Problem & Solution: Trigonometry – Bài Tập Lượng Giác & Lời Giải

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 21 tháng 5 năm 2023

Tóm tắt nội dung

Mục lục

1 Hệ Thức về Cạnh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông

Trong 1 tam giác vuông, nếu biết 2 cạnh, hoặc 1 cạnh & 1 góc nhọn thì có thể tính được các góc & các cạnh còn lại của tam giác đó.

Bài toán 1. *Xét ΔABC vuông tại A, cạnh huyền $BC = a$, 2 cạnh góc vuông $AC = b$, $AB = c$. Gọi $AH = h$ là đường cao ứng với cạnh huyền BC[1] & $CH = b'$, $BH = c'$ lần lượt là hình chiếu của AC, AB trên cạnh huyền BC. Chứng minh: (a) $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$. (b) Định lý Pythagore $a^2 = b^2 + c^2$. (c) $h^2 = b'c'$. (d) $bc = ah$. (e) $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.*

Chứng minh. (a) $\Delta AHC \backsim \Delta BAC$ (g.g) vì 2 tam giác vuông này có chung $\widehat{C}$, nên $\frac{CH}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC^2 = BC \cdot CH \Leftrightarrow b^2 = ab'$. Tương tự, $\Delta BHA \backsim \Delta BAC$ (g.g) vì 2 tam giác vuông này có chung $\widehat{B}$, nên $\frac{BH}{AB} = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow AB^2 = BC \cdot BH \Leftrightarrow c^2 = ac'$. (b) Theo (a), $b^2 + c^2 = ab' + ac' = a(b' + c') = a \cdot a = a^2$. (c) Vì $\Delta AHC \backsim \Delta BAC$ & $\Delta BHA \backsim \Delta BAC$ nên $\Delta AHC \backsim \Delta BHA$, suy ra $\frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH} \Rightarrow AH^2 = BH \cdot CH \Leftrightarrow h^2 = b'c'$. (d) Tính diện tích ΔABC theo 2 cách: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot AC \Leftrightarrow AH \cdot BC = AB \cdot AC \Leftrightarrow ah = bc$. (e) $ah = bc \Leftrightarrow a^2h^2 = b^2c^2 \Leftrightarrow (b^2 + c^2)h^2 = b^2c^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{h^2} = \dfrac{b^2 + c^2}{b^2c^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$. □

Lưu ý 1. *Các hệ thức trên có thể được suy ra trực tiếp từ các tỷ số đồng dạng của bộ 3 tam giác đồng dạng: $\Delta BHA \backsim \Delta AHC \backsim \Delta BAC$. Thật vậy, $\Delta AHC \backsim \Delta BAC \Leftrightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{HC}{AC} = \frac{AC}{BC} \Leftrightarrow \frac{h}{c} = \frac{b'}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow bh = b'c$, $b^2 = ab'$, & $ah = bc$. $\Delta BHA \backsim \Delta BAC \Leftrightarrow \frac{HB}{AB} = \frac{AH}{AC} = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow \frac{c'}{c} = \frac{h}{b} = \frac{c}{a} \Rightarrow bc' = hc$, $ah = bc$, & $c^2 = ac'$. $\Delta AHC \backsim \Delta BHA \Leftrightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH} = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow \frac{h}{c'} = \frac{b'}{h} = \frac{b}{c} \Rightarrow h^2 = b'c'$, $bh = b'c$, & $ch = bc'$. Hơn nữa, $\widehat{BAH} = \widehat{C}$ & $\widehat{CAH} = \widehat{B}$.*

Định lý 1 (Hệ thức giữa cạnh góc vuông & hình chiếu của nó trên cạnh huyền)**.** *Trong 1 tam giác vuông, bình phương mỗi cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền & hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền. $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$*

3 hệ thức về đường cao trong tam giác vuông:

Định lý 2. *3 Trong 1 tam giác vuông, bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tích 2 hình chiếu của 2 cạnh góc vuông trên cạnh huyền. $h^2 = b'c'$.*

Định lý 3. *Trong 1 tam giác vuông, tích 2 cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền & đường cao tương ứng. $bc = ah$.*

Định lý 4. *Trong 1 tam giác vuông, nghịch đảo của bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tổng nghịch đảo của bình phương 2 cạnh góc vuông. $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.*

Bài toán 2. *Cho ΔABC có độ dài 2 cạnh góc vuông là b & c. Tính độ dài đường cao h xuất phát từ đỉnh góc vuông theo b, c.*

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: `nguyenquanbahong@gmail.com`; website: https://nqbh.github.io.

[1] AB, AC là đường cao ứng với nhau.

Giải. Có $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \Rightarrow h^2 = \frac{b^2c^2}{b^2+c^2}$. $\square$

Bài toán 3 ([Tuy23], Thí dụ 1, p. 103)**.** *Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ$, 2 đường chéo vuông góc với nhau tại H. Biết $AB = 3\sqrt{5}$ cm, $HA = 3$ cm. Chứng minh: (a) $HA : HB : HC : HD = 1 : 2 : 4 : 8$. (b) $\dfrac{1}{AB^2} - \dfrac{1}{CD^2} = \dfrac{1}{HB^2} - \dfrac{1}{HC^2}$.*

Bài toán 4 ([Tuy23], 1., p. 105)**.** *Cho hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$, 2 đường chéo vuông góc với nhau. Biết $AC = 16$ cm, $BD = 12$ cm. Tính chiều cao của hình thang.*

Bài toán 5 ([Tuy23], 2., p. 105)**.** *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH, đường phân giác AD. Biết $BH = 63$ cm, $CH = 112$ cm, tính HD.*

Bài toán 6 ([Tuy23], 3., p. 105)**.** *Cho ΔABC vuông tại A. 2 đường trung tuyến AD, BE vuông góc với nhau tại G. Biết $AB = \sqrt{6}$ cm. Tính cạnh huyền BC.*

Bài toán 7 ([Tuy23], 4., p. 105)**.** *Gọi a, b, c là các cạnh của 1 tam giác vuông, h là đường cao ứng với cạnh huyền a. Chứng minh tam giác có các cạnh $a + h, b + c$, & h cũng là 1 tam giác vuông.*

Bài toán 8 ([Tuy23], 5., p. 105)**.** *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, K thứ tự là hình chiếu của H trên AB, AC. Đặt $c = AB$, $b = AC$. (a) Tính AI, AK theo b, c. (b) Chứng minh $\dfrac{BI}{CK} = \dfrac{c^3}{b^3}$.*

Bài toán 9 ([Tuy23], 6., p. 105)**.** *Cho ΔABC, $AB = 1$, $\widehat{A} = 105^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = 1$. Vẽ $ED \parallel AB$, $D \in AC$. Chứng minh: $\dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{4}{3}$.*

Bài toán 10 ([Tuy23], 7., p. 105)**.** *Cho hình chữ nhật $ABCD$, $AB = 2BC$. Trên cạnh BC lấy điểm E. Tia AE cắt đường thẳng CD tại F. Chứng minh: $\dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{AE^2} + \dfrac{1}{4AF^2}$.*

Bài toán 11 ([Tuy23], 8., p. 105)**.** *Cho 3 đoạn thẳng có độ dài a, b, c. Dựng đoạn thẳng x sao cho $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.*

Bài toán 12 ([Tuy23], 9., p. 105)**.** *Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 120^\circ$. 1 đường thẳng d không cắt các cạnh của hình thoi. Chứng minh: tổng các bình phương hình chiếu của 4 cạnh với 2 lần bình phương hình chiếu của đường chéo AC trên đường thẳng d không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d.*

Bài toán 13 ([Tuy23], 10., p. 106)**.** *Cho ΔABC vuông tại A. Từ 1 điểm O ở trong tam giác ta vẽ $OD \perp BC$, $OE \perp CA$, $OF \perp AB$. Xác định vị trí của O để $OD^2 + OE^2 + OF^2$ nhỏ nhất.*

