

Problems & Proofs in Elementary Inequality

Bài Tập Bất Đẳng Thức & Chứng Minh

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 19 tháng 5 năm 2023

Tóm tắt nội dung

A problem set for elementary inequality.

Mục lục

1 Introduction	1
2 Cauchy-Schwarz Inequality – Bất Đẳng Thức Cauchy-Schwarz	1
3 Áp Dụng Bất Đẳng Thức Cauchy-Schwarz Để Tìm Cực Trị	2
4 Uncategorized	4
5 Miscellaneous	5
Tài liệu	5

1 Introduction

The general structure of a problem on inequality is given by:

Problem 1. Let $x_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$ satisfy the condition $C(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ & $C_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$. Prove that: (a) $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$. (b) $B(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$. (c) Find the minimum & maximum of $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ & $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Cấu trúc tổng quát của 1 bài toán bất đẳng thức:

Bài toán 1. Cho các biến $x_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$ thỏa mãn điều kiện $C(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$. Chứng minh: (a) $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$. (b) $B(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$. (c) Tìm GTNN & GTLN của biểu thức $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ & $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Để nghiên cứu các bài toán bất đẳng thức & cực trị 1 cách có hệ thống, ta sẽ nghiên cứu 1 số dạng thường gặp của các biểu thức cần tìm cực trị A, B & đặc biệt là các đẳng thức điều kiện C & bất đẳng thức điều kiện C_1 .

2 Cauchy-Schwarz Inequality – Bất Đẳng Thức Cauchy-Schwarz

The most basic inequality: $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.

Bài toán 2 (Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz cho 2 số không âm). Chứng minh:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

1st proof. $a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0$. “=” $\Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$. □

2nd proof. $(a + b)^2 - (2\sqrt{ab})^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow (a + b)^2 \geq (2\sqrt{ab})^2 \Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (vì $a, b \geq 0$ nên $a + b \geq 0$ & $2\sqrt{ab} \geq 0$). “=” $\Leftrightarrow a = b$. □

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

Lưu ý 1. Ở 2nd proof, ta đã vận dụng tính chất cơ bản của căn bậc 2: $0 \leq a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}$. Phiên bản chặt/ngắt (strict) là: $0 \leq a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}$. Ý nghĩa hình học của 2 tính chất này: Hình vuông nào có cạnh lớn hơn thì có diện tích lớn hơn & ngược lại, hình vuông nào có diện tích lớn hơn thì có cạnh lớn hơn.

3rd proof. Đặt $x := \sqrt{a}, y := \sqrt{b}, x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 0$. Có $a+b-2\sqrt{ab} = a+b-2\sqrt{a}\sqrt{b} = x^2+y^2-2xy = (x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$. “=” $\Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$. \square

Lưu ý 2. Ở 3rd proof, ta đã sử dụng tính chất giao hoán của phép nhân & phép khai phương: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0$.

Bài toán 3. Với m, n, p nào thì bất đẳng thức $ma + nb \geq p\sqrt{ab}$ luôn đúng: (a) $\forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0$. (b) $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 4 (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho 3 số không âm). Chứng minh:

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}, \forall a, b, c \in \mathbb{R}, a, b, c \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 5. Với m, n, p, q nào thì bất đẳng thức $ma + nb + pc \geq q\sqrt[3]{abc}$ luôn đúng: (a) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a, b, c \geq 0$. (b) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 6 (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho n số không âm). Chứng minh:

$$\sum_{i=1}^n a_i \geq n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}, \text{ i.e., } a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_i \in \mathbb{R}, a_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 7. Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Với bộ $(m, m_1, m_2, \dots, m_n)$ nào thì bất đẳng thức:

$$\sum_{i=1}^n m_i a_i \geq m \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}, \text{ i.e., } m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n \geq m \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n},$$

đúng với: (a) $\forall a_i \in \mathbb{R}, a_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$. (b) $\forall a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, n$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

3 Áp Dụng Bất Đẳng Thức Cauchy–Schwarz Để Tìm Cực Trị

Bài toán 8 ([Tuy23], Ví dụ 9, p. 23). Cho $x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$. Tìm GTNN của biểu thức $A = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

