

Congruent Triangle – Tam Giác Đồng Dạng

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 18 tháng 2 năm 2023

Tóm tắt nội dung

[EN] This text is a collection of problems, from easy to advanced, about *congruent triangle*. This text is also a supplementary material for my lecture note on Elementary Mathematics grade 8, which is stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_8/lecture)¹. The latest version of this text has been stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/congruent triangle](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_8/congruent_triangle)².

[VI] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài tập chọn lọc từ cơ bản đến nâng cao về *tam giác đồng dạng*. Tài liệu này là phần bài tập bổ sung cho tài liệu chính – bài giảng [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_8/lecture) của tác giả viết cho Toán Sơ Cấp lớp 8. Phiên bản mới nhất của tài liệu này được lưu trữ & có thể tải xuống ở link sau: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/congruent triangle](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_8/congruent_triangle).

Nội dung. Định lý Thales, tam giác đồng dạng.

Mục lục

1 Định Lý Thales Trong Tam Giác	2
2 Định Lý Đảo & Hệ Quả của Định Lý Thales	2
3 Tính Chất Đường Phân Giác của Tam Giác	2
4 Khái Niệm 2 Tam Giác Đồng Dạng	3
5 Trường Hợp Đồng Dạng Thứ Nhất	4
6 Trường Hợp Đồng Dạng Thứ 2	4
7 Trường Hợp Đồng Dạng Thứ 3	5
8 Các Trường Hợp Đồng Dạng của Tam Giác Vuông	5
9 Ứng Dụng Thực Tế của Tam Giác Đồng Dạng	6
10 Miscellaneous	6
Tài liệu	6

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

¹URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/NQBH_elementary_mathematics_grade_8.pdf.

²URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/congruent_triangle/NQBH_congruent_triangle.pdf.

1 Định Lý Thales Trong Tam Giác

Định nghĩa 1 (Tỷ số của 2 đoạn thẳng). Tỷ số của 2 đoạn thẳng là tỷ số độ dài của chúng theo cùng 1 đơn vị đo.

Tỷ số của 2 đoạn thẳng AB, CD được ký hiệu là $\frac{AB}{CD}$. Tỷ số của 2 đoạn thẳng không phụ thuộc vào cách chọn đơn vị đo, e.g., $\frac{2\text{km}}{3\text{km}} = \frac{2\cancel{\text{km}}}{3\cancel{\text{km}}} = \frac{2}{3}$, $\frac{3\text{cm}}{4\text{cm}} = \frac{3\cancel{\text{cm}}}{4\cancel{\text{cm}}} = \frac{3}{4}$, $\frac{4\text{nm}}{5\text{nm}} = \frac{4\cancel{\text{nm}}}{5\cancel{\text{nm}}} = \frac{4}{5}$ (dễ hiểu: 2 đơn vị trên tử & mẫu sẽ triệt tiêu lẫn nhau).

Định nghĩa 2 (2 đoạn thẳng tỷ lệ). 2 đoạn thẳng AB, CD gọi là tỷ lệ với 2 đoạn thẳng $A'B', C'D'$ nếu có tỷ lệ thức: $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$ hay $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$.

Định lý 1 (Thales). Nếu 1 đường thẳng song song với 1 cạnh của tam giác \mathcal{E} cắt 2 cạnh còn lại thì nó định ra trên 2 cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ.

$$\text{GT: } \triangle ABC, B'C' \parallel BC, B' \in AB, C' \in AC. \text{ KL: } \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}, \frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C} = \frac{B'C'}{BC-B'C'}, \frac{B'B}{AB} = \frac{C'C}{AC} = \frac{BC-B'C'}{B'C'}.$$

Bài toán 1 (Chính et al., 2022, ?4, p. 58). (a) Cho $\triangle ABC$. Đường thẳng $al \parallel BC$ cắt 2 cạnh AB, AC lần lượt tại D, E . Biết $AD = \sqrt{3}$, $BD = 5$, $CE = 10$. Tính AE . (b) Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Trên BC, AC lần lượt lấy D, E sao cho $DE \parallel AB$. Biết $CD = 5$, $BD = 3.5$, $CE = 4$. Tính AC, AB .

