Solution: Square-, Cube-, & nth Roots
Lời Giải: Căn Bậc 2, Căn Bậc 3, & Căn Bậc n

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 17 tháng 5 năm 2023

Tóm tắt nội dung

[en] This text is a collection of problems, from basic to advanced, on *square-, cube-, & nth roots.*
Keyword. Square root, cube root, nth root.

[vi] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài toán, từ cơ bản đến nâng cao, về *căn bậc 2, căn bậc 3, & căn bậc n.*
Từ khóa. Căn bậc 2, căn bậc 3, căn bậc n, số hữu tỷ, số vô tỷ, căn thức.

- Lecture note – Bài giảng: GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/square- & cube roots[1].
- Cheatsheet – Công thức: GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/cheatsheet: square- & cube roots[2].
- Problem – Bài tập: GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/problem: square- & cube roots[3].
- Solution – Lời giải: GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 9/solution: square- & cube roots[4].

Mục lục

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

[1] URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/NQBH_square_root_cube_root.pdf.

[2] https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/cheatsheet/NQBH_square_root_cube_root_cheatsheet.pdf.

[3] https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/problem/NQBH_square_root_cube_root_problem.pdf.

[4] https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_9/square_root_cube_root/solution/NQBH_square_root_cube_root_solution.pdf.

1 Square Root & Irrationals – Căn Bậc 2 & Số Vô Tỷ

Bài toán 1 ([Chí+23], ?1–?3, pp. 4–5)**.** *(a) Tìm các căn bậc 2 của* $9, \frac{4}{9}, 0.25, 2$*. (b) Tìm căn bậc 2 số học của* $49, 64, 81, 1.21$*. (c) Tìm căn bậc 2 của* $49, 64, 81, 1.21$*.*

Bài toán 2 ([Chí+23], Ví dụ 2, ?4, pp. 5–6)**.** *So sánh: (a)* 1 *&* $\sqrt{2}$*. (b)* 2 *&* $\sqrt{5}$*. (c)* 4 *&* $\sqrt{15}$*. (d)* $\sqrt{11}$ *&* 3*.*

Bài toán 3 ([Chí+23], Ví dụ 3, ?5, p. 6)**.** *(a) Tìm* $x \in \mathbb{R}$ *thỏa: (a)* $\sqrt{x} > 2$*. (b)* $\sqrt{x} < 1$*. (c)* $\sqrt{x} > 1$*. (d)* $\sqrt{x} < 3$*.*

Bài toán 4 ([Chí+23], 1., p. 6)**.** *Tìm căn bậc 2 số học của mỗi số sau rồi suy ra căn bậc 2 của chúng:* 121, 144, 169, 225, 256, 324, 361, 400.

Bài toán 5 ([Chí+23], 2., p. 6)**.** *So sánh: (a)* 2 *&* $\sqrt{3}$*. (b)* 6 *&* $\sqrt{41}$*. (c)* 7 *&* $\sqrt{47}$*.*

Bài toán 6 ([Chí+23], 3., p. 6)**.** *Tìm* $x \in \mathbb{R}$ *thỏa mãn các phương trình sau & sau đó làm tròn đến chữ số thập phân thứ 3: (a)* $x^2 = 2$*. (b)* $x^2 = 3$*. (c)* $x^2 = 3.5$*. (d)* $x^2 = 4.12$*.*

Hint. Nghiệm của phương trình bậc 2 $x^2 = a$ với $a \ge 0$ là các căn bậc 2 của a.

Bài toán 7 ([Chí+23], 4., p. 7)**.** *Tìm* $x \in \mathbb{R}$ *thỏa: (a)* $\sqrt{x} = 15$*. (b)* $2\sqrt{x} = 14$*. (c)* $\sqrt{x} < \sqrt{2}$*. (d)* $\sqrt{2x} < 4$*.*

Bài toán 8 ([Chí+23], 5., p. 7)**.** *Tính cạnh 1 hình vuông biết diện tích của nó bằng diện tích của hình chữ nhật có chiều rộng* 3.5 m *& chiều dài* 14 m*.*

Bài toán 9 ([Thâ+23], 1., p. 5)**.** *Tính căn bậc 2 số học của* 0.01, 0.04, 0.49, 0.64, 0.25, 0.81, 0.09, 0.16, 0, −1.

Giải. Căn bậc 2 số học của: 0.01, 0.04, 0.49, 0.64, 0.25, 0.81, 0.09, 0.16, 0 lần lượt là $\sqrt{0.01} = 0.1$, $\sqrt{0.04} = 0.2$, $\sqrt{0.49} = 0.7$, $\sqrt{0.64} = 0.8$, $\sqrt{0.25} = 0.5$, $\sqrt{0.81} = 0.9$, $\sqrt{0.09} = 0.3$, $\sqrt{0.16} = 0.4$, $\sqrt{0} = 0$. Riêng -1 không có căn bậc 2 (số học) vì $-1 < 0$. □

Lưu ý 1. *Căn bậc 2 số học của số thực không âm* $a \ge 0$ *là* $\sqrt{a}$*. Căn bậc 2 của* $a \ge 0$ *là* $\pm\sqrt{a}$ *(i.e., bao gồm* $\sqrt{a}$ *&* $-\sqrt{a}$*), đặc biệt: căn bậc 2 của* 0 *là* $\pm\sqrt{0} = 0$*. Mọi số thực âm* $a < 0$ *không có căn bậc 2.*

Bài toán 10 ([Thâ+23], 2., p. 5)**.** *Tìm* $x \in \mathbb{R}$ *thỏa: (a)* $x^2 = 5$*. (b)* $x^2 = 6$*. (c)* $x^2 = 2.5$*. (d)* $x^2 = \sqrt{5}$*. (e)* $x^2 = -1$*.*

Giải. (a) $x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$. (b) $x^2 = 6 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}$. (c) $x^2 = 2.5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2.5}$. (d) $x^2 = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\sqrt{5}} = \pm\sqrt[4]{5}$. (e) $x^2 = -1$ vô nghiệm vì $x^2 \ge 0 > -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. □

Lưu ý 2 (Phương trình bậc 2 $x^2 = a$)**.** *Giải & biện luận theo tham số* a *phương trình* $x^2 = a$ *với* $a \in \mathbb{R}$ *cho trước. Xét 3 trường hợp: (a) Trường hợp* $a = 0$*:* $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$*. (b) Trường hợp* $a > 0$*:* $x^2 = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$*. (c) Trường hợp* $a < 0$*: phương trình bậc 2* $x^2 = a$ *vô nghiệm vì* $x^2 \ge 0 > a$*,* $\forall x \in \mathbb{R}$*.*

Bài toán 11 ([Thâ+23], 3., p. 5)**.** *Số nào có căn bậc 2 là: (a)* $\sqrt{5}$*. (b)* 1.5*. (c)* -0.1*. (d)* $-\sqrt{9}$*.*

Giải. (a) 5 có 1 căn bậc 2 là $\sqrt{5}$. (b) $1.5^2 = 2.25$ có 1 căn bậc 2 là 1.5. (c) $(-0.1)^2 = 0.01$ có 1 căn bậc 2 là -0.1. (d) 9 có 1 căn bậc 2 là $-\sqrt{9}$. □

Lưu ý 3. *Số có căn bậc 2 là* a *là số* a^2*. Cụ thể hơn,* a^2 *có căn bậc 2 là* $\pm a$*, trong đó căn bậc 2 số học của* a^2 *là* $|a|$*.*

Bài toán 12 ([Thâ+23], 4., p. 5)**.** *Tìm* $x \in \mathbb{R}$*: (a)* $\sqrt{x} = 3$*. (b)* $\sqrt{x} = \sqrt{5}$*. (c)* $\sqrt{x} = 0$*. (d)* $\sqrt{x} = -2$*.*

Giải. ĐKXĐ cho cả 4 ý: $x \ge 0$. (a) $\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 3^2 = 9$ (thỏa ĐKXĐ: nhận). Vậy $x = 9$. (b) $\sqrt{x} = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = 5$ (thỏa ĐKXĐ: nhận). Vậy $x = 5$. (c) $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa ĐKXĐ: nhận). Vậy $x = 0$. (d) Cách 1: Phương trình $\sqrt{x} = -2$ vô nghiệm vì $\sqrt{x} \ge 0 > -2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Cách 2: Căn bậc 2 số học thì không âm nên không tồn tại $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\sqrt{x} = -2$. □

Lưu ý 4 (Phương trình bậc 2 $\sqrt{x} = a$)**.** *Giải & biện luận theo tham số* a *phương trình* $\sqrt{x} = a$ *với* $a \in \mathbb{R}$ *cho trước. ĐKXĐ:* $x \ge 0$*. Xét 3 trường hợp: (a) Trường hợp* $a = 0$*:* $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(thỏa ĐKXĐ: nhận). (b) Trường hợp* $a > 0$*:* $\sqrt{x} = a \Leftrightarrow x = a^2 > 0$ *(thỏa ĐKXĐ: nhận). (c) Trường hợp* $a < 0$*: phương trình vô tỷ* $\sqrt{x} = a$ *vô nghiệm vì* $\sqrt{x} \ge 0 > a$*,* $\forall x \in \mathbb{R}$*.*

Bài toán 13 ([Thâ+23], 5., p. 6)**.** *Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, so sánh: (a)* 2 *&* $\sqrt{2}+1$*. (b)* 1 *&* $\sqrt{3}-1$*. (c)* $2\sqrt{31}$ *&* 10*. (d)* $-3\sqrt{11}$ *&* -12*.*

Hint. Sử dụng tính chất: $0 \le a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

1st giải. (a) $1 < 2 \Leftrightarrow \sqrt{1} = 1 < \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 + 1 < \sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow 2 < 1 + \sqrt{2}$. Vậy $2 < 1 + \sqrt{2}$. (b) $4 > 3 \Leftrightarrow \sqrt{4} = 2 > \sqrt{3} \Leftrightarrow 2 - 1 > \sqrt{3} - 1 \Leftrightarrow 1 > \sqrt{3} - 1$. Vậy $1 > \sqrt{3} - 1$. (c) $31 > 25 \Leftrightarrow \sqrt{31} > \sqrt{25} = 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{31} > 2 \cdot 5 = 10$. Vậy $2\sqrt{31} > 10$. (d) $11 < 16 \Leftrightarrow \sqrt{11} < \sqrt{16} = 4 \Leftrightarrow -3\sqrt{11} > -3 \cdot 4 = -12$. Vậy $-3\sqrt{11} > -12$. □

Có thể bình phương 2 vế của 2 biểu thức cần so sánh như sau (đương nhiên sẽ tốn công hơn nhưng bù lại tự nhiên hơn Cách 1 đã được "tỉa gọt", i.e., giấu các bước suy luận lòng vòng ngoài nháp để trình bày lời giải 'chỉ 1 dòng biến đổi tương đương'):

2nd giải. (a) $(\sqrt{2}+1)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} + 1 = 3 + 2\sqrt{2} > 3 + 2\sqrt{1} = 3 + 2 = 5 > 4 = 2^2 \Rightarrow \sqrt{2} + 1 > 2$. (b) $(\sqrt{3}-1)^2 = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1^2 = 4 - 2\sqrt{3} < 4 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 4 - 3 = 1$, trong đó đã sử dụng $-2 < -\sqrt{3}$. Vậy $1 > \sqrt{3} - 1$. (c) $(2\sqrt{31})^2 = 2^2(\sqrt{31})^2 = 4 \cdot 31 = 124 > 100 = 10^2 \Rightarrow 2\sqrt{31} > 10$. Vậy $2\sqrt{31} > 10$. (d) $(3\sqrt{11})^2 = 3^2(\sqrt{11})^2 = 9 \cdot 11 = 99 < 144 = 12^2 \Rightarrow 3\sqrt{11} < 12 \Leftrightarrow -3\sqrt{11} > -12$. Vậy $-3\sqrt{11} > -12$. □

