Some Topics in Elementary Mathematics/Grade 10

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 21 tháng 11 năm 2022

Tóm tắt nội dung

1 bộ sưu tập các bài toán chọn lọc từ cơ bản đến nâng cao cho Toán sơ cấp lớp 10. Tài liệu này là phần bài tập bổ sung cho tài liệu chính GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 10/lecture[1] của tác giả viết cho Toán lớp 10. Phiên bản mới nhất của tài liệu này được lưu trữ ở link sau: GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 10/problem[2].

Mục lục

1 Mệnh Đề, Tập Hợp, Ánh Xạ . . . 3
1.1 Mệnh Đề . . . 3
1.2 Mệnh Đề Chứa Biến . . . 4
1.3 Áp Dụng Mệnh Đề vào Suy Luận Toán Học . . . 4
1.4 Tập Hợp . . . 4
1.5 Ánh Xạ . . . 4
1.6 Số Gần Đúng & Sai Số . . . 4

2 Hàm Số . . . 4
2.1 Khái Niệm Hàm Số . . . 4
2.2 Các Phép Toán Trên Hàm Số . . . 4
2.3 Các Tính Chất Cơ Bản của Hàm Số . . . 4
2.4 1 Số Hàm Số Cơ Bản . . . 4
2.5 Các Phép Biến Đổi trên Đồ Thị Hàm Số . . . 4
2.6 Đại Cương về Phương Trình Hàm . . . 4

3 Bất Đẳng Thức . . . 4
3.1 Số Thực . . . 4
3.2 Khái Niệm Bất Đẳng Thức . . . 4
3.3 Các Đại Lượng Trung Bình của 2 Số Không Âm . . . 4
3.4 Bất Đẳng Thức giữa Trung Bình Cộng & Trung Bình Nhân . . . 4
3.5 Bất Đẳng Thức Cauchy . . . 4

4 Phương Trình, Bất Phương Trình Đại Số . . . 4
4.1 Đại Cương về Phương Trình, Bất Phương Trình . . . 4
4.2 Phương Trình, Bất Phương Trình Bậc Nhất & Bậc 2 . . . 4
4.3 1 Số Dạng Phương Trình, Bất Phương Trình Thường Gặp . . . 4
4.4 Các Phương Pháp Đặc Biệt Giải Phương Trình . . . 4

5 Hệ Phương Trình, Hệ Bất Phương Trình Đại Số . . . 4
5.1 Đại Cương về Hệ Phương Trình, Hệ Bất Phương Trình . . . 4
5.2 1 Số Dạng Hệ Phương Trình . . . 4
5.3 1 Số Dạng Hệ Bất Phương Trình . . . 4

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

[1]URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_10/NQBH_elementary_mathematics_grade_10.pdf.

[2]URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_10/problem/NQBH_elementary_mathematics_grade_10_problem.pdf.

6 Vector 4
6.1 Vector & Các Phép Toán Trên Vector 4

Tài liệu 6

1 Mệnh Đề, Tập Hợp, Ánh Xạ

1.1 Mệnh Đề

Bài toán 1.1 (Quỳnh et al., 2020, Ví dụ 3, p. 8). *Tìm phủ định của các mệnh đề sau: (a) Hôm nay là thứ 5. (b)* 2007 *là số nguyên tố. (c)* $\sqrt{2}$ *là số hữu tỷ.*

Bài toán 1.2 (Quỳnh et al., 2020, Ví dụ 7, p. 11). *Cho mệnh đề H: "Nếu hôm nay trời mưa thì bể bơi Tây Hồ đóng cửa." Lập các mệnh đề đảo, mệnh đề phản, & mệnh đề phản đảo của mệnh đề H.*

Bài toán 1.3 (Quỳnh et al., 2020, Ví dụ 9, pp. 12–13). *Chứng minh: (a)* $P \Rightarrow Q = \overline{P} \vee Q$. *(b)* $P \Rightarrow Q = \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$, *i.e., mệnh đề thuận & mệnh đề phản đảo là tương đương. (c)* $Q \Rightarrow P = \overline{P} \Rightarrow \overline{Q}$, *i.e., mệnh đề đảo & mệnh đề phản là tương đương.*

Bài toán 1.4 (Quỳnh et al., 2020, Ví dụ 10, p. 14). *Chứng minh* $\overline{P \Rightarrow Q} = P \wedge \overline{Q}$.

