

Polynomial – Đa Thức

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 12 tháng 12 năm 2022

Tóm tắt nội dung

[EN] This text is a collection of problems, from easy to advanced, about polynomial. This text is also a supplementary material for my lecture note on Elementary Mathematics grade 8, which is stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/lecture)¹. The latest version of this text has been stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/polynomial](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/polynomial)².

[vi] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài tập chọn lọc từ cơ bản đến nâng cao về đa thức. Tài liệu này là phần bài tập bổ sung cho tài liệu chính – bài giảng [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/lecture) của tác giả viết cho Toán Sơ Cấp lớp 8. Phiên bản mới nhất của tài liệu này được lưu trữ & có thể tải xuống ở link sau: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/polynomial](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/polynomial).

Mục lục

1 Nhân Đa Thức	1
2 Các Hằng Đẳng Thức Đáng Nhớ	2
3 Phân Tích Đa Thức Thành Nhân Tử	3
Tài liệu	3

1 Nhân Đa Thức

“**1.** Muốn nhân 1 đơn thức với 1 đa thức, ta nhân đơn thức với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các tích với nhau. **2.** Muốn nhân 1 đa thức với 1 đa thức, ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau. **3.** Quy tắc nhân 1 đơn thức với 1 đa thức còn được vận dụng theo chiều ngược lại: $AB + AC = A(B + C)$. **4.** Nếu 2 đa thức $P(x), Q(x)$ luôn có giá trị bằng nhau với mọi giá trị của biến thì 2 đa thức đó gọi là *2 đa thức đồng nhất*, ký hiệu $P(x) \equiv Q(x)$. 2 đa thức $P(x), Q(x)$ (viết dưới dạng thu gọn) là *đồng nhất* khi & chỉ khi hệ số của các lũy thừa cùng bậc bằng nhau. Đặc biệt, nếu $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ luôn bằng 0 với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$, i.e., $a_i = 0, \forall i = 0, 1, \dots, n$.” – Tuyên, 2022, Chap. 1, §1, p. 4

Bài toán 1.1 (Tuyên, 2022, Ví dụ 1, p. 4). Cho $P = (x + 5)(ax^2 + bx + 25)$ & $Q = x^3 + 125$. (a) Viết P dưới dạng 1 đa thức thu gọn theo lũy thừa giảm dần của x . (b) Với giá trị nào của a, b thì $P = Q, \forall x \in \mathbb{R}$.

Giải. (a) $P = (x + 5)(ax^2 + bx + 25) = ax^3 + bx^2 + 25x + 5ax^2 + 5bx + 125 = ax^3 + (5a + b)x^2 + (5b + 25)x + 125$. (b) $P = Q, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow ax^3 + (5a + b)x^2 + (5b + 25)x + 125 = x^3 + 125, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (a = 1) \wedge (5a + b = 0) \wedge (5b + 25 = 0) \Leftrightarrow (a = 1) \wedge (b = -5)$. \square

Nhận xét. “Phương pháp giải (b) dựa vào tính chất: 2 đa thức P, Q (viết dưới dạng thu gọn) là đồng nhất khi & chỉ khi mọi hệ số của các đơn thức đồng dạng chứa trong 2 đa thức đó phải bằng nhau.” – Tuyên, 2022, p. 5

Bài toán 1.2 (Tuyên, 2022, 1., p. 5). Tính giá trị của các biểu thức sau bằng cách hợp lý:

(a) $A = x^5 - 100x^4 + 100x^3 - 100x^2 + 100x - 9$ tại $x = 99$. (b) $B = x^6 - 20x^5 - 20x^4 - 20x^3 - 20x^2 - 20x + 3$ tại $x = 21$. (c) $C = x^7 - 26x^6 + 27x^5 - 47x^4 - 77x^3 + 50x^2 + x - 24$ tại $x = 25$.

Bài toán 1.3 (Tuyên, 2022, 2., p. 5). Cho $x, y \in \mathbb{Z}$. Chứng minh: (a) Nếu $A = 5x + y : 19$ thì $B = 4x - 3y : 19$. (b) Nếu $C = 4x + 3y : 13$ thì $D = 7x + 2y : 13$.

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam

e-mail: nguyenquanhong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

¹URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/NQBH_elementary_mathematics_grade_8.pdf.

²URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/polynomial/NQBH_polynomial.pdf.

Bài toán 1.4 (Tuyên, 2022, 3., p. 5). Cho 4 số lẻ liên tiếp. Chứng minh hiệu của tích 2 số cuối với tích 2 số đầu chia hết cho 16.

