "Phép biến hình *(trong mặt phẳng) là 1 quy tắc để với mỗi điểm M thuộc mặt phẳng, xác định được 1 điểm duy nhất M' thuộc mặt phẳng ấy. Điểm M' gọi là* ảnh *của điểm M qua phép biến hình đó." – Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 4*

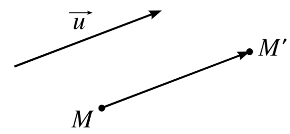
Ví dụ 7.1.1 (Phép chiếu vuông góc lên 1 đường thẳng). *"Cho đường thẳng d. Với mỗi điểm M, ta xác định M' là hình chiếu (vuông góc) của M trên d thì ta được 1 phép biến hình.*



Hình 7.1: Phép chiếu vuông góc lên đường thẳng d.

Phép biến hình này gọi là phép chiếu (vuông góc) lên đường thẳng *d." – Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 4*

Ví dụ 7.1.2 (Phép tịnh tiến theo vector). *"Cho vector $\vec{u}$, với mỗi điểm M ta xác định điểm M' theo quy tắc $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ (Fig. 7.2). Như vậy ta cũng có 1 phép biến hình. Phép biến hình đó gọi là* phép tịnh tiến theo vector *$\vec{u}$." – Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 4*



Hình 7.2: Phép tịnh tiến theo vector $\vec{u}$.

Ví dụ 7.1.3 (Phép đồng nhất). *"Với mỗi điểm M, ta xác định điểm M' trùng với M thì ta cũng được 1 phép biến hình." – Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 5*

Định nghĩa 7.1.2 (Phép đồng nhất). *"Phép biến hình biến mỗi điểm M thành chính nó được gọi là* phép đồng nhất*." – Hạo, Hy, et al., 2022, p. 4. Phép đồng nhất thường được ký hiệu là* id *(identity mapping),* $\mathrm{id}(M) = M$, $\forall M \in \mathbb{R}^2$, *&* $\mathrm{id}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$, *với mọi hình* $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^2$.

Ví dụ 7.1.4. *Cho trước số dương $a \in (0; +\infty)$, với mỗi điểm M trong mặt phẳng, gọi M' là 1 điểm sao cho $MM' = a$. Khi đó tập hợp các điểm M' thỏa mãn điều kiện này là đường tròn tâm M bán kính a, i.e., $\{M' \in \mathbb{R}^2 | MM' = a\} = \mathrm{circle}(M; a)$, là 1 tập có vô hạn không đếm được các phần tử, thậm chí lực lượng/cardinality[1] của 1 hình tròn với bán kính là 1 số dương bất kỳ bằng lực lượng của $\mathbb{R}$ & bằng $\mathfrak{c}$ (cardinality of the continuum[2]). Quy tắc này hiển nhiên không là 1 phép biến hình do vi phạm yêu cầu về tính xác định duy nhất của ảnh.*

Về lực lượng & các tính chất sâu sắc hơn của tập hợp, có thể tham khảo Halmos, 1960; Halmos, 1974; Kaplansky, 1972; Kaplansky, 1977[3].

7.1.2 Ký hiệu & thuật ngữ

- "Nếu $\mathcal{H}$ là 1 hình nào đó trong mặt phẳng thì ta ký hiệu $\mathcal{H}' \coloneqq F(\mathcal{H})$ là tập các điểm $M' = F(M)$, $\forall M \in \mathcal{H}$. Khi đó ta nói *$F$ biến hình $\mathcal{H}$ thành hình $\mathcal{H}'$*, hay *hình $\mathcal{H}'$ là ảnh của hình $\mathcal{H}$* qua phép biến hình F. " – Hạo, Hy, et al., 2022, p. 4
- "Nếu ta ký hiệu 1 phép biến hình nào đó là F & điểm M' là ảnh của điểm M qua phép biến hình F thì ta viết $M' = F(M)$, hoặc $F(M) = M'$. Khi đó, ta còn nói *phép biến hình F biến điểm M thành điểm M'*. Với mỗi hình $\mathcal{H}$, ta gọi hình $\mathcal{H}'$ gồm các điểm $M' = F(M)$, trong đó $M \in \mathcal{H}$, là *ảnh của $\mathcal{H}$ qua phép biến hình F*, & viết $\mathcal{H}' = F(\mathcal{H})$." – Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 5, i.e.,

$$\mathcal{H}' \coloneqq \{M' \in \mathbb{R}^2 | \exists M \in \mathcal{H},\ M' = F(M)\} = \{F(M) | M \in \mathcal{H}\} = F(\mathcal{H}).$$

7.2 Phép Tịnh Tiến

7.2.1 Định nghĩa phép tịnh tiến

Định nghĩa 7.2.1 (Phép tịnh tiến). "Phép tịnh tiến *theo vector $\vec{u}$ là 1 phép biến hình biến điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$." – Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 5*

"Phép tịnh tiến theo vector $\vec{u}$ thường được ký hiệu là T hoặc $T_{\vec{u}}$. Vector $\vec{u}$ được gọi là *vector tịnh tiến*." – Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 5.

