

Algebraic Expression – Biểu Thức Đại Số

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 6 tháng 2 năm 2023

Tóm tắt nội dung

Nội dung. Biểu thức số, biểu thức đại số; đa thức 1 biến, nghiệm của đa thức 1 biến; phép cộng, phép trừ đa thức 1 biến; phép nhân đa thức 1 biến; phép chia đa thức 1 biến.

Mục lục

1	Biểu Thức Số. Biểu Thức Đại Số – Algebraic Expression	2
2	Đa Thức 1 Biến. Nghiệm của Đa Thức 1 Biến	3
3	Phép \pm Đa Thức 1 Biến	5
4	Phép Nhân Đa Thức 1 Biến	6
5	Phép Chia Đa Thức 1 Biến	7
6	Miscellaneous	8
	Tài liệu	8

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

1 Biểu Thức Số. Biểu Thức Đại Số – Algebraic Expression

“In mathematics, an *algebraic expression* is an **expression** built up from constant **algebraic numbers**, **variables**, & the **algebraic operations** (addition, subtraction, multiplication, division, & exponentiation by an exponent that is a rational number).” – [Wikipedia/algebraic expression](#)

“**[1]** Các số được nối với nhau bởi dấu của các phép tính tạo thành 1 biểu thức số. Đặc biệt mỗi số đều được coi là 1 biểu thức số. Khi thực hiện các phép tính trong 1 biểu thức số ta được 1 số. Số này gọi là *giá trị* của biểu thức đã cho. **[2]** Biểu thức chỉ chứa chữ hoặc chứa cả số & chữ gọi chung là *biểu thức đại số*. Đặc biệt biểu thức số cũng được coi là biểu thức đại số. Trong 1 biểu thức đại số, các chữ (nếu có) dùng để thay thế hay đại diện cho những số nào đó được gọi là các *biến số* (gọi tắt là các *biến*). Khi thực hiện các phép tính trên các chữ ta có thể áp dụng những tính chất, quy tắc các phép tính như trên các số. **[3]** Để cho gọn: Ta không viết dấu nhân giữa các biến cũng như giữa số & biến. Trong các biểu thức đại số như $\pm 1x$, ta không viết thừa số 1. **[4]** Muốn tính giá trị của 1 biểu thức đại số tại những giá trị cho trước của biến ta thay giá trị đã cho của mỗi biến vào biểu thức rồi thực hiện các phép tính. **[5]** Quy ước đọc & viết 1 biểu thức đại số có nhiều phép tính: Phép tính nào làm sau cùng thì đọc trước tiên. Phép tính nào làm trước tiên thì đọc sau.” – Tuyên, 2022, Chap. III, §1, p. 37

Biểu thức	Thứ tự thực hiện các phép tính	Cách đọc
$(x + y)^2$	Tính tổng \rightarrow Tính bình phương	Bình phương của tổng 2 số x, y
$(x - y)^2$	Tính hiệu \rightarrow Tính bình phương	Bình phương của hiệu 2 số x, y
$(x + y)^3$	Tính tổng \rightarrow Tính lập phương	Lập phương của tổng 2 số x, y
$(x - y)^3$	Tính hiệu \rightarrow Tính lập phương	Lập phương của hiệu 2 số x, y
$x^2 + y^2$	Tính bình phương của $x, y \rightarrow$ Tính tổng	Tổng các bình phương của 2 số x, y
$x^2 - y^2$	Tính bình phương của $x, y \rightarrow$ Tính hiệu	Hiệu các bình phương của 2 số x, y
$x^3 + y^3$	Tính lập phương của $x, y \rightarrow$ Tính tổng	Tổng các lập phương của 2 số x, y
$x^3 - y^3$	Tính lập phương của $x, y \rightarrow$ Tính hiệu	Hiệu các lập phương của 2 số x, y
$(x + y)(x - y)$	Tính tổng & hiệu \rightarrow Tính tích	Tích của tổng 2 số x, y với hiệu của chúng

Bài toán 1 (Thái et al., 2022, 6., p. 46). *Lãi suất ngân hàng quy định cho kỳ hạn 1 năm là $r\%$ /năm. Viết biểu thức đại số biểu thị số tiền lãi & tổng tiền gốc lẫn tiền lãi khi hết kỳ hạn 1 năm nếu gửi ngân hàng A đồng.*

Bài toán 2 (Thái et al., 2022, 7., p. 46). *Các nhà khoa học đã đưa ra cách ước tính chiều cao của trẻ em khi trưởng thành dựa trên chiều cao b của bố & chiều cao m của mẹ (b, m tính theo đơn vị cm) như sau: Chiều cao của con trai $= \frac{1}{2} \cdot 1.08(b + m)$, Chiều cao của con gái $= \frac{1}{2}(0.923b + m)$. (a) Với chiều cao nào của bố, mẹ thì con trai cao hơn, bằng, thấp hơn con gái?*

Bài toán 3 (Tuyên, 2022, Ví dụ 42, p. 37). *Cho $y = 5x$, tính giá trị của biểu thức $A = \frac{4x+y}{6x-y}$.*

Bài toán 4 (Mở rộng Tuyên, 2022, Ví dụ 42, p. 37). *Cho $y = kx$, tính giá trị của biểu thức:*

$$A = \frac{ax + by}{cx + dy}, \quad B = \frac{ax^2 + bxy + cy^2}{dx^2 + exy + fy^2}, \quad C = \frac{a_1x^3 + a_2x^2y + a_3xy^2 + a_4y^3}{b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3},$$

$$D = \frac{\sum_{i=0}^n a_i x^{n-i} y^i}{\sum_{i=0}^n b_i x^{n-i} y^i} = \frac{a_1x^n + a_2x^{n-1}y + \dots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n}{b_1x^n + b_2x^{n-1}y + \dots + b_{n-1}xy^{n-1} + b_ny^n},$$

với $a, b, c, d, e, f, a_i, b_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, n$.

