

# 1st-Order Inequation with 1 Variable – Bất Phương Trình Bậc Nhất 1 Ẩn

$$ax + b >, <, \geq, \leq 0$$

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 26 tháng 3 năm 2023

## Tóm tắt nội dung

[EN] This text is a collection of problems, from easy to advanced, about *1st-order inequation with 1 variable*. This text is also a supplementary material for my lecture note on Elementary Mathematics grade 8, which is stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary-mathematics/grade-8/lecture)<sup>1</sup>. The latest version of this text has been stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/1st order inequation with 1 variable](https://github.com/NQBH/hobby/elementary-mathematics/grade-8/1st-order-inequation-with-1-variable)<sup>2</sup>.

[VI] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài tập chọn lọc từ cơ bản đến nâng cao về *bất phương trình bậc nhất 1 ẩn*. Tài liệu này là phần bài tập bổ sung cho tài liệu chính – bài giảng [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary-mathematics/grade-8/lecture) của tác giả viết cho Toán Sơ Cấp lớp 8. Phiên bản mới nhất của tài liệu này được lưu trữ & có thể tải xuống ở link sau: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/1st order inequation with 1 variable](https://github.com/NQBH/hobby/elementary-mathematics/grade-8/1st-order-inequation-with-1-variable).

## Mục lục

<b>1</b>	<b>Liên Hệ Giữa Thứ Tự &amp; Phép Cộng</b>	<b>2</b>
1.1	Thứ tự trên tập số thực $\mathbb{R}$	2
1.2	Bất đẳng thức	2
1.3	Liên Hệ Giữa Thứ Tự & Phép Cộng	2
<b>2</b>	<b>Liên Hệ Giữa Thứ Tự &amp; Phép Nhân</b>	<b>2</b>
2.1	Liên hệ giữa thứ tự & phép nhân với số dương & số âm	2
2.2	Tính chất bắc cầu của thứ tự	2
<b>3</b>	<b>Bất Phương Trình 1 Ẩn</b>	<b>3</b>
3.1	Tập nghiệm của bất phương trình	3
3.2	Bất phương trình tương đương	3
<b>4</b>	<b>Bất Phương Trình Bậc Nhất 1 Ẩn</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Phương Trình Chứa Dấu Giá Trị Tuyệt Đối</b>	<b>3</b>
<b>6</b>	<b>Miscellaneous</b>	<b>3</b>
	<b>Tài liệu</b>	<b>3</b>

---

\*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam  
e-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com); website: <https://nqbh.github.io>.

<sup>1</sup>URL: [https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary-mathematics/grade-8/NQBH\\_elementary-mathematics\\_grade-8.pdf](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary-mathematics/grade-8/NQBH_elementary-mathematics_grade-8.pdf).

<sup>2</sup>URL: [https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary-mathematics/grade-8/1st-order-inequation-1-variable/NQBH\\_1st\\_order\\_inequation\\_1-variable.pdf](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary-mathematics/grade-8/1st-order-inequation-1-variable/NQBH_1st_order_inequation_1-variable.pdf).

# 1 Liên Hệ Giữa Thứ Tự & Phép Cộng

## 1.1 Thứ tự trên tập số thực $\mathbb{R}$

Trên tập hợp số thực  $\mathbb{R}$ , khi so sánh 2 số  $a, b \in \mathbb{R}$ , xảy ra 1 trong 3 trường hợp sau: Số  $a$  bằng số  $b$ , ký hiệu  $a = b$ . Số  $a$  nhỏ hơn số  $b$ , ký hiệu  $a < b$ . Số  $a$  lớn hơn số  $b$ , ký hiệu  $a > b$ . Khi biểu diễn số thực trên trục số vẽ theo phương nằm ngang (hoặc thẳng đứng), điểm biểu diễn số nhỏ hơn ở bên trái (ở bên dưới) điểm biểu diễn số lớn hơn. Chính điều đó cho ta hình dung về thứ tự trên tập số thực  $\mathbb{R}$ .