Bài toán 1.5 (Quỳnh et al., 2020, **1.**, p. 15). *Cho P & Q là các mệnh đề: P: "Hôm nay ở Sapa nhiệt độ dưới* 0°*", Q: "Hôm nay ở Sapa có tuyết rơi". Biểu diễn các mệnh đề sau theo P & Q bằng các phép toán logic; (a) Hôm nay ở Sapa nhiệt độ dưới* 0° *& có tuyết rơi. (b) Hôm nay ở Sapa nhiệt độ dưới* 0° *nhưng không có tuyết rơi. (c) Hôm nay ở Sapa nhiệt độ dưới* 0° *hoặc có tuyết rơi. (d) Hôm nay ở Sapa nếu nhiệt độ dưới* 0° *thì tuyết rơi. (e) Hôm nay ở Sapa có tuyết rơi khi & chỉ khi nhiệt độ dưới* 0°.

Bài toán 1.6 (Quỳnh et al., 2020, **2.**, p. 15). *Phát biểu mệnh đề đảo & phản đảo của các mệnh đề sau đây: (a) Nếu ngày mai có tuyết rơi thì tôi sẽ đi trượt tuyết. (b) Nếu ngày mai có bài kiểm tra thì hôm nay tôi sẽ học đến khuya.*

Bài toán 1.7 (Quỳnh et al., 2020, **3.**, p. 15). *Cho 2 mệnh đề P & Q. Xét mệnh đề "*$P \Rightarrow \overline{Q}$*". Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào tương đương với mệnh đề trên? (A)* $P \vee \overline{Q}$. *(B)* $\overline{Q} \Rightarrow P$. *(C)* $\overline{P} \Rightarrow Q$. *(D)* $Q \Rightarrow \overline{P}$.

Bài toán 1.8 (Quỳnh et al., 2020, **4.**, p. 15). *Chứng minh:* $P = P \vee (P \wedge Q)$, $P = P \wedge (P \vee Q)$.

Bài toán 1.9 (Quỳnh et al., 2020, **5.**, p. 15). *Chứng minh: mệnh đề* $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ *không tương đương với mệnh đề* $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$.

Bài toán 1.10 (Quỳnh et al., 2020, **6.**, p. 15). *Chứng minh* $\overline{P \Leftrightarrow Q} = \overline{P} \Leftrightarrow Q$.

