

Problem: Trigonometry – Bài Tập Lượng Giác

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 8 tháng 5 năm 2023

Tóm tắt nội dung

Mục lục

1 Hệ Thức về Cạnh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông	1
2 Tỷ Số Lượng Giác của Góc Nhọn	2
3 Hệ Thức về Cạnh & Góc Trong Tam Giác Vuông	3
4 Miscellaneous	3
Tài liệu	3

1 Hệ Thức về Cạnh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông

Bài toán 1 ([Tuy23], Thí dụ 1, p. 103). Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ$, 2 đường chéo vuông góc với nhau tại H . Biết $AB = 3\sqrt{5}$ cm, $HA = 3$ cm. Chứng minh: (a) $HA : HB : HC : HD = 1 : 2 : 4 : 8$. (b) $\frac{1}{AB^2} - \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{HB^2} - \frac{1}{HC^2}$.

Bài toán 2 ([Tuy23], 1., p. 105). Cho hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$, 2 đường chéo vuông góc với nhau. Biết $AC = 16$ cm, $BD = 12$ cm. Tính chiều cao của hình thang.

Bài toán 3 ([Tuy23], 2., p. 105). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH , đường phân giác AD . Biết $BH = 63$ cm, $CH = 112$ cm, tính HD .

Bài toán 4 ([Tuy23], 3., p. 105). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . 2 đường trung tuyến AD, BE vuông góc với nhau tại G . Biết $AB = \sqrt{6}$ cm. Tính cạnh huyền BC .

Bài toán 5 ([Tuy23], 4., p. 105). Gọi a, b, c là các cạnh của 1 tam giác vuông, h là đường cao ứng với cạnh huyền a . Chứng minh tam giác có các cạnh $a + h, b + c$, & h cũng là 1 tam giác vuông.

Bài toán 6 ([Tuy23], 5., p. 105). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Gọi I, K thứ tự là hình chiếu của H trên AB, AC . Đặt $c = AB$, $b = AC$. (a) Tính AI, AK theo b, c . (b) Chứng minh $\frac{BI}{CK} = \frac{c^3}{b^3}$.

Bài toán 7 ([Tuy23], 6., p. 105). Cho $\triangle ABC$, $AB = 1$, $\widehat{A} = 105^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = 1$. Vẽ $ED \parallel AB$, $D \in AC$. Chứng minh: $\frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{4}{3}$.

Bài toán 8 ([Tuy23], 7., p. 105). Cho hình chữ nhật $ABCD$, $AB = 2BC$. Trên cạnh BC lấy điểm E . Tia AE cắt đường thẳng CD tại F . Chứng minh: $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{4AF^2}$.

Bài toán 9 ([Tuy23], 8., p. 105). Cho 3 đoạn thẳng có độ dài a, b, c . Dựng đoạn thẳng x sao cho $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

Bài toán 10 ([Tuy23], 9., p. 105). Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 120^\circ$. 1 đường thẳng d không cắt các cạnh của hình thoi. Chứng minh: tổng các bình phương hình chiếu của 4 cạnh với 2 lần bình phương hình chiếu của đường chéo AC trên đường thẳng d không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d .

Bài toán 11 ([Tuy23], 10., p. 106). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Từ 1 điểm O ở trong tam giác ta vẽ $OD \perp BC$, $OE \perp CA$, $OF \perp AB$. Xác định vị trí của O để $OD^2 + OE^2 + OF^2$ nhỏ nhất.

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyentuanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

Bài toán 12 ([Bin+23], Ví dụ 1, p. 5). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Biết $AB : AC = 3 : 4$ & $AB + AC = 21$ cm. (a) Tính các cạnh của $\triangle ABC$. (b) Tính độ dài các đoạn AH, BH, CH .

Bài toán 13 (Mở rộng [Bin+23], Ví dụ 1, p. 5). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Biết $AB : AC = m : n$ & $AB + AC = p$ cm. (a) Tính các cạnh của $\triangle ABC$. (b) Tính độ dài các đoạn AH, BH, CH .

Bài toán 14 ([Bin+23], Ví dụ 2, p. 6). Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $CD = 30$ cm, $CA \perp CB$. Tính diện tích của hình thang.

