

# Problems in Elementary Mathematics/Grade 8

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 23 tháng 10 năm 2022

## Tóm tắt nội dung

1 bộ sưu tập các bài toán chọn lọc từ cơ bản đến nâng cao cho Toán sơ cấp lớp 8. Tài liệu này là phần bài tập bổ sung cho tài liệu chính [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/lecture)<sup>1</sup> của tác giả viết cho Toán lớp 8. Phiên bản mới nhất của tài liệu này được lưu trữ ở link sau: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/problem](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/problem)<sup>2</sup>.

## Mục lục

<b>1 Phép Nhân &amp; Phép Chia Các Đa Thức</b>	<b>3</b>
1.1 Nhân Đơn Thức với Đa Thức	3
1.2 Nhân Đa Thức với Đa Thức	3
1.3 Các Hằng Đẳng Thức Đáng Nhớ	4
1.4 Phân Tích Đa Thức Thành Nhân Tử Bằng Phương Pháp Đặt Nhân Tử Chung	6
1.5 Chia Đơn Thức Cho Đơn Thức	7
1.6 Chia Đa Thức Cho Đơn Thức	7
1.7 Chia Đa Thức 1 Biến Đã Sắp Xếp	9
<b>2 Phân Thức Đại Số</b>	<b>9</b>
2.1 Phân Thức Đại Số	9
2.2 Tính Chất Cơ Bản của Phân Thức	9
2.3 Rút Gọn Phân Thức	9
2.4 Quy Đồng Mẫu thức Nhiều Phân Thức	9
2.5 Phép Cộng Các Phân Thức Đại Số	9
2.6 Phép Trừ Các Phân Thức Đại Số	9
2.7 Phép Nhân Các Phân Thức Đại Số	9
2.8 Phép Chia Các Phân Thức Đại Số	9
2.9 Biến Đổi Các Biểu Thức Hữu Tỷ. Giá Trị của Phân Thức	9
<b>3 Phương Trình Đại Số 1 Ẩn – Algebraic Equation with 1 Unknown</b>	<b>9</b>
3.1 Mở Đầu về Phương Trình	9
3.2 Phương Trình Bậc Nhất 1 Ẩn & Cách Giải	9
3.3 Phương Trình Đưa Được về Dạng $ax + b = 0$	9
3.4 Phương Trình Tích	9
3.5 Phương Trình Chứa Ẩn ở Mẫu	9
3.6 Giải Bài Toán Bằng Cách Lập Phương Trình	9
<b>4 Bất Phương Trình Bậc Nhất 1 Ẩn – Algebraic Inequation with 1 Unknown</b>	<b>9</b>
4.1 Liên Hệ Giữa Thứ Tự & Phép Cộng	9
4.2 Liên Hệ Giữa Thứ Tự & Phép Nhân	9
4.3 Bất Phương Trình 1 Ẩn	9
4.4 Bất Phương Trình Bậc Nhất 1 Ẩn	9
4.5 Phương Trình Chứa Dấu Giá Trị Tuyệt Đối	9

\*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam

e-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com); website: <https://nqbh.github.io>.

<sup>1</sup>URL: [https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary\\_mathematics/grade\\_8/NQBH\\_elementary\\_mathematics\\_grade\\_8.pdf](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/NQBH_elementary_mathematics_grade_8.pdf).

<sup>2</sup>URL: [https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary\\_mathematics/grade\\_8/problem/NQBH\\_elementary\\_mathematics\\_grade\\_8\\_problem.pdf](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/problem/NQBH_elementary_mathematics_grade_8_problem.pdf).

<b>5</b>	<b>Tứ Giác</b>	<b>9</b>
5.1	Tứ Giác	9
5.2	Hình Thang	9
5.3	Hình Thang Cân	9
5.4	Đường Trung Bình của Tam Giác, của Hình Thang	9
5.5	Dựng Hình Bằng Thước & Compa. Dựng Hình thang	9
5.6	Đối Xứng Trục	9
5.7	Hình Bình Hành	9
5.8	Đối Xứng Tâm	9
5.9	Hình Chữ Nhật	9
5.10	Đường Thẳng Song Song với 1 Đường Thẳng Cho Trước	9
5.11	Hình Thoi	9
5.12	Hình Vuông	9
<b>6</b>	<b>Đa Giác. Diện Tích Đa Giác</b>	<b>9</b>
6.1	Đa Giác. Đa Giác đều	9
6.2	Diện Tích Hình Chữ Nhật	9
6.3	Diện Tích Tam Giác	9
6.4	Diện Tích Hình Thang	9
6.5	Diện Tích Hình Thoi	9
6.6	Diện Tích Đa Giác	9
<b>7</b>	<b>Tam Giác Đồng Dạng</b>	<b>9</b>
7.1	Định Lý Thales Trong Tam Giác	9
7.2	Định Lý Đảo & Hệ Quả của Định Lý Thales	9
7.3	Tính Chất Đường Phân Giác của Tam Giác	9
7.4	Khái Niệm 2 Tam Giác Đồng Dạng	9
7.5	Trường Hợp Đồng Dạng Thứ Nhất	9
7.6	Trường Hợp Đồng Dạng Thứ 2	9
7.7	Trường Hợp Đồng Dạng Thứ 3	9
7.8	Các Trường Hợp Đồng Dạng của Tam Giác Vuông	9
7.9	Ứng Dụng Thực Tế của Tam Giác Đồng Dạng	9
<b>8</b>	<b>Hình Lăng Trụ Đứng. Hình Chóp Đều</b>	<b>9</b>
8.1	Hình Hộp Chữ Nhật	10
8.2	Thể Tích của Hình Hộp Chữ Nhật	10
8.3	Hình Lăng Trụ Đứng	10
8.4	Diện Tích Xung Quanh của Hình Lăng Trụ Đứng	10
8.5	Thể Tích của Hình Lăng Trụ Đứng	10
8.6	Hình Chóp Đều & Hình Chóp Cụt Đều	10
8.7	Diện Tích Xung Quanh của Hình Chóp Đều	10
8.8	Thể Tích của Hình Chóp Đều	10
	<b>Tài liệu</b>	<b>10</b>

