

# Problem: Square Root & Cube Root – Bài Tập Căn Bậc 2 & 3

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 22 tháng 4 năm 2023

## Tóm tắt nội dung

## Mục lục

1 Square Root & Irrationals – Căn Bậc 2 & Số Vô Tỷ . . . . .	1
2 Căn Thức Bậc 2 & Hằng Đẳng Thức $\sqrt{A^2} =  A $ . . . . .	1
3 Liên Hệ Giữa Phép Nhân, Phép Chia & Phép Khai Phương . . . . .	2
4 Biến Đổi Đơn Giản Biểu Thức Chứa Căn Thức Bậc 2 . . . . .	2
5 Rút Gọn Biểu Thức Có Chứa Căn Thức Bậc 2 . . . . .	3
6 Cube Root, $n$ th Root – Căn Bậc 3, Căn Bậc $n$ . . . . .	4
7 Miscellaneous . . . . .	4
Tài liệu . . . . .	4

## 1 Square Root & Irrationals – Căn Bậc 2 & Số Vô Tỷ

**Bài toán 1** (Bình, 2023, Ví dụ 2, p. 5). Chứng minh tổng của 1 số hữu tỷ với 1 số vô tỷ là 1 số vô tỷ.

**Bài toán 2** (Bình, 2023, Ví dụ 3, p. 5). Xét xem các số  $a, b$  có thể là số vô tỷ hay không, nếu: (a)  $a + b$  &  $a - b$  là các số hữu tỷ. (b)  $a - b$  &  $ab$  là các số hữu tỷ.

**Bài toán 3** (Bình, 2023, Ví dụ 4, p. 5). Chứng minh: Nếu số tự nhiên  $a$  không là số chính phương thì  $\sqrt{a}$  là số vô tỷ.

**Bài toán 4** (Bình, 2023, 2., p. 6). Chứng minh các số sau là số vô tỷ: (a)  $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ . (b)  $m + \frac{\sqrt{3}}{n}$  với  $m, n \in \mathbb{Q}$ ,  $n \neq 0$ .

**Bài toán 5** (Bình, 2023, 3., p. 6). Xét xem các số  $a, b$  có thể là số vô tỷ hay không nếu: (a)  $ab$  &  $\frac{a}{b}$  là các số hữu tỷ. (b)  $a + b$  &  $\frac{a}{b}$  là các số hữu tỷ ( $a + b \neq 0$ ). (c)  $a + b$ ,  $a^2$ , &  $b^2$  là các số hữu tỷ ( $a + b \neq 0$ ).

**Bài toán 6** (Bình, 2023, 4., p. 6). So sánh 2 số: (a)  $2\sqrt{3}$  &  $3\sqrt{2}$ . (b)  $6\sqrt{5}$  &  $5\sqrt{6}$ . (c)  $\sqrt{24} + \sqrt{45}$  & 12. (d)  $\sqrt{37} - \sqrt{15}$  & 2.

**Bài toán 7** (Bình, 2023, 5., p. 6). (a) Cho 1 ví dụ để chứng tỏ khẳng định  $\sqrt{a} \leq a$  với mọi số  $a$  không âm là sai. (b) Cho  $a > 0$ . Với giá trị nào của  $a$  thì  $\sqrt{a} > a$ ?

**Bài toán 8** (Bình, 2023, 6\*, pp. 6–7). (a) Chỉ ra 1 số thực  $x$  mà  $x - \frac{1}{x}$  là số nguyên ( $x \neq \pm 1$ ). (b) Chứng minh nếu  $x - \frac{1}{x}$  là số nguyên &  $x \neq \pm 1$  thì  $x$  &  $x + \frac{1}{x}$  là số vô tỷ. Khi đó  $(x + \frac{1}{x})^{2n}$  &  $(x + \frac{1}{x})^{2n+1}$  là số hữu tỷ hay số vô tỷ?

## 2 Căn Thức Bậc 2 & Hằng Đẳng Thức $\sqrt{A^2} = |A|$

**Bài toán 9** (Bình, 2023, Ví dụ 5, p. 7). Cho biểu thức  $A = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4x + 4}}$ . (a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức  $A$ . (b) Rút gọn biểu thức  $A$ .