"Như vậy, $T_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Phép tịnh tiến theo vector $\vec{0}$ chính là *phép đồng nhất*." – Hạo, Hy, et al., 2022, p. 5

Bài toán 7.2.1 (Hạo, Tuấn, et al., 2022, **1.**, p. 7). *Chứng minh: $M' = T_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow M = T_{-\vec{u}}(M')$.*

7.2.2 Các tính chất của phép tịnh tiến

Định lý 7.2.1 (Phép tịnh tiến bảo toàn khoảng cách). *Nếu phép tịnh tiến biến 2 điểm M & N lần lượt thành 2 điểm M' & N' thì $M'N' = MN$.*

"Người ta diễn tả tính chất trên của phép tịnh tiến là: *Phép tịnh tiến không làm thay đổi khoảng cách giữa 2 điểm bất kỳ.*" – Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 6. "Nếu $T_{\vec{u}}(M) = M'$, $T_{\vec{u}}(N) = N'$ thì $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ & từ đó suy ra $M'N' = MN$." "Nói cách khác, phép tịnh tiến bảo toàn khoảng cách giữa 2 điểm bất kỳ." – Hạo, Hy, et al., 2022, p. 6, i.e.,

$$((T_{\vec{u}}(M) = M') \wedge (T_{\vec{u}}(N) = N')) \Rightarrow \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN} \Rightarrow M'N' = MN. \quad (7.2.1)$$

[1] See, e.g., Wikipedia/cardinality.
[2] See, e.g., Wikipedia/cardinality of the continuum.
[3] Đây là những quyển sách đầu tiên tác giả đọc khi bắt đầu học Toán Cao Cấp ở bậc Đại học

Chứng minh (7.2.1). Vì $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \vec{u}$ & $\overrightarrow{M'M} = -\vec{u}$, $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'} = -\vec{u} + \overrightarrow{MN} + \vec{u} = \overrightarrow{MN}$. Suy ra $|\overrightarrow{M'N'}| = |\overrightarrow{MN}|$, i.e., $M'N' = MN$. □

Định lý 7.2.2 (Phép tịnh tiến bảo toàn tính chất thẳng hàng & thứ tự các điểm thẳng hàng)**.** *Phép tịnh tiến biến 3 điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng & không làm thay đổi thứ tự 3 điểm đó.*

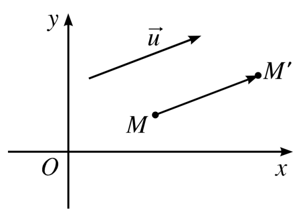
Chứng minh. "Giả sử phép tịnh tiến biến 3 điểm A, B, C thành 3 điểm A', B', C'. Theo Định lý **??**, ta có $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, & $A'C' = AC$. Nếu A, B, C thẳng hàng, B nằm giữa A & C thì $AB + AC = AC$. Do đó ta cũng có $A'B' + B'C' = A'C'$, i.e., A', B', C' thẳng hàng, trong đó B' nằm giữa A' & C'. □

Từ định lý **??**, suy ra:

Hệ quả 7.2.1. *Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến tia thành tia song song cùng hướng hoặc trùng với nó, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính, biến góc thành góc bằng nó.*

7.2.3 Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến

"Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho phép tịnh tiến theo vector $\vec{u}$. Biết tọa độ của $\vec{u}$ là $(a; b)$. Giả sử điểm $M(x; y)$ biến thành điểm $M(x'; y')$ (Fig. 7.3).



Hình 7.3: Phép tịnh tiến trên hệ trục tọa độ.

Khi đó ta có:

$$\boxed{\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b. \end{cases}}$$

Công thức trên gọi là *biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ theo vector $\vec{u}(a; b)$*." – Quỳnh, Cương, et al., 2020, pp. 6–7

Bài toán 7.2.2. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho vector $\vec{u} = (u_1; u_2)$, 2 điểm $A(a_1; a_2) \not\equiv B(b_1, b_2)$ (i.e., phân biệt/không trùng nhau) & đường thẳng d có phương trình $ax + by + c = 0$ với $a, b \in \mathbb{R}$ sao cho $a^2 + b^2 \neq 0$. (a) Tìm tọa độ của các điểm A', B' theo thứ tự là ảnh của A, B qua phép tịnh tiến theo $\vec{u}$. (b) Tìm tọa độ của điểm C sao cho A là ảnh của C qua phép tịnh tiến theo $\vec{u}$. (c) Tìm phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo $\vec{u}$.*