Bài toán 2 (Chính et al., 2022, 3, p. 59). (a) Cho biết độ dài của AB gấp 5 lần độ dài của CD & độ dài của $A'B'$ gấp 12 lần độ dài của CD . Tính tỷ số của 2 đoạn thẳng $AB, A'B'$. (b) Cho biết độ dài của AB gấp a lần độ dài của CD & độ dài của $A'B'$ gấp b lần độ dài của CD với $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$. Tính tỷ số của 2 đoạn thẳng $AB, A'B'$.

Bài toán 3 (Chính et al., 2022, 4, p. 59). Cho $\triangle ABC$, $B' \in AB$, $C' \in AC$. Cho biết $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$. Chứng minh: (a) $\frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}$. (b) $\frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC}$.

2 Định Lý Đảo & Hệ Quả của Định Lý Thales

Định lý 2 (Thales đảo). Nếu 1 đường thẳng cắt 2 cạnh của 1 tam giác \mathcal{E} định ra trên 2 cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

$$\text{GT: } \triangle ABC, B' \in AB, C' \in AC, \frac{A'B'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}. \text{ KL: } B'C' \parallel BC.$$

Bài toán 4 (Chính et al., 2022, ?2, p. 60). Cho $\triangle ABC$. $D \in AB, E \in AC, F \in BC$, $AD = 3$, $BD = 6$, $AE = 5$, $CE = 10$, $BF = 7$, $CF = 14$. (a) Có bao nhiêu cặp đường thẳng song song với nhau. (b) Tứ giác $BDEF$ là hình gì? (c) So sánh các tỷ số $\frac{AD}{AB}$, $\frac{AE}{AC}$, $\frac{DE}{BC}$ & cho nhận xét về mối liên hệ giữa các cặp cạnh tương ứng của $\triangle ADE$ & $\triangle ABC$.

Hệ quả 1. Nếu 1 đường thẳng cắt 2 cạnh của 1 tam giác \mathcal{E} song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành 1 tam giác mới có 3 cạnh tương ứng tỷ lệ với 3 cạnh của tam giác đã cho.

GT: $\triangle ABC$, $B'C' \parallel BC$, $B' \in AB$, $C' \in AC$. KL: $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$. Hệ quả 1 vẫn đúng cho trường hợp đường thẳng a song song với 1 cạnh của tam giác & cắt phần kéo dài của 2 cạnh còn lại.

Bài tập phụ thuộc hình vẽ: Chính et al., 2022, ?3, 6.-8., pp. 62-63.

Bài toán 5 (Chính et al., 2022, 9., p. 63). Cho $\triangle ABC$ & $D \in AB$ sao cho $AD = 13.5\text{cm}$, $BD = 4.5\text{cm}$. Tính tỷ số các khoảng cách từ các điểm D & B đến cạnh AC .

Bài toán 6 (Chính et al., 2022, 10., p. 63). $\triangle ABC$ có đường cao AH . Đường thẳng d song song với BC , cắt các cạnh AB, AC , & đường cao AH theo thứ tự tại các điểm B', C' , & H' . (a) Chứng minh: $\frac{AH'}{AH} = \frac{B'C'}{BC}$. (b) Áp dụng: Cho biết $AH' = \frac{1}{3}AH$ & diện tích $\triangle ABC$ là 67.5cm^2 . Tính diện tích $\triangle AB'C'$.

Bài toán 7 (Chính et al., 2022, 11., p. 63). $\triangle ABC$ có $BC = 15\text{cm}$. Trên đường cao AH lấy các điểm I, K sao cho $AK = KI = IH$. Qua I, K vẽ các đường $EF \parallel BC$, $MN \parallel BC$. (a) Tính độ dài các đoạn thẳng MN, EF . (b) Tính diện tích tứ giác $MNFE$ biết diện tích $\triangle ABC$ là 270cm^2 .

Bài tập phụ thuộc hình vẽ: Chính et al., 2022, 12.-13., p. 64.

Bài toán 8 (Chính et al., 2022, 11., p. 64). Cho 3 đoạn thẳng có độ dài là m, n, p (cùng đơn vị đo). Dựng đoạn thẳng có độ dài x sao cho: (a) $\frac{x}{m} = 2$; (b) $\frac{x}{n} = \frac{2}{3}$; (c) $\frac{m}{x} = \frac{n}{p}$.

3 Tính Chất Đường Phân Giác của Tam Giác

Định lý 3. Trong tam giác, đường phân giác của 1 góc chia cạnh đối diện thành 2 đoạn thẳng tỷ lệ với 2 cạnh kề 2 đoạn ấy.

