

Congruent Triangle – Tam Giác Đồng Dạng

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 18 tháng 2 năm 2023

Tóm tắt nội dung

[EN] This text is a collection of problems, from easy to advanced, about *congruent triangle*. This text is also a supplementary material for my lecture note on Elementary Mathematics grade 8, which is stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_8/lecture)¹. The latest version of this text has been stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/congruent triangle](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_8/congruent_triangle)².

[VI] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài tập chọn lọc từ cơ bản đến nâng cao về *tam giác đồng dạng*. Tài liệu này là phần bài tập bổ sung cho tài liệu chính – bài giảng [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_8/lecture) của tác giả viết cho Toán Sơ Cấp lớp 8. Phiên bản mới nhất của tài liệu này được lưu trữ & có thể tải xuống ở link sau: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 8/congruent triangle](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_8/congruent_triangle).

Nội dung. Định lý Thales, tam giác đồng dạng.

Mục lục

1 Định Lý Thales Trong Tam Giác	2
2 Định Lý Đảo & Hệ Quả của Định Lý Thales	2
3 Tính Chất Đường Phân Giác của Tam Giác	2
4 Khái Niệm 2 Tam Giác Đồng Dạng	4
5 Trường Hợp Đồng Dạng Thứ Nhất	4
6 Trường Hợp Đồng Dạng Thứ 2	4
7 Trường Hợp Đồng Dạng Thứ 3	4
8 Các Trường Hợp Đồng Dạng của Tam Giác Vuông	4
9 Ứng Dụng Thực Tế của Tam Giác Đồng Dạng	4
10 Miscellaneous	4
Tài liệu	4

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

¹URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/NQBH_elementary_mathematics_grade_8.pdf.

²URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_8/congruent_triangle/NQBH_congruent_triangle.pdf.

1 Định Lý Thales Trong Tam Giác

Định nghĩa 1 (Tỷ số của 2 đoạn thẳng). Tỷ số của 2 đoạn thẳng là tỷ số độ dài của chúng theo cùng 1 đơn vị đo.

Tỷ số của 2 đoạn thẳng AB, CD được ký hiệu là $\frac{AB}{CD}$. Tỷ số của 2 đoạn thẳng không phụ thuộc vào cách chọn đơn vị đo, e.g., $\frac{2\text{km}}{3\text{km}} = \frac{2\cancel{\text{km}}}{3\cancel{\text{km}}} = \frac{2}{3}$, $\frac{3\text{cm}}{4\text{cm}} = \frac{3\cancel{\text{cm}}}{4\cancel{\text{cm}}} = \frac{3}{4}$, $\frac{4\text{nm}}{5\text{nm}} = \frac{4\cancel{\text{nm}}}{5\cancel{\text{nm}}} = \frac{4}{5}$ (dễ hiểu: 2 đơn vị trên tử & mẫu sẽ triệt tiêu lẫn nhau).

Định nghĩa 2 (2 đoạn thẳng tỷ lệ). 2 đoạn thẳng AB, CD gọi là tỷ lệ với 2 đoạn thẳng $A'B', C'D'$ nếu có tỷ lệ thức: $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$ hay $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$.

Định lý 1 (Thales). Nếu 1 đường thẳng song song với 1 cạnh của tam giác \mathcal{E} cắt 2 cạnh còn lại thì nó định ra trên 2 cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ.

$$\text{GT: } \triangle ABC, B'C' \parallel BC, B' \in AB, C' \in AC. \text{ KL: } \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}, \frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C} = \frac{B'C'}{BC-B'C'}, \frac{B'B}{AB} = \frac{C'C}{AC} = \frac{BC-B'C'}{B'C'}.$$

Bài toán 1 (Chính et al., 2022, ?4, p. 58). (a) Cho $\triangle ABC$. Đường thẳng $al \parallel BC$ cắt 2 cạnh AB, AC lần lượt tại D, E . Biết $AD = \sqrt{3}$, $BD = 5$, $CE = 10$. Tính AE . (b) Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Trên BC, AC lần lượt lấy D, E sao cho $DE \parallel AB$. Biết $CD = 5$, $BD = 3.5$, $CE = 4$. Tính AC, AB .

Bài toán 2 (Chính et al., 2022, 3, p. 59). (a) Cho biết độ dài của AB gấp 5 lần độ dài của CD & độ dài của $A'B'$ gấp 12 lần độ dài của CD . Tính tỷ số của 2 đoạn thẳng $AB, A'B'$. (b) Cho biết độ dài của AB gấp a lần độ dài của CD & độ dài của $A'B'$ gấp b lần độ dài của CD với $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$. Tính tỷ số của 2 đoạn thẳng $AB, A'B'$.

Bài toán 3 (Chính et al., 2022, 4, p. 59). Cho $\triangle ABC$, $B' \in AB$, $C' \in AC$. Cho biết $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$. Chứng minh: (a) $\frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}$. (b) $\frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC}$.

