

Solution: Square-, Cube-, & n th Roots

Lời Giải: Căn Bậc 2, Căn Bậc 3, & Căn Bậc n

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 18 tháng 5 năm 2023

Tóm tắt nội dung

[en] This text is a collection of problems, from basic to advanced, on *square-, cube-, & n th roots*.

Keyword. Square root, cube root, n th root.

[vi] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài toán, từ cơ bản đến nâng cao, về *căn bậc 2, căn bậc 3, & căn bậc n* .

Từ khóa. Căn bậc 2, căn bậc 3, căn bậc n , số hữu tỷ, số vô tỷ, căn thức.

- Lecture note – Bài giảng: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/square- & cube roots](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_9/square- & cube roots)¹.
- Cheatsheet – Công thức: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/cheatsheet: square- & cube roots](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_9/cheatsheet: square- & cube roots)².
- Problem – Bài tập: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/problem: square- & cube roots](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_9/problem: square- & cube roots)³.
- Solution – Lời giải: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/solution: square- & cube roots](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_9/solution: square- & cube roots)⁴.

Mục lục

1 Square Root & Irrationals – Căn Bậc 2 & Số Vô Tỷ	2
2 Căn Thức Bậc 2 & Hằng Đẳng Thức $\sqrt{A^2} = A $	5
3 Liên Hệ Giữa Phép Nhân, Phép Chia & Phép Khai Phương	8
4 Biến Đổi Đơn Giản Biểu Thức Chứa Căn Thức Bậc 2	13
5 Rút Gọn Biểu Thức Có Chứa Căn Thức Bậc 2	15
6 Cube Root, n th Root – Căn Bậc 3, Căn Bậc n	18
7 Miscellaneous	20
Tài liệu	23

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam

e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

¹URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/NQBH_square_root_cube_root.pdf.

²https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/cheatsheet/NQBH_square_root_cube_root_cheatsheet.pdf.

³https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/problem/NQBH_square_root_cube_root_problem.pdf.

⁴https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/solution/NQBH_square_root_cube_root_solution.pdf.

1 Square Root & Irrationals – Căn Bậc 2 & Số Vô Tỷ

Bài toán 1 ([Chí+23], ?1–?3, pp. 4–5). (a) Tìm các căn bậc 2 của $9, \frac{4}{9}, 0.25, 2$. (b) Tìm căn bậc 2 số học của $49, 64, 81, 1.21$. (c) Tìm căn bậc 2 của $49, 64, 81, 1.21$.

Bài toán 2 ([Chí+23], Ví dụ 2, ?4, pp. 5–6). So sánh: (a) 1 & $\sqrt{2}$. (b) 2 & $\sqrt{5}$. (c) 4 & $\sqrt{15}$. (d) $\sqrt{11}$ & 3.

Bài toán 3 ([Chí+23], Ví dụ 3, ?5, p. 6). (a) Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{x} > 2$. (b) $\sqrt{x} < 1$. (c) $\sqrt{x} > 1$. (d) $\sqrt{x} < 3$.

Bài toán 4 ([Chí+23], 1., p. 6). Tìm căn bậc 2 số học của mỗi số sau rồi suy ra căn bậc 2 của chúng: 121, 144, 169, 225, 256, 324, 361, 400.

Bài toán 5 ([Chí+23], 2., p. 6). So sánh: (a) 2 & $\sqrt{3}$. (b) 6 & $\sqrt{41}$. (c) 7 & $\sqrt{47}$.

Bài toán 6 ([Chí+23], 3., p. 6). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn các phương trình sau & sau đó làm tròn đến chữ số thập phân thứ 3: (a) $x^2 = 2$. (b) $x^2 = 3$. (c) $x^2 = 3.5$. (d) $x^2 = 4.12$.

Hint. Nghiệm của phương trình bậc 2 $x^2 = a$ với $a \geq 0$ là các căn bậc 2 của a .

Bài toán 7 ([Chí+23], 4., p. 7). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{x} = 15$. (b) $2\sqrt{x} = 14$. (c) $\sqrt{x} < \sqrt{2}$. (d) $\sqrt{2x} < 4$.

Bài toán 8 ([Chí+23], 5., p. 7). Tính cạnh 1 hình vuông biết diện tích của nó bằng diện tích của hình chữ nhật có chiều rộng 3.5 m & chiều dài 14 m.

Bài toán 9 ([Thā+23], 1., p. 5). Tính căn bậc 2 số học của 0.01, 0.04, 0.49, 0.64, 0.25, 0.81, 0.09, 0.16, 0, -1 .

Giải. Căn bậc 2 số học của: 0.01, 0.04, 0.49, 0.64, 0.25, 0.81, 0.09, 0.16, 0 lần lượt là $\sqrt{0.01} = 0.1$, $\sqrt{0.04} = 0.2$, $\sqrt{0.49} = 0.7$, $\sqrt{0.64} = 0.8$, $\sqrt{0.25} = 0.5$, $\sqrt{0.81} = 0.9$, $\sqrt{0.09} = 0.3$, $\sqrt{0.16} = 0.4$, $\sqrt{0} = 0$. Riêng -1 không có căn bậc 2 (số học) vì $-1 < 0$. \square

Lưu ý 1. Căn bậc 2 số học của số thực không âm $a \geq 0$ là \sqrt{a} . Căn bậc 2 của $a \geq 0$ là $\pm\sqrt{a}$ (i.e., bao gồm \sqrt{a} & $-\sqrt{a}$), đặc biệt: căn bậc 2 của 0 là $\pm\sqrt{0} = 0$. Mọi số thực âm $a < 0$ không có căn bậc 2.

Bài toán 10 ([Thā+23], 2., p. 5). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $x^2 = 5$. (b) $x^2 = 6$. (c) $x^2 = 2.5$. (d) $x^2 = \sqrt{5}$. (e) $x^2 = -1$.

Giải. (a) $x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$. (b) $x^2 = 6 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}$. (c) $x^2 = 2.5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2.5}$. (d) $x^2 = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\sqrt{5}} = \pm\sqrt[4]{5}$. (e) $x^2 = -1$ vô nghiệm vì $x^2 \geq 0 > -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. \square

Lưu ý 2 (Phương trình bậc 2 $x^2 = a$). *Giải & biện luận theo tham số a phương trình $x^2 = a$ với $a \in \mathbb{R}$ cho trước. Xét 3 trường hợp:* (a) Trường hợp $a = 0$: $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. (b) Trường hợp $a > 0$: $x^2 = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$. (c) Trường hợp $a < 0$: phương trình bậc 2 $x^2 = a$ vô nghiệm vì $x^2 \geq 0 > a$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 11 ([Thā+23], 3., p. 5). Số nào có căn bậc 2 là: (a) $\sqrt{5}$. (b) 1.5. (c) -0.1 . (d) $-\sqrt{9}$.

Giải. (a) 5 có 1 căn bậc 2 là $\sqrt{5}$. (b) $1.5^2 = 2.25$ có 1 căn bậc 2 là 1.5. (c) $(-0.1)^2 = 0.01$ có 1 căn bậc 2 là -0.1 . (d) 9 có 1 căn bậc 2 là $-\sqrt{9}$. \square

Lưu ý 3. Số có căn bậc 2 là a là số a^2 . Cụ thể hơn, a^2 có căn bậc 2 là $\pm a$, trong đó căn bậc 2 số học của a^2 là $|a|$.

Bài toán 12 ([Thā+23], 4., p. 5). Tìm $x \in \mathbb{R}$: (a) $\sqrt{x} = 3$. (b) $\sqrt{x} = \sqrt{5}$. (c) $\sqrt{x} = 0$. (d) $\sqrt{x} = -2$.

Giải. ĐKXD cho cả 4 ý: $x \geq 0$. (a) $\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 3^2 = 9$ (thỏa ĐKXD: nhận). Vậy $x = 9$. (b) $\sqrt{x} = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = 5$ (thỏa ĐKXD: nhận). Vậy $x = 5$. (c) $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa ĐKXD: nhận). Vậy $x = 0$. (d) Cách 1: Phương trình $\sqrt{x} = -2$ vô nghiệm vì $\sqrt{x} \geq 0 > -2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Cách 2: Căn bậc 2 số học thì không âm nên không tồn tại $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\sqrt{x} = -2$. \square

Lưu ý 4 (Phương trình bậc 2 $\sqrt{x} = a$). *Giải & biện luận theo tham số a phương trình $\sqrt{x} = a$ với $a \in \mathbb{R}$ cho trước. ĐKXD: $x \geq 0$. Xét 3 trường hợp:* (a) Trường hợp $a = 0$: $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa ĐKXD: nhận). (b) Trường hợp $a > 0$: $\sqrt{x} = a \Leftrightarrow x = a^2 > 0$ (thỏa ĐKXD: nhận). (c) Trường hợp $a < 0$: phương trình vô tỷ $\sqrt{x} = a$ vô nghiệm vì $\sqrt{x} \geq 0 > a$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 13 ([Thā+23], 5., p. 6). Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, so sánh: (a) 2 & $\sqrt{2} + 1$. (b) 1 & $\sqrt{3} - 1$. (c) $2\sqrt{31}$ & 10. (d) $-3\sqrt{11}$ & -12 .

Hint. Sử dụng tính chất: $0 \leq a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

1st giải. (a) $1 < 2 \Leftrightarrow \sqrt{1} = 1 < \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 + 1 < \sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow 2 < 1 + \sqrt{2}$. Vậy $2 < 1 + \sqrt{2}$. (b) $4 > 3 \Leftrightarrow \sqrt{4} = 2 > \sqrt{3} \Leftrightarrow 2 - 1 > \sqrt{3} - 1 \Leftrightarrow 1 > \sqrt{3} - 1$. Vậy $1 > \sqrt{3} - 1$. (c) $31 > 25 \Leftrightarrow \sqrt{31} > \sqrt{25} = 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{31} > 2 \cdot 5 = 10$. Vậy $2\sqrt{31} > 10$. (d) $11 < 16 \Leftrightarrow \sqrt{11} < \sqrt{16} = 4 \Leftrightarrow -3\sqrt{11} > -3 \cdot 4 = -12$. Vậy $-3\sqrt{11} > -12$. \square

Có thể bình phương 2 vế của 2 biểu thức cần so sánh như sau (đương nhiên sẽ tốn công hơn nhưng bù lại tự nhiên hơn Cách 1 đã được ‘tĩa gọt’, i.e., giấu các bước suy luận lòng vòng ngoài nháp để trình bày lời giải ‘chỉ 1 dòng biến đổi tương đương’):

2nd giải. (a) $(\sqrt{2}+1)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} + 1 = 3 + 2\sqrt{2} > 3 + 2\sqrt{1} = 3 + 2 = 5 > 4 = 2^2 \Rightarrow \sqrt{2}+1 > 2$. (b) $(\sqrt{3}-1)^2 = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1^2 = 4 - 2\sqrt{3} < 4 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 4 - 3 = 1$, trong đó đã sử dụng $-2 < -\sqrt{3}$. Vậy $1 > \sqrt{3} - 1$. (c) $(2\sqrt{31})^2 = 2^2(\sqrt{31})^2 = 4 \cdot 31 = 124 > 100 = 10^2 \Rightarrow 2\sqrt{31} > 10$. Vậy $2\sqrt{31} > 10$. (d) $(3\sqrt{11})^2 = 3^2(\sqrt{11})^2 = 9 \cdot 11 = 99 < 144 = 12^2 \Rightarrow 3\sqrt{11} < 12 \Leftrightarrow -3\sqrt{11} > -12$. Vậy $-3\sqrt{11} > -12$. \square

Bài toán 14 ([Thâ+23], 6., p. 6). Đ/S? (a) Căn bậc 2 của 0.36 là 0.6. (b) Căn bậc 2 của 0.36 là 0.06. (c) $\sqrt{0.36} = 0.6$. (d) Căn bậc 2 của 0.36 là 0.6 & -0.6. (e) $\sqrt{0.36} = \pm 0.6$.

Giải. (a) S: Căn bậc 2 của 0.36 là ± 0.6 (chứ không phải mỗi 0.6). (b) S: Căn bậc 2 của 0.36 là 0.6 (chứ không phải 0.06). (c) Đ: $\sqrt{0.36} = 0.6$. (d) Đ: Căn bậc 2 của 0.36 là 0.6 & -0.6. (e) S: $\sqrt{0.36} = 0.6$ vì $-\sqrt{0.36} = -0.6$ & $\pm\sqrt{0.36} = \pm 0.6$ mới đúng. \square

Bài toán 15 ([Thâ+23], 7., p. 6). Trong các số $\sqrt{(-5)^2}, \sqrt{5^2}, -\sqrt{5^2}, -\sqrt{(-5)^2}$, số nào là căn bậc 2 số học của 25?

Giải. Có $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$, $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$, $-\sqrt{5^2} = -\sqrt{25} = -5$, $-\sqrt{(-5)^2} = -\sqrt{25} = -5$, mà căn bậc 2 số học của 25 là 5 nên suy ra $\sqrt{(\pm 5)^2}$ là căn bậc 2 số học của 25. \square

Lưu ý 5. Cả 4 số $\sqrt{(-5)^2}, \sqrt{5^2}, -\sqrt{5^2}, -\sqrt{(-5)^2}$ đều là căn bậc 2 của $5^2 = 25$, trong đó $\sqrt{(\pm 5)^2} = \sqrt{25} = 5 > 0$ là căn bậc 2 số học của $5^2 = 25$.

Bài toán 16 (Mở rộng [Thâ+23], 7., p. 6). Trong các số $\sqrt{(-a)^2}, \sqrt{a^2}, -\sqrt{a^2}, -\sqrt{(-a)^2}$, số nào là căn bậc 2 số học của a^2 với $a \in \mathbb{R}$ bất kỳ?

Giải. Có $\sqrt{(-a)^2} = \sqrt{a^2} = |a|$, $\sqrt{a^2} = \sqrt{a^2} = |a|$, $-\sqrt{a^2} = -\sqrt{a^2} = -|a|$, $-\sqrt{(-a)^2} = -\sqrt{a^2} = -|a|$, mà căn bậc 2 số học của a^2 là a nên suy ra $\sqrt{(\pm a)^2}$ là căn bậc 2 số học của a^2 . \square

Lưu ý 6. Cả 4 số $\sqrt{(-a)^2}, \sqrt{a^2}, -\sqrt{a^2}, -\sqrt{(-a)^2}$ đều là căn bậc 2 của a^2 , trong đó $\sqrt{(\pm a)^2} = \sqrt{a^2} = |a| \geq 0$ là căn bậc 2 số học của a^2 , $\forall a \in \mathbb{R}$.

Bài toán 17 ([Thâ+23], 8., p. 6). Chứng minh: $\sqrt{1^3 + 2^3} = 1 + 2$, $\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3} = 1 + 2 + 3$, $\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3} = 1 + 2 + 3 + 4$. Viết tiếp 1 số đẳng thức tương tự.

Chứng minh. $\sqrt{1^3 + 2^3} = \sqrt{1 + 8} = \sqrt{9} = 3 = 1 + 2$, $\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3} = \sqrt{1 + 8 + 27} = \sqrt{36} = 6 = 1 + 2 + 3$, $\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3} = \sqrt{1 + 8 + 27 + 64} = \sqrt{100} = 10 = 1 + 2 + 3 + 4$. Ta có các đẳng thức:

$$\begin{aligned}\sqrt{1^3} &= 1, \\ \sqrt{1^3 + 2^3} &= 1 + 2, \\ \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3} &= 1 + 2 + 3, \\ \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3} &= 1 + 2 + 3 + 4, \\ \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5, \\ \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6, \\ \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7, \\ \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8, \\ \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9, \\ \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 + 10^3} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10.\end{aligned}$$

Dự đoán đẳng thức tổng quát:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n i^3} = \sqrt{1^3 + 2^3 + \dots + n^3} = \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Đẳng thức này đúng & có thể được chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học. \square

Lưu ý 7. Công thức tính tổng lập phương của n số nguyên dương đầu tiên:

$$\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\sum_{i=1}^n i\right)^2 = (1 + 2 + \dots + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

Ta có thể kiểm nghiệm công thức trên bằng máy tính:

Bài toán 18. Viết chương trình Pascal, Python, C/C++ tính: (a) tổng n số nguyên dương đầu tiên. (b) tổng bình phương của n số nguyên dương đầu tiên. (c) tổng lập phương của n số nguyên dương đầu tiên. (d) Từ câu (a) & (c), kiểm tra đẳng thức (1). (e) tổng lũy thừa bậc $m \in \mathbb{R}$ của n số nguyên dương đầu tiên⁵.