Bài toán 5 (Tuyên, 2022, Ví dụ 43, p. 37). *Tính giá trị của biểu thức: $B = x^2 + 4xy - 3y^3$ với $|x| = 5, |y| = 1$.*

Nhận xét 1.1. “Biểu thức B có chứa 2 biến x, y . Biến x nhận 2 giá trị, biến y nhận 2 giá trị do đó ta phải xét đủ 4 trường hợp các cặp giá trị của x, y dẫn đến biểu thức B có 4 giá trị khác nhau.” – Tuyên, 2022, p. 38

Bài toán 6 (Tuyên, 2022, 150., p. 38). *Cho A là tổng lập phương các số tự nhiên từ 1 đến n & B là bình phương của tổng các số tự nhiên từ 1 đến n . Người ta đã chứng minh được $A = B$. Kiểm nghiệm lại bằng cách cho $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.*

Bài toán 7 (Tuyên, 2022, 151., p. 38). *Tính giá trị của các biểu thức sau với $x = \sqrt{2}$: (a) $(x+1)(x^2-2)$; (b) $(x-1)(x^2+1)+3$.*

Bài toán 8 (Tuyên, 2022, 152., p. 38). *Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{2x^2+3x-2}{x+2}$ tại: (a) $x = -1$; (b) $|x| = 3$.*

Bài toán 9 (Tuyên, 2022, 153., p. 38). *Tính giá trị của biểu thức $N = \frac{6x^2+x-3}{2x-1}$ với $|x| = \frac{1}{2}$.*

Bài toán 10 (Tuyên, 2022, 154., p. 38). *Tính giá trị của biểu thức $P = 9x^2 - 7x|y| - \frac{1}{4}y^3$ tại $x = \frac{1}{3}, y = -6$.*

Bài toán 11 (Tuyên, 2022, 155., p. 38). *Tìm các giá trị của biến để: (a) Biểu thức $(x+1)(y^2-6)$ có giá trị bằng 0. (b) Biểu thức $x^2-12x+7$ có giá trị lớn hơn 7.*

Bài toán 12 (Tuyên, 2022, 156., p. 38). *Tính giá trị của biểu thức $Q = \frac{5x^2+3y^2}{10x^2-3y^2}$ với $\frac{x}{3} = \frac{y}{5}$.*

Bài toán này là 1 trường hợp nhỏ của Bài toán 4: $B = \frac{ax^2+bx+cy^2}{dx^2+ex+fy^2}$ khi $k = \frac{5}{3}, a = 5, b = 0, c = 3, d = 10, e = 0, f = -3$.

Bài toán 13 (Tuyên, 2022, 157., p. 38). *Cho $x, y, z \in \mathbb{R}, x, y, z \neq 0, x - y - z = 0$. Tính giá trị của biểu thức $M = \left(1 - \frac{z}{x}\right) \left(1 - \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right)$.*

Bài toán 14 (Tuyên, 2022, 158., p. 38). *(a) Tìm GTNN của biểu thức $G: A = (x+2)^2 + \left(y - \frac{1}{5}\right)^2 - 10$. (b) Tìm GTLN của biểu thức: $B = \frac{4}{(2x-3)^2+5}$.*

Bài toán 15 (Tuyên, 2022, 159., p. 38). *Cho biểu thức $C = \frac{5-x}{x-2}$. Tìm giá trị nguyên của x để: (a) C có giá trị nguyên; (b) C có giá trị nhỏ nhất.*

2 Đa Thức 1 Biến. Nghiệm của Đa Thức 1 Biến

“**1** Đơn thức 1 biến là biểu thức đại số chỉ gồm 1 số hoặc 1 tích của 1 số thực với lũy thừa có số mũ nguyên dương của biến đó. Số thực gọi là *hệ số*, số mũ của lũy thừa gọi là *bậc* của đơn thức. E.g., đơn thức $-3x^4$ có hệ số là -3 , bậc 4. Số 5 là đơn thức có hệ số là 5, bậc 0 (vì $5 = 5x^0$). Số 0 cũng coi là 1 đơn thức nhưng nó không có bậc. **2** Với các đơn thức 1 biến ta có thể: Cộng/trừ 2 đơn thức cùng bậc bằng cách cộng/trừ các hệ số với nhau & giữ nguyên lũy thừa của biến. Nhân 2 đơn thức tùy ý bằng cách nhân 2 hệ số với nhau & nhân 2 lũy thừa của biến với nhau. **3** Đa thức 1 biến là tổng của những đơn thức của cùng 1 biến. Mỗi đơn thức trong tổng gọi là 1 *hạng tử* của đa thức. Đặc biệt, số 0 cũng được coi là 1 đa thức, gọi là *đa thức không*. Ta thường ký hiệu đa thức (1 biến) bằng 1 chữ cái in hoa. E.g., $A(x)$ là đa thức 1 biến x còn $A(y)$ là đa thức 1 biến y . **4** Thu gọn đa thức (1 biến) là làm cho đa thức đó không còn 2 đơn thức nào có cùng bậc của biến. Sắp xếp đa thức (1 biến) theo số mũ giảm dần (hoặc tăng dần) của biến là sắp xếp các hạng tử trong dạng đã thu gọn của đa thức đó theo số mũ giảm dần (hoặc tăng dần). **5** Bậc của 1 đa thức 1 biến đã thu gọn (khác đa thức không) là số mũ cao nhất của biến trong đa thức đó. *Chú ý:* Trong dạng thu gọn của đa thức, hệ số của lũy thừa với số mũ cao nhất của biến gọi là *hệ số cao nhất* của đa thức. Hạng tử không chứa biến gọi là *hạng tử tự do* của đa thức. **6** Nghiệm của đa thức 1 biến: Nếu tại $x = a$ mà đa thức $P(x)$ có giá trị bằng 0 (i.e., $P(a) = 0$) thì $x = a$ là 1 nghiệm của đa thức. **7** 1 đa thức (khác đa thức không) có thể có 1 nghiệm, 2 nghiệm, ... hoặc không có nghiệm nào (0 nghiệm). 1 đa thức bậc n có không quá n nghiệm. **8** Mỗi đa thức bậc nhất biến x đều có thể viết dưới dạng $ax + b$ trong đó hệ số a, b là các số cho trước (hằng số), $a \neq 0$. Ta gọi đa thức $ax + b$ như thế là *nhị thức bậc nhất*. Mỗi đa thức bậc 2 biến x đều có thể viết dưới dạng $ax^2 + bx + c$ trong đó các hệ số $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ ¹, là các số cho trước (hằng số thực). Ta gọi đa thức $ax^2 + bx + c$ như thế là *tam thức bậc 2*.” – Tuyên, 2022, Chap. III, §2, p. 39