Nếu số  $a$  không nhỏ hơn số  $b$ , thì phải có hoặc  $a > b$ , hoặc  $a = b$ . Khi đó, ta nói gọn là  $a$  lớn hơn hoặc bằng  $b$ , ký hiệu  $a \geq b$ , e.g.,  $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ; nếu  $c \in \mathbb{R}$  là số không âm thì ta viết  $c \geq 0$ . Nếu số  $a$  không lớn hơn số  $b$ , thì phải có hoặc  $a < b$ , hoặc  $a = b$ . Khi đó, ta nói gọn là  $a$  nhỏ hơn hoặc bằng  $b$ , ký hiệu  $a \leq b$ , e.g.,  $-x^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ; nếu số  $y \in \mathbb{R}$  không lớn hơn 3 thì ta viết  $y \leq 3$ .

## 1.2 Bất đẳng thức

**Định nghĩa 1** (Bất đẳng thức). Các hệ thức dạng  $a < b, a > b, a \leq b, a \geq b$  được gọi là bất đẳng thức.  $a$  là vế trái,  $b$  là vế phải của bất đẳng thức.

## 1.3 Liên Hệ Giữa Thứ Tự & Phép Cộng

**Mệnh đề 1.** Khi cộng/trừ cùng 1 số vào cả 2 vế của 1 bất đẳng thức ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho:  $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c, a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c, a > b \Leftrightarrow a + c > b + c, a \geq b \Leftrightarrow a + c \geq b + c, \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

Có thể áp dụng tính chất trên để so sánh 2 số, hoặc chứng minh bất đẳng thức.

**Bài toán 1** (Chính et al., 2022, ?3, p. 36). So sánh  $\sqrt{2} + 2$  & 5.

*Giải.*  $2 < 9 \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{9} = 3 \Rightarrow \sqrt{2} + 2 < 3 + 2 = 5$ . Vậy  $\sqrt{2} + 2 < 5$ . □

**Lưu ý 1.** Tính chất của thứ tự cũng chính là tính chất của bất đẳng thức.

**Bài toán 2** (Tổng các bình phương thì không âm). Chứng minh: (a)  $x^2 + a \geq a, \forall x, a \in \mathbb{R}$ . (b)  $\sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2 = (a_1 x + b_1)^2 + (a_2 x + b_2)^2 + \dots + (a_n x + b_n)^2 \geq 0, \forall x, a_i, b_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, n$ . (c)  $\sum_{i=1}^n (a_i x + b_i y + c_i)^2 = (a_1 x + b_1 y + c_1)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2)^2 + \dots + (a_n x + b_n y + c_n)^2 \geq 0, \forall x, y, a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, n$ . (d)  $\sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + a_i \right)^2 = (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n + a_1)^2 + (a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n + a_2)^2 + \dots + (a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n + a_m)^2 \geq 0, \forall a_{ij}, a_i, x_j \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, m, \forall j = 1, 2, \dots, n$ . (e) 1 cách tổng quát, tổng các bình phương của các hàm nhiều biến thì không âm:  $\sum_{i=1}^m (f_i(x_1, x_2, \dots, x_m))^2 \geq 0, \forall x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, m$ , với mọi hàm  $m$  biến  $f_i, \forall i = 1, 2, \dots, m$ .

**Bài toán 3** (Chính et al., 2022, 4., p. 37). 1 biển báo giao thông với nền trắng, số 20 màu đen, viền đỏ cho biết vận tốc tối đa mà các phương tiện giao thông được đi trên quãng đường có biển quy định là 20km/h. Nếu 1 ô tô đi trên đường đó có vận tốc là  $a$  km/h thì  $a$  phải thỏa mãn điều kiện nào trong các điều kiện sau:  $a > 20, a < 20, a \leq 20, a \geq 20$ ?

# 2 Liên Hệ Giữa Thứ Tự & Phép Nhân

## 2.1 Liên hệ giữa thứ tự & phép nhân với số dương & số âm

**Mệnh đề 2.** Khi nhân/chia cả 2 vế của bất đẳng thức với cùng 1 số dương ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho:  $a < b \Leftrightarrow ac < bc, a \leq b \Leftrightarrow ac \leq bc, a > b \Leftrightarrow ac > bc, a \geq b \Leftrightarrow ac \geq bc, \forall a, b, c \in \mathbb{R}, c > 0$ . Ngược lại, khi nhân/chia cả 2 vế của bất đẳng thức với cùng 1 số âm ta được bất đẳng thức mới ngược chiều với bất đẳng thức đã cho:  $a < b \Leftrightarrow ac > bc, a \leq b \Leftrightarrow ac \geq bc, a > b \Leftrightarrow ac < bc, a \geq b \Leftrightarrow ac \leq bc, \forall a, b, c \in \mathbb{R}, c < 0$ .

