

Solution: Square-, Cube-, & n th Roots

Lời Giải: Căn Bậc 2, Căn Bậc 3, & Căn Bậc n

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 28 tháng 5 năm 2023

Tóm tắt nội dung

[en] This text is a collection of problems, from basic to advanced, on *square-, cube-, & n th roots*.

Keyword. Square root, cube root, n th root.

[vi] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài toán, từ cơ bản đến nâng cao, về *căn bậc 2, căn bậc 3, & căn bậc n* .

Từ khóa. Căn bậc 2, căn bậc 3, căn bậc n , số hữu tỷ, số vô tỷ, căn thức.

- Lecture note – Bài giảng: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/square- & cube roots](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_9/square- & cube roots)¹.
- Cheatsheet – Công thức: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/cheatsheet: square- & cube roots](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_9/cheatsheet: square- & cube roots)².
- Problem – Bài tập: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/problem: square- & cube roots](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_9/problem: square- & cube roots)³.
- Solution – Lời giải: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/solution: square- & cube roots](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_9/solution: square- & cube roots)⁴.

Mục lục

1 Square Root & Irrationals – Căn Bậc 2 & Số Vô Tỷ	2
2 Căn Thức Bậc 2 & Hằng Đẳng Thức $\sqrt{A^2} = A $	6
3 Liên Hệ Giữa Phép Nhân, Phép Chia & Phép Khai Phương	10
4 Biến Đổi Đơn Giản Biểu Thức Chứa Căn Thức Bậc 2	14
5 Rút Gọn Biểu Thức Có Chứa Căn Thức Bậc 2	17
6 Cube Root, n th Root – Căn Bậc 3, Căn Bậc n	20
7 Miscellaneous	22
Tài liệu	26

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam

e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

¹URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/NQBH_square_root_cube_root.pdf.

²https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/cheatsheet/NQBH_square_root_cube_root_cheatsheet.pdf.

³https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/problem/NQBH_square_root_cube_root_problem.pdf.

⁴https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/solution/NQBH_square_root_cube_root_solution.pdf.

1 Square Root & Irrationals – Căn Bậc 2 & Số Vô Tỷ

Bài toán 1 ([Chí+23], ?1–?3, pp. 4–5). (a) Tìm các căn bậc 2 của $9, \frac{4}{9}, 0.25, 2$. (b) Tìm căn bậc 2 số học của $49, 64, 81, 1.21$. (c) Tìm căn bậc 2 của $49, 64, 81, 1.21$.

Giải. (a) Căn bậc 2 của $9, \frac{4}{9}, 0.25, 2$ lần lượt là $\pm 3, \pm \frac{2}{3}, \pm 0.5, \pm \sqrt{2}$. (b) Căn bậc 2 số học của $49, 64, 81, 1.21$ lần lượt là $7, 8, 9, 1.1$. (c) Căn bậc 2 của $49, 64, 81, 1.21$ lần lượt là $\pm 7, \pm 8, \pm 9, \pm 1.1$. \square

Bài toán 2 ([Chí+23], Ví dụ 2, ?4, pp. 5–6). So sánh: (a) 1 Ɣ $\sqrt{2}$. (b) 2 Ɣ $\sqrt{5}$. (c) 4 Ɣ $\sqrt{15}$. (d) $\sqrt{11}$ Ɣ 3.

Giải. (a) $1 < 2 \Leftrightarrow \sqrt{1} = 1 < \sqrt{2}$. (b) $4 < 5 \Leftrightarrow \sqrt{4} = 2 < \sqrt{5}$. (c) $16 > 15 \Leftrightarrow \sqrt{16} = 4 > \sqrt{15}$. (d) $11 > 9 \Leftrightarrow \sqrt{11} > \sqrt{9} = 3$. \square

Bài toán 3. Biện luận theo $a, b \in \mathbb{R}$ để so sánh a Ɣ \sqrt{b} .

Giải. ĐKXD: $b \geq 0$. Xét các trường hợp:

- Trường hợp $a < 0$: vì $\sqrt{b} \geq 0, \forall b \in \mathbb{R}, b \geq 0$, suy ra $a < \sqrt{b}$.
- Trường hợp $a \geq 0$: Xét các trường hợp con:
 - Trường hợp $0 \leq a < \sqrt{b} \Leftrightarrow 0 \leq a \text{ \& } a^2 < b$.
 - Trường hợp $0 \leq a = \sqrt{b} \Leftrightarrow 0 \leq a \text{ \& } a^2 = b$.
 - Trường hợp $a > \sqrt{b} \Leftrightarrow a > 0 \text{ \& } a^2 > b \geq 0$.

Tổng hợp các trường hợp đã xét:

$$\begin{cases} a < \sqrt{b}, & \text{nếu } (a < 0 \wedge b \geq 0) \vee (a \geq 0 \wedge a^2 < b), \\ a = \sqrt{b}, & \text{nếu } a \geq 0 \wedge a^2 = b, \\ a > \sqrt{b}, & \text{nếu } a > 0 \wedge a^2 > b. \end{cases}$$

Biện luận hoàn tất. \square

Bài toán 4 ([Chí+23], Ví dụ 3, ?5, p. 6). (a) Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{x} > 2$. (b) $\sqrt{x} < 1$. (c) $\sqrt{x} > 1$. (d) $\sqrt{x} < 3$.

Giải. (a) $\sqrt{x} > 2 \Leftrightarrow x > 2^2 = 4$. Vậy $x > 4, S = (4, \infty) := \{x \in \mathbb{R} | x > 4\}$. (b) ĐKXD: $x \geq 0, \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1^2 = 1$. Vậy $0 \leq x < 1, S = [0, 1) := \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < 1\}$. (c) $\sqrt{x} > 1 \Leftrightarrow x > 1^2 = 1$. Vậy $x > 1, S = (1, \infty) := \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$. (d) ĐKXD: $x \geq 0, \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow 0 \leq x < 3^2 = 9$. Vậy $0 \leq x < 9, S = [0, 9) := \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < 9\}$. \square

Lưu ý 1. Ta quy ước S ký hiệu tập nghiệm của cả phương trình Ɣ bất phương trình.

Bài toán 5 ([Chí+23], 1., p. 6). Tìm căn bậc 2 số học của mỗi số sau rồi suy ra căn bậc 2 của chúng: 121, 144, 169, 225, 256, 324, 361, 400.

Giải. Căn bậc 2 số học của 121, 144, 169, 225, 256, 324, 361, 400 lần lượt là 11, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 20. Căn bậc 2 của 121, 144, 169, 225, 256, 324, 361, 400 lần lượt là $\pm 11, \pm 12, \pm 13, \pm 15, \pm 16, \pm 18, \pm 19, \pm 20$. \square

Bài toán 6 ([Chí+23], 2., p. 6). So sánh: (a) 2 Ɣ $\sqrt{3}$. (b) 6 Ɣ $\sqrt{41}$. (c) 7 Ɣ $\sqrt{47}$.

Giải. (a) $4 > 3 \Leftrightarrow \sqrt{4} = 2 > \sqrt{3}$. (b) $36 < 41 \Leftrightarrow \sqrt{36} = 6 < \sqrt{41}$. (c) $49 > 47 \Leftrightarrow \sqrt{49} = 7 > \sqrt{47}$. \square

Bài toán 7 ([Chí+23], 3., p. 6). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn các phương trình sau Ɣ sau đó làm tròn đến chữ số thập phân thứ 3: (a) $x^2 = 2$. (b) $x^2 = 3$. (c) $x^2 = 3.5$. (d) $x^2 = 4.12$.

Hint. Nghiệm của phương trình bậc 2 $x^2 = a$ với $a \geq 0$ là các căn bậc 2 của a .

Giải. (a) $x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{2} \Rightarrow x \approx \pm 1.414$. (b) $x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{3} \Rightarrow x \approx \pm 1.732$. (c) $x^2 = 3.5 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{3.5} \Rightarrow x \approx \pm 1.871$. (d) $x^2 = 4.12 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{4.12} \Rightarrow x \approx \pm 2.030$. \square

Bài toán 8 ([Chí+23], 4., p. 7). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{x} = 15$. (b) $2\sqrt{x} = 14$. (c) $\sqrt{x} < \sqrt{2}$. (d) $\sqrt{2x} < 4$.

Giải. ĐKXD: $x \geq 0$. (a) $\sqrt{x} = 15 \Leftrightarrow x = 15^2 = 225 > 0$: nhận. Vậy $x = 225, S = \{225\}$. (b) $2\sqrt{x} = 14 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{14}{2} = 7 \Leftrightarrow x = 7^2 = 49 > 0$: nhận. Vậy $x = 49, S = \{49\}$. (c) $\sqrt{x} < \sqrt{2} \Leftrightarrow 0 \leq x < 2$. Vậy $0 \leq x < 2, S = [0, 2) := \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < 2\}$. (d) $\sqrt{2x} < 4 \Leftrightarrow 0 \leq 2x < 4^2 = 16 \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{16}{2} = 8$. Vậy $0 \leq x < 8, S = [0, 8) := \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < 8\}$. \square

Bài toán 9. Biện luận theo tham số $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ để giải bất phương trình: (a) $\sqrt{x} < a$. (b) $\sqrt{x} > a$. (c) $\sqrt{x} \leq a$. (d) $\sqrt{x} \geq a$. (e) $\sqrt{ax+b} > c, a \neq 0$. (f) $\sqrt{ax+b} < c, a \neq 0$. (g) $\sqrt{ax+b} \leq c, a \neq 0$. (h) $\sqrt{ax+b} \geq c, a \neq 0$. (i) $\sqrt{ax+b} < \sqrt{cx+d}, ac \neq 0$. (j) $\sqrt{ax+b} > \sqrt{cx+d}, ac \neq 0$. (k) $\sqrt{ax+b} \leq \sqrt{cx+d}, ac \neq 0$. (l) $\sqrt{ax+b} \geq \sqrt{cx+d}, ac \neq 0$.

Giải. (a) ĐKXD: $x \geq 0$. Xét các trường hợp:

- Trường hợp $a \leq 0$: Vì $\sqrt{x} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$, nên bất phương trình $\sqrt{x} < a$ vô nghiệm.

- Trường hợp $a > 0$: $\sqrt{x} < a \Leftrightarrow 0 \leq x < a^2$.

Vậy

$$S = \begin{cases} \emptyset, & \text{nếu } a \leq 0, \\ [0, a^2) := \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < a^2\}, & \text{nếu } a > 0. \end{cases}$$

(b) ĐKXD: $x \geq 0$. Xét các trường hợp:

- Trường hợp $a < 0$: Vì $\sqrt{x} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$, nên bất phương trình $\sqrt{x} > a$ luôn đúng $\forall x \geq 0$.
- Trường hợp $a = 0$: $\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$.
- Trường hợp $a > 0$: $\sqrt{x} > a \Leftrightarrow x > a^2$.

Vậy

$$S = \begin{cases} [0, \infty) := \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}, & \text{nếu } a < 0, \\ (0, \infty) := \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}, & \text{nếu } a = 0, \\ (a^2, \infty) := \{x \in \mathbb{R} | x > a^2\}, & \text{nếu } a > 0. \end{cases}$$

(c) ĐKXD: $x \geq 0$. Xét các trường hợp:

- Trường hợp $a < 0$: Vì $\sqrt{x} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$, nên bất phương trình $\sqrt{x} \leq a$ vô nghiệm.
- Trường hợp $a = 0$: $\sqrt{x} \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- Trường hợp $a > 0$: $\sqrt{x} \leq a \Leftrightarrow 0 \leq x \leq a^2$.

Vậy

$$S = \begin{cases} \emptyset, & \text{nếu } a < 0, \\ \{0\}, & \text{nếu } a = 0, \\ [0, a^2] := \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq a^2\}, & \text{nếu } a > 0. \end{cases}$$

(d) ĐKXD: $x \geq 0$. Xét các trường hợp:

- Trường hợp $a \leq 0$: Vì $\sqrt{x} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$, nên bất phương trình $\sqrt{x} \geq a$ đúng $\forall x \geq 0$.
- Trường hợp $a > 0$: $\sqrt{x} \geq a \Leftrightarrow x \geq a^2$.

Vậy

$$S = \begin{cases} [0, \infty), & \text{nếu } a \leq 0, \\ [a^2, \infty) := \{x \in \mathbb{R} | x \geq a^2\}, & \text{nếu } a > 0. \end{cases}$$

(e) $\sqrt{ax+b} > c$. (f) $\sqrt{ax+b} < c$. (g) $\sqrt{ax+b} \leq c$. (h) $\sqrt{ax+b} \geq c$. (i) $\sqrt{ax+b} < \sqrt{cx+d}$. (j) $\sqrt{ax+b} > \sqrt{cx+d}$. (k) $\sqrt{ax+b} \leq \sqrt{cx+d}$. (l) $\sqrt{ax+b} \geq \sqrt{cx+d}$. \square

Bài toán 10. *Viết chương trình Pascal, Python, C/C++ để giải 8 biện luận theo tham số $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ để giải bất phương trình: (a) $\sqrt{x} < a$. (b) $\sqrt{x} > a$. (c) $\sqrt{x} \leq a$. (d) $\sqrt{x} \geq a$. (e) $\sqrt{ax+b} > c, a \neq 0$. (f) $\sqrt{ax+b} < c, a \neq 0$. (g) $\sqrt{ax+b} \leq c, a \neq 0$. (h) $\sqrt{ax+b} \geq c, a \neq 0$. (i) $\sqrt{ax+b} < \sqrt{cx+d}, ac \neq 0$. (j) $\sqrt{ax+b} > \sqrt{cx+d}, ac \neq 0$. (k) $\sqrt{ax+b} \leq \sqrt{cx+d}, ac \neq 0$. (l) $\sqrt{ax+b} \geq \sqrt{cx+d}, ac \neq 0$.*

Bài toán 11 ([Chí+23], 5., p. 7). *Tính cạnh 1 hình vuông biết diện tích của nó bằng diện tích của hình chữ nhật có chiều rộng 3.5 m & chiều dài 14 m.*

Giải. $S_{\text{hv}} = S_{\text{hcn}} = 3.5 \cdot 14 = 49 \Rightarrow a = \sqrt{S_{\text{hv}}} = \sqrt{49} = 7 \text{ m}.$ \square

Bài toán 12 ([Thà+23], 1., p. 5). *Tính căn bậc 2 số học của 0.01, 0.04, 0.49, 0.64, 0.25, 0.81, 0.09, 0.16, 0, -1.*

Giải. Căn bậc 2 số học của: 0.01, 0.04, 0.49, 0.64, 0.25, 0.81, 0.09, 0.16, 0 lần lượt là $\sqrt{0.01} = 0.1, \sqrt{0.04} = 0.2, \sqrt{0.49} = 0.7, \sqrt{0.64} = 0.8, \sqrt{0.25} = 0.5, \sqrt{0.81} = 0.9, \sqrt{0.09} = 0.3, \sqrt{0.16} = 0.4, \sqrt{0} = 0$. Riêng -1 không có căn bậc 2 (số học) vì $-1 < 0$. \square

Lưu ý 2. *Căn bậc 2 số học của số thực không âm $a \geq 0$ là \sqrt{a} . Căn bậc 2 của $a \geq 0$ là $\pm\sqrt{a}$ (i.e., bao gồm \sqrt{a} & $-\sqrt{a}$), đặc biệt: căn bậc 2 của 0 là $\pm\sqrt{0} = 0$. Mọi số thực âm $a < 0$ không có căn bậc 2.*

Bài toán 13 ([Thà+23], 2., p. 5). *Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $x^2 = 5$. (b) $x^2 = 6$. (c) $x^2 = 2.5$. (d) $x^2 = \sqrt{5}$. (e) $x^2 = -1$.*

Giải. (a) $x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$. (b) $x^2 = 6 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}$. (c) $x^2 = 2.5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2.5}$. (d) $x^2 = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\sqrt{5}} = \pm\sqrt[4]{5}$. (e) $x^2 = -1$ vô nghiệm vì $x^2 \geq 0 > -1, \forall x \in \mathbb{R}$. \square

Lưu ý 3 (Phương trình bậc 2 $x^2 = a$). *Giải 8 biện luận theo tham số a phương trình $x^2 = a$ với $a \in \mathbb{R}$ cho trước. Xét 3 trường hợp: (a) Trường hợp $a = 0$: $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. (b) Trường hợp $a > 0$: $x^2 = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$. (c) Trường hợp $a < 0$: phương trình bậc 2 $x^2 = a$ vô nghiệm vì $x^2 \geq 0 > a, \forall x \in \mathbb{R}$.*

Bài toán 14 ([Thâ+23], 3., p. 5). Số nào có căn bậc 2 là: (a) $\sqrt{5}$. (b) 1.5. (c) -0.1 . (d) $-\sqrt{9}$.

Giải. (a) 5 có 1 căn bậc 2 là $\sqrt{5}$. (b) $1.5^2 = 2.25$ có 1 căn bậc 2 là 1.5. (c) $(-0.1)^2 = 0.01$ có 1 căn bậc 2 là -0.1 . (d) 9 có 1 căn bậc 2 là $-\sqrt{9}$. \square

Lưu ý 4. Số có căn bậc 2 là a là số a^2 . Cụ thể hơn, a^2 có căn bậc 2 là $\pm a$, trong đó căn bậc 2 số học của a^2 là $|a|$.

Bài toán 15 ([Thâ+23], 4., p. 5). Tìm $x \in \mathbb{R}$: (a) $\sqrt{x} = 3$. (b) $\sqrt{x} = \sqrt{5}$. (c) $\sqrt{x} = 0$. (d) $\sqrt{x} = -2$.

Giải. ĐKXD cho cả 4 ý: $x \geq 0$. (a) $\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 3^2 = 9$ (thỏa ĐKXD: nhận). Vậy $x = 9$. (b) $\sqrt{x} = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = 5$ (thỏa ĐKXD: nhận). Vậy $x = 5$. (c) $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa ĐKXD: nhận). Vậy $x = 0$. (d) Cách 1: Phương trình $\sqrt{x} = -2$ vô nghiệm vì $\sqrt{x} \geq 0 > -2, \forall x \in \mathbb{R}$. Cách 2: Căn bậc 2 số học thì không âm nên không tồn tại $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\sqrt{x} = -2$. \square

Lưu ý 5 (Phương trình bậc 2 $\sqrt{x} = a$). Giải & biện luận theo tham số a phương trình $\sqrt{x} = a$ với $a \in \mathbb{R}$ cho trước. ĐKXD: $x \geq 0$. Xét 3 trường hợp: (a) Trường hợp $a = 0$: $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa ĐKXD: nhận). (b) Trường hợp $a > 0$: $\sqrt{x} = a \Leftrightarrow x = a^2 > 0$ (thỏa ĐKXD: nhận). (c) Trường hợp $a < 0$: phương trình vô tỷ $\sqrt{x} = a$ vô nghiệm vì $\sqrt{x} \geq 0 > a, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 16 ([Thâ+23], 5., p. 6). Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, so sánh: (a) 2 & $\sqrt{2} + 1$. (b) 1 & $\sqrt{3} - 1$. (c) $2\sqrt{31}$ & 10. (d) $-3\sqrt{11}$ & -12 .