Bài toán 16 (Thái et al., 2022, 3., p. 52–53). *Cho 2 đa thức $P(y) = -12y^4 + 5y^4 + 13y^3 - 6y^3 + y - 1 + 9$, $Q(y) = -20y^3 + 31y^3 + 6y - 8y + y - 7 + 11$. (a) Thu gọn mỗi đa thức trên rồi sắp xếp mỗi đa thức theo số mũ giảm dần của biến. (b) Tìm bậc, hệ số cao nhất & hệ số tự do của mỗi đa thức đó.*

Bài toán 17 (Thái et al., 2022, 3., pp. 52–53). *Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Chứng tỏ: (a) $P(0) = c$; (b) $P(1) = a + b + c$; (c) $P(-1) = a - b + c$. (d) Tính $P(2), P(-2), P(3), P(-3), P\left(\frac{1}{2}\right), P\left(-\frac{1}{2}\right)$. (e) Tính $P(x) + P(-x)$ với $x \in \mathbb{R}$. (f) Tính $P(x) + P\left(\frac{1}{x}\right)$ với $x \in \mathbb{R}$.*

Bài toán 18 (Thái et al., 2022, 6., p. 53). *Theo tiêu chuẩn của Tổ chức Y tế Thế Giới (WHO), đối với bé gái, công thức tính cân nặng chuẩn là $C = 9 + 2(N - 1)$ kg, công thức tính chiều cao chuẩn là $H = 75 + 5(N - 1)$ cm, trong đó N là số tuổi của bé gái. (a) Tính cân nặng chuẩn, chiều cao chuẩn của 1 bé gái 3 tuổi. (b) 1 bé gái 3 tuổi nặng 13.5kg & cao 86cm. Bé gái đó có đạt tiêu chuẩn về cân nặng & chiều cao của Tổ chức Y tế Thế giới hay không?*

Bài toán 19 (Thái et al., 2022, 7., p. 52–53). *Nhà bác học Galileo Galilei (1564–1642) là người đầu tiên phát hiện ra quãng đường chuyển động của vật rơi tự do tỷ lệ thuận với bình phương của thời gian chuyển động. Quan hệ giữa quãng đường chuyển động y m & thời gian chuyển động x s được biểu diễn gần đúng bởi công thức $y = 5x^2$. Trong 1 thí nghiệm vật lý, người ta thả 1 vật nặng từ độ cao 180m xuống đất (coi sức cản của không khí không đáng kể). (a) Sau 3s thì vật nặng còn cách mặt đất bao nhiêu m? (b) Khi vật nặng còn cách mặt đất 100m thì nó đã rơi được thời gian bao lâu? (c) Sau bao lâu thì vật chạm đất?*

¹Vì nếu $a = 0$, $ax^2 + bx + c$ trở thành đa thức bậc nhất $bx + c$ chứ không còn là 1 đa thức bậc 2 nữa.

Bài toán 20 (Thái et al., 2022, 8., p. 53). Pound là 1 đơn vị đo khối lượng truyền thống của Anh, Mỹ & 1 số quốc gia khác. Công thức tính khối lượng y kg theo x pound là $y = 0.45359237x$. (a) Tính giá trị của y kg khi $x = 100$ pound. (b) 1 hãng hàng không quốc tế quy định mỗi hành khách được mang 2 va li không tính cước; mỗi va li cân nặng không vượt quá 23 kg. Hỏi với va li cân nặng 50.99 pound sau khi quy đổi sang kilogram & được phép làm tròn đến hàng đơn vị thì có vượt quá quy định trên hay không?

Bài toán 21 (Tuyên, 2022, Ví dụ 44, p. 40). Cho các đơn thức $A = -\frac{4}{9}ax^3$, $B = \frac{3}{8}ax^5$ trong đó $a \in \mathbb{R}$ là số đã biết (hằng số). Có giá trị nào của biến x làm cho A & B cùng có giá trị âm không?

Nhận xét 2.1. “Trong đơn thức cũng như trong đa thức nói chung, ngoài chữ chỉ biến số có thể còn có những chữ khác đại diện cho những số đã biết mà ta gọi là hằng số.” – Tuyên, 2022, p. 40

Bài toán 22 (Tuyên, 2022, Ví dụ 45, p. 40). Cho các đa thức $f(x) = ax^3 + 4x(x^2 - 1) + 8$, $g(x) = x^3 - 4x(bx + 1) + c - 3$ trong đó $a, b, c \in \mathbb{R}$ là những hằng số. (a) Thu gọn & sắp xếp mỗi đa thức trên theo số mũ giảm dần của biến. (b) Xác định các hệ số a, b, c để $f(x) = g(x)$.