GT: $\triangle ABC$, AD là tia phân giác của \widehat{BAC} , $D \in BC$. KL: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Định lý vẫn đúng đối với tia phân giác của góc ngoài của tam giác.

1st chứng minh. Qua đỉnh B vẽ đường thẳng song song với AC , cắt đường thẳng AD tại điểm E . Có: $\widehat{BAE} = \widehat{CAE}$ (giả thiết). $BE \parallel AC \Rightarrow \widehat{BEA} = \widehat{CAE}$ (so le trong). Suy ra $\widehat{BAE} = \widehat{BEA}$. Do đó $\triangle ABE$ cân tại B , suy ra $BE = AB$ (1). Áp dụng hệ quả 1 của định lý Thales đối với $\triangle DAC$: $\frac{DB}{DC} = \frac{BE}{AC}$ (2). Từ (1) & (2) suy ra $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$. \square

Cách chứng minh sau dựa vào công thức lượng giác tính diện tích tam giác.

2nd chứng minh. Gọi AH là đường cao của $\triangle ABC$ ứng với cạnh BC , $H \in BC$. Có $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2}BD \cdot AH}{\frac{1}{2}CD \cdot AH} = \frac{BD}{DC}$. Cũng có:

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2}AD \cdot AB \sin \widehat{DAB}}{\frac{1}{2}AD \cdot AC \sin \widehat{DAC}} = \frac{\frac{1}{2}AD \cdot AB \sin \frac{\widehat{A}}{2}}{\frac{1}{2}AD \cdot AC \sin \frac{\widehat{A}}{2}} = \frac{AB}{AC}.$$

Kết hợp 2 đẳng thức trên suy ra $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$. \square

Cách chứng minh thứ 2 cho ta 1 kết quả tổng quát hơn khi AD không phải là tia phân giác:

Bài toán 9. Cho $\triangle ABC$, $D \in BC$. Chứng minh $\frac{DB}{DC} = \frac{AB \sin \widehat{DAB}}{AC \sin \widehat{DAC}}$.

Chứng minh. Gọi AH là đường cao của $\triangle ABC$ ứng với cạnh BC , $H \in BC$. Có $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2}BD \cdot AH}{\frac{1}{2}CD \cdot AH} = \frac{BD}{DC}$. Cũng có:

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2}AD \cdot AB \sin \widehat{DAB}}{\frac{1}{2}AD \cdot AC \sin \widehat{DAC}} = \frac{AB \sin \widehat{DAB}}{AC \sin \widehat{DAC}}.$$

Kết hợp 2 đẳng thức trên suy ra $\frac{DB}{DC} = \frac{AB \sin \widehat{DAB}}{AC \sin \widehat{DAC}}$. \square

Bài tập phụ thuộc hình vẽ: Chính et al., 2022, ?2-?3, 15. p. 67.

Bài toán 10 (Chính et al., 2022, 16., p. 67). $\triangle ABC$ có độ dài các cạnh $AB = m$, $AC = n$, \mathcal{E} AD là đường phân giác. Chứng minh tỷ số diện tích của $\triangle ABD$ & diện tích của $\triangle ACD$ bằng $\frac{m}{n}$.

Bài toán 11 (Chính et al., 2022, 17., p. 68). Cho $\triangle ABC$ với đường trung tuyến AM . Tia phân giác của góc AMB cắt cạnh AB ở D , tia phân giác của góc AMC cắt cạnh AC ở E . Chứng minh $DE \parallel BC$.

Bài toán 12 (Chính et al., 2022, 18., p. 68). $\triangle ABC$ có $AB = 5\text{cm}$, $AC = 6\text{cm}$, \mathcal{E} $BC = 7\text{cm}$. Tia phân giác của góc BAC cắt cạnh BC tại E . Tính các đoạn EB, EC .

Bài toán 13 (Chính et al., 2022, 19., p. 68). Cho hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$. Đường thẳng a song song với DC , cắt các cạnh AD, BC theo thứ tự tại E, F . Chứng minh: (a) $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$; (b) $\frac{AE}{AD} = \frac{BF}{BC}$; (c) $\frac{DE}{DA} = \frac{CF}{CB}$.

