1st-Order Inequation with 1 Variable – Bất Phương Trình Bậc Nhất 1 Ẩn
$ax + b >, <, \geq, \leq 0$

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 26 tháng 3 năm 2023

Tóm tắt nội dung

[EN] This text is a collection of problems, from easy to advanced, about *1st-order inequation with 1 variable*. This text is also a supplementary material for my lecture note on Elementary Mathematics grade 8, which is stored & downloadable at the following link: GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/lecture[1]. The latest version of this text has been stored & downloadable at the following link: GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/1st order inequation with 1 variable[2].

[VI] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài tập chọn lọc từ cơ bản đến nâng cao về *bất phương trình bậc nhất 1 ẩn*. Tài liệu này là phần bài tập bổ sung cho tài liệu chính – bài giảng GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/lecture của tác giả viết cho Toán Sơ Cấp lớp 8. Phiên bản mới nhất của tài liệu này được lưu trữ & có thể tải xuống ở link sau: GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/1st order inequation with 1 variable.

Mục lục

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: `nguyenquanbahong@gmail.com`; website: https://nqbh.github.io.

[1] URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/NQBH_elementary_mathematics_grade_8.pdf.

[2] URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/1st_order_inequation_1_variable/NQBH_1st_order_inequation_1_variable.pdf.

1 Liên Hệ Giữa Thứ Tự & Phép Cộng

1.1 Thứ tự trên tập số thực $\mathbb{R}$

Trên tập hợp số thực $\mathbb{R}$, khi so sánh 2 số $a, b \in \mathbb{R}$, xảy ra 1 trong 3 trường hợp sau: Số a *bằng* số b, ký hiệu $a = b$. Số a *nhỏ hơn* số b, ký hiệu $a < b$. Số a *lớn hơn* số b, ký hiệu $a > b$. Khi biểu diễn số thực trên trục số vẽ theo phương nằm ngang (hoặc thẳng đứng), điểm biểu diễn số nhỏ hơn ở bên trái (ở bên dưới) điểm biểu diễn số lớn hơn. Chính điều đó cho ta hình dung về thứ tự trên tập số thực $\mathbb{R}$.

Nếu số a không nhỏ hơn số b, thì phải có hoặc $a > b$, hoặc $a = b$. Khi đó, ta nói gọn là *a lớn hơn hoặc bằng b*, ký hiệu $a \ge b$, e.g., $x^2 \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$; nếu $c \in \mathbb{R}$ là số không âm thì ta viết $c \ge 0$. Nếu số a không lớn hơn số b, thì phải có hoặc $a < b$, hoặc $a = b$. Khi đó, ta nói gọn là *a nhỏ hơn hoặc bằng b*, ký hiệu $a \le b$, e.g., $-x^2 \le 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$; nếu số $y \in \mathbb{R}$ không lớn hơn 3 thì ta viết $y \le 3$.

1.2 Bất đẳng thức

Định nghĩa 1 (Bất đẳng thức)**.** *Các hệ thức dạng $a < b$, $a > b$, $a \le b$, $a \ge bh$ được gọi là* bất đẳng thức *& gọi a là* vế trái*, b là* vế phải *của bất đẳng thức.*

1.3 Liên Hệ Giữa Thứ Tự & Phép Cộng

Mệnh đề 1. *Khi cộng/trừ cùng 1 số vào cả 2 vế của 1 bất đẳng thức ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho: $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$, $a \le b \Leftrightarrow a + c \le b + c$, $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$, $a \ge b \Leftrightarrow a + c \ge b + c$, $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$.*

Có thể áp dụng tính chất trên để so sánh 2 số, hoặc chứng minh bất đẳng thức.

Bài toán 1 (Chính et al., 2022, ?3, p. 36)**.** *So sánh $\sqrt{2} + 2$ & 5.*

Giải. $2 < 9 \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{9} = 3 \Rightarrow \sqrt{2} + 2 < 3 + 2 = 5$. Vậy $\sqrt{2} + 2 < 5$. □

Lưu ý 1. *Tính chất của thứ tự cũng chính là tính chất của bất đẳng thức.*

Bài toán 2 (Tổng các bình phương thì không âm)**.** *Chứng minh: (a) $x^2 + a \ge a$, $\forall x, a \in \mathbb{R}$. (b) $\sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2 = (a_1 x + b_1)^2 + (a_2 x + b_2)^2 + \cdots + (a_n x + b_n)^2 \ge 0$, $\forall x, a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. (c) $\sum_{i=1}^n (a_i x + b_i y + c_i)^2 = (a_1 x + b_1 y + c_1)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2)^2 + \cdots + (a_n x + b_n y + c_n)^2 \ge 0$, $\forall x, y, a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. (d) $\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + a_i\right)^2 = (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n + a_1)^2 + (a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n + a_2)^2 + \cdots + (a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n + a_m)^2 \ge 0$, $\forall a_{ij}, a_i, x_j \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, m$, $\forall j = 1, 2, \ldots, n$. (e) 1 cách tổng quát, tổng các bình phương của các hàm nhiều biến thì không âm: $\sum_{i=1}^m (f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m))^2 \ge 0$, $\forall x_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \ldots, m$, với mọi hàm m biến f_i, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$.*