Bài toán 14 ([Thâ+23], 6., p. 6)**.** Đ/S? *(a) Căn bậc 2 của* 0.36 *là* 0.6*. (b) Căn bậc 2 của* 0.36 *là* 0.06*. (c)* $\sqrt{0.36} = 0.6$*. (d) Căn bậc 2 của* 0.36 *là* 0.6 *&* -0.6*. (e)* $\sqrt{0.36} = \pm 0.6$*.*

Giải. (a) S: Căn bậc 2 của 0.36 là ± 0.6 (chứ không phải mỗi 0.6). (b) S: Căn bậc 2 của 0.36 là 0.6 (chứ không phải 0.06). (c) Đ: $\sqrt{0.36} = 0.6$. (d) Đ: Căn bậc 2 của 0.36 là 0.6 & -0.6. (e) S: $\sqrt{0.36} = 0.6$ vì $-\sqrt{0.36} = -0.6$ & $\pm\sqrt{0.36} = \pm 0.6$ mới đúng. □

Bài toán 15 ([Thâ+23], 7., p. 6)**.** *Trong các số* $\sqrt{(-5)^2}, \sqrt{5^2}, -\sqrt{5^2}, -\sqrt{(-5)^2}$*, số nào là căn bậc 2 số học của* 25*?*

Giải. Có $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$, $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$, $-\sqrt{5^2} = -\sqrt{25} = -5$, $-\sqrt{(-5)^2} = -\sqrt{25} = -5$, mà căn bậc 2 số học của 25 là 5 nên suy ra $\sqrt{(\pm 5)^2}$ là căn bậc 2 số học của 25. □

Lưu ý 5. *Cả 4 số* $\sqrt{(-5)^2}, \sqrt{5^2}, -\sqrt{5^2}, -\sqrt{(-5)^2}$ *đều là căn bậc 2 của* $5^2 = 25$*, trong đó* $\sqrt{(\pm 5)^2} = \sqrt{25} = 5 > 0$ *là căn bậc 2 số học của* $5^2 = 25$*.*

Bài toán 16 (Mở rộng [Thâ+23], 7., p. 6)**.** *Trong các số* $\sqrt{(-a)^2}, \sqrt{a^2}, -\sqrt{a^2}, -\sqrt{(-a)^2}$*, số nào là căn bậc 2 số học của* a^2 *với* $a \in \mathbb{R}$ *bất kỳ?*

Giải. Có $\sqrt{(-a)^2} = \sqrt{a^2} = |a|$, $\sqrt{a^2} = \sqrt{a^2} = |a|$, $-\sqrt{a^2} = -\sqrt{a^2} = -|a|$, $-\sqrt{(-a)^2} = -\sqrt{a^2} = -|a|$, mà căn bậc 2 số học của a^2 là a nên suy ra $\sqrt{(\pm a)^2}$ là căn bậc 2 số học của a^2. □

Lưu ý 6. *Cả 4 số* $\sqrt{(-a)^2}, \sqrt{a^2}, -\sqrt{a^2}, -\sqrt{(-a)^2}$ *đều là căn bậc 2 của* a^2*, trong đó* $\sqrt{(\pm a)^2} = \sqrt{a^2} = |a| \geq 0$ *là căn bậc 2 số học của* a^2*,* $\forall a \in \mathbb{R}$*.*

Bài toán 17 ([Thâ+23], 8., p. 6)**.** *Chứng minh:* $\sqrt{1^3+2^3} = 1+2$, $\sqrt{1^3+2^3+3^3} = 1+2+3$, $\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3} = 1+2+3+4$*. Viết tiếp 1 số đẳng thức tương tự.*

Chứng minh. $\sqrt{1^3+2^3} = \sqrt{1+8} = \sqrt{9} = 3 = 1+2$, $\sqrt{1^3+2^3+3^3} = \sqrt{1+8+27} = \sqrt{36} = 6 = 1+2+3$, $\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3} = \sqrt{1+8+27+64} = \sqrt{100} = 10 = 1+2+3+4$. Ta có các đẳng thức:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1^3} &= 1,\\
\sqrt{1^3+2^3} &= 1+2,\\
\sqrt{1^3+2^3+3^3} &= 1+2+3,\\
\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3} &= 1+2+3+4,\\
\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3} &= 1+2+3+4+5,\\
\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3} &= 1+2+3+4+5+6,\\
\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3} &= 1+2+3+4+5+6+7,\\
\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3} &= 1+2+3+4+5+6+7+8,\\
\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3} &= 1+2+3+4+5+6+7+8+9,\\
\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3+10^3} &= 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10.
\end{aligned}$$

Dự đoán đẳng thức tổng quát:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n i^3} = \sqrt{1^3+2^3+\cdots+n^3} = \sum_{i=1}^n i = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Đẳng thức này đúng & có thể được chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học. □

Lưu ý 7. *Công thức tính tổng lập phương của* n *số nguyên dương đầu tiên:*

$$\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left(\sum_{i=1}^n i\right)^2 = (1+2+\cdots+n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star. \tag{1}$$

Ta có thể kiểm nghiệm công thức trên bằng máy tính:

Bài toán 18. *Viết chương trình* Pascal, Python, C/C++ *tính: (a) tổng* n *số nguyên dương đầu tiên. (b) tổng bình phương của* n *số nguyên dương đầu tiên. (c) tổng lập phương của* n *số nguyên dương đầu tiên. (d) Từ câu (a) & (c), kiểm tra đẳng thức* (1)*. (e) tổng lũy thừa bậc* $m \in \mathbb{R}$ *của* n *số nguyên dương đầu tiên*[5]*.*

Bài toán 19 ([Thâ+23], 9., p. 6)**.** *Cho* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a, b \geq 0$*. Chứng minh: (a)* $a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$*. (b)* $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Rightarrow a < b$*.*

[5] Lũy thừa bậc thực của 1 số thực, i.e., a^b với $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$, sẽ được học ở chương trình Toán Giải tích 11.

Chứng minh. (a) Vì $a,b \ge 0$ & $a < b$ nên $\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{a}+\sqrt{a} = 2\sqrt{a} \ge 0$ ($\star$). Có $a < b \Rightarrow 0 > a-b = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ ($\star\star$). Từ ($\star$) & ($\star\star$), suy ra $\sqrt{a}-\sqrt{b} < 0$ hay $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. (b) $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow \sqrt{a}-\sqrt{b} < 0$, kết hợp điều này & ($\star$), suy ra $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) < 0 \Leftrightarrow a-b < 0 \Leftrightarrow a < b$. □

Lưu ý 8. *Từ chứng minh trên, ta thấy $a-b$ & $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ luôn cùng dấu:*

$$(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = \begin{cases} =0, & \text{if } a=b, \\ >0, & \text{if } a \ne b, \end{cases}, \ \forall a,b \in \mathbb{R},\ a,b \ge 0.$$

Chặt chẽ & ngắn gọn hơn về công thức toán học, đẳng thức trên tương đương với đẳng thức:

$$\operatorname{sign}(a-b) = \operatorname{sign}(\sqrt{a}-\sqrt{b}),\ \forall a,b \in \mathbb{R},\ a,b \ge 0,$$

trong đó $\operatorname{sign}: \mathbb{R} \to \{0, \pm 1\}$, $x \mapsto \operatorname{sign} x$ *là* hàm dấu *xác định trên tập số thực* $\mathbb{R}$ *bởi công thức:*

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{if } x > 0, \\ 0, & \text{if } x = 0, \\ -1, & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

Bài toán 20 ([Thâ+23], 10., p. 6)**.** *Cho $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$. Chứng minh: (a) $m > 1 \Rightarrow \sqrt{m} > 1$. (b) $m < 1 \Rightarrow \sqrt{m} < 1$.*

Chứng minh. Áp dụng Bài toán 19 (a) lần lượt với $(a,b) = (1,m)$ & $(a,b) = (m,1)$, ta được: (a) $m > 1 \Rightarrow \sqrt{m} > \sqrt{1} = 1$. (b) $m < 1 \Rightarrow \sqrt{m} < \sqrt{1} = 1$. □

Bài toán 21 ([Thâ+23], 11., p. 6)**.** *Cho $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$. Chứng minh: (a) $m > 1 \Rightarrow m > \sqrt{m} > 1$. (b) $m < 1 \Rightarrow m < \sqrt{m} < 1$.*

Chứng minh. (a) Theo Bài toán 20 (a): $m > 1 \Rightarrow \sqrt{m} > 1$. Nhân cả 2 vế của bất đẳng thức cuối với $\sqrt{m} > 0$, ta được $m > \sqrt{m}$. (b) Theo Bài toán 20 (b): $m < 1 \Rightarrow \sqrt{m} < 1$. Nhân cả 2 vế của bất đẳng thức cuối với $\sqrt{m} > 0$, ta được $\sqrt{m} \cdot \sqrt{m} = m < \sqrt{m}$. □

Bài toán 22 (Program to print out 1st n square roots)**.** *Với $n \in \mathbb{N}^\star$ được nhập từ bàn phím, viết chương trình* Pascal, C/C++, Python *xuất ra: (a) Căn bậc 2 của n. (b) Căn bậc 2 của n số nguyên dương đầu tiên.*

Pascal:

```
program square_root;
var num, sqrt_num: real;
begin
    write('Enter a number num = ');
    readln(num);
    sqrt_num := Sqrt(num);
    writeln('sqrt of ', num,' = ', sqrt_num)
end.
```

Bài toán 23 (Số chính phương)**.** *Viết chương trình* Pascal, C/C++, Python *để kiểm tra 1 số $n \in \mathbb{N}^\star$ được nhập từ bàn phím có phải là số chính phương hay không.*

Bài toán 24 ([Tuy23], Thí dụ 1, p. 5)**.** *Cho số thực $x \ge 0$. So sánh $\sqrt{x}$ với x.*

Giải. Vì $x \ge 0$ nên $\sqrt{x}$ có nghĩa/xác định & $\sqrt{x} \ge 0$. Xét các trường hợp: (a) $\sqrt{x} = x \Leftrightarrow x = x^2 \Leftrightarrow x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$. (b) $\sqrt{x} < x \Leftrightarrow x < x^2 \Leftrightarrow x - x^2 < 0 \Leftrightarrow x(1-x) < 0$, mà $x \ge 0$ nên suy ra $1 - x < 0$, hay $x > 1$. (c) $\sqrt{x} > x \Leftrightarrow x > x^2 \Leftrightarrow x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x(1-x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$. Vậy: $x \in \{0,1\} \Leftrightarrow \sqrt{x} = x$, $x > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} < x$, & $0 < x < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} > x$. □

Nhận xét 1. *Về mặt phương pháp để so sánh 2 số không âm ta có thể so sánh các bình phương của 2 số đó: $a \ge b > 0 \Leftrightarrow a^2 \ge b^2$. Về kết quả, khi so sánh $\sqrt{x}$ với x ta thấy có thể xảy ra cả 3 trường hợp: lớn hơn, nhỏ hơn, hoặc bằng nhau tùy theo x ở trong khoảng giá trị nào, cụ thể: $x \in \{0,1\} \Leftrightarrow \sqrt{x} = x$, $x > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} < x$, & $0 < x < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} > x$.*