Bài toán 14 (Chính et al., 2022, 20., p. 68). Cho hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$. 2 đường chéo AC, BD cắt nhau tại O . Đường thẳng a qua O & song song với đáy của hình thang cắt các cạnh bên AD, BC theo thứ tự tại E, F . Chứng minh $OE = OF$.

Bài toán 15 (Chính et al., 2022, 21., p. 68). (a) Cho $\triangle ABC$ với đường trung tuyến AM & đường phân giác AD . Tính diện tích $\triangle ADM$ biết $AB = m$, $AC = n$, $n > m$, & diện tích của $\triangle ABC$ là S . (b) Cho $n = 7\text{cm}$, $m = 3\text{cm}$, hỏi diện tích $\triangle ADM$ chiếm bao nhiêu % diện tích $\triangle ABC$?

Bài toán 16 (Chính et al., 2022, 22., p. 68). Cho A, B, C, D, E, F, G thẳng hàng theo thứ tự đó & O nằm ngoài đường thẳng chứa 7 điểm đó sao cho $\widehat{OAB} = \widehat{OBC} = \widehat{OCD} = \widehat{ODE} = \widehat{OEF} = \widehat{OFG}$. Đặt $OA = a, OB = b, OC = c, OD = d, OE = e, OF = f, OG = g, AB = x, BC = y, CD = z, DE = t, EF = u, FG = v$. Thiết lập những tỷ lệ thức từ các kích thước đã cho.

4 Khái Niệm 2 Tam Giác Đồng Dạng

Định nghĩa 3 (2 tam giác đồng dạng). $\triangle A'B'C'$ gọi là đồng dạng với $\triangle ABC$ nếu: $\widehat{A'} = \widehat{A}$, $\widehat{B'} = \widehat{B}$, $\widehat{C'} = \widehat{C}$, $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$.

$\triangle A'B'C'$ đồng dạng với $\triangle ABC$ được ký hiệu là $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ (viết theo thứ tự cặp đỉnh tương ứng). Tỷ số các cạnh tương ứng $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k$ gọi là tỷ số đồng dạng.

Bài toán 17 (Chính et al., 2022, ?2., p. 70). (a) Nếu $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ thì $\triangle A'B'C'$ có đồng dạng với $\triangle ABC$ không? Tỷ số đồng dạng là bao nhiêu? (b) Nếu $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ theo tỷ số k thì $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ theo tỷ số nào?

Định lý 4 (Tính chất 2 tam giác đồng dạng). (a) Mỗi tam giác đồng dạng với chính nó với tỷ số đồng dạng $k = 1$. (b) Nếu $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ với tỷ số đồng dạng k thì $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ với tỷ số đồng dạng $\frac{1}{k}$. (c) Nếu $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ với tỷ số đồng dạng k' & $\triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C''$ với tỷ số đồng dạng k'' thì $\triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$ với tỷ số đồng dạng $k = k'k''$.

Do tính chất (b) ta nói $\triangle ABC$ & $\triangle A'B'C'$ đồng dạng (với nhau).

Bài toán 18 (Chính et al., 2022, ?3., p. 70). Cho $\triangle ABC$. Kẻ đường thẳng a song song với cạnh BC & cắt 2 cạnh AB, AC theo thứ tự tại M, N . $\triangle AMN$ & $\triangle ABC$ có các góc & các cạnh tương ứng như thế nào?

Định lý 5. Nếu 1 đường thẳng cắt 2 cạnh của tam giác & song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành 1 tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho.

GT: $\triangle ABC, MN \parallel BC, M \in AB, N \in AC$. KL: $\triangle AMN \sim \triangle ABC$. Định lý cũng đúng cho trường hợp đường thẳng a cắt phần kéo dài 2 cạnh của tam giác & song song với cạnh còn lại.

Chứng minh. Xét $\triangle ABC$ & $MN \parallel BC$. $\triangle AMN$ & $\triangle ABC$ có: $\widehat{AMN} = \widehat{ABC}$, $\widehat{ANM} = \widehat{ACB}$ (các cặp góc đồng vị); \widehat{BAC} là góc chung. Mặt khác, theo hệ quả 1 của định lý Thales, $\triangle AMN$ & $\triangle ABC$ có 3 cặp cạnh tương ứng tỷ lệ: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$. Vậy $\triangle AMN \sim \triangle ABC$. \square

Bài toán 19 (Chính et al., 2022, 23., p. 71). D/S? (a) 2 tam giác bằng nhau thì đồng dạng với nhau. (b) 2 tam giác đồng dạng với nhau thì bằng nhau.

