

Rational – Số Hữu Tỷ \mathbb{Q}

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 4 tháng 12 năm 2022

Tóm tắt nội dung

Mục lục

1 Problem	1
1.1 $\pm, \cdot, :$ Trên \mathbb{Q}	1
1.2 Lũy Thừa của 1 Số Hữu Tỷ	2
Tài liệu	4

1 Problem

1.1 $\pm, \cdot, :$ Trên \mathbb{Q}

Bài toán 1.1 (Bình, 2022, Ví dụ 1, p. 3). Tính $A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \dots$ (A có 300 số hạng).

Bài toán 1.2 (Bình, 2022, Ví dụ 2, p. 4). Cho phân số $\frac{a}{b} \neq 1$. (a) Tìm phân số x sao cho nhân x với $\frac{a}{b}$ cũng bằng cộng x với $\frac{a}{b}$. (b) Tìm giá trị của x trong câu (a) nếu $\frac{a}{b} = \frac{7}{5}$, nếu $\frac{a}{b} = \frac{8}{11}$.

Bài toán 1.3 (Bình, 2022, Ví dụ 3, p. 4). Tìm $x \in \mathbb{Q}$, $x < 0$ để $\frac{4}{x-1} \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 1.4 (Bình, 2022, Ví dụ 4, p. 5). Tân đạp xe từ trường về nhà với thời gian dự kiến. Nhưng Tân đã dùng $\frac{2}{3}$ thời gian dự kiến để đi $\frac{3}{4}$ quãng đường với vận tốc v_1 , rồi đi quãng đường còn lại với vận tốc v_2 Ớ đã về nhà đúng thời điểm dự kiến. Tính tỷ số $v_1 : v_2$.

Bài toán 1.5 (Bình, 2022, Mở rộng Ví dụ 4, p. 5). Tân đạp xe từ trường về nhà với thời gian dự kiến. Nhưng Tân đã dùng a thời gian dự kiến để đi b quãng đường với vận tốc v_1 , $a, b > 0$, $a + b < 1$, rồi đi quãng đường còn lại với vận tốc v_2 Ớ đã về nhà đúng thời điểm dự kiến. Tính tỷ số $v_1 : v_2$ theo a, b .

Bài toán 1.6 (Bình, 2022, 1., p. 5). So sánh các số hữu tỷ: (a) $-\frac{18}{91}$ Ớ $-\frac{23}{114}$; (b) $-\frac{22}{35}$ Ớ $-\frac{103}{177}$.

Bài toán 1.7 (Bình, 2022, 2., p. 5). Tìm 2 phân số có tử bằng 9, biết giá trị của mỗi phân số đó lớn hơn $-\frac{11}{13}$ Ớ nhỏ hơn $-\frac{11}{15}$.

Bài toán 1.8 (Bình, 2022, 3., p. 5). Cho các số hữu tỷ $\frac{a}{b}$ Ớ $\frac{c}{d}$ với mẫu dương, trong đó $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Chứng minh: (a) $ab < bc$; (b) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Bài toán 1.9 (Bình, 2022, 4., p. 5). Tính: (a) $\frac{-2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{-1}{6} + \frac{-2}{5}$; (b) $\frac{-2}{3} + \frac{-1}{5} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6} - \frac{-7}{10}$; (c) $\frac{1}{2} - \frac{-2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{5}{7} - \frac{-1}{6} + \frac{-4}{35} + \frac{1}{41}$; (d) $\frac{1}{100 \cdot 99} - \frac{1}{99 \cdot 98} - \frac{1}{98 \cdot 97} - \dots - \frac{1}{3 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 1}$.

