Some Topics in Elementary Mathematics/Grade 8

Nguyễn Quản Bá Hồng[1]

Ngày 5 tháng 8 năm 2022

[1]Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

Mục lục

Preface

Ký Hiệu, Viết Tắt, Quy Ước – Notation, Abbreviation, Convention

Ký Hiệu – Notation

- $\wedge$: và, (logical) and.
- $\vee$: hoặc, (logical) or.
- Σ: tổng, sum, e.g., $\sum_{i=a}^{b} f(i) = f(a) + f(a+1) + \cdots + f(b-1) + f(b)$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $a \le b$.
- $\prod$: tích, product, e.g., $\prod_{i=a}^{b} f(i) = f(a)f(a+1)\cdots f(b-1)f(b)$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $a \le b$.

Viết Tắt – Abbreviation

- **abbr.** (abbr., abbreviation): viết tắt, abbreviation, for short.
- **i.e.** stands for the Latin *id est*, or 'that is,' & is used in front of a word or phrase that restates what has been said previously: tức là, nghĩa là, that is, that means, in another term.
- **e.g.** stands for *exempli gratia* in Latin: ví dụ là, chẳng hạn, for example, for instance.
- **w.l.o.g.** (abbr., without loss of generality): không mất tính tổng quát.

Quy Ước – Convention

Phần I

Đại Số – Algebra

Chương 1

Phép Nhân & Phép Chia Các Đa Thức

1.1 Nhân Đơn Thức với Đa Thức

1.1.1 Quy tắc

"Muốn nhân 1 đơn thức với 1 đa thức, ta nhân đơn thức với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các tích với nhau." – Chính et al., 2011, p. 4.

Ví dụ 1.1.1 (Đơn thức 1 biến nhân đa thức 1 biến)**.** *Phép nhân 1 đơn thức 1 biến ax^m với 1 đa thức bậc n được thực hiện như sau:*

$$\begin{aligned} ax^m\sum_{i=0}^n a_ix^i &= ax^m\left(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0\right) \\ &= aa_nx^{m+n} + aa_{n-1}x^{m+n-1} + \cdots + aa_1x^{m+1} + aa_0x^m,\ \forall a, a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, \ldots, n,\ \forall m, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.1.2 (Đơn thức ≤ 2 biến nhân đa thức ≤ 2 biến)**.** *Phép nhân 1 đơn thức 2 biến $ax^{m_1}y^{m_2}$ với 1 đa thức 2 biến được thực hiện như sau:*

$$ax^{m_1}y^{m_2}\cdot\left(\sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2} a_{ij}x^iy^j\right) = \sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2} aa_{ij}x^{m_1+i}y^{m_2+j},\ \forall a, a_{ij} \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n_1,\ j = 0, \ldots, n_2,\ \forall m_i, n_i \in \mathbb{N},\ i = 1, 2.$$

Tổng quát,

Ví dụ 1.1.3 (Đơn thức $\le k$ biến nhân đa thức $\le k$ biến)**.** *Với $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$ cho trước. Phép nhân 1 đơn thức k biến $ax_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_k^{m_k} = a\prod_{i=1}^k x_i^{m_i}$ với 1 đa thức k biến được thực hiện như sau:*

$$\begin{aligned} a\prod_{i=1}^k x_i^{m_i}\left(\sum_{i_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{i_k=0}^{n_k} a_{i_1\ldots i_k}\prod_{j=1}^k x_j^{i_j}\right) &= ax_1^{m_1}\ldots x_k^{m_k}\sum_{i_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{i_k=0}^{n_k} a_{i_1\ldots i_k}x_1^{i_1}\ldots x_k^{i_k} \\ &= \sum_{i_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{i_k=0}^{n_k} aa_{i_1\ldots i_k}x_1^{m_1+i_1}\ldots x_k^{m_k+i_k}, \end{aligned}$$

$\forall a, a_{i_1\ldots i_k} \in \mathbb{R},\ i_1 = 0, \ldots, n_1; \ldots; i_k = 0, \ldots, n_k,\ \forall m_i, n_i \in \mathbb{N},\ i = 1, \ldots, k.$[1]

1.2 Nhân Đa Thức với Đa Thức

1.2.1 Quy tắc

"Muốn nhân 1 đa thức với 1 đa thức, ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau." "Tích của 2 đa thức là 1 đa thức." – Chính et al., 2011, p. 7. Tổng quát, muốn nhân 2 đa thức bậc P, Q lần lượt có bậc m, n (ký hiệu $\deg P = m, \deg Q = n$), $P(x) = \sum_{i=0}^m a_ix^i$, $Q(x) = \sum_{i=0}^n b_ix^i$.