Bài toán 20 (Chính et al., 2022, 24., p. 72). $\triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C''$ theo tỷ số đồng dạng k_1 , $\triangle A''B''C'' \sim \triangle ABC$ theo tỷ số đồng dạng k_2 . Hỏi $\triangle A'B'C'$ đồng dạng với $\triangle ABC$ theo tỷ số nào?

Bài toán 21 (Chính et al., 2022, 25., p. 72). Cho $\triangle ABC$. Vẽ 1 tam giác đồng dạng với $\triangle ABC$ theo tỷ số $\frac{1}{2}$.

Bài toán 22 (Chính et al., 2022, 26., p. 72). Cho $\triangle ABC$, vẽ $\triangle A'B'C'$ đồng dạng với $\triangle ABC$ theo tỷ số đồng dạng $k = \frac{2}{3}$.

Bài toán 23 (Chính et al., 2022, 27., p. 72). Từ điểm M thuộc cạnh AB của $\triangle ABC$ với $AM = \frac{1}{2}MB$, kẻ các tia song song với AC, BC , chúng cắt BC, AC lần lượt tại L, N . (a) Nêu tất cả các cặp tam giác đồng dạng. (b) Đối với mỗi cặp tam giác đồng dạng, viết các cặp góc bằng nhau & tỷ số đồng dạng tương ứng.

Bài toán 24 (Chính et al., 2022, 28., p. 72). $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ theo tỷ số đồng dạng $k = \frac{3}{5}$. (a) Tính tỷ số chu vi của 2 tam giác đã cho. (b) Tính tỷ số diện tích của 2 tam giác đã cho. (c) Cho biết hiệu chu vi của 2 tam giác trên là 40dm, tính chu vi của mỗi tam giác.

5 Trường Hợp Đồng Dạng Thứ Nhất

Định lý 6. Nếu 3 cạnh của tam giác này tỷ lệ với 3 cạnh của tam giác kia thì 2 tam giác đó đồng dạng.

GT: $\triangle ABC, \triangle A'B'C', \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$ (1). KL: $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

Chứng minh. Đặt trên tia AB đoạn thẳng $AM = A'B'$. Vẽ đường thẳng $MN \parallel BC, N \in AC$. Xét $\triangle AMN, \triangle ABC, \triangle A'B'C'$. $MN \parallel BC \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ (2). Từ (1) & (2), với chú ý $AM = A'B'$, ta có $\frac{A'C'}{AC} = \frac{AN}{AC}$ & $\frac{B'C'}{BC} = \frac{MN}{BC}$, suy ra $AN = A'C'$ & $MN = B'C'$. $\triangle AMN$ & $\triangle A'B'C'$ có 3 cạnh bằng nhau từng đôi một: $AM = A'B'$ (cách dựng), $AN = A'C'$, & $MN = B'C'$ (theo chứng minh trên). Do đó $\triangle AMN = \triangle A'B'C'$ (c.c.c). $\triangle AMN \sim \triangle ABC \Rightarrow \triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$. \square

Bài toán 25 (Chính et al., 2022, 29., pp. 74–75). Cho $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ có $AB = 6, BC = 12, CA = 9, A'B' = 4, B'C' = 8, C'A' = 6$. (a) $\triangle ABC$ & $\triangle A'B'C'$ có đồng dạng với nhau không? Vì sao? (b) Tính tỷ số chu vi của 2 tam giác đó. (c) Tính tỷ số diện tích của 2 tam giác đó.

Bài toán 26 (Chính et al., 2022, 30., p. 75). $\triangle ABC$ có độ dài các cạnh là $AB = 3\text{cm}, AC = 5\text{cm}, BC = 7\text{cm}$. $\triangle A'B'C'$ đồng dạng với $\triangle ABC$ & có chu vi bằng 55cm. Tính độ dài các cạnh của $\triangle A'B'C'$.

Bài toán 27 (Chính et al., 2022, 31., p. 75). Cho 2 tam giác đồng dạng có tỷ số chu vi là $\frac{15}{17}$ & hiệu độ dài 2 cạnh tương ứng của chúng là 12.5cm. Tính 2 cạnh đó.