Bài toán 3 (Chính et al., 2022, 4., p. 37)**.** *1 biển báo giao thông với nền trắng, số* 20 *màu đen, viền đỏ cho biết vận tốc tối đa mà các phương tiện giao thông được đi trên quãng đường có biển quy định là* 20km/h*. Nếu 1 ôtô đi trên đường đó có vận tốc là* akm/h *thì a phải thỏa mãn điều kiện nào trong các điều kiện sau: $a > 20$, $a < 20$, $a \le 20$, $a \ge 20$?*

2 Liên Hệ Giữa Thứ Tự & Phép Nhân

2.1 Liên hệ giữa thứ tự & phép nhân với số dương & số âm

Mệnh đề 2. *Khi nhân/chia cả 2 vế của bất đẳng thức với cùng 1 số dương ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho: $a < b \Leftrightarrow ac < bc$, $a \le b \Leftrightarrow ac \le bc$, $a > b \Leftrightarrow ac > bc$, $a \ge b \Leftrightarrow ac \ge bc$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Ngược lại, khi nhân/chia cả 2 vế của bất đẳng thức với cùng 1 số âm ta được bất đẳng thức mới ngược chiều với bất đẳng thức đã cho: $a < b \Leftrightarrow ac > bc$, $a \le b \Leftrightarrow ac \ge bc$, $a > b \Leftrightarrow ac < bc$, $a \ge b \Leftrightarrow ac \le bc$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $c < 0$.*

Chứng minh. Dễ thấy nhờ xét dấu[3] của tích $ac - bc = c(a - b)$ theo dấu của c & dấu của $a - b$. □

2.2 Tính chất bắc cầu của thứ tự

Mệnh đề 3 (Tính chất bắc cầu)**.** *$(a < b$ & $b < c) \Rightarrow a < c$, $(a > b$ & $b > c) \Rightarrow a > c$, $(a \le b$ & $b \le c) \Rightarrow a \le c$, $(a \ge b$ & $b \ge c) \Rightarrow a \ge c$ $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.*

Bài toán 4 (Chính et al., 2022, Ví dụ, p. 39)**.** *Cho $a > b$. Chứng minh $a + 2 > b + 1$.*

1st chứng minh. Cộng 2 vào 2 vế của bất đẳng thức $a > b$, được: $a + 2 > b + 2$ (1). Cộng b vào 2 vế của bất đẳng thức $2 > -1$, được: $b + 2 > b - 1$ (2). Từ (1) & (2), theo tính chất bắc cầu, suy ra $a + 2 > b - 1$. □

2nd chứng minh. $a > b \Rightarrow a - b > 0$. Có $a + 2 - (b + 1) = a + 2 - b - 1 = a - b + 1 \ge 0 + 1 = 1 > 0$, suy ra $a + 2 > b - 1$. □

Bài toán 5 (Chính et al., 2022, 6., p. 39)**.** *Cho $a < b$, so sánh: (a) $2a$ & $2b$. (b) $2a$ & $a + b$. (c) $-a$ & $-b$.*

[3] $\mathrm{sign}(ac - bc) = \mathrm{sign}(c(a - b)) = \mathrm{sign}(c)\,\mathrm{sign}(a - b)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

Bài toán 6 (Chính et al., 2022, 7., p. 40). *Số $a \in \mathbb{R}$ là số âm hay dương nếu: (a) $12a < 15a$? (b) $4a < 3a$? (c) $-3a > -5a$?*

Bài toán 7 (Chính et al., 2022, 8., p. 40). *Cho $a < b$. Chứng minh: (a) $2a - 3 < 2b - 3$. (b) $2a - 3 < 2b + 5$.*

Bài toán 8 (Chính et al., 2022, 9., p. 40). *Cho ΔABC. Đ/S? (a) $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} > 180°$. (b) $\widehat{A} + \widehat{B} < 180°$. (c) $\widehat{B} + \widehat{C} \le 180°$. (d) $\widehat{A} + \widehat{B} \ge 180°$.*

Bài toán 9 (Chính et al., 2022, 11., p. 40). *Cho $a < b$. Chứng minh: (a) $3a + 1 < 3b + 1$. (b) $-2a - 5 > -2b - 5$.*

Bài toán 10 (Chính et al., 2022, 13., p. 40). *So sánh a, b nếu: (a) $a + 5 < b + 5$. (b) $-3a > -3b$. (c) $5a - 6 \ge 5b - 6$. (d) $-2a + 3 \le -2b + 3$.*

Bài toán 11 (Chính et al., 2022, 14., p. 40). *Cho $a < b$. So sánh: (a) $2a + 1$ với $2b + 1$. (b) $2a + 1$ với $2b + 3$.*

Bất đẳng thức giữa *trung bình cộng* $\frac{a+b}{2}$ & *trung bình nhân* $\sqrt{ab}$:

Định lý 1 (Bất đẳng thức Cauchy/AM–GM cho 2 số). *$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \ge 0$, $b \ge 0$. Đẳng thức xảy ra khi & chỉ khi $a = b$.*

Chứng minh. $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a=b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \ge 0$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \ge 0$, $b \ge 0$. "=" $\Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$. □

3 Bất Phương Trình 1 Ẩn

4 Bất Phương Trình Bậc Nhất 1 Ẩn

5 Phương Trình Chứa Dấu Giá Trị Tuyệt Đối

6 Miscellaneous

Tài liệu

Chính, Phan Đức, Tôn Thân, Nguyễn Huy Đoan, Lê Văn Hồng, Trương Công Thành, and Nguyễn Hữu Thảo (2022). *Toán 8 Tập 2*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 133.