

# Fraction – Phân Số

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 28 tháng 2 năm 2023

## Tóm tắt nội dung

[EN] This text is a collection of problems, from easy to advanced, about *fraction*. This text is also a supplementary material for my lecture note on Elementary Mathematics grade 6, which is stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 6/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_6/lecture)<sup>1</sup>. The latest version of this text has been stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 6/fraction](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_6/fraction)<sup>2</sup>.

[VI] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài tập chọn lọc từ cơ bản đến nâng cao về *phân số*. Tài liệu này là phần bài tập bổ sung cho tài liệu chính – bài giảng [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 6/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_6/lecture) của tác giả viết cho Toán Sơ Cấp lớp 6. Phiên bản mới nhất của tài liệu này được lưu trữ & có thể tải xuống ở link sau: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 6/fraction](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_6/fraction).

**Nội dung.** Phân số với tử & mẫu là số nguyên; các phép tính với phân số; số thập phân; các phép tính với số thập phân; tỷ số, tỷ số phần trăm, làm tròn số.

## Mục lục

1	Wikipedia/Fraction	2
2	Phân Số với Tử & Mẫu Là Số Nguyên	2
2.1	Khái niệm phân số	2
2.2	Phân số bằng nhau	2
2.3	Tính chất cơ bản của phân số	3
2.3.1	Tính chất cơ bản	3
2.3.2	Rút gọn về phân số tối giản	3
2.3.3	Quy đồng mẫu nhiều phân số	3
3	Phân Số. Tính chất Cơ Bản của Phân Số. Rút Gọn Phân Số	4
4	Quy Đồng Mẫu Số Nhiều Phân Số. So Sánh Phân Số. Hỗn Số Dương	7
5	1 Số Phương Pháp Đặc Biệt để So Sánh 2 Phân Số	8
6	$\pm$ Phân Số	8
7	$;$ : Phân Số	8
8	Tổng Các Phân Số Viết Theo Quy Luật	8
9	Số Thập Phân. Làm Tròn Số Thập Phân. Các Phép Tính với Số Thập Phân	8
10	Tìm Giá Trị Phân Số của 1 Số Cho Trước. Tìm 1 Số Biết Giá Trị 1 Phân Số của Nó	8
11	Tìm Tỷ Số & Tỷ Số % của 2 Đại Lượng	8
12	Toán về Công Việc Làm Đồng Thời	8
13	Miscellaneous	8
	Tài liệu	8

\*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam

e-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com); website: <https://nqbh.github.io>.

<sup>1</sup>URL: [https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary\\_mathematics/grade\\_6/NQBH\\_elementary\\_mathematics\\_grade\\_6.pdf](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_6/NQBH_elementary_mathematics_grade_6.pdf).

<sup>2</sup>URL: [https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary\\_mathematics/grade\\_6/fraction/NQBH\\_fraction.pdf](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_6/fraction/NQBH_fraction.pdf).

# 1 Wikipedia/Fraction

“A *fraction* (from Latin: *fractus*, “broken”) represents a part of a whole or, more generally, any number of equal parts. When spoken in everyday English, a fraction describes how many parts of a certain size there are, e.g., one-half  $\frac{1}{2}$ , eight-fifths  $\frac{8}{5}$ , three-quarters  $\frac{3}{4}$ . A *common*, *vulgar*, or *simple* fraction (e.g.,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{17}{3}$ ) consists of a *numerator*, displayed above a line (or before a slash like  $1/2$ ), & a nonzero *denominator*, displayed below (or after) that line. Numerators & denominators are also used in fractions that are not *common*, including compound fractions, complex fractions, & mixed numerals.

In positive common fractions, the numerator & denominator are **natural numbers**, i.e.,  $\frac{a}{b} > 0$ , with  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $b \neq 0$ . The numerator represents a number of equal parts, & the denominator indicates how many of those parts make up a unit or a whole. The denominator cannot be zero, because zero parts can never make up a whole. E.g., in the fraction  $\frac{3}{4}$ , the numerator 3 indicates that the fraction represents 3 equal parts, & the denominator 4 indicates that 4 parts make up a whole.

A common fraction is a numeral which represents a **rational number**  $r \in \mathbb{Q}$ . That same number can also be represented as a **decimal**, a percent, or with a negative **exponent**. E.g., 0.01, 1%, &  $10^{-2}$  are all equal to the fraction  $\frac{1}{100}$ . An **integer** can be thought of as having an implicit denominator of 1 (e.g.,  $7 = \frac{7}{1}$ ).

Other uses for fractions are to represent **ratios** & **division**. Thus the fraction  $\frac{3}{4}$  can also be used to represent the ratio 3:4 (the ratio of the part to the whole), & the division  $3 \div 4$  (3 divided by 4). The nonzero denominator rule, which applies when representing a division as a fraction, is an example of the rule that **division by zero** is undefined.

We can also write negative fractions, which represent the opposite of a positive fraction. E.g., if  $\frac{1}{2}$  represents a half-dollar profit, then  $-\frac{1}{2}$  represents a half-dollar loss. Because of the rules of division of signed numbers (which states in part that negative divided by positive is negative),  $-\frac{1}{2}$ ,  $\frac{-1}{2}$ , &  $\frac{1}{-2}$  all represent the same fraction – negative one-half. & because a negative divided by a negative produces a positive,  $\frac{-1}{-2}$  represents positive one-half.

In mathematics the set of all numbers that can be expressed in the form  $\frac{a}{b}$ , where  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ , is called the set of rational numbers & is represented by the symbol  $\mathbb{Q}$ , which stands for **quotient**. A number is a rational number precisely when it can be written in that form (i.e., as a common fraction). However, the word *fraction* can also be used to describe mathematical expressions that are not rational numbers. Examples of these usages include **algebraic fractions** (quotients of algebraic expressions), & expressions that contain **irrational numbers**, e.g.,  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (see **square root of 2**) &  $\frac{\pi}{4}$  (see **proof that  $\pi$  is irrational**).” – Wikipedia/fraction

## 2 Phân Số với Tử & Mẫu Là Số Nguyên

### 2.1 Khái niệm phân số

**Định nghĩa 1** (Phân số). *Kết quả của phép chia số nguyên  $a$  cho số nguyên  $b$  khác 0 có thể viết dưới dạng  $\frac{a}{b}$ , gọi là phân số. Ký hiệu:  $\frac{a}{b}$ , với  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ .*

Phân số  $\frac{a}{b}$  đọc là:  $a$  phần  $b$ ,  $a$  là **tử số** (còn gọi tắt là **tử**,  $b$  là **mẫu số** (còn gọi tắt là **mẫu**). Mọi số nguyên  $a \in \mathbb{Z}$  có thể viết ở dạng phân số là  $\frac{a}{1}$ , i.e.,  $a = \frac{a}{1}$ ,  $\forall a \in \mathbb{Z}$ .