Bài toán 15 ([Bin+23], Ví dụ 3, p. 7). Cho $\triangle ABC$ nhọn, đường cao CK , H là trực tâm. Gọi M là 1 điểm trên CK sao cho $\widehat{AMB} = 90^\circ$. S, S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích các $\triangle AMB, \triangle ABC, \triangle ABH$. Chứng minh $S = \sqrt{S_1 S_2}$.

Bài toán 16 ([Bin+23], 1.1., p. 7). Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A & điểm M nằm giữa B & C . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của điểm M lên AB, AC . Chứng minh $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$.

Bài toán 17 ([Bin+23], 1.2., p. 7). Cho hình chữ nhật $ABCD$ & điểm O nằm trong hình chữ nhật đó. Chứng minh $OA^2 + OC^2 = OB^2 + CD^2$.

Bài toán 18 ([Bin+23], 1.3., p. 8). Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 6$ cm, $CD = 8$ cm. Đường thẳng kẻ từ D vuông góc với AC tại E , cắt cạnh AB tại F . Tính độ dài các đoạn thẳng DE, DF, AE, CE, AF, BF .

Bài toán 19 ([Bin+23], 1.4., p. 8). Cho $\triangle ABC$ có $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $AC = 5$ cm. Đường cao, đường phân giác, đường trung tuyến của tam giác kẻ từ đỉnh B chia tam giác thành 4 gam giác không có điểm trong chung. Tính diện tích của mỗi tam giác đó.

Bài toán 20 ([Bin+23], 1.5., p. 8). Trong 1 tam giác vuông tỷ số giữa đường cao & đường trung tuyến kẻ từ đỉnh góc vuông bằng $40 : 41$. Tính độ dài các cạnh góc vuông của tam giác đó, biết cạnh huyền bằng $\sqrt{41}$ cm.

Bài toán 21 ([Bin+23], 1.6., p. 8). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Kẻ $HE \perp AB$, $HF \perp AC$. Gọi O là giao điểm của AH & EF . Chứng minh $HB \cdot HC = 4OE \cdot OF$.

Bài toán 22 ([Bin+23], 1.7., p. 8).

Bài toán 23 ([Bin+23], 1.8., p. 8).

Bài toán 24 ([Bin+23], 1.9., p. 8).

Bài toán 25 ([Bin+23], 1.10., p. 8).

Bài toán 26 ([Bin+23], 1.11., p. 8).

Bài toán 27 ([Bin+23], 1.12., p. 8).

Bài toán 28 ([Bin+23], 1.13., p. 9).

Bài toán 29 ([Bin+23], 1.14., p. 9).

Bài toán 30 ([Bin+23], 1.15., p. 9).

Bài toán 31 ([Bin+23], 1.16., p. 9).

2 Tỷ Số Lượng Giác của Góc Nhọn

Bài toán 32 ([Tuy23], Thí dụ 2, p. 107). Cho $\cot \alpha = \frac{a^2 - b^2}{2ab}$ trong đó α là góc nhọn, $a > b > 0$. Tính $\cos \alpha$.

Bài toán 33 ([Tuy23], 11., p. 108, định lý sin). Cho $\triangle ABC$ nhọn, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. Dạng thức này còn đúng với tam giác vuông & tam giác tù hay không?

Bài toán 34 ([Tuy23], 12., p. 108). Chứng minh: (a) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$. (b) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$. (c) $\cot^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \cot^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$. (d) $\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$.

Bài toán 35 ([Tuy23], 13., p. 108). Rút gọn biểu thức: (a) $A = \frac{1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$. (b) $B = (1 + \tan^2 \alpha)(1 - \sin^2 \alpha) - (1 + \cot^2 \alpha)(1 - \cos^2 \alpha)$. (c) $C = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$.

Bài toán 36 ([Tuy23], 14., p. 108). Tính giá trị của biểu thức $A = 5 \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha$ biết $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.

Bài toán 37 ([Tuy23], 15., p. 108). Không dùng máy tính hoặc bảng số, tính: (a) $A = \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 70^\circ$. (b) $B = \sin^2 5^\circ + \sin^2 25^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 65^\circ + \sin^2 85^\circ$.

Bài toán 38 ([Tuy23], 16., p. 108). Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Chứng minh: $\sin \alpha < \tan \alpha$, $\cos \alpha < \cot \alpha$. Áp dụng: (a) Sắp xếp các số sau theo thứ tự tăng dần: $\sin 65^\circ$, $\cos 65^\circ$, $\tan 65^\circ$. (b) Xác định α thỏa mãn điều kiện: $\tan \alpha > \sin \alpha > \cos \alpha$.

