

Problem & Solution: Trigonometry – Bài Tập Lượng Giác & Lời Giải

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 22 tháng 5 năm 2023

Tóm tắt nội dung

Mục lục

1 Hệ Thức về Cạnh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông	1
2 Tỷ Số Lượng Giác của Góc Nhọn	7
3 Hệ Thức về Cạnh & Góc Trong Tam Giác Vuông	8
4 Miscellaneous	8
Tài liệu	9

1 Hệ Thức về Cạnh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông

Trong 1 tam giác vuông, nếu biết 2 cạnh, hoặc 1 cạnh & 1 góc nhọn thì có thể tính được các góc & các cạnh còn lại của tam giác đó.

Bài toán 1. Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , cạnh huyền $BC = a$, 2 cạnh góc vuông $AC = b$, $AB = c$. Gọi $AH = h$ là đường cao ứng với cạnh huyền BC ¹ & $CH = b'$, $BH = c'$ lần lượt là hình chiếu của AC, AB trên cạnh huyền BC . Chứng minh: (a) $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$. (b) Định lý Pythagore $a^2 = b^2 + c^2$. (c) $h^2 = b'c'$. (d) $bc = ah$. (e) $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

Chứng minh. (a) $\triangle AHC \sim \triangle BAC$ (g.g) vì 2 tam giác vuông này có chung \widehat{C} nhọn, nên $\frac{CH}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC^2 = BC \cdot CH \Leftrightarrow b^2 = ab'$. Tương tự, $\triangle BHA \sim \triangle BAC$ (g.g) vì 2 tam giác vuông này có chung \widehat{B} nhọn, nên $\frac{BH}{AB} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB^2 = BC \cdot BH \Leftrightarrow c^2 = ac'$. (b) Theo (a), $b^2 + c^2 = ab' + ac' = a(b' + c') = a \cdot a = a^2$. (c) Vì $\triangle AHC \sim \triangle BAC$ & $\triangle BHA \sim \triangle BAC$ nên $\triangle AHC \sim \triangle BHA$, suy ra $\frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH} \Rightarrow AH^2 = BH \cdot CH \Leftrightarrow h^2 = b'c'$. (d) Tính diện tích $\triangle ABC$ theo 2 cách: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot AC \Leftrightarrow AH \cdot BC = AB \cdot AC \Leftrightarrow ah = bc$. (e) $ah = bc \Leftrightarrow a^2h^2 = b^2c^2 \Leftrightarrow (b^2 + c^2)h^2 = b^2c^2 \Leftrightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{b^2+c^2}{b^2c^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$. \square

Lưu ý 1. Các hệ thức trên có thể được suy ra trực tiếp từ các tỷ số đồng dạng của bộ 3 tam giác đồng dạng: $\triangle BHA \sim \triangle AHC \sim \triangle BAC$. Thật vậy, $\triangle AHC \sim \triangle BAC \Leftrightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{HC}{AC} = \frac{AC}{BC} \Leftrightarrow \frac{h}{c} = \frac{b'}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow bh = b'c$, $b^2 = ab'$, & $ah = bc$. $\triangle BHA \sim \triangle BAC \Leftrightarrow \frac{HB}{AB} = \frac{AH}{AC} = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow \frac{c'}{c} = \frac{h}{b} = \frac{c}{a} \Rightarrow hc = bc'$, $ah = bc$, & $c^2 = ac'$. $\triangle AHC \sim \triangle BHA \Leftrightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH} = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow \frac{h}{c'} = \frac{b'}{h} = \frac{b}{c} \Rightarrow h^2 = b'c'$, $bh = b'c$, & $ch = bc'$. Hơn nữa, $\widehat{BAH} = \widehat{C}$ & $\widehat{CAH} = \widehat{B}$.

Định lý 1 (Hệ thức giữa cạnh góc vuông & hình chiếu của nó trên cạnh huyền). Trong 1 tam giác vuông, bình phương mỗi cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền & hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền. Nói cách khác, mỗi cạnh góc vuông là trung bình nhân của cạnh huyền & hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền. $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$

3 hệ thức về đường cao trong tam giác vuông:

Định lý 2. Trong 1 tam giác vuông, bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tích 2 hình chiếu của 2 cạnh góc vuông trên cạnh huyền. Nói cách khác, đường cao ứng với cạnh huyền là trung bình nhân của 2 đoạn thẳng mà nó định ra trên cạnh huyền. $h^2 = b'c'$.

Định lý 3. Trong 1 tam giác vuông, tích 2 cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền & đường cao tương ứng. $bc = ah$.

Định lý 4. Trong 1 tam giác vuông, nghịch đảo của bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tổng nghịch đảo của bình phương 2 cạnh góc vuông. $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam

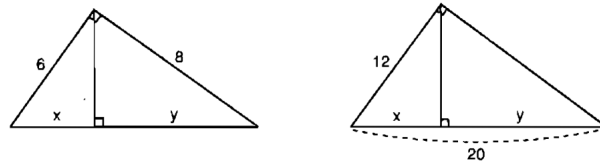
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

¹ AB, AC là đường cao ứng với nhau.

Bài toán 2. Cho $\triangle ABC$ có độ dài 2 cạnh góc vuông là b & c . Tính độ dài đường cao h xuất phát từ đỉnh góc vuông theo b, c .