**Bài toán 1** (Thái et al., 2022, Ví dụ 1, 1, p. 26). *Viết & đọc phân số trong mỗi trường hợp sau: (a) Tử là 11, mẫu là  $-3$ . (b) Tử là  $-7$ , mẫu là  $-5$ . (c) Tử là  $-6$ , mẫu là 17. (d) Tử là  $-12$ , mẫu là  $-37$ .*

*Giải.* (a) Viết:  $\frac{11}{-3}$ , đọc: mười một phần âm ba. (b) Viết:  $\frac{-7}{-5}$ , đọc: âm bảy phần âm năm. (c) Viết:  $\frac{-6}{17}$ , đọc: âm sáu phần mười bảy. (d) Viết:  $\frac{-12}{-37}$ , đọc: âm mười hai phần âm ba mươi bảy.  $\square$

**Bài toán 2** (Thái et al., 2022, 2, p. 26). *Cách viết nào sau đây cho ta phân số: (a)  $\frac{4}{-9}$ ; (b)  $\frac{0.25}{9}$ ; (c)  $\frac{-9}{0}$ ?*

*Giải.* (a)  $\frac{4}{-9}$  là phân số. (b)  $\frac{0.25}{9}$  không là phân số theo 1 vì  $0.25 \notin \mathbb{Z}$ . (c)  $\frac{-9}{0}$  không là phân số, thậm chí không có nghĩa (về mặt toán học) vì là phép chia cho 0.  $\square$

Mọi số nguyên  $a$  đều có thể viết ở dạng phân số là  $\frac{a}{1}$ , i.e.,  $a = \frac{a}{1}$ ,  $\forall a \in \mathbb{Z}$ .

**Bài toán 3** (Thái et al., 2022, Ví dụ 2, p. 26). *Viết mỗi số nguyên sau dưới dạng phân số: 19,  $-7$ , 0.*

*Giải.*  $19 = \frac{19}{1}$ ,  $-7 = \frac{-7}{1}$ ,  $0 = \frac{0}{1}$ .  $\square$

### 2.2 Phân số bằng nhau

**Định nghĩa 2** (2 phân số bằng nhau). *2 phân số được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng biểu diễn 1 giá trị.*

**Định lý 1.** *Xét 2 phân số  $\frac{a}{b}$  &  $\frac{c}{d}$ , với  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ,  $bd \neq 0$ . Nếu  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  thì  $ad = bc$ . Ngược lại, nếu  $ad = bc$  thì  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ .*

Với  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ , luôn có:  $\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$  &  $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$ .

**Bài toán 4** (Thái et al., 2022, Ví dụ 3, 3, p. 27). *Các cặp phân số sau có bằng nhau không? Vì sao? (a)  $\frac{3}{-7}$  &  $\frac{3}{7}$ ; (b)  $\frac{2}{5}$  &  $\frac{4}{10}$ ; (c)  $\frac{4}{8}$  &  $\frac{-1}{-2}$ ; (d)  $\frac{1}{-6}$  &  $\frac{-3}{18}$ .*

*Giải.* (a) Vì  $3 \cdot 7 = (-7) \cdot (-3) = 21$  nên  $\frac{3}{-7} = \frac{3}{7}$ . (b) Vì  $2 \cdot (-10) \neq 5 \cdot 4$  ( $-20 \neq 20$ ) nên  $\frac{2}{5} \neq \frac{4}{10}$  ne. (c) Vì  $4 \cdot (-2) = 8 \cdot (-1) = -8$  nên  $\frac{4}{8} = \frac{-1}{-2}$ . (d) Vì  $1 \cdot (-18) \neq (-6) \cdot (-3)$  ( $-18 \neq 18$ ) nên  $\frac{1}{-6} \neq \frac{-3}{18}$ .  $\square$

## 2.3 Tính chất cơ bản của phân số

### 2.3.1 Tính chất cơ bản

**Định lý 2.** Nếu ta nhân cả tử & mẫu của 1 phân số với cùng 1 số nguyên khác 0 thì ta được 1 phân số bằng phân số đã cho. Nếu ta chia cả tử & mẫu của 1 phân số cho cùng 1 ước chung của chúng thì ta được 1 phân số bằng phân số đã cho.

$\frac{a}{b} = \frac{am}{an}$ ,  $\forall a, b, m \in \mathbb{Z}, bm \neq 0$  (i.e.,  $b \neq 0$  &  $m \neq 0$ ).  $\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{Z}, \forall n \in \text{ƯC}(a, b)$ . Mỗi phân số đều đưa được về 1 phân số bằng nó & có mẫu là số dương.

**Bài toán 5** (Thái et al., 2022, Ví dụ 4, p. 28). Viết mỗi phân số sau thành phân số bằng nó & có mẫu là số dương: (a)  $\frac{3}{-5}$ ; (b)  $\frac{-2}{-9}$ .

*Giải.* Theo tính chất cơ bản của phân số: (a)  $\frac{3}{-5} = \frac{3 \cdot (-1)}{(-5) \cdot (-1)} = \frac{-3}{5}$ . (b)  $\frac{-2}{-9} = \frac{(-2) \cdot (-1)}{(-9) \cdot (-1)} = \frac{2}{9}$ . □

**Bài toán 6** (Thái et al., 2022, 4, p. 28). Viết phân số sau thành phân số bằng nó & có mẫu là số dương:  $\frac{a}{-b}$ ,  $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*$ .

*Giải.* Vì  $b \in \mathbb{N}^*$  nên  $b > 0$ . Theo tính chất cơ bản của phân số:  $\frac{a}{-b} = \frac{a \cdot (-1)}{(-b) \cdot (-1)} = \frac{-a}{b}$ . □

Nếu bỏ đi điều kiện  $b \in \mathbb{N}^*$  trong bài toán trên, ta được mở rộng sau:

**Bài toán 7** (Mở rộng Thái et al., 2022, 4, p. 28). Viết phân số sau thành phân số bằng nó & có mẫu là số dương:  $\frac{a}{-b}$ ,  $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

*Giải.* Nếu  $b < 0$ , phân số  $\frac{a}{-b}$  đã có mẫu số dương  $-b > 0$  nên không cần làm gì thêm. Nếu  $b > 0$ , theo bài toán trên:  $\frac{a}{-b} = \frac{a \cdot (-1)}{(-b) \cdot (-1)} = \frac{-a}{b}$ . Có thể viết gom 2 trường hợp này lại thành<sup>3</sup>:  $\frac{a}{-b} = \frac{a \cdot \text{sign } b}{|b|}$  với  $\text{sign } b$  là hàm dấu<sup>4</sup> của  $b$ . □

### 2.3.2 Rút gọn về phân số tối giản

**Định nghĩa 3** (Phân số tối giản). Phân số tối giản là phân số mà tử & mẫu chỉ có ước chung là  $\pm 1$ .

$\frac{a}{b}$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$  là phân số tối giản  $\Leftrightarrow \text{ƯC}(a, b) = \{\pm 1\} \Leftrightarrow \text{ƯCLN}(a, b) = 1$ .

Dựa vào tính chất cơ bản của phân số, để rút gọn phân số với tử & mẫu là số nguyên về phân số tối giản ta thường làm như sau: *Bước 1*: Tìm ƯCLN của tử & mẫu sau khi đã bỏ đi dấu “-” (nếu có). *Bước 2*: Chia cả tử & mẫu cho ƯCLN vừa tìm được, ta có phân số tối giản cần tìm.

$$\frac{a}{b} = \frac{a : \text{ƯCLN}(a, b)}{b : \text{ƯCLN}(a, b)} = \frac{a : \text{ƯCLN}(a, b) \cdot \text{sign } b}{|b| : \text{ƯCLN}(a, b)}, \forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0.$$

**Bài toán 8** (Thái et al., 2022, Ví dụ 5, p. 28). Rút gọn mỗi phân số sau về phân số tối giản: (a)  $\frac{12}{-15}$ ; (b)  $\frac{-24}{36}$ .

