

Algebraic- & Rational Fractions

Phân Thức Đại Số & Phân Thức Đại Số Hữu Tỷ

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 4 tháng 12 năm 2022

Tóm tắt nội dung

Some Topics in Elementary Mathematics/grade 8/algebraic fraction.

Mục lục

1 Định Nghĩa & Tính Chất Cơ Bản	1
2 Problems	1
2.1 Tính Chất Cơ Bản của Phân Thức. Rút Gọn Phân Thức	1
2.2 Các Phép Toán về Phân Thức Đại Số	3
Tài liệu	3

1 Định Nghĩa & Tính Chất Cơ Bản

Definition 1.1 (Algebraic fraction). “In *algebra*, an algebraic fraction is a *fraction* whose numerator & denominator are *algebraic expressions*.” – [Wikipedia/algebraic fraction](#)

“Algebraic fractions are subject to the same laws as *algebraic expressions*.” – [Wikipedia/algebraic fraction](#)

Definition 1.2 (Rational fraction). A rational fraction is an algebraic fraction whose numerator & denominator are both *polynomials*.

“**1.** Phân thức đại số là 1 biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, trong đó A, B là những đa thức & $B \neq 0$. Đặc biệt: Mỗi đa thức cũng được coi như 1 phân thức với mẫu thức bằng 1. **2.** $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ nếu $AD = BC$, $B \neq 0$, $D \neq 0$. **3.** Tính chất cơ bản của phân thức: $\frac{A}{B} = \frac{AM}{BM}$, M là đa thức khác đa thức không 0; $\frac{A}{B} = \frac{A:N}{B:N}$, N là 1 nhân tử chung của A & B . Đặc biệt với $N = -1$, $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$ (quy tắc đổi dấu). **4.** Rút gọn phân thức: Phân tích tử & mẫu thành nhân tử (nếu cần) để tìm nhân tử chung; Chia cả tử & mẫu cho nhân tử chung (nếu có). **5.** Quy đồng mẫu của nhiều phân thức: Phân tích các mẫu thành nhân tử rồi tìm mẫu thức chung; Tìm nhân tử phụ của mỗi mẫu thức; Nhân tử & mẫu của mỗi phân thức với nhân tử phụ tương ứng.

Bổ sung. Phân số $\frac{a}{b}$ là 1 trường hợp đặc biệt của phân thức $\frac{A}{B}$ khi A, B là những đa thức bậc 0. Vì vậy tính chất cơ bản của phân số là 1 trường hợp đặc biệt của tính chất cơ bản của phân thức đại số.” – Tuyên, 2022, pp. 37–38

2 Problems

2.1 Tính Chất Cơ Bản của Phân Thức. Rút Gọn Phân Thức

Bài toán 2.1 (Bình et al., 2021, Ví dụ 5.1, p. 39). Dùng định nghĩa 2 phân thức bằng nhau, chứng minh 2 phân thức sau bằng nhau: $\frac{a^2 - 2ab - 3b^2}{a^2 - 4ab + 3b^2}$ & $\frac{a + b}{a - b}$ với $a \neq b$ & $a \neq 3b$.

Bài toán 2.2 (Bình et al., 2021, Ví dụ 5.2, p. 39). Dùng định nghĩa 2 phân thức bằng nhau, xét sự bằng nhau của 2 phân thức $\frac{(3x+2)(x+5)}{4(3x+2)}$ & $\frac{x+5}{4}$ trong các trường hợp biến x thuộc các tập hợp sau: (a) $x \in \mathbb{N}$; (b) $x \in \mathbb{Z}$; (c) $x \in \mathbb{Q}$.

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanhong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

Bài toán 2.3 (Bình et al., 2021, Ví dụ 5.3, p. 39). So sánh $C = \frac{2013^2 - 2012^2}{2013^2 + 2012^2}$ với $D = \frac{2013 - 2012}{2013 + 2012}$.

Bài toán 2.4 (Bình et al., 2021, Ví dụ 5.4, p. 40). Chứng minh: $\sum_{i=0}^{63} a^i = \prod_{i=0}^5 (1 + a^{2^i})$, i.e., $1 + a + a^2 + \dots + a^{63} = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4) \dots (1 + a^{32})$.

Bài toán 2.5 (Bình et al., 2021, Ví dụ 5.5, p. 40). Rút gọn phân thức: $A = \frac{x^3 - 7x + 6}{x^3 + 5x^2 - 2x - 24}$.

Bài toán 2.6 (Bình et al., 2021, Ví dụ 5.6, p. 40). Rút gọn phân thức: $B = \frac{a^{30} + a^{20} + a^{10} + 1}{a^{2042} + a^{2032} + a^{2022} + a^{2012} + a^{30} + a^{20} + a^{10} + 1}$.

Bài toán 2.7 (Bình et al., 2021, 5.1, p. 41). Dùng định nghĩa 2 phân thức bằng nhau, tìm đa thức A trong các trường hợp sau: (a) $\frac{A}{3x-2} = \frac{15x^2+10x}{9x^2-4}$; (b) $\frac{3x^2-5x-2}{A} = \frac{x-2}{2x-3}$; (c) $\frac{x^2-4}{x^2+x-6} = \frac{x^2+4x+4}{A}$; (d) $\frac{2x+1}{x^3+x^2-x+2} = \frac{A}{x^3+1}$.

Bài toán 2.8 (Bình et al., 2021, 5.2, p. 41). Biến đổi mỗi phân thức sau thành 1 phân thức bằng nó & có tử thức là đa thức B cho sau đây: (a) $\frac{2x-5}{3x^2+4}$ & $B = 2x^2 - 3x - 5$; (b) $\frac{(x+1)(x^2+x-6)}{(x^2-9)(x^2+3x+2)}$ & $B = x - 2$.

Bài toán 2.9 (Bình et al., 2021, 5.3, p. 41). Rút gọn biểu thức: (a) $\frac{2^{18} \cdot 54^3 + 15 \cdot 4^{10} \cdot 9^4}{2 \cdot 12^9 + 6^{10} \cdot 2^{10}}$; (b) $\frac{4^{15} \cdot 27^6 \cdot 42 - 3 \cdot 72^{10}}{4^4 \cdot 25 \cdot 36^{10} - 4^5 \cdot 6^{19} \cdot 35}$; (c) $\frac{880 \cdot (15^2 \cdot 3^{18} + 27^7)}{4^2 \cdot 15^4 \cdot 3^{16} - 2^4 \cdot 9^{11}}$.

Bài toán 2.10 (Bình et al., 2021, 5.4, p. 41). Rút gọn: (a) $M = \frac{4024 \cdot 2014 - 2}{2011 + 2012 \cdot 2013}$; (b) $N = \frac{2012 \cdot 2013 + 2014}{2010 - 2012 \cdot 2015}$; (c) $P = \frac{66666 \cdot 87564 - 33333}{22222 \cdot 87560 + 77777}$.

Bài toán 2.11 (Bình et al., 2021, 5.5, p. 41). Rút gọn các phân thức sau: (a) $Q = \frac{x^2+2x-8}{x^2+x-12}$; (b) $R = \frac{3x^2+5xy-2y^2}{3x^2-7xy+2y^2}$; (c) $S = \frac{x^6-14x^4+49x^2-36}{x^4+4x^3-x^2-16x-12}$; (d) $T = \frac{x^6-y^6}{x^6+2x^4y^2+2x^2y^4+y^6}$.

Bài toán 2.12 (Bình et al., 2021, 5.6, pp. 41–42). Rút gọn: (a) $A = \frac{a^4-5a^2+4}{a^4-a^2+4a-4}$; (b) $B = \frac{a^3-3a+2}{2a^3-7a^2+8a-3}$; (c) $C = \frac{a^2-2ab+b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca}$; (d) $D = \frac{a^3-7a+6}{a^2(a+3)^3-4a(a+3)^3+4(a+3)^3}$; (e) $E = \frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$.

Bài toán 2.13 (Bình et al., 2021, 5.7, p. 42). Rút gọn các phân thức sau: (a) $A = \frac{xy^2-xz^2-y^3+yz^2}{x^2(z-y)+y^2(x-z)+z^2(y-x)}$; (b) $B = \frac{x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)}{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)}$.

Bài toán 2.14 (Bình et al., 2021, 5.8, p. 42). Rút gọn các phân thức sau: (a) $A = \frac{(x+y+z)^2-3xy-3yz-3zx}{9xyz-3x^3-3y^3-3z^3}$; (b) $B = \frac{x^3-y^3+z^3+3xyz}{(x+y)^2+(y+z)^2+(z-x)^2}$; (c) $C = \frac{(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3}{(x^2-y^2)^3+(y^2-z^2)^3+(z^2-x^2)^3}$.