Bài toán 19 ([Thâ+23], 9., p. 6). Cho $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$. Chứng minh: (a) $a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$. (b) $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Rightarrow a < b$.

⁵Lũy thừa bậc thực của 1 số thực, i.e., a^b với $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$, sẽ được học ở chương trình Toán Giải tích 11.

Chứng minh. (a) Vì $a, b \geq 0$ & $a < b$ nên $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a} + \sqrt{a} = 2\sqrt{a} \geq 0$ (*). Có $a < b \Rightarrow 0 > a - b = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ (**). Từ (*) & (**), suy ra $\sqrt{a} - \sqrt{b} < 0$ hay $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. (b) $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} < 0$, kết hợp điều này & (*), suy ra $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) < 0 \Leftrightarrow a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$. \square

Lưu ý 8. Từ chứng minh trên, ta thấy $a - b$ & $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ luôn cùng dấu:

$$(a - b)(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \begin{cases} = 0, & \text{if } a = b, \\ > 0, & \text{if } a \neq b, \end{cases}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0.$$

Chặt chẽ & ngắn gọn hơn về công thức toán học, đẳng thức trên tương đương với đẳng thức:

$$\text{sign}(a - b) = \text{sign}(\sqrt{a} - \sqrt{b}), \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0,$$

trong đó $\text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \{0, \pm 1\}$, $x \mapsto \text{sign } x$ là hàm dấu xác định trên tập số thực \mathbb{R} bởi công thức:

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1, & \text{if } x > 0, \\ 0, & \text{if } x = 0, \\ -1, & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

Bài toán 20 ([Thă+23], 10., p. 6). Cho $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$. Chứng minh: (a) $m > 1 \Rightarrow \sqrt{m} > 1$. (b) $m < 1 \Rightarrow \sqrt{m} < 1$.

Chứng minh. Áp dụng Bài toán 19 (a) lần lượt với $(a, b) = (1, m)$ & $(a, b) = (m, 1)$, ta được: (a) $m > 1 \Rightarrow \sqrt{m} > \sqrt{1} = 1$. (b) $m < 1 \Rightarrow \sqrt{m} < \sqrt{1} = 1$. \square

Bài toán 21 ([Thă+23], 11., p. 6). Cho $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$. Chứng minh: (a) $m > 1 \Rightarrow m > \sqrt{m} > 1$. (b) $m < 1 \Rightarrow m < \sqrt{m} < 1$.

Chứng minh. (a) Theo Bài toán 20 (a): $m > 1 \Rightarrow \sqrt{m} > 1$. Nhân cả 2 vế của bất đẳng thức cuối với $\sqrt{m} > 0$, ta được $m > \sqrt{m}$. (b) Theo Bài toán 20 (b): $m < 1 \Rightarrow \sqrt{m} < 1$. Nhân cả 2 vế của bất đẳng thức cuối với $\sqrt{m} > 0$, ta được $\sqrt{m} \cdot \sqrt{m} = m < \sqrt{m}$. \square

Bài toán 22 (Program to print out 1st n square roots). Với $n \in \mathbb{N}^*$ được nhập từ bàn phím, viết chương trình Pascal, C/C++, Python xuất ra: (a) Căn bậc 2 của n . (b) Căn bậc 2 của n số nguyên dương đầu tiên.

Pascal:

```
program square_root;
var num, sqrt_num: real;
begin
  write('Enter a number num = ');
  readln(num);
  sqrt_num := Sqrt(num);
  writeln('sqrt of ', num, ' = ', sqrt_num)
end.
```

Bài toán 23 (Số chính phương). Viết chương trình Pascal, C/C++, Python để kiểm tra 1 số $n \in \mathbb{N}^*$ được nhập từ bàn phím có phải là số chính phương hay không.

Bài toán 24 ([Tuy23], Thí dụ 1, p. 5). Cho số thực $x \geq 0$. So sánh \sqrt{x} với x .

Giải. Vì $x \geq 0$ nên \sqrt{x} có nghĩa/xác định & $\sqrt{x} \geq 0$. Xét các trường hợp: (a) $\sqrt{x} = x \Leftrightarrow x = x^2 \Leftrightarrow x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$. (b) $\sqrt{x} < x \Leftrightarrow x < x^2 \Leftrightarrow x - x^2 < 0 \Leftrightarrow x(1 - x) < 0$, mà $x \geq 0$ nên suy ra $1 - x < 0$, hay $x > 1$. (c) $\sqrt{x} > x \Leftrightarrow x > x^2 \Leftrightarrow x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x(1 - x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$. Vậy: $x \in \{0, 1\} \Leftrightarrow \sqrt{x} = x$, $x > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} < x$, & $0 < x < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} > x$. \square

Nhận xét 1. Về mặt phương pháp để so sánh 2 số không âm ta có thể so sánh các bình phương của 2 số đó: $a \geq b > 0 \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$. Về kết quả, khi so sánh \sqrt{x} với x ta thấy có thể xảy ra cả 3 trường hợp: lớn hơn, nhỏ hơn, hoặc bằng nhau tùy theo x ở trong khoảng giá trị nào, cụ thể: $x \in \{0, 1\} \Leftrightarrow \sqrt{x} = x$, $x > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} < x$, & $0 < x < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} > x$.

Bài toán 25 ([Bin23], Ví dụ 2, p. 5). Chứng minh tổng & hiệu của 1 số hữu tỷ với 1 số vô tỷ là 1 số vô tỷ.

Giải. Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tồn tại 2 số $a \in \mathbb{Q}$ & $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sao cho $c = a + b \in \mathbb{Q}$. Ta có $b = c - a$, mà hiệu của 2 số hữu tỷ c, a là 1 số hữu tỷ nên $b \in \mathbb{Q}$, mâu thuẫn với giả thiết, nên c phải là số vô tỷ. Chứng minh tương tự cho hiệu. \square

Bài toán 26 ([Bin23], Ví dụ 3, p. 5). Xét xem các số a, b có thể là số vô tỷ hay không, nếu: (a) $a + b$ & $a - b$ là các số hữu tỷ. (b) $a - b$ & ab là các số hữu tỷ.

Bài toán 27 ([Bin23], Ví dụ 4, p. 5). Chứng minh: Nếu số tự nhiên a không là số chính phương thì \sqrt{a} là số vô tỷ.

Bài toán 28 ([Bin23], 2., p. 6). Chứng minh các số sau là số vô tỷ: (a) $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$. (b) $m + \frac{\sqrt{3}}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Q}$, $n \neq 0$.

Bài toán 29 ([Bìn23], 3., p. 6). Xét xem các số a, b có thể là số vô tỷ hay không nếu: (a) ab & $\frac{a}{b}$ là các số hữu tỷ. (b) $a + b$ & $\frac{a}{b}$ là các số hữu tỷ ($a + b \neq 0$). (c) $a + b, a^2, \& b^2$ là các số hữu tỷ ($a + b \neq 0$).

Bài toán 30 ([Bìn23], 4., p. 6). So sánh 2 số: (a) $2\sqrt{3}$ & $3\sqrt{2}$. (b) $6\sqrt{5}$ & $5\sqrt{6}$. (c) $\sqrt{24} + \sqrt{45}$ & 12. (d) $\sqrt{37} - \sqrt{15}$ & 2.

Bài toán 31 ([Bìn23], 5., p. 6). (a) Cho 1 ví dụ để chứng tỏ khẳng định $\sqrt{a} \leq a$ với mọi số a không âm là sai. (b) Cho $a > 0$. Với giá trị nào của a thì $\sqrt{a} \geq a$?

Bài toán 32 ([Bìn23], 6*, pp. 6-7). (a) Chỉ ra 1 số thực x mà $x - \frac{1}{x}$ là số nguyên ($x \neq \pm 1$). (b) Chứng minh nếu $x - \frac{1}{x}$ là số nguyên & $x \neq \pm 1$ thì x & $x + \frac{1}{x}$ là số vô tỷ. Khi đó $(x + \frac{1}{x})^{2n}$ & $(x + \frac{1}{x})^{2n+1}$ là số hữu tỷ hay số vô tỷ?

2 Căn Thức Bậc 2 & Hằng Đẳng Thức $\sqrt{A^2} = |A|$

Bài toán 33 ([Chí+23], ?1, p. 8). Hình chữ nhật $ABCD$ có đường chéo dài 5 cm & cạnh $BC = x$ cm. tính AB .

Bài toán 34 ([Chí+23], ?2, p. 8). Với giá trị nào của $x \in \mathbb{R}$ thì $\sqrt{5 - 2x}$ xác định?

Bài toán 35 ([Chí+23], ĐL, p. 9). Chứng minh: $\sqrt{a^2} = |a|, \forall a \in \mathbb{R}$.

Bài toán 36 ([Chí+23], Ví dụ 2, p. 9). Tính: (a) $\sqrt{12^2}$. (b) $\sqrt{(-7)^2}$.

Bài toán 37 ([Chí+23], Ví dụ 3, p. 9). Rút gọn: (a) $\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2}$. (b) $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2}$.

Bài toán 38 ([Chí+23], Ví dụ 4, p. 10). Rút gọn: (a) $\sqrt{(x - 2)^2}$ với $x \geq 2$. (b) $\sqrt{a^6}$ với $a < 0$.

Bài toán 39 ([Chí+23], 6., p. 10). Với giá trị nào của $a \in \mathbb{R}$ thì mỗi căn thức sau có nghĩa? (a) $\sqrt{\frac{a}{3}}$. (b) $\sqrt{-5a}$. (c) $\sqrt{4 - a}$. (d) $\sqrt{3a + 7}$.

Bài toán 40 ([Chí+23], 7., p. 10). Tính: (a) $\sqrt{(0.1)^2}$. (b) $\sqrt{(-0.3)^2}$. (c) $-\sqrt{(-1.3)^2}$. (d) $-0.4\sqrt{(-0.4)^2}$.

Bài toán 41 ([Chí+23], 8., p. 10). Rút gọn các biểu thức: (a) $\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}$. (b) $\sqrt{(3 - \sqrt{11})^2}$. (c) $2\sqrt{a^2}$ với $a \geq 0$ & với $a \in \mathbb{R}$. (d) $3\sqrt{(a - 2)^2}$ với $a < 2$ & với $a \in \mathbb{R}$.

Bài toán 42 ([Chí+23], 9., p. 11). Tìm x thỏa: (a) $\sqrt{x^2} = 7$. (b) $\sqrt{x^2} = |-8|$. (c) $\sqrt{4x^2} = 6$. (d) $\sqrt{9x^2} = |-12|$.

Bài toán 43 ([Chí+23], 10., p. 11). Chứng minh: (a) $(\sqrt{3} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$. (b) $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{3} = -1$.

Bài toán 44 ([Chí+23], 11., p. 11). Tính: (a) $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25} + \sqrt{196} : \sqrt{49}$. (b) $36 : \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 18} - \sqrt{169}$. (c) $\sqrt{\sqrt{81}}$. (d) $\sqrt{3^2 + 4^2}$.

Bài toán 45 ([Chí+23], 12., p. 11). Tìm x để mỗi căn thức sau có nghĩa: (a) $\sqrt{2x + 7}$. (b) $\sqrt{-3x + 4}$. (c) $\sqrt{\frac{1}{x-1}}$. (d) $\sqrt{1 + x^2}$.

Bài toán 46 ([Chí+23], 13., p. 11). Rút gọn các biểu thức: (a) $2\sqrt{a^2} - 5a$ với $a < 0$ & $a \in \mathbb{R}$. (b) $\sqrt{25a^2} + 3a$ với $a \geq 0$ & $a \in \mathbb{R}$. (c) $\sqrt{9a^4} + 3a^2$. (d) $5\sqrt{4a^6} - 3a^3$ với $a < 0$ & $a \in \mathbb{R}$.

Bài toán 47 ([Chí+23], 14., p. 11). Phân tích thành nhân tử: (a) $x^2 - 3$. (b) $x^2 - 6$. (c) $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3$. (d) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 5$.

Hint. $a = (\sqrt{a})^2, \forall a \in \mathbb{R}, a \geq 0$.

Bài toán 48 ([Chí+23], 15., p. 11). Giải phương trình: (a) $x^2 - 5 = 0$. (b) $x^2 - 2\sqrt{11}x + 11 = 0$.

Bài toán 49 ([Chí+23], 16., p. 12). Tìm chỗ sai trong phép chứng minh “Con muỗi nặng bằng con voi” sau: Giả sử con muỗi nặng m g, còn con voi nặng V g. Ta có: $m^2 + V^2 = V^2 + m^2$. Cộng cả 2 vế với $-2mV$, ta có: $m^2 - 2mV + V^2 = V^2 - 2mV + m^2$, hay $(m - V)^2 = (V - m)^2$. Lấy căn bậc 2 mỗi vế của đẳng thức trên, ta được: $\sqrt{(m - V)^2} = \sqrt{(V - m)^2}$. Do đó $m - V = V - m$. Từ đó ta có $2m = 2V$, suy ra $m = V$. Vậy con muỗi nặng bằng con voi!

Bài toán 50 ([Thâ+23], 12., p. 7). Tìm $x \in \mathbb{R}$ để căn thức sau có nghĩa: (a) $\sqrt{-2x + 3}$. (b) $\sqrt{\frac{2}{x^2}}$. (c) $\sqrt{\frac{4}{x + 3}}$. (d) $\sqrt{\frac{-5}{x^2 + 6}}$.

Bài toán 51 ([Thâ+23], 13., p. 7). Rút gọn rồi tính: (a) $5\sqrt{(-2)^4}$. (b) $-4\sqrt{(-3)^6}$. (c) $\sqrt{\sqrt{(-5)^8}}$. (d) $2\sqrt{(-5)^6} + 3\sqrt{(-2)^8}$.

Bài toán 52 ([Thâ+23], 14., p. 7). Rút gọn các biểu thức: (a) $\sqrt{(4 + \sqrt{2})^2}$. (b) $\sqrt{(3 - \sqrt{3})^2}$. (c) $\sqrt{(4 - \sqrt{17})^2}$. (d) $2\sqrt{3} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}$.

Bài toán 53 ([Thâ+23], 15., p. 7). Chứng minh: (a) $9 + 4\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 2)^2$. (b) $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = -2$. (c) $(4 - \sqrt{7})^2 = 23 - 8\sqrt{7}$. (d) $\sqrt{23 + 8\sqrt{7}} - \sqrt{7} = 4$.

Bài toán 54 ([Thâ+23], 16., p. 7). Biểu thức sau đây xác định với giá trị nào của x ? (a) $\sqrt{(x-1)(x-3)}$. (b) $\sqrt{x^2-4}$. (c) $\sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$. (d) $\sqrt{\frac{2+x}{5-x}}$.

Bài toán 55 ([Thâ+23], 17., p. 8). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{9x^2} = 2x + 1$. (b) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = 3x - 1$. (c) $\sqrt{1 - 4x + 4x^2} = 5$. (d) $\sqrt{x^4} = 7$.

Bài toán 56 ([Thâ+23], 18., p. 8). Phân tích nhân tử: (a) $x^2 - 7$. (b) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$. (c) $x^2 + 2\sqrt{13}x + 13$.

Bài toán 57 ([Thâ+23], 19., p. 8). Tìm DKXD rồi rút gọn các phân thức: (a) $\frac{x^2 - 5}{x + \sqrt{5}}$. (b) $\frac{x^2 + 2\sqrt{2}x + 2}{x^2 - 2}$.

Bài toán 58 ([Thâ+23], 20., p. 8). Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, so sánh: (a) $6 + 2\sqrt{2}$ & 9. (b) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ & 3. (c) $9 + 4\sqrt{5}$ & 16. (d) $\sqrt{11} - \sqrt{3}$ & 2.

Bài toán 59 ([Thâ+23], 21., p. 8). Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{3}$. (b) $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - 3 + \sqrt{2}$. (c) $\sqrt{9x^2} - 2x$ với $x < 0$ & $x \in \mathbb{R}$. (d) $x - 4 + \sqrt{16 - 8x + x^2}$ với $x > 4$ & $x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 60 ([Thâ+23], 22., p. 8). (a) Chứng minh: $\sqrt{(n+1)^2} + \sqrt{n^2} = (n+1)^2 - n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Viết đẳng thức trên với $n = 1, 2, \dots, 10$. (b) Tính $\sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{x^2}$ với $x \in \mathbb{R}$ rồi so sánh với $|(x+1)^2 - x^2|$.

