

Elementary Mathematics/Grade 6

Nguyễn Quân Bá Hồng

Ngày 21 tháng 3 năm 2022

Tóm tắt nội dung

Tóm tắt kiến thức Toán lớp 6 & một số chủ đề nâng cao.

Mục lục

1 Số Tự Nhiên	4
1.1 Tập Hợp	4
1.1.1 Ký hiệu & cách viết tập hợp	4
1.1.2 Phần tử thuộc tập hợp	4
1.1.3 Cách cho 1 tập hợp	4
1.1.4 Biểu đồ Ven (Venn diagram)	4
1.2 Tập Hợp Các Số Tự Nhiên	4
1.2.1 Tập hợp các số tự nhiên	4
1.2.2 Biểu diễn số tự nhiên	5
1.2.3 So sánh các số tự nhiên	5
1.2.4 Số La Mã	7
1.3 Phép Cộng, Phép Trừ Các Số Tự Nhiên	7
1.3.1 Phép cộng $+$	7
1.3.2 Phép trừ $-$	7
1.4 Phép Nhân, Phép Chia Các Số Tự Nhiên	8
1.4.1 Phép nhân \times / \cdot	8
1.4.2 Phép Chia $:$	8
1.5 Phép Tính Lũy Thừa với Số Mũ Tự Nhiên	9
1.5.1 Phép nâng lên lũy thừa	9
1.5.2 Nhân 2 lũy thừa cùng cơ số	9
1.5.3 Chia 2 lũy thừa cùng cơ số	9
1.6 Thứ Tự Thực Hiện Các Phép Tính	9
1.6.1 Thứ tự thực hiện các phép tính trong biểu thức không chứa dấu ngoặc	10
1.6.2 Thứ tự thực hiện các phép tính trong biểu thức chứa dấu ngoặc	10
1.7 Quan Hệ Chia Hết. Tính Chất Chia Hết	10
1.7.1 Quan hệ chia hết	10
1.7.2 Tính chất chia hết	10
1.8 Dấu hiệu chia hết cho 2, cho 5	11
1.8.1 Dấu hiệu chia hết cho 2	11
1.8.2 Dấu hiệu chia hết cho 5	11
1.8.3 Giải thích dấu hiệu chia hết cho 2, cho 5	11
1.8.4 Dấu hiệu chia hết cho 4	11
1.9 Dấu Hiệu Chia Hết Cho 3, Cho 9	11
1.9.1 Dấu hiệu chia hết cho 3	11
1.9.2 Dấu hiệu chia hết cho 9	12
1.9.3 Giải thích dấu hiệu chia hết cho 3, cho 9	12
1.10 Số Nguyên Tố. Hợp Số	12
1.10.1 Sàng Eratosthenes	12
1.11 Phân Tích 1 Số Ra Thừa Số Nguyên Tố	13
1.11.1 Cách tìm 1 ước nguyên tố của 1 số	13
1.11.2 Phân tích 1 số ra thừa số nguyên tố	13
1.12 Ước Chung & Ước Chung Lớn Nhất	13

1.12.1	Ước chung & ước chung lớn nhất	13
1.12.2	Tìm ước chung lớn nhất bằng cách phân tích các số ra thừa số nguyên tố	13
1.12.3	2 số nguyên tố cùng nhau	13
1.12.4	Tìm ước chung lớn nhất bằng thuật toán Euclid	14
1.13	Bội Chung & Bội Chung Nhỏ Nhất	14
1.13.1	Bội chung & bội chung nhỏ nhất	14
1.13.2	Tìm bội chung nhỏ nhất bằng cách phân tích các số ra thừa số nguyên tố	14
1.13.3	Ứng dụng bội chung nhỏ nhất vào cộng, trừ các phân số không cùng mẫu	14
1.13.4	Lịch Can Chi	15
2	Số Nguyên	15
2.1	Số Nguyên Âm	15
2.1.1	Độ sâu lớn nhất của các đại dương dưới mực nước biển	15
2.1.2	Hà Lan – Đất nước của những vùng đất thấp hơn mực nước biển	15
2.2	Tập Hợp Các Số Nguyên \mathbb{Z}	15
2.2.1	Tập hợp \mathbb{Z} các số nguyên	15
2.2.2	Biểu diễn số nguyên trên trục số	15
2.2.3	Số đối của 1 số nguyên	16
2.2.4	So sánh các số nguyên	16
2.3	Phép Cộng Các Số Nguyên	16
2.3.1	Phép cộng 2 số nguyên cùng dấu	16
2.3.2	Phép cộng 2 số nguyên khác dấu	17
2.3.3	Tính chất của phép cộng các số nguyên	17
2.4	Phép Trừ Số Nguyên. Quy Tắc Dấu Ngoặc	17
2.4.1	Phép trừ số nguyên	17
2.4.2	Quy tắc dấu ngoặc	17
2.5	Phép Nhân Các Số Nguyên	17
2.5.1	Phép nhân 2 số nguyên khác dấu	17
2.5.2	Phép nhân 2 số nguyên cùng dấu	17
2.5.3	Tính chất của phép nhân các số nguyên	18
2.6	Phép Chia Hết 2 Số Nguyên. Quan Hệ Chia Hết Trong Tập Hợp Số Nguyên	18
2.6.1	Phép chia hết 2 số nguyên khác dấu	18
2.6.2	Phép chia hết 2 số nguyên cùng dấu	18
2.6.3	Quan hệ chia hết	18
2.7	Một Số Kiến Thức về Tài Chính, Kinh Doanh	18
2.7.1	Tài chính	18
2.7.2	Kinh doanh	19
2.7.3	Các cách để tăng lợi nhuận	19
2.8	Kiến Thức Toán Học	19
2.9	Kỹ Năng Tìm Kiếm Thông Tin & Trình Bày Sản Phẩm	19
3	Hình Học Trục Quan	19
3.1	Tam Giác Đều. Hình Vuông. Lục Giác Đều	19
3.1.1	Tam giác đều	19
3.1.2	Hình vuông	20
3.1.3	Lục giác đều	20
3.2	Hình Chữ Nhật. Hình Thoi	20
3.2.1	Hình chữ nhật	20
3.2.2	Hình thoi	20
3.3	Hình Bình Hành	21
3.3.1	Nhận biết hình bình hành	21
3.3.2	Vẽ hình bình hành	21
3.3.3	Chu vi & diện tích của hình bình hành	21
3.4	Hình Thang Cân	21
3.4.1	Nhận biết hình thang cân	21
3.4.2	Chu vi & diện tích của hình thang cân	21
3.5	Hình Có Trục Đối Xứng	21
3.5.1	Hình có trục đối xứng	21
3.5.2	Trục đối xứng của 1 số hình	22

3.6	Hình Có Tâm Đối Xứng	22
3.6.1	Hình có tâm đối xứng	22
3.6.2	Tâm đối xứng của 1 số hình	22
3.7	Đối Xứng trong Thực Tiễn	22
3.7.1	Tính đối xứng trong thế giới tự nhiên	22
3.7.2	Tính đối xứng trong nghệ thuật, kiến trúc, & công nghệ	22
3.7.3	Đối xứng trong toán học	22
3.8	Thực Hành Phần Mềm GeoGebra	22
3.8.1	Giới thiệu phần mềm Geogebra	22
3.8.2	Thực hành phần mềm GeoGebra trong tính toán số học	23
3.8.3	Sử dụng phần mềm GeoGebra để vẽ hình tam giác đều, hình vuông, hình lục giác đều	23
4	Một Số Yếu Tố Thống kê & Xác Suất	23
4.1	Thu Thập, Tổ Chức, Biểu Diễn, Phân Tích, & Xử Lý Dữ Liệu	23
4.1.1	Thu thập, tổ chức, phân tích, & xử lý dữ liệu	23
4.1.2	Biểu diễn dữ liệu	23
4.2	Biểu Đồ Cột Kép	24
4.3	Mô Hình Xác Suất Trong 1 Số Trò Chơi & Thí Nghiệm Đơn Giản	24
4.3.1	Mô hình xác suất trong trò chơi tung đồng xu	24
4.3.2	Mô hình xác suất trong trò chơi lấy vật từ trong hộp	24
4.3.3	Mô hình xác suất trong trò chơi gieo xúc xắc	24
4.4	Xác Suất Thực Nghiệm Trong 1 Số Trò Chơi & Thí Nghiệm Đơn Giản	24
4.4.1	Xác suất thực nghiệm trong trò chơi tung đồng xu/toss a coin	24
4.4.2	Xác suất thực nghiệm trong trò chơi lấy vật từ trong hộp	25
4.4.3	Xác suất thực nghiệm trong trò chơi gieo xúc xắc	25
4.4.4	Xác suất khi số lần thực nghiệm rất lớn	25
5	Phân Số & Số Thập Phân	25
5.1	Phân Số với Tử & Mẫu là Số Nguyên	26
5.1.1	Khái niệm phân số	26
5.1.2	Khái niệm 2 phân số bằng nhau.	26
5.1.3	Tính Chất Cơ Bản của Phân Số	26
5.2	So Sánh Các Phân Số. Hỗn Số Dương	27
6	Hình Học Phẳng	27
6.1	Điểm. Đường Thẳng	27
6.2	2 Đường Thẳng Cắt Nhau. 2 Đường Thẳng Song Song	27
	Tài liệu	27

Notation/Ký Hiệu

- $x \in [a, b]$: $x \geq a$ và $x \leq b$.
- e.g.: “ví dụ”, “chẳng hạn”, “for example”, “for instance”.
- i.e.: “tức là”, “nghĩa là”, “that means”, “it means”.
- w.l.o.g. abbr.¹ “without loss of generality”, “không mất tính tổng quát”.²
- Cá nhân tôi dùng dấu chấm để ngăn cách phần nguyên & phần thập phân của 1 số thực/phức (nói chung là không nguyên) thay vì dấu , như trong Thái et al., 2022a; Thái et al., 2022b. Ký hiệu dấu . được sử dụng rộng rãi 1 cách thống nhất trong nhiều ngành Khoa học.

¹abbr. is the abbreviation of abbreviation itself, i.e., abbreviation (abbr., abbr.).

²Cụm này thường được dùng trong các chứng minh có *chia trường hợp* (hay còn gọi là *kỹ thuật chia để trị*), và điều quan trọng là các trường hợp được xét phải “bình đẳng”/“đối xứng” với nhau theo một nghĩa nào đó, thì mới được sử dụng kỹ thuật chia trường hợp, cũng như cụm từ này. Nếu sử dụng cụm từ “w.l.o.g.” cho các trường hợp không bình đẳng với nhau thì lời giải sẽ thiếu trường hợp & sai logic ngay từ thời điểm cụm “w.l.o.g.” được viết ra.

Principles/Nguyên Tắc

Về nguyên tắc cá nhân của tôi trong việc dạy & học Toán Sơ Cấp, xem [GitHub/NQBH/elementary math/principle](#).

Câu hỏi 0.1. *Học Toán để làm gì? Tại sao phải học Toán?*

Đây thực sự là 1 câu hỏi khó, rất khó.

“... được tiến thêm 1 bước trên con đường khám phá thế giới bí ẩn & đẹp đẽ của Toán học, đặc biệt là được “làm giàu” về vốn văn hóa chung & có cơ hội “Mang cuộc sống vào bài học – Đưa bài học vào cuộc sống”. [...] sẽ ngày càng tiến bộ & cảm thấy vui sướng khi nhận ra ý nghĩa: Học Toán rất có ích cho cuộc sống hằng ngày.” – Thái et al., 2022a, p. 1

1 Số Tự Nhiên

Nội dung. Tập hợp; tập hợp các số tự nhiên; các phép tính trong tập hợp số tự nhiên; quan hệ chia hết, số nguyên tố; ước chung & bội chung.

1.1 Tập Hợp

1.1.1 Ký hiệu & cách viết tập hợp

Khái niệm tập hợp (set) thường gặp trong toán học & trong đời sống. Người ta thường dùng các chữ cái in hoa để đặt tên cho 1 tập hợp. Các phần tử của 1 tập hợp được viết trong 2 dấu ngoặc nhọn $\{ \}$, cách nhau bởi dấu “;”. Mỗi phần tử được liệt kê 1 lần, thứ tự liệt kê tùy ý.

1.1.2 Phần tử thuộc tập hợp

a là 1 phần tử của tập hợp A , viết $a \in A$, đọc là a thuộc A . b không là 1 phần tử của tập hợp B , viết $b \notin B$, đọc là b không thuộc B .

1.1.3 Cách cho 1 tập hợp

Có 2 cách cho 1 tập hợp:

- Liệt kê các phần tử của tập hợp;
- Chỉ ra tính đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.

1.1.4 Biểu đồ Ven (Venn diagram)

Người ta còn minh họa tập hợp bằng 1 vòng kín, mỗi phần tử của tập hợp được biểu diễn bởi 1 chấm bên trong vòng kín, còn phần tử không thuộc tập hợp đó được biểu diễn bởi 1 chấm bên ngoài vòng kín. Cách minh họa tập hợp này gọi là *biểu đồ Venn*, do nhà toán học người Anh John Venn (1834–1923) đưa ra.

1.2 Tập Hợp Các Số Tự Nhiên

1.2.1 Tập hợp các số tự nhiên

1.2.1.1 Tập hợp \mathbb{N} & tập hợp \mathbb{N}^* .

Định nghĩa 1.1. Tập hợp các số tự nhiên được ký hiệu là $\mathbb{N} := \{0; 1; 2; 3; \dots\}$. Tập hợp các số tự nhiên khác 0 được ký hiệu là $\mathbb{N}^* := \{1; 2; 3; 4; \dots\}$.

Hiển nhiên $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$, i.e., $x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x \in \mathbb{N}$ nhưng $x \in \mathbb{N} \not\Rightarrow x \in \mathbb{N}^*$ vì $0 \in \mathbb{N}$ nhưng $0 \notin \mathbb{N}^*$ (cũng là phản ví dụ duy nhất trong trường hợp này). Chú ý: $\mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{0\}$.

