

Algebraic & Rational Fractions

Phân Thức Đại Số & Phân Thức Đại Số Hữu Tỷ

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 12 tháng 12 năm 2022

Tóm tắt nội dung

[EN] This text is a collection of problems, from easy to advanced, about algebraic & rational fractions. This text is also a supplementary material for my lecture note on Elementary Mathematics grade 8, which is stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/lecture)¹. The latest version of this text has been stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/algebraic & rational fractions](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/algebraic_rational_fractions)².

[VI] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài tập chọn lọc từ cơ bản đến nâng cao về phân thức đại số & phân thức đại số hữu tỷ. Tài liệu này là phần bài tập bổ sung cho tài liệu chính – bài giảng [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/lecture) của tác giả viết cho Toán Sơ Cấp lớp 8. Phiên bản mới nhất của tài liệu này được lưu trữ & có thể tải xuống ở link sau: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/algebraic & rational fractions](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/algebraic_rational_fractions).

Mục lục

1 Tính Chất Cơ Bản của Phân Thức. Rút Gọn Phân Thức	2
2 Các Phép Toán về Phân Thức Đại Số	4
2.1 Phép Cộng & Phép Trừ Các Phân Thức Đại Số	4
Tài liệu	4

Định Nghĩa & Tính Chất Cơ Bản

Definition 0.1 (Algebraic fraction). “In *algebra*, an algebraic fraction is a *fraction* whose numerator & denominator are *algebraic expressions*.” – [Wikipedia/algebraic fraction](https://en.wikipedia.org/wiki/Algebraic_fraction)

“Algebraic fractions are subject to the same laws as *algebraic expressions*.” – [Wikipedia/algebraic fraction](https://en.wikipedia.org/wiki/Algebraic_fraction)

Definition 0.2 (Rational fraction). A rational fraction is an algebraic fraction whose numerator & denominator are both *polynomials*.

1. Phân thức đại số là 1 biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, trong đó A, B là những đa thức & $B \neq 0$. Đặc biệt: Mỗi đa thức cũng được coi như 1 phân thức với mẫu thức bằng 1. **2.** $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ nếu $AD = BC$, $B \neq 0$, $D \neq 0$. **3.** Tính chất cơ bản của phân thức: $\frac{A}{B} = \frac{AM}{BM}$, M là đa thức khác đa thức không 0; $\frac{A}{B} = \frac{A:N}{B:N}$, N là 1 nhân tử chung của A & B . Đặc biệt với $N = -1$, $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$ (quy tắc đổi dấu). **4.** Rút gọn phân thức: Phân tích tử & mẫu thành nhân tử (nếu cần) để tìm nhân tử chung; Chia cả tử & mẫu cho nhân tử chung (nếu có). **5.** Quy đồng mẫu của nhiều phân thức: Phân tích các mẫu thành nhân tử rồi tìm mẫu thức chung; Tìm nhân tử phụ của mỗi mẫu thức; Nhân tử & mẫu của mỗi phân thức với nhân tử phụ tương ứng.

Bổ sung. Phân số $\frac{a}{b}$ là 1 trường hợp đặc biệt của phân thức $\frac{A}{B}$ khi A, B là những đa thức bậc 0. Vì vậy tính chất cơ bản của phân số là 1 trường hợp đặc biệt của tính chất cơ bản của phân thức đại số.” – Tuyen, 2022, pp. 37–38

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam

e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

¹URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/NQBH_elementary_mathematics_grade_8.pdf.

²URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/algebraic_rational_fractions/NQBH_algebraic_rational_fractions.pdf.

1 Tính Chất Cơ Bản của Phân Thức. Rút Gọn Phân Thức

Bài toán 1 (Bình et al., 2021, Ví dụ 5.1, p. 39). Dùng định nghĩa 2 phân thức bằng nhau, chứng minh 2 phân thức sau bằng nhau: $\frac{a^2 - 2ab - 3b^2}{a^2 - 4ab + 3b^2} \mathcal{E} \frac{a+b}{a-b}$ với $a \neq b$ và $a \neq 3b$.