Bài toán 25 ([Bìn23], Ví dụ 2, p. 5)**.** *Chứng minh tổng & hiệu của 1 số hữu tỷ với 1 số vô tỷ là 1 số vô tỷ.*

Giải. Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tồn tại 2 số $a \in \mathbb{Q}$ & $b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sao cho $c = a + b \in \mathbb{Q}$. Ta có $b = c - a$, mà hiệu của 2 số hữu tỷ c, a là 1 số hữu tỷ nên $b \in \mathbb{Q}$, mâu thuẫn với giả thiết, nên c phải là số vô tỷ. Chứng minh tương tự cho hiệu. □

Bài toán 26 ([Bìn23], Ví dụ 3, p. 5)**.** *Xét xem các số a, b có thể là số vô tỷ hay không, nếu: (a) $a+b$ & $a-b$ là các số hữu tỷ. (b) $a-b$ & ab là các số hữu tỷ.*

Bài toán 27 ([Bìn23], Ví dụ 4, p. 5)**.** *Chứng minh: Nếu số tự nhiên a không là số chính phương thì $\sqrt{a}$ là số vô tỷ.*

Bài toán 28 ([Bìn23], 2., p. 6)**.** *Chứng minh các số sau là số vô tỷ: (a) $\sqrt{1+\sqrt{2}}$. (b) $m + \frac{\sqrt{3}}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Q}$, $n \ne 0$.*

Bài toán 29 ([Bìn23], 3., p. 6). *Xét xem các số a, b có thể là số vô tỷ hay không nếu: (a) ab & $\frac{a}{b}$ là các số hữu tỷ. (b) $a+b$ & $\frac{a}{b}$ là các số hữu tỷ $(a+b \neq 0)$. (c) $a+b$, a^2, & b^2 là các số hữu tỷ $(a+b \neq 0)$.*

Bài toán 30 ([Bìn23], 4., p. 6). *So sánh 2 số: (a) $2\sqrt{3}$ & $3\sqrt{2}$. (b) $6\sqrt{5}$ & $5\sqrt{6}$. (c) $\sqrt{24}+\sqrt{45}$ & 12. (d) $\sqrt{37}-\sqrt{15}$ & 2.*

Bài toán 31 ([Bìn23], 5., p. 6). *(a) Cho 1 ví dụ để chứng tỏ khẳng định $\sqrt{a} \le a$ với mọi số a không âm là sai. (b) Cho $a > 0$. Với giá trị nào của a thì $\sqrt{a}?a$?*

Bài toán 32 ([Bìn23], $6^\star$., pp. 6–7). *(a) Chỉ ra 1 số thực x mà $x - \frac{1}{x}$ là số nguyên $(x \neq \pm 1)$. (b) Chứng minh nếu $x - \frac{1}{x}$ là số nguyên & $x \neq \pm 1$ thì x & $x + \frac{1}{x}$ là số vô tỷ. Khi đó $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$ & $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n+1}$ là số hữu tỷ hay số vô tỷ?*

2 Căn Thức Bậc 2 & Hằng Đẳng Thức $\sqrt{A^2} = |A|$

Bài toán 33 ([Chí+23], ?1, p. 8). *Hình chữ nhật $ABCD$ có đường chéo dài 5 cm & cạnh $BC = x$ cm. tính AB.*

Bài toán 34 ([Chí+23], ?2, p. 8). *Với giá trị nào của $x \in \mathbb{R}$ thì $\sqrt{5-2x}$ xác định?*

Bài toán 35 ([Chí+23], ĐL, p. 9). *Chứng minh: $\sqrt{a^2} = |a|$, $\forall a \in \mathbb{R}$.*

Bài toán 36 ([Chí+23], Ví dụ 2, p. 9). *Tính: (a) $\sqrt{12^2}$. (b) $\sqrt{(-7)^2}$.*

Bài toán 37 ([Chí+23], Ví dụ 3, p. 9). *Rút gọn: (a) $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$. (b) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$.*

Bài toán 38 ([Chí+23], Ví dụ 4, p. 10). *Rút gọn: (a) $\sqrt{(x-2)^2}$ với $x \ge 2$. (b) $\sqrt{a^6}$ với $a < 0$.*

Bài toán 39 ([Chí+23], 6., p. 10). *Với giá trị nào của $a \in \mathbb{R}$ thì mỗi căn thức sau có nghĩa? (a) $\sqrt{\frac{a}{3}}$. (b) $\sqrt{-5a}$. (c) $\sqrt{4-a}$. (d) $\sqrt{3a+7}$.*

Bài toán 40 ([Chí+23], 7., p. 10). *Tính: (a) $\sqrt{(0.1)^2}$. (b) $\sqrt{(-0.3)^2}$. (c) $-\sqrt{(-1.3)^2}$. (d) $-0.4\sqrt{(-0.4)^2}$.*

Bài toán 41 ([Chí+23], 8., p. 10). *Rút gọn các biểu thức: (a) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$. (b) $\sqrt{(3-\sqrt{11})^2}$. (c) $2\sqrt{a^2}$ với $a \ge 0$ & với $a \in \mathbb{R}$. (d) $3\sqrt{(a-2)^2}$ với $a < 2$ & với $a \in \mathbb{R}$.*

Bài toán 42 ([Chí+23], 9., p. 11). *Tìm x thỏa: (a) $\sqrt{x^2} = 7$. (b) $\sqrt{x^2} = |-8|$. (c) $\sqrt{4x^2} = 6$. (d) $\sqrt{9x^2} = |-12|$.*

Bài toán 43 ([Chí+23], 10., p. 11). *Chứng minh: (a) $(\sqrt{3}-1)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$. (b) $\sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{3} = -1$.*

Bài toán 44 ([Chí+23], 11., p. 11). *Tính: (a) $\sqrt{16}\cdot\sqrt{25}+\sqrt{196}:\sqrt{49}$. (b) $36:\sqrt{2\cdot 3^2\cdot 18}-\sqrt{169}$. (c) $\sqrt{\sqrt{81}}$. (d) $\sqrt{3^2+4^2}$.*

Bài toán 45 ([Chí+23], 12., p. 11). *Tìm x để mỗi căn thức sau có nghĩa: (a) $\sqrt{2x+7}$. (b) $\sqrt{-3x+4}$. (c) $\sqrt{\frac{1}{-1+x}}$. (d) $\sqrt{1+x^2}$.*

Bài toán 46 ([Chí+23], 13., p. 11). *Rút gọn các biểu thức: (a) $2\sqrt{a^2} - 5a$ với $a < 0$ & $a \in \mathbb{R}$. (b) $\sqrt{25a^2} + 3a$ với $a \ge 0$ & $a \in \mathbb{R}$. (c) $\sqrt{9a^4} + 3a^2$. (d) $5\sqrt{4a^6} - 3a^3$ với $a < 0$ & $a \in \mathbb{R}$.*

Bài toán 47 ([Chí+23], 14., p. 11). *Phân tích thành nhân tử: (a) x^2-3. (b) x^2-6. (c) $x^2+2\sqrt{3}x+3$. (d) $x^2-2\sqrt{5}x+5$.*

Hint. $a = (\sqrt{a})^2$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \ge 0$.

Bài toán 48 ([Chí+23], 15., p. 11). *Giải phương trình: (a) $x^2-5=0$. (b) $x^2-2\sqrt{11}x+11=0$.*

Bài toán 49 ([Chí+23], 16., p. 12). *Tìm chỗ sai trong phép chứng minh "Con muỗi nặng bằng con voi" sau: Giả sử con muỗi nặng m g, còn con voi nặng V g. Ta có: $m^2+V^2 = V^2+m^2$. Cộng cả 2 vế với $-2mV$, ta có: $m^2-2mV+V^2 = V^2-2mV+m^2$, hay $(m-V)^2 = (V-m)^2$. Lấy căn bậc 2 mỗi vế của đẳng thức trên, ta được: $\sqrt{(m-V)^2} = \sqrt{(V-m)^2}$. Do đó $m-V = V-m$. Từ đó ta có $2m = 2V$, suy ra $m = V$. Vậy con muỗi nặng bằng con voi!*

Bài toán 50 ([Tuy23], Thí dụ 2, p. 5). *Cho $a,b,c \in \mathbb{Q}$, $abc \neq 0$ & $a = b+c$. Chứng minh $A = \sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}} \in \mathbb{Q}$.*

Giải. $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2} = \left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)^2 + 2\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{ac}-\dfrac{1}{bc}\right) = \left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)^2 + \dfrac{2(c+b-a)}{abc} = \left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)^2$ vì $a = b+c$. Suy ra $A = \sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)^2} = \left|\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right|$. Có $a,b,c \in \mathbb{Q}^\star \Rightarrow \dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c} \in \mathbb{Q} \Rightarrow A = \left|\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right| \in \mathbb{Q}$. □

Bài toán 51. *Cho $a,b,c \in \mathbb{Q}$, $abc \neq 0$ & $a+b+c = 0$. Chứng minh $A = \sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}} \in \mathbb{Q}$.*

1st giải. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2-2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2-\frac{2(a+b+c)}{abc}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$ vì $a+b+c=0$. Suy ra $A=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}=\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right|$. Có $a,b,c\in\mathbb{Q}^\star\Rightarrow\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\in\mathbb{Q}\Rightarrow A=\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right|\in\mathbb{Q}$. □

2nd giải. $a+b+c=0\Leftrightarrow -a=b+c$, nên ta có thể áp dụng bài toán 50 cho bộ 3 số $(-a,b,c)\in\mathbb{Q}^3$, $-abc\neq 0$ để thu được $\sqrt{\frac{1}{(-a)^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\in\mathbb{Q}$, i.e., $A=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\in\mathbb{Q}$. □

Nhận xét 2 (Proof of $\in\mathbb{Q}$)**.** *Để chứng minh 1 số là số hữu tỷ ta biểu diễn số đó thành 1 biểu thức gồm các phép tính cộng, trừ, nhân, chia (cho 1 số khác 0) của các số hữu tỷ.*

Bài toán 52. *(a) Cho $a,b,c\in\mathbb{R}$, $abc\neq 0$, khi nào thì $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$? (b) Cho $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $abcd\neq 0$, khi nào thì $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}$? (c) Cho $a,b,c,d,e\in\mathbb{R}$, $abcde\neq 0$, khi nào thì $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}+\frac{1}{e^2}$? (d) Cho $n\in\mathbb{N}^\star$, $a_i\in\mathbb{R}$, $\forall i=1,2,\ldots,n$, $\prod_{i=1}^n a_i=a_1a_2\ldots a_n\neq 0$, khi nào thì xảy ra đẳng thức sau?*

$$\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}\right)^2=\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i^2},\ \textit{i.e.,}\ \left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)^2=\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}.$$

Bài toán 53. *Cho $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$, $abcd\neq 0$ & $ab+ac+ad+bc+bd+cd=0$. Chứng minh $A=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}}\in\mathbb{Q}$.*

Bài toán 54. *Cho $a,b,c,d,e\in\mathbb{Q}$, $abcde\neq 0$ & $abc+abd+abe+acd+ace+ade+bcd+bce+bde+cde=0$. Chứng minh $A=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}+\frac{1}{e^2}}\in\mathbb{Q}$.*

Bài toán 55. *Cho $n\in\mathbb{N}^\star$, $a_i\in\mathbb{Q}$, $\forall i=1,2,\ldots,n$, $\prod_{i=1}^n a_i=a_1a_2\ldots a_n\neq 0$, & $\sum_{\rm cyc}a_1a_2\ldots a_{n-2}=0$. Chứng minh:*

$$A=\sqrt{\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i^2}}=\sqrt{\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}}\in\mathbb{Q}.$$

Lưu ý 9 (Cyclic sum)**.** *Ký hiệu $\sum_{\rm cyc}$ được gọi là tổng cyclic. Xem định nghĩa & ví dụ tại, e.g., AoPS/cyclic sum[6].*

Bài toán 56 ([Tuy23], 1., p. 6)**.** *Tính $A=\sqrt{\frac{8^{10}-4^{10}}{4^{11}-8^4}}$.*

Phân tích. 4, 8 đều là lũy thừa của 2 nên sẽ tiện hơn nếu đưa tất cả các lũy thừa trong A về lũy thừa với cơ số 2.