1.2.1.2 Cách đọc & viết số tự nhiên. Khi viết các số tự nhiên có từ 4 chữ số trở lên, người ta thường viết tách riêng từng nhóm 3 chữ số kể từ phải sang trái cho dễ đọc (why).

1.2.2 Biểu diễn số tự nhiên

1.2.2.1 Biểu diễn số tự nhiên trên tia số. Các số tự nhiên được biểu diễn trên tia số. Mỗi số tự nhiên ứng với 1 điểm trên tia số.

Câu hỏi 1.1. Tại sao cần/phải biểu diễn số tự nhiên trên tia số?

Trả lời. Làm việc trên hình vẽ để trực quan, tiện trong nhiều mục đích khác, e.g., so sánh 2 số tự nhiên, so sánh 2 tập hợp con của \mathbb{N} , etc. \square

1.2.2.2 Cấu tạo thập phân của số tự nhiên. Số tự nhiên được viết trong hệ thập phân bởi 1, 2, hay nhiều chữ số. Các chữ số được dùng là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Khi 1 số gồm 2 chữ số trở lên thì chữ số đầu tiên (tính từ trái sang phải) khác 0, i.e.,

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}|_{10}, n \in \mathbb{N}^*, a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \forall i = 0, \dots, n, a_n \neq 0. \quad (1.1)$$

Chú ý, trong công thức (1.1), giả thiết $n \in \mathbb{N}^*$ & $a_n \neq 0$ khiến ta chỉ xét ở đây các số tự nhiên có ít nhất 2 chữ số. Với mọi $a \in \mathbb{N}$, biểu diễn chữ số trong hệ thập phân của a là:

$$a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}|_{10}, n \in \mathbb{N}, a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \forall i = 0, \dots, n, a_n \neq 0 \text{ nếu } n \neq 0. \quad (1.2)$$

Trong các viết 1 số tự nhiên có nhiều chữ số, mỗi chữ số ở những vị trí khác nhau có giá trị khác nhau.

Chỉ số chân (subscript) 10 ở đây ám chỉ hệ thập phân. Do hệ thập phân được sử dụng đa số, nên chỉ số chân 10 này thường được lược bỏ & được hiểu ngầm là đang sử dụng hệ thập phân.

Chú ý, công thức (1.2) còn được viết cụ thể hơn dưới dạng tổng là:

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}|_{10} = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10 + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i 10^i. \quad (1.3)$$

Lưu ý 1.1 (Mở rộng cho hệ cơ số nguyên bất kỳ). Cơ số $b \in \mathbb{N}^*, b \geq 2$ bất kỳ:

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}|_b, \text{ với } n \in \mathbb{N}, a_i \in \{0, 1, \dots, b-1\}, \forall i = 0, \dots, n, a_n \neq 0. \quad (1.4)$$

Tương tự (1.3), biểu diễn (1.4) còn được viết cụ thể hơn dưới dạng tổng là:

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}|_b = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i b^i. \quad (1.5)$$

E.g., hệ nhị phân ($b = 2$), và hệ thập lục phân ($b = 16$) được sử dụng chủ yếu trong Tin học, hay chính xác hơn là Khoa học Máy tính (Computer Science). Hệ nhị phân được dùng để thiết kế ngôn ngữ máy tính. *[insert more details]*

1.2.2.3 Số La Mã. Cách ghi số La Mã: I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII, XVIII, XIX, XX, XXI, XXII, XXIII, XXIV, XXV, XXVI, XXVII, XXVIII, XXIX, XXX.

Nguyên tắc. Chữ số I, II, III khi nằm bên trái V, X có nghĩa là “trừ ra”, và khi nằm bên phải V, X có nghĩa là “cộng thêm”.

1.2.3 So sánh các số tự nhiên

Trong 2 số tự nhiên $a, b \in \mathbb{N}$ khác nhau, có 1 số nhỏ hơn số kia. Nếu số a nhỏ hơn số b thì viết $a < b$ hay $b > a$.

Tính chất bắc cầu. Nếu $a < b$ & $b < c$ thì $a < c$, biểu thức logic:

$$(a < b) \wedge (b < c) \Rightarrow (a < c).$$

Hiểu 1 cách trực quan, biểu diễn 3 số $a, b, c \in \mathbb{N}$ trên tia số, khi đó $a < b$ có nghĩa là “ a nằm bên trái b ”, $b < c$ có nghĩa là “ b nằm bên trái c ”. Nhìn vào tia số, ta thấy a nằm bên trái c , nghĩa là $a < c$.

Add partial ordering set. See, e.g., Halmos, 1960; Halmos, 1974; Kaplansky, 1972; Kaplansky, 1977.

Định lý 1.1. Trong 2 số tự nhiên có số chữ số khác nhau: Số nào có nhiều chữ số hơn thì lớn hơn, số nào có ít chữ số hơn thì nhỏ hơn, i.e.:

$$\left. \begin{aligned} a = \overline{a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0}, b = \overline{b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0}, m, n \in \mathbb{N}^*, m > n \\ a_i, b_j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, a_m \neq 0, b_n \neq 0, \end{aligned} \right\} \Rightarrow a > b. \quad (1.6)$$

Proof. Từ biểu diễn thập phân (1.6), xét $a - b$, nếu $a - b > 0$ thì $a > b$. Thật vậy, vì $m > n$,

$$\begin{aligned} a - b &= \overline{a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0} - \overline{b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0} = \sum_{i=0}^m a_i 10^i - \sum_{i=0}^n b_i 10^i = \sum_{i=0}^n a_i 10^i + \sum_{i=n+1}^m a_i 10^i - \sum_{i=0}^n b_i 10^i \\ &= \sum_{i=0}^n (a_i - b_i) 10^i + \sum_{i=n+1}^m a_i 10^i \geq \sum_{i=0}^n -9 \cdot 10^i + 10^m = -9 \sum_{i=0}^n 10^i + 10^m = -9 \frac{10^{n+1} - 1}{10 - 1} + 10^m = 10^m - 10^{n+1} + 1 > 0, \end{aligned}$$

trong đó giả thiết $m > n$, tức $m \geq n + 1$ (do $m, n \in \mathbb{N}^3$) được sử dụng để tách tổng trong biểu diễn của a thành 2 tổng con và dùng trong phép so sánh $10^m \geq 10^{n+1}$, trong khi giả thiết thứ 2 $a_i, b_j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, với mọi $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ được dùng trong đánh giá hiển nhiên $a_i - b_i \geq -9$ vì trường hợp xấu nhất (the worst case) xảy ra khi $a_i = 0$ và $b_i = 9$, và đánh giá $a_i \geq 0$, với mọi $i = n + 1, \dots, m - 1$ được dùng trong $a_i 10^i \geq 0$, và đánh giá $a_m \geq 1$ được dùng trong $a^m 10^m \geq 10^m$. \square

Lưu ý 1.2. Chú ý tổng $\sum_{i=0}^n 10^i$ được tính bằng công thức liên quan tới cấp số nhân hay đơn giản hơn là hằng đẳng thức:

$$\sum_{i=0}^n a^i = \begin{cases} \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}, & \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \\ n + 1, & \text{if } a = 1. \end{cases}$$

Để so sánh 2 số tự nhiên có số chữ số bằng nhau, ta lần lượt so sánh từng cặp chữ số trên cùng 1 hàng (tính từ trái sang phải), cho đến khi xuất hiện cặp chữ số đầu tiên khác nhau. Ở cặp chữ số khác nhau đó, chữ số nào lớn hơn thì số tự nhiên chứa chữ số đó lớn hơn.

Viết dưới dạng *thuật toán* (algorithm) như sau:

Giả sử $a, b \in \mathbb{N}$ là 2 số tự nhiên có số chữ số bằng nhau, i.e.,

$$a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}, \quad b = \overline{b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_i, b_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad a_n \neq 0, \quad b_n \neq 0.$$

Algorithm 1 So sánh 2 số tự nhiên có cùng chữ số

1: **for** $i = n$ to 0 (từ trái sang phải) **do** So sánh a_i và b_i .

- Nếu $a_i > b_i$ thì dừng vòng lặp for và kết luận $a > b$.
- Nếu $a_i < b_i$ thì dừng vòng lặp for và kết luận $a < b$.
- Nếu $a_i = b_i$ thì xét:
 - Nếu $i = 0$ (vòng lặp cuối của vòng lặp for) thì kết luận $a = b$ (vì mỗi cặp chữ số tương ứng của a & b đều bằng nhau).
 - Nếu $i > 0$ thì gán $i \leftarrow i - 1$ và so sánh cặp chữ số tiếp theo ở ngay bên phải cặp chữ số vừa được so sánh.

2: **end for**

Với số tự nhiên $a \in \mathbb{N}$ cho trước, viết $x \leq a$ để chỉ $x < a$ hoặc $x = a$, viết $x \geq a$ để chỉ $x > a$ hoặc $x = a$, i.e.,

$$(x \leq a) \Leftrightarrow (x < a) \vee (x = a), \quad (x \geq a) \Leftrightarrow (x > a) \vee (x = a),$$

Lưu ý 1.3. Ký hiệu ngoặc nhọn $\{ \text{ (hay) } \}$ dùng để biểu thị “và” (logical and) trong khi ký hiệu ngoặc vuông $[\text{ (hay) }]$ dùng để biểu thị “hoặc” (logical or), i.e.,

$$\begin{aligned} a \text{ và } b &\Leftrightarrow a \text{ and } b \Leftrightarrow a \wedge b \Leftrightarrow \begin{cases} a \\ b \end{cases}, \\ a \text{ hoặc } b &\Leftrightarrow a \text{ or } b \Leftrightarrow a \vee b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

³Đây chính là giả thiết được thêm, hay kỹ thuật *siết chặt bất đẳng thức* khi làm việc với các bài toán trên tập số tự nhiên \mathbb{N} hay rộng hơn nữa là tập số nguyên \mathbb{Z} , đặc biệt là các bài giải phương trình hàm trên tập số nguyên. Điều này không có được khi làm việc trên các tập số thực \mathbb{R} hay tập số phức \mathbb{C} . Cf. Tao, 2006, Problem 3.1, p. 36–38.

1.2.4 Số La Mã

“Đế quốc La Mã là 1 đế quốc hùng mạnh tồn tại từ thế kỷ III trước Công nguyên đến thế kỷ V sau Công nguyên, bao gồm những vùng lãnh thổ rộng lớn ở Địa Trung Hải, Bắc Phi & Tây Á.” – Thái et al., 2022a, p. 14

1.2.4.1 Hệ thống các chữ số & số đặc biệt. Có 7 chữ số La Mã cơ bản là (ký hiệu & giá trị tương ứng trong hệ thập phân): I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000. Có 6 số đặc biệt là (ký hiệu & giá trị tương ứng trong hệ thập phân): IV = 4, IX = 9, XL = 40, XC = 90, CD = 400, CM = 900. I chỉ có thể đứng trước V hoặc X; X chỉ có thể đứng trước L hoặc C; C chỉ có thể đứng trước D hoặc M. Trong các chữ số La Mã, không có ký hiệu để chỉ số 0.

1.2.4.2 Cách ghi số La Mã.

- Trong 1 số La Mã tính từ trái sang phải, giá trị của các chữ số cơ bản & các số đặc biệt giảm dần.
- Mỗi chữ số I, X, C, M không viết liền nhau quá 3 lần.
- Mỗi chữ số V, L, D không viết liền nhau.

1.2.4.3 Cách tính giá trị tương ứng trong hệ thập phân của số La Mã. “Giá trị tương ứng trong hệ thập phân của số La Mã bằng tổng giá trị của các chữ số cơ bản & các số đặc biệt tính theo thứ tự từ trái sang phải.” – Thái et al., 2022a, p. 14

Lưu ý 1.4 (Ứng dụng của số La Mã). “Chữ số La Mã được sử dụng rộng rãi cho đến thế kỷ XIV thì không còn được sử dụng nhiều nữa vì hệ thống chữ số Ả Rập (được tạo thành bởi các chữ số từ 0 đến 9) tiện dụng hơn. Tuy nhiên, chúng vẫn còn được sử dụng trong việc đánh số trên mặt đồng hồ, thế kỷ, âm nhạc hay các sự kiện chính trị – văn hóa – thể thao lớn như Thế vận hội Olympic, ...”⁴

1.3 Phép Cộng, Phép Trừ Các Số Tự Nhiên

1.3.1 Phép cộng +

$a + b = c$, trong đó $a, b \in \mathbb{N}$ là các số hạng, & c được gọi là tổng của a & b .

Định lý 1.2 (Tính chất của phép cộng các số tự nhiên). *Phép cộng các số tự nhiên có các tính chất:*

- (Giao hoán) Khi đổi chỗ các số hạng trong 1 tổng thì tổng không thay đổi, i.e.,

$$a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{N}.$$

- (Kết hợp) Muốn cộng 1 tổng 2 số với số thứ 3, ta có thể cộng số thứ nhất với tổng của số thứ 2 & số thứ 3, i.e.,

$$(a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b, c \in \mathbb{N}.$$

- (Cộng với số 0) Bất kỳ số tự nhiên nào cộng với số 0 cũng bằng chính nó, i.e.,

$$a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in \mathbb{N}.$$

Do tính chất kết hợp nên giá trị của biểu thức $a + b + c$ có thể được tính theo 1 trong 2 cách sau: $a + b + c = (a + b) + c$ hoặc $a + b + c = a + (b + c)$.

1.3.2 Phép trừ –

$a - b = c$ ($a \geq b$) trong đó a là số bị trừ, b là số trừ, c là hiệu.

Tính chất. Nếu $a - b = c$ thì $a = b + c$. Nếu $a + b = c$ thì $a = c - b$ & $b = c - a$.

⁴Nói tóm lại, sử dụng chữ số La Mã để thể hiện tính trang trọng & đôi khi màu mè/fancy.

