Problems in Elementary Mathematics/Grade 11

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 25 tháng 8 năm 2022

Tóm tắt nội dung

1 bộ sưu tập các bài toán chọn lọc từ cơ bản đến nâng cao cho Toán học sơ cấp lớp 11. Tài liệu này là phần bài tập bổ sung cho tài liệu chính GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 11/lecture[1] của tác giả viết cho Toán lớp 11. Phiên bản mới nhất của tài liệu này được lưu trữ ở link sau: GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 11/problem[2].

Mục lục

---

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

[1]Explicitly, https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_11/NQBH_elementary_mathematics_grade_11.pdf.

[2]Explicitly, https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_11/problem/NQBH_elementary_mathematics_grade_11_problem.pdf.

1 Hàm Số Lượng Giác & Phương Trình Lượng Giác – Trigonometric Function & Trigonometric Equation

2 Tổ Hợp & Xác Suất – Combinatorics & Probability

2.1 2 quy tắc đếm cơ bản – 2 basic rules of counting

Bài toán 2.1 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, Ví dụ 2, p. 81). *Trong 1 kỳ thi đại học, trong số các thí sinh dự thi vào trường Đại học Sư phạm ở khối A có* 51 *em đạt điểm giỏi môn Toán,* 73 *em đạt điểm giỏi môn Vật lý,* 64 *em đạt điểm giỏi môn Hóa học,* 32 *em đạt điểm giỏi cả 2 môn Toán & Vật lý,* 45 *em đạt điểm giỏi cả 2 môn Vật lý & Hóa học,* 21 *em đạt điểm giỏi cả 2 môn Toán & Hóa học &* 10 *em đạt điểm giỏi cả 3 môn Toán, Vật lý, Hóa học. Có* 767 *em mà cả 3 môn đều không có môn nào đạt điểm giỏi. Hỏi có bao nhiêu thí sinh dự thi vào trường Đại học Sư phạm ở khối A?*

Bài toán 2.2 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, **1.**, p. 83). *Có bao nhiêu số nguyên dương không vượt quá* 1000 *mà chia hết cho* 3 *hoặc chia hết cho* 5.

Bài toán 2.3 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, **2.**, p. 83). *Trong 1 khu phố gồm* 53 *hộ, thống kê cho thấy có* 30 *hộ đặt mua báo A,* 18 *hộ đặt mua báo B &* 26 *hộ đặt mua báo C. Có* 9 *hộ đặt mua báo A & B;* 16 *hộ đặt mua báo A & C;* 8 *hộ đặt mua báo B & C. Có* 47 *hộ đặt mua ít nhất 1 tờ báo. Hỏi: (a) Có bao nhiêu hộ không mua tờ báo nào? (b) Có bao nhiêu hộ mua cả 3 tờ báo? (c) Có bao nhiêu hộ mua báo A & B nhưng không mua báo C? (d) Có bao nhiêu hộ chỉ mua báo A mà không mua báo B & C?*

Bài toán 2.4 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, **3.**, p. 83). *1 nhóm* 9 *người gồm 3 đàn ông, 4 phụ nữ & 2 đứa trẻ đi xem phim. Hỏi có bao nhiêu cách xếp họ ngồi trên 1 hàng ghế sao cho mỗi đứa trẻ ngồi giữa 2 người phụ nữ & không có 2 người đàn ông nào ngồi cạnh nhau?*

Bài toán 2.5 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, **4.**, p. 83). *Tìm số các số nguyên dương không lớn hơn* 1000 *mà chia hết cho* 4 *hoặc cho* 7.

Bài toán 2.6 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, **5.**, p. 84). *Người ta phỏng vấn* 100 *người về 3 bộ phim A, B, C đang chiếu thì thu được kết quả sau: Bộ phim A có* 28 *người đã xem. Bộ phim B có* 26 *người đã xem. Bộ phim C có* 14 *người đã xem. Có* 8 *người đã xem 2 bộ phim A & B. Có* 4 *người đã xem 2 bộ phim B & C. Có* 3 *người đã xem 2 bộ phim A & C. Có* 2 *người xem cả 3 bộ phim A, B, C. Xác định số người không đi xem bất cứ phim nào trong 3 bộ phim ấy.*