Giải. (a) $A' = T_{\vec{u}}(A)$, $B' = T_{\vec{u}}(B)$, sử dụng biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$, thu được $A'(a_1 + u_1; a_2 + u_2)$, $B'(b_1 + u_1; b_2 + u_2)$. (b) Giả sử $C(c_1; c_2)$, $A = T_{\vec{u}}(C)$,[4] sử dụng biểu thức tọa độ của $T_{\vec{u}}$, thu được $a_i = c_i + u_i$, $i = 1, 2$, suy ra $c_i = a_i - u_i$, $i = 1, 2$, hay $C(a_1 - u_1, a_2 - u_2)$. (c) Nếu $\vec{u} = \vec{0}$ thì $d \equiv d'$ & có chung phương trình $ax + by + c = 0$. Nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$. Giả sử đường thẳng d' có phương trình $a'x + b'y + c' = 0$ với $a', b' \in \mathbb{R}$ với $(a')^2 + (b')^2 \neq 0$. Sử dụng hệ quả 7.2.1 thu được $d' \parallel d$, nên $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k = \text{const}$ với quy ước nếu mẫu số bằng 0 thì tử bằng 0. W.l.o.g., có thể giả sử $a' = a$, $b' = b$ (chia các hệ số của d' cho hằng số k trong dãy tỷ số bằng nhau vừa thu được), ta cần tìm c' bằng cách xác định 1 điểm thuộc d'. Vì $a^2 + b^2 \neq 0$, 1 trong số a, b phải khác 0. W.l.o.g., giả sử $a \neq 0$, thì điểm $D_1\left(-\frac{c}{a}; 0\right) \in d$, khi đó ảnh của D_1 qua $T_{\vec{u}}$ là $D_1' \coloneqq T_{\vec{u}}(D_1) = \left(-\frac{c}{a} + u_1; u_2\right) \in d'$, i.e., $a\left(-\frac{c}{a} + u_1\right) + bu_2 + c' = 0$, hay $c' = c - au_1 - bu_2$. (Nếu $b \neq 0$, thì có thể lấy điểm $D_2\left(0; -\frac{c}{b}\right)$, khi đó $D_2' \coloneqq T_{\vec{u}}(D_2) = \left(u_1; -\frac{c}{b} + u_2\right) \in d'$, i.e., $au_1 + b\left(-\frac{c}{b} + u_2\right) + c' = 0$, cũng cho ta $c' = c - au_1 - bu_2$.). Vậy phương trình đường thẳng $d' = T_{\vec{u}}(d)$ là $ax + by + c - au_1 - bu_2 = 0$. □

Nhận xét 7.2.1. *Vài nhận xét về lời giải trên:*

1. *Nếu $\vec{u} = \vec{0}$, i.e., $u_1 = u_2 = 0$, phương trình của d' thu được ở (c) trùng với phương trình của d như đã lý luận ở đầu lời giải của (c) (consistency).*
2. *Nếu vector tịnh tiến $\vec{u}$ có tọa độ trùng với hệ số của d, i.e., $u_1 = a$, $u_2 = b$, $\vec{u}(a; b)$, thì $d \not\equiv d'$. Thật vậy, phương trình của d' thu được ở (c) trở thành: $ax + by + c - a^2 - b^2 = 0$, & vì $a^2 + b^2 \neq 0$ (ít nhất 1 trong 2 số phải khác 0) nên $c - a^2 - b^2 \neq c$, nên $d' \parallel d$ nhưng $d \not\equiv d'$ trong trường hợp này.*

[4] Sử dụng bài toán 7.2.1 cho ta $C = T_{-\vec{u}}(A)$, có thể sử dụng biểu thức tọa độ của $T_{-\vec{u}}$ để thu được trực tiếp $c_i = a_i - u_i$, $i = 1, 2$.

3. *1 ý tưởng giải khác cho (c) là tìm 2 điểm phân biệt thuộc d (e.g., 2 điểm $\left(0; -\frac{c}{b}\right)$, $\left(-\frac{c}{a}; 0\right)$ nếu $ab \neq 0$; còn nếu $ab = 0$ thì phải tìm thêm 1 điểm khác), tìm 2 ảnh của 2 điểm đó qua $T_{\vec{u}}$ như (a), (b), rồi viết phương trình đường thẳng d' đi qua 2 điểm ảnh vừa tìm được. Cách này cũng sẽ cho cùng kết quả với lời giải (c) ở trên nhưng không hay & / vì sẽ tốn nhiều công sức tính toán hơn, bởi vì không tận dụng trực tiếp tính chất của phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó. Cho nên, cần ưu tiên các lập luận logic (thông minh) sử dụng các tính chất đã biết của 1 đối tượng toán học nói chung hoặc 1 phép biến hình nói riêng, để tiết kiệm công sức tính toán & thời gian đi tìm phương hướng tiếp cận khi giải 1 bài toán bất kỳ:*

$$\boxed{\textit{Smart strategies} \gg \textit{heavy calculation/computation skills.}}$$