*Giải.* (a)  $\text{ƯCLN}(12, 15) = 3$ ,  $\frac{12}{-15} = \frac{12:3}{-15:3} = \frac{4}{-5}$ . (b)  $\text{ƯCLN}(24, 36) = 12$ ,  $\frac{-24}{36} = \frac{-24:12}{36:12} = \frac{-2}{3}$ . □

**Bài toán 9** (Thái et al., 2022, Ví dụ 6, p. 29). (a) Rút gọn phân số  $\frac{-2}{6}$  về phân số tối giản. (b) Viết tất cả các phân số bằng phân số  $\frac{-2}{6}$  mà mẫu là số tự nhiên có 1 chữ số.

*Giải.* (a)  $\text{ƯCLN}(2, 6) = 2$ ,  $\frac{-2}{6} = \frac{-2}{6} = \frac{2:2}{6:2} = \frac{1}{3}$ . (b)  $\frac{-2}{6} = \frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$ ,  $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{3}{9}$ . Vậy phân số  $\frac{-2}{6}$  bằng các phân số có mẫu là số tự nhiên có 1 chữ số:  $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}$ . □

### 2.3.3 Quy đồng mẫu nhiều phân số

Dựa vào tính chất cơ bản của phân số ta có thể quy đồng mẫu nhiều phân số có tử & mẫu là số nguyên. Để quy đồng mẫu nhiều phân số, ta thường làm như sau: *Bước 1*: Viết các phân số đã cho về phân số có mẫu dương. Tìm BCNN của các mẫu dương đó để làm mẫu chung. *Bước 2*: Tìm thừa số phụ của mỗi mẫu (bằng cách chia mẫu chung cho từng mẫu). *Bước 3*: Nhân tử & mẫu của mỗi phân số ở *Bước 1* với thừa số phụ tương ứng.

**Bài toán 10** (Thái et al., 2022, Ví dụ 7, p. 29). Quy đồng mẫu những phân số sau: (a)  $\frac{-1}{2}, \frac{3}{-5}$ ; (b)  $\frac{3}{-20}, \frac{-7}{20}, \frac{-11}{-30}$ .

*Giải.* (a)  $\frac{3}{-5} = \frac{-3}{5}$ ,  $\text{BCNN}(2, 5) = 10$ ,  $10 : 2 = 5$ ,  $10 : 5 = 2$ . Vậy  $\frac{-1}{2} = \frac{-1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{-5}{10}$ ,  $\frac{3}{-5} = \frac{-3}{5} = \frac{(-3) \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{-6}{10}$ . (b)  $\frac{3}{-20} = \frac{-3}{20}$ ,  $\frac{-11}{-30} = \frac{11}{30}$ ,  $\text{BCNN}(20, 15, 30) = 60$ ,  $60 : 20 = 3$ ,  $60 : 15 = 4$ ,  $60 : 30 = 2$ . Vậy  $\frac{-3}{20} = \frac{-3 \cdot 3}{20 \cdot 3} = \frac{-9}{60}$ ,  $\frac{-7}{15} = \frac{-7 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{-28}{60}$ ,  $\frac{-11}{-30} = \frac{11}{30} = \frac{11 \cdot 2}{30 \cdot 2} = \frac{22}{60}$ . □

<sup>3</sup>Suy ra trực tiếp từ đẳng thức:  $|x| = x \cdot \text{sign } x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Giá trị tuyệt đối của 1 số thực bằng số đó nhân với hàm dấu của nó.

<sup>4</sup>Hàm dấu của 1 số thực  $x \in \mathbb{R}$  được xác định như sau:

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1, & \text{nếu } x > 0, \\ 0, & \text{nếu } x = 0, \\ -1, & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

**Bài toán 11** (Thái et al., 2022, 5, p. 30). Quy đồng mẫu những phân số sau:  $\frac{-3}{8}, \frac{2}{-3}, \frac{3}{72}$ .

**Tóm tắt kiến thức.** “Phân số có dạng  $\frac{a}{b}$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ , có thể hiểu là phép chia số nguyên  $a$  cho số nguyên  $b$  khác 0. Nếu  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  thì  $ad = bc$ . Ngược lại, nếu  $ad = bc$  thì  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ,  $bd \neq 0$ . Có  $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$ ,  $\forall a, b, m \in \mathbb{Z}$ ,  $bm \neq 0$ ;  $\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $\forall n \in \text{ƯC}(a, b)$ . *Phân số tối giản* là phân số mà tử & mẫu chỉ có ước chung là  $\pm 1$ .” – Thái, 2022, Chap. V, §1, p. 29

**Bài toán 12** (Thái et al., 2022, 1., p. 30). Viết & đọc phân số trong mỗi trường hợp sau: (a) Tử số là  $-43$ , mẫu số là  $19$ ; (b) Tử số là  $-123$ , mẫu số là  $-63$ .

**Bài toán 13** (Thái et al., 2022, 2., p. 30). Các cặp phân số sau có bằng nhau không? Vì sao? (a)  $\frac{-2}{9}, \frac{6}{-27}$ ; (b)  $\frac{-1}{-5}, \frac{4}{25}$ .

**Bài toán 14** (Thái et al., 2022, 3., p. 30). Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  biết: (a)  $\frac{-28}{35} = \frac{16}{x}$ ; (b)  $\frac{x+7}{15} = \frac{-24}{36}$ .

**Bài toán 15** (Thái et al., 2022, 4., p. 30). Rút gọn mỗi phân số sau về phân số tối giản:  $\frac{14}{21}, \frac{-36}{48}, \frac{28}{-52}, \frac{-54}{-90}$ .

**Bài toán 16** (Thái et al., 2022, 5., p. 30). (a) Rút gọn phân số  $\frac{-21}{39}$  về phân số tối giản. (b) Viết tất cả các phân số bằng  $\frac{-21}{39}$  mà mẫu là số tự nhiên có 2 chữ số.

**Bài toán 17** (Thái et al., 2022, 6., p. 30). Quy đồng mẫu những phân số sau: (a)  $\frac{-5}{14}, \frac{1}{-21}$ ; (b)  $\frac{17}{60}, \frac{-5}{18}, \frac{-64}{90}$ .

**Bài toán 18** (Thái et al., 2022, 7., p. 30). Trong các phân số sau, tìm phân số không bằng phân số nào trong các phân số còn lại:  $\frac{6}{25}, \frac{-4}{50}, \frac{-27}{54}, \frac{-18}{-75}, \frac{28}{-56}$ .

**Bài toán 19** (Thái, 2022, Ví dụ 1, p. 29). Viết tất cả các phân số  $\frac{a}{b}$  biết  $a, b$  được chọn trong các số:  $-3, 0, 5$ . Có tất cả bao nhiêu phân số?

*Giải.* Vì  $b \neq 0$  nên có 2 trường hợp: (1)  $b = -3$ , có 3 phân số:  $\frac{-3}{-3}, \frac{0}{-3}, \frac{5}{-3}$ . (2)  $b = 5$ , có 3 phân số:  $\frac{-3}{5}, \frac{0}{5}, \frac{5}{5}$ . Viết được tất cả 6 phân số.  $\square$

**Bài toán 20** (Mở rộng Thái, 2022, Ví dụ 1, p. 29). Viết tất cả các phân số  $\frac{a}{b}$  biết  $a, b$  được chọn trong các số:  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , với  $n \in \mathbb{N}^*$ , phân biệt cho trước. Có tất cả bao nhiêu phân số?

*Giải.* Xét 2 trường hợp sau: (1) Nếu trong  $n$  số  $a_i$  đã cho có 1 số bằng 0 (lúc nào cũng chỉ có tối đa 1 số bằng 0 vì các số này phân biệt), i.e., có 1 chỉ số  $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$  sao cho  $a_{i_0} = 0$  &  $a_i \neq 0$ ,  $\forall i \neq i_0$ . Khi đó, có thể viết được các phân số  $\frac{a}{b} = \frac{a_i}{a_j}$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $j \neq i_0$ . Có tất cả  $n(n-1)$  phân số trong trường hợp này. (2) Nếu tất cả các số  $a_i$  đã cho đều khác 0, i.e.,  $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$  thì có thể viết được các phân số  $\frac{a}{b} = \frac{a_i}{a_j}$ ,  $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$ . Có tất cả  $n \cdot n = n^2$  phân số trong trường hợp này.  $\square$

**Bài toán 21** (Thái, 2022, Ví dụ 2, p. 29). 1 trường học có số học sinh giỏi chiếm  $\frac{12}{35}$  số học sinh toàn trường, số học sinh khá chiếm  $\frac{13}{25}$  số học sinh toàn trường. Số học sinh giỏi & số học sinh khá của trường đó có bằng nhau không? Vì sao?

*Giải.*  $12 \cdot 25 \neq 35 \cdot 13 \Rightarrow \frac{12}{35} \neq \frac{13}{25}$ , nên số học sinh giỏi & số học sinh khá của trường đó không bằng nhau.  $\square$

**Lưu ý 1.** Có thể thay  $\frac{12}{35}, \frac{13}{25}$  trong bài toán trên bằng 2 phân số  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ,  $bd \neq 0$ . Theo tính chất của 2 phân số bằng nhau: Nếu  $ad = bc$  thì số học sinh giỏi & số học sinh khá của trường đó bằng nhau. Ngược lại, nếu  $ad \neq bc$  thì số học sinh giỏi & số học sinh khá của trường đó không bằng nhau.

**Bài toán 22** (Thái, 2022, Ví dụ 3, p. 30). Rút gọn về phân số tối giản: (a)  $\frac{3510-135}{4680-180}$ . (b)  $\frac{2^4 \cdot 3^2}{6^2 \cdot 5}$ . (c)  $\frac{11 \cdot 2^n}{6^m}$  với  $m, n \in \mathbb{N}$ .

*Giải.* (a)  $\frac{3510-135}{4680-180} = \frac{3 \cdot 45 \cdot (26-1)}{4 \cdot 45 \cdot (26-1)} = \frac{3}{4}$ . (b)  $\frac{2^4 \cdot 3^2}{6^2 \cdot 5} = \frac{2^4 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = \frac{2^2}{5} = \frac{4}{5}$ . (c) Nếu  $m > n$ ,  $\frac{11 \cdot 2^n}{6^m} = \frac{11 \cdot 2^n}{2^m \cdot 3^m} = \frac{11}{2^{m-n} \cdot 3^n}$ . Nếu  $m = n$ ,  $\frac{11 \cdot 2^n}{6^m} = \frac{11 \cdot 2^n}{2^m \cdot 3^m} = \frac{11}{3^n}$ . (c) Nếu  $m < n$ ,  $\frac{11 \cdot 2^n}{6^m} = \frac{11 \cdot 2^n}{2^m \cdot 3^m} = \frac{11 \cdot 2^{n-m}}{3^n}$ .  $\square$

**Bài toán 23** (Thái, 2022, 3., p. 30). Trong các cách viết sau, cách viết nào cho ta phân số? (a)  $-\frac{9.4}{11.5}$ . (b)  $\frac{-8}{0}$ . (c)  $\frac{7}{1}$ . (d)  $\frac{n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Bài toán 24** (Thái, 2022, 4., p. 31). Trong các cặp phân số sau, cặp phân số nào bằng nhau? Vì sao?  $\frac{3}{7}$  &  $\frac{6}{-14}$ ,  $\frac{12}{-4}$  &  $\frac{-9}{3}$ ,  $\frac{-13}{9}$  &  $\frac{13}{-9}$ ,  $-5$  &  $\frac{-10}{2}$ ,  $\frac{2x}{6}$  &  $\frac{x}{3}$ ,  $x \in \mathbb{Z}$ .

### 3 Phân Số. Tính chất Cơ Bản của Phân Số. Rút Gọn Phân Số

“**1.** Ta gọi  $\frac{a}{b}$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$  là 1 phân số,  $a$  là tử,  $b$  là mẫu của phân số. Ta có thể viết thương của phép chia  $a \in \mathbb{Z}$  cho  $b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$  dưới dạng  $\frac{a}{b}$  & cũng gọi  $\frac{a}{b}$  là phân số.  $a \in \mathbb{Z}$  có thể viết dưới dạng phân số  $\frac{a}{1}$ . **2.** 2 phân số bằng nhau. Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ ,  $d \neq 0$ . Nếu  $ad = bc$  thì  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , ngược lại nếu  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  thì  $ad = bc$ . **3.** 2 tính chất cơ bản của phân số:  $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$ ,  $\forall a, b, m \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ ,  $m \neq 0$ .  $\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}$ ,  $\forall a, b, n \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ ,  $n \in \text{ƯC}(a, b)$ . **4.** Rút gọn phân số: Muốn rút gọn 1 phân số, ta chia cả tử & mẫu của phân số đó cho 1 ước chung khác  $\pm 1$  của chúng. Phân số tối giản là phân số mà tử & mẫu chỉ có ước chung là  $\pm 1$ , i.e.,  $\frac{a}{b}$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ ,  $\text{ƯCLN}(a, b) = 1$ . **5.** Nếu đổi dấu cả tử & mẫu của 1 phân số thì được 1 phân số mới bằng phân số đã cho.

$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$ ,  $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ . **6.** Nếu  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản thì mọi phân số bằng nó đều có dạng  $\frac{am}{bm}$  với  $m \in \mathbb{Z} \text{ \& } m \neq 0$ .”

– Tuyên, **2022**, Chap. 3, §1, p. 45

“Số có dạng  $\frac{a}{b}$  trong đó  $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$  được gọi là *phân số*. Số nguyên  $n \in \mathbb{Z}$  được đồng nhất với phân số  $\frac{n}{1}$ . Tính chất cơ bản của phân số:  $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{a:n}{b:n}$  với  $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0, n \in \text{ƯC}(a, b)$ . Nếu  $\text{ƯCLN}(|a|, |b|) = 1$  thì  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Nếu  $\frac{m}{n}$  là dạng tối giản của phân số  $\frac{a}{b}$  thì tồn tại số nguyên  $k \in \mathbb{Z}$  sao cho  $a = mk, b = nk$ .” – Bình, **2022**, Chap. III, §1, p. 4

**Bài toán 25** (Tuyên, **2022**, Ví dụ 49, p. 45). Cho  $A = \{-5, 0, 9\}$ . Viết tất cả các phân số  $\frac{a}{b}$  với  $a, b \in A$ . Có bao nhiêu phân số thỏa mãn?

*Giải.* Số 0 không thể lấy làm mẫu của phân số. Lấy  $-5$  làm mẫu:  $\frac{-5}{-5}, \frac{0}{-5}, \frac{9}{-5}$ . Lấy 9 làm mẫu:  $\frac{-5}{9}, \frac{0}{9}, \frac{9}{9}$ . Có 6 phân số thỏa mãn.  $\square$

**Bài toán 26** (Mở rộng Tuyên, **2022**, Ví dụ 49, p. 45). Cho  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{Z}$ . Viết tất cả các phân số  $\frac{a}{b}$  với  $a, b \in A$ . Có bao nhiêu phân số thỏa mãn?

*Giải.* Xét 2 trường hợp: (a) Nếu  $0 \notin A$ , i.e.,  $a_i \neq 0, \forall i = 1, \dots, n$ . Tất cả các phân số  $\frac{a}{b}$  với  $a, b \in A: \frac{a_i}{a_j}, \forall i, j = 1, \dots, n$ , có tổng cộng  $n^2$  phân số thỏa mãn. (b) Nếu  $0 \in A$ , i.e., tồn tại chỉ số  $k \in \{1, \dots, n\}$  sao cho  $a_k = 0$ , ngoài ra  $a_i \neq 0, \forall i = 1, \dots, n, i \neq k$  (vì  $A$  là 1 tập hợp nên không có các phần tử trùng nhau). Tất cả các phân số  $\frac{a}{b}$  với  $a, b \in A: \frac{a_i}{a_j}, \forall i, j = 1, \dots, n, j \neq k$  có tổng cộng  $n(n-1) = n^2 - n$  phân số thỏa mãn.  $\square$

**Nhận xét 1.** “Mẫu của 1 phân số phải khác 0 nhưng tử của phân số có thể bằng 0, khi đó giá trị của phân số đúng bằng 0, i.e.,  $\frac{0}{b} = 0, \forall b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ . Tử & mẫu của 1 phân số có thể bằng nhau, khi đó giá trị của phân số đúng bằng 1, i.e.,  $\frac{a}{a} = 1, \forall a \in \mathbb{Z}, a \neq 0$ .” – Tuyên, **2022**, p. 46

**Bài toán 27** (Tuyên, **2022**, Ví dụ 50, p. 46). Viết tập hợp  $B$  các phân số bằng phân số  $\frac{7}{-15}$  với mẫu dương có 2 chữ số.

*Giải.*  $\frac{7}{-15} = \frac{-7}{15}$ . Phân số này là 1 phân số tối giản với mẫu dương. Mọi phân số bằng nó đều có dạng  $\frac{-7m}{15m}$  với  $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$ . Mẫu số của các phân số cần phải tìm là 1 số có 2 chữ số nên chọn  $m \in \mathbb{Z}$  sao cho  $10 \leq 15m \leq 99$ , suy ra<sup>5</sup>  $1 \leq m \leq 6$ , i.e.,  $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Vậy  $B = \{\frac{-7}{15}, \frac{-14}{30}, \frac{-21}{45}, \frac{-28}{60}, \frac{-35}{75}, \frac{-42}{90}\}$ .  $\square$

**Bài toán 28** (Mở rộng Tuyên, **2022**, Ví dụ 50, p. 46). Cho trước  $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, \exists n \in \mathbb{N}^*$ . Viết tập hợp  $B$  các phân số bằng phân số  $\frac{a}{b}$  với mẫu dương có  $n$  chữ số.

**Bài toán 29** (Tuyên, **2022**, Ví dụ 51, p. 46). Tìm phân số bằng phân số  $\frac{32}{60}$ , biết tổng của tử & mẫu là 115.

*Giải.* Có  $\frac{32}{60} = \frac{8}{15} = \frac{8m}{15m}, \forall m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$ . Tổng của tử & mẫu là 115  $\Rightarrow 8m + 15m = 115 \Rightarrow 23m = 115 \Rightarrow m = \frac{115}{23} = 5$ . Phân số cần tìm:  $\frac{8 \cdot 5}{15 \cdot 5} = \frac{40}{75}$ .  $\square$

**Nhận xét 2.** “Nếu không rút gọn phân số  $\frac{32}{60}$  thành phân số tối giản  $\frac{8}{15}$  mà khẳng định các phân số bằng phân số  $\frac{32}{60}$  có dạng  $\frac{32m}{60m}$  thì sẽ mắc sai lầm là bỏ sót rất nhiều phân số bằng phân số  $\frac{32}{60}$  do đó không thể tìm được đáp số của bài toán trên.” – Tuyên, **2022**, p. 46

**Bài toán 30** (Mở rộng Tuyên, **2022**, Ví dụ 51, p. 46). Cho trước  $a, b, n \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ . Tìm phân số bằng phân số  $\frac{a}{b}$ , biết tổng của tử & mẫu là  $n$ .

**Bài toán 31** (Tuyên, **2022**, 236., p. 47). Trong các phân số sau, những phân số nào bằng nhau?  $\frac{15}{60}, \frac{-7}{5}, \frac{6}{15}, \frac{28}{-20}, \frac{3}{12}$ .

**Bài toán 32** (Tuyên, **2022**, 237., p. 47). Cho  $A = \frac{3n-5}{n+4}$ . Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để  $A \in \mathbb{Z}$ .

**Bài toán 33** (Tuyên, **2022**, 238., p. 47). Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để cho các phân số sau đồng thời có giá trị nguyên:  $\frac{-12}{n}, \frac{15}{n-2}, \frac{8}{n+1}$ .

**Bài toán 34** (Tuyên, **2022**, 239., p. 47). Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  biết: (a)  $\frac{x-1}{9} = \frac{8}{3}$ ; (b)  $\frac{-x}{4} = \frac{-9}{x}$ ; (c)  $\frac{x}{4} = \frac{18}{x+1}$ .

**Bài toán 35** (Tuyên, **2022**, 240., p. 47). Tìm  $x, y \in \mathbb{Z}$  thỏa  $\frac{x-4}{y-3} = \frac{4}{3}$  &  $x - y = 5$ .

**Bài toán 36** (Tuyên, **2022**, 241., p. 47). Viết dạng tổng quát các phân số bằng phân số  $\frac{-12}{30}$ .

**Bài toán 37** (Tuyên, **2022**, 242., p. 47). Rút gọn phân số: (a)  $\frac{990}{2610}$ ; (b)  $\frac{374}{506}$ ; (c)  $\frac{3600-75}{8400-175}$ ; (d)  $\frac{9^{14} \cdot 25^5 \cdot 8^7}{18^{12} \cdot 625^3 \cdot 24^3}$ .

**Bài toán 38** (Tuyên, **2022**, 243., p. 47). Cho phân số  $\frac{a}{b}$ . Chứng minh: Nếu  $\frac{a-x}{b-y} = \frac{a}{b}$  thì  $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ .

**Bài toán 39** (Tuyên, **2022**, 244., p. 47). Cho phân số  $A = \frac{1+3+5+\dots+19}{21+23+25+\dots+39}$ . (a) Rút gọn  $A$ ; (b) Xóa 1 số hạng ở tử & xóa 1 số hạng ở mẫu để được 1 phân số mới vẫn bằng  $A$ .

