Problems in Elementary Inequality

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 19 tháng 5 năm 2023

Tóm tắt nội dung

A problem set for elementary inequality.

Mục lục

1 Cauchy-Schwarz Inequality – Bất Đẳng Thức Cauchy-Schwarz

The most basic inequality: $x^2 \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.

Bài toán 1 (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho 2 số không âm)**.** *Chứng minh:*

$$\boxed{a + b \ge 2\sqrt{ab},\ \forall a, b \in \mathbb{R},\ a, b \ge 0.}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 2. *Với m, n, p nào thì bất đẳng thức $ma + nb \ge p\sqrt{ab}$ luôn đúng: (a) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \ge 0$. (b) $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Bài toán 3 (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho 3 số không âm)**.** *Chứng minh:*

$$\boxed{a + b + c \ge 3\sqrt[3]{abc},\ \forall a, b, c \in \mathbb{R},\ a, b, c \ge 0.}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 4. *Với m, n, p, q nào thì bất đẳng thức $ma + nb + pc \ge q\sqrt[3]{abc}$ luôn đúng: (a) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $a, b, c \ge 0$. (b) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Bài toán 5 (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho n số không âm)**.** *Chứng minh:*

$$\sum_{i=1}^n a_i \ge n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i},\ \text{i.e., } a_1 + a_2 + \cdots + a_n \ge \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall a_i \in \mathbb{R},\ a_i \ge 0,\ \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 6. *Với bộ $(m, m_1, m_2, \ldots, m_n)$ nào thì bất đẳng thức:*

$$\sum_{i=1}^n m_ia_i \ge m\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i},\ \text{i.e., } m_1a_1 + m_2a_2 + \cdots + m_na_n \ge m\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,$$

đúng với: (a) $\forall a_i \in \mathbb{R}$, $a_i \ge 0$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. (b) $\forall a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

2 Miscellaneous

Bài toán 7 ([Sơn+21], Bổ đề 1.1, p. 5). *Chứng minh:* $4ab \le (a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$, *hay có thể viết dưới dạng* $\frac{a^2+b^2}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, $ab \le \frac{(a+b)^2}{4}$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Bài toán 8 ([Sơn+21], Bổ đề 1.2, p. 5). *Chứng minh:* $3(ab+bc+ca) \le (a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)$, *hay có thể viết dưới dạng* $ab+bc+ca \le \frac{1}{3}(a+b+c)^2$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Bài toán 9 ([Sơn+21], Bổ đề 1.3, p. 6). *Chứng minh:* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b}$, *hay có thể viết dưới dạng* $\frac{1}{a+b} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$, $\forall a,b>0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Bài toán 10 ([Sơn+21], Bổ đề 1.4, p. 6). *Chứng minh:* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c}$, *hay có thể viết dưới dạng* $\frac{1}{a+b+c} \le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$, $\forall a,b,c>0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Bài toán 11 ([Sơn+21], Mở rộng Bổ đề 1.3–1.4, p. 6 cho n số). *Chứng minh:*

$$\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n} \ge \frac{n^2}{a_1+\cdots+a_n},\ i.e.,\ \frac{1}{a_1+\cdots+a_n} \le \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right),\ \forall a_i>0,\ \forall i=1,\ldots,n,$$

hay có thể được viết gọn lại như sau:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \ge \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n a_i},\ i.e.,\ \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i} \le \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i},\ \forall a_i>0,\ \forall i=1,\ldots,n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 12 ([Sơn+21], Bổ đề 1.5, p. 7). *Chứng minh:* $\sqrt{a+b} \le \sqrt{a}+\sqrt{b} \le \sqrt{2(a+b)}$, $\forall a,b \ge 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Bài toán 13 ([Sơn+21], Mở rộng Bổ đề 1.5, p. 7). *Chứng minh:* $\sqrt{a+b+c} \le \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \le \sqrt{3(a+b+c)}$, $\forall a,b,c \ge 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Bài toán 14 ([Sơn+21], Mở rộng Bổ đề 1.5, p. 7 cho n số). *Chứng minh:* $\sqrt{a_1+\cdots+a_n} \le \sqrt{a_1}+\cdots+\sqrt{a_n} \le \sqrt{n(a_1+\cdots+a_n)}$, $\forall a_i \ge 0$, $\forall i=1,\ldots,n$, *hay có thể được viết gọn lại như sau:*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i} \le \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \le \sqrt{n\sum_{i=1}^n a_i},\ \forall a_i \ge 0,\ \forall i=1,\ldots,n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 15 ([Sơn+21], Bổ đề 1.6, p. 7). *Chứng minh:* $a^3+b^3 \ge ab(a+b)$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a+b \ge 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Bài toán 16 ([Sơn+21], Mở rộng Bổ đề 1.6, p. 7). *Chứng minh:* $a^4+b^4 \ge ab(a^2+b^2)$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Tài liệu

[Sơn+21] Nguyễn Ngọc Sơn, Chu Đình Nghiệp, Lê Hải Trung, and Võ Quốc Bá Cẩn. *Các Chủ Đề Bất Đẳng Thức Ôn Thi Vào Lớp 10*. Tái bản lần thứ 3. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2021, p. 143.