The symbol "≫" in the last inequality means "are much more important", "remarkably dominate", or "dramatically outweigh". To be able to be lazy in doing mathematics, you need smart strategies, not heavy computations: Work less but effective – laziness as its finest.

7.2.4 Ứng dụng của phép tịnh tiến

Bài toán 7.2.3 (Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 7)**.** *Cho 2 điểm B, C cố định trên đường tròn $(O; R)$ & 1 điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Chứng minh rằng trực tâm ΔABC nằm trên 1 đường tròn cố định.*

Giải. Nếu BC là đường kính thì trực tâm H của ΔABC chính là A. Vậy H nằm trên đường tròn cố định $(O; R)$. Nếu BC không phải là đường kính, vẽ đường kính BB' của đường tròn. Nếu H là trực tâm của ΔABC thì $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$ (suy ra từ nhận xét tứ giác $AHCB'$ là hình bình hành). Như vậy, phép tịnh tiến theo vector cố định $\overrightarrow{B'C}$ biến điểm A thành điểm H. Do đó, khi A thay đổi trên $(O; R)$ thì trực tâm H luôn nằm trên đường tròn cố định là ảnh của đường tròn $(O; R)$ qua phép tịnh tiến nói trên. □

Bài toán 7.2.4. *2 thôn nằm ở 2 vị trí A & B cách nhau 1 con sông (xem rằng 2 bờ sông là 2 đường thẳng song song). Người ta dự định xây 1 chiếc cầu MN bắt qua sông (cố nhiên cầu phải vuông góc với bờ sông) & làm 2 đoạn thẳng từ A đến M & từ B đến N. Hãy xác định vị trí chiếc cầu MN sao cho $AM + BN$ ngắn nhất.*

Hint. Trường hợp tổng quát có thể đưa về trường hợp con sông rất hẹp – hẹp đến mức 2 bờ sông a & b xem như trùng nhau bằng 1 phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{MN}$ để a trùng b. Khi đó điểm A biến thành điểm A' sao cho $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN}$ & do đó $A'N = AM$. □

Bài toán 7.2.5 (Quỳnh, Cương, et al., 2020, **1.**, p. 9)**.** *Qua phép tịnh tiến T theo vector $\vec{u} \neq \vec{0}$, đường thẳng d biến thành đường thẳng d'. Trong trường hợp nào thì: $d \equiv d'$? $d \parallel d'$? d cắt d'?*

Bài toán 7.2.6 (Quỳnh, Cương, et al., 2020, **2.**, p. 9)**.** *Cho 2 đường thẳng song song a & a'. Tìm tất cả những phép tịnh tiến biến a thành a'.*

Bài toán 7.2.7 (Quỳnh, Cương, et al., 2020, **3.**, p. 9)**.** *Cho 2 phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ & $T_{\vec{v}}$. Với điểm M bất kỳ, $T_{\vec{u}}$ biến M thành điểm M', $T_{\vec{v}}$ biến M' thành điểm M''. Chứng tỏ rằng phép biến hình biến M thành M'' là 1 phép tịnh tiến.*

Bài toán 7.2.8 (Quỳnh, Cương, et al., 2020, **4.**, p. 9)**.** *Cho đường tròn (O) & 2 điểm A, B. 1 điểm M thay đổi trên đường tròn (O). Tìm quỹ tích điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.*

Bài toán 7.2.9 (Quỳnh, Cương, et al., 2020, **5.**, p. 9)**.** *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, với α, a, b là những số cho trước, xét phép biến hình F biến mỗi điểm $M(x; y)$ thành điểm $M'(x'; y')$, trong đó*

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a, \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b. \end{cases}$$

(a) Cho 2 điểm $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$ & gọi M', N' lần lượt là ảnh của M, N qua phép F. Tìm tọa độ của M' & N'.s (b) Tính khoảng cách d giữa M & N; khoảng cách d' giữa M' & N'. (c) Phép F có phải là phép dời hình hay không? 1. Khi $\alpha = 0$, chứng tỏ rằng F là phép tịnh tiến.