Nhận xét 2.2. “2 đa thức cùng biến bằng nhau \Leftrightarrow các hệ số của lũy thừa cùng bậc bằng nhau.” – Tuyên, 2022, p. 40

I.e., với $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $Q(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, $m, n \in \mathbb{N}$, $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, $\forall j = 1, \dots, m$, thì

$$P(x) = Q(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m = n, \\ a_i = b_i, \forall i = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Bài toán 23 (Tuyên, 2022, Ví dụ 46, p. 40). Cho đa thức $f(x) = x^2 + 4x - 5$. (a) Số -5 có phải là nghiệm của $f(x)$ không? (b) Viết tập hợp S tất cả ác nghiệm của $f(x)$.

Nhận xét 2.3. “Đa thức có tổng các hệ số bằng 0 thì có 1 nghiệm là 1. Nếu tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng các hệ số bậc lẻ thì đa thức có 1 nghiệm là -1 ” – Tuyên, 2022, p. 40

I.e., với $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, thì

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i &= 0 \Leftrightarrow P(1) = 0, \\ \sum_{i=0, i:2}^n a_i &= \sum_{i=0, i \not\equiv 2}^n a_i \Leftrightarrow P(-1) = 0. \end{aligned}$$

Thật vậy, vì $P(1) = \sum_{i=0}^n a_i 1^i = a_n 1^n + a_{n-1} 1^{n-1} + \cdots + a_1 1 + a_0 = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i$ & $P(-1) = \sum_{i=0}^n a_i (-1)^i = a_n (-1)^n + a_{n-1} (-1)^{n-1} + \cdots + a_1 (-1) + a_0 = \sum_{i=0, i:2}^n a_i - \sum_{i=0, i \not\equiv 2}^n a_i$.

Bài toán 24 (Tuyên, 2022, 160., p. 40). Cho biểu thức $M = (4a + 1)x^3$ với $a \in \mathbb{R}$ là hằng số. Hỏi biểu thức M có phải là đơn thức không? Nếu M là đơn thức thì cho biết bậc của M & hệ số của nó.

Bài toán 25 (Tuyên, 2022, 161., p. 40). Viết đơn thức $64x^6$ dưới dạng lũy thừa của 1 đơn thức.

Bài toán 26 (Tuyên, 2022, 162., p. 40). Cho 3 đơn thức $M = -5x$, $N = 11x$, $P = \frac{7}{5}x^2$. Chứng minh 3 đơn thức này không thể có cùng giá trị dương.

Bài toán 27 (Tuyên, 2022, 163., p. 41). Cho đơn thức $A = 5m(x^2)^2$, $B = -\frac{2}{m}x^4$ trong đó m là hằng số dương. (a) 2 đơn thức A & B có cùng bậc không? (b) Tính hiệu $A - B$. (c) Tính giá trị nhỏ nhất của hiệu $A - B$.

Bài toán 28 (Tuyên, 2022, 164., p. 41). Viết các số tự nhiên sau dưới dạng 1 đa thức thu gọn: (a) \overline{xxx} ; (b) $\overline{x1x2}$.

Bài toán 29 (Tuyên, 2022, 165., p. 41). Cho đa thức $A(x) = x^8 - 101x^7 + 101x^6 - 101x^5 + \cdots + 101x^2 - 101x + 25$. Tính $A(100)$.

Bài toán 30 (Tuyên, 2022, 166., p. 41). Cho $f(x) = (8x^2 + 5x - 10)^{49}(3x^3 - 10x^2 + 6x + 1)^{50}$. Sau khi thu gọn thì tổng các hệ số của $f(x)$ là bao nhiêu?

Bài toán 31 (Tuyên, 2022, 167., p. 41). Cho tam thức bậc 2 $f(x) = ax^2 + bx + c$ trong đó $7a + b = 0$. Hỏi $f(10)f(-3)$ có thể là số âm không?

Bài toán 32 (Tuyên, 2022, 168., p. 41). Cho nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$. Xác định các hệ số a, b . Biết $f(1) = 2$, $f(3) = 8$.

Bài toán 33 (Tuyên, 2022, 169., p. 41). Cho tam thức bậc 2 $f(x) = ax^2 + bx + c$. Xác định các hệ số a, b, c biết $f(1) = 4$, $f(-1) = 8$, & $a - c = -4$.

Bài toán 34 (Tuyên, 2022, 170., p. 41). Cho $f(x) = 2x^2 + ax + 4$ ($a \in \mathbb{R}$ là hằng số), $g(x) = x^2 - 5x - b$ ($b \in \mathbb{R}$ là hằng số). Tìm các hệ số a, b sao cho $f(1) = g(2)$ & $f(-1) = g(5)$.

Bài toán 35 (Tuyên, 2022, 171., p. 41). Tìm nghiệm của đa thức sau: (a) $(x - 3)(4 - 5x)$; (b) $x^2 - 2$; (c) $x^2 - \sqrt{3}$; (d) $x^2 + 2x$.

Bài toán 36 (Tuyên, 2022, 172., p. 41). Thu gọn rồi tìm nghiệm của đa thức sau: (a) $f(x) = x(1 - 2x) + (2x^2 - x + 4)$; (b) $g(x) = x(x - 5) - x(x + 2) + 7x$.

Bài toán 37 (Tuyên, 2022, 173., p. 41). Xác định hệ số m để các đa thức sau nhận 1 là nghiệm: (a) $mx^2 + 2x + 8$; (b) $7x^2 + mx - 1$; (c) $x^5 - 3x^2 + m$.

Bài toán 38 (Tuyên, 2022, 174., p. 41). Cho đa thức $f(x) = x^2 + mx + 2$. (a) Xác định m để $f(x)$ nhận -2 là 1 nghiệm. (b) Tìm tập hợp các nghiệm của $f(x)$ ứng với giá trị vừa tìm được của m .

