Problems & Proofs in Elementary Inequality
Bài Tập Bất Đẳng Thức & Chứng Minh

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 20 tháng 5 năm 2023

Tóm tắt nội dung

A problem set for elementary inequality.

Mục lục

1 Introduction

The general structure of a problem on inequality is given by:

Problem 1. *Let x_i, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ satisfy the condition $C(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ & $C^\star(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge 0$. Prove that: (a) $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0$. (b) $B(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge 0$. (c) Find the minimum & maximum of $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ & $B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Cấu trúc tổng quát của 1 bài toán bất đẳng thức:

Bài toán 1. *Cho các biến x_i, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ thỏa mãn điều kiện $C(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. Chứng minh: (a) $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0$. (b) $B(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge 0$. (c) Tìm* GTNN *&* GTLN *của biểu thức $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ & $B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Để nghiên cứu các bài toán bất đẳng thức & cực trị 1 cách có hệ thống, ta sẽ nghiên cứu 1 số dạng thường gặp của các *biểu thức cần tìm cực trị* A, B & đặc biệt là các *đẳng thức điều kiện* $C(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ & *bất đẳng thức điều kiện* $C^\star(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge 0$.

2 Cauchy-Schwarz Inequality – Bất Đẳng Thức Cauchy-Schwarz

The most basic inequality: $x^2 \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \ne 0$.

Ý nghĩa hình học: Diện tích hình vuông thì không âm. Diện tích của hình vuông bằng $0 \Leftrightarrow$ hình vuông đó suy biến thành 1 điểm. Cụ thể, công thức tính diện tích hình vuông cạnh a: $S = a^2$. Khi đó $S = a^2 \ge 0$, $\forall a \ge 0$ & $S = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Bài toán 2. *Chứng minh:*

$$4ab \le 2(|ab| + ab) \le (a + b)^2 \le (|a| + |b|)^2 \le 2(a^2 + b^2),\ \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

1st chứng minh. (a) $4ab \le 2(|ab| + ab) \Leftrightarrow 2ab \le 2|ab| \Leftrightarrow ab \le |ab|$ luôn đúng $\forall a, b \in \mathbb{R}$. "=" $\Leftrightarrow ab \ge 0$. (b) $2(|ab| + ab) \le (a + b)^2 \Leftrightarrow 2|ab| + 2ab \le a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow 2|ab| \le a^2 + b^2 \Leftrightarrow (|a| - |b|)^2 \ge 0$ luôn đúng $\forall a, b \in \mathbb{R}$. "=" $\Leftrightarrow |a| = |b|$. (c) $(a + b)^2 \le (|a| + |b|)^2 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \le |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \Leftrightarrow ab \le |ab|$ luôn đúng $\forall a, b \in \mathbb{R}$. "=" $\Leftrightarrow ab \ge 0$. (d) $(|a| + |b|)^2 \le 2(a^2 + b^2) \Leftrightarrow |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \le 2a^2 + 2b^2 \Leftrightarrow (|a| - |b|)^2 \ge 0$ luôn đúng $\forall a, b \in \mathbb{R}$. "=" $\Leftrightarrow |a| = |b|$. □

2nd chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số □

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

Lưu ý 1. *Trị tuyệt đối của 1 số thực không nhỏ hơn số thực đó, i.e.,* $|x| \ge x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. $|x| = x \Leftrightarrow x \ge 0$.

Bài toán 3. *Bất đẳng thức* $(a+b)^2 \ge 4|ab|$ *đúng khi nào?*

Bài toán 4 (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho 2 số không âm)**.** *Chứng minh:*

$$\boxed{a+b \ge 2\sqrt{ab},\ \forall a,b \in \mathbb{R},\ a,b \ge 0.}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

1st proof. $a+b-2\sqrt{ab} = (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \ge 0 \Rightarrow a+b \ge 2\sqrt{ab}$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a,b \ge 0$. "=" $\Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$. □

2nd proof. $(a+b)^2 - (2\sqrt{ab})^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \ge 0 \Rightarrow (a+b)^2 \ge (2\sqrt{ab})^2 \Rightarrow a+b \ge 2\sqrt{ab}$ (vì $a,b \ge 0$ nên $a+b \ge 0$ & $2\sqrt{ab} \ge 0$). "=" $\Leftrightarrow a = b$. □