Tổng quát hơn của bài toán Quỳnh, Cương, et al., 2020, **6.**, p. 9:

Bài toán 7.2.10. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét các phép biến hình sau đây: Phép biến hình F biến mỗi điểm $M(x; y)$ thành điểm $M'(f(x,y); g(x;y))$ với $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là 2 hàm sốt. Với f, g thỏa điều kiện nào thì F là 1 phép dời hình?*

7.3 Phép Dời Hình Phẳng

7.3.1 Đại cương về các phép dời hình phẳng

"Không phải chỉ có phép tịnh tiến "không làm thay đổi khoảng cách giữa 2 điểm" mà còn nhiều phép biến hình khác cũng có tính chất đó (tính chất này còn được gọi là tính chất *bảo toàn khoảng cách* giữa 2 điểm). Người ta gọi các phép biến hình như vậy là phép dời hình." – Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 8

7.3.1.1 Định nghĩa phép dời hình

Định nghĩa 7.3.1 (Phép dời hình).

- "Phép dời hình *là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa 2 điểm bất kỳ." – Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 8*
- *"1 phép biến hình $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ được gọi là 1* phép dời hình *của mặt phẳng, ký hiệu là $\mathcal{D}$, nếu với 2 điểm bất kỳ M, N nào của $\mathcal{P}$ & các ảnh $M' = f(M)$, $N' = f(N)$ của chúng, ta đều có $M'N' = MN$.*

  Nói 1 cách ngắn gọn, phép dời hình của mặt phẳng, hay gọi vắn tắt là phép dời hình phẳng*, là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa 2 điểm bất kỳ nào của mặt phẳng. Vậy là, nếu ký hiệu tập hợp các phép dời hình của mặt phẳng là $\{\mathcal{D}\}$ thì: $f \in \{\mathcal{D}\}$ của $\mathcal{P} \Leftrightarrow f(M)f(N) = MN$, $\forall M, N \in \mathcal{P}$." – Quỳnh, Ban, et al., 2014, p. 5*

"Chính vì phép dời hình bảo toàn khoảng cách giữa 2 điểm bất kỳ nào nên người ta còn gọi nó là *phép biến hình đẳng cự*, hay vắn tắt là *phép đẳng cự*." – Quỳnh, Ban, et al., 2014, p. 5. Từ định nghĩa của phép dời hình ta suy ra:

Hệ quả 7.3.1 (Quỳnh, Ban, et al., 2014, p. 5). *(a) Phép biến hình đồng nhất* id *là 1 phép dời hình. (b) Phép biến hình đảo ngược của 1 phép dời hình cũng là 1 phép dời hình. (c) Hợp thành (i.e., tích) của 2, hay n ($n \in \mathbb{N}$, $n > 2$) phép dời hình là 1 phép dời hình. (d) Phép đối xứng trục, phép đối xứng tâm, phép tịnh tiến, phép quay (xung quanh 1 điểm) là những phép dời hình phẳng.*

7.3.1.2 Các tính chất của phép dời hình

Chú ý rằng các tính chất đã nêu của phép tịnh tiến được chứng minh dựa vào tính chất "*không làm thay đổi khoảng cách giữa 2 điểm*". Bởi vậy, các phép dời hình cũng có những tính chất đó. Cụ thể ta có:

Định lý 7.3.1 (Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 8; Quỳnh, Ban, et al., 2014, p. 6). *Phép dời hình biến 3 điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng & không làm thay đổi thứ tự 3 điểm đó, biến 1 đường thẳng thành 1 đường thẳng, biến 1 tia thành 1 tia, biến 1 đoạn thẳng thành 1 đoạn thẳng bằng nó, biến 1 tam giác thành 1 tam giác bằng nó, biến 1 đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính, trong đó tâm biến thành tâm, biến 1 góc thành 1 góc bằng nó.*

Định lý 7.3.2 (Quỳnh, Ban, et al., 2014, p. 6). *Phép dời hình bảo toàn sự thẳng hàng của 3 điểm & thứ tự của chúng trên đường thẳng chứa 3 điểm đó.*

"Cụ thể là: Phép dời hình biến 3 điểm A, B, C thẳng hàng, trong đó B ở giữa A & C thành 3 điểm A', B', C' thẳng hàng cũng theo thứ tự đó." – Quỳnh, Ban, et al., 2014, p. 6

Định lý 7.3.3 (Quỳnh, Ban, et al., 2014, p. 6). *1 phép dời hình phẳng có 3 điểm bất động không thẳng hàng là phép biến hình đồng nhất.*