1.4 Phép Nhân, Phép Chia Các Số Tự Nhiên

1.4.1 Phép nhân \times/\cdot

$\boxed{a \times b = c}$, trong đó $a, b \in \mathbb{N}$ là các thừa số, & c là tích.

Quy ước.

- Trong 1 tích, có thể thay dấu nhân \times bằng dấu \cdot , i.e., $a \cdot b := a \times b$.

Lưu ý 1.5 (Chuẩn quốc tế về dấu nhân). Trong SGK Thái et al., 2022a, p. 18, các tác giả dùng dấu chấm \cdot thay dấu \times , nhưng điều này thực ra nguy hiểm, vì chuẩn quốc tế của dấu nhân là dấu \cdot (dấu chấm nằm giữa, không phải nằm dưới chân), thay vì dấu \cdot dùng để ngăn cách phần nguyên & phần thập phân của số thực, e.g., $\pi = 3.1416\dots$ chứ không phải $\pi = 3 \cdot 1416\dots$. Vì vậy, cá nhân tôi sẽ dùng dấu \cdot thay cho dấu \times trong tài liệu này, chú ý ký hiệu này vẫn được sử dụng ở Toán Cao Cấp.

- Trong 1 tích mà các thừa số đều bằng chữ hoặc chỉ có 1 thừa số bằng số, ta có thể không cần viết dấu nhân giữa các thừa số, i.e.,

$$a \times b = a \cdot b = ab.$$

1.4.1.1 Nhân 2 số có nhiều chữ số. Cho 2 số $a, b \in \mathbb{N}$. Nếu 1 trong chúng bằng 0 thì hiển nhiên tích $ab = 0$. Nếu cả 2 số a, b đều khác 0, tức $a, b \in \mathbb{N}^*$, thì để tính tích ab , trước tiên ta biểu diễn a & b dưới dạng thập phân (1.2):

$$\begin{cases} a = \overline{a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0}, \quad b = \overline{b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0}, \text{ với } m, n \in \mathbb{N}, \\ a_i, b_j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \forall i = 0, \dots, m, j = 1, \dots, n, a_m \neq 0, b_n \neq 0, \end{cases}$$

sau đó sử dụng công thức (1.3) để tính tích ab như sau:

$$ab = \overline{a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0} \cdot \overline{b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0} = \left(\sum_{i=0}^m a_i 10^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^n b_j 10^j \right) = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^m a_i 10^i \right) b_j 10^j = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_i b_j 10^{i+j},$$

trong đó $\sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^m a_i 10^i \right) b_j 10^j$ chính là cách thường được sử dụng để tính tích 2 số nguyên dương: tính tích riêng thứ nhất, tính tích riêng thứ 2 & viết tích này lùi sang bên trái 1 cột so với tích riêng thứ nhất, tính tích riêng thứ 3 & viết tích này lùi sang bên trái 2 cột so với tích riêng thứ nhất, etc (xem ví dụ ở Thái et al., 2022a, p. 18).

1.4.1.2 Tính chất của phép nhân.

Định lý 1.3 (Các tính chất của phép nhân các số tự nhiên). *Phép nhân các số tự nhiên có các tính chất sau:*

- Giao hoán: $ab = ba$.
- Kết hợp: $(ab)c = a(bc)$.
- Nhân với số 1: $a1 = 1a = a$.
- Phân phối đối với phép cộng & phép trừ: $a(b+c) = ab+ac$, $a(b-c) = ab-ac$.

Do tính chất kết hợp nên giá trị của biểu thức abc có thể được tính theo 1 trong 2 cách sau: $abc = (ab)c$ hoặc $abc = a(bc)$.

1.4.2 Phép Chia :

1.4.2.1 Phép chia hết. Phép chia hết 1 số tự nhiên cho 1 số tự nhiên khác 0: $\boxed{a : b = q}$ ($b \neq 0$), trong đó a là số bị chia, b là số chia, q là thương.

Tính chất. Nếu $a : b = q$ thì $a = bq$. Nếu $a : b = q$ & $q \neq 0$ thì $a : q = b$ (trường hợp $q = 0$ xảy ra khi & chỉ khi $a = 0$, $b \neq 0$, i.e., $b \in \mathbb{N}^*$, & khi đó biểu thức $0 : b = 0$ đúng, nhưng $0 : 0 = b \neq 0$ lại vô nghĩa!).

1.4.2.2 Phép chia có dư.

Định lý 1.4. Cho 2 số tự nhiên $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^*$. Khi đó luôn tìm được đúng 2 số tự nhiên q & r sao cho $a = bq + r$, trong đó $0 \leq r < b$.

Proof. Xem thuật toán chia Euclid (Euclidean division algorithm). □

Lưu ý 1.6. Khi $r = 0$ ta có phép chia hết. Khi $r \neq 0$ ta có phép chia có dư. Ta nói: a chia cho b được thương là q & số dư là r . Ký hiệu: $a : b = q$ (dư r).

1.5 Phép Tính Lũy Thừa với Số Mũ Tự Nhiên

Câu hỏi 1.2. *Tại sao cần phép tính lũy thừa?*

Trả lời. Phép nhân dùng để tiện viết gọn phép cộng/ của cùng 1 số hạng nhiều lần. Tương tự, phép lấy lũy thừa dùng để viết gọn phép nhân/tích của cùng 1 số hạng nhiều lần. Lưu ý, 1 trong những mục đích chính của Toán học là dùng công thức để biểu thị càng cô đọng/ngắn gọn ý toán/lập luận logic càng tốt. \square

1.5.1 Phép nâng lên lũy thừa

Định nghĩa 1.2 (Lũy thừa/Exponentiation). Lũy thừa bậc n của a , ký hiệu a^n , là tích của n thừa số a : $a^n = a \cdot a \cdots a$ (n thừa số a) với $n \in \mathbb{N}^*$. Số a được gọi là cơ số, n được gọi là số mũ.

Quy ước $a^1 = a$ với mọi $a \in \mathbb{N}$. Phép nhân nhiều thừa số bằng nhau gọi là *phép nâng lũy thừa*.

Câu hỏi 1.3. *Có phép toán nào cho phép viết gọn phép lũy thừa 1 cơ số với cùng số mũ nhiều lần, i.e., $((a^n)^n) \cdots^n$ (m lần lấy số mũ) hay không?*

Lưu ý 1.7. • a^n đọc là “ a mũ n ” hoặc “ a lũy thừa n ” hoặc “lũy thừa bậc n của a ”.

- a^2 còn được gọi là “ a bình phương” hay “bình phương của a ”.
- a^3 còn được gọi là “ a lập phương” hay “lập phương của a ”.

Lưu ý: $10^n = 10 \dots 0$ với n chữ số 0, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

1.5.2 Nhân 2 lũy thừa cùng cơ số

Quy tắc. Khi nhân 2 lũy thừa cùng cơ số, ta giữ nguyên cơ số & cộng các số mũ:

$$a^m a^n = a^{m+n}, \forall a, m, n \in \mathbb{N}. \quad (1.7)$$

Chú ý: $a^0 = 1, \forall a \in \mathbb{N}^*$. *Why?* Bởi vì khi cho $m = n = 0$ trong công thức (1.7), thu được: $a^0 a^0 = a^0$ hay $a^0(a^0 - 1) = 0$ nên $a^0 = 0$ hoặc $a^0 = 1$. Giả sử⁵ $a^0 = 0$, thay $m = 0, a = 1, n = 1$ vào (1.7) thu được $1^0 1^1 = 1^{0+1}$, hay $0 \cdot 1 = 1$, vô lý. Vậy chỉ có thể xảy ra $a^0 = 1$ với mọi $a \in \mathbb{N}$.

1.5.3 Chia 2 lũy thừa cùng cơ số

Quy tắc. Khi chia 2 lũy thừa cùng cơ số (khác 0) (why?⁶), ta giữ nguyên cơ số & trừ các số mũ:

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \forall a \in \mathbb{N}^*, m, n \in \mathbb{N}, m \geq n. \quad (1.8)$$

Quy ước. $0^0 = 1$ hoặc vô nghĩa. Xem, e.g., [Wikipedia/zero to the power of zero](#).

Chú ý, từ công thức (1.8), cho $m = n$, thu được $a^m : a^m = a^{m-m}, \forall a \in \mathbb{N}^*$, hay tương đương, $1 = a^0, \forall a \in \mathbb{N}^*$. Vậy ta cũng thu được công thức này từ định nghĩa của phép chia, & trực tiếp/ngắn gọn hơn, thay vì suy ra từ phép nhân 2 lũy thừa cùng cơ số.

1.6 Thứ Tự Thực Hiện Các Phép Tính

“Khi tính giá trị của 1 biểu thức, ta không được làm tùy tiện mà phải tính theo đúng quy ước thứ tự thực hiện các phép tính.” – Thái et al., 2022b, p. 26

⁵Ở đây xảy ra 2 trường hợp, & 1 trong số chúng chính là kết quả ta cần chứng minh, vì vậy, bằng phương pháp phản chứng, ta sẽ giả sử các trường hợp còn lại là đúng (nhưng thực tế là sai) rồi tiếp tục suy luận để dẫn tới “1 điều vô lý”. Từ đó ta kết luận được trường hợp duy nhất xảy ra. “Điều vô lý” thường xuất hiện trong *phương pháp chứng minh bằng phản chứng/proof by method of contradiction* thường là “ $0 = a$ ” với $a \neq 0$. NQBH: sẽ bổ sung các điều vô lý khác ở đây.

⁶Nếu cơ số bằng 0 và số mũ của số chia khác 0, thì số chia sẽ bằng 0, & phép chia cho 0 (division by zero) vô nghĩa.

1.6.1 Thứ tự thực hiện các phép tính trong biểu thức không chứa dấu ngoặc

- Khi biểu thức chỉ có các phép tính cộng & trừ (hoặc chỉ có các phép tính nhân & chia), ta thực hiện phép tính theo thứ tự từ trái sang phải.
- Khi biểu thức có các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, ta thực hiện phép tính nhân & chia trước, rồi đến cộng & trừ.
- Khi biểu thức có các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa, ta thực hiện phép tính nâng lên lũy thừa trước, rồi đến phép nhân & chia, cuối cùng đến cộng & trừ.

1.6.2 Thứ tự thực hiện các phép tính trong biểu thức chứa dấu ngoặc

- Khi biểu thức có chứa dấu ngoặc, ta thực hiện các phép tính trong dấu ngoặc trước.
- Nếu biểu thức chứa các dấu ngoặc $(), [], \{ \}$ thì thứ tự thực hiện các phép tính như sau: $() \rightarrow [] \rightarrow \{ \}$.

1.7 Quan Hệ Chia Hết. Tính Chất Chia Hết

1.7.1 Quan hệ chia hết

1.7.1.1 Khái niệm về chia hết.

Định nghĩa 1.3 (Chia hết). Cho $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$. Nếu có số tự nhiên q sao cho $a = bq$ thì ta nói a chia hết cho b . Khi a chia hết cho b , ta nói a là bội của b & b là ước của a .

Nếu số dư trong phép chia a cho b bằng 0 thì a chia hết cho b , ký hiệu $a : b$. Nếu số dư trong phép chia a cho b khác 0 thì a không chia hết cho b , ký hiệu $a \nmid b$.

Với $a \in \mathbb{N}^*$, a là ước của a , a là bội của a , 0 là bội của a , 1 là ước của a .

1.7.1.2 Cách tìm bội & ước của 1 số. Để tìm các bội của $n \in \mathbb{N}^*$, ta có thể lần lượt nhân n với $0, 1, 2, 3, \dots$. Khi đó, các kết quả nhận được đều là bội của n . Ngắn gọn, tập hợp tất cả các bội của $n \in \mathbb{N}^*$ là $\{kn; k \in \mathbb{N}\}$.

Để tìm các ước của $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ (tức $n \geq 2$) ta có thể lần lượt chia n cho các số tự nhiên từ 1 đến n . Khi đó, các phép chia hết cho ta số chia là ước của n . Ngắn gọn, tập hợp tất cả các ước của $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ là $\{a \in \mathbb{N}^*; a \leq n, n : a\}$.

1.7.2 Tính chất chia hết

1.7.2.1 Tính chất chia hết của 1 tổng.

Định lý 1.5. Nếu tất cả các số hạng của tổng đều chia hết cho cùng 1 số thì tổng chia hết cho số đó.

I.e., $(a : m) \wedge (b : m) \Rightarrow (a + b) : m$. Khi đó, $(a + b) : m = a : m + b : m$.

Proof. Cho $a, b, m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$. Nếu $a : m$, tồn tại $a_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $a = ma_1$. Tương tự, nếu $b : m$, tồn tại $b_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $b = mb_1$. Khi đó $a + b = ma_1 + mb_1 = m(a_1 + b_1)$, & hiển nhiên $a_1 + b_1 \in \mathbb{N}$, nên $(a + b) : m$. \square

1.7.2.2 Tính chất chia hết của 1 hiệu.

Định lý 1.6. Nếu số bị trừ & số trừ đều chia hết cho cùng 1 số thì hiệu của chúng chia hết cho số đó.

I.e., với $a, b, m \in \mathbb{N}$, $a \geq b$, nếu $a : m$ & $b : m$ thì $(a - b) : m$. Khi đó, ta có $(a - b) : m = a : m - b : m$.

Proof. Cho $a, b, m \in \mathbb{N}$, $a \geq b$, $m \neq 0$. Nếu $a : m$, tồn tại $a_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $a = ma_1$. Tương tự, nếu $b : m$, tồn tại $b_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $b = mb_1$. Giả thiết $a \geq b$ cho ta $a_1 \geq b_1$. Khi đó $a - b = ma_1 - mb_1 = m(a_1 - b_1)$, & hiển nhiên $a_1 - b_1 \in \mathbb{N}$, nên $(a - b) : m$. \square

1.7.2.3 Tính chất chia hết của 1 tích.

Định lý 1.7. Nếu 1 thừa số của tích chia hết cho 1 số thì tích chia hết cho số đó.

Nếu $a : m$ thì $(ab) : m$ với mọi $b \in \mathbb{N}$.