Bài toán 14 ([Bìn+23], Ví dụ 1, p. 5)**.** *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $AB : AC = 3 : 4$ & $AB + AC = 21$ cm. (a) Tính các cạnh của ΔABC. (b) Tính độ dài các đoạn AH, BH, CH.*

Bài toán 15 (Mở rộng [Bìn+23], Ví dụ 1, p. 5)**.** *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $AB : AC = m : n$ & $AB + AC = p$ cm. (a) Tính các cạnh của ΔABC. (b) Tính độ dài các đoạn AH, BH, CH.*

Bài toán 16 ([Bìn+23], Ví dụ 2, p. 6)**.** *Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $CD = 30$ cm, $CA \perp CB$. Tính diện tích của hình thang.*

Bài toán 17 ([Bìn+23], Ví dụ 3, p. 7)**.** *Cho ΔABC nhọn, đường cao CK, H là trực tâm. Gọi M là 1 điểm trên CK sao cho $\widehat{AMB} = 90^\circ$. S, S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích các $\Delta AMB, \Delta ABC, \Delta ABH$. Chứng minh $S = \sqrt{S_1S_2}$.*

Bài toán 18 ([Bìn+23], 1.1., p. 7)**.** *Cho ΔABC vuông cân tại A & điểm M nằm giữa B & C Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của điểm M lên AB, AC. Chứng minh $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$.*

Bài toán 19 ([Bìn+23], 1.2., p. 7)**.** *Cho hình chữ nhật $ABCD$ & điểm O nằm trong hình chữ nhật đó. Chứng minh $OA^2 + OC^2 = OB^2 + CD^2$.*

Bài toán 20 ([Bìn+23], 1.3., p. 8)**.** *Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 6$ cm, $CD = 8$ cm. Đường thẳng kẻ từ D vuông góc với AC tại E, cắt cạnh AB tại F. Tính độ dài các đoạn thẳng DE, DF, AE, CE, AF, BF.*

Bài toán 21 ([Bìn+23], 1.4., p. 8)**.** *Cho ΔABC có $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $AC = 5$ cm. Đường cao, đường phân giác, đường trung tuyến của tam giác kẻ từ đỉnh B chia tam giác thành 4 gam giác không có điểm trong chung. Tính diện tích của mỗi tam giác đó.*

Bài toán 22 ([Bìn+23], 1.5., p. 8)**.** *Trong 1 tam giác vuông tỷ số giữa đường cao & đường trung tuyến kẻ từ đỉnh góc vuông bằng $40 : 41$. Tính độ dài các cạnh góc vuông của tam giác đó, biết cạnh huyền bằng $\sqrt{41}$ cm.*

Bài toán 23 ([Bìn+23], 1.6., p. 8)**.** *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Kẻ $HE \perp AB$, $HF \perp AC$. Gọi O là giao điểm của AH & EF. Chứng minh $HB \cdot HC = 4OE \cdot OF$.*

Bài toán 24 ([Bìn+23], 1.7., p. 8)**.**

Bài toán 25 ([Bìn+23], 1.8., p. 8).

Bài toán 26 ([Bìn+23], 1.9., p. 8).

Bài toán 27 ([Bìn+23], 1.10., p. 8).

Bài toán 28 ([Bìn+23], 1.11., p. 8).

Bài toán 29 ([Bìn+23], 1.12., p. 8).

Bài toán 30 ([Bìn+23], 1.13., p. 9).

Bài toán 31 ([Bìn+23], 1.14., p. 9).

Bài toán 32 ([Bìn+23], 1.15., p. 9).

Bài toán 33 ([Bìn+23], 1.16., p. 9).