Bài toán 2 (Bình et al., 2021, Ví dụ 5.2, p. 39). Dùng định nghĩa 2 phân thức bằng nhau, xét sự bằng nhau của 2 phân thức $\frac{(3x+2)(x+5)}{4(3x+2)} \mathcal{E} \frac{x+5}{4}$ trong các trường hợp biến x thuộc các tập hợp sau: (a) $x \in \mathbb{N}$; (b) $x \in \mathbb{Z}$; (c) $x \in \mathbb{Q}$.

Bài toán 3 (Bình et al., 2021, Ví dụ 5.3, p. 39). So sánh $C = \frac{2013^2 - 2012^2}{2013^2 + 2012^2}$ với $D = \frac{2013 - 2012}{2013 + 2012}$.

Bài toán 4 (Bình et al., 2021, Ví dụ 5.4, p. 40). Chứng minh: $\sum_{i=0}^{63} a^i = \prod_{i=0}^5 (1 + a^{2^i})$, i.e., $1 + a + a^2 + \dots + a^{63} = (1+a)(1+a^2)(1+a^4)\dots(1+a^{32})$.

Bài toán 5 (Bình et al., 2021, Ví dụ 5.5, p. 40). Rút gọn phân thức: $A = \frac{x^3 - 7x + 6}{x^3 + 5x^2 - 2x - 24}$.

Bài toán 6 (Bình et al., 2021, Ví dụ 5.6, p. 40). Rút gọn phân thức: $B = \frac{a^{30} + a^{20} + a^{10} + 1}{a^{2042} + a^{2032} + a^{2022} + a^{2012} + a^{30} + a^{20} + a^{10} + 1}$.

Bài toán 7 (Bình et al., 2021, 5.1, p. 41). Dùng định nghĩa 2 phân thức bằng nhau, tìm đa thức A trong các trường hợp sau: (a) $\frac{A}{3x-2} = \frac{15x^2+10x}{9x^2-4}$; (b) $\frac{3x^2-5x-2}{A} = \frac{x-2}{2x-3}$; (c) $\frac{x^2-4}{x^2+x-6} = \frac{x^2+4x+4}{A}$; (d) $\frac{2x+1}{x^3+x^2-x+2} = \frac{A}{x^3+1}$.

Bài toán 8 (Bình et al., 2021, 5.2, p. 41). Biến đổi mỗi phân thức sau thành 1 phân thức bằng nó và có tử thức là đa thức B cho sau đây: (a) $\frac{2x-5}{3x^2+4} \mathcal{E} B = 2x^2 - 3x - 5$; (b) $\frac{(x+1)(x^2+x-6)}{(x^2-9)(x^2+3x+2)} \mathcal{E} B = x - 2$.

Bài toán 9 (Bình et al., 2021, 5.3, p. 41). Rút gọn biểu thức: (a) $\frac{2^{18} \cdot 54^3 + 15 \cdot 4^{10} \cdot 9^4}{2 \cdot 12^9 + 6^{10} \cdot 2^{10}}$; (b) $\frac{4^{15} \cdot 27^6 \cdot 42 - 3 \cdot 72^{10}}{4^4 \cdot 25 \cdot 36^{10} - 4^5 \cdot 6^{19} \cdot 35}$; (c) $\frac{880 \cdot (15^2 \cdot 3^{18} + 27^7)}{4^2 \cdot 15^4 \cdot 3^{16} - 2^4 \cdot 9^{11}}$.

Bài toán 10 (Bình et al., 2021, 5.4, p. 41). Rút gọn: (a) $M = \frac{4024 \cdot 2014 - 2}{2011 + 2012 \cdot 2013}$; (b) $N = \frac{2012 \cdot 2013 + 2014}{2010 - 2012 \cdot 2015}$; (c) $P = \frac{66666 \cdot 87564}{22222 \cdot 87560}$.

