

Polynomial – Đa Thức

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 12 tháng 12 năm 2022

Tóm tắt nội dung

[EN] This text is a collection of problems, from easy to advanced, about polynomial. This text is also a supplementary material for my lecture note on Elementary Mathematics grade 8, which is stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/lecture)¹. The latest version of this text has been stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/polynomial](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/polynomial)².

[vi] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài tập chọn lọc từ cơ bản đến nâng cao về đa thức. Tài liệu này là phần bài tập bổ sung cho tài liệu chính – bài giảng [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/lecture) của tác giả viết cho Toán Sơ Cấp lớp 8. Phiên bản mới nhất của tài liệu này được lưu trữ & có thể tải xuống ở link sau: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/polynomial](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/polynomial).

Mục lục

1 Nhân Đa Thức	1
2 Các Hằng Đẳng Thức Đáng Nhớ	2
3 Phân Tích Đa Thức Thành Nhân Tử	4
Tài liệu	4

1 Nhân Đa Thức

“**1.** Muốn nhân 1 đơn thức với 1 đa thức, ta nhân đơn thức với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các tích với nhau. **2.** Muốn nhân 1 đa thức với 1 đa thức, ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau. **3.** Quy tắc nhân 1 đơn thức với 1 đa thức còn được vận dụng theo chiều ngược lại: $AB + AC = A(B + C)$. **4.** Nếu 2 đa thức $P(x), Q(x)$ luôn có giá trị bằng nhau với mọi giá trị của biến thì 2 đa thức đó gọi là *2 đa thức đồng nhất*, ký hiệu $P(x) \equiv Q(x)$. 2 đa thức $P(x), Q(x)$ (viết dưới dạng thu gọn) là *đồng nhất* khi & chỉ khi hệ số của các lũy thừa cùng bậc bằng nhau. Đặc biệt, nếu $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ luôn bằng 0 với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$, i.e., $a_i = 0, \forall i = 0, 1, \dots, n$.” – Tuyên, 2022, Chap. 1, §1, p. 4

Bài toán 1 (Tuyên, 2022, Ví dụ 1, p. 4). Cho $P = (x + 5)(ax^2 + bx + 25)$ & $Q = x^3 + 125$. (a) Viết P dưới dạng 1 đa thức thu gọn theo lũy thừa giảm dần của x . (b) Với giá trị nào của a, b thì $P = Q, \forall x \in \mathbb{R}$.

Giải. (a) $P = (x + 5)(ax^2 + bx + 25) = ax^3 + bx^2 + 25x + 5ax^2 + 5bx + 125 = ax^3 + (5a + b)x^2 + (5b + 25)x + 125$. (b) $P = Q, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow ax^3 + (5a + b)x^2 + (5b + 25)x + 125 = x^3 + 125, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (a = 1) \wedge (5a + b = 0) \wedge (5b + 25 = 0) \Leftrightarrow (a = 1) \wedge (b = -5)$. \square

Nhận xét. “Phương pháp giải (b) dựa vào tính chất: 2 đa thức P, Q (viết dưới dạng thu gọn) là đồng nhất khi & chỉ khi mọi hệ số của các đơn thức đồng dạng chứa trong 2 đa thức đó phải bằng nhau.” – Tuyên, 2022, p. 5

Bài toán 2 (Tuyên, 2022, 1., p. 5). Tính giá trị của các biểu thức sau bằng cách hợp lý:

(a) $A = x^5 - 100x^4 + 100x^3 - 100x^2 + 100x - 9$ tại $x = 99$. (b) $B = x^6 - 20x^5 - 20x^4 - 20x^3 - 20x^2 - 20x + 3$ tại $x = 21$. (c) $C = x^7 - 26x^6 + 27x^5 - 47x^4 - 77x^3 + 50x^2 + x - 24$ tại $x = 25$.

Bài toán 3 (Tuyên, 2022, 2., p. 5). Cho $x, y \in \mathbb{Z}$. Chứng minh: (a) Nếu $A = 5x + y : 19$ thì $B = 4x - 3y : 19$. (b) Nếu $C = 4x + 3y : 13$ thì $D = 7x + 2y : 13$.

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam

e-mail: nguyenquanhong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

¹URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/NQBH_elementary_mathematics_grade_8.pdf.

²URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/polynomial/NQBH_polynomial.pdf.

