

Solution: Square-, Cube-, & n th Roots

Lời Giải: Căn Bậc 2, Căn Bậc 3, & Căn Bậc n

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 17 tháng 5 năm 2023

Tóm tắt nội dung

[en] This text is a collection of problems, from basic to advanced, on *square-, cube-, & n th roots*.

Keyword. Square root, cube root, n th root.

[vi] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài toán, từ cơ bản đến nâng cao, về *căn bậc 2, căn bậc 3, & căn bậc n* .

Từ khóa. Căn bậc 2, căn bậc 3, căn bậc n , số hữu tỷ, số vô tỷ, căn thức.

- Lecture note – Bài giảng: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/square- & cube roots](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_9/square- & cube roots)¹.
- Cheatsheet – Công thức: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/cheatsheet: square- & cube roots](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_9/cheatsheet: square- & cube roots)².
- Problem – Bài tập: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/problem: square- & cube roots](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_9/problem: square- & cube roots)³.
- Solution – Lời giải: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/solution: square- & cube roots](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_9/solution: square- & cube roots)⁴.

Mục lục

1 Square Root & Irrationals – Căn Bậc 2 & Số Vô Tỷ	2
2 Căn Thức Bậc 2 & Hằng Đẳng Thức $\sqrt{A^2} = A $	5
3 Liên Hệ Giữa Phép Nhân, Phép Chia & Phép Khai Phương	8
4 Biến Đổi Đơn Giản Biểu Thức Chứa Căn Thức Bậc 2	13
5 Rút Gọn Biểu Thức Có Chứa Căn Thức Bậc 2	13
6 Cube Root, n th Root – Căn Bậc 3, Căn Bậc n	15
7 Miscellaneous	16
Tài liệu	19

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam

e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

¹URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/NQBH_square_root_cube_root.pdf.

²https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/cheatsheet/NQBH_square_root_cube_root_cheatsheet.pdf.

³https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/problem/NQBH_square_root_cube_root_problem.pdf.

⁴https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/solution/NQBH_square_root_cube_root_solution.pdf.

1 Square Root & Irrationals – Căn Bậc 2 & Số Vô Tỷ

Bài toán 1 ([Chí+23], ?1–?3, pp. 4–5). (a) Tìm các căn bậc 2 của $9, \frac{4}{9}, 0.25, 2$. (b) Tìm căn bậc 2 số học của $49, 64, 81, 1.21$. (c) Tìm căn bậc 2 của $49, 64, 81, 1.21$.

Bài toán 2 ([Chí+23], Ví dụ 2, ?4, pp. 5–6). So sánh: (a) 1 & $\sqrt{2}$. (b) 2 & $\sqrt{5}$. (c) 4 & $\sqrt{15}$. (d) $\sqrt{11}$ & 3.

Bài toán 3 ([Chí+23], Ví dụ 3, ?5, p. 6). (a) Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{x} > 2$. (b) $\sqrt{x} < 1$. (c) $\sqrt{x} > 1$. (d) $\sqrt{x} < 3$.

Bài toán 4 ([Chí+23], 1., p. 6). Tìm căn bậc 2 số học của mỗi số sau rồi suy ra căn bậc 2 của chúng: 121, 144, 169, 225, 256, 324, 361, 400.

Bài toán 5 ([Chí+23], 2., p. 6). So sánh: (a) 2 & $\sqrt{3}$. (b) 6 & $\sqrt{41}$. (c) 7 & $\sqrt{47}$.

Bài toán 6 ([Chí+23], 3., p. 6). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn các phương trình sau & sau đó làm tròn đến chữ số thập phân thứ 3: (a) $x^2 = 2$. (b) $x^2 = 3$. (c) $x^2 = 3.5$. (d) $x^2 = 4.12$.

Hint. Nghiệm của phương trình bậc 2 $x^2 = a$ với $a \geq 0$ là các căn bậc 2 của a .

Bài toán 7 ([Chí+23], 4., p. 7). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{x} = 15$. (b) $2\sqrt{x} = 14$. (c) $\sqrt{x} < \sqrt{2}$. (d) $\sqrt{2x} < 4$.

Bài toán 8 ([Chí+23], 5., p. 7). Tính cạnh 1 hình vuông biết diện tích của nó bằng diện tích của hình chữ nhật có chiều rộng 3.5 m & chiều dài 14 m.

Bài toán 9 ([Thā+23], 1., p. 5). Tính căn bậc 2 số học của 0.01, 0.04, 0.49, 0.64, 0.25, 0.81, 0.09, 0.16, 0, -1 .

Giải. Căn bậc 2 số học của: 0.01, 0.04, 0.49, 0.64, 0.25, 0.81, 0.09, 0.16, 0 lần lượt là $\sqrt{0.01} = 0.1$, $\sqrt{0.04} = 0.2$, $\sqrt{0.49} = 0.7$, $\sqrt{0.64} = 0.8$, $\sqrt{0.25} = 0.5$, $\sqrt{0.81} = 0.9$, $\sqrt{0.09} = 0.3$, $\sqrt{0.16} = 0.4$, $\sqrt{0} = 0$. Riêng -1 không có căn bậc 2 (số học) vì $-1 < 0$. \square

Lưu ý 1. Căn bậc 2 số học của số thực không âm $a \geq 0$ là \sqrt{a} . Căn bậc 2 của $a \geq 0$ là $\pm\sqrt{a}$ (i.e., bao gồm \sqrt{a} & $-\sqrt{a}$), đặc biệt: căn bậc 2 của 0 là $\pm\sqrt{0} = 0$. Mọi số thực âm $a < 0$ không có căn bậc 2.

Bài toán 10 ([Thā+23], 2., p. 5). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $x^2 = 5$. (b) $x^2 = 6$. (c) $x^2 = 2.5$. (d) $x^2 = \sqrt{5}$. (e) $x^2 = -1$.

Giải. (a) $x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$. (b) $x^2 = 6 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}$. (c) $x^2 = 2.5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2.5}$. (d) $x^2 = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\sqrt{5}} = \pm\sqrt[4]{5}$. (e) $x^2 = -1$ vô nghiệm vì $x^2 \geq 0 > -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. \square

Lưu ý 2 (Phương trình bậc 2 $x^2 = a$). Giải & biện luận theo tham số a phương trình $x^2 = a$ với $a \in \mathbb{R}$ cho trước. Xét 3 trường hợp: (a) Trường hợp $a = 0$: $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. (b) Trường hợp $a > 0$: $x^2 = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$. (c) Trường hợp $a < 0$: phương trình bậc 2 $x^2 = a$ vô nghiệm vì $x^2 \geq 0 > a$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 11 ([Thā+23], 3., p. 5). Số nào có căn bậc 2 là: (a) $\sqrt{5}$. (b) 1.5. (c) -0.1 . (d) $-\sqrt{9}$.

Giải. (a) 5 có 1 căn bậc 2 là $\sqrt{5}$. (b) $1.5^2 = 2.25$ có 1 căn bậc 2 là 1.5. (c) $(-0.1)^2 = 0.01$ có 1 căn bậc 2 là -0.1 . (d) 9 có 1 căn bậc 2 là $-\sqrt{9}$. \square

Lưu ý 3. Số có căn bậc 2 là a là số a^2 . Cụ thể hơn, a^2 có căn bậc 2 là $\pm a$, trong đó căn bậc 2 số học của a^2 là $|a|$.

Bài toán 12 ([Thā+23], 4., p. 5). Tìm $x \in \mathbb{R}$: (a) $\sqrt{x} = 3$. (b) $\sqrt{x} = \sqrt{5}$. (c) $\sqrt{x} = 0$. (d) $\sqrt{x} = -2$.

Giải. ĐKXD cho cả 4 ý: $x \geq 0$. (a) $\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 3^2 = 9$ (thỏa ĐKXD: nhận). Vậy $x = 9$. (b) $\sqrt{x} = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = 5$ (thỏa ĐKXD: nhận). Vậy $x = 5$. (c) $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa ĐKXD: nhận). Vậy $x = 0$. (d) Cách 1: Phương trình $\sqrt{x} = -2$ vô nghiệm vì $\sqrt{x} \geq 0 > -2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Cách 2: Căn bậc 2 số học thì không âm nên không tồn tại $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\sqrt{x} = -2$. \square

Lưu ý 4 (Phương trình bậc 2 $\sqrt{x} = a$). Giải & biện luận theo tham số a phương trình $\sqrt{x} = a$ với $a \in \mathbb{R}$ cho trước. ĐKXD: $x \geq 0$. Xét 3 trường hợp: (a) Trường hợp $a = 0$: $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa ĐKXD: nhận). (b) Trường hợp $a > 0$: $\sqrt{x} = a \Leftrightarrow x = a^2 > 0$ (thỏa ĐKXD: nhận). (c) Trường hợp $a < 0$: phương trình vô tỷ $\sqrt{x} = a$ vô nghiệm vì $\sqrt{x} \geq 0 > a$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 13 ([Thā+23], 5., p. 6). Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, so sánh: (a) 2 & $\sqrt{2} + 1$. (b) 1 & $\sqrt{3} - 1$. (c) $2\sqrt{31}$ & 10. (d) $-3\sqrt{11}$ & -12 .

Hint. Sử dụng tính chất: $0 \leq a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

1st giải. (a) $1 < 2 \Leftrightarrow \sqrt{1} = 1 < \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 + 1 < \sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow 2 < 1 + \sqrt{2}$. Vậy $2 < 1 + \sqrt{2}$. (b) $4 > 3 \Leftrightarrow \sqrt{4} = 2 > \sqrt{3} \Leftrightarrow 2 - 1 > \sqrt{3} - 1 \Leftrightarrow 1 > \sqrt{3} - 1$. Vậy $1 > \sqrt{3} - 1$. (c) $31 > 25 \Leftrightarrow \sqrt{31} > \sqrt{25} = 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{31} > 2 \cdot 5 = 10$. Vậy $2\sqrt{31} > 10$. (d) $11 < 16 \Leftrightarrow \sqrt{11} < \sqrt{16} = 4 \Leftrightarrow -3\sqrt{11} > -3 \cdot 4 = -12$. Vậy $-3\sqrt{11} > -12$. \square

Có thể bình phương 2 vế của 2 biểu thức cần so sánh như sau (đương nhiên sẽ tốn công hơn nhưng bù lại tự nhiên hơn Cách 1 đã được ‘tĩa gọt’, i.e., giấu các bước suy luận lòng vòng ngoài nháp để trình bày lời giải ‘chỉ 1 dòng biến đổi tương đương’):

2nd giải. (a) $(\sqrt{2}+1)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} + 1 = 3 + 2\sqrt{2} > 3 + 2\sqrt{1} = 3 + 2 = 5 > 4 = 2^2 \Rightarrow \sqrt{2}+1 > 2$. (b) $(\sqrt{3}-1)^2 = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1^2 = 4 - 2\sqrt{3} < 4 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 4 - 3 = 1$, trong đó đã sử dụng $-2 < -\sqrt{3}$. Vậy $1 > \sqrt{3} - 1$. (c) $(2\sqrt{31})^2 = 2^2(\sqrt{31})^2 = 4 \cdot 31 = 124 > 100 = 10^2 \Rightarrow 2\sqrt{31} > 10$. Vậy $2\sqrt{31} > 10$. (d) $(3\sqrt{11})^2 = 3^2(\sqrt{11})^2 = 9 \cdot 11 = 99 < 144 = 12^2 \Rightarrow 3\sqrt{11} < 12 \Leftrightarrow -3\sqrt{11} > -12$. Vậy $-3\sqrt{11} > -12$. \square

Bài toán 14 ([Thâ+23], 6., p. 6). Đ/S? (a) Căn bậc 2 của 0.36 là 0.6. (b) Căn bậc 2 của 0.36 là 0.06. (c) $\sqrt{0.36} = 0.6$. (d) Căn bậc 2 của 0.36 là 0.6 & -0.6. (e) $\sqrt{0.36} = \pm 0.6$.

Giải. (a) S: Căn bậc 2 của 0.36 là ± 0.6 (chứ không phải mỗi 0.6). (b) S: Căn bậc 2 của 0.36 là 0.6 (chứ không phải 0.06). (c) Đ: $\sqrt{0.36} = 0.6$. (d) Đ: Căn bậc 2 của 0.36 là 0.6 & -0.6. (e) S: $\sqrt{0.36} = 0.6$ vì $-\sqrt{0.36} = -0.6$ & $\pm\sqrt{0.36} = \pm 0.6$ mới đúng. \square

Bài toán 15 ([Thâ+23], 7., p. 6). Trong các số $\sqrt{(-5)^2}, \sqrt{5^2}, -\sqrt{5^2}, -\sqrt{(-5)^2}$, số nào là căn bậc 2 số học của 25?

Giải. Có $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$, $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$, $-\sqrt{5^2} = -\sqrt{25} = -5$, $-\sqrt{(-5)^2} = -\sqrt{25} = -5$, mà căn bậc 2 số học của 25 là 5 nên suy ra $\sqrt{(\pm 5)^2}$ là căn bậc 2 số học của 25. \square

Lưu ý 5. Cả 4 số $\sqrt{(-5)^2}, \sqrt{5^2}, -\sqrt{5^2}, -\sqrt{(-5)^2}$ đều là căn bậc 2 của $5^2 = 25$, trong đó $\sqrt{(\pm 5)^2} = \sqrt{25} = 5 > 0$ là căn bậc 2 số học của $5^2 = 25$.