## Ký Hiệu – Notation

• Tổng hữu hạn/finite sum:  $\sum_{i=a}^b f(i) = f(a) + f(a+1) + \dots + f(b)$ ,  $\forall f$ : hàm số,  $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $a \leq b$ . • Tích hữu hạn/finite product:  $\prod_{i=a}^b f(i) = f(a)f(a+1) \dots f(b)$ ,  $\forall f$ : hàm số,  $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $a \leq b$ .

## 1 Phép Nhân & Phép Chia Các Đa Thức

### 1.1 Nhân Đơn Thức với Đa Thức

**Bài toán 1.1** (Đơn thức nhân đơn thức). *Tính: (a) (Tích 2 đơn thức cùng biến)  $ax^m bx^n$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{N}$ . (b) (Tích 2 đơn thức khác biến)  $ax^m by^n$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{N}$ . (c) (Tích nhiều đơn thức cùng biến)  $\prod_{i=1}^n a_i x^{m_i} = a_1 x^{m_1} \dots a_n x^{m_n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $m_i \in \mathbb{N}$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ . (d) (Tích nhiều đơn thức khác biến)  $\prod_{i=1}^n a_i x_i^{m_i} = a_1 x_1^{m_1} \dots a_n x_n^{m_n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $m_i \in \mathbb{N}$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ . Trong đó,  $x, y, x_i$ 's là các biến số của các đơn thức này.*

**Bài toán 1.2** (Đơn thức nhân đa thức). *Tính: (a) (Đơn thức 1 biến nhân đa thức bậc nhất 1 biến)  $Cx^n(ax+b)$ ,  $\forall C, a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . (b) (Đơn thức 1 biến nhân đa thức bậc 2 1 biến)  $Cx^n(ax^2+bx+c)$ . (c) (Đơn thức 1 biến nhân đa thức bậc 3 1 biến)  $ax^n(bx^3+cx^2+dx+e)$ . (d) (Đơn thức 1 biến nhân đa thức bậc  $n$  1 biến)  $ax^m \sum_{i=0}^n a_i x^i = ax^m(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)$ .*

**Bài toán 1.3** (Bình, 2022, Ví dụ 1, p. 5). *Tính giá trị của biểu thức:  $A = x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 17x + 20$  tại  $x = 16$ .*

**Bài toán 1.4** (Bình, 2022, Ví dụ 2, p. 5). *Tìm 3 số tự nhiên liên tiếp, biết rằng nếu cộng 3 tích của 2 trong 3 số ấy, ta được 242.*

**Bài toán 1.5** (Bình, 2022, 1., p. 5). *Thực hiện phép tính: (a)  $3x^n(6x^{n-3} + 1) - 2x^n(9x^{n-3} - 1)$ . (b)  $5^{n+1} - 4 \cdot 5^n$ . (c)  $6^2 \cdot 6^4 - 4^3(3^6 - 1)$ .*

**Bài toán 1.6** (Bình, 2022, 2., p. 6). *Tìm  $x$ , biết: (a)  $4(18-5x) - 12(3x-7) = 15(2x-16) - 6(x+14)$ . (b)  $5(3x+5) - 4(2x-3) = 5x + 3(2x+12) + 1$ . (c)  $2(5x-8) - 3(4x-5) = 4(3x-4) + 11$ . (d)  $5x - 3\{4x - 2[4x - 3(5x-2)]\} = 182$ .*

**Bài toán 1.7** (Bình, 2022, 3., p. 6). *Tính giá trị của các biểu thức: (a)  $A = x^3 - 30x^2 - 31x + 1$  tại  $x = 31$ . (b)  $B = x^5 - 15x^4 + 16x^3 - 29x^2 + 13x$  tại  $x = 14$ . (c)  $C = x^{14} - 10x^3 + 10x^2 - 10x^{11} + \dots + 10x^2 - 10x + 10$  tại  $x = 9$ .*

**Bài toán 1.8** (Bình, 2022, 4., p. 6). *Tính giá trị của biểu thức sau bằng cách thay số bởi chữ 1 cách hợp lý:*

$$A = 2 \frac{1}{315} \cdot \frac{1}{651} - \frac{1}{105} \cdot 3 \frac{650}{651} - \frac{4}{315 \cdot 651} + \frac{4}{105}.$$

