

# Solution: Square-, Cube-, & $n$ th Roots

## Lời Giải: Căn Bậc 2, Căn Bậc 3, & Căn Bậc $n$

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 7 tháng 5 năm 2023

### Tóm tắt nội dung

[en] This text is a collection of problems, from basic to advanced, on *square-, cube-, &  $n$ th roots*.

**Keyword.** Square root, cube root,  $n$ th root.

[vi] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài toán, từ cơ bản đến nâng cao, về *căn bậc 2, căn bậc 3, & căn bậc  $n$* .

**Từ khóa.** Căn bậc 2, căn bậc 3, căn bậc  $n$ , số hữu tỷ, số vô tỷ, căn thức.

- Lecture note – Bài giảng: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/square- & cube roots](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_9/square- & cube roots)<sup>1</sup>.
- Cheatsheet – Công thức: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/cheatsheet: square- & cube roots](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_9/cheatsheet: square- & cube roots)<sup>2</sup>.
- Problem – Bài tập: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/problem: square- & cube roots](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_9/problem: square- & cube roots)<sup>3</sup>.
- Solution – Lời giải: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/solution: square- & cube roots](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_9/solution: square- & cube roots)<sup>4</sup>.

## Mục lục

1 Square Root & Irrationals – Căn Bậc 2 & Số Vô Tỷ . . . . .	2
2 Căn Thức Bậc 2 & Hằng Đẳng Thức $\sqrt{A^2} =  A $ . . . . .	2
3 Liên Hệ Giữa Phép Nhân, Phép Chia & Phép Khai Phương . . . . .	5
4 Biến Đổi Đơn Giản Biểu Thức Chứa Căn Thức Bậc 2 . . . . .	6
5 Rút Gọn Biểu Thức Có Chứa Căn Thức Bậc 2 . . . . .	7
6 Cube Root, $n$ th Root – Căn Bậc 3, Căn Bậc $n$ . . . . .	8
7 Miscellaneous . . . . .	10
Tài liệu . . . . .	13

---

\*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam

e-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com); website: <https://nqbh.github.io>.

<sup>1</sup>URL: [https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary\\_mathematics/grade\\_9/square\\_root\\_cube\\_root/NQBH\\_square\\_root\\_cube\\_root.pdf](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/NQBH_square_root_cube_root.pdf).

<sup>2</sup>[https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary\\_mathematics/grade\\_9/square\\_root\\_cube\\_root/cheatsheet/NQBH\\_square\\_root\\_cube\\_root\\_cheatsheet.pdf](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/cheatsheet/NQBH_square_root_cube_root_cheatsheet.pdf).

<sup>3</sup>[https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary\\_mathematics/grade\\_9/square\\_root\\_cube\\_root/problem/NQBH\\_square\\_root\\_cube\\_root\\_problem.pdf](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/problem/NQBH_square_root_cube_root_problem.pdf).

<sup>4</sup>[https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary\\_mathematics/grade\\_9/square\\_root\\_cube\\_root/solution/NQBH\\_square\\_root\\_cube\\_root\\_solution.pdf](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/solution/NQBH_square_root_cube_root_solution.pdf).

# 1 Square Root & Irrationals – Căn Bậc 2 & Số Vô Tỷ

**Bài toán 1** (Program to print out 1st  $n$  square roots). *Viết chương trình PASCAL, C/C++, PYTHON xuất ra căn bậc 2 của  $n$  số tự nhiên đầu tiên với  $n \in \mathbb{N}^*$  được nhập từ bàn phím.*

Pascal:

```
program square_root;
var num, sqrt_num: real;
begin
    write('Enter a number num = ');
    readln(num);
    sqrt_num := Sqrt(num);
    writeln('sqrt of ', num, ' = ', sqrt_num)
end.
```

**Bài toán 2** (Số chính phương). *Viết chương trình PASCAL, C/C++, PYTHON để kiểm tra 1 số  $n \in \mathbb{N}^*$  được nhập từ bàn phím có phải là số chính phương hay không.*

**Bài toán 3** ([Tuy22], Thí dụ 1, p. 5). *Cho số thực  $x \geq 0$ . So sánh  $\sqrt{x}$  với  $x$ .*

*Giải.* Vì  $x \geq 0$  nên  $\sqrt{x}$  có nghĩa/xác định &  $\sqrt{x} \geq 0$ . Xét các trường hợp: (a)  $\sqrt{x} = x \Leftrightarrow x = x^2 \Leftrightarrow x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  hoặc  $x = 1$ . (b)  $\sqrt{x} < x \Leftrightarrow x < x^2 \Leftrightarrow x - x^2 < 0 \Leftrightarrow x(1 - x) < 0$ , mà  $x \geq 0$  nên suy ra  $1 - x < 0$ , hay  $x > 1$ . (c)  $\sqrt{x} > x \Leftrightarrow x > x^2 \Leftrightarrow x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x(1 - x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ . Vậy:  $x \in \{0, 1\} \Leftrightarrow \sqrt{x} = x$ ,  $x > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} < x$ , &  $0 < x < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} > x$ .  $\square$

**Nhận xét 1.** *Về mặt phương pháp để so sánh 2 số không âm ta có thể so sánh các bình phương của 2 số đó:  $a \geq b > 0 \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$ . Về kết quả, khi so sánh  $\sqrt{x}$  với  $x$  ta thấy có thể xảy ra cả 3 trường hợp: lớn hơn, nhỏ hơn, hoặc bằng nhau tùy theo  $x$  ở trong khoảng giá trị nào, cụ thể:  $x \in \{0, 1\} \Leftrightarrow \sqrt{x} = x$ ,  $x > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} < x$ , &  $0 < x < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} > x$ .*

**Bài toán 4** ([Bin23], Ví dụ 2, p. 5). *Chứng minh tổng của 1 số hữu tỷ với 1 số vô tỷ là 1 số vô tỷ.*

**Bài toán 5** ([Bin23], Ví dụ 3, p. 5). *Xét xem các số  $a, b$  có thể là số vô tỷ hay không, nếu: (a)  $a + b$  &  $a - b$  là các số hữu tỷ. (b)  $a - b$  &  $ab$  là các số hữu tỷ.*

**Bài toán 6** ([Bin23], Ví dụ 4, p. 5). *Chứng minh: Nếu số tự nhiên  $a$  không là số chính phương thì  $\sqrt{a}$  là số vô tỷ.*

**Bài toán 7** ([Bin23], 2., p. 6). *Chứng minh các số sau là số vô tỷ: (a)  $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ . (b)  $m + \frac{\sqrt{3}}{n}$  với  $m, n \in \mathbb{Q}$ ,  $n \neq 0$ .*

**Bài toán 8** ([Bin23], 3., p. 6). *Xét xem các số  $a, b$  có thể là số vô tỷ hay không nếu: (a)  $ab$  &  $\frac{a}{b}$  là các số hữu tỷ. (b)  $a + b$  &  $\frac{a}{b}$  là các số hữu tỷ ( $a + b \neq 0$ ). (c)  $a + b$ ,  $a^2$ , &  $b^2$  là các số hữu tỷ ( $a + b \neq 0$ ).*

**Bài toán 9** ([Bin23], 4., p. 6). *So sánh 2 số: (a)  $2\sqrt{3}$  &  $3\sqrt{2}$ . (b)  $6\sqrt{5}$  &  $5\sqrt{6}$ . (c)  $\sqrt{24} + \sqrt{45}$  & 12. (d)  $\sqrt{37} - \sqrt{15}$  & 2.*

**Bài toán 10** ([Bin23], 5., p. 6). *(a) Cho 1 ví dụ để chứng tỏ khẳng định  $\sqrt{a} \leq a$  với mọi số  $a$  không âm là sai. (b) Cho  $a > 0$ . Với giá trị nào của  $a$  thì  $\sqrt{a} \geq a$ ?*

**Bài toán 11** ([Bin23], 6\*, pp. 6–7). *(a) Chỉ ra 1 số thực  $x$  mà  $x - \frac{1}{x}$  là số nguyên ( $x \neq \pm 1$ ). (b) Chứng minh nếu  $x - \frac{1}{x}$  là số nguyên &  $x \neq \pm 1$  thì  $x$  &  $x + \frac{1}{x}$  là số vô tỷ. Khi đó  $(x + \frac{1}{x})^{2n}$  &  $(x + \frac{1}{x})^{2n+1}$  là số hữu tỷ hay số vô tỷ?*

## 2 Căn Thức Bậc 2 & Hằng Đẳng Thức $\sqrt{A^2} = |A|$

**Bài toán 12** ([Tuy22], Thí dụ 2, p. 5). *Cho  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ ,  $abc \neq 0$  &  $a = b + c$ . Chứng minh  $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \in \mathbb{Q}$ .*