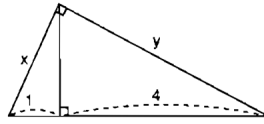
Giải. Có $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \Rightarrow h^2 = \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2}$. □

Bài toán 3 ([Chí+23], 1., p. 68). Tính x, y :



Giải. (a) Áp dụng định lý Pythagore, cạnh huyền dài $x + y = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. Áp dụng định lý 1 được $6^2 = (x + y)x = 10x \Rightarrow x = \frac{6^2}{10} = 3.6$, $y = 10 - x = 10 - 3.6 = 6.4$ (hoặc $8^2 = (x + y)y = 10y \Rightarrow y = \frac{8^2}{10} = 6.4$). (b) Áp dụng định lý 1 được $12^2 = 20x \Rightarrow x = \frac{12^2}{20} = 7.2$, $y = 20 - x = 20 - 7.2 = 12.8$. □

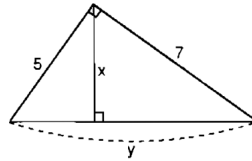
Bài toán 4 ([Chí+23], 2., p. 68). Tính x, y :



1st giải. Áp dụng định lý 1 được $x^2 = (1 + 4) \cdot 1 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}$, $y = (1 + 4)4 = 20 \Rightarrow y = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. □

2nd giải. Áp dụng định lý 1 được $x^2 = (1 + 4) \cdot 1 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}$. Áp dụng định lý Pythagore: $y = \sqrt{(1 + 4)^2 - x^2} = \sqrt{5^2 - 5} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. □

Bài toán 5 ([Chí+23], 3., p. 69). Tính x, y :

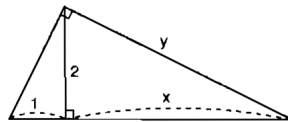


1st giải. Áp dụng định lý Pythagore: $y = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74}$. Áp dụng định lý 3, ta có $5 \cdot 7 = xy \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 7}{y} = \frac{35}{\sqrt{74}} = \frac{35\sqrt{74}}{74}$. □

2nd giải. Áp dụng định lý Pythagore: $y = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74}$. Áp dụng định lý 4 được $x = \sqrt{\frac{5^2 + 7^2}{5^2 \cdot 7^2}} = \frac{35\sqrt{74}}{74}$. □

3rd giải. Áp dụng định lý 4 được $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{5^2 + 7^2}{5^2 \cdot 7^2}} = \frac{35\sqrt{74}}{74}$. Áp dụng định lý 3 được $5 \cdot 7 = xy \Rightarrow y = \frac{5 \cdot 7}{x} = \frac{5 \cdot 7 \sqrt{74}}{35} = \sqrt{74}$. □

Bài toán 6 ([Chí+23], 4., p. 69). Tính x, y :



1st giải. Áp dụng định lý 2 được $2^2 = 1 \cdot x \Leftrightarrow x = 4$. Áp dụng định lý Pythagore: $y = \sqrt{x^2 + 2^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. □

1st giải. Áp dụng định lý 2 được $2^2 = 1 \cdot x \Leftrightarrow x = 4$. Áp dụng định lý 1 được $y^2 = (1 + x)x = (1 + 4) \cdot 4 = 20 \Rightarrow y = 2\sqrt{5}$. □

Bài toán 7 ([Chí+23], 5., p. 69). Trong tam giác vuông với các cạnh góc vuông có độ dài là 3 & 4, kẻ đường cao ứng với cạnh huyền. Tính đường cao này & độ dài các đoạn thẳng mà nó định ra trên cạnh huyền.

Giải. $b = 3$, $c = 4$. Áp dụng định lý Pythagore: $a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Áp dụng định lý 3 được $h = \frac{bc}{a} = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2.4$. Áp dụng định lý 1 được $b^2 = ab' \Rightarrow b' = \frac{b^2}{a} = \frac{3^2}{5} = 1.8$, $c' = a - b' = 5 - 1.8 = 3.2$. □

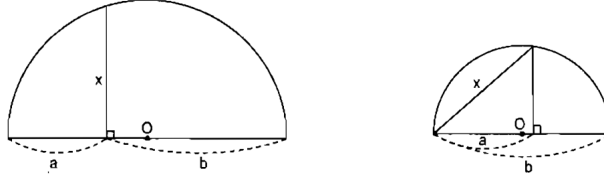
Bài toán 8 ([**Chí+23**], 6., p. 69). Đường cao của 1 tam giác vuông chia cạnh huyền thành 2 đoạn thẳng có độ dài là 1 & 2. Tính các cạnh góc vuông của tam giác này.

Giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $b' = 1, c' = 2$. Có $a = b' + c' = 1 + 2 = 3, b^2 = ab' = 3 \cdot 1 = 3 \Rightarrow b = \sqrt{3}, c^2 = ac' = 3 \cdot 2 = 6 \Rightarrow c = \sqrt{6}$ (hoặc áp dụng định lý Pythagore: $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3^2 - 3} = \sqrt{6}$). \square

Bài toán 9 (Mở rộng [**Chí+23**], 6., p. 69). Đường cao của 1 tam giác vuông chia cạnh huyền thành 2 đoạn thẳng có độ dài là b' & c' . Tính các cạnh góc vuông của tam giác này theo b', c' .

Giải. $a = b' + c', b^2 = ab' = (b' + c')b' \Rightarrow b = \sqrt{b'(b' + c')}, c^2 = ac' = (b' + c')c' \Rightarrow c = \sqrt{c'(b' + c')}$ (hoặc áp dụng định lý Pythagore: $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(b' + c')^2 - b'(b' + c')} = \sqrt{c'(b' + c')}$). \square

Bài toán 10 ([**Chí+23**], 7., p. 69–70). Người ta đưa ra 2 cách vẽ đoạn trung bình nhân x của 2 đoạn thẳng a, b (i.e., $x^2 = ab$ hay $x = \sqrt{ab}$) như trong 2 hình sau. Chứng minh các 2 vẽ này là đúng.