### 1.2 Nhân Đa Thức với Đa Thức

**Bài toán 1.9** (Đa thức nhân đa thức). *Tính: (a)  $(ax+b)(cx+d)$ . (b)  $(ax^2+bx+c)(dx+e)$ . (c)  $(ax^3+bx^2+cx+d)(ex+f)$ . (d)  $(ax^2+bx+c)(dx^2+ex+f)$ . (e)  $(ax^3+bx^2+cx+d)(ex^2+fx+g)$ . (f)  $(ax^3+bx^2+cx+d)(ex^3+fx^2+gx+h)$ . (g)  $(\sum_{i=0}^m a_i x^i) (\sum_{j=0}^n b_j x^j) = (a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0)(b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0)$ .*

**Bài toán 1.10** (Bình, 2022, 5., p. 6). *Thực hiện phép tính: (a)  $(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$ . (b)  $(x+1)(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$ .*

1 tổng quát của bài toán này:

**Bài toán 1.11.** *Tính: (a)  $(x-1) \sum_{i=0}^n x^i = (x-1)(x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . (b)  $(x+1) \sum_{i=0}^n (-1)^i x^i$ .*

**Bài toán 1.12** (Bình, 2022, 6., p. 6). *Tìm  $x$ , biết: (a)  $(x+2)(x+3) - (x-2)(x+5) = 6$ . (b)  $(3x+2)(2x+9) - (x+2)(6x+1) = (x+1) - (x-6)$ . (c)  $3(2x-1)(3x-1) - (2x-3)(9x-1) = 0$ .*

**Bài toán 1.13** (Bình, 2022, 7., p. 6). *Cho  $a+b+c=0$ . Chứng minh:  $M=N=P$  với:  $M=a(a+b)(a+c)$ ,  $N=b(b+c)(b+a)$ ,  $P=c(c+a)(c+b)$ .*

**Bài toán 1.14** (Bình, 2022, 8., p. 6). *Chứng minh các hằng đẳng thức: (a)  $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ . (b)  $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$ . (c)  $\prod_{i=1}^n x + a_i = (x+a_1)(x+a_2) \dots (x+a_n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall a_i \in \mathbb{R}$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ .*

**Bài toán 1.15** (Bình, 2022, 9., p. 6). *Cho  $a+b+c=2p$ . Chứng minh hằng đẳng thức:  $2bc+b^2+c^2-a^2=4p(p-a)$ .*

**Bài toán 1.16** (Bình, 2022, 10., p. 7). *Xét các ví dụ:  $53 \cdot 57 = 3021$ ,  $72 \cdot 78 = 5616$ . Xây dựng quy tắc nhân nhẩm 2 số có 2 chữ số, trong đó các chữ số hàng chục bằng nhau, còn các chữ số hàng đơn vị có tổng bằng 10.*

**Bài toán 1.17** (Bình, 2022, 11., p. 7). Cho biểu thức  $M = (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) + x^2$ . Tính  $M$  theo  $a, b, c$ , biết  $x = \frac{1}{2}(a + b + c)$ .

**Bài toán 1.18** (Bình, 2022, 12., p. 7). Cho dãy số  $1, 3, 6, 10, 15, \dots, \frac{n(n+1)}{2}, \dots$ . Chứng minh: tổng 2 số hạng liên tiếp của dãy bao giờ cũng là số chính phương.

**Bài toán 1.19** (Bình, 2022, 13., p. 7). Số  $a$  gồm 31 chữ số 1, số  $b$  gồm 38 chữ số 1. Chứng minh:  $ab - 2 \vdots 3$ .

**Bài toán 1.20** (Bình, 2022, 14., p. 7). Số  $3^{50} + 1$  có là tích của 2 số tự nhiên liên tiếp không?

**Bài toán 1.21** (Bình, 2022, 15., p. 7). (a) Thực hiện phép tính:  $A = (2^9 + 2^7 + 1)(2^{23} - 2^{21} + 2^{19} - 2^{17} + 2^{14} - 2^{10} + 2^9 - 2^7 + 1)$ .  
(b) Số  $2^{32} + 1$  có là số nguyên tố không?

### 1.3 Các Hằng Đẳng Thức Đáng Nhớ

“Thực hiện các phép nhân đa thức, ta được các hằng đẳng thức sau: **1.**  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ . **2.**  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ . **3.**  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ . **4.**  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ . **5.**  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$ . **6.**  $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ . **7.**  $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ . Ta cũng có:  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ .”  
Tổng quát hơn,  $(\sum_{i=1}^n a_i)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$ . “Tổng quát của các hằng đẳng thức **3** & **7**, ta có hằng đẳng thức: **8.**  $a^n - b^n = (a - b) \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} b^i = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Tổng quát của hằng đẳng thức **6**, ta có hằng đẳng thức: **9.**  $a^n + b^n = (a + b) \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a^{n-1-i} b^i = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n$  lẻ. Tổng quát của các hằng đẳng thức **1-5**, ta có công thức Newton.” – Bình, 2022, pp. 7-8

**Định lý 1.1** (Công thức nhị thức Newton).  $(a + b)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} b^i = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , trong đó  $C_n^i := \frac{n!}{i!(n-i)!}$ ,  $\forall i, n \in \mathbb{N}$ ,  $i \leq n$ .

**Bài toán 1.22** (Chính et al., 2022, 23., p. 12). Chứng minh các đẳng thức sau:

$$(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab, \quad (a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

**Bài toán 1.23** (Chính et al., 2022, 25., p. 12). Tính (a)  $(a + b + c)^2$ . (b)  $(a + b - c)^2$ . (c)  $(a - b - c)^2$ .