Bài toán 61 ([Tuy23], Thí dụ 2, p. 5). Cho $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $abc \neq 0$ & $a = b + c$. Chứng minh $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \in \mathbb{Q}$.

Giải. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} - \frac{1}{bc}\right) = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + \frac{2(c+b-a)}{abc} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2$ vì $a = b + c$. Suy ra $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2} = \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right|$. Có $a, b, c \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \in \mathbb{Q} \Rightarrow A = \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right| \in \mathbb{Q}$. \square

Bài toán 62. Cho $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $abc \neq 0$ & $a + b + c = 0$. Chứng minh $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \in \mathbb{Q}$.

1st giải. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 - \frac{2(a+b+c)}{abc} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2$ vì $a+b+c=0$. Suy ra $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2} = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right|$. Có $a, b, c \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \in \mathbb{Q} \Rightarrow A = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right| \in \mathbb{Q}$. \square

2nd giải. $a + b + c = 0 \Leftrightarrow -a = b + c$, nên ta có thể áp dụng bài toán 61 cho bộ 3 số $(-a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$, $-abc \neq 0$ để thu được $\sqrt{\frac{1}{(-a)^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \in \mathbb{Q}$, i.e., $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \in \mathbb{Q}$. \square

Nhận xét 2 (Proof of $\in \mathbb{Q}$). Để chứng minh 1 số là số hữu tỷ ta biểu diễn số đó thành 1 biểu thức gồm các phép tính cộng, trừ, nhân, chia (cho 1 số khác 0) của các số hữu tỷ.

Bài toán 63. (a) Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$, $abc \neq 0$, khi nào thì $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$? (b) Cho $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $abcd \neq 0$, khi nào thì $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}$? (c) Cho $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, $abcde \neq 0$, khi nào thì $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} + \frac{1}{e^2}$? (d) Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$, khi nào thì xảy ra đẳng thức sau?

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2}, \text{ i.e., } \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)^2 = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}.$$

Bài toán 64. Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, $abcd \neq 0$ & $ab + ac + ad + bc + bd + cd = 0$. Chứng minh $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}} \in \mathbb{Q}$.

Bài toán 65. Cho $a, b, c, d, e \in \mathbb{Q}$, $abcde \neq 0$ & $abc + abd + abe + acd + ace + ade + bcd + bce + bde + cde = 0$. Chứng minh $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} + \frac{1}{e^2}} \in \mathbb{Q}$.

Bài toán 66. Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $a_i \in \mathbb{Q}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$, & $\sum_{\text{cyc}} a_1 a_2 \dots a_{n-2} = 0$. Chứng minh:

$$A = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2}} = \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}} \in \mathbb{Q}.$$

Lưu ý 9 (Cyclic sum). Ký hiệu \sum_{cyc} được gọi là tổng cyclic. Xem định nghĩa & ví dụ tại, e.g., [AoPS/cyclic sum](#)⁶.

Bài toán 67 ([Tuy23], 1., p. 6). Tính $A = \sqrt{\frac{8^{10} - 4^{10}}{4^{11} - 8^4}}$.

Phân tích. 4, 8 đều là lũy thừa của 2 nên sẽ tiện hơn nếu đưa tất cả các lũy thừa trong A về lũy thừa với cơ số 2.

Giải. $A = \sqrt{\frac{(2^3)^{10} - (2^2)^{10}}{(2^2)^{11} - (2^3)^4}} = \sqrt{\frac{2^{30} - 2^{20}}{2^{22} - 2^{12}}} = \sqrt{\frac{2^{20}(2^{10} - 1)}{2^{12}(2^{10} - 1)}} = \sqrt{2^8} = 2^4 = 16.$ \square

Bài toán 68 ([Tuy23], 2., p. 6). Cho $A = \underbrace{99 \dots 9}_{10's} 4 \underbrace{00 \dots 0}_{10's} 9$. Tính \sqrt{A} .

1st giải. $A = \underbrace{99 \dots 9}_{10's} 4 \cdot \underbrace{100 \dots 0}_{11's} + 9 = (\underbrace{99 \dots 9}_{10's} 7 - 3)(\underbrace{99 \dots 9}_{10's} 7 + 3) + 9 = \underbrace{99 \dots 9}_{10's} 7^2 - 3^2 + 9 = \underbrace{99 \dots 9}_{10's} 7^2 \Rightarrow \sqrt{A} = \underbrace{99 \dots 9}_{10's} 7.$ \square

2nd giải. $A = (10^{10} - 1) \cdot 10^{12} + 4 \cdot 10^{11} + 9 = 10^{22} - 10^{12} + 4 \cdot 10^{11} + 9 = 10^{22} - 10 \cdot 10^{11} + 4 \cdot 10^{11} + 9 = 10^{22} - 6 \cdot 10^{11} + 9 = (10^{11} - 3)^2 \Rightarrow \sqrt{A} = 10^{11} - 3 = \underbrace{99 \dots 9}_{10's} 7.$ \square

Bài toán 69 ([Tuy23], 3., p. 6). Không dùng máy tính hoặc bảng số, so sánh: (a) $\sqrt{8} + \sqrt{15}$ & $\sqrt{65} - 1$. (b) $\frac{13 - 2\sqrt{3}}{6}$ & $\sqrt{2}$.

Hint. Tìm các số chính phương gần với các số dưới dấu căn để đơn giản dấu căn 1 cách hợp lý.

Giải. (a) $\sqrt{8} + \sqrt{15} < \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$, & $\sqrt{65} - 1 > \sqrt{64} - 1 = 8 - 1 = 7$. Suy ra $\sqrt{8} + \sqrt{15} < \sqrt{65} - 1$. (b) $\frac{13 - 2\sqrt{3}}{6} > \frac{13 - 2\sqrt{4}}{6} = \frac{3}{2} = 1.5$. Mặt khác, $(1.5)^2 = 2.25 > 2 \Leftrightarrow 1.5 > \sqrt{2}$, nên $\frac{13 - 2\sqrt{3}}{6} > \sqrt{2}$. \square

Bài toán 70 ([Tuy23], 4., p. 6). Tìm điều kiện xác định (DKXD) & tập xác định (TXD) của các biểu thức: (a) $\sqrt{2 - x^2}$. (b) $\frac{x}{\sqrt{5x^2 - 3}}$. (c) $\sqrt{-4x^2 + 4x - 1}$. (d) $\frac{1}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$.

Giải. (a) $\sqrt{2 - x^2}$ xác định $\Leftrightarrow 2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 2 \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. DKXD: $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. TXD: $D = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. (b) $\frac{x}{\sqrt{5x^2 - 3}}$ xác định $\Leftrightarrow 5x^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow x^2 > \frac{3}{5} \Leftrightarrow |x| > \sqrt{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow x > \sqrt{\frac{3}{5}}$ hoặc $x < -\sqrt{\frac{3}{5}}$. DKXD: $x > \sqrt{\frac{3}{5}}$ hoặc $x < -\sqrt{\frac{3}{5}}$. TXD: $D = (-\infty, -\sqrt{\frac{3}{5}}) \cup (\sqrt{\frac{3}{5}}, \infty)$. (c) $\sqrt{-4x^2 + 4x - 1}$ xác định $\Leftrightarrow -4x^2 + 4x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow -(2x - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. DKXD: $x = \frac{1}{2}$. TXD: $D = \{\frac{1}{2}\}$. (d) $\frac{1}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$ xác định $\Leftrightarrow x^2 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ hoặc $x < -2$. DKXD: $x > 1$ hoặc $x < -2$. TXD: $D = (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$. \square

Bài toán 71 ([Tuy23], 5., p. 6). Cho $a, b, c \in \mathbb{Q}$ khác nhau đôi một. Chứng minh $A = \sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}} \in \mathbb{Q}$.

1st giải. $\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)}\right) = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)^2 - \frac{2(c-a+a-b+b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)^2 \Rightarrow A = \left|\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right|$. Vì $a, b, c \in \mathbb{Q}$ khác nhau đôi một nghĩa là $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$, suy ra $\frac{1}{a-b}, \frac{1}{b-c}, \frac{1}{c-a} \in \mathbb{Q} \Rightarrow A = \left|\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right| \in \mathbb{Q}$. \square

2nd giải. Vì $(a-b) + (b-c) + (c-a) = 0$, & vì $a, b, c \in \mathbb{Q}$ khác nhau đôi một nghĩa là $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ nên có thể áp dụng Bài toán 62 cho bộ 3 số $(a-b, b-c, c-a)$ để thu được $A = \sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}} \in \mathbb{Q}$. \square

Bài toán 72 ([Tuy23], 6., p. 6). Cho $a, b, c \in \mathbb{Q}$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh $A = \sqrt{(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)} \in \mathbb{Q}$.

Giải. $a^2 + 1 = a^2 + ab + bc + ca = (a+b)(a+c)$, $b^2 + 1 = b^2 + ab + bc + ca = (b+c)(b+a)$, $c^2 + 1 = c^2 + ab + bc + ca = (c+a)(c+b)$, nên $A = \sqrt{(a+b)(a+c)(b+c)(b+a)(c+a)(c+b)} = \sqrt{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2} = |(a+b)(b+c)(c+a)|$. Có: $a, b, c \in \mathbb{Q} \Rightarrow A = |(a+b)(b+c)(c+a)| \in \mathbb{Q}$. \square

Bài toán 73 ([Tuy23], 7., p. 6-7). (a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sqrt{-x^2 + x + \frac{3}{4}}$. (b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = \sqrt{4x^4 - 4x^2(x+1) + (x+1)^2 + 9}$. (c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = \sqrt{25x^2 - 20x + 4} + \sqrt{25x^2}$.

Bài toán 74 ([Tuy23], 8., p. 7). Cho $x < 0$, rút gọn biểu thức $A = |2x - \sqrt{(5x-1)^2}|$.

Bài toán 75 ([Tuy23], 9., p. 7). Cho biểu thức $A = 4x - \sqrt{9x^2 - 12x + 4}$. (a) Rút gọn A . (b) Tính giá trị của A với $x = \frac{2}{7}$.

⁶URL: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Cyclic_sum.

Bài toán 76 ([Tuy23], 10., p. 7). Cho biểu thức $A = 5x + \sqrt{x^2 + 6x + 9}$. (a) Rút gọn A . (b) Tìm x để $B = -9$.

Bài toán 77 ([Tuy23], 11., p. 7). Tìm $x \in \mathbb{R}$ biết $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} \leq 5 - x$.

Bài toán 78 ([Tuy23], 12., p. 7). Giải phương trình: (a) $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{x + 1}$. (b) $\sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 0$. (c) $\sqrt{x^2 - 4} - x^2 + 4 = 0$.

Bài toán 79 ([Tuy23], 13., p. 7). Giải phương trình: (a) $\sqrt{x^2 - 4x + 5} + \sqrt{x^2 - 4x + 8} + \sqrt{x^2 - 4x + 9} = 3 + \sqrt{5}$. (b) $\sqrt{2 - x^2 + 2x} + \sqrt{-x^2 - 6x - 8} = 1 + \sqrt{3}$. (c) $\sqrt{9x^2 - 6x + 2} + \sqrt{45x^2 - 30x + 9} = \sqrt{6x - 9x^2 + 8}$.

Bài toán 80 ([Bin23], Ví dụ 5, p. 7). Cho biểu thức $A = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4x + 4}}$. (a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức A . (b) Rút gọn biểu thức A .

Bài toán 81 ([Bin23], Ví dụ 6, p. 8). Tìm điều kiện xác định của các biểu thức: (a) $A = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}$. (b) $B = \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2x + 1}}}$.

Bài toán 82 ([Bin23], Ví dụ 7, p. 8). Tìm các giá trị của x sao cho $\sqrt{x + 1} < x + 3$.

Bài toán 83 ([Bin23], 7., p. 9). Tìm điều kiện xác định của các biểu thức: (a) $3 - \sqrt{1 - 16x^2}$. (b) $\frac{1}{1 - \sqrt{x^2 - 3}}$. (c) $\sqrt{8x - x^2 - 15}$.

(d) $\frac{2}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$. (e) $A = \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}}$. (f) $B = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{\sqrt{2x + 1}} + \sqrt{x^2 - 8x + 14}$.

Bài toán 84 ([Bin23], 8., p. 9). Cho biểu thức $A = \sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{x^2 + 6x + 9}$. (a) Rút gọn biểu thức A . (b) Tìm các giá trị của x để $A = 1$.

Bài toán 85 ([Bin23], 9., p. 9). Tìm các giá trị của x sao cho: (a) $\sqrt{x^2 - 3} \leq x^2 - 3$. (b) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} > x - 6$.

Bài toán 86 ([Bin23], 10., p. 9). Cho $a + b + c = 0$ & $abc \neq 0$. Chứng minh hằng đẳng thức: $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right|$.

3 Liên Hệ Giữa Phép Nhân, Phép Chia & Phép Khai Phương

Bài toán 87 ([Chí+23], ?1, p. 12). Tính & so sánh: $\sqrt{16 \cdot 25}$ & $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25}$.

Bài toán 88 ([Chí+23], DL, p. 12). Chứng minh: (a) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$. (b)

$$\sqrt{\prod_{i=1}^n a_i} = \prod_{i=1}^n \sqrt{a_i}, \text{ i.e., } \sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n} = \sqrt{a_1} \sqrt{a_2} \cdots \sqrt{a_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_i \in \mathbb{R}, a_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Bài toán 89 ([Chí+23], Ví dụ 1, ?2, p. 13). Áp dụng quy tắc khai phương 1 tích, tính: (a) $\sqrt{49 \cdot 1.44 \cdot 25}$. (b) $\sqrt{810 \cdot 40}$. (c) $\sqrt{0.16 \cdot 0.64 \cdot 225}$. (d) $\sqrt{250 \cdot 360}$.

Bài toán 90 ([Chí+23], Ví dụ 2, ?3, pp. 13–14). Tính: (a) $\sqrt{5}\sqrt{20}$. (b) $\sqrt{1.3}\sqrt{52}\sqrt{10}$. (c) $\sqrt{3}\sqrt{75}$. (d) $\sqrt{20}\sqrt{72}\sqrt{4.9}$.

Bài toán 91 ([Chí+23], Ví dụ 3, ?4, p. 14). Tìm DKXD rồi rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{3a}\sqrt{27a}$ với $a \geq 0$. (b) $\sqrt{9a^2b^4}$. (c) $\sqrt{3a^3}\sqrt{12a}$. (d) $\sqrt{2a \cdot 32ab^2}$.

Bài toán 92 ([Chí+23], 17., p. 14). Áp dụng quy tắc khai phương 1 tích, tính: (a) $\sqrt{0.09 \cdot 64}$. (b) $\sqrt{2^4(-7)^2}$. (c) $\sqrt{12.1 \cdot 360}$. (d) $\sqrt{2^2 \cdot 3^4}$.

Bài toán 93 ([Chí+23], 18., p. 14). Áp dụng quy tắc nhân các căn bậc 2, tính: (a) $\sqrt{7}\sqrt{63}$. (b) $\sqrt{2.5}\sqrt{30}\sqrt{48}$. (c) $\sqrt{0.4} \cdot \sqrt{6.4}$. (d) $\sqrt{2.7}\sqrt{5}\sqrt{1.5}$.

Bài toán 94 ([Chí+23], 19., p. 15). Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{0.36a^2}$ với $a < 0$ & $a \in \mathbb{R}$. (b) $\sqrt{a^4(3-a)^2}$ với $a \geq 3$ & $a \in \mathbb{R}$. (c) $\sqrt{27 \cdot 48(1-a)^2}$ với $a > 1$ & $a \in \mathbb{R}$. (d) $\frac{1}{a-b}\sqrt{a^4(a-b)^2}$ với $a > b$.

Bài toán 95 ([Chí+23], 20., p. 15). Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{\frac{2a}{3}}\sqrt{\frac{3a}{8}}$ với $a \geq 0$. (b) $\sqrt{13a}\sqrt{\frac{52}{a}}$ với $a > 0$. (c) $\sqrt{5a}\sqrt{45a} - 3a$ với $a \geq 0$. (d) $(3-a)^2 - \sqrt{0.2}\sqrt{180a^2}$.

