Problems & Proofs in Elementary Inequality
Bài Tập Bất Đẳng Thức & Chứng Minh

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 19 tháng 5 năm 2023

Tóm tắt nội dung

A problem set for elementary inequality.

Mục lục

1 Introduction

The general structure of a problem on inequality is given by:

Problem 1. *Let x_i, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ satisfy the condition $C(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. Prove that: (a) $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0$. (b) $B(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge 0$. (c) Find the minimum & maximum of $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ & $B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Cấu trúc tổng quát của 1 bài toán bất đẳng thức:

Bài toán 1. *Cho các biến x_i, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ thỏa mãn điều kiện $C(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. Chứng minh: (a) $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0$. (b) $B(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge 0$. (c) Tìm GTNN & GTLN của biểu thức $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ & $B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Để nghiên cứu các bài toán bất đẳng thức & cực trị 1 cách có hệ thống, ta sẽ nghiên cứu 1 số dạng thường gặp của các *biểu thức cần tìm cực trị* A, B & đặc biệt là *biểu thức điều kiện* C.

2 Cauchy-Schwarz Inequality – Bất Đẳng Thức Cauchy-Schwarz

The most basic inequality: $x^2 \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \ne 0$.

Bài toán 2 (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho 2 số không âm)**.** *Chứng minh:*

$$\boxed{a + b \ge 2\sqrt{ab},\ \forall a, b \in \mathbb{R},\ a, b \ge 0.}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

1st proof. $a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \ge 0 \Rightarrow a + b \ge 2\sqrt{ab}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \ge 0$. "$=$" $\Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$. □

2nd proof. $(a + b)^2 - (2\sqrt{ab})^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \ge 0 \Rightarrow (a + b)^2 \ge (2\sqrt{ab})^2 \Rightarrow a + b \ge 2\sqrt{ab}$ (vì $a, b \ge 0$ nên $a + b \ge 0$ & $2\sqrt{ab} \ge 0$). "$=$" $\Leftrightarrow a = b$. □

Lưu ý 1. *Ở 2nd proof, ta đã vận dụng tính chất cơ bản của căn bậc 2:* $\boxed{0 \le a \le b \Leftrightarrow \sqrt{a} \le \sqrt{b},\ \forall a, b \in \mathbb{R}}$. *Phiên bản chặt/ngặt (strict) là:* $\boxed{0 \le a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b},\ \forall a, b \in \mathbb{R}}$. *Ý nghĩa hình học của 2 tính chất này: Hình vuông nào có cạnh lớn hơn thì có diện tích lớn hơn & ngược lại, hình vuông nào có diện tích lớn hơn thì có cạnh lớn hơn.*

3rd proof. Đặt $x \coloneqq \sqrt{a}$, $y \coloneqq \sqrt{b}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y \ge 0$. Có $a+b-2\sqrt{ab} = a+b-2\sqrt{a}\sqrt{b} = x^2+y^2-2xy = (x-y)^2 \ge 0 \Rightarrow a+b \ge 2\sqrt{ab}$. "$=$" $\Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$. □

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

Lưu ý 2. *Ở 3rd proof, ta đã sử dụng tính chất giao hoán của phép nhân & phép khai phương:* $\boxed{\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b},\ \forall a,b\in\mathbb{R},\ a,b\ge 0}$.

Bài toán 3. *Với m,n,p nào thì bất đẳng thức $ma+nb\ge p\sqrt{ab}$ luôn đúng: (a) $\forall a,b\in\mathbb{R},\ a,b\ge 0$. (b) $\forall a,b\in\mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Bài toán 4 (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho 3 số không âm)**.** *Chứng minh:*

$$\boxed{a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc},\ \forall a,b,c\in\mathbb{R},\ a,b,c\ge 0.}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 5. *Với m,n,p,q nào thì bất đẳng thức $ma+nb+pc\ge q\sqrt[3]{abc}$ luôn đúng: (a) $\forall a,b,c\in\mathbb{R},\ a,b,c\ge 0$. (b) $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Bài toán 6 (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho n số không âm)**.** *Chứng minh:*

$$\sum_{i=1}^n a_i\ge n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i},\ i.e.,\ a_1+a_2+\cdots+a_n\ge\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},\ \forall n\in\mathbb{N}^\star,\ \forall a_i\in\mathbb{R},\ a_i\ge 0,\forall i=1,2,\ldots,n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 7. *Cho $n\in\mathbb{N}^\star$. Với bộ $(m,m_1,m_2,\ldots,m_n)$ nào thì bất đẳng thức:*

$$\sum_{i=1}^n m_ia_i\ge m\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i},\ i.e.,\ m_1a_1+m_2a_2+\cdots+m_na_n\ge m\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