Bài toán 2.7 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, **6.**, p. 84). *Trong 1 trường có 3 câu lạc bộ (CLB) Toán, Văn, & Ngoại ngữ. Có* 28 *học sinh tham gia ít nhất 1 trong 3 CLB. Biết rằng: (a) Số học sinh chỉ tham gia CLB Toán, Văn bằng số học sinh chỉ tham gia duy nhất CLB Toán. (b) Số học sinh chỉ tham gia CLB Văn, Ngoại ngữ gấp* 5 *lần số học sinh tham gia cả 3 CLB. (c) Có 6 học sinh chỉ tham gia CLB Toán, Ngoại ngữ. (d) Không có học sinh nào chỉ tham gia duy nhất 1 CLB Văn hoặc duy nhất 1 CLB ngoại ngữ. (e) Số học sinh tham gia cả 3 CLB là 1 số nguyên dương chẵn. Tìm số học sinh chỉ tham gia CLB Toán & Văn & số học sinh tham gia cả 3 CLB.*

Bài toán 2.8 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, **7.**, p. 84). *1 con bò có thể mang virus A, virus B, hoặc virus C; có thể mang đồng thời 2 hoặc nhiều hơn các virus nói trên; & cũng có thể không mang virus nào. Trong bản báo cáo của 1 nông trường nuôi bò cho biết: "Kiểm tra* 1200 *con bò thì có* 675 *con có virus A;* 682 *con có virus B;* 684 *con có virus C;* 195 *con có virus A & B;* 467 *con có virus A & C;* 318 *con có virus B & C;* 165 *con có virus A, B, C". Chỉ ra rằng các số liệu trong báo cáo là không chính xác.*

2.2 Hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp – Permutation, arrangement, combination

Mở rộng Quỳnh, Dũng, et al., 2010, Ví dụ 1, p. 87 cho trường hợp tổng quát n điểm phân biệt:

Bài toán 2.9. *(a) Trong mặt phẳng cho 1 tập hợp P gồm* 6 *điểm phân biệt. Có bao nhiêu vector (khác $\vec{0}$) có điểm đầu & điểm cuối thuộc P? (b) Trong mặt phẳng cho 1 tập hợp Q gồm* 7 *điểm phân biệt, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Có bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh đều thuộc Q?*

Bài toán 2.10 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, Ví dụ 3, p. 88). *Chứng minh hằng đẳng thức*

$$C_{2n}^2 = 2C_n^2 + n^2,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(a) Bằng biến đổi đại số. (b) Bằng suy luận tổ hợp.

Bài toán 2.11 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, **8.**, p. 88). *Hỏi có bao nhiêu số có* 5 *chữ số khác nhau chia hết cho* 5 *mà trong biểu diễn thập phân của nó không có các chữ số $7, 8, 9$?*

Bài toán 2.12 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, **9.**, p. 88)**.** *Chứng minh*

$$C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k,\ \forall n, k \in \mathbb{N}^\star,\ 3 \le k \le n.$$

Bài toán 2.13 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, **10.**, p. 88)**.** *Chứng minh*

$$\sum_{k=0}^{r} C_n^k C_m^{r-k} = C_{m+n}^r,\ \forall m, n, r \in \mathbb{N}^\star,\ r < \min\{m, n\}.$$

Bài toán 2.14 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, **11.**, p. 88)**.** *Chứng minh bằng quy nạp*

$$\sum_{k=0}^{r} C_{n+k}^k = C_{n+r+1}^r,\ \forall n, r \in \mathbb{N}^\star.$$

Bài toán 2.15 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, **12.**, p. 88)**.** *Trong 1 nhóm có* 5 *người* A, B, C, D, E. *(a) Có bao nhiêu cách xếp* 5 *người này thành hàng ngang sao cho A & B đứng cạnh nhau? (b) Có bao nhiêu cách xếp* 5 *người này thành hàng ngang sao cho C & D không đứng cạnh nhau?*

Bài toán 2.16 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, **13.**, p. 88)**.** *Có bao nhiêu số có* 5 *chữ số khác nhau mà biểu diễn thập phân không có các chữ số* $6, 7, 8, 9$*?*

Bài toán 2.17 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, **14.**, p. 88)**.** *1 lớp học có n học sinh* $(n > 3)$*. Thầy chủ nhiệm cần chọn ra 1 nhóm & chỉ định 1 em trong nhóm làm nhóm trưởng. Số học sinh trong nhóm phải* $\in (1; n)$*. Gọi T là số cách chọn. (a) Chứng minh* $T = \sum_{k=2}^{n-1} kC_n^k$*. (b) Chứng minh* $T = n\left(2^{n-1} - 2\right)$*. (c) Từ đó suy ra đẳng thức* $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$*.*

2.3 Nhị thức Newton – Newton's binomial theorem

Bài toán 2.18 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, Ví dụ 2, p. 92)**.** *Chứng minh công thức khai triển nhị thức Newton bằng suy luận tổ hợp.*