Lưu ý 2. *Ở 2nd proof, ta đã vận dụng tính chất cơ bản của căn bậc 2:* $\boxed{0 \le a \le b \Leftrightarrow \sqrt{a} \le \sqrt{b},\ \forall a,b \in \mathbb{R}}$. *Phiên bản chặt/ngặt (strict) là:* $\boxed{0 \le a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b},\ \forall a,b \in \mathbb{R}}$. *Ý nghĩa hình học của 2 tính chất này: Hình vuông nào có cạnh lớn hơn thì có diện tích lớn hơn & ngược lại, hình vuông nào có diện tích lớn hơn thì có cạnh lớn hơn.*

3rd proof. Đặt $x := \sqrt{a}$, $y := \sqrt{b}$, $x,y \in \mathbb{R}$, $x,y \ge 0$. Có $a+b-2\sqrt{ab} = a+b-2\sqrt{a}\sqrt{b} = x^2+y^2-2xy = (x-y)^2 \ge 0 \Rightarrow a+b \ge 2\sqrt{ab}$. "=" $\Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$. □

Lưu ý 3. *Ở 3rd proof, ta đã sử dụng tính chất giao hoán của phép nhân & phép khai phương:* $\boxed{\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b},\ \forall a,b \in \mathbb{R},\ a,b \ge 0}$.

Bài toán 5. *Với* m,n,p *nào thì bất đẳng thức* $ma + nb \ge p\sqrt{ab}$ *luôn đúng: (a)* $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a,b \ge 0$. *(b)* $\forall a,b \in \mathbb{R}$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Bài toán 6 (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho 3 số không âm)**.** *Chứng minh:*

$$\boxed{a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc},\ \forall a,b,c \in \mathbb{R},\ a,b,c \ge 0.}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 7. *Với* m,n,p,q *nào thì bất đẳng thức* $ma + nb + pc \ge q\sqrt[3]{abc}$ *luôn đúng: (a)* $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$, $a,b,c \ge 0$. *(b)* $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Bài toán 8 (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho n số không âm)**.** *Chứng minh:*

$$\sum_{i=1}^n a_i \ge n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i},\ \text{i.e., } a_1 + a_2 + \cdots + a_n \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall a_i \in \mathbb{R},\ a_i \ge 0,\ \forall i = 1,2,\ldots,n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 9. *Cho* $n \in \mathbb{N}^\star$. *Với bộ* $(m, m_1, m_2, \ldots, m_n)$ *nào thì bất đẳng thức:*

$$\sum_{i=1}^n m_i a_i \ge m\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i},\ \text{i.e., } m_1 a_1 + m_2 a_2 + \cdots + m_n a_n \ge m\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

đúng với: (a) $\forall a_i \in \mathbb{R}$, $a_i \ge 0$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$. *(b)* $\forall a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

3 Áp Dụng Bất Đẳng Thức Cauchy–Schwarz Để Tìm Cực Trị

Bài toán 10 ([Tuy23], Ví dụ 9, p. 23)**.** *Cho* $x,y \in \mathbb{R}$, $x,y > 0$ *thỏa mãn điều kiện* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$. *Tìm* GTNN *của biểu thức* $A = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

1st proof. Vì $x,y > 0$ nên $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \sqrt{x}, \sqrt{y} > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$, được: $\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{xy}} \le \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{xy} \ge 4$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương $\sqrt{x}, \sqrt{y}$, được: $A = \sqrt{x} + \sqrt{y} \ge 2\sqrt{\sqrt{x}\sqrt{y}} = 2\sqrt{\sqrt{xy}} \ge 2\sqrt{4} = 4$. "=" $\Leftrightarrow x = y$ & $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = 4$. Vậy $\min A = 4 \Leftrightarrow x = y = 4$. □

2nd proof. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy lần lượt cho $(\sqrt{x},\sqrt{y})$ & $\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)$, được:

$$A=\sqrt{x}+\sqrt{y}\ge 2\sqrt{\sqrt{x}\sqrt{y}}=2\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}}}\ge 2\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}}=2\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}=4.$$