Tổng quát hơn,

**Bài toán 1.24.** Với  $n \in \mathbb{N}^*$  cho trước, tính  $(\sum_{i=1}^n a_i)^2 = (a_1 + \dots + a_n)^2$ , sau đó phát biểu đẳng thức tìm được bằng lời. Từ đó suy ra kết quả của  $(\sum_{i=1}^n \pm a_i)^2 = (\pm a_1 \pm \dots \pm a_n)^2$ .

**Bài toán 1.25** (Chính et al., 2022, 31., p. 16). Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b), \quad a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Áp dụng: Tính  $a^3 + b^3$  biết  $ab = m$  &  $a + b = n$  với  $m, n \in \mathbb{R}$  cho trước. Tính  $a^3 - b^3$  biết  $ab = m$  &  $a - b = k$  với  $m, k \in \mathbb{R}$  cho trước.

**Bài toán 1.26** (Bình, 2022, Ví dụ 3, p. 8). Chứng minh số 3599 viết được dưới dạng tích của 2 số tự nhiên khác 1.

**Bài toán 1.27** (Bình, 2022, Ví dụ 4, p. 8). Chứng minh biểu thức sau viết được dưới dạng tổng các bình phương của 2 biểu thức:  $x^2 + 2(x + 1)^2 + 3(x + 2)^2 + 4(x + 3)^2$ .

**Bài toán 1.28** (Bình, 2022, Ví dụ 5, p. 8). Cho  $x + y + z = 0$ ,  $xy + yz + zx = 0$ . Chứng minh  $x = y = z$ .

**Bài toán 1.29** (Bình, 2022, Ví dụ 6, p. 9). (a) Tính  $A = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \dots - 99^2 + 100^2$ . (b) Tính  $\sum_{i=1}^n (-1)^i i^2 = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \dots + (-1)^n n^2$ .

**Bài toán 1.30** (Bình, 2022, Ví dụ 7, p. 9). Cho  $x + y = a + b$ ,  $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ . Chứng minh:  $x^3 + y^3 = a^3 + b^3$ .

**Bài toán 1.31** (Bình, 2022, Ví dụ 8, p. 10). Cho  $a + b = m$ ,  $a - b = m$ . Tính  $ab$  &  $a^3 - b^3$  theo  $m$  &  $n$ .

**Bài toán 1.32** (Bình, 2022, 16., p. 10). Tính: (a)  $\frac{63^2 - 47^2}{215^2 - 105^2}$ . (b)  $\frac{437^2 - 363^2}{537^2 - 463^2}$ .

**Bài toán 1.33** (Bình, 2022, 17., p. 11). So sánh  $A = 26^2 - 24^2$  &  $B = 27^2 - 25^2$ .

**Bài toán 1.34** (Bình, 2022, 18., p. 11). Tìm  $x$  thỏa  $4(x + 1)^2 + (2x - 1)^2 - 8(x - 1)(x + 1) = 11$ .

**Bài toán 1.35** (Bình, 2022, 19., p. 11). Rút gọn các biểu thức: (a)  $2x(2x-1)^2 - 3x(x+3)(x-3) - 4x(x+1)^2$ . (b)  $(a-b+c)^2 - (b-c)^2 + 2ab - 2ac$ . (c)  $(3x+1)^2 - 2(3x+1)(3x+5) + (3x+5)^2$ . (d)  $(3+1)(3^1+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)$ . (e)  $(a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 - 2(b-c)^2$ . (f)  $(a+b+c)^2 + (a-b-c)^2 + (b-c-a)^2 + (c-a-b)^2$ . (g)  $(a+b+c+d)^2 + (a+b-c-d)^2 + (a+c-b-d)^2 + (a+d-b-c)^2$ .

**Bài toán 1.36** (Bình, 2022, 20., p. 11). Cho  $x+y=3$ . Tính giá trị của biểu thức  $A = x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y + 1$ .

**Bài toán 1.37** (Bình, 2022, 21., p. 11). Cho  $a^2 + b^2 + c^2 = m$ . Tính giá trị của biểu thức sau theo  $m$ :  $A = (2a+b-c)^2 + (2b+2c-a)^2 + (2c+2a-b)^2$ .

**Bài toán 1.38** (Bình, 2022, 22., p. 11). Viết các số sau đây dưới dạng tích của 2 số tự nhiên khác 1: (a) 899. (b) 9991.

**Bài toán 1.39** (Bình, 2022, 23., p. 11). Chứng minh hiệu sau đây là 1 số gồm toàn các chữ số như nhau:  $7778^2 - 2223^2$ .

**Bài toán 1.40** (Bình, 2022, 24., p. 11). Chứng minh các hằng đẳng thức: (a)  $(a+b+c)^2 + a^2 + b^2 + c^2 = (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2$ . (b)  $x^4 + y^4 + (x+y)^4 = 2(x^2 + xy + y^2)^2$ .

**Bài toán 1.41** (Bình, 2022, 25., p. 11). Cho  $a^2 - b^2 = 4c^2$ . Chứng minh hằng đẳng thức  $(5a-3b+8c)(5a-3b-8c) = (3a-5b)^2$ .

**Bài toán 1.42** (Bình, 2022, 26., p. 11, điều kiện để đẳng thức xảy ra trong bất đẳng thức Cauchy-Schwarz 2 cặp biến). Chứng minh nếu  $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2$  với  $x, y \neq 0$  thì  $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ .

**Bài toán 1.43** (Bình, 2022, 27., p. 12, điều kiện để đẳng thức xảy ra trong bất đẳng thức Cauchy-Schwarz 3 cặp biến). Chứng minh nếu  $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2$  với  $x, y, z \neq 0$  thì  $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ .

**Bài toán 1.44** (Bình, 2022, 28., p. 11). Cho  $(a+b)^2 = 2(a^2 + b^2)$ . Chứng minh  $a = b$ .

**Bài toán 1.45** (Bình, 2022, 29., p. 12). Chứng minh  $a = b = c$  nếu có 1 trong các điều kiện sau: (a)  $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ . (b)  $(a+b+c)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$ . (c)  $(a+b+c)^2 = 3(ab + bc + ca)$ .

**Bài toán 1.46** (Bình, 2022, 30., p. 12). Viết các biểu thức sau dưới dạng tổng của 3 bình phương: (a)  $(a+b+c)^2 + a^2 + b^2 + c^2$ . (b)  $2(a-b)(c-b) + 2(b-a)(c-a) + 2(b-c)(a-c)$ .

**Bài toán 1.47** (Bình, 2022, 31., p. 12). Tính giá trị của biểu thức  $a^4 + b^4 + c^4$ , biết rằng  $a+b+c=0$  &: (a)  $a^2 + b^2 + c^2 = 2$ . (b)  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ .

**Bài toán 1.48** (Bình, 2022, 32., p. 12). Cho  $a+b+c=0$ . Chứng minh  $a^4 + b^4 + c^4$  bằng mỗi biểu thức: (a)  $2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$ . (b)  $2(ab + bc + ca)^2$ . (c)  $\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)^2$ .

**Bài toán 1.49** (Bình, 2022, 33., p. 12). Chứng minh các biểu thức sau luôn luôn có giá trị dương với mọi giá trị của biến: (a)  $9x^2 - 6x + 2$ . (b)  $x^2 + x + 1$ . (c)  $2x^2 + 2x + 1$ .

**Bài toán 1.50** (Bình, 2022, 34., p. 12). Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức: (a)  $A = x^2 - 3x + 5$ . (b)  $B = (2x-1)^2 + (x+2)^2$ .

**Bài toán 1.51** (Bình, 2022, 35., p. 12). Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức: (a)  $A = 4 - x^2 + 2x$ . (b)  $B = 4x - x^2$ .

**Bài toán 1.52** (Bình, 2022, 36., p. 12). Chứng minh: (a) Nếu  $p \nmid p^2 + 8$  là các số nguyên tố thì  $p^2 + 2$  cũng là số nguyên tố. (b) Nếu  $p \nmid 8p^2 + 1$  là các số nguyên tố thì  $2p + 1$  cũng là số nguyên tố.

**Bài toán 1.53** (Bình, 2022, 37., p. 13). Chứng minh các số sau là hợp số: (a) 999991. (b) 1000027.

**Bài toán 1.54** (Bình, 2022, 38., p. 13). Thực hiện phép tính:

$$(a) (x-2)^3 - x(x+1)(x-1) + 6x(x-3). \quad (b) (x-2)(x^2 - 2x + 4)(x+2)(x^2 + 2x + 4).$$

**Bài toán 1.55** (Bình, 2022, 39., p. 13). Tìm  $x$ , biết: (a)  $(x-3)(x^2+3x+9)+x(x+2)(2-x)=1$ . (b)  $(x+1)^3 - (x-1)^3 - 6(x-1)^2 = -10$ .

**Bài toán 1.56** (Bình, 2022, 40., p. 13). Rút gọn các biểu thức: (a)  $(a+b+c)^3 - (b+c-a)^3 - (a+c-b)^3 - (a+b-c)^3$ . (b)  $(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a)$ .

**Bài toán 1.57** (Bình, 2022, 41., p. 13). Chứng minh các hằng đẳng thức: (a)  $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(b+c)(c+a)$ . (b)  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ .

**Bài toán 1.58** (Bình, 2022, 42., p. 13). Cho  $a+b+c=0$ . Chứng minh  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ .

**Bài toán 1.59** (Bình, 2022, 43., p. 13). Cho  $x+y=a$  &  $xy=b$ . Tính giá trị của các biểu thức sau theo  $a$  &  $b$ : (a)  $x^2 + y^2$ . (b)  $x^3 + y^3$ . (c)  $x^4 + y^4$ . (d)  $x^5 + y^5$ .

**Bài toán 1.60** (Bình, 2022, 44., p. 13). (a) Cho  $x + y = 1$ . Tính giá trị của biểu thức  $x^3 + y^3 + 3xy$ . (b) Cho  $x - y = 1$ . Tính giá trị của biểu thức  $x^3 - y^3 - 3xy$ .

**Bài toán 1.61** (Bình, 2022, 45., p. 13). Cho  $a + b = 1$ . Tính giá trị của biểu thức  $M = a^3 + b^3 + 3ab(a^2 + b^2) + 6a^2b^2(a + b)$ .

**Bài toán 1.62** (Bình, 2022, 46., p. 13). (a) Cho  $x + y = 2$  &  $x^2 + y^2 = 10$ . Tính giá trị của biểu thức  $x^3 + y^3$ . (b) Cho  $x + y = a$  &  $x^2 + y^2 = b$ . Tính  $x^3 + y^3$  theo  $a$  &  $b$ .