Chứng minh. "Giả sử $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ là 1 phép dời hình phẳng có 3 điểm bất động không thẳng hàng: $A = A' = f(A)$, $B = B' = f(B)$, $C = C' = f(C)$. Thế thì theo tính chất của phép dời hình, bất kỳ 1 điểm nào trên các đường thẳng $(BC), (CA)$, hoặc (AB) đều là điểm bất động. Từ đó dễ dàng suy ra mọi điểm M của mặt phẳng (ABC) đều là điểm bất động, & do đó $f = \mathrm{id}$." – Quỳnh, Ban, et al., 2014, p. 6 □

Hệ quả 7.3.2 (Quỳnh, Ban, et al., 2014, p. 6). *1 phép dời hình phẳng $\mathcal{D} \neq \mathrm{id}$ thì hoặc không có điểm bất động nào, hoặc có 1 điểm bất động duy nhất, hoặc có 1 đường thẳng mà mọi điểm của nó đều là điểm bất động (i.e., có 1 đường thẳng cố định).*

Các ví dụ về các phép dời hình có 0 điểm bất động, 1 điểm bất động, & 1 tập hợp các điểm bất động là 1 đường thẳng cố định trong hệ quả vừa phát biểu lần lượt là phép tịnh tiến theo 1 vector khác $\vec{0}$, phép đối xứng tâm, & phép đối xứng trục.

7.3.1.3 Khái niệm về 2 hình bằng nhau

"Phép dời hình biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$ bằng nó, trong đó các cạnh tương ứng bằng nhau & các góc tương ứng bằng nhau: $B'C' = BC$, $C'A' = CA$, $A'B' = AB$; $\widehat{A'} = \widehat{A}$, $\widehat{B'} = \widehat{B}$, $\widehat{C'} = \widehat{C}$. 1 cách tổng quát, giả sử 1 phép dời hình $\mathcal{D}$ biến 1 hình (phẳng) $\mathcal{H}$ thành 1 hình $\mathcal{H}'$, ký hiệu $\mathcal{H}' = \mathcal{D}(\mathcal{H})$." – Quỳnh, Ban, et al., 2014, pp. 6–7

Định nghĩa 7.3.2 (2 hình bằng nhau). *"2 hình $\mathcal{H}$ & $\mathcal{H}'$ được gọi là* bằng nhau*, nếu có 1 phép dời hình $\mathcal{D}$ biến hình $\mathcal{H}$ thành hình $\mathcal{H}'$ (& do đó, phép dời hình $\mathcal{D}^{-1}$, đảo ngược của phép dời hình $\mathcal{D}$ biến $\mathcal{H}'$ thành $\mathcal{H}$), ký hiệu như thông thường: $\mathcal{H}' := \mathcal{H}$." – Quỳnh, Ban, et al., 2014, p. 7*

7.3.2 Sự xác định 1 phép dời hình phẳng

- "Khi chúng ta nói cho 1 phép dời hình $\mathcal{D}$ mà tổng quát hơn là cho 1 phép biến hình f của $\mathcal{P}$ (mặt phẳng), i.e., chỉ ra đầy đủ các yếu tốt để xác định hoàn toàn phép dời hình (hay phép biến hình) đó của $\mathcal{P}$. I.e.: Với 1 điểm M bất kỳ của $\mathcal{P}$, ta phải chỉ ra cách (quy tắc) dựng, cũng là cách xác định được điểm tương ứng (ảnh) M' của nó qua phép dời hình (hay phép biến hình) này.
- Về phép dời hình, ta đã biết rằng 1 phép dời hình biến 1 ΔABC thành 1 $\Delta A'B'C'$ bằng nó, trong đó các cạnh tương ứng bằng nhau, các góc tương ứng bằng nhau.

Mệnh đề sau đây khẳng định điều ngược lại.

Định lý 7.3.4 (Về sự xác định 1 phép dời hình phẳng). *ΔABC & $\Delta A'B'C'$ là 2 tam giác bằng nhau cho trước trong mặt phẳng $\mathcal{P}$ ($B'C' = BC$, $C'A' = CA$, $A'B' = AB$). Bao giờ cũng có 1 & chỉ 1 phép dời hình $\mathcal{D} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ biến A thành A', B thành B' & C thành C'. Đồng thời, phép dời hình $\mathcal{D}$ này có thể phân tích thành tích của không quá 3 phép đối xứng trục.*

Chứng minh. Xem Quỳnh, Ban, et al., 2014, p. 7 □

" – Quỳnh, Ban, et al., 2014, pp. 7–

7.4 Phép Đối Xứng Trục

7.5 Phép Quay & Phép Đối Xứng Tâm

7.6 2 Hình bằng Nhau

7.7 Phép Vị Tự

7.8 Phép Đồng Dạng

7.9 Hình Tự Đồng Dạng & Hình Học Fractal

Chương 8

Đường Thẳng & Mặt Phẳng Trong Không Gian – Line & Plane in Euclidean Space $\mathbb{R}^n$