Bài toán 39 ([Tuy23], 17., p. 108). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Biết $\sin B = \frac{1}{4}$, tính $\tan C$.

Bài toán 40 ([Tuy23], 18., p. 108). Cho biết $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, tính $\tan \alpha$.

Bài toán 41 ([Tuy23], 19., p. 109). $\triangle ABC$, đường trung tuyến AM . Chứng minh nếu $\cot B = 3 \cot C$ thì $AM = AC$.

Bài toán 42 ([Tuy23], 20., p. 109). Cho $\triangle ABC$, trực tâm H là trung điểm của đường cao AD . Chứng minh $\tan B \tan C = 2$.

Bài toán 43 ([Tuy23], 21., p. 109). Cho $\triangle ABC$ nhọn, 2 đường cao BD, CE . Chứng minh: (a) $S_{\triangle ADE} = S_{\triangle ABC} \cos^2 A$. (b) $S_{BCDE} = S_{\triangle ABC} \sin^2 A$.

Bài toán 44 ([Tuy23], 22., p. 109). Cho $\triangle ABC$ nhọn. Từ 1 điểm M nằm trong tam giác vẽ $MD \perp BC$, $ME \perp AC$, $MF \perp AB$. Chứng minh $\max\{MA, MB, MC\} \geq 2 \min\{MD, ME, MF\}$, trong đó $\max\{MA, MB, MC\}$ là đoạn thẳng lớn nhất trong các đoạn thẳng MA, MB, MC & $\min\{MD, ME, MF\}$ là đoạn thẳng nhỏ nhất trong các đoạn thẳng MD, ME, MF .

3 Hệ Thức về Cạnh & Góc Trong Tam Giác Vuông

Bài toán 45 ([Tuy23], Thí dụ 3, p. 109). Tứ giác $ABCD$ có 2 đường chéo cắt nhau tại O . Cho biết $\widehat{AOD} = 70^\circ$, $AC = 5.3$ cm, $BD = 4$ cm. Tính diện tích tứ giác $ABCD$.

Bài toán 46 ([Tuy23], 23., p. 110). Chứng minh: (a) Diện tích của 1 tam giác bằng nửa tích của 2 cạnh nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa 2 cạnh ấy. (b) Diện tích hình bình hành bằng tích của 2 cạnh kề nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa 2 cạnh ấy.

Bài toán 47 ([Tuy23], 24., p. 110). Cho hình bình hành $ABCD$, $BD \perp BC$. Biết $AB = a$, $\hat{A} = \alpha$, tính diện tích hình bình hành đó.

Bài toán 48 ([Tuy23], 25., p. 110). Cho $\triangle ABC$, $\hat{A} = 120^\circ$, $\hat{B} = 35^\circ$, $AB = 12.25$ dm. Giải $\triangle ABC$.

Bài toán 49 ([Tuy23], 26., p. 110). Cho $\triangle ABC$ nhọn, $\hat{A} = 75^\circ$, $AB = 30$ mm, $BC = 35$ mm. Giải $\triangle ABC$.

Bài toán 50 ([Tuy23], 27., p. 110). Cho $\triangle ABC$ cân tại A , đường cao BH . Biết $BH = h$, $\hat{C} = \alpha$. Giải $\triangle ABC$.

Bài toán 51 ([Tuy23], 28., p. 110). Hình bình hành $ABCD$ có $\hat{A} = 120^\circ$, $AB = a$, $BC = b$. Các đường phân giác của 4 góc cắt nhau tạo thành tứ giác $MNPQ$. Tính diện tích tứ giác $MNPQ$.

Bài toán 52 ([Tuy23], 29., p. 110). Cho $\triangle ABC$, các đường phân giác AD , đường cao BH , đường trung tuyến CE đồng quy tại điểm O . Chứng minh $AC \cos A = BC \cos C$.

4 Miscellaneous

Tài liệu

[Bìn+23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Ngọc Đàm, Nguyễn Bá Đang, Lê Quốc Hán, and Hồ Quang Vinh. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 9. Tập 2: Hình Học*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 240.

[Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.