Bài toán 16 (Mở rộng [Thâ+23], 7., p. 6). Trong các số $\sqrt{(-a)^2}, \sqrt{a^2}, -\sqrt{a^2}, -\sqrt{(-a)^2}$, số nào là căn bậc 2 số học của a^2 với $a \in \mathbb{R}$ bất kỳ?

Giải. Có $\sqrt{(-a)^2} = \sqrt{a^2} = |a|$, $\sqrt{a^2} = \sqrt{a^2} = |a|$, $-\sqrt{a^2} = -\sqrt{a^2} = -|a|$, $-\sqrt{(-a)^2} = -\sqrt{a^2} = -|a|$, mà căn bậc 2 số học của a^2 là a nên suy ra $\sqrt{(\pm a)^2}$ là căn bậc 2 số học của a^2 . \square

Lưu ý 6. Cả 4 số $\sqrt{(-a)^2}, \sqrt{a^2}, -\sqrt{a^2}, -\sqrt{(-a)^2}$ đều là căn bậc 2 của a^2 , trong đó $\sqrt{(\pm a)^2} = \sqrt{a^2} = |a| \geq 0$ là căn bậc 2 số học của a^2 , $\forall a \in \mathbb{R}$.

Bài toán 17 ([Thâ+23], 8., p. 6). Chứng minh: $\sqrt{1^3 + 2^3} = 1 + 2$, $\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3} = 1 + 2 + 3$, $\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3} = 1 + 2 + 3 + 4$. Viết tiếp 1 số đẳng thức tương tự.

Chứng minh. $\sqrt{1^3 + 2^3} = \sqrt{1 + 8} = \sqrt{9} = 3 = 1 + 2$, $\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3} = \sqrt{1 + 8 + 27} = \sqrt{36} = 6 = 1 + 2 + 3$, $\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3} = \sqrt{1 + 8 + 27 + 64} = \sqrt{100} = 10 = 1 + 2 + 3 + 4$. Ta có các đẳng thức:

$$\begin{aligned}\sqrt{1^3} &= 1, \\ \sqrt{1^3 + 2^3} &= 1 + 2, \\ \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3} &= 1 + 2 + 3, \\ \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3} &= 1 + 2 + 3 + 4, \\ \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5, \\ \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6, \\ \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7, \\ \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8, \\ \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9, \\ \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 + 10^3} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10.\end{aligned}$$

Dự đoán đẳng thức tổng quát:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n i^3} = \sqrt{1^3 + 2^3 + \dots + n^3} = \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Đẳng thức này đúng & có thể được chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học. \square

Lưu ý 7. Công thức tính tổng lập phương của n số nguyên dương đầu tiên:

$$\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\sum_{i=1}^n i\right)^2 = (1 + 2 + \dots + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

Ta có thể kiểm nghiệm công thức trên bằng máy tính:

Bài toán 18. Viết chương trình Pascal, Python, C/C++ tính: (a) tổng n số nguyên dương đầu tiên. (b) tổng bình phương của n số nguyên dương đầu tiên. (c) tổng lập phương của n số nguyên dương đầu tiên. (d) Từ câu (a) & (c), kiểm tra đẳng thức (1). (e) tổng lũy thừa bậc $m \in \mathbb{R}$ của n số nguyên dương đầu tiên⁵.

Bài toán 19 ([Thâ+23], 9., p. 6). Cho $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$. Chứng minh: (a) $a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$. (b) $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Rightarrow a < b$.

⁵Lũy thừa bậc thực của 1 số thực, i.e., a^b với $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$, sẽ được học ở chương trình Toán Giải tích 11.

Chứng minh. (a) Vì $a, b \geq 0$ & $a < b$ nên $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a} + \sqrt{a} = 2\sqrt{a} \geq 0$ (*). Có $a < b \Rightarrow 0 > a - b = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ (**). Từ (*) & (**), suy ra $\sqrt{a} - \sqrt{b} < 0$ hay $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. (b) $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} < 0$, kết hợp điều này & (*), suy ra $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) < 0 \Leftrightarrow a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$. \square

Lưu ý 8. Từ chứng minh trên, ta thấy $a - b$ & $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ luôn cùng dấu:

$$(a - b)(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \begin{cases} = 0, & \text{if } a = b, \\ > 0, & \text{if } a \neq b, \end{cases}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0.$$

Chặt chẽ & ngắn gọn hơn về công thức toán học, đẳng thức trên tương đương với đẳng thức:

$$\text{sign}(a - b) = \text{sign}(\sqrt{a} - \sqrt{b}), \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0,$$

trong đó $\text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \{0, \pm 1\}$, $x \mapsto \text{sign } x$ là hàm dấu xác định trên tập số thực \mathbb{R} bởi công thức:

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1, & \text{if } x > 0, \\ 0, & \text{if } x = 0, \\ -1, & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

Bài toán 20 ([Thă+23], 10., p. 6). Cho $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$. Chứng minh: (a) $m > 1 \Rightarrow \sqrt{m} > 1$. (b) $m < 1 \Rightarrow \sqrt{m} < 1$.

Chứng minh. Áp dụng Bài toán 19 (a) lần lượt với $(a, b) = (1, m)$ & $(a, b) = (m, 1)$, ta được: (a) $m > 1 \Rightarrow \sqrt{m} > \sqrt{1} = 1$. (b) $m < 1 \Rightarrow \sqrt{m} < \sqrt{1} = 1$. \square

Bài toán 21 ([Thă+23], 11., p. 6). Cho $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$. Chứng minh: (a) $m > 1 \Rightarrow m > \sqrt{m} > 1$. (b) $m < 1 \Rightarrow m < \sqrt{m} < 1$.

Chứng minh. (a) Theo Bài toán 20 (a): $m > 1 \Rightarrow \sqrt{m} > 1$. Nhân cả 2 vế của bất đẳng thức cuối với $\sqrt{m} > 0$, ta được $m > \sqrt{m}$. (b) Theo Bài toán 20 (b): $m < 1 \Rightarrow \sqrt{m} < 1$. Nhân cả 2 vế của bất đẳng thức cuối với $\sqrt{m} > 0$, ta được $\sqrt{m} \cdot \sqrt{m} = m < \sqrt{m}$. \square

Bài toán 22 (Program to print out 1st n square roots). Với $n \in \mathbb{N}^*$ được nhập từ bàn phím, viết chương trình Pascal, C/C++, Python xuất ra: (a) Căn bậc 2 của n . (b) Căn bậc 2 của n số nguyên dương đầu tiên.

Pascal:

```
program square_root;
var num, sqrt_num: real;
begin
  write('Enter a number num = ');
  readln(num);
  sqrt_num := Sqrt(num);
  writeln('sqrt of ', num, ' = ', sqrt_num)
end.
```

Bài toán 23 (Số chính phương). Viết chương trình Pascal, C/C++, Python để kiểm tra 1 số $n \in \mathbb{N}^*$ được nhập từ bàn phím có phải là số chính phương hay không.

Bài toán 24 ([Tuy23], Thí dụ 1, p. 5). Cho số thực $x \geq 0$. So sánh \sqrt{x} với x .

Giải. Vì $x \geq 0$ nên \sqrt{x} có nghĩa/xác định & $\sqrt{x} \geq 0$. Xét các trường hợp: (a) $\sqrt{x} = x \Leftrightarrow x = x^2 \Leftrightarrow x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$. (b) $\sqrt{x} < x \Leftrightarrow x < x^2 \Leftrightarrow x - x^2 < 0 \Leftrightarrow x(1 - x) < 0$, mà $x \geq 0$ nên suy ra $1 - x < 0$, hay $x > 1$. (c) $\sqrt{x} > x \Leftrightarrow x > x^2 \Leftrightarrow x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x(1 - x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$. Vậy: $x \in \{0, 1\} \Leftrightarrow \sqrt{x} = x$, $x > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} < x$, & $0 < x < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} > x$. \square

Nhận xét 1. Về mặt phương pháp để so sánh 2 số không âm ta có thể so sánh các bình phương của 2 số đó: $a \geq b > 0 \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$. Về kết quả, khi so sánh \sqrt{x} với x ta thấy có thể xảy ra cả 3 trường hợp: lớn hơn, nhỏ hơn, hoặc bằng nhau tùy theo x ở trong khoảng giá trị nào, cụ thể: $x \in \{0, 1\} \Leftrightarrow \sqrt{x} = x$, $x > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} < x$, & $0 < x < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} > x$.

Bài toán 25 ([Bin23], Ví dụ 2, p. 5). Chứng minh tổng & hiệu của 1 số hữu tỷ với 1 số vô tỷ là 1 số vô tỷ.

Giải. Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tồn tại 2 số $a \in \mathbb{Q}$ & $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sao cho $c = a + b \in \mathbb{Q}$. Ta có $b = c - a$, mà hiệu của 2 số hữu tỷ c, a là 1 số hữu tỷ nên $b \in \mathbb{Q}$, mâu thuẫn với giả thiết, nên c phải là số vô tỷ. Chứng minh tương tự cho hiệu. \square

Bài toán 26 ([Bin23], Ví dụ 3, p. 5). Xét xem các số a, b có thể là số vô tỷ hay không, nếu: (a) $a + b$ & $a - b$ là các số hữu tỷ. (b) $a - b$ & ab là các số hữu tỷ.

Bài toán 27 ([Bin23], Ví dụ 4, p. 5). Chứng minh: Nếu số tự nhiên a không là số chính phương thì \sqrt{a} là số vô tỷ.

Bài toán 28 ([Bin23], 2., p. 6). Chứng minh các số sau là số vô tỷ: (a) $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$. (b) $m + \frac{\sqrt{3}}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Q}$, $n \neq 0$.

Bài toán 29 ([Bin23], 3., p. 6). Xét xem các số a, b có thể là số vô tỷ hay không nếu: (a) ab & $\frac{a}{b}$ là các số hữu tỷ. (b) $a + b$ & $\frac{a}{b}$ là các số hữu tỷ ($a + b \neq 0$). (c) $a + b, a^2, \& b^2$ là các số hữu tỷ ($a + b \neq 0$).

Bài toán 30 ([Bin23], 4., p. 6). So sánh 2 số: (a) $2\sqrt{3}$ & $3\sqrt{2}$. (b) $6\sqrt{5}$ & $5\sqrt{6}$. (c) $\sqrt{24} + \sqrt{45}$ & 12. (d) $\sqrt{37} - \sqrt{15}$ & 2.

Bài toán 31 ([Bin23], 5., p. 6). (a) Cho 1 ví dụ để chứng tỏ khẳng định $\sqrt{a} \leq a$ với mọi số a không âm là sai. (b) Cho $a > 0$. Với giá trị nào của a thì $\sqrt{a} \geq a$?

Bài toán 32 ([Bin23], 6*, pp. 6-7). (a) Chỉ ra 1 số thực x mà $x - \frac{1}{x}$ là số nguyên ($x \neq \pm 1$). (b) Chứng minh nếu $x - \frac{1}{x}$ là số nguyên & $x \neq \pm 1$ thì x & $x + \frac{1}{x}$ là số vô tỷ. Khi đó $(x + \frac{1}{x})^{2n}$ & $(x + \frac{1}{x})^{2n+1}$ là số hữu tỷ hay số vô tỷ?

2 Căn Thức Bậc 2 & Hằng Đẳng Thức $\sqrt{A^2} = |A|$

Bài toán 33 ([Chí+23], ?1, p. 8). Hình chữ nhật $ABCD$ có đường chéo dài 5 cm & cạnh $BC = x$ cm. tính AB .

Bài toán 34 ([Chí+23], ?2, p. 8). Với giá trị nào của $x \in \mathbb{R}$ thì $\sqrt{5 - 2x}$ xác định?

Bài toán 35 ([Chí+23], DL, p. 9). Chứng minh: $\sqrt{a^2} = |a|, \forall a \in \mathbb{R}$.

Bài toán 36 ([Chí+23], Ví dụ 2, p. 9). Tính: (a) $\sqrt{12^2}$. (b) $\sqrt{(-7)^2}$.

Bài toán 37 ([Chí+23], Ví dụ 3, p. 9). Rút gọn: (a) $\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2}$. (b) $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2}$.

Bài toán 38 ([Chí+23], Ví dụ 4, p. 10). Rút gọn: (a) $\sqrt{(x - 2)^2}$ với $x \geq 2$. (b) $\sqrt{a^6}$ với $a < 0$.

Bài toán 39 ([Chí+23], 6., p. 10). Với giá trị nào của $a \in \mathbb{R}$ thì mỗi căn thức sau có nghĩa? (a) $\sqrt{\frac{a}{3}}$. (b) $\sqrt{-5a}$. (c) $\sqrt{4 - a}$. (d) $\sqrt{3a + 7}$.

Bài toán 40 ([Chí+23], 7., p. 10). Tính: (a) $\sqrt{(0.1)^2}$. (b) $\sqrt{(-0.3)^2}$. (c) $-\sqrt{(-1.3)^2}$. (d) $-0.4\sqrt{(-0.4)^2}$.

Bài toán 41 ([Chí+23], 8., p. 10). Rút gọn các biểu thức: (a) $\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}$. (b) $\sqrt{(3 - \sqrt{11})^2}$. (c) $2\sqrt{a^2}$ với $a \geq 0$ & với $a \in \mathbb{R}$. (d) $3\sqrt{(a - 2)^2}$ với $a < 2$ & với $a \in \mathbb{R}$.