Bài toán 96 ([Chí+23], 21., p. 15). Khai phương tích $12 \cdot 30 \cdot 40$ được bao nhiêu?

Bài toán 97 ([Chí+23], 22., p. 15). Tính hợp lý: (a) $\sqrt{13^2 - 12^2}$. (b) $\sqrt{17^2 - 8^2}$. (c) $\sqrt{117^2 - 108^2}$. (d) $\sqrt{313^2 - 312^2}$.

Bài toán 98 (Mở rộng [Chí+23], 22., p. 15). Rút gọn biểu thức:

$$\sqrt{\left(\frac{m^2 + n^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{m^2 - n^2}{2}\right)^2}, \forall m, n \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 99 ([**Chí+23**], 23., p. 15). Chứng minh: (a) $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1$. (b) $\sqrt{2006} \pm \sqrt{2005}$ là 2 số nghịch đảo của nhau.

Bài toán 100 (Mở rộng [**Chí+23**], 23., p. 15). Chứng minh: (a) $(n - \sqrt{n^2 - 1})(n + \sqrt{n^2 - 1}) = 1, \forall n \in \mathbb{R}, |n| \geq 1$. (b) $\sqrt{n+1} \pm \sqrt{n}$ là 2 số nghịch đảo của nhau, $\forall n \in \mathbb{R}, n \geq 0$.

Bài toán 101 ([**Chí+23**], 24., p. 15). Rút gọn & tìm giá trị (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 3) của các căn thức: (a) $\sqrt{4(1+6x+9x^2)}$ tại $x = -\sqrt{2}$. (b) $\sqrt{9a^2(b^2+4-4b)}$ tại $a = -2, b = -\sqrt{3}$.

Bài toán 102 ([**Chí+23**], 25., p. 16). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{16x} = 8$. (b) $\sqrt{4x} = \sqrt{5}$. (c) $\sqrt{9(x-1)} = 21$. (d) $\sqrt{4(1-x)^2} - 6 = 0$.

Bài toán 103 ([**Chí+23**], 26., p. 16). (a) So sánh $\sqrt{25+9}$ & $\sqrt{25} + \sqrt{9}$. (b) Chứng minh $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$. (c) Chứng minh $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0$.

Bài toán 104 ([**Chí+23**], 27., p. 16). So sánh: (a) 4 & $2\sqrt{3}$. (b) $-\sqrt{5}$ & -2 .

Bài toán 105 ([**Thâ+23**], 23., p. 9). Tính: (a) $\sqrt{10}\sqrt{40}$. (b) $\sqrt{5}\sqrt{45}$. (c) $\sqrt{52}\sqrt{13}$. (d) $\sqrt{2}\sqrt{162}$.

Bài toán 106 ([**Thâ+23**], 24., p. 9). Tính: (a) $\sqrt{45 \cdot 80}$. (b) $\sqrt{75 \cdot 48}$. (c) $\sqrt{90 \cdot 6.4}$. (d) $\sqrt{2.5 \cdot 14.4}$.

Bài toán 107 ([**Thâ+23**], 25., p. 9). Rút gọn rồi tính: (a) $\sqrt{6.8^2 - 3.2^2}$. (b) $\sqrt{21.8^2 - 18.2^2}$. (c) $\sqrt{117.5^2 - 26.5^2 - 1440}$. (d) $\sqrt{146.5^2 - 109.5^2 + 27.256}$.

Bài toán 108 ([**Thâ+23**], 26., p. 9). Chứng minh: (a) $\sqrt{9 - \sqrt{17}}\sqrt{9 + \sqrt{17}} = 8$. (b) $2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 2) + (1 + 2\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} = 9$.

Bài toán 109 ([**Thâ+23**], 27., p. 9). Rút gọn: (a) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{14}}{2\sqrt{3} + \sqrt{28}}$. (b) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + \sqrt{16}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}$.

Bài toán 110 ([**Thâ+23**], 28., p. 9). Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, so sánh: (a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ & $\sqrt{10}$. (b) $\sqrt{3} + 2$ & $\sqrt{2} + \sqrt{6}$. (c) 16 & $\sqrt{15}\sqrt{17}$. (d) 8 & $\sqrt{15} + \sqrt{17}$.

Bài toán 111 ([**Thâ+23**], 29., p. 9). Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, so sánh: (a) $\sqrt{2003} + \sqrt{2005}$ & $2\sqrt{2004}$.

Bài toán 112 ([**Thâ+23**], 30., p. 9). Cho 2 biểu thức $A = \sqrt{x+2}\sqrt{x-3}, B = \sqrt{(x+2)(x-3)}$. (a) Tìm $x \in \mathbb{R}$ lần lượt để A, B có nghĩa. (b) Với giá trị nào của x thì $A = B$?

Bài toán 113 ([**Thâ+23**], 31., p. 10). Biểu diễn \sqrt{ab} ở dạng tích các căn bậc 2 với $a < 0$ & $b < 0$. Áp dụng tính $\sqrt{(-25) \cdot (-64)}$.

Bài toán 114 ([**Thâ+23**], 32., p. 10). Rút gọn các biểu thức: (a) $\sqrt{4(a-3)^2}$ với $a \geq 3$ & $a \in \mathbb{R}$. (b) $\sqrt{9(b-2)^2}$ với $b < 2$ & $b \in \mathbb{R}$. (c) $\sqrt{a^2(a+1)^2}$ với $a > 0$ & $a \in \mathbb{R}$. (d) $\sqrt{b^2(b-1)^2}$ với $b < 0$ & $b \in \mathbb{R}$.

Bài toán 115 ([**Thâ+23**], 33., p. 10). (a) Tìm ĐKXD & biến đổi các biểu thức sau về dạng tích: $A(x) = \sqrt{x^2 - 4} + 2\sqrt{x - 2}, B(x) = 3\sqrt{x+3} + \sqrt{x^2 - 9}$. (b) Giải phương trình $A(x) = 0$ & $B(x) = 0$.

Bài toán 116 ([**Thâ+23**], 34., p. 10). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{x-5} = 3$. (b) $\sqrt{x-10} = -2$. (c) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{5}$. (d) $\sqrt{4-5x} = 12$.

Bài toán 117 ([**Thâ+23**], 35., p. 10). (a) Chứng minh: $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2 = \sqrt{(2n+1)^2} - \sqrt{(2n+1)^2 - 1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Viết đẳng thức trên khi $n = 1, 2, 3, 4$. (B) Đẳng thức trên còn đúng khi $n \in \mathbb{Z}$ & $n \in \mathbb{R}$ không?

Bài toán 118 ([**Chí+23**], ?1, p. 16). Tính & so sánh: $\sqrt{\frac{16}{25}}$ & $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}$.

Bài toán 119 ([**Chí+23**], DL, p. 16). Chứng minh: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a \geq 0, b > 0$.

Bài toán 120 ([**Chí+23**], Ví dụ 1, ?2, p. 17). Áp dụng quy tắc khai phương 1 thương, tính: (a) $\sqrt{\frac{25}{121}}$. (b) $\sqrt{\frac{9}{16} : \frac{25}{36}}$. (c) $\sqrt{\frac{225}{256}}$. (d) $\sqrt{0.0196}$.

Bài toán 121 ([**Chí+23**], Ví dụ 2, ?3, pp. 17-18). Tính: (a) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$. (b) $\sqrt{\frac{49}{8}} : \sqrt{3\frac{1}{8}}$. (c) $\frac{\sqrt{999}}{\sqrt{111}}$. (d) $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}}$.

Bài toán 122 ([**Chí+23**], Ví dụ 3, ?4, p. 18). Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{\frac{4a^2}{25}}$. (b) $\frac{\sqrt{27a}}{\sqrt{3a}}$ với $a > 0$. (c) $\sqrt{\frac{2a^2b^4}{50}}$. (d) $\frac{\sqrt{2ab^2}}{\sqrt{162}}$ với $a \geq 0$.

Bài toán 123 ([**Chí+23**], 28., p. 18). Tính: (a) $\sqrt{\frac{289}{225}}$. (b) $\sqrt{2\frac{14}{25}}$. (c) $\sqrt{\frac{0.25}{9}}$. (d) $\sqrt{\frac{8.1}{1.6}}$.

Bài toán 124 ([**Chí+23**], 29., p. 19). Tính: (a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$. (b) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{735}}$. (c) $\frac{\sqrt{12500}}{\sqrt{500}}$. (d) $\frac{\sqrt{6^5}}{\sqrt{2^3 \cdot 3^5}}$.

Bài toán 125 ([Chí+23], 30., p. 19). Rút gọn biểu thức: (a) $\frac{y}{x}\sqrt{\frac{x^2}{y^4}}$ với $x > 0$ & $y \neq 0$. (b) $2y^2\sqrt{\frac{x^4}{4y^2}}$ với $y < 0$. (c) $5xy\sqrt{\frac{25x^2}{y^6}}$ với $x < 0, y > 0$. (d) $0.2x^3y^3\sqrt{\frac{16}{x^4y^8}}$ với $xy \neq 0$.

Bài toán 126 ([Chí+23], 31., p. 19). (a) So sánh $\sqrt{25-16}$ & $\sqrt{25}-\sqrt{16}$. (b) Chứng minh: $\sqrt{a}-\sqrt{b} < \sqrt{a-b}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a > b > 0$.

Bài toán 127 ([Chí+23], 32., p. 19). Tính: (a) $\sqrt{1\frac{9}{16} \cdot 5\frac{4}{9} \cdot 0.01}$. (b) $\sqrt{1.44 \cdot 1.21 - 1.44 \cdot 0.4}$. (c) $\sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}}$. (d) $\sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}$.

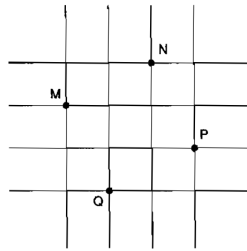
Bài toán 128 ([Chí+23], 33., p. 19). Giải phương trình: (a) $\sqrt{2}x - \sqrt{50} = 0$. (b) $\sqrt{3}x + \sqrt{3} = \sqrt{12} + \sqrt{27}$. (c) $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{12} = 0$. (d) $\frac{x^2}{\sqrt{5}} - \sqrt{20} = 0$.

Bài toán 129 ([Chí+23], 34., pp. 19–20). Rút gọn biểu thức: (a) $ab^2\sqrt{\frac{3}{a^2b^4}}$ với $a < b, b \neq 0$. (b) $\sqrt{\frac{27(a-3)^2}{48}}$ với $a > 3$. (c) $\sqrt{\frac{9+12a+4a^2}{b^2}}$ với $a \geq -1.5$ & $b < 0$. (d) $(a-b)\sqrt{\frac{ab}{(a-b)^2}}$ với $a < b < 0$.

Bài toán 130 ([Chí+23], 35., p. 20). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{(x-3)^2} = 9$. (b) $\sqrt{4x^2+4x+1} = 6$.

Bài toán 131 ([Chí+23], 36., p. 20). Đ/S? (a) $0.01 = \sqrt{0.0001}$. (b) $-0.5 = \sqrt{-0.25}$. (c) $6 < \sqrt{39} < 7$. (d) $(4 - \sqrt{13})2x < \sqrt{3}(4 - \sqrt{13}) \Leftrightarrow 2x < \sqrt{3}$.

Bài toán 132 ([Chí+23], 37., p. 20). Trên lưới ô vuông, mỗi hình vuông cạnh 1 cm, cho 4 điểm M, N, P, Q :



Xác định số đo cạnh, đường chéo & diện tích tứ giác $MNPQ$.

Bài toán 133 ([Thâ+23], 36., p. 10). Áp dụng quy tắc khai phương 1 thương, tính: (a) $\sqrt{\frac{9}{169}}$. (b) $\sqrt{\frac{25}{144}}$. (c) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$. (d) $\sqrt{2\frac{7}{81}}$.

Bài toán 134 ([Thâ+23], 37., p. 11). Áp dụng quy tắc chia căn bậc 2, tính: (a) $\frac{\sqrt{2300}}{\sqrt{23}}$. (b) $\frac{\sqrt{12.5}}{\sqrt{0.5}}$. (c) $\frac{\sqrt{192}}{\sqrt{12}}$. (d) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{150}}$.

Bài toán 135 ([Thâ+23], 38., p. 11). Cho các biểu thức $A = \sqrt{\frac{2x+3}{x-3}}$, $B = \frac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x-3}}$. (a) Tìm $x \in \mathbb{R}$ lần lượt để A, B có nghĩa. (b) Với giá trị nào của $x \in \mathbb{R}$ thì $A = B$?

Bài toán 136 ([Thâ+23], 39., p. 11). Biểu diễn $\sqrt{\frac{a}{b}}$ với $a, b < 0$ ở dạng thương của 2 căn thức. Áp dụng tính $\sqrt{\frac{-49}{-81}}$.

Bài toán 137 ([Thâ+23], 40., p. 11). Rút gọn biểu thức: (a) $\frac{\sqrt{63y^3}}{\sqrt{7y}}$, $y > 0$. (b) $\frac{\sqrt{48x^3}}{\sqrt{3x^5}}$, $x > 0$. (c) $\frac{\sqrt{45mn^2}}{\sqrt{20m}}$, $m, n > 0$. (d) $\frac{\sqrt{16a^4b^6}}{\sqrt{128a^6b^6}}$, $a < 0, b \neq 0$.

Bài toán 138 ([Thâ+23], 41., pp. 11–12). Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}+1}}$, $x \geq 0$. (b) $\frac{x-1}{\sqrt{y}-1}\sqrt{\frac{y-2\sqrt{y}+1}{(x-1)^4}}$, $x \neq 1$, $y \neq 1, y \geq 0$.

Bài toán 139 ([Thâ+23], 42., p. 12). Rút gọn biểu thức với điều kiện đã cho của x rồi tính giá trị của nó: (a) $\sqrt{\frac{(x-2)^4}{(3-x)^2}} + \frac{x^2-1}{x-3}$, $x < 3$, tại $x = 0.5$. (b) $4x - \sqrt{8} + \frac{\sqrt{x^3+2x^2}}{\sqrt{x+2}}$, $x > -2$, tại $x = -\sqrt{2}$.

Bài toán 140 ([[Thâ+23](#)], 43., p. 12). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{\frac{2x-3}{x-1}} = 2$. (b) $\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} = 2$. (c) $\sqrt{\frac{4x+3}{x+1}} = 3$. (d) $\frac{\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+1}} = 3$.

Bài toán 141 ([[Thâ+23](#)], 44., p. 12). Chứng minh bất đẳng thức Cauchy cho 2 số không âm:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 142 ([[Thâ+23](#)], 45., p. 12). Chứng minh:

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0.$$

Bài toán 143 ([[Thâ+23](#)], 46., p. 12). Chứng minh: $a + \frac{1}{a} \geq 2, \forall a \in \mathbb{R}, a > 0$.

Bài toán 144 ([[Thâ+23](#)], 52., p. 13). Chứng $\sqrt{2}$ là số vô tỷ.

Bài toán 145 ([[Thâ+23](#)], 53., p. 13). Chứng minh: (a) $\sqrt{3}$ là số vô tỷ. (b) $5\sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}$ đều là số vô tỷ.

Bài toán 146 ([[Thâ+23](#)], 54., p. 14). Tìm tập hợp các số thực x thỏa mãn bất đẳng thức $\sqrt{x} > 2$ & biểu diễn tập hợp đó trên trục số.

Bài toán 147 ([[Thâ+23](#)], 55., p. 14). Tìm tập hợp các số thực x thỏa mãn bất đẳng thức $\sqrt{x} < 3$ & biểu diễn tập hợp đó trên trục số.

Bài toán 148 ([[Tuy23](#)], Thí dụ 3, p. 9). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}}$.

Bài toán 149 ([[Tuy23](#)], Thí dụ 4, p. 10). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sqrt{x-5} + \sqrt{13-x}$.

Bài toán 150 ([[Tuy23](#)], 14., p. 11). Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{3}} - \sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{7}-2}}$.

Bài toán 151 ([[Tuy23](#)], 15., p. 11). Cho 2 số có tổng bằng $\sqrt{19}$ & có hiệu bằng $\sqrt{7}$. Tính tích của 2 số đó.

Bài toán 152 ([[Tuy23](#)], 16., p. 11). Tính \sqrt{A} biết: (a) $A = 13 - 2\sqrt{42}$. (b) $A = 46 + 6\sqrt{5}$. (c) $A = 12 - 3\sqrt{15}$.