**Bài toán 1.63** (Bình, 2022, 47., pp. 13–14). Chứng minh: (a) Nếu số  $n$  là tổng của 2 số chính phương thì  $2n$  cũng là tổng của 2 số chính phương. (b) Nếu số  $2n$  là tổng của 2 số chính phương thì  $n$  cũng là tổng của 2 số chính phương. (c) Nếu số  $n$  là tổng của 2 số chính phương thì  $n^2$  cũng là tổng của 2 số chính phương. (d) Nếu mỗi số  $m$  &  $n$  đều là tổng của 2 số chính phương thì tích  $mn$  cũng là tổng của 2 số chính phương.

**Bài toán 1.64** (Bình, 2022, 48., p. 14). Mỗi số sau là bình phương của số tự nhiên nào? (a)  $A = \underbrace{99 \dots 9}_{n} \underbrace{00 \dots 0}_{n} 25$ .

(b)  $B = \underbrace{99 \dots 9}_{n} \underbrace{800 \dots 0}_{n} 1$ . (c)  $C = \underbrace{44 \dots 4}_{n} \underbrace{88 \dots 8}_{n-1} 9$ . (d)  $D = \underbrace{11 \dots 1}_{n} \underbrace{22 \dots 2}_{n+1} 5$ .

**Bài toán 1.65** (Bình, 2022, 49., p. 14). Chứng minh các biểu thức sau là số chính phương: (a)  $A = \underbrace{11 \dots 1}_{2n} - \underbrace{22 \dots 2}_n$ .

(b)  $A = \underbrace{11 \dots 1}_{2n} + \underbrace{44 \dots 4}_n + 1$ .

**Bài toán 1.66** (Bình, 2022, 50., p. 14). (a) Cho  $a = \underbrace{11 \dots 1}_n$ ,  $b = \underbrace{100 \dots 0}_{n-1} 5$ . Chứng minh  $ab + 1$  là số chính phương. (b) Cho

1 dãy số có số hạng đầu là 16, các số hạng sau là số tạo thành bằng cách viết chèn số 15 vào chính giữa số hạng liền trước: 16, 1156, 111556, ... Chứng minh mọi số hạng của dãy đều là số chính phương.

**Bài toán 1.67** (Bình, 2022, 51., p. 14). Chứng minh  $ab + 1$  là số chính phương với  $a = \underbrace{11 \dots 1}_n 2$ ,  $b = \underbrace{11 \dots 1}_n 4$ .

**Bài toán 1.68** (Bình, 2022, 52., p. 14). Chứng minh với mọi  $a \in \mathbb{N}$ , tồn tại  $b \in \mathbb{N}$  sao cho  $ab + 4$  là số chính phương.

**Bài toán 1.69** (Bình, 2022, 53., p. 14). Cho  $a$  là số gồm  $2n$  chữ số 1,  $b$  là số gồm  $n + 1$  chữ số 1,  $c$  là số gồm  $n$  chữ số 6. Chứng minh  $a + b + c + 8$  là số chính phương.

**Bài toán 1.70** (Bình, 2022, 54., p. 14). Chứng minh biểu thức sau không là lập phương của 1 số tự nhiên:  $10^{150} + 5 \cdot 10^{50} + 1$ .

**Bài toán 1.71** (Bình, 2022, 55., p. 14). Chứng minh tích 3 số nguyên dương liên tiếp không là lập phương của 1 số tự nhiên.

**Bài toán 1.72** (Bình, 2022, 56., p. 14). Chứng minh số  $A = \frac{1}{3}(\underbrace{11 \dots 1}_n - \underbrace{33 \dots 3}_n \underbrace{00 \dots 0}_n)$  là lập phương của 1 số tự nhiên.

**Bài toán 1.73** (Bình, 2022, 57., p. 15). Chia 27 quả cân có khối lượng 10, 20, 30, ..., 270 gam thành 3 nhóm có khối lượng bằng nhau.

**Bài toán 1.74** (Bình, 2022, 58., p. 15). Chia 18 quả cân có khối lượng  $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 18^2$  gam thành 3 nhóm có khối lượng bằng nhau.

**Bài toán 1.75** (Bình, 2022, 59., p. 15). Chia 27 quả cân có khối lượng  $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 27^2$  gam thành 3 nhóm có khối lượng bằng nhau.

## 1.4 Phân Tích Đa Thức Thành Nhân Tử Bằng Phương Pháp Đặt Nhân Tử Chung

“Để phân tích 1 đa thức thành nhân tử, ta thường dùng các phương pháp: • Đặt nhân tử chung. • Dùng các hằng đẳng thức đáng nhớ. • Nhóm các hạng tử 1 cách thích hợp nhằm làm xuất hiện dạng hằng đẳng thức hoặc xuất hiện nhân tử chung mới. Để phân tích đa thức thành nhân tử, người ta còn dùng các phương pháp khác. Xem chuyên đề 1 số phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử.” – Bình, 2022, p. 15

**Bài toán 1.76** (Bình, 2022, Ví dụ 9, p. 15). Phân tích đa thức sau thành nhân tử:  $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ .

**Bài toán 1.77** (Bình, 2022, Ví dụ 10, p. 15). Cho  $a + b + c = 0$ . Rút gọn biểu thức  $M = a^3 + b^3 + c(a^2 + b^2) - abc$ .

**Bài toán 1.78** (Bình, 2022, Ví dụ 11, p. 16). (a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử:  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ . (b) Phân tích đa thức sau thành nhân tử bằng cách áp dụng câu (a):  $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$ .



