Limit – Giới Hạn

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 19 tháng 2 năm 2023

Tóm tắt nội dung

[EN] This text is a collection of problems, from easy to advanced, about limit. This text is also a supplementary material for my lecture note on Elementary Mathematics grade 11, which is stored & downloadable at the following link: GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 11/lecture[1]. The latest version of this text has been stored & downloadable at the following link: GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 11/limit[2].

[VI] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài tập chọn lọc từ cơ bản đến nâng cao về biểu thức đại số. Tài liệu này là phần bài tập bổ sung cho tài liệu chính – bài giảng GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 11/lecture của tác giả viết cho Toán Sơ Cấp lớp 11. Phiên bản mới nhất của tài liệu này được lưu trữ & có thể tải xuống ở link sau: GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 11/limit.

Nội dung. Giới hạn của dãy số, giới hạn của hàm số, quy tắc tìm giới hạn.

Mục lục

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

[1] URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_11/NQBH_elementary_mathematics_grade_11.pdf.

[2] URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_11/limit/NQBH_limit.pdf.

1 Giới Hạn của Dãy Số

Định nghĩa 1 (Dãy số có giới hạn là 0)**.** *Dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn 1 số dương bé tùy ý, kể từ 1 số hạng nào đó trở đi. Ký hiệu:* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ *hay* $u_n \to 0$ *khi* $n \to +\infty$.

Như vậy, (u_n) có giới hạn là 0 khi $n \to +\infty$ nếu u_n có thể gần 0 bao nhiêu cũng được, miễn là n đủ lớn.

Bài toán 1 (Hạo et al., 2022, Ví dụ 1, p. 113)**.** *Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$. Chứng minh* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Định nghĩa 2 (Giới hạn của dãy số)**.** *Dãy số (v_n) có* giới hạn *là số a (hay v_n dần tới a) khi $n \to +\infty$, nếu* $\lim_{n\to+\infty}(v_n - a) = 0$. *Ký hiệu:* $\lim_{n\to+\infty} v_n = a$ *hay* $v_n \to a$ *khi* $n \to +\infty$.

Bài toán 2 (Hạo et al., 2022, Ví dụ 2, p. 114)**.** *Cho dãy số (v_n) với $v_n = \frac{2n+1}{n}$. Chứng minh* $\lim_{n\to+\infty} v_n = 2$.

Bài toán 3 (Mở rộng Hạo et al., 2022, Ví dụ 2, p. 114)**.** *Cho dãy số (v_n) với $v_n = \frac{an+b}{cn+d}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c^2 + d^2 \neq 0$. Tính* $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

Bài toán 4 (Hạo et al., 2022, Ví dụ 3, p. 115)**.** *Tìm* $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2-n}{1+n^2}$.

Bài toán 5 (Hạo et al., 2022, Ví dụ 4, p. 115)**.** *Tìm* $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1+4n^2}}{1-2n}$.

Bài toán 6 (Hạo et al., 2022, Ví dụ 5, p. 116)**.** *(a) Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n), với $u_n = \frac{1}{3^n}$. (b) Tính tổng* $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots$.

Định nghĩa 3 (Giới hạn vô cực)**.** *Ta nói dãy số (u_n)* có giới hạn $+\infty$ *khi $n \to +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn 1 số dương bất kỳ, kể từ 1 số hạng nào đó trở đi. Ký hiệu: $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ hay $u_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$. Dãy số (u_n) được gọi là* có giới hạn $-\infty$ *khi $n \to +\infty$ nếu $\lim_{n\to+\infty}(-u_n) = +\infty$. Ký hiệu: $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ hay $u_n \to -\infty$ khi $n \to +\infty$.*

Bài toán 7 (Hạo et al., 2022, Ví dụ 6, p. 118)**.** *Cho dãy số (u_n) với $u_n = n^2$. Chứng minh* $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Bài toán 8 (Hạo et al., 2022, Ví dụ 7, p. 119)**.** *Tìm* $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+5}{n\cdot 3^n}$.

Bài toán 9 (Hạo et al., 2022, Ví dụ 8, p. 119)**.** *Tính* $\lim_{n\to+\infty}(n^2 - 2n - 1)$.

Bài toán 10 (Hạo et al., 2022, **1.**, p. 121)**.** *Có* 1kg *chất phóng xạ độc hại. Biết cứ sau 1 khoảng thời gian $T = 24000$ năm thì 1 nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khỏe của con người (T được gọi là* chu kỳ bán rã*). Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kỳ thứ n. (a) Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số (u_n). (b) Chứng minh (u_n) có giới hạn là 0. (c) Từ kết quả (b), chứng minh sau 1 số năm nào đó khối lượng chất phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại đối với con người, cho biết chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn* 10^{-6}g.

