

# Problems & Proofs in Elementary Inequality

## Bài Tập Bất Đẳng Thức & Chứng Minh

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 19 tháng 5 năm 2023

### Tóm tắt nội dung

A problem set for elementary inequality.

## Mục lục

|  |   |
|--|---|
| 1 Introduction   | 1 |
| 2 Cauchy-Schwarz Inequality – Bất Đẳng Thức Cauchy-Schwarz | 1 |
| 3 Áp Dụng Bất Đẳng Thức Cauchy-Schwarz Để Tìm Cực Trị      | 2 |
| 4 Uncategorized  | 4 |
| 5 Miscellaneous  | 5 |
| Tài liệu   | 5 |

## 1 Introduction

The general structure of a problem on inequality is given by:

**Problem 1.** Let  $x_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$  satisfy the condition  $C(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  &  $C^*(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ . Prove that: (a)  $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$ . (b)  $B(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ . (c) Find the minimum & maximum of  $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$  &  $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Cấu trúc tổng quát của 1 bài toán bất đẳng thức:

**Bài toán 1.** Cho các biến  $x_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$  thỏa mãn điều kiện  $C(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ . Chứng minh: (a)  $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$ . (b)  $B(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ . (c) Tìm GTNN & GTLN của biểu thức  $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$  &  $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Để nghiên cứu các bài toán bất đẳng thức & cực trị 1 cách có hệ thống, ta sẽ nghiên cứu 1 số dạng thường gặp của các biểu thức cần tìm cực trị  $A, B$  & đặc biệt là các đẳng thức điều kiện  $C(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  & bất đẳng thức điều kiện  $C^*(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ .

## 2 Cauchy-Schwarz Inequality – Bất Đẳng Thức Cauchy-Schwarz

The most basic inequality:  $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .  $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .  $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ .

**Bài toán 2.** Chứng minh:

$$4ab \leq 2(|ab| + ab) \leq (a+b)^2 \leq (|a| + |b|)^2 \leq 2(a^2 + b^2), \forall a, b \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

**Bài toán 3.** Bất đẳng thức  $(a+b)^2 \geq 4|ab|$  đúng khi nào?

**Bài toán 4** (Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz cho 2 số không âm). Chứng minh:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

1st proof.  $a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0$ . “=”  $\Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$ . □

\*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam  
e-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com); website: <https://nqbh.github.io>.

2nd proof.  $(a+b)^2 - (2\sqrt{ab})^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow (a+b)^2 \geq (2\sqrt{ab})^2 \Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$  (vì  $a, b \geq 0$  nên  $a+b \geq 0$  &  $2\sqrt{ab} \geq 0$ ). “=”  $\Leftrightarrow a = b$ .  $\square$

**Lưu ý 1.** Ở 2nd proof, ta đã vận dụng tính chất cơ bản của căn bậc 2:  $0 \leq a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}$ . Phiên bản chặt/ngặt (strict) là:  $0 \leq a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}$ . Ý nghĩa hình học của 2 tính chất này: Hình vuông nào có cạnh lớn hơn thì có diện tích lớn hơn & ngược lại, hình vuông nào có diện tích lớn hơn thì có cạnh lớn hơn.

3rd proof. Đặt  $x := \sqrt{a}, y := \sqrt{b}, x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 0$ . Có  $a+b-2\sqrt{ab} = a+b-2\sqrt{a}\sqrt{b} = x^2+y^2-2xy = (x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$ . “=”  $\Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$ .  $\square$

**Lưu ý 2.** Ở 3rd proof, ta đã sử dụng tính chất giao hoán của phép nhân & phép khai phương:  $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0$ .

**Bài toán 5.** Với  $m, n, p$  nào thì bất đẳng thức  $ma + nb \geq p\sqrt{ab}$  luôn đúng: (a)  $\forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0$ . (b)  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ . Đẳng thức xảy ra khi nào?

**Bài toán 6** (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho 3 số không âm). Chứng minh:

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}, \forall a, b, c \in \mathbb{R}, a, b, c \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

**Bài toán 7.** Với  $m, n, p, q$  nào thì bất đẳng thức  $ma + nb + pc \geq q\sqrt[3]{abc}$  luôn đúng: (a)  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a, b, c \geq 0$ . (b)  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ . Đẳng thức xảy ra khi nào?

**Bài toán 8** (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho  $n$  số không âm). Chứng minh:

$$\sum_{i=1}^n a_i \geq n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}, \text{ i.e., } a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_i \in \mathbb{R}, a_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

**Bài toán 9.** Cho  $n \in \mathbb{N}^*$ . Với bộ  $(m, m_1, m_2, \dots, m_n)$  nào thì bất đẳng thức:

$$\sum_{i=1}^n m_i a_i \geq m \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}, \text{ i.e., } m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n \geq m \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n},$$

đúng với: (a)  $\forall a_i \in \mathbb{R}, a_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$ . (b)  $\forall a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, n$ . Đẳng thức xảy ra khi nào?

### 3 Áp Dụng Bất Đẳng Thức Cauchy–Schwarz Để Tìm Cực Trị

**Bài toán 10** ([Tuy23], Ví dụ 9, p. 23). Cho  $x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0$  thỏa mãn điều kiện  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ . Tìm GTNN của biểu thức  $A = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ .

1st proof. Vì  $x, y > 0$  nên  $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \sqrt{x}, \sqrt{y} > 0$ . Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương  $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ , được:  $\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{xy}} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{xy} \geq 4$ . Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương  $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ , được:  $A = \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2\sqrt{\sqrt{x}\sqrt{y}} = 2\sