

# Problem: Algebraic Expression Transformation

## Bài Tập: Biến Đổi Biểu Thức Đại Số

### 1 Rational Expression Transformation – Biến Đổi Biểu Thức Hữu Tỷ

**Definition 1** (Rational expression). A rational expression is the ratio of 2 polynomials. If  $f$  is a rational expression then  $f$  can be written in the form  $\frac{p}{q}$  where  $p, q$  are polynomials.

Like polynomials or any other type of expression, the basic arithmetic operations, namely addition  $+$ , subtraction  $-$ , multiplication  $\cdot$ , & division  $:$  or  $/$ , can be performed on rational expressions. A nice property of rational expressions is that when any of these operations are performed on 2 rational expressions, the result is always another rational expression. Contrary to polynomials, it is generally easy to multiply or divide but difficult to add or subtract 2 rational expressions.

**Notation 1** (Rational vs. irrational). Denote by  $\mathbb{Q}_{\text{fn}} := \left\{ \frac{a}{2^m \cdot 5^n} \mid a \in \mathbb{Z}, m, n \in \mathbb{N} \right\}$ ,  $\mathbb{Q}_{\text{ifn}} := \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}_{\text{fn}}$ , &  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  the set of all finite rationals, the set of all periodic infinite rationals, & the set of irrationals, respectively.

**Ký hiệu 1.** Ký hiệu  $\mathbb{Q}_{\text{fn}} := \left\{ \frac{a}{2^m \cdot 5^n} \mid a \in \mathbb{Z}, m, n \in \mathbb{N} \right\}$ ,  $\mathbb{Q}_{\text{ifn}} := \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}_{\text{fn}}$ , &  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  lần lượt là các tập hợp tất cả các số hữu tỷ hữu hạn, các số hữu tỷ vô hạn tuần hoàn, & các số vô tỷ.

#### 1.1 Problem

**1** ([LAT23], Ví dụ 1, p. 5, chuyên Toán Quảng Ngãi 2018–2019). Cho biểu thức  $A = \frac{5x+1}{x^3-1} - \frac{1-2x}{x^2+x+1} - \frac{2}{1-x}$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Rút gọn  $A$ . (c) Biện luận theo tham số  $m \in \mathbb{R}$  để giải phương trình  $A = m$ . (d) Tìm  $x \in \mathbb{R}$  rồi  $x \in \mathbb{Z}$  để lượt  $A$  lần lượt thuộc các tập hợp:  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}_{\text{fn}}, \mathbb{Q}_{\text{ifn}}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

**2** ([LAT23], Ví dụ 2, p. 5). Cho biểu thức  $A = \frac{2x^3 - 7x^2 - 12x + 45}{3x^3 - 19x^2 + 33x - 9}$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Rút gọn  $A$ . (c) Biện luận theo tham số  $m \in \mathbb{R}$  để giải phương trình  $A = m$ . (d) Tìm  $x \in \mathbb{R}$  rồi  $x \in \mathbb{Z}$  để lượt  $A$  lần lượt thuộc các tập hợp:  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}_{\text{fn}}, \mathbb{Q}_{\text{ifn}}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

#### 1.2 Generalization – Tổng Quát Hóa

**3** (Rút gọn phân thức bậc 1/bậc 1). Cho biểu thức  $A = \frac{ax+b}{cx+d}$  là phân thức với tử thức & mẫu thức đều là đa thức bậc nhất ẩn  $x$ , trong đó  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $ac \neq 0$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Tìm điều kiện của  $a, b, c, d$  để  $A$  có thể rút gọn. (c) Tìm biểu thức rút gọn của  $A$ .

**4** (Rút gọn phân thức bậc 1/bậc 2 dạng rút gọn). Cho biểu thức  $A = \frac{x+a}{x^2+bx+c}$  là phân thức với tử thức là đa thức bậc nhất ẩn  $x$  còn mẫu thức là đa thức bậc 2 ẩn  $x$ , trong đó  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Tìm điều kiện của  $a, b, c$  để  $A$  có thể rút gọn. (c) Tìm biểu thức rút gọn của  $A$ .