Hint. Nếu 1 tam giác có đường trung tuyến ứng với 1 cạnh bằng nửa cạnh đó thì tam giác đó là tam giác vuông.

Chứng minh. 2 tam giác tạo nội tiếp (nửa) đường tròn ngoại tiếp ở 2 hình đều có trung tuyến ứng với cạnh dài nhất bằng nửa cạnh ấy nên là 2 tam giác vuông (vì trung tuyến là 1 bán kính, còn cạnh ứng với trung tuyến đó là 1 đường kính của hình tròn). Với hình đầu, áp dụng định lý 2 được $x^2 = ab$. Với hình sau, áp dụng định lý 1 được $x^2 = ab$. Cả 2 trường hợp đều cho $x^2 = ab$, hay $x = \sqrt{ab}$, i.e., x là trung bình nhân của 2 đoạn thẳng a, b . \square

Bài toán 11. Chứng minh: Nếu 1 tam giác có đường trung tuyến ứng với 1 cạnh bằng nửa cạnh đó thì tam giác đó là tam giác vuông.

1st chứng minh. Giả sử $\triangle ABC$ có đường trung tuyến $AM = \frac{1}{2}BC$ với M là trung điểm BC . $MA = MB = MC \Rightarrow \triangle AMB, \triangle AMC$ đều cân tại M , suy ra $\widehat{B} = \widehat{BAM}, \widehat{C} = \widehat{CAM}$. Cộng 2 đẳng thức, vẽ theo vẽ, suy ra $\widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{BAM} + \widehat{CAM} = \widehat{A}$, mà $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$, suy ra $\widehat{A} = \widehat{B} + \widehat{C} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$. Vậy $\triangle ABC$ vuông tại A . \square

2nd chứng minh. Giả sử $\triangle ABC$ có đường trung tuyến $AM = \frac{1}{2}BC$ với M là trung điểm BC . $MA = MB = MC$ nên $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn tâm M đường kính BC . Vì BC là đường kính nên $\widehat{A} = 90^\circ$. \square

3rd chứng minh. Giả sử $\triangle ABC$ có đường trung tuyến $AM = \frac{1}{2}BC$ với M là trung điểm BC . Công thức tính độ dài đường trung tuyến $m_a := AM = \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}}$.

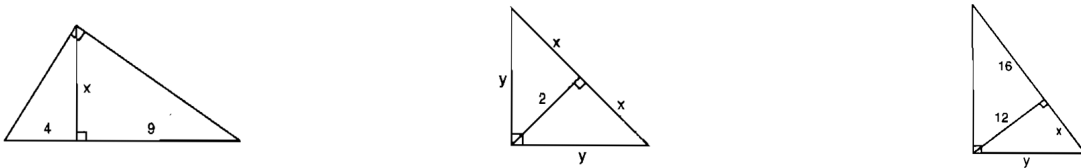
$$AM = \frac{1}{2}BC \Leftrightarrow m_a^2 = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow 2b^2 + 2c^2 - a^2 = a^2 \Leftrightarrow 2b^2 + 2c^2 = 2a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2.$$

Áp dụng định lý Pythagore đảo: $\triangle ABC$ vuông tại A . \square

Lưu ý 2. Công thức tính độ dài 3 đường trung tuyến của $\triangle ABC$ (xem, e.g., [Wikipedia/trung tuyến](#)):

$$m_a = \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}}, m_b = \sqrt{\frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4}}, m_c = \sqrt{\frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}}.$$

Bài toán 12 ([**Chí+23**], 8., p. 70). Tính x, y :



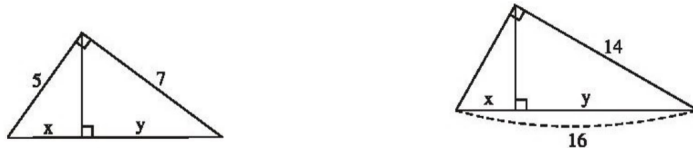
1st giải. (a) Áp dụng định lý 2 được $x^2 = 4 \cdot 9 = 36 \Rightarrow x = \sqrt{36} = 6$. (b) Áp dụng định lý 2 được $2^2 = x \cdot x = x^2 \Rightarrow x = 2$. Áp dụng định lý Pythagore: $y^2 + y^2 = (x + x)^2 \Leftrightarrow 2y^2 = 4x^2 \Rightarrow y = x\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. (c) Áp dụng định lý 2 được $12^2 = 16x \Rightarrow x = \frac{12^2}{16} = 9$. Áp dụng định lý 1 được $y^2 = (x + 16)x = (9 + 16) \cdot 9 = 25 \cdot 9 \Rightarrow y = \sqrt{25 \cdot 9} = 5 \cdot 3 = 15$. \square

2nd giải. (b) Tam giác vuông này có đường cao ứng với cạnh huyền đồng thời là trung tuyến nên nó là tam giác vuông cân. Vì trung tuyến dài bằng nửa cạnh huyền nên $x = 2$. Tam giác vuông cân có $y = x\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. (c) Áp dụng định lý 2 được $12^2 = 16x \Rightarrow x = \frac{12^2}{16} = 9$. Áp dụng định lý Pythagore: $y = \sqrt{x^2 + 12^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$. \square

Bài toán 13 ([Chí+23], 9., p. 70). Cho hình vuông $ABCD$. Gọi I là 1 điểm nằm giữa A & B . Tia DI & tia CB cắt nhau ở K . Kẻ đường thẳng qua D , vuông góc với DI . Đường thẳng này cắt đường thẳng BC tại L . Chứng minh: (a) $\triangle DIL$ là 1 tam giác cân. (b) Tổng $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2}$ không đổi khi I thay đổi trên cạnh AB .