Hint. Sử dụng tính chất: $0 \leq a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

1st giải. (a) $1 < 2 \Leftrightarrow \sqrt{1} = 1 < \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 + 1 < \sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow 2 < 1 + \sqrt{2}$. Vậy $2 < 1 + \sqrt{2}$. (b) $4 > 3 \Leftrightarrow \sqrt{4} = 2 > \sqrt{3} \Leftrightarrow 2 - 1 > \sqrt{3} - 1 \Leftrightarrow 1 > \sqrt{3} - 1$. Vậy $1 > \sqrt{3} - 1$. (c) $31 > 25 \Leftrightarrow \sqrt{31} > \sqrt{25} = 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{31} > 2 \cdot 5 = 10$. Vậy $2\sqrt{31} > 10$. (d) $11 < 16 \Leftrightarrow \sqrt{11} < \sqrt{16} = 4 \Leftrightarrow -3\sqrt{11} > -3 \cdot 4 = -12$. Vậy $-3\sqrt{11} > -12$. \square

Có thể bình phương 2 vế của 2 biểu thức cần so sánh như sau (đương nhiên sẽ tốn công hơn nhưng bù lại tự nhiên hơn Cách 1 đã được “tỉa gọt”, i.e., giấu các bước suy luận lòng vòng ngoài nháp để trình bày lời giải ‘chỉ 1 dòng biến đổi tương đương’):

2nd giải. (a) $(\sqrt{2}+1)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} + 1 = 3 + 2\sqrt{2} > 3 + 2\sqrt{1} = 3 + 2 = 5 > 4 = 2^2 \Rightarrow \sqrt{2} + 1 > 2$. (b) $(\sqrt{3}-1)^2 = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1^2 = 4 - 2\sqrt{3} < 4 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 4 - 3 = 1$, trong đó đã sử dụng $-2 < -\sqrt{3}$. Vậy $1 > \sqrt{3} - 1$. (c) $(2\sqrt{31})^2 = 2^2(\sqrt{31})^2 = 4 \cdot 31 = 124 > 100 = 10^2 \Rightarrow 2\sqrt{31} > 10$. Vậy $2\sqrt{31} > 10$. (d) $(-3\sqrt{11})^2 = 3^2(\sqrt{11})^2 = 9 \cdot 11 = 99 < 144 = 12^2 \Rightarrow 3\sqrt{11} < 12 \Leftrightarrow -3\sqrt{11} > -12$. Vậy $-3\sqrt{11} > -12$. \square

Bài toán 17 ([Thâ+23], 6., p. 6). Đ/S? (a) Căn bậc 2 của 0.36 là 0.6. (b) Căn bậc 2 của 0.36 là 0.06. (c) $\sqrt{0.36} = 0.6$. (d) Căn bậc 2 của 0.36 là 0.6 & -0.6 . (e) $\sqrt{0.36} = \pm 0.6$.

Giải. (a) S: Căn bậc 2 của 0.36 là ± 0.6 (chứ không phải mỗi 0.6). (b) S: Căn bậc 2 của 0.36 là 0.6 (chứ không phải 0.06). (c) Đ: $\sqrt{0.36} = 0.6$. (d) Đ: Căn bậc 2 của 0.36 là 0.6 & -0.6 . (e) S: $\sqrt{0.36} = 0.6$ vì $-\sqrt{0.36} = -0.6$ & $\pm\sqrt{0.36} = \pm 0.6$ mới đúng. \square

Bài toán 18 ([Thâ+23], 7., p. 6). Trong các số $\sqrt{(-5)^2}, \sqrt{5^2}, -\sqrt{5^2}, -\sqrt{(-5)^2}$, số nào là căn bậc 2 số học của 25?

Giải. Có $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5, \sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5, -\sqrt{5^2} = -\sqrt{25} = -5, -\sqrt{(-5)^2} = -\sqrt{25} = -5$, mà căn bậc 2 số học của 25 là 5 nên suy ra $\sqrt{(\pm 5)^2}$ là căn bậc 2 số học của 25. \square

Lưu ý 6. Cả 4 số $\sqrt{(-5)^2}, \sqrt{5^2}, -\sqrt{5^2}, -\sqrt{(-5)^2}$ đều là căn bậc 2 của $5^2 = 25$, trong đó $\sqrt{(\pm 5)^2} = \sqrt{25} = 5 > 0$ là căn bậc 2 số học của $5^2 = 25$.

Bài toán 19 (Mở rộng [Thâ+23], 7., p. 6). Trong các số $\sqrt{(-a)^2}, \sqrt{a^2}, -\sqrt{a^2}, -\sqrt{(-a)^2}$, số nào là căn bậc 2 số học của a^2 với $a \in \mathbb{R}$ bất kỳ?

Giải. Có $\sqrt{(-a)^2} = \sqrt{a^2} = |a|, \sqrt{a^2} = \sqrt{a^2} = |a|, -\sqrt{a^2} = -\sqrt{a^2} = -|a|, -\sqrt{(-a)^2} = -\sqrt{a^2} = -|a|$, mà căn bậc 2 số học của a^2 là a nên suy ra $\sqrt{(\pm a)^2}$ là căn bậc 2 số học của a^2 . \square

Lưu ý 7. Cả 4 số $\sqrt{(-a)^2}, \sqrt{a^2}, -\sqrt{a^2}, -\sqrt{(-a)^2}$ đều là căn bậc 2 của a^2 , trong đó $\sqrt{(\pm a)^2} = \sqrt{a^2} = |a| \geq 0$ là căn bậc 2 số học của $a^2, \forall a \in \mathbb{R}$.

Bài toán 20 ([Thâ+23], 8., p. 6). Chứng minh: $\sqrt{1^3 + 2^3} = 1 + 2, \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3} = 1 + 2 + 3, \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3} = 1 + 2 + 3 + 4$. Viết tiếp 1 số đẳng thức tương tự.

Chứng minh. $\sqrt{1^3 + 2^3} = \sqrt{1 + 8} = \sqrt{9} = 3 = 1 + 2, \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3} = \sqrt{1 + 8 + 27} = \sqrt{36} = 6 = 1 + 2 + 3, \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3} = \sqrt{1 + 8 + 27 + 64} = \sqrt{100} = 10 = 1 + 2 + 3 + 4$. Ta có các đẳng thức:

$$\begin{aligned}\sqrt{1^3} &= 1, \\ \sqrt{1^3 + 2^3} &= 1 + 2, \\ \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3} &= 1 + 2 + 3, \\ \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3} &= 1 + 2 + 3 + 4, \\ \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6, \\
\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7, \\
\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8, \\
\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9, \\
\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 + 10^3} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10.
\end{aligned}$$

Dự đoán đẳng thức tổng quát:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n i^3} = \sqrt{1^3 + 2^3 + \dots + n^3} = \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Đẳng thức này đúng & có thể được chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học. \square

Lưu ý 8. Công thức tính tổng lập phương của n số nguyên dương đầu tiên:

$$\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2 = (1 + 2 + \dots + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

Ta có thể kiểm nghiệm công thức trên bằng máy tính:

Bài toán 21. Viết chương trình Pascal, Python, C/C++ tính: (a) tổng n số nguyên dương đầu tiên. (b) tổng bình phương của n số nguyên dương đầu tiên. (c) tổng lập phương của n số nguyên dương đầu tiên. (d) Từ câu (a) & (c), kiểm tra đẳng thức (1). (e) tổng lũy thừa bậc $m \in \mathbb{R}$ của n số nguyên dương đầu tiên⁵.

Bài toán 22 ([Thâ+23], 9., p. 6). Cho $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$. Chứng minh: (a) $a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$. (b) $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Rightarrow a < b$.

Chứng minh. (a) Vì $a, b \geq 0$ & $a < b$ nên $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a} + \sqrt{a} = 2\sqrt{a} \geq 0$ (*). Có $a < b \Rightarrow 0 > a - b = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ (**). Từ (*) & (**), suy ra $\sqrt{a} - \sqrt{b} < 0$ hay $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. (b) $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} < 0$, kết hợp điều này & (*), suy ra $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) < 0 \Leftrightarrow a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$. \square

Lưu ý 9. Từ chứng minh trên, ta thấy $a - b$ & $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ luôn cùng dấu:

$$(a - b)(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \begin{cases} = 0, & \text{if } a = b, \\ > 0, & \text{if } a \neq b, \end{cases}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0.$$

Chặt chẽ & ngắn gọn hơn về công thức toán học, đẳng thức trên tương đương với đẳng thức:

$$\text{sign}(a - b) = \text{sign}(\sqrt{a} - \sqrt{b}), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0,$$

trong đó $\text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \{0, \pm 1\}$, $x \mapsto \text{sign } x$ là hàm dấu xác định trên tập số thực \mathbb{R} bởi công thức:

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1, & \text{if } x > 0, \\ 0, & \text{if } x = 0, \\ -1, & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

Bài toán 23 ([Thâ+23], 10., p. 6). Cho $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$. Chứng minh: (a) $m > 1 \Rightarrow \sqrt{m} > 1$. (b) $m < 1 \Rightarrow \sqrt{m} < 1$.

Chứng minh. Áp dụng Bài toán 22 (a) lần lượt với $(a, b) = (1, m)$ & $(a, b) = (m, 1)$, ta được: (a) $m > 1 \Rightarrow \sqrt{m} > \sqrt{1} = 1$. (b) $m < 1 \Rightarrow \sqrt{m} < \sqrt{1} = 1$. \square

Bài toán 24 ([Thâ+23], 11., p. 6). Cho $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$. Chứng minh: (a) $m > 1 \Rightarrow m > \sqrt{m} > 1$. (b) $m < 1 \Rightarrow m < \sqrt{m} < 1$.

Chứng minh. (a) Theo Bài toán 23 (a): $m > 1 \Rightarrow \sqrt{m} > 1$. Nhân cả 2 vế của bất đẳng thức cuối với $\sqrt{m} > 0$, ta được $m > \sqrt{m}$. (b) Theo Bài toán 23 (b): $m < 1 \Rightarrow \sqrt{m} < 1$. Nhân cả 2 vế của bất đẳng thức cuối với $\sqrt{m} > 0$, ta được $\sqrt{m} \cdot \sqrt{m} = m < \sqrt{m}$. \square

Bài toán 25 (Program to print out 1st n square roots). Với $n \in \mathbb{N}^*$ được nhập từ bàn phím, viết chương trình Pascal, C/C++, Python xuất ra: (a) Căn bậc 2 của n . (b) Căn bậc 2 của n số nguyên dương đầu tiên.

Pascal:

⁵Lũy thừa bậc thực của 1 số thực, i.e., a^b với $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$, sẽ được học ở chương trình Toán Giải tích 11.

```

program square_root;
var num, sqrt_num: real;
begin
  write('Enter a number num = ');
  readln(num);
  sqrt_num := Sqrt(num);
  writeln('sqrt of ', num, ' = ', sqrt_num)
end.

```

Bài toán 26 (Số chính phương). *Viết chương trình Pascal, C/C++, Python để kiểm tra 1 số $n \in \mathbb{N}^*$ được nhập từ bàn phím có phải là số chính phương hay không.*

Bài toán 27 ([Tuy23], Thí dụ 1, p. 5). *Cho số thực $x \geq 0$. So sánh \sqrt{x} với x .*

Giải. Vì $x \geq 0$ nên \sqrt{x} có nghĩa/xác định & $\sqrt{x} \geq 0$. Xét các trường hợp: (a) $\sqrt{x} = x \Leftrightarrow x = x^2 \Leftrightarrow x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$. (b) $\sqrt{x} < x \Leftrightarrow x < x^2 \Leftrightarrow x - x^2 < 0 \Leftrightarrow x(1 - x) < 0$, mà $x \geq 0$ nên suy ra $1 - x < 0$, hay $x > 1$. (c) $\sqrt{x} > x \Leftrightarrow x > x^2 \Leftrightarrow x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x(1 - x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$. Vậy: $x \in \{0, 1\} \Leftrightarrow \sqrt{x} = x$, $x > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} < x$, & $0 < x < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} > x$. \square

Nhận xét 1. *Về mặt phương pháp để so sánh 2 số không âm ta có thể so sánh các bình phương của 2 số đó: $a \geq b > 0 \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$. Về kết quả, khi so sánh \sqrt{x} với x ta thấy có thể xảy ra cả 3 trường hợp: lớn hơn, nhỏ hơn, hoặc bằng nhau tùy theo x ở trong khoảng giá trị nào, cụ thể: $x \in \{0, 1\} \Leftrightarrow \sqrt{x} = x$, $x > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} < x$, & $0 < x < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} > x$.*

Bài toán 28 ([Bin23], Ví dụ 2, p. 5). *Chứng minh tổng & hiệu của 1 số hữu tỷ với 1 số vô tỷ là 1 số vô tỷ.*

Giải. Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tồn tại 2 số $a \in \mathbb{Q}$ & $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sao cho $c = a + b \in \mathbb{Q}$. Ta có $b = c - a$, mà hiệu của 2 số hữu tỷ c, a là 1 số hữu tỷ nên $b \in \mathbb{Q}$, mâu thuẫn với giả thiết, nên c phải là số vô tỷ. Chứng minh tương tự cho hiệu. \square

Bài toán 29 ([Bin23], Ví dụ 3, p. 5). *Xét xem các số a, b có thể là số vô tỷ hay không, nếu: (a) $a + b$ & $a - b$ là các số hữu tỷ. (b) $a - b$ & ab là các số hữu tỷ.*

Bài toán 30 ([Bin23], Ví dụ 4, p. 5). *Chứng minh: Nếu số tự nhiên a không là số chính phương thì \sqrt{a} là số vô tỷ.*

Bài toán 31 ([Bin23], 2., p. 6). *Chứng minh các số sau là số vô tỷ: (a) $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$. (b) $m + \frac{\sqrt{3}}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Q}$, $n \neq 0$.*

Bài toán 32 ([Bin23], 3., p. 6). *Xét xem các số a, b có thể là số vô tỷ hay không nếu: (a) ab & $\frac{a}{b}$ là các số hữu tỷ. (b) $a + b$ & $\frac{a}{b}$ là các số hữu tỷ ($a + b \neq 0$). (c) $a + b$, a^2 , & b^2 là các số hữu tỷ ($a + b \neq 0$).*

Bài toán 33 ([Bin23], 4., p. 6). *So sánh 2 số: (a) $2\sqrt{3}$ & $3\sqrt{2}$. (b) $6\sqrt{5}$ & $5\sqrt{6}$. (c) $\sqrt{24} + \sqrt{45}$ & 12. (d) $\sqrt{37} - \sqrt{15}$ & 2.*

Bài toán 34 ([Bin23], 5., p. 6). (a) *Cho 1 ví dụ để chứng tỏ khẳng định $\sqrt{a} \leq a$ với mọi số a không âm là sai. (b) Cho $a > 0$. Với giá trị nào của a thì $\sqrt{a} \geq a$?*

Bài toán 35 ([Bin23], 6*, pp. 6–7). (a) *Chỉ ra 1 số thực x mà $x - \frac{1}{x}$ là số nguyên ($x \neq \pm 1$). (b) Chứng minh nếu $x - \frac{1}{x}$ là số nguyên & $x \neq \pm 1$ thì x & $x + \frac{1}{x}$ là số vô tỷ. Khi đó $(x + \frac{1}{x})^{2n}$ & $(x + \frac{1}{x})^{2n+1}$ là số hữu tỷ hay số vô tỷ?*

2 Căn Thức Bậc 2 & Hằng Đẳng Thức $\sqrt{A^2} = |A|$

Bài toán 36 ([Chí+23], ?1, p. 8). *Hình chữ nhật ABCD có đường chéo dài 5 cm & cạnh $BC = x$ cm. tính AB.*

Bài toán 37 ([Chí+23], ?2, p. 8). *Với giá trị nào của $x \in \mathbb{R}$ thì $\sqrt{5 - 2x}$ xác định?*

Bài toán 38 ([Chí+23], DL, p. 9). *Chứng minh: $\sqrt{a^2} = |a|$, $\forall a \in \mathbb{R}$.*

Bài toán 39 ([Chí+23], Ví dụ 2, p. 9). *Tính: (a) $\sqrt{12^2}$. (b) $\sqrt{(-7)^2}$.*

Bài toán 40 ([Chí+23], Ví dụ 3, p. 9). *Rút gọn: (a) $\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2}$. (b) $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2}$.*

Bài toán 41 ([Chí+23], Ví dụ 4, p. 10). *Rút gọn: (a) $\sqrt{(x - 2)^2}$ với $x \geq 2$. (b) $\sqrt{a^6}$ với $a < 0$.*

Bài toán 42 ([Chí+23], 6., p. 10). *Với giá trị nào của $a \in \mathbb{R}$ thì mỗi căn thức sau có nghĩa? (a) $\sqrt{\frac{a}{3}}$. (b) $\sqrt{-5a}$. (c) $\sqrt{4 - a}$. (d) $\sqrt{3a + 7}$.*

Bài toán 43 ([Chí+23], 7., p. 10). *Tính: (a) $\sqrt{(0.1)^2}$. (b) $\sqrt{(-0.3)^2}$. (c) $-\sqrt{(-1.3)^2}$. (d) $-0.4\sqrt{(-0.4)^2}$.*

Bài toán 44 ([Chí+23], 8., p. 10). *Rút gọn các biểu thức: (a) $\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}$. (b) $\sqrt{(3 - \sqrt{11})^2}$. (c) $2\sqrt{a^2}$ với $a \geq 0$ & với $a \in \mathbb{R}$. (d) $3\sqrt{(a - 2)^2}$ với $a < 2$ & với $a \in \mathbb{R}$.*

Bài toán 45 ([Chí+23], 9., p. 11). *Tìm x thỏa: (a) $\sqrt{x^2} = 7$. (b) $\sqrt{x^2} = |-8|$. (c) $\sqrt{4x^2} = 6$. (d) $\sqrt{9x^2} = |-12|$.*

Bài toán 46 ([**Chí+23**], 10., p. 11). Chứng minh: (a) $(\sqrt{3}-1)^2 = 4-2\sqrt{3}$. (b) $\sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{3} = -1$.

Bài toán 47 ([**Chí+23**], 11., p. 11). Tính: (a) $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25} + \sqrt{196} : \sqrt{49}$. (b) $36 : \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 18} - \sqrt{169}$. (c) $\sqrt{\sqrt{81}}$. (d) $\sqrt{3^2 + 4^2}$.