**Bài toán 10** (Bình, 2023, Ví dụ 6, p. 8). Tìm điều kiện xác định của các biểu thức: (a)  $A = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}$ . (b)  $B = \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2x + 1}}}$ .

**Bài toán 11** (Bình, 2023, Ví dụ 7, p. 8). Tìm các giá trị của  $x$  sao cho  $\sqrt{x + 1} < x + 3$ .

\*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam  
e-mail: nguyentuanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

**Bài toán 12** (Bình, 2023, 7., p. 9). *Tìm điều kiện xác định của các biểu thức: (a)  $3 - \sqrt{1 - 16x^2}$ . (b)  $\frac{1}{1 - \sqrt{x^2 - 3}}$ . (c)  $\sqrt{8x - x^2 - 15}$ . (d)  $\frac{2}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$ . (e)  $A = \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}}$ . (f)  $B = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{\sqrt{2x + 1}} + \sqrt{x^2 - 8x + 14}$ .*

**Bài toán 13** (Bình, 2023, 8., p. 9). *Cho biểu thức  $A = \sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{x^2 + 6x + 9}$ . (a) Rút gọn biểu thức A. (b) Tìm các giá trị của x để  $A = 1$ .*

**Bài toán 14** (Bình, 2023, 9., p. 9). *Tìm các giá trị của x sao cho: (a)  $\sqrt{x^2 - 3} \leq x^2 - 3$ . (b)  $\sqrt{x^2 - 6x + 9} > x - 6$ .*

**Bài toán 15** (Bình, 2023, 10., p. 9). *Cho  $a + b + c = 0$  &  $a, b, c \neq 0$ . Chứng minh hằng đẳng thức:  $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right|$ .*

### 3 Liên Hệ Giữa Phép Nhân, Phép Chia & Phép Khai Phương

**Bài toán 16** (Bình, 2023, Ví dụ 8, p. 10). *Rút gọn biểu thức  $A = \sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} - \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}$ .*

**Bài toán 17** (Bình, 2023, Ví dụ 9, p. 11). *Chứng minh số  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$  là số vô tỷ.*

**Bài toán 18** (Bình, 2023, 11., pp. 11–12). *Rút gọn biểu thức: (a)  $\sqrt{11 - 2\sqrt{10}}$ . (b)  $\sqrt{9 - 2\sqrt{14}}$ . (c)  $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ . (d)  $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$ . (e)  $\sqrt{4 - \sqrt{7}} - \sqrt{4 + \sqrt{7}}$ . (f)  $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}}{\sqrt{2} + \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}}$ . (g)  $\sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}}$ . (h)  $\sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$ . (i)  $\sqrt{94 - 42\sqrt{5}} - \sqrt{94 + 42\sqrt{5}}$ .*

**Bài toán 19** (Bình, 2023, 12., p. 12). *Tính: (a)  $(4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$ . (b)  $\sqrt{3 - \sqrt{5}}(\sqrt{10} - \sqrt{2})(3 + \sqrt{5})$ . (c)  $\frac{\sqrt{\sqrt{5} + 2} + \sqrt{\sqrt{5} - 2}}{\sqrt{\sqrt{5} + 1}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ .*

**Bài toán 20** (Bình, 2023, 13., p. 12). *Chứng minh các hằng đẳng thức sau với  $b \geq 0$ ,  $a \geq \sqrt{b}$ : (a)  $\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2(a \pm \sqrt{a^2 - b})}$ . (b)  $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$ .*

**Bài toán 21** (Bình, 2023, 14., p. 12). *Rút gọn biểu thức  $A = \sqrt{x + 2\sqrt{2x - 4}} + \sqrt{x - 2\sqrt{2x - 4}}$ .*

**Bài toán 22** (Bình, 2023, 15., p. 12). *Cho biểu thức  $A = \frac{x + \sqrt{x^2 - 2x}}{x - \sqrt{x^2 - 2x}} - \frac{x - \sqrt{x^2 - 2x}}{x + \sqrt{x^2 - 2x}}$ . (a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức A. (b) Rút gọn biểu thức A. (c) Tìm giá trị của x để  $A < 2$ .*