2 Định Lý Đảo & Hệ Quả của Định Lý Thales

Định lý 2 (Thales đảo). Nếu 1 đường thẳng cắt 2 cạnh của 1 tam giác \mathcal{E} định ra trên 2 cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

$$\text{GT: } \triangle ABC, B' \in AB, C' \in AC, \frac{A'B'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}. \text{ KL: } B'C' \parallel BC.$$

Bài toán 4 (Chính et al., 2022, ?2, p. 60). Cho $\triangle ABC$. $D \in AB, E \in AC, F \in BC$, $AD = 3$, $BD = 6$, $AE = 5$, $CE = 10$, $BF = 7$, $CF = 14$. (a) Có bao nhiêu cặp đường thẳng song song với nhau. (b) Tứ giác $BDEF$ là hình gì? (c) So sánh các tỷ số $\frac{AD}{AB}$, $\frac{AE}{AC}$, $\frac{DE}{BC}$ & cho nhận xét về mối liên hệ giữa các cặp cạnh tương ứng của $\triangle ADE$ & $\triangle ABC$.

Hệ quả 1. Nếu 1 đường thẳng cắt 2 cạnh của 1 tam giác \mathcal{E} song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành 1 tam giác mới có 3 cạnh tương ứng tỷ lệ với 3 cạnh của tam giác đã cho.

GT: $\triangle ABC$, $B'C' \parallel BC$, $B' \in AB$, $C' \in AC$. KL: $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$. Hệ quả 1 vẫn đúng cho trường hợp đường thẳng a song song với 1 cạnh của tam giác & cắt phần kéo dài của 2 cạnh còn lại.

Bài tập phụ thuộc hình vẽ: Chính et al., 2022, ?3, 6.-8., pp. 62-63.

Bài toán 5 (Chính et al., 2022, 9., p. 63). Cho $\triangle ABC$ & $D \in AB$ sao cho $AD = 13.5\text{cm}$, $BD = 4.5\text{cm}$. Tính tỷ số các khoảng cách từ các điểm D & B đến cạnh AC .

Bài toán 6 (Chính et al., 2022, 10., p. 63). $\triangle ABC$ có đường cao AH . Đường thẳng d song song với BC , cắt các cạnh AB, AC , & đường cao AH theo thứ tự tại các điểm B', C' , & H' . (a) Chứng minh: $\frac{AH'}{AH} = \frac{B'C'}{BC}$. (b) Áp dụng: Cho biết $AH' = \frac{1}{3}AH$ & diện tích $\triangle ABC$ là 67.5cm^2 . Tính diện tích $\triangle AB'C'$.

Bài toán 7 (Chính et al., 2022, 11., p. 63). $\triangle ABC$ có $BC = 15\text{cm}$. Trên đường cao AH lấy các điểm I, K sao cho $AK = KI = IH$. Qua I, K vẽ các đường $EF \parallel BC$, $MN \parallel BC$. (a) Tính độ dài các đoạn thẳng MN, EF . (b) Tính diện tích tứ giác $MNFE$ biết diện tích $\triangle ABC$ là 270cm^2 .

Bài tập phụ thuộc hình vẽ: Chính et al., 2022, 12.-13., p. 64.

Bài toán 8 (Chính et al., 2022, 11., p. 64). Cho 3 đoạn thẳng có độ dài là m, n, p (cùng đơn vị đo). Dựng đoạn thẳng có độ dài x sao cho: (a) $\frac{x}{m} = 2$; (b) $\frac{x}{n} = \frac{2}{3}$; (c) $\frac{m}{x} = \frac{n}{p}$.

3 Tính Chất Đường Phân Giác của Tam Giác

Định lý 3. Trong tam giác, đường phân giác của 1 góc chia cạnh đối diện thành 2 đoạn thẳng tỷ lệ với 2 cạnh kề 2 đoạn ấy.

GT: $\triangle ABC$, AD là tia phân giác của \widehat{BAC} , $D \in BC$. KL: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Định lý vẫn đúng đối với tia phân giác của góc ngoài của tam giác.

1st chứng minh. Qua đỉnh B vẽ đường thẳng song song với AC , cắt đường thẳng AD tại điểm E . Có: $\widehat{BAE} = \widehat{CAE}$ (gt). $BE \parallel AC \Rightarrow \widehat{BEA} = \widehat{CAE}$ (so le trong). Suy ra $\widehat{BAE} = \widehat{BEA}$. Do đó $\triangle ABE$ cân tại B , suy ra $BE = AB$ (1). Áp dụng hệ quả 1 của định lý Thales đối với $\triangle DAC$: $\frac{DB}{DC} = \frac{BE}{AC}$ (2). Từ (1)–(2) suy ra $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$. \square

Cách chứng minh sau dựa vào công thức lượng giác tính diện tích tam giác.