Bài toán 48 ([**Chí+23**], 12., p. 11). Tìm x để mỗi căn thức sau có nghĩa: (a) $\sqrt{2x+7}$. (b) $\sqrt{-3x+4}$. (c) $\sqrt{\frac{1}{x-1}}$. (d) $\sqrt{1+x^2}$.

Bài toán 49 ([**Chí+23**], 13., p. 11). Rút gọn các biểu thức: (a) $2\sqrt{a^2} - 5a$ với $a < 0$ & $a \in \mathbb{R}$. (b) $\sqrt{25a^2} + 3a$ với $a \geq 0$ & $a \in \mathbb{R}$. (c) $\sqrt{9a^4} + 3a^2$. (d) $5\sqrt{4a^6} - 3a^3$ với $a < 0$ & $a \in \mathbb{R}$.

Bài toán 50 ([**Chí+23**], 14., p. 11). Phân tích thành nhân tử: (a) $x^2 - 3$. (b) $x^2 - 6$. (c) $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3$. (d) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 5$.

Hint. $a = (\sqrt{a})^2, \forall a \in \mathbb{R}, a \geq 0$.

Bài toán 51 ([**Chí+23**], 15., p. 11). Giải phương trình: (a) $x^2 - 5 = 0$. (b) $x^2 - 2\sqrt{11}x + 11 = 0$.

Bài toán 52 ([**Chí+23**], 16., p. 12). Tìm chỗ sai trong phép chứng minh “Con muỗi nặng bằng con voi” sau: Giả sử con muỗi nặng m g, còn con voi nặng V g. Ta có: $m^2 + V^2 = V^2 + m^2$. Cộng cả 2 vế với $-2mV$, ta có: $m^2 - 2mV + V^2 = V^2 - 2mV + m^2$, hay $(m-V)^2 = (V-m)^2$. Lấy căn bậc 2 mỗi vế của đẳng thức trên, ta được: $\sqrt{(m-V)^2} = \sqrt{(V-m)^2}$. Do đó $m-V = V-m$. Từ đó ta có $2m = 2V$, suy ra $m = V$. Vậy con muỗi nặng bằng con voi!

Bài toán 53 ([**Thâ+23**], 12., p. 7). Tìm $x \in \mathbb{R}$ để căn thức sau có nghĩa: (a) $\sqrt{-2x+3}$. (b) $\sqrt{\frac{2}{x^2}}$. (c) $\sqrt{\frac{4}{x+3}}$. (d) $\sqrt{\frac{-5}{x^2+6}}$.

Bài toán 54 ([**Thâ+23**], 13., p. 7). Rút gọn rồi tính: (a) $5\sqrt{(-2)^4}$. (b) $-4\sqrt{(-3)^6}$. (c) $\sqrt{\sqrt{(-5)^8}}$. (d) $2\sqrt{(-5)^6} + 3\sqrt{(-2)^8}$.

Bài toán 55 ([**Thâ+23**], 14., p. 7). Rút gọn các biểu thức: (a) $\sqrt{(4+\sqrt{2})^2}$. (b) $\sqrt{(3-\sqrt{3})^2}$. (c) $\sqrt{(4-\sqrt{17})^2}$. (d) $2\sqrt{3} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$.

Bài toán 56 ([**Thâ+23**], 15., p. 7). Chứng minh: (a) $9+4\sqrt{5} = (\sqrt{5}+2)^2$. (b) $\sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = -2$. (c) $(4-\sqrt{7})^2 = 23-8\sqrt{7}$. (d) $\sqrt{23+8\sqrt{7}} - \sqrt{7} = 4$.

Bài toán 57 ([**Thâ+23**], 16., p. 7). Biểu thức sau đây xác định với giá trị nào của x ? (a) $\sqrt{(x-1)(x-3)}$. (b) $\sqrt{x^2-4}$. (c) $\sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$. (d) $\sqrt{\frac{2+x}{5-x}}$.

Bài toán 58 ([**Thâ+23**], 17., p. 8). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{9x^2} = 2x+1$. (b) $\sqrt{x^2+6x+9} = 3x-1$. (c) $\sqrt{1-4x+4x^2} = 5$. (d) $\sqrt{x^4} = 7$.

Bài toán 59 ([**Thâ+23**], 18., p. 8). Phân tích nhân tử: (a) $x^2 - 7$. (b) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$. (c) $x^2 + 2\sqrt{13}x + 13$.

Bài toán 60 ([**Thâ+23**], 19., p. 8). Tìm DKXD rồi rút gọn các phân thức: (a) $\frac{x^2-5}{x+\sqrt{5}}$. (b) $\frac{x^2+2\sqrt{2}x+2}{x^2-2}$.

Bài toán 61 ([**Thâ+23**], 20., p. 8). Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, so sánh: (a) $6+2\sqrt{2}$ & 9. (b) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ & 3. (c) $9+4\sqrt{5}$ & 16. (d) $\sqrt{11}-\sqrt{3}$ & 2.

Bài toán 62 ([**Thâ+23**], 21., p. 8). Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{3}$. (b) $\sqrt{11+6\sqrt{2}} - 3 + \sqrt{2}$. (c) $\sqrt{9x^2} - 2x$ với $x < 0$ & $x \in \mathbb{R}$. (d) $x-4+\sqrt{16-8x+x^2}$ với $x > 4$ & $x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 63 ([**Thâ+23**], 22., p. 8). (a) Chứng minh: $\sqrt{(n+1)^2} + \sqrt{n^2} = (n+1)^2 - n^2, \forall n \in \mathbb{N}$. Viết đẳng thức trên với $n = 1, 2, \dots, 10$. (b) Tính $\sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{x^2}$ với $x \in \mathbb{R}$ rồi so sánh với $|(x+1)^2 - x^2|$.

Bài toán 64 ([**Tuy23**], Thí dụ 2, p. 5). Cho $a, b, c \in \mathbb{Q}, abc \neq 0$ & $a = b+c$. Chứng minh $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \in \mathbb{Q}$.

Giải. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} - \frac{1}{bc}\right) = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + \frac{2(c+b-a)}{abc} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2$ vì $a = b+c$. Suy ra $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2} = \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right|$. Có $a, b, c \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \in \mathbb{Q} \Rightarrow A = \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right| \in \mathbb{Q}$. \square

Bài toán 65. Cho $a, b, c \in \mathbb{Q}, abc \neq 0$ & $a+b+c=0$. Chứng minh $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \in \mathbb{Q}$.

1st giải. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 - \frac{2(a+b+c)}{abc} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2$ vì $a+b+c=0$. Suy ra $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2} = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right|$. Có $a, b, c \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \in \mathbb{Q} \Rightarrow A = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right| \in \mathbb{Q}$. \square

2nd giải. $a + b + c = 0 \Leftrightarrow -a = b + c$, nên ta có thể áp dụng bài toán 64 cho bộ 3 số $(-a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$, $-abc \neq 0$ để thu được $\sqrt{\frac{1}{(-a)^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \in \mathbb{Q}$, i.e., $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \in \mathbb{Q}$. \square

Nhận xét 2 (Proof of $\in \mathbb{Q}$). Để chứng minh 1 số là số hữu tỷ ta biểu diễn số đó thành 1 biểu thức gồm các phép tính cộng, trừ, nhân, chia (cho 1 số khác 0) của các số hữu tỷ.

Bài toán 66. (a) Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$, $abc \neq 0$, khi nào thì $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$? (b) Cho $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $abcd \neq 0$, khi nào thì $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}$? (c) Cho $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, $abcde \neq 0$, khi nào thì $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} + \frac{1}{e^2}$? (d) Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$, khi nào thì xảy ra đẳng thức sau?

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2}, \text{ i.e., } \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)^2 = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}.$$

Bài toán 67. Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, $abcd \neq 0$ & $ab + ac + ad + bc + bd + cd = 0$. Chứng minh $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}} \in \mathbb{Q}$.

Bài toán 68. Cho $a, b, c, d, e \in \mathbb{Q}$, $abcde \neq 0$ & $abc + abd + abe + acd + ace + ade + bcd + bce + bde + cde = 0$. Chứng minh $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} + \frac{1}{e^2}} \in \mathbb{Q}$.

Bài toán 69. Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $a_i \in \mathbb{Q}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$, & $\sum_{\text{cyc}} a_1 a_2 \dots a_{n-2} = 0$. Chứng minh:

$$A = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2}} = \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}} \in \mathbb{Q}.$$

Lưu ý 10 (Cyclic sum). Ký hiệu \sum_{cyc} được gọi là tổng cyclic. Xem định nghĩa & ví dụ tại, e.g., [AoPS/cyclic sum](#)⁶.

Bài toán 70 ([Tuy23], 1., p. 6). Tính $A = \sqrt{\frac{8^{10} - 4^{10}}{4^{11} - 8^4}}$.

Phân tích. 4, 8 đều là lũy thừa của 2 nên sẽ tiện hơn nếu đưa tất cả các lũy thừa trong A về lũy thừa với cơ số 2.

Giải. $A = \sqrt{\frac{(2^3)^{10} - (2^2)^{10}}{(2^2)^{11} - (2^3)^4}} = \sqrt{\frac{2^{30} - 2^{20}}{2^{22} - 2^{12}}} = \sqrt{\frac{2^{20}(2^{10} - 1)}{2^{12}(2^{10} - 1)}} = \sqrt{2^8} = 2^4 = 16.$ \square

Bài toán 71 ([Tuy23], 2., p. 6). Cho $A = \underbrace{99 \dots 94}_{10's} \underbrace{00 \dots 09}_{10's}$. Tính \sqrt{A} .

1st giải. $A = \underbrace{99 \dots 94}_{10's} \cdot \underbrace{100 \dots 0}_{11's} + 9 = (\underbrace{99 \dots 97}_{10's} - 3)(\underbrace{99 \dots 97}_{10's} + 3) + 9 = \underbrace{99 \dots 97^2}_{10's} - 3^2 + 9 = \underbrace{99 \dots 97^2}_{10's} \Rightarrow \sqrt{A} = \underbrace{99 \dots 97}_{10's}.$ \square

2nd giải. $A = (10^{10} - 1) \cdot 10^{12} + 4 \cdot 10^{11} + 9 = 10^{22} - 10^{12} + 4 \cdot 10^{11} + 9 = 10^{22} - 10 \cdot 10^{11} + 4 \cdot 10^{11} + 9 = 10^{22} - 6 \cdot 10^{11} + 9 = (10^{11} - 3)^2 \Rightarrow \sqrt{A} = 10^{11} - 3 = \underbrace{99 \dots 97}_{10's}.$ \square

Bài toán 72 ([Tuy23], 3., p. 6). Không dùng máy tính hoặc bảng số, so sánh: (a) $\sqrt{8} + \sqrt{15}$ & $\sqrt{65} - 1$. (b) $\frac{13 - 2\sqrt{3}}{6}$ & $\sqrt{2}$.

Hint. Tìm các số chính phương gần với các số dưới dấu căn để đơn giản dấu căn 1 cách hợp lý.

Giải. (a) $\sqrt{8} + \sqrt{15} < \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$, & $\sqrt{65} - 1 > \sqrt{64} - 1 = 8 - 1 = 7$. Suy ra $\sqrt{8} + \sqrt{15} < \sqrt{65} - 1$. (b) $\frac{13 - 2\sqrt{3}}{6} > \frac{13 - 2\sqrt{4}}{6} = \frac{3}{2} = 1.5$. Mặt khác, $(1.5)^2 = 2.25 > 2 \Leftrightarrow 1.5 > \sqrt{2}$, nên $\frac{13 - 2\sqrt{3}}{6} > \sqrt{2}$. \square

Bài toán 73 ([Tuy23], 4., p. 6). Tìm điều kiện xác định (DKXD) & tập xác định (TXD) của các biểu thức: (a) $\sqrt{2 - x^2}$. (b) $\frac{x}{\sqrt{5x^2 - 3}}$. (c) $\sqrt{-4x^2 + 4x - 1}$. (d) $\frac{1}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$.

⁶URL: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Cyclic_sum.

Giải. (a) $\sqrt{2-x^2}$ xác định $\Leftrightarrow 2-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 2 \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. ĐKXD: $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. TXD: $D = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. (b) $\frac{x}{\sqrt{5x^2-3}}$ xác định $\Leftrightarrow 5x^2-3 > 0 \Leftrightarrow x^2 > \frac{3}{5} \Leftrightarrow |x| > \sqrt{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow x > \sqrt{\frac{3}{5}}$ hoặc $x < -\sqrt{\frac{3}{5}}$. ĐKXD: $x > \sqrt{\frac{3}{5}}$ hoặc $x < -\sqrt{\frac{3}{5}}$. TXD: $D = \left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \infty\right)$. (c) $\sqrt{-4x^2+4x-1}$ xác định $\Leftrightarrow -4x^2+4x-1 \geq 0 \Leftrightarrow -(2x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 2x-1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. ĐKXD: $x = \frac{1}{2}$. TXD: $D = \left\{\frac{1}{2}\right\}$. (d) $\frac{1}{\sqrt{x^2+x-2}}$ xác định $\Leftrightarrow x^2+x-2 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ hoặc $x < -2$. ĐKXD: $x > 1$ hoặc $x < -2$. TXD: $D = (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$. \square

Bài toán 74 ([Tuy23], 5., p. 6). Cho $a, b, c \in \mathbb{Q}$ khác nhau đôi một. Chứng minh $A = \sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}} \in \mathbb{Q}$.

1st giải. $\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)}\right) = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)^2 - \frac{2(c-a+a-b+b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)^2 \Rightarrow A = \left|\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right|$. Vì $a, b, c \in \mathbb{Q}$ khác nhau đôi một nghĩa là $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$, suy ra $\frac{1}{a-b}, \frac{1}{b-c}, \frac{1}{c-a} \in \mathbb{Q} \Rightarrow A = \left|\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right| \in \mathbb{Q}$. \square

2nd giải. Vì $(a-b) + (b-c) + (c-a) = 0$, & vì $a, b, c \in \mathbb{Q}$ khác nhau đôi một nghĩa là $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ nên có thể áp dụng Bài toán 65 cho bộ 3 số $(a-b, b-c, c-a)$ để thu được $A = \sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}} \in \mathbb{Q}$. \square

Bài toán 75 ([Tuy23], 6., p. 6). Cho $a, b, c \in \mathbb{Q}$ thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh $A = \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} \in \mathbb{Q}$.

Giải. $a^2+1 = a^2+ab+bc+ca = (a+b)(a+c)$, $b^2+1 = b^2+ab+bc+ca = (b+c)(b+a)$, $c^2+1 = c^2+ab+bc+ca = (c+a)(c+b)$, nên $A = \sqrt{(a+b)(a+c)(b+c)(b+a)(c+a)(c+b)} = \sqrt{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2} = |(a+b)(b+c)(c+a)|$. Có: $a, b, c \in \mathbb{Q} \Rightarrow A = |(a+b)(b+c)(c+a)| \in \mathbb{Q}$. \square

Bài toán 76 ([Tuy23], 7., p. 6-7). (a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sqrt{-x^2+x+\frac{3}{4}}$. (b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = \sqrt{4x^4-4x^2(x+1)+(x+1)^2+9}$. (c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = \sqrt{25x^2-20x+4} + \sqrt{25x^2}$.

Bài toán 77 ([Tuy23], 8., p. 7). Cho $x < 0$, rút gọn biểu thức $A = |2x - \sqrt{(5x-1)^2}|$.

Bài toán 78 ([Tuy23], 9., p. 7). Cho biểu thức $A = 4x - \sqrt{9x^2-12x+4}$. (a) Rút gọn A. (b) Tính giá trị của A với $x = \frac{2}{7}$.

Bài toán 79 ([Tuy23], 10., p. 7). Cho biểu thức $A = 5x + \sqrt{x^2+6x+9}$. (a) Rút gọn A. (b) Tìm x để $B = -9$.

Bài toán 80 ([Tuy23], 11., p. 7). Tìm $x \in \mathbb{R}$ biết $\sqrt{4x^2-4x+1} \leq 5-x$.

Bài toán 81 ([Tuy23], 12., p. 7). Giải phương trình: (a) $\sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{x+1}$. (b) $\sqrt{x^2-9} + \sqrt{x^2-6x+9} = 0$. (c) $\sqrt{x^2-4} - x^2 + 4 = 0$.

Bài toán 82 ([Tuy23], 13., p. 7). Giải phương trình: (a) $\sqrt{x^2-4x+5} + \sqrt{x^2-4x+8} + \sqrt{x^2-4x+9} = 3 + \sqrt{5}$. (b) $\sqrt{2-x^2+2x} + \sqrt{-x^2-6x-8} = 1 + \sqrt{3}$. (c) $\sqrt{9x^2-6x+2} + \sqrt{45x^2-30x+9} = \sqrt{6x-9x^2+8}$.

Bài toán 83 ([Bin23], Ví dụ 5, p. 7). Cho biểu thức $A = \sqrt{x - \sqrt{x^2-4x+4}}$. (a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức A. (b) Rút gọn biểu thức A.

Bài toán 84 ([Bin23], Ví dụ 6, p. 8). Tìm điều kiện xác định của các biểu thức: (a) $A = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x-1}}$. (b) $B = \frac{1}{\sqrt{x-\sqrt{2x+1}}}$.

Bài toán 85 ([Bin23], Ví dụ 7, p. 8). Tìm các giá trị của x sao cho $\sqrt{x+1} < x+3$.

Bài toán 86 ([Bin23], 7., p. 9). Tìm điều kiện xác định của các biểu thức: (a) $3-\sqrt{1-16x^2}$. (b) $\frac{1}{1-\sqrt{x^2-3}}$. (c) $\sqrt{8x-x^2-15}$. (d) $\frac{2}{\sqrt{x^2-x+1}}$. (e) $A = \frac{1}{\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}$. (f) $B = \frac{\sqrt{16-x^2}}{\sqrt{2x+1}} + \sqrt{x^2-8x+14}$.

Bài toán 87 ([Bin23], 8., p. 9). Cho biểu thức $A = \sqrt{x^2-6x+9} - \sqrt{x^2+6x+9}$. (a) Rút gọn biểu thức A. (b) Tìm các giá trị của x để $A = 1$.

Bài toán 88 ([Bin23], 9., p. 9). Tìm các giá trị của x sao cho: (a) $\sqrt{x^2-3} \leq x^2-3$. (b) $\sqrt{x^2-6x+9} > x-6$.

Bài toán 89 ([Bin23], 10., p. 9). Cho $a+b+c=0$ & $abc \neq 0$. Chứng minh hằng đẳng thức: $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right|$.