Bài toán 42 ([Chí+23], 9., p. 11). Tìm x thỏa: (a) $\sqrt{x^2} = 7$. (b) $\sqrt{x^2} = |-8|$. (c) $\sqrt{4x^2} = 6$. (d) $\sqrt{9x^2} = |-12|$.

Bài toán 43 ([Chí+23], 10., p. 11). Chứng minh: (a) $(\sqrt{3} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$. (b) $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{3} = -1$.

Bài toán 44 ([Chí+23], 11., p. 11). Tính: (a) $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25} + \sqrt{196} : \sqrt{49}$. (b) $36 : \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 18} - \sqrt{169}$. (c) $\sqrt{\sqrt{81}}$. (d) $\sqrt{3^2 + 4^2}$.

Bài toán 45 ([Chí+23], 12., p. 11). Tìm x để mỗi căn thức sau có nghĩa: (a) $\sqrt{2x + 7}$. (b) $\sqrt{-3x + 4}$. (c) $\sqrt{\frac{1}{x-1}}$. (d) $\sqrt{1 + x^2}$.

Bài toán 46 ([Chí+23], 13., p. 11). Rút gọn các biểu thức: (a) $2\sqrt{a^2} - 5a$ với $a < 0$ & $a \in \mathbb{R}$. (b) $\sqrt{25a^2} + 3a$ với $a \geq 0$ & $a \in \mathbb{R}$. (c) $\sqrt{9a^4} + 3a^2$. (d) $5\sqrt{4a^6} - 3a^3$ với $a < 0$ & $a \in \mathbb{R}$.

Bài toán 47 ([Chí+23], 14., p. 11). Phân tích thành nhân tử: (a) $x^2 - 3$. (b) $x^2 - 6$. (c) $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3$. (d) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 5$.

Hint. $a = (\sqrt{a})^2, \forall a \in \mathbb{R}, a \geq 0$.

Bài toán 48 ([Chí+23], 15., p. 11). Giải phương trình: (a) $x^2 - 5 = 0$. (b) $x^2 - 2\sqrt{11}x + 11 = 0$.

Bài toán 49 ([Chí+23], 16., p. 12). Tìm chỗ sai trong phép chứng minh “Con muỗi nặng bằng con voi” sau: Giả sử con muỗi nặng m g, còn con voi nặng V g. Ta có: $m^2 + V^2 = V^2 + m^2$. Cộng cả 2 vế với $-2mV$, ta có: $m^2 - 2mV + V^2 = V^2 - 2mV + m^2$, hay $(m - V)^2 = (V - m)^2$. Lấy căn bậc 2 mỗi vế của đẳng thức trên, ta được: $\sqrt{(m - V)^2} = \sqrt{(V - m)^2}$. Do đó $m - V = V - m$. Từ đó ta có $2m = 2V$, suy ra $m = V$. Vậy con muỗi nặng bằng con voi!

Bài toán 50 ([Thâ+23], 12., p. 7). Tìm $x \in \mathbb{R}$ để căn thức sau có nghĩa: (a) $\sqrt{-2x + 3}$. (b) $\sqrt{\frac{2}{x^2}}$. (c) $\sqrt{\frac{4}{x + 3}}$. (d) $\sqrt{\frac{-5}{x^2 + 6}}$.

Bài toán 51 ([Thâ+23], 13., p. 7). Rút gọn rồi tính: (a) $5\sqrt{(-2)^4}$. (b) $-4\sqrt{(-3)^6}$. (c) $\sqrt{\sqrt{(-5)^8}}$. (d) $2\sqrt{(-5)^6} + 3\sqrt{(-2)^8}$.

Bài toán 52 ([Thâ+23], 14., p. 7). Rút gọn các biểu thức: (a) $\sqrt{(4 + \sqrt{2})^2}$. (b) $\sqrt{(3 - \sqrt{3})^2}$. (c) $\sqrt{(4 - \sqrt{17})^2}$. (d) $2\sqrt{3} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}$.

Bài toán 53 ([Thâ+23], 15., p. 7). Chứng minh: (a) $9 + 4\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 2)^2$. (b) $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = -2$. (c) $(4 - \sqrt{7})^2 = 23 - 8\sqrt{7}$. (d) $\sqrt{23 + 8\sqrt{7}} - \sqrt{7} = 4$.

Bài toán 54 ([Thâ+23], 16., p. 7). Biểu thức sau đây xác định với giá trị nào của x ? (a) $\sqrt{(x-1)(x-3)}$. (b) $\sqrt{x^2-4}$. (c) $\sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$. (d) $\sqrt{\frac{2+x}{5-x}}$.

Bài toán 55 ([Thâ+23], 17., p. 8). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{9x^2} = 2x + 1$. (b) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = 3x - 1$. (c) $\sqrt{1 - 4x + 4x^2} = 5$. (d) $\sqrt{x^4} = 7$.

Bài toán 56 ([Thâ+23], 18., p. 8). Phân tích nhân tử: (a) $x^2 - 7$. (b) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$. (c) $x^2 + 2\sqrt{13}x + 13$.

Bài toán 57 ([Thâ+23], 19., p. 8). Tìm DKXD rồi rút gọn các phân thức: (a) $\frac{x^2 - 5}{x + \sqrt{5}}$. (b) $\frac{x^2 + 2\sqrt{2}x + 2}{x^2 - 2}$.

Bài toán 58 ([Thâ+23], 20., p. 8). Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, so sánh: (a) $6 + 2\sqrt{2}$ & 9. (b) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ & 3. (c) $9 + 4\sqrt{5}$ & 16. (d) $\sqrt{11} - \sqrt{3}$ & 2.

Bài toán 59 ([Thâ+23], 21., p. 8). Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{3}$. (b) $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - 3 + \sqrt{2}$. (c) $\sqrt{9x^2} - 2x$ với $x < 0$ & $x \in \mathbb{R}$. (d) $x - 4 + \sqrt{16 - 8x + x^2}$ với $x > 4$ & $x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 60 ([Thâ+23], 22., p. 8). (a) Chứng minh: $\sqrt{(n+1)^2} + \sqrt{n^2} = (n+1)^2 - n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Viết đẳng thức trên với $n = 1, 2, \dots, 10$. (b) Tính $\sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{x^2}$ với $x \in \mathbb{R}$ rồi so sánh với $|(x+1)^2 - x^2|$.

Bài toán 61 ([Tuy23], Thí dụ 2, p. 5). Cho $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $abc \neq 0$ & $a = b + c$. Chứng minh $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \in \mathbb{Q}$.

Giải. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} - \frac{1}{bc}\right) = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + \frac{2(c+b-a)}{abc} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2$ vì $a = b + c$. Suy ra $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2} = \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right|$. Có $a, b, c \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \in \mathbb{Q} \Rightarrow A = \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right| \in \mathbb{Q}$. \square

Bài toán 62. Cho $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $abc \neq 0$ & $a + b + c = 0$. Chứng minh $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \in \mathbb{Q}$.

1st giải. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 - \frac{2(a+b+c)}{abc} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2$ vì $a+b+c=0$. Suy ra $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2} = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right|$. Có $a, b, c \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \in \mathbb{Q} \Rightarrow A = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right| \in \mathbb{Q}$. \square

2nd giải. $a + b + c = 0 \Leftrightarrow -a = b + c$, nên ta có thể áp dụng bài toán 61 cho bộ 3 số $(-a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$, $-abc \neq 0$ để thu được $\sqrt{\frac{1}{(-a)^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \in \mathbb{Q}$, i.e., $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \in \mathbb{Q}$. \square

Nhận xét 2 (Proof of $\in \mathbb{Q}$). Để chứng minh 1 số là số hữu tỷ ta biểu diễn số đó thành 1 biểu thức gồm các phép tính cộng, trừ, nhân, chia (cho 1 số khác 0) của các số hữu tỷ.

Bài toán 63. (a) Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$, $abc \neq 0$, khi nào thì $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$? (b) Cho $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $abcd \neq 0$, khi nào thì $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}$? (c) Cho $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, $abcde \neq 0$, khi nào thì $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} + \frac{1}{e^2}$? (d) Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$, khi nào thì xảy ra đẳng thức sau?

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2}, \text{ i.e., } \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)^2 = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}.$$

Bài toán 64. Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, $abcd \neq 0$ & $ab + ac + ad + bc + bd + cd = 0$. Chứng minh $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}} \in \mathbb{Q}$.

Bài toán 65. Cho $a, b, c, d, e \in \mathbb{Q}$, $abcde \neq 0$ & $abc + abd + abe + acd + ace + ade + bcd + bce + bde + cde = 0$. Chứng minh $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} + \frac{1}{e^2}} \in \mathbb{Q}$.

Bài toán 66. Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $a_i \in \mathbb{Q}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$, & $\sum_{\text{cyc}} a_1 a_2 \dots a_{n-2} = 0$. Chứng minh:

$$A = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2}} = \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}} \in \mathbb{Q}.$$

Lưu ý 9 (Cyclic sum). Ký hiệu \sum_{cyc} được gọi là tổng cyclic. Xem định nghĩa & ví dụ tại, e.g., [AoPS/cyclic sum](#)⁶.

Bài toán 67 ([Tuy23], 1., p. 6). Tính $A = \sqrt{\frac{8^{10} - 4^{10}}{4^{11} - 8^4}}$.

Phân tích. 4, 8 đều là lũy thừa của 2 nên sẽ tiện hơn nếu đưa tất cả các lũy thừa trong A về lũy thừa với cơ số 2.

Giải. $A = \sqrt{\frac{(2^3)^{10} - (2^2)^{10}}{(2^2)^{11} - (2^3)^4}} = \sqrt{\frac{2^{30} - 2^{20}}{2^{22} - 2^{12}}} = \sqrt{\frac{2^{20}(2^{10} - 1)}{2^{12}(2^{10} - 1)}} = \sqrt{2^8} = 2^4 = 16.$ \square

Bài toán 68 ([Tuy23], 2., p. 6). Cho $A = \underbrace{99 \dots 9}_{10's} 4 \underbrace{00 \dots 0}_{10's} 9$. Tính \sqrt{A} .

1st giải. $A = \underbrace{99 \dots 9}_{10's} 4 \cdot \underbrace{100 \dots 0}_{11's} + 9 = (\underbrace{99 \dots 9}_{10's} 7 - 3)(\underbrace{99 \dots 9}_{10's} 7 + 3) + 9 = \underbrace{99 \dots 9}_{10's} 7^2 - 3^2 + 9 = \underbrace{99 \dots 9}_{10's} 7^2 \Rightarrow \sqrt{A} = \underbrace{99 \dots 9}_{10's} 7.$ \square

2nd giải. $A = (10^{10} - 1) \cdot 10^{12} + 4 \cdot 10^{11} + 9 = 10^{22} - 10^{12} + 4 \cdot 10^{11} + 9 = 10^{22} - 10 \cdot 10^{11} + 4 \cdot 10^{11} + 9 = 10^{22} - 6 \cdot 10^{11} + 9 = (10^{11} - 3)^2 \Rightarrow \sqrt{A} = 10^{11} - 3 = \underbrace{99 \dots 9}_{10's} 7.$ \square

Bài toán 69 ([Tuy23], 3., p. 6). Không dùng máy tính hoặc bảng số, so sánh: (a) $\sqrt{8} + \sqrt{15}$ & $\sqrt{65} - 1$. (b) $\frac{13 - 2\sqrt{3}}{6}$ & $\sqrt{2}$.

Hint. Tìm các số chính phương gần với các số dưới dấu căn để đơn giản dấu căn 1 cách hợp lý.

Giải. (a) $\sqrt{8} + \sqrt{15} < \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$, & $\sqrt{65} - 1 > \sqrt{64} - 1 = 8 - 1 = 7$. Suy ra $\sqrt{8} + \sqrt{15} < \sqrt{65} - 1$. (b) $\frac{13 - 2\sqrt{3}}{6} > \frac{13 - 2\sqrt{4}}{6} = \frac{3}{2} = 1.5$. Mặt khác, $(1.5)^2 = 2.25 > 2 \Leftrightarrow 1.5 > \sqrt{2}$, nên $\frac{13 - 2\sqrt{3}}{6} > \sqrt{2}$. \square

Bài toán 70 ([Tuy23], 4., p. 6). Tìm điều kiện xác định (DKXD) & tập xác định (TXD) của các biểu thức: (a) $\sqrt{2 - x^2}$. (b) $\frac{x}{\sqrt{5x^2 - 3}}$. (c) $\sqrt{-4x^2 + 4x - 1}$. (d) $\frac{1}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$.

Giải. (a) $\sqrt{2 - x^2}$ xác định $\Leftrightarrow 2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 2 \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. DKXD: $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. TXD: $D = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. (b) $\frac{x}{\sqrt{5x^2 - 3}}$ xác định $\Leftrightarrow 5x^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow x^2 > \frac{3}{5} \Leftrightarrow |x| > \sqrt{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow x > \sqrt{\frac{3}{5}}$ hoặc $x < -\sqrt{\frac{3}{5}}$. DKXD: $x > \sqrt{\frac{3}{5}}$ hoặc $x < -\sqrt{\frac{3}{5}}$. TXD: $D = (-\infty, -\sqrt{\frac{3}{5}}) \cup (\sqrt{\frac{3}{5}}, \infty)$. (c) $\sqrt{-4x^2 + 4x - 1}$ xác định $\Leftrightarrow -4x^2 + 4x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow -(2x - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. DKXD: $x = \frac{1}{2}$. TXD: $D = \{\frac{1}{2}\}$. (d) $\frac{1}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$ xác định $\Leftrightarrow x^2 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ hoặc $x < -2$. DKXD: $x > 1$ hoặc $x < -2$. TXD: $D = (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$. \square

Bài toán 71 ([Tuy23], 5., p. 6). Cho $a, b, c \in \mathbb{Q}$ khác nhau đôi một. Chứng minh $A = \sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}} \in \mathbb{Q}$.