1.2 Mệnh Đề Chứa Biến

1.3 Áp Dụng Mệnh Đề vào Suy Luận Toán Học

1.4 Tập Hợp

1.5 Ánh Xạ

1.6 Số Gần Đúng & Sai Số

2 Hàm Số

2.1 Khái Niệm Hàm Số

2.2 Các Phép Toán Trên Hàm Số

2.3 Các Tính Chất Cơ Bản của Hàm Số

2.4 1 Số Hàm Số Cơ Bản

2.5 Các Phép Biến Đổi trên Đồ Thị Hàm Số

2.6 Đại Cương về Phương Trình Hàm

3 Bất Đẳng Thức

3.1 Số Thực

3.2 Khái Niệm Bất Đẳng Thức

3.3 Các Đại Lượng Trung Bình của 2 Số Không Âm

3.4 Bất Đẳng Thức giữa Trung Bình Cộng & Trung Bình Nhân

3.5 Bất Đẳng Thức Cauchy

4 Phương Trình, Bất Phương Trình Đại Số

4.1 Đại Cương về Phương Trình, Bất Phương Trình

4.2 Phương Trình, Bất Phương Trình Bậc Nhất & Bậc 2

4.3 1 Số Dạng Phương Trình, Bất Phương Trình Thường Gặp

4.4 Các Phương Pháp Đặc Biệt Giải Phương Trình

5 Hệ Phương Trình, Hệ Bất Phương Trình Đại Số

5.1 Đại Cương về Hệ Phương Trình, Hệ Bất Phương Trình

5.2 1 Số Dạng Hệ Phương Trình

5.3 1 Số Dạng Hệ Bất Phương Trình

6 Vector

6.1 Vector & Các Phép Toán Trên Vector

Bài toán 6.1 (Hải et al., 2022, Ví dụ 1, p. 59)**.** *Cho đoạn thẳng AB & I là trung điểm của AB. (a) Chứng minh $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. (b) Chứng minh $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ với mọi điểm M.*

Bài toán 6.2 (Hải et al., 2022, Ví dụ 2, p. 59). *Cho ΔABC & điểm M nằm giữa B & C. Chứng minh:*

$$\overrightarrow{AM} = \frac{MB}{BC}\overrightarrow{AC} + \frac{MC}{BC}\overrightarrow{AB}.$$

Bài toán 6.3 (Hải et al., 2022, Ví dụ 3, p. 60). *Cho ΔABC. Chứng minh: (a) 3 đường trung tuyến đồng quy tại 1 điểm G. (b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. (c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ với mọi điểm M.*

Bài toán 6.4 (Hải et al., 2022, Ví dụ 4, p. 60). *Cho ΔABC & 1 điểm M bất kỳ trong tam giác. Đặt $S_{MBC} = S_a$, $S_{MCA} = S_b$, $S_{MAB} = S_c$. Chứng minh: $S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.*

Bài toán 6.5 (Hải et al., 2022, Ví dụ 5, p. 61). *Cho ΔABC. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với cạnh BC tại D. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh: $a\overrightarrow{MD} + b\overrightarrow{MC} + c\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ (với a, b, c là độ dài các cạnh BC, AC, AB).*

Bài toán 6.6 (Hải et al., 2022, Ví dụ 6, p. 61). *Cho ΔABC & điểm P bất kỳ. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Trên các tia PA_1, PB_1, PC_1 lần lượt lấy các điểm X, Y, Z sao cho $\frac{PX}{PA_1} = \frac{PY}{PB_1} = \frac{PZ}{PC_1} = k$. (a) Chứng minh: AX, BY, CZ đồng quy tại T. (b) Chứng minh: P, T, G thẳng hàng & $\frac{TG}{PG} = \left|\frac{3k}{2+k}\right|$.*

Bài toán 6.7 (Hải et al., 2022, Ví dụ 7, p. 62). *Đường đối trung trong tam giác là đường đối xứng với trung tuyến qua phân giác. Chứng minh: 3 đường đối trung đồng quy tại điểm L thỏa mãn $a^2\overrightarrow{LA} + b^2\overrightarrow{LB} + c^2\overrightarrow{LC} = \vec{0}$. Điểm L như vậy gọi là điểm* Lemoine *của ΔABC.*

Bài toán 6.8 (Hải et al., 2022, Ví dụ 8, p. 62). *Cho ΔABC & điểm P bất kỳ. PA, PB, PC cắt các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại các điểm A_1, B_1, C_1. Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Gọi A_3, B_3, C_3 lần lượt là trung điểm của AA_1, BB_1, CC_1. (a) Chứng minh: A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 đồng quy. (b) Lấy điểm A_4 thuộc BC sao cho QA_4 song song với PA. Xác định các điểm B_4 & C_4 tương tự A_4. Chứng minh: Q là trọng tâm của $\Delta A_4B_4C_4$.*

Bài toán 6.9 (Hải et al., 2022, Ví dụ 9, p. 64). *Cho ΔABC. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Chứng minh: $a\overrightarrow{ID} + b\overrightarrow{IE} + c\overrightarrow{IF} = \vec{0}$.*

