

Divisor \mathcal{E} Multiplier – Ước \mathcal{E} Bội

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 18 tháng 11 năm 2022

Tóm tắt nội dung

Mục lục

1 Cheatsheet	1
2 Problem	1
Tài liệu	2

1 Cheatsheet

§12. Ước chung & ước chung lớn nhất. ƯC & ƯCLN của 2 số: $((a : n) \wedge (b : n)) \Leftrightarrow ((a \in B(n)) \wedge (b \in B(n))) \Leftrightarrow ((n|a) \wedge (n|b)) \Leftrightarrow ((n \in \mathcal{U}(a)) \wedge (n \in \mathcal{U}(b))) \Leftrightarrow n \in \mathcal{UC}(a, b). n = \max \mathcal{UC}(a, b) \Leftrightarrow n = \mathcal{UCLN}(a, b). \mathcal{UC}(a, b) \in \mathcal{U}(\mathcal{UCLN}(a, b)), \mathcal{UC}(a, b) | \mathcal{UCLN}(a, b), \mathcal{UCLN}(a, b) : \mathcal{UC}(a, b), \mathcal{UCLN}(a, b) \in B(\mathcal{UC}(a, b)).$ ƯC & ƯCLN của 3 số: $((a : n) \wedge (b : n) \wedge (c : n)) \Leftrightarrow ((a \in B(n)) \wedge (b \in B(n)) \wedge (c \in B(n))) \Leftrightarrow ((n|a) \wedge (n|b) \wedge (n|c)) \Leftrightarrow ((n \in \mathcal{U}(a)) \wedge (n \in \mathcal{U}(b)) \wedge (n \in \mathcal{U}(c))) \Leftrightarrow n \in \mathcal{UC}(a, b, c). n = \max \mathcal{UC}(a, b, c) \Leftrightarrow n = \mathcal{UCLN}(a, b, c). \mathcal{UC}(a, b, c) \in \mathcal{U}(\mathcal{UCLN}(a, b, c)), \mathcal{UC}(a, b, c) | \mathcal{UCLN}(a, b, c), \mathcal{UCLN}(a, b, c) : \mathcal{UC}(a, b, c), \mathcal{UCLN}(a, b, c) \in B(\mathcal{UC}(a, b, c)).$ ƯC & ƯCLN của n số: $(a_i : m, \forall i = 1, \dots, n) \Leftrightarrow (a_i \in B(m), \forall i = 1, \dots, n) \Leftrightarrow (m|a_i, \forall i = 1, \dots, n) \Leftrightarrow (m \in \mathcal{U}(a_i), \forall i = 1, \dots, n) \Leftrightarrow m \in \mathcal{UC}(a_1, \dots, a_n). m = \max \mathcal{UC}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow m = \mathcal{UCLN}(a_1, \dots, a_n). \mathcal{UC}(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{U}(\mathcal{UCLN}(a_1, \dots, a_n)), \mathcal{UC}(a_1, \dots, a_n) | \mathcal{UCLN}(a_1, \dots, a_n), \mathcal{UCLN}(a_1, \dots, a_n) : \mathcal{UC}(a_1, \dots, a_n), \mathcal{UCLN}(a_1, \dots, a_n) \in B(\mathcal{UC}(a_1, \dots, a_n)).$ Tìm ƯCLN bằng cách phân tích các số ra thừa số nguyên tố: $a = \prod_{i=1}^n p_i^{a_i}, b = \prod_{i=1}^n p_i^{b_i}, \mathcal{UCLN}(a, b) = \prod_{i=1}^n p_i^{\min\{a_i, b_i\}}. p, q$ nguyên tố cùng nhau $\Leftrightarrow \mathcal{UCLN}(p, q) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{BCNN}(p, q) = pq. \forall a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0, \frac{a}{b}$ tối giản $\Leftrightarrow \mathcal{UCLN}(a, b) = 1.$ **§13. Bội chung & bội chung nhỏ nhất.** BC & BCNN của 2 số: $((n : a) \wedge (n : b)) \Leftrightarrow ((n \in B(a)) \wedge (n \in B(b))) \Leftrightarrow ((n|a) \wedge (n|b)) \Leftrightarrow \{a; b\} \subset \mathcal{U}(n) \Leftrightarrow n \in \mathcal{BC}(a, b). n = \min(\mathcal{BC}(a, b) \setminus \{0\}) \Leftrightarrow n = \mathcal{BCNN}(a, b). \mathcal{BC} \& \mathcal{BCNN}$ của 3 số: $((n : a) \wedge (n : b) \wedge (n : c)) \Leftrightarrow ((n \in B(a)) \wedge (n \in B(b)) \wedge (n \in B(c))) \Leftrightarrow ((n|a) \wedge (n|b) \wedge (n|c)) \Leftrightarrow \{a; b; c\} \subset \mathcal{U}(n) \Leftrightarrow n \in \mathcal{BC}(a, b, c). n = \min(\mathcal{BC}(a, b, c) \setminus \{0\}) \Leftrightarrow n = \mathcal{BCNN}(a, b, c). \mathcal{BC} \& \mathcal{BCNN}$ của n số: $(m : a_i, \forall i = 1, \dots, n) \Leftrightarrow (m \in B(a_i) \forall i = 1, \dots, n) \Leftrightarrow (a_i | m, \forall i = 1, \dots, n) \Leftrightarrow (a_i \in \mathcal{U}(m)) \Leftrightarrow m \in \mathcal{BC}(a_1, \dots, a_n). n = \min(\mathcal{BC}(a_1, \dots, a_n) \setminus \{0\}) \Leftrightarrow n = \mathcal{BCNN}(a_1, \dots, a_n). \mathcal{BC} \& \mathcal{BCNN}$ bằng cách phân tích các số ra thừa số nguyên tố: $a = \prod_{i=1}^n p_i^{a_i}, b = \prod_{i=1}^n p_i^{b_i}, \mathcal{BCNN}(a, b) = \prod_{i=1}^n p_i^{\max\{a_i, b_i\}}. a : b \Leftrightarrow \mathcal{BCNN}(a, b) = a \Leftrightarrow \mathcal{UCLN}(a, b) = b.$ Tính tổng các phân số cùng mẫu số: $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{b},$ i.e., $\frac{a_1}{b} + \dots + \frac{a_n}{b} = \frac{a_1 + \dots + a_n}{b}, \forall a_i, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, \forall i = 1, \dots, n.$ Tính tổng các phân số khác mẫu số: Quy đồng mẫu số các phân số đó với mẫu số chung là BCNN của các mẫu số các phân số đó rồi cộng lại:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \frac{\mathcal{BCNN}(b_1, \dots, b_n)}{b_i}}{\mathcal{BCNN}(b_1, \dots, b_n)}, \frac{a_1}{b_1} + \dots + \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 \frac{\mathcal{BCNN}(b_1, \dots, b_n)}{b_1} + \dots + a_n \frac{\mathcal{BCNN}(b_1, \dots, b_n)}{b_n}}{\mathcal{BCNN}(b_1, \dots, b_n)}, \forall a_i, b_i \in \mathbb{Z}, b_i \neq 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