Chứng minh. (a) Xét 2 tam giác vuông $\triangle DAI$ & $\triangle DCL$: $AD = CD$ (2 cạnh hình vuông $ABCD$), $\widehat{ADI} = \widehat{CDL}$ (cùng phụ \widehat{CDI}). Suy ra $\triangle DAI = \triangle DCL$ (cgv-gn) $\Rightarrow DI = DL \Rightarrow \triangle DIL$ cân tại D . (b) Xét $\triangle DKL$ vuông tại D , áp dụng định lý 4 được: $\frac{1}{DK^2} + \frac{1}{DL^2} = \frac{1}{CD^2}$, mà $DI = DL$, suy ra $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2} = \frac{1}{CD^2}$ không đổi khi I thay đổi trên cạnh AB . \square

Bài toán 14 ([Thã+23], 1., p. 102). Tính x, y :



Bài toán 15 ([Thã+23], 2., p. 102). Tính x, y :



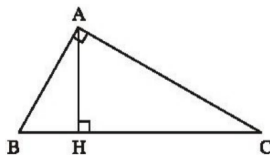
Bài toán 16 ([Thã+23], 3., p. 103). Tính x, y :



Bài toán 17 ([Thã+23], 4., p. 103). Tính x, y :



Bài toán 18 ([Thã+23], 5., p. 103). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH :



Giải bài toán trong mỗi trường hợp sau: (a) Cho $AH = 16$, $BH = 25$. Tính AB, AC, BC, CH . (b) Cho $AB = 12$, $BH = 6$. Tính AH, AC, BC, CH .

Bài toán 19 ([Thã+23], 6., p. 103). Cho tam giác vuông với các cạnh góc vuông có độ dài là 5 & 7, kẻ đường cao ứng với cạnh huyền. Tính đường cao này & các đoạn thẳng mà nó chia ra trên cạnh huyền.

Bài toán 20 ([Thã+23], 7., p. 103). Đường cao của 1 tam giác vuông chia cạnh huyền thành 2 đoạn thẳng có độ dài là 3 & 4. Tính các cạnh góc vuông của tam giác này.

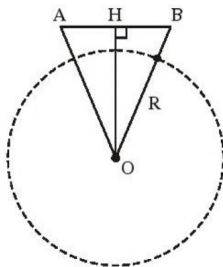
Bài toán 21 ([Thã+23], 8., p. 103). Cạnh huyền của 1 tam giác vuông lớn hơn 1 cạnh góc vuông là 1 cm & tổng của 2 cạnh góc vuông lớn hơn cạnh huyền 4 cm. Tính các cạnh của tam giác vuông này.

Bài toán 22 ([Thâ+23], 9., p. 104). 1 tam giác vuông có cạnh huyền là 5 & đường cao ứng với cạnh huyền là 2. Tính cạnh nhỏ nhất của tam giác vuông này.

Bài toán 23 ([Thâ+23], 10., p. 104). Cho 1 tam giác vuông. Biết tỷ số 2 cạnh góc vuông là 3 : 4 & cạnh huyền là 125 cm. Tính độ dài các cạnh góc vuông & hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền.

Bài toán 24 ([Thâ+23], 11., p. 104). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Biết $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{6}$, đường cao $AH = 30$ cm. Tính HB, HC .

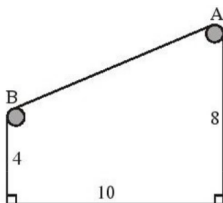
Bài toán 25 ([Thâ+23], 12., p. 104). 2 vệ tinh đang bay ở vị trí A & B cùng cách mặt đất 230 km có nhìn thấy nhau hay không nếu khoảng cách giữa chúng theo đường thẳng là 2200 km? Biết bán kính R của Trái Đất gần bằng 6370 km & 2 vệ tinh nhìn thấy nhau nếu $OH > R$.



Bài toán 26 ([Thâ+23], 13., p. 104). Cho 2 đoạn thẳng có độ dài là a, b . Dựng các đoạn thẳng có độ dài tương ứng bằng: (a) $\sqrt{a^2 + b^2}$. (b) $\sqrt{a^2 - b^2}$ ($a > b$).

Bài toán 27 ([Thâ+23], 14., p. 104). Cho 2 đoạn thẳng có độ dài là a, b . Dựng đoạn thẳng \sqrt{ab} như thế nào?

Bài toán 28 ([Thâ+23], 15., p. 104). Giữa 2 tòa nhà (kho & phân xưởng) của 1 nhà máy người ta xây dựng 1 băng chuyền AB để chuyển vật liệu. Khoảng cách giữa 2 tòa nhà là 10 m, còn 2 vòng quay của băng chuyền được đặt ở độ cao 8 m & 4 m so với mặt đất. Tìm độ dài AB của băng chuyền.