Bài toán 1.10 (Bình, 2022, 5., pp. 5–6). Ký hiệu $\lfloor x \rfloor$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x , được gọi là phần nguyên của x , e.g., $\lfloor 1.5 \rfloor = 1$, $\lfloor 5 \rfloor = 5$, $\lfloor -2.5 \rfloor = -3$. (a) Tính $\lfloor -\frac{1}{7} \rfloor, \lfloor 3.7 \rfloor, \lfloor -4 \rfloor, \lfloor -\frac{43}{10} \rfloor$. (b) Cho $x = 3.7$. So sánh: $A = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{5} \rfloor + \lfloor x + \frac{2}{5} \rfloor + \lfloor x + \frac{3}{5} \rfloor + \lfloor x + \frac{4}{5} \rfloor$ Ớ $B = \lfloor 5x \rfloor$. (c) Tính $\lfloor \frac{100}{3} \rfloor + \lfloor \frac{100}{3^2} \rfloor + \lfloor \frac{100}{3^3} \rfloor + \lfloor \frac{100}{3^4} \rfloor$. (d) Tính $\lfloor \frac{50}{2} \rfloor + \lfloor \frac{50}{2^2} \rfloor + \lfloor \frac{50}{2^3} \rfloor + \lfloor \frac{50}{2^4} \rfloor + \lfloor \frac{50}{2^5} \rfloor$. (e) Cho $x \in \mathbb{Q}$. So sánh $\lfloor x \rfloor$ với x , so sánh $\lfloor x \rfloor$ với y trong đó $y \in \mathbb{Z}$, $y < x$.

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

Bài toán 1.11 (Bình, 2022, 6., p. 6). Cho các số hữu tỷ x bằng 1.4089, 0.1398, -0.4771 , -1.2592 . (a) Viết các số đó dưới dạng tổng của 1 số nguyên a & 1 số thập phân b không âm nhỏ hơn 1. (b) Tính tổng các số hữu tỷ trên bằng 2 cách: tính theo cách thông thường, tính tổng các số được viết dưới dạng ở (a). (c) So sánh a & $\lfloor x \rfloor$ trong trường hợp ở câu (a). Lưu ý: Trong cách viết này, a là phần nguyên của x , còn b là phần lẻ của x . Ký hiệu phần lẻ của x là $\{x\}$ thì $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$.

Bài toán 1.12 (Bình, 2022, 7., p. 6). Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để phân số sau có giá trị là 1 số nguyên & tính giá trị đó: (a) $A = \frac{3n+9}{n-4}$; (b) $B = \frac{6n+5}{2n-1}$.

Bài toán 1.13 (Bình, 2022, 8., p. 6). Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$, biết: $\frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8}$.

Bài toán 1.14 (Bình, 2022, 9., p. 6). Viết tất cả các số nguyên có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 20 theo thứ tự tùy ý. Lấy mỗi số trừ đi số thứ tự của nó ta được 1 hiệu. Tổng của tất cả các hiệu đó bằng bao nhiêu?

Bài toán 1.15 (Bình, 2022, 10., p. 6). Tính: (a) $\left(\frac{3}{10} - \frac{4}{15} - \frac{7}{20}\right) \cdot \frac{5}{19}$; (b) $\frac{(1+2+\dots+100)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) \cdot (6 \cdot 3 \cdot 12 - 21 \cdot 3 \cdot 6)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}}$; (c) $\frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11}}{\frac{4}{9} - \frac{4}{7} - \frac{4}{11}} + \frac{\frac{3}{5} - \frac{3}{25} - \frac{3}{125} - \frac{3}{625}}{\frac{4}{5} - \frac{4}{25} - \frac{4}{125} - \frac{4}{625}}$.

Bài toán 1.16 (Bình, 2022, 11., p. 7). Tìm $x \in \mathbb{Q}$, biết: (a) $\frac{2}{3}x - 4 = -12$; (b) $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} : x = -3$; (c) $|3x - 5| = 4$; (d) $\frac{x+1}{10} + \frac{x+1}{11} + \frac{x+1}{12} = \frac{x+1}{13} + \frac{x+1}{14}$; (e) $\frac{x+4}{2000} + \frac{x+3}{2001} = \frac{x+2}{2002} + \frac{x+1}{2003}$.

Bài toán 1.17 (Bình, 2022, 12., p. 7). Cho phân số $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$. Tìm phân số x sao cho $\frac{a}{b} - x = \frac{a}{b} \cdot x$.

Bài toán 1.18 (Bình, 2022, 13., p. 7). Trung bình cộng của 2 số lớn hơn số thứ nhất 75% thì nhỏ hơn số thứ 2 bao nhiêu %?

Bài toán 1.19 (Bình, 2022, 14., p. 7). Chứng minh:

(a) $\sum_{i=1}^{99} \frac{i}{(i+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{99}{100!} < 1$. (b) $\sum_{i=1}^{99} \frac{i(i+1)-1}{(i+1)!} = \frac{1 \cdot 2 - 1}{2!} + \frac{2 \cdot 3 - 1}{3!} + \frac{3 \cdot 4 - 1}{4!} + \dots + \frac{99 \cdot 100 - 1}{100!} < 2$.