2 Problem

“Bằng cách phân tích 1 số ra thừa số nguyên tố, ta có thể dễ dàng tìm được ước (ước số) của số đó.” – Bình, 2022, §8, p. 33

Bài toán 2.1 (Bình, 2022, Ví dụ 36, p. 33). *Tìm số chia \mathcal{E} thương của 1 phép chia có số bị chia bằng 145, số dư bằng 12 biết thương khác 1 (số chia \mathcal{E} thương là các số tự nhiên).*

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

Giải. Gọi b, q lần lượt là số chia & thương: $145 = bq + 12$, $b > 12$, $q \neq 1$, hay $bq = 145 - 12 = 133 = 7 \cdot 19$, suy ra $b \in \mathcal{U}(133)$, mà $b > 12$, nên $b \in \{19; 133\}$. Xét 2 trường hợp: • Nếu $b = 19$, thì $q = 7$: nhận. • Nếu $b = 133$, thì $q = 1$: loại do mâu thuẫn với giả thiết $q \neq 1$. Vậy số chia bằng 19, thương bằng 7. \square

Dạng toán 2.1. *Tìm số chia & thương của 1 phép chia có số bị chia bằng a , số dư bằng r .*

TỔNG QUÁT. Dạng thức $a = bq + r$ gồm 4 số: số bị chia a , số chia b , thương q , & số dư r .