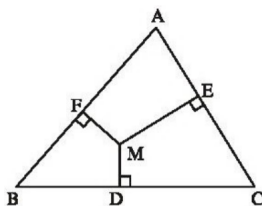
Bài toán 29 ([Thâ+23], 16., p. 104). Cho tam giác có độ dài các cạnh là 5, 12, 13. Tìm góc của tam giác đối diện với cạnh có độ dài 13.

Bài toán 30 ([Thâ+23], 17., p. 104). Cho hình chữ nhật ABCD. Đường phân giác của góc B cắt đường chéo AC thành 2 đoạn $4\frac{2}{7}$ m & $5\frac{5}{7}$ m. Tính các kích thước của hình chữ nhật.

Bài toán 31 ([Thâ+23], 18., p. 105). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, vẽ đường cao AH. Chu vi của $\triangle ABH$ là 30 cm & chu vi $\triangle ACH$ là 40 cm. Tính chu vi của $\triangle ABC$.

Bài toán 32 ([Thâ+23], 19., p. 105). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có cạnh $AB = 6$ cm & $AC = 8$ cm. Các đường phân giác trong & ngoài của góc B cắt đường thẳng ABC lần lượt tại M, N. Tính độ dài các đoạn thẳng AM, AN.

Bài toán 33 ([Thâ+23], 20., p. 105). Cho $\triangle ABC$. Từ 1 điểm M bất kỳ trong tam giác kẻ MD, ME, MF lần lượt vuông góc với các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh: $BD^2 + CE^2 + AF^2 = CD^2 + AE^2 + BF^2$.



Bài toán 34 ([Thâ+23], 1.1., p. 105). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB : AC = 3 : 4$ & đường cao AH bằng 9 cm. Tính độ dài đoạn thẳng CH.

Bài toán 35 ([Thâ+23], 1.2., p. 105). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB : AC = 4 : 5$ & đường cao AH bằng 12 cm. Tính độ dài đoạn thẳng BH.

Bài toán 36 ([Thâ+23], 1.3., p. 105). (a) Tính h, b, c nếu biết $b' = 36, c' = 64$. (b) Tính h, b, b', c' nếu biết $a = 9, c = 6$.

Bài toán 37 ([Thâ+23], 1.4., p. 105). Biểu thị b', c' qua a, b, c .

Bài toán 38 ([Thâ+23], 1.5., p. 105). Chứng minh: (a) $h = \frac{bc}{a}$. (b) $\frac{b^2}{c^2} = \frac{b'}{c'}$.

Bài toán 39 ([Thâ+23], 1.6., p. 106). Đường cao của 1 tam giác vuông kẻ từ đỉnh góc vuông chia cạnh huyền thành 2 đoạn, trong đó đoạn lớn hơn bằng 9 cm. Tính cạnh huyền của tam giác vuông đó nếu 2 cạnh góc vuông có tỷ lệ 6 : 5.

Bài toán 40 ([Thâ+23], 1.7., p. 106). Trong tam giác có các cạnh là 5 cm, 12 cm, 13 cm, kẻ đường cao đến cạnh lớn nhất. Tính các đoạn thẳng mà đường cao này chia ra trên cạnh lớn nhất đó.

Bài toán 41 ([Thâ+23], 1.8., p. 106). $\triangle ABC$ vuông tại A có đường cao AH bằng 12 cm. Tính cạnh huyền BC nếu biết $HB : HC = 1 : 3$.

Bài toán 42 ([Thâ+23], 1.9., p. 106). Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A , đường trung tuyến BM . Gọi D là chân đường vuông góc kẻ từ C đến BM & H là chân đường vuông góc kẻ từ D đến AC . Đ/S? (a) $\triangle HCD \sim \triangle ABM$. (b) $AH = 2HD$.

Bài toán 43 ([Thâ+23], 1.10., p. 106). Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A có cạnh đáy AB bằng 6 cm, cạnh bên AD bằng 4 cm & 2 đường chéo vuông góc với nhau. Tính độ dài các cạnh CD, BC , & đường chéo BD .

Bài toán 44 ([Tuy23], Thí dụ 1, p. 103). Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ$, 2 đường chéo vuông góc với nhau tại H . Biết $AB = 3\sqrt{5}$ cm, $HA = 3$ cm. Chứng minh: (a) $HA : HB : HC : HD = 1 : 2 : 4 : 8$. (b) $\frac{1}{AB^2} - \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{HB^2} - \frac{1}{HC^2}$.

Bài toán 45 ([Tuy23], 1., p. 105). Cho hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$, 2 đường chéo vuông góc với nhau. Biết $AC = 16$ cm, $BD = 12$ cm. Tính chiều cao của hình thang.

Bài toán 46 ([Tuy23], 2., p. 105). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH , đường phân giác AD . Biết $BH = 63$ cm, $CH = 112$ cm, tính HD .

Bài toán 47 ([Tuy23], 3., p. 105). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . 2 đường trung tuyến AD, BE vuông góc với nhau tại G . Biết $AB = \sqrt{6}$ cm. Tính cạnh huyền BC .

Bài toán 48 ([Tuy23], 4., p. 105). Gọi a, b, c là các cạnh của 1 tam giác vuông, h là đường cao ứng với cạnh huyền a . Chứng minh tam giác có các cạnh $a + h, b + c$, & h cũng là 1 tam giác vuông.

Bài toán 49 ([Tuy23], 5., p. 105). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Gọi I, K thứ tự là hình chiếu của H trên AB, AC . Đặt $c = AB, b = AC$. (a) Tính AI, AK theo b, c . (b) Chứng minh $\frac{BI}{CK} = \frac{c^3}{b^3}$.