1.8 Dấu hiệu chia hết cho 2, cho 5

1.8.1 Dấu hiệu chia hết cho 2

Các số chẵn thì chia hết cho 2 còn các số lẻ thì không chia hết cho 2, i.e.,

Định lý 1.8 (Dấu hiệu chia hết cho 2). Các số có chữ số tận cùng là 0, 2, 4, 6, 8 thì chia hết cho 2 & chỉ những số đó mới chia hết cho 2.

I.e., $(a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}, n \in \mathbb{N}, a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \forall i = 1, \dots, n, a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}) \Leftrightarrow a : 2$.

1.8.2 Dấu hiệu chia hết cho 5

Định lý 1.9 (Dấu hiệu chia hết cho 5). Các số có chữ số tận cùng là 0 hoặc 5 thì chia hết cho 5 & chỉ những số đó mới chia hết cho 5.

I.e., $(a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}, n \in \mathbb{N}, a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \forall i = 1, \dots, n, a_0 \in \{0, 5\}) \Leftrightarrow a : 5$.

Corollary 1.1 (Dấu hiệu chia hết cho cả 2 & 5). Các số có chữ số tận cùng là 0 thì chia hết cho cả 2 & 5 & chỉ những số đó mới chia hết cho cả 2 & 5.

1.8.3 Giải thích dấu hiệu chia hết cho 2, cho 5

Tham khảo Thái et al., 2022a, p. 37. Xét số tự nhiên A có chữ số tận cùng là a . Khi đó A có thể viết được dưới dạng: $A = 10B + a$, trong đó $B \in \mathbb{N}$ (trường hợp $B = 0$ thì $A = a$ & là số có 1 chữ số). Do đó, $A - 10B = a$.

- Nếu $a \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$ thì $a : 2$. Do $10B : 2$ & $a : 2$ nên tổng $(10B + a) : 2$. Vậy $A : 2$. Ngược lại, nếu $A : 2$ thì hiệu $(A - 10B) : 2$, tức là $a : 2$ nên $a \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$.
- Nếu $a \in \{0; 5\}$ thì $a : 5$. Do $10B : 5$ & $a : 5$ nên tổng $(10B + a) : 5$. Vậy $A : 5$. Ngược lại, nếu $A : 5$ thì hiệu $(A - 10B) : 5$, tức là $a : 5$ nên $a \in \{0; 5\}$.

1.8.4 Dấu hiệu chia hết cho 4

Tham khảo Thái et al., 2022a, p. 37. Xét số tự nhiên A có 3 chữ số trở lên⁷. Gọi C là số tạo bởi 2 chữ số tận cùng của A . Khi đó A có thể được viết dưới dạng: $A = 100B + C$, trong đó $B \in \mathbb{N}$ (trường hợp $B = 0$ thì $A = C$ & là số có 2 chữ số).

Do đó, $A - 100B = C$. Nếu $C : 4$ thì tổng $(100B + C) : 4$, tức là $A : 4$. Ngược lại, nếu $A : 4$ thì hiệu $(A - 100B) : 4$, tức là $C : 4$. Vậy:

Định lý 1.10. Các số có 2 chữ số tận cùng tạo thành 1 số chia hết cho 4 thì chia hết cho 4 & chỉ những số đó mới chia hết cho 4.

I.e., $(a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}, n \in \mathbb{N}, a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \forall i = 1, \dots, n, \overline{a_1 a_0} : 4) \Leftrightarrow a : 4$. Chú ý công thức này bao gồm cả những số có 1 hoặc 2 chữ số & chia hết cho 4.

1.9 Dấu Hiệu Chia Hết Cho 3, Cho 9

1.9.1 Dấu hiệu chia hết cho 3

Định lý 1.11 (Dấu hiệu chia hết cho 3). Các số có tổng các chữ số chia hết cho 3 thì chia hết cho 3 & chỉ những số đó mới chia hết cho 3.

⁷Giả thiết này sẽ làm thiếu những số có 1 hoặc 2 chữ số & chia hết cho 4.

Proof. Xét $a \in \mathbb{N}$ bất kỳ với biểu diễn các chữ số của a là $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $\forall i = 0, \dots, n$. Sử dụng công thức (1.3), chú ý $10^i \equiv 1 \pmod{3}$, $\forall i = 0, \dots, n$,

$$a = \sum_{i=0}^n a_i 10^i \equiv \left(\sum_{i=0}^n a_i \right) \pmod{3}.$$

Vì vậy, $a \vdots 3$ khi & chỉ khi tổng các chữ số của a , i.e., $\sum_{i=0}^n a_i$, chia hết cho 3. □

1.9.2 Dấu hiệu chia hết cho 9

Hoàn toàn tương tự dấu hiệu chia hết cho 3:

Định lý 1.12 (Dấu hiệu chia hết cho 9). *Các số có tổng các chữ số chia hết cho 9 thì chia hết cho 9 & chỉ những số đó mới chia hết cho 9.*

Proof. Xét $a \in \mathbb{N}$ bất kỳ với biểu diễn các chữ số của a là $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $\forall i = 0, \dots, n$. Sử dụng công thức (1.3), chú ý $10^i \equiv 1 \pmod{9}$, $\forall i = 0, \dots, n$,

$$a = \sum_{i=0}^n a_i 10^i \equiv \left(\sum_{i=0}^n a_i \right) \pmod{9}.$$

Vì vậy, $a \vdots 9$ khi & chỉ khi tổng các chữ số của a , i.e., $\sum_{i=0}^n a_i$, chia hết cho 9. □

1.9.3 Giải thích dấu hiệu chia hết cho 3, cho 9

Tham khảo Thái et al., 2022a, p. 40. Xét số tự nhiên \overline{abc} , $a \neq 0$ có 3 chữ số, ta viết được $\overline{abc} = 100a + 10b + c = (99a + 9b) + (a + b + c) = 9(11a + b) + (a + b + c)$. Tổng quát, ta có mọi số tự nhiên A đều viết được dưới dạng tổng các chữ số của nó cộng với 1 số chia hết cho 9, i.e., $A = 9M + S$, trong đó S là tổng các chữ số của số A .

- Nếu $A \in \mathbb{N}$ có tổng các chữ số chia hết cho 3 thì S chia hết cho 3. Do $9M \vdots 3$ & $S \vdots 3$ nên tổng $(9M + S) \vdots 3$. Vậy $A \vdots 3$. Ngược lại, nếu $A \vdots 3$ thì hiệu $(A - 9M) \vdots 3$, i.e., $S \vdots 3$. Vậy tổng các chữ số của A chia hết cho 3.

- Nếu $A \in \mathbb{N}$ có tổng các chữ số chia hết cho 9 thì S chia hết cho 9. Do $9M \vdots 9$ & $S \vdots 9$ nên tổng $(9M + S) \vdots 9$. Vậy $A \vdots 9$. Ngược lại, nếu $A \vdots 9$ thì hiệu $(A - 9M) \vdots 9$, i.e., $S \vdots 9$. Vậy tổng các chữ số của A chia hết cho 9.

“Áp dụng dấu hiệu chia hết cho 9, ta có thể kiểm tra (sơ bộ) kết quả phép nhân 2 số có nhiều chữ số là sai.” – Thái et al., 2022a, p. 40

1.10 Số Nguyên Tố. Hợp Số

Định nghĩa 1.4 (Số nguyên tố, hợp số). Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1, chỉ có 2 ước là 1 & chính nó. Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1, có nhiều hơn 2 ước.

Số 0 (có vô hạn ước) & số 1 (có duy nhất 1 ước là chính nó) không là số nguyên tố & cũng không là hợp số. Để chứng tỏ $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$ là hợp số, ta chỉ cần tìm 1 ước của a khác 1 & khác a (khi đó, a có ít nhất 3 ước, theo định nghĩa, suy ra a là hợp số).

Lưu ý 1.8. Số nguyên tố (prime) là 1 chủ đề cực khó, với nhiều bài toán mở, giả thuyết chưa được chứng minh đúng hay sai, trong Lý thuyết Số học/Number Theory.

Định nghĩa 1.5. Nếu số nguyên tố p là ước của số tự nhiên a thì p được gọi là ước nguyên tố của a .

1.10.1 Sàng Eratosthenes

“Số nguyên tố nhỏ nhất là số 2 & đó là số nguyên tố chẵn duy nhất.” Bằng sàng Eratosthenes, ta có thể lọc ra tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn 1 số tự nhiên n cho trước. “Eratosthenes là nhà toán học, địa lý học, thiên văn học người Hy Lạp. Ông là người đã nghĩ ra hệ thống kinh độ, vĩ độ & cũng là người đầu tiên tính được kích thước của Trái Đất.” – Thái et al., 2022a, p. 43

1.11 Phân Tích 1 Số Ra Thừa Số Nguyên Tố

1.11.1 Cách tìm 1 ước nguyên tố của 1 số

Để tìm 1 ước nguyên tố của số $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$, ta có thể làm như sau: Lần lượt thực hiện phép chia a cho các số nguyên tố theo thứ tự tăng dần 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... Khi đó, phép chia hết đầu tiên cho ta số chia là 1 ước nguyên tố của a .

1.11.2 Phân tích 1 số ra thừa số nguyên tố

Định nghĩa 1.6 (Phân tích 1 số ra thừa số nguyên tố/Factorization into prime factors). Phân tích 1 số tự nhiên lớn hơn 1 ra thừa số nguyên tố là viết số đó dưới dạng 1 tích các thừa số nguyên tố.

“Ta nên chia mỗi số cho ước nguyên tố nhỏ nhất của nó. Cứ tiếp tục chia như thế cho đến khi được thương là 1.” – Thái et al., 2022a, p. 45

“Thông thường, khi phân tích 1 số tự nhiên ra thừa số nguyên tố, các ước nguyên tố được viết theo thứ tự tăng dần. Ngoài cách làm như trên, ta cũng có thể phân tích 1 số ra thừa số nguyên tố bằng cách viết số đó thành tích của 2 thừa số 1 cách linh hoạt.” “Dù phân tích 1 số ra thừa số nguyên tố bằng cách nào thì cuối cùng ta cũng được cùng 1 kết quả.”⁸ – Thái et al., 2022a, p. 46

1.12 Ước Chung & Ước Chung Lớn Nhất

1.12.1 Ước chung & ước chung lớn nhất

Định nghĩa 1.7 (Ước chung & ước chung lớn nhất). Số tự nhiên n được gọi là ước chung của 2 số tự nhiên a & b nếu n vừa là ước của a vừa là ước của b . Số lớn nhất trong các ước chung của a & b được gọi là ước chung lớn nhất của a & b .

Quy ước. Viết tắt ước chung là ƯC & ước chung lớn nhất là ƯCLN. Ta ký hiệu: Tập hợp các ước chung của a & b là $ƯC(a, b)$; ước chung lớn nhất của a & b là $ƯCLN(a, b)$.

Ký hiệu chuẩn quốc tế của ước chung lớn nhất của 2 số $a, b \in \mathbb{N}$ là $\gcd(a, b)$, viết tắt của *greatest common divisor*.

Định nghĩa 1.8. Số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$ được gọi là ước chung của n số a_1, \dots, a_n nếu n là ước của tất cả n số đó.

Định lý 1.13. Ước chung của 2 số là ước của ước chung lớn nhất của chúng.

1.12.2 Tìm ước chung lớn nhất bằng cách phân tích các số ra thừa số nguyên tố

Tìm ước chung lớn nhất bằng cách phân tích các số ra thừa số nguyên tố.

1. Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố.
2. Chọn ra các thừa số nguyên tố chung.
3. Với mỗi thừa số nguyên tố chung, ta chọn lũy thừa với số mũ nhỏ nhất.
4. Lấy tích của các lũy thừa đã chọn, ta nhận được ước chung lớn nhất cần tìm.

Nếu 2 số đã cho không có thừa số nguyên tố chung thì ƯCLN của chúng bằng 1. Nếu $a : b$ thì $ƯCLN(a, b) = b$.

1.12.3 2 số nguyên tố cùng nhau

Định nghĩa 1.9 (2 số nguyên tố cùng nhau). 2 số nguyên tố cùng nhau là 2 số có ước chung lớn nhất bằng 1.

Định nghĩa 1.10 (Phân số tối giản). Phân số tối giản là phân số có tử & mẫu là 2 số nguyên tố cùng nhau.

⁸Điều này có nghĩa là dạng phân tích ra thừa số nguyên tố của 1 số tự nhiên là duy nhất, & điều này ứng với Định lý Phân tích số tự nhiên ra thừa số nguyên tố của Lý thuyết Số học. [insert later] Xem, e.g., sách Số Học của GS. Hà Huy Khoái.

1.12.4 Tìm ước chung lớn nhất bằng thuật toán Euclid

Tham khảo Thái et al., 2022a, p. 52: Để tìm ước chung lớn nhất bằng *thuật toán Euclid*, ta làm như sau:

1. Chia số lớn cho số nhỏ.
2. Nếu phép chia còn dư thì ta lấy số chia đem chia cho số dư. Ta cứ làm như vậy cho đến khi nhận được số dư bằng 0 thì dừng lại.
3. Số chia cuối cùng là ước chung lớn nhất phải tìm.

Lưu ý 1.9. Người ta thường dùng *thuật toán Euclid* để tìm ƯCLN của cặp số lớn.

1.13 Bội Chung & Bội Chung Nhỏ Nhất

1.13.1 Bội chung & bội chung nhỏ nhất

Định nghĩa 1.11 (Bội chung & bội chung nhỏ nhất của 2 số). *Số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$ được gọi là bội chung của 2 số a & b nếu n vừa là bội của a vừa là bội của b . Số nhỏ nhất khác 0 trong các bội chung của a & b được gọi là bội chung nhỏ nhất của a & b .*

Quy ước. Viết tắt bội chung là BC & bội chung nhỏ nhất là BCNN. Ta ký hiệu: Tập hợp các bội chung của a & b là $BC(a, b)$; bội chung nhỏ nhất của a & b là $BCNN(a, b)$.