Bài toán 4 (Tuyên, 2022, 3., p. 5). Cho 4 số lẻ liên tiếp. Chứng minh hiệu của tích 2 số cuối với tích 2 số đầu chia hết cho 16.

Bài toán 5 (Tuyên, 2022, 4., pp. 5–6). Cho 4 số nguyên liên tiếp. (a) Hỏi tích của số đầu với số cuối nhỏ hơn tích của 2 số ở giữa bao nhiêu đơn vị? (b) Giả sử tích của số đầu với số thứ 3 nhỏ hơn tích của số thứ 2 & số thứ 4 là 99, tìm 4 số nguyên đó.

Bài toán 6 (Tuyên, 2022, 5., p. 6). Cho $b + c = 10$. Chứng minh đẳng thức $(10a + b)(10a + c) = 100a(a + 1) + bc$. Áp dụng để tính nhẩm: $62 \cdot 68$, $43 \cdot 47$.

Bài toán 7 (Tuyên, 2022, 6., p. 6). Xác định các hệ số a, b, c biết: (a) $(2x - 5)(3x + b) = ax^2 + x + c$.
(b) $(ax + b)(x^2 - x - 1) = ax^3 + cx^2 - 1$.

Bài toán 8 (Tuyên, 2022, 7., p. 6). Cho $m \in \mathbb{N}^*$, $m < 30$. Có bao nhiêu giá trị của m để đa thức $x^2 + mx + 72$ là tích của 2 đa thức bậc nhất với hệ số nguyên?

2 Các Hằng Đẳng Thức Đáng Nhớ

“**1.** $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. **2.** $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$. **3.** $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$. **4.** $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B)$. **5.** $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = A^3 - B^3 - 3AB(A + B)$. **6.** $(A + B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3$. **7.** $(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$. **8.** Bình phương của đa thức: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$, $(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$, ... **9.** Lũy thừa bậc n của 1 nhị thức (nhị thức Newton):

$$\begin{aligned}(a + b)^0 &= 1, \\(a + b)^1 &= 1a + 1b, \\(a + b)^2 &= 1a^2 + 2ab + 1b^2, \\(a + b)^3 &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3, \\(a + b)^4 &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4, \\(a + b)^5 &= 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5.\end{aligned}$$

Ta thấy khi khai triển $(a + b)^n$ ta được 1 đa thức có $n + 1$ hạng tử, hạng tử đầu là a^n , hạng tử cuối là b^n , các hạng tử còn lại đều chứa các nhân tử a & b . Vì vậy $(a + b)^n = B(a) + b^n = B(b) + a^n$. **10.** Nếu viết riêng các hệ số ở vế phải ta được bảng sau (gọi là *tam giác Pascal*):

$$\begin{array}{ccccccc}1 & & & & & & \\1 & 1 & & & & & \\1 & 2 & 1 & & & & \\1 & 3 & 3 & 1 & & & \\1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\& \dots & & & & & \end{array}$$

Nhận xét: Mỗi dòng đều bắt đầu bằng 1 & kết thúc bằng 1. Mỗi số trên 1 dòng kể từ dòng thứ 2 đều bằng số liền trên cộng với số bên trái của số liền trên.” – Tuyên, 2022, §2, pp. 6–7

Bài toán 9 (Tuyên, 2022, Ví dụ 2, p. 7). Cho $x + y = 9$, $xy = 14$. Tính giá trị của các biểu thức sau: (a) $x - y$; (b) $x^2 + y^2$; (c) $x^3 + y^3$.

Giải. (a) $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = 9^2 - 4 \cdot 14 = 25 \Rightarrow x - y = \pm 5$. (b) $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 9^2 - 2 \cdot 14 = 53$. (c) $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 9^3 - 3 \cdot 14 \cdot 9 = 351$. \square

Lưu ý 2.1. “2 số có bình phương bằng nhau thì chúng đối nhau hoặc bằng nhau. Ngược lại, 2 số đối nhau hoặc bằng nhau thì có bình phương bằng nhau. $(a - b)^2 = (b - a)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.” – Tuyên, 2022, p. 8

Bài toán 10 (Mở rộng Tuyên, 2022, p. 7). Cho $x + y = a$, $xy = b$, với $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 \geq 4b$. Tính giá trị của các biểu thức sau theo a, b : (a) $x - y$; (b) $x^2 + y^2$; (c) $x^2 - y^2$; (d) $x^3 + y^3$; (e) $x^3 - y^3$.