Bài toán 2.19 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, **15.**, p. 94)**.** *Tìm số hạng không chứa x (số hạng tự do) trong khai triển của* $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^n$ *nếu biết* $C_n^2 - C_n^1 = 44$*.*

Bài toán 2.20 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, **16.**, p. 94)**.** *Tìm hệ số của* x^8 *trong khai triển của* $(1 + x^2 - x^3)^8$*.*

Bài toán 2.21 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, **16.**, p. 94)**.** *Tìm hệ số của* x^4 *trong khai triển của* $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^8$*.*

Bài toán 2.22 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, **17.**, p. 94)**.** *Tìm hệ số của* x^7 *trong khai triển của* $\left(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}\right)^{20}$*.*

Bài toán 2.23 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, **18.**, p. 94)**.** *Tìm hệ số của* x^7 *trong khai triển của* $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{12}$*.*

Bài toán 2.24 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, **18.**, p. 94)**.** *Tìm hệ số của số hạng chứa* x^8 *trong khai triển nhị thức Newton của* $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$ *biết* $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n + 3)$*.*

1 vài tổng quát cho các bài toán trên.

2.4 Biến Cố & Xác Suất của Biến Cố – Event & Probability of Event

Bài toán 2.25 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, Ví dụ 2, p. 97)**.** *Trong 1 nhóm có k người. Biết không có ai sinh vào năm nhuận. (a) Mô tả không gian mẫu. (b) Gọi A là biến cố: "Trong nhóm k người không có 2 người nào có ngày sinh trùng nhau". Xác định tập con A mô tả biến cố A. (c) Gọi B là biến cố: "Không có người nào trong nhóm có ngày sinh trùng với ngày Quốc khánh 2.9". Xác định tập con B mô tả biến cố B. (d) Giả thiết rằng các phần tử của không gian mẫu là đồng khả năng. Tính* $P(A)$ *&* $P(B)$*. (e) Ký hiệu* $P(k)$ *là xác suất để trong nhóm k người không có 2 người nào có ngày sinh trùng nhau &* $Q(k)$ *là xác suất để trong nhóm k người không có người nào trong nhóm có ngày sinh trùng với ngày Quốc khánh 2.9. Chứng minh* $P(k), Q(k)$ *giảm theo k.*

Bài toán 2.26 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, Ví dụ 4, p. 100)**.** *1 chiếc hộp có 9 thẻ đánh số từ* 1–9*. Rút ngẫu nhiên 2 thẻ rồi nhân 2 số ghi trên 2 thẻ với nhau. Tính xác suất để kết quả nhận được là 1 số chẵn, bằng ít nhất 2 cách khác nhau.*

Bài toán 2.27 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, Ví dụ 5, p. 100)**.** *1 hộp đựng* 4 *viên bi xanh,* 3 *viên bi đỏ, &* 2 *viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 2 viên bi. (a) Tính xác suất để chọn được 2 viên bi cùng màu. (b) Tính xác suất để chọn được 2 viên bi khác màu.*

3 Dãy Số. Cấp Số Cộng & Cấp Số Nhân – Sequence. Arithmetic Progression & Geometric Progression

3.1 Phương Pháp Quy Nạp Toán Học – Method of Mathematical Induction

Bài toán 3.1. *Chứng minh bằng quy nạp quy tắc cộng & quy tắc nhân tổng quát.*

Bài toán 3.2. *Chứng minh bằng quy nạp công thức tính số phần tử của hợp n, $n \in \mathbb{N}^\star$, $n \ge 2$ tập hợp bất kỳ.*

3.2 Dãy số – Sequence

Bài toán 3.3 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, **1.**, p. 121)**.** *Tìm 5 số hạng đầu của mỗi dãy số sau: (a) Dãy số (u_n) với $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. (b) Dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$, $u_2 = -2$, & $u_{n+1} = u_n - 2u_{n-1}$, $\forall n \ge 2$. (c) (u_n) là dãy các hợp số nguyên dương sắp theo thứ tự tăng dần.*

Bài toán 3.4 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, **2.**, p. 121)**.** *Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_0 = 2$, $u_1 = 5$, & $u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Bằng phương pháp quy nạp, chứng minh rằng với $u_n = 2^n + 3^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Bài toán 3.5 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, **3.**, p. 122)**.** *Cho ΔABC đều có cạnh bằng 4. Trên cạnh BC, ta lấy điểm A_1 sao cho $CA_1 = 1$. Gọi B_1 là hình chiếu của A_1 trên CA, C_1 là hình chiếu của B_1 trên AB, A_2 là hình chiếu của C_1 trên BC, B_2 là hình chiếu của A_2 trên CA, … & cứ tiếp tục như thế. Đặt $u_n = CA_n$. Cho dãy số (u_n) nói trên bởi hệ thức truy hồi.*