*Chứng minh.* Dễ thấy nhờ xét dấu<sup>3</sup> của tích  $ac - bc = c(a - b)$  theo dấu của  $c$  & dấu của  $a - b$ . □

## 2.2 Tính chất bắc cầu của thứ tự

**Mệnh đề 3** (Tính chất bắc cầu).  $(a < b \text{ & } b < c) \Rightarrow a < c, (a > b \text{ & } b > c) \Rightarrow a > c, (a \leq b \text{ & } b \leq c) \Rightarrow a \leq c, (a \geq b \text{ & } b \geq c) \Rightarrow a \geq c, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ .

**Bài toán 4** (Chính et al., 2022, Ví dụ, p. 39). Cho  $a > b$ . Chứng minh  $a + 2 > b + 1$ .

*1st chứng minh.* Cộng 2 vào 2 vế của bất đẳng thức  $a > b$ , được:  $a + 2 > b + 2$  (1). Cộng  $b$  vào 2 vế của bất đẳng thức  $2 > -1$ , được:  $b + 2 > b - 1$  (2). Từ (1) & (2), theo tính chất bắc cầu, suy ra  $a + 2 > b - 1$ . □

*2nd chứng minh.*  $a > b \Rightarrow a - b > 0$ . Có  $a + 2 - (b + 1) = a + 2 - b - 1 = a - b + 1 \geq 0 + 1 = 1 > 0$ , suy ra  $a + 2 > b - 1$ . □

**Bài toán 5** (Chính et al., 2022, 6., p. 39). Cho  $a < b$ , so sánh: (a)  $2a$  &  $2b$ . (b)  $2a$  &  $a + b$ . (c)  $-a$  &  $-b$ .

<sup>3</sup>sign( $ac - bc$ ) = sign( $c(a - b)$ ) = sign( $c$ ) sign( $a - b$ ),  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ .

**Bài toán 6** (Chính et al., 2022, 7., p. 40). Số  $a \in \mathbb{R}$  là số âm hay dương nếu: (a)  $12a < 15a$ ? (b)  $4a < 3a$ ? (c)  $-3a > -5a$ ?

**Bài toán 7** (Chính et al., 2022, 8., p. 40). Cho  $a < b$ . Chứng minh: (a)  $2a - 3 < 2b - 3$ . (b)  $2a - 3 < 2b + 5$ .

**Bài toán 8** (Chính et al., 2022, 9., p. 40). Cho  $\triangle ABC$ . Đ/S? (a)  $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} > 180^\circ$ . (b)  $\widehat{A} + \widehat{B} < 180^\circ$ . (c)  $\widehat{B} + \widehat{C} \leq 180^\circ$ . (d)  $\widehat{A} + \widehat{B} \geq 180^\circ$ .

**Bài toán 9** (Chính et al., 2022, 11., p. 40). Cho  $a < b$ . Chứng minh: (a)  $3a + 1 < 3b + 1$ . (b)  $-2a - 5 > -2b - 5$ .

**Bài toán 10** (Chính et al., 2022, 13., p. 40). So sánh  $a, b$  nếu: (a)  $a + 5 < b + 5$ . (b)  $-3a > -3b$ . (c)  $5a - 6 \geq 5b - 6$ . (d)  $-2a + 3 \leq -2b + 3$ .

**Bài toán 11** (Chính et al., 2022, 14., p. 40). Cho  $a < b$ . So sánh: (a)  $2a + 1$  với  $2b + 1$ . (b)  $2a + 1$  với  $2b + 3$ .

Bất đẳng thức giữa trung bình cộng  $\frac{a+b}{2}$  & trung bình nhân  $\sqrt{ab}$ :

**Định lý 1** (Bất đẳng thức Cauchy/AM-GM cho 2 số).  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ . Đẳng thức xảy ra khi & chỉ khi  $a = b$ .