*Giải.*  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} - \frac{1}{bc}\right) = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + \frac{2(c+b-a)}{abc} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2$  vì  $a = b + c$ . Suy ra  $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2} = \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right|$ . Có  $a, b, c \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \in \mathbb{Q} \Rightarrow A = \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right| \in \mathbb{Q}$ .  $\square$

**Bài toán 13.** *Cho  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ ,  $abc \neq 0$  &  $a + b + c = 0$ . Chứng minh  $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \in \mathbb{Q}$ .*

*1st giải.*  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 - \frac{2(a+b+c)}{abc} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2$  vì  $a + b + c = 0$ . Suy ra  $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2} = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right|$ . Có  $a, b, c \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \in \mathbb{Q} \Rightarrow A = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right| \in \mathbb{Q}$ .  $\square$

2nd giải.  $a + b + c = 0 \Leftrightarrow -a = b + c$ , nên ta có thể áp dụng bài toán 12 cho bộ 3 số  $(-a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$ ,  $-abc \neq 0$  để thu được  $\sqrt{\frac{1}{(-a)^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \in \mathbb{Q}$ , i.e.,  $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \in \mathbb{Q}$ .  $\square$

**Nhận xét 2** (Proof of  $\in \mathbb{Q}$ ). Để chứng minh 1 số là số hữu tỷ ta biểu diễn số đó thành 1 biểu thức gồm các phép tính cộng, trừ, nhân, chia (cho 1 số khác 0) của các số hữu tỷ.

**Bài toán 14.** (a) Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $abc \neq 0$ , khi nào thì  $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ ? (b) Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $abcd \neq 0$ , khi nào thì  $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}$ ? (c) Cho  $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ ,  $abcde \neq 0$ , khi nào thì  $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} + \frac{1}{e^2}$ ? (d) Cho  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$ , khi nào thì xảy ra đẳng thức sau?

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2}, \text{ i.e., } \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)^2 = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}.$$

**Bài toán 15.** Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ ,  $abcd \neq 0$  &  $ab + ac + ad + bc + bd + cd = 0$ . Chứng minh  $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}} \in \mathbb{Q}$ .

**Bài toán 16.** Cho  $a, b, c, d, e \in \mathbb{Q}$ ,  $abcde \neq 0$  &  $abc + abd + abe + acd + ace + ade + bcd + bce + bde + cde = 0$ . Chứng minh  $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} + \frac{1}{e^2}} \in \mathbb{Q}$ .

**Bài toán 17.** Cho  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_i \in \mathbb{Q}$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$ , &  $\sum_{\text{cyc}} a_1 a_2 \dots a_{n-2} = 0$ . Chứng minh:

$$A = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2}} = \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}} \in \mathbb{Q}.$$

**Lưu ý 1** (Cyclic sum). Ký hiệu  $\sum_{\text{cyc}}$  được gọi là tổng cyclic. Xem định nghĩa & ví dụ tại, e.g., [AoPS/cyclic sum](#)<sup>5</sup>.

**Bài toán 18** ([Tuy22], 1., p. 6). Tính  $A = \sqrt{\frac{8^{10} - 4^{10}}{4^{11} - 8^4}}$ .

Phân tích. 4, 8 đều là lũy thừa của 2 nên sẽ tiện hơn nếu đưa tất cả các lũy thừa trong  $A$  về lũy thừa với cơ số 2.

*Giải.*  $A = \sqrt{\frac{(2^3)^{10} - (2^2)^{10}}{(2^2)^{11} - (2^3)^4}} = \sqrt{\frac{2^{30} - 2^{20}}{2^{22} - 2^{12}}} = \sqrt{\frac{2^{20}(2^{10} - 1)}{2^{12}(2^{10} - 1)}} = \sqrt{2^8} = 2^4 = 16.$   $\square$

**Bài toán 19** ([Tuy22], 2., p. 6). Cho  $A = \underbrace{99 \dots 94}_{10's} \underbrace{00 \dots 09}_{10's}$ . Tính  $\sqrt{A}$ .

1st giải.  $A = \underbrace{99 \dots 94}_{10's} \cdot \underbrace{100 \dots 0}_{11's} + 9 = (\underbrace{99 \dots 97}_{10's} - 3)(\underbrace{99 \dots 97}_{10's} + 3) + 9 = \underbrace{99 \dots 97^2}_{10's} - 3^2 + 9 = \underbrace{99 \dots 97^2}_{10's} \Rightarrow \sqrt{A} = \underbrace{99 \dots 97}_{10's}.$   $\square$

2nd giải.  $A = (10^{10} - 1) \cdot 10^{12} + 4 \cdot 10^{11} + 9 = 10^{22} - 10^{12} + 4 \cdot 10^{11} + 9 = 10^{22} - 10 \cdot 10^{11} + 4 \cdot 10^{11} + 9 = 10^{22} - 6 \cdot 10^{11} + 9 = (10^{11} - 3)^2 \Rightarrow \sqrt{A} = 10^{11} - 3 = \underbrace{99 \dots 97}_{10's}.$   $\square$

**Bài toán 20** ([Tuy22], 3., p. 6). Không dùng máy tính hoặc bảng số, so sánh: (a)  $\sqrt{8} + \sqrt{15}$  &  $\sqrt{65} - 1$ . (b)  $\frac{13 - 2\sqrt{3}}{6}$  &  $\sqrt{2}$ .

Hint. Tìm các số chính phương gần với các số dưới dấu căn để đơn giản dấu căn 1 cách hợp lý.

*Giải.* (a)  $\sqrt{8} + \sqrt{15} < \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$ , &  $\sqrt{65} - 1 > \sqrt{64} - 1 = 8 - 1 = 7$ . Suy ra  $\sqrt{8} + \sqrt{15} < \sqrt{65} - 1$ . (b)  $\frac{13 - 2\sqrt{3}}{6} > \frac{13 - 2\sqrt{4}}{6} = \frac{3}{2} = 1.5$ . Mặt khác,  $(1.5)^2 = 2.25 > 2 \Leftrightarrow 1.5 > \sqrt{2}$ , nên  $\frac{13 - 2\sqrt{3}}{6} > \sqrt{2}$ .  $\square$

**Bài toán 21** ([Tuy22], 4., p. 6). Tìm điều kiện xác định (DKXD) & tập xác định (TXD) của các biểu thức: (a)  $\sqrt{2 - x^2}$ . (b)  $\frac{x}{\sqrt{5x^2 - 3}}$ . (c)  $\sqrt{-4x^2 + 4x - 1}$ . (d)  $\frac{1}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$ .

<sup>5</sup>URL: [https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Cyclic\\_sum](https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Cyclic_sum).

*Giải.* (a)  $\sqrt{2-x^2}$  xác định  $\Leftrightarrow 2-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 2 \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ . ĐKXD:  $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ . TXD:  $D = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ . (b)  $\frac{x}{\sqrt{5x^2-3}}$  xác định  $\Leftrightarrow 5x^2-3 > 0 \Leftrightarrow x^2 > \frac{3}{5} \Leftrightarrow |x| > \sqrt{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow x > \sqrt{\frac{3}{5}}$  hoặc  $x < -\sqrt{\frac{3}{5}}$ . ĐKXD:  $x > \sqrt{\frac{3}{5}}$  hoặc  $x < -\sqrt{\frac{3}{5}}$ . TXD:  $D = \left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \infty\right)$ . (c)  $\sqrt{-4x^2+4x-1}$  xác định  $\Leftrightarrow -4x^2+4x-1 \geq 0 \Leftrightarrow -(2x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 2x-1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ . ĐKXD:  $x = \frac{1}{2}$ . TXD:  $D = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ . (d)  $\frac{1}{\sqrt{x^2+x-2}}$  xác định  $\Leftrightarrow x^2+x-2 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) > 0 \Leftrightarrow x > 1$  hoặc  $x < -2$ . ĐKXD:  $x > 1$  hoặc  $x < -2$ . TXD:  $D = (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$ .  $\square$

**Bài toán 22** ([Tuy22], 5., p. 6). Cho  $a, b, c \in \mathbb{Q}$  khác nhau đôi một. Chứng minh  $A = \sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}} \in \mathbb{Q}$ .

*1st giải.*  $\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)}\right) = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)^2 - \frac{2(c-a+a-b+b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)^2 \Rightarrow A = \left|\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right|$ . Vì  $a, b, c \in \mathbb{Q}$  khác nhau đôi một nghĩa là  $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ , suy ra  $\frac{1}{a-b}, \frac{1}{b-c}, \frac{1}{c-a} \in \mathbb{Q} \Rightarrow A = \left|\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right| \in \mathbb{Q}$ .  $\square$

*2nd giải.* Vì  $(a-b) + (b-c) + (c-a) = 0$ , & vì  $a, b, c \in \mathbb{Q}$  khác nhau đôi một nghĩa là  $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$  nên có thể áp dụng Bài toán 13 cho bộ 3 số  $(a-b, b-c, c-a)$  để thu được  $A = \sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}} \in \mathbb{Q}$ .  $\square$

**Bài toán 23** ([Tuy22], 6., p. 6). Cho  $a, b, c \in \mathbb{Q}$  thỏa mãn  $ab+bc+ca=1$ . Chứng minh  $A = \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} \in \mathbb{Q}$ .

*Giải.*  $a^2+1 = a^2+ab+bc+ca = (a+b)(a+c)$ ,  $b^2+1 = b^2+ab+bc+ca = (b+c)(b+a)$ ,  $c^2+1 = c^2+ab+bc+ca = (c+a)(c+b)$ , nên  $A = \sqrt{(a+b)(a+c)(b+c)(b+a)(c+a)(c+b)} = \sqrt{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2} = |(a+b)(b+c)(c+a)|$ . Có:  $a, b, c \in \mathbb{Q} \Rightarrow A = |(a+b)(b+c)(c+a)| \in \mathbb{Q}$ .  $\square$

**Bài toán 24** ([Tuy22], 7., p. 6-7). (a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $A = \sqrt{-x^2+x+\frac{3}{4}}$ . (b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $B = \sqrt{4x^4-4x^2(x+1)+(x+1)^2+9}$ . (c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $C = \sqrt{25x^2-20x+4} + \sqrt{25x^2}$ .

**Bài toán 25** ([Tuy22], 8., p. 7). Cho  $x < 0$ , rút gọn biểu thức  $A = |2x - \sqrt{(5x-1)^2}|$ .

**Bài toán 26** ([Tuy22], 9., p. 7). Cho biểu thức  $A = 4x - \sqrt{9x^2-12x+4}$ . (a) Rút gọn A. (b) Tính giá trị của A với  $x = \frac{2}{7}$ .

**Bài toán 27** ([Tuy22], 10., p. 7). Cho biểu thức  $A = 5x + \sqrt{x^2+6x+9}$ . (a) Rút gọn A. (b) Tìm x để  $B = -9$ .

**Bài toán 28** ([Tuy22], 11., p. 7). Tìm  $x \in \mathbb{R}$  biết  $\sqrt{4x^2-4x+1} \leq 5-x$ .

**Bài toán 29** ([Tuy22], 12., p. 7). Giải phương trình: (a)  $\sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{x+1}$ . (b)  $\sqrt{x^2-9} + \sqrt{x^2-6x+9} = 0$ . (c)  $\sqrt{x^2-4} - x^2 + 4 = 0$ .

**Bài toán 30** ([Tuy22], 13., p. 7). Giải phương trình: (a)  $\sqrt{x^2-4x+5} + \sqrt{x^2-4x+8} + \sqrt{x^2-4x+9} = 3 + \sqrt{5}$ . (b)  $\sqrt{2-x^2+2x} + \sqrt{-x^2-6x-8} = 1 + \sqrt{3}$ . (c)  $\sqrt{9x^2-6x+2} + \sqrt{45x^2-30x+9} = \sqrt{6x-9x^2+8}$ .

**Bài toán 31** ([Bin23], Ví dụ 5, p. 7). Cho biểu thức  $A = \sqrt{x - \sqrt{x^2-4x+4}}$ . (a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức A. (b) Rút gọn biểu thức A.

**Bài toán 32** ([Bin23], Ví dụ 6, p. 8). Tìm điều kiện xác định của các biểu thức: (a)  $A = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x-1}}$ . (b)  $B = \frac{1}{\sqrt{x-\sqrt{2x+1}}}$ .

**Bài toán 33** ([Bin23], Ví dụ 7, p. 8). Tìm các giá trị của x sao cho  $\sqrt{x+1} < x+3$ .

**Bài toán 34** ([Bin23], 7., p. 9). Tìm điều kiện xác định của các biểu thức: (a)  $3-\sqrt{1-16x^2}$ . (b)  $\frac{1}{1-\sqrt{x^2-3}}$ . (c)  $\sqrt{8x-x^2-15}$ . (d)  $\frac{2}{\sqrt{x^2-x+1}}$ . (e)  $A = \frac{1}{\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}$ . (f)  $B = \frac{\sqrt{16-x^2}}{\sqrt{2x+1}} + \sqrt{x^2-8x+14}$ .

**Bài toán 35** ([Bin23], 8., p. 9). Cho biểu thức  $A = \sqrt{x^2-6x+9} - \sqrt{x^2+6x+9}$ . (a) Rút gọn biểu thức A. (b) Tìm các giá trị của x để  $A = 1$ .

**Bài toán 36** ([Bin23], 9., p. 9). Tìm các giá trị của x sao cho: (a)  $\sqrt{x^2-3} \leq x^2-3$ . (b)  $\sqrt{x^2-6x+9} > x-6$ .

**Bài toán 37** ([Bin23], 10., p. 9). Cho  $a+b+c=0$  &  $abc \neq 0$ . Chứng minh hằng đẳng thức:  $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right|$ .

### 3 Liên Hệ Giữa Phép Nhân, Phép Chia & Phép Khai Phương

**Bài toán 38** ([Tuy22], Thí dụ 3, p. 9). Rút gọn biểu thức  $A = \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}}$ .

**Bài toán 39** ([Tuy22], Thí dụ 4, p. 10). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $A = \sqrt{x - 5} + \sqrt{13 - x}$ .

**Bài toán 40** ([Tuy22], 14., p. 11). Rút gọn biểu thức  $A = \frac{\sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{3}} - \sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{7} - 2}}$ .

**Bài toán 41** ([Tuy22], 15., p. 11). Cho 2 số có tổng bằng  $\sqrt{19}$  & có hiệu bằng  $\sqrt{7}$ . Tính tích của 2 số đó.

**Bài toán 42** ([Tuy22], 16., p. 11). Tính  $\sqrt{A}$  biết: (a)  $A = 13 - 2\sqrt{42}$ . (b)  $A = 46 + 6\sqrt{5}$ . (c)  $A = 12 - 3\sqrt{15}$ .

**Bài toán 43** ([Tuy22], 17., p. 12). Rút gọn biểu thức: (a)  $A = \sqrt{6 + 2\sqrt{2}\sqrt{3 - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}}$ . (b)  $B = \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$ . (c)  $C = \sqrt{3 - \sqrt{5}}(\sqrt{10} - \sqrt{2})(3 + \sqrt{5})$ .

**Bài toán 44** ([Tuy22], 18., p. 12). Rút gọn biểu thức  $A = \sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}}$ .

**Bài toán 45** ([Tuy22], 19., p. 12). Cho  $a > 0$ , so sánh  $\sqrt{a + 1} + \sqrt{a + 3}$  với  $2\sqrt{a + 2}$ .

**Bài toán 46** ([Tuy22], 20., p. 12). Cho  $a, b, x, y > 0$ . Chứng minh  $\sqrt{ax} + \sqrt{by} \leq \sqrt{(a + b)(x + y)}$ .

**Bài toán 47** ([Tuy22], 21., p. 12). (a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $A = \sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 8}$ . (b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $B = \sqrt{x - 1} + \sqrt{5 - x}$ .

**Bài toán 48** ([Tuy22], 22., p. 12). Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} \left[ \sqrt{(1 + x)^3} - \sqrt{(1 - x)^3} \right]}{2 + \sqrt{1 - x^2}}.$$

**Bài toán 49** ([Tuy22], 23., p. 12). Tìm  $x, y$  biết  $x + y + 12 = 4\sqrt{x} + 6\sqrt{y - 1}$ .

**Bài toán 50** ([Tuy22], 24., p. 12). Tìm  $x, y, z$  biết  $\sqrt{x - a} + \sqrt{y - b} + \sqrt{z - c} = \frac{1}{2}(x + y + z)$ , trong đó  $a + b + c = 3$ .

**Bài toán 51** ([Tuy22], 25., p. 12). Giải phương trình  $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 + 6\sqrt{x - 1}} = 5$ .

**Bài toán 52** ([Tuy22], 26., p. 12). Giải phương trình  $\sqrt{x^2 - 5x + 6} + \sqrt{x + 1} = \sqrt{x - 2} + \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ .

**Bài toán 53** ([Tuy22], 27., p. 12). Chứng minh bất đẳng thức  $\sqrt{n + a} + \sqrt{n - a} < 2\sqrt{n}$  vpwos  $0 < |a| \leq n$ . Áp dụng (không dùng máy tính hoặc bảng số): Chứng minh:  $\sqrt{101} - \sqrt{99} > 0.1$ .

**Bài toán 54** ([Tuy22], 28., p. 13). Chứng minh:  $2(\sqrt{n + 1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n - 1})$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Áp dụng: Cho  $S = \sum_{i=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}}$ . Chứng minh  $18 < S < 19$ .

**Bài toán 55** ([Tuy22], 29., p. 13). Chứng minh:  $\frac{1}{2\sqrt{n + 1}} < \sqrt{n + 1} - \sqrt{n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Áp dụng: Chứng minh:  $S = \sum_{i=1}^{2500} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2500}} < 100$ .

**Bài toán 56** ([Tuy22], 30., p. 13). Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh  $x + y + z \geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$ .

**Bài toán 57** ([Tuy22], 31., p. 13). Cho  $A = \sqrt{x + 3} + \sqrt{5 - x}$ . Chứng minh  $A \leq 4$ .

**Bài toán 58** ([Tuy22], 32., p. 13). Cho  $B = \frac{x^3}{1 + y} + \frac{y^3}{1 + x}$  trong đó  $x, y$  là các số thực dương thỏa mãn điều kiện  $xy = 1$ . Chứng minh  $B \geq 1$ .

**Bài toán 59** ([Tuy22], 33., p. 13). Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn điều kiện  $\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{y + 1} + \frac{1}{z + 1} = 2$ . Chứng minh  $xyz \leq \frac{1}{8}$ .

**Bài toán 60** ([Tuy22], 34., p. 13). Tìm các số dương  $x, y, z$  sao cho  $x + y + z = 3$  &  $x^4 + y^4 + z^4 = 3xyz$ .

**Bài toán 61** ([Tuy22], 35., p. 13). Cho  $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 10$ . Chứng minh:  $x + y \geq 20$ .

**Bài toán 62** ([Tuy22], 36., p. 13). Cho  $x, y, z \geq 0$  thỏa mãn điều kiện  $x + y + z = 1$ . Chứng minh:  $\sqrt{x + y} + \sqrt{y + z} + \sqrt{z + x} \leq \sqrt{6}$ .

**Bài toán 63** ([Bin23], Ví dụ 8, p. 10). Rút gọn biểu thức  $A = \sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} - \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}$ .

**Bài toán 64** ([Bin23], Ví dụ 9, p. 11). Chứng minh số  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$  là số vô tỷ.

**Bài toán 65** ([Bin23], 11., pp. 11–12). Rút gọn biểu thức: (a)  $\sqrt{11-2\sqrt{10}}$ . (b)  $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$ . (c)  $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ . (d)  $\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{9+4\sqrt{5}}$ . (e)  $\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}$ . (f)  $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{7+2\sqrt{10}}}$ . (g)  $\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}$ . (h)  $\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ . (i)  $\sqrt{94-42\sqrt{5}}-\sqrt{94+42\sqrt{5}}$ .

**Bài toán 66** ([Bin23], 12., p. 12). Tính: (a)  $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$ . (b)  $\sqrt{3-\sqrt{5}}(\sqrt{10}-\sqrt{2})(3+\sqrt{5})$ . (c)  $\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ .

**Bài toán 67** ([Bin23], 13., p. 12). Chứng minh các hằng đẳng thức sau với  $b \geq 0$ ,  $a \geq \sqrt{b}$ : (a)  $\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2(a \pm \sqrt{a^2-b})}$ . (b)  $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$ .

**Bài toán 68** ([Bin23], 14., p. 12). Rút gọn biểu thức  $A = \sqrt{x+2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$ .

**Bài toán 69** ([Bin23], 15., p. 12). Cho biểu thức  $A = \frac{x+\sqrt{x^2-2x}}{x-\sqrt{x^2-2x}} - \frac{x-\sqrt{x^2-2x}}{x+\sqrt{x^2-2x}}$ . (a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức A. (b) Rút gọn biểu thức A. (c) Tìm giá trị của x để  $A < 2$ .

**Bài toán 70** ([Bin23], 16., p. 12). Lập 1 phương trình bậc 2 với các hệ số nguyên, trong đó: (a)  $2+\sqrt{3}$  là 1 nghiệm của phương trình. (b)  $6-4\sqrt{2}$  là 1 nghiệm của phương trình.

**Bài toán 71** ([Bin23], 17., p. 13). Chứng minh các số sau là số vô tỷ: (a)  $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ . (b)  $2\sqrt{2}+\sqrt{3}$ .

**Bài toán 72** ([Bin23], 18., p. 13). Có tồn tại các số hữu tỷ dương a, b hay không nếu: (a)  $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2}$ . (b)  $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{\sqrt{2}}$ .

**Bài toán 73** ([Bin23], 19., p. 13). Cho 3 số x, y,  $\sqrt{x}+\sqrt{y}$  là các số hữu tỷ. Chứng minh mỗi số  $\sqrt{x}, \sqrt{y}$  đều là số hữu tỷ.

**Bài toán 74** ([Bin23], 20., p. 13). Cho a, b, c, d là các số dương. Chứng minh tồn tại 1 số dương trong 2 số  $2a+b-2\sqrt{cd}$  &  $2c+d-2\sqrt{ab}$ .

**Bài toán 75** ([Bin23], 21\*, p. 13). (a) Rút gọn biểu thức  $A = \sqrt{1+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}}$  với  $a > 0$ . (b) Tính giá trị của tổng  $B = \sum_{i=1}^{99} \sqrt{1+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{(i+1)^2}} = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1+\frac{1}{99^2}+\frac{1}{100^2}}$ .

**Bài toán 76** ([Bin23], 22\*, p. 13). (a) Nêu 1 cách tính nhẩm  $997^2$ . (b) Tính tổng các chữ số của A biết  $\sqrt{A} = 99 \dots 96$  (có 100 chữ số 9).

## 4 Biến Đổi Đơn Giản Biểu Thức Chứa Căn Thức Bậc 2

**Bài toán 77** ([Bin23], Ví dụ 10, p. 14). Rút gọn biểu thức  $A = \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$ .

**Bài toán 78** ([Bin23], Ví dụ 11, p. 14). Tính giá trị của biểu thức

$$M = \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{(i+1)\sqrt{i}+i\sqrt{i+1}} = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{25\sqrt{24}+24\sqrt{25}}.$$

**Bài toán 79** ([Bin23], 23., p. 15). Rút gọn biểu thức  $A = \sqrt{1-a} + \sqrt{a(a-1)} + a\sqrt{\frac{a-1}{a}}$ .

**Bài toán 80** ([Bin23], 24., p. 15). Chứng minh các hằng đẳng thức: (a)  $\sqrt{10+\sqrt{60}-\sqrt{24}-\sqrt{40}} = \sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2}$ . (b)  $\sqrt{6+\sqrt{24}+\sqrt{12}+\sqrt{8}}-\sqrt{3} = \sqrt{2}+1$ .

**Bài toán 81** ([Bin23], 25., p. 15). Cho  $A = \sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}$ . Biểu diễn A dưới dạng tổng của 3 căn thức.

**Bài toán 82** ([Bin23], 26., p. 15). Rút gọn biểu thức  $A = \frac{x+3+2\sqrt{x^2-9}}{2x-6+\sqrt{x^2-9}}$ .

**Bài toán 83** ([Bin23], 27., p. 15). Rút gọn biểu thức  $B = \frac{x^2+5x+6+x\sqrt{9-x^2}}{3x-x^2+(x+2)\sqrt{9-x^2}}$ .

**Bài toán 84** ([Bin23], 28., p. 15). Rút gọn biểu thức:

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}},$$

$$B = \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{\sqrt{i}-\sqrt{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}} - \dots - \frac{1}{\sqrt{24}-\sqrt{25}}.$$



## 5 Rút Gọn Biểu Thức Có Chứa Căn Thức Bậc 2

**Bài toán 85** ([Tuy22], Thí dụ 5, p. 14). Cho  $A = \sqrt{11 + \sqrt{96}}$  &  $B = \frac{2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$ . Không dùng máy tính hoặc bảng số, so sánh  $A$  &  $B$ .

**Bài toán 86** ([Tuy22], Thí dụ 6, p. 15). Cho biểu thức  $A = \left( \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} - \frac{x-3}{\sqrt{x-1} - \sqrt{2}} \right) \left( \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{2x} - x} \right)$ .  
(a) Rút gọn  $A$ . (b) Tính giá trị của  $A$  với  $x = 3 - 2\sqrt{2}$ .