1st proof. Vì $x, y > 0$ nên $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \sqrt{x}, \sqrt{y} > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$, được: $\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{xy}} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{xy} \geq 4$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương \sqrt{x}, \sqrt{y} , được: $A = \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2\sqrt{\sqrt{x}\sqrt{y}} = 2\sqrt{\sqrt{xy}} \geq 2\sqrt{4} = 4$. “=” $\Leftrightarrow x = y$ & $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = 4$. Vậy $\min A = 4 \Leftrightarrow x = y = 4$. \square

2nd proof. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy lần lượt cho (\sqrt{x}, \sqrt{y}) & $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$, được:

$$A = \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2\sqrt{\sqrt{x}\sqrt{y}} = 2 \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}}} \geq 2 \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)}} = 2 \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = 4.$$

“=” $\Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y}$ & $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y$ & $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = 4$. Vậy $\min_{x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0} A = 4 \Leftrightarrow x = y = 4$. \square

Nhận xét 1. “Trong thí dụ trên ta đã vận dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz theo 2 chiều ngược nhau. Lần thứ nhất ta đã “làm trội” $\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}}$ bằng cách vận dụng $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ để dùng điều kiện tổng $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$, từ đó được $\sqrt{xy} \geq 4$. Lần thứ 2 ta đã “làm giảm” tổng $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ bằng cách vận dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz theo chiều $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ để dùng kết quả $\sqrt{xy} \geq 4$. Không phải lúc nào ta cũng có thể dùng trực tiếp bất đẳng thức Cauchy–Schwarz đối với các số trong đề bài.” – [Tuy23, p. 24]

Lưu ý 3. TXĐ của A chỉ là $D_A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y \geq 0\}$, nhưng để điều kiện $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ có nghĩa thì cần thêm $x \neq 0, y \neq 0$, nên ta cần xét A trên tập hợp $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y > 0, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}\} \subset D_A$. Hơn nữa, nếu viết GTNN của biểu thức $A = A(x, y)$ trên tập $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y > 0\}$ 1 cách chính xác về mặt toán học thì nên viết tường minh là $\min_{x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0} A(x, y)$ hoặc $\min_{(x, y) \in D} A(x, y)$ hoặc $\min_{x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0} A$ như trong 2nd proof thay vì chỉ đơn giản là $\min A$ như trong 1st proof.

Ta có thể mở rộng & tổng quát bài toán trên như sau:

Bài toán 9. Cho $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = m > 0$, $m \in \mathbb{R}$ cho trước. Có thể tìm GTNN & GTLN của các biểu thức nào? Liệt kê & chứng minh nhiều nhất có thể.

Bài toán 10. Cho $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = m > 0$, $a, b, m \in \mathbb{R}$ cho trước. Có thể tìm GTNN & GTLN của các biểu thức nào? Liệt kê & chứng minh nhiều nhất có thể.

Bài toán 11. Cho $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y, z > 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = m > 0$, $a, b, c, m \in \mathbb{R}$ cho trước. Có thể tìm GTNN & GTLN của các biểu thức nào? Liệt kê & chứng minh nhiều nhất có thể.

Bài toán 12. Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $x_i \in \mathbb{R}$, $x_i > 0$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x_i} = m > 0$, $a_i, m \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, cho trước. Có thể tìm GTNN & GTLN của các biểu thức nào? Liệt kê & chứng minh nhiều nhất có thể.

Bài toán 13 ([Tuy23], Ví dụ 10, p. 24). Tìm GTLN & GTNN của biểu thức $A = \sqrt{3x-5} + \sqrt{7-3x}$.