Giải. $A=\sqrt{\frac{(2^3)^{10}-(2^2)^{10}}{(2^2)^{11}-(2^3)^4}}=\sqrt{\frac{2^{30}-2^{20}}{2^{22}-2^{12}}}=\sqrt{\frac{2^{20}(2^{10}-1)}{2^{12}(2^{10}-1)}}=\sqrt{2^8}=2^4=16$. □

Bài toán 57 ([Tuy23], 2., p. 6)**.** *Cho $A=\underbrace{99\ldots9}_{10's}4\underbrace{00\ldots0}_{10's}9$. Tính $\sqrt{A}$.*

1st giải. $A=\underbrace{99\ldots9}_{10's}4\cdot1\underbrace{00\ldots0}_{11's}+9=(\underbrace{99\ldots9}_{10's}7-3)(\underbrace{99\ldots9}_{10's}7+3)+9=\underbrace{99\ldots9}_{10's}7^2-3^2+9=\underbrace{99\ldots9}_{10's}7^2\Rightarrow\sqrt{A}=\underbrace{99\ldots9}_{10's}7$. □

2nd giải. $A=(10^{10}-1)\cdot10^{12}+4\cdot10^{11}+9=10^{22}-10^{12}+4\cdot10^{11}+9=10^{22}-10\cdot10^{11}+4\cdot10^{11}+9=10^{22}-6\cdot10^{11}+9=(10^{11}-3)^2\Rightarrow\sqrt{A}=10^{11}-3=\underbrace{99\ldots9}_{10's}7$. □

Bài toán 58 ([Tuy23], 3., p. 6)**.** *Không dùng máy tính hoặc bảng số, so sánh: (a) $\sqrt{8}+\sqrt{15}$ & $\sqrt{65}-1$. (b) $\frac{13-2\sqrt{3}}{6}$ & $\sqrt{2}$.*

Hint. Tìm các số chính phương gần với các số dưới dấu căn để đơn giản dấu căn 1 cách hợp lý.

Giải. (a) $\sqrt{8}+\sqrt{15}<\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$, & $\sqrt{65}-1>\sqrt{64}-1=8-1=7$. Suy ra $\sqrt{8}+\sqrt{15}<\sqrt{65}-1$. (b) $\frac{13-2\sqrt{3}}{6}>\frac{13-2\sqrt{4}}{6}=\frac{3}{2}=1.5$. Mặt khác, $(1.5)^2=2.25>2\Leftrightarrow 1.5>\sqrt{2}$, nên $\frac{13-2\sqrt{3}}{6}>\sqrt{2}$. □

[6] URL: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Cyclic_sum.

Bài toán 59 ([Tuy23], 4., p. 6). *Tìm điều kiện xác định (ĐKXĐ) & tập xác định (TXĐ) của các biểu thức: (a)* $\sqrt{2-x^2}$. *(b)* $\dfrac{x}{\sqrt{5x^2-3}}$. *(c)* $\sqrt{-4x^2+4x-1}$. *(d)* $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x-2}}$.

Giải. (a) $\sqrt{2-x^2}$ xác định $\Leftrightarrow 2-x^2\ge 0\Leftrightarrow x^2\le 2\Leftrightarrow |x|\le\sqrt{2}\Leftrightarrow -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$. ĐKXĐ: $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$. TXĐ: $D=[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$. (b) $\frac{x}{\sqrt{5x^2-3}}$ xác định $\Leftrightarrow 5x^2-3>0\Leftrightarrow x^2>\frac{3}{5}\Leftrightarrow |x|>\sqrt{\frac{3}{5}}\Leftrightarrow x>\sqrt{\frac{3}{5}}$ hoặc $x<-\sqrt{\frac{3}{5}}$. ĐKXĐ: $x>\sqrt{\frac{3}{5}}$ hoặc $x<-\sqrt{\frac{3}{5}}$. TXĐ: $D=\left(-\infty,-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{3}{5}},\infty\right)$. (c) $\sqrt{-4x^2+4x-1}$ xác định $\Leftrightarrow -4x^2+4x-1\ge 0\Leftrightarrow -(2x-1)^2\ge 0\Leftrightarrow (2x-1)^2\le 0\Leftrightarrow 2x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$. ĐKXĐ: $x=\frac{1}{2}$. TXĐ: $D=\left\{\frac{1}{2}\right\}$. (d) $\frac{1}{\sqrt{x^2+x-2}}$ xác định $\Leftrightarrow x^2+x-2>0\Leftrightarrow (x-1)(x+2)>0\Leftrightarrow x>1$ hoặc $x<-2$. ĐKXĐ: $x>1$ hoặc $x<-2$. TXĐ: $D=(-\infty,-2)\cup(1,\infty)$. □

Bài toán 60 ([Tuy23], 5., p. 6). *Cho* $a,b,c\in\mathbb{Q}$ *khác nhau đôi một. Chứng minh* $A=\sqrt{\dfrac{1}{(a-b)^2}+\dfrac{1}{(b-c)^2}+\dfrac{1}{(c-a)^2}}\in\mathbb{Q}$.

1st giải. $\dfrac{1}{(a-b)^2}+\dfrac{1}{(b-c)^2}+\dfrac{1}{(c-a)^2}=\left(\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-a}\right)^2-2\left(\dfrac{1}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(c-a)}+\dfrac{1}{(c-a)(a-b)}\right)=\left(\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-a}\right)^2-\dfrac{2(c-a+a-b+b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\left(\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-a}\right)^2\Rightarrow A=\left|\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-a}\right|$. Vì $a,b,c\in\mathbb{Q}$ khác nhau đôi một nghĩa là $(a-b)(b-c)(c-a)\ne 0$, suy ra $\dfrac{1}{a-b},\dfrac{1}{b-c},\dfrac{1}{c-a}\in\mathbb{Q}\Rightarrow A=\left|\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-a}\right|\in\mathbb{Q}$. □

2nd giải. Vì $(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$, & vì $a,b,c\in\mathbb{Q}$ khác nhau đôi một nghĩa là $(a-b)(b-c)(c-a)\ne 0$ nên có thể áp dụng Bài toán 51 cho bộ 3 số $(a-b,b-c,c-a)$ để thu được $A=\sqrt{\dfrac{1}{(a-b)^2}+\dfrac{1}{(b-c)^2}+\dfrac{1}{(c-a)^2}}\in\mathbb{Q}$. □

Bài toán 61 ([Tuy23], 6., p. 6). *Cho* $a,b,c\in\mathbb{Q}$ *thỏa mãn* $ab+bc+ca=1$. *Chứng minh* $A=\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}\in\mathbb{Q}$.

Giải. $a^2+1=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+c)$, $b^2+1=b^2+ab+bc+ca=(b+c)(b+a)$, $c^2+1=c^2+ab+bc+ca=(c+a)(c+b)$, nên $A=\sqrt{(a+b)(a+c)(b+c)(b+a)(c+a)(c+b)}=\sqrt{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}=|(a+b)(b+c)(c+a)|$. Có: $a,b,c\in\mathbb{Q}\Rightarrow A=|(a+b)(b+c)(c+a)|\in\mathbb{Q}$. □

Bài toán 62 ([Tuy23], 7., p. 6–7). *(a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $A=\sqrt{-x^2+x+\frac{3}{4}}$. *(b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $B=\sqrt{4x^4-4x^2(x+1)+(x+1)^2+9}$. *(c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $C=\sqrt{25x^2-20x+4}+\sqrt{25x^2}$.

Bài toán 63 ([Tuy23], 8., p. 7). *Cho* $x<0$, *rút gọn biểu thức* $A=|2x-\sqrt{(5x-1)^2}|$.

Bài toán 64 ([Tuy23], 9., p. 7). *Cho biểu thức* $A=4x-\sqrt{9x^2-12x+4}$. *(a) Rút gọn A. (b) Tính giá trị của A với* $x=\frac{2}{7}$.

Bài toán 65 ([Tuy23], 10., p. 7). *Cho biểu thức* $A=5x+\sqrt{x^2+6x+9}$. *(a) Rút gọn A. (b) Tìm x để* $B=-9$.

Bài toán 66 ([Tuy23], 11., p. 7). *Tìm* $x\in\mathbb{R}$ *biết* $\sqrt{4x^2-4x+1}\le 5-x$.

Bài toán 67 ([Tuy23], 12., p. 7). *Giải phương trình: (a)* $\sqrt{x^2+2x+1}=\sqrt{x+1}$. *(b)* $\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x^2-6x+9}=0$. *(c)* $\sqrt{x^2-4}-x^2+4=0$.

Bài toán 68 ([Tuy23], 13., p. 7). *Giải phương trình: (a)* $\sqrt{x^2-4x+5}+\sqrt{x^2-4x+8}+\sqrt{x^2-4x+9}=3+\sqrt{5}$. *(b)* $\sqrt{2-x^2+2x}+\sqrt{-x^2-6x-8}=1+\sqrt{3}$. *(c)* $\sqrt{9x^2-6x+2}+\sqrt{45x^2-30x+9}=\sqrt{6x-9x^2+8}$.

Bài toán 69 ([Bìn23], Ví dụ 5, p. 7). *Cho biểu thức* $A=\sqrt{x-\sqrt{x^2-4x+4}}$. *(a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức A. (b) Rút gọn biểu thức A.*

Bài toán 70 ([Bìn23], Ví dụ 6, p. 8). *Tìm điều kiện xác định của các biểu thức: (a)* $A=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x-1}}$. *(b)* $B=\dfrac{1}{\sqrt{x-\sqrt{2x+1}}}$.

Bài toán 71 ([Bìn23], Ví dụ 7, p. 8). *Tìm các giá trị của x sao cho* $\sqrt{x+1}<x+3$.

Bài toán 72 ([Bìn23], 7., p. 9). *Tìm điều kiện xác định của các biểu thức: (a)* $3-\sqrt{1-16x^2}$. *(b)* $\dfrac{1}{1-\sqrt{x^2-3}}$. *(c)* $\sqrt{8x-x^2-15}$. *(d)* $\dfrac{2}{\sqrt{x^2-x+1}}$. *(e)* $A=\frac{1}{\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}$. *(f)* $B=\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{\sqrt{2x+1}}+\sqrt{x^2-8x+14}$.

Bài toán 73 ([Bìn23], 8., p. 9). *Cho biểu thức* $A=\sqrt{x^2-6x+9}-\sqrt{x^2+6x+9}$. *(a) Rút gọn biểu thức A. (b) Tìm các giá trị của x để* $A=1$.