Bài toán 1.20 (Bình, 2022, 15., p. 7). (a) Người ta viết 7 số hữu tỷ trên 1 vòng tròn. Tìm các số đó, biết tích của 2 số bất kỳ cạnh nhau bằng 16. (b) Cũng hỏi như trên đối với n số.

Bài toán 1.21 (Bình, 2022, 16., p. 7). Có tồn tại hay không 2 số dương a, b khác nhau sao cho $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a-b}$?

Bài toán 1.22 (Bình, 2022, 17.*, p. 7). (a) Chứng minh: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{49 \cdot 50} = \frac{1}{26} + \frac{1}{27} + \frac{1}{28} + \dots + \frac{1}{50}$. (b) Cho $B = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$. Chứng minh $\frac{7}{12} < B < \frac{5}{6}$.

Bài toán 1.23 (Bình, 2022, 18., p. 7). Tìm $a, b \in \mathbb{Q}$ sao cho: (a) $a - b = 2(a + b) = a : b$. (b) $a + b = ab = a : b$.

Bài toán 1.24 (Bình, 2022, 19.*, p. 7). Tìm $x \in \mathbb{Q}$, sao cho tổng của số đó với số nghịch đảo của nó là 1 số nguyên.

Bài toán 1.25 (Bình, 2022, 20.*, p. 8). Viết tất cả các số hữu tỷ dương thành dãy gồm các nhóm phân số có tổng của tử & mẫu lần lượt bằng 2, 3, 4, 5, ..., các phân số trong cùng 1 nhóm được đặt trong dấu ngoặc: $\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{2}{1}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right), \dots$. Tìm phân số thứ 200 của dãy.

1.2 Lũy Thừa của 1 Số Hữu Tỷ

Bài toán 1.26 (Bình, 2022, Ví dụ 5, p. 8). (a) Chứng minh: $2^{10} \approx 10^3$ & $9^{10} \approx 80^5$. (b) Dùng nhận xét ở (a) để chứng minh $9^{10} \approx 3.2 \cdot 10^9$.

Bài toán 1.27 (Bình, 2022, Ví dụ 6, p. 8). Tính: $A = \sum_{i=1}^{10} \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{10}{2^{10}}$.

Bài toán 1.28 (Bình, 2022, Ví dụ 7, p. 9). (a) Có thể khẳng định x^2 luôn luôn lớn hơn x hay không? (b) Khi nào thì $x^2 < x$?

Bài toán 1.29 (Bình, 2022, Ví dụ 8, p. 9). Tìm $a, b, c \in \mathbb{Q}$, biết: $ab = 2$, $bc = 3$, $ca = 54$.

Bài toán 1.30 (Bình, 2022, Ví dụ 9, p. 9). Rút gọn: $A = \sum_{i=0}^{50} 5^i = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{49} + 5^{50}$.

Bài toán 1.31 (Bình, 2022, Ví dụ 10, p. 9). Cho $B = \sum_{i=1}^{99} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{98} + \left(\frac{1}{2}\right)^{99}$. Chứng minh $B < 1$.

Bài toán 1.32 (Bình, 2022, 21., p. 10). Chứng minh: (a) $7^6 + 7^5 - 7^4 : 55$; (b) $16^5 + 2^{15} : 33$; (c) $81^7 - 27^9 - 9^{13} : 405$.

Bài toán 1.33 (Bình, 2022, 22., p. 10). Điền vào chỗ chấm (\dots) các từ “bằng nhau” hoặc “đổi nhau” cho đúng: (a) Nếu 2 số đổi nhau thì bình phương của chúng (b) Nếu 2 số đổi nhau thì lập phương của chúng (c) Lũy thừa chẵn cùng bậc của 2 số đổi nhau thì (d) Lũy thừa lẻ cùng bậc của 2 số đổi nhau thì