8.1 Đại Cương về Đường Thẳng & Mặt Phẳng

8.2 2 Đường Thẳng Song Song

8.3 Đường Thẳng Song Song với Mặt Phẳng

8.4 2 Mặt Phẳng Song Song

8.5 Phép Chiếu Song Song

8.6 Phương Pháp Tiên Đề Trong Hình Học

Chương 9

Vector Trong Không Gian. Quan Hệ Vuông Góc – Vector in Euclidean Space $\mathbb{R}^n$. Perpendicular Relation

9.1 Vector Trong Không Gian. Sự Đồng Phẳng của Các Vector

9.2 2 Đường Thẳng Vuông Góc

9.3 Đường Thẳng Vuông Góc với Mặt Phẳng

9.4 2 Mặt Phẳng Vuông Góc

9.5 Khoảng Cách

Phụ lục A

Phụ Lục – Appendix

A.1 Hàm Số Chẵn & Hàm Số Lẻ – Even & Odd Functions

"Trong toán học, *hàm số chẵn* & *hàm số lẻ* là các hàm số thỏa mãn các quan hệ đối xứng nhất định khi lấy nghịch đảo phép cộng. Chúng rất quan trọng trong nhiều lĩnh vực của giải tích toán, đặc biệt trong lý thuyết chuỗi lũy thừa & chuỗi Fourier. Chúng được đặt tên theo tính chẵn lẻ của số mũ lũy thừa của hàm lũy thừa thỏa mãn từng điều kiện: hàm số $f(x) = x^n$ là 1 hàm chẵn nếu n là 1 số nguyên chẵn, & nó là hàm lẻ nếu n là 1 số nguyên lẻ." – Wikipedia/hàm số chẵn & lẻ

A.1.1 Hàm số chẵn – Even function

Định nghĩa A.1.1 (Hàm số chẵn)**.** *"Cho f là 1 hàm số giá trị thực của 1 đối số thực, f là* hàm số chẵn *nếu điều kiện sau được thỏa mãn với mọi x sao cho cả x & $-x$ đều thuộc miền xác định của f: $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \mathrm{dom}(f)$, với* $\mathrm{dom}(f)$ *ký hiệu miền xác định của f, hoặc phát biểu 1 cách tương đương, nếu phương trình sau thỏa mãn $f(x) - f(-x) = 0$, $\forall x \in \mathrm{dom}(f)$.*

Về mặt hình học, đồ thị của 1 hàm số chẵn đối xứng qua trục y, nghĩa là đồ thị của nó giữ không đổi sau phép lấy đối xứng qua trục y." – Wikipedia/hàm số chẵn & lẻ

Ví dụ A.1.1 (Hàm chẵn)**.** *Hàm trị tuyệt đối $x \mapsto |x|$, các hàm đơn thức dạng $x \mapsto x^{2n}$, hàm cosin* $\cos$, *hàm cosin hyperbolic* $\cosh$.

A.1.2 Hàm số chẵn – Odd function

Định nghĩa A.1.2 (Hàm số lẻ)**.** *Cho f là 1 hàm số giá trị thực của 1 đối số (biến) thực, f là hàm số* lẻ *nếu điều kiện sau được thỏa mãn với mọi x sao cho cả x & $-x$ đều thuộc miền xác định của f: $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathrm{dom}(f)$, với* $\mathrm{dom}(f)$ *ký hiệu miền xác định của f, hoặc phát biểu 1 cách tương đương, nếu phương trình sau thỏa mãn $f(x)+f(-x) = 0$, $\forall x \in \mathrm{dom}(f)$.*

"Về mặt hình học, đồ thị của 1 hàm lẻ có tính đối xứng tâm quay qua gốc tọa độ, i.e., đồ thị của nó không đổi sau khi thực hiện phép quay 180° quanh điểm gốc." – Wikipedia/hàm số chẵn & lẻ

Ví dụ A.1.2 (Hàm số lẻ)**.** *Hàm đồng nhất $x \mapsto x$, các hàm đơn thức dạng $x \mapsto x^{2n+1}$, hàm sin* $\sin$, *hàm sin hyperbol* $\sinh$, *hàm lỗi* erf.

A.1.3 Các tính chất cơ bản

A.1.3.1 Tính duy nhất

- "Nếu 1 hàm số vừa chẵn & vừa lẻ, nó bằng 0 ở mọi điểm mà nó được xác định.
- Nếu 1 hàm là lẻ thì giá trị tuyệt đối của hàm đó là 1 hàm chẵn." – Wikipedia/hàm số chẵn & lẻ

A.1.3.2 Cộng & trừ hàm số chẵn lẻ

- Tổng & hiệu của 2 hàm số chẵn là 2 hàm số chẵn.
- Tổng & hiệu của 2 hàm lẻ là 2 hàm lẻ.
- Tổng của 1 hàm chẵn & 1 hàm lẻ thì không chẵn cũng không lẻ, trừ khi 1 trong các hàm ấy bằng 0 trên miền đã cho.