Bài toán 74 ([Bìn23], 9., p. 9). *Tìm các giá trị của x sao cho: (a)* $\sqrt{x^2-3}\le x^2-3$. *(b)* $\sqrt{x^2-6x+9}>x-6$.

Bài toán 75 ([Bìn23], 10., p. 9). *Cho* $a+b+c=0$ *&* $abc\ne 0$. *Chứng minh hằng đẳng thức:* $\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}=\left|\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right|$.

3 Liên Hệ Giữa Phép Nhân, Phép Chia & Phép Khai Phương

Bài toán 76 ([Tuy23], Thí dụ 3, p. 9). *Rút gọn biểu thức* $A = \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}$.

Bài toán 77 ([Tuy23], Thí dụ 4, p. 10). *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $A = \sqrt{x-5} + \sqrt{13-x}$.

Bài toán 78 ([Tuy23], 14., p. 11). *Rút gọn biểu thức* $A = \dfrac{\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{3}} - \sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{7}-2}}$.

Bài toán 79 ([Tuy23], 15., p. 11). *Cho 2 số có tổng bằng* $\sqrt{19}$ *& có hiệu bằng* $\sqrt{7}$. *Tính tích của 2 số đó.*

Bài toán 80 ([Tuy23], 16., p. 11). *Tính* $\sqrt{A}$ *biết: (a)* $A = 13 - 2\sqrt{42}$. *(b)* $A = 46 + 6\sqrt{5}$. *(c)* $A = 12 - 3\sqrt{15}$.

Bài toán 81 ([Tuy23], 17., p. 12). *Rút gọn biểu thức: (a)* $A = \sqrt{6+2\sqrt{2}\sqrt{3-\sqrt{4+2\sqrt{3}}}}$. *(b)* $B = \sqrt{5} - \sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}$. *(c)* $C = \sqrt{3-\sqrt{5}}(\sqrt{10}-\sqrt{2})(3+\sqrt{5})$.

Bài toán 82 ([Tuy23], 18., p. 12). *Rút gọn biểu thức* $A = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$.

Bài toán 83 ([Tuy23], 19., p. 12). *Cho* $a > 0$, *so sánh* $\sqrt{a+1} + \sqrt{a+3}$ *với* $2\sqrt{a+2}$.

Bài toán 84 ([Tuy23], 20., p. 12). *Cho* $a, b, x, y > 0$. *Chứng minh* $\sqrt{ax} + \sqrt{by} \le \sqrt{(a+b)(x+y)}$.

Bài toán 85 ([Tuy23], 21., p. 12). *(a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $A = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-8}$. *(b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $B = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$.

Bài toán 86 ([Tuy23], 22., p. 12). *Rút gọn biểu thức:*

$$A = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3}\right]}{2+\sqrt{1-x^2}}.$$

Bài toán 87 ([Tuy23], 23., p. 12). *Tìm* x, y *biết* $x + y + 12 = 4\sqrt{x} + 6\sqrt{y-1}$.

Bài toán 88 ([Tuy23], 24., p. 12). *Tìm* x, y, z *biết* $\sqrt{x-a} + \sqrt{y-b} + \sqrt{z-c} = \frac{1}{2}(x+y+z)$, *trong đó* $a + b + c = 3$.

Bài toán 89 ([Tuy23], 25., p. 12). *Giải phương trình* $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8+6\sqrt{x-1}} = 5$.

Bài toán 90 ([Tuy23], 26., p. 12). *Giải phương trình* $\sqrt{x^2-5x+6} + \sqrt{x+1} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2-2x-3}$.

Bài toán 91 ([Tuy23], 27., p. 12). *Chứng minh bất đẳng thức* $\sqrt{n+a} + \sqrt{n-a} < 2\sqrt{n}$ *vpwos* $0 < |a| \le n$. *Áp dụng (không dùng máy tính hoặc bảng số): Chứng minh:* $\sqrt{101} - \sqrt{99} > 0.1$.

Bài toán 92 ([Tuy23], 28., p. 13). *Chứng minh:* $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Áp dụng: Cho* $S = \sum_{i=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{100}}$. *Chứng minh* $18 < S < 19$.

Bài toán 93 ([Tuy23], 29., p. 13). *Chứng minh:* $\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Áp dụng: Chứng minh:* $S = \sum_{i=1}^{2500} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2500}} < 100$.

Bài toán 94 ([Tuy23], 30., p. 13). *Cho* $x, y, z > 0$. *Chứng minh* $x + y + z \ge \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$.

Bài toán 95 ([Tuy23], 31., p. 13). *Cho* $A = \sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}$. *Chứng minh* $A \le 4$.

Bài toán 96 ([Tuy23], 32., p. 13). *Cho* $B = \dfrac{x^3}{1+y} + \dfrac{y^3}{1+x}$ *trong đó* x, y *là các số thực dương thỏa mãn điều kiện* $xy = 1$. *Chứng minh* $B \ge 1$.

Bài toán 97 ([Tuy23], 33., p. 13). *Cho* $x, y, z > 0$ *thỏa mãn điều kiện* $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y+1} + \dfrac{1}{z+1} = 2$. *Chứng minh* $xyz \le \frac{1}{8}$.

Bài toán 98 ([Tuy23], 34., p. 13). *Tìm các số dương* x, y, z *sao cho* $x + y + z = 3$ *&* $x^4 + y^4 + z^4 = 3xyz$.

Bài toán 99 ([Tuy23], 35., p. 13). *Cho* $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 10$. *Chứng minh:* $x + y \ge 20$.

Bài toán 100 ([Tuy23], 36., p. 13). *Cho* $x, y, z \ge 0$ *thỏa mãn điều kiện* $x+y+z = 1$. *Chứng minh:* $\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} \le \sqrt{6}$.

Bài toán 101 ([Bìn23], Ví dụ 8, p. 10). *Rút gọn biểu thức* $A = \sqrt{x+\sqrt{2x-1}} - \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$.

Bài toán 102 ([Bìn23], Ví dụ 9, p. 11). *Chứng minh số* $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ *là số vô tỷ.*

Bài toán 103 ([Bìn23], 11., pp. 11–12). *Rút gọn biểu thức: (a)* $\sqrt{11-2\sqrt{10}}$. *(b)* $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$. *(c)* $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$. *(d)* $\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{9+4\sqrt{5}}$. *(e)* $\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}$. *(f)* $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{7+2\sqrt{10}}}$. *(g)* $\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}$. *(h)* $\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$. *(i)* $\sqrt{94-42\sqrt{5}}-\sqrt{94+42\sqrt{5}}$.

Bài toán 104 ([Bìn23], 12., p. 12). *Tính: (a)* $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$. *(b)* $\sqrt{3-\sqrt{5}}(\sqrt{10}-\sqrt{2})(3+\sqrt{5})$. *(c)* $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Bài toán 105 ([Bìn23], 13., p. 12). *Chứng minh các hằng đẳng thức sau với* $b\ge 0$, $a\ge\sqrt{b}$: *(a)* $\sqrt{a+\sqrt{b}}\pm\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2(a\pm\sqrt{a^2-b})}$. *(b)* $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$.

Bài toán 106 ([Bìn23], 14., p. 12). *Rút gọn biểu thức* $A=\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}+\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$.

Bài toán 107 ([Bìn23], 15., p. 12). *Cho biểu thức* $A=\dfrac{x+\sqrt{x^2-2x}}{x-\sqrt{x^2-2x}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-2x}}{x+\sqrt{x^2-2x}}$. *(a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức A. (b) Rút gọn biểu thức A. (c) Tìm giá trị của x để* $A<2$.

Bài toán 108 ([Bìn23], 16., p. 12). *Lập 1 phương trình bậc 2 với các hệ số nguyên, trong đó: (a)* $2+\sqrt{3}$ *là 1 nghiệm của phương trình. (b)* $6-4\sqrt{2}$ *là 1 nghiệm của phương trình.*

Bài toán 109 ([Bìn23], 17., p. 13). *Chứng minh các số sau là số vô tỷ: (a)* $\sqrt{3}-\sqrt{2}$. *(b)* $2\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Bài toán 110 ([Bìn23], 18., p. 13). *Có tồn tại các số hữu tỷ dương* a,b *hay không nếu: (a)* $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2}$. *(b)* $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{\sqrt{2}}$.

Bài toán 111 ([Bìn23], 19., p. 13). *Cho 3 số* $x,y,\sqrt{x}+\sqrt{y}$ *là các số hữu tỷ. Chứng minh mỗi số* $\sqrt{x},\sqrt{y}$ *đều là số hữu tỷ.*

Bài toán 112 ([Bìn23], 20., p. 13). *Cho* a,b,c,d *là các số dương. Chứng minh tồn tại 1 số dương trong 2 số* $2a+b-2\sqrt{cd}$ *&* $2c+d-2\sqrt{ab}$.

Bài toán 113 ([Bìn23], 21⋆., p. 13). *(a) Rút gọn biểu thức* $A=\sqrt{1+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}}$ *với* $a>0$. *(b) Tính giá trị của tổng* $B=\sum_{i=1}^{99}\sqrt{1+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{(i+1)^2}}=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{99^2}+\frac{1}{100^2}}$.

Bài toán 114 ([Bìn23], 22⋆., p. 13). *(a) Nêu 1 cách tính nhẩm* 997^2. *(b) Tính tổng các chữ số của A biết* $\sqrt{A}=99\ldots96$ *(có* 100 *chữ số* 9*).*

4 Biến Đổi Đơn Giản Biểu Thức Chứa Căn Thức Bậc 2

Bài toán 115 ([Bìn23], Ví dụ 10, p. 14). *Rút gọn biểu thức* $A=\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}$.

Bài toán 116 ([Bìn23], Ví dụ 11, p. 14). *Tính giá trị của biểu thức*

$$M=\sum_{i=1}^{24}\frac{1}{(i+1)\sqrt{i}+i\sqrt{i+1}}=\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{25\sqrt{24}+24\sqrt{25}}.$$

Bài toán 117 ([Bìn23], 23., p. 15). *Rút gọn biểu thức* $A=\sqrt{1-a}+\sqrt{a(a-1)}+a\sqrt{\frac{a-1}{a}}$.

Bài toán 118 ([Bìn23], 24., p. 15). *Chứng minh các hằng đẳng thức: (a)* $\sqrt{10+\sqrt{60}-\sqrt{24}-\sqrt{40}}=\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2}$. *(b)* $\sqrt{6+\sqrt{24}+\sqrt{12}+\sqrt{8}}-\sqrt{3}=\sqrt{2}+1$.

Bài toán 119 ([Bìn23], 25., p. 15). *Cho* $A=\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}$. *Biểu diễn A dưới dạng tổng của 3 căn thức.*

Bài toán 120 ([Bìn23], 26., p. 15). *Rút gọn biểu thức* $A=\dfrac{x+3+2\sqrt{x^2-9}}{2x-6+\sqrt{x^2-9}}$.

Bài toán 121 ([Bìn23], 27., p. 15). *Rút gọn biểu thức* $B=\dfrac{x^2+5x+6+x\sqrt{9-x^2}}{3x-x^2+(x+2)\sqrt{9-x^2}}$.