"=" $\Leftrightarrow \sqrt{x}=\sqrt{y}$ & $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=y$ & $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=y=4$. Vậy $\min_{x,y\in\mathbb{R},\,x,y>0}A=4\Leftrightarrow x=y=4$. □

Nhận xét 1. *"Trong thí dụ trên ta đã vận dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz theo 2 chiều ngược nhau. Lần thứ nhất ta đã "làm trội" $\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}}$ bằng cách vận dụng $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$ để dùng điều kiện tổng $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$, từ đó được $\sqrt{xy}\ge 4$. Lần thứ 2 ta đã "làm giảm" tổng $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ bằng cách vận dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz theo chiều $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ để dùng kết quả $\sqrt{xy}\ge 4$. Không phải lúc nào ta cũng có thể dùng trực tiếp bất đẳng thức Cauchy–Schwarz đối với các số trong đề bài."* – [Tuy23, p. 24]

Lưu ý 4. *TXĐ của A chỉ là $D_A:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x,y\ge 0\}$, nhưng để điều kiện $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$ có nghĩa thì cần thêm $x\ne 0$, $y\ne 0$, nên ta cần xét A trên tập hợp $D:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x,y>0,\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\}\subset D_A$. Hơn nữa, nếu viết* GTNN *của biểu thức $A=A(x,y)$ trên tập $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x>0,y>0\}$ 1 cách chính xác về mặt toán học thì nên viết tường minh là $\min_{x,y\in\mathbb{R},\,x,y>0}A(x,y)$ hoặc $\min_{(x,y)\in D}A(x,y)$ hoặc $\min_{x,y\in\mathbb{R},\,x,y>0}A$ như trong 2nd proof thay vì chỉ đơn giản là $\min A$ như trong 1st proof.*

Ta có thể mở rộng & tổng quát bài toán trên như sau:

Bài toán 11. *Cho $x,y\in\mathbb{R}$, $x,y>0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=m>0$, $m\in\mathbb{R}$ cho trước. Có thể tìm* GTNN *&* GTLN *của các biểu thức nào? Liệt kê & chứng minh nhiều nhất có thể.*

Bài toán 12. *Cho $x,y\in\mathbb{R}$, $x,y>0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=m>0$, $a,b,m\in\mathbb{R}$ cho trước. Có thể tìm* GTNN *&* GTLN *của các biểu thức nào? Liệt kê & chứng minh nhiều nhất có thể.*

Bài toán 13. *Cho $x,y\in\mathbb{R}$, $x,y,z>0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=m>0$, $a,b,c,m\in\mathbb{R}$ cho trước. Có thể tìm* GTNN *&* GTLN *của các biểu thức nào? Liệt kê & chứng minh nhiều nhất có thể.*

Bài toán 14. *Cho $n\in\mathbb{N}^\star$, $x_i\in\mathbb{R}$, $x_i>0$, $\forall i=1,2,\ldots,n$, thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{x_i}=m>0$, $a_i,m\in\mathbb{R}$, $\forall i=1,2,\ldots,n$, cho trước. Có thể tìm* GTNN *&* GTLN *của các biểu thức nào? Liệt kê & chứng minh nhiều nhất có thể.*

Bài toán 15 ([Tuy23], Ví dụ 10, p. 24)**.** *Tìm* GTLN *&* GTNN *của biểu thức $A=\sqrt{3x-5}+\sqrt{7-3x}$.*

Giải. ĐKXĐ: $\frac{5}{3}\le x\le\frac{7}{3}$. $A^2=3x-5+7-3x+2\sqrt{3x-5}\sqrt{7-3x}\le 2+(3x-5+7-3x)=4\Rightarrow A\le 2$ ($A\ge 0$ vì $\sqrt{3x-5}\ge 0$, $\sqrt{7-3x}\ge 0$). "=" $\Leftrightarrow 3x-5=7-3x\Leftrightarrow x=2$. Mặt khác, $A^2=2+2\sqrt{3x-5}\sqrt{7-3x}\ge 2$. "=" $\Leftrightarrow (3x-5)(7-3x)=0\Leftrightarrow x\in\{\frac{5}{3},\frac{7}{3}\}$. Vậy $\max A=2\Leftrightarrow x=2$ & $\min A=\sqrt{2}\Leftrightarrow x\in\{\frac{5}{3},\frac{7}{3}\}$. □