6 Trường Hợp Đồng Dạng Thứ 2

Định lý 7. Nếu 2 cạnh của tam giác này tỷ lệ với 2 cạnh của tam giác kia & 2 góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau, thì 2 tam giác đồng dạng.

GT: $\triangle ABC, \triangle A'B'C', \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$ (1), $\widehat{A'} = \widehat{A}$. KL: $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

Chứng minh. Trên tia AB , đặt đoạn thẳng $AM = A'B'$. Qua M kẻ đường thẳng $MN \parallel BC, N \in AC$. Ta có $\triangle AMN \sim \triangle ABC$, do đó $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$. Vì $AM = A'B'$, nên suy ra $\frac{A'B'}{AB} = \frac{AN}{AC}$. Từ (1) & (2), suy ra $AN = A'C'$. $\triangle AMN$ & $\triangle A'B'C'$ có $AM = A'B'$ (cách dựng), $\widehat{A} = \widehat{A'}$ (giả thiết), & $AN = A'C'$ (chứng minh ở trên), nên chúng bằng nhau (c.g.c). Từ $\triangle AMN = \triangle A'B'C'$ suy ra $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$. \square

Bài toán 28 (Chính et al., 2022, ?3, p. 77). (a) Vẽ $\triangle ABC$ có $\widehat{BAC} = 50^\circ, AB = 5\text{cm}, AC = 7.5\text{cm}$. (b) Lấy trên các cạnh AB, AC lần lượt 2 điểm D, E sao cho $AD = 3\text{cm}, AE = 2\text{cm}$. $\triangle AED, \triangle ABC$ có đồng dạng với nhau không? Vì sao?

Bài toán 29 (Chính et al., 2022, 32., p. 77). Trên 1 cạnh của góc xOy , $\widehat{xOy} \neq 180^\circ$, đặt các đoạn thẳng $OA = 5\text{cm}$, $OB = 16\text{cm}$. Trên cạnh thứ 2 của góc đó, đặt các đoạn thẳng $OC = 8\text{cm}$, $OD = 10\text{cm}$. (a) Chứng minh $\triangle OCB, \triangle OAD$ đồng dạng. (b) Gọi giao điểm của các cạnh AD, BC là I , chứng minh $\triangle IAB, \triangle ICD$ có các góc bằng nhau từng đôi một.

Bài toán 30 (Chính et al., 2022, 33., p. 77). Chứng minh nếu $\triangle A'B'C'$ đồng dạng với $\triangle ABC$ theo tỷ số k , thì tỷ số của 2 đường trung tuyến tương ứng của 2 tam giác đó cũng bằng k .

Bài toán 31 (Chính et al., 2022, 34., p. 77). dựng $\triangle ABC$ biết $\widehat{A} = 60^\circ$, tỷ số $\frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$, & đường cao $AH = 6\text{cm}$.

7 Trường Hợp Đồng Dạng Thứ 3

Định lý 8. Nếu 2 góc của tam giác này lần lượt bằng 2 góc của tam giác kia thì 2 tam giác đó đồng dạng với nhau.

GT: $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$, $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$. KL: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Chứng minh. Đặt trên tia AB đoạn thẳng $AM = A'B'$. Qua M kẻ đường thẳng $MN \parallel BC$, $N \in AC$. $MN \parallel BC \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$. Xét $\triangle AMN$ & $\triangle A'B'C'$: $\widehat{A} = \widehat{A'}$ (giả thiết), $AM = A'B'$ (theo cách dựng), $\widehat{AMN} = \widehat{B}$ (2 góc đồng vị). Nhưng $\widehat{B} = \widehat{B'}$ (giả thiết), do đó $\widehat{AMN} = \widehat{B'}$. Vậy $\triangle AMN = \triangle A'B'C'$ (g.c.g), suy ra $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$. \square

Bài toán 32 (Chính et al., 2022, ?2, p. 79). Cho $\triangle ABC$, $AB = 3\text{cm}$, $AC = 4.5\text{cm}$, & $\widehat{ABD} = \widehat{BCA}$. (a) Có bao nhiêu tam giác? Có cặp tam giác nào đồng dạng với nhau không? (b) Tính AD, CD . (c) Cho biết thêm BD là tia phân giác của góc B . Tính độ dài các đoạn thẳng BC, BD .