3 Liên Hệ Giữa Phép Nhân, Phép Chia & Phép Khai Phương

Bài toán 90 ([**Chí+23**], ?1, p. 12). *Tính & so sánh: $\sqrt{16 \cdot 25}$ & $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25}$.*

Bài toán 91 ([**Chí+23**], DL, p. 12). *Chứng minh: (a) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$. (b)*

$$\sqrt{\prod_{i=1}^n a_i} = \prod_{i=1}^n \sqrt{a_i}, \text{ i.e., } \sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n} = \sqrt{a_1} \sqrt{a_2} \cdots \sqrt{a_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_i \in \mathbb{R}, a_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Bài toán 92 ([**Chí+23**], Ví dụ 1, ?2, p. 13). *Áp dụng quy tắc khai phương 1 tích, tính: (a) $\sqrt{49 \cdot 1.44 \cdot 25}$. (b) $\sqrt{810 \cdot 40}$. (c) $\sqrt{0.16 \cdot 0.64 \cdot 225}$. (d) $\sqrt{250 \cdot 360}$.*

Bài toán 93 ([**Chí+23**], Ví dụ 2, ?3, pp. 13–14). *Tính: (a) $\sqrt{5}\sqrt{20}$. (b) $\sqrt{1.3}\sqrt{52}\sqrt{10}$. (c) $\sqrt{3}\sqrt{75}$. (d) $\sqrt{20}\sqrt{72}\sqrt{4.9}$.*

Bài toán 94 ([**Chí+23**], Ví dụ 3, ?4, p. 14). *Tìm DKXD rồi rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{3a}\sqrt{27a}$ với $a \geq 0$. (b) $\sqrt{9a^2b^4}$. (c) $\sqrt{3a^3}\sqrt{12a}$. (d) $\sqrt{2a \cdot 32ab^2}$.*

Bài toán 95 ([**Chí+23**], 17., p. 14). *Áp dụng quy tắc khai phương 1 tích, tính: (a) $\sqrt{0.09 \cdot 64}$. (b) $\sqrt{2^4(-7)^2}$. (c) $\sqrt{12.1 \cdot 360}$. (d) $\sqrt{2^2 \cdot 3^4}$.*

Bài toán 96 ([**Chí+23**], 18., p. 14). *Áp dụng quy tắc nhân các căn bậc 2, tính: (a) $\sqrt{7}\sqrt{63}$. (b) $\sqrt{2.5}\sqrt{30}\sqrt{48}$. (c) $\sqrt{0.4} \cdot \sqrt{6.4}$. (d) $\sqrt{2.7}\sqrt{5}\sqrt{1.5}$.*

Bài toán 97 ([**Chí+23**], 19., p. 15). *Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{0.36a^2}$ với $a < 0$ & $a \in \mathbb{R}$. (b) $\sqrt{a^4(3-a)^2}$ với $a \geq 3$ & $a \in \mathbb{R}$. (c) $\sqrt{27 \cdot 48(1-a)^2}$ với $a > 1$ & $a \in \mathbb{R}$. (d) $\frac{1}{a-b}\sqrt{a^4(a-b)^2}$ với $a > b$.*

Bài toán 98 ([**Chí+23**], 20., p. 15). *Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{\frac{2a}{3}}\sqrt{\frac{3a}{8}}$ với $a \geq 0$. (b) $\sqrt{13a}\sqrt{\frac{52}{a}}$ với $a > 0$. (c) $\sqrt{5a}\sqrt{45a} - 3a$ với $a \geq 0$. (d) $(3-a)^2 - \sqrt{0.2}\sqrt{180a^2}$.*

Bài toán 99 ([**Chí+23**], 21., p. 15). *Khai phương tích $12 \cdot 30 \cdot 40$ được bao nhiêu?*

Bài toán 100 ([**Chí+23**], 22., p. 15). *Tính hợp lý: (a) $\sqrt{13^2 - 12^2}$. (b) $\sqrt{17^2 - 8^2}$. (c) $\sqrt{117^2 - 108^2}$. (d) $\sqrt{313^2 - 312^2}$.*

Bài toán 101 (Mở rộng [**Chí+23**], 22., p. 15). *Rút gọn biểu thức:*

$$\sqrt{\left(\frac{m^2 + n^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{m^2 - n^2}{2}\right)^2}, \forall m, n \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 102 ([**Chí+23**], 23., p. 15). *Chứng minh: (a) $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1$. (b) $\sqrt{2006} \pm \sqrt{2005}$ là 2 số nghịch đảo của nhau.*

Bài toán 103 (Mở rộng [**Chí+23**], 23., p. 15). *Chứng minh: (a) $(n - \sqrt{n^2 - 1})(n + \sqrt{n^2 - 1}) = 1$, $\forall n \in \mathbb{R}$, $|n| \geq 1$. (b) $\sqrt{n+1} \pm \sqrt{n}$ là 2 số nghịch đảo của nhau, $\forall n \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$.*

Bài toán 104 ([**Chí+23**], 24., p. 15). *Rút gọn & tìm giá trị (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 3) của các căn thức: (a) $\sqrt{4(1+6x+9x^2)}$ tại $x = -\sqrt{2}$. (b) $\sqrt{9a^2(b^2+4-4b)}$ tại $a = -2$, $b = -\sqrt{3}$.*

Bài toán 105 ([**Chí+23**], 25., p. 16). *Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{16x} = 8$. (b) $\sqrt{4x} = \sqrt{5}$. (c) $\sqrt{9(x-1)} = 21$. (d) $\sqrt{4(1-x)^2} - 6 = 0$.*

Bài toán 106 ([**Chí+23**], 26., p. 16). *(a) So sánh $\sqrt{25+9}$ & $\sqrt{25} + \sqrt{9}$. (b) Chứng minh $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$. (c) Chứng minh $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$.*

Bài toán 107 ([**Chí+23**], 27., p. 16). *So sánh: (a) 4 & $2\sqrt{3}$. (b) $-\sqrt{5}$ & -2.*

Bài toán 108 ([**Thâ+23**], 23., p. 9). *Tính: (a) $\sqrt{10}\sqrt{40}$. (b) $\sqrt{5}\sqrt{45}$. (c) $\sqrt{52}\sqrt{13}$. (d) $\sqrt{2}\sqrt{162}$.*

Bài toán 109 ([**Thâ+23**], 24., p. 9). *Tính: (a) $\sqrt{45 \cdot 80}$. (b) $\sqrt{75 \cdot 48}$. (c) $\sqrt{90 \cdot 6.4}$. (d) $\sqrt{2.5 \cdot 14.4}$.*

Bài toán 110 ([**Thâ+23**], 25., p. 9). *Rút gọn rồi tính: (a) $\sqrt{6.8^2 - 3.2^2}$. (b) $\sqrt{21.8^2 - 18.2^2}$. (c) $\sqrt{117.5^2 - 26.5^2 - 1440}$. (d) $\sqrt{146.5^2 - 109.5^2 + 27.256}$.*

Bài toán 111 ([**Thâ+23**], 26., p. 9). *Chứng minh: (a) $\sqrt{9 - \sqrt{17}}\sqrt{9 + \sqrt{17}} = 8$. (b) $2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 2) + (1 + 2\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} = 9$.*

Bài toán 112 ([**Thâ+23**], 27., p. 9). *Rút gọn: (a) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{14}}{2\sqrt{3} + \sqrt{28}}$. (b) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + \sqrt{16}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}$.*

Bài toán 113 ([**Thâ+23**], 28., p. 9). *Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, so sánh: (a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ & $\sqrt{10}$. (b) $\sqrt{3} + 2$ & $\sqrt{2} + \sqrt{6}$. (c) 16 & $\sqrt{15}\sqrt{17}$. (d) 8 & $\sqrt{15} + \sqrt{17}$.*

Bài toán 114 ([Thã+23], 29., p. 9). Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, so sánh: (a) $\sqrt{2003} + \sqrt{2005}$ & $2\sqrt{2004}$.

Bài toán 115 ([Thã+23], 30., p. 9). Cho 2 biểu thức $A = \sqrt{x+2}\sqrt{x-3}$, $B = \sqrt{(x+2)(x-3)}$. (a) Tìm $x \in \mathbb{R}$ lần lượt để A, B có nghĩa. (b) Với giá trị nào của x thì $A = B$?

Bài toán 116 ([Thã+23], 31., p. 10). Biểu diễn \sqrt{ab} ở dạng tích các căn bậc 2 với $a < 0$ & $b < 0$. Áp dụng tính $\sqrt{(-25) \cdot (-64)}$.

Bài toán 117 ([Thã+23], 32., p. 10). Rút gọn các biểu thức: (a) $\sqrt{4(a-3)^2}$ với $a \geq 3$ & $a \in \mathbb{R}$. (b) $\sqrt{9(b-2)^2}$ với $b < 2$ & $b \in \mathbb{R}$. (c) $\sqrt{a^2(a+1)^2}$ với $a > 0$ & $a \in \mathbb{R}$. (d) $\sqrt{b^2(b-1)^2}$ với $b < 0$ & $b \in \mathbb{R}$.

Bài toán 118 ([Thã+23], 33., p. 10). (a) Tìm DKXD & biến đổi các biểu thức sau về dạng tích: $A(x) = \sqrt{x^2-4} + 2\sqrt{x-2}$, $B(x) = 3\sqrt{x+3} + \sqrt{x^2-9}$. (b) Giải phương trình $A(x) = 0$ & $B(x) = 0$.

Bài toán 119 ([Thã+23], 34., p. 10). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{x-5} = 3$. (b) $\sqrt{x-10} = -2$. (c) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{5}$. (d) $\sqrt{4-5x} = 12$.

Bài toán 120 ([Thã+23], 35., p. 10). (a) Chứng minh: $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2 = \sqrt{(2n+1)^2} - \sqrt{(2n+1)^2-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Viết đẳng thức trên khi $n = 1, 2, 3, 4$. (B) Đẳng thức trên còn đúng khi $n \in \mathbb{Z}$ & $n \in \mathbb{R}$ không?

Bài toán 121 ([Chí+23], ?1, p. 16). Tính & so sánh: $\sqrt{\frac{16}{25}}$ & $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}$.

Bài toán 122 ([Chí+23], DL, p. 16). Chứng minh: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $b > 0$.

Bài toán 123 ([Chí+23], Ví dụ 1, ?2, p. 17). Áp dụng quy tắc khai phương 1 thương, tính: (a) $\sqrt{\frac{25}{121}}$. (b) $\sqrt{\frac{9}{16} : \frac{25}{36}}$. (a) $\sqrt{\frac{225}{256}}$. (d) $\sqrt{0.0196}$.

Bài toán 124 ([Chí+23], Ví dụ 2, ?3, pp. 17–18). Tính: (a) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$. (b) $\sqrt{\frac{49}{8}} : \sqrt{3\frac{1}{8}}$. (c) $\frac{\sqrt{999}}{\sqrt{111}}$. (d) $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}}$.

Bài toán 125 ([Chí+23], Ví dụ 3, ?4, p. 18). Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{\frac{4a^2}{25}}$. (b) $\frac{\sqrt{27a}}{\sqrt{3a}}$ với $a > 0$. (c) $\sqrt{\frac{2a^2b^4}{50}}$. (d) $\frac{\sqrt{2ab^2}}{\sqrt{162}}$ với $a \geq 0$.

Bài toán 126 ([Chí+23], 28., p. 18). Tính: (a) $\sqrt{\frac{289}{225}}$. (b) $\sqrt{2\frac{14}{25}}$. (c) $\sqrt{\frac{0.25}{9}}$. (d) $\sqrt{\frac{8.1}{1.6}}$.

Bài toán 127 ([Chí+23], 29., p. 19). Tính: (a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$. (b) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{735}}$. (c) $\frac{\sqrt{12500}}{\sqrt{500}}$. (d) $\frac{\sqrt{6^5}}{\sqrt{2^3 \cdot 3^5}}$.

Bài toán 128 ([Chí+23], 30., p. 19). Rút gọn biểu thức: (a) $\frac{y}{x} \sqrt{\frac{x^2}{y^4}}$ với $x > 0$ & $y \neq 0$. (b) $2y^2 \sqrt{\frac{x^4}{4y^2}}$ với $y < 0$. (c) $5xy \sqrt{\frac{25x^2}{y^6}}$ với $x < 0$, $y > 0$. (d) $0.2x^3y^3 \sqrt{\frac{16}{x^4y^8}}$ với $xy \neq 0$.

Bài toán 129 ([Chí+23], 31., p. 19). (a) So sánh $\sqrt{25-16}$ & $\sqrt{25} - \sqrt{16}$. (b) Chứng minh: $\sqrt{a} - \sqrt{b} < \sqrt{a-b}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a > b > 0$.

Bài toán 130 ([Chí+23], 32., p. 19). Tính: (a) $\sqrt{1\frac{9}{16} \cdot 5\frac{4}{9} \cdot 0.01}$. (b) $\sqrt{1.44 \cdot 1.21 - 1.44 \cdot 0.4}$. (c) $\sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}}$. (d) $\sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}$.

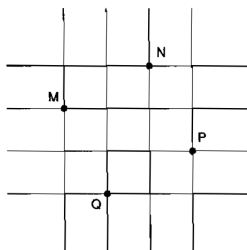
Bài toán 131 ([Chí+23], 33., p. 19). Giải phương trình: (a) $\sqrt{2}x - \sqrt{50} = 0$. (b) $\sqrt{3}x + \sqrt{3} = \sqrt{12} + \sqrt{27}$. (c) $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{12} = 0$. (d) $\frac{x^2}{\sqrt{5}} - \sqrt{20} = 0$.

Bài toán 132 ([Chí+23], 34., pp. 19–20). Rút gọn biểu thức: (a) $ab^2 \sqrt{\frac{3}{a^2b^4}}$ với $a < b$, $b \neq 0$. (b) $\sqrt{\frac{27(a-3)^2}{48}}$ với $a > 3$. (c) $\sqrt{\frac{9+12a+4a^2}{b^2}}$ với $a \geq -1.5$ & $b < 0$. (d) $(a-b) \sqrt{\frac{ab}{(a-b)^2}}$ với $a < b < 0$.

Bài toán 133 ([Chí+23], 35., p. 20). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{(x-3)^2} = 9$. (b) $\sqrt{4x^2+4x+1} = 6$.

Bài toán 134 ([Chí+23], 36., p. 20). Đ/S? (a) $0.01 = \sqrt{0.0001}$. (b) $-0.5 = \sqrt{-0.25}$. (c) $6 < \sqrt{39} < 7$. (d) $(4 - \sqrt{13})2x < \sqrt{3}(4 - \sqrt{13}) \Leftrightarrow 2x < \sqrt{3}$.

Bài toán 135 ([**Chí+23**], 37., p. 20). Trên lưới ô vuông, mỗi hình vuông cạnh 1 cm, cho 4 điểm M, N, P, Q :



Xác định số đo cạnh, đường chéo & diện tích tứ giác $MNPQ$.

Bài toán 136 ([**Thâ+23**], 36., p. 10). Áp dụng quy tắc khai phương 1 thương, tính: (a) $\sqrt{\frac{9}{169}}$. (b) $\sqrt{\frac{25}{144}}$. (c) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$. (d) $\sqrt{2\frac{7}{81}}$.

Bài toán 137 ([**Thâ+23**], 37., p. 11). Áp dụng quy tắc chia căn bậc 2, tính: (a) $\frac{\sqrt{2300}}{\sqrt{23}}$. (b) $\frac{\sqrt{12.5}}{\sqrt{0.5}}$. (c) $\frac{\sqrt{192}}{\sqrt{12}}$. (d) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{150}}$.

Bài toán 138 ([**Thâ+23**], 38., p. 11). Cho các biểu thức $A = \sqrt{\frac{2x+3}{x-3}}$, $B = \frac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x-3}}$. (a) Tìm $x \in \mathbb{R}$ lần lượt để A, B có nghĩa. (b) Với giá trị nào của $x \in \mathbb{R}$ thì $A = B$?

Bài toán 139 ([**Thâ+23**], 39., p. 11). Biểu diễn $\sqrt{\frac{a}{b}}$ với $a, b < 0$ ở dạng thương của 2 căn thức. Áp dụng tính $\sqrt{\frac{-49}{-81}}$.

Bài toán 140 ([**Thâ+23**], 40., p. 11). Rút gọn biểu thức: (a) $\frac{\sqrt{63y^3}}{\sqrt{7y}}$, $y > 0$. (b) $\frac{\sqrt{48x^3}}{\sqrt{3x^5}}$, $x > 0$. (c) $\frac{\sqrt{45mn^2}}{\sqrt{20m}}$, $m, n > 0$. (d) $\frac{\sqrt{16a^4b^6}}{\sqrt{128a^6b^6}}$, $a < 0$, $b \neq 0$.

Bài toán 141 ([**Thâ+23**], 41., pp. 11–12). Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{\frac{x-2\sqrt{x+1}}{x+2\sqrt{x+1}}}$, $x \geq 0$. (b) $\frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \sqrt{\frac{y-2\sqrt{y}+1}{(x-1)^4}}$, $x \neq 1$, $y \neq 1$, $y \geq 0$.

Bài toán 142 ([**Thâ+23**], 42., p. 12). Rút gọn biểu thức với điều kiện đã cho của x rồi tính giá trị của nó: (a) $\sqrt{\frac{(x-2)^4}{(3-x)^2} + \frac{x^2-1}{x-3}}$, $x < 3$, tại $x = 0.5$. (b) $4x - \sqrt{8} + \frac{\sqrt{x^3+2x^2}}{\sqrt{x+2}}$, $x > -2$, tại $x = -\sqrt{2}$.

Bài toán 143 ([**Thâ+23**], 43., p. 12). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{\frac{2x-3}{x-1}} = 2$. (b) $\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} = 2$. (c) $\sqrt{\frac{4x+3}{x+1}} = 3$. (d) $\frac{\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+1}} = 3$.

Bài toán 144 ([**Thâ+23**], 44., p. 12). Chứng minh bất đẳng thức Cauchy cho 2 số không âm:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 145 ([**Thâ+23**], 45., p. 12). Chứng minh:

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0.$$

Bài toán 146 ([**Thâ+23**], 46., p. 12). Chứng minh: $a + \frac{1}{a} \geq 2$, $\forall a \in \mathbb{R}, a > 0$.

Bài toán 147 ([**Thâ+23**], 52., p. 13). Chứng $\sqrt{2}$ là số vô tỷ.

Bài toán 148 ([**Thâ+23**], 53., p. 13). Chứng minh: (a) $\sqrt{3}$ là số vô tỷ. (b) $5\sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}$ đều là số vô tỷ.

Bài toán 149 ([**Thâ+23**], 54., p. 14). Tìm tập hợp các số thực x thỏa mãn bất đẳng thức $\sqrt{x} > 2$ & biểu diễn tập hợp đó trên trục số.