1st giải. $\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)}\right) = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)^2 - \frac{2(c-a+a-b+b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)^2 \Rightarrow A = \left|\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right|$. Vì $a, b, c \in \mathbb{Q}$ khác nhau đôi một nghĩa là $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$, suy ra $\frac{1}{a-b}, \frac{1}{b-c}, \frac{1}{c-a} \in \mathbb{Q} \Rightarrow A = \left|\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right| \in \mathbb{Q}$. \square

2nd giải. Vì $(a-b) + (b-c) + (c-a) = 0$, & vì $a, b, c \in \mathbb{Q}$ khác nhau đôi một nghĩa là $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ nên có thể áp dụng Bài toán 62 cho bộ 3 số $(a-b, b-c, c-a)$ để thu được $A = \sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}} \in \mathbb{Q}$. \square

Bài toán 72 ([Tuy23], 6., p. 6). Cho $a, b, c \in \mathbb{Q}$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh $A = \sqrt{(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)} \in \mathbb{Q}$.

Giải. $a^2 + 1 = a^2 + ab + bc + ca = (a+b)(a+c)$, $b^2 + 1 = b^2 + ab + bc + ca = (b+c)(b+a)$, $c^2 + 1 = c^2 + ab + bc + ca = (c+a)(c+b)$, nên $A = \sqrt{(a+b)(a+c)(b+c)(b+a)(c+a)(c+b)} = \sqrt{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2} = |(a+b)(b+c)(c+a)|$. Có: $a, b, c \in \mathbb{Q} \Rightarrow A = |(a+b)(b+c)(c+a)| \in \mathbb{Q}$. \square

Bài toán 73 ([Tuy23], 7., p. 6-7). (a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sqrt{-x^2 + x + \frac{3}{4}}$. (b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = \sqrt{4x^4 - 4x^2(x+1) + (x+1)^2 + 9}$. (c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = \sqrt{25x^2 - 20x + 4} + \sqrt{25x^2}$.

Bài toán 74 ([Tuy23], 8., p. 7). Cho $x < 0$, rút gọn biểu thức $A = |2x - \sqrt{(5x-1)^2}|$.

Bài toán 75 ([Tuy23], 9., p. 7). Cho biểu thức $A = 4x - \sqrt{9x^2 - 12x + 4}$. (a) Rút gọn A . (b) Tính giá trị của A với $x = \frac{2}{7}$.

⁶URL: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Cyclic_sum.

Bài toán 76 ([Tuy23], 10., p. 7). Cho biểu thức $A = 5x + \sqrt{x^2 + 6x + 9}$. (a) Rút gọn A . (b) Tìm x để $B = -9$.

Bài toán 77 ([Tuy23], 11., p. 7). Tìm $x \in \mathbb{R}$ biết $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} \leq 5 - x$.

Bài toán 78 ([Tuy23], 12., p. 7). Giải phương trình: (a) $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{x + 1}$. (b) $\sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 0$. (c) $\sqrt{x^2 - 4} - x^2 + 4 = 0$.

Bài toán 79 ([Tuy23], 13., p. 7). Giải phương trình: (a) $\sqrt{x^2 - 4x + 5} + \sqrt{x^2 - 4x + 8} + \sqrt{x^2 - 4x + 9} = 3 + \sqrt{5}$. (b) $\sqrt{2 - x^2 + 2x} + \sqrt{-x^2 - 6x - 8} = 1 + \sqrt{3}$. (c) $\sqrt{9x^2 - 6x + 2} + \sqrt{45x^2 - 30x + 9} = \sqrt{6x - 9x^2 + 8}$.

Bài toán 80 ([Bin23], Ví dụ 5, p. 7). Cho biểu thức $A = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4x + 4}}$. (a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức A . (b) Rút gọn biểu thức A .

Bài toán 81 ([Bin23], Ví dụ 6, p. 8). Tìm điều kiện xác định của các biểu thức: (a) $A = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}$. (b) $B = \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2x + 1}}}$.

Bài toán 82 ([Bin23], Ví dụ 7, p. 8). Tìm các giá trị của x sao cho $\sqrt{x + 1} < x + 3$.

Bài toán 83 ([Bin23], 7., p. 9). Tìm điều kiện xác định của các biểu thức: (a) $3 - \sqrt{1 - 16x^2}$. (b) $\frac{1}{1 - \sqrt{x^2 - 3}}$. (c) $\sqrt{8x - x^2 - 15}$.

(d) $\frac{2}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$. (e) $A = \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}}$. (f) $B = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{\sqrt{2x + 1}} + \sqrt{x^2 - 8x + 14}$.

Bài toán 84 ([Bin23], 8., p. 9). Cho biểu thức $A = \sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{x^2 + 6x + 9}$. (a) Rút gọn biểu thức A . (b) Tìm các giá trị của x để $A = 1$.

Bài toán 85 ([Bin23], 9., p. 9). Tìm các giá trị của x sao cho: (a) $\sqrt{x^2 - 3} \leq x^2 - 3$. (b) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} > x - 6$.

Bài toán 86 ([Bin23], 10., p. 9). Cho $a + b + c = 0$ & $abc \neq 0$. Chứng minh hằng đẳng thức: $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right|$.

3 Liên Hệ Giữa Phép Nhân, Phép Chia & Phép Khai Phương

Bài toán 87 ([Chí+23], ?1, p. 12). Tính & so sánh: $\sqrt{16 \cdot 25}$ & $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25}$.

Bài toán 88 ([Chí+23], DL, p. 12). Chứng minh: (a) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$. (b)

$$\sqrt{\prod_{i=1}^n a_i} = \prod_{i=1}^n \sqrt{a_i}, \text{ i.e., } \sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n} = \sqrt{a_1} \sqrt{a_2} \cdots \sqrt{a_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_i \in \mathbb{R}, a_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Bài toán 89 ([Chí+23], Ví dụ 1, ?2, p. 13). Áp dụng quy tắc khai phương 1 tích, tính: (a) $\sqrt{49 \cdot 1.44 \cdot 25}$. (b) $\sqrt{810 \cdot 40}$. (c) $\sqrt{0.16 \cdot 0.64 \cdot 225}$. (d) $\sqrt{250 \cdot 360}$.

Bài toán 90 ([Chí+23], Ví dụ 2, ?3, pp. 13–14). Tính: (a) $\sqrt{5}\sqrt{20}$. (b) $\sqrt{1.3}\sqrt{52}\sqrt{10}$. (c) $\sqrt{3}\sqrt{75}$. (d) $\sqrt{20}\sqrt{72}\sqrt{4.9}$.

Bài toán 91 ([Chí+23], Ví dụ 3, ?4, p. 14). Tìm DKXD rồi rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{3a}\sqrt{27a}$ với $a \geq 0$. (b) $\sqrt{9a^2b^4}$. (c) $\sqrt{3a^3}\sqrt{12a}$. (d) $\sqrt{2a \cdot 32ab^2}$.

Bài toán 92 ([Chí+23], 17., p. 14). Áp dụng quy tắc khai phương 1 tích, tính: (a) $\sqrt{0.09 \cdot 64}$. (b) $\sqrt{2^4(-7)^2}$. (c) $\sqrt{12.1 \cdot 360}$. (d) $\sqrt{2^2 \cdot 3^4}$.

Bài toán 93 ([Chí+23], 18., p. 14). Áp dụng quy tắc nhân các căn bậc 2, tính: (a) $\sqrt{7}\sqrt{63}$. (b) $\sqrt{2.5}\sqrt{30}\sqrt{48}$. (c) $\sqrt{0.4} \cdot \sqrt{6.4}$. (d) $\sqrt{2.7}\sqrt{5}\sqrt{1.5}$.

Bài toán 94 ([Chí+23], 19., p. 15). Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{0.36a^2}$ với $a < 0$ & $a \in \mathbb{R}$. (b) $\sqrt{a^4(3-a)^2}$ với $a \geq 3$ & $a \in \mathbb{R}$. (c) $\sqrt{27 \cdot 48(1-a)^2}$ với $a > 1$ & $a \in \mathbb{R}$. (d) $\frac{1}{a-b}\sqrt{a^4(a-b)^2}$ với $a > b$.

Bài toán 95 ([Chí+23], 20., p. 15). Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{\frac{2a}{3}}\sqrt{\frac{3a}{8}}$ với $a \geq 0$. (b) $\sqrt{13a}\sqrt{\frac{52}{a}}$ với $a > 0$. (c) $\sqrt{5a}\sqrt{45a} - 3a$ với $a \geq 0$. (d) $(3-a)^2 - \sqrt{0.2}\sqrt{180a^2}$.

Bài toán 96 ([Chí+23], 21., p. 15). Khai phương tích $12 \cdot 30 \cdot 40$ được bao nhiêu?

Bài toán 97 ([Chí+23], 22., p. 15). Tính hợp lý: (a) $\sqrt{13^2 - 12^2}$. (b) $\sqrt{17^2 - 8^2}$. (c) $\sqrt{117^2 - 108^2}$. (d) $\sqrt{313^2 - 312^2}$.

Bài toán 98 (Mở rộng [Chí+23], 22., p. 15). Rút gọn biểu thức:

$$\sqrt{\left(\frac{m^2 + n^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{m^2 - n^2}{2}\right)^2}, \forall m, n \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 99 ([**Chí+23**], 23., p. 15). Chứng minh: (a) $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1$. (b) $\sqrt{2006} \pm \sqrt{2005}$ là 2 số nghịch đảo của nhau.

Bài toán 100 (Mở rộng [**Chí+23**], 23., p. 15). Chứng minh: (a) $(n - \sqrt{n^2 - 1})(n + \sqrt{n^2 - 1}) = 1, \forall n \in \mathbb{R}, |n| \geq 1$. (b) $\sqrt{n+1} \pm \sqrt{n}$ là 2 số nghịch đảo của nhau, $\forall n \in \mathbb{R}, n \geq 0$.

Bài toán 101 ([**Chí+23**], 24., p. 15). Rút gọn & tìm giá trị (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 3) của các căn thức: (a) $\sqrt{4(1+6x+9x^2)}$ tại $x = -\sqrt{2}$. (b) $\sqrt{9a^2(b^2+4-4b)}$ tại $a = -2, b = -\sqrt{3}$.

Bài toán 102 ([**Chí+23**], 25., p. 16). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{16x} = 8$. (b) $\sqrt{4x} = \sqrt{5}$. (c) $\sqrt{9(x-1)} = 21$. (d) $\sqrt{4(1-x)^2} - 6 = 0$.

Bài toán 103 ([**Chí+23**], 26., p. 16). (a) So sánh $\sqrt{25+9}$ & $\sqrt{25} + \sqrt{9}$. (b) Chứng minh $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$. (c) Chứng minh $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0$.

Bài toán 104 ([**Chí+23**], 27., p. 16). So sánh: (a) 4 & $2\sqrt{3}$. (b) $-\sqrt{5}$ & -2 .

Bài toán 105 ([**Thâ+23**], 23., p. 9). Tính: (a) $\sqrt{10}\sqrt{40}$. (b) $\sqrt{5}\sqrt{45}$. (c) $\sqrt{52}\sqrt{13}$. (d) $\sqrt{2}\sqrt{162}$.

Bài toán 106 ([**Thâ+23**], 24., p. 9). Tính: (a) $\sqrt{45 \cdot 80}$. (b) $\sqrt{75 \cdot 48}$. (c) $\sqrt{90 \cdot 6.4}$. (d) $\sqrt{2.5 \cdot 14.4}$.

Bài toán 107 ([**Thâ+23**], 25., p. 9). Rút gọn rồi tính: (a) $\sqrt{6.8^2 - 3.2^2}$. (b) $\sqrt{21.8^2 - 18.2^2}$. (c) $\sqrt{117.5^2 - 26.5^2 - 1440}$. (d) $\sqrt{146.5^2 - 109.5^2 + 27.256}$.

Bài toán 108 ([**Thâ+23**], 26., p. 9). Chứng minh: (a) $\sqrt{9 - \sqrt{17}}\sqrt{9 + \sqrt{17}} = 8$. (b) $2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 2) + (1 + 2\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} = 9$.

Bài toán 109 ([**Thâ+23**], 27., p. 9). Rút gọn: (a) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{14}}{2\sqrt{3} + \sqrt{28}}$. (b) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + \sqrt{16}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}$.

Bài toán 110 ([**Thâ+23**], 28., p. 9). Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, so sánh: (a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ & $\sqrt{10}$. (b) $\sqrt{3} + 2$ & $\sqrt{2} + \sqrt{6}$. (c) 16 & $\sqrt{15}\sqrt{17}$. (d) 8 & $\sqrt{15} + \sqrt{17}$.