**Bài toán 87** ([Tuy22], 37., pp. 15–16). Không dùng máy tính hoặc bảng số, so sánh các số sau: (a)  $-3\sqrt{11}$  &  $-7\sqrt{2}$ . (b)  $\frac{7}{2}\sqrt{\frac{1}{12}}$  &  $\frac{9}{4}\sqrt{\frac{1}{5}}$ . (c)  $\sqrt{\frac{4}{27}}$  &  $\sqrt{\frac{3}{26}}$ .

**Bài toán 88** ([Tuy22], 38., p. 16). Không dùng máy tính hoặc bảng số, chứng minh  $4\sqrt{5} - 3\sqrt{2} < 5$ .

**Bài toán 89** ([Tuy22], 39., p. 16). Cho  $A = \sqrt{x^2 + 1} - x - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$  trong đó  $x \in \mathbb{R}$ . Xác định  $x \in \mathbb{R}$  để giá trị của  $A$  là 1 số tự nhiên.

**Bài toán 90** ([Tuy22], 40., p. 16). Trục căn thức ở mẫu của các biểu thức sau: (a)  $A = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{2c}}$  trong đó  $a, b, c > 0$  thỏa mãn điều kiện  $c$  là trung bình nhân của  $a$  &  $b$ . (b)  $B = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}}$  trong đó  $a, b, c, d > 0$  thỏa mãn điều kiện  $ab = cd$  &  $a + b \neq c + d$ .

**Bài toán 91** ([Tuy22], 41., p. 16). Tìm  $x, y \in \mathbb{N}$  sao cho  $x > y > 0$  thỏa mãn điều kiện  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{931}$ .

**Bài toán 92** ([Tuy22], 42., p. 16). Chứng minh:  $\frac{2\sqrt{mn}}{\sqrt{m} + \sqrt{n} + \sqrt{m+n}} = \sqrt{m} + \sqrt{n} - \sqrt{m+n}$ . Áp dụng tính  $\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}}$ .

**Bài toán 93** ([Tuy22], 43., p. 16). Chứng minh:  $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Áp dụng tính tổng:  $S = \sum_{i=1}^{399} \frac{1}{(i+1)\sqrt{i} + i\sqrt{i+1}} = \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{400\sqrt{399} + 399\sqrt{400}}$ .

**Bài toán 94** ([Tuy22], 44., p. 16). Tìm  $n \in \mathbb{N}$  nhỏ nhất sao cho  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 0.05$ .

**Bài toán 95** ([Tuy22], 45., p. 17). Cho  $A = \sum_{i=1}^{120} \frac{1}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{120} + \sqrt{121}}$ ,  $B = \sum_{i=1}^{35} \frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{35}}$ . Chứng minh  $A < B$ .

**Bài toán 96** ([Tuy22], 46., p. 17). Cho  $x, y, z > 0$  & khác nhau đôi một. Chứng minh giá trị của biểu thức

$$A = \frac{x}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{z})} + \frac{y}{(\sqrt{y} - \sqrt{z})(\sqrt{y} - \sqrt{x})} + \frac{z}{(\sqrt{z} - \sqrt{x})(\sqrt{z} - \sqrt{y})}$$

không phụ thuộc vào giá trị của các biến.

**Bài toán 97** ([Tuy22], 47., p. 17). Cho biểu thức  $A = \frac{1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{5}{x - \sqrt{x} - 6} - \frac{\sqrt{x} - 2}{3 - \sqrt{x}}$ . (a) Rút gọn  $A$ . (b) Tìm giá trị lớn nhất của  $A$ .

**Bài toán 98** ([Tuy22], 48., p. 17). Cho  $A = \left( \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left( 1 + \frac{x + y + 2xy}{1 - xy} \right)$ . (a) Rút gọn  $A$ . (b) Tính giá trị của  $P$  với  $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$ . (c) Tìm giá trị lớn nhất của  $A$ .

**Bài toán 99** ([Tuy22], 49., p. 17). Cho  $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy} + \sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 1} + \frac{2\sqrt{z}}{\sqrt{zx} + 2\sqrt{z} + 2}$ . Biết  $xyz = 4$ , tính  $\sqrt{P}$ .

**Bài toán 100** ([Bin23], Ví dụ 12, p. 15). Tính:  $A = \left( \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \right) : \left( \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} - \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \right)$ .

**Bài toán 101** ([Bin23], Ví dụ 13, p. 16). Rút gọn biểu thức  $A = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2} - \sqrt{3}}$ .

**Bài toán 102** ([Bin23], Ví dụ 14, p. 16). Cho  $A = \frac{\sqrt{a}+6}{\sqrt{a}+1}$ . (a) Tìm các số nguyên  $a$  để  $A$  là số nguyên. (b) Chứng minh với  $a = \frac{4}{9}$  thì  $A$  là số nguyên. (c) Tìm các số hữu tỷ  $a$  để  $A$  là số nguyên.

**Bài toán 103** ([Bin23], 29., p. 18). Rút gọn biểu thức: (a)  $A = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$ .  
(b)  $B = \left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right) \left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-a}\right)^2$ . (c)  $C = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}} : \left[\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \frac{1}{x+y+2\sqrt{xy}} + \frac{2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)\right]$  với  $x = 2 - \sqrt{3}$  &  $y = 2 + \sqrt{3}$ .

**Bài toán 104** ([Bin23], 30., p. 18). Rút gọn biểu thức  $A = \frac{1-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}$ .

**Bài toán 105** ([Bin23], 31., p. 18). Rút gọn biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2-y^2}} - \sqrt{x-\sqrt{x^2-y^2}}}{\sqrt{2(x-y)}}$  với  $x > y > 0$ .

**Bài toán 106** ([Bin23], 32., p. 18). Rút gọn biểu thức  $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$  với  $x = \frac{a^2+b^2}{2ab}$  &  $b > a > 0$ .

**Bài toán 107** ([Bin23], 33., p. 18). Rút gọn biểu thức  $B = \frac{2a\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$  với  $x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1-a}{a}} - \sqrt{\frac{a}{1-a}}\right)$  &  $0 < a < 1$ .

**Bài toán 108** ([Bin23], 34., p. 18). Rút gọn biểu thức  $A = a + b - \sqrt{\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{c^2+1}}$  với  $a, b, c > 0$  &  $ab + bc + ca = 1$ .

**Bài toán 109** ([Bin23], 35., p. 18). Rút gọn biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}} \cdot \sqrt{2x-1}$ .

**Bài toán 110** ([Bin23], 36., p. 18). Chứng minh hằng đẳng thức sau với  $x \geq 2$

$$\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{\frac{x^2-4}{x}}} + \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{\frac{x^2-4}{x}}} = \sqrt{\frac{2x+4}{\sqrt{x}}}.$$

**Bài toán 111** ([Bin23], 37., p. 18). Cho  $a = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$ ,  $b = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}$ . Tính  $a^7 + b^7$ .

**Bài toán 112** ([Bin23], 38., p. 19). Cho biết  $\sqrt{x^2-6x+13} - \sqrt{x^2-6x+10} = 1$ . Tính  $\sqrt{x^2-6x+13} + \sqrt{x^2-6x+10}$ .

**Bài toán 113** ([Bin23], 39., p. 19). Cho biểu thức  $A = \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-2}$ . (a) Tìm các số nguyên  $a$  để  $A$  là số nguyên. (b) Tìm các số hữu tỷ  $a$  để  $A$  là số nguyên.

**Bài toán 114** ([Bin23], 40., p. 19). Cho  $a = \sqrt{2} - 1$ . (a) Viết  $a^2, a^3$  dưới dạng  $\sqrt{m} - \sqrt{m-1}$  trong đó  $m$  là số tự nhiên. (b) Chứng minh với mọi số nguyên dương  $n$ , số  $a^n$  viết được dưới dạng trên.

## 6 Cube Root, nth Root – Căn Bậc 3, Căn Bậc $n$

**Bài toán 115** (Program to print out 1st  $n$  cube roots). Viết chương trình PASCAL, C/C++, PYTHON xuất ra căn bậc 3 của  $n$  số tự nhiên đầu tiên với  $n \in \mathbb{N}^*$  được nhập từ bàn phím.

**Bài toán 116.** Viết chương trình PASCAL, C/C++, PYTHON để kiểm tra 1 số  $n \in \mathbb{N}^*$  được nhập từ bàn phím có phải là lập phương của 1 số tự nhiên hay không.

**Bài toán 117** (Program to print out 1st  $n$  nth roots). Viết chương trình PASCAL, C/C++, PYTHON xuất ra căn bậc  $n$  của  $m$  số tự nhiên đầu tiên với  $m, n \in \mathbb{N}^*$  được nhập từ bàn phím.