**5** (Rút gọn phân thức bậc 1/bậc 2). Cho biểu thức  $A = \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}$  là phân thức với tử thức là đa thức bậc nhất ẩn  $x$  còn mẫu thức là đa thức bậc 2 ẩn  $x$ , trong đó  $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ ,  $ac \neq 0$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Tìm điều kiện của  $a, b, c, d, e$  để  $A$  có thể rút gọn. (c) Tìm biểu thức rút gọn của  $A$ .

**6** (Rút gọn phân thức bậc 1/bậc 3 dạng rút gọn). Cho biểu thức  $A = \frac{x+a}{x^3+bx^2+cx+d}$  là phân thức với tử thức là đa thức bậc nhất ẩn  $x$  còn mẫu thức là đa thức bậc 3 ẩn  $x$ , trong đó  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Tìm điều kiện của  $a, b, c, d$  để  $A$  có thể rút gọn. (c) Tìm biểu thức rút gọn của  $A$ .

**7** (Rút gọn phân thức bậc 1/bậc 3). Cho biểu thức  $A = \frac{ax+b}{cx^3+dx^2+ex+f}$  là phân thức với tử thức là đa thức bậc nhất ẩn  $x$  còn mẫu thức là đa thức bậc 3 ẩn  $x$ , trong đó  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ ,  $ac \neq 0$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Tìm điều kiện của  $a, b, c, d, e, f$  để  $A$  có thể rút gọn. (c) Tìm biểu thức rút gọn của  $A$ .

**8** (Rút gọn phân thức bậc 2/bậc 1 dạng rút gọn). Cho biểu thức  $A = \frac{x^2+ax+b}{x+c}$  là phân thức với tử thức là đa thức bậc 2 ẩn  $x$  còn mẫu thức là đa thức bậc nhất ẩn  $x$ , trong đó  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Tìm điều kiện của  $a, b, c$  để  $A$  có thể rút gọn. (c) Tìm biểu thức rút gọn của  $A$ .

**9** (Rút gọn phân thức bậc 2/bậc 1). Cho biểu thức  $A = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$  là phân thức với tử thức là đa thức bậc 2 ẩn  $x$  còn mẫu thức là đa thức bậc nhất ẩn  $x$ , trong đó  $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ ,  $ad \neq 0$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Tìm điều kiện của  $a, b, c, d, e$  để  $A$  có thể rút gọn. (c) Tìm biểu thức rút gọn của  $A$ .

**10** (Rút gọn phân thức bậc 2/bậc 2 dạng rút gọn). Cho biểu thức  $A = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}$  là phân thức với tử thức & mẫu thức đều là đa thức bậc 2 ẩn  $x$ , trong đó  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Tìm điều kiện của  $a, b, c, d$  để  $A$  có thể rút gọn. (c) Tìm biểu thức rút gọn của  $A$ .

**11** (Rút gọn phân thức bậc 2/bậc 2). Cho biểu thức  $A = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}$  là phân thức với tử thức & mẫu thức đều là đa thức bậc 2 ẩn  $x$ , trong đó  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ ,  $ad \neq 0$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Tìm điều kiện của  $a, b, c, d, e, f$  để  $A$  có thể rút gọn. (c) Tìm biểu thức rút gọn của  $A$ .

**12** (Rút gọn phân thức bậc 3/bậc 1 dạng rút gọn). Cho biểu thức  $A = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x + d}$  là phân thức với tử thức là đa thức bậc 3 ẩn  $x$  còn mẫu thức là đa thức bậc nhất ẩn  $x$ , trong đó  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Tìm điều kiện của  $a, b, c, d$  để  $A$  có thể rút gọn. (c) Tìm biểu thức rút gọn của  $A$ .

**13** (Rút gọn phân thức bậc 3/bậc 1). Cho biểu thức  $A = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{ex + f}$  là phân thức với tử thức là đa thức bậc 3 ẩn  $x$  còn mẫu thức là đa thức bậc nhất ẩn  $x$ , trong đó  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ ,  $ae \neq 0$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Tìm điều kiện của  $a, b, c, d, e, f$  để  $A$  có thể rút gọn. (c) Tìm biểu thức rút gọn của  $A$ .