A.1.3.3 Nhân & chia hàm số chẵn lẻ

- Tích & thương của 2 hàm chẵn là 2 hàm chẵn.
- Tích & thương của 2 hàm lẻ là 2 hàm chẵn.
- Tích & thương của 1 hàm chẵn với 1 hàm lẻ là 2 hàm lẻ.

A.1.3.4 Hàm hợp (tích ánh xạ)

- Hàm hợp của 2 hàm chẵn là hàm chẵn.
- Hàm hợp của 2 hàm lẻ là hàm lẻ.
- 1 hàm chẵn hợp với 1 hàm lẻ là hàm chẵn.
- Hàm hợp của bất kỳ hàm số nào với 1 hàm chẵn là hàm chẵn (nhưng điều ngược lại không đúng).

A.1.4 Phân tích chẵn–lẻ

"Mọi hàm có thể được phân tích duy nhất thành tổng của 1 hàm chẵn & 1 hàm lẻ, được gọi tương ứng là *phần chẵn* & *phần lẻ* của 1 hàm số, nếu ta đặt như sau:

$$f_{\mathrm{e}}(x) \coloneqq \frac{f(x)+f(-x)}{2},\ f_{\mathrm{o}}(x) \coloneqq \frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

sau đó f_{e} là hàm chẵn, f_{o} là hàm lẻ, & $f(x) = f_{\mathrm{e}}(x) + f_{\mathrm{o}}(x)$. Ngược lại nếu $f(x) = g(x) + h(x)$, trong đó g là chẵn & h là lẻ, thì $g = f_{\mathrm{e}}$ & $h = f_{\mathrm{o}}$, bởi vì

$$\begin{aligned} 2f_{\mathrm{e}}(x) &= f(x)+f(-x) = g(x)+g(-x)+h(x)+h(-x) = 2g(x),\\ 2f_{\mathrm{o}}(x) &= f(x)-f(-x) = g(x)-g(-x)+h(x)-h(-x) = 2h(x). \end{aligned}$$

Ví dụ A.1.3. *Hàm cosin hyperbolic & sin hyperbolic có thể được coi là các phần chẵn & phần lẻ của hàm số lũy thừa tự nhiên, bởi vì hàm thứ nhất là chẵn, hàm thứ 2 là lẻ, &* $e^x = \sinh x + \cosh x$*."* – *Wikipedia/hàm số chẵn & lẻ*

Tài liệu tham khảo

[NQBH/elementary math] Nguyễn Quản Bá Hồng. *Some Topics in Elementary Mathematics: Problems, Theories, Applications, & Bridges to Advanced Mathematics*. Mar 2022–now.

Tài liệu tham khảo

Halmos, Paul R. (1960). *Naive set theory.* The University Series in Undergraduate Mathematics. D. Van Nostrand Co., Princeton, N.J.-Toronto-London-New York, pp. vii+104.

— (1974). *Naive set theory.* Undergraduate Texts in Mathematics. Reprint of the 1960 edition. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, pp. vii+104.

Hạo, Trần Văn, Nguyễn Mộng Hy, et al. (2022). *Hình Học 11.* Tái bản lần thứ 15. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 136.

Hạo, Trần Văn, Vũ Tuấn, et al. (2022). *Đại Số & Giải Tích 11.* Tái bản lần thứ 15. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 191.

Kaplansky, Irving (1972). *Set theory and metric spaces.* Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics. Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass., pp. xii+140.

— (1977). *Set theory and metric spaces.* Second. Chelsea Publishing Co., New York, xii+140 pp. ISBN 0-8284-0298–1.

Quỳnh, Đoàn, Phạm Khắc Ban, et al. (2014). *Tài Liệu Chuyên Toán Hình Học 11.* Tái bản lần thứ 4. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 320.

Quỳnh, Đoàn, Văn Như Cương, et al. (2020). *Hình Học 11 nâng cao.* Tái bản lần thứ 13. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 132.

Quỳnh, Đoàn, Nguyễn Huy Đoan, et al. (2020). *Đại Số & Giải Tích 11 nâng cao.* Tái bản lần thứ 13. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 241.

Quỳnh, Đoàn, Trần Nam Dũng, et al. (2010). *Tài Liệu Chuyên Toán Đại Số & Giải Tích 11.* Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 327.

Thái, Đỗ Đức et al. (2022). *Toán 6, tập 2.* Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, p. 108.