Ký hiệu chuẩn quốc tế của bội chung nhỏ nhất của 2 số $a, b \in \mathbb{N}^*$ là $\text{lcm}(a, b)$, trong đó lcm là viết tắt của *least common multiple/lowest common multiple*.

Định nghĩa 1.12 (Bội chung & bội chung nhỏ nhất của nhiều số). *Số tự nhiên n được gọi là bội chung của N số $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, $N \geq 3$, nếu n là bội của tất cả N số a_i , $i = 1, \dots, N$. Số nhỏ nhất khác 0 trong các bội chung của N số a_i , $i = 1, \dots, N$, được gọi là bội chung nhỏ nhất của N số a_i , $i = 1, \dots, N$.*

Ký hiệu. Tập hợp các bội chung của a_i , $i = 1, \dots, N$, là $BC(a_1, \dots, a_N)$; bội chung nhỏ nhất của N số a_i , $i = 1, \dots, N$, là $BCNN(a_1, \dots, a_N)$.

Định lý 1.14. *Bội chung của nhiều số là bội của bội chung nhỏ nhất của chúng.*

“Để tìm bội chung của nhiều số, ta có thể lấy bội chung nhỏ nhất của chúng lần lượt nhân với $0, 1, 2, \dots$ ” – Thái et al., 2022a, p. 55

1.13.2 Tìm bội chung nhỏ nhất bằng cách phân tích các số ra thừa số nguyên tố

Tìm bội chung nhỏ nhất bằng cách phân tích các số ra thừa số nguyên tố.

1. Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố.
2. Chọn ra các thừa số nguyên tố chung & các thừa số nguyên tố riêng.
3. Với mỗi thừa số nguyên tố chung & riêng, ta chọn lũy thừa với số mũ lớn nhất.
4. Lấy tích của các lũy thừa đã chọn, ta nhận được bội chung nhỏ nhất cần tìm.

1.13.3 Ứng dụng bội chung nhỏ nhất vào cộng, trừ các phân số không cùng mẫu

Để tính tổng 2 phân số $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$, $a, c \in \mathbb{N}$, $b, d \in \mathbb{N}^*$, ta có thể làm như sau:

1. Chọn mẫu chung là BCNN của các mẫu.
2. Tìm thừa số phụ của mỗi mẫu (bằng cách chia mẫu chung cho từng mẫu).
3. Sau khi nhân tử & mẫu của mỗi phân số với thừa số phụ tương ứng, ta cộng 2 phân số có cùng mẫu.

Hiển nhiên:

Định lý 1.15. *Bội chung nhỏ nhất của 2 số nguyên tố cùng nhau bằng tích của 2 số đó.*

1.13.4 Lịch Can Chi

“1 số nước phương Đông, trong đó có Việt Nam, gọi tên năm âm lịch bằng cách ghép tên của 1 trong 10 can (theo thứ tự là *Giáp, Ất, Bính, Đinh, Mậu, Kỷ, Canh, Tân, Nhâm, Quý*) với tên của 1 trong 12 chi (theo thứ tự là *Tý, Sửu, Dần, Mão, Thìn, Tỵ, Ngọ, Mùi, Thân, Dậu, Tuất, Hợi*). Đầu tiên, *Giáp* được ghép với *Tý* thành năm *Giáp Tý*. Cứ 10 năm, *Giáp* được lặp lại. Cứ 12 năm, *Tý* được lặp lại.” – Thái et al., 2022a, p. 58.

Vì $BCNN(10, 12) = 60$, cứ sau 60 năm thì năm có tên tương ứng được lặp lại.

2 Số Nguyên

Nội dung. Tập hợp các số nguyên \mathbb{Z} ; các phép tính trong tập hợp số nguyên; quan hệ chia hết.

2.1 Số Nguyên Âm

“*Số nguyên âm* được nhận biết bằng dấu “–” ở trước số tự nhiên khác 0.” – Thái et al., 2022a, p. 61

Ứng dụng của số nguyên âm. “Số nguyên âm được sử dụng trong nhiều tình huống thực tiễn cuộc sống:

- Số nguyên âm được dùng để chỉ nhiệt độ dưới 0° .
- Số nguyên âm được dùng để chỉ độ cao dưới mực nước biển.
- Số nguyên âm được dùng để chỉ số tiền nợ, cũng như để chỉ số tiền lỗ trong kinh doanh.
- Số nguyên âm được dùng để chỉ thời gian trước Công nguyên.” – Thái et al., 2022a, p. 62

2.1.1 Độ sâu lớn nhất của các đại dương dưới mực nước biển

- “Rãnh Mariana, thuộc Thái Bình Dương, sâu 10 925 m.
- Rãnh Puerto Rico, thuộc Đại Tây Dương, sâu 8408 m.
- Rãnh Java, thuộc Ấn Độ Dương, sâu 7290 m.
- Molloy Hole, nơi sâu nhất của Bắc Băng Dương, sâu 5669 m.” (so với mực nước biển) – Thái et al., 2022a, p. 63

2.1.2 Hà Lan – Đất nước của những vùng đất thấp hơn mực nước biển

“Hà Lan được biết đến là đất nước với khoảng 26% diện tích lãnh thổ thấp hơn mực nước biển. Bản thân tên gọi tiếng Anh của quốc gia này “The Netherlands” cũng có nghĩa là “Những vùng đất thấp”. Để bảo vệ đất nước trước sự tấn công của nước biển, Hà Lan đã xây dựng hệ thống các công trình đê biển, kè biển, của cống & cửa chắn lụt. Tổng cộng có 65 đê chắn sóng đúc bê tông khổng lồ cùng 62 cửa van bằng thép di động treo giữa các đê chắn với tổng chiều dài 6.8 km. Cửa van lớn nhất nằm ở phần sâu nhất của châu thổ, nặng tới 480 tấn, phải mất cả tiếng đồng hồ mới mở hay đóng được. Cùng với đường hầm qua eo biển Manche, kênh đào Panama, ... hệ thống đê biển ở Hà Lan được các nhà kiến trúc trên thế giới bầu chọn là 1 trong số 10 công trình vĩ đại nhất trên hành tinh.” – Thái et al., 2022a, p. 63

2.2 Tập Hợp Các Số Nguyên \mathbb{Z}

2.2.1 Tập hợp \mathbb{Z} các số nguyên

Định nghĩa 2.1 (Số nguyên dương, tập hợp các số nguyên). *Số tự nhiên khác 0 còn được gọi là số nguyên dương. Các số nguyên âm, số 0, & các số nguyên dương tạo thành tập hợp các số nguyên. Tập hợp các số nguyên được ký hiệu là \mathbb{Z} .*

Lưu ý 2.1. *Số 0 không phải là số nguyên âm, cũng không phải số nguyên dương. Các số nguyên dương 1, 2, 3, ... đều mang dấu “+” nên còn được viết là +1, +2, +3, ...*

2.2.2 Biểu diễn số nguyên trên trục số

Tham khảo Thái et al., 2022a, pp. 65–66. Ta có thể biểu diễn số nguyên trên trục số. Có 2 loại trục số như sau:

1. *Trục số nằm ngang có:*

- Chiều dương hướng từ trái sang phải (được đánh dấu bằng mũi tên);
- Điểm gốc của trục số là điểm 0 (biểu diễn số 0);

- Đơn vị đo độ dài trên trục số là độ dài đoạn thẳng nối điểm 0 với điểm 1 (biểu diễn số 1 & nằm bên phải điểm 0).

Trên trục số nằm ngang, điểm biểu diễn số nguyên âm nằm bên trái điểm 0, điểm biểu diễn số nguyên dương nằm bên phải điểm 0.

2. *Trục số thẳng đứng có:*

- Chiều dương hướng từ dưới lên trên (được đánh dấu bằng mũi tên);
- Điểm gốc của trục số là điểm 0 (biểu diễn số 0);
- Đơn vị đo độ dài trên trục số là độ dài đoạn thẳng nối điểm 0 với điểm 1 (biểu diễn số 1 & nằm phía trên điểm 0).

Trên trục số thẳng đứng, điểm biểu diễn số nguyên âm nằm phía dưới điểm 0, điểm biểu diễn số nguyên dương nằm phía trên điểm 0.

Quy ước. Khi nói “trục số” mà không nói gì thêm, ta hiểu là nói về trục số nằm ngang.

2.2.3 Số đối của 1 số nguyên

Định nghĩa 2.2 (Số đối của 1 số nguyên). *Trên trục số, 2 số nguyên (phân biệt) có điểm biểu diễn nằm về 2 phía của gốc 0 & cách đều gốc 0 được gọi là 2 số đối nhau. Số đối của 0 là 0.*

2.2.4 So sánh các số nguyên

2.2.4.1 So sánh 2 số nguyên.

Trên trục số nằm ngang, nếu điểm a nằm bên trái điểm b thì số nguyên a nhỏ hơn số nguyên b . Trên trục số thẳng đứng, nếu điểm a nằm phía dưới điểm b thì số nguyên a nhỏ hơn số nguyên b . Nếu a nhỏ hơn b thì ta viết là $a < b$ hoặc $b > a$.

“Số nguyên dương luôn lớn hơn 0. Số nguyên âm luôn nhỏ hơn 0.” “Nếu $a < b$ & $b < c$ thì $a < c$.” (tính chất bắc cầu) – Thái et al., 2022a, p. 67

2.2.4.2 Cách so sánh 2 số nguyên.

- *So sánh 2 số nguyên khác dấu.* “Số nguyên âm luôn nhỏ hơn số nguyên dương.” – Thái et al., 2022a, p. 68
- *So sánh 2 số nguyên cùng dấu.* “Để so sánh 2 số nguyên âm, ta làm như sau:
 1. Bỏ dấu “–” trước cả 2 số âm.
 2. Trong 2 số nguyên dương nhận được, số nào nhỏ hơn thì số nguyên âm ban đầu (tương ứng) sẽ lớn hơn.” – Thái et al., 2022a, p. 69

2.3 Phép Cộng Các Số Nguyên

2.3.1 Phép cộng 2 số nguyên cùng dấu

2.3.1.1 Phép cộng 2 số nguyên dương. “Cộng 2 số nguyên dương chính là cộng 2 số tự nhiên khác 0.” – Thái et al., 2022a, p. 70. Xem lại phần *Phép Cộng, Trừ Các Số Tự Nhiên*.

2.3.1.2 Phép cộng 2 số nguyên âm. “Để cộng 2 số nguyên âm, ta làm như sau:

1. Bỏ dấu “–” trước mỗi số.
2. Tính tổng của 2 số nguyên dương nhận được ở Bước 1.
3. Thêm dấu “–” trước kết quả nhận được ở Bước 2, ta có tổng cần tìm.” – Thái et al., 2022a, p. 71

Hiển nhiên: “Tổng của 2 số nguyên dương là số nguyên dương. Tổng của 2 số nguyên âm là số nguyên âm.” – Thái et al., 2022a, p. 71

2.3.2 Phép cộng 2 số nguyên khác dấu

“Để cộng 2 số nguyên khác dấu, ta làm như sau:

1. Bỏ dấu “−” trước số nguyên âm, giữ nguyên số còn lại.
2. Trong 2 số nguyên dương nhận được ở Bước 1, ta lấy số lớn hơn trừ đi số nhỏ hơn.
3. Cho hiệu vừa nhận được dấu ban đầu của số lớn hơn ở Bước 2, ta có tổng cần tìm.

Chú ý. 2 số nguyên đối nhau có tổng bằng 0, i.e., $a + (-a) = 0, \forall a \in \mathbb{Z}$.

2.3.3 Tính chất của phép cộng các số nguyên

Định lý 2.1 (Tính chất của phép cộng các số nguyên). *Phép cộng các số nguyên có các tính chất sau:*

- *Giao hoán:* $a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{Z}$;
- *Kết hợp:* $(a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$;
- *Cộng với số 0:* $a + 0 = 0 + a = a$;
- *Cộng với số đối:* $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

2.4 Phép Trừ Số Nguyên. Quy Tắc Dấu Ngoặc

2.4.1 Phép trừ số nguyên

“Muốn trừ số nguyên a cho số nguyên b , ta cộng a với số đối của b : $a - b = a + (-b)$.” “Phép trừ trong \mathbb{N} không phải bao giờ cũng thực hiện được⁹, còn phép trừ trong \mathbb{Z} luôn thực hiện được.¹⁰” – Thái et al., 2022a, p. 76

2.4.2 Quy tắc dấu ngoặc

Khi bỏ dấu ngoặc có dấu “+” đằng trước thì giữ nguyên dấu của các số hạng trong ngoặc.

$$a + (b + c) = a + b + c, \quad a + (b - c) = a + b - c, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Khi bỏ dấu ngoặc có dấu “−” đằng trước, ta phải đổi dấu của các số hạng trong ngoặc: dấu “+” thành dấu “−” & dấu “−” thành dấu “+”.

$$a - (b + c) = a - b - c, \quad a - (b - c) = a - b + c, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

2.5 Phép Nhân Các Số Nguyên

2.5.1 Phép nhân 2 số nguyên khác dấu

“Để nhân 2 số nguyên khác dấu, ta làm như sau:

1. Bỏ dấu “−” trước số nguyên âm, giữ nguyên số còn lại.
2. Tính tích của 2 số nguyên dương nhận được ở Bước 1.
3. Thêm dấu “−” trước kết quả nhận được ở Bước 2, ta có tích cần tìm.

Tích của 2 số nguyên khác dấu là số nguyên âm.” – Thái et al., 2022a, p. 80

2.5.2 Phép nhân 2 số nguyên cùng dấu

2.5.2.1 Phép nhân 2 số nguyên dương. “Nhân 2 số nguyên dương chính là nhân 2 số tự nhiên khác 0.” – Thái et al., 2022a, p. 81

⁹NQBH: Vì nếu hiệu của 2 số tự nhiên là số nguyên âm, thì hiệu đó không còn thuộc \mathbb{N} nữa, i.e., $(a, b \in \mathbb{N}, a < b) \Rightarrow a - b \notin \mathbb{N}$.