2 Tỷ Số Lượng Giác của Góc Nhọn

Bài toán 34 ([Tuy23], Thí dụ 2, p. 107). *Cho* $\cot\alpha = \dfrac{a^2-b^2}{2ab}$ *trong đó* α *là góc nhọn,* $a > b > 0$*. Tính* $\cos\alpha$*.*

Bài toán 35 ([Tuy23], 11., p. 108, định lý sin). *Cho* ΔABC *nhọn,* $BC = a$*,* $CA = b$*,* $AB = c$*. Chứng minh:* $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$*. Đẳng thức này còn đúng với tam giác vuông & tam giác tù hay không?*

Bài toán 36 ([Tuy23], 12., p. 108). *Chứng minh: (a)* $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$*. (b)* $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$*. (c)* $\cot^2\alpha - \cos^2\alpha = \cot^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$*. (d)* $\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$*.*

Bài toán 37 ([Tuy23], 13., p. 108). *Rút gọn biểu thức: (a)* $A = \dfrac{1 + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$*. (b)* $B = (1+\tan^2\alpha)(1-\sin^2\alpha) - (1+\cot^2\alpha)(1-\cos^2\alpha)$*. (c)* $C = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$*.*

Bài toán 38 ([Tuy23], 14., p. 108). *Tính giá trị của biểu thức* $A = 5\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha$ *biết* $\sin\alpha = \frac{2}{3}$*.*

Bài toán 39 ([Tuy23], 15., p. 108). *Không dùng máy tính hoặc bảng số, tính: (a)* $A = \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 70^\circ$*. (b)* $B = \sin^2 5^\circ + \sin^2 25^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 65^\circ + \sin^2 85^\circ$*.*

Bài toán 40 ([Tuy23], 16., p. 108). *Cho* $0^\circ < \alpha < 90^\circ$*. Chứng minh:* $\sin\alpha < \tan\alpha$*,* $\cos\alpha < \cot\alpha$*. Áp dụng: (a) Sắp xếp các số sau theo thứ tự tăng dần:* $\sin 65^\circ, \cos 65^\circ, \tan 65^\circ$*. (b) Xác định* α *thỏa mãn điều kiện:* $\tan\alpha > \sin\alpha > \cos\alpha$*.*

Bài toán 41 ([Tuy23], 17., p. 108). *Cho* ΔABC *vuông tại* A*. Biết* $\sin B = \frac{1}{4}$*, tính* $\tan C$*.*

Bài toán 42 ([Tuy23], 18., p. 108). *Cho biết* $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$*,* $0^\circ < \alpha < 90^\circ$*, tính* $\tan\alpha$*.*

Bài toán 43 ([Tuy23], 19., p. 109). ΔABC*, đường trung tuyến* AM*. Chứng minh nếu* $\cot B = 3\cot C$ *thì* $AM = AC$*.*

Bài toán 44 ([Tuy23], 20., p. 109). *Cho* ΔABC*, trực tâm* H *là trung điểm của đường cao* AD*. Chứng minh* $\tan B\tan C = 2$*.*

Bài toán 45 ([Tuy23], 21., p. 109). *Cho* ΔABC *nhọn, 2 đường cao* BD, CE*. Chứng minh: (a)* $S_{\Delta ADE} = S_{\Delta ABC}\cos^2 A$*. (b)* $S_{BCDE} = S_{\Delta ABC}\sin^2 A$*.*

Bài toán 46 ([Tuy23], 22., p. 109). *Cho* ΔABC *nhọn. Từ 1 điểm* M *nằm trong tam giác vẽ* $MD\perp BC$*,* $ME\perp AC$*,* $MF\perp AB$*. Chứng minh* $\max\{MA, MB, MC\} \ge 2\min\{MD, ME, MF\}$*, trong đó* $\max\{MA, MB, MC\}$ *là đoạn thẳng lớn nhất trong các đoạn thẳng* MA, MB, MC *&* $\min\{MD, ME, MF\}$ *là đoạn thẳng nhỏ nhất trong các đoạn thẳng* MD, ME, MF*.*

3 Hệ Thức về Cạnh & Góc Trong Tam Giác Vuông

Bài toán 47 ([Tuy23], Thí dụ 3, p. 109). *Tứ giác* $ABCD$ *có 2 đường chéo cắt nhau tại* O*. Cho biết* $\widehat{AOD} = 70^\circ$*,* $AC = 5.3$ cm*,* $BD = 4$ cm*. Tính diện tích tứ giác* $ABCD$*.*

Bài toán 48 ([Tuy23], 23., p. 110). *Chứng minh: (a) Diện tích của 1 tam giác bằng nửa tích của 2 cạnh nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa 2 cạnh ấy. (b) Diện tích hình bình hành bằng tích của 2 cạnh kề nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa 2 cạnh ấy.*

