

Antiderivative & Integration – Nguyên Hàm & Tích Phân

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 7 tháng 2 năm 2023

Tóm tắt nội dung

[EN] This text is a collection of problems, from easy to advanced, about antiderivative & integration. This text is also a supplementary material for my lecture note on Elementary Mathematics grade 12, which is stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 12/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_12/lecture)¹. The latest version of this text has been stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 12/integration](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_12/integration)².

[VI] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài tập chọn lọc từ cơ bản đến nâng cao về nguyên hàm & tích phân. Tài liệu này là phần bài tập bổ sung cho tài liệu chính – bài giảng [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 12/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_12/lecture) của tác giả viết cho Toán Sơ Cấp lớp 12. Phiên bản mới nhất của tài liệu này được lưu trữ & có thể tải xuống ở link sau: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 12/integration](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_12/integration).

Mục lục

1 Nguyên Hàm	2
2 Tích Phân	3
3 Ứng Dụng của Tích Phân Trong Hình Học	3
Tài liệu	3

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam

e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

¹URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_12/NQBH_elementary_mathematics_grade_12.pdf.

²URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_12/integration/NQBH_integration.pdf.

1 Nguyễn Hàm

Bài toán 1 (Hạo et al., 2022, 1, p. 93). *Tìm hàm số $F(x)$ sao cho $F'(x) = f(x)$ nếu: (a) $f(x) = 3x^2, \forall x \in \mathbb{R}$; (b) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \forall x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.*

Bài toán 2 (Hạo et al., 2022, Ví dụ 6, p. 97). *Tính: (a) $\int (2x + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}) dx$ trên khoảng $(0; +\infty)$; (b) $\int (3 \cos x - 3^{x-1}) dx$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.*

Bài toán 3 (Hạo et al., 2022, 6, p. 98). *(a) Cho $\int (x-1)^{10} dx$. Đặt $u = x-1$, viết $(x-1)^{10} dx$ theo u & du. (b) Cho $\int \frac{\ln x}{x} dx$. Đặt $x = e^t$, viết $\frac{\ln x}{x} dx$ theo t & dt.*

Bài toán 4 (Hạo et al., 2022, Ví dụ 7, p. 98). *Tính: (a) $\int \sin(3x-1) dx$. (b) $\int \sin(ax+b) dx$. (c) $\int \cos(ax+b) dx$*

Bài toán 5 (Hạo et al., 2022, Ví dụ 8, p. 99). *Tính $\int \frac{x}{(x+1)^5} dx$.*

Bài toán 6 (Mở rộng Hạo et al., 2022, Ví dụ 8, p. 99). *Tính $\int \frac{x}{(x+1)^n} dx$ với $n \in \mathbb{N}$.*

Bài toán 7 (Hạo et al., 2022, Ví dụ 8, p. 100). *Tính: (a) $\int xe^x dx$; (b) $\int x \cos x dx$; (c) $\int \ln x dx$.*

Bài toán 8 (Hạo et al., 2022, 8, p. 100). *Cho $P(x)$ là đa thức của x . Tính $\int P(x)e^x dx, \int P(x) \cos x dx, \int P(x) \ln x dx$.*

Bài toán 9 (Hạo et al., 2022, 1., p. 100). *Trong các cặp hàm số dưới đây, hàm số nào là 1 nguyên hàm của hàm số còn lại? (a) e^{-x} & $-e^{-x}$; (b) $\sin 2x$ & $\sin^2 x$; (c) $(1 - \frac{2}{x})^2 e^x$ & $(1 - \frac{1}{x}) e^x$.*

Bài toán 10 (Hạo et al., 2022, 2., pp. 100–101). *Tìm nguyên hàm của các hàm số sau: (a) $f(x) = \frac{x + \sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x}}$; (b) $f(x) = \frac{2^x - 1}{e^x}$; (c) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$; (d) $f(x) = \sin 5x \cos 3x$; (e) $f(x) = \tan^2 x$; (g) $f(x) = e^{3-2x}$; (h) $f(x) = \frac{1}{(1+x)(1-2x)}$.*

Bài toán 11 (Hạo et al., 2022, 3., p. 101). *Sử dụng phương pháp đổi biến số, tính: (a) $\int (1-x)^9 dx$ (đặt $u = 1-x$); (b) $\int x(1+x^2)^{\frac{3}{2}} dx$ (đặt $u = 1+x^2$); (c) $\int \cos^3 x \sin x dx$ (đặt $t = \cos x$); (d) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x} + 2}$ (đặt $u = e^x + 1$).*