¹⁰I.e., $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a - b \in \mathbb{Z}$.

2.5.2.2 Phép nhân 2 số nguyên âm. “Để nhân 2 số nguyên âm, ta làm như sau:

1. Bỏ dấu “−” trước mỗi số.
2. Tính tích của 2 số nguyên dương nhận được ở Bước 1, ta có tích cần tìm.

Tích của 2 số nguyên cùng dấu là số nguyên dương.” – Thái et al., 2022a, p. 81

2.5.3 Tính chất của phép nhân các số nguyên

“Giống như phép nhân các số tự nhiên, phép nhân các số nguyên cũng có các tính chất: giao hoán, kết hợp, nhân với số 1, phân phối của phép nhân đối với phép cộng, phép trừ.” – Thái et al., 2022a, p. 82

Sự thừa hưởng tính chất này xuất phát từ sự kiện số nguyên chỉ thêm dấu \pm vào số tự nhiên, nên các tính chất được mở rộng từ \mathbb{N} ra/lên \mathbb{Z} theo 1 cách tự nhiên & dễ dàng.

Hiển nhiên, $a0 = 0a = 0$. $(ab = 0) \Rightarrow ((a = 0) \vee (b = 0))$.

2.6 Phép Chia Hết 2 Số Nguyên. Quan Hệ Chia Hết Trong Tập Hợp Số Nguyên

2.6.1 Phép chia hết 2 số nguyên khác dấu

“Để chia 2 số nguyên khác dấu, ta làm như sau:

1. Bỏ dấu “−” trước số nguyên âm, giữ nguyên số còn lại.
2. Tính thương của 2 số nguyên dương nhận được ở Bước 1.
3. Thêm dấu “−” trước kết quả nhận được ở Bước 2, ta có thương cần tìm.

2.6.2 Phép chia hết 2 số nguyên cùng dấu

2.6.2.1 Phép chia hết 2 số nguyên dương. Xem lại phần *Phép Nhân, Phép Chia Các Số Tự Nhiên*.

2.6.2.2 Phép chia hết 2 số nguyên âm. “Để chia 2 số nguyên âm, ta làm như sau:

1. Bỏ dấu “−” trước mỗi số.
2. Tính thương của 2 số nguyên dương nhận được ở Bước 1, ta có thương cần tìm.” – Thái et al., 2022a, p. 85

Lưu ý 2.2. • *Cách nhận biết dấu của thương:* $(+) : (+) \rightarrow (+)$, $(-) : (-) \rightarrow (+)$, $(+) : (-) \rightarrow (-)$, $(-) : (+) \rightarrow (-)$.

- *Thứ tự thực hiện các phép tính với số nguyên (trong biểu thức không chứa dấu ngoặc hoặc có chứa dấu ngoặc) cũng giống như thứ tự thực hiện các phép tính với các số tự nhiên.*

2.6.3 Quan hệ chia hết

Định nghĩa 2.3 (Quan hệ chia hết, bội, ước). Cho $a, b \in \mathbb{Z}$, với $b \neq 0$. Nếu có số nguyên q sao cho $a = bq$ thì ta nói: a chia hết cho b , b chia hết a , a là bội của b , b là ước của a .

Hiển nhiên: “Nếu a là bội của b thì $-a$ cũng là bội của b . Nếu b là ước của a thì $-b$ cũng là ước của a .” – Thái et al., 2022a, p. 86

Hoạt Động Thực Hành & Trải Nghiệm: Đầu Tư Kinh Doanh

Tham khảo Thái et al., 2022a, pp. 89–92.

2.7 Một Số Kiến Thức về Tài Chính, Kinh Doanh

2.7.1 Tài chính

Định nghĩa 2.4 (Tài chính). Tài chính là tổng số tiền có được của 1 cá nhân, 1 tổ chức, 1 doanh nghiệp, hoặc 1 quốc gia. Tài chính của 1 cá nhân được gọi là tài chính cá nhân.

2.7.2 Kinh doanh

Định nghĩa 2.5 (Kinh doanh). Kinh doanh bao gồm những hoạt động mua & bán. Các yếu tố cơ bản trong kinh doanh là:

- Vốn: số tiền ban đầu bỏ ra;
- Giá cả của mỗi mặt hàng: mua vào với giá bao nhiêu & bán ra với giá bao nhiêu;
- Chi phí vận hành: số tiền bỏ ra để thực hiện việc kinh doanh;
- Doanh thu: tổng số tiền thu được sau khi kết thúc hoạt động kinh doanh;
- Lợi nhuận: doanh thu trừ đi vốn & chi phí vận hành;
- Lãi: nếu lợi nhuận của kinh doanh là dương;
- Lỗ: nếu lợi nhuận của kinh doanh là âm.

2.7.3 Các cách để tăng lợi nhuận

- Tăng doanh thu. Có 2 cách để tăng doanh thu:
 - Nâng giá mặt hàng;
 - Thu hút người mua để bán được nhiều hàng.

Tuy nhiên, khi nâng giá mặt hàng thì có thể số người mua giảm đi nên số sản phẩm bán được ít đi.

- Giảm chi phí vận hành & vốn.

2.8 Kiến Thức Toán Học

Công thức tính lợi nhuận. Lợi nhuận = $A - (B + C)$. Trong đó A là doanh thu, B là vốn, C là chi phí vận hành.

2.9 Kỹ Năng Tìm Kiếm Thông Tin & Trình Bày Sản Phẩm

- Tìm hiểu thêm 1 số thông tin về tài chính, kinh doanh qua cha mẹ, người thân trong gia đình & qua các phương tiện thông tin truyền thông.
- Tìm hiểu cách thức trình bày & giới thiệu sản phẩm.

3 Hình Học Trực Quan

Nội dung. Tam giác đều, hình vuông, lục giác đều; hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành, hình thang cân; hình có trục đối xứng, hình có tâm đối xứng, đối xứng trong thực tiễn.

3.1 Tam Giác Đều. Hình Vuông. Lục Giác Đều

3.1.1 Tam giác đều

3.1.1.1 Nhận biết tam giác đều.

Định nghĩa 3.1 (Tam giác đều). Tam giác đều là tam giác có 3 cạnh bằng nhau.

Tam giác đều ABC có 3 cạnh bằng nhau $AB = BC = CA$ & 3 góc ở 3 đỉnh A, B, C bằng nhau.

Lưu ý 3.1. Trong hình học nói chung, tam giác nói riêng, các cạnh bằng nhau (hay các góc bằng nhau) thường được chỉ rõ bằng cùng 1 ký hiệu.

3.1.1.2 Vẽ tam giác đều. “Vẽ tam giác đều bằng thước & compa khi biết độ dài cạnh bằng a cm:

- Dùng thước vẽ đoạn thẳng $AB = a$ cm.
- Lấy A làm tâm, dùng compa vẽ 1 phần đường tròn có bán kính AB .
- Lấy B làm tâm, dùng compa vẽ 1 phần đường tròn có bán kính BA ; gọi C là giao điểm của 2 phần đường tròn vừa vẽ.
- Dùng thước vẽ các đoạn thẳng AC & BC .” – Thái et al., 2022a, p. 94

3.1.2 Hình vuông

3.1.2.1 Nhận biết hình vuông. Hình vuông $ABCD$ có: 4 cạnh bằng nhau: $AB = BC = CD = DA$; 2 cạnh đối AB & CD ; AD & BC song song với nhau; 2 đường chéo bằng nhau: $AC = BD$; 4 góc ở các đỉnh A, B, C, D là góc vuông.

3.1.2.2 Vẽ hình vuông. “Vẽ bằng eke hình vuông $ABCD$, biết độ dài cạnh bằng a cm:

1. Vẽ theo 1 cạnh góc vuông của eke đoạn thẳng AB có độ dài bằng 7 cm.
2. Đặt đỉnh góc vuông của eke trùng với điểm A & 1 cạnh eke nằm trên AB , vẽ theo cạnh kia của eke đoạn thẳng AD có độ dài bằng a cm.
3. Xoay eke rồi thực hiện tương tự như ở Bước 2 để được cạnh BC có độ dài bằng a cm.
4. Vẽ đoạn thẳng CD .” – Thái et al., 2022a, p. 95

3.1.2.3 Chu vi & diện tích của hình vuông. Chu vi của hình vuông có độ dài cạnh bằng a là $C = 4a$. Diện tích của hình vuông có độ dài cạnh bằng a là $S = aa = a^2$.

3.1.3 Lục giác đều

Ghép 6 miếng phẳng hình tam giác đều có cạnh bằng nhau để tạo thành hình lục giác thì hình lục giác đó được gọi là *hình lục giác đều*. Với hình lục giác đều $ABCDEF$ với tâm O : Các gam giác $OAB, OBC, OCD, ODE, OEF, OFA$ là tam giác đều nên các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA có độ dài bằng nhau. Các đường chéo chính AD, BE, CF cắt nhau tại điểm O . Các đường chéo chính AD, BE, CF có độ dài gấp đôi độ dài cạnh tam giác đều nên chúng bằng nhau. Mỗi góc ở đỉnh A, B, C, D, E, F của lục giác đều $ABCDEF$ đều gấp đôi góc của 1 tam giác đều nên chúng bằng nhau. Viết dưới dạng ký hiệu: Lục giác đều $ABCDEF$ có: 6 cạnh bằng nhau: $AB = BC = CD = DE = EF = FA$; 3 đường chéo chính cắt nhau tại điểm O ; 3 đường chéo chính bằng nhau: $AD = BE = CF$; 6 góc ở các đỉnh A, B, C, D, E, F bằng nhau.

3.2 Hình Chữ Nhật. Hình Thoi

3.2.1 Hình chữ nhật

3.2.1.1 Nhận biết hình chữ nhật. Hình chữ nhật $ABCD$ có: 2 cạnh đối nhau bằng nhau: $AB = CD, AD = BC$; 2 cạnh đối AB & CD ; AD & BC song song với nhau; 2 đường chéo bằng nhau: $AC = BD$; 4 góc ở các đỉnh A, B, C, D đều là góc vuông.

3.2.1.2 Vẽ hình chữ nhật. Vẽ hình chữ nhật bằng eke khi biết độ dài 2 cạnh là a cm & b cm:

1. Vẽ theo 1 cạnh góc vuông của eke đoạn thẳng AB có độ dài bằng a cm.
2. Đặt đỉnh góc vuông của eke trùng với điểm A & 1 cạnh eke nằm trên AB , vẽ theo cạnh kia của eke đoạn thẳng AD có độ dài bằng b cm.
3. Xoay eke rồi thực hiện tương tự như ở Bước 2 để được cạnh b cm.
4. Vẽ đoạn thẳng CD .

3.2.1.3 Chu vi & diện tích của hình chữ nhật. Chu vi của hình chữ nhật có độ dài 2 cạnh là a & b là $C = 2(a + b)$. Diện tích của hình chữ nhật có độ dài 2 cạnh là a & b là $S = ab$.

3.2.2 Hình thoi

3.2.2.1 Nhận biết hình thoi. Hình thoi $ABCD$ có: 4 cạnh bằng nhau: $AB = BC = CD = DA$; 2 cạnh đối AB & CD , AD & BC song song với nhau; 2 đường chéo AC & BD vuông góc với nhau.

3.2.2.2 Vẽ hình thoi. “Vẽ hình thoi bằng thước & compa khi biết độ dài 1 cạnh bằng a cm & độ dài 1 đường chéo bằng b cm:

1. Dùng thước vẽ đoạn thẳng $AC = b$ cm.
2. Dùng compa vẽ 1 phần đường tròn tâm A bán kính a cm.
3. Dùng compa vẽ 1 phần đường tròn tâm C bán kính a cm; phần đường tròn này cắt phần đường tròn tâm A vẽ ở Bước 2 tại các điểm B & D .
4. Dùng thước vẽ các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA .” – Thái et al., 2022a, p. 100

3.2.2.3 Chu vi & diện tích của hình thoi. Với hình thoi có độ dài cạnh là a & độ dài 2 đường chéo là m & n , ta có: Chu vi của hình thoi là $C = 4a$; diện tích của hình thoi là $S = \frac{1}{2}mn$.

3.3 Hình Bình Hành

3.3.1 Nhận biết hình bình hành

“Hình bình hành $ABCD$ có: 2 cạnh đối AB & CD , BC & AD song song với nhau; 2 cạnh đối bằng nhau: $AB = CD$, $BC = AD$; 2 góc ở các đỉnh A & C bằng nhau, 2 góc ở các đỉnh B & D bằng nhau.” – Thái et al., 2022a, p. 102

3.3.2 Vẽ hình bình hành

“Ta có thể vẽ hình bình hành $ABCD$ bằng thước & compa như sau:

1. Lấy B làm tâm, dùng compa vẽ 1 phần đường tròn có bán kính AD . Lấy D làm tâm, dùng compa vẽ 1 phần đường tròn có bán kính AB . Gọi C là giao điểm của 2 phần đường tròn này.
2. Dùng thước vẽ các đoạn thẳng BC & CD .” – Thái et al., 2022a, p. 103

3.3.3 Chu vi & diện tích của hình bình hành

“Với hình bình hành có độ dài 2 cạnh là a & b , độ dài đường cao ứng với cạnh a là h , ta có: Chu vi của hình bình hành là $C = 2(a + b)$; diện tích của hình bình hành là $S = ah$.” – Thái et al., 2022a, p. 103

3.4 Hình Thang Cân

3.4.1 Nhận biết hình thang cân

“Hình thang cân $ABCD$ có: 2 cạnh đáy AB & CD song song với nhau; 2 cạnh bên bằng nhau: $AD = BC$; 2 đường chéo bằng nhau: $AC = BD$; 2 góc kề với cạnh đáy CD bằng nhau, tức là 2 góc BCD & CDA bằng nhau; 2 góc kề với cạnh đáy AB bằng nhau, tức là 2 góc DAB & ABC bằng nhau.” – Thái et al., 2022a, p. 105

3.4.2 Chu vi & diện tích của hình thang cân

“Chu vi của hình thang bằng tổng độ dài các cạnh của hình thang đó.¹¹ Diện tích của hình thang bằng tổng độ dài 2 đáy nhân với chiều cao rồi chia đôi.” – Thái et al., 2022a, p. 106

3.5 Hình Có Trục Đối Xứng

3.5.1 Hình có trục đối xứng

Cho 1 hình và 1 đường thẳng d , nếu gấp hình đã cho theo đường thẳng d thu được 2 nửa trùng khít vào nhau thì hình như vậy là hình có trục đối xứng & đường thẳng d được gọi là trục đối xứng của hình. Hình có trục đối xứng còn được gọi là hình đối xứng trục.