[1] Điều kiện $i_1 = 0, \ldots, n_1; \ldots; i_k = 0, \ldots, n_k$ có thể viết gọn hơn thành $(i_1, \ldots, i_k) \in \overline{0, n_1} \times \cdots \times \overline{0, n_k}$ với ký hiệu $\overline{0, n} := \{0, 1, \ldots, n\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.3 Những Hằng Đẳng Thức Đáng Nhớ

1.3.1 Bình phương của 1 tổng – Square of a sum

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,\ \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{sos}$$

"Với $a > 0$, $b > 0$, công thức này được minh họa bởi diện tích các hình vuông & hình chữ nhật trong hình vuông với cạnh có độ dài $a + b$. Với A & B là các biểu thức tùy ý, ta cũng có

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

" – Chính et al., 2011, p. 9. Bình phương của 1 tổng 2 số bằng tổng của tổng bình phương 2 số đó với 2 lần tích 2 số đó.

1.3.2 Bình phương của 1 hiệu – square of a difference

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,\ \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{sod}$$

Đẳng thức (sod) có thể thu được trực tiếp từ đẳng thức (sos) bằng cách thay b bởi $-b$. "Với 2 biểu thức tùy ý A & B, ta cũng có:

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2.$$

Bình phương của 1 hiệu 2 số bằng hiệu của tổng bình phương 2 số đó với 2 lần tích 2 số đó.

1.3.3 Hiệu 2 bình phương – Difference of 2 squares

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b),\ \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{1.3.1}$$

Với A & B là các biểu thức tùy ý, ta cũng có:

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B). \tag{1.3.2}$$

Bài toán 1.3.1 (Chính et al., 2011, **23.**, p. 12)**.** *Chứng minh các đẳng thức sau:*

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab,\ (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab,\ \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 1.3.2 (Chính et al., 2011, **25.**, p. 12)**.** *Tính (a)* $(a+b+c)^2$*; (b)* $(a+b-c)^2$*; (c)* $a-b-c)^2$.

Tổng quát hơn,

Bài toán 1.3.3. *Với* $n \in \mathbb{N}^\star$ *cho trước, tính* $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 = (a_1 + \cdots + a_n)^2$*, sau đó phát biểu đẳng thức tìm được bằng lời. Từ đó suy ra kết quả của* $\left(\sum_{i=1}^n \pm a_i\right)^2 = (\pm a_1 \pm \cdots \pm a_n)^2$.

1.3.4 Lập phương của 1 tổng – Cube of a sum

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,\ \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{1.3.3}$$

Với A & B là các biểu thức tùy ý ta cũng có:

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3.$$

1.3.5 Lập phương của 1 hiệu – Cube of a difference

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,\ \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{1.3.4}$$

Với A & B là các biểu thức tùy ý ta cũng có:

$$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3.$$

Lưu ý 1.3.1. *Vì* $x^{2n} = (-x)^{2n}$, $x^{2n+1} = -(-x)^{2n+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *nên*

$$(a-b)^{2n} = (b-a)^{2n},\ (a-b)^{2n+1} = -(b-a)^{2n+1},\ \forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.3.6 Tổng 2 lập phương – Sum of cubes

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), \ \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{1.3.5}$$

Với A & B là các biểu thức tùy ý ta cũng có:

$$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2).$$

Lưu ý 1.3.2. *"Ta quy ước gọi $A^2 - AB + B^2$ là* bình phương thiếu của hiệu *$A - B$." – Chính et al., 2011, p. 15*

1.3.7 Hiệu 2 lập phương – Difference of cubes

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2), \ \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{1.3.6}$$

Với A & B là các biểu thức tùy ý ta cũng có:

$$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2).$$

Lưu ý 1.3.3. *"Ta quy ước gọi $A^2 + AB + B^2$ là* bình phương thiếu của hiệu *$A + B$." – Chính et al., 2011, p. 15*

7 HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ.

$$\begin{aligned}
(A+B)^2 &= A^2 + 2AB + B^2,\\
(A-B)^2 &= A^2 - 2AB + B^2,\\
A^2 - B^2 &= (A+B)(A-B),\\
(A+B)^3 &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3,\\
(A-B)^3 &= A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3,\\
A^3 + B^3 &= (A+B)(A^2 - AB + B^2),\\
A^3 - B^3 &= (A-B)(A^2 + AB + B^2).
\end{aligned}$$

Bài toán 1.3.4 (Chính et al., 2011, **31.**, p. 16)**.** *Chứng minh rằng:*

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b), \ a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b), \ \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Áp dụng: Tính $a^3 + b^3$ biết $ab = m$ & $a + b = n$ với $m, n \in \mathbb{R}$ cho trước. Tính $a^3 - b^3$ biết $ab = m$ & $a - b = k$ với $m, k \in \mathbb{R}$ cho trước.