Bài toán 153 ([[Tuy23](#)], 17., p. 12). Rút gọn biểu thức: (a) $A = \sqrt{6 + 2\sqrt{2}\sqrt{3 - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}}$. (b) $B = \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$. (c) $C = \sqrt{3 - \sqrt{5}}(\sqrt{10} - \sqrt{2})(3 + \sqrt{5})$.

Bài toán 154 ([[Tuy23](#)], 18., p. 12). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$.

Bài toán 155 ([[Tuy23](#)], 19., p. 12). Cho $a > 0$, so sánh $\sqrt{a+1} + \sqrt{a+3}$ với $2\sqrt{a+2}$.

Bài toán 156 ([[Tuy23](#)], 20., p. 12). Cho $a, b, x, y > 0$. Chứng minh $\sqrt{ax} + \sqrt{by} \leq \sqrt{(a+b)(x+y)}$.

Bài toán 157 ([[Tuy23](#)], 21., p. 12). (a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-8}$. (b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$.

Bài toán 158 ([[Tuy23](#)], 22., p. 12). Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} \left[\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3} \right]}{2 + \sqrt{1 - x^2}}.$$

Bài toán 159 ([[Tuy23](#)], 23., p. 12). Tìm x, y biết $x + y + 12 = 4\sqrt{x} + 6\sqrt{y-1}$.

Bài toán 160 ([[Tuy23](#)], 24., p. 12). Tìm x, y, z biết $\sqrt{x-a} + \sqrt{y-b} + \sqrt{z-c} = \frac{1}{2}(x+y+z)$, trong đó $a+b+c=3$.

Bài toán 161 ([[Tuy23](#)], 25., p. 12). Giải phương trình $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8+6\sqrt{x-1}} = 5$.

Bài toán 162 ([[Tuy23](#)], 26., p. 12). Giải phương trình $\sqrt{x^2-5x+6} + \sqrt{x+1} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2-2x-3}$.

Bài toán 163 ([[Tuy23](#)], 27., p. 12). Chứng minh bất đẳng thức $\sqrt{n+a} + \sqrt{n-a} < 2\sqrt{n}$ vpos $0 < |a| \leq n$. Áp dụng (không dùng máy tính hoặc bảng số): Chứng minh: $\sqrt{101} - \sqrt{99} > 0.1$.

Bài toán 164 ([[Tuy23](#)], 28., p. 13). Chứng minh: $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Áp dụng: Cho $S = \sum_{i=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}}$. Chứng minh $18 < S < 19$.

Bài toán 165 ([Tuy23], 29., p. 13). Chứng minh: $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Áp dụng: Chứng minh: $S = \sum_{i=1}^{2500} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2500}} < 100$.

Bài toán 166 ([Tuy23], 30., p. 13). Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh $x + y + z \geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$.

Bài toán 167 ([Tuy23], 31., p. 13). Cho $A = \sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}$. Chứng minh $A \leq 4$.

Bài toán 168 ([Tuy23], 32., p. 13). Cho $B = \frac{x^3}{1+y} + \frac{y^3}{1+x}$ trong đó x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy = 1$. Chứng minh $B \geq 1$.

Bài toán 169 ([Tuy23], 33., p. 13). Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 2$. Chứng minh $xyz \leq \frac{1}{8}$.

Bài toán 170 ([Tuy23], 34., p. 13). Tìm các số dương x, y, z sao cho $x + y + z = 3$ & $x^4 + y^4 + z^4 = 3xyz$.

Bài toán 171 ([Tuy23], 35., p. 13). Cho $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 10$. Chứng minh: $x + y \geq 20$.

Bài toán 172 ([Tuy23], 36., p. 13). Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z = 1$. Chứng minh: $\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} \leq \sqrt{6}$.

Bài toán 173 ([Bin23], Ví dụ 8, p. 10). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} - \sqrt{x - \sqrt{2x-1}}$.

Bài toán 174 ([Bin23], Ví dụ 9, p. 11). Chứng minh số $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ là số vô tỷ.

Bài toán 175 ([Bin23], 11., pp. 11–12). Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{11-2\sqrt{10}}$. (b) $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$. (c) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$. (d) $\sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{9+4\sqrt{5}}$. (e) $\sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}}$. (f) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{2} + \sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{7+2\sqrt{10}}}$. (g) $\sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}$. (h) $\sqrt{4 + \sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10+2\sqrt{5}}}$. (i) $\sqrt{94-42\sqrt{5}} - \sqrt{94+42\sqrt{5}}$.

Bài toán 176 ([Bin23], 12., p. 12). Tính: (a) $(4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$. (b) $\sqrt{3 - \sqrt{5}}(\sqrt{10} - \sqrt{2})(3 + \sqrt{5})$. (c) $\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Bài toán 177 ([Bin23], 13., p. 12). Chứng minh các hằng đẳng thức sau với $b \geq 0$, $a \geq \sqrt{b}$: (a) $\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2(a \pm \sqrt{a^2 - b})}$. (b) $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$.

Bài toán 178 ([Bin23], 14., p. 12). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x + 2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x - 2\sqrt{2x-4}}$.

Bài toán 179 ([Bin23], 15., p. 12). Cho biểu thức $A = \frac{x + \sqrt{x^2 - 2x}}{x - \sqrt{x^2 - 2x}} - \frac{x - \sqrt{x^2 - 2x}}{x + \sqrt{x^2 - 2x}}$. (a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức A. (b) Rút gọn biểu thức A. (c) Tìm giá trị của x để $A < 2$.

Bài toán 180 ([Bin23], 16., p. 12). Lập 1 phương trình bậc 2 với các hệ số nguyên, trong đó: (a) $2 + \sqrt{3}$ là 1 nghiệm của phương trình. (b) $6 - 4\sqrt{2}$ là 1 nghiệm của phương trình.

Bài toán 181 ([Bin23], 17., p. 13). Chứng minh các số sau là số vô tỷ: (a) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$. (b) $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Bài toán 182 ([Bin23], 18., p. 13). Có tồn tại các số hữu tỷ dương a, b hay không nếu: (a) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2}$. (b) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{\sqrt{2}}$.

Bài toán 183 ([Bin23], 19., p. 13). Cho 3 số $x, y, \sqrt{x} + \sqrt{y}$ là các số hữu tỷ. Chứng minh mỗi số \sqrt{x}, \sqrt{y} đều là số hữu tỷ.

Bài toán 184 ([Bin23], 20., p. 13). Cho a, b, c, d là các số dương. Chứng minh tồn tại 1 số dương trong 2 số $2a + b - 2\sqrt{cd}$ & $2c + d - 2\sqrt{ab}$.

Bài toán 185 ([Bin23], 21*, p. 13). (a) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}}$ với $a > 0$. (b) Tính giá trị của tổng $B = \sum_{i=1}^{99} \sqrt{1 + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(i+1)^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}}$.

Bài toán 186 ([Bin23], 22*, p. 13). (a) Nêu 1 cách tính nhẩm 997^2 . (b) Tính tổng các chữ số của A biết $\sqrt{A} = 99 \dots 96$ (có 100 chữ số 9).

4 Biến Đổi Đơn Giản Biểu Thức Chứa Căn Thức Bậc 2

Bài toán 187 ([Chí+23], ?1, p. 24). Chứng minh: $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$.

Bài toán 188 ([Chí+23], Ví dụ 1-2, ?2, pp. 24-25). Rút gọn: (a) $\sqrt{2 \cdot 3^2}$. (b) $\sqrt{20}$. (c) $3\sqrt{5} + \sqrt{20} + \sqrt{5}$. (d) $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{50}$. (e) $4\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{45} + \sqrt{5}$.

Bài toán 189 ([Chí+23], Ví dụ 3, ?3, p. 25). Đưa thừa số ra ngoài dấu căn: (a) $\sqrt{4x^2y}$ với $x, y \geq 0$. (b) $\sqrt{18xy^2}$ với $x \geq 0$, $y < 0$. (c) $\sqrt{28a^4b^2}$ với $b \geq 0$. (d) $\sqrt{72a^2b^4}$ với $a < 0$.

Bài toán 190 ([Chí+23], Ví dụ 4, ?4, p. 26). Đưa thừa số vào trong dấu căn: (a) $3\sqrt{7}$. (b) $-2\sqrt{3}$. (c) $5a^2\sqrt{2a}$ với $a \geq 0$. (d) $-3a^2\sqrt{2ab}$ với $ab \geq 0$. (e) $3\sqrt{5}$. (f) $1.2\sqrt{5}$. (g) $ab^4\sqrt{a}$ với $a \geq 0$. (h) $-2ab^2\sqrt{5a}$ với $a \geq 0$.

Bài toán 191 ([Chí+23], Ví dụ 5, p. 26). So sánh $3\sqrt{7}$ & $\sqrt{28}$.

Bài toán 192 ([Chí+23], 43., p. 27). Viết các số hoặc biểu thức dưới dấu căn thành dạng tích rồi đưa thừa số ra ngoài dấu căn: (a) $\sqrt{54}$. (b) $\sqrt{108}$. (c) $0.1\sqrt{20000}$. (d) $-0.05\sqrt{28800}$. (e) $\sqrt{7 \cdot 63a^2}$.

Bài toán 193 ([Chí+23], 44., p. 27). Đưa thừa số vào trong dấu căn: $3\sqrt{5}$, $-5\sqrt{2}$, $-\frac{2}{3}\sqrt{xy}$ với $xy \geq 0$, $x\sqrt{\frac{2}{x}}$ với $x > 0$.

Bài toán 194 ([Chí+23], 45., p. 27). So sánh: (a) $3\sqrt{3}$ & $\sqrt{12}$. (b) 7 & $3\sqrt{5}$. (c) $\frac{1}{3}\sqrt{51}$ & $\frac{1}{5}\sqrt{150}$. (d) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ & $6\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Bài toán 195 ([Chí+23], 46., p. 27). Rút gọn các biểu thức sau với $x \geq 0$: (a) $2\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} + 27 - 3\sqrt{3x}$. (b) $3\sqrt{2x} - 5\sqrt{8x} + 7\sqrt{18x} + 28$.

Bài toán 196 ([Chí+23], 47., p. 27). Rút gọn: (a) $\frac{2}{x^2 - y^2} \sqrt{\frac{3(x+y)^2}{2}}$ với $x \geq 0$, $y \geq 0$, & $x \neq y$. (b) $\frac{2}{2a-1} \sqrt{5a^2(1-4a+4a^2)}$ với $a > 0.5$.

Bài toán 197 ([Thâ+23], 56., p. 14). Đưa thừa số ra ngoài dấu căn: (a) $\sqrt{7x^2}$ với $x > 0$. (b) $\sqrt{8y^2}$ với $y < 0$. (c) $\sqrt{25x^3}$ với $x > 0$. (d) $\sqrt{48y^4}$.

Bài toán 198 ([Thâ+23], 57., p. 14). Đưa thừa số vào trong dấu căn: (a) $x\sqrt{5}$ với $x \geq 0$. (b) $x\sqrt{13}$ với $x < 0$. (c) $x\sqrt{\frac{11}{x}}$ với $x > 0$. (d) $x\sqrt{\frac{-29}{x}}$ với $x < 0$.

Bài toán 199 ([Thâ+23], 58., p. 14). Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{300}$. (b) $\sqrt{98} - \sqrt{72} + 0.5\sqrt{8}$. (c) $\sqrt{9a} - \sqrt{16a} + \sqrt{49a}$ với $a \geq 0$. (d) $\sqrt{16b} + 2\sqrt{40b} - 3\sqrt{90b}$ với $b \geq 0$.

Bài toán 200 ([Thâ+23], 59., p. 14). Rút gọn biểu thức: (a) $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})\sqrt{3} - \sqrt{60}$. (b) $(5\sqrt{2} + 2\sqrt{5})\sqrt{5} - \sqrt{250}$. (c) $(\sqrt{28} - \sqrt{12} - \sqrt{7})\sqrt{7} + 2\sqrt{21}$. (d) $(\sqrt{99} - \sqrt{18} - \sqrt{11})\sqrt{11} + 3\sqrt{22}$.

Bài toán 201 ([Thâ+23], 60., p. 15). Rút gọn biểu thức: (a) $2\sqrt{40\sqrt{12}} - 2\sqrt{\sqrt{75}} - 3\sqrt{5\sqrt{48}}$. (b) $2\sqrt{8\sqrt{3}} - 2\sqrt{5\sqrt{3}} - 3\sqrt{20\sqrt{3}}$.

Bài toán 202 ([Thâ+23], 61., p. 15). Khai triển & rút gọn các biểu thức với $x, y \geq 0$. (a) $(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x} + x)$. (b) $(\sqrt{x} + 2)(x - 2\sqrt{x} + 4)$. (c) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + y + \sqrt{xy})$. (d) $(x + \sqrt{y})(x^2 + y - x\sqrt{y})$.

Bài toán 203 ([Thâ+23], 62., p. 15). Khai triển & rút gọn các biểu thức với $x, y \geq 0$. (a) $(4\sqrt{x} - \sqrt{2x})(\sqrt{x} - \sqrt{2x})$. (b) $(2\sqrt{x} + \sqrt{y})(3\sqrt{x} - 2\sqrt{y})$.

Bài toán 204 ([Thâ+23], 63., p. 15). Chứng minh: (a) $\frac{(x\sqrt{y} + y\sqrt{x})(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{xy}} = x - y$ với $x, y > 0$. (b) $\frac{\sqrt{x^3} - 1}{\sqrt{x} - 1} = x + \sqrt{x} + 1$ với $x \geq 0$ & $x \neq 1$.

Bài toán 205 ([Thâ+23], 64., p. 15). (a) Chứng minh: $x + 2\sqrt{2x-4} = (\sqrt{2} + \sqrt{x-2})^2$ với $x \geq 2$. (b) Rút gọn biểu thức $\sqrt{x + 2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x - 2\sqrt{2x-4}}$ với $x \geq 2$.

Bài toán 206 ([Thâ+23], 65., p. 15). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{25x} = 35$. (b) $\sqrt{4x} \leq 162$. (c) $3\sqrt{x} = \sqrt{12}$. (d) $2\sqrt{x} \geq \sqrt{10}$.

Bài toán 207 ([Thâ+23], 66., p. 15). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{x^2 - 9} - 3\sqrt{x-3} = 0$. (b) $\sqrt{x^2 - 4} - 2\sqrt{x+2} = 0$.

Bài toán 208 ([Thâ+23], 67., p. 15). Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số không âm, chứng minh: (a) Trong các hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất. (b) Trong các hình chữ nhật có cùng diện tích thì hình vuông có chu vi nhỏ nhất.

Bài toán 209 ([Thâ+23], 6.1., p. 15). Rút gọn biểu thức $3\sqrt{x^2y} + x\sqrt{y}$ với $x < 0$, $y \geq 0$.

Bài toán 210 ([Chí+23], Ví dụ 1, ?1, p. 28). Khử mẫu của biểu thức lấy căn: (a) $\sqrt{\frac{2}{3}}$. (b) $\sqrt{\frac{5a}{7b}}$ với $ab > 0$. (c) $\sqrt{\frac{4}{5}}$. (d) $\sqrt{\frac{3}{125}}$. (e) $\sqrt{\frac{3}{2a^3}}$ với $a > 0$.

Bài toán 211 ([Chí+23], Ví dụ 2, ?2, pp. 28–29). Trục căn thức ở mẫu: (a) $\frac{5}{2\sqrt{3}}$. (b) $\frac{10}{\sqrt{3}+1}$. (c) $\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$. (d) $\frac{5}{3\sqrt{8}}, \frac{2}{\sqrt{b}}$ với $b > 0$. (e) $\frac{5}{5-2\sqrt{3}}, \frac{2a}{1-\sqrt{a}}$ với $a \geq 0, a \neq 1$. (f) $\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}, \frac{6a}{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ với $a > b > 0$.

Bài toán 212 ([Chí+23], 48., p. 29). Khử mẫu của biểu thức lấy căn: $\sqrt{\frac{1}{600}}, \sqrt{\frac{11}{540}}, \sqrt{\frac{3}{50}}, \sqrt{\frac{5}{98}}, \sqrt{\frac{(1-\sqrt{3})^2}{27}}$.