**Bài toán 1.79** (Bình, 2022, Ví dụ 12, p. 16). *Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: (a)  $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$ . (b)  $8(x+y+z)^3 - (x+y)^3 - (y+z)^3 - (z+x)^3$ .*

**Bài toán 1.80** (Bình, 2022, Ví dụ 13, p. 17). *Phân tích đa thức sau thành nhân tử:  $P = x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$ .*

**Bài toán 1.81** (Bình, 2022, Ví dụ 14, p. 17). *Xét hằng đẳng thức  $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ . Lần lượt cho  $x$  bằng  $1, 2, \dots, n$  rồi cộng từng vế  $n$  đẳng thức trên để tính giá trị của biểu thức:  $S = \sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ .*

**Bài toán 1.82** (Bình, 2022, 60., p. 18). *Phân tích thành nhân tử: (a)  $(ab-1)^2 + (a+b)^2$ . (b)  $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ . (c)  $x^3 - 4x^2 + 12x - 27$ . (d)  $x^4 - 2x^3 + 2x - 1$ . (e)  $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ .*

**Bài toán 1.83** (Bình, 2022, 61., p. 18). *Phân tích thành nhân tử: (a)  $x^2 - 2x - 4y^2 - 4y$ . (b)  $x^4 + 2x^2 - 4x - 4$ . (c)  $x^2(1-x^2) - 4 - 4x^2$ . (d)  $(1+2x)(1-2x) - x(x+2)(x-2)$ . (e)  $x^2 + y^2 - x^2y^2 + xy - x - y$ .*

**Bài toán 1.84** (Bình, 2022, 62., p. 18). *Chứng minh  $199^3 - 199 \vdots 200$ .*

**Bài toán 1.85** (Bình, 2022, 63., p. 18). *Tính giá trị của biểu thức sau, biết  $x^3 - x = 6$ :  $A = x^6 - 2x^4 + x^3 + x^2 - x$ .*

**Bài toán 1.86** (Bình, 2022, 64., p. 18). *Phân tích thành nhân tử: (a)  $a(b^2 + c^2 + bc) + b(c^2 + a^2 + ac) + c(a^2 + b^2 + ab)$ . (b)  $(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$ . (c)  $a(a+2b)^3 - b(2a+b)^3$ .*

**Bài toán 1.87** (Bình, 2022, 65., pp. 18–19). *Phân tích thành nhân tử:*

*(a)  $ab(a+b) - bc(b+c) + ac(a-c)$ . (b)  $a(b^2+c^2) + b(c^2+a^2) + c(a^2+b^2) + 2abc$ . (c)  $(a+b)(a^2-b^2) + (b+c)(b^2-c^2) + (c+a)(c^2-a^2)$ . (d)  $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$ . (e)  $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$ . (f)  $a^3(c-b^2) + b^3(a-c^2) + c^3(b-a^2) + abc(abc-1)$ .*

**Bài toán 1.88** (Bình, 2022, 66., p. 19). *Phân tích thành nhân tử: (a)  $a(b+c)^2(b-c) + b(c+a)^2(c-a) + c(a+b)^2(a-b)$ . (b)  $a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3$ . (c)  $a^2b^2(a-b) + b^2c^2(b-c) + c^2a^2(c-a)$ . (d)  $a(b^2+c^2) + b(c^2+a^2) + c(a^2+b^2) - 2abc - a^3 - b^3 - c^3$ . (e)  $a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b)$ .*

**Bài toán 1.89** (Bình, 2022, 67., p. 19). *Phân tích thành nhân tử: (a)  $(a+b+c)^3 - (a+b-c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3$ . (b)  $abc - (ab+bc+ca) + (a+b+c) - 1$ .*

**Bài toán 1.90** (Bình, 2022, 68., p. 19). *Chứng minh rằng trong 3 số  $a, b, c$ , tồn tại 2 số bằng nhau, nếu:  $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = 0$ .*

**Bài toán 1.91** (Bình, 2022, 69., p. 19). *Chứng minh rằng nếu  $a^2 + b^2 = 2ab$  thì  $a = b$ .*

**Bài toán 1.92** (Bình, 2022, 70., p. 19). *Chứng minh rằng nếu  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$  &  $a, b, c$  là các số dương thì  $a = b = c$ .*

**Bài toán 1.93** (Bình, 2022, 71., p. 19). *Chứng minh rằng nếu  $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcd$  &  $a, b, c, d$  là các số dương thì  $a = b = c = d$ .*

**Bài toán 1.94** (Bình, 2022, 72., p. 19). *Chứng minh rằng nếu  $m = a + b + c$  thì  $(am+bc)(bm+ac)(cm+ab) = (a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$ .*

**Bài toán 1.95** (Bình, 2022, 73., p. 19). *Cho  $a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1, ac + bd = 0$ . Chứng minh rằng  $ab + cd = 0$ .*

**Bài toán 1.96** (Bình, 2022, 74., p. 19). *Xét hằng đẳng thức  $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ . Lần lượt cho  $x$  bằng  $1, 2, \dots, n$  rồi cộng từng vế  $n$  đẳng thức trên để tính giá trị của biểu thức  $S_1 = \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n$ .*

**Bài toán 1.97** (Bình, 2022, 75., p. 19). *Tính giá trị của biểu thức  $S_3 = \sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ .*