Bài toán 150 ([**Thâ+23**], 55., p. 14). Tìm tập hợp các số thực x thỏa mãn bất đẳng thức $\sqrt{x} < 3$ & biểu diễn tập hợp đó trên trục số.

Bài toán 151 ([**Tuy23**], Thí dụ 3, p. 9). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}}$.

Bài toán 152 ([Tuy23], Thí dụ 4, p. 10). *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sqrt{x-5} + \sqrt{13-x}$.*

Bài toán 153 ([Tuy23], 14., p. 11). *Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{3}} - \sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{7}-2}}$.*

Bài toán 154 ([Tuy23], 15., p. 11). *Cho 2 số có tổng bằng $\sqrt{19}$ & có hiệu bằng $\sqrt{7}$. Tính tích của 2 số đó.*

Bài toán 155 ([Tuy23], 16., p. 11). *Tính \sqrt{A} biết: (a) $A = 13 - 2\sqrt{42}$. (b) $A = 46 + 6\sqrt{5}$. (c) $A = 12 - 3\sqrt{15}$.*

Bài toán 156 ([Tuy23], 17., p. 12). *Rút gọn biểu thức: (a) $A = \sqrt{6+2\sqrt{2}\sqrt{3-\sqrt{4+2\sqrt{3}}}}$. (b) $B = \sqrt{5} - \sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}$. (c) $C = \sqrt{3-\sqrt{5}}(\sqrt{10}-\sqrt{2})(3+\sqrt{5})$.*

Bài toán 157 ([Tuy23], 18., p. 12). *Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$.*

Bài toán 158 ([Tuy23], 19., p. 12). *Cho $a > 0$, so sánh $\sqrt{a+1} + \sqrt{a+3}$ với $2\sqrt{a+2}$.*

Bài toán 159 ([Tuy23], 20., p. 12). *Cho $a, b, x, y > 0$. Chứng minh $\sqrt{ax} + \sqrt{by} \leq \sqrt{(a+b)(x+y)}$.*

Bài toán 160 ([Tuy23], 21., p. 12). *(a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-8}$. (b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$.*

Bài toán 161 ([Tuy23], 22., p. 12). *Rút gọn biểu thức:*

$$A = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} \left[\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3} \right]}{2+\sqrt{1-x^2}}.$$

Bài toán 162 ([Tuy23], 23., p. 12). *Tìm x, y biết $x+y+12 = 4\sqrt{x} + 6\sqrt{y-1}$.*

Bài toán 163 ([Tuy23], 24., p. 12). *Tìm x, y, z biết $\sqrt{x-a} + \sqrt{y-b} + \sqrt{z-c} = \frac{1}{2}(x+y+z)$, trong đó $a+b+c=3$.*

Bài toán 164 ([Tuy23], 25., p. 12). *Giải phương trình $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8+6\sqrt{x-1}} = 5$.*

Bài toán 165 ([Tuy23], 26., p. 12). *Giải phương trình $\sqrt{x^2-5x+6} + \sqrt{x+1} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2-2x-3}$.*

Bài toán 166 ([Tuy23], 27., p. 12). *Chứng minh bất đẳng thức $\sqrt{n+a} + \sqrt{n-a} < 2\sqrt{n}$ vpos $0 < |a| \leq n$. Áp dụng (không dùng máy tính hoặc bảng số): Chứng minh: $\sqrt{101} - \sqrt{99} > 0.1$.*

Bài toán 167 ([Tuy23], 28., p. 13). *Chứng minh: $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Áp dụng: Cho $S = \sum_{i=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}}$. Chứng minh $18 < S < 19$.*

Bài toán 168 ([Tuy23], 29., p. 13). *Chứng minh: $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Áp dụng: Chứng minh: $S = \sum_{i=1}^{2500} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2500}} < 100$.*

Bài toán 169 ([Tuy23], 30., p. 13). *Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh $x+y+z \geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$.*

Bài toán 170 ([Tuy23], 31., p. 13). *Cho $A = \sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}$. Chứng minh $A \leq 4$.*

Bài toán 171 ([Tuy23], 32., p. 13). *Cho $B = \frac{x^3}{1+y} + \frac{y^3}{1+x}$ trong đó x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy = 1$. Chứng minh $B \geq 1$.*

Bài toán 172 ([Tuy23], 33., p. 13). *Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 2$. Chứng minh $xyz \leq \frac{1}{8}$.*

Bài toán 173 ([Tuy23], 34., p. 13). *Tìm các số dương x, y, z sao cho $x+y+z = 3$ & $x^4 + y^4 + z^4 = 3xyz$.*

Bài toán 174 ([Tuy23], 35., p. 13). *Cho $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 10$. Chứng minh: $x+y \geq 20$.*

Bài toán 175 ([Tuy23], 36., p. 13). *Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z = 1$. Chứng minh: $\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} \leq \sqrt{6}$.*

Bài toán 176 ([Bin23], Ví dụ 8, p. 10). *Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x+\sqrt{2x-1}} - \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$.*

Bài toán 177 ([Bin23], Ví dụ 9, p. 11). *Chứng minh số $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ là số vô tỷ.*

Bài toán 178 ([Bin23], 11., pp. 11-12). *Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{11-2\sqrt{10}}$. (b) $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$. (c) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$. (d) $\sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{9+4\sqrt{5}}$. (e) $\sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}}$. (f) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{2} + \sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{7+2\sqrt{10}}}$. (g) $\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}$. (h) $\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$. (i) $\sqrt{94-42\sqrt{5}} - \sqrt{94+42\sqrt{5}}$.*

Bài toán 179 ([Bin23], 12., p. 12). *Tính: (a) $(4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$. (b) $\sqrt{3 - \sqrt{5}}(\sqrt{10} - \sqrt{2})(3 + \sqrt{5})$. (c) $\frac{\sqrt{\sqrt{5} + 2} + \sqrt{\sqrt{5} - 2}}{\sqrt{\sqrt{5} + 1}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$.*

Bài toán 180 ([Bin23], 13., p. 12). *Chứng minh các hằng đẳng thức sau với $b \geq 0$, $a \geq \sqrt{b}$: (a) $\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2(a \pm \sqrt{a^2 - b})}$. (b) $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$.*

Bài toán 181 ([Bin23], 14., p. 12). *Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x + 2\sqrt{2x - 4}} + \sqrt{x - 2\sqrt{2x - 4}}$.*

Bài toán 182 ([Bin23], 15., p. 12). *Cho biểu thức $A = \frac{x + \sqrt{x^2 - 2x}}{x - \sqrt{x^2 - 2x}} - \frac{x - \sqrt{x^2 - 2x}}{x + \sqrt{x^2 - 2x}}$. (a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức A. (b) Rút gọn biểu thức A. (c) Tìm giá trị của x để $A < 2$.*

Bài toán 183 ([Bin23], 16., p. 12). *Lập 1 phương trình bậc 2 với các hệ số nguyên, trong đó: (a) $2 + \sqrt{3}$ là 1 nghiệm của phương trình. (b) $6 - 4\sqrt{2}$ là 1 nghiệm của phương trình.*

Bài toán 184 ([Bin23], 17., p. 13). *Chứng minh các số sau là số vô tỷ: (a) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$. (b) $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$.*

Bài toán 185 ([Bin23], 18., p. 13). *Có tồn tại các số hữu tỷ dương a, b hay không nếu: (a) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2}$. (b) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{\sqrt{2}}$.*

Bài toán 186 ([Bin23], 19., p. 13). *Cho 3 số x, y, $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ là các số hữu tỷ. Chứng minh mỗi số \sqrt{x} , \sqrt{y} đều là số hữu tỷ.*

Bài toán 187 ([Bin23], 20., p. 13). *Cho a, b, c, d là các số dương. Chứng minh tồn tại 1 số dương trong 2 số $2a + b - 2\sqrt{cd}$ & $2c + d - 2\sqrt{ab}$.*

Bài toán 188 ([Bin23], 21*, p. 13). *(a) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}}$ với $a > 0$. (b) Tính giá trị của tổng $B = \sum_{i=1}^{99} \sqrt{1 + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(i+1)^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}}$.*

Bài toán 189 ([Bin23], 22*, p. 13). *(a) Nêu 1 cách tính nhẩm 997^2 . (b) Tính tổng các chữ số của A biết $\sqrt{A} = 99 \dots 96$ (có 100 chữ số 9).*

4 Biến Đổi Đơn Giản Biểu Thức Chứa Căn Thức Bậc 2

Bài toán 190 ([Chí+23], ?1, p. 24). *Chứng minh: $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$.*

Bài toán 191 ([Chí+23], Ví dụ 1-2, ?2, pp. 24-25). *Rút gọn: (a) $\sqrt{2 \cdot 3^2}$. (b) $\sqrt{20}$. (c) $3\sqrt{5} + \sqrt{20} + \sqrt{5}$. (d) $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{50}$. (e) $4\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{45} + \sqrt{5}$.*

Bài toán 192 ([Chí+23], Ví dụ 3, ?3, p. 25). *Đưa thừa số ra ngoài dấu căn: (a) $\sqrt{4x^2y}$ với $x, y \geq 0$. (b) $\sqrt{18xy^2}$ với $x \geq 0$, $y < 0$. (c) $\sqrt{28a^4b^2}$ với $b \geq 0$. (d) $\sqrt{72a^2b^4}$ với $a < 0$.*

Bài toán 193 ([Chí+23], Ví dụ 4, ?4, p. 26). *Đưa thừa số vào trong dấu căn: (a) $3\sqrt{7}$. (b) $-2\sqrt{3}$. (c) $5a^2\sqrt{2a}$ với $a \geq 0$. (d) $-3a^2\sqrt{2ab}$ với $ab \geq 0$. (e) $3\sqrt{5}$. (f) $1.2\sqrt{5}$. (g) $ab^4\sqrt{a}$ với $a \geq 0$. (h) $-2ab^2\sqrt{5a}$ với $a \geq 0$.*

Bài toán 194 ([Chí+23], Ví dụ 5, p. 26). *So sánh $3\sqrt{7}$ & $\sqrt{28}$.*

Bài toán 195 ([Chí+23], 43., p. 27). *Viết các số hoặc biểu thức dưới dấu căn thành dạng tích rồi đưa thừa số ra ngoài dấu căn: (a) $\sqrt{54}$. (b) $\sqrt{108}$. (c) $0.1\sqrt{20000}$. (d) $-0.05\sqrt{28800}$. (e) $\sqrt{7 \cdot 63a^2}$.*

Bài toán 196 ([Chí+23], 44., p. 27). *Đưa thừa số vào trong dấu căn: $3\sqrt{5}, -5\sqrt{2}, -\frac{2}{3}\sqrt{xy}$ với $xy \geq 0$, $x\sqrt{\frac{2}{x}}$ với $x > 0$.*

Bài toán 197 ([Chí+23], 45., p. 27). *So sánh: (a) $3\sqrt{3}$ & $\sqrt{12}$. (b) 7 & $3\sqrt{5}$. (c) $\frac{1}{3}\sqrt{51}$ & $\frac{1}{5}\sqrt{150}$. (d) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ & $6\sqrt{\frac{1}{2}}$.*

Bài toán 198 ([Chí+23], 46., p. 27). *Rút gọn các biểu thức sau với $x \geq 0$: (a) $2\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} + 27 - 3\sqrt{3x}$. (b) $3\sqrt{2x} - 5\sqrt{8x} + 7\sqrt{18x} + 28$.*

Bài toán 199 ([Chí+23], 47., p. 27). *Rút gọn: (a) $\frac{2}{x^2 - y^2} \sqrt{\frac{3(x+y)^2}{2}}$ với $x \geq 0$, $y \geq 0$, & $x \neq y$. (b) $\frac{2}{2a-1} \sqrt{5a^2(1-4a+4a^2)}$ với $a > 0.5$.*

Bài toán 200 ([Thâ+23], 56., p. 14). *Đưa thừa số ra ngoài dấu căn: (a) $\sqrt{7x^2}$ với $x > 0$. (b) $\sqrt{8y^2}$ với $y < 0$. (c) $\sqrt{25x^3}$ với $x > 0$. (d) $\sqrt{48y^4}$.*

Bài toán 201 ([Thâ+23], 57., p. 14). *Đưa thừa số vào trong dấu căn: (a) $x\sqrt{5}$ với $x \geq 0$. (b) $x\sqrt{13}$ với $x < 0$. (c) $x\sqrt{\frac{11}{x}}$ với $x > 0$. (d) $x\sqrt{\frac{-29}{x}}$ với $x < 0$.*

Bài toán 202 ([Thâ+23], 58., p. 14). *Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{300}$. (b) $\sqrt{98} - \sqrt{72} + 0.5\sqrt{8}$. (c) $\sqrt{9a} - \sqrt{16a} + \sqrt{49a}$ với $a \geq 0$. (d) $\sqrt{16b} + 2\sqrt{40b} - 3\sqrt{90b}$ với $b \geq 0$.*

Bài toán 203 ([Thâ+23], 59., p. 14). *Rút gọn biểu thức: (a) $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})\sqrt{3} - \sqrt{60}$. (b) $(5\sqrt{2} + 2\sqrt{5})\sqrt{5} - \sqrt{250}$. (c) $(\sqrt{28} - \sqrt{12} - \sqrt{7})\sqrt{7} + 2\sqrt{21}$. (d) $(\sqrt{99} - \sqrt{18} - \sqrt{11})\sqrt{11} + 3\sqrt{22}$.*

Bài toán 204 ([Thâ+23], 60., p. 15). *Rút gọn biểu thức: (a) $2\sqrt{40\sqrt{12}} - 2\sqrt{\sqrt{75}} - 3\sqrt{5\sqrt{48}}$. (b) $2\sqrt{8\sqrt{3}} - 2\sqrt{5\sqrt{3}} - 3\sqrt{20\sqrt{3}}$.*

Bài toán 205 ([Thâ+23], 61., p. 15). *Khai triển & rút gọn các biểu thức với $x, y \geq 0$. (a) $(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x} + x)$. (b) $(\sqrt{x} + 2)(x - 2\sqrt{x} + 4)$. (c) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + y + \sqrt{xy})$. (d) $(x + \sqrt{y})(x^2 + y - x\sqrt{y})$.*

Bài toán 206 ([Thâ+23], 62., p. 15). *Khai triển & rút gọn các biểu thức với $x, y \geq 0$. (a) $(4\sqrt{x} - \sqrt{2x})(\sqrt{x} - \sqrt{2x})$. (b) $(2\sqrt{x} + \sqrt{y})(3\sqrt{x} - 2\sqrt{y})$.*

Bài toán 207 ([Thâ+23], 63., p. 15). *Chứng minh: (a) $\frac{(x\sqrt{y} + y\sqrt{x})(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{xy}} = x - y$ với $x, y > 0$. (b) $\frac{\sqrt{x^3} - 1}{\sqrt{x} - 1} = x + \sqrt{x} + 1$ với $x \geq 0$ & $x \neq 1$.*

Bài toán 208 ([Thâ+23], 64., p. 15). *(a) Chứng minh: $x + 2\sqrt{2x - 4} = (\sqrt{2} + \sqrt{x - 2})^2$ với $x \geq 2$. (b) Rút gọn biểu thức $\sqrt{x + 2\sqrt{2x - 4}} + \sqrt{x - 2\sqrt{2x - 4}}$ với $x \geq 2$.*

Bài toán 209 ([Thâ+23], 65., p. 15). *Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{25x} = 35$. (b) $\sqrt{4x} \leq 162$. (c) $3\sqrt{x} = \sqrt{12}$. (d) $2\sqrt{x} \geq \sqrt{10}$.*

Bài toán 210 ([Thâ+23], 66., p. 15). *Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{x^2 - 9} - 3\sqrt{x - 3} = 0$. (b) $\sqrt{x^2 - 4} - 2\sqrt{x + 2} = 0$.*

Bài toán 211 ([Thâ+23], 67., p. 15). *Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số không âm, chứng minh: (a) Trong các hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất. (b) Trong các hình chữ nhật có cùng diện tích thì hình vuông có chu vi nhỏ nhất.*

Bài toán 212 ([Thâ+23], 61., p. 15). *Rút gọn biểu thức $3\sqrt{x^2y} + x\sqrt{y}$ với $x < 0, y \geq 0$.*

Bài toán 213 ([Chí+23], Ví dụ 1, ?1, p. 28). *Khử mẫu của biểu thức lấy căn: (a) $\sqrt{\frac{2}{3}}$. (b) $\sqrt{\frac{5a}{7b}}$ với $ab > 0$. (c) $\sqrt{\frac{4}{5}}$. (d) $\sqrt{\frac{3}{125}}$. (e) $\sqrt{\frac{3}{2a^3}}$ với $a > 0$.*

Bài toán 214 ([Chí+23], Ví dụ 2, ?2, pp. 28–29). *Trục căn thức ở mẫu: (a) $\frac{5}{2\sqrt{3}}$. (b) $\frac{10}{\sqrt{3} + 1}$. (c) $\frac{6}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$. (d) $\frac{5}{3\sqrt{8}}, \frac{2}{\sqrt{b}}$ với $b > 0$. (e) $\frac{5}{5 - 2\sqrt{3}}, \frac{2a}{1 - \sqrt{a}}$ với $a \geq 0, a \neq 1$. (f) $\frac{4}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}, \frac{6a}{2\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ với $a > b > 0$.*

Bài toán 215 ([Chí+23], 48., p. 29). *Khử mẫu của biểu thức lấy căn: $\sqrt{\frac{1}{600}}, \sqrt{\frac{11}{540}}, \sqrt{\frac{3}{50}}, \sqrt{\frac{5}{98}}, \sqrt{\frac{(1 - \sqrt{3})^2}{27}}$.*

Bài toán 216 ([Chí+23], 49., p. 29). *Tìm DKXD rồi khử mẫu của biểu thức lấy căn: $ab\sqrt{\frac{a}{b}}, \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}, \sqrt{\frac{1}{b} + \frac{1}{b^2}}, \sqrt{\frac{9a^3}{36b}}, 3xy\sqrt{\frac{2}{xy}}$.*

Bài toán 217 ([Chí+23], 50., p. 30). *Tìm DKXD rồi trục căn thức: $\frac{5}{\sqrt{10}}, \frac{5}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{3\sqrt{20}}, \frac{2\sqrt{2} + 2}{5\sqrt{2}}, \frac{y + b\sqrt{y}}{b\sqrt{y}}$.*

Bài toán 218 ([Chí+23], 51., p. 30). *Tìm DKXD rồi trục căn thức: $\frac{3}{\sqrt{3} + 1}, \frac{2}{\sqrt{3} - 1}, \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}, \frac{b}{3 + \sqrt{b}}, \frac{p}{2\sqrt{p} - 1}$.*