Bài toán 16 (Mở rộng [Tuy23], Ví dụ 10, p. 24)**.** *Biện luận theo các tham số $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ để tìm* GTLN *&* GTNN *của biểu thức $A=\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}$.*

Bài toán 17 ([Tuy23], Ví dụ 11, p. 25)**.** *Tìm* GTLN *&* GTNN *của biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x-9}}{5x}$.*

Bài toán 18 ([Tuy23], Ví dụ 12, p. 25)**.** *Tìm* GTNN *của biểu thức $A=\dfrac{3x^4+16}{x^3}$. A có* GTLN *không?*

Bài toán 19 ([Tuy23], Ví dụ 13, p. 26)**.** *Cho $0<x<2$, tìm* GTNN *của biểu thức $A=\dfrac{9x}{2-x}+\dfrac{2}{x}$.*

Bài toán 20 ([Tuy23], Ví dụ 14, p. 27)**.** *Cho $x,y,z\in\mathbb{R}$, $x,y,z>0$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z=2$. Tìm* GTNN *của biểu thức $A=\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y}$.*

Bài toán 21 ([Tuy23], 63., p. 28)**.** *Cho $a,x,y\in\mathbb{R}$, $a,x,y>0$, $x+y=2a$. Tìm* GTNN *của biểu thức $A=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$.*

Bài toán 22 ([Tuy23], 64., p. 28)**.** *Tìm* GTLN *của biểu thức $A=\sqrt{x-5}+\sqrt{23-x}$.*

Bài toán 23 ([Tuy23], 65., p. 28)**.** *Cho $x+y=15$, tìm* GTNN, GTLN *của biểu thức $A=\sqrt{x-4}+\sqrt{y-3}$.*

Bài toán 24 ([Tuy23], 66., p. 28)**.** *Tìm* GTNN *của biểu thức $A=\dfrac{2x^2-6x+5}{2x}$ với $x\in\mathbb{R}$, $x>0$.*

Bài toán 25 ([Tuy23], 67., p. 28)**.** *Cho $a,b,x\in\mathbb{R}$, $a,b,x>0$. Tìm* GTNN *của biểu thức $A=\dfrac{(x+a)(x+b)}{x}$.*

Bài toán 26 ([Tuy23], 68., p. 28)**.** *Cho $x\in\mathbb{R}$, $x\ge 0$, tìm* GTNN *của biểu thức $A=\dfrac{x^2+2x+17}{2(x+1)}$.*

Bài toán 27 ([Tuy23], 69., p. 28). *Tìm* GTNN *của biểu thức* $A = \dfrac{x + 6\sqrt{x} + 36}{\sqrt{x} + 3}$.

Bài toán 28 ([Tuy23], 70., p. 28). *Cho* $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, *tìm* GTNN *của biểu thức* $A = \dfrac{x^3 + 2000}{x}$.

Bài toán 29 ([Tuy23], 71., p. 28). *Cho* $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$ & $x + y \ge 6$. *Tìm* GTNN *của biểu thức:* $A = 5x + 3y + \dfrac{12}{x} + \dfrac{16}{y}$.

Bài toán 30 ([Tuy23], 72., p. 29). *Cho* $x, y \in \mathbb{R}$, $x > y$ & $xy = 5$, *tìm* GTNN *của biểu thức* $A = \dfrac{x^2 + 1.2xy + y^2}{x - y}$.

Bài toán 31 ([Tuy23], 73., p. 29). *Cho* $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$, *tìm* GTLN *của biểu thức* $A = 4x + \dfrac{25}{x - 1}$.

Bài toán 32 ([Tuy23], 74., p. 29). *Cho* $x \in \mathbb{R}$, $0 < x < 1$, *tìm* GTNN *của biểu thức* $A = \dfrac{3}{1 - x} + \dfrac{4}{x}$.