¹¹Tổng quát hơn, chu vi của 1 hình đa giác/polygonal bằng tổng độ dài các cạnh của đa giác đó.

3.5.2 Trục đối xứng của 1 số hình

Đoạn thẳng AB là hình có trục đối xứng & trục đối xứng là đường thẳng d đi qua trung điểm O của AB & vuông góc với AB . Đường tròn là hình có nhiều trục đối xứng (vô hạn không đếm được) & mỗi trục đối xứng là 1 đường thẳng đi qua tâm của nó. Hình thang cân có 1 trục đối xứng. Hình lục giác đều có 6 trục đối xứng.

“Trong tự nhiên, ta thường gặp các hình có trục đối xứng, e.g.: bông tuyết/bông hoa tuyết, con bọ cánh cứng/cánh cam, con bướm, ... Trong nghệ thuật, đồ họa, ... người ta cũng thường sử dụng bố cục có dạng đối xứng trục. Trong kiến trúc, xây dựng thì tính đối xứng luôn được coi trọng, chẳng hạn ở các công trình sau: Tháp Rùa (Hà Nội), Khuê Văn Các (Hà Nội), tháp Eiffel (Paris).” – Thái et al., 2022a, p. 110

3.6 Hình Có Tâm Đối Xứng

3.6.1 Hình có tâm đối xứng

“Đường tròn tâm O là hình có tâm đối xứng & tâm đối xứng chính là tâm O của đường tròn.” “Hình có tâm đối xứng còn được gọi là hình đối xứng tâm.” – Thái et al., 2022a, p. 111

3.6.2 Tâm đối xứng của 1 số hình

Đoạn thẳng AB là hình có tâm đối xứng & tâm đối xứng là trung điểm M của đoạn thẳng đó. Đường tròn là hình có tâm đối xứng & tâm đối xứng là tâm của nó. Hình thoi có tâm đối xứng là tâm của nó. Hình lục giác đều có tâm đối xứng là tâm của nó.

“Trong tự nhiên, ta thường gặp các hình có tâm đối xứng, e.g.: bông tuyết/bông hoa tuyết, cây bạc hà, ... Trong nghệ thuật, trang trí, hay nhiếp ảnh, ... người ta cũng thường sử dụng bố cục có dạng đối xứng tâm. Trong kiến trúc, xây dựng thì đối xứng tâm luôn được coi trọng, e.g., ở các công trình sau: cầu vượt, mái nhà thờ, ...” – Thái et al., 2022a, p. 113

Advance: insert Topology Optimization, Shape Optimization.

3.7 Đối Xứng trong Thực Tiễn

3.7.1 Tính đối xứng trong thế giới tự nhiên

“Tính đối xứng là sự giống nhau của 1 hình qua đường trục hoặc qua tâm, tạo nên sự cân bằng. Trong tự nhiên, tính đối xứng được thể hiện rất đa dạng, phong phú, e.g.: Mặt Trăng, cầu vồng, con công, con bướm, chiếc lá. Tính đối xứng của 1 đối tượng là 1 trong những dấu hiệu quan trọng nhất giúp chúng ta nhanh chóng định hình đối tượng đó khi nhìn vào nó. Ngoài ra, với con người, đối xứng tạo ra sự cân bằng (cân xứng), hài hòa, trật tự, quen thuộc & nhờ đó tạo ra thẩm mỹ (vẻ đẹp).” – Thái et al., 2022a, p. 114

3.7.2 Tính đối xứng trong nghệ thuật, kiến trúc, & công nghệ

“1 trong các nguyên tắc quan trọng với nghệ thuật hay kiến trúc là *nguyên tắc cân bằng*. Hầu hết thiết kế về kiến trúc, đồ họa, hay 1 tác phẩm nghệ thuật nào đều phải thực hiện tốt yếu tố cân bằng. Vì thế, bố cục đối xứng thường được sử dụng trong các tác phẩm nghệ thuật hay kiến trúc, e.g.: Nhà hát lớn tại Hà Nội, cổng chính phía nam của Hoàng thành Huế, Dinh Độc Lập, cầu Nhật Tân, chợ Bến Thành. Trong thiết kế, công nghệ, chúng ta cũng dễ dàng nhận ra các bố cục có tính đối xứng. Các công trình hay máy móc muốn tồn tại, ổn định, bền vững & có được vẻ đẹp, bắt mắt thì phải chú trọng đến tính cân xứng. E.g.: thiết kế hoa văn trong xây dựng, thiết kế hoa văn trong trang trí (dệt vải), thiết kế nhà, thiết kế máy bay, thiết kế oto, ...” Thái et al., 2022a, pp. 114–115

3.7.3 Đối xứng trong toán học

“Nhiều đối tượng trong toán học có tính đối xứng/symmetry, góp phần tạo nên vẻ đẹp của toán học. 1 số biểu thức & công thức toán học cũng có tính đối xứng. E.g.: $a + b = b + a$ hay $ab = ba$, mỗi số nguyên: $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ đều có số đối của nó, hay tam giác Pascal, ... Đối xứng còn là công cụ chủ yếu để kết nối giữa toán học với khoa học & nghệ thuật.” – Thái et al., 2022a, p. 115

3.8 Thực Hành Phần Mềm GeoGebra

3.8.1 Giới thiệu phần mềm Geogebra

“Hiện nay, trên thế giới có nhiều phần mềm toán học, trong đó phần mềm GeoGebra là phần mềm miễn phí, dễ sử dụng, thân thiện với người dùng & có các phiên bản cho khoảng 80 ngôn ngữ khác nhau. Sau khi đã cài đặt phần mềm, việc chuyển

đổi ngôn ngữ (e.g., từ tiếng Anh sang tiếng Việt) hết sức đơn giản¹². Phần mềm GeoGebra có phạm vi sử dụng rất rộng (Hình học phẳng, Hình học không gian, Đại số, Giải tích, Xác suất, Thống kê, Bảng tính điện tử), sử dụng được trên nhiều hệ điều hành khác nhau, có thể chạy trực tuyến (online) hoặc cài đặt vào máy tính, máy tính bảng, điện thoại thông minh & hỗ trợ rất tốt cho việc dạy học môn Toán cũng như giáo dục STEM. Vì thế, GeoGebra được hàng triệu người trên thế giới sử dụng.

Để sử dụng phần mềm GeoGebra, chúng ta có thể sử dụng online tại địa chỉ <https://www.geogebra.org/> hoặc tải từ địa chỉ <https://www.geogebra.org/download> & cài đặt vào máy tính hoặc máy tính bảng hoặc điện thoại thông minh.” – Thái et al., 2022a, p. 119

3.8.2 Thực hành phần mềm GeoGebra trong tính toán số học

3.8.2.1 Sử dụng trực tiếp lệnh trong CAS.

1. *Tìm ước của số nguyên dương.* Cho $a \in \mathbb{N}^*$. Để tìm ước của a , nhập lệnh: `DanhSachUocSo(a)` rồi bấm **Enter**.
2. *Tìm ước chung lớn nhất của 2 số nguyên dương.* Cho $a, b \in \mathbb{N}^*$. Để tìm ước chung lớn nhất của a & b , nhập lệnh: `USCLN(a,b)` rồi bấm **Enter**.
3. *Tìm bội chung nhỏ nhất của 2 số nguyên dương.* Cho $a, b \in \mathbb{N}^*$. Để tìm bội chung nhỏ nhất của a & b , nhập lệnh: `BSCNN(a,b)` rồi bấm **Enter**.
4. *Tìm số dư của phép chia.* Cho $a, b \in \mathbb{N}^*$. Để tìm số dư của phép chia a cho b , nhập lệnh: `SoDu(a,b)` rồi bấm **Enter**.

3.8.2.2 Tạo công cụ để tìm ƯCLN, BCNN của các số nguyên dương. Cho $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Để tạo công cụ tìm ƯCLN(a, b, c) & BCNN(a, b, c), xem Thái et al., 2022a, pp. 120–121.

3.8.3 Sử dụng phần mềm GeoGebra để vẽ hình tam giác đều, hình vuông, hình lục giác đều

Xem Thái et al., 2022a, pp. 122–124.

4 Một Số Yếu Tố Thống kê & Xác Suất

Nội dung. Thu thập, tổ chức, biểu diễn, phân tích, & xử lý dữ liệu; bảng số liệu, biểu đồ tranh, biểu đồ cột, biểu đồ cột kép; mô hình xác suất & xác suất thực nghiệm trong 1 số trò chơi & thí nghiệm đơn giản.

4.1 Thu Thập, Tổ Chức, Biểu Diễn, Phân Tích, & Xử Lý Dữ Liệu

Những bước chính trong tiến trình thống kê: “thu thập, phân loại, kiểm đếm, ghi chép số liệu; đọc & mô tả các số liệu ở dạng dãy số liệu, bảng số liệu hoặc ở dạng biểu đồ (biểu đồ tranh, biểu đồ cột hoặc biểu đồ hình quạt tròn); nêu được nhận xét đơn giản từ biểu đồ.” – Thái et al., 2022b, p. 3.

4.1.1 Thu thập, tổ chức, phân tích, & xử lý dữ liệu

“Sau khi thu thập, tổ chức, phân loại, biểu diễn dữ liệu bằng bảng hoặc biểu đồ, ta cần phân tích & xử lý các dữ liệu đó để tìm ra những thông tin hữu ích & rút ra kết luận.” [...] “Ta có thể nhận biết được tính hợp lý của dữ liệu thống kê theo những tiêu chí đơn giản.” [...] “Dựa theo đối tượng & tiêu chí thống kê, ta có thể tổ chức & phân loại dữ liệu.” – Thái et al., 2022b, p. 4.

“Dựa vào thống kê, ta có thể nhận biết được tính hợp lý của kết luận đã nêu ra.” – Thái et al., 2022b, p. 5.

4.1.2 Biểu diễn dữ liệu

“Sau khi thu thập & tổ chức dữ liệu, ta cần biểu diễn dữ liệu đó ở dạng thích hợp. Nhờ việc biểu diễn dữ liệu, ta có thể phân tích & xử lý được các dữ liệu đó.” – Thái et al., 2022b, p. 6.

1. **Bảng số liệu.** Các đối tượng thống kê lần lượt được biểu diễn ở dòng đầu tiên. Ứng với mỗi đối tượng thống kê có 1 số liệu thống kê theo tiêu chí, lần lượt được biểu diễn ở dòng thứ 2 (theo cột tương ứng).
2. **Biểu đồ tranh.** Các đối tượng thống kê lần lượt được biểu diễn ở cột đầu tiên. Ứng với mỗi đối tượng thống kê có 1 số liệu thống kê theo tiêu chí, lần lượt được biểu diễn ở dòng tương ứng.

¹²NQBH: Nên sử dụng trực tiếp tiếng Anh để tăng vốn ngôn ngữ & khả năng xoay sở để giúp thích nghi nhanh với các phần mềm khác không có hỗ trợ tiếng Việt, & đương nhiên các phần mềm này chiếm đa số.

3. **Biểu đồ cột.** Các đối tượng thống kê lần lượt được biểu diễn ở trục nằm ngang. Ứng với mỗi đối tượng thống kê có 1 số liệu thống kê theo tiêu chí, lần lượt được biểu diễn ở trục thẳng đứng.

“Dựa vào thống kê, ta có thể bác bỏ kết luận đã nêu ra.” – Thái et al., 2022b, p. 8

4.2 Biểu Đồ Cột Kép

Mục đích của biểu đồ cột kép: biểu diễn được đồng thời từng loại đối tượng thống kê trên cùng 1 biểu đồ cột (ưu điểm so với biểu đồ cột đơn thông thường). Các đối tượng thống kê lần lượt được biểu diễn ở trục nằm ngang. Ứng với mỗi đối tượng thống kê có 1 số liệu thống kê theo tiêu chí, lần lượt được biểu diễn ở trục thẳng đứng.

4.3 Mô Hình Xác Suất Trong 1 Số Trò Chơi & Thí Nghiệm Đơn Giản

4.3.1 Mô hình xác suất trong trò chơi tung đồng xu

2 mặt của đồng xu: mặt sấp /S¹³ hay mặt ngửa/N. Khi tung đồng xu 1 lần, có 2 kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của đồng xu, đó là: mặt N; mặt S. Có 2 điều cần chú ý trong mô hình xác suất của trò chơi tung đồng xu:

- Tung đồng xu 1 lần;
- Tập hợp các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của đồng xu là {S; N}. Ở đây, S ký hiệu cho kết quả xuất hiện mặt sấp & N ký hiệu cho kết quả xuất hiện mặt ngửa.

4.3.2 Mô hình xác suất trong trò chơi lấy vật từ trong hộp

Dạng toán. Cho 1 hộp có n vật thể có kích thước & khối lượng như nhau nhưng có n màu khác nhau. Khi lấy ngẫu nhiên 1 vật thể trong hộp, có n kết quả có thể xảy ra đối với màu của vật thể được lấy ra, đó là: màu thứ nhất, màu thứ 2, ..., màu thứ n .