1.4 Phân Tích Đa Thức Thành Nhân Tử Bằng Phương Pháp Đặt Nhân Tử Chung

Định nghĩa 1.4.1 (Phân tích đa thức thành nhân tử)**.** Phân tích đa thức thành nhân tử (hay thừa số) *là biến đổi đa thức đó thành 1 tích của những đa thức.*

Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp đặt nhân tử chung. "Nhiều khi để làm xuất hiện nhân tử chung ta cần đổi dấu các hạng tử (lưu ý tới tính chất $A = -(-A)$)." – Chính et al., 2011, p. 18

1.5 Phân Tích Đa Thức Thành Nhân Tử Bằng Phương Pháp Dùng Hằng Đẳng Thức

Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp dùng hằng đẳng thức.

1.6 Phân Tích Đa Thức Thành Nhân Tử Bằng Phương Pháp Nhóm Hạng Tử

Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp nhóm hạng tử. "Đối với 1 đa thức có thể có nhiều cách nhóm những hạng tử thích hợp." – Chính et al., 2011, p. 21

1.7 Phân Tích Đa Thức Thành Nhân Tử Bằng Cách Phối Hợp Nhiều Phương Pháp

Bài toán 1.7.1 (Chính et al., 2011, **58.**, p. 25)**.** *Chứng minh rằng* $n^3 - n \vdots 6$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

1.8 Chia Đơn Thức Cho Đơn Thức

"Cho A & B là 2 đa thức, $B \neq 0$. Ta nói đa thức A chia hết cho đa thức B nếu tìm được 1 đa thức Q sao cho $A = B \cdot Q$. A được gọi là *đa thức bị chia*, B được gọi là đa thức chia, Q được gọi là *đa thức thương* (gọi tắt *thương*). Ký hiệu $Q = A : B$ hoặc $Q = \frac{A}{B}$. Trong Chính et al., 2011, §10, ta xét trường hợp đơn giản nhất của phép chia 2 đa thức, đó là phép chia đơn thức cho đơn thức." – Chính et al., 2011, p. 25

1.8.1 Quy tắc

"Ở lớp 7 ta đã biết:

$$x^m : x^n = \begin{cases} x^{m-n} & \text{nếu } m > n, \\ 1 & \text{nếu } m = n. \end{cases} \ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ m \geq n.$$

Đơn thức A chia hết cho đơn thức B khi mỗi biến của B đều là biến của A với số mũ không lớn hơn số mũ của nó trong A.

Quy tắc. Muốn chia đơn thức A cho đơn thức B (trường hợp A chia hết cho B) ta làm như sau:

- Chia hệ số của đơn thức A cho hệ số của đơn thức B.
- Chia lũy thừa của từng biến trong A cho lũy thừa của cùng biến đó trong B.
- Nhân các kết quả vừa tìm được với nhau.

Ví dụ 1.8.1 (Chia 2 đơn thức 1 biến)**.**

$$ax^m : bx^n = \frac{a}{b}x^{m-n},\ \forall a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0,\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ m \geq n.$$

Ví dụ 1.8.2 (Chia 2 đơn thức 2 biến)**.**

$$ax^{m_1}y^{m_2} : bx^{n_1}y^{n_2} = \frac{a}{b}x^{m_1-n_1}y^{m_2-n_2},\ \forall a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0,\ \forall m_i, n_i \in \mathbb{N},\ m_i \geq n_i,\ i = 1, 2.$$

Ví dụ 1.8.3 (Chia 2 đơn thức k biến)**.** *Cho* $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

$$ax_1^{m_1} \cdots x_k^{m_k} : bx_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k} = \frac{a}{b}x_1^{m_1-n_1} \cdots x_k^{m_k-n_k},\ \forall a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0,\ \forall m_i, n_i \in \mathbb{N},,\ m_i \geq n_i,\ i = 1, \ldots, k.$$

1.9 Chia Đa Thức Cho Đơn Thức

"Ta có quy tắc chia đa thức cho đơn thức (trường hợp các hạng tử của đa thức A đều chia hết cho đơn thức B) như sau:

Quy tắc. Muốn chia đa thức A cho đơn thức B (trường hợp các hạng tử của đa thức A đều chia hết cho đơn thức B), ta chia mỗi hạng tử của A cho B rồi cộng các kết quả với nhau." – Chính et al., 2011, p. 27. "Trong thực hành ta có thể tính nhẩm & bỏ bớt 1 số phép tính trung gian." – Chính et al., 2011, p. 28