**Bài toán 118.** Viết chương trình PASCAL, C/C++, PYTHON để kiểm tra 1 số  $m$  được nhập từ bàn phím có phải là lũy thừa bậc  $n$  của 1 số tự nhiên hay không với  $m, n \in \mathbb{N}^*$  được nhập từ bàn phím.

**Bài toán 119** (Mở rộng [Tuy22], Thí dụ 1, p. 5). Cho  $x \in \mathbb{R}$ . So sánh  $\sqrt[3]{x}$  với  $x$ .

*Giải.*  $\sqrt[3]{x}$  xác định  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Xét các trường hợp: (a)  $\sqrt[3]{x} = x \Leftrightarrow x = x^3 \Leftrightarrow x - x^3 = 0 \Leftrightarrow x(1-x^2) = 0 \Leftrightarrow x(1-x)(1+x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \pm 1\}$ . (b)  $\sqrt[3]{x} < x \Leftrightarrow x < x^3 \Leftrightarrow x - x^3 < 0 \Leftrightarrow x(1-x^2) < 0 \Leftrightarrow x(1-x)(1+x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$  hoặc  $x > 1$ , trong đó phép biến đổi tương đương cuối cùng thu được nhờ lập bảng xét dấu. (c)  $\sqrt[3]{x} > x \Leftrightarrow x > x^3 \Leftrightarrow x - x^3 > 0 \Leftrightarrow x(1-x^2) > 0 \Leftrightarrow x(1-x)(1+x) > 0 \Leftrightarrow x < -1$  hoặc  $0 < x < 1$ , trong đó phép biến đổi tương đương cuối cùng cũng thu được nhờ lập bảng xét dấu. Vậy:  $\sqrt[3]{x} = x \Leftrightarrow x \in \{0, \pm 1\}$ ,  $\sqrt[3]{x} < x \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$ ,  $\sqrt[3]{x} > x \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$ .  $\square$



**Bài toán 120** (Mở rộng [Tuy22], Thí dụ 1, p. 5). Cho  $x \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . So sánh  $\sqrt[n]{x}$  với  $x$ .

**Bài toán 121** ([Tuy22], Thí dụ 7, p. 19). Tính  $x = \sqrt[3]{17\sqrt{5} + 38} - \sqrt[3]{17\sqrt{5} - 38}$ .

**Bài toán 122** ([Tuy22], Thí dụ 8, p. 20). Giải & biện luận phương trình  $(x - a)^n = a^2 - 2a + 1$  với  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a$  là tham số.

**Bài toán 123** ([Tuy22], 50., p. 21). Tính: (a)  $\sqrt[3]{8\sqrt{5} - 16} \sqrt[3]{8\sqrt{5} + 16}$ . (b)  $\sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} + \sqrt[6]{8}$ . (c)  $\sqrt[3]{4} \sqrt[3]{1 - \sqrt{3}} \sqrt[6]{4 + 2\sqrt{3}}$ .

**Bài toán 124** ([Tuy22], 51., p. 21). (a) Tính  $\frac{2}{\sqrt[3]{3} - 1} - \frac{4}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1}$ . (b) Cho  $x = \frac{2}{2\sqrt[3]{2} + 2 + \sqrt[3]{4}}$ ,  $y = \frac{6}{2\sqrt[3]{2} - 2 + \sqrt[3]{4}}$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = \frac{xy}{x + y}$ .

**Bài toán 125** ([Tuy22], 52., p. 21). Cho  $x = \frac{\sqrt[3]{8 - 3\sqrt{5}} + \sqrt[3]{64 - 12\sqrt{20}}}{\sqrt[3]{57}} \sqrt[3]{8 + 3\sqrt{5}}$ ,  $y = \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt{2}}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{2}} + \frac{\sqrt{2} - 9\sqrt[3]{9}}{\sqrt[4]{2} - \sqrt[3]{81}}$ . Tính  $xy$ .

**Bài toán 126** ([Tuy22], 53., p. 22). Tính: (a)  $x = \sqrt[3]{5 + 2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5 - 2\sqrt{13}}$ . (b)  $x = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$ . (c)  $x = \sqrt[3]{182 + \sqrt{33125}} + \sqrt[3]{182 - \sqrt{33125}}$ .

**Bài toán 127** ([Tuy22], 54., p. 22). Cho  $A = \sqrt[3]{60 + \sqrt[3]{60 + \sqrt[3]{60 + \dots + \sqrt[3]{60}}}}$ . Chứng minh  $3 < A < 3$ . Tìm  $\lfloor A \rfloor$ .

**Bài toán 128** ([Tuy22], 55., p. 22). Cho  $A = \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \dots + \sqrt{20}}}}$ ,  $B = \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \dots + \sqrt[3]{24}}}}$ . Chứng minh  $7 < A + B < 8$ . Tìm  $\lfloor A + B \rfloor$ .

**Bài toán 129** ([Tuy22], 56., p. 22). So sánh  $a = \sqrt[3]{5\sqrt{2}}$  &  $b = \sqrt{5\sqrt[3]{2}}$ .

**Bài toán 130** ([Tuy22], 57., p. 22). Cho  $ax^3 = by^3 = cz^3$  &  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ . Chứng minh  $\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$ .

**Bài toán 131** ([Tuy22], 58., p. 22). Giải phương trình: (a)  $x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3}$ . (b)  $x^3 + 2x^2 - 4x = -\frac{8}{3}$ .

**Bài toán 132** ([Tuy22], 59., p. 22). Giải phương trình: (a)  $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{5x}$ . (b)  $2\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2} = \sqrt[3]{x^2 - 4}$ .

**Bài toán 133** ([Tuy22], 60., p. 22). Giải phương trình:  $\sqrt[3]{x-5} + \sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{3x+2} = -2$ .

**Bài toán 134** ([Tuy22], 61., p. 22). Giải phương trình:  $\sqrt[4]{(x-2)^2} + 4\sqrt[4]{x^2-4} = 5\sqrt[4]{(x+2)^2}$ .

**Bài toán 135** ([Tuy22], 62., p. 22). Cho  $A = (a+b)(b+c)(c+a)$  trong đó  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn điều kiện  $abc = 1$ . Chứng minh  $A + 1 \geq 3(a+b+c)$ .

**Bài toán 136** ([Bin23], Ví dụ 15, p. 20). Chứng tỏ số  $m = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$  là 1 nghiệm của phương trình  $x^3 + 3x - 4 = 0$ .

**Bài toán 137** ([Bin23], Ví dụ 16, p. 20). Tính giá trị của biểu thức  $A = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$ .

**Bài toán 138** ([Bin23], 41., p. 20). Tính: (a)  $\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 2}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$ . (b)  $\sqrt{3 + \sqrt{3} + \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}}$ . (c)  $\frac{4 + 2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}}$ .

**Bài toán 139** ([Bin23], 42., p. 21). Số  $m = \sqrt[3]{4 + \sqrt{80}} - \sqrt[3]{4 - \sqrt{80}}$  có phải là nghiệm của phương trình  $x^3 + 12x - 8 = 0$  không?

**Bài toán 140** ([Bin23], 43., p. 21). Lập 1 phương trình bậc 3 với các hệ số nguyên, trong đó: (a)  $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$  là 1 nghiệm của phương trình. (b)  $\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}$  là 1 nghiệm của phương trình.

**Bài toán 141** ([Bin23], 44., p. 21). Tính: (a)  $A = \sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10}$ . (b)  $B = \sqrt[3]{5 + 2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5 - 2\sqrt{13}}$ . (c)  $C = \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$ . (d)  $D = \sqrt[3]{2 + 10\sqrt{\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{2 - 10\sqrt{\frac{1}{27}}}$ . (e)  $E = \sqrt[3]{4 + \frac{5}{3}\sqrt{\frac{31}{3}}} + \sqrt[3]{4 - \frac{5}{3}\sqrt{\frac{31}{3}}}$ .

**Bài toán 142** ([Bin23], 45., p. 21). Tìm  $x$  biết: (a)  $\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{2-x} = 1$ . (b)  $2x^3 = (x-1)^3$ .

**Bài toán 143** ([Bin23], 46., p. 21). Cho  $am^3 = bn^3 = cp^3$  &  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1$ . Chứng minh:  $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{am^2 + bn^2 + cp^2}$ .

**Bài toán 144** ([Bin23], 47., p. 21). Tính: (a)  $\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}(\sqrt[6]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}})$ . (b)  $\sqrt[4]{17 + 12\sqrt{2}} - \sqrt{2}$ . (c)  $\sqrt[4]{56 - 24\sqrt{5}}$ . (d)  $1 + \sqrt[4]{28 - 16\sqrt{3}}$ . (e)  $\frac{2}{\sqrt{4 - 3\sqrt[4]{5} + 2\sqrt{5} - \sqrt[4]{125}}}$ .