Bài toán 213 ([Chí+23], 49., p. 29). Tìm DKXD rồi khử mẫu của biểu thức lấy căn: $ab\sqrt{\frac{a}{b}}, \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}, \sqrt{\frac{1}{b}+\frac{1}{b^2}}, \sqrt{\frac{9a^3}{36b}}, 3xy\sqrt{\frac{2}{xy}}$.

Bài toán 214 ([Chí+23], 50., p. 30). Tìm DKXD rồi trục căn thức: $\frac{5}{\sqrt{10}}, \frac{5}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{3\sqrt{20}}, \frac{2\sqrt{2}+2}{5\sqrt{2}}, \frac{y+b\sqrt{y}}{b\sqrt{y}}$.

Bài toán 215 ([Chí+23], 51., p. 30). Tìm DKXD rồi trục căn thức: $\frac{3}{\sqrt{3}+1}, \frac{2}{\sqrt{3}-1}, \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}, \frac{b}{3+\sqrt{b}}, \frac{p}{2\sqrt{p}-1}$.

Bài toán 216 ([Chí+23], 52., p. 30). Tìm DKXD rồi trục căn thức: $\frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}, \frac{2ab}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

Bài toán 217 ([Chí+23], 53., p. 30). Tìm DKXD rồi rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{18(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$. (b) $ab\sqrt{1+\frac{1}{a^2b^2}}$. (c) $\sqrt{\frac{a}{b^3}+\frac{a}{b^4}}$. (d) $\frac{a+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

Bài toán 218 ([Chí+23], 54., p. 30). Tìm DKXD rồi rút gọn biểu thức: $\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2}, \frac{a-\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}, \frac{p-2\sqrt{p}}{\sqrt{p}-2}$.

Bài toán 219 ([Chí+23], 55., p. 30). Phân tích thành nhân tử với $a, b, x, y \in \mathbb{R}, a, b, x, y \geq 0$: (a) $ab + b\sqrt{a} + \sqrt{a} + 1$. (b) $\sqrt{x^3 - y^3} + \sqrt{x^2y} - \sqrt{xy^2}$.

Bài toán 220 ([Chí+23], 56., p. 30). Sắp xếp theo thứ tự tăng dần: (a) $3\sqrt{5}, 2\sqrt{6}, \sqrt{29}, 4\sqrt{2}$. (b) $6\sqrt{2}, \sqrt{38}, 3\sqrt{7}, 2\sqrt{14}$.

Bài toán 221 ([Chí+23], 57., p. 30). Giải phương trình $\sqrt{25x} - \sqrt{16x} = 9$.

Bài toán 222 ([Thâ+23], 68., p. 16). Khử mẫu của mỗi biểu thức lấy căn & rút gọn (nếu được): (a) $\sqrt{\frac{2}{3}}$. (b) $\sqrt{\frac{x^2}{5}}$ với $x \geq 0$. (c) $\sqrt{\frac{3}{x}}$ với $x > 0$. (d) $\sqrt{x^2 - \frac{x^2}{7}}$ với $x < 0$.

Bài toán 223 ([Thâ+23], 69., p. 16). Trục căn thức ở mẫu & rút gọn (nếu được): (a) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. (b) $\frac{26}{5-2\sqrt{3}}$. (c) $\frac{2\sqrt{10}-5}{4-\sqrt{10}}$. (d) $\frac{9-2\sqrt{3}}{3\sqrt{6}-2\sqrt{2}}$.

Bài toán 224 ([Thâ+23], 70., p. 16). Rút gọn biểu thức: (a) $\frac{2}{\sqrt{3}-1} - \frac{2}{\sqrt{3}+1}$. (b) $\frac{5}{12(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})} - \frac{5}{12(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})}$. (c) $\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} + \frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}$. (d) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}$.

Bài toán 225 ([Thâ+23], 71., p. 16). Chứng minh đẳng thức:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Bài toán 226 ([Thâ+23], 72., p. 17). Xác định giá trị biểu thức sau theo cách thích hợp: $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}$.

Bài toán 227 ([Thâ+23], 73., p. 17). Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, so sánh: $\sqrt{2005} - \sqrt{2004}$ & $\sqrt{2004} - \sqrt{2003}$.

Bài toán 228 ([Thâ+23], 74., p. 17). Rút gọn

$$\frac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{9}}.$$

Bài toán 229 ([Thâ+23], 75., p. 17). Rút gọn biểu thức: (a) $\frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ với $x, y \geq 0, x \neq y$. (b) $\frac{x - \sqrt{3x} + 3}{x\sqrt{x} + 3\sqrt{3}}$ với $x \geq 0$.

Bài toán 230 ([Thâ+23], 76., p. 17). Trục căn thức ở mẫu: (a) $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}$. (b) $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3} + 2}$.

Bài toán 231 ([Thâ+23], 77., p. 17). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{2x+3} = 1 + \sqrt{2}$. (b) $\sqrt{10 + \sqrt{3}x} = 2 + \sqrt{6}$. (c) $\sqrt{3x-2} = 2 - \sqrt{3}$. (d) $\sqrt{x+1} = \sqrt{5} - 3$.

Bài toán 232 ([Thâ+23], 78., p. 17). Tìm tập hợp các giá trị $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện sau & biểu diễn tập hợp đó trên trục số: (a) $\sqrt{x-2} \geq \sqrt{3}$. (b) $\sqrt{3-2x} \leq \sqrt{5}$.

Bài toán 233 ([Thâ+23], 79., pp. 17–18). Cho các số $x, y \in \mathbb{R}$ có dạng $x = a_1\sqrt{2} + b_1$ & $y = a_2\sqrt{2} + b_2$, trong đó $a_i, b_i \in \mathbb{Q}, i = 1, 2$. Chứng minh: (a) $x + y$ & xy cũng có dạng $a\sqrt{2} + b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. (b) $\frac{x}{y}$ với $y \neq 0$ cũng có dạng $a\sqrt{2} + b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$.

Bài toán 234 ([Thâ+23], 7.1., p. 18). Rút gọn biểu thức $x\sqrt{\frac{x}{y^3}}$ với $x, y < 0$.

Bài toán 235 ([Thâ+23], 7.2., p. 18). Tính $\frac{6}{\sqrt{7}-1}$.

Bài toán 236 ([Bìn23], Ví dụ 10, p. 14). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$.

Bài toán 237 ([Bìn23], Ví dụ 11, p. 14). Tính giá trị của biểu thức

$$M = \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{(i+1)\sqrt{i} + i\sqrt{i+1}} = \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{25\sqrt{24} + 24\sqrt{25}}.$$

Bài toán 238 ([Bìn23], 23., p. 15). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{1-a} + \sqrt{a(a-1)} + a\sqrt{\frac{a-1}{a}}$.

Bài toán 239 ([Bìn23], 24., p. 15). Chứng minh các hằng đẳng thức: (a) $\sqrt{10 + \sqrt{60} - \sqrt{24} - \sqrt{40}} = \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{2}$. (b) $\sqrt{6 + \sqrt{24} + \sqrt{12} + \sqrt{8}} - \sqrt{3} = \sqrt{2} + 1$.

Bài toán 240 ([Bìn23], 25., p. 15). Cho $A = \sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}}$. Biểu diễn A dưới dạng tổng của 3 căn thức.

Bài toán 241 ([Bìn23], 26., p. 15). Rút gọn biểu thức $A = \frac{x+3+2\sqrt{x^2-9}}{2x-6+\sqrt{x^2-9}}$.

Bài toán 242 ([Bìn23], 27., p. 15). Rút gọn biểu thức $B = \frac{x^2+5x+6+x\sqrt{9-x^2}}{3x-x^2+(x+2)\sqrt{9-x^2}}$.

Bài toán 243 ([Bìn23], 28., p. 15). Rút gọn biểu thức:

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}},$$

$$B = \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{\sqrt{i} - \sqrt{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{1} - \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{4}} - \cdots - \frac{1}{\sqrt{24} - \sqrt{25}}.$$

5 Rút Gọn Biểu Thức Có Chứa Căn Thức Bậc 2

Bài toán 244 ([Chí+23], Ví dụ 1, ?1, p. 31). Rút gọn: (a) $5\sqrt{a} + 6\sqrt{\frac{a}{4}} - a\sqrt{\frac{4}{a}} + \sqrt{5}$ với $a > 0$. (b) $3\sqrt{5a} - \sqrt{20a} + 4\sqrt{45a} + \sqrt{a}$ với $a \geq 0$.

Bài toán 245 ([Chí+23], Ví dụ 2, p. 31). Chứng minh: $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) = 2\sqrt{2}$.

Bài toán 246 ([Chí+23], ?2, p. 31). Chứng minh: $\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$.

Bài toán 247 ([Chí+23], ?2, p. 31). Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)$ với $a \in \mathbb{R}$. (a) Tìm DKXD. (b) Rút gọn biểu thức P . (c) Tìm giá trị của $a \in \mathbb{R}$ để $P < 0$.

Bài toán 248 ([Chí+23], ?3, p. 32). Tìm DKXD & rút gọn biểu thức: (a) $\frac{x^2-3}{x+\sqrt{3}}$. (b) $\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}$.

Bài toán 249 ([**Chí+23**], 58., p. 32). Rút gọn biểu thức: (a) $5\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{20} + \sqrt{5}$. (b) $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4.5} + \sqrt{12.5}$. (c) $\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72}$. (d) $0.1\sqrt{200} + 2\sqrt{0.08} + 0.4\sqrt{50}$.

Bài toán 250 ([**Chí+23**], 59., p. 32). Tìm DKXD & rút gọn biểu thức: (a) $5\sqrt{a} - 4b\sqrt{25a^3} + 5a\sqrt{16ab^2} - 2\sqrt{9a}$. (b) $5a\sqrt{64ab^3} - \sqrt{3}\sqrt{12a^3b^3} + 2ab\sqrt{9ab} - 5b\sqrt{81a^3b}$.

Bài toán 251 ([**Chí+23**], 60., p. 33). Cho biểu thức $A = \sqrt{16x+16} - \sqrt{9x+9} + \sqrt{4x+4} + \sqrt{x+1}$. (a) Tìm DKXD. (b) Rút gọn biểu thức A. (c) Tìm $x \in \mathbb{R}$ sao cho $A = 16$.

Bài toán 252 ([**Chí+23**], 61., p. 33). Chứng minh đẳng thức: $\frac{3}{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$. (b) $\left(x\sqrt{\frac{6}{x}} + \sqrt{\frac{2x}{3}} + \sqrt{6x}\right) : \sqrt{6x} = 2\frac{1}{3}$ với $x > 0$.

Bài toán 253 ([**Chí+23**], 62., p. 33). Rút gọn biểu thức: (a) $\frac{1}{2}\sqrt{48} - 2\sqrt{75} - \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}} + 5\sqrt{1\frac{1}{3}}$. (b) $\sqrt{150} + \sqrt{1.6}\sqrt{60} + 4.5\sqrt{2\frac{2}{3}} - \sqrt{6}$. (c) $(\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7})\sqrt{7} + \sqrt{84}$. (d) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120}$.

Bài toán 254 ([**Chí+23**], 63., p. 33). Tìm DKXD & rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{ab} + \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}$. (b) $\sqrt{\frac{m}{1-2x+x^2}}\sqrt{\frac{4m-8mx+4mx^2}{81}}$.

Bài toán 255 ([**Chí+23**], 64., p. 33). Chứng minh đẳng thức: (a) $\left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)\left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-a}\right)^2 = 1, \forall a \in \mathbb{R}, a \geq 0, a \neq 1$. (b) $\frac{a+b}{b^2}\sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2+2ab+b^2}} = |a|, \forall a, b \in \mathbb{R}, a+b > 0, b \neq 0$.

Bài toán 256 ([**Chí+23**], 65., p. 34). Tìm DKXD & rút gọn rồi so sánh giá trị của A với 1 biết:

$$A = \left(\frac{1}{a-\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}-1}\right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1}.$$

Bài toán 257 ([**Chí+23**], 66., p. 34). Tính $\frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}}$.

Bài toán 258 ([**Thâ+23**], 80., p. 18). Tìm DKXD & rút gọn biểu thức: (a) $(2-\sqrt{2})(-5\sqrt{2}) - (3\sqrt{2}-5)^2$. (b) $2\sqrt{3a} - \sqrt{75a} + a\sqrt{\frac{13.5}{2a}} - \frac{2}{5}\sqrt{300a^3}$

Bài toán 259 ([**Thâ+23**], 81., p. 18). Tìm DKXD & rút gọn biểu thức: (a) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. (b) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{a-b}$.

Bài toán 260 ([**Thâ+23**], 82., pp. 18–19). (a) Chứng minh $x^2 + x\sqrt{3} + 1 = \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$. (b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x^2 + x\sqrt{3} + 1$. Giá trị đó đạt được khi x bằng bao nhiêu?

Bài toán 261 ([**Thâ+23**], 83., p. 19). Chứng tỏ giá trị các biểu thức sau là số hữu tỷ: (a) $\frac{2}{\sqrt{7}-5} - \frac{2}{\sqrt{7}+5}$. (b) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$.

Bài toán 262 ([**Thâ+23**], 84., p. 19). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{4x+20} - 3\sqrt{5+x} + \frac{4}{3}\sqrt{9x+45} = 6$. (b) $\sqrt{25x-25} - \frac{15}{2}\sqrt{\frac{x-1}{9}} = 6 + \sqrt{x-1}$.

Bài toán 263 ([**Thâ+23**], 85., p. 19). Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$. (a) Tìm DKXD. (b) Rút gọn A. (c) Tìm $x \in \mathbb{R}$ để $A = 2$.

Bài toán 264 ([**Thâ+23**], 86., p. 19). Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1}\right)$. (a) Tìm DKXD. (b) Rút gọn A. (c) Tìm $a \in \mathbb{R}$ để $A > 0$.

Bài toán 265 ([**Thâ+23**], 87., p. 19). (a) Chứng minh bất đẳng thức: $a+b+c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}, \forall a, b, c \in \mathbb{R}, a, b, c \geq 0$. (b) Mở rộng kết quả cho trường hợp 4, 5 số không âm. (c) Mở rộng kết quả cho trường hợp $n \in \mathbb{N}^*$ số không âm.

Bài toán 266 ([**Thâ+23**], 88., p. 19). Giải bất phương trình $\sqrt{32}x - (\sqrt{8} + \sqrt{2})x > \sqrt{2}$.

Bài toán 267 ([**Tuy23**], Thí dụ 5, p. 14). Cho $A = \sqrt{11+\sqrt{96}}$ & $B = \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$. Không dùng máy tính hoặc bảng số, so sánh A & B.

Bài toán 268 ([Tuy23], Thí dụ 6, p. 15). Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} - \frac{x-3}{\sqrt{x-1} - \sqrt{2}} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{2x} - x} \right)$.

(a) Tìm DKXD rồi rút gọn A . (b) Tính giá trị của A với $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

Bài toán 269 ([Tuy23], 37., pp. 15–16). Không dùng máy tính hoặc bảng số, so sánh các số sau: (a) $-3\sqrt{11}$ & $-7\sqrt{2}$. (b) $\frac{7}{2}\sqrt{\frac{1}{12}}$ & $\frac{9}{4}\sqrt{\frac{1}{5}}$. (c) $\sqrt{\frac{4}{27}}$ & $\sqrt{\frac{3}{26}}$.

Bài toán 270 ([Tuy23], 38., p. 16). Không dùng máy tính hoặc bảng số, chứng minh $4\sqrt{5} - 3\sqrt{2} < 5$.

Bài toán 271 ([Tuy23], 39., p. 16). Cho $A = \sqrt{x^2 + 1} - x - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$ trong đó $x \in \mathbb{R}$. Xác định $x \in \mathbb{R}$ để giá trị của A là 1 số tự nhiên.

Bài toán 272 ([Tuy23], 40., p. 16). Trục căn thức ở mẫu của các biểu thức sau: (a) $A = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{2c}}$ trong đó $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện c là trung bình nhân của a & b . (b) $B = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}}$ trong đó $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn điều kiện $ab = cd$ & $a + b \neq c + d$.

Bài toán 273 ([Tuy23], 41., p. 16). Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ sao cho $x > y > 0$ thỏa mãn điều kiện $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{931}$.

Bài toán 274 ([Tuy23], 42., p. 16). Chứng minh: $\frac{2\sqrt{mn}}{\sqrt{m} + \sqrt{n} + \sqrt{m+n}} = \sqrt{m} + \sqrt{n} - \sqrt{m+n}$. Áp dụng tính $\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}}$.