Bài toán 33 ([Tuy23], 75., p. 29). *Cho* $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x, y, z \ge 0$ *thỏa mãn điều kiện* $x + y + z = a$. *(a) Tìm* GTLN *của biểu thức* $A = xy + yz + zx$. *(b) Tìm* GTNN *của biểu thức* $B = x^2 + y^2 + z^2$.

Bài toán 34 ([Tuy23], 76., p. 29). *Cho* $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x, y, z > 0$ *thỏa mãn điều kiện* $x + y + z \ge 12$. *Tìm* GTNN *của biểu thức* $A = \dfrac{x}{\sqrt{y}} + \dfrac{y}{\sqrt{z}} + \dfrac{z}{\sqrt{x}}$.

Bài toán 35 ([Tuy23], 77., p. 29). *Cho* $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x, y, z > 0$ *thỏa mãn điều kiện* $x + y + z = a$. *Tìm* GTNN *của biểu thức* $A = \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)\left(1 + \dfrac{a}{y}\right)\left(1 + \dfrac{a}{z}\right)$.

Bài toán 36 ([Tuy23], 78., p. 29). *Cho* $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a, b, c > 0$ *thỏa mãn điều kiện* $a + b + c = 1$. *Tìm* GTNN *của biểu thức* $A = \dfrac{(1 + a)(1 + b)(1 + c)}{(1 - a)(1 - b)(1 - c)}$.

Bài toán 37 ([Tuy23], 79., p. 29). *Cho* $x, y \in \mathbb{R}$ *thỏa mãn điều kiện* $x + y = 1$ & $x > 0$. *Tìm* GTLN *của biểu thức* $B = x^2y^3$.

Bài toán 38 ([DCA20], Ví dụ 1.5.1, p. 73, TS PTNK ĐHQG Tp HCM 2006). *Cho* $x, y \in \mathbb{R}$ *thỏa mãn* $x + y = 2$. *Chứng minh* $xy(x^2 + y^2) \le 2$.

1st chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức $ab \le \frac{1}{4}(a + b)^2$ ở (1), có: $xy(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}(2xy)(x^2 + y^2) \le \frac{1}{8}[2xy + (x^2 + y^2)]^2 = \frac{1}{8}(x + y)^4 = 2$. "=" $\Leftrightarrow x + y = 2$ & $2xy = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x + y = 2$ & $(x - y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 1$. □

2nd chứng minh. Sử dụng *kỹ thuật đồng bậc*, cần chứng minh $8xy(x^2 + y^2) \le (x + y)^4$ (cả 2 vế đều là bậc 4). Bất đẳng thức này đúng vì $8xy(x^2+y^2) \le (x+y)^4 \Leftrightarrow 8xy(x^2+y^2) \le x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 \Leftrightarrow x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4 \ge 0 \Leftrightarrow (x-y)^4 \ge 0$ hiển nhiên đúng $\forall x, y \in \mathbb{R}$. "=" $\Leftrightarrow x = y$ & $x + y = 2 \Leftrightarrow x = y = 1$. □

Ta có thể mở rộng bài toán trên như sau:

Bài toán 39. *Cho* $x, y, m \in \mathbb{R}$ *thỏa mãn* $x + y = m$. *Biện luận theo tham số* m *để tìm* GTLN & GTNN *của: (a)* $A = xy(x^2 + y^2)$. *(b)* $B = xy(x^3 + y^3)$. *(c)* $B = xy(x^4 + y^4)$. *(d***)* $x^ay^a(x^b + y^b)$ *với* $a, b \in \mathbb{Z}$.