Bài toán 122 ([Bìn23], 28., p. 15). *Rút gọn biểu thức:*

$$A=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}}=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}},$$

$$B=\sum_{i=1}^{24}\frac{1}{\sqrt{i}-\sqrt{i+1}}=\frac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}}-\cdots-\frac{1}{\sqrt{24}-\sqrt{25}}.$$

5 Rút Gọn Biểu Thức Có Chứa Căn Thức Bậc 2

Bài toán 123 ([Tuy23], Thí dụ 5, p. 14). *Cho* $A = \sqrt{11+\sqrt{96}}$ *&* $B = \dfrac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$. *Không dùng máy tính hoặc bảng số, so sánh A & B.*

Bài toán 124 ([Tuy23], Thí dụ 6, p. 15). *Cho biểu thức* $A = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} - \dfrac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}\right)\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x}-x}\right)$. *(a) Rút gọn A. (b) Tính giá trị của A với* $x = 3-2\sqrt{2}$.

Bài toán 125 ([Tuy23], 37., pp. 15–16). *Không dùng máy tính hoặc bảng số, so sánh các số sau: (a)* $-3\sqrt{11}$ *&* $-7\sqrt{2}$. *(b)* $\frac{7}{2}\sqrt{\frac{1}{12}}$ *&* $\frac{9}{4}\sqrt{\frac{1}{5}}$. *(c)* $\sqrt{\frac{4}{27}}$ *&* $\sqrt{\frac{3}{26}}$.

Bài toán 126 ([Tuy23], 38., p. 16). *Không dùng máy tính hoặc bảng số, chứng minh* $4\sqrt{5}-3\sqrt{2} < 5$.

Bài toán 127 ([Tuy23], 39., p. 16). *Cho* $A = \sqrt{x^2+1} - x - \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$ *trong đó* $x \in \mathbb{R}$. *Xác định* $x \in \mathbb{R}$ *để giá trị của A là 1 số tự nhiên.*

Bài toán 128 ([Tuy23], 40., p. 16). *Trục căn thức ở mẫu của các biểu thức sau: (a)* $A = \dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{2c}}$ *trong đó* $a, b, c > 0$ *thỏa mãn điều kiện c là trung bình nhân của a & b. (b)* $B = \dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$ *trong đó* $a, b, c, d > 0$ *thỏa mãn điều kiện* $ab = cd$ *&* $a+b \neq c+d$.

Bài toán 129 ([Tuy23], 41., p. 16). *Tìm* $x, y \in \mathbb{N}$ *sao cho* $x > y > 0$ *thỏa mãn điều kiện* $\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{931}$.

Bài toán 130 ([Tuy23], 42., p. 16). *Chứng minh:* $\dfrac{2\sqrt{mn}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{m+n}} = \sqrt{m}+\sqrt{n}-\sqrt{m+n}$. *Áp dụng tính* $\dfrac{2\sqrt{10}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$.

Bài toán 131 ([Tuy23], 43., p. 16). *Chứng minh:* $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Áp dụng tính tổng:* $S = \sum_{i=1}^{399} \dfrac{1}{(i+1)\sqrt{i}+i\sqrt{i+1}} = \dfrac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{400\sqrt{399}+399\sqrt{400}}$.

Bài toán 132 ([Tuy23], 44., p. 16). *Tìm* $n \in \mathbb{N}$ *nhỏ nhất sao cho* $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} < 0.05$.

Bài toán 133 ([Tuy23], 45., p. 17). *Cho* $A = \sum_{i=1}^{120} \dfrac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}$, $B = \sum_{i=1}^{35} \dfrac{1}{\sqrt{i}} = \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{35}}$. *Chứng minh* $A < B$.

Bài toán 134 ([Tuy23], 46., p. 17). *Cho* $x, y, z > 0$ *& khác nhau đôi một. Chứng minh giá trị của biểu thức*

$$A = \frac{x}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{z})} + \frac{y}{(\sqrt{y}-\sqrt{z})(\sqrt{y}-\sqrt{z})} + \frac{z}{(\sqrt{z}-\sqrt{x})(\sqrt{z}-\sqrt{y})}$$

không phụ thuộc vào giá trị của các biến.

Bài toán 135 ([Tuy23], 47., p. 17). *Cho biểu thức* $A = \dfrac{1}{\sqrt{x}+2} - \dfrac{5}{x-\sqrt{x}-6} - \dfrac{\sqrt{x}-2}{3-\sqrt{x}}$. *(a) Rút gọn A. (b) Tìm giá trị lớn nhất của A.*

Bài toán 136 ([Tuy23], 48., p. 17). *Cho* $A = \left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{1-\sqrt{xy}} + \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{1-+\sqrt{xy}}\right) : \left(1 + \dfrac{x+y+2xy}{1-xy}\right)$. *(a) Rút gọn A. (b) Tính giá trị của P với* $x = \dfrac{2}{2+\sqrt{3}}$. *(c) Tìm giá trị lớn nhất của A.*

Bài toán 137 ([Tuy23], 49., p. 17). *Cho* $A = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+2} + \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1} + \dfrac{2\sqrt{z}}{\sqrt{zx}+2\sqrt{z}+2}$. *Biết* $xyz = 4$, *tính* $\sqrt{P}$.

Bài toán 138 ([Bìn23], Ví dụ 12, p. 15). *Tính:* $A = \left(\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}} + \sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}\right) : \left(\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}} - \sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}\right)$.

Bài toán 139 ([Bìn23], Ví dụ 13, p. 16). *Rút gọn biểu thức* $A = \dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

Bài toán 140 ([Bìn23], Ví dụ 14, p. 16). *Cho* $A = \dfrac{\sqrt{a}+6}{\sqrt{a}+1}$. *(a) Tìm các số nguyên a để A là số nguyên. (b) Chứng minh với* $a = \frac{4}{9}$ *thì A là số nguyên. (c) Tìm các số hữu tỷ a để A là số nguyên.*

Bài toán 141 ([Bìn23], 29., p. 18). *Rút gọn biểu thức: (a)* $A = \dfrac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \dfrac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$. *(b)* $B = \left(\dfrac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)\left(\dfrac{1-\sqrt{a}}{1-a}\right)^2$. *(c)* $C = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}} : \left[\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\dfrac{1}{x+y+2\sqrt{xy}} + \dfrac{2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}\right)\right]$ *với* $x = 2-\sqrt{3}$ *&* $y = 2+\sqrt{3}$.

Bài toán 142 ([Bìn23], 30., p. 18). *Rút gọn biểu thức* $A = \dfrac{1-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}$.

Bài toán 143 ([Bìn23], 31., p. 18). *Rút gọn biểu thức* $A = \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x^2-y^2}}-\sqrt{x-\sqrt{x^2-y^2}}}{\sqrt{2(x-y)}}$ *với* $x > y > 0$.

Bài toán 144 ([Bìn23], 32., p. 18). *Rút gọn biểu thức* $A = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right) : \left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$ *với* $x = \dfrac{a^2+b^2}{2ab}$ *&* $b > a > 0$.

Bài toán 145 ([Bìn23], 33., p. 18). *Rút gọn biểu thức* $B = \dfrac{2a\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$ *với* $x = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}-\sqrt{\dfrac{a}{1-a}}\right)$ *&* $0 < a < 1$.

Bài toán 146 ([Bìn23], 34., p. 18). *Rút gọn biểu thức* $A = a+b-\sqrt{\dfrac{(a^2+1)(b^2+1)}{c^2+1}}$ *với* $a, b, c > 0$ *&* $ab+bc+ca = 1$.

Bài toán 147 ([Bìn23], 35., p. 18). *Rút gọn biểu thức* $A = \dfrac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}\cdot\sqrt{2x-1}$.

Bài toán 148 ([Bìn23], 36., p. 18). *Chứng minh hằng đẳng thức sau với* $x \ge 2$

$$\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{\frac{x^2-4}{x}}}+\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{\frac{x^2-4}{x}}} = \sqrt{\frac{2x+4}{\sqrt{x}}}.$$

Bài toán 149 ([Bìn23], 37., p. 18). *Cho* $a = \dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$, $b = \dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}$. *Tính* a^7+b^7.

Bài toán 150 ([Bìn23], 38., p. 19). *Cho biết* $\sqrt{x^2-6x+13}-\sqrt{x^2-6x+10} = 1$. *Tính* $\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt{x^2-6x+10}$.

Bài toán 151 ([Bìn23], 39., p. 19). *Cho biểu thức* $A = \dfrac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-2}$. *(a) Tìm các số nguyên a để A là số nguyên. (b) Tìm các số hữu tỷ a để A là số nguyên.*

Bài toán 152 ([Bìn23], 40., p. 19). *Cho* $a = \sqrt{2}-1$. *(a) Viết* a^2, a^3 *dưới dạng* $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ *trong đó m là số tự nhiên. (b) Chứng minh với mọi số nguyên dương n, số* a^n *viết được dưới dạng trên.*

6 Cube Root, nth Root – Căn Bậc 3, Căn Bậc n

Bài toán 153 (Program to print out 1st n cube roots). *Viết chương trình* Pascal, C/C++, Python *xuất ra căn bậc 3 của n số tự nhiên đầu tiên với* $n \in \mathbb{N}^\star$ *được nhập từ bàn phím.*

Bài toán 154. *Viết chương trình* Pascal, C/C++, Python *để kiểm tra 1 số* $n \in \mathbb{N}^\star$ *được nhập từ bàn phím có phải là lập phương của 1 số tự nhiên hay không.*

Bài toán 155 (Program to print out 1st n nth roots). *Viết chương trình* Pascal, C/C++, Python *xuất ra căn bậc n của m số tự nhiên đầu tiên với* $m, n \in \mathbb{N}^\star$ *được nhập từ bàn phím.*

Bài toán 156. *Viết chương trình* Pascal, C/C++, Python *để kiểm tra 1 số m được nhập từ bàn phím có phải là lũy thừa bậc n của 1 số tự nhiên hay không với* $m, n \in \mathbb{N}^\star$ *được nhập từ bàn phím.*

Bài toán 157 (Mở rộng [Tuy23], Thí dụ 1, p. 5). *Cho* $x \in \mathbb{R}$. *So sánh* $\sqrt[3]{x}$ *với x.*

Giải. $\sqrt[3]{x}$ xác định $\forall x \in \mathbb{R}$. Xét các trường hợp: (a) $\sqrt[3]{x} = x \Leftrightarrow x = x^3 \Leftrightarrow x - x^3 = 0 \Leftrightarrow x(1-x^2) = 0 \Leftrightarrow x(1-x)(1+x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \pm 1\}$. (b) $\sqrt[3]{x} < x \Leftrightarrow x < x^3 \Leftrightarrow x - x^3 < 0 \Leftrightarrow x(1-x^2) < 0 \Leftrightarrow x(1-x)(1+x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$ hoặc $x > 1$, trong đó phép biến đổi tương đương cuối cùng thu được nhờ lập bảng xét dấu. (c) $\sqrt[3]{x} > x \Leftrightarrow x > x^3 \Leftrightarrow x - x^3 > 0 \Leftrightarrow x(1-x^2) > 0 \Leftrightarrow x(1-x)(1+x) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ hoặc $0 < x < 1$, trong đó phép biến đổi tương đương cuối cùng cũng thu được nhờ lập bảng xét dấu. Vậy: $\sqrt[3]{x} = x \Leftrightarrow x \in \{0, \pm 1\}$, $\sqrt[3]{x} < x \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$, $\sqrt[3]{x} > x \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$. □

Bài toán 158 (Mở rộng [Tuy23], Thí dụ 1, p. 5). *Cho $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^\star$. So sánh $\sqrt[n]{x}$ với x.*

Bài toán 159 ([Tuy23], Thí dụ 7, p. 19). *Tính $x = \sqrt[3]{17\sqrt{5}+38} - \sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}$.*