Bài toán 11 (Bình et al., 2021, 5.5, p. 41). Rút gọn các phân thức sau: (a) $Q = \frac{x^2+2x-8}{x^2+x-12}$; (b) $R = \frac{3x^2+5xy-2y^2}{3x^2-7xy+2y^2}$; (c) $S = \frac{x^6-14x^4+49x^2-36}{x^4+4x^3-x^2-16x-12}$; (d) $T = \frac{x^6-y^6}{x^6+2x^4y^2+2x^2y^4+y^6}$.

Bài toán 12 (Bình et al., 2021, 5.6, pp. 41–42). Rút gọn: (a) $A = \frac{a^4-5a^2+4}{a^4-a^2+4a-4}$; (b) $B = \frac{a^3-3a+2}{2a^3-7a^2+8a-3}$; (c) $C = \frac{a^2-2ab+b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca}$; (d) $D = \frac{a^3-7a+6}{a^2(a+3)^3-4a(a+3)^3+4(a+3)^3}$; (e) $E = \frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$.

Bài toán 13 (Bình et al., 2021, 5.7, p. 42). Rút gọn các phân thức sau: (a) $A = \frac{xy^2-xz^2-y^3+yz^2}{x^2(z-y)+y^2(x-z)+z^2(y-x)}$; (b) $B = \frac{x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)}{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)}$.

Bài toán 14 (Bình et al., 2021, 5.8, p. 42). Rút gọn các phân thức sau: (a) $A = \frac{(x+y+z)^2-3xy-3yz-3zx}{9xyz-3x^3-3y^3-3z^3}$; (b) $B = \frac{x^3-y^3+z^3+3xyz}{(x+y)^2+(y+z)^2+(z-x)^2}$; (c) $C = \frac{(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3}{(x^2-y^2)^3+(y^2-z^2)^3+(z^2-x^2)^3}$.

Bài toán 15 (Bình et al., 2021, 5.9, p. 42). Rút gọn các phân thức sau với $n \in \mathbb{N}^*$: (a) $\frac{(n+2)!}{n!(n+2)(n+3)}$; (b) $\frac{n!}{n!+(n-1)!}$; (c) $\frac{(n+3)!-(n+2)!}{(n+2)!+(n+3)!}$.

Bài toán 16 (Bình et al., 2021, 5.10, p. 42). Chứng minh các phân số sau là tối giản $\forall n \in \mathbb{N}$: (a) $\frac{3n+2}{4n+3}$; (b) $\frac{12n+1}{2(10n+1)}$; (c) $\frac{2n+3}{2n^2+4n+1}$.

Bài toán 17 (Bình et al., 2021, 5.11, p. 42). Chứng minh phân số $\frac{n^7+2n^2+n+2}{n^8+n^2+2n+2}$ không tối giản, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Bài toán 18 (Bình et al., 2021, 5.12, p. 42). Viết gọn biểu thức sau dưới dạng 1 phân thức: $P = (x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)(x^{16} - x^8 + 1)(x^{32} + x^{16} + 1)$.

Bài toán 19 (Bình et al., 2021, 5.13, p. 42). Rút gọn phân thức: (a) $\frac{|x-2|+|x-1|+x}{2x^2-7x+3}$ với $x < 1$; (b) $\frac{|x-4||x-5|}{x^3-9x^2+20x}$ với $4 < x < 5$.

Bài toán 20 (Bình et al., 2021, 5.14, p. 43). Rút gọn các phân thức sau: (a) $T = \frac{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)+1}{x^2+7x+11}$; (b) $U = \frac{x^3-53x+88}{(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+16}$.

Bài toán 21 (Bình et al., 2021, 5.15, p. 43). Cho $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ & $x, y, z \neq 0$. Chứng minh: $\frac{x^2+y^2+z^2}{(ax+by+cz)^2} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}$.