Bài toán 11 (Hạo et al., 2022, **2.**, p. 121)**.** *Biết dãy số (u_n) thỏa mãn $|u_n - 1| < \frac{1}{n^3}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Chứng minh* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Bài toán 12 (Hạo et al., 2022, **3.**, p. 121)**.** *Tính: (a)* $\lim_{n\to+\infty} \frac{6n-1}{3n+2}$*; (b)* $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+n-5}{2n^2+1}$*; (c)* $\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n+5\cdot 4^n}{4^n+2^n}$*; (d)* $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{9n^2-n+1}}{4n-2}$.

Bài tập phụ thuộc hình vẽ: Hạo et al., 2022, **4.**, p. 121.

Bài toán 13 (Hạo et al., 2022, **5.**, p. 122)**.** *Tính* $S = -1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{10^{n-1}} + \cdots$.

Bài toán 14 (Hạo et al., 2022, **6.**, p. 122)**.** *Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn $a = 1.(02) = 1.020202\ldots$ (chu kỳ 02). Viết a dưới dạng 1 phân số.*

Bài toán 15 (Hạo et al., 2022, **7.**, p. 122)**.** *Tính: (a)* $\lim_{n\to+\infty}(n^3 + 2n^2 - n + 1)$*; (b)* $\lim_{n\to+\infty}(-n^2 + 5n - 2)$*; (c)* $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2 - n} - n\right)$*; (d)* $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2 - n} + n\right)$.

Bài toán 16 (Hạo et al., 2022, **8.**, p. 122)**.** *Cho 2 dãy số $(u_n), (v_n)$. Biết $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$, $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Tính: (a)* $\lim_{n\to+\infty} \frac{3u_n-1}{u_n+1}$*; (b)* $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n+2}{v_n^2-1}$.

2 Giới Hạn của Hàm Số

Bài toán 17 (Tuấn et al., 2022, Ví dụ 1, p. 153)**.** *Cho hàm số $f(x) = \frac{2x^2+x-3}{x-1}$. Dùng định nghĩa chứng minh* $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$.

Giải. Hàm số đã cho xác định trên $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Giả sử (x_n) là dãy số bất kỳ, $x_n \neq 1$, & $x_n \to 1$.

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \frac{2x_n^2 + x_n - 3}{x_n - 1} \lim_{n\to+\infty} \frac{2(x_n - 1)\left(x_n + \frac{3}{2}\right)}{x_n - 1} = \lim_{n\to+\infty} 2\left(x_n + \frac{3}{2}\right) = 2\left(1 + \frac{3}{2}\right) = 5.$$

Do đó, $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$. □

Bài toán 18 (Tuấn et al., 2022, Ví dụ 2, p. 154). *Cho hàm số*

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{nếu } x \ge 0, \\ 1 - x, & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Dùng định nghĩa chứng minh hàm số $f(x)$ không có giới hạn khi $x \to 0$, i.e., $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$.

Giải. Hàm số đã cho xác định trên $D_f = \mathbb{R}$. Lấy dãy số (x_n) với $x_n = \frac{1}{n}$. Có $x_n \to 0$ & $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ (1). Lấy dãy số (y_n) với $y_n = -\frac{1}{n}$. Có $y_n \to 0$ & $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \lim_{n\to+\infty}(1 - y_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ (2). Từ (1) & (2) suy ra hàm số $f(x)$ không có giới hạn khi $x \to 0$. □

Nhận xét 1. *"Để dùng định nghĩa chứng minh hàm số $y = f(x)$ không có giới hạn khi $x \to x_0$, ta thường làm như sau: (a) Chọn 2 dãy số khác nhau $(a_n), (b_n)$ thỏa mãn: a_n, b_n thuộc tập xác định D_f của hàm số $y = f(x)$ & khác x_0, $a_n \to x_0$, $b_n \to x_0$. (b) Chứng minh $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) \ne \lim_{n\to+\infty} f(b_n)$ hoặc chứng minh 1 trong các giới hạn này không tồn tại. Trường hợp $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, hay $x \to \pm\infty$ chứng minh tương tự." – Tuấn et al., 2022, pp. 154–155*