## 7 Miscellaneous

**Bài toán 145** ([Tuy22], Thí dụ 15, pp. 29–30). Cho biểu thức  $A = \left( \frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left( \frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right)$ . (a) Rút gọn  $A$ . (b) Tính giá trị của  $A$  với  $x = 7 - 4\sqrt{3}$ . (c) Tìm giá trị lớn nhất của  $a$  để  $P > a$ .

**Bài toán 146** ([Tuy22], 80., p. 31). Chứng minh:  $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(a+b)^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} \right|$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ,  $ab(a+b) \neq 0$ . Áp dụng tính  $A = \sqrt{1 + 999^2 + \frac{999^2}{1000^2}} + \frac{999}{1000}$ .

**Bài toán 147** ([Tuy22], 81., p. 31). Rút gọn biểu thức  $A = (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$ .

**Bài toán 148** ([Tuy22], 82., p. 31). Không dùng máy tính hoặc bảng số, chứng minh:  $\sqrt{14} - \sqrt{13} < 2\sqrt{3} - \sqrt{11}$ .

**Bài toán 149** ([Tuy22], 83., p. 31). Giải phương trình:  $\frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 1$ .

**Bài toán 150** ([Tuy22], 84., p. 31). Tìm  $x, y, z$  biết  $x + y + z + 35 = 2(2\sqrt{x+1} + 3\sqrt{y+2} + 4\sqrt{z+3})$ .

**Bài toán 151** ([Tuy22], 85., p. 31). Cho  $a > 0$ ,  $b > 0$  &  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ . Chứng minh:  $\sqrt{a+b} = \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1}$ .

**Bài toán 152** ([Tuy22], 86., p. 31). Chứng minh:  $A = \sqrt{8 + 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{8 - 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = \sqrt{2} + \sqrt{10}$ .

**Bài toán 153** ([Tuy22], 87., p. 31). Chứng minh:

$$\frac{1}{4} < \frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}} < \frac{3}{10},$$

(ở tử có  $n$  dấu căn, ở mẫu có  $n-1$  dấu căn).

**Bài toán 154** ([Tuy22], 88., p. 31). Giải phương trình:  $\sqrt{x+2-3\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x-2+3\sqrt{2x-5}} = 2\sqrt{2}$ .

**Bài toán 155** ([Tuy22], 89., p. 31). Giải phương trình:  $\sqrt[3]{(65+x)^2} + 4\sqrt[3]{(65-x)^2} = 5\sqrt[3]{65^2 - x^2}$ .

**Bài toán 156** ([Tuy22], 90., p. 32). Giải phương trình ẩn  $x$ :  $\frac{(a-x)\sqrt[4]{x-b} + (x-b)\sqrt[4]{a-x}}{\sqrt[4]{a-x} + \sqrt[4]{x-b}} = \frac{a-b}{2}$  với  $a > b$ .

**Bài toán 157** ([Tuy22], 91., p. 32). Cho biểu thức  $A = \sum_{i=1}^{199} \frac{1}{\sqrt{i(200-i)}} = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 199}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 198}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{199 \cdot 1}}$ . Chứng minh  $A > 1.99$ .

**Bài toán 158** ([Tuy22], 92., p. 32). Cho  $n$  số dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Chứng minh:

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

**Bài toán 159** ([Tuy22], 93., p. 32). Cho các số thực dương  $a, b, c, d$  thỏa mãn điều kiện  $abcd = 1$ . Chứng minh:  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + a(b+c) + b(c+d) + c(d+a) + d(a+b) \geq 12$ .

**Bài toán 160** ([Tuy22], 94., p. 32). Giải phương trình:  $\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x^2+x+1}} = \frac{7}{4}$ .

**Bài toán 161** ([Tuy22], 95., p. 32). Giải phương trình:  $\sqrt{x+x^2} + \sqrt{x-x^2} = x+1$ .

**Bài toán 162** ([Tuy22], 96., p. 32). Cho  $A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$  với  $0 \leq x \leq 1$ . Rút gọn biểu thức  $B = 1 - \sqrt{A+x+1}$ .

**Bài toán 163** ([Tuy22], 97., p. 32). Cho biểu thức  $A = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$ . (a) Rút gọn  $A$ . (b) Tính giá trị của  $A$  với  $x = 14 - 6\sqrt{5}$ . (c) Tìm GTNN của  $A$ .

**Bài toán 164** ([BNS23], Ví dụ 1.1, p. 5). Rút gọn biểu thức  $A = \sqrt{(7+4\sqrt{3})(a-1)^2}$ .

**Bài toán 165** ([BNS23], Ví dụ 1.2, p. 6). Cho biểu thức  $A = \sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$ . (a) Tìm điều kiện xác định của  $A$ . (b) Rút gọn biểu thức  $A$  với  $1 \leq a < 2$ . (c) Rút gọn biểu thức  $A$  với  $a \geq 2$ .

**Bài toán 166** ([BNS23], Ví dụ 1.3, p. 6). Đơn giản biểu thức  $A = \left( \sqrt{8+2\sqrt{7}} + 2\sqrt{8-2\sqrt{7}} \right) (\sqrt{63} + 1)$ .

**Bài toán 167** ([BNS23], Ví dụ 1.4, p. 6). Tính tổng  $A = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}}$ .

**Bài toán 168** ([BNS23], Ví dụ 1.5, p. 6). Tính  $A = \frac{\sqrt{7-2\sqrt{10}}(7+2\sqrt{10})(74-22\sqrt{10})}{\sqrt{125-4\sqrt{50}+5\sqrt{20}+\sqrt{8}}}$ .

**Bài toán 169** ([BNS23], Ví dụ 1.6, p. 7). Cho  $a = \sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}} + \sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$ . Chứng minh:  $a^2 - 2a - 2 = 0$ .

**Bài toán 170** ([BNS23], Ví dụ 1.7, p. 7). Cho  $a = \sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ . Tính

$$A = \frac{a^4 - 4a^3 + a^2 + 6a + 4}{a^2 - 2a + 12}.$$

**Bài toán 171** ([BNS23], Ví dụ 1.8, p. 7). Cho  $f(x) = \frac{1+\sqrt{1+x}}{x+1} + \frac{1+\sqrt{1-x}}{x-1}$  &  $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Tính  $f(a)$ .

**Bài toán 172** ([BNS23], Ví dụ 1.9, p. 8). Giả thiết  $x, y, z > 0$  &  $xy + yz + zx = a$ . Chứng minh

$$x\sqrt{\frac{(a+y^2)(a+z^2)}{a+x^2}} + y\sqrt{\frac{(a+z^2)(a+x^2)}{a+y^2}} + z\sqrt{\frac{(a+x^2)(a+y^2)}{a+z^2}} = 2a.$$

**Bài toán 173** ([BNS23], 1.1, p. 8). Biểu diễn  $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$  thành  $a + b\sqrt{5}$  với  $a, b \in \mathbb{Q}$ .

**Bài toán 174** ([BNS23], 1.2, p. 8). Đơn giản biểu thức  $A = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{18} + \sqrt{28 - 16\sqrt{3}}$ .

**Bài toán 175** ([BNS23], 1.3, p. 8). Chứng minh  $\sqrt{10+2\sqrt{24}} - \sqrt{10-2\sqrt{24}} = 4$ .

**Bài toán 176** ([BNS23], 1.4, p. 8). Tính  $A = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ .

**Bài toán 177** ([BNS23], 1.5, p. 9). Tính tích  $ab$  với

$$a = \sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{3+\sqrt{7+\sqrt{2}}}, \quad b = \sqrt{3+\sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{2}}}}\sqrt{3-\sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{2}}}}.$$

**Bài toán 178** ([BNS23], 1.6, p. 9). Chứng minh  $\frac{4}{\sqrt{5}-1} + \frac{3}{\sqrt{5}-2} + \frac{16}{\sqrt{5}-3} = -5$ .

**Bài toán 179** ([BNS23], 1.7, p. 9). Chứng minh  $\left( \frac{2}{\sqrt{6}-1} + \frac{3}{\sqrt{6}-2} + \frac{3}{\sqrt{6}-3} \right) \frac{5}{9\sqrt{6}+4} = \frac{1}{2}$ .

**Bài toán 180** ([BNS23], 1.8, p. 9). Cho  $f(x) = \frac{x+\sqrt{5}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{5}}} + \frac{x-\sqrt{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{5}}}$ . Tính  $f(3)$ .