Bài toán 3.6 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, **4.**, p. 122)**.** *Xét tính tăng, giảm, bị chặn trên, bị chặn dưới của các dãy số sau: (a) Dãy số (u_n) với $u_n = n^3 - 3n^2 + 5n - 7$. (b) Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n+1}{3^n}$. (c) Dãy số (a_n) với $a_{n+1} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.*

Bài toán 3.7 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, **5.**, p. 122)**.** *Xét các dãy số (u_n), (v_n) xác định như sau: $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. (a) Chứng minh rằng (u_n) là dãy số tăng còn (v_n) là dãy số giảm; (b) Chứng minh rằng $(u_n), (v_n)$ là các dãy số bị chặn.*

Bài toán 3.8 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, **6.**, p. 122)**.** *Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ & $u_{n+1} = u_n + (n+1)2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. (a) Chứng minh rằng (u_n) là 1 dãy số tăng. (b) Chứng minh rằng $u_n = 1 + (n-1)2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$.*

Bài toán 3.9 (Quỳnh, Dũng, et al., 2010, **7.**, p. 122)**.** *Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_{n+1} = au_n - u_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. (a) Chứng minh rằng với $a = \sqrt{3}$ thì dãy số (u_n) tuần hoàn. (b) Chứng minh rằng với $a = \frac{3}{2}$ thì dãy số (u_n) không tuần hoàn.*

3.3 Cấp số – Progression

4 Giới Hạn – Limits

5 Đạo Hàm – Derivative

6 Phép Dời Hình & Phép Đồng Dạng Trong Mặt Phẳng

6.1 Phép tịnh tiến

Bài toán 6.1 (Hạo, Tuấn, et al., 2022, **1.**, p. 7)**.** *Chứng minh: $M' = T_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow M = T_{-\vec{u}}(M')$.*

Bài toán 6.2. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho vector $\vec{u} = (u_1; u_2)$, 2 điểm $A(a_1; a_2) \not\equiv B(b_1, b_2)$ (i.e., phân biệt/không trùng nhau) & đường thẳng d có phương trình $ax + by + c = 0$ với $a, b \in \mathbb{R}$ sao cho $a^2 + b^2 \neq 0$. (a) Tìm tọa độ của các điểm A', B' theo thứ tự là ảnh của A, B qua phép tịnh tiến theo $\vec{u}$. (b) Tìm tọa độ của điểm C sao cho A là ảnh của C qua phép tịnh tiến theo $\vec{u}$. (c) Tìm phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo $\vec{u}$. (d) Cho đường tròn tâm $O_1(o_1; o_2)$ bán kính $R > 0$ có phương trình: $(x - o_1)^2 + (y - o_2)^2 = R^2$. Tìm ảnh của đường tròn đó qua phép tịnh tiến theo $\vec{u}$.*

Có thể mở rộng bài toán trên cho các đường conic, i.e., ellipse, parabol, & hyperbol.

Bài toán 6.3 (Quỳnh, Cương, et al., 2020, p. 7)**.** *Cho 2 điểm B, C cố định trên đường tròn $(O; R)$ & 1 điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Chứng minh rằng trực tâm ΔABC nằm trên 1 đường tròn cố định.*

Bài toán 6.4. *2 thôn nằm ở 2 vị trí A & B cách nhau 1 con sông (xem rằng 2 bờ sông là 2 đường thẳng song song). Người ta dự định xây 1 chiếc cầu MN bắt qua sông (cố nhiên cầu phải vuông góc với bờ sông) & làm 2 đoạn thẳng từ A đến M & từ B đến N. Hãy xác định vị trí chiếc cầu MN sao cho $AM + BN$ ngắn nhất.*

Hint. Trường hợp tổng quát có thể đưa về trường hợp con sông rất hẹp – hẹp đến mức 2 bờ sông a & b xem như trùng nhau bằng 1 phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{MN}$ để a trùng b. Khi đó điểm A biến thành điểm A' sao cho $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN}$ & do đó $A'N = AM$. □

Bài toán 6.5 (Quỳnh, Cương, et al., 2020, **1.**, p. 9)**.** *Qua phép tịnh tiến T theo vector $\vec{u} \neq \vec{0}$, đường thẳng d biến thành đường thẳng d'. Trong trường hợp nào thì: $d \equiv d'$? $d \parallel d'$? d cắt d'?*

Bài toán 6.6 (Quỳnh, Cương, et al., 2020, **2.**, p. 9)**.** *Cho 2 đường thẳng song song a & a'. Tìm tất cả những phép tịnh tiến biến a thành a'.*

Bài toán 6.7 (Quỳnh, Cương, et al., 2020, **3.**, p. 9)**.** *Cho 2 phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ & $T_{\vec{v}}$. Với điểm M bất kỳ, $T_{\vec{u}}$ biến M thành điểm M', $T_{\vec{v}}$ biến M' thành điểm M''. Chứng tỏ rằng phép biến hình biến M thành M'' là 1 phép tịnh tiến.*

Bài toán 6.8 (Quỳnh, Cương, et al., 2020, **4.**, p. 9)**.** *Cho đường tròn (O) & 2 điểm A, B. 1 điểm M thay đổi trên đường tròn (O). Tìm quỹ tích điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.*

Bài toán 6.9 (Quỳnh, Cương, et al., 2020, **5.**, p. 9)**.** *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, với α, a, b là những số cho trước, xét phép biến hình F biến mỗi điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$, trong đó*

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a, \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b. \end{cases}$$

(a) Cho 2 điểm $M(x_1;y_1)$, $N(x_2;y_2)$ & gọi M', N' lần lượt là ảnh của M, N qua phép F. Tìm tọa độ của M' & N'. (b) Tính khoảng cách d giữa M & N; khoảng cách d' giữa M' & N'. (c) Phép F có phải là phép dời hình hay không? (d) Khi $\alpha = 0$, chứng tỏ rằng F là phép tịnh tiến.

Tổng quát hơn của bài toán Quỳnh, Cương, et al., 2020, **6.**, p. 9:

Bài toán 6.10. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét các phép biến hình sau đây: Phép biến hình F biến mỗi điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(f(x,y);g(x;y))$ với $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là 2 hàm số. Với f, g thỏa điều kiện nào thì F là 1 phép dời hình?*

6.2 Phép đối xứng trục

Bài toán 6.11. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(a_1;a_2)$ & đường thẳng d có phương trình $ax+by+c = 0$ $(a^2+b^2 \neq 0)$. Tìm ảnh của A & đường thẳng d qua phép đối xứng trục d_1 có phương trình $a_1x+b_1y+c_1 = 0$ $(a_1^2+b_1^2 \neq 0)$. Suy ra các trường hợp riêng khi d_1 là Ox hoặc Oy. Cho đường tròn tâm $O_1(o_1;o_2)$ bán kính $R > 0$ có phương trình: $(x-o_1)^2 + (y-o_2)^2 = R^2$. Tìm ảnh của đường tròn đó qua phép đối xứng trục d.*

Có thể mở rộng bài toán trên cho các đường conic, i.e., ellipse, parabol, & hyperbol.

6.3 Phép đối xứng tâm

Bài toán 6.12. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(a_1;a_2)$ & đường thẳng d có phương trình $ax + by + c = 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$. Tìm ảnh của A & đường thẳng d qua phép đối xứng tâm O & phép đối xứng tâm $O_1(o_1;o_2)$. Cho đường tròn tâm $O_1(o_1;o_2)$ bán kính $R > 0$ có phương trình: $(x-o_1)^2 + (y-o_2)^2 = R^2$. Tìm ảnh của đường tròn đó qua phép đối xứng tâm O & phép đối xứng tâm O_1.*

Có thể mở rộng bài toán trên cho các đường conic, i.e., ellipse, parabol, & hyperbol.

6.4 Phép quay

Bài toán 6.13. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(a_1;a_2)$ & đường thẳng d có phương trình $ax + by + c = 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$. Tìm ảnh của A & d qua phép quay tâm O góc α (radian). Cho đường tròn tâm $O_1(o_1;o_2)$ bán kính $R > 0$ có phương trình: $(x-o_1)^2 + (y-o_2)^2 = R^2$. Tìm ảnh của đường tròn đó qua phép quay tâm O góc α (radian).*

7 Đường Thẳng & Mặt Phẳng Trong Không Gian – Line & Plane in Euclidean Space $\mathbb{R}^n$

7.1 Đại cương về đường thẳng & mặt phẳng

Bài toán 7.1 (Quỳnh, Ban, et al., 2014, Ví dụ 1, p. 49)**.** *Cho mặt phẳng (α) & 2 đường thẳng a, b cùng thuộc (α) sao cho a & b không song song với nhau. Gọi A là 1 điểm thuộc đường thẳng a nhưng không thuộc b & P là 1 điểm nằm ngoài (α). (a) Chứng minh rằng các đường thẳng PA & b chéo nhau; (b) Xác định giao tuyến của 2 mặt phẳng $(a;P)$ & $(b;P)$.*