Bài toán 219 ([Chí+23], 52., p. 30). *Tìm DKXD rồi trục căn thức: $\frac{2}{\sqrt{6} - \sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{10} + \sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}, \frac{2ab}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$.*

Bài toán 220 ([Chí+23], 53., p. 30). *Tìm DKXD rồi rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{18(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2}$. (b) $ab\sqrt{1 + \frac{1}{a^2b^2}}$. (c) $\sqrt{\frac{a}{b^3} + \frac{a}{b^4}}$. (d) $\frac{a + \sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$.*

Bài toán 221 ([Chí+23], 54., p. 30). *Tìm DKXD rồi rút gọn biểu thức: $\frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}, \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{\sqrt{8} - 2}, \frac{a - \sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}}, \frac{p - 2\sqrt{p}}{\sqrt{p} - 2}$.*

Bài toán 222 ([**Chí+23**], 55., p. 30). *Phân tích thành nhân tử với $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, $a, b, x, y \geq 0$: (a) $ab + b\sqrt{a} + \sqrt{a} + 1$. (b) $\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3} + \sqrt{x^2y} - \sqrt{xy^2}$.*

Bài toán 223 ([**Chí+23**], 56., p. 30). *Sắp xếp theo thứ tự tăng dần: (a) $3\sqrt{5}, 2\sqrt{6}, \sqrt{29}, 4\sqrt{2}$. (b) $6\sqrt{2}, \sqrt{38}, 3\sqrt{7}, 2\sqrt{14}$.*

Bài toán 224 ([**Chí+23**], 57., p. 30). *Giải phương trình $\sqrt{25x} - \sqrt{16x} = 9$.*

Bài toán 225 ([**Thâ+23**], 68., p. 16). *Khử mẫu của mỗi biểu thức lấy căn & rút gọn (nếu được): (a) $\sqrt{\frac{2}{3}}$. (b) $\sqrt{\frac{x^2}{5}}$ với $x \geq 0$. (c) $\sqrt{\frac{3}{x}}$ với $x > 0$. (d) $\sqrt{x^2 - \frac{x^2}{7}}$ với $x < 0$.*

Bài toán 226 ([**Thâ+23**], 69., p. 16). *Trục căn thức ở mẫu & rút gọn (nếu được): (a) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. (b) $\frac{26}{5 - 2\sqrt{3}}$. (c) $\frac{2\sqrt{10} - 5}{4 - \sqrt{10}}$. (d) $\frac{9 - 2\sqrt{3}}{3\sqrt{6} - 2\sqrt{2}}$.*

Bài toán 227 ([**Thâ+23**], 70., p. 16). *Rút gọn biểu thức: (a) $\frac{2}{\sqrt{3} - 1} - \frac{2}{\sqrt{3} + 1}$. (b) $\frac{5}{12(2\sqrt{5} + 3\sqrt{2})} - \frac{5}{12(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})}$. (c) $\frac{5 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} + \frac{5 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}}$. (d) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3} + 1} - 1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3} + 1} + 1}$.*

Bài toán 228 ([**Thâ+23**], 71., p. 16). *Chứng minh đẳng thức:*

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Bài toán 229 ([**Thâ+23**], 72., p. 17). *Xác định giá trị biểu thức sau theo cách thích hợp: $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}}$.*

Bài toán 230 ([**Thâ+23**], 73., p. 17). *Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, so sánh: $\sqrt{2005} - \sqrt{2004}$ & $\sqrt{2004} - \sqrt{2003}$.*

Bài toán 231 ([**Thâ+23**], 74., p. 17). *Rút gọn*

$$\frac{1}{\sqrt{1} - \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{4} - \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8} - \sqrt{9}}.$$

Bài toán 232 ([**Thâ+23**], 75., p. 17). *Rút gọn biểu thức: (a) $\frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ với $x, y \geq 0$, $x \neq y$. (b) $\frac{x - \sqrt{3x} + 3}{x\sqrt{x} + 3\sqrt{3}}$ với $x \geq 0$.*

Bài toán 233 ([**Thâ+23**], 76., p. 17). *Trục căn thức ở mẫu: (a) $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}$. (b) $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3} + 2}$.*

Bài toán 234 ([**Thâ+23**], 77., p. 17). *Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{2x+3} = 1 + \sqrt{2}$. (b) $\sqrt{10 + \sqrt{3x}} = 2 + \sqrt{6}$. (c) $\sqrt{3x-2} = 2 - \sqrt{3}$. (d) $\sqrt{x+1} = \sqrt{5} - 3$.*

Bài toán 235 ([**Thâ+23**], 78., p. 17). *Tìm tập hợp các giá trị $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện sau & biểu diễn tập hợp đó trên trục số: (a) $\sqrt{x-2} \geq \sqrt{3}$. (b) $\sqrt{3-2x} \leq \sqrt{5}$.*

Bài toán 236 ([**Thâ+23**], 79., pp. 17–18). *Cho các số $x, y \in \mathbb{R}$ có dạng $x = a_1\sqrt{2} + b_1$ & $y = a_2\sqrt{2} + b_2$, trong đó $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, 2$. Chứng minh: (a) $x + y$ & xy cũng có dạng $a\sqrt{2} + b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. (b) $\frac{x}{y}$ với $y \neq 0$ cũng có dạng $a\sqrt{2} + b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$.*

Bài toán 237 ([**Thâ+23**], 7.1., p. 18). *Rút gọn biểu thức $x\sqrt{\frac{x}{y^3}}$ với $x, y < 0$.*

Bài toán 238 ([**Thâ+23**], 7.2., p. 18). *Tính $\frac{6}{\sqrt{7}-1}$.*

Bài toán 239 ([**Bìn23**], Ví dụ 10, p. 14). *Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$.*

Bài toán 240 ([**Bìn23**], Ví dụ 11, p. 14). *Tính giá trị của biểu thức*

$$M = \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{(i+1)\sqrt{i} + i\sqrt{i+1}} = \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{25\sqrt{24} + 24\sqrt{25}}.$$

Bài toán 241 ([**Bìn23**], 23., p. 15). *Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{1-a} + \sqrt{a(a-1)} + a\sqrt{\frac{a-1}{a}}$.*

Bài toán 242 ([Bìn23], 24., p. 15). Chứng minh các hằng đẳng thức: (a) $\sqrt{10 + \sqrt{60} - \sqrt{24} - \sqrt{40}} = \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{2}$. (b) $\sqrt{6 + \sqrt{24} + \sqrt{12} + \sqrt{8}} - \sqrt{3} = \sqrt{2} + 1$.

Bài toán 243 ([Bìn23], 25., p. 15). Cho $A = \sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}}$. Biểu diễn A dưới dạng tổng của 3 căn thức.

Bài toán 244 ([Bìn23], 26., p. 15). Rút gọn biểu thức $A = \frac{x + 3 + 2\sqrt{x^2 - 9}}{2x - 6 + \sqrt{x^2 - 9}}$.

Bài toán 245 ([Bìn23], 27., p. 15). Rút gọn biểu thức $B = \frac{x^2 + 5x + 6 + x\sqrt{9 - x^2}}{3x - x^2 + (x + 2)\sqrt{9 - x^2}}$.

Bài toán 246 ([Bìn23], 28., p. 15). Rút gọn biểu thức:

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}},$$

$$B = \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{\sqrt{i} - \sqrt{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{1} - \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{4}} - \cdots - \frac{1}{\sqrt{24} - \sqrt{25}}.$$

5 Rút Gọn Biểu Thức Có Chứa Căn Thức Bậc 2

Bài toán 247 ([Chí+23], Ví dụ 1, ?1, p. 31). Rút gọn: (a) $5\sqrt{a} + 6\sqrt{\frac{a}{4}} - a\sqrt{\frac{4}{a}} + \sqrt{5}$ với $a > 0$. (b) $3\sqrt{5a} - \sqrt{20a} + 4\sqrt{45a} + \sqrt{a}$ với $a \geq 0$.

Bài toán 248 ([Chí+23], Ví dụ 2, p. 31). Chứng minh: $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) = 2\sqrt{2}$.

Bài toán 249 ([Chí+23], ?2, p. 31). Chứng minh: $\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$.

Bài toán 250 ([Chí+23], ?2, p. 31). Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)$ với $a \in \mathbb{R}$. (a) Tìm DKXD. (b) Rút gọn biểu thức P . (c) Tìm giá trị của $a \in \mathbb{R}$ để $P < 0$.

Bài toán 251 ([Chí+23], ?3, p. 32). Tìm DKXD & rút gọn biểu thức: (a) $\frac{x^2 - 3}{x + \sqrt{3}}$. (b) $\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}}$.

Bài toán 252 ([Chí+23], 58., p. 32). Rút gọn biểu thức: (a) $5\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{20} + \sqrt{5}$. (b) $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4.5} + \sqrt{12.5}$. (c) $\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72}$. (d) $0.1\sqrt{200} + 2\sqrt{0.08} + 0.4\sqrt{50}$.

Bài toán 253 ([Chí+23], 59., p. 32). Tìm DKXD & rút gọn biểu thức: (a) $5\sqrt{a} - 4b\sqrt{25a^3} + 5a\sqrt{16ab^2} - 2\sqrt{9a}$. (b) $5a\sqrt{64ab^3} - \sqrt{3}\sqrt{12a^3b^3} + 2ab\sqrt{9ab} - 5b\sqrt{81a^3b}$.

Bài toán 254 ([Chí+23], 60., p. 33). Cho biểu thức $A = \sqrt{16x + 16} - \sqrt{9x + 9} + \sqrt{4x + 4} + \sqrt{x + 1}$. (a) Tìm DKXD. (b) Rút gọn biểu thức A . (c) Tìm $x \in \mathbb{R}$ sao cho $A = 16$.

Bài toán 255 ([Chí+23], 61., p. 33). Chứng minh đẳng thức: $\frac{3}{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$. (b) $\left(x\sqrt{\frac{6}{x}} + \sqrt{\frac{2x}{3}} + \sqrt{6x}\right) : \sqrt{6x} = 2\frac{1}{3}$ với $x > 0$.

Bài toán 256 ([Chí+23], 62., p. 33). Rút gọn biểu thức: (a) $\frac{1}{2}\sqrt{48} - 2\sqrt{75} - \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}} + 5\sqrt{1\frac{1}{3}}$. (b) $\sqrt{150} + \sqrt{1.6}\sqrt{60} + 4.5\sqrt{2\frac{2}{3}} - \sqrt{6}$. (c) $(\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7})\sqrt{7} + \sqrt{84}$. (d) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120}$.

Bài toán 257 ([Chí+23], 63., p. 33). Tìm DKXD & rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{ab} + \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}$. (b) $\sqrt{\frac{m}{1-2x+x^2}}\sqrt{\frac{4m-8mx+4mx^2}{81}}$.

Bài toán 258 ([Chí+23], 64., p. 33). Chứng minh đẳng thức: (a) $\left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)\left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-a}\right)^2 = 1, \forall a \in \mathbb{R}, a \geq 0, a \neq 1$. (b)

$$\frac{a+b}{b^2}\sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2+2ab+b^2}} = |a|, \forall a, b \in \mathbb{R}, a+b > 0, b \neq 0.$$

Bài toán 259 ([Chí+23], 65., p. 34). Tìm DKXD & rút gọn rồi so sánh giá trị của A với 1 biết:

$$A = \left(\frac{1}{a-\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}-1}\right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1}.$$

Bài toán 260 ([**Chí+23**], 66., p. 34). Tính $\frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}}$.

Bài toán 261 ([**Thâ+23**], 80., p. 18). Tìm DKXD & rút gọn biểu thức: (a) $(2-\sqrt{2})(-5\sqrt{2}) - (3\sqrt{2}-5)^2$. (b) $2\sqrt{3a} - \sqrt{75a} + a\sqrt{\frac{13.5}{2a}} - \frac{2}{5}\sqrt{300a^3}$

Bài toán 262 ([**Thâ+23**], 81., p. 18). Tìm DKXD & rút gọn biểu thức: (a) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. (b) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{a-b}$.

Bài toán 263 ([**Thâ+23**], 82., pp. 18–19). (a) Chứng minh $x^2 + x\sqrt{3} + 1 = \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$. (b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x^2 + x\sqrt{3} + 1$. Giá trị đó đạt được khi x bằng bao nhiêu?

Bài toán 264 ([**Thâ+23**], 83., p. 19). Chứng tỏ giá trị các biểu thức sau là số hữu tỷ: (a) $\frac{2}{\sqrt{7}-5} - \frac{2}{\sqrt{7}+5}$. (b) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$.

Bài toán 265 ([**Thâ+23**], 84., p. 19). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{4x+20} - 3\sqrt{5+x} + \frac{4}{3}\sqrt{9x+45} = 6$. (b) $\sqrt{25x-25} - \frac{15}{2}\sqrt{\frac{x-1}{9}} = 6 + \sqrt{x-1}$.

Bài toán 266 ([**Thâ+23**], 85., p. 19). Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$. (a) Tìm DKXD. (b) Rút gọn A . (c) Tìm $x \in \mathbb{R}$ để $A = 2$.

Bài toán 267 ([**Thâ+23**], 86., p. 19). Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1}\right)$. (a) Tìm DKXD. (b) Rút gọn A . (c) Tìm $a \in \mathbb{R}$ để $A > 0$.

Bài toán 268 ([**Thâ+23**], 87., p. 19). (a) Chứng minh bất đẳng thức: $a+b+c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $a, b, c \geq 0$. (b) Mở rộng kết quả cho trường hợp 4, 5 số không âm. (c) Mở rộng kết quả cho trường hợp $n \in \mathbb{N}^*$ số không âm.

Bài toán 269 ([**Thâ+23**], 88., p. 19). Giải bất phương trình $\sqrt{32}x - (\sqrt{8} + \sqrt{2})x > \sqrt{2}$.

Bài toán 270 ([**Tuy23**], Thí dụ 5, p. 14). Cho $A = \sqrt{11+\sqrt{96}}$ & $B = \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$. Không dùng máy tính hoặc bảng số, so sánh A & B .

Bài toán 271 ([**Tuy23**], Thí dụ 6, p. 15). Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} - \frac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}\right) \left(\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x}-x}\right)$. (a) Tìm DKXD rồi rút gọn A . (b) Tính giá trị của A với $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

Bài toán 272 ([**Tuy23**], 37., pp. 15–16). Không dùng máy tính hoặc bảng số, so sánh các số sau: (a) $-3\sqrt{11}$ & $-7\sqrt{2}$. (b) $\frac{7}{2}\sqrt{\frac{1}{12}}$ & $\frac{9}{4}\sqrt{\frac{1}{5}}$. (c) $\sqrt{\frac{4}{27}}$ & $\sqrt{\frac{3}{26}}$.

Bài toán 273 ([**Tuy23**], 38., p. 16). Không dùng máy tính hoặc bảng số, chứng minh $4\sqrt{5} - 3\sqrt{2} < 5$.

Bài toán 274 ([**Tuy23**], 39., p. 16). Cho $A = \sqrt{x^2+1} - x - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$ trong đó $x \in \mathbb{R}$. Xác định $x \in \mathbb{R}$ để giá trị của A là 1 số tự nhiên.

Bài toán 275 ([**Tuy23**], 40., p. 16). Trục căn thức ở mẫu của các biểu thức sau: (a) $A = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{2c}}$ trong đó $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện c là trung bình nhân của a & b . (b) $B = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$ trong đó $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn điều kiện $ab = cd$ & $a+b \neq c+d$.

Bài toán 276 ([**Tuy23**], 41., p. 16). Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ sao cho $x > y > 0$ thỏa mãn điều kiện $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{931}$.

Bài toán 277 ([**Tuy23**], 42., p. 16). Chứng minh: $\frac{2\sqrt{mn}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{m+n}} = \sqrt{m} + \sqrt{n} - \sqrt{m+n}$. Áp dụng tính $\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$.

Bài toán 278 ([**Tuy23**], 43., p. 16). Chứng minh: $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Áp dụng tính tổng: $S = \sum_{i=1}^{399} \frac{1}{(i+1)\sqrt{i}+i\sqrt{i+1}} = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{400\sqrt{399}+399\sqrt{400}}$.

Bài toán 279 ([Tuy23], 44., p. 16). Tìm $n \in \mathbb{N}$ nhỏ nhất sao cho $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 0.05$.

Bài toán 280 ([Tuy23], 45., p. 17). Cho $A = \sum_{i=1}^{120} \frac{1}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{120} + \sqrt{121}}$, $B = \sum_{i=1}^{35} \frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{35}}$. Chứng minh $A < B$.

Bài toán 281 ([Tuy23], 46., p. 17). Cho $x, y, z > 0$ & khác nhau đôi một. Chứng minh giá trị của biểu thức

$$A = \frac{x}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{z})} + \frac{y}{(\sqrt{y} - \sqrt{z})(\sqrt{y} - \sqrt{x})} + \frac{z}{(\sqrt{z} - \sqrt{x})(\sqrt{z} - \sqrt{y})}$$

không phụ thuộc vào giá trị của các biến.

Bài toán 282 ([Tuy23], 47., p. 17). Cho biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{5}{x - \sqrt{x} - 6} - \frac{\sqrt{x} - 2}{3 - \sqrt{x}}$. (a) Rút gọn A . (b) Tìm giá trị lớn nhất của A .

Bài toán 283 ([Tuy23], 48., p. 17). Cho $A = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left(1 + \frac{x + y + 2xy}{1 - xy} \right)$. (a) Rút gọn A . (b) Tính giá trị của P với $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$. (c) Tìm giá trị lớn nhất của A .

Bài toán 284 ([Tuy23], 49., p. 17). Cho $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy} + \sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 1} + \frac{2\sqrt{z}}{\sqrt{zx} + 2\sqrt{z} + 2}$. Biết $xyz = 4$, tính \sqrt{P} .

Bài toán 285 ([Bin23], Ví dụ 12, p. 15). Tính: $A = \left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \right) : \left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} - \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \right)$.

Bài toán 286 ([Bin23], Ví dụ 13, p. 16). Rút gọn biểu thức $A = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$.

Bài toán 287 ([Bin23], Ví dụ 14, p. 16). Cho $A = \frac{\sqrt{a} + 6}{\sqrt{a} + 1}$. (a) Tìm các số nguyên a để A là số nguyên. (b) Chứng minh với $a = \frac{4}{9}$ thì A là số nguyên. (c) Tìm các số hữu tỷ a để A là số nguyên.

Bài toán 288 ([Bin23], 29., p. 18). Rút gọn biểu thức: (a) $A = \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1 - \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}}$. (b) $B = \left(\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{a}}{1 - a} \right)^2$. (c) $C = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}} : \left[\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \frac{1}{x + y + 2\sqrt{xy}} + \frac{2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^3} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \right]$ với $x = 2 - \sqrt{3}$ & $y = 2 + \sqrt{3}$.