Bài toán 160 ([Tuy23], Thí dụ 8, p. 20). *Giải & biện luận phương trình $(x-a)^n = a^2 - 2a + 1$ với $n \in \mathbb{N}^\star$, a là tham số.*

Bài toán 161 ([Tuy23], 50., p. 21). *Tính: (a) $\sqrt[3]{8\sqrt{5}-16}\sqrt[3]{8\sqrt{5}+16}$. (b) $\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} + \sqrt[6]{8}$. (c) $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}$.*

Bài toán 162 ([Tuy23], 51., p. 21). *(a) Tính $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}-1} - \dfrac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}$. (b) Cho $x = \dfrac{2}{2\sqrt[3]{2}+2+\sqrt[3]{4}}$, $y = \dfrac{6}{2\sqrt[3]{2}-2+\sqrt[3]{4}}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{xy}{x+y}$.*

Bài toán 163 ([Tuy23], 52., p. 21). *Cho $x = \dfrac{\sqrt[3]{8-3\sqrt{5}} + \sqrt[6]{64-12\sqrt{20}}}{\sqrt[3]{57}}\sqrt[3]{8+3\sqrt{5}}$, $y = \dfrac{\sqrt[3]{9}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[4]{2}} + \dfrac{\sqrt{2}-9\sqrt[3]{9}}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[3]{81}}$. Tính xy.*

Bài toán 164 ([Tuy23], 53., p. 22). *Tính: (a) $x = \sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$. (b) $x = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$. (c) $x = \sqrt[3]{182+\sqrt{33125}} + \sqrt[3]{182-\sqrt{33125}}$.*

Bài toán 165 ([Tuy23], 54., p. 22). *Cho $A = \sqrt[3]{60+\sqrt[3]{60+\sqrt[3]{60+\cdots+\sqrt[3]{60}}}}$. Chứng minh $3 < A < 3$. Tìm $\lfloor A \rfloor$.*

Bài toán 166 ([Tuy23], 55., p. 22). *Cho $A = \sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\cdots+\sqrt{20}}}}$, $B = \sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+\cdots+\sqrt[3]{24}}}}$. Chứng minh $7 < A+B < 8$. Tìm $\lfloor A+B \rfloor$.*

Bài toán 167 ([Tuy23], 56., p. 22). *So sánh $a = \sqrt[3]{5\sqrt{2}}$ & $b = \sqrt{5\sqrt[3]{2}}$.*

Bài toán 168 ([Tuy23], 57., p. 22). *Cho $ax^3 = by^3 = cz^3$ & $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$. Chứng minh $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$.*

Bài toán 169 ([Tuy23], 58., p. 22). *Giải phương trình: (a) $x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3}$. (b) $x^3 + 2x^2 - 4x = -\frac{8}{3}$.*

Bài toán 170 ([Tuy23], 59., p. 22). *Giải phương trình: (a) $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{5x}$. (b) $2\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2} = \sqrt[3]{x^2-4}$.*

Bài toán 171 ([Tuy23], 60., p. 22). *Giải phương trình: $\sqrt[3]{x-5} + \sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{3x+2} = -2$.*

Bài toán 172 ([Tuy23], 61., p. 22). *Giải phương trình: $\sqrt[n]{(x-2)^2} + 4\sqrt[n]{x^2-4} = 5\sqrt[n]{(x+2)^2}$.*

Bài toán 173 ([Tuy23], 62., p. 22). *Cho $A = (a+b)(b+c)(c+a)$ trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh $A + 1 \ge 3(a+b+c)$.*

Bài toán 174 ([Bìn23], Ví dụ 15, p. 20). *Chứng tỏ số $m = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ là 1 nghiệm của phương trình $x^3 + 3x - 4 = 0$.*

Bài toán 175 ([Bìn23], Ví dụ 16, p. 20). *Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$.*

Bài toán 176 ([Bìn23], 41., p. 20). *Tính: (a) $\dfrac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+2}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$. (b) $\sqrt{3+\sqrt{3}+\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}$. (c) $\dfrac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}$.*

Bài toán 177 ([Bìn23], 42., p. 21). *Số $m = \sqrt[3]{4+\sqrt{80}} - \sqrt[3]{4-\sqrt{80}}$ có phải là nghiệm của phương trình $x^3 + 12x - 8 = 0$ không?*

Bài toán 178 ([Bìn23], 43., p. 21). *Lập 1 phương trình bậc 3 với các hệ số nguyên, trong đó: (a) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ là 1 nghiệm của phương trình. (b) $\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}$ là 1 nghiệm của phương trình.*

Bài toán 179 ([Bìn23], 44., p. 21). *Tính: (a) $A = \sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$. (b) $B = \sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$. (c) $C = \sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$. (d) $D = \sqrt[3]{2+10\sqrt{\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{2-10\sqrt{\frac{1}{27}}}$. (e) $E = \sqrt[3]{4+\frac{5}{3}\sqrt{\frac{31}{3}}} + \sqrt[3]{4-\frac{5}{3}\sqrt{\frac{31}{3}}}$.*

Bài toán 180 ([Bìn23], 45., p. 21). *Tìm x biết: (a) $\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{2-x} = 1$. (b) $2x^3 = (x-1)^3$.*

Bài toán 181 ([Bìn23], 46., p. 21). *Cho $am^3 = bn^3 = cp^3$ & $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1$. Chứng minh: $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{am^2+bn^2+cp^2}$.*

Bài toán 182 ([Bìn23], 47., p. 21). *Tính: (a) $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}(\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}})$. (b) $\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}} - \sqrt{2}$. (c) $\sqrt[4]{56-24\sqrt{5}}$. (d) $1 + \sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}$. (e) $\dfrac{2}{\sqrt{4-3\sqrt[4]{5}+2\sqrt{5}-\sqrt[4]{125}}}$.*

7 Miscellaneous

Bài toán 183 ([Tuy23], Thí dụ 15, pp. 29–30)**.** *Cho biểu thức* $A = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}\right)$. *(a) Rút gọn A. (b) Tính giá trị của A với* $x = 7-4\sqrt{3}$. *(c) Tìm giá trị lớn nhất của a để* $P > a$.

Bài toán 184 ([Tuy23], 80., p. 31)**.** *Chứng minh:* $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(a+b)^2}} = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b}\right|$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $ab(a+b) \neq 0$. *Áp dụng tính* $A = \sqrt{1+999^2+\frac{999^2}{1000^2}} + \frac{999}{1000}$.

Bài toán 185 ([Tuy23], 81., p. 31)**.** *Rút gọn biểu thức* $A = (4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$.

Bài toán 186 ([Tuy23], 82., p. 31)**.** *Không dùng máy tính hoặc bảng số, chứng minh:* $\sqrt{14}-\sqrt{13} < 2\sqrt{3}-\sqrt{11}$.

Bài toán 187 ([Tuy23], 83., p. 31)**.** *Giải phương trình:* $\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 1$.

Bài toán 188 ([Tuy23], 84., p. 31)**.** *Tìm* x,y,z *biết* $x+y+z+35 = 2(2\sqrt{x+1}+3\sqrt{y+2}+4\sqrt{z+3})$.

Bài toán 189 ([Tuy23], 85., p. 31)**.** *Cho* $a > 0$, $b > 0$ *&* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = 1$. *Chứng minh:* $\sqrt{a+b} = \sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}$.

Bài toán 190 ([Tuy23], 86., p. 31)**.** *Chứng minh:* $A = \sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{2}+\sqrt{10}$.

Bài toán 191 ([Tuy23], 87., p. 31)**.** *Chứng minh:*

$$\frac{1}{4} < \frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}} < \frac{3}{10},$$

(ở tử có n dấu căn, ở mẫu có $n-1$ *dấu căn).*

Bài toán 192 ([Tuy23], 88., p. 31)**.** *Giải phương trình:* $\sqrt{x+2-3\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x-2+3\sqrt{2x-5}} = 2\sqrt{2}$.

Bài toán 193 ([Tuy23], 89., p. 31)**.** *Giải phương trình:* $\sqrt[3]{(65+x)^2} + 4\sqrt[3]{(65-x)^2} = 5\sqrt[3]{65^2-x^2}$.

Bài toán 194 ([Tuy23], 90., p. 32)**.** *Giải phương trình ẩn x:* $\frac{(a-x)\sqrt[4]{x-b}+(x-b)\sqrt[4]{a-x}}{\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{x-b}} = \frac{a-b}{2}$ *với* $a > b$.

Bài toán 195 ([Tuy23], 91., p. 32)**.** *Cho biểu thức* $A = \sum_{i=1}^{199} \frac{1}{\sqrt{i(200-i)}} = \frac{1}{\sqrt{1\cdot 199}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 198}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{199\cdot 1}}$. *Chứng minh* $A > 1.99$.

Bài toán 196 ([Tuy23], 92., p. 32)**.** *Cho n số dương* $a_1, a_2, \ldots, a_n$. *Chứng minh:*

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right) = (a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Bài toán 197 ([Tuy23], 93., p. 32)**.** *Cho các số thực dương* a,b,c,d *thỏa mãn điều kiện* $abcd = 1$. *Chứng minh:* $a^2+b^2+c^2+d^2+a(b+c)+b(c+d)+c(d+a)+d(a+b) \geq 12$.

Bài toán 198 ([Tuy23], 94., p. 32)**.** *Giải phương trình:* $\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x^2+x+1}} = \frac{7}{4}$.

Bài toán 199 ([Tuy23], 95., p. 32)**.** *Giải phương trình:* $\sqrt{x+x^2} + \sqrt{x-x^2} = x+1$.

Bài toán 200 ([Tuy23], 96., p. 32)**.** *Cho* $A = \frac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$ *với* $0 \leq x \leq 1$. *Rút gọn biểu thức* $B = 1-\sqrt{A+x+1}$.

Bài toán 201 ([Tuy23], 97., p. 32)**.** *Cho biểu thức* $A = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$. *(a) Rút gọn A. (b) Tính giá trị của A với* $x = 14-6\sqrt{5}$. *(c) Tìm GTNN của A.*

Bài toán 202 ([BNS23], Ví dụ 1.1, p. 5)**.** *Rút gọn biểu thức* $A = \sqrt{(7+4\sqrt{3})(a-1)^2}$.

Bài toán 203 ([BNS23], Ví dụ 1.2, p. 6)**.** *Cho biểu thức* $A = \sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$. *(a) Tìm điều kiện xác định của A. (b) Rút gọn biểu thức A với* $1 \leq a < 2$. *(c) Rút gọn biểu thức A với* $a \geq 2$.

Bài toán 204 ([BNS23], Ví dụ 1.3, p. 6). *Đơn giản biểu thức* $A = \left(\sqrt{8+2\sqrt{7}} + 2\sqrt{8-2\sqrt{7}}\right)(\sqrt{63}+1)$.

Bài toán 205 ([BNS23], Ví dụ 1.4, p. 6). *Tính tổng* $A = \dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$.

Bài toán 206 ([BNS23], Ví dụ 1.5, p. 6). *Tính* $A = \dfrac{\sqrt{7-2\sqrt{10}}(7+2\sqrt{10})(74-22\sqrt{10})}{\sqrt{125}-4\sqrt{50}+5\sqrt{20}+\sqrt{8}}$.

Bài toán 207 ([BNS23], Ví dụ 1.6, p. 7). *Cho* $a = \sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}} + \sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$. *Chứng minh:* $a^2-2a-2=0$.