Bài toán 33 (Chính et al., 2022, 35., p. 79). Chứng minh nếu $\triangle A'B'C'$ đồng dạng với $\triangle ABC$ theo tỷ số k thì tỷ số của 2 đường phân giác tương ứng của chúng cũng bằng k .

Bài toán 34 (Chính et al., 2022, 36., p. 79). Cho hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 12.5$, $CD = 28.5$, $\widehat{DAB} = \widehat{DBC}$. Tính BD .

Bài toán 35 (Chính et al., 2022, 37., p. 79). Cho hình thang vuông $ACDE$, $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^\circ$. Lấy $B \in AC$. Biết $AE = 10\text{cm}$, $AB = 15\text{cm}$, $BC = 12\text{cm}$, $\widehat{ABE} = \widehat{BCD}$. (a) Có bao nhiêu tam giác vuông? Kể tên. (b) Tính CD, BE, BD, DE . (c) So sánh diện tích $\triangle BDE$ với tổng diện tích của $\triangle AEB$ & $\triangle BCD$.

Bài tập phụ thuộc vào hình vẽ: Chính et al., 2022, 38., p. 79.

Bài toán 36 (Chính et al., 2022, 39., pp. 79–80). Cho hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$. Gọi O là giao điểm của 2 đường chéo AC, BD . (a) Chứng minh $OA \cdot OD = OB \cdot OC$. (b) Đường thẳng qua O vuông góc với AB, CD theo thứ tự tại H, K . Chứng minh $\frac{OH}{OK} = \frac{AB}{CD}$.

Bài toán 37 (Chính et al., 2022, 40., p. 80). Cho $\triangle ABC$, trong đó $AB = 15\text{cm}$, $AC = 20\text{cm}$. Trên 2 cạnh AB, AC lần lượt lấy 2 điểm D, E sao cho $AD = 8\text{cm}$, $AE = 6\text{cm}$. $\triangle ABC, \triangle ADE$ có đồng dạng với nhau không? Vì sao?

Bài toán 38 (Chính et al., 2022, 41., p. 80). Tìm các dấu hiệu để nhận biết 2 tam giác cân đồng dạng.

Bài toán 39 (Chính et al., 2022, 42., p. 80). So sánh các trường hợp đồng dạng của tam giác với các trường hợp bằng nhau của tam giác (nên lên những điểm giống nhau & khác nhau).

Bài toán 40 (Chính et al., 2022, 43., p. 80). Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 12\text{cm}$, $BC = 7\text{cm}$. Trên cạnh AB lấy 1 điểm E sao cho $AE = 8\text{cm}$. Đường thẳng DE cắt cạnh CB kéo dài tại F . (a) Có bao nhiêu cặp tam giác đồng dạng với nhau? Viết các cặp tam giác đồng dạng với nhau theo các đỉnh tương ứng. (b) Tính EF, BF biết $DE = 10\text{cm}$.

Bài toán 41 (Chính et al., 2022, 44., p. 80). Cho $\triangle ABC$, $AB = 24\text{cm}$, $AC = 28\text{cm}$. Tia phân giác của góc A cắt cạnh BC tại D . Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của B, C trên đường thẳng AD . (a) Tính tỷ số $\frac{BM}{CN}$. (b) Chứng minh $\frac{AM}{AN} = \frac{DM}{DN}$.

Bài toán 42 (Chính et al., 2022, 45., p. 80). $\triangle ABC, \triangle DEF$ có $\widehat{A} = \widehat{D}, \widehat{B} = \widehat{E}, AB = 8\text{cm}, BC = 10\text{cm}, DE = 6\text{cm}$. Tính AC, DF, EF biết AC dài hơn DF 3cm.

8 Các Trường Hợp Đồng Dạng của Tam Giác Vuông

Định lý 9 (2 tam giác vuông đồng dạng). 2 tam giác vuông đồng dạng với nhau nếu: (a) Tam giác vuông này có 1 góc nhọn bằng góc nhọn của tam giác vuông kia; hoặc (b) Tam giác vuông này có 2 cạnh góc vuông tỷ lệ với 2 cạnh góc vuông của tam giác vuông kia; hoặc (c) Nếu cạnh huyền & 1 cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỷ lệ với cạnh huyền & cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì 2 tam giác vuông đó đồng dạng.