Bài toán 39 (Tuyên, 2022, 175., p. 41). Cho các nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$ & $g(x) = bx + a$. Chứng minh nếu x_0 là nghiệm của $f(x)$ thì $\frac{1}{x_0}$ là nghiệm của $g(x)$.

Bài toán 40 (Tuyên, 2022, 176., p. 41). Cho biết $(x - 1)f(x) = (x + 4)f(x + 8)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh $f(x)$ có ít nhất 2 nghiệm.

Bài toán 41 (Mở rộng Tuyên, 2022, 176., p. 41). Cho biết $(x + a)f(x + b) = (x + c)f(x + d)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, khác nhau đôi một. Chứng minh $f(x)$ có ít nhất 2 nghiệm.

3 Phép \pm Đa Thức 1 Biến

“**1** Để cộng 2 đa thức 1 biến theo hàng ngang ta thực hiện theo các bước sau: (a) Viết mỗi đa thức vào trong ngoặc & nối với nhau bởi dấu cộng. (b) Bỏ dấu ngoặc rồi nhóm các hạng tử cùng bậc theo thứ tự giảm dần/tăng dần. (c) Thực hiện phép tính trong từng nhóm ta được tổng cần tìm. Ta cũng có thể cộng 2 đa thức 1 biến theo cột dọc bằng cách: (a) Thu gọn & sắp xếp mỗi đa thức theo thứ tự giảm dần/tăng dần. (b) Đặt các đa thức theo cột dọc, các hạng tử cùng bậc thẳng cột với nhau. (c) Cộng từng cột ta được tổng cần tìm. **2** Để trừ 2 đa thức 1 biến theo hàng ngang ta thực hiện như sau: (a) Viết mỗi đa thức vào trong ngoặc & nối với nhau bởi dấu trừ. (b) Bỏ dấu ngoặc rồi nhóm các hạng tử cùng bậc theo thứ tự giảm dần/tăng dần. (c) Thực hiện phép tính trong từng nhóm ta được hiệu cần tìm. Ta cũng có thể trừ 2 đa thức theo cột dọc, tương tự như cộng 2 đa thức theo cột dọc. **3** Phép cộng đa thức cũng có tính chất như phép cộng các số thực.” – Tuyên, 2022, Chap. III, §3, p. 42

Bài toán 42. Tính: (a) $ax^k + bx^k$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. (b) $ax^k + bx^k + cx^k$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. (c) $\sum_{i=1}^n a_i x^k = a_1 x^k + a_2 x^k + \dots + a_n x^k$, $\forall a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Bài toán 43 (Thái et al., 2022, Ví dụ 1, p. 55). Tính tổng của 2 đa thức: $P(x) = 5x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ & $Q(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x + 2$.

Bài toán 44 (Thái et al., 2022, 1., p. 59). Cho 2 đa thức: $R(x) = -8x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 5x + 1$ & $S(x) = x^4 - 8x^3 + 2x + 3$. Tính: (a) $R(x) + S(x)$; (b) $R(x) - S(x)$.

Bài toán 45 (Thái et al., 2022, 2., p. 59). Xác định bậc của 2 đa thức là tổng, hiệu của: $A(x) = -8x^5 + 6x^4 + 2x^2 - 5x + 1$ & $B(x) = 8x^5 + 8x^3 + 2x - 3$.

Bài toán 46 (Thái et al., 2022, 3., p. 59). Bác Ngọc gửi ngân hàng thứ nhất 90 triệu đồng với kỳ hạn 1 năm, lãi suất $x\%/năm$. Bác Ngọc gửi ngân hàng thứ 2 80 triệu đồng với kỳ hạn 1 năm, lãi suất $(x + 1.5)\%/năm$. Hết kỳ hạn 1 năm, bác Ngọc có được cả gốc & lãi là bao nhiêu: (a) Ở ngân hàng thứ 2? (b) Ở cả 2 ngân hàng?

Bài toán 47 (Thái et al., 2022, 4., p. 59). Người ta rót nước từ 1 can đựng 10 lít nước sang 1 bể rộng có dạng hình lập phương với độ dài cạnh 20cm. Khi mực nước trong bể cao h cm thì thể tích nước trong can còn lại là bao nhiêu? Biết $1l = 1dm^3$.

Bài toán 48 (Thái et al., 2022, 5., p. 59). D hay S? (a) Tổng của 2 đa thức bậc 4 luôn luôn là đa thức bậc 4. (b) Hiệu của 2 đa thức bậc 4 luôn luôn là đa thức bậc 4. (c) Tổng & hiệu của 2 đa thức bậc $n \in \mathbb{N}$ luôn là đa thức bậc n .

Bài toán 49 (Tuyên, 2022, Ví dụ 47, p. 42). Cho các đa thức biến x : $A = 7x + 5a$, $B = 2x - 9a$, $C = x + 10a$, trong đó a là hằng số, $a, x \in \mathbb{Z}$. Không cần thực hiện phép nhân, cho biết tích ABC có giá trị là 1 số chẵn hay lẻ?

Nhận xét 3.1. “Trong phép nhân các số nguyên, tích là 1 số lẻ thì tất cả các thừa số đều là số lẻ. Tích là số chẵn thì có ít nhất 1 thừa số là số chẵn.”

I.e., $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \cdots a_n : 2 \Leftrightarrow \exists i \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ s.t. } a_i : 2$ (ký hiệu \exists là tồn tại). $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \cdots a_n \not: 2 \Leftrightarrow a_i \not: 2, \forall i = 1, 2, \dots, n$.

Bài toán 50 (Tuyên, 2022, 177., p. 42). Cho đa thức $A = 7x^4 - 2x^3 + x - 9$, $B = -5x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 6x - 1$. Tính tổng $A + B$ & hiệu $A - B$ bằng 2 cách.