Bài toán 2.2 (Bình, 2022, Ví dụ 37, p. 33). *Tìm số tự nhiên có 2 chữ số khác nhau sao cho nếu xóa bất kỳ chữ số nào của nó thì số nhận được vẫn là ước của số ban đầu.*

Giải. Gọi số cần tìm là \overline{ab} , $a \neq b$, $\overline{ab} : a$, $\overline{ab} : b$. Có $\overline{ab} : a \Leftrightarrow 10a + b : a \Leftrightarrow b : a$. Đặt $b = ka$, $k \neq 1$ do $b \neq a$. Có $\overline{ab} : b \Leftrightarrow 10a + b : b \Leftrightarrow 10a : b \Rightarrow 10a : ka \Rightarrow 10 : k \Rightarrow k \in \{2; 5\}$. Xét 2 trường hợp: • Nếu $k = 2$, $b = 2a$, $\overline{ab} \in \{12; 24; 36; 48\}$. • Nếu $k = 5$, $b = 5a$, $\overline{ab} = 15$. Đáp số: 12, 24, 36, 48, 15. \square

Bài toán 2.3 (Bình, 2022, Ví dụ 38, p. 33). *1 tổ sản xuất được thưởng 840 nghìn đồng. Số tiền thưởng chia đều cho số người trong tổ. Sau khi chia xong, tổ phát hiện đã bỏ sót không chia cho 1 người vắng mặt, do đó mỗi người được chia đã góp 2 nghìn đồng & kết quả là người vắng mặt cũng được nhận số tiền như những người có mặt. Tính số tiền mỗi người đã được thưởng (số tiền đó là 1 số tự nhiên với đơn vị nghìn đồng).*

Phân tích. Nếu gọi số người của tổ là $a \in \mathbb{N}^*$ thì ban đầu mỗi người trong $a - 1$ người có mặt được nhận $\frac{840}{a-1}$ nghìn đồng. Sau khi phát hiện 1 người vắng mặt (chưa được chia tiền thưởng), mỗi người trong $a - 1$ người đã được chia góp cho người vắng mặt 2 nghìn đồng, nên tổng cộng người vắng mặt nhận được $2(a - 1)$ nghìn đồng, & số tiền này cũng bằng với $a - 1$ người còn lại nên mỗi người nhận được $\frac{840}{a-1} - 2 = 2(a - 1)$. Tổng cộng có a người, nên tổng số tiền sẽ là $\left(\frac{840}{a-1} - 2\right)a = 2a(a - 1) = 840$. Ở đây có thể giải 1 trong 3 phương trình: $\left(\frac{840}{a-1} - 2\right)a = 2a(a - 1)$, $\left(\frac{840}{a-1} - 2\right)a = 840$, hoặc $2a(a - 1) = 840$ để tìm a . Phương trình cuối có vẻ dễ giải nhất vì nó có dạng đơn giản hơn so với 2 phương trình còn lại.

Lưu ý 2.1. *Trong đa số trường hợp thì phương trình có dạng đa thức sẽ dễ giải hơn phương trình có chứa phân thức $\frac{A}{B}$ hoặc căn thức \sqrt{A} , với A, B là các biểu thức chứa biến. Căn thức sẽ được học ở Toán 7, Thái et al., 2022.*

Giải. Gọi số người của tổ là $a \in \mathbb{N}^*$ thì số người có mặt là $a - 1$. Số tiền mỗi người được thưởng là $2(a - 1)$ nghìn đồng. Có $2a(a - 1) = 840 \Leftrightarrow a(a - 1) = 420 = 21 \cdot 20 \Rightarrow a = 21$. Số người của tổ sản xuất là 21 người. Mỗi người được thưởng $840 : 21 = 40$ nghìn đồng. \square

Bài toán 2.4 (Bình, 2022, Ví dụ 39, p. 33). *Trong 1 buổi họp mặt của 2 câu lạc bộ A & B , mỗi người bắt tay 1 lần với tất cả những người còn lại. Tính số người của mỗi câu lạc bộ, biết có tất cả 496 cái bắt tay, trong đó có 241 cái bắt tay của 2 người trong cùng 1 câu lạc bộ.*

Phân tích.

Tài liệu

- Bình, Vũ Hữu (2022). *Nâng Cao & Phát Triển Toán 6, tập 1*. Tái bản lần thứ nhất. Kết nối tri thức với cuộc sống. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 200.
- Thái, Đỗ Đức et al. (2022). *Toán 7, tập 1*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, p. 111.