Bài toán 1.34 (Bình, 2022, 23., p. 10 & mở rộng). Các đẳng thức sau có đúng với mọi $a, b \in \mathbb{Q}$ hay không? (a) $-a^3 = (-a)^3$; (b) $-a^5 = (-a)^5$; (c) $-a^2 = (-a)^2$; (d) $-a^4 = (-a)^4$; (e) $-a^{2n+1} = (-a)^{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$; (f) $a^{2n} = (-a)^{2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$; (g) $(a-b)^2 = (b-a)^2$; (h) $(a-b)^3 = -(b-a)^3$; (i) $(a-b)^{2n} = (b-a)^{2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$; (j) $(a-b)^{2n+1} = -(b-a)^{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Bài toán 1.35 (Bình, 2022, 24., p. 10). Tính: (a) $(\frac{1}{2})^{15} \cdot (\frac{1}{4})^{20}$; (b) $(\frac{1}{9})^{25} : (\frac{1}{3})^{30}$; (c) $(\frac{1}{16})^3 : (\frac{1}{8})^2$; (d) $(x^3)^2 : (x^2)^3$ với $x \neq 0$.

Bài toán 1.36 (Bình, 2022, 25., p. 10). Viết số 64 dưới dạng a^n với $a \in \mathbb{Z}$. Có bao nhiêu cách viết?

Bài toán 1.37 (Bình, 2022, 26., p. 10). Rút gọn biểu thức: $A = \frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 20}$.

Bài toán 1.38 (Bình, 2022, 27., p. 10). (a) Chứng minh: $2^{10} \approx 10^3$ & $3^{16} \approx 80^4$. (b) Dùng nhận xét ở (a) để chứng minh $3^{16} \approx 40000000$.

Bài toán 1.39 (Bình, 2022, 28., p. 10). Cho $S_n = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} i = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (-1)^{n-1} n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tính $S_{35} + S_{60}$.

Bài toán 1.40 (Bình, 2022, 29., p. 10). Cho $A = 1 - 5 + 9 - 13 + 17 - 21 + 25 - \dots$ (n số hạng, giá trị tuyệt đối của số sau lớn hơn giá trị tuyệt đối của số hạng trước 4 đơn vị, các dấu $+$ & $-$ xen kẽ). (a) Tính A theo n . (b) Viết số hạng thứ n của biểu thức A theo n (chú ý dùng lũy thừa để biểu thị dấu của số hạng đó).

Bài toán 1.41 (Bình, 2022, 30., p. 11). Với giá trị nào của các chữ thì các biểu thức sau có giá trị là số 0, số dương, số âm? (a) $P = \frac{a^2 b}{c}$; (b) $Q = \frac{x^3}{yz}$.

Bài toán 1.42 (Bình, 2022, 31., p. 11). Cho 2 số hữu tỷ a & b trái dấu trong đó $|a| = b^5$. Xác định dấu của mỗi số.

Bài toán 1.43 (Bình, 2022, 32., p. 11). Viết các số sau dưới dạng lũy thừa của 2: 16, 64, 1, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{8}$, 0.5, 0.25.

Bài toán 1.44 (Bình, 2022, 33., p. 11). (a) Viết các số sau thành lũy thừa với số mũ âm: $\frac{1}{1000000}$, 0.00000002. (b) Viết các số sau dưới dạng số thập phân: 10^{-7} , $2.5 \cdot 10^{-6}$.

Bài toán 1.45 (Bình, 2022, 34., p. 11). Tính xem A gấp mấy lần B : (a) $A = 3.4 \cdot 10^{-8}$, $B = 34 \cdot 10^{-9}$; (b) $A = 10^{-4} + 10^{-3} + 10^{-2}$, $B = 10^{-9}$.

Bài toán 1.46 (Bình, 2022, 35., p. 11). So sánh: (a) $(-\frac{1}{16})^{100}$ & $(-\frac{1}{2})^{500}$; (b) $(-32)^9$ & $(-18)^{13}$; (c) $a = 2^{100}$, $b = 3^{75}$, $c = 5^{50}$.

Bài toán 1.47 (Bình, 2022, 36., p. 11). Trong các câu sau, câu nào đúng với mọi $a \in \mathbb{Q}$? (a) Nếu $a < 0$ thì $a^2 > 0$; (b) Nếu $a^2 > 0$ thì $a > 0$; (c) Nếu $a < 0$ thì $a^2 > a$; (d) Nếu $a^2 > a$ thì $a > 0$; (e) Nếu $a^2 > a$ thì $a < 0$.

Bài toán 1.48 (Bình, 2022, 37., p. 11). (a) Cho $a^m = a^n$ ($a \in \mathbb{Q}$, $m, n \in \mathbb{N}$). Tìm m, n . (b) Cho $a^m > a^n$ ($a \in \mathbb{Q}$, $a > 0$, $m, n \in \mathbb{N}$). So sánh m & n .