**Bài toán 40** (Tuyên, **2022**, 245., p. 47). Rút gọn phân số  $A = \frac{71 \cdot 52 + 53}{530 \cdot 71 - 180}$  mà không cần thực hiện các phép tính ở tử.

<sup>5</sup> $m \in \mathbb{Z} \wedge (10 \leq 15m \leq 99) \Leftrightarrow \lfloor \frac{15}{10} \rfloor = 1 \leq m \leq \lfloor \frac{99}{15} \rfloor = 6$ .



**Bài toán 41** (Tuyên, 2022, 246., p. 47). 2 phân số sau có bằng nhau không?  $\frac{\overline{abab}}{\overline{cdcd}}, \frac{\overline{ababab}}{\overline{cdcdcd}}$ .

**Bài toán 42** (Tuyên, 2022, 247., p. 47). Chứng minh: (a)  $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 39}{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdots 40} = \frac{1}{2^{20}}$ ; (b)  $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(n+1)(n+2)(n+3) \cdots 2n} = \frac{1}{2^n}$  với  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Bài toán 43** (Tuyên, 2022, 248., p. 47). Tìm phân số  $\frac{a}{b}$  bằng phân số  $\frac{60}{108}$  biết: (a)  $\text{ƯCLN}(a, b) = 15$ ; (b)  $\text{BCNN}(a, b) = 180$ .

**Bài toán 44** (Tuyên, 2022, 249., p. 48). Tìm phân số bằng phân số  $\frac{200}{520}$  sao cho: (a) Tổng của tử & mẫu là 306; (b) Hiệu của tử & mẫu là 184; (c) Tích của tử & mẫu là 2340.

**Bài toán 45** (Tuyên, 2022, 250., p. 48). Chứng minh:  $\forall n \in \mathbb{Z}$ , các phân số sau là các phân số tối giản: (a)  $\frac{3n-2}{4n-3}$ ; (b)  $\frac{4n+1}{6n+1}$ .

**Bài toán 46** (Tuyên, 2022, 251., p. 48). Cho  $\frac{a}{b}$  là 1 phân số chưa tối giản. Chứng minh các phân số sau chưa tối giản: (a)  $\frac{a}{a-b}$ ; (b)  $\frac{2a}{a-2b}$ .

**Bài toán 47** (Tuyên, 2022, 252., p. 48). 1 mẫu Bắc Bộ bằng 3600m<sup>2</sup>. Hỏi 1 mẫu Bắc Bộ bằng mấy phần của 1 hecta?

**Bài toán 48** (Bình, 2022, Ví dụ 1, p. 4). Tìm  $n \in \mathbb{N}$  để phân số  $A = \frac{n+10}{2n-8} \in \mathbb{Z}$  (i.e., có giá trị là 1 số nguyên).

*Giải.* Để phân số  $A$  có giá trị là 1 số nguyên, tử phải chia hết cho mẫu:  $n+10 : 2n-8 \Rightarrow n+10 : n-4 \Rightarrow n-4+14 : n-4 \Rightarrow 14 : n-4 \Rightarrow n-4 \in \text{Ư}(14) \cap \mathbb{Z} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14\}$ . Vì  $n-4 \geq -4$  (vì  $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$ ) nên  $n-4 \in \{\pm 1, \pm 2, 7, 14\}$ . Nếu  $n-4 = 1$ ,  $n = 5$ ,  $A = \frac{15}{2}$  (loại). Nếu  $n-4 = -1$ ,  $n = 3$ ,  $A = \frac{13}{-2}$  (loại). Nếu  $n-4 = 2$ ,  $n = 6$ ,  $A = \frac{16}{4} = 4$ . Nếu  $n-4 = -2$ ,  $n = 2$ ,  $A = \frac{12}{-4} = -3$ . Nếu  $n-4 = 7$ ,  $n = 11$ ,  $A = \frac{21}{14} = \frac{3}{2}$  (loại). Nếu  $n-4 = 14$ ,  $n = 18$ ,  $A = \frac{28}{18} = 1$ . Vậy  $n \in \{2, 6, 18\}$ .  $\square$

**Bài toán 49** (Mở rộng Bình, 2022, Ví dụ 1, p. 4). Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ,  $c^2 + d^2 \neq 0$ . Tìm  $n \in \mathbb{N}$  để phân số  $A = \frac{an+b}{cn+d} \in \mathbb{Z}$ .

**Bài toán 50** (Bình, 2022, Ví dụ 2, p. 5). Tìm  $n \in \mathbb{N}$  để phân số  $A = \frac{21n+3}{6n+4}$  rút gọn được.

**Bài toán 51** (Mở rộng Bình, 2022, Ví dụ 2, p. 5). Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ,  $c^2 + d^2 \neq 0$ . Tìm  $n \in \mathbb{N}$  để phân số  $A = \frac{an+b}{cn+d}$  rút gọn được.

**Bài toán 52** (Bình, 2022, Ví dụ 3, p. 5). Tìm  $a, b, c, d \in \mathbb{N}$  nhỏ nhất sao cho  $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$ ,  $\frac{b}{c} = \frac{12}{21}$ ,  $\frac{c}{d} = \frac{6}{11}$ .

**Bài toán 53** (Bình, 2022, Ví dụ 4, p. 5). Tìm số tự nhiên lớn nhất có 3 chữ số sao cho số đó bằng mỗi tổng  $a+b, c+d, e+f$  &  $\frac{a}{b} = \frac{35}{49}$ ,  $\frac{c}{d} = \frac{130}{143}$ ,  $\frac{e}{f} = \frac{7}{13}$ .

**Bài toán 54** (Bình, 2022, 1., p. 6). Rút gọn phân số: (a)  $\frac{199 \cdots 9}{99 \cdots 95}$  (10 chữ số 9 ở tử, 10 chữ số 9 ở mẫu); (b)  $\frac{121212}{424242}$ ; (c)  $\frac{187187187}{221221221}$ ; (d)  $\frac{3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 39 - 10101}{505050 + 70707}$ .

**Bài toán 55** (Bình, 2022, 2., p. 6). Chứng minh các phân số sau có giá trị lã số tự nhiên: (a)  $\frac{10^{2002}+2}{3}$ ; (b)  $\frac{10^{2003}+8}{9}$ .

**Bài toán 56** (Bình, 2022, 3., p. 6). Chứng minh các phân số sau bằng nhau: (a)  $\frac{1717}{2929}$  &  $\frac{171717}{292929}$ ; (b)  $\frac{3210-34}{4170-41}$  &  $\frac{6420-68}{8340-82}$ ; (c)  $\frac{2106}{7320}$ ,  $\frac{4212}{14640}$ , &  $\frac{6318}{21960}$ .

**Bài toán 57** (Bình, 2022, 4., p. 6). Tìm  $x, y \in \mathbb{Z}$  thỏa: (a)  $\frac{x}{3} = \frac{y}{5}$ ; (b)  $\frac{x}{28} = \frac{y}{35}$ .

**Bài toán 58** (Bình, 2022, 5., p. 6). Tìm các phân số  $\frac{a}{b}$ ,  $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}^*$ , có giá trị bằng: (a)  $\frac{36}{45}$  biết  $\text{BCNN}(a, b) = 300$ ; (b)  $\frac{21}{35}$  biết  $\text{ƯCLN}(a, b) = 30$ ; (c)  $\frac{15}{35}$  biết  $\text{ƯCLN}(a, b) \cdot \text{BCNN}(a, b) = 3549$ .

**Bài toán 59** (Bình, 2022, 6., p. 7). Chứng minh các phân số sau tối giản với mọi  $n \in \mathbb{N}$ . (a)  $\frac{n+1}{2n+3}$ ; (b)  $\frac{2n+3}{4n+8}$ ; (c)  $\frac{3n+2}{5n+3}$ .

**Bài toán 60** (Bình, 2022, 7., p. 7). Cho phân số  $A = \frac{63}{3n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . (a) Với giá trị nào của  $n$  thì  $A$  rút gọn được? (b) Với giá trị nào của  $n$  thì  $A \in \mathbb{N}$ ?

**Bài toán 61** (Bình, 2022, 8., p. 7). Tìm các số tự nhiên  $n$  để các phân số sau là phân số tối giản: (a)  $\frac{2n+3}{4n+1}$ ; (b)  $\frac{3n+2}{7n+1}$ ; (c)  $\frac{2n+7}{5n+2}$ .

**Bài toán 62** (Bình, 2022, 9., p. 7). Có bao nhiêu số nguyên dương  $n$  không vượt quá 1000 để phân số  $\frac{n+12}{n^2+9n-13}$  là phân số tối giản?

**Bài toán 63** (Bình, 2022, 10., p. 7). Tìm  $n \in \mathbb{N}$  để phân số  $\frac{n+3}{2n-2} \in \mathbb{Z}$ .

**Bài toán 64** (Bình, 2022, 11., p. 7). Tìm các số nguyên  $n$  sao cho các phân số sau có giá trị là số nguyên: (a)  $\frac{12}{3n-1}$ ; (b)  $\frac{2n+3}{7}$ .

**Bài toán 65** (Bình, 2022, 12., p. 7). Tìm  $n \in \mathbb{N}$  để phân số  $A = \frac{8n+193}{4n+3}$ : (a) Có giá trị là số tự nhiên; (b) Là phân số tối giản; (c) Với giá trị nào của  $n$  trong khoảng từ 150 đến 170 thì phân số  $A$  rút gọn được?

**Bài toán 66** (Bình, 2022, 13., p. 7). Tìm các phân số tối giản nhỏ hơn 1 có tử & mẫu đều dương, biết tích của tử & mẫu của phân số bằng 120.

**Bài toán 67** (Bình, 2022, 14., p. 7). Tìm  $n \in \mathbb{N}$  nhỏ nhất để các phân số sau đều là phân số tối giản:  $\frac{5}{n+8}, \frac{6}{n+9}, \frac{7}{n+10}, \dots, \frac{17}{n+20}$ .

**Bài toán 68** (Bình, 2022, 15., p. 7). Cho 3 phân số  $\frac{15}{42}, \frac{49}{56}, \frac{36}{51}$ . Biến đổi 3 phân số trên thành các phân số bằng chúng sao cho mẫu của phân số thứ nhất bằng tử của phân số thứ 2, mẫu của phân số thứ 2 bằng tử của phân số thứ 3.

**Bài toán 69** (Bình, 2022, 16., p. 7). Cho 3 phân số  $\frac{5}{8}, \frac{11}{20}, \frac{4}{15}$ . Tìm 3 phân số (có tử & mẫu dương) theo thứ tự bằng 3 phân số trên sao cho hiệu của mẫu & tử của mỗi phân số này đều bằng nhau & hiệu đó có giá trị nhỏ nhất.

**Bài toán 70** (Bình, 2022, 17., p. 8). Tìm các phân số lớn hơn  $\frac{1}{5}$  & khác số tự nhiên biết nếu lấy mẫu nhân với 1 số, lấy tử cộng với số đó thì giá trị của phân số không đổi.

**Bài toán 71** (Bình, 2022, 18., p. 8). Cho phân số  $A = \frac{23+22+21+\dots+13}{11+10+9+\dots+1}$ . Nêu cách xóa 1 số hạng ở tử & 1 số hạng ở mẫu của A để được 1 phân số mới vẫn bằng phân số A.

**Bài toán 72** (Bình, 2022, 19., p. 8, Bộ sử Hume). Người Anh có thói quen xếp bộ sử nước Anh của Hume (David Hume, nhà sử học Scotland) gồm 9 tập ở tủ sách đặc biệt gồm 2 ngăn: ngăn trên xếp 5 cuốn, ngăn dưới xếp 4 cuốn, ở gáy các cuốn sách đó ghi các số 1, 2, 3, ..., 9. Nếu chủ nhân xếp  $\frac{13458}{6729}$  (phân số này có giá trị bằng 2) thì chứng tỏ chủ nhân đã đọc 2 tập (riêng trường hợp mới đọc 1 tập thì xếp  $\frac{12345}{6789}$ ). Nêu cách xếp 9 cuốn sách đó để chứng tỏ chủ nhân của bộ sách đã đọc 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 tập.

## 4 Quy Đồng Mẫu Số Nhiều Phân Số. So Sánh Phân Số. Hỗn Số Dương

“1. Quy tắc quy đồng mẫu nhiều phân số với mẫu dương: Bước 1. Tìm BCNN của các mẫu để làm mẫu chung. Bước 2. Tìm thừa số phụ của mỗi mẫu. Bước 3. Nhân tử & mẫu của mỗi phân số với thừa số phụ tương ứng. 2. So sánh 2 phân số: Muốn so sánh 2 phân số không cùng mẫu ta viết chúng dưới dạng 2 phân số có cùng mẫu dương rồi so sánh các tử với nhau, phân số nào có tử lớn hơn thì phân số đó lớn hơn. 3. Hỗn số dương: 1 phân số lớn hơn 1 có thể viết dưới dạng 1 hỗn số. Đó là 1 số gồm phần nguyên kèm theo 1 phân số nhỏ hơn 1. 4. Trong 2 phân số có tử & mẫu đều dương, nếu 2 tử số bằng nhau, phân số nào có mẫu nhỏ hơn thì phân số đó sẽ lớn hơn & ngược lại. 5. Phân số có tử & mẫu là 2 số nguyên cùng dấu thì lớn hơn 0 & gọi là phân số dương. Phân số có tử & mẫu là 2 số nguyên khác dấu thì nhỏ hơn 0 & gọi là phân số âm.” – Tuyên, 2022, Chap. III, §2, p. 48

“Để so sánh 2 phân số có tử & mẫu đều dương, ngoài cách quy đồng tử hoặc quy đồng mẫu, người ta thường dùng 1 phân số trung gian & sử dụng tính chất bắc cầu của bất đẳng thức.