Bài toán 208 ([BNS23], Ví dụ 1.7, p. 7). *Cho* $a = \sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$. *Tính*

$$A = \frac{a^4-4a^3+a^2+6a+4}{a^2-2a+12}.$$

Bài toán 209 ([BNS23], Ví dụ 1.8, p. 7). *Cho* $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{1+x}}{x+1} + \dfrac{1+\sqrt{1-x}}{x-1}$ *&* $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. *Tính* $f(a)$.

Bài toán 210 ([BNS23], Ví dụ 1.9, p. 8). *Giả thiết* $x,y,z>0$ *&* $xy+yz+zx=a$. *Chứng minh*

$$x\sqrt{\frac{(a+y^2)(a+z^2)}{a+x^2}} + y\sqrt{\frac{(a+z^2)(a+x^2)}{a+y^2}} + z\sqrt{\frac{(a+x^2)(a+y^2)}{a+z^2}} = 2a.$$

Bài toán 211 ([BNS23], 1.1, p. 8). *Biểu diễn* $\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$ *thành* $a+b\sqrt{5}$ *với* $a,b\in\mathbb{Q}$.

Bài toán 212 ([BNS23], 1.2, p. 8). *Đơn giản biểu thức* $A = 3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{18}+\sqrt{28-16\sqrt{3}}$.

Bài toán 213 ([BNS23], 1.3, p. 8). *Chứng minh* $\sqrt{10+2\sqrt{24}} - \sqrt{10-2\sqrt{24}} = 4$.

Bài toán 214 ([BNS23], 1.4, p. 8). *Tính* $A = \sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Bài toán 215 ([BNS23], 1.5, p. 9). *Tính tích ab với*

$$a = \sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{3+\sqrt{7+\sqrt{2}}},\ b = \sqrt{3+\sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{2}}}}\sqrt{3-\sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{2}}}}.$$

Bài toán 216 ([BNS23], 1.6, p. 9). *Chứng minh* $\dfrac{4}{\sqrt{5}-1} + \dfrac{3}{\sqrt{5}-2} + \dfrac{16}{\sqrt{5}-3} = -5$.

Bài toán 217 ([BNS23], 1.7, p. 9). *Chứng minh* $\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}-1} + \dfrac{3}{\sqrt{6}-2} + \dfrac{3}{\sqrt{6}-3}\right)\dfrac{5}{9\sqrt{6}+4} = \frac{1}{2}$.

Bài toán 218 ([BNS23], 1.8, p. 9). *Cho* $f(x) = \dfrac{x+\sqrt{5}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{5}}} + \dfrac{x-\sqrt{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{5}}}$. *Tính* $f(3)$.

Bài toán 219 ([BNS23], 1.9, p. 9). *Cho* $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ *&* $a = \dfrac{4}{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}$. *Tính* $f(a)$.

Bài toán 220 ([BNS23], Ví dụ 2.1, p. 10). *Chứng minh với* $ab\neq 0$: $\dfrac{\sqrt[3]{a^5b^7}}{\sqrt[3]{a^2b}} - \dfrac{\sqrt[3]{a^4b^8}}{\sqrt[3]{ab^2}} = 0$.

Bài toán 221 ([BNS23], Ví dụ 2.2, p. 10). *Chứng minh với* $abc\neq 0$: $\dfrac{\sqrt[3]{a^4b^5c^7}}{\sqrt[3]{ab^2c}} = abc^2$.

Bài toán 222 ([BNS23], Ví dụ 2.3, p. 10). *Với* $a\geq 2+\sqrt{2}$ *&*

$$u = \sqrt[3]{\left(a+\frac{2}{a}\right)^3 - 3a^2 - \frac{12}{a^2} + 3\left(a+\frac{2}{a}\right) - 13},\ v = \sqrt{a^2+\frac{4}{a^2} - 8\left(a+\frac{2}{a}\right) + 20}.$$

Chứng minh $u-v=3$.

Bài toán 223 ([BNS23], Ví dụ 2.4, p. 11). *Đơn giản biểu thức* $A = \sqrt[3]{8(7+5\sqrt{2})} + \sqrt[3]{216(7-5\sqrt{2})} + 4\sqrt{2} - 7$.

Bài toán 224 ([BNS23], Ví dụ 2.5, p. 11). *Chứng minh* $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1$.

Bài toán 225 ([BNS23], Ví dụ 2.6, p. 11). *Chứng minh nếu* $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ *thì* $a^3 + 3a = 4$.

Bài toán 226 ([BNS23], Ví dụ 2.7, p. 11). *Chứng minh:*

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}} + 3\sqrt[3]{2}\right)\sqrt{3}}}{3+\sqrt[6]{108}} = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}.$$

Bài toán 227 ([BNS23], Ví dụ 2.8, p. 12). *Chứng minh nếu* $\sqrt[3]{(a+1)^2} + \sqrt[3]{a^2-1} + \sqrt[3]{(a-1)^2} = 1$ *thì* $\sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a-1} = 2$.

Bài toán 228 ([BNS23], Ví dụ 2.9, p. 12). *Đơn giản biểu thức* $A = \dfrac{x+1}{2\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}+x+\frac{1}{x}}$ *với* $x \notin \{-1, 0\}$.

Bài toán 229 ([BNS23], Ví dụ 2.10, p. 12). *Cho* $a = \sqrt{2} + \sqrt{7 - \sqrt[3]{61+46\sqrt{5}}+1}$. *(a) Chứng minh* $a^4 - 14a^2 + 9 = 0$. *(b) Giả sử* $f(x) = x^5 + 2x^4 - 14x^3 - 28x^2 + 9x + 19$. *Tính* $f(a)$.

Bài toán 230 ([BNS23], Ví dụ 2.11, p. 13). *Cho* $a, b, c > 0$. *Giả sử* m, n, p *là những số nguyên dương lớn hơn* 1 *sao cho* $bc = \sqrt[m]{a}$, $ca = \sqrt[n]{b}$, *&* $ab = \sqrt[p]{c}$. *Chứng minh trong 3 số* a, b, c *phải có ít nhất 1 số bằng* 1.

Bài toán 231 ([BNS23], Ví dụ 2.12, p. 13). *Cho* $a = \dfrac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}$. *(a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận số* a *làm nghiệm. (b) Giả sử đa thức* $f(x) = 3x^6 - 4x^5 - 7x^4 + 6x^3 + 6x^2 + x - 53\sqrt{2}$. *Tính* $f(a)$.

Bài toán 232 ([BNS23], Ví dụ 2.13, p. 14). *Cho* $a = \dfrac{7-4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}} - \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$. *(a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận số* a *làm nghiệm. (b) Giả sử đa thức* $f(x) = \dfrac{x^6+x^4+4x^2}{40(x^4+4x^2-144)}$. *Tính* $f(a)$.

Bài toán 233 ([BNS23], Ví dụ 2.14, p. 14). *Cho* $a = \sqrt[3]{38+17\sqrt{5}} + \sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}$. *Giả sử ta có đa thức* $f(x) = (x^3+3x+1935)^{2012}$. *Tính* $f(a)$.

Bài toán 234 ([BNS23], 2.1., p. 14). *Biểu diễn* $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ *thành* $a + b\sqrt{5}$ *với* $a, b \in \mathbb{Q}$.

Bài toán 235 ([BNS23], 2.2., p. 14). *Cho* $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} + \sqrt[3]{1-\sqrt{11}}$. *Chứng minh* $a^9 - 6a^6 + 282a^3 = 8$.

Bài toán 236 ([BNS23], 2.3., p. 15). *Cho* $a = (\sqrt[3]{1+2\sqrt{6}} - \sqrt[6]{5+4\sqrt{6}})\sqrt[3]{2\sqrt{6}-1} + 1$. *(a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận* a *làm nghiệm. (b) Giả sử* $f(x) = \sum_{i=1}^{2012} ix^i + 2012$. *Tính* $f(a)$.

Bài toán 237 ([BNS23], 2.4., p. 15). *Chứng minh:*

$$\frac{a+2\sqrt{ab}+9b}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}-2\sqrt[4]{ab}} - 2\sqrt{b} = \left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)^2, \ \forall a, b \in \mathbb{R},\ a, b > 0.$$

Bài toán 238 ([BNS23], 2.5., p. 15). *Chứng minh:*

$$\left(\sqrt[3]{a^4} + b^2\sqrt[3]{a^2} + b^4\right)\frac{\sqrt[3]{a^8} - b^6 + b^4\sqrt[3]{a^2} - a^2b^2}{a^2b^2 + b^2 - a^2b^8 - b^4} = a^2b^2,\ \forall a, b \in \mathbb{R},\ ab \neq 0,\ a \neq b^3.$$

Bài toán 239 ([BNS23], 2.6., p. 15). *Cho* $a, b > 0$. *Đơn giản biểu thức*

$$A = \frac{\sqrt{a^3+2a^2b} + \sqrt{a^4+2a^3b} - \sqrt{a^3} - a^2b}{\sqrt{\left(2a+b-\sqrt{a^2+2ab}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[6]{a^5}+a\right)}}.$$

Bài toán 240 ([BNS23], 2.7., p. 15). *Giả sử* $u^3 \geq v^2$, $u, v \in \mathbb{Q}^+$. *Xác định* u, v *để*

$$\sqrt{\frac{u-8\sqrt[6]{u^3v^2}+4\sqrt[3]{v^2}}{\sqrt{u}-2\sqrt[3]{v}+2\sqrt[12]{u^3v^2}} + 3\sqrt[3]{v}} + \sqrt[6]{v} = 1.$$

Bài toán 241. *Cho* $a, b, c, A, B \in \mathbb{Z}$, $c \geq 0$ *thỏa mãn đẳng thức* $(a+b\sqrt{c})^2 = A + B\sqrt{c}$. *(a) Tìm mối quan hệ của* a, b, c, A, B. *Biểu diễn* (A, B) *theo* (a, b, c). *(b)** *Biểu diễn* (a, b) *theo* (c, A, B).

Bài toán 242. *Cho* $a, b, c, A, B \in \mathbb{Z}$, $c \geq 0$ *thỏa mãn đẳng thức* $(a+b\sqrt{c})^3 = A + B\sqrt{c}$. *(a) Tìm mối quan hệ của* a, b, c, A, B. *Biểu diễn* (A, B) *theo* (a, b, c). *(b)** *Biểu diễn* (a, b) *theo* (c, A, B).

Bài toán 243. *Cho* $a, b, c, A, B \in \mathbb{Z}$, $c \geq 0$ *thỏa mãn đẳng thức* $(a+b\sqrt[3]{c})^3 = A + B\sqrt[3]{c} + C\sqrt[3]{c^2}$. *(a) Tìm mối quan hệ của* a, b, c, A, B, C. *Biểu diễn* (A, B, C) *theo* (a, b, c). *(b)** *Biểu diễn* (a, b) *theo* (c, A, B, C).

Tài liệu

[Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.

[BNS23] Vũ Hữu Bình, Phạm Thị Bạch Ngọc, and Nguyễn Tam Sơn. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 9. Tập 1: Đại Số*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 192.

[Chí+23] Phan Đức Chính, Tôn Thân, Vũ Hữu Bình, Trần Phương Dung, Ngô Hữu Dũng, Lê Văn Hồng, and Nguyễn Hữu Thảo. *Toán 9 Tập 1*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 128.

[Thâ+23] Tôn Thân, Vũ Hữu Bình, Trần Phương Dung, Lê Văn Hồng, and Nguyễn Hữu Thảo. *Bài Tập Toán 9 Tập 1*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 216.

[Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.