Bài toán 7.2 (Quỳnh, Ban, et al., 2014, Ví dụ 1, p. 49). *Trong mặt phẳng (α) cho ΔABC & 1 điểm S ở ngoài (α). Gọi D,E là các điểm thuộc các đoạn SA,SB sao cho DE không song song với AB. (a) Xác định giao tuyến của 2 mặt phẳng (CAB) & (CDE); (b) P là 1 điểm thay đổi trên đoạn SC. Giả sử các đường thẳng PD & PE lần lượt cắt các đường thẳng CA & CB tại M & N. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua 1 điểm cố định.*

Lưu ý 7.1. *Trong bài toán trên, "ta giả thiết rằng DE không song song với AB. Trong trường hợp $DE \parallel AB$, có thể thấy rằng đường thẳng MN thay đổi nhưng luôn song song với đường thẳng AB & do đó không đi qua điểm cố định nào." – Quỳnh, Ban, et al., 2014, p. 51*

Bài toán 7.3 (Quỳnh, Ban, et al., 2014, Ví dụ 3, p. 52). *Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ có các cạnh đối không song song với nhau & M là 1 điểm trên cạnh SA. (a) Xác định giao điểm của đường thẳng SB với mặt phẳng (MCD); (b) Xác định giao điểm của đường thẳng MC với mặt phẳng (SBD).*

Bài toán 7.4 (Quỳnh, Ban, et al., 2014, Ví dụ 4, p. 54). *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AD là đáy lớn & P là 1 điểm trên cạnh SD. (a) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (ABP); (b) Gọi M,N là trung điểm các cạnh AB,BC. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MNP).*

Bài toán 7.5 (Quỳnh, Ban, et al., 2014, **1.**, p. 55). *Cho 4 điểm A,B,C,D không cùng thuộc 1 mặt phẳng & I,J lần lượt là trung điểm của AD,BC. (a) Chứng minh AJ,BI không đồng phẳng. Xác định giao tuyến của (AJD) & (BIC). (b) M,N là các điểm thuộc các đoạn AB,AC. Xác định giao tuyến của (BIC) & (MDN). (c) K là 1 điểm thuộc đoạn MN. Xác định giao điểm của DK với (BIC).*

Bài toán 7.6 (Quỳnh, Ban, et al., 2014, **2.**, p. 55). *(a) Cho n điểm trong không gian ($n \ge 4$). Biết rằng 4 điểm bất kỳ trong n điểm đã cho cùng thuộc 1 mặt phẳng. Chứng minh tất cả n điểm cùng thuộc 1 mặt phẳng. (b) Cho n mặt phẳng trong không gian ($n \ge 4$). Biết rằng 4 mặt phẳng bất kỳ trong n mặt phẳng đã cho có 1 điểm chung. Chứng minh tất cả n mặt phẳng có 1 điểm chung.*

Bài toán 7.7 (Quỳnh, Ban, et al., 2014, **3.**, pp. 55–56). *Cho 2 mặt phẳng (α) & (β) cắt nhau theo giao tuyến d, đường thẳng a thuộc (α), điểm O ngoài (α) & ngoài (β). M là 1 điểm thay đổi trên đường thẳng a, OM cắt (β) tại điểm N. (a) Chứng minh N luôn thuộc 1 đường thẳng cố định. (b) P là 1 điểm thay đổi trong mặt phẳng (α), OP cắt (β) tại điểm Q. Gọi K là giao điểm của MP & NQ. Chứng minh K luôn thuộc 1 đường thẳng cố định.*

Bài toán 7.8 (Quỳnh, Ban, et al., 2014, **4.**, p. 56). *Cho 2 mặt phẳng (α) & (β) cắt nhau theo giao tuyến d, 2 điểm A,B ngoài (α) & ngoài (β) sao cho đường thẳng AB không song song với (α) & với (β). P là 1 điểm thay đổi trên (α); PA,PB cắt (β) tại M,N. (a) Chứng minh MN luôn đi qua 1 điểm cố định. (b) MN cắt d tại điểm Q. Chứng minh PQ luôn đi qua 1 điểm cố định. (c) Cho a là 1 đường thẳng thuộc mặt phẳng (α) (a không song song với d). Giả sử điểm P thay đổi trên (α) sao cho P luôn thuộc a. Chứng minh M,N luôn thuộc lần lượt 2 đường thẳng cố định d_1,d_2 & d,d_1,d_2 đồng quy.*