Bài toán 51 (Tuyên, 2022, 178., p. 42). Tính tổng $S = \overline{a1} + \overline{a17} + \overline{1a} - \overline{1a7}$.

Bài toán 52 (Tuyên, 2022, 179., p. 42). Chứng minh tổng của 4 số lẻ liên tiếp thì chia hết cho 8.

Bài toán 53 (Tuyên, 2022, 180., p. 42). Cho đa thức $A = 16x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 9$, $B = -15x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 6$, $C = 5x^3 + 3x^2 + 18$. Chứng minh ít nhất 1 trong 3 đa thức này có giá trị dương với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 54 (Tuyên, 2022, 181., p. 42). Cho đa thức $A = 2x^2 + |7x - 1| - (5 - x + 2x^2)$. (a) Thu gọn A . (b) Tìm $x \in \mathbb{R}$ để A có giá trị bằng 2.

Bài toán 55 (Tuyên, 2022, 182., p. 43). Cho $f(x) + g(x) = 6x^4 - 3x^2 - 5$, $f(x) - g(x) = 4x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 8x - 9$. Tìm các đa thức $f(x), g(x)$.

Bài toán 56 (Tuyên, 2022, 183., p. 43). Cho $f(x) = x^{2n} - x^{2n-1} + \cdots + x^2 - x + 1$, $g(x) = -x^{2n+1} + x^{2n} - x^{2n-1} + \cdots + x^2 - x + 1$, với $n \in \mathbb{N}$. Tính giá trị của hiệu $f(x) - g(x)$ tại $x = \frac{1}{10}$.

Bài toán 57 (Tuyên, 2022, 184., p. 43). Bên trong khu đất hình vuông cạnh $3x$ m có khu vực chắn nuôi hình chữ nhật kích thước x m & 5m. (a) Tính diện tích S còn lại để làm vườn cây. (b) Tìm nghiệm của đa thức S .

4 Phép Nhân Đa Thức 1 Biến

“**[1]** Muốn nhân 1 đơn thức với 1 đa thức, ta nhân đơn thức với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các tích với nhau. $A(B + C) = AB + AC$. **[2]** Muốn nhân 1 đa thức với 1 đa thức, ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau. **[3]** Phép nhân đa thức cũng có các tính chất giao hoán, kết hợp, phân phối của phép nhân đối với phép cộng.” – Tuyên, 2022, Chap. III, §4, p. 43

Bài toán 58 (Tuyên, 2022, Ví dụ 48, p. 43). Rút gọn biểu thức $A = (x + 5)(2x - 3) - 2x(x + 3) - (x - 15)$ rồi cho biết bậc của đa thức kết quả.

Bài toán 59 (Tuyên, 2022, Ví dụ 49, p. 43). Cho biểu thức $C = x(x + x^3) + (x - 1)(x^2 + x^3) + 1$. Rút gọn biểu thức C rồi chứng minh với 2 giá trị đối nhau của x thì biểu thức C có cùng 1 giá trị.

Bài toán 60 (Tuyên, 2022, 185., p. 44). Cho biểu thức $B = 5x^2(3x - 2) - (4x + 7)(6x^2 - x) - (7x - 9x^3)$. Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức B với $x = -\frac{3}{4}$.

Bài toán 61 (Tuyên, 2022, 186., p. 44). Chứng minh giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến: $A = (2x - 3)(x + 7) - 2x(x + 5) - x$.

Bài toán 62 (Tuyên, 2022, 187., p. 44). Cho $ab = 1$. Chứng minh đẳng thức: $a(b + 1) + b(a + 1) = (a + 1)(b + 1)$.

Bài toán 63 (Tuyên, 2022, 188., p. 44). Tìm x biết: $3(x - 2)(x + 3) - x(3x + 1) = 2$.

Bài toán 64 (Tuyên, 2022, 189., p. 44). Tính giá trị của biểu thức sau bằng cách hợp lý: (a) $A = x^5 - 100x^4 + 100x^3 - 100x^2 + 100x + 9$ tại $x = 99$; (b) $B = x^6 - 20x^5 - 20x^4 - 20x^3 - 20x^2 - 20x + 3$ tại $x = 21$; (c) $C = x^7 - 26x^6 + 27x^5 - 47x^4 - 77x^3 + 50x^2 + x - 24$ tại $x = 25$.

Bài toán 65 (Tuyên, 2022, 190., p. 44). Cho 4 số lẻ liên tiếp. Chứng minh hiệu của tích 2 số cuối với tích của 2 số đầu chia hết cho 16.

Bài toán 66 (Tuyên, 2022, 191., p. 44). Cho 4 số nguyên liên tiếp. Hỏi tích của số đầu với số cuối nhỏ hơn tích của 2 số giữa bao nhiêu đơn vị?

Bài toán 67 (Tuyên, 2022, 192., p. 44). Cho $b + c = 100$, chứng minh đẳng thức $(10a + b)(10a + c) = 100a(a + 1) + bc$. Áp dụng để tính nhẩm $62 \cdot 68$, $43 \cdot 47$.

Bài toán 68 (Tuyên, 2022, 193., p. 44). Xác định các hệ số $a, b, c \in \mathbb{R}$ biết: (a) $(2x - 5)(3x + b) = ax^2 + bx + c, \forall x \in \mathbb{R}$. (b) $(ax + b)(x^2 - x - 1) = ax^3 + cx^2 - 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 69 (Tuyên, 2022, 194., p. 44). Cho $m \in \mathbb{N}^*, m < 30$. Có bao nhiêu giá trị của m để đa thức $x^2 + mx + 72$ là tích của 2 đa thức bậc nhất với hệ số nguyên.