2nd chứng minh. Gọi AH là đường cao của $\triangle ABC$ ứng với cạnh BC , $H \in BC$. Có $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2}BD \cdot AH}{\frac{1}{2}CD \cdot AH} = \frac{DB}{DC}$. Cũng có:

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2}AD \cdot AB \sin \widehat{DAB}}{\frac{1}{2}AD \cdot AC \sin \widehat{DAC}} = \frac{\frac{1}{2}AD \cdot AB \sin \frac{\widehat{A}}{2}}{\frac{1}{2}AD \cdot AC \sin \frac{\widehat{A}}{2}} = \frac{AB}{AC}.$$

Kết hợp 2 đẳng thức trên suy ra $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$. \square

Cách chứng minh thứ 2 cho ta 1 kết quả tổng quát hơn khi AD không phải là tia phân giác:

Bài toán 9. Cho $\triangle ABC$, $D \in BC$. Chứng minh $\frac{DB}{DC} = \frac{AB \sin \widehat{DAB}}{AC \sin \widehat{DAC}}$.

Chứng minh. Gọi AH là đường cao của $\triangle ABC$ ứng với cạnh BC , $H \in BC$. Có $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2}BD \cdot AH}{\frac{1}{2}CD \cdot AH} = \frac{DB}{DC}$. Cũng có:

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2}AD \cdot AB \sin \widehat{DAB}}{\frac{1}{2}AD \cdot AC \sin \widehat{DAC}} = \frac{AB \sin \widehat{DAB}}{AC \sin \widehat{DAC}}.$$

Kết hợp 2 đẳng thức trên suy ra $\frac{DB}{DC} = \frac{AB \sin \widehat{DAB}}{AC \sin \widehat{DAC}}$. \square

Bài tập phụ thuộc hình vẽ: Chính et al., 2022, ?2–?3, 15. p. 67.

Bài toán 10 (Chính et al., 2022, 16., p. 67). $\triangle ABC$ có độ dài các cạnh $AB = m$, $AC = n$, ℓ AD là đường phân giác. Chứng minh tỷ số diện tích của $\triangle ABD$ & diện tích của $\triangle ACD$ bằng $\frac{m}{n}$.

Bài toán 11 (Chính et al., 2022, 17., p. 68). Cho $\triangle ABC$ với đường trung tuyến AM . Tia phân giác của góc AMB cắt cạnh AB ở D , tia phân giác của góc AMC cắt cạnh AC ở E . Chứng minh $DE \parallel BC$.

Bài toán 12 (Chính et al., 2022, 18., p. 68). $\triangle ABC$ có $AB = 5\text{cm}$, $AC = 6\text{cm}$, ℓ $BC = 7\text{cm}$. Tia phân giác của góc BAC cắt cạnh BC tại E . Tính các đoạn EB, EC .

Bài toán 13 (Chính et al., 2022, 19., p. 68). Cho hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$. Đường thẳng a song song với DC , cắt các cạnh AD, BC theo thứ tự tại E, F . Chứng minh: (a) $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$; (b) $\frac{AE}{AD} = \frac{BF}{BC}$; (c) $\frac{DE}{DA} = \frac{CF}{CB}$.

Bài toán 14 (Chính et al., 2022, 20., p. 68). Cho hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$. 2 đường chéo AC, BD cắt nhau tại O . Đường thẳng a qua O & song song với đáy của hình thang cắt các cạnh bên AD, BC theo thứ tự tại E, F . Chứng minh $OE = OF$.

Bài toán 15 (Chính et al., 2022, 21., p. 68). (a) Cho $\triangle ABC$ với đường trung tuyến AM & đường phân giác AD . Tính diện tích $\triangle ADM$ biết $AB = m$, $AC = n$, $n > m$, & diện tích của $\triangle ABC$ là S . (b) Cho $n = 7\text{cm}$, $m = 3\text{cm}$, hỏi diện tích $\triangle ADM$ chiếm bao nhiêu % diện tích $\triangle ABC$?

Bài toán 16 (Chính et al., 2022, 22., p. 68). Cho A, B, C, D, E, F, G thẳng hàng theo thứ tự đó & O nằm ngoài đường thẳng chứa 7 điểm đó sao cho $\widehat{OAB} = \widehat{OBC} = \widehat{OCD} = \widehat{ODE} = \widehat{OEF} = \widehat{OFG}$. Đặt $OA = a, OB = b, OC = c, OD = d, OE = e, OF = f, OG = g, AB = x, BC = y, CD = z, DE = t, EF = u, FG = v$. Thiết lập những tỷ lệ thức từ các kích thước đã cho.

- 4 Khái Niệm 2 Tam Giác Đồng Dạng
- 5 Trường Hợp Đồng Dạng Thứ Nhất
- 6 Trường Hợp Đồng Dạng Thứ 2
- 7 Trường Hợp Đồng Dạng Thứ 3
- 8 Các Trường Hợp Đồng Dạng của Tam Giác Vuông
- 9 Ứng Dụng Thực Tế của Tam Giác Đồng Dạng
- 10 Miscellaneous

Tài liệu

Chính, Phan Đức, Tôn Thân, Nguyễn Huy Doan, Lê Văn Hồng, Trương Công Thành, and Nguyễn Hữu Thảo (2022). *Toán 8 Tập 2*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 133.