**Bài toán 23** (Bình, 2023, 16., p. 12). *Lập 1 phương trình bậc 2 với các hệ số nguyên, trong đó: (a)  $2 + \sqrt{3}$  là 1 nghiệm của phương trình. (b)  $6 - 4\sqrt{2}$  là 1 nghiệm của phương trình.*

**Bài toán 24** (Bình, 2023, 17., p. 13). *Chứng minh các số sau là số vô tỷ: (a)  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ . (b)  $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$ .*

**Bài toán 25** (Bình, 2023, 18., p. 13). *Có tồn tại các số hữu tỷ dương a, b hay không nếu: (a)  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2}$ . (b)  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{\sqrt{2}}$ .*

**Bài toán 26** (Bình, 2023, 19., p. 13). *Cho 3 số x, y,  $\sqrt{x} + \sqrt{y}$  là các số hữu tỷ. Chứng minh mỗi số  $\sqrt{x}, \sqrt{y}$  đều là số hữu tỷ.*

**Bài toán 27** (Bình, 2023, 20., p. 13). *Cho a, b, c, d là các số dương. Chứng minh tồn tại 1 số dương trong 2 số  $2a + b - 2\sqrt{cd}$  &  $2c + d - 2\sqrt{ab}$ .*

**Bài toán 28** (Bình, 2023, 21\*, p. 13). *(a) Rút gọn biểu thức  $A = \sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}}$  với  $a > 0$ . (b) Tính giá trị của tổng  $B = \sum_{i=1}^{99} \sqrt{1 + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(i+1)^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}}$ .*

**Bài toán 29** (Bình, 2023, 22\*, p. 13). *(a) Nêu 1 cách tính nhẩm  $997^2$ . (b) Tính tổng các chữ số của A biết  $\sqrt{A} = 99 \dots 96$  (có 100 chữ số 9).*

### 4 Biến Đổi Đơn Giản Biểu Thức Chứa Căn Thức Bậc 2

**Bài toán 30** (Bình, 2023, Ví dụ 10, p. 14). *Rút gọn biểu thức  $A = \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$ .*

**Bài toán 31** (Bình, 2023, Ví dụ 11, p. 14). *Tính giá trị của biểu thức*

$$M = \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{(i+1)\sqrt{i} + i\sqrt{i+1}} = \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{25\sqrt{24} + 24\sqrt{25}}.$$

**Bài toán 32** (Bình, 2023, 23., p. 15). Rút gọn biểu thức  $A = \sqrt{1-a} + \sqrt{a(a-1)} + a\sqrt{\frac{a-1}{a}}$ .

**Bài toán 33** (Bình, 2023, 24., p. 15). Chứng minh các hằng đẳng thức: (a)  $\sqrt{10 + \sqrt{60} - \sqrt{24} - \sqrt{40}} = \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{2}$ . (b)  $\sqrt{6 + \sqrt{24} + \sqrt{12} + \sqrt{8}} - \sqrt{3} = \sqrt{2} + 1$ .

**Bài toán 34** (Bình, 2023, 25., p. 15). Cho  $A = \sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}}$ . Biểu diễn  $A$  dưới dạng tổng của 3 căn thức.

**Bài toán 35** (Bình, 2023, 26., p. 15). Rút gọn biểu thức  $A = \frac{x+3+2\sqrt{x^2-9}}{2x-6+\sqrt{x^2-9}}$ .

**Bài toán 36** (Bình, 2023, 27., p. 15). Rút gọn biểu thức  $B = \frac{x^2+5x+6+x\sqrt{9-x^2}}{3x-x^2+(x+2)\sqrt{9-x^2}}$ .

**Bài toán 37** (Bình, 2023, 28., p. 15). Rút gọn biểu thức:

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}},$$

$$B = \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{\sqrt{i} - \sqrt{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{1} - \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{4}} - \cdots - \frac{1}{\sqrt{24} - \sqrt{25}}.$$

## 5 Rút Gọn Biểu Thức Có Chứa Căn Thức Bậc 2

**Bài toán 38** (Bình, 2023, Ví dụ 12, p. 15). Tính:  $A = \left( \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \right) : \left( \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} - \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \right)$ .