Giải. (a) $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = a^2 - 4 \cdot b \Rightarrow x - y = \pm\sqrt{a^2 - 4b}$. (b) $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = a^2 - 2 \cdot b$. (c) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = \pm a\sqrt{a^2 - 4b}$. (d) $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = a^3 - 3ab$. (e) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) = \pm\sqrt{a^2 - 4b}(a^2 - 2b + b) = \pm\sqrt{a^2 - 4b}(a^2 - b)$. \square

Bài toán 11 (Tuyên, 2022, Ví dụ 3, p. 8). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = (x + 3y - 5)^2 - 6xy + 26$.

Giải. $A = x^2 + 9y^2 + 25 + 6xy - 10x - 30y - 6xy + 26 = (x^2 - 10x + 25) + (9y^2 - 30y + 25) + 1 = (x - 5)^2 + (3y - 5)^2 + 1 \geq 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow \min A = 1 \Leftrightarrow (x = 5) \wedge (y = \frac{5}{3})$. \square

Lưu ý 2.2. (a) “Các hằng đẳng thức được vận dụng theo 2 chiều ngược nhau, e.g., $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ hoặc ngược lại $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$. (b) Bình phương của mọi số thực đều không âm: $x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$; hay tương đương với $(a - b)^2 \geq 0$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.” – Tuyên, 2022, p. 9

Bài toán 12 (Tuyên, 2022, 8., p. 9). Chứng minh các đẳng thức: (a) $(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) = 2^{32} - 1$; (b) $100^2 + 103^2 + 105^2 + 94^2 = 101^2 + 98^2 + 96^2 + 107^2$.

Bài toán 13 (Tuyên, 2022, 9., p. 9). Tính giá trị của biểu thức bằng cách hợp lý: (a) $A = \frac{258^2 - 242^2}{254^2 - 246^2}$; (b) $B = 263^2 + 74 \cdot 263 + 37^2$; (c) $C = 136^2 - 92 \cdot 136 + 46^2$; (d) $D = (50^2 + 48^2 + 46^2 + \dots + 2^2) - (49^2 + 47^2 + 45^2 + \dots + 1^2)$.

Bài toán 14 (Tuyên, 2022, 10., p. 9). Cho biết $2(a^2 + b^2) = (a - b)^2$. Chứng minh a & b đối nhau.

Bài toán 15 (Tuyên, 2022, 11., p. 9). Cho $a, b, x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Biết $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2$. Tìm hệ thức giữa 4 số a, b, x, y .

Bài toán 16 (Tuyên, 2022, 12., p. 9). Cho $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$. Chứng minh $a = b = c$.

Bài toán 17 (Tuyên, 2022, 13., p. 9). Chứng minh không có các số $x, y \in \mathbb{R}$ nào thỏa mãn mỗi đẳng thức sau: (a) $3x^2 + y^2 + 10x - 2xy + 26 = 0$; (b) $4x^2 + 3y^2 - 4x + 30y + 78 = 0$; (c) $3x^2 + 6y^2 - 12x - 20y + 40 = 0$.

Bài toán 18 (Tuyên, 2022, 14., p. 10). Tìm $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ thỏa $x^2 + 2x + 4^n - 2^{n+1} + 2 = 0$.

Bài toán 19 (Tuyên, 2022, 15., p. 10). Chứng minh: (a) Biểu thức $A = x^2 + x + 1$ luôn luôn dương với mọi số thực x ; (b) Biểu thức $B = x^2 - xy + y^2$ luôn luôn dương với mọi số thực x, y không đồng thời bằng 0; (c) Biểu thức $C = 4x - 10 - x^2$ luôn luôn âm với mọi số thực x .

Bài toán 20 (Tuyên, 2022, 16., p. 10). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: (a) $A = 25x^2 + 3y^2 - 10x + 11$; (b) $B = (x - 3)^2 + (x - 11)^2$; (c) $C = (x + 1)(x - 2)(x - 3)(x - 6)$.

Bài toán 21 (Tuyên, 2022, 17., p. 10). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: (a) $A = 2x - x^2$; (b) $B = 19 - 6x - 9x^2$.