Bài toán 1.49 (Bình, 2022, 38., p. 11). Tìm $x \in \mathbb{Q}$, biết: (a) $(2x-1)^4 = 81$; (b) $(x-1)^5 = -32$; (c) $(2x-1)^6 = (2x-1)^8$.

Bài toán 1.50 (Bình, 2022, 39., p. 11). Tìm $x \in \mathbb{N}$, biết: (a) $5^x + 5^{x+2} = 650$; (b) $3^{x-1} + 5 \cdot 3^{x-1} = 162$.

Bài toán 1.51 (Bình, 2022, 40., p. 11). Tìm $x, y \in \mathbb{N}$, biết: (a) $2^{x+1} \cdot 3^y = 12^x$; (b) $10^x : 5^y = 20^y$; (c) $2^x = 4^{y-1}$ & $27^y = 3^{x+8}$.

Bài toán 1.52 (Bình, 2022, 41., p. 11). Tìm $a, b, c \in \mathbb{Q}$, biết: (a) $ab = \frac{3}{5}$, $bc = \frac{4}{5}$, $ca = \frac{3}{4}$. (b) $a(a+b+c) = -12$, $b(a+b+c) = 18$, $c(a+b+c) = 30$; (c) $ab = c$, $bc = 4a$, $ac = 9b$.

Bài toán 1.53 (Bình, 2022, 42.* , p. 12). Cho $a, b, c, d, e \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $a^b = b^c = c^d = d^e = e^a$. Chứng minh $a = b = c = d = e$.

Bài toán 1.54 (Bình, 2022, 43., p. 12). Cho $A = \prod_{i=2}^{100} (\frac{1}{i^2} - 1) = (\frac{1}{2^2} - 1) (\frac{1}{3^2} - 1) (\frac{1}{4^2} - 1) \dots (\frac{1}{100^2} - 1)$. So sánh A với $-\frac{1}{2}$.

Bài toán 1.55 (Bình, 2022, 44., p. 12). Rút gọn $A = \sum_{i=1}^{100} (-1)^i 2^i = 2^{100} - 2^{99} + 2^{98} - 2^{97} + \dots + 2^2 - 2$.

Bài toán 1.56 (Bình, 2022, 45., p. 12). Rút gọn $B = \sum_{i=1}^{100} (-1)^i 3^i = 3^{100} - 3^{99} + 3^{98} - 3^{97} + \dots + 3^2 - 3 + 1$.

Bài toán 1.57 (Bình, 2022, 46., p. 12). Cho $C = \sum_{i=1}^{99} \frac{1}{3^i} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{99}}$. Chứng minh $C < \frac{1}{2}$.

Bài toán 1.58 (Bình, 2022, 47., p. 12). Chứng minh $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2} < 1$.

Bài toán 1.59 (Bình, 2022, 48.^{*}, p. 12). *Chứng minh $\sum_{i=1}^{100} \frac{i}{3^i} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots + \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4}$.*

Bài toán 1.60 (Bình, 2022, 49., p. 12). *Ta không có $2^m + 2^n = 2^{m+n}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$. Nhưng có những số nguyên dương m, n có tính chất trên. Tìm các số đó.*

Bài toán 1.61 (Bình, 2022, 50.^{*}, p. 12). *Tìm $m, n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $2^m - 2^n = 256$.*

Bài toán 1.62 (Bình, 2022, 51.^{*}, p. 12). *Cho 1 bảng vuông 3×3 ô. Trong mỗi ô của bảng viết số 1 hoặc số -1 . Gọi d_i là tích các số trên dòng i ($i = 1, 2, 3$), c_k là tích các số trên cột k ($k = 1, 2, 3$). (a) Chứng minh không thể xảy ra $d_1 + d_2 + d_3 + c_1 + c_2 + c_3 = 0$. (b) Xét bài toán trên đối với bảng vuông $n \times n$.*

Bài toán 1.63 (Bình, 2022, 52.^{*}, p. 12). *Cho n số x_1, \dots, x_n , mỗi số bằng 1 hoặc -1 . Biết tổng của n tích $x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, \dots, x_nx_1$ bằng 0. Chứng minh $n \vdots 4$.*

Tài liệu

Bình, Vũ Hữu (2022). *Nâng Cao & Phát Triển Toán 7, tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 152.