5 Phép Chia Đa Thức 1 Biến

“**[1]** Chia đơn thức A cho đơn thức B , $B \neq 0$, khi số mũ của biến trong A lớn hơn hoặc bằng số mũ của biến đó trong B ta làm như sau: (a) Chia hệ số của A cho hệ số của B . (b) Chia lũy thừa của biến trong A cho lũy thừa của biến đó trong B . (c) Nhân các kết quả với nhau: $ax^m : bx^n = \frac{ax^m}{bx^n} = \frac{a}{b}x^{m-n}$, $m \geq n$. **[2]** Muốn chia đa thức P cho đơn thức Q , $Q \neq 0$, khi số mũ của mỗi biến ở đơn thức P lớn hơn hoặc bằng số mũ của biến đó trong Q ta chia mỗi đơn thức của P cho đơn thức Q rồi cộng các thương với nhau. **[3]** Để chia 1 đa thức cho 1 đa thức khác đa thức không (cả 2 đa thức đều đã thu gọn & sắp xếp các đa thức theo số mũ giảm dần của biến), bậc của đa thức bị chia lớn hơn hoặc bằng bậc của đa thức chia ta làm như sau: *Bước 1*: (a) Chia đơn thức bậc cao nhất của đa thức bị chia cho đơn thức bậc cao nhất của đa thức chia. (b) Nhân kết quả trên với đa thức chia & đặt tích dưới đa thức bị chia sao cho 2 đơn thức có cùng số mũ của biến ở từng cột. (c) Lấy đa thức bị chia trừ đi tích đặt ở dưới để được đa thức mới (gọi là *đa thức dư thứ nhất*). *Bước 2*: Tiếp tục quá trình trên cho đến khi nhận được đa thức không hoặc đa thức có bậc nhỏ hơn bậc của đa thức chia. **[4]** Nhận xét: • Khi chia đa thức A cho đa thức B của cùng 1 biến, $B \neq 0$, có 2 khả năng xảy ra: (a) Phép chia có đa thức dư là đa thức không. Ta nói đa thức A *chia hết cho* đa thức B . (b) Phép chia có đa thức dư là đa thức $R \neq 0$ có bậc nhỏ hơn bậc của B ($\deg R < \deg B$). Ta nói phép chia này là phép chia có dư. • Đối với 2 đa thức tùy ý A, B của cùng 1 biến, $B \neq 0$, tồn tại duy nhất 1 cặp đa thức Q, R sao cho $A = BQ + R$ trong đó $R = 0$ hoặc bậc của R nhỏ hơn bậc của B ($\deg R < \deg B$). Như vậy đa thức A chia hết cho đa thức $B \Leftrightarrow R = 0$.”

Định lý 5.1 (Bézout). *Số dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho nhị thức bậc nhất $x - a$ đúng bằng $f(a)$.*

Hệ quả 5.1. *Nếu a là nghiệm của đa thức $f(x)$ thì $f(x)$ chia hết cho $x - a$.*

Đặc biệt: Nếu tổng các hệ số của đa thức $f(x)$ bằng 0 thì 1 là nghiệm & $f(x)$ chia hết cho $x - 1$. Nếu $f(x)$ có tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng các hệ số bậc lẻ thì -1 là nghiệm & $f(x)$ chia hết cho $x - (-1)$, i.e., $f(x)$ chia hết cho $x + 1$.” – Tuyên, 2022, Chap. III, §5, pp. 44–45

Bài toán 70 (Tuyên, 2022, Ví dụ 50, p. 45). *Tìm $n \in \mathbb{N}$ để cả 2 phép chia sau đồng thời là phép chia không còn dư: (a) $6x^5 : 3x^n$; (b) $15x^{n+2} : 5x^4$.*

Bài toán 71 (Tuyên, 2022, Ví dụ 51, p. 45). *Cho các đa thức $A = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + mx - 5$, $B = x^2 + 1$. Tìm giá trị của m để A chia hết cho B .*

Bài toán 72 (Tuyên, 2022, Ví dụ 52, p. 46). *Cho các đa thức $A = 6x^3 - 15x^2 - 4x + 13$, $B = 2x - 5$. Tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của A chia hết cho giá trị của B .*

Bài toán 73 (Tuyên, 2022, 195., p. 46). *Tìm $n \in \mathbb{N}$ để cả 2 phép chia sau đồng thời là phép chia không còn dư: $15x^{n+2} : 3x^3$ & $-\frac{1}{5}x^{n+3} : \frac{3}{10}x^{2n}$.*

Bài toán 74 (Tuyên, 2022, 196., p. 46). *Tính: (a) $(x^3 + 2x + 3) : (x + 1)$; (b) $(x^4 - 3x^3 + 3x - 1) : (x^2 - 1)$.*

Bài toán 75 (Tuyên, 2022, 197., p. 46). *Xác định các hệ số $a, b \in \mathbb{R}$ sao cho đa thức $x^4 + ax^3 + b$ chia hết cho đa thức $x^2 - 1$.*

Bài toán 76 (Tuyên, 2022, 198., p. 46). *Tìm các giá trị nguyên của x để thương có giá trị nguyên: (a) $(3x^3 + 13x^2 - 7x + 5) : (3x - 2)$; (b) $(2x^5 + 4x^4 + 7x^3 - 49x - 44) : (2x^2 - 7)$.*

Bài toán 77 (Tuyên, 2022, 199., p. 46). *Chứng minh không tồn tại $n \in \mathbb{N}$ để cho giá trị của biểu thức $n^6 - n^4 - 2n^2 + 9$ chia hết cho giá trị của biểu thức $n^4 + n^2$.*

Bài toán 78 (Tuyên, 2022, 200., p. 47). *Không thực hiện phép chia đa thức, tìm số dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $g(x)$ trong các trường hợp sau: (a) $f(x) = x^{21} + x^{20} + x^{19} + 101$, $g(x) = x + 1$; (b) $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 2x + 7$, $g(x) = x + 2$; (c) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x - 10$, $g(x) = x - 5$.*