đúng với: (a) $\forall a_i\in\mathbb{R},\ a_i\ge 0,\ \forall i=1,2,\ldots,n$. (b) $\forall a_i\in\mathbb{R},\ \forall i=1,2,\ldots,n$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

3 Miscellaneous

Bài toán 8 ([Tuy23], Ví dụ 9, p. 23)**.** *Cho $x,y\in\mathbb{R},\ x,y>0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$. Tìm GTNN của biểu thức $A=\sqrt{x}+\sqrt{y}$.*

1st proof. Vì $x,y>0$ nên $\frac{1}{x},\frac{1}{y},\sqrt{x},\sqrt{y}>0$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương $\frac{1}{x},\frac{1}{y}$, được: $\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{xy}}\le\frac{1}{4}\Rightarrow\sqrt{xy}\ge 4$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương $\sqrt{x},\sqrt{y}$, được: $A=\sqrt{x}+\sqrt{y}\ge 2\sqrt{\sqrt{x}\sqrt{y}}=2\sqrt{\sqrt{xy}}\ge 2\sqrt{4}=4$. "=" $\Leftrightarrow x=y$ & $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=y=4$. Vậy $\min A=4\Leftrightarrow x=y=4$. □

2nd proof. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy lần lượt cho $(\sqrt{x},\sqrt{y})$ & $\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)$, được:

$$A=\sqrt{x}+\sqrt{y}\ge 2\sqrt{\sqrt{x}\sqrt{y}}=2\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}}}\ge 2\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}}=2\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}=4.$$

"=" $\Leftrightarrow\sqrt{x}=\sqrt{y}$ & $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=y$ & $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=y=4$. Vậy $\min_{x,y\in\mathbb{R},\,x,y>0}A=4\Leftrightarrow x=y=4$. □

Nhận xét 1. *"Trong thí dụ trên ta đã vận dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz theo 2 chiều ngược nhau. Lần thứ nhất ta đã "làm trội" $\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}}$ bằng cách vận dụng $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$ để dùng điều kiện tổng $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$, từ đó được $\sqrt{xy}\ge 4$. Lần thứ 2 ta đã "làm giảm" tổng $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ bằng cách vận dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz theo chiều $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ để dùng kết quả $\sqrt{xy}\ge 4$. Không phải lúc nào ta cũng có thể dùng trực tiếp bất đẳng thức Cauchy–Schwarz đối với các số trong đề bài."* – [Tuy23, p. 24]

Lưu ý 3. *TXĐ của A chỉ là $D_A:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x,y\ge 0\}$, nhưng để điều kiện $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$ có nghĩa thì cần thêm $x\ne 0,\ y\ne 0$, nên ta cần xét A trên tập hợp $D:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x,y>0,\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\}\subset D_A$. Hơn nữa, nếu viết GTNN của biểu thức $A=A(x,y)$ trên tập $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x>0,y>0\}$ 1 cách chính xác về mặt toán học thì nên viết tường minh là $\min_{x,y\in\mathbb{R},\,x,y>0}A(x,y)$ hoặc $\min_{(x,y)\in D}A(x,y)$ hoặc $\min_{x,y\in\mathbb{R},\,x,y>0}A$ như trong 2nd proof thay vì chỉ đơn giản là $\min A$ như trong 1st proof.*

Ta có thể mở rộng & tổng quát bài toán trên như sau:

Bài toán 9. *Cho $x,y\in\mathbb{R},\ x,y>0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=m>0,\ m\in\mathbb{R}$ cho trước. Có thể tìm GTNN & GTLN của các biểu thức nào? Liệt kê & chứng minh nhiều nhất có thể.*

Bài toán 10. *Cho $x,y\in\mathbb{R},\ x,y>0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=m>0,\ a,b,m\in\mathbb{R}$ cho trước. Có thể tìm GTNN & GTLN của các biểu thức nào? Liệt kê & chứng minh nhiều nhất có thể.*

Bài toán 11. *Cho* $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y, z > 0$ *thỏa mãn điều kiện* $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = m > 0$, $a, b, c, m \in \mathbb{R}$ *cho trước. Có thể tìm GTNN & GTLN của các biểu thức nào? Liệt kê & chứng minh nhiều nhất có thể.*

Bài toán 12. *Cho* $n \in \mathbb{N}^\star$, $x_i \in \mathbb{R}$, $x_i > 0$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, *thỏa mãn điều kiện* $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x_i} = m > 0$, $a_i, m \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, *cho trước. Có thể tìm GTNN & GTLN của các biểu thức nào? Liệt kê & chứng minh nhiều nhất có thể.*

Bài toán 13 ([Tuy23], Ví dụ 10, p. 24)**.** *Tìm GTLN & GTNN của biểu thức* $A = \sqrt{3x-5} + \sqrt{7-3x}$.

