

Problem: Algebraic Expression Transformation

Bài Tập: Biến Đổi Biểu Thức Đại Số

1 Rational Expression Transformation – Biến Đổi Biểu Thức Hữu Tỷ

Definition 1 (Rational expression). A rational expression is the ratio of 2 polynomials. If f is a rational expression then f can be written in the form $\frac{p}{q}$ where p, q are polynomials.

Like polynomials or any other type of expression, the basic arithmetic operations, namely addition $+$, subtraction $-$, multiplication \cdot , & division $:$ or $/$, can be performed on rational expressions. A nice property of rational expressions is that when any of these operations are performed on 2 rational expressions, the result is always another rational expression. Contrary to polynomials, it is generally easy to multiply or divide but difficult to add or subtract 2 rational expressions.

Notation 1 (Rational vs. irrational). Denote by $\mathbb{Q}_{\text{fn}} := \left\{ \frac{a}{2^m \cdot 5^n} \mid a \in \mathbb{Z}, m, n \in \mathbb{N} \right\}$, $\mathbb{Q}_{\text{ifn}} := \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}_{\text{fn}}$, & $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ the set of all finite rationals, the set of all periodic infinite rationals, & the set of irrationals, respectively.

Ký hiệu 1. Ký hiệu $\mathbb{Q}_{\text{fn}} := \left\{ \frac{a}{2^m \cdot 5^n} \mid a \in \mathbb{Z}, m, n \in \mathbb{N} \right\}$, $\mathbb{Q}_{\text{ifn}} := \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}_{\text{fn}}$, & $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ lần lượt là các tập hợp tất cả các số hữu tỷ hữu hạn, các số hữu tỷ vô hạn tuần hoàn, & các số vô tỷ.

1 ([LAT23], Ví dụ 1, p. 5, chuyên Toán Quảng Ngãi 2018–2019). Cho biểu thức $A = \frac{5x+1}{x^3-1} - \frac{1-2x}{x^2+x+1} - \frac{2}{1-x}$. (a) Tìm ĐKXD. (b) Rút gọn A . (c) Biện luận theo tham số $m \in \mathbb{R}$ để giải phương trình $A = m$. (d) Tìm $x \in \mathbb{R}$ rồi $x \in \mathbb{Z}$ để lượt A lần lượt thuộc các tập hợp: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}_{\text{fn}}, \mathbb{Q}_{\text{ifn}}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2 ([LAT23], Ví dụ 2, p. 5). Cho biểu thức $A = \frac{2x^3 - 7x^2 - 12x + 45}{3x^3 - 19x^2 + 33x - 9}$. (a) Tìm ĐKXD. (b) Rút gọn A . (c) Biện luận theo tham số $m \in \mathbb{R}$ để giải phương trình $A = m$. (d) Tìm $x \in \mathbb{R}$ rồi $x \in \mathbb{Z}$ để lượt A lần lượt thuộc các tập hợp: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}_{\text{fn}}, \mathbb{Q}_{\text{ifn}}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2 Generalization – Tổng Quát Hóa

3 (Phân thức bậc 1/bậc 1). Cho biểu thức $A = \frac{ax+b}{cx+d}$ là phân thức với tử thức & mẫu thức đều là đa thức bậc nhất ẩn x . Tìm điều kiện của $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ để A có thể rút gọn, & biểu diễn biểu thức rút gọn theo a, b, c, d .

4 (Phân thức bậc 2/bậc 2). (a) Cho biểu thức $A = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}$ là phân thức với tử thức & mẫu thức đều là đa thức bậc 2 ẩn x , trong đó $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Tìm ĐKXD. Tìm điều kiện của a, b, c, d để A có thể rút gọn (i.e., rút gọn thành phân thức với tử thức & mẫu thức đều là đa thức bậc nhất ẩn x hoặc rút gọn thành hằng số), & biểu diễn biểu thức rút gọn theo a, b, c, d, x . (b) Cho biểu thức $A = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}$ là phân thức với tử thức & mẫu thức đều là đa thức bậc 2 ẩn x . Tìm điều kiện của $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, $ad \neq 0$, để A có thể rút gọn, & biểu diễn biểu thức rút gọn theo a, b, c, d, e, f, x .

Tài liệu

[LAT23] Nguyễn Tiến Lâm, Trương Quang An, and Trịnh Khắc Tuấn. *Tuyển Chọn Các Chuyên Đề Bồi Dưỡng Học Sinh Giỏi Toán 9 Đại Số*. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2023, p. 323.