Bài toán 6.10 (Hải et al., 2022, Ví dụ 10, p. 64). *Cho ΔABC có $\widehat{A} = 90^\circ$ & các đường phân giác BE & CF. Đặt $\vec{u} = (AB + BC + CA)\overrightarrow{BC} + BC\overrightarrow{EF}$. Chứng minh: giá của $\vec{u}$ vuông góc với BC.*

Bài toán 6.11 (Hải et al., 2022, **8.1**, p. 65). *Cho vector $\vec{u}$ có 2 phương khác nhau, chứng minh $\vec{u} = \vec{0}$.*

Bài toán 6.12 (Hải et al., 2022, **8.2**, p. 65). *Cho ΔABC có M & N lần lượt là trung điểm của AB & AC. Lấy P đối xứng với M qua N. Chứng minh: $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BC}$.*

Bài toán 6.13 (Hải et al., 2022, **8.3**, p. 65). *Cho ΔABC có tâm đường tròn ngoại tiếp O, trực tâm H. Lấy K đối xứng với O qua BC. Chứng minh: $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{AH}$.*

Bài toán 6.14 (Hải et al., 2022, **8.4**, p. 65). *Cho 2 vector $\vec{a}$ & $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$. Chứng minh: 2 vector $\vec{a}$ & $\vec{b}$ có giá vuông góc.*

Bài toán 6.15 (Hải et al., 2022, **8.5**, p. 65). *Cho ΔABC & ΔDEF thỏa mãn $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$. Chứng minh: ΔABC & ΔDEF có cùng trọng tâm.*

Bài toán 6.16 (Hải et al., 2022, **8.6**, p. 65). *Cho 2 vector $\vec{a}$ & $\vec{b}$ thỏa mãn $\vec{a}$ có giá vuông góc với giá của vector $\vec{a} + \vec{b}$. Chứng minh: $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2$.*

Bài toán 6.17 (Hải et al., 2022, **8.7**, p. 65). *Cho ΔABC & điểm P thỏa mãn $|\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC}| = |\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA}|$, $|\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}|$. Chứng minh: $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC}|$.*

Bài toán 6.18 (Hải et al., 2022, **8.8**, p. 65). *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Cho $(O), B, C$ cố định & A di chuyển trên đường tròn (O). BE, CF là 2 đường cao của ΔABC. Giả sử có vector $\vec{u}$ thỏa mãn $\frac{|\overrightarrow{EF} - \vec{u}|^2}{EF^2} + \frac{|\overrightarrow{OA} - \vec{u}|^2}{OA^2} = 1$. Chứng minh: Hiệu $\frac{1}{EF^2} - \frac{1}{|\vec{u}|^2}$ luôn không đổi khi A thay đổi.*

Bài toán 6.19 (Hải et al., 2022, **8.9**, p. 65). *Cho ΔABC có các phân giác trong AD, BE, CF. Gọi X, Y, Z lần lượt là trung điểm của EF, FD, DE.*

(a) Chứng minh: AX, BY, CZ đồng quy tại điểm P thỏa mãn hệ thức: $a(b+c)\overrightarrow{PA} + b(c+a)\overrightarrow{PB} + c(a+b)\overrightarrow{PC} = \vec{0}$.

(b) Gọi N là tâm đường tròn Euler của ΔABC. Dựng vector $\vec{u}$ thỏa mãn $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{NA}}{a} + \frac{\overrightarrow{NB}}{b} + \frac{\overrightarrow{NC}}{c}$. Gọi Q là trung điểm ON, trong đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Chứng minh: PQ song song hoặc trùng với giá của vector $\vec{u}$.

Tài liệu

Hải, Phạm Việt et al. (2022). *Nâng Cao & Phát Triển Toán 10 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 176.
Quỳnh, Đoàn et al. (2020). *Tài Liệu Chuyên Toán Đại Số 10*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 240.