1.10 Chia Đa Thức 1 Biến Đã Sắp Xếp

1.10.1 Phép chia hết

"Phép chia có dư bằng 0 là phép chia hết." – Chính et al., 2011, p. 30

1.10.2 Phép chia có dư

"Người ta chứng minh được rằng đối với 2 đa thức tùy ý A & B của cùng 1 biến ($B \neq 0$), tồn tại duy nhất 1 cặp đa thức Q & R sao cho $A = B \cdot Q + R$, trong đó R bằng 0 hoặc bậc của R nhỏ hơn bậc của B (R được gọi là *dư* trong phép chia A cho B). Khi $R = 0$ phép chia A cho B là phép chia hết." – Chính et al., 2011, p. 31

Chương 2

Phân Thức Đại Số

2.1 Phân Thức Đại Số

2.2 Tính Chất Cơ Bản của Phân Thức

2.3 Rút Gọn Phân Thức

2.4 Quy Đồng Mẫu thức Nhiều Phân Thức

2.5 Phép Cộng Các Phân Thức Đại Số

2.6 Phép Trừ Các Phân Thức Đại Số

2.7 Phép Nhân Các Phân Thức Đại Số

2.8 Phép Chia Các Phân Thức Đại Số

2.9 Biến Đổi Các Biểu Thức Hữu Tỷ. Giá Trị của Phân Thức

Chương 3

Phương Trình Đại Số 1 Ẩn – Algebraic Equation with 1 Unknown

3.1 Mở Đầu về Phương Trình

3.2 Phương Trình Bậc Nhất 1 Ẩn & Cách Giải

3.3 Phương Trình Đưa Được về Dạng $ax + b = 0$

3.4 Phương Trình Tích

3.5 Phương Trình Chứa Ẩn ở Mẫu

3.6 Giải Bài Toán Bằng Cách Lập Phương Trình

Chương 4

Bất Phương Trình Bậc Nhất 1 Ẩn – Algebraic Inequation with 1 Unknown

4.1 Liên Hệ Giữa Thứ Tự & Phép Cộng

4.2 Liên Hệ Giữa Thứ Tự & Phép Nhân

4.3 Bất Phương Trình 1 Ẩn

4.4 Bất Phương Trình Bậc Nhất 1 Ẩn

4.5 Phương Trình Chứa Dấu Giá Trị Tuyệt Đối

Phần II

Hình Học – Geometry

Chương 5

Tứ Giác

5.1 Tứ Giác

5.2 Hình Thang

5.3 Hình Thang Cân

5.4 Đường Trung Bình của Tam Giác, của Hình Thang

5.5 Dựng Hình Bằng Thước & Compa. Dựng Hình thang

5.6 Đối Xứng Trục

5.7 Hình Bình Hành

5.8 Đối Xứng Tâm

5.9 Hình Chữ Nhật

5.10 Đường Thẳng Song Song với 1 Đường Thẳng Cho Trước

5.11 Hình Thoi

5.12 Hình Vuông

Chương 6

Đa Giác. Diện Tích Đa Giác

6.1 Đa Giác. Đa Giác Đều

6.2 Diện Tích Hình Chữ Nhật

6.3 Diện Tích Tam Giác

6.4 Diện Tích Hình Thang

6.5 Diện Tích Hình Thoi

6.6 Diện Tích Đa Giác

Chương 7

Tam Giác Đồng Dạng

7.1 Định Lý Thales Trong Tam Giác

7.2 Định Lý Đảo & Hệ Quả của Định Lý Thales

7.3 Tính Chất Đường Phân Giác của Tam Giác

7.4 Khái Niệm 2 Tam Giác Đồng Dạng

7.5 Trường Hợp Đồng Dạng Thứ Nhất

7.6 Trường Hợp Đồng Dạng Thứ 2

7.7 Trường Hợp Đồng Dạng Thứ 3

7.8 Các Trường Hợp Đồng Dạng của Tam Giác Vuông

7.9 Ứng Dụng Thực Tế của Tam Giác Đồng Dạng

Chương 8

Hình Lăng Trụ Đứng. Hình Chóp Đều

A – Hình Lăng Trụ Đứng

8.1 Hình Hộp Chữ Nhật

8.2 Thể Tích của Hình Hộp Chữ Nhật

8.3 Hình Lăng Trụ Đứng

8.4 Diện Tích Xung Quanh của Hình Lăng Trụ Đứng

8.5 Thể Tích của Hình Lăng Trụ Đứng

B – Hình Chóp Đều

8.6 Hình Chóp Đều & Hình Chóp Cụt Đều

8.7 Diện Tích Xung Quanh của Hình Chóp Đều

8.8 Thể Tích của Hình Chóp Đều

Tài liệu tham khảo

[NQBH/elementary math] Nguyễn Quản Bá Hồng. *Some Topics in Elementary Mathematics: Problems, Theories, Applications, & Bridges to Advanced Mathematics*. Mar 2022–now.

Tài liệu tham khảo

Chính, Phan Đức et al. (2011). *Toán 8, tập 1.* Tái bản lần thứ 7. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 136.