Bài toán 111 ([**Thâ+23**], 29., p. 9). Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, so sánh: (a) $\sqrt{2003} + \sqrt{2005}$ & $2\sqrt{2004}$.

Bài toán 112 ([**Thâ+23**], 30., p. 9). Cho 2 biểu thức $A = \sqrt{x+2}\sqrt{x-3}, B = \sqrt{(x+2)(x-3)}$. (a) Tìm $x \in \mathbb{R}$ lần lượt để A, B có nghĩa. (b) Với giá trị nào của x thì $A = B$?

Bài toán 113 ([**Thâ+23**], 31., p. 10). Biểu diễn \sqrt{ab} ở dạng tích các căn bậc 2 với $a < 0$ & $b < 0$. Áp dụng tính $\sqrt{(-25) \cdot (-64)}$.

Bài toán 114 ([**Thâ+23**], 32., p. 10). Rút gọn các biểu thức: (a) $\sqrt{4(a-3)^2}$ với $a \geq 3$ & $a \in \mathbb{R}$. (b) $\sqrt{9(b-2)^2}$ với $b < 2$ & $b \in \mathbb{R}$. (c) $\sqrt{a^2(a+1)^2}$ với $a > 0$ & $a \in \mathbb{R}$. (d) $\sqrt{b^2(b-1)^2}$ với $b < 0$ & $b \in \mathbb{R}$.

Bài toán 115 ([**Thâ+23**], 33., p. 10). (a) Tìm ĐKXD & biến đổi các biểu thức sau về dạng tích: $A(x) = \sqrt{x^2 - 4} + 2\sqrt{x - 2}, B(x) = 3\sqrt{x+3} + \sqrt{x^2 - 9}$. (b) Giải phương trình $A(x) = 0$ & $B(x) = 0$.

Bài toán 116 ([**Thâ+23**], 34., p. 10). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{x-5} = 3$. (b) $\sqrt{x-10} = -2$. (c) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{5}$. (d) $\sqrt{4-5x} = 12$.

Bài toán 117 ([**Thâ+23**], 35., p. 10). (a) Chứng minh: $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2 = \sqrt{(2n+1)^2} - \sqrt{(2n+1)^2 - 1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Viết đẳng thức trên khi $n = 1, 2, 3, 4$. (B) Đẳng thức trên còn đúng khi $n \in \mathbb{Z}$ & $n \in \mathbb{R}$ không?

Bài toán 118 ([**Chí+23**], ?1, p. 16). Tính & so sánh: $\sqrt{\frac{16}{25}}$ & $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}$.

Bài toán 119 ([**Chí+23**], DL, p. 16). Chứng minh: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a \geq 0, b > 0$.

Bài toán 120 ([**Chí+23**], Ví dụ 1, ?2, p. 17). Áp dụng quy tắc khai phương 1 thương, tính: (a) $\sqrt{\frac{25}{121}}$. (b) $\sqrt{\frac{9}{16} : \frac{25}{36}}$. (c) $\sqrt{\frac{225}{256}}$. (d) $\sqrt{0.0196}$.

Bài toán 121 ([**Chí+23**], Ví dụ 2, ?3, pp. 17-18). Tính: (a) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$. (b) $\sqrt{\frac{49}{8}} : \sqrt{3\frac{1}{8}}$. (c) $\frac{\sqrt{999}}{\sqrt{111}}$. (d) $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}}$.

Bài toán 122 ([**Chí+23**], Ví dụ 3, ?4, p. 18). Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{\frac{4a^2}{25}}$. (b) $\frac{\sqrt{27a}}{\sqrt{3a}}$ với $a > 0$. (c) $\sqrt{\frac{2a^2b^4}{50}}$. (d) $\frac{\sqrt{2ab^2}}{\sqrt{162}}$ với $a \geq 0$.

Bài toán 123 ([**Chí+23**], 28., p. 18). Tính: (a) $\sqrt{\frac{289}{225}}$. (b) $\sqrt{2\frac{14}{25}}$. (c) $\sqrt{\frac{0.25}{9}}$. (d) $\sqrt{\frac{8.1}{1.6}}$.

Bài toán 124 ([**Chí+23**], 29., p. 19). Tính: (a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$. (b) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{735}}$. (c) $\frac{\sqrt{12500}}{\sqrt{500}}$. (d) $\frac{\sqrt{6^5}}{\sqrt{2^3 \cdot 3^5}}$.

Bài toán 125 ([Chí+23], 30., p. 19). Rút gọn biểu thức: (a) $\frac{y}{x}\sqrt{\frac{x^2}{y^4}}$ với $x > 0$ & $y \neq 0$. (b) $2y^2\sqrt{\frac{x^4}{4y^2}}$ với $y < 0$. (c) $5xy\sqrt{\frac{25x^2}{y^6}}$ với $x < 0, y > 0$. (d) $0.2x^3y^3\sqrt{\frac{16}{x^4y^8}}$ với $xy \neq 0$.

Bài toán 126 ([Chí+23], 31., p. 19). (a) So sánh $\sqrt{25-16}$ & $\sqrt{25}-\sqrt{16}$. (b) Chứng minh: $\sqrt{a}-\sqrt{b} < \sqrt{a-b}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a > b > 0$.

Bài toán 127 ([Chí+23], 32., p. 19). Tính: (a) $\sqrt{1\frac{9}{16} \cdot 5\frac{4}{9} \cdot 0.01}$. (b) $\sqrt{1.44 \cdot 1.21 - 1.44 \cdot 0.4}$. (c) $\sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}}$. (d) $\sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}$.

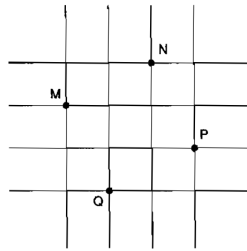
Bài toán 128 ([Chí+23], 33., p. 19). Giải phương trình: (a) $\sqrt{2}x - \sqrt{50} = 0$. (b) $\sqrt{3}x + \sqrt{3} = \sqrt{12} + \sqrt{27}$. (c) $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{12} = 0$. (d) $\frac{x^2}{\sqrt{5}} - \sqrt{20} = 0$.

Bài toán 129 ([Chí+23], 34., pp. 19–20). Rút gọn biểu thức: (a) $ab^2\sqrt{\frac{3}{a^2b^4}}$ với $a < b, b \neq 0$. (b) $\sqrt{\frac{27(a-3)^2}{48}}$ với $a > 3$. (c) $\sqrt{\frac{9+12a+4a^2}{b^2}}$ với $a \geq -1.5$ & $b < 0$. (d) $(a-b)\sqrt{\frac{ab}{(a-b)^2}}$ với $a < b < 0$.

Bài toán 130 ([Chí+23], 35., p. 20). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{(x-3)^2} = 9$. (b) $\sqrt{4x^2+4x+1} = 6$.

Bài toán 131 ([Chí+23], 36., p. 20). Đ/S? (a) $0.01 = \sqrt{0.0001}$. (b) $-0.5 = \sqrt{-0.25}$. (c) $6 < \sqrt{39} < 7$. (d) $(4 - \sqrt{13})2x < \sqrt{3}(4 - \sqrt{13}) \Leftrightarrow 2x < \sqrt{3}$.

Bài toán 132 ([Chí+23], 37., p. 20). Trên lưới ô vuông, mỗi hình vuông cạnh 1 cm, cho 4 điểm M, N, P, Q :



Xác định số đo cạnh, đường chéo & diện tích tứ giác $MNPQ$.

Bài toán 133 ([Thā+23], 36., p. 10). Áp dụng quy tắc khai phương 1 thương, tính: (a) $\sqrt{\frac{9}{169}}$. (b) $\sqrt{\frac{25}{144}}$. (c) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$. (d) $\sqrt{2\frac{7}{81}}$.

Bài toán 134 ([Thā+23], 37., p. 11). Áp dụng quy tắc chia căn bậc 2, tính: (a) $\frac{\sqrt{2300}}{\sqrt{23}}$. (b) $\frac{\sqrt{12.5}}{\sqrt{0.5}}$. (c) $\frac{\sqrt{192}}{\sqrt{12}}$. (d) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{150}}$.

Bài toán 135 ([Thā+23], 38., p. 11). Cho các biểu thức $A = \sqrt{\frac{2x+3}{x-3}}$, $B = \frac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x-3}}$. (a) Tìm $x \in \mathbb{R}$ lần lượt để A, B có nghĩa. (b) Với giá trị nào của $x \in \mathbb{R}$ thì $A = B$?

Bài toán 136 ([Thā+23], 39., p. 11). Biểu diễn $\sqrt{\frac{a}{b}}$ với $a, b < 0$ ở dạng thương của 2 căn thức. Áp dụng tính $\sqrt{\frac{-49}{-81}}$.

Bài toán 137 ([Thā+23], 40., p. 11). Rút gọn biểu thức: (a) $\frac{\sqrt{63y^3}}{\sqrt{7y}}$, $y > 0$. (b) $\frac{\sqrt{48x^3}}{\sqrt{3x^5}}$, $x > 0$. (c) $\frac{\sqrt{45mn^2}}{\sqrt{20m}}$, $m, n > 0$. (d) $\frac{\sqrt{16a^4b^6}}{\sqrt{128a^6b^6}}$, $a < 0, b \neq 0$.

Bài toán 138 ([Thā+23], 41., pp. 11–12). Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}+1}}$, $x \geq 0$. (b) $\frac{x-1}{\sqrt{y}-1}\sqrt{\frac{y-2\sqrt{y}+1}{(x-1)^4}}$, $x \neq 1$, $y \neq 1, y \geq 0$.

Bài toán 139 ([Thā+23], 42., p. 12). Rút gọn biểu thức với điều kiện đã cho của x rồi tính giá trị của nó: (a) $\sqrt{\frac{(x-2)^4}{(3-x)^2}} + \frac{x^2-1}{x-3}$, $x < 3$, tại $x = 0.5$. (b) $4x - \sqrt{8} + \frac{\sqrt{x^3+2x^2}}{\sqrt{x+2}}$, $x > -2$, tại $x = -\sqrt{2}$.

Bài toán 140 ([[Thâ+23](#)], 43., p. 12). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{\frac{2x-3}{x-1}} = 2$. (b) $\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} = 2$. (c) $\sqrt{\frac{4x+3}{x+1}} = 3$. (d) $\frac{\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+1}} = 3$.

Bài toán 141 ([[Thâ+23](#)], 44., p. 12). Chứng minh bất đẳng thức Cauchy cho 2 số không âm:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán 142 ([[Thâ+23](#)], 45., p. 12). Chứng minh:

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0.$$

Bài toán 143 ([[Thâ+23](#)], 46., p. 12). Chứng minh: $a + \frac{1}{a} \geq 2, \forall a \in \mathbb{R}, a > 0$.

Bài toán 144 ([[Thâ+23](#)], 52., p. 13). Chứng $\sqrt{2}$ là số vô tỷ.

Bài toán 145 ([[Thâ+23](#)], 53., p. 13). Chứng minh: (a) $\sqrt{3}$ là số vô tỷ. (b) $5\sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}$ đều là số vô tỷ.

Bài toán 146 ([[Thâ+23](#)], 54., p. 14). Tìm tập hợp các số thực x thỏa mãn bất đẳng thức $\sqrt{x} > 2$ & biểu diễn tập hợp đó trên trục số.

Bài toán 147 ([[Thâ+23](#)], 55., p. 14). Tìm tập hợp các số thực x thỏa mãn bất đẳng thức $\sqrt{x} < 3$ & biểu diễn tập hợp đó trên trục số.

Bài toán 148 ([[Tuy23](#)], Thí dụ 3, p. 9). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}}$.

Bài toán 149 ([[Tuy23](#)], Thí dụ 4, p. 10). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sqrt{x-5} + \sqrt{13-x}$.

Bài toán 150 ([[Tuy23](#)], 14., p. 11). Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{3}} - \sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{7}-2}}$.

Bài toán 151 ([[Tuy23](#)], 15., p. 11). Cho 2 số có tổng bằng $\sqrt{19}$ & có hiệu bằng $\sqrt{7}$. Tính tích của 2 số đó.

Bài toán 152 ([[Tuy23](#)], 16., p. 11). Tính \sqrt{A} biết: (a) $A = 13 - 2\sqrt{42}$. (b) $A = 46 + 6\sqrt{5}$. (c) $A = 12 - 3\sqrt{15}$.

Bài toán 153 ([[Tuy23](#)], 17., p. 12). Rút gọn biểu thức: (a) $A = \sqrt{6 + 2\sqrt{2}\sqrt{3 - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}}$. (b) $B = \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$. (c) $C = \sqrt{3 - \sqrt{5}}(\sqrt{10} - \sqrt{2})(3 + \sqrt{5})$.

Bài toán 154 ([[Tuy23](#)], 18., p. 12). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$.

Bài toán 155 ([[Tuy23](#)], 19., p. 12). Cho $a > 0$, so sánh $\sqrt{a+1} + \sqrt{a+3}$ với $2\sqrt{a+2}$.

Bài toán 156 ([[Tuy23](#)], 20., p. 12). Cho $a, b, x, y > 0$. Chứng minh $\sqrt{ax} + \sqrt{by} \leq \sqrt{(a+b)(x+y)}$.

Bài toán 157 ([[Tuy23](#)], 21., p. 12). (a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-8}$. (b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$.