Bài toán 22 (Bình et al., 2021, 5.16, p. 43). Cho $ax+by+cz=0$. Rút gọn phân thức: $V = \frac{ax^2+by^2+cz^2}{bc(y-z)^2+ca(z-x)^2+ab(x-y)^2}$.

Bài toán 23 (Bình et al., 2021, 5.17, p. 43). Cho $x+y+z=0$. Chứng minh: $\frac{9(x^2+y^2+z^2)}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2} = 3$.

Bài toán 24 (Bình et al., 2021, 5.18, p. 43). Chứng minh: $\frac{x^2+y^2-z^2-2zt+2xy-t^2}{x+y-z-t} = \frac{x^2-y^2+z^2-2zt+2xz-t^2}{x-y+z-t}$.

Bài toán 25 (Bình et al., 2021, 5.19, p. 43). Rút gọn: $X = \frac{(2^4+4)(6^4+4)(10^4+4)(14^4+4)}{(4^4+4)(8^4+4)(12^4+4)(16^4+4)}$.

Bài toán 26 (Tuyên, 2022, Ví dụ 16, p. 38). Cho $\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{5}{8}$, rút gọn phân thức $P = \frac{x^2-2xy+y^2}{x^2+2xy+y^2}$.

Giải. $\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{5}{8} \Rightarrow x^2+y^2 = \frac{8}{5}xy \Rightarrow P = \frac{\frac{8}{5}xy-2xy}{\frac{8}{5}xy+xy} = \frac{(\frac{8}{5}-2)xy}{(\frac{8}{5}+2)xy} = \frac{\frac{8}{5}-2}{\frac{8}{5}+2} = -\frac{1}{9}$. □

Bài toán 27 (Tuyên, 2022, 151., p. 38). So sánh: (a) $A = \frac{201-200}{201+200}$ & $B = \frac{201^2-200^2}{201^2+200^2}$. (b) $C = \frac{1999 \cdot 4001 + 2000}{2000 \cdot 4001 - 2001}$ & $D = \frac{1501 \cdot 1503 - 1500 \cdot 1498}{6002}$.

Giải. (a) Có $A = \frac{201-200}{201+200} = \frac{(201-200)(201+200)}{(201+200)^2} = \frac{201^2-200^2}{201^2+2 \cdot 200 \cdot 201+200^2} < \frac{201^2-200^2}{201^2+200^2} = B$. (b) Đặt $x := 2000$, $y := 1500$. $C = \frac{(x-1)(2x+1)+x}{x(2x+1)-(x+1)} = \frac{2x^2-1}{2x^2-1} = 1$. $D = \frac{(y+1)(y+3)-y(y-2)}{4y+2} = \frac{3(2y+1)}{2(2y+1)} = \frac{3}{2}$. Suy ra $C < D$. □

Bài toán 28 (Mở rộng Tuyên, 2022, 151. (a), p. 38). Biện luận theo các tham số $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq -b$, $(a, b) \neq (0, 0)$ để so sánh $A = \frac{a-b}{a+b}$ & $B = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

Giải. $A - B = \frac{a-b}{a+b} - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \frac{(a-b)(a^2+b^2)-(a+b)(a^2-b^2)}{(a+b)(a^2+b^2)} =$. □

Bài toán 29 (Tuyên, 2022, 152., p. 39). Chứng minh: $\forall n \in \mathbb{N}$, (a) Phân số $A = \frac{n^3-1}{n^5+n+1}$ không tối giản; (b) Phân số $B = \frac{6n+1}{8n+1}$ tối giản; (c) Phân số $C = \frac{10n^2+9n+4}{20n^2+20n+9}$ tối giản. Có thể mở rộng từ \mathbb{N} lên \mathbb{Z} được không?

Bài toán 30 (Tuyên, 2022, 153., p. 39). Viết mỗi đa thức sau dưới dạng 1 phân thức đại số với tử & mẫu là những đa thức có 2 hạng tử: (a) $A = \sum_{i=0}^{19} x^i = x^{19} + x^{18} + x^{17} + \dots + x + 1$; (b) $B = (x+1)(x^2+1)(x^4+1) \dots (x^{32}+1)$.

Bài toán 31 (Tuyên, 2022, 154., p. 39). Rút gọn các phân thức: (a) $A = \frac{n!}{(n-1)!(n+1)}$; (b) $\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}$.

Bài toán 32 (Tuyên, 2022, 155., p. 39). *Rút gọn các phân thức:*

$$(a) A = \frac{(x^2 - y)(y + 1) + x^2 y^2 - 1}{(x^2 + y)(y + 1) + x^2 y^2 + 1}; (b) B = \frac{x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)}{x^2 y - x^2 z + y^2 z - y^3}.$$

Bài toán 33 (Tuyên, 2022, 156., p. 39). *Rút gọn các phân thức:* (a) $\frac{x^4 - 4x^2 + 3}{x^4 + 6x^2 - 7}$; (b) $\frac{x^4 + x^3 - x - 1}{x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1}$; (c) $\frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 - 3x + 2}$.

Bài toán 34 (Tuyên, 2022, 157., p. 39). *Rút gọn các phân thức:* (a) $\frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^3 + 8x^2 + 17x + 10}$; (b) $\frac{x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 1}{x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1}$.

Bài toán 35 (Tuyên, 2022, 158., p. 39). Cho $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, rút gọn phân thức $P = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(ax + by + cz)^2}$.

Bài toán 36 (Tuyên, 2022, 159., p. 40). Cho $x + y + z = 0$, $\& x, y, z \neq 0$, rút gọn các phân thức sau:

$$(a) P = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2}; (b) Q = \frac{(x^2 + y^2 - z^2)(y^2 + z^2 - x^2)(z^2 + x^2 - y^2)}{16xyz}.$$

Bài toán 37 (Tuyên, 2022, 160., p. 40). Cho $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$, rút gọn phân thức $P = \frac{xyz}{(x + y)(y + z)(z + x)}$.

2 Các Phép Toán về Phân Thức Đại Số

2.1 Phép Cộng & Phép Trừ Các Phân Thức Đại Số

“1. (a) Muốn cộng 2 phân thức cùng mẫu, ta cộng các tử thức với nhau & giữ nguyên mẫu thức. (b) Muốn cộng 2 phân thức có mẫu thức khác nhau, ta quy đồng mẫu thức rồi cộng các phân thức cùng mẫu vừa tìm được. 2. Phép cộng các phân thức cũng có các tính chất giao hoán, kết hợp. 3. 2 phân thức được gọi là *đối nhau* nếu tổng của chúng bằng 0. $-\frac{A}{B} = \frac{-A}{B}$, $-\frac{-A}{B} = \frac{A}{B}$. 4. $\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A}{B} + (-\frac{C}{D})$. 5. Từ cách tìm phân thức đối của 1 phân thức ta có quy tắc đổi dấu (thứ 2): Nếu đổi dấu của tử thức (hoặc mẫu thức) đồng thời đổi dấu đứng trước phân thức thì được 1 phân thức bằng phân thức đã cho. $\frac{A}{B} = -\frac{-A}{B} = -\frac{A}{-B}$.” – Tuyên, 2022, Chap. 2, §2, p. 40

Bài toán 38 (Tuyên, 2022, Ví dụ 17, p. 41). *Thực hiện các phép tính:* $A = \frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-z)(y-x)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$.

Bài toán 39 (Tuyên, 2022, Ví dụ 18, p. 41). *Thực hiện các phép tính:* $B = \frac{x^2 - yz}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2 - zx}{(y+z)(y+x)} + \frac{z^2 - xy}{(z+x)(z+y)}$.

Tài liệu

Bình, Vũ Hữu et al. (2021). *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 8. Tập 1: Đại Số*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 264.

Tuyên, Bùi Văn (2022). *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 8*. Tái bản lần thứ 17. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 326.