Bài toán 50 ([Tuy23], 6., p. 105). Cho $\triangle ABC$, $AB = 1, \widehat{A} = 105^\circ, \widehat{B} = 60^\circ$. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = 1$. Vẽ $ED \parallel AB, D \in AC$. Chứng minh: $\frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{4}{3}$.

Bài toán 51 ([Tuy23], 7., p. 105). Cho hình chữ nhật $ABCD$, $AB = 2BC$. Trên cạnh BC lấy điểm E . Tia AE cắt đường thẳng CD tại F . Chứng minh: $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{4AF^2}$.

Bài toán 52 ([Tuy23], 8., p. 105). Cho 3 đoạn thẳng có độ dài a, b, c . Dựng đoạn thẳng x sao cho $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

Bài toán 53 ([Tuy23], 9., p. 105). Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 120^\circ$. 1 đường thẳng d không cắt các cạnh của hình thoi. Chứng minh: tổng các bình phương hình chiếu của 4 cạnh với 2 lần bình phương hình chiếu của đường chéo AC trên đường thẳng d không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d .

Bài toán 54 ([Tuy23], 10., p. 106). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Từ 1 điểm O ở trong tam giác ta vẽ $OD \perp BC, OE \perp CA, OF \perp AB$. Xác định vị trí của O để $OD^2 + OE^2 + OF^2$ nhỏ nhất.

Bài toán 55 ([Bin+23], Ví dụ 1, p. 5). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Biết $AB : AC = 3 : 4$ & $AB + AC = 21$ cm. (a) Tính các cạnh của $\triangle ABC$. (b) Tính độ dài các đoạn AH, BH, CH .

Bài toán 56 (Mở rộng [Bin+23], Ví dụ 1, p. 5). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Biết $AB : AC = m : n$ & $AB + AC = p$ cm. (a) Tính các cạnh của $\triangle ABC$. (b) Tính độ dài các đoạn AH, BH, CH .

Bài toán 57 ([Bin+23], Ví dụ 2, p. 6). Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ, \widehat{B} = 60^\circ, CD = 30$ cm, $CA \perp CB$. Tính diện tích của hình thang.

Bài toán 58 ([Bin+23], Ví dụ 3, p. 7). Cho $\triangle ABC$ nhọn, đường cao CK, H là trực tâm. Gọi M là 1 điểm trên CK sao cho $\widehat{AMB} = 90^\circ$. S, S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích các $\triangle AMB, \triangle ABC, \triangle ABH$. Chứng minh $S = \sqrt{S_1 S_2}$.

Bài toán 59 ([Bin+23], 1.1., p. 7). Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A & điểm M nằm giữa B & C Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của điểm M lên AB, AC . Chứng minh $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$.

Bài toán 60 ([Bin+23], 1.2., p. 7). Cho hình chữ nhật $ABCD$ và điểm O nằm trong hình chữ nhật đó. Chứng minh $OA^2 + OC^2 = OB^2 + CD^2$.

Bài toán 61 ([Bin+23], 1.3., p. 8). Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 6$ cm, $CD = 8$ cm. Đường thẳng kẻ từ D vuông góc với AC tại E , cắt cạnh AB tại F . Tính độ dài các đoạn thẳng DE, DF, AE, CE, AF, BF .

Bài toán 62 ([Bin+23], 1.4., p. 8). Cho $\triangle ABC$ có $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $AC = 5$ cm. Đường cao, đường phân giác, đường trung tuyến của tam giác kẻ từ đỉnh B chia tam giác thành 4 tam giác không có điểm trong chung. Tính diện tích của mỗi tam giác đó.

Bài toán 63 ([Bin+23], 1.5., p. 8). Trong 1 tam giác vuông tỷ số giữa đường cao và đường trung tuyến kẻ từ đỉnh góc vuông bằng $40 : 41$. Tính độ dài các cạnh góc vuông của tam giác đó, biết cạnh huyền bằng $\sqrt{41}$ cm.

Bài toán 64 ([Bin+23], 1.6., p. 8). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Kẻ $HE \perp AB$, $HF \perp AC$. Gọi O là giao điểm của AH và EF . Chứng minh $HB \cdot HC = 4OE \cdot OF$.

Bài toán 65 ([Bin+23], 1.7., p. 8). Cho $\triangle ABC$ nhọn, 2 đường cao BD, CE cắt nhau tại H . Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc CH, BH sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{ANC} = 90^\circ$. $\triangle AMN$ là tam giác gì? Vì sao?

Bài toán 66 ([Bin+23], 1.8., p. 8). Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a . (a) M là 1 điểm trên cạnh AD sao cho $\widehat{ABM} = 30^\circ$. Tính AM, BM theo a . (b) Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với BM tại F , đường thẳng này cắt CD tại N . Tính độ dài các đoạn thẳng AF, MF, BF theo a .

Bài toán 67 ([Bin+23], 1.9., p. 8). Cho hình vuông $ABCD$ và điểm I thay đổi nằm giữa A, B . Tia DI cắt BC tại E . Đường thẳng kẻ qua D vuông góc với DE cắt BC tại F . Chứng minh tổng $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DE^2}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm I .

Bài toán 68 ([Bin+23], 1.10., p. 8). Cho $\triangle ABC$, đường cao BH . Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $AH = c'$. Chứng minh: (a) Nếu $\hat{A} < 90^\circ$ thì $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc'$. (b) Nếu $\hat{A} > 90^\circ$ thì $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc'$.