Bài toán 158 ([[Tuy23](#)], 22., p. 12). Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} \left[\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3} \right]}{2 + \sqrt{1 - x^2}}.$$

Bài toán 159 ([[Tuy23](#)], 23., p. 12). Tìm x, y biết $x + y + 12 = 4\sqrt{x} + 6\sqrt{y-1}$.

Bài toán 160 ([[Tuy23](#)], 24., p. 12). Tìm x, y, z biết $\sqrt{x-a} + \sqrt{y-b} + \sqrt{z-c} = \frac{1}{2}(x+y+z)$, trong đó $a+b+c=3$.

Bài toán 161 ([[Tuy23](#)], 25., p. 12). Giải phương trình $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8+6\sqrt{x-1}} = 5$.

Bài toán 162 ([[Tuy23](#)], 26., p. 12). Giải phương trình $\sqrt{x^2-5x+6} + \sqrt{x+1} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2-2x-3}$.

Bài toán 163 ([[Tuy23](#)], 27., p. 12). Chứng minh bất đẳng thức $\sqrt{n+a} + \sqrt{n-a} < 2\sqrt{n}$ vpos $0 < |a| \leq n$. Áp dụng (không dùng máy tính hoặc bảng số): Chứng minh: $\sqrt{101} - \sqrt{99} > 0.1$.

Bài toán 164 ([[Tuy23](#)], 28., p. 13). Chứng minh: $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Áp dụng: Cho $S = \sum_{i=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}}$. Chứng minh $18 < S < 19$.

Bài toán 165 ([Tuy23], 29., p. 13). Chứng minh: $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Áp dụng: Chứng minh: $S = \sum_{i=1}^{2500} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2500}} < 100$.

Bài toán 166 ([Tuy23], 30., p. 13). Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh $x + y + z \geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$.

Bài toán 167 ([Tuy23], 31., p. 13). Cho $A = \sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}$. Chứng minh $A \leq 4$.

Bài toán 168 ([Tuy23], 32., p. 13). Cho $B = \frac{x^3}{1+y} + \frac{y^3}{1+x}$ trong đó x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy = 1$. Chứng minh $B \geq 1$.

Bài toán 169 ([Tuy23], 33., p. 13). Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 2$. Chứng minh $xyz \leq \frac{1}{8}$.

Bài toán 170 ([Tuy23], 34., p. 13). Tìm các số dương x, y, z sao cho $x + y + z = 3$ & $x^4 + y^4 + z^4 = 3xyz$.

Bài toán 171 ([Tuy23], 35., p. 13). Cho $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 10$. Chứng minh: $x + y \geq 20$.

Bài toán 172 ([Tuy23], 36., p. 13). Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z = 1$. Chứng minh: $\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} \leq \sqrt{6}$.

Bài toán 173 ([Bin23], Ví dụ 8, p. 10). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} - \sqrt{x - \sqrt{2x-1}}$.

Bài toán 174 ([Bin23], Ví dụ 9, p. 11). Chứng minh số $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ là số vô tỷ.

Bài toán 175 ([Bin23], 11., pp. 11–12). Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{11-2\sqrt{10}}$. (b) $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$. (c) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$. (d) $\sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{9+4\sqrt{5}}$. (e) $\sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}}$. (f) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{2} + \sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{7+2\sqrt{10}}}$. (g) $\sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}$. (h) $\sqrt{4 + \sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10+2\sqrt{5}}}$. (i) $\sqrt{94-42\sqrt{5}} - \sqrt{94+42\sqrt{5}}$.

Bài toán 176 ([Bin23], 12., p. 12). Tính: (a) $(4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$. (b) $\sqrt{3 - \sqrt{5}}(\sqrt{10} - \sqrt{2})(3 + \sqrt{5})$. (c) $\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Bài toán 177 ([Bin23], 13., p. 12). Chứng minh các hằng đẳng thức sau với $b \geq 0$, $a \geq \sqrt{b}$: (a) $\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2(a \pm \sqrt{a^2 - b})}$. (b) $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$.

Bài toán 178 ([Bin23], 14., p. 12). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x + 2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x - 2\sqrt{2x-4}}$.

Bài toán 179 ([Bin23], 15., p. 12). Cho biểu thức $A = \frac{x + \sqrt{x^2 - 2x}}{x - \sqrt{x^2 - 2x}} - \frac{x - \sqrt{x^2 - 2x}}{x + \sqrt{x^2 - 2x}}$. (a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức A. (b) Rút gọn biểu thức A. (c) Tìm giá trị của x để $A < 2$.

Bài toán 180 ([Bin23], 16., p. 12). Lập 1 phương trình bậc 2 với các hệ số nguyên, trong đó: (a) $2 + \sqrt{3}$ là 1 nghiệm của phương trình. (b) $6 - 4\sqrt{2}$ là 1 nghiệm của phương trình.

Bài toán 181 ([Bin23], 17., p. 13). Chứng minh các số sau là số vô tỷ: (a) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$. (b) $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Bài toán 182 ([Bin23], 18., p. 13). Có tồn tại các số hữu tỷ dương a, b hay không nếu: (a) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2}$. (b) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{\sqrt{2}}$.

Bài toán 183 ([Bin23], 19., p. 13). Cho 3 số $x, y, \sqrt{x} + \sqrt{y}$ là các số hữu tỷ. Chứng minh mỗi số \sqrt{x}, \sqrt{y} đều là số hữu tỷ.

Bài toán 184 ([Bin23], 20., p. 13). Cho a, b, c, d là các số dương. Chứng minh tồn tại 1 số dương trong 2 số $2a + b - 2\sqrt{cd}$ & $2c + d - 2\sqrt{ab}$.

Bài toán 185 ([Bin23], 21*, p. 13). (a) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}}$ với $a > 0$. (b) Tính giá trị của tổng $B = \sum_{i=1}^{99} \sqrt{1 + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(i+1)^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}}$.

Bài toán 186 ([Bin23], 22*, p. 13). (a) Nêu 1 cách tính nhẩm 997^2 . (b) Tính tổng các chữ số của A biết $\sqrt{A} = 99 \dots 96$ (có 100 chữ số 9).

4 Biến Đổi Đơn Giản Biểu Thức Chứa Căn Thức Bậc 2

Bài toán 187 ([Bin23], Ví dụ 10, p. 14). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$.

Bài toán 188 ([Bin23], Ví dụ 11, p. 14). Tính giá trị của biểu thức

$$M = \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{(i+1)\sqrt{i} + i\sqrt{i+1}} = \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{25\sqrt{24} + 24\sqrt{25}}.$$

Bài toán 189 ([Bin23], 23., p. 15). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{1-a} + \sqrt{a(a-1)} + a\sqrt{\frac{a-1}{a}}$.

Bài toán 190 ([Bin23], 24., p. 15). Chứng minh các hằng đẳng thức: (a) $\sqrt{10 + \sqrt{60} - \sqrt{24} - \sqrt{40}} = \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{2}$. (b) $\sqrt{6 + \sqrt{24} + \sqrt{12} + \sqrt{8}} - \sqrt{3} = \sqrt{2} + 1$.

Bài toán 191 ([Bin23], 25., p. 15). Cho $A = \sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}}$. Biểu diễn A dưới dạng tổng của 3 căn thức.

Bài toán 192 ([Bin23], 26., p. 15). Rút gọn biểu thức $A = \frac{x+3+2\sqrt{x^2-9}}{2x-6+\sqrt{x^2-9}}$.

Bài toán 193 ([Bin23], 27., p. 15). Rút gọn biểu thức $B = \frac{x^2+5x+6+x\sqrt{9-x^2}}{3x-x^2+(x+2)\sqrt{9-x^2}}$.

Bài toán 194 ([Bin23], 28., p. 15). Rút gọn biểu thức:

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}},$$

$$B = \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{\sqrt{i} - \sqrt{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{1} - \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{4}} - \cdots - \frac{1}{\sqrt{24} - \sqrt{25}}.$$

5 Rút Gọn Biểu Thức Có Chứa Căn Thức Bậc 2

Bài toán 195 ([Tuy23], Thí dụ 5, p. 14). Cho $A = \sqrt{11 + \sqrt{96}}$ & $B = \frac{2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$. Không dùng máy tính hoặc bảng số, so sánh A & B .

Bài toán 196 ([Tuy23], Thí dụ 6, p. 15). Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} - \frac{x-3}{\sqrt{x-1} - \sqrt{2}} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{2x} - x} \right)$.
(a) Rút gọn A . (b) Tính giá trị của A với $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

Bài toán 197 ([Tuy23], 37., pp. 15–16). Không dùng máy tính hoặc bảng số, so sánh các số sau: (a) $-3\sqrt{11}$ & $-7\sqrt{2}$. (b) $\frac{7}{2}\sqrt{\frac{1}{12}}$ & $\frac{9}{4}\sqrt{\frac{1}{5}}$. (c) $\sqrt{\frac{4}{27}}$ & $\sqrt{\frac{3}{26}}$.

Bài toán 198 ([Tuy23], 38., p. 16). Không dùng máy tính hoặc bảng số, chứng minh $4\sqrt{5} - 3\sqrt{2} < 5$.

Bài toán 199 ([Tuy23], 39., p. 16). Cho $A = \sqrt{x^2+1} - x - \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x}$ trong đó $x \in \mathbb{R}$. Xác định $x \in \mathbb{R}$ để giá trị của A là 1 số tự nhiên.

Bài toán 200 ([Tuy23], 40., p. 16). Trục căn thức ở mẫu của các biểu thức sau: (a) $A = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{2c}}$ trong đó $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện c là trung bình nhân của a & b . (b) $B = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}}$ trong đó $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn điều kiện $ab = cd$ & $a + b \neq c + d$.

Bài toán 201 ([Tuy23], 41., p. 16). Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ sao cho $x > y > 0$ thỏa mãn điều kiện $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{931}$.

Bài toán 202 ([Tuy23], 42., p. 16). Chứng minh: $\frac{2\sqrt{mn}}{\sqrt{m} + \sqrt{n} + \sqrt{m+n}} = \sqrt{m} + \sqrt{n} - \sqrt{m+n}$. Áp dụng tính $\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}}$.

Bài toán 203 ([Tuy23], 43., p. 16). Chứng minh: $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Áp dụng tính tổng:

$$S = \sum_{i=1}^{399} \frac{1}{(i+1)\sqrt{i} + i\sqrt{i+1}} = \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{400\sqrt{399} + 399\sqrt{400}}.$$

Bài toán 204 ([Tuy23], 44., p. 16). Tìm $n \in \mathbb{N}$ nhỏ nhất sao cho $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 0.05$.

Bài toán 205 ([Tuy23], 45., p. 17). Cho $A = \sum_{i=1}^{120} \frac{1}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{120} + \sqrt{121}}$, $B = \sum_{i=1}^{35} \frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{35}}$. Chứng minh $A < B$.

Bài toán 206 ([Tuy23], 46., p. 17). Cho $x, y, z > 0$ & khác nhau đôi một. Chứng minh giá trị của biểu thức

$$A = \frac{x}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{z})} + \frac{y}{(\sqrt{y} - \sqrt{z})(\sqrt{y} - \sqrt{x})} + \frac{z}{(\sqrt{z} - \sqrt{x})(\sqrt{z} - \sqrt{y})}$$

không phụ thuộc vào giá trị của các biến.

Bài toán 207 ([Tuy23], 47., p. 17). Cho biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{5}{x - \sqrt{x} - 6} - \frac{\sqrt{x} - 2}{3 - \sqrt{x}}$. (a) Rút gọn A . (b) Tìm giá trị lớn nhất của A .

Bài toán 208 ([Tuy23], 48., p. 17). Cho $A = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left(1 + \frac{x + y + 2xy}{1 - xy} \right)$. (a) Rút gọn A . (b) Tính giá trị của P với $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$. (c) Tìm giá trị lớn nhất của A .

Bài toán 209 ([Tuy23], 49., p. 17). Cho $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy} + \sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 1} + \frac{2\sqrt{z}}{\sqrt{zx} + 2\sqrt{z} + 2}$. Biết $xyz = 4$, tính \sqrt{P} .

Bài toán 210 ([Bin23], Ví dụ 12, p. 15). Tính: $A = \left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \right) : \left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} - \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \right)$.

Bài toán 211 ([Bin23], Ví dụ 13, p. 16). Rút gọn biểu thức $A = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$.

Bài toán 212 ([Bin23], Ví dụ 14, p. 16). Cho $A = \frac{\sqrt{a} + 6}{\sqrt{a} + 1}$. (a) Tìm các số nguyên a để A là số nguyên. (b) Chứng minh với $a = \frac{4}{9}$ thì A là số nguyên. (c) Tìm các số hữu tỷ a để A là số nguyên.

Bài toán 213 ([Bin23], 29., p. 18). Rút gọn biểu thức: (a) $A = \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1 - \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}}$. (b) $B = \left(\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{a}}{1 - a} \right)^2$. (c) $C = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}} : \left[\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \frac{1}{x + y + 2\sqrt{xy}} + \frac{2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^3} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \right]$ với $x = 2 - \sqrt{3}$ & $y = 2 + \sqrt{3}$.

Bài toán 214 ([Bin23], 30., p. 18). Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}$.

Bài toán 215 ([Bin23], 31., p. 18). Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x^2 - y^2}} - \sqrt{x - \sqrt{x^2 - y^2}}}{\sqrt{2(x-y)}}$ với $x > y > 0$.