Bài toán 2.15 (Bình et al., 2021, 5.9, p. 42). Rút gọn các phân thức sau với $n \in \mathbb{N}^*$: (a) $\frac{(n+2)!}{n!(n+2)(n+3)}$; (b) $\frac{n!}{n!+(n-1)!}$; (c) $\frac{(n+3)!-(n+2)!}{(n+2)!+(n+3)!}$.

Bài toán 2.16 (Bình et al., 2021, 5.10, p. 42). Chứng minh các phân số sau là tối giản $\forall n \in \mathbb{N}$: (a) $\frac{3n+2}{4n+3}$; (b) $\frac{12n+1}{2(10n+1)}$; (c) $\frac{2n+3}{2n^2+4n+1}$.

Bài toán 2.17 (Bình et al., 2021, 5.11, p. 42). Chứng minh phân số $\frac{n^7+2n^2+n+2}{n^8+n^2+2n+2}$ không tối giản, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Bài toán 2.18 (Bình et al., 2021, 5.12, p. 42). Viết gọn biểu thức sau dưới dạng 1 phân thức: $P = (x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)(x^{16}-x^8+1)(x^{32}+x^{16}+1)$.

Bài toán 2.19 (Bình et al., 2021, 5.13, p. 42). *Rút gọn phân thức:* (a) $\frac{|x-2|+|x-1|+x}{2x^2-7x+3}$ với $x < 1$; (b) $\frac{|x-4||x-5|}{x^3-9x^2+20x}$ với $4 < x < 5$.

Bài toán 2.20 (Bình et al., 2021, 5.14, p. 43). *Rút gọn các phân thức sau:* (a) $T = \frac{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)+1}{x^2+7x+11}$; (b) $U = \frac{x^3-53x+88}{(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+16}$.

Bài toán 2.21 (Bình et al., 2021, 5.15, p. 43). Cho $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ & $x, y, z \neq 0$. Chứng minh: $\frac{x^2+y^2+z^2}{(ax+by+cz)^2} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}$.

Bài toán 2.22 (Bình et al., 2021, 5.16, p. 43). Cho $ax+by+cz = 0$. *Rút gọn phân thức:* $V = \frac{ax^2+by^2+cz^2}{bc(y-z)^2+ca(z-x)^2+ab(x-y)^2}$.

Bài toán 2.23 (Bình et al., 2021, 5.17, p. 43). Cho $x+y+z = 0$. Chứng minh: $\frac{9(x^2+y^2+z^2)}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2} = 3$.

Bài toán 2.24 (Bình et al., 2021, 5.18, p. 43). Chứng minh: $\frac{x^2+y^2-z^2-2zt+2xy-t^2}{x+y-z-t} = \frac{x^2-y^2+z^2-2zt+2xz-t^2}{x-y+z-t}$.

Bài toán 2.25 (Bình et al., 2021, 5.19, p. 43). *Rút gọn:* $X = \frac{(2^4+4)(6^4+4)(10^4+4)(14^4+4)}{(4^4+4)(8^4+4)(12^4+4)(16^4+4)}$.

Bài toán 2.26 (Tuyên, 2022, Ví dụ 16, p. 38). Cho $\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{5}{8}$, rút gọn phân thức $P = \frac{x^2-2xy+y^2}{x^2+2xy+y^2}$.

Bài toán 2.27 (Tuyên, 2022, 151., p. 38). So sánh: (a) $A = \frac{201-200}{201+200}$ & $B = \frac{201^2-200^2}{201^2+200^2}$. (b) $C = \frac{1999 \cdot 4001 + 2000}{2000 \cdot 4001 - 2001}$ & $D = \frac{1501 \cdot 1503 - 1500 \cdot 1498}{6002}$.

Bài toán 2.28 (Tuyên, 2022, 152., p. 39). Chứng minh: $\forall n \in \mathbb{N}$, (a) Phân số $A = \frac{n^3-1}{n^5+n+1}$ không tối giản; (b) Phân số $B = \frac{6n+1}{8n+1}$ tối giản; (c) Phân số $C = \frac{10n^2+9n+4}{20n^2+20n+9}$ tối giản. Có thể mở rộng từ \mathbb{N} lên \mathbb{Z} được không?

2.2 Các Phép Toán về Phân Thức Đại Số

Tài liệu

Bình, Vũ Hữu et al. (2021). *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 8. Tập 1: Đại Số*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 264.

Tuyên, Bùi Văn (2022). *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 8*. Tái bản lần thứ 17. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 326.