Bài toán 275 ([Tuy23], 43., p. 16). Chứng minh: $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Áp dụng tính tổng: $S = \sum_{i=1}^{399} \frac{1}{(i+1)\sqrt{i} + i\sqrt{i+1}} = \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{400\sqrt{399} + 399\sqrt{400}}$.

Bài toán 276 ([Tuy23], 44., p. 16). Tìm $n \in \mathbb{N}$ nhỏ nhất sao cho $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 0.05$.

Bài toán 277 ([Tuy23], 45., p. 17). Cho $A = \sum_{i=1}^{120} \frac{1}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{120} + \sqrt{121}}$, $B = \sum_{i=1}^{35} \frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{35}}$. Chứng minh $A < B$.

Bài toán 278 ([Tuy23], 46., p. 17). Cho $x, y, z > 0$ & khác nhau đôi một. Chứng minh giá trị của biểu thức

$$A = \frac{x}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{z})} + \frac{y}{(\sqrt{y} - \sqrt{z})(\sqrt{y} - \sqrt{x})} + \frac{z}{(\sqrt{z} - \sqrt{x})(\sqrt{z} - \sqrt{y})}$$

không phụ thuộc vào giá trị của các biến.

Bài toán 279 ([Tuy23], 47., p. 17). Cho biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{5}{x - \sqrt{x} - 6} - \frac{\sqrt{x} - 2}{3 - \sqrt{x}}$. (a) Rút gọn A . (b) Tìm giá trị lớn nhất của A .

Bài toán 280 ([Tuy23], 48., p. 17). Cho $A = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left(1 + \frac{x + y + 2xy}{1 - xy} \right)$. (a) Rút gọn A . (b) Tính giá trị của P với $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$. (c) Tìm giá trị lớn nhất của A .

Bài toán 281 ([Tuy23], 49., p. 17). Cho $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy} + \sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 1} + \frac{2\sqrt{z}}{\sqrt{zx} + 2\sqrt{z} + 2}$. Biết $xyz = 4$, tính \sqrt{P} .

Bài toán 282 ([Bin23], Ví dụ 12, p. 15). Tính: $A = \left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \right) : \left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} - \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \right)$.

Bài toán 283 ([Bin23], Ví dụ 13, p. 16). Rút gọn biểu thức $A = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$.

Bài toán 284 ([Bin23], Ví dụ 14, p. 16). Cho $A = \frac{\sqrt{a} + 6}{\sqrt{a} + 1}$. (a) Tìm các số nguyên a để A là số nguyên. (b) Chứng minh với $a = \frac{4}{9}$ thì A là số nguyên. (c) Tìm các số hữu tỷ a để A là số nguyên.

Bài toán 285 ([Bin23], 29., p. 18). Rút gọn biểu thức: (a) $A = \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1 - \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}}$.

(b) $B = \left(\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{a}}{1 - a} \right)^2$. (c) $C = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}} : \left[\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \frac{1}{x + y + 2\sqrt{xy}} + \frac{2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^3} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \right]$ với $x = 2 - \sqrt{3}$ & $y = 2 + \sqrt{3}$.

Bài toán 286 ([Bin23], 30., p. 18). Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}$.

Bài toán 287 ([Bin23], 31., p. 18). Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x^2 - y^2}} - \sqrt{x - \sqrt{x^2 - y^2}}}{\sqrt{2(x-y)}}$ với $x > y > 0$.

Bài toán 288 ([Bin23], 32., p. 18). Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right)$ với $x = \frac{a^2 + b^2}{2ab}$ & $b > a > 0$.

Bài toán 289 ([Bin23], 33., p. 18). Rút gọn biểu thức $B = \frac{2a\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$ với $x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1-a}{a}} - \sqrt{\frac{a}{1-a}} \right)$ & $0 < a < 1$.

Bài toán 290 ([Bin23], 34., p. 18). Rút gọn biểu thức $A = a + b - \sqrt{\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{c^2+1}}$ với $a, b, c > 0$ & $ab + bc + ca = 1$.

Bài toán 291 ([Bin23], 35., p. 18). Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}} \cdot \sqrt{2x-1}$.

Bài toán 292 ([Bin23], 36., p. 18). Chứng minh hằng đẳng thức sau với $x \geq 2$

$$\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{\frac{x^2-4}{x}}} + \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{\frac{x^2-4}{x}}} = \sqrt{\frac{2x+4}{\sqrt{x}}}.$$

Bài toán 293 ([Bin23], 37., p. 18). Cho $a = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}$. Tính $a^7 + b^7$.

Bài toán 294 ([Bin23], 38., p. 19). Cho biết $\sqrt{x^2-6x+13} - \sqrt{x^2-6x+10} = 1$. Tính $\sqrt{x^2-6x+13} + \sqrt{x^2-6x+10}$.

Bài toán 295 ([Bin23], 39., p. 19). Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-2}$. (a) Tìm các số nguyên a để A là số nguyên. (b) Tìm các số hữu tỷ a để A là số nguyên.

Bài toán 296 ([Bin23], 40., p. 19). Cho $a = \sqrt{2} - 1$. (a) Viết a^2, a^3 dưới dạng $\sqrt{m} - \sqrt{m-1}$ trong đó m là số tự nhiên. (b) Chứng minh với mọi số nguyên dương n , số a^n viết được dưới dạng trên.

6 Cube Root, nth Root – Căn Bậc 3, Căn Bậc n

Bài toán 297 (Program to print out 1st n cube roots). Viết chương trình Pascal, C/C++, Python xuất ra căn bậc 3 của n số tự nhiên đầu tiên với $n \in \mathbb{N}^*$ được nhập từ bàn phím.

Bài toán 298. Viết chương trình Pascal, C/C++, Python để kiểm tra 1 số $n \in \mathbb{N}^*$ được nhập từ bàn phím có phải là lập phương của 1 số tự nhiên hay không.

Bài toán 299 (Program to print out 1st n nth roots). Viết chương trình Pascal, C/C++, Python xuất ra căn bậc n của m số tự nhiên đầu tiên với $m, n \in \mathbb{N}^*$ được nhập từ bàn phím.

Bài toán 300. Viết chương trình Pascal, C/C++, Python để kiểm tra 1 số m được nhập từ bàn phím có phải là lũy thừa bậc n của 1 số tự nhiên hay không với $m, n \in \mathbb{N}^*$ được nhập từ bàn phím.

Bài toán 301 ([Chí+23], ?1, p. 35). Tìm căn bậc 3 của: $27, -64, 0, \frac{1}{125}$.

Bài toán 302 ([Chí+23], Ví dụ 2, p. 35). So sánh 2 & $\sqrt[3]{7}$.

Bài toán 303 ([Chí+23], Ví dụ 3, p. 36). Rút gọn $\sqrt[3]{8a^3} - 5a$.

Bài toán 304 ([Chí+23], ?2, p. 36). Tính $\sqrt[3]{1728} : \sqrt[3]{64}$ theo 2 cách.

Bài toán 305 ([Chí+23], 67., p. 36). Tính: $\sqrt[3]{512}, \sqrt[3]{-729}, \sqrt[3]{0.064}, \sqrt[3]{-0.216}, \sqrt[3]{-0.008}$.

Bài toán 306 ([Chí+23], 68., p. 36). Tính: (a) $\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{-8} - \sqrt[3]{125}$. (b) $\frac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}} - \sqrt[3]{54} \sqrt[3]{4}$.

Bài toán 307 ([Chí+23], 69., p. 36). So sánh: (a) 5 & $\sqrt[3]{123}$. (b) $5\sqrt[3]{6}$ & $6\sqrt[3]{5}$.

Bài toán 308 ([Thâ+23], 88., p. 20). Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, tính: $\sqrt[3]{-343}, \sqrt[3]{0.027}, \sqrt[3]{1.331}, \sqrt[3]{-0.512}$.

Bài toán 309 ([Thâ+23], 89., p. 20). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt[3]{x} = -1.5$. (b) $\sqrt[3]{x-5} = 0.9$.

Bài toán 310 (Mở rộng [Thâ+23], 89., p. 20). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt[3]{x} = a \in \mathbb{R}$. (b) $\sqrt[3]{ax+b} = c$. (c) $\sqrt[3]{ax^2+bx+c} = d$.

Bài toán 311 ([Thâ+23], 90., p. 20). Chứng minh: (a) $\sqrt[3]{a^3b} = a\sqrt[3]{b}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. (b) $\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}} = \frac{1}{b}\sqrt[3]{ab}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

Bài toán 312 ([Thâ+23], 92., p. 20). Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, so sánh: (a) $2\sqrt[3]{3}$ & $\sqrt[3]{23}$. (b) 33 & $3\sqrt[3]{1333}$.

Bài toán 313 ([Thâ+23], 93., p. 20). Tìm tập hợp các giá trị $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện sau & biểu diễn tập hợp đó trên trục số: (a) $\sqrt[3]{x} \geq 2$. (b) $\sqrt[3]{x} \leq -1.5$.

Bài toán 314 ([Thâ+23], 94., pp. 20–21). Chứng minh:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z) [(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2], \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Từ đó, chứng tỏ:

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq xyz, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}, x, y, z \geq 0,$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}, a, b, c \geq 0.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 315 ([Thâ+23], 95., p. 20). Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số không âm, chứng minh: (a) Trong các hình hộp chữ nhật có cùng tổng 3 kích thước thì hình lập phương có thể tích lớn nhất. (b) Trong các hình hộp chữ nhật có cùng thể tích thì hình lập phương có tổng 3 kích thước bé nhất.

Bài toán 316 (Mở rộng [Tuy23], Thí dụ 1, p. 5). Cho $x \in \mathbb{R}$. So sánh $\sqrt[3]{x}$ với x .

Giải. $\sqrt[3]{x}$ xác định $\forall x \in \mathbb{R}$. Xét các trường hợp: (a) $\sqrt[3]{x} = x \Leftrightarrow x = x^3 \Leftrightarrow x - x^3 = 0 \Leftrightarrow x(1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow x(1 - x)(1 + x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \pm 1\}$. (b) $\sqrt[3]{x} < x \Leftrightarrow x < x^3 \Leftrightarrow x - x^3 < 0 \Leftrightarrow x(1 - x^2) < 0 \Leftrightarrow x(1 - x)(1 + x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$ hoặc $x > 1$, trong đó phép biến đổi tương đương cuối cùng thu được nhờ lập bảng xét dấu. (c) $\sqrt[3]{x} > x \Leftrightarrow x > x^3 \Leftrightarrow x - x^3 > 0 \Leftrightarrow x(1 - x^2) > 0 \Leftrightarrow x(1 - x)(1 + x) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ hoặc $0 < x < 1$, trong đó phép biến đổi tương đương cuối cùng cũng thu được nhờ lập bảng xét dấu. Vậy: $\sqrt[3]{x} = x \Leftrightarrow x \in \{0, \pm 1\}$, $\sqrt[3]{x} < x \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$, $\sqrt[3]{x} > x \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$. \square

Bài toán 317 (Mở rộng [Tuy23], Thí dụ 1, p. 5). Cho $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. So sánh $\sqrt[n]{x}$ với x .

Bài toán 318 ([Tuy23], Thí dụ 7, p. 19). Tính $x = \sqrt[3]{17\sqrt{5}+38} - \sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}$.

Bài toán 319 ([Tuy23], Thí dụ 8, p. 20). Giải & biện luận phương trình $(x-a)^n = a^2 - 2a + 1$ với $n \in \mathbb{N}^*$, a là tham số.

Bài toán 320 ([Tuy23], 50., p. 21). Tính: (a) $\sqrt[3]{8\sqrt{5}-16}\sqrt[3]{8\sqrt{5}+16}$. (b) $\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} + \sqrt[6]{8}$. (c) $\sqrt[4]{4}\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}$.

Bài toán 321 ([Tuy23], 51., p. 21). (a) Tính $\frac{2}{\sqrt[3]{3}-1} - \frac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}$. (b) Cho $x = \frac{2}{2\sqrt[3]{2}+2+\sqrt[3]{4}}$, $y = \frac{6}{2\sqrt[3]{2}-2+\sqrt[3]{4}}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{xy}{x+y}$.

Bài toán 322 ([Tuy23], 52., p. 21). Cho $x = \frac{\sqrt[3]{8-3\sqrt{5}} + \sqrt[3]{64-12\sqrt{20}}}{\sqrt[3]{57}} \sqrt[3]{8+3\sqrt{5}}$, $y = \frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[4]{2}} + \frac{\sqrt{2}-9\sqrt[3]{9}}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[3]{81}}$. Tính xy .

Bài toán 323 ([Tuy23], 53., p. 22). Tính: (a) $x = \sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$. (b) $x = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$. (c) $x = \sqrt[3]{182+\sqrt{33125}} + \sqrt[3]{182-\sqrt{33125}}$.

Bài toán 324 ([Tuy23], 54., p. 22). Cho $A = \sqrt[3]{60 + \sqrt[3]{60 + \sqrt[3]{60 + \cdots + \sqrt[3]{60}}}}$. Chứng minh $3 < A < 3$. Tìm $\lfloor A \rfloor$.

Bài toán 325 ([Tuy23], 55., p. 22). Cho $A = \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \cdots + \sqrt{20}}}}$, $B = \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \cdots + \sqrt[3]{24}}}}$. Chứng minh $7 < A + B < 8$. Tìm $\lfloor A + B \rfloor$.

Bài toán 326 ([Tuy23], 56., p. 22). So sánh $a = \sqrt[3]{5\sqrt{2}}$ & $b = \sqrt{5\sqrt[3]{2}}$.

Bài toán 327 ([Tuy23], 57., p. 22). Cho $ax^3 = by^3 = cz^3$ & $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Chứng minh $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$.

Bài toán 328 ([Tuy23], 58., p. 22). Giải phương trình: (a) $x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3}$. (b) $x^3 + 2x^2 - 4x = -\frac{8}{3}$.

Bài toán 329 ([Tuy23], 59., p. 22). Giải phương trình: (a) $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{5x}$. (b) $2\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2} = \sqrt[3]{x^2-4}$.

Bài toán 330 ([Tuy23], 60., p. 22). Giải phương trình: $\sqrt[3]{x-5} + \sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{3x+2} = -2$.

Bài toán 331 ([Tuy23], 61., p. 22). Giải phương trình: $\sqrt[n]{(x-2)^2} + 4\sqrt[n]{x^2-4} = 5\sqrt[n]{(x+2)^2}$.

Bài toán 332 ([Tuy23], 62., p. 22). Cho $A = (a+b)(b+c)(c+a)$ trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh $A + 1 \geq 3(a+b+c)$.

Bài toán 333 ([Bin23], Ví dụ 15, p. 20). Chứng tỏ số $m = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ là 1 nghiệm của phương trình $x^3 + 3x - 4 = 0$.

Bài toán 334 ([Bin23], Ví dụ 16, p. 20). Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$.

Bài toán 335 ([Bin23], 41., p. 20). Tính: (a) $\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 2}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$. (b) $\sqrt{3 + \sqrt{3} + \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}}$. (c) $\frac{4 + 2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}}$.

Bài toán 336 ([Bin23], 42., p. 21). Số $m = \sqrt[3]{4 + \sqrt{80}} - \sqrt[3]{4 - \sqrt{80}}$ có phải là nghiệm của phương trình $x^3 + 12x - 8 = 0$ không?

Bài toán 337 ([Bin23], 43., p. 21). Lập 1 phương trình bậc 3 với các hệ số nguyên, trong đó: (a) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ là 1 nghiệm của phương trình. (b) $\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}$ là 1 nghiệm của phương trình.

Bài toán 338 ([Bin23], 44., p. 21). Tính: (a) $A = \sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$. (b) $B = \sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$. (c) $C = \sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$. (d) $D = \sqrt[3]{2+10\sqrt{\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{2-10\sqrt{\frac{1}{27}}}$. (e) $E = \sqrt[3]{4+\frac{5}{3}\sqrt{\frac{31}{3}}} + \sqrt[3]{4-\frac{5}{3}\sqrt{\frac{31}{3}}}$.

Bài toán 339 ([Bin23], 45., p. 21). Tìm x biết: (a) $\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{2-x} = 1$. (b) $2x^3 = (x-1)^3$.

Bài toán 340 ([Bin23], 46., p. 21). Cho $am^3 = bn^3 = cp^3$ & $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1$. Chứng minh: $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{am^2 + bn^2 + cp^2}$.