Thường sử dụng các tính chất sau: (a) Trong 2 phân số cùng tử, phân số nào có mẫu nhỏ hơn thì phân số đó lớn hơn. (b) Trong 2 phân số nhỏ hơn 1, phân số nào có phần bù đến 1 nhỏ hơn thì phân số đó lớn hơn:  $1 - \frac{a}{b} < 1 - \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ . (c) Nếu  $0 < a < 1$  &  $m < n$  thì  $a^m > a^n$ .” – Bình, 2022, Chap. 1, §2, p. 8

**Bài toán 73** (Công thức hỗn số dương). Chứng minh:

$$\frac{ac+b}{c} = a + \frac{b}{c} = a\frac{b}{c}, \forall a, b, c \in \mathbb{Z}, c \neq 0. \quad \frac{a}{b} = \frac{\lfloor \frac{a}{b} \rfloor b + \{\frac{a}{b}\}}{b} = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + \frac{\{\frac{a}{b}\}}{b} = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \frac{\{\frac{a}{b}\}}{b}.$$

**Bài toán 74** (Tuyên, 2022, Ví dụ 52, p. 48). So sánh 2 phân số  $\frac{-101}{-100}$  &  $\frac{200}{201}$ .

*Giải.*  $\frac{-101}{-100} = \frac{101}{100} > \frac{100}{100} = 1 = \frac{201}{201} > \frac{200}{201}$ . Vậy  $\frac{-101}{-100} > \frac{200}{201}$ . □

**Bài toán 75** (Mở rộng Tuyên, 2022, Ví dụ 52, p. 48). Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ ,  $a > b > 0$ ,  $d > c > 0$ . So sánh:  $\frac{\pm a}{\pm b}$  &  $\frac{\pm c}{\pm d}$ .

**Bài toán 76** (Tuyên, 2022, Ví dụ 53, p. 48). Sắp xếp các phân số sau theo thứ tự tăng dần:  $\frac{5}{8}, \frac{9}{16}, \frac{2}{-3}, \frac{-7}{12}$ .

**Bài toán 77** (Bình, 2022, Ví dụ 5, p. 8). So sánh  $A = \frac{10^{15}+1}{10^{16}+1}$  &  $B = \frac{10^{16}+1}{10^{17}+1}$ .

**Bài toán 78** (Bình, 2022, Ví dụ 6, p. 9). 1 phân số có tử & mẫu đều là số nguyên dương. Nếu cộng tử & mẫu của phân số đó với cùng  $n \in \mathbb{N}^*$  thì phân số thay đổi thế nào?

**Bài toán 79** (Bình, 2022, Ví dụ 7, p. 9). So sánh  $(\frac{1}{32})^7$  &  $(\frac{1}{16})^9$ .

**Bài toán 80** (Bình, 2022, Ví dụ 8, p. 9). Chứng minh  $95^8$  là 1 số có 16 chữ số khi viết kết quả của nó trong hệ thập phân.

**Bài toán 81** (Bình, 2022, Ví dụ 9, p. 10). Cho  $a, b \in \mathbb{N}^*$  thỏa  $\frac{5}{7} < \frac{a}{b} < \frac{9}{11}$ . Tìm  $a + b$  khi  $b$  nhỏ nhất.

**Bài toán 82** (Bình, 2022, 20., p. 10). So sánh  $a, b \in \mathbb{N}$  biết  $\frac{1+2+3+\dots+a}{a} < \frac{1+2+3+\dots+b}{b}$ .

**Bài toán 83** (Bình, 2022, 21., p. 10). So sánh: (a)  $\frac{18}{91}$  &  $\frac{23}{114}$ ; (b)  $\frac{21}{52}$  &  $\frac{213}{523}$ ; (c)  $\frac{1313}{9191}$  &  $\frac{1111}{7373}$ .

**Bài toán 84** (Bình, 2022, 22., p. 10). So sánh các phân số sau, với  $n \in \mathbb{N}$ : (a)  $\frac{n}{n+1}$  &  $\frac{n+2}{n+3}$ ; (b)  $\frac{n+1}{n+4}$  &  $\frac{n}{n+5}$ ; (c)  $\frac{n}{2n+1}$  &  $\frac{3n+1}{6n+3}$ .

**Bài toán 85** (Bình, 2022, 23., p. 11). So sánh A & B: (a)  $A = \frac{20}{39} + \frac{22}{27} + \frac{18}{43}$ ,  $B = \frac{14}{39} + \frac{22}{29} + \frac{18}{41}$ ; (b)  $A = \frac{3}{8^3} + \frac{7}{8^4}$ ,  $B = \frac{7}{8^3} + \frac{3}{8^4}$ ; (c)  $A = \frac{10^7+5}{10^7-8}$ ,  $B = \frac{10^8+6}{10^8-7}$ ; (d)  $A = \frac{10^{1992}+1}{10^{1991}+1}$ ,  $B = \frac{10^{1993}+1}{10^{1992}+1}$ .

**Bài toán 86** (Bình, 2022, 24., p. 11). *Tìm  $x \in \mathbb{N}$  sao cho  $\frac{4}{11} < \frac{x}{20} < \frac{5}{11}$ .*

**Bài toán 87** (Bình, 2022, 25., p. 11). *Tìm 2 phân số có các mẫu bằng 9, các tử là 2 số tự nhiên liên tiếp sao cho phân số  $\frac{4}{7}$  nằm giữa 2 phân số đó.*

**Bài toán 88** (Bình, 2022, 26., p. 11). *Tìm 2 phân số có các tử bằng 1, các mẫu là 2 số tự nhiên liên tiếp sao cho phân số  $\frac{13}{84}$  nằm giữa 2 phân số đó.*

**Bài toán 89** (Bình, 2022, 27., p. 11). *Tìm 2 phân số có mẫu bằng 21 biết nó lớn hơn  $\frac{5}{7}$  & nhỏ hơn  $\frac{5}{6}$ .*

**Bài toán 90** (Bình, 2022, 28., p. 11). *Tìm phân số  $\frac{a}{b}$  sao cho  $a$  là số tự nhiên nhỏ nhất thỏa mãn  $\frac{4}{15} < \frac{a}{b} < \frac{1}{3}$ .*

**Bài toán 91** (Bình, 2022, 29., p. 11). *Tìm phân số  $\frac{a}{b}$  lớn nhất nhỏ hơn 1 với  $a, b$  là các số nguyên dương có 1 chữ số.*

**Bài toán 92** (Bình, 2022, 30., p. 11). *So sánh 2 phân số  $\left(\frac{1}{243}\right)^9$  &  $\left(\frac{1}{83}\right)^{13}$ .*

## 5 1 Số Phương Pháp Đặc Biệt để So Sánh 2 Phân Số

## 6 $\pm$ Phân Số

## 7 $, :$ Phân Số

## 8 Tổng Các Phân Số Viết Theo Quy Luật

## 9 Số Thập Phân. Làm Tròn Số Thập Phân. Các Phép Tính với Số Thập Phân

## 10 Tìm Giá Trị Phân Số của 1 Số Cho Trước. Tìm 1 Số Biết Giá Trị 1 Phân Số của Nó

## 11 Tìm Tỷ Số & Tỷ Số % của 2 Đại Lượng

## 12 Toán về Công Việc Làm Đồng Thời

## 13 Miscellaneous

## Tài liệu

Bình, Vũ Hữu (2022). *Nâng Cao & Phát Triển Toán 6 Tập 2*. Tái bản lần thứ nhất. Kết nối tri thức với cuộc sống. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 152.

Thái, Đỗ Đức (2022). *Bài Tập Toán 6 Tập 2*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, p. 111.

Thái, Đỗ Đức et al. (2022). *Toán 6 Tập 2*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, p. 108.

Tuyên, Bùi Văn (2022). *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 6*. Tái bản lần thứ 1. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 184.