Bài toán 19 (Tuấn et al., 2022, Ví dụ 3, p. 155). *Tính: (a) $\lim_{x\to-2} \left(\sqrt{x^2+5} - 1\right)$. (b) $\lim_{x\to3^-} \frac{x+1}{x-2}$. (c) $\lim_{x\to-\infty}(-x^3 + x^2 - x + 1)$. (d) $\lim_{x\to4} \frac{1-x}{(x-4)^2}$. (e) $\lim_{x\to3^-} \frac{2x-1}{x-3}$.*

Giải. (a) $-2 \in D_f = \mathbb{R}$, $\lim_{x\to-2} \left(\sqrt{x^2+5} - 1\right) = \sqrt{(-2)^2+5} - 1 = 2$. (b) $3 \in D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$, $\lim_{x\to3^-} \frac{x+1}{x-2} = \frac{3+1}{3-2} = 4$. (c) $\lim_{x\to-\infty}(-x^3 + x^2 - x + 1) = \lim_{x\to-\infty} x^3 \left(-1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = +\infty$. (d) Chú ý $4 \notin D_f = \mathbb{R}\backslash\{4\}$. Có $\lim_{x\to4}(1-x) = -3 < 0$ (1), $\lim_{x\to4}(x-4)^2 = 0$ & $(x-4)^2 > 0$, $\forall x \ne 4$ (2). Áp dụng quy tắc về giới hạn vô cực đối với thương $\frac{f(x)}{g(x)}$, từ (1) & (2) suy ra $\lim_{x\to4} \frac{1-x}{(x-4)^2} = -\infty$. (e) $3 \notin D_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}$, có $\lim_{x\to3^-}(2x-1) = 5 > 0$, $\lim_{x\to3^-}(x-3) = 0$ & $x - 3 < 0$, $\forall x < 3$. Suy ra $\lim_{x\to3^-} \frac{2x-1}{x-3} = -\infty$. □

Lời giải các ví dụ trên đã dùng trực tiếp các định lý về giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương, & căn của các hàm số hoặc các quy tắc về giới hạn vô cực.

Bài toán 20 (Tuấn et al., 2022, Ví dụ 4, p. 156). *Tính: (a) $\lim_{x\to1} \frac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}$. (b) $\lim_{x\to2} \frac{2-x}{\sqrt{x+7}-3}$. (c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+3x-4}{-x^3-x^2+1}$. (d) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}$. (e) $\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+1} - 1\right)$. (f) $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2-x} + 2x\right)$.*

Giải. (a) $\lim_{x\to1} \frac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x+3)}{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \lim_{x\to1} \frac{x+3}{2x+1} = \frac{4}{3}$. (b) $\lim_{x\to2} \frac{2-x}{\sqrt{x+7}-3} = \lim_{x\to2} \frac{(2-x)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}$ $= \lim_{x\to2} \frac{(2-x)(\sqrt{x+7}+3)}{x-2} = \lim_{x\to2} -(\sqrt{x+7}+3) = -6$. (c) ... □

Bài toán 21 (Tuấn et al., 2022, 2.1., p. 158). *Dùng định nghĩa tìm các giới hạn: (a) $\lim_{x\to5} \frac{x+3}{3-x}$. (b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1}{x^2+1}$.*

Bài toán 22 (Tuấn et al., 2022, 2.2., p. 158). *Cho hàm số*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{nếu } x \ge 0, \\ x^2 - 1, & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

(a) Vẽ đồ thị của hàm số $f(x)$. Từ đó dự đoán về giới hạn của $f(x)$ khi $x \to 0$. (b) Dùng định nghĩa chứng minh dự đoán trên.

Bài toán 23 (Tuấn et al., 2022, 2.3, p. 158). *(a) Chứng minh hàm số $y = \sin x$ không có giới hạn khi $x \to +\infty$. (b) Giải thích bằng đồ thị kết luận ở (a).*

Tuấn et al., 2022, 2.4–2.11.

3 Hàm Số Liên Tục

Bài toán 24 (Tuấn et al., 2022, Ví dụ 1 , p. 161). *Xét tính liên tục của hàm số*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+3}{x-1}, & \text{nếu } x \ne -1, \\ 2, & \text{nếu } x = 1, \end{cases}$$

tại điểm $x = -1$.

Giải. $-1 \in D_f = \mathbb{R}$. Có $f(-1) = 2$, $\lim_{x\to-1} \frac{x+3}{x-1} = \frac{-1+3}{-1-1} = -1 \ne f(-1)$. Do đó, hàm số $f(x)$ không liên tục tại $x = -1$. □

Bài toán 25 (Tuấn et al., 2022, Ví dụ 2 , p. 161). *Xét tính liên tục của hàm số*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x-3}{x-3}, & \text{nếu } x \ne 3, \\ 5, & \text{nếu } x = 3, \end{cases}$$

trên tập xác định của nó.