Bài toán 289 ([Bin23], 30., p. 18). Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}$.

Bài toán 290 ([Bin23], 31., p. 18). Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x^2 - y^2}} - \sqrt{x - \sqrt{x^2 - y^2}}}{\sqrt{2(x-y)}}$ với $x > y > 0$.

Bài toán 291 ([Bin23], 32., p. 18). Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right)$ với $x = \frac{a^2 + b^2}{2ab}$ & $b > a > 0$.

Bài toán 292 ([Bin23], 33., p. 18). Rút gọn biểu thức $B = \frac{2a\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$ với $x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1-a}{a}} - \sqrt{\frac{a}{1-a}} \right)$ & $0 < a < 1$.

Bài toán 293 ([Bin23], 34., p. 18). Rút gọn biểu thức $A = a + b - \sqrt{\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{c^2+1}}$ với $a, b, c > 0$ & $ab + bc + ca = 1$.

Bài toán 294 ([Bin23], 35., p. 18). Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}} \cdot \sqrt{2x-1}$.

Bài toán 295 ([Bin23], 36., p. 18). Chứng minh hằng đẳng thức sau với $x \geq 2$

$$\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{\frac{x^2-4}{x}}} + \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{\frac{x^2-4}{x}}} = \sqrt{\frac{2x+4}{\sqrt{x}}}.$$

Bài toán 296 ([Bin23], 37., p. 18). Cho $a = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{-1 - \sqrt{2}}{2}$. Tính $a^7 + b^7$.

Bài toán 297 ([Bin23], 38., p. 19). Cho biết $\sqrt{x^2 - 6x + 13} - \sqrt{x^2 - 6x + 10} = 1$. Tính $\sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{x^2 - 6x + 10}$.

Bài toán 298 ([Bin23], 39., p. 19). Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{a} + 2}{\sqrt{a} - 2}$. (a) Tìm các số nguyên a để A là số nguyên. (b) Tìm các số hữu tỷ a để A là số nguyên.

Bài toán 299 ([Bin23], 40., p. 19). Cho $a = \sqrt{2} - 1$. (a) Viết a^2, a^3 dưới dạng $\sqrt{m} - \sqrt{m-1}$ trong đó m là số tự nhiên. (b) Chứng minh với mọi số nguyên dương n , số a^n viết được dưới dạng trên.

6 Cube Root, nth Root – Căn Bậc 3, Căn Bậc n

Bài toán 300 (Program to print out 1st n cube roots). Viết chương trình Pascal, C/C++, Python xuất ra căn bậc 3 của n số tự nhiên đầu tiên với $n \in \mathbb{N}^*$ được nhập từ bàn phím.

Bài toán 301. Viết chương trình Pascal, C/C++, Python để kiểm tra 1 số $n \in \mathbb{N}^*$ được nhập từ bàn phím có phải là lập phương của 1 số tự nhiên hay không.

Bài toán 302 (Program to print out 1st n nth roots). Viết chương trình Pascal, C/C++, Python xuất ra căn bậc n của m số tự nhiên đầu tiên với $m, n \in \mathbb{N}^*$ được nhập từ bàn phím.

Bài toán 303. Viết chương trình Pascal, C/C++, Python để kiểm tra 1 số m được nhập từ bàn phím có phải là lũy thừa bậc n của 1 số tự nhiên hay không với $m, n \in \mathbb{N}^*$ được nhập từ bàn phím.

Bài toán 304 ([Chí+23], ?1, p. 35). Tìm căn bậc 3 của: $27, -64, 0, \frac{1}{125}$.

Bài toán 305 ([Chí+23], Ví dụ 2, p. 35). So sánh 2 $\sqrt[3]{7}$.

Bài toán 306 ([Chí+23], Ví dụ 3, p. 36). Rút gọn $\sqrt[3]{8a^3} - 5a$.

Bài toán 307 ([Chí+23], ?2, p. 36). Tính $\sqrt[3]{1728} : \sqrt[3]{64}$ theo 2 cách.

Bài toán 308 ([Chí+23], 67., p. 36). Tính: $\sqrt[3]{512}, \sqrt[3]{-729}, \sqrt[3]{0.064}, \sqrt[3]{-0.216}, \sqrt[3]{-0.008}$.

Bài toán 309 ([Chí+23], 68., p. 36). Tính: (a) $\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{-8} - \sqrt[3]{125}$. (b) $\frac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}} - \sqrt[3]{54} \sqrt[3]{4}$.

Bài toán 310 ([Chí+23], 69., p. 36). So sánh: (a) 5 $\sqrt[3]{123}$. (b) $5\sqrt[3]{6}$ $\sqrt[3]{6\sqrt[3]{5}}$.

Bài toán 311 ([Thâ+23], 88., p. 20). Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, tính: $\sqrt[3]{-343}, \sqrt[3]{0.027}, \sqrt[3]{1.331}, \sqrt[3]{-0.512}$.

Bài toán 312 ([Thâ+23], 89., p. 20). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt[3]{x} = -1.5$. (b) $\sqrt[3]{x-5} = 0.9$.

Bài toán 313 (Mở rộng [Thâ+23], 89., p. 20). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt[3]{x} = a \in \mathbb{R}$. (b) $\sqrt[3]{ax+b} = c$. (c) $\sqrt[3]{ax^2+bx+c} = d$.

Bài toán 314 ([Thâ+23], 90., p. 20). Chứng minh: (a) $\sqrt[3]{a^3b} = a\sqrt[3]{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}$. (b) $\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}} = \frac{1}{b}\sqrt[3]{ab}, \forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$.

Bài toán 315 ([Thâ+23], 92., p. 20). Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, so sánh: (a) $2\sqrt[3]{3}$ $\sqrt[3]{23}$. (b) 33 $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{1333}}$.

Bài toán 316 ([Thâ+23], 93., p. 20). Tìm tập hợp các giá trị $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện sau $\sqrt[3]{x}$ biểu diễn tập hợp đó trên trục số: (a) $\sqrt[3]{x} \geq 2$. (b) $\sqrt[3]{x} \leq -1.5$.

Bài toán 317 ([Thâ+23], 94., pp. 20–21). Chứng minh:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z) [(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2], \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Từ đó, chứng tỏ:

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} &\geq xyz, \forall x, y, z \in \mathbb{R}, x, y, z \geq 0, \\ \frac{a+b+c}{3} &\geq \sqrt[3]{abc} \forall a, b, c \in \mathbb{R}, a, b, c \geq 0. \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 318 ([Thâ+23], 95., p. 20). Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số không âm, chứng minh: (a) Trong các hình hộp chữ nhật có cùng tổng 3 kích thước thì hình lập phương có thể tích lớn nhất. (b) Trong các hình hộp chữ nhật có cùng thể tích thì hình lập phương có tổng 3 kích thước bé nhất.

Bài toán 319 (Mở rộng [Tuy23], Thí dụ 1, p. 5). Cho $x \in \mathbb{R}$. So sánh $\sqrt[3]{x}$ với x .

Giải. $\sqrt[3]{x}$ xác định $\forall x \in \mathbb{R}$. Xét các trường hợp: (a) $\sqrt[3]{x} = x \Leftrightarrow x = x^3 \Leftrightarrow x - x^3 = 0 \Leftrightarrow x(1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow x(1 - x)(1 + x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \pm 1\}$. (b) $\sqrt[3]{x} < x \Leftrightarrow x < x^3 \Leftrightarrow x - x^3 < 0 \Leftrightarrow x(1 - x^2) < 0 \Leftrightarrow x(1 - x)(1 + x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$ hoặc $x > 1$, trong đó phép biến đổi tương đương cuối cùng thu được nhờ lập bảng xét dấu. (c) $\sqrt[3]{x} > x \Leftrightarrow x > x^3 \Leftrightarrow x - x^3 > 0 \Leftrightarrow x(1 - x^2) > 0 \Leftrightarrow x(1 - x)(1 + x) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ hoặc $0 < x < 1$, trong đó phép biến đổi tương đương cuối cùng cũng thu được nhờ lập bảng xét dấu. Vậy: $\sqrt[3]{x} = x \Leftrightarrow x \in \{0, \pm 1\}$, $\sqrt[3]{x} < x \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$, $\sqrt[3]{x} > x \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$. \square

Bài toán 320 (Mở rộng [Tuy23], Thí dụ 1, p. 5). Cho $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. So sánh $\sqrt[n]{x}$ với x .

Bài toán 321 ([Tuy23], Thí dụ 7, p. 19). Tính $x = \sqrt[3]{17\sqrt{5} + 38} - \sqrt[3]{17\sqrt{5} - 38}$.

Bài toán 322 ([Tuy23], Thí dụ 8, p. 20). Giải & biện luận phương trình $(x - a)^n = a^2 - 2a + 1$ với $n \in \mathbb{N}^*$, a là tham số.

Bài toán 323 ([Tuy23], 50., p. 21). Tính: (a) $\sqrt[3]{8\sqrt{5} - 16} \sqrt[3]{8\sqrt{5} + 16}$. (b) $\sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} + \sqrt[6]{8}$. (c) $\sqrt[4]{4} \sqrt[3]{1 - \sqrt{3}} \sqrt[6]{4 + 2\sqrt{3}}$.

Bài toán 324 ([Tuy23], 51., p. 21). (a) Tính $\frac{2}{\sqrt[3]{3} - 1} - \frac{4}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1}$. (b) Cho $x = \frac{2}{2\sqrt[3]{2} + 2 + \sqrt[3]{4}}$, $y = \frac{6}{2\sqrt[3]{2} - 2 + \sqrt[3]{4}}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{xy}{x + y}$.

Bài toán 325 ([Tuy23], 52., p. 21). Cho $x = \frac{\sqrt[3]{8 - 3\sqrt{5}} + \sqrt[3]{64 - 12\sqrt{20}}}{\sqrt[3]{57}} \sqrt[3]{8 + 3\sqrt{5}}$, $y = \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt{2}}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{2}} + \frac{\sqrt{2} - 9\sqrt[3]{9}}{\sqrt[4]{2} - \sqrt[3]{81}}$. Tính xy .

Bài toán 326 ([Tuy23], 53., p. 22). Tính: (a) $x = \sqrt[3]{5 + 2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5 - 2\sqrt{13}}$. (b) $x = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$. (c) $x = \sqrt[3]{182 + \sqrt{33125}} + \sqrt[3]{182 - \sqrt{33125}}$.

Bài toán 327 ([Tuy23], 54., p. 22). Cho $A = \sqrt[3]{60 + \sqrt[3]{60 + \sqrt[3]{60 + \cdots + \sqrt[3]{60}}}}$. Chứng minh $3 < A < 3$. Tìm $[A]$.

Bài toán 328 ([Tuy23], 55., p. 22). Cho $A = \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \cdots + \sqrt{20}}}}$, $B = \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \cdots + \sqrt[3]{24}}}}$. Chứng minh $7 < A + B < 8$. Tìm $[A + B]$.

Bài toán 329 ([Tuy23], 56., p. 22). So sánh $a = \sqrt[3]{5\sqrt{2}}$ & $b = \sqrt{5\sqrt[3]{2}}$.

Bài toán 330 ([Tuy23], 57., p. 22). Cho $ax^3 = by^3 = cz^3$ & $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Chứng minh $\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$.

Bài toán 331 ([Tuy23], 58., p. 22). Giải phương trình: (a) $x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3}$. (b) $x^3 + 2x^2 - 4x = -\frac{8}{3}$.

Bài toán 332 ([Tuy23], 59., p. 22). Giải phương trình: (a) $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{5x}$. (b) $2\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2} = \sqrt[3]{x^2 - 4}$.

Bài toán 333 ([Tuy23], 60., p. 22). Giải phương trình: $\sqrt[3]{x-5} + \sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{3x+2} = -2$.

Bài toán 334 ([Tuy23], 61., p. 22). Giải phương trình: $\sqrt[n]{(x-2)^2} + 4\sqrt[n]{x^2-4} = 5\sqrt[n]{(x+2)^2}$.

Bài toán 335 ([Tuy23], 62., p. 22). Cho $A = (a+b)(b+c)(c+a)$ trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh $A + 1 \geq 3(a+b+c)$.

Bài toán 336 ([Bin23], Ví dụ 15, p. 20). Chứng tỏ số $m = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$ là 1 nghiệm của phương trình $x^3 + 3x - 4 = 0$.

Bài toán 337 ([Bin23], Ví dụ 16, p. 20). Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$.

Bài toán 338 ([Bin23], 41., p. 20). Tính: (a) $\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 2}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$. (b) $\sqrt{3 + \sqrt{3} + \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}}$. (c) $\frac{4 + 2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}}$.

Bài toán 339 ([Bin23], 42., p. 21). Số $m = \sqrt[3]{4 + \sqrt{80}} - \sqrt[3]{4 - \sqrt{80}}$ có phải là nghiệm của phương trình $x^3 + 12x - 8 = 0$ không?

Bài toán 340 ([Bin23], 43., p. 21). Lập 1 phương trình bậc 3 với các hệ số nguyên, trong đó: (a) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ là 1 nghiệm của phương trình. (b) $\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}$ là 1 nghiệm của phương trình.

Bài toán 341 ([Bin23], 44., p. 21). Tính: (a) $A = \sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10}$. (b) $B = \sqrt[3]{5 + 2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5 - 2\sqrt{13}}$. (c) $C = \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$. (d) $D = \sqrt[3]{2 + 10\sqrt{\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{2 - 10\sqrt{\frac{1}{27}}}$. (e) $E = \sqrt[3]{4 + \frac{5}{3}\sqrt{\frac{31}{3}}} + \sqrt[3]{4 - \frac{5}{3}\sqrt{\frac{31}{3}}}$.

Bài toán 342 ([Bin23], 45., p. 21). Tìm x biết: (a) $\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{2-x} = 1$. (b) $2x^3 = (x-1)^3$.

Bài toán 343 ([Bin23], 46., p. 21). Cho $am^3 = bn^3 = cp^3$ & $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1$. Chứng minh: $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{am^2 + bn^2 + cp^2}$.

Bài toán 344 ([Bin23], 47., p. 21). Tính: (a) $\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}(\sqrt[6]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}})$. (b) $\sqrt[4]{17 + 12\sqrt{2}} - \sqrt{2}$. (c) $\sqrt[4]{56 - 24\sqrt{5}}$. (d) $1 + \sqrt[4]{28 - 16\sqrt{3}}$. (e) $\frac{2}{\sqrt{4 - 3\sqrt[4]{5} + 2\sqrt{5} - \sqrt[4]{125}}}$.

7 Miscellaneous

Bài toán 345 ([Chí+23], 1–5, p. 39). (a) Nêu điều kiện để $x \in \mathbb{R}$ là căn bậc 2 số học của số $a \in \mathbb{R}$ không âm. Cho ví dụ. (b) Chứng minh $\sqrt{a^2} = |a|$, $\forall a \in \mathbb{R}$. (c) Biểu thức A phải thỏa điều kiện gì để \sqrt{A} xác định? (d) Phát biểu & chứng minh định lý về mối liên hệ giữa phép nhân & phép khai phương. Cho ví dụ. (e) Phát biểu & chứng minh định lý về mối liên hệ giữa phép chia & phép khai phương. Cho ví dụ.

Bài toán 346 ([Chí+23], 70., p. 40). Tính: (a) $\sqrt{\frac{25}{81} \cdot \frac{16}{49} \cdot \frac{196}{9}}$. (b) $\sqrt{3 \frac{1}{16} \cdot 2 \frac{14}{25} \cdot 2 \frac{34}{81}}$. (c) $\frac{\sqrt{640}\sqrt{34.3}}{\sqrt{567}}$. (d) $\sqrt{21.6}\sqrt{810}\sqrt{11^2 - 5^2}$.

Bài toán 347 ([Chí+23], 71., p. 40). Rút gọn biểu thức: (a) $(\sqrt{8} - 3\sqrt{2} + \sqrt{10})\sqrt{2} - \sqrt{5}$. (b) $0.2\sqrt{(-10)^2 \cdot 3} + 2\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2}$. (c) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{4}{5}\sqrt{200}\right) : \frac{1}{8}$. (d) $2\sqrt{(\sqrt{2} - 3)^2} + \sqrt{2(-3)^2} - 5\sqrt{(-1)^4}$.

Bài toán 348 ([Chí+23], 72., p. 40). Phân tích thành nhân tử với $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, $a, b, x, y \geq 0$, $a \geq b$: (a) $xy - y\sqrt{x} + \sqrt{x} - 1$. (b) $\sqrt{ax} - \sqrt{by} + \sqrt{bx} - \sqrt{ay}$. (c) $\sqrt{a+b} + \sqrt{a^2 - b^2}$. (d) $12 - \sqrt{x} - x$.

Bài toán 349 ([Chí+23], 73., p. 40). Tìm DKXD, rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức: (a) $\sqrt{-9a} - \sqrt{9 + 12a + 4a^2}$ tại $a = -9$. (b) $1 + \frac{3m}{m-2}\sqrt{m^2 - 4m + 4}$ tại $m = 1.5$. (c) $\sqrt{1 - 10a + 25a^2} - 4a$ tại $a = \sqrt{2}$. (d) $4x - \sqrt{9x^2 + 6x + 1}$ tại $x = -\sqrt{3}$.

Bài toán 350 ([Chí+23], 74., p. 40). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{(2x-1)^2} = 3$. (b) $\frac{5}{3}\sqrt{15x} - \sqrt{15x} - 2 = \frac{1}{3}\sqrt{15x}$.

Bài toán 351 ([Chí+23], 75., pp. 40–41). Chứng minh: (a) $\left(\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{\sqrt{8} - 2} - \frac{\sqrt{216}}{3}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = -1.5$. (b) $\left(\frac{\sqrt{14} - \sqrt{7}}{1 - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{3}}\right) : \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = -2$. (c) $\frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} : \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = a - b$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $a \neq b$. (d) $\left(1 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right) \left(1 - \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}\right) = 1 - a$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $a \neq 1$.

Bài toán 352 ([Chí+23], 76., p. 41). Cho biểu thức $A = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} - \left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right) : \frac{b}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$. (a) Tìm DKXD. (b) Rút gọn A . (c) Tính Q khi $a = 3b$.

Bài toán 353 ([Thâ+23], 96., p. 21). Giải phương trình $\sqrt{3 + \sqrt{x}} = 3$.

Bài toán 354 ([Thâ+23], 97., p. 21). Tính $\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}}$.

Bài toán 355 ([Thâ+23], 98., p. 22). Chứng minh: (a) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{6}$. (b) $\sqrt{\frac{4}{(2 - \sqrt{5})^2}} - \sqrt{\frac{4}{(2 + \sqrt{5})^2}} = 8$.