**Bài toán 181** ([BNS23], 1.9, p. 9). Cho  $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$  &  $a = \frac{4}{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}$ . Tính  $f(a)$ .

**Bài toán 182** ([BNS23], Ví dụ 2.1, p. 10). Chứng minh với  $ab \neq 0$ :  $\frac{\sqrt[3]{a^5b^7}}{\sqrt[3]{a^2b}} - \frac{\sqrt[3]{a^4b^8}}{\sqrt[3]{ab^2}} = 0$ .

**Bài toán 183** ([BNS23], Ví dụ 2.2, p. 10). Chứng minh với  $abc \neq 0$ :  $\frac{\sqrt[3]{a^4b^5c^7}}{\sqrt[3]{ab^2c}} = abc^2$ .

**Bài toán 184** ([BNS23], Ví dụ 2.3, p. 10). Với  $a \geq 2 + \sqrt{2}$  &

$$u = \sqrt[3]{\left(a + \frac{2}{a}\right)^3 - 3a^2 - \frac{12}{a^2} + 3\left(a + \frac{2}{a}\right) - 13}, \quad v = \sqrt{a^2 + \frac{4}{a^2} - 8\left(a + \frac{2}{a}\right) + 20}.$$

Chứng minh  $u - v = 3$ .

**Bài toán 185** ([BNS23], Ví dụ 2.4, p. 11). Đơn giản biểu thức  $A = \sqrt[3]{8(7+5\sqrt{2})} + \sqrt[3]{216(7-5\sqrt{2})} + 4\sqrt{2} - 7$ .

**Bài toán 186** ([BNS23], Ví dụ 2.5, p. 11). Chứng minh  $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1$ .

**Bài toán 187** ([BNS23], Ví dụ 2.6, p. 11). Chứng minh nếu  $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$  thì  $a^3 + 3a = 4$ .

**Bài toán 188** ([BNS23], Ví dụ 2.7, p. 11). Chứng minh:

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}}+3\sqrt[3]{2}\right)\sqrt{3}}}{3+\sqrt[6]{108}} = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}.$$

**Bài toán 189** ([BNS23], Ví dụ 2.8, p. 12). Chứng minh nếu  $\sqrt[3]{(a+1)^2} + \sqrt[3]{a^2-1} + \sqrt[3]{(a-1)^2} = 1$  thì  $\sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a-1} = 2$ .

**Bài toán 190** ([BNS23], Ví dụ 2.9, p. 12). Đơn giản biểu thức  $A = \frac{x+1}{2\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}+x+\frac{1}{x}}$  với  $x \notin \{-1, 0\}$ .

**Bài toán 191** ([BNS23], Ví dụ 2.10, p. 12). Cho  $a = \sqrt{2} + \sqrt{7 - \sqrt[3]{61+46\sqrt{5}}} + 1$ . (a) Chứng minh  $a^4 - 14a^2 + 9 = 0$ . (b) Giả sử  $f(x) = x^5 + 2x^4 - 14x^3 - 28x^2 + 9x + 19$ . Tính  $f(a)$ .

**Bài toán 192** ([BNS23], Ví dụ 2.11, p. 13). Cho  $a, b, c > 0$ . Giả sử  $m, n, p$  là những số nguyên dương lớn hơn 1 sao cho  $bc = \sqrt[p]{a}$ ,  $ca = \sqrt[p]{b}$ , &  $ab = \sqrt[p]{c}$ . Chứng minh trong 3 số  $a, b, c$  phải có ít nhất 1 số bằng 1.

**Bài toán 193** ([BNS23], Ví dụ 2.12, p. 13). Cho  $a = \frac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}$ . (a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận số  $a$  làm nghiệm. (b) Giả sử đa thức  $f(x) = 3x^6 - 4x^5 - 7x^4 + 6x^3 + 6x^2 + x - 53\sqrt{2}$ . Tính  $f(a)$ .

**Bài toán 194** ([BNS23], Ví dụ 2.13, p. 14). Cho  $a = \frac{7-4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}} - \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$ . (a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận số  $a$  làm nghiệm. (b) Giả sử đa thức  $f(x) = \frac{x^6+x^4+4x^2}{40(x^4+4x^2-144)}$ . Tính  $f(a)$ .

**Bài toán 195** ([BNS23], Ví dụ 2.14, p. 14). Cho  $a = \sqrt[3]{38+17\sqrt{5}} + \sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}$ . Giả sử ta có đa thức  $f(x) = (x^3+3x+1935)^{2012}$ . Tính  $f(a)$ .

**Bài toán 196** ([BNS23], 2.1., p. 14). Biểu diễn  $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$  thành  $a+b\sqrt{5}$  với  $a, b \in \mathbb{Q}$ .

**Bài toán 197** ([BNS23], 2.2., p. 14). Cho  $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} + \sqrt[3]{1-\sqrt{11}}$ . Chứng minh  $a^9 - 6a^6 + 282a^3 = 8$ .

**Bài toán 198** ([BNS23], 2.3., p. 15). Cho  $a = (\sqrt[3]{1+2\sqrt{6}} - \sqrt[6]{5+4\sqrt{6}})\sqrt[3]{2\sqrt{6}-1} + 1$ . (a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận  $a$  làm nghiệm. (b) Giả sử  $f(x) = \sum_{i=1}^{2012} ix^i + 2012$ . Tính  $f(a)$ .

**Bài toán 199** ([BNS23], 2.4., p. 15). Chứng minh:

$$\frac{a+2\sqrt{ab}+9b}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}-2\sqrt[4]{ab}} - 2\sqrt{b} = \left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right)^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0.$$

**Bài toán 200** ([BNS23], 2.5., p. 15). Chứng minh:

$$\left(\sqrt[3]{a^4} + b^2\sqrt[3]{a^2} + b^4\right) \frac{\sqrt[3]{a^8} - b^6 + b^4\sqrt[3]{a^2} - a^2b^2}{a^2b^2 + b^2 - a^2b^8 - b^4} = a^2b^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, ab \neq 0, a \neq b^3.$$

**Bài toán 201** ([BNS23], 2.6., p. 15). Cho  $a, b > 0$ . Đơn giản biểu thức

$$A = \frac{\sqrt{a^3+2a^2b} + \sqrt{a^4+2a^3b} - \sqrt{a^3} - a^2b}{\sqrt{(2a+b-\sqrt{a^2+2ab})\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[6]{a^5}+a\right)}}.$$

**Bài toán 202** ([BNS23], 2.7., p. 15). Giả sử  $u^3 \geq v^2$ ,  $u, v \in \mathbb{Q}^+$ . Xác định  $u, v$  để

$$\sqrt{\frac{u-8\sqrt[6]{u^3v^2}+4\sqrt[3]{v^2}}{\sqrt{u}-2\sqrt[3]{v}+2\sqrt[12]{u^3v^2}}} + 3\sqrt[3]{v} + \sqrt[6]{v} = 1.$$

**Bài toán 203.** Cho  $a, b, c, A, B \in \mathbb{Z}$ ,  $c \geq 0$  thỏa mãn đẳng thức  $(a+b\sqrt{c})^2 = A+B\sqrt{c}$ . (a) Tìm mối quan hệ của  $a, b, c, A, B$ . Biểu diễn  $(A, B)$  theo  $(a, b, c)$ . (b)\* Biểu diễn  $(a, b)$  theo  $(c, A, B)$ .

**Bài toán 204.** Cho  $a, b, c, A, B \in \mathbb{Z}$ ,  $c \geq 0$  thỏa mãn đẳng thức  $(a+b\sqrt{c})^3 = A+B\sqrt{c}$ . (a) Tìm mối quan hệ của  $a, b, c, A, B$ . Biểu diễn  $(A, B)$  theo  $(a, b, c)$ . (b)\* Biểu diễn  $(a, b)$  theo  $(c, A, B)$ .

**Bài toán 205.** Cho  $a, b, c, A, B \in \mathbb{Z}$ ,  $c \geq 0$  thỏa mãn đẳng thức  $(a+b\sqrt[3]{c})^3 = A+B\sqrt[3]{c}+C\sqrt[3]{c^2}$ . (a) Tìm mối quan hệ của  $a, b, c, A, B, C$ . Biểu diễn  $(A, B, C)$  theo  $(a, b, c)$ . (b)\* Biểu diễn  $(a, b)$  theo  $(c, A, B, C)$ .

## Tài liệu

- [Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.
- [BNS23] Vũ Hữu Bình, Phạm Thị Bạch Ngọc, and Nguyễn Tam Sơn. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 9. Tập 1: Đại Số*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 192.
- [Tuy22] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần thứ 17. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2022, p. 340.