Giải. ĐKXD: $\frac{5}{3} \leq x \leq \frac{7}{3}$. $A^2 = 3x-5+7-3x+2\sqrt{3x-5}\sqrt{7-3x} \leq 2+(3x-5+7-3x) = 4 \Rightarrow A \leq 2$ ($A \geq 0$ vì $\sqrt{3x-5} \geq 0$, $\sqrt{7-3x} \geq 0$). “=” $\Leftrightarrow 3x-5=7-3x \Leftrightarrow x=2$. Mặt khác, $A^2 = 2+2\sqrt{3x-5}\sqrt{7-3x} \geq 2$. “=” $\Leftrightarrow (3x-5)(7-3x)=0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\}$. Vậy $\max A = 2 \Leftrightarrow x = 2$ & $\min A = \sqrt{2} \Leftrightarrow x \in \{\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\}$. \square

Bài toán 14 (Mở rộng [Tuy23], Ví dụ 10, p. 24). Biện luận theo các tham số $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ để tìm GTLN & GTNN của biểu thức $A = \sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d}$.

Bài toán 15 ([Tuy23], Ví dụ 11, p. 25). Tìm GTLN & GTNN của biểu thức $A = \frac{\sqrt{x-9}}{5x}$.

Bài toán 16 ([Tuy23], Ví dụ 12, p. 25). Tìm GTNN của biểu thức $A = \frac{3x^4+16}{x^3}$. A có GTLN không?

Bài toán 17 ([Tuy23], Ví dụ 13, p. 26). Cho $0 < x < 2$, tìm GTNN của biểu thức $A = \frac{9x}{2-x} + \frac{2}{x}$.

Bài toán 18 ([Tuy23], Ví dụ 14, p. 27). Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x, y, z > 0$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z=2$. Tìm GTNN của biểu thức $A = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$.

Bài toán 19 ([Tuy23], 63., p. 28). Cho $a, x, y \in \mathbb{R}$, $a, x, y > 0$, $x+y=2a$. Tìm GTNN của biểu thức $A = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Bài toán 20 ([Tuy23], 64., p. 28). Tìm GTLN của biểu thức $A = \sqrt{x-5} + \sqrt{23-x}$.

Bài toán 21 ([Tuy23], 65., p. 28). Cho $x+y=15$, tìm GTNN, GTLN của biểu thức $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{y-3}$.

Bài toán 22 ([Tuy23], 66., p. 28). Tìm GTNN của biểu thức $A = \frac{2x^2-6x+5}{2x}$ với $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

Bài toán 23 ([Tuy23], 67., p. 28). Cho $a, b, x \in \mathbb{R}$, $a, b, x > 0$. Tìm GTNN của biểu thức $A = \frac{(x+a)(x+b)}{x}$.

Bài toán 24 ([Tuy23], 68., p. 28). Cho $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, tìm GTNN của biểu thức $A = \frac{x^2+2x+17}{2(x+1)}$.

Bài toán 25 ([Tuy23], 69., p. 28). Tìm GTNN của biểu thức $A = \frac{x+6\sqrt{x}+36}{\sqrt{x}+3}$.

Bài toán 26 ([Tuy23], 70., p. 28). Cho $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, tìm GTNN của biểu thức $A = \frac{x^3+2000}{x}$.

Bài toán 27 ([Tuy23], 71., p. 28). Cho $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$ & $x+y \geq 6$. Tìm GTNN của biểu thức: $A = 5x+3y + \frac{12}{x} + \frac{16}{y}$.

Bài toán 28 ([Tuy23], 72., p. 29). Cho $x, y \in \mathbb{R}$, $x > y$ & $xy=5$, tìm GTNN của biểu thức $A = \frac{x^2+1.2xy+y^2}{x-y}$.

Bài toán 29 ([Tuy23], 73., p. 29). Cho $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$, tìm GTLN của biểu thức $A = 4x + \frac{25}{x-1}$.

Bài toán 30 ([Tuy23], 74., p. 29). Cho $x \in \mathbb{R}$, $0 < x < 1$, tìm GTNN của biểu thức $A = \frac{3}{1-x} + \frac{4}{x}$.

Bài toán 31 ([Tuy23], 75., p. 29). Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z=a$. (a) Tìm GTLN của biểu thức $A = xy+yz+zx$. (b) Tìm GTNN của biểu thức $B = x^2+y^2+z^2$.

Bài toán 32 ([Tuy23], 76., p. 29). Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x, y, z > 0$ thỏa mãn điều kiện $x + y + z \geq 12$. Tìm GTNN của biểu thức $A = \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{z}} + \frac{z}{\sqrt{x}}$.