**Bài toán 1.98** (Chính et al., 2022, 58., p. 25). *Chứng minh rằng  $n^3 - n \vdots 6, \forall n \in \mathbb{Z}$ .*

## 1.5 Chia Đơn Thức Cho Đơn Thức

**Bài toán 1.99** (Đơn thức chia đơn thức). *Tính: (a) (Đơn thức 1 biến chia đơn thức 1 biến)  $ax^m : bx^n, \forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0, \forall m, n \in \mathbb{Z}$ . (b) (Đơn thức 2 biến chia đơn thức 2 biến)  $ax^m y^n : bx^p y^q, \forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0, \forall m, n, p, q \in \mathbb{Z}$ . (c) (Đơn thức 3 biến chia đơn thức 3 biến)  $ax^m y^n z^p : bx^t y^u z^v, \forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0, \forall m, n, p, t, u, v \in \mathbb{Z}$ . (d) (Đơn thức  $n$  biến chia đơn thức  $n$  biến)  $a \prod_{i=1}^n x_i^{a_i} : b \prod_{i=1}^n x_i^{b_i} = ax_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} : bx_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0, a_i \in \mathbb{Z}, \forall i = 1, \dots, n$ .*

## 1.6 Chia Đa Thức Cho Đơn Thức

**Bài toán 1.100** (Đa thức chia đơn thức). *Tính: (a) (Đa thức 1 biến chia đơn thức 1 biến)  $(\sum_{i=0}^n a_i x^i) : ax^m = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) : ax^m, \forall m, n \in \mathbb{N}, a, a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, n, a \neq 0$ . (b) (Đa thức 2 biến chia đơn thức 2 biến)  $(\sum_{i,j=0}^{m,n} a_{ij} x^i y^j) : ax^p y^q = (\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} x^i y^j) : ax^p y^q, \forall m, n, p, q \in \mathbb{N}, a, a_{ij} \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n$ . (c) (Đa thức 3 biến chia đơn thức 3 biến)  $(\sum_{i,j,k=0}^{m,n,p} a_{ijk} x^i y^j z^k) : ax^t y^u z^v = (\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^p a_{ijk} x^i y^j z^k) : ax^t y^u z^v$ . (d) (Đa thức  $n$  biến chia đơn thức  $n$  biến) \*\*\**





## 1.7 Chia Đa Thức 1 Biến Đã Sắp Xếp

# 2 Phân Thức Đại Số

## 2.1 Phân Thức Đại Số

## 2.2 Tính Chất Cơ Bản của Phân Thức

## 2.3 Rút Gọn Phân Thức

## 2.4 Quy Đồng Mẫu thức Nhiều Phân Thức

## 2.5 Phép Cộng Các Phân Thức Đại Số

## 2.6 Phép Trừ Các Phân Thức Đại Số

## 2.7 Phép Nhân Các Phân Thức Đại Số

## 2.8 Phép Chia Các Phân Thức Đại Số

## 2.9 Biến Đổi Các Biểu Thức Hữu Tỷ. Giá Trị của Phân Thức

# 3 Phương Trình Đại Số 1 Ẩn – Algebraic Equation with 1 Unknown

## 3.1 Mở Đầu về Phương Trình

## 3.2 Phương Trình Bậc Nhất 1 Ẩn & Cách Giải

## 3.3 Phương Trình Đưa Được về Dạng $ax + b = 0$

## 3.4 Phương Trình Tích

## 3.5 Phương Trình Chứa Ẩn ở Mẫu

## 3.6 Giải Bài Toán Bằng Cách Lập Phương Trình

# 4 Bất Phương Trình Bậc Nhất 1 Ẩn – Algebraic Inequation with 1 Unknown

## 4.1 Liên Hệ Giữa Thứ Tự & Phép Cộng

## 4.2 Liên Hệ Giữa Thứ Tự & Phép Nhân

## 4.3 Bất Phương Trình 1 Ẩn

## 4.4 Bất Phương Trình Bậc Nhất 1 Ẩn

## 4.5 Phương Trình Chứa Dấu Giá Trị Tuyệt Đối

# 5 Tứ Giác

## 5.1 Tứ Giác

## 5.2 Hình Thang

## 5.3 Hình Thang Cân

## 5.4 Đường Trung Bình của Tam Giác, của Hình Thang

## 5.5 Dựng Hình Bằng Thước & Compa. Dựng Hình thang

## 5.6 Đối Xứng Trục

## 5.7 Hình Bình Hành

## 5.8 Đối Xứng Tâm

## 5.9 Hình Chữ Nhật

## 5.10 Đường Thẳng Song Song với 1 Đường Thẳng Cho Trước

**8.1 Hình Hộp Chữ Nhật****8.2 Thể Tích của Hình Hộp Chữ Nhật****8.3 Hình Lăng Trụ Đứng****8.4 Diện Tích Xung Quanh của Hình Lăng Trụ Đứng****8.5 Thể Tích của Hình Lăng Trụ Đứng****B – Hình Chóp Đều****8.6 Hình Chóp Đều & Hình Chóp Cụt Đều****8.7 Diện Tích Xung Quanh của Hình Chóp Đều****8.8 Thể Tích của Hình Chóp Đều****Tài liệu**

Bình, Vũ Hữu (2022). *Nâng Cao & Phát Triển Toán 8, tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 240.

Chính, Phan Đức et al. (2022). *Toán 8, tập 1*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 136.