

Problem: Square Root & Cube Root – Bài Tập Căn Bậc 2 & 3

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 22 tháng 4 năm 2023

Tóm tắt nội dung

Mục lục

1 Square Root & Irrationals – Căn Bậc 2 & Số Vô Tỷ	1
2 Căn Thức Bậc 2 & Hằng Đẳng Thức $\sqrt{A^2} = A $	1
3 Liên Hệ Giữa Phép Nhân, Phép Chia & Phép Khai Phương	2
Tài liệu	2

1 Square Root & Irrationals – Căn Bậc 2 & Số Vô Tỷ

Bài toán 1 (Bình, 2023, Ví dụ 2, p. 5). Chứng minh tổng của 1 số hữu tỷ với 1 số vô tỷ là 1 số vô tỷ.

Bài toán 2 (Bình, 2023, Ví dụ 3, p. 5). Xét xem các số a, b có thể là số vô tỷ hay không, nếu: (a) $a + b$ & $a - b$ là các số hữu tỷ. (b) $a - b$ & ab là các số hữu tỷ.

Bài toán 3 (Bình, 2023, Ví dụ 4, p. 5). Chứng minh: Nếu số tự nhiên a không là số chính phương thì \sqrt{a} là số vô tỷ.

Bài toán 4 (Bình, 2023, 2., p. 6). Chứng minh các số sau là số vô tỷ: (a) $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$. (b) $m + \frac{\sqrt{3}}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Q}$, $n \neq 0$.

Bài toán 5 (Bình, 2023, 3., p. 6). Xét xem các số a, b có thể là số vô tỷ hay không nếu: (a) ab & $\frac{a}{b}$ là các số hữu tỷ. (b) $a + b$ & $\frac{a}{b}$ là các số hữu tỷ ($a + b \neq 0$). (c) $a + b$, a^2 , & b^2 là các số hữu tỷ ($a + b \neq 0$).

Bài toán 6 (Bình, 2023, 4., p. 6). So sánh 2 số: (a) $2\sqrt{3}$ & $3\sqrt{2}$. (b) $6\sqrt{5}$ & $5\sqrt{6}$. (c) $\sqrt{24} + \sqrt{45}$ & 12. (d) $\sqrt{37} - \sqrt{15}$ & 2.

Bài toán 7 (Bình, 2023, 5., p. 6). (a) Cho 1 ví dụ để chứng tỏ khẳng định $\sqrt{a} \leq a$ với mọi số a không âm là sai. (b) Cho $a > 0$. Với giá trị nào của a thì $\sqrt{a} = a$?

Bài toán 8 (Bình, 2023, 6*, pp. 6–7). (a) Chỉ ra 1 số thực x mà $x - \frac{1}{x}$ là số nguyên ($x \neq \pm 1$). (b) Chứng minh nếu $x - \frac{1}{x}$ là số nguyên & $x \neq \pm 1$ thì x & $x + \frac{1}{x}$ là số vô tỷ. Khi đó $(x + \frac{1}{x})^{2n}$ & $(x + \frac{1}{x})^{2n+1}$ là số hữu tỷ hay số vô tỷ?

2 Căn Thức Bậc 2 & Hằng Đẳng Thức $\sqrt{A^2} = |A|$

Bài toán 9 (Bình, 2023, Ví dụ 5, p. 7). Cho biểu thức $A = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4x + 4}}$. (a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức A . (b) Rút gọn biểu thức A .

Bài toán 10 (Bình, 2023, Ví dụ 6, p. 8). Tìm điều kiện xác định của các biểu thức: (a) $A = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}$. (b) $B = \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2x + 1}}}$.

Bài toán 11 (Bình, 2023, Ví dụ 7, p. 8). Tìm các giá trị của x sao cho $\sqrt{x + 1} < x + 3$.

Bài toán 12 (Bình, 2023, 7., p. 9). Tìm điều kiện xác định của các biểu thức: (a) $3 - \sqrt{1 - 16x^2}$. (b) $\frac{1}{1 - \sqrt{x^2 - 3}}$. (c) $\sqrt{8x - x^2 - 15}$. (d) $\frac{2}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$. (e) $A = \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}}$. (f) $B = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{\sqrt{2x + 1}} + \sqrt{x^2 - 8x + 14}$.