Bài toán 22 (Tuyên, 2022, 18., p. 10). Chứng minh: (a) 2 số chẵn hơn kém nhau 4 đơn vị thì hiệu các bình phương của chúng chia hết cho 16; (b) 2 số lẻ hơn kém nhau 6 đơn vị thì hiệu các bình phương của chúng chia hết cho 24.

Bài toán 23 (Tuyên, 2022, 19., p. 10). Cho $x > y > 0$ & $x - y = 7$, $xy = 60$. Không tính x, y , tính: (a) $x^2 - y^2$; (b) $x^4 + y^4$.

Bài toán 24 (Tuyên, 2022, 20., p. 10). Cho $a + b + c = 2p$. Chứng minh: (a) $a^2 - b^2 - c^2 + 2abc = 4(p - b)(p - c)$; (b) $p^2 + (p - a)^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Bài toán 25 (Tuyên, 2022, 21., p. 10). Cho $a = m^2 + n^2$, $b = m^2 - n^2$, $c = 2mn$. Chứng minh nếu $m > n > 0$ thì a, b, c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác vuông.

Bài toán 26 (Tuyên, 2022, 22., p. 11). Tính giá trị của biểu thức: $A = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$ với $x = -103$; (b) $B = x^3 - 15x^2 + 75x$ với $x = 25$; (c) $C = (x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ với $x = -3$.

Bài toán 27 (Tuyên, 2022, 23., p. 11). Cho $x - y = 2$, tính giá trị của biểu thức: $A = 2(x^3 - y^3) - 3(x + y)^2$.

Bài toán 28 (Tuyên, 2022, 24., p. 11). Cho $x + y + z = 0$. Chứng minh $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

Bài toán 29 (Tuyên, 2022, 25., p. 11). Rút gọn biểu thức $A = (x - y - 1)^3 - (x - y + 1)^3 + 6(x - y)^2$.

Bài toán 30 (Tuyên, 2022, 26., p. 11). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) = 0, \\ (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) = 16. \end{cases}$$

Bài toán 31 (Tuyên, 2022, 27., p. 11). Chứng minh: (a) $742^3 - 692^3 : 200$; (b) $685^3 + 315^3 : 25000$.

Bài toán 32 (Tuyên, 2022, 28*, p. 11). Cho $a + b + c + d = 0$. Chứng minh $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(b + c)(ad - bc)$.

Bài toán 33 (Tuyên, 2022, 29., p. 11). Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh: (a) $(ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$; (b) $a^4 + b^4 + c^4 = 2(ab + bc + ca)^2$.

Bài toán 34 (Tuyên, 2022, 30., p. 11). Xác định các hệ số a, b để đa thức $A = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + ax + b$ là bình phương của 1 đa thức.

Bài toán 35 (Tuyên, 2022, 31., p. 11). Cho $a + b + c = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh $a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{2}$.

Bài toán 36 (Tuyên, 2022, 32., pp. 11–12). Cho a, b, c là 3 số thực không đồng thời bằng 0. Chứng minh có ít nhất 1 trong các biểu thức sau có giá trị dương: $x = (a - b + c)^2 + 8ab$, $y = (a - b + c)^2 + 8bc$, $z = (a - b + c)^2 - 8ca$.

Bài toán 37 (Tuyên, 2022, 33., p. 12). Tính tổng các hệ số của tất cả các hạng tử trong khai triển của nhị thức: (a) $(5x - 3)^6$; (b) $(3x - 4y)^{20}$.

Bài toán 38 (Tuyên, 2022, 34., p. 12). Đa thức $(x + y)^5$ được khai triển theo lũy thừa giảm của x . Biết hạng tử thứ 2 & hạng tử thứ 3 có giá trị bằng nhau khi cho $x = a$, $y = b$ trong đó a, b là các số thực dương & $a - b = 1$. Tìm a, b .

Bài toán 39 (Tuyên, 2022, 35., p. 12). Tính: (a) $(x + 2)^2$; (b) $(x - 1)^6$; (c) $(x - 1)^5$.

Bài toán 40 (Tuyên, 2022, 36., p. 12). Tìm số dư của phép chia 38^{10} cho 13 & 38^9 cho 13.

Bài toán 41 (Tuyên, 2022, 37., p. 12). Chứng minh 2 chữ số tận cùng của 7^{43} là 43.

3 Phân Tích Đa Thức Thành Nhân Tử

Tài liệu

Tuyên, Bùi Văn (2022). *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 8*. Tái bản lần thứ 17. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 326.