Bài toán 216 ([Bin23], 32., p. 18). Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right)$ với $x = \frac{a^2 + b^2}{2ab}$ & $b > a > 0$.

Bài toán 217 ([Bin23], 33., p. 18). Rút gọn biểu thức $B = \frac{2a\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$ với $x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1-a}{a}} - \sqrt{\frac{a}{1-a}} \right)$ & $0 < a < 1$.

Bài toán 218 ([Bin23], 34., p. 18). Rút gọn biểu thức $A = a + b - \sqrt{\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{c^2+1}}$ với $a, b, c > 0$ & $ab + bc + ca = 1$.

Bài toán 219 ([Bin23], 35., p. 18). Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}} \cdot \sqrt{2x-1}$.

Bài toán 220 ([Bin23], 36., p. 18). Chứng minh hằng đẳng thức sau với $x \geq 2$

$$\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{\frac{x^2-4}{x}}} + \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{\frac{x^2-4}{x}}} = \sqrt{\frac{2x+4}{\sqrt{x}}}.$$

Bài toán 221 ([Bin23], 37., p. 18). Cho $a = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{-1 - \sqrt{2}}{2}$. Tính $a^7 + b^7$.

Bài toán 222 ([Bin23], 38., p. 19). Cho biết $\sqrt{x^2 - 6x + 13} - \sqrt{x^2 - 6x + 10} = 1$. Tính $\sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{x^2 - 6x + 10}$.

Bài toán 223 ([Bin23], 39., p. 19). Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{a} + 2}{\sqrt{a} - 2}$. (a) Tìm các số nguyên a để A là số nguyên. (b) Tìm các số hữu tỷ a để A là số nguyên.

Bài toán 224 ([Bin23], 40., p. 19). Cho $a = \sqrt{2} - 1$. (a) Viết a^2, a^3 dưới dạng $\sqrt{m} - \sqrt{m-1}$ trong đó m là số tự nhiên. (b) Chứng minh với mọi số nguyên dương n , số a^n viết được dưới dạng trên.

6 Cube Root, nth Root – Căn Bậc 3, Căn Bậc n

Bài toán 225 (Program to print out 1st n cube roots). Viết chương trình Pascal, C/C++, Python xuất ra căn bậc 3 của n số tự nhiên đầu tiên với $n \in \mathbb{N}^*$ được nhập từ bàn phím.

Bài toán 226. Viết chương trình Pascal, C/C++, Python để kiểm tra 1 số $n \in \mathbb{N}^*$ được nhập từ bàn phím có phải là lập phương của 1 số tự nhiên hay không.

Bài toán 227 (Program to print out 1st n nth roots). Viết chương trình Pascal, C/C++, Python xuất ra căn bậc n của m số tự nhiên đầu tiên với $m, n \in \mathbb{N}^*$ được nhập từ bàn phím.

Bài toán 228. Viết chương trình Pascal, C/C++, Python để kiểm tra 1 số m được nhập từ bàn phím có phải là lũy thừa bậc n của 1 số tự nhiên hay không với $m, n \in \mathbb{N}^*$ được nhập từ bàn phím.

Bài toán 229 (Mở rộng [Tuy23], Thí dụ 1, p. 5). Cho $x \in \mathbb{R}$. So sánh $\sqrt[3]{x}$ với x .

Giải. $\sqrt[3]{x}$ xác định $\forall x \in \mathbb{R}$. Xét các trường hợp: (a) $\sqrt[3]{x} = x \Leftrightarrow x = x^3 \Leftrightarrow x - x^3 = 0 \Leftrightarrow x(1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow x(1 - x)(1 + x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \pm 1\}$. (b) $\sqrt[3]{x} < x \Leftrightarrow x < x^3 \Leftrightarrow x - x^3 < 0 \Leftrightarrow x(1 - x^2) < 0 \Leftrightarrow x(1 - x)(1 + x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$ hoặc $x > 1$, trong đó phép biến đổi tương đương cuối cùng thu được nhờ lập bảng xét dấu. (c) $\sqrt[3]{x} > x \Leftrightarrow x > x^3 \Leftrightarrow x - x^3 > 0 \Leftrightarrow x(1 - x^2) > 0 \Leftrightarrow x(1 - x)(1 + x) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ hoặc $0 < x < 1$, trong đó phép biến đổi tương đương cuối cùng cũng thu được nhờ lập bảng xét dấu. Vậy: $\sqrt[3]{x} = x \Leftrightarrow x \in \{0, \pm 1\}$, $\sqrt[3]{x} < x \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$, $\sqrt[3]{x} > x \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$. \square

Bài toán 230 (Mở rộng [Tuy23], Thí dụ 1, p. 5). Cho $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. So sánh $\sqrt[n]{x}$ với x .

Bài toán 231 ([Tuy23], Thí dụ 7, p. 19). Tính $x = \sqrt[3]{17\sqrt{5} + 38} - \sqrt[3]{17\sqrt{5} - 38}$.

Bài toán 232 ([Tuy23], Thí dụ 8, p. 20). Giải & biện luận phương trình $(x - a)^n = a^2 - 2a + 1$ với $n \in \mathbb{N}^*$, a là tham số.

Bài toán 233 ([Tuy23], 50., p. 21). Tính: (a) $\sqrt[3]{8\sqrt{5} - 16} \sqrt[3]{8\sqrt{5} + 16}$. (b) $\sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} + \sqrt[6]{8}$. (c) $\sqrt[3]{4} \sqrt[3]{1 - \sqrt{3}} \sqrt[6]{4 + 2\sqrt{3}}$.

Bài toán 234 ([Tuy23], 51., p. 21). (a) Tính $\frac{2}{\sqrt[3]{3} - 1} - \frac{4}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1}$. (b) Cho $x = \frac{2}{2\sqrt[3]{2} + 2 + \sqrt[3]{4}}$, $y = \frac{6}{2\sqrt[3]{2} - 2 + \sqrt[3]{4}}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{xy}{x + y}$.

Bài toán 235 ([Tuy23], 52., p. 21). Cho $x = \frac{\sqrt[3]{8 - 3\sqrt{5}} + \sqrt[3]{64 - 12\sqrt{20}}}{\sqrt[3]{57}} \sqrt[3]{8 + 3\sqrt{5}}$, $y = \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt{2}}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{2}} + \frac{\sqrt{2} - 9\sqrt[3]{9}}{\sqrt[4]{2} - \sqrt[3]{81}}$. Tính xy .

Bài toán 236 ([Tuy23], 53., p. 22). Tính: (a) $x = \sqrt[3]{5 + 2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5 - 2\sqrt{13}}$. (b) $x = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$. (c) $x = \sqrt[3]{182 + \sqrt{33125}} + \sqrt[3]{182 - \sqrt{33125}}$.

Bài toán 237 ([Tuy23], 54., p. 22). Cho $A = \sqrt[3]{60 + \sqrt[3]{60 + \sqrt[3]{60 + \cdots + \sqrt[3]{60}}}}$. Chứng minh $3 < A < 3$. Tìm $\lfloor A \rfloor$.

Bài toán 238 ([Tuy23], 55., p. 22). Cho $A = \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \cdots + \sqrt{20}}}}$, $B = \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \cdots + \sqrt[3]{24}}}}$. Chứng minh $7 < A + B < 8$. Tìm $\lfloor A + B \rfloor$.

Bài toán 239 ([Tuy23], 56., p. 22). So sánh $a = \sqrt[3]{5\sqrt{2}}$ & $b = \sqrt{5\sqrt[3]{2}}$.

Bài toán 240 ([Tuy23], 57., p. 22). Cho $ax^3 = by^3 = cz^3$ & $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Chứng minh $\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$.

Bài toán 241 ([Tuy23], 58., p. 22). Giải phương trình: (a) $x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3}$. (b) $x^3 + 2x^2 - 4x = -\frac{8}{3}$.

Bài toán 242 ([Tuy23], 59., p. 22). Giải phương trình: (a) $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{5x}$. (b) $2\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2} = \sqrt[3]{x^2 - 4}$.

Bài toán 243 ([Tuy23], 60., p. 22). Giải phương trình: $\sqrt[3]{x-5} + \sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{3x+2} = -2$.

Bài toán 244 ([Tuy23], 61., p. 22). Giải phương trình: $\sqrt[n]{(x-2)^2} + 4\sqrt[n]{x^2-4} = 5\sqrt[n]{(x+2)^2}$.

Bài toán 245 ([Tuy23], 62., p. 22). Cho $A = (a+b)(b+c)(c+a)$ trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh $A + 1 \geq 3(a+b+c)$.

Bài toán 246 ([Bin23], Ví dụ 15, p. 20). Chứng tỏ số $m = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ là 1 nghiệm của phương trình $x^3 + 3x - 4 = 0$.

Bài toán 247 ([Bin23], Ví dụ 16, p. 20). Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$.

Bài toán 248 ([Bin23], 41., p. 20). Tính: (a) $\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 2}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$. (b) $\sqrt{3 + \sqrt{3} + \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}}$. (c) $\frac{4 + 2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}}$.

Bài toán 249 ([Bin23], 42., p. 21). Số $m = \sqrt[3]{4 + \sqrt{80}} - \sqrt[3]{4 - \sqrt{80}}$ có phải là nghiệm của phương trình $x^3 + 12x - 8 = 0$ không?

Bài toán 250 ([Bin23], 43., p. 21). Lập 1 phương trình bậc 3 với các hệ số nguyên, trong đó: (a) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ là 1 nghiệm của phương trình. (b) $\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}$ là 1 nghiệm của phương trình.

Bài toán 251 ([Bin23], 44., p. 21). Tính: (a) $A = \sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$. (b) $B = \sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$. (c) $C = \sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$. (d) $D = \sqrt[3]{2+10\sqrt{\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{2-10\sqrt{\frac{1}{27}}}$. (e) $E = \sqrt[3]{4+\frac{5}{3}\sqrt{\frac{31}{3}}} + \sqrt[3]{4-\frac{5}{3}\sqrt{\frac{31}{3}}}$.

Bài toán 252 ([Bin23], 45., p. 21). Tìm x biết: (a) $\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{2-x} = 1$. (b) $2x^3 = (x-1)^3$.

Bài toán 253 ([Bin23], 46., p. 21). Cho $am^3 = bn^3 = cp^3$ & $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1$. Chứng minh: $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{am^2 + bn^2 + cp^2}$.

Bài toán 254 ([Bin23], 47., p. 21). Tính: (a) $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}(\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}})$. (b) $\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}} - \sqrt{2}$. (c) $\sqrt[4]{56-24\sqrt{5}}$. (d) $1 + \sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}$. (e) $\frac{2}{\sqrt{4-3\sqrt{5}+2\sqrt{5}-\sqrt[4]{125}}}$.

7 Miscellaneous

Bài toán 255 ([Tuy23], Thí dụ 15, pp. 29-30). Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right)$. (a) Rút gọn A . (b) Tính giá trị của A với $x = 7 - 4\sqrt{3}$. (c) Tìm giá trị lớn nhất của a để $P > a$.

Bài toán 256 ([Tuy23], 80., p. 31). Chứng minh: $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(a+b)^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} \right|$, $\forall a, b \in \mathbb{R}, ab(a+b) \neq 0$. Áp dụng tính $A = \sqrt{1 + 999^2 + \frac{999^2}{1000^2}} + \frac{999}{1000}$.

Bài toán 257 ([Tuy23], 81., p. 31). Rút gọn biểu thức $A = (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$.

Bài toán 258 ([Tuy23], 82., p. 31). Không dùng máy tính hoặc bảng số, chứng minh: $\sqrt{14} - \sqrt{13} < 2\sqrt{3} - \sqrt{11}$.

Bài toán 259 ([Tuy23], 83., p. 31). Giải phương trình: $\frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 1$.

Bài toán 260 ([Tuy23], 84., p. 31). Tìm x, y, z biết $x + y + z + 35 = 2(2\sqrt{x+1} + 3\sqrt{y+2} + 4\sqrt{z+3})$.

Bài toán 261 ([Tuy23], 85., p. 31). Cho $a > 0, b > 0$ & $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. Chứng minh: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1}$.

Bài toán 262 ([Tuy23], 86., p. 31). Chứng minh: $A = \sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{2} + \sqrt{10}$.

Bài toán 263 ([Tuy23], 87., p. 31). Chứng minh:

$$\frac{1}{4} < \frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}} < \frac{3}{10},$$

(ở tử có n dấu căn, ở mẫu có $n-1$ dấu căn).

Bài toán 264 ([Tuy23], 88., p. 31). Giải phương trình: $\sqrt{x+2-3\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x-2+3\sqrt{2x-5}} = 2\sqrt{2}$.

Bài toán 265 ([Tuy23], 89., p. 31). Giải phương trình: $\sqrt[3]{(65+x)^2} + 4\sqrt[3]{(65-x)^2} = 5\sqrt[3]{65^2 - x^2}$.

Bài toán 266 ([Tuy23], 90., p. 32). Giải phương trình ẩn x : $\frac{(a-x)\sqrt[4]{x-b} + (x-b)\sqrt[4]{a-x}}{\sqrt[4]{a-x} + \sqrt[4]{x-b}} = \frac{a-b}{2}$ với $a > b$.

Bài toán 267 ([Tuy23], 91., p. 32). Cho biểu thức $A = \sum_{i=1}^{199} \frac{1}{\sqrt{i(200-i)}} = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 199}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 198}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{199 \cdot 1}}$. Chứng minh $A > 1.99$.

Bài toán 268 ([Tuy23], 92., p. 32). Cho n số dương a_1, a_2, \dots, a_n . Chứng minh:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

Bài toán 269 ([Tuy23], 93., p. 32). Cho các số thực dương a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $abcd = 1$. Chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + a(b+c) + b(c+d) + c(d+a) + d(a+b) \geq 12$.

Bài toán 270 ([Tuy23], 94., p. 32). Giải phương trình: $\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x^2+x+1}} = \frac{7}{4}$.

Bài toán 271 ([Tuy23], 95., p. 32). Giải phương trình: $\sqrt{x+x^2} + \sqrt{x-x^2} = x+1$.

Bài toán 272 ([Tuy23], 96., p. 32). Cho $A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$ với $0 \leq x \leq 1$. Rút gọn biểu thức $B = 1 - \sqrt{A+x+1}$.

Bài toán 273 ([Tuy23], 97., p. 32). Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$. (a) Rút gọn A . (b) Tính giá trị của A với $x = 14 - 6\sqrt{5}$. (c) Tìm GTNN của A .

Bài toán 274 ([BNS23], Ví dụ 1.1, p. 5). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{(7+4\sqrt{3})(a-1)^2}$.

Bài toán 275 ([BNS23], Ví dụ 1.2, p. 6). Cho biểu thức $A = \sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$. (a) Tìm điều kiện xác định của A . (b) Rút gọn biểu thức A với $1 \leq a < 2$. (c) Rút gọn biểu thức A với $a \geq 2$.

Bài toán 276 ([BNS23], Ví dụ 1.3, p. 6). Đơn giản biểu thức $A = \left(\sqrt{8+2\sqrt{7}} + 2\sqrt{8-2\sqrt{7}} \right) (\sqrt{63}+1)$.

Bài toán 277 ([BNS23], Ví dụ 1.4, p. 6). Tính tổng $A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$.

Bài toán 278 ([BNS23], Ví dụ 1.5, p. 6). Tính $A = \frac{\sqrt{7-2\sqrt{10}}(7+2\sqrt{10})(74-22\sqrt{10})}{\sqrt{125-4\sqrt{50}+5\sqrt{20}+\sqrt{8}}}$.

Bài toán 279 ([BNS23], Ví dụ 1.6, p. 7). Cho $a = \sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}} + \sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$. Chứng minh: $a^2 - 2a - 2 = 0$.

Bài toán 280 ([BNS23], Ví dụ 1.7, p. 7). Cho $a = \sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$. Tính

$$A = \frac{a^4 - 4a^3 + a^2 + 6a + 4}{a^2 - 2a + 12}.$$

Bài toán 281 ([BNS23], Ví dụ 1.8, p. 7). Cho $f(x) = \frac{1+\sqrt{1+x}}{x+1} + \frac{1+\sqrt{1-x}}{x-1}$ & $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tính $f(a)$.

Bài toán 282 ([BNS23], Ví dụ 1.9, p. 8). Giả thiết $x, y, z > 0$ & $xy + yz + zx = a$. Chứng minh

$$x\sqrt{\frac{(a+y^2)(a+z^2)}{a+x^2}} + y\sqrt{\frac{(a+z^2)(a+x^2)}{a+y^2}} + z\sqrt{\frac{(a+x^2)(a+y^2)}{a+z^2}} = 2a.$$

Bài toán 283 ([BNS23], 1.1, p. 8). Biểu diễn $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ thành $a+b\sqrt{5}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$.

Bài toán 284 ([BNS23], 1.2, p. 8). Đơn giản biểu thức $A = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{18} + \sqrt{28-16\sqrt{3}}$.

Bài toán 285 ([BNS23], 1.3, p. 8). Chứng minh $\sqrt{10+2\sqrt{24}} - \sqrt{10-2\sqrt{24}} = 4$.

Bài toán 286 ([BNS23], 1.4, p. 8). Tính $A = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Bài toán 287 ([BNS23], 1.5, p. 9). Tính tích ab với

$$a = \sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{3+\sqrt{7+\sqrt{2}}}, \quad b = \sqrt{3+\sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{2}}}}\sqrt{3-\sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{2}}}}.$$

Bài toán 288 ([BNS23], 1.6, p. 9). Chứng minh $\frac{4}{\sqrt{5}-1} + \frac{3}{\sqrt{5}-2} + \frac{16}{\sqrt{5}-3} = -5$.

Bài toán 289 ([BNS23], 1.7, p. 9). Chứng minh $\left(\frac{2}{\sqrt{6}-1} + \frac{3}{\sqrt{6}-2} + \frac{3}{\sqrt{6}-3}\right) \frac{5}{9\sqrt{6}+4} = \frac{1}{2}$.

Bài toán 290 ([BNS23], 1.8, p. 9). Cho $f(x) = \frac{x+\sqrt{5}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{5}}} + \frac{x-\sqrt{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{5}}}$. Tính $f(3)$.

Bài toán 291 ([BNS23], 1.9, p. 9). Cho $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ $\forall a = \frac{4}{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}$. Tính $f(a)$.

Bài toán 292 ([BNS23], Ví dụ 2.1, p. 10). Chứng minh với $ab \neq 0$: $\frac{\sqrt[3]{a^5b^7}}{\sqrt[3]{a^2b}} - \frac{\sqrt[3]{a^4b^8}}{\sqrt[3]{ab^2}} = 0$.

Bài toán 293 ([BNS23], Ví dụ 2.2, p. 10). Chứng minh với $abc \neq 0$: $\frac{\sqrt[3]{a^4b^5c^7}}{\sqrt[3]{ab^2c}} = abc^2$.

Bài toán 294 ([BNS23], Ví dụ 2.3, p. 10). Với $a \geq 2 + \sqrt{2}$ \forall

$$u = \sqrt[3]{\left(a + \frac{2}{a}\right)^3 - 3a^2 - \frac{12}{a^2} + 3\left(a + \frac{2}{a}\right) - 13}, v = \sqrt{a^2 + \frac{4}{a^2} - 8\left(a + \frac{2}{a}\right) + 20}.$$

Chứng minh $u - v = 3$.

Bài toán 295 ([BNS23], Ví dụ 2.4, p. 11). Đơn giản biểu thức $A = \sqrt[3]{8(7+5\sqrt{2})} + \sqrt[3]{216(7-5\sqrt{2})} + 4\sqrt{2} - 7$.

Bài toán 296 ([BNS23], Ví dụ 2.5, p. 11). Chứng minh $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1$.

Bài toán 297 ([BNS23], Ví dụ 2.6, p. 11). Chứng minh nếu $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ thì $a^3 + 3a = 4$.

Bài toán 298 ([BNS23], Ví dụ 2.7, p. 11). Chứng minh:

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}} + 3\sqrt[3]{2}\right)\sqrt{3}}}{3+\sqrt[6]{108}} = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}.$$

Bài toán 299 ([BNS23], Ví dụ 2.8, p. 12). Chứng minh nếu $\sqrt[3]{(a+1)^2} + \sqrt[3]{a^2-1} + \sqrt[3]{(a-1)^2} = 1$ thì $\sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a-1} = 2$.

Bài toán 300 ([BNS23], Ví dụ 2.9, p. 12). Đơn giản biểu thức $A = \frac{x+1}{2\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}+x+\frac{1}{x}}$ với $x \notin \{-1, 0\}$.

Bài toán 301 ([BNS23], Ví dụ 2.10, p. 12). Cho $a = \sqrt{2} + \sqrt{7 - \sqrt[3]{61+46\sqrt{5}}} + 1$. (a) Chứng minh $a^4 - 14a^2 + 9 = 0$. (b) Giải sử $f(x) = x^5 + 2x^4 - 14x^3 - 28x^2 + 9x + 19$. Tính $f(a)$.

Bài toán 302 ([BNS23], Ví dụ 2.11, p. 13). Cho $a, b, c > 0$. Giả sử m, n, p là những số nguyên dương lớn hơn 1 sao cho $bc = \sqrt[n]{a}$, $ca = \sqrt[n]{b}$, $\forall ab = \sqrt[p]{c}$. Chứng minh trong 3 số a, b, c phải có ít nhất 1 số bằng 1.

Bài toán 303 ([BNS23], Ví dụ 2.12, p. 13). Cho $a = \frac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}$. (a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận số a làm nghiệm. (b) Giả sử đa thức $f(x) = 3x^6 - 4x^5 - 7x^4 + 6x^3 + 6x^2 + x - 53\sqrt{2}$. Tính $f(a)$.

Bài toán 304 ([BNS23], Ví dụ 2.13, p. 14). Cho $a = \frac{7-4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}} - \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$. (a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận số a làm nghiệm. (b) Giả sử đa thức $f(x) = \frac{x^6+x^4+4x^2}{40(x^4+4x^2-144)}$. Tính $f(a)$.

Bài toán 305 ([BNS23], Ví dụ 2.14, p. 14). Cho $a = \sqrt[3]{38+17\sqrt{5}} + \sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}$. Giả sử ta có đa thức $f(x) = (x^3+3x+1935)^{2012}$. Tính $f(a)$.

Bài toán 306 ([BNS23], 2.1., p. 14). Biểu diễn $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ thành $a + b\sqrt{5}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$.

Bài toán 307 ([BNS23], 2.2., p. 14). Cho $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} + \sqrt[3]{1-\sqrt{11}}$. Chứng minh $a^9 - 6a^6 + 282a^3 = 8$.

Bài toán 308 ([BNS23], 2.3., p. 15). Cho $a = (\sqrt[3]{1+2\sqrt{6}} - \sqrt[6]{5+4\sqrt{6}})\sqrt[3]{2\sqrt{6}-1} + 1$. (a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận a làm nghiệm. (b) Giả sử $f(x) = \sum_{i=1}^{2012} ix^i + 2012$. Tính $f(a)$.

Bài toán 309 ([BNS23], 2.4., p. 15). *Chứng minh:*

$$\frac{a + 2\sqrt{ab} + 9b}{\sqrt{a} + 3\sqrt{b} - 2\sqrt[4]{ab}} - 2\sqrt{b} = \left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right)^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0.$$

Bài toán 310 ([BNS23], 2.5., p. 15). *Chứng minh:*

$$\left(\sqrt[3]{a^4} + b^2\sqrt[3]{a^2} + b^4\right) \frac{\sqrt[3]{a^8} - b^6 + b^4\sqrt[3]{a^2} - a^2b^2}{a^2b^2 + b^2 - a^2b^8 - b^4} = a^2b^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, ab \neq 0, a \neq b^3.$$

Bài toán 311 ([BNS23], 2.6., p. 15). *Cho $a, b > 0$. Đơn giản biểu thức*

$$A = \frac{\sqrt{a^3 + 2a^2b} + \sqrt{a^4 + 2a^3b} - \sqrt{a^3} - a^2b}{\sqrt{(2a + b - \sqrt{a^2 + 2ab}) \left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[6]{a^5} + a\right)}}.$$

Bài toán 312 ([BNS23], 2.7., p. 15). *Giả sử $u^3 \geq v^2$, $u, v \in \mathbb{Q}^+$. Xác định u, v để*

$$\sqrt{\frac{u - 8\sqrt[6]{u^3v^2} + 4\sqrt[3]{v^2}}{\sqrt{u} - 2\sqrt[3]{v} + 2\sqrt[12]{u^3v^2}}} + 3\sqrt[3]{v} + \sqrt[6]{v} = 1.$$

Bài toán 313. *Cho $a, b, c, A, B \in \mathbb{Z}$, $c \geq 0$ thỏa mãn đẳng thức $(a + b\sqrt{c})^2 = A + B\sqrt{c}$. (a) Tìm mối quan hệ của a, b, c, A, B . Biểu diễn (A, B) theo (a, b, c) . (b)* Biểu diễn (a, b) theo (c, A, B) .*

Bài toán 314. *Cho $a, b, c, A, B \in \mathbb{Z}$, $c \geq 0$ thỏa mãn đẳng thức $(a + b\sqrt{c})^3 = A + B\sqrt{c}$. (a) Tìm mối quan hệ của a, b, c, A, B . Biểu diễn (A, B) theo (a, b, c) . (b)* Biểu diễn (a, b) theo (c, A, B) .*

Bài toán 315. *Cho $a, b, c, A, B \in \mathbb{Z}$, $c \geq 0$ thỏa mãn đẳng thức $(a + b\sqrt[3]{c})^3 = A + B\sqrt[3]{c} + C\sqrt[3]{c^2}$. (a) Tìm mối quan hệ của a, b, c, A, B, C . Biểu diễn (A, B, C) theo (a, b, c) . (b)* Biểu diễn (a, b) theo (c, A, B, C) .*

Tài liệu

- [Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.
- [BNS23] Vũ Hữu Bình, Phạm Thị Bạch Ngọc, and Nguyễn Tam Sơn. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 9. Tập 1: Đại Số*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 192.
- [Chí+23] Phan Đức Chính, Tôn Thân, Vũ Hữu Bình, Trần Phương Dung, Ngô Hữu Dũng, Lê Văn Hồng, and Nguyễn Hữu Thảo. *Toán 9 Tập 1*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 128.
- [Thâ+23] Tôn Thân, Vũ Hữu Bình, Trần Phương Dung, Lê Văn Hồng, and Nguyễn Hữu Thảo. *Bài Tập Toán 9 Tập 1*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 216.
- [Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.