Bài toán 7.9 (Quỳnh, Ban, et al., 2014, **5.**, p. 56). *Cho tứ diện $ABCD$ có M là trung điểm cạnh AB, N là điểm trên cạnh BC: $BN = 2CN$. (a) Xác định giao điểm của MN với $\mathrm{mp}(ACD)$. (b) P là 1 điểm thuộc cạnh CD. Xác định giao tuyến của (MCD) & (ANP). (c) Xác định thiết diện của tứ diện cắt bởi $\mathrm{mp}(MNP)$.*

Bài toán 7.10 (Quỳnh, Ban, et al., 2014, **6.**, p. 56). *Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm mặt (ABC), I là trung điểm cạnh BD & J là điểm thuộc cạnh CD: $\frac{JC}{JD} = 2$. (a) Xác định thiết diện của tứ giác cắt bởi (GIJ). (b) M là 1 điểm trên đoạn AJ. Xác định giao điểm của GM với (ABD).*

Bài toán 7.11 (Quỳnh, Ban, et al., 2014, **7.**, p. 56). *Cho tứ diện $ABCD$ & các điểm M,N,P,Q lần lượt thuộc các cạnh AB,BC,CD,DA. (a) Chứng minh nếu M,N,P,Q cùng thuộc 1 mặt phẳng thì $\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{DP}\cdot\frac{DQ}{AQ} = 1$. (b) Khẳng định ngược lại có đúng không? Vì sao?*

Bài toán 7.12 (Quỳnh, Ban, et al., 2014, **8.**, pp. 56–57). *Cho tứ diện $ABCD$ có M,N là trung điểm cạnh AB,CD & P là 1 điểm thuộc cạnh BC (P không là trung điểm BC). (a) Xác định thiết diện của tứ diện cắt bởi (MNP). (b) Chứng minh MN chia đôi diện tích thiết diện.*

Bài toán 7.13 (Quỳnh, Ban, et al., 2014, **9.**, p. 57). *Cho tứ diện $ABCD$ có M là trung điểm cạnh AB & N là điểm thuộc cạnh AC: $\frac{NA}{NC} = 2$. Mặt phẳng (α) thay đổi đi qua M,N cắt các cạnh BD,CD ở P,Q. (a) Chứng minh MN,PQ, & BC đồng quy. (b) Gọi K là giao điểm của MQ & NP. Chứng minh K luôn thuộc 1 đường thẳng cố định. (c) Gọi I là giao điểm của MP & NQ. Biết $ID = AD$, tính các tỷ số $\frac{PB}{PD},\frac{QC}{QD}$.*

Bài toán 7.14 (Quỳnh, Ban, et al., 2014, **10.**, p. 57). *Cho hình chóp $S.ABC$ có M là trung điểm cạnh bên SA, N là điểm thuộc cạnh bên SB: $SN = \frac{3}{4}SB$ & O là 1 điểm thuộc mặt đáy (ABC). (a) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNO). (b) P là 1 điểm thuộc cạnh bên SC. Xác định giao điểm của SO với (MNP).*

Bài toán 7.15 (Quỳnh, Ban, et al., 2014, **11.**, p. 57). *Cho hình chóp $S.ABC$, D là 1 điểm thuộc cạnh bên SA, M là 1 điểm thay đổi trên cạnh BC & N là trung điểm AM. Gọi K là giao điểm của SN & DM. (a) Chứng minh K luôn thuộc 1 đường thẳng d cố định & xác định đường thẳng d. (b) E là 1 điểm thuộc cạnh bên SC. Xác định giao điểm của d với (AEM).*

Bài toán 7.16 (Quỳnh, Ban, et al., 2014, **12.**, p. 57). *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M là trung điểm cạnh bên SA & N là 1 điểm thuộc cạnh BC. (a) Xác định giao điểm của SC với (MND). (b) P là 1 điểm thuộc cạnh CD. Xác định giao tuyến của (MND) & (SBP). (c) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNP).*

Bài toán 7.17 (Quỳnh, Ban, et al., 2014, **13.**, pp. 57–58). *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD, M là trung điểm cạnh bên SA & N là 1 điểm thuộc cạnh bên SC (N không là trung điểm SC). (a) Xác định giao tuyến của (ABN) & (CDM). (b) Xác định giao điểm của MN với (SBD). (c) P là 1 điểm thuộc cạnh AB. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNP).*

Bài toán 7.18 (Quỳnh, Ban, et al., 2014, **14.**, p. 58). *Cho hình chóp $S.ABCD$ & M là 1 điểm thuộc mặt bên (SCD). (a) Xác định giao tuyến của (SAC) & (SBM). (b) Xác định giao điểm của AM với (SBD). (c) Gọi I, J là trung điểm AB, AD. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (MIJ).*