Bài toán 69 ([Bin+23], 1.11., p. 8). Cho $\triangle ABC$, đường cao AH . Biết $AB = 8$ cm, $BC - AC = 2$ cm, $\widehat{BAH} = 30^\circ$. Tính diện tích $\triangle ABC$.

Bài toán 70 ([Bin+23], 1.12., p. 8). Cho $\triangle ABC$, các đường cao ứng với các cạnh a, b, c lần lượt là h_a, h_b, h_c . Chứng minh nếu $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2}$ thì $\triangle ABC$ vuông tại A .

Bài toán 71 ([Bin+23], 1.13., p. 9). Cho $\triangle ABC$, 2 đường phân giác BD, CE cắt nhau tại I thỏa mãn $BD \cdot CE = 2BI \cdot CI$. $\triangle ABC$ là tam giác gì? Vì sao?

Bài toán 72 ([Bin+23], 1.14., p. 9). Cho $\triangle ABC$, $\hat{A} = 90^\circ$, $BC = 2a$, đường cao AH . Kẻ $HD \perp AC$, $HE \perp AB$. Tìm giá trị lớn nhất của: (a) Độ dài đoạn thẳng DE . (b) Diện tích tứ giác $ADHE$.

Bài toán 73 ([Bin+23], 1.15., p. 9). Cho $\triangle ABC$ đều có cạnh bằng 60 cm. Trên đoạn BC lấy điểm D sao cho $BD = 20$ cm. Đường trung trực của AD cắt AB tại E , cắt AC tại F . Tính độ dài các cạnh của $\triangle DEF$.

Bài toán 74 ([Bin+23], 1.16., p. 9). Cho $\triangle ABC$. Đường trung tuyến AD , đường cao BH , đường phân giác CE đồng quy. Chứng minh đẳng thức $(AB + CA)(BC^2 + CA^2 - AB^2) = 2BC \cdot CA^2$ hay $(b + c)(a^2 + b^2 - c^2) = 2ab^2$.

Bài toán 75 (Tổng quát *). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . (a) Cho trước 2 trong 8 số a, b, c, b', c', h, p, S . Tính 6 số còn lại theo 2 số đã cho. (b) Cho trước 2 trong 14 số $a, b, c, b', c', h, m_a, m_b, m_c, d_a, d_b, d_c, p, S$ với d_a, d_b, d_c lần lượt là 3 đường phân giác ứng với BC, CA, AB . Tính 12 số còn lại theo 2 số đã cho.

2 Tỷ Số Lượng Giác của Góc Nhọn

Bài toán 76 ([Tuy23], Thí dụ 2, p. 107). Cho $\cot \alpha = \frac{a^2 - b^2}{2ab}$ trong đó α là góc nhọn, $a > b > 0$. Tính $\cos \alpha$.

Bài toán 77 ([Tuy23], 11., p. 108, định lý sin). Cho $\triangle ABC$ nhọn, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. Đẳng thức này còn đúng với tam giác vuông và tam giác tù hay không?

Bài toán 78 ([Tuy23], 12., p. 108). Chứng minh: (a) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$. (b) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$. (c) $\cot^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \cot^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$. (d) $\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$.

Bài toán 79 ([Tuy23], 13., p. 108). Rút gọn biểu thức: (a) $A = \frac{1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$. (b) $B = (1 + \tan^2 \alpha)(1 - \sin^2 \alpha) - (1 + \cot^2 \alpha)(1 - \cos^2 \alpha)$. (c) $C = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$.

Bài toán 80 ([Tuy23], 14., p. 108). Tính giá trị của biểu thức $A = 5 \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha$ biết $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.

Bài toán 81 ([Tuy23], 15., p. 108). Không dùng máy tính hoặc bảng số, tính: (a) $A = \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 70^\circ$. (b) $B = \sin^2 5^\circ + \sin^2 25^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 65^\circ + \sin^2 85^\circ$.

Bài toán 82 ([Tuy23], 16., p. 108). Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Chứng minh: $\sin \alpha < \tan \alpha$, $\cos \alpha < \cot \alpha$. Áp dụng: (a) Sắp xếp các số sau theo thứ tự tăng dần: $\sin 65^\circ$, $\cos 65^\circ$, $\tan 65^\circ$. (b) Xác định α thỏa mãn điều kiện: $\tan \alpha > \sin \alpha > \cos \alpha$.

Bài toán 83 ([Tuy23], 17., p. 108). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Biết $\sin B = \frac{1}{4}$, tính $\tan C$.

Bài toán 84 ([Tuy23], 18., p. 108). Cho biết $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, tính $\tan \alpha$.

Bài toán 85 ([Tuy23], 19., p. 109). $\triangle ABC$, đường trung tuyến AM . Chứng minh nếu $\cot B = 3 \cot C$ thì $AM = AC$.

Bài toán 86 ([Tuy23], 20., p. 109). Cho $\triangle ABC$, trực tâm H là trung điểm của đường cao AD . Chứng minh $\tan B \tan C = 2$.

Bài toán 87 ([Tuy23], 21., p. 109). Cho $\triangle ABC$ nhọn, 2 đường cao BD, CE . Chứng minh: (a) $S_{\triangle ADE} = S_{\triangle ABC} \cos^2 A$. (b) $S_{BCDE} = S_{\triangle ABC} \sin^2 A$.