Bài toán 341 ([Bin23], 47., p. 21). Tính: (a) $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}(\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}})$. (b) $\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}} - \sqrt{2}$. (c) $\sqrt[4]{56-24\sqrt{5}}$. (d) $1 + \sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}$. (e) $\frac{2}{\sqrt{4-3\sqrt{5}+2\sqrt{5}-\sqrt[4]{125}}}$.

7 Miscellaneous

Bài toán 342 ([Tuy23], Thí dụ 15, pp. 29-30). Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right)$. (a) Rút gọn A . (b) Tính giá trị của A với $x = 7 - 4\sqrt{3}$. (c) Tìm giá trị lớn nhất của a để $P > a$.

Bài toán 343 ([Tuy23], 80., p. 31). Chứng minh: $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(a+b)^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} \right|$, $\forall a, b \in \mathbb{R}, ab(a+b) \neq 0$. Áp dụng tính $A = \sqrt{1 + 999^2 + \frac{999^2}{1000^2}} + \frac{999}{1000}$.

Bài toán 344 ([Tuy23], 81., p. 31). Rút gọn biểu thức $A = (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$.

Bài toán 345 ([Tuy23], 82., p. 31). Không dùng máy tính hoặc bảng số, chứng minh: $\sqrt{14} - \sqrt{13} < 2\sqrt{3} - \sqrt{11}$.

Bài toán 346 ([Tuy23], 83., p. 31). Giải phương trình: $\frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 1$.

Bài toán 347 ([Tuy23], 84., p. 31). Tìm x, y, z biết $x + y + z + 35 = 2(2\sqrt{x+1} + 3\sqrt{y+2} + 4\sqrt{z+3})$.

Bài toán 348 ([Tuy23], 85., p. 31). Cho $a > 0, b > 0$ & $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. Chứng minh: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1}$.

Bài toán 349 ([Tuy23], 86., p. 31). Chứng minh: $A = \sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{2} + \sqrt{10}$.

Bài toán 350 ([Tuy23], 87., p. 31). Chứng minh:

$$\frac{1}{4} < \frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}} < \frac{3}{10},$$

(ở tử có n dấu căn, ở mẫu có $n-1$ dấu căn).

Bài toán 351 ([Tuy23], 88., p. 31). Giải phương trình: $\sqrt{x+2-3\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x-2+3\sqrt{2x-5}} = 2\sqrt{2}$.

Bài toán 352 ([Tuy23], 89., p. 31). Giải phương trình: $\sqrt[3]{(65+x)^2} + 4\sqrt[3]{(65-x)^2} = 5\sqrt[3]{65^2 - x^2}$.

Bài toán 353 ([Tuy23], 90., p. 32). Giải phương trình ẩn x : $\frac{(a-x)\sqrt[4]{x-b} + (x-b)\sqrt[4]{a-x}}{\sqrt[4]{a-x} + \sqrt[4]{x-b}} = \frac{a-b}{2}$ với $a > b$.

Bài toán 354 ([Tuy23], 91., p. 32). Cho biểu thức $A = \sum_{i=1}^{199} \frac{1}{\sqrt{i(200-i)}} = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 199}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 198}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{199 \cdot 1}}$. Chứng minh $A > 1.99$.

Bài toán 355 ([Tuy23], 92., p. 32). Cho n số dương a_1, a_2, \dots, a_n . Chứng minh:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

Bài toán 356 ([Tuy23], 93., p. 32). Cho các số thực dương a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $abcd = 1$. Chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + a(b+c) + b(c+d) + c(d+a) + d(a+b) \geq 12$.

Bài toán 357 ([Tuy23], 94., p. 32). Giải phương trình: $\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x^2+x+1}} = \frac{7}{4}$.

Bài toán 358 ([Tuy23], 95., p. 32). Giải phương trình: $\sqrt{x+x^2} + \sqrt{x-x^2} = x+1$.

Bài toán 359 ([Tuy23], 96., p. 32). Cho $A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$ với $0 \leq x \leq 1$. Rút gọn biểu thức $B = 1 - \sqrt{A+x+1}$.

Bài toán 360 ([Tuy23], 97., p. 32). Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$. (a) Rút gọn A . (b) Tính giá trị của A với $x = 14 - 6\sqrt{5}$. (c) Tìm GTNN của A .

Bài toán 361 ([BNS23], Ví dụ 1.1, p. 5). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{(7+4\sqrt{3})(a-1)^2}$.

Bài toán 362 ([BNS23], Ví dụ 1.2, p. 6). Cho biểu thức $A = \sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$. (a) Tìm điều kiện xác định của A . (b) Rút gọn biểu thức A với $1 \leq a < 2$. (c) Rút gọn biểu thức A với $a \geq 2$.

Bài toán 363 ([BNS23], Ví dụ 1.3, p. 6). Đơn giản biểu thức $A = \left(\sqrt{8+2\sqrt{7}} + 2\sqrt{8-2\sqrt{7}} \right) (\sqrt{63}+1)$.

Bài toán 364 ([BNS23], Ví dụ 1.4, p. 6). Tính tổng $A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$.

Bài toán 365 ([BNS23], Ví dụ 1.5, p. 6). Tính $A = \frac{\sqrt{7-2\sqrt{10}}(7+2\sqrt{10})(74-22\sqrt{10})}{\sqrt{125-4\sqrt{50}+5\sqrt{20}+\sqrt{8}}}$.

Bài toán 366 ([BNS23], Ví dụ 1.6, p. 7). Cho $a = \sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}} + \sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$. Chứng minh: $a^2 - 2a - 2 = 0$.

Bài toán 367 ([BNS23], Ví dụ 1.7, p. 7). Cho $a = \sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$. Tính

$$A = \frac{a^4 - 4a^3 + a^2 + 6a + 4}{a^2 - 2a + 12}.$$

Bài toán 368 ([BNS23], Ví dụ 1.8, p. 7). Cho $f(x) = \frac{1+\sqrt{1+x}}{x+1} + \frac{1+\sqrt{1-x}}{x-1}$ & $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tính $f(a)$.

Bài toán 369 ([BNS23], Ví dụ 1.9, p. 8). Giả thiết $x, y, z > 0$ & $xy + yz + zx = a$. Chứng minh

$$x\sqrt{\frac{(a+y^2)(a+z^2)}{a+x^2}} + y\sqrt{\frac{(a+z^2)(a+x^2)}{a+y^2}} + z\sqrt{\frac{(a+x^2)(a+y^2)}{a+z^2}} = 2a.$$

Bài toán 370 ([BNS23], 1.1, p. 8). Biểu diễn $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ thành $a + b\sqrt{5}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$.

Bài toán 371 ([BNS23], 1.2, p. 8). Đơn giản biểu thức $A = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{18} + \sqrt{28-16\sqrt{3}}$.

Bài toán 372 ([BNS23], 1.3, p. 8). Chứng minh $\sqrt{10+2\sqrt{24}} - \sqrt{10-2\sqrt{24}} = 4$.

Bài toán 373 ([BNS23], 1.4, p. 8). Tính $A = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Bài toán 374 ([BNS23], 1.5, p. 9). Tính tích ab với

$$a = \sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{3+\sqrt{7+\sqrt{2}}}, \quad b = \sqrt{3+\sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{2}}}}\sqrt{3-\sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{2}}}}.$$

Bài toán 375 ([BNS23], 1.6, p. 9). Chứng minh $\frac{4}{\sqrt{5}-1} + \frac{3}{\sqrt{5}-2} + \frac{16}{\sqrt{5}-3} = -5$.

Bài toán 376 ([BNS23], 1.7, p. 9). Chứng minh $\left(\frac{2}{\sqrt{6}-1} + \frac{3}{\sqrt{6}-2} + \frac{3}{\sqrt{6}-3}\right) \frac{5}{9\sqrt{6}+4} = \frac{1}{2}$.

Bài toán 377 ([BNS23], 1.8, p. 9). Cho $f(x) = \frac{x+\sqrt{5}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{5}}} + \frac{x-\sqrt{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{5}}}$. Tính $f(3)$.

Bài toán 378 ([BNS23], 1.9, p. 9). Cho $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ & $a = \frac{4}{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}$. Tính $f(a)$.

Bài toán 379 ([BNS23], Ví dụ 2.1, p. 10). Chứng minh với $ab \neq 0$: $\frac{\sqrt[3]{a^5b^7}}{\sqrt[3]{a^2b}} - \frac{\sqrt[3]{a^4b^8}}{\sqrt[3]{ab^2}} = 0$.

Bài toán 380 ([BNS23], Ví dụ 2.2, p. 10). Chứng minh với $abc \neq 0$: $\frac{\sqrt[3]{a^4b^5c^7}}{\sqrt[3]{ab^2c}} = abc^2$.

Bài toán 381 ([BNS23], Ví dụ 2.3, p. 10). Với $a \geq 2 + \sqrt{2}$ &

$$u = \sqrt[3]{\left(a + \frac{2}{a}\right)^3 - 3a^2 - \frac{12}{a^2} + 3\left(a + \frac{2}{a}\right) - 13}, v = \sqrt{a^2 + \frac{4}{a^2} - 8\left(a + \frac{2}{a}\right) + 20}.$$

Chứng minh $u - v = 3$.

Bài toán 382 ([BNS23], Ví dụ 2.4, p. 11). Đơn giản biểu thức $A = \sqrt[3]{8(7+5\sqrt{2})} + \sqrt[3]{216(7-5\sqrt{2})} + 4\sqrt{2} - 7$.

Bài toán 383 ([BNS23], Ví dụ 2.5, p. 11). Chứng minh $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1$.

Bài toán 384 ([BNS23], Ví dụ 2.6, p. 11). Chứng minh nếu $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ thì $a^3 + 3a = 4$.

Bài toán 385 ([BNS23], Ví dụ 2.7, p. 11). Chứng minh:

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}} + 3\sqrt[3]{2}\right)\sqrt{3}}}{3+\sqrt[6]{108}} = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}.$$

Bài toán 386 ([BNS23], Ví dụ 2.8, p. 12). Chứng minh nếu $\sqrt[3]{(a+1)^2} + \sqrt[3]{a^2-1} + \sqrt[3]{(a-1)^2} = 1$ thì $\sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a-1} = 2$.

Bài toán 387 ([BNS23], Ví dụ 2.9, p. 12). Đơn giản biểu thức $A = \frac{x+1}{2\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}+x+\frac{1}{x}}$ với $x \notin \{-1, 0\}$.

Bài toán 388 ([BNS23], Ví dụ 2.10, p. 12). Cho $a = \sqrt{2} + \sqrt{7 - \sqrt[3]{61+46\sqrt{5}}} + 1$. (a) Chứng minh $a^4 - 14a^2 + 9 = 0$. (b) Giả sử $f(x) = x^5 + 2x^4 - 14x^3 - 28x^2 + 9x + 19$. Tính $f(a)$.

Bài toán 389 ([BNS23], Ví dụ 2.11, p. 13). Cho $a, b, c > 0$. Giả sử m, n, p là những số nguyên dương lớn hơn 1 sao cho $bc = \sqrt[n]{a}$, $ca = \sqrt[n]{b}$, & $ab = \sqrt[n]{c}$. Chứng minh trong 3 số a, b, c phải có ít nhất 1 số bằng 1.

Bài toán 390 ([BNS23], Ví dụ 2.12, p. 13). Cho $a = \frac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}$. (a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận số a làm nghiệm. (b) Giả sử đa thức $f(x) = 3x^6 - 4x^5 - 7x^4 + 6x^3 + 6x^2 + x - 53\sqrt{2}$. Tính $f(a)$.

Bài toán 391 ([BNS23], Ví dụ 2.13, p. 14). Cho $a = \frac{7-4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}} - \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$. (a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận số a làm nghiệm. (b) Giả sử đa thức $f(x) = \frac{x^6+x^4+4x^2}{40(x^4+4x^2-144)}$. Tính $f(a)$.

Bài toán 392 ([BNS23], Ví dụ 2.14, p. 14). Cho $a = \sqrt[3]{38+17\sqrt{5}} + \sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}$. Giả sử ta có đa thức $f(x) = (x^3+3x+1935)^{2012}$. Tính $f(a)$.

Bài toán 393 ([BNS23], 2.1., p. 14). Biểu diễn $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ thành $a + b\sqrt{5}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$.

Bài toán 394 ([BNS23], 2.2., p. 14). Cho $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} + \sqrt[3]{1-\sqrt{11}}$. Chứng minh $a^9 - 6a^6 + 282a^3 = 8$.

Bài toán 395 ([BNS23], 2.3., p. 15). Cho $a = (\sqrt[3]{1+2\sqrt{6}} - \sqrt[6]{5+4\sqrt{6}})\sqrt[3]{2\sqrt{6}-1} + 1$. (a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận a làm nghiệm. (b) Giả sử $f(x) = \sum_{i=1}^{2012} ix^i + 2012$. Tính $f(a)$.

Bài toán 396 ([BNS23], 2.4., p. 15). *Chứng minh:*

$$\frac{a + 2\sqrt{ab} + 9b}{\sqrt{a} + 3\sqrt{b} - 2\sqrt[4]{ab}} - 2\sqrt{b} = \left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right)^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0.$$

Bài toán 397 ([BNS23], 2.5., p. 15). *Chứng minh:*

$$\left(\sqrt[3]{a^4} + b^2\sqrt[3]{a^2} + b^4\right) \frac{\sqrt[3]{a^8} - b^6 + b^4\sqrt[3]{a^2} - a^2b^2}{a^2b^2 + b^2 - a^2b^8 - b^4} = a^2b^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, ab \neq 0, a \neq b^3.$$

Bài toán 398 ([BNS23], 2.6., p. 15). *Cho $a, b > 0$. Đơn giản biểu thức*

$$A = \frac{\sqrt{a^3 + 2a^2b} + \sqrt{a^4 + 2a^3b} - \sqrt{a^3} - a^2b}{\sqrt{(2a + b - \sqrt{a^2 + 2ab}) \left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[6]{a^5} + a\right)}}.$$

Bài toán 399 ([BNS23], 2.7., p. 15). *Giả sử $u^3 \geq v^2$, $u, v \in \mathbb{Q}^+$. Xác định u, v để*

$$\sqrt{\frac{u - 8\sqrt[6]{u^3v^2} + 4\sqrt[3]{v^2}}{\sqrt{u} - 2\sqrt[3]{v} + 2\sqrt[12]{u^3v^2}}} + 3\sqrt[3]{v} + \sqrt[6]{v} = 1.$$

Bài toán 400. *Cho $a, b, c, A, B \in \mathbb{Z}$, $c \geq 0$ thỏa mãn đẳng thức $(a + b\sqrt{c})^2 = A + B\sqrt{c}$. (a) Tìm mối quan hệ của a, b, c, A, B . Biểu diễn (A, B) theo (a, b, c) . (b)* Biểu diễn (a, b) theo (c, A, B) .*

Bài toán 401. *Cho $a, b, c, A, B \in \mathbb{Z}$, $c \geq 0$ thỏa mãn đẳng thức $(a + b\sqrt{c})^3 = A + B\sqrt{c}$. (a) Tìm mối quan hệ của a, b, c, A, B . Biểu diễn (A, B) theo (a, b, c) . (b)* Biểu diễn (a, b) theo (c, A, B) .*

Bài toán 402. *Cho $a, b, c, A, B \in \mathbb{Z}$, $c \geq 0$ thỏa mãn đẳng thức $(a + b\sqrt[3]{c})^3 = A + B\sqrt[3]{c} + C\sqrt[3]{c^2}$. (a) Tìm mối quan hệ của a, b, c, A, B, C . Biểu diễn (A, B, C) theo (a, b, c) . (b)* Biểu diễn (a, b) theo (c, A, B, C) .*

Tài liệu

- [Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.
- [BNS23] Vũ Hữu Bình, Phạm Thị Bạch Ngọc, and Nguyễn Tam Sơn. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 9. Tập 1: Đại Số*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 192.
- [Chí+23] Phan Đức Chính, Tôn Thân, Vũ Hữu Bình, Trần Phương Dung, Ngô Hữu Dũng, Lê Văn Hồng, and Nguyễn Hữu Thảo. *Toán 9 Tập 1*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 128.
- [Thâ+23] Tôn Thân, Vũ Hữu Bình, Trần Phương Dung, Lê Văn Hồng, and Nguyễn Hữu Thảo. *Bài Tập Toán 9 Tập 1*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 216.
- [Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.