**14** (Rút gọn phân thức bậc 3/bậc 2 dạng rút gọn). Cho biểu thức  $A = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x^2 + dx + e}$  là phân thức với tử thức là đa thức bậc 3 ẩn  $x$  còn mẫu thức là đa thức bậc 2 ẩn  $x$ , trong đó  $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Tìm điều kiện của  $a, b, c, d, e$  để  $A$  có thể rút gọn. (c) Tìm biểu thức rút gọn của  $A$ .

**15** (Rút gọn phân thức bậc 3/bậc 2). Cho biểu thức  $A = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{ex^2 + fx + g}$  là phân thức với tử thức là đa thức bậc 3 ẩn  $x$  còn mẫu thức là đa thức bậc 2 ẩn  $x$ , trong đó  $a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{R}$ ,  $ae \neq 0$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Tìm điều kiện của  $a, b, c, d, e, f, g$  để  $A$  có thể rút gọn. (c) Tìm biểu thức rút gọn của  $A$ .

**16** (Rút gọn phân thức bậc 3/bậc 3 dạng rút gọn). Cho biểu thức  $A = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x^3 + dx^2 + ex + f}$  là phân thức với tử thức & mẫu thức đều là đa thức bậc 3 ẩn  $x$ , trong đó  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Tìm điều kiện của  $a, b, c, d, e, f$  để  $A$  có thể rút gọn. (c) Tìm biểu thức rút gọn của  $A$ .

**17** (Rút gọn phân thức bậc 3/bậc 3). Cho biểu thức  $A = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{ex^3 + fx^2 + gx + h}$  là phân thức với tử thức & mẫu thức đều là đa thức bậc 3 ẩn  $x$ , trong đó  $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$ ,  $ae \neq 0$ . (a) Tìm ĐKXD của  $A$ . (b) Tìm điều kiện của  $a, b, c, d, e, f, g, h$  để  $A$  có thể rút gọn. (c) Tìm biểu thức rút gọn của  $A$ .

Also: Phương trình trùng phương, phương trình quy về phương trình bậc 2, 3.

**18.** Cho các hàm phân thức  $A(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  với  $P(x), Q(x)$  thuộc tập hợp đa thức có bậc từ 1 đến 3 & các đa thức có thể quy về dạng đa thức bậc 2 hoặc bậc 3, e.g., hàm số bậc 4 trùng phương  $ax^4 + bx^2 + c = a(x^2)^2 + b(x^2) + c$ . Viết chương trình Pascal, Python, C/C++ để: (a) Tìm ĐKXD của  $A$ , tập xác định (TXĐ)  $D_A$  của  $A$ . (b) Kiểm tra thông qua giá trị của các hệ số của tử thức & mẫu thức để biết  $A$  có thể rút gọn được hay không nhờ các bài toán trên. (c) Nếu  $A$  có thể rút gọn, xuất ra biểu thức rút gọn của  $A$ .

- Input. Line 1: Số test  $t \in \mathbb{N}^*$ . Line chẵn:  $P(x)$ . Line lẻ:  $Q(x)$ .
- Output. Xuất ra ĐKXD, TXĐ  $D_A$  của  $A$ . Thông báo  $A$  có thể rút gọn được hay không, e.g., A can be simplified or A cannot be simplified. Nếu được, xuất ra biểu thức rút gọn của  $A$ .
- Sample.

simplify_rational_expression.inp	simplify_rational_expression.out
1	x != 3, x != 1/3, D_A = R \setminus \{1, 1/3\}
2x <sup>3</sup> - 7x <sup>2</sup> - 12x + 45	A can be simplified
3x <sup>3</sup> - 19x <sup>2</sup> + 33x - 9	(2x + 5)/(3x - 1)

## Tài liệu

[LAT23] Nguyễn Tiến Lâm, Trương Quang An, and Trịnh Khắc Tuấn. *Tuyển Chọn Các Chuyên Đề Bồi Dưỡng Học Sinh Giỏi Toán 9 Đại Số*. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2023, p. 323.