Bài toán 79 (Tuyên, 2022, 201., p. 47). *Chứng minh $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^{31} - (x^2 - 4x - 5)^{30} + 2$ chia hết cho $x - 2$.*

Bài toán 80 (Tuyên, 2022, 202., p. 47). *Tìm đa thức dư trong phép chia $(x^{54} + x^{45} + x^{36} + \dots + x^9 + 1) : (x^2 - 1)$.*

Bài toán 81 (Tuyên, 2022, 203., p. 47). *Xác định đa thức $f(x)$ thỏa mãn cả 3 điều kiện sau: (a) Khi chia cho $x - 1$ dư 4; (b) Khi chia cho $x + 2$ dư 1; (c) Khi chia cho $(x - 1)(x + 2)$ thì được thương là $5x^2$ & còn dư.*

Bài toán 82 (Tuyên, 2022, 204., p. 47). *Cho đa thức $A = ax^2 + bx + c$. Xác định hệ số b biết khi chia A cho $x - 1$ hoặc chia A cho $x + 1$ đều có cùng 1 đa thức dư.*

Bài toán 83 (Tuyên, 2022, 205., p. 47). *Chứng minh nếu $x^4 - 4x^3 + 5ax^2 - 4bx + c$ chia hết cho $x^3 + 3x^2 - 9x - 3$ thì $a + b + c = 0$.*

6 Miscellaneous

Nội dung. Biểu thức số, biểu thức đại số, đa thức 1 biến; nghiệm của đa thức 1 biến, cộng & trừ đa thức 1 biến: Vận dụng quy tắc dấu ngoặc để nhóm các đơn thức có cùng bậc vào 1 nhóm rồi thực hiện phép tính trong từng nhóm. Nhân & chia đa thức 1 biến: $(A+B) \cdot C = AC + BC$, $(A+B) : C = A : C + B : C$, $(A+B)(C+D) = AC + AD + BC + BD$, $(A+B) : (C+D)$ (Chia theo quy tắc chia các đa thức đã sắp xếp).

Bài toán 84 (Tuyên, 2022, Ví dụ 53, p. 47). Cho đa thức $A = 15x^4 - 20x^3 + 5x^2$ & các đơn thức $B = 2x^3$, $C = 5x^2$. (a) A chia hết cho đơn thức nào? Tính thương trong trường hợp đó. (b) Tính giá trị của thương tại $x = \frac{1}{3}$. (c) Tính các nghiệm của thương.

Bài toán 85 (Tuyên, 2022, Ví dụ 54, p. 48). Khi chia đa thức A cho đa thức $x^2 + 2$ ta được thương là $x^2 - 5$ & dư 9. Tìm đa thức A & cho biết bậc của đa thức này cùng các hệ số của đa thức.

Bài toán 86 (Tuyên, 2022, 206., p. 48). Cho biểu thức $A(x) = \frac{x+2}{x-1}$. (a) Tìm giá trị của biến để cho biểu thức $A(x)$ có nghĩa. (b) Tính $A(7)$. (c) Tìm x để $A(x) = \frac{1}{4}$. (d) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $A(x)$ có giá trị nguyên. (e) Tìm $x \in \mathbb{R}$ để $A(x)$ có giá trị lớn hơn 1.

Bài toán 87 (Tuyên, 2022, 207., p. 48). Tìm $n \in \mathbb{N}$ lớn nhất sao cho $n + 10$ là ước của $n^3 + 2025$.

Bài toán 88 (Tuyên, 2022, 208., p. 48). Chứng minh các biểu thức sau luôn có giá trị là 1 số chẵn $\forall x \in \mathbb{Z}$. (a) $A = (x-3) + |x+3|$; (b) $B = (x-5) - |x-5|$.

Bài toán 89 (Tuyên, 2022, 209., p. 48). Đa thức $f(x)$ với hệ số nguyên có tính chất là: Nếu $f(x)$ có nghiệm nguyên thì nghiệm đó phải là ước của hệ số tự do. Vận dụng tính chất này để tìm tập hợp các nghiệm của đa thức $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

Bài toán 90 (Tuyên, 2022, 210., p. 48). Cho $g(x) = 4x^2 + 3x + 1$, $h(x) = 3x^2 - 2x - 3$. (a) Tính $f(x) = g(x) - h(x)$. (b) Chứng minh -4 là 1 nghiệm của $f(x)$. (c) Tìm tập hợp nghiệm của $f(x)$.

Bài toán 91 (Tuyên, 2022, 211., p. 48). (a) Tính tổng của 5 số nguyên liên tiếp trong đó số ở giữa là $a \in \mathbb{Z}$. Có thể khẳng định tổng này chia hết cho (những) số nào? (b) Tính tổng của 5 số chẵn liên tiếp trong đó số đầu là $2a$, $a \in \mathbb{Z}$. Có thể khẳng định tổng này chia hết cho (những) số nào?

Bài toán 92 (Tuyên, 2022, 212., p. 48). Tìm $m \in \mathbb{Z}$ sao cho đa thức $(x+m)(x-3) + 7$ phân tích được thành $(x+a)(x+b)$ với $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \leq b$.

Bài toán 93 (Tuyên, 2022, 213., p. 48). Thùng xe tải có dạng hình hộp chữ nhật, chiều rộng $x + 5$ dm, chiều dài $2x + 1$ dm. Biết thể tích của thùng xe là $2x^3 + 15x^2 + 27x + 10$ dm³. Tính chiều cao của thùng xe.

Tài liệu

Thái, Đỗ Đức, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang (2022). *Toán 7 Tập 2*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, p. 127.

Tuyên, Bùi Văn (2022). *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 7*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 168.