Lưu ý 4.1. Giả thiết “ n vật thể có kích thước & khối lượng như nhau” giúp cho các đối tượng bình đẳng/công bằng (fairness) trong việc lấy ra ngẫu nhiên. Trường hợp ngược lại, chẳng hạn, 1 vật thể đầy gai nhọn trong khi các vật thể khác trơn nhẵn hoặc 1 vật thể quá nặng so các vật thể còn lại sẽ khó để lấy ra được bằng tay không, nên xác suất xảy ra đối với vật thể đó sẽ là 0 (unfairness). Trường hợp bình đẳng ứng với xác suất của các vật thể có phân phối đều (uniform distribution), trong khi trường hợp bất bình đẳng của các vật thể ứng với các phân phối có trọng số (non-uniform/weighted distribution) sẽ được học ở Phổ thông hoặc Toán Cao Cấp.

4.3.3 Mô hình xác suất trong trò chơi gieo xúc xắc

Dạng toán. Mỗi xúc xắc có 6 mặt, số chấm ở mỗi mặt là 1 trong các số nguyên dương 1, 2, 3, 4, 5, 6. Gieo xúc xắc 1 lần. Tãi: {4, 5, 6}. Xỉu: {1, 2, 3}.

4.4 Xác Suất Thực Nghiệm Trong 1 Số Trò Chơi & Thí Nghiệm Đơn Giản

4.4.1 Xác suất thực nghiệm trong trò chơi tung đồng xu/toss a coin

Định nghĩa 4.1 (Xác suất thực nghiệm trong trò chơi tung đồng xu). Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N khi tung đồng xu nhiều lần bằng:

$$\frac{\text{Số lần mặt } N \text{ xuất hiện}}{\text{Tổng số lần tung đồng xu}} = \frac{\text{Số lần mặt } N \text{ xuất hiện}}{\text{Số lần mặt } N \text{ xuất hiện} + \text{Số lần mặt } S \text{ xuất hiện}} \in \mathbb{Q} \cap [0, 1].$$

Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S khi tung đồng xu nhiều lần bằng:

$$\frac{\text{Số lần mặt } S \text{ xuất hiện}}{\text{Tổng số lần tung đồng xu}} = \frac{\text{Số lần mặt } S \text{ xuất hiện}}{\text{Số lần mặt } N \text{ xuất hiện} + \text{Số lần mặt } S \text{ xuất hiện}} \in \mathbb{Q} \cap [0, 1].$$

Từ định nghĩa: “Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N (hoặc mặt S) phản ánh số lần xuất hiện mặt đó so với tổng số lần tiến hành thực nghiệm.” – Thái et al., 2022b, p. 18

Lưu ý 4.2. • Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N bằng 0 khi và chỉ khi không có mặt N nào trong tất cả lần tung đồng xu.

¹³Cần phân biệt “mặt sấp” (S) với “SML”, i.e., “sấp mặt lợn”.

- Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N bằng 1 khi và chỉ khi không có mặt S nào trong tất cả lần tung đồng xu.
- Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt s bằng 0 khi và chỉ khi không có mặt S nào trong tất cả lần tung đồng xu.
- Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt S bằng 1 khi và chỉ khi không có mặt N nào trong tất cả lần tung đồng xu.

Bài toán 4.1. Tung 2 đồng xu cân đối & đồng chất T lần (T viết tắt của “tổng số”), trong đó:

- 2 đồng xu sấp xuất hiện SS lần.
- 1 đồng xu sấp, 1 đồng xu ngửa xuất hiện SN lần.
- 2 đồng xu ngửa xuất hiện NN lần.

Hiển nhiên: $T = SS + SN + NN$. Khi đó:

- Xác suất thực nghiệm để có 1 đồng xu sấp, 1 đồng xu ngửa = $\frac{SN}{T} = \frac{SN}{SS + SN + NN} \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.
- Xác suất thực nghiệm để có 2 đồng xu đều ngửa = $\frac{NN}{T} = \frac{NN}{SS + SN + NN} \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.
- Xác suất thực nghiệm để có 2 đồng xu đều sấp = $\frac{SS}{T} = \frac{SS}{SS + SN + NN} \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.
- Xác suất thực nghiệm để có ít nhất 1 đồng xu sấp = $\frac{SS + SN}{T} = \frac{SS + SN}{SS + SN + NN} \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.
- Xác suất thực nghiệm để có ít nhất 1 đồng xu ngửa = $\frac{SN + NN}{T} = \frac{SN + NN}{SS + SN + NN} \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

4.4.2 Xác suất thực nghiệm trong trò chơi lấy vật từ trong hộp

Định nghĩa 4.2 (Xác suất thực nghiệm trong trò chơi lấy vật từ trong hộp). Xác suất thực nghiệm xuất hiện màu A khi lấy bóng nhiều lần bằng:

$$\frac{\text{Số lần màu } A \text{ xuất hiện}}{\text{Tổng số lần lấy bóng}} \in \mathbb{Q} \cap [0, 1].$$

4.4.3 Xác suất thực nghiệm trong trò chơi gieo xúc xắc

Định nghĩa 4.3 (Xác suất thực nghiệm trong trò chơi gieo xúc xắc). Xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt k chấm ($k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq 6$) khi gieo xúc xắc nhiều lần bằng:

$$\frac{\text{Số lần xuất hiện mặt } k \text{ chấm}}{\text{Tổng số lần gieo xúc xắc}} \in \mathbb{Q} \cap [0, 1].$$

4.4.4 Xác suất khi số lần thực nghiệm rất lớn

“Người ta chứng minh được rằng khi số lần tung càng lớn thì xác suất thực nghiệm xuất hiện mặt N càng gần với 0.5. Số 0.5 được gọi là *xác suất xuất hiện mặt N* (theo nghĩa thống kê).” – Thái et al., 2022b, p. 21. Phương pháp tung kim để tính số π của Bá tước Georges-Louis Leclerc de Buffon chính là tiền thân của phương pháp Monte-Carlo trong toán học.

Lý thuyết nằm sau những ví dụ này là *Luật Số Lớn/Law of Large Numbers* – 1 trong những định lý quan trọng nhất của *Lý thuyết xác suất & thống kê*, được chứng minh bởi nhà Toán học huyền thoại người Nga Kolmogorov.¹⁴

5 Phân Số & Số Thập Phân

Nội dung. phân số với tử & mẫu là số nguyên; các phép tính với phân số; số thập phân; các phép tính với số thập phân; tỷ số, tỷ số phần trăm, làm tròn số.

¹⁴NQBH: Kolmogorov còn có những cống hiến khác về nền tảng xác suất & thống kê trong việc nghiên cứu *turbulence/sự nhiễu loạn*. Turbulence vẫn còn là 1 vấn đề mở cực khó của cả Toán học & Vật lý. Đề tài PhD ở Đức của tôi là làm tối ưu hình dáng (shape optimization) & tối ưu topo (topology optimization) cho turbulence models. Và đương nhiên 3 năm chẳng thể nào đủ cho 1 đề tài khủng như vậy.

5.1 Phân Số với Tử & Mẫu là Số Nguyên

5.1.1 Khái niệm phân số

Định nghĩa 5.1 (Phân số/Fractions). 1 phân số có tử và mẫu số là số nguyên là biểu thức có dạng $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. a : tử số (numerator), b : mẫu số (denominator).

Phân số $\frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$, được gọi là phân số tối giản nếu $\gcd(a, b) = 1$, ở đây \gcd ký hiệu ước chung lớn nhất (greatest common divisor).¹⁵

5.1.2 Khái niệm 2 phân số bằng nhau.

2 phân số được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng biểu diễn một giá trị, i.e. (tức/nghĩa là),

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow b \neq 0, d \neq 0, ad = bc. \quad (5.1)$$

Về sau có nghĩa là nhân chéo chia ngang, hay được gọi là quy tắc bằng nhau của 2 phân số.

Chú ý. luôn nhớ điều kiện mẫu số 2 phân số phải khác 0.

Ví dụ 5.1. Trong Sách Giáo Khoa Toán 6, Cánh Diều, của Đỗ Đức Thái chủ biên, có viết:

“Xét 2 phân số $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$. Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì $ad = bc$ ¹⁶. Ngược lại, nếu $ad = bc$ thì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.”

Phản ví dụ: $a = 0$, $b = 0$ thì $ad = bc = 0$, nhưng $\frac{0}{0} \neq \frac{c}{d}$ và phân số $\frac{0}{0}$ không có nghĩa.

Mẹo nhanh. Xét dấu (sign) của tử số và mẫu số khi so sánh 2 phân số $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$. Nếu trong 4 số a, b, c, d , có 1 hoặc 3 số âm, còn lại dương, thì 2 phân số không bằng nhau.

5.1.3 Tính Chất Cơ Bản của Phân Số

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}, \quad \frac{a}{b} = \frac{a:c}{b:c}, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0. \quad (5.2)$$

trong đó đẳng thức thứ 2 yêu cầu $c \in \text{UC}(a, b)$ để phân số đều có tử và mẫu nguyên.

5.1.3.1 Rút gọn về phân số tối giản. Để rút gọn phân số với tử và mẫu là số nguyên về phân số tối giản:

1. Tìm UCLN của tử và mẫu sau khi đã bỏ dấu – (nếu có).
2. Chia cả tử và mẫu cho UCLN vừa tìm được.

5.1.3.2 Quy đồng mẫu nhiều phân số.

Câu hỏi 5.1. Tại sao phải quy đồng mẫu nhiều phân số?

Trả lời. • Để tiện so sánh 2 phân số.

- Để tiện cho việc giải phương trình.

□

Câu hỏi 5.2. Cách để quy đồng mẫu nhiều phân số?

Để quy đồng mẫu nhiều phân số:

1. Viết các phân số đã cho về phân số có mẫu dương. Tìm BCNN của các mẫu dương đó để làm mẫu chung.
Note. Nếu các mẫu số nguyên tố cùng nhau, thì BCNN của chúng chính là tích của chúng.
2. Tìm thừa số phụ của mỗi mẫu (bằng cách chia mẫu chung cho từng mẫu).
3. Nhân tử và mẫu của mỗi phân số ở Bước 1 với thừa số phụ tương ứng.

¹⁵Hoặc ký hiệu Việt Nam là: $\text{UCLN}(a, b)$.

¹⁶Phép nhân: $a \times b = a \cdot b = ab$.

5.2 So Sánh Các Phân Số. Hỗn Số Dương

6 Hình Học Phẳng

6.1 Điểm. Đường Thẳng

Quy ước. Khi nói 2 điểm mà không nói gì thêm, ta hiểu đó là 2 điểm phân biệt.

Chú ý. Mỗi hình là tập hợp các điểm. Hình có thể chỉ gồm 1 điểm.

Lưu ý 6.1 (Phân biệt đường thẳng vs. đoạn thẳng). *Đường thẳng không bị giới hạn về 2 phía, trong khi đoạn thẳng bị giới hạn về 2 phía bởi 2 đầu mút của nó.*

Định nghĩa 6.1. *Điểm A thuộc/nằm trên đường thẳng d (hay đường thẳng d đi qua điểm A) & được ký hiệu là $A \in d$. Điểm B không thuộc/không nằm trên đường thẳng d (hay đường thẳng d không đi qua điểm B) & được ký hiệu là $B \notin d$.*

Lưu ý 6.2. *Có vô số điểm thuộc 1 đoạn/đường thẳng.*

Thật vậy, đoạn thẳng AB có vô số điểm bởi vì: lấy M_1 là trung điểm của AB , lấy M_2 là trung điểm của đoạn AM_1 , lấy M_3 là trung điểm của đoạn AM_2 , tương tự như vậy, thì có vô số lần lấy trung điểm, tương ứng vô hạn điểm.

Định lý 6.1. *Có 1 & chỉ 1 đường thẳng đi qua 2 điểm A & B (phân biệt).*

Đường thẳng đi qua 2 điểm A, B còn được gọi là đường thẳng AB , hay đường thẳng BA .

Định nghĩa 6.2 (3 điểm thẳng hàng, không thẳng hàng). *Khi 3 điểm cùng thuộc 1 đường thẳng, chúng được gọi là thẳng hàng. Khi 3 điểm không cùng thuộc bất kỳ đường thẳng nào, chúng được gọi là không thẳng hàng.*

Định lý 6.2. *Trong 3 điểm thẳng hàng, có 1 & chỉ 1 điểm nằm giữa 2 điểm còn lại.*

6.2 2 Đường Thẳng Cắt Nhau. 2 Đường Thẳng Song Song

Định nghĩa 6.3 (2 đường thẳng cắt nhau). *2 đường thẳng chỉ có 1 điểm chung gọi là 2 đường thẳng cắt nhau & điểm chung được gọi là giao điểm của 2 đường đó.*

Định nghĩa 6.4 (2 đường thẳng song song). *2 đường thẳng a & b không có điểm chung nào được gọi là song song với nhau. Viết $a // b$ hoặc $b // a$.*

Lưu ý 6.3. *2 đường thẳng trùng nhau thì không thuộc vào 2 định nghĩa trên.*

Tài liệu

[NQBH/elementary math] Nguyễn Quân Bá Hồng. *Some Topics in Elementary Mathematics: Problems, Theory, Applications, & Bridges to Advanced Mathematics*. Mar 2022–now.

Tài liệu

- Halmos, Paul R. (1960). *Naive set theory*. The University Series in Undergraduate Mathematics. D. Van Nostrand Co., Princeton, N.J.-Toronto-London-New York, pp. vii+104.
- (1974). *Naive set theory*. Undergraduate Texts in Mathematics. Reprint of the 1960 edition. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, pp. vii+104.
- Kaplansky, Irving (1972). *Set theory and metric spaces*. Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics. Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass., pp. xii+140.
- (1977). *Set theory and metric spaces*. Second. Chelsea Publishing Co., New York, xii+140 pp. ISBN 0-8284-0298-1.
- Tao, Terence (2006). *Solving mathematical problems*. A personal perspective. Oxford University Press, Oxford, pp. xii+103. ISBN: 978-0-19-920560-8; 0-19-920560-4.
- Thái, Đỗ Đức et al. (2022a). *Toán 6, tập 1*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, p. 128.
- (2022b). *Toán 6, tập 2*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, p. 108.