Bài toán 49 ([Tuy23], 24., p. 110). *Cho hình bình hành* $ABCD$*,* $BD\perp BC$*. Biết* $AB = a$*,* $\widehat{A} = \alpha$*, tính diện tích hình bình hành đó.*

Bài toán 50 ([Tuy23], 25., p. 110)**.** *Cho ΔABC, $\widehat{A} = 120°$, $\widehat{B} = 35°$, $AB = 12.25$ dm. Giải ΔABC.*

Bài toán 51 ([Tuy23], 26., p. 110)**.** *Cho ΔABC nhọn, $\widehat{A} = 75°$, $AB = 30$ mm, $BC = 35$ mm. Giải ΔABC.*

Bài toán 52 ([Tuy23], 27., p. 110)**.** *Cho ΔABC cân tại A, đường cao BH. Biết $BH = h$, $\widehat{C} = \alpha$. Giải ΔABC.*

Bài toán 53 ([Tuy23], 28., p. 110)**.** *Hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{A} = 120°$, $AB = a$, $BC = b$. Các đường phân giác của 4 góc cắt nhau tạo thành tứ giác $MNPQ$. Tính diện tích tứ giác $MNPQ$.*

Bài toán 54 ([Tuy23], 29., p. 110)**.** *Cho ΔABC, các đường phân giác AD, đường cao BH, đường trung tuyến CE đồng quy tại điểm O. Chứng minh $AC\cos A = BC\cos C$.*

4 Miscellaneous

Bài toán 55 ([Tuy23], Thí dụ 4, p. 111)**.** *Cho ΔABC vuông tại A. Gọi M, N lần lượt là 2 điểm trên cạnh AB, AC sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$, $AN = \frac{1}{3}AC$. Biết độ dài $BN = \sin\alpha$, $CM = \cos\alpha$ với $0° < \alpha < 90°$. Tính cạnh huyền BC.*

Bài toán 56 ([Tuy23], 30., p. 112)**.** *Cho ΔABC nhọn, $BC = a$, $AC = b$, $CA = b$ trong đó $b - c = \frac{a}{k}$, $k > 1$. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là các đường cao hạ từ A, B, C. Chứng minh: (a) $\sin A = k(\sin B - \sin C)$. (b) $\frac{1}{h_a} = k\left(\frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)$.*

Bài toán 57 ([Tuy23], 31., p. 112)**.** *Giải ΔABC biết $AB = 14$, $BC = 15$, $CA = 13$.*

Bài toán 58 ([Tuy23], 32., p. 112)**.** *Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $\widehat{DC'D'} = 45°$, $\widehat{BC'B'} = 60°$. Tính $\widehat{BC'D}$.*

Bài toán 59 ([Tuy23], 33., p. 112)**.** *Cho ΔABC, $AB = AC = 1$, $\widehat{A} = 2\alpha$, $0° < \alpha < 45°$. Vẽ các đường cao AD, BE. (a) Các tỷ số lượng giác $\sin\alpha, \cos\alpha, \sin 2\alpha, \cos 2\alpha$ được biểu diễn bởi các đoạn thẳng nào? (b) Chứng minh $\Delta ADC \backsim \Delta BEC$, từ đó suy ra các hệ thức sau:* $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$. *(c) Chứng minh:* $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$, $\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$.

Bài toán 60 ([Tuy23], 34., p. 112)**.** *Cho $\alpha = 22°30'$, tính $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$.*

Bài toán 61 ([Tuy23], 35., p. 112)**.** *Cho ΔABC, đường phân giác AD. Biết $AB = c$, $AC = b$, $\widehat{A} = 2\alpha$, $\alpha < 45°$. Chứng minh* $AD = \dfrac{2bc\cos\alpha}{b + c}$.

Tài liệu

[Bìn+23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Ngọc Đạm, Nguyễn Bá Đang, Lê Quốc Hán, and Hồ Quang Vinh. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 9. Tập 2: Hình Học*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 240.

[Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.