**Bài toán 39** (Bình, 2023, Ví dụ 13, p. 16). Rút gọn biểu thức  $A = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ .

**Bài toán 40** (Bình, 2023, Ví dụ 14, p. 16). Cho  $A = \frac{\sqrt{a+6}}{\sqrt{a+1}}$ . (a) Tìm các số nguyên  $a$  để  $A$  là số nguyên. (b) Chứng minh với  $a = \frac{4}{9}$  thì  $A$  là số nguyên. (c) Tìm các số hữu tỷ  $a$  để  $A$  là số nguyên.

**Bài toán 41** (Bình, 2023, 29., p. 18). Rút gọn biểu thức: (a)  $A = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$ . (b)  $B = \left( \frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \left( \frac{1-\sqrt{a}}{1-a} \right)^2$ . (c)  $C = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}} : \left[ \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \frac{1}{x+y+2\sqrt{xy}} + \frac{2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \right]$  với  $x = 2 - \sqrt{3}$  &  $y = 2 + \sqrt{3}$ .

**Bài toán 42** (Bình, 2023, 30., p. 18). Rút gọn biểu thức  $A = \frac{1 - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}$ .

**Bài toán 43** (Bình, 2023, 31., p. 18). Rút gọn biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x^2 - y^2}} - \sqrt{x - \sqrt{x^2 - y^2}}}{\sqrt{2(x-y)}}$  với  $x > y > 0$ .

**Bài toán 44** (Bình, 2023, 32., p. 18). Rút gọn biểu thức  $A = \left( \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) : \left( \frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right)$  với  $x = \frac{a^2+b^2}{2ab}$  &  $b > a > 0$ .

**Bài toán 45** (Bình, 2023, 33., p. 18). Rút gọn biểu thức  $B = \frac{2a\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$  với  $x = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{1-a}{a}} - \sqrt{\frac{a}{1-a}} \right)$  &  $0 < a < 1$ .

**Bài toán 46** (Bình, 2023, 34., p. 18). Rút gọn biểu thức  $A = a + b - \sqrt{\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{c^2+1}}$  với  $a, b, c > 0$  &  $ab + bc + ca = 1$ .

**Bài toán 47** (Bình, 2023, 35., p. 18). Rút gọn biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}} \cdot \sqrt{2x-1}$ .

**Bài toán 48** (Bình, 2023, 36., p. 18). Chứng minh hằng đẳng thức sau với  $x \geq 2$

$$\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{\frac{x^2-4}{x}}} + \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{\frac{x^2-4}{x}}} = \sqrt{\frac{2x+4}{\sqrt{x}}}.$$

**Bài toán 49** (Bình, 2023, 37., p. 18). Cho  $a = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$ ,  $b = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}$ . Tính  $a^7 + b^7$ .

**Bài toán 50** (Bình, 2023, 38., p. 19). Cho biết  $\sqrt{x^2-6x+13} - \sqrt{x^2-6x+10} = 1$ . Tính  $\sqrt{x^2-6x+13} + \sqrt{x^2-6x+10}$ .

**Bài toán 51** (Bình, 2023, 39., p. 19). Cho biểu thức  $A = \frac{\sqrt{a+2}}{\sqrt{a-2}}$ . (a) Tìm các số nguyên  $a$  để  $A$  là số nguyên. (b) Tìm các số hữu tỷ  $a$  để  $A$  là số nguyên.

**Bài toán 52** (Bình, 2023, 40., p. 19). Cho  $a = \sqrt{2} - 1$ . (a) Viết  $a^2, a^3$  dưới dạng  $\sqrt{m} - \sqrt{m-1}$  trong đó  $m$  là số tự nhiên. (b) Chứng minh với mọi số nguyên dương  $n$ , số  $a^n$  viết được dưới dạng trên.

## 6 Cube Root, $n$ th Root – Căn Bậc 3, Căn Bậc $n$

## 7 Miscellaneous

### Tài liệu

Bình, Vũ Hữu (2023). *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 275.