Bài toán 1.5 (Tuyên, 2022, 4., pp. 5–6). Cho 4 số nguyên liên tiếp. (a) Hỏi tích của số đầu với số cuối nhỏ hơn tích của 2 số ở giữa bao nhiêu đơn vị? (b) Giả sử tích của số đầu với số thứ 3 nhỏ hơn tích của số thứ 2 & số thứ 4 là 99, tìm 4 số nguyên đó.

Bài toán 1.6 (Tuyên, 2022, 5., p. 6). Cho $b + c = 10$. Chứng minh đẳng thức $(10a + b)(10a + c) = 100a(a + 1) + bc$. Áp dụng để tính nhẩm: $62 \cdot 68$, $43 \cdot 47$.

Bài toán 1.7 (Tuyên, 2022, 6., p. 6). Xác định các hệ số a, b, c biết: (a) $(2x - 5)(3x + b) = ax^2 + x + c$.
(b) $(ax + b)(x^2 - x - 1) = ax^3 + cx^2 - 1$.

Bài toán 1.8 (Tuyên, 2022, 7., p. 6). Cho $m \in \mathbb{N}^*$, $m < 30$. Có bao nhiêu giá trị của m để đa thức $x^2 + mx + 72$ là tích của 2 đa thức bậc nhất với hệ số nguyên?

2 Các Hằng Đẳng Thức Đáng Nhớ

“**1.** $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. **2.** $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$. **3.** $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$. **4.** $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B)$. **5.** $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = A^3 - B^3 - 3AB(A - B)$. **6.** $(A + B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3$. **7.** $(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$. **8.** Bình phương của đa thức: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$, $(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$, ... **9.** Lũy thừa bậc n của 1 nhị thức (nhị thức Newton):

$$\begin{aligned}(a + b)^0 &= 1, \\(a + b)^1 &= 1a + 1b, \\(a + b)^2 &= 1a^2 + 2ab + 1b^2, \\(a + b)^3 &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3, \\(a + b)^4 &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4, \\(a + b)^5 &= 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5.\end{aligned}$$

Ta thấy khi khai triển $(a + b)^n$ ta được 1 đa thức có $n + 1$ hạng tử, hạng tử đầu là a^n , hạng tử cuối là b^n , các hạng tử còn lại đều chứa các nhân tử a & b . Vì vậy $(a + b)^n = B(a) + b^n = B(b) + a^n$. **10.** Nếu viết riêng các hệ số ở vế phải ta được bảng sau (gọi là tam giác Pascal):

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\ \dots & & & & & & \end{array}$$

Nhận xét: Mỗi dòng đều bắt đầu bằng 1 & kết thúc bằng 1. Mỗi số trên 1 dòng kể từ dòng thứ 2 đều bằng số liền trên cộng với số bên trái của số liền trên.” – Tuyên, 2022, §2, pp. 6–7

Bài toán 2.1 (Tuyên, 2022, Ví dụ 2, p. 7). Cho $x + y = 9$, $xy = 14$. Tính giá trị của các biểu thức sau: (a) $x - y$; (b) $x^2 + y^2$; (c) $x^3 + y^3$.

Giải. (a) $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = 9^2 - 4 \cdot 14 = 25 \Rightarrow x - y = \pm 5$. (b) $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 9^2 - 2 \cdot 14 = 53$. (c) $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 9^3 - 3 \cdot 14 \cdot 9 = 351$. \square

Bài toán 2.2 (Mở rộng Tuyên, 2022, p. 7). Cho $x + y = a$, $xy = b$, với $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 \geq 4b$. Tính giá trị của các biểu thức sau theo a, b : (a) $x - y$; (b) $x^2 + y^2$; (c) $x^2 - y^2$; (d) $x^3 + y^3$; (e) $x^3 - y^3$.

Giải. (a) $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = a^2 - 4 \cdot b \Rightarrow x - y = \pm \sqrt{a^2 - 4b}$. (b) $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = a^2 - 2 \cdot b$. (c) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = \pm a \sqrt{a^2 - 4b}$. (d) $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = a^3 - 3ab$. (e) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) = \pm \sqrt{a^2 - 4b}(a^2 - 2b + b) = \pm \sqrt{a^2 - 4b}(a^2 - b)$. \square

Bài toán 2.3 (Tuyên, 2022, Ví dụ 3, p. 8). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = (x + 3y - 5)^2 - 6xy + 26$.

3 Phân Tích Đa Thức Thành Nhân Tử

Tài liệu

Tuyên, Bùi Văn (2022). *Bài Tập Nâng Cao Ở Một Số Chuyên Đề Toán 8*. Tái bản lần thứ 17. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 326.