4 Uncategorized

Bài toán 40 ([Sơn+21], Bổ đề 1.1, p. 5). *Chứng minh:* $4ab \le (a + b)^2 \le 2(a^2 + b^2)$, *hay có thể viết dưới dạng* $\frac{a^2+b^2}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, $ab \le \frac{(a+b)^2}{4}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Hint. $(a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2 \ge 0$, $2(a^2 + b^2) - (a + b)^2 = (a - b)^2 \ge 0$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. "=" $\Leftrightarrow a = b$. □

Bài toán 41 ([Sơn+21], Bổ đề 1.2, p. 5). *Chứng minh:* $3(ab + bc + ca) \le (a + b + c)^2 \le 3(a^2 + b^2 + c^2)$, *hay có thể viết dưới dạng* $ab + bc + ca \le \frac{1}{3}(a + b + c)^2$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Hint. $(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca) = \frac{1}{2}\left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right] \ge 0$, $3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2 = (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$. "=" $\Leftrightarrow a = b = c$. □

Bài toán 42 ([Sơn+21], Bổ đề 1.3, p. 6). *Chứng minh:* $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b}$, *hay có thể viết dưới dạng* $\frac{1}{a+b} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$, $\forall a, b > 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Hint. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a+b} = \frac{(a-b)^2}{ab(a+b)} \ge 0$, $\forall a, b > 0$. "=" $\Leftrightarrow a = b > 0$. □

Bài toán 43 ([Sơn+21], Bổ đề 1.4, p. 6). *Chứng minh:* $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c}$, *hay có thể viết dưới dạng* $\frac{1}{a+b+c} \le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$, $\forall a, b, c > 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Bài toán 44 ([Sơn+21], Mở rộng Bổ đề 1.3–1.4, p. 6 cho n số)**.** *Chứng minh:*

$$\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}\ge\frac{n^2}{a_1+\cdots+a_n},\ i.e.,\ \frac{1}{a_1+\cdots+a_n}\le\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right),\ \forall a_i>0,\ \forall i=1,\ldots,n,$$

hay có thể được viết gọn lại như sau:

$$\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}\ge\frac{n^2}{\sum_{i=1}^n a_i},\ i.e.,\ \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i}\le\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i},\ \forall a_i>0,\ \forall i=1,\ldots,n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 45 ([Sơn+21], Bổ đề 1.5, p. 7)**.** *Chứng minh:* $\sqrt{a+b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{2(a+b)}$, $\forall a,b\ge 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Bài toán 46 ([Sơn+21], Mở rộng Bổ đề 1.5, p. 7)**.** *Chứng minh:* $\sqrt{a+b+c}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\le\sqrt{3(a+b+c)}$, $\forall a,b,c\ge 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Bài toán 47 ([Sơn+21], Mở rộng Bổ đề 1.5, p. 7 cho n số)**.** *Chứng minh:* $\sqrt{a_1+\cdots+a_n}\le\sqrt{a_1}+\cdots+\sqrt{a_n}\le\sqrt{n(a_1+\cdots+a_n)}$, $\forall a_i\ge 0$, $\forall i=1,\ldots,n$, *hay có thể được viết gọn lại như sau:*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i}\le\sum_{i=1}^n\sqrt{a_i}\le\sqrt{n\sum_{i=1}^n a_i},\ \forall a_i\ge 0,\ \forall i=1,\ldots,n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 48 ([Sơn+21], Bổ đề 1.6, p. 7)**.** *Chứng minh:* $a^3+b^3\ge ab(a+b)$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $a+b\ge 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Hint. $a^3+b^3-ab(a+b)=(a+b)(a-b)^2\ge 0$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $a+b\ge 0$. "=" $\Leftrightarrow a=\pm b$. □

Bài toán 49 ([Sơn+21], Mở rộng Bổ đề 1.6, p. 7)**.** *Chứng minh:* $a^4+b^4\ge ab(a^2+b^2)$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

5 Miscellaneous

Tài liệu

[DCA20] Nguyễn Văn Dũng, Võ Quốc Bá Cẩn, and Trần Quốc Anh. *Phương Pháp Giải Toán Bất Đẳng Thức & Cực Trị Dành Cho Học Sinh Lớp 8, 9.* Tái bản lần thứ 4. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2020, p. 280.

[Sơn+21] Nguyễn Ngọc Sơn, Chu Đình Nghiệp, Lê Hải Trung, and Võ Quốc Bá Cẩn. *Các Chủ Đề Bất Đẳng Thức Ôn Thi Vào Lớp 10.* Tái bản lần thứ 3. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2021, p. 143.

[Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9.* Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.