Giải. ĐKXĐ: $\frac{5}{3} \le x \le \frac{7}{3}$. $A^2 = 3x - 5 + 7 - 3x + 2\sqrt{3x-5} \cdot \sqrt{7-3x} \le 2 + (3x - 5 + 7 - 3x) = 4 \Rightarrow A \le 2$ ($A \ge 0$ vì $\sqrt{3x-5} \ge 0$, $\sqrt{7-3x} \ge 0$). "=" $\Leftrightarrow 3x - 5 = 7 - 3x \Leftrightarrow x = 2$. Vậy $\max A = 2 \Leftrightarrow x = 2$. □

Bài toán 14 (Mở rộng [Tuy23], Ví dụ 10, p. 24)**.** *Biện luận theo các tham số* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *để tìm GTLN & GTNN của biểu thức* $A = \sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d}$.

Bài toán 15 ([Sơn+21], Bổ đề 1.1, p. 5). *Chứng minh:* $4ab \le (a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$, *hay có thể viết dưới dạng* $\frac{a^2+b^2}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, $ab \le \frac{(a+b)^2}{4}$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Hint. $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \ge 0$, $2(a^2+b^2) - (a+b)^2 = (a-b)^2 \ge 0$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$. "=" $\Leftrightarrow a = b$. □

Bài toán 16 ([Sơn+21], Bổ đề 1.2, p. 5). *Chứng minh:* $3(ab+bc+ca) \le (a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)$, *hay có thể viết dưới dạng* $ab+bc+ca \le \frac{1}{3}(a+b+c)^2$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Hint. $(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] \ge 0$, $3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2 = (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$. "=" $\Leftrightarrow a = b = c$. □

Bài toán 17 ([Sơn+21], Bổ đề 1.3, p. 6). *Chứng minh:* $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b}$, *hay có thể viết dưới dạng* $\frac{1}{a+b} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$, $\forall a,b > 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Hint. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a+b} = \frac{(a-b)^2}{ab(a+b)} \ge 0$, $\forall a,b > 0$. "=" $\Leftrightarrow a = b > 0$. □

Bài toán 18 ([Sơn+21], Bổ đề 1.4, p. 6). *Chứng minh:* $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c}$, *hay có thể viết dưới dạng* $\frac{1}{a+b+c} \le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$, $\forall a,b,c > 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Bài toán 19 ([Sơn+21], Mở rộng Bổ đề 1.3–1.4, p. 6 cho n số). *Chứng minh:*

$$\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} \ge \frac{n^2}{a_1+\cdots+a_n}, \text{ i.e., } \frac{1}{a_1+\cdots+a_n} \le \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right), \ \forall a_i > 0, \ \forall i = 1,\ldots,n,$$

hay có thể được viết gọn lại như sau:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \ge \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n a_i}, \text{ i.e., } \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i} \le \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}, \ \forall a_i > 0, \ \forall i = 1,\ldots,n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 20 ([Sơn+21], Bổ đề 1.5, p. 7). *Chứng minh:* $\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b} \le \sqrt{2(a+b)}$, $\forall a,b \ge 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Bài toán 21 ([Sơn+21], Mở rộng Bổ đề 1.5, p. 7). *Chứng minh:* $\sqrt{a+b+c} \le \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \le \sqrt{3(a+b+c)}$, $\forall a,b,c \ge 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Bài toán 22 ([Sơn+21], Mở rộng Bổ đề 1.5, p. 7 cho n số). *Chứng minh:* $\sqrt{a_1+\cdots+a_n} \le \sqrt{a_1}+\cdots+\sqrt{a_n} \le \sqrt{n(a_1+\cdots+a_n)}$, $\forall a_i \ge 0$, $\forall i = 1,\ldots,n$, *hay có thể được viết gọn lại như sau:*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i} \le \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \le \sqrt{n\sum_{i=1}^n a_i}, \ \forall a_i \ge 0, \ \forall i = 1,\ldots,n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 23 ([Sơn+21], Bổ đề 1.6, p. 7). *Chứng minh:* $a^3 + b^3 \ge ab(a+b)$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a+b \ge 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Hint. $a^3+b^3-ab(a+b) = (a+b)(a-b)^2 \ge 0$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a+b \ge 0$. "=" $\Leftrightarrow a = \pm b$. □

Bài toán 24 ([Sơn+21], Mở rộng Bổ đề 1.6, p. 7). *Chứng minh:* $a^4+b^4 \ge ab(a^2+b^2)$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Tài liệu

[Sơn+21] Nguyễn Ngọc Sơn, Chu Đình Nghiệp, Lê Hải Trung, and Võ Quốc Bá Cẩn. *Các Chủ Đề Bất Đẳng Thức Ôn Thi Vào Lớp 10.* Tái bản lần thứ 3. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2021, p. 143.

[Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9.* Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.