Chứng minh.  $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ . “=”  $\Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$ .  $\square$

### 3 Bất Phương Trình 1 Ẩn

*Phân biệt:* Phương trình 1 ẩn có dạng  $f(x) = 0$ , còn bất phương trình 1 ẩn có 1 trong 4 dạng sau:  $f(x) < 0$ ,  $f(x) > 0$ ,  $f(x) \leq 0$ ,  $f(x) \geq 0$  (i.e., thay dấu = bởi các dấu so sánh  $<, >, \leq, \geq$ ).

**Bài toán 12** (Chính et al., 2022, p. 41). Nam có 25000 đồng. Nam muốn mua 1 cái bút giá 4000 đồng & 1 số quyển vở loại 2200 đồng/quyển. Tính số quyển vở Nam có thể mua được.

*Giải.* Gọi  $x \in \mathbb{N}$  là số quyển vở Nam có thể mua thì  $x$  phải thỏa mãn hệ thức  $2200x + 4000 \leq 25000 \Leftrightarrow x \leq \frac{25000-4000}{2200} = 9.(54)$ , mà  $x \in \mathbb{N}$ , suy ra  $x \in \{1, 2, \dots, 9\}$ . Vậy  $S = \{1, 2, \dots, 9\}$ .  $\square$

**Bài toán 13** (Chính et al., 2022, ?1, p. 41). Giải bất phương trình bậc 2  $x^2 \leq 6x - 5$ .

*Giải.*  $x^2 \leq 6x - 5 \Leftrightarrow (x-1)(x-5) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5$ . Vậy  $S = [1, 5] = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 5\}$ .  $\square$

#### 3.1 Tập nghiệm của bất phương trình

**Định nghĩa 2** (Tập nghiệm của bất phương trình, giải bất phương trình). Tập hợp tất cả các nghiệm của 1 bất phương trình được gọi là tập nghiệm của bất phương trình đó. Giải bất phương trình là tìm tập nghiệm của bất phương trình đó.

**Bài toán 14** (Bất phương trình bậc nhất). Giải bất phương trình với  $a, b, c \in \mathbb{R}$  cho trước: (a)  $x < a$ . (b)  $x > a$ . (c)  $x \leq a$ . (d)  $x \geq a$ . (e)  $ax + b < c$ . (f)  $ax + b > c$ . (g)  $ax + b \leq c$ . (h)  $ax + b \geq c$ .

*Giải.* (a)  $S = (-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$ . (b)  $S = (a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$ . (c)  $S = (-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$ . (d)  $S = [a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$ .  $\square$

#### 3.2 Bất phương trình tương đương

**Định nghĩa 3** (Bất phương trình tương đương). 2 bất phương trình có cùng tập nghiệm được gọi là 2 bất phương trình tương đương & dùng ký hiệu “ $\Leftrightarrow$ ” để chỉ sự tương đương đó.

**Ví dụ 1.** (a)  $x < a \Leftrightarrow a > x$  vì có chung tập nghiệm  $S = (-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$ . (b)  $x > a \Leftrightarrow a < x$  vì có chung tập nghiệm  $S = (a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$ . (c)  $x \leq a \Leftrightarrow a \geq x$  vì có chung tập nghiệm  $S = (-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$ . (d)  $x \geq a \Leftrightarrow a \leq x$  vì có chung tập nghiệm  $S = [a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$ .

**Bài toán 15** (Chính et al., 2022, 18., p. 43). Quảng đường từ A đến B dài 50km. 1 ô tô đi từ A đến B, khởi hành lúc 7:00. Hỏi ô tô phải đi với vận tốc bao nhiêu km/h để đến B trước 9:00 cùng ngày?

### 4 Bất Phương Trình Bậc Nhất 1 Ẩn

### 5 Phương Trình Chứa Dấu Giá Trị Tuyệt Đối

### 6 Miscellaneous

### Tài liệu

Chính, Phan Đức, Tôn Thân, Nguyễn Huy Doan, Lê Văn Hồng, Trương Công Thành, and Nguyễn Hữu Thảo (2022). *Toán 8 Tập 2*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 133.