Bài toán 7.19 (Quỳnh, Ban, et al., 2014, **15.**, p. 58). *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành & M là điểm thuộc cạnh bên SD: $SM = \frac{1}{3}SD$. (a) Xác định giao điểm của BM với mặt phẳng (SAC). (b) N là 1 điểm thay đổi trên cạnh BC. Xác định giao tuyến của (AMN) & (SBC). Chứng minh giao tuyến này luôn đi qua 1 điểm cố định. (c) G là trọng tâm mặt bên (SAB). Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNG).*

Bài toán 7.20 (Quỳnh, Ban, et al., 2014, **16.**, p. 58). *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với cạnh đáy lớn AD, M là 1 điểm thuộc mặt bên (SCD). (a) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (SAM) với mặt phẳng (SBC). (b) N là 1 điểm thuộc cạnh AB. Xác định giao điểm của SB với (DMN). (c) P là 1 điểm thuộc cạnh bên SB. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNP).*

Bài toán 7.21 (Quỳnh, Ban, et al., 2014, **17.**, p. 58). *Cho hình chóp $S.ABCD$, M là trung điểm cạnh bên SB & N là điểm thuộc cạnh bên SC sao cho: $SN = \frac{2}{3}SC$. (a) Xác định giao điểm của CD với mặt phẳng (AMN). (b) P là 1 điểm thuộc mặt bên (SAD). Xác định giao tuyến của mặt phẳng (AMN) & mặt phẳng (PBD). (c) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MNP).*

Bài toán 7.22 (Quỳnh, Ban, et al., 2014, **18.**, p. 59). *Trong không gian cho $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, đường thẳng không cùng thuộc 1 mặt phẳng. (a) Biết rằng 2 đường thẳng bất kỳ trong n đường thẳng đã cho cắt nhau, chứng minh rằng tất cả n đường thẳng đồng quy. (b) Kết luận gì nếu 2 đường thẳng bất kỳ đồng phẳng? Vì sao?*

Bài toán 7.23 (Quỳnh, Ban, et al., 2014, **19.**, p. 59). *Cho tứ diện $ABCD$ có G_1, G_2, G_3, G_4 & I_1, I_2, I_3, I_4 lần lượt là trọng tâm & tâm đường tròn nội tiếp các mặt BCD, CDA, DAB, ACB của tứ diện. (a) Chứng minh AG_1, BG_2, CG_3, DG_4 đồng quy. (b) Biết tứ diện $ABCD$ thỏa mãn: $AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC$. Chứng minh AI_1, BI_2, CI_3, DI_4 đồng quy.*

7.2 Quan hệ song song – Parallelism

Bài toán 7.24 (Quỳnh, Ban, et al., 2014, Ví dụ 1, p. 62). *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với cạnh đáy lớn AB. (a) Xác định giao tuyến của các mặt phẳng (SAB) & (SCD); (b) M là 1 điểm trên cạnh SD. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (ABM).*

8 Vector Trong Không Gian. Quan Hệ Vuông Góc – Vector in Euclidean Space $\mathbb{R}^n$. Perpendicular Relation

9 Solutions

Tài liệu: Hạo, Tuấn, et al., 2022; Quỳnh, Đoan, et al., 2020; Hạo, Hy, et al., 2022; Quỳnh, Cương, et al., 2020; Quỳnh, Dũng, et al., 2010; Quỳnh, Ban, et al., 2014.

Tài liệu

Hạo, Trần Văn, Nguyễn Mộng Hy, et al. (2022). *Hình Học 11*. Tái bản lần thứ 15. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 136.

Hạo, Trần Văn, Vũ Tuấn, et al. (2022). *Đại Số & Giải Tích 11*. Tái bản lần thứ 15. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 191.

Quỳnh, Đoàn, Phạm Khắc Ban, et al. (2014). *Tài Liệu Chuyên Toán Hình Học 11*. Tái bản lần thứ 4. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 320.

Quỳnh, Đoàn, Văn Như Cương, et al. (2020). *Hình Học 11 nâng cao*. Tái bản lần thứ 13. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 132.

Quỳnh, Đoàn, Nguyễn Huy Đoan, et al. (2020). *Đại Số & Giải Tích 11 nâng cao*. Tái bản lần thứ 13. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 241.

Quỳnh, Đoàn, Trần Nam Dũng, et al. (2010). *Tài Liệu Chuyên Toán Đại Số & Giải Tích 11*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 327.