GT: $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$, $\widehat{A} = \widehat{A'} = 90^\circ$, $\frac{B'C'}{BC} = \frac{A'B'}{AB}$ (1). KL: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Chứng minh. Từ giả thiết (1), bình phương 2 vế, ta được: $\frac{B'C'^2}{BC^2} = \frac{A'B'^2}{AB^2}$. Theo tính chất của dãy tỷ số bằng nhau, ta có: $\frac{B'C'^2}{BC^2} = \frac{A'B'^2}{AB^2} = \frac{B'C'^2 - A'B'^2}{BC^2 - AB^2} = \frac{A'C'^2}{AC^2}$ (đẳng thức cuối suy ra từ định lý Pythagore). Lấy căn bậc 2, thu được: $\frac{B'C'}{BC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$. Vậy $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ (c.c.c). \square

Định lý 10. Tỷ số 2 đường cao tương ứng của 2 tam giác đồng dạng bằng tỷ số đồng dạng.

Chứng minh. Cho $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ với tỷ số đồng dạng $k = \frac{AB}{A'B'}$, 2 đường cao tương ứng là $AH, A'H'$. Xét $\triangle ABH, \triangle A'B'H'$: $\widehat{B} = \widehat{B'}$ (vì $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$), $\widehat{AHB} = \widehat{A'H'B'} = 90^\circ$. Suy ra $\triangle ABH \sim \triangle A'B'H'$ (g.g.g), suy ra $\frac{AH}{A'H'} = \frac{AB}{A'B'} = k$. \square

Định lý 11. Tỷ số diện tích của 2 tam giác đồng dạng bằng bình phương tỷ số đồng dạng.

Chứng minh. Cho $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ với tỷ số đồng dạng $k = \frac{AB}{A'B'}$, 2 đường cao tương ứng là $AH, A'H'$. Theo định lý 10, $\frac{AH}{A'H'} = k$. Suy ra $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2}AH \cdot BC}{\frac{1}{2}A'H' \cdot B'C'} = \frac{AH}{A'H'} \cdot \frac{BC}{B'C'} = k \cdot k = k^2$. \square

46., p. 84.

Bài toán 43 (Chính et al., 2022, 47., p. 84). $\triangle ABC$ có độ dài các cạnh là 3cm, 4cm, 5cm. $\triangle A'B'C'$ đồng dạng với $\triangle ABC$ & có diện tích là 54cm^2 . Tính độ dài các cạnh $\triangle A'B'C'$.

Bài toán 44 (Chính et al., 2022, 48., p. 84). Bóng của 1 cột điện trên mặt đất có độ dài 4.5m. Cùng thời điểm đó, 1 thanh sắt cao 2.1m cắm vuông góc với mặt đất có bóng dài 0.6m. Tính chiều cao của cột điện.

Bài toán 45 (Chính et al., 2022, 49., p. 84). Cho $\triangle ABC$ vuông ở A & có đường cao AH , $AB = 12.45\text{cm}$, $AC = 20.5\text{cm}$. (a) Có bao nhiêu cặp tam giác đồng dạng với nhau (chỉ rõ từng cặp tam giác đồng dạng & viết theo các đỉnh tương ứng). (b) Tính BC, AH, BH, CH .

Bài toán 46 (Chính et al., 2022, 50., p. 84). Bóng của 1 ống khói nhà máy trên mặt đất có độ dài là 36.9m. Cùng thời điểm đó, 1 thanh sắt cao 2.1m cắm vuông góc với mặt đất có bóng dài 1.62m. Tính chiều cao của ống khói.

Bài toán 47 (Chính et al., 2022, 51., p. 84). Chân đường cao AH của tam giác vuông ABC chia cạnh huyền BC thành 2 đoạn thẳng có độ dài 25cm & 36cm. Tính chu vi & diện tích của tam giác vuông đó.

Bài toán 48 (Chính et al., 2022, 52., p. 85). Cho 1 tam giác vuông, trong đó cạnh huyền dài 20cm & 1 cạnh góc vuông dài 12cm. Tính độ dài hình chiếu cạnh góc vuông kia trên cạnh huyền.

9 Ứng Dụng Thực Tế của Tam Giác Đồng Dạng

10 Miscellaneous

Tài liệu

Chính, Phan Đức, Tôn Thân, Nguyễn Huy Doan, Lê Văn Hồng, Trương Công Thành, and Nguyễn Hữu Thảo (2022). *Toán 8 Tập 2*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 133.