Bài toán 33 ([Tuy23], 77., p. 29). Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x, y, z > 0$ thỏa mãn điều kiện $x + y + z = a$. Tìm GTNN của biểu thức $A = \left(1 + \frac{a}{x}\right) \left(1 + \frac{a}{y}\right) \left(1 + \frac{a}{z}\right)$.

Bài toán 34 ([Tuy23], 78., p. 29). Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Tìm GTNN của biểu thức $A = \frac{(1+a)(1+b)(1+c)}{(1-a)(1-b)(1-c)}$.

4 Uncategorized

Bài toán 35 ([Tuy23], 79., p. 29). Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $x + y = 1$ & $x > 0$. Tìm GTLN của biểu thức $B = x^2 y^3$.

Bài toán 36 ([Son+21], Bổ đề 1.1, p. 5). Chứng minh: $4ab \leq (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, hay có thể viết dưới dạng $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Hint. $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \geq 0$, $2(a^2 + b^2) - (a+b)^2 = (a-b)^2 \geq 0$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. “=” $\Leftrightarrow a = b$. □

Bài toán 37 ([Son+21], Bổ đề 1.2, p. 5). Chứng minh: $3(ab + bc + ca) \leq (a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$, hay có thể viết dưới dạng $ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Hint. $(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0$, $3(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c)^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$. “=” $\Leftrightarrow a = b = c$. □

Bài toán 38 ([Son+21], Bổ đề 1.3, p. 6). Chứng minh: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$, hay có thể viết dưới dạng $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$, $\forall a, b > 0$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Hint. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a+b} = \frac{(a-b)^2}{ab(a+b)} \geq 0$, $\forall a, b > 0$. “=” $\Leftrightarrow a = b > 0$. □

Bài toán 39 ([Son+21], Bổ đề 1.4, p. 6). Chứng minh: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$, hay có thể viết dưới dạng $\frac{1}{a+b+c} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$, $\forall a, b, c > 0$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 40 ([Son+21], Mở rộng Bổ đề 1.3–1.4, p. 6 cho n số). Chứng minh:

$$\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1 + \dots + a_n}, \text{ i.e., } \frac{1}{a_1 + \dots + a_n} \leq \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right), \forall a_i > 0, \forall i = 1, \dots, n,$$

hay có thể được viết gọn lại như sau:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n a_i}, \text{ i.e., } \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i} \leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}, \forall a_i > 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 41 ([Son+21], Bổ đề 1.5, p. 7). Chứng minh: $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$, $\forall a, b \geq 0$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 42 ([Son+21], Mở rộng Bổ đề 1.5, p. 7). Chứng minh: $\sqrt{a+b+c} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{3(a+b+c)}$, $\forall a, b, c \geq 0$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 43 ([Son+21], Mở rộng Bổ đề 1.5, p. 7 cho n số). Chứng minh: $\sqrt{a_1 + \dots + a_n} \leq \sqrt{a_1} + \dots + \sqrt{a_n} \leq \sqrt{n(a_1 + \dots + a_n)}$, $\forall a_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n$, hay có thể được viết gọn lại như sau:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i} \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \leq \sqrt{n \sum_{i=1}^n a_i}, \forall a_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 44 ([Son+21], Bổ đề 1.6, p. 7). Chứng minh: $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a+b \geq 0$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Hint. $a^3 + b^3 - ab(a+b) = (a+b)(a-b)^2 \geq 0$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a+b \geq 0$. “=” $\Leftrightarrow a = \pm b$. □

Bài toán 45 ([Son+21], Mở rộng Bổ đề 1.6, p. 7). Chứng minh: $a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

5 Miscellaneous

Tài liệu

- [Sơn+21] Nguyễn Ngọc Sơn, Chu Đình Nghiệp, Lê Hải Trung, and Võ Quốc Bá Cẩn. *Các Chủ Đề Bất Đẳng Thức Ôn Thi Vào Lớp 10*. Tái bản lần thứ 3. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2021, p. 143.
- [Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.