Bài toán 88 ([Tuy23], 22., p. 109). Cho $\triangle ABC$ nhọn. Từ 1 điểm M nằm trong tam giác vẽ $MD \perp BC$, $ME \perp AC$, $MF \perp AB$. Chứng minh $\max\{MA, MB, MC\} \geq 2 \min\{MD, ME, MF\}$, trong đó $\max\{MA, MB, MC\}$ là đoạn thẳng lớn nhất trong các đoạn thẳng MA, MB, MC & $\min\{MD, ME, MF\}$ là đoạn thẳng nhỏ nhất trong các đoạn thẳng MD, ME, MF .

3 Hệ Thức về Cạnh & Góc Trong Tam Giác Vuông

Bài toán 89 ([Tuy23], Thí dụ 3, p. 109). Tứ giác $ABCD$ có 2 đường chéo cắt nhau tại O . Cho biết $\widehat{AOD} = 70^\circ$, $AC = 5.3$ cm, $BD = 4$ cm. Tính diện tích tứ giác $ABCD$.

Bài toán 90 ([Tuy23], 23., p. 110). Chứng minh: (a) Diện tích của 1 tam giác bằng nửa tích của 2 cạnh nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa 2 cạnh ấy. (b) Diện tích hình bình hành bằng tích của 2 cạnh kề nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa 2 cạnh ấy.

Bài toán 91 ([Tuy23], 24., p. 110). Cho hình bình hành $ABCD$, $BD \perp BC$. Biết $AB = a$, $\widehat{A} = \alpha$, tính diện tích hình bình hành đó.

Bài toán 92 ([Tuy23], 25., p. 110). Cho $\triangle ABC$, $\widehat{A} = 120^\circ$, $\widehat{B} = 35^\circ$, $AB = 12.25$ dm. Giải $\triangle ABC$.

Bài toán 93 ([Tuy23], 26., p. 110). Cho $\triangle ABC$ nhọn, $\widehat{A} = 75^\circ$, $AB = 30$ mm, $BC = 35$ mm. Giải $\triangle ABC$.

Bài toán 94 ([Tuy23], 27., p. 110). Cho $\triangle ABC$ cân tại A , đường cao BH . Biết $BH = h$, $\widehat{C} = \alpha$. Giải $\triangle ABC$.

Bài toán 95 ([Tuy23], 28., p. 110). Hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{A} = 120^\circ$, $AB = a$, $BC = b$. Các đường phân giác của 4 góc cắt nhau tạo thành tứ giác $MNPQ$. Tính diện tích tứ giác $MNPQ$.

Bài toán 96 ([Tuy23], 29., p. 110). Cho $\triangle ABC$, các đường phân giác AD , đường cao BH , đường trung tuyến CE đồng quy tại điểm O . Chứng minh $AC \cos A = BC \cos C$.

4 Miscellaneous

Bài toán 97 ([Tuy23], Thí dụ 4, p. 111). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Gọi M, N lần lượt là 2 điểm trên cạnh AB, AC sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$, $AN = \frac{1}{3}AC$. Biết độ dài $BN = \sin \alpha$, $CM = \cos \alpha$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Tính cạnh huyền BC .

Bài toán 98 ([Tuy23], 30., p. 112). Cho $\triangle ABC$ nhọn, $BC = a$, $AC = b$, $CA = b$ trong đó $b - c = \frac{a}{k}$, $k > 1$. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là các đường cao hạ từ A, B, C . Chứng minh: (a) $\sin A = k(\sin B - \sin C)$. (b) $\frac{1}{h_a} = k \left(\frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} \right)$.

Bài toán 99 ([Tuy23], 31., p. 112). Giải $\triangle ABC$ biết $AB = 14$, $BC = 15$, $CA = 13$.

Bài toán 100 ([Tuy23], 32., p. 112). Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $\widehat{DC'D'} = 45^\circ$, $\widehat{BC'B'} = 60^\circ$. Tính $\widehat{BC'D'}$.

Bài toán 101 ([Tuy23], 33., p. 112). Cho $\triangle ABC$, $AB = AC = 1$, $\widehat{A} = 2\alpha$, $0^\circ < \alpha < 45^\circ$. Vẽ các đường cao AD, BE . (a) Các tỷ số lượng giác $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ được biểu diễn bởi các đoạn thẳng nào? (b) Chứng minh $\triangle ADC \sim \triangle BEC$, từ đó suy ra các hệ thức sau: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$. (c) Chứng minh: $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$, $\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$.

Bài toán 102 ([Tuy23], 34., p. 112). Cho $\alpha = 22^\circ 30'$, tính $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$.

Bài toán 103 ([Tuy23], 35., p. 112). Cho $\triangle ABC$, đường phân giác AD . Biết $AB = c$, $AC = b$, $\widehat{A} = 2\alpha$, $\alpha < 45^\circ$. Chứng minh $AD = \frac{2bc \cos \alpha}{b + c}$.

Tài liệu

- [Bìn+23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Ngọc Dạm, Nguyễn Bá Đang, Lê Quốc Hán, and Hồ Quang Vinh. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 9. Tập 2: Hình Học*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 240.
- [Chí+23] Phan Đức Chính, Tôn Thân, Vũ Hữu Bình, Trần Phương Dung, Ngô Hữu Dũng, Lê Văn Hồng, and Nguyễn Hữu Thảo. *Toán 9 Tập 1*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 128.
- [Thâ+23] Tôn Thân, Vũ Hữu Bình, Trần Phương Dung, Lê Văn Hồng, and Nguyễn Hữu Thảo. *Bài Tập Toán 9 Tập 1*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 216.
- [Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.