Bài toán 12 (Hạo et al., 2022, 4., p. 101). *Sử dụng phương pháp tính nguyên hàm từng phần, tính: (a) $\int x \ln(1+x) dx$; (b) $\int (x^2 + 2x - 1)e^x dx$; (c) $\int x \sin(2x+1) dx$; (d) $\int (1-x) \cos x dx$.*

Bài toán 13 (Tuấn et al., 2022, Ví dụ 1, p. 144). *Tính: $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$.*

Bài toán 14 (Tuấn et al., 2022, Ví dụ 2, p. 144). *Tính: $\int \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} dx$.*

Bài toán 15 (Tuấn et al., 2022, Ví dụ 3, p. 145). *Tính: $\int \cos \sqrt{x} dx$.*

Bài toán 16 (Tuấn et al., 2022, 3.1, p. 145). *Kiểm tra xem hàm số nào là 1 nguyên hàm của hàm số còn lại trong mỗi cặp hàm số sau: (a) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; (b) $f(x) = e^{\sin x} \cos x$, $g(x) = e^{\sin x}$; (c) $f(x) = \sin^2 \frac{1}{x}$, $g(x) = -\frac{1}{x^2} \sin \frac{2}{x}$; (d) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$, $g(x) = \sqrt{x^2-2x+2}$; (e) $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$, $g(x) = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$.*

Bài toán 17 (Tuấn et al., 2022, 3.2, pp. 145–146). *Chứng minh các hàm số $F(x)$ & $G(x)$ sau đều là 1 nguyên hàm của cùng 1 hàm số: (a) $F(x) = \frac{x^2+6x+1}{2x-3}$, $G(x) = \frac{x^2+10}{2x-3}$; (b) $F(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, $G(x) = 10 + \cot^2 x$; (c) $F(x) = 5 + 2 \sin^2 x$, $G(x) = 1 - \cos 2x$.*

Bài toán 18 (Tuấn et al., 2022, 3.3, p. 146). *Tìm nguyên hàm của các hàm số sau: (a) $f(x) = (x-9)^4$; (b) $f(x) = \frac{1}{(2-x)^2}$; (c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; (d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$; (e) $f(x) = \frac{1-\cos 2x}{\cos^2 x}$; (f) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$.*

Bài toán 19 (Tuấn et al., 2022, 3.4, p. 146). *Tính các nguyên hàm sau bằng phương pháp đổi biến số: (a) $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx$ với $x > -1$ (đặt $t = 1+x^3$); (b) $\int x e^{-x^2} dx$ (đặt $t = x^2$); (c) $\int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$ (đặt $t = 1+x^2$); (d) $\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}} dx$ (đặt $t = \sqrt{x}$); (e) $\int \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} dx$ (đặt $t = \frac{1}{x}$); (f) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$ (đặt $t = \ln x$); (g) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx$ (đặt $t = \cos x$); (h) $\int \cos x \sin^3 x dx$ (đặt $t = \sin x$); (i) $\int \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx$ (đặt $t = e^x$); (j) $\int \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\sin x - \cos x}} dx$ (đặt $t = \sin x - \cos x$).*

Bài toán 20 (Tuấn et al., 2022, 3.5, p. 146). *Áp dụng phương pháp tính nguyên hàm từng phần, tính: (a) $\int (1-2x)e^x dx$; (b) $\int x e^{-x} dx$; (c) $\int x \ln(1-x) dx$; (d) $\int x \sin^2 x dx$; (e) $\int \ln(1 + \sqrt{1+x^2})$*

2 Tích Phân

3 Ứng Dụng của Tích Phân Trong Hình Học

Tài liệu

Hạo, Trần Văn, Vũ Tuấn, Lê Thị Thiên Hương, Nguyễn Tiến Tài, and Cần Văn Tuất (2022). *Giải Tích 12*. Tái bản lần thứ 14. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 160.

Tuấn, Vũ, Lê Thị Thiên Hương, Nguyễn Thu Nga, Phạm Phú, Nguyễn Tiến Tài, and Cần Văn Tuất (2022). *Bài Tập Giải Tích 12*. Tái bản lần thứ 14. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 222.