Bài toán 356 ([Thâ+23], 99., p. 22). Cho $A = \frac{\sqrt{4x^2 - 4x + 1}}{4x - 2}$. Chứng minh $|A| = 0.5$ với $x \neq 0.5$.

Bài toán 357 ([Thâ+23], 100., p. 22). Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$. (b) $\sqrt{15 - 6\sqrt{6}} + \sqrt{33 - 12\sqrt{6}}$. (c) $(15\sqrt{200} - 3\sqrt{450} + 2\sqrt{50}) : \sqrt{10}$.

Bài toán 358 ([Thâ+23], 101., p. 22). (a) Chứng minh: $x - 4\sqrt{x-4} = (\sqrt{x-4} - 2)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \geq 4$. (b) Tìm DKXD & rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x - 4\sqrt{x-4}}$.

Bài toán 359 ([Thâ+23], 102., p. 22). Tìm DKXD của các biểu thức $A = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$, $B = \sqrt{x+4} + \sqrt{x-1}$. (a) Chứng minh $A \geq 1$ & $B \geq \sqrt{5}$. (b) Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 1$, $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = 2$.

Bài toán 360 ([Thâ+23], 103., p. 22). Chứng minh: $x - \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$. Từ đó, cho biết biểu thức $\frac{1}{x - \sqrt{x} + 1}$ có giá trị lớn nhất là bao nhiêu? Giá trị đó đạt được khi x bằng bao nhiêu?

Bài toán 361 ([Thâ+23], 104., p. 23). Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để biểu thức $\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3}$ nhận giá trị nguyên.

Bài toán 362 ([Thâ+23], 105., p. 23). Chứng minh $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$, $a \neq 0$: (a) $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2\sqrt{a} - 2\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2\sqrt{a} + 2\sqrt{b}} - \frac{2b}{b - a} = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$.

(b) $\left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right) \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}\right)^2 = 1$.

Bài toán 363 ([Thâ+23], 106., p. 23). Cho biểu thức $A = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$. (a) Tìm điều kiện để A có nghĩa. (b) Khi A có nghĩa, chứng tỏ giá trị của A không phụ thuộc vào a .

Bài toán 364 ([Thâ+23], 107., p. 23). Cho biểu thức $A = \left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^3}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) \left(\frac{1+\sqrt{x^3}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$. (a) Tìm ĐKXD. (b) Rút gọn A . (c) Tìm $x \in \mathbb{R}$ để $A = 3$.

Bài toán 365 ([Thâ+23], 108., p. 23). Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} + \frac{x+9}{9-x} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}+1}{x-3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$. (a) Tìm ĐKXD. (b) Rút gọn A . (c) Tìm $x \in \mathbb{R}$ sao cho $C < -1$.

Bài toán 366 ([Thâ+23], I.1., p. 23). Không dùng bảng số hoặc máy tính, so sánh $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ và $\sqrt{5}+1$.

Bài toán 367 ([Tuy23], Thí dụ 15, pp. 29–30). Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right)$. (a) Rút gọn A . (b) Tính giá trị của A với $x = 7 - 4\sqrt{3}$. (c) Tìm giá trị lớn nhất của a để $P > a$.

Bài toán 368 ([Tuy23], 80., p. 31). Chứng minh: $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(a+b)^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} \right|$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $ab(a+b) \neq 0$. Áp dụng tính $A = \sqrt{1 + 999^2 + \frac{999^2}{1000^2}} + \frac{999}{1000}$.

Bài toán 369 ([Tuy23], 81., p. 31). Rút gọn biểu thức $A = (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$.

Bài toán 370 ([Tuy23], 82., p. 31). Không dùng máy tính hoặc bảng số, chứng minh: $\sqrt{14} - \sqrt{13} < 2\sqrt{3} - \sqrt{11}$.

Bài toán 371 ([Tuy23], 83., p. 31). Giải phương trình: $\frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 1$.

Bài toán 372 ([Tuy23], 84., p. 31). Tìm x, y, z biết $x + y + z + 35 = 2(2\sqrt{x+1} + 3\sqrt{y+2} + 4\sqrt{z+3})$.

Bài toán 373 ([Tuy23], 85., p. 31). Cho $a > 0$, $b > 0$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. Chứng minh: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1}$.

Bài toán 374 ([Tuy23], 86., p. 31). Chứng minh: $A = \sqrt{8 + 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{8 - 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = \sqrt{2} + \sqrt{10}$.

Bài toán 375 ([Tuy23], 87., p. 31). Chứng minh:

$$\frac{1}{4} < \frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}} < \frac{3}{10},$$

(ở tử có n dấu căn, ở mẫu có $n-1$ dấu căn).

Bài toán 376 ([Tuy23], 88., p. 31). Giải phương trình: $\sqrt{x+2-3\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x-2+3\sqrt{2x-5}} = 2\sqrt{2}$.

Bài toán 377 ([Tuy23], 89., p. 31). Giải phương trình: $\sqrt[3]{(65+x)^2} + 4\sqrt[3]{(65-x)^2} = 5\sqrt[3]{65^2 - x^2}$.

Bài toán 378 ([Tuy23], 90., p. 32). Giải phương trình ẩn x : $\frac{(a-x)\sqrt[4]{x-b} + (x-b)\sqrt[4]{a-x}}{\sqrt[4]{a-x} + \sqrt[4]{x-b}} = \frac{a-b}{2}$ với $a > b$.

Bài toán 379 ([Tuy23], 91., p. 32). Cho biểu thức $A = \sum_{i=1}^{199} \frac{1}{\sqrt{i(200-i)}} = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 199}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 198}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{199 \cdot 1}}$. Chứng minh $A > 1.99$.

Bài toán 380 ([Tuy23], 92., p. 32). Cho n số dương a_1, a_2, \dots, a_n . Chứng minh:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

Bài toán 381 ([Tuy23], 93., p. 32). Cho các số thực dương a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $abcd = 1$. Chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + a(b+c) + b(c+d) + c(d+a) + d(a+b) \geq 12$.

Bài toán 382 ([Tuy23], 94., p. 32). Giải phương trình: $\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x^2+x+1}} = \frac{7}{4}$.

Bài toán 383 ([Tuy23], 95., p. 32). Giải phương trình: $\sqrt{x+x^2} + \sqrt{x-x^2} = x+1$.

Bài toán 384 ([Tuy23], 96., p. 32). Cho $A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$ với $0 \leq x \leq 1$. Rút gọn biểu thức $B = 1 - \sqrt{A+x+1}$.

Bài toán 385 ([Tuy23], 97., p. 32). Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$. (a) Rút gọn A. (b) Tính giá trị của A với $x = 14 - 6\sqrt{5}$. (c) Tìm GTNN của A.

Bài toán 386 ([BNS23], Ví dụ 1.1, p. 5). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{(7+4\sqrt{3})(a-1)^2}$.

Bài toán 387 ([BNS23], Ví dụ 1.2, p. 6). Cho biểu thức $A = \sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$. (a) Tìm điều kiện xác định của A. (b) Rút gọn biểu thức A với $1 \leq a < 2$. (c) Rút gọn biểu thức A với $a \geq 2$.

Bài toán 388 ([BNS23], Ví dụ 1.3, p. 6). Đơn giản biểu thức $A = (\sqrt{8+2\sqrt{7}} + 2\sqrt{8-2\sqrt{7}})(\sqrt{63}+1)$.

Bài toán 389 ([BNS23], Ví dụ 1.4, p. 6). Tính tổng $A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$.

Bài toán 390 ([BNS23], Ví dụ 1.5, p. 6). Tính $A = \frac{\sqrt{7-2\sqrt{10}}(7+2\sqrt{10})(74-22\sqrt{10})}{\sqrt{125-4\sqrt{50}+5\sqrt{20}+\sqrt{8}}}$.

Bài toán 391 ([BNS23], Ví dụ 1.6, p. 7). Cho $a = \sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}} + \sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$. Chứng minh: $a^2 - 2a - 2 = 0$.

Bài toán 392 ([BNS23], Ví dụ 1.7, p. 7). Cho $a = \sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$. Tính

$$A = \frac{a^4 - 4a^3 + a^2 + 6a + 4}{a^2 - 2a + 12}.$$

Bài toán 393 ([BNS23], Ví dụ 1.8, p. 7). Cho $f(x) = \frac{1+\sqrt{1+x}}{x+1} + \frac{1+\sqrt{1-x}}{x-1}$ & $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tính $f(a)$.

Bài toán 394 ([BNS23], Ví dụ 1.9, p. 8). Giả thiết $x, y, z > 0$ & $xy + yz + zx = a$. Chứng minh

$$x\sqrt{\frac{(a+y^2)(a+z^2)}{a+x^2}} + y\sqrt{\frac{(a+z^2)(a+x^2)}{a+y^2}} + z\sqrt{\frac{(a+x^2)(a+y^2)}{a+z^2}} = 2a.$$

Bài toán 395 ([BNS23], 1.1, p. 8). Biểu diễn $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ thành $a + b\sqrt{5}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$.

Bài toán 396 ([BNS23], 1.2, p. 8). Đơn giản biểu thức $A = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{18} + \sqrt{28-16\sqrt{3}}$.

Bài toán 397 ([BNS23], 1.3, p. 8). Chứng minh $\sqrt{10+2\sqrt{24}} - \sqrt{10-2\sqrt{24}} = 4$.

Bài toán 398 ([BNS23], 1.4, p. 8). Tính $A = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Bài toán 399 ([BNS23], 1.5, p. 9). Tính tích ab với

$$a = \sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{3+\sqrt{7+\sqrt{2}}}, \quad b = \sqrt{3+\sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{2}}}}\sqrt{3-\sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{2}}}}.$$

Bài toán 400 ([BNS23], 1.6, p. 9). Chứng minh $\frac{4}{\sqrt{5}-1} + \frac{3}{\sqrt{5}-2} + \frac{16}{\sqrt{5}-3} = -5$.

Bài toán 401 ([BNS23], 1.7, p. 9). Chứng minh $\left(\frac{2}{\sqrt{6}-1} + \frac{3}{\sqrt{6}-2} + \frac{3}{\sqrt{6}-3}\right)\frac{5}{9\sqrt{6}+4} = \frac{1}{2}$.

Bài toán 402 ([BNS23], 1.8, p. 9). Cho $f(x) = \frac{x+\sqrt{5}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{5}}} + \frac{x-\sqrt{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{5}}}$. Tính $f(3)$.

Bài toán 403 ([BNS23], 1.9, p. 9). Cho $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ & $a = \frac{4}{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}$. Tính $f(a)$.

Bài toán 404 ([BNS23], Ví dụ 2.1, p. 10). Chứng minh với $ab \neq 0$: $\frac{\sqrt[3]{a^5b^7}}{\sqrt[3]{a^2b}} - \frac{\sqrt[3]{a^4b^8}}{\sqrt[3]{ab^2}} = 0$.

Bài toán 405 ([BNS23], Ví dụ 2.2, p. 10). Chứng minh với $abc \neq 0$: $\frac{\sqrt[3]{a^4b^5c^7}}{\sqrt[3]{ab^2c}} = abc^2$.

Bài toán 406 ([BNS23], Ví dụ 2.3, p. 10). Với $a \geq 2 + \sqrt{2}$ và

$$u = \sqrt[3]{\left(a + \frac{2}{a}\right)^3 - 3a^2 - \frac{12}{a^2} + 3\left(a + \frac{2}{a}\right) - 13}, v = \sqrt{a^2 + \frac{4}{a^2} - 8\left(a + \frac{2}{a}\right) + 20}.$$

Chứng minh $u - v = 3$.

Bài toán 407 ([BNS23], Ví dụ 2.4, p. 11). Đơn giản biểu thức $A = \sqrt[3]{8(7 + 5\sqrt{2})} + \sqrt[3]{216(7 - 5\sqrt{2})} + 4\sqrt{2} - 7$.

Bài toán 408 ([BNS23], Ví dụ 2.5, p. 11). Chứng minh $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1$.

Bài toán 409 ([BNS23], Ví dụ 2.6, p. 11). Chứng minh nếu $a = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$ thì $a^3 + 3a = 4$.

Bài toán 410 ([BNS23], Ví dụ 2.7, p. 11). Chứng minh:

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{9 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt[3]{2}} + 3\sqrt[3]{2}\right)\sqrt{3}}}{3 + \sqrt[6]{108}} = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}.$$

Bài toán 411 ([BNS23], Ví dụ 2.8, p. 12). Chứng minh nếu $\sqrt[3]{(a+1)^2} + \sqrt[3]{a^2-1} + \sqrt[3]{(a-1)^2} = 1$ thì $\sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a-1} = 2$.

Bài toán 412 ([BNS23], Ví dụ 2.9, p. 12). Đơn giản biểu thức $A = \frac{x+1}{2\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}+x+\frac{1}{x}}$ với $x \notin \{-1, 0\}$.

Bài toán 413 ([BNS23], Ví dụ 2.10, p. 12). Cho $a = \sqrt{2} + \sqrt{7 - \sqrt[3]{61 + 46\sqrt{5}}} + 1$. (a) Chứng minh $a^4 - 14a^2 + 9 = 0$. (b) Giả sử $f(x) = x^5 + 2x^4 - 14x^3 - 28x^2 + 9x + 19$. Tính $f(a)$.

Bài toán 414 ([BNS23], Ví dụ 2.11, p. 13). Cho $a, b, c > 0$. Giả sử m, n, p là những số nguyên dương lớn hơn 1 sao cho $bc = \sqrt[n]{a}$, $ca = \sqrt[p]{b}$, và $ab = \sqrt[q]{c}$. Chứng minh trong 3 số a, b, c phải có ít nhất 1 số bằng 1.

Bài toán 415 ([BNS23], Ví dụ 2.12, p. 13). Cho $a = \frac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}$. (a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận số a làm nghiệm. (b) Giả sử đa thức $f(x) = 3x^6 - 4x^5 - 7x^4 + 6x^3 + 6x^2 + x - 53\sqrt{2}$. Tính $f(a)$.

Bài toán 416 ([BNS23], Ví dụ 2.13, p. 14). Cho $a = \frac{7-4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}} - \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$. (a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận số a làm nghiệm. (b) Giả sử đa thức $f(x) = \frac{x^6 + x^4 + 4x^2}{40(x^4 + 4x^2 - 144)}$. Tính $f(a)$.

Bài toán 417 ([BNS23], Ví dụ 2.14, p. 14). Cho $a = \sqrt[3]{38+17\sqrt{5}} + \sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}$. Giả sử ta có đa thức $f(x) = (x^3+3x+1935)^{2012}$. Tính $f(a)$.

Bài toán 418 ([BNS23], 2.1., p. 14). Biểu diễn $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ thành $a + b\sqrt{5}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$.

Bài toán 419 ([BNS23], 2.2., p. 14). Cho $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} + \sqrt[3]{1-\sqrt{11}}$. Chứng minh $a^9 - 6a^6 + 282a^3 = 8$.

Bài toán 420 ([BNS23], 2.3., p. 15). Cho $a = (\sqrt[3]{1+2\sqrt{6}} - \sqrt[6]{5+4\sqrt{6}})\sqrt[3]{2\sqrt{6}-1} + 1$. (a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận a làm nghiệm. (b) Giả sử $f(x) = \sum_{i=1}^{2012} ix^i + 2012$. Tính $f(a)$.

Bài toán 421 ([BNS23], 2.4., p. 15). Chứng minh:

$$\frac{a+2\sqrt{ab}+9b}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}-2\sqrt[4]{ab}} - 2\sqrt{b} = \left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right)^2, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0.$$

Bài toán 422 ([BNS23], 2.5., p. 15). Chứng minh:

$$\left(\sqrt[3]{a^4} + b^2\sqrt[3]{a^2} + b^4\right) \frac{\sqrt[3]{a^8} - b^6 + b^4\sqrt[3]{a^2} - a^2b^2}{a^2b^2 + b^2 - a^2b^8 - b^4} = a^2b^2, \forall a, b \in \mathbb{R}, ab \neq 0, a \neq b^3.$$

Bài toán 423 ([BNS23], 2.6., p. 15). Cho $a, b > 0$. Đơn giản biểu thức

$$A = \frac{\sqrt{a^3+2a^2b} + \sqrt{a^4+2a^3b} - \sqrt{a^3} - a^2b}{\sqrt{(2a+b-\sqrt{a^2+2ab})\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[6]{a^5}+a\right)}}.$$

Bài toán 424 ([BNS23], 2.7., p. 15). Giả sử $u^3 \geq v^2$, $u, v \in \mathbb{Q}^+$. Xác định u, v để

$$\sqrt{\frac{u - 8\sqrt[6]{u^3v^2} + 4\sqrt[3]{v^2}}{\sqrt{u} - 2\sqrt[3]{v} + 2\sqrt[12]{u^3v^2}}} + 3\sqrt[3]{v} + \sqrt[6]{v} = 1.$$

Bài toán 425. Cho $a, b, c, A, B \in \mathbb{Z}$, $c \geq 0$ thỏa mãn đẳng thức $(a + b\sqrt{c})^2 = A + B\sqrt{c}$. (a) Tìm mối quan hệ của a, b, c, A, B . Biểu diễn (A, B) theo (a, b, c) . (b)* Biểu diễn (a, b) theo (c, A, B) .

Bài toán 426. Cho $a, b, c, A, B \in \mathbb{Z}$, $c \geq 0$ thỏa mãn đẳng thức $(a + b\sqrt{c})^3 = A + B\sqrt{c}$. (a) Tìm mối quan hệ của a, b, c, A, B . Biểu diễn (A, B) theo (a, b, c) . (b)* Biểu diễn (a, b) theo (c, A, B) .

Bài toán 427. Cho $a, b, c, A, B \in \mathbb{Z}$, $c \geq 0$ thỏa mãn đẳng thức $(a + b\sqrt[3]{c})^3 = A + B\sqrt[3]{c} + C\sqrt[3]{c^2}$. (a) Tìm mối quan hệ của a, b, c, A, B, C . Biểu diễn (A, B, C) theo (a, b, c) . (b)* Biểu diễn (a, b) theo (c, A, B, C) .

Tài liệu

- [Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.
- [BNS23] Vũ Hữu Bình, Phạm Thị Bạch Ngọc, and Nguyễn Tam Sơn. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 9. Tập 1: Đại Số*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 192.
- [Chí+23] Phan Đức Chính, Tôn Thân, Vũ Hữu Bình, Trần Phương Dung, Ngô Hữu Dũng, Lê Văn Hồng, and Nguyễn Hữu Thảo. *Toán 9 Tập 1*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 128.
- [Thâ+23] Tôn Thân, Vũ Hữu Bình, Trần Phương Dung, Lê Văn Hồng, and Nguyễn Hữu Thảo. *Bài Tập Toán 9 Tập 1*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 216.
- [Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.