Bài toán 26 (Tuấn et al., 2022, Ví dụ 3 , p. 162)**.** *Chứng minh phương trình sau có ít nhất 2 nghiệm:* $2x^3 - 10x - 7 = 0$.

Giải. Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - 10x - 7$. Hàm số này là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó $f(x)$ liên tục trên các đoạn $[-1;0]$ & $[0;3]$ (1). Có $f(-1) = 1$, $f(0) = -7$, $f(3) = 17$, nên $f(-1)f(0) < 0$, $f(0)f(3) < 0$ (2). Từ (1) & (2) suy ra phương trình $f(x) = 0$, i.e., $2x^3 - 10x - 7 = 0$ có ít nhất 2 nghiệm, 1 nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$, còn nghiệm kia thuộc khoảng $(0;3)$. □

Bài toán 27 (Tuấn et al., 2022, Ví dụ 4 , p. 163)**.** *Chứng minh phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số* m*:* $(1-m^2)x^5 - 3x - 1 = 0$.

Giải. Xét hàm số $f(x) = (1-m^2)x^5 - 3x - 1$. Vì $f(0) = -1 < 0$, $f(-1) = m^2 + 1 > 0$ nên $f(-1)f(0) < 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$ (1). Vì $f(x)$ là hàm đa thức, liên tục trên $\mathbb{R}$, nên liên tục trên đoạn $[-1;0]$ (2). Từ (1) & (2) suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(-1;0)$, i.e., phương trình $(1-m^2)x^5 - 3x - 1 = 0$ luôn có nghiệm[3] $\forall m \in \mathbb{R}$. □

Nhận xét 2. *"Để chứng minh phương trình* $f(x) = 0$ *có ít nhất 1 nghiệm, chỉ cần tìm được 2 số* $a, b \in \mathbb{R}$ *sao cho* $f(a)f(b) < 0$ *& hàm số* $f(x)$ *liên tục trên đoạn* $[a;b]$*. Nếu phương trình chứa tham số, thì chọn* $a, b \in \mathbb{R}$ *sao cho:* $f(a), f(b)$ *không còn chứa tham số hay chứa tham số nhưng có dấu không đổi; hoặc* $f(a)f(b)$ *chứa tham số nhưng tích* $f(a)f(b)$ *luôn âm." – Tuấn et al., 2022, p. 163*

Bài toán 28 (Tuấn et al., 2022, 3.1., p. 163)**.** *Cho hàm số* $f(x) = \frac{(x-1)|x|}{x}$*. Vẽ đồ thị của hàm số này. Từ đồ thị dự đoán các khoảng trên đó hàm số liên tục & chứng minh dự đoán đó.*

Bài toán 29 (Tuấn et al., 2022, 3.2., p. 163)**.** *Cho ví dụ về 1 hàm số liên tục trên* $(a;b]$ *& trên* $(b;c)$ *nhưng không liên tục trên* $(a;c)$*.*

Bài toán 30 (Tuấn et al., 2022, 3.3., p. 164)**.** *Chứng minh nếu 1 hàm số liên tục trên* $(a;b]$ *& trên* $[b;c)$ *thì nó liên tục trên* $(a;c)$*.*

Bài toán 31 (Tuấn et al., 2022, 3.4., p. 164)**.** *Cho hàm số* $y = f(x)$ *xác định trên khoảng* $(a;b)$ *chứa điểm* x_0*. Chứng minh nếu* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = L$ *thì hàm số* $f(x)$ *liên tục tại điểm* x_0*.*

Hint. Đặt $g(x) \coloneqq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - L$ & biểu diễn $f(x)$ qua $g(x)$.

Tài liệu

Hạo, Trần Văn, Vũ Tuấn, Đào Ngọc Nam, Lê Văn Tiến, and Vũ Viết Yên (2022). *Đại Số & Giải Tích 11*. Tái bản lần thứ 15. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 191.

Tuấn, Vũ, Trần Văn Hạo, Đào Ngọc Nam, Lê Văn Tiến, and Vũ Viết Yên (2022). *Bài Tập Đại Số & Giải Tích 11*. Tái bản lần thứ 15. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 240.

[3] & biết được thêm là có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(-1;0)$.