Bài toán 13 (Bình, 2023, 8., p. 9). Cho biểu thức $A = \sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{x^2 + 6x + 9}$. (a) Rút gọn biểu thức A . (b) Tìm các giá trị của x để $A = 1$.

Bài toán 14 (Bình, 2023, 9., p. 9). Tìm các giá trị của x sao cho: (a) $\sqrt{x^2 - 3} \leq x^2 - 3$. (b) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} > x - 6$.

Bài toán 15 (Bình, 2023, 10., p. 9). Cho $a + b + c = 0$ & $a, b, c \neq 0$. Chứng minh hằng đẳng thức: $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right|$.

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyentuanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

3 Liên Hệ Giữa Phép Nhân, Phép Chia & Phép Khai Phương

Bài toán 16 (Bình, 2023, Ví dụ 8, p. 10). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} - \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}$.

Bài toán 17 (Bình, 2023, Ví dụ 9, p. 11). Chứng minh số $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ là số vô tỷ.

Bài toán 18 (Bình, 2023, 11., pp. 11–12). Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{11 - 2\sqrt{10}}$. (b) $\sqrt{9 - 2\sqrt{14}}$. (c) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$.
(d) $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$. (e) $\sqrt{4 - \sqrt{7}} - \sqrt{4 + \sqrt{7}}$. (f) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}}{\sqrt{2} + \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}}$. (g) $\sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}}$.
(h) $\sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$. (i) $\sqrt{94 - 42\sqrt{5}} - \sqrt{94 + 42\sqrt{5}}$.

Bài toán 19 (Bình, 2023, 12., p. 12). Tính: (a) $(4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$. (b) $\sqrt{3 - \sqrt{5}}(\sqrt{10} - \sqrt{2})(3 + \sqrt{5})$. (c) $\frac{\sqrt{\sqrt{5} + 2} + \sqrt{\sqrt{5} - 2}}{\sqrt{\sqrt{5} + 1}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$.

Bài toán 20 (Bình, 2023, 13., p. 12). Chứng minh các hằng đẳng thức sau với $b \geq 0$, $a \geq \sqrt{b}$: (a) $\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2(a \pm \sqrt{a^2 - b})}$. (b) $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$.

Bài toán 21 (Bình, 2023, 14., p. 12). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x + 2\sqrt{2x - 4}} + \sqrt{x - 2\sqrt{2x - 4}}$.

Bài toán 22 (Bình, 2023, 15., p. 12). Cho biểu thức $A = \frac{x + \sqrt{x^2 - 2x}}{x - \sqrt{x^2 - 2x}} - \frac{x - \sqrt{x^2 - 2x}}{x + \sqrt{x^2 - 2x}}$. (a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức A. (b) Rút gọn biểu thức A. (c) Tìm giá trị của x để $A < 2$.

Bài toán 23 (Bình, 2023, 16., p. 12). Lập 1 phương trình bậc 2 với các hệ số nguyên, trong đó: (a) $2 + \sqrt{3}$ là 1 nghiệm của phương trình. (b) $6 - 4\sqrt{2}$ là 1 nghiệm của phương trình.

Bài toán 24 (Bình, 2023, 17., p. 13). Chứng minh các số sau là số vô tỷ: (a) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$. (b) $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Bài toán 25 (Bình, 2023, 18., p. 13). Có tồn tại các số hữu tỷ dương a, b hay không nếu: (a) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2}$. (b) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{\sqrt{2}}$.

Bài toán 26 (Bình, 2023, 19., p. 13). Cho 3 số x, y, $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ là các số hữu tỷ. Chứng minh mỗi số \sqrt{x}, \sqrt{y} đều là số hữu tỷ.

Bài toán 27 (Bình, 2023, 20., p. 13). Cho a, b, c, d là các số dương. Chứng minh tồn tại 1 số dương trong 2 số $2a + b - 2\sqrt{cd}$ & $2c + d - 2\sqrt{ab}$.

Bài toán 28 (Bình, 2023, 21*, p. 13). (a) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}}$ với $a > 0$. (b) Tính giá trị của tổng $B = \sum_{i=1}^{99} \sqrt{1 + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(i+1)^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}}$.

Bài toán 29 (Bình, 2023, 22*, p. 13). (a) Nêu 1 cách tính nhẩm 997^2 . (b) Tính tổng các chữ số của A biết $\sqrt{A} = 99 \dots 96$ (có 100 chữ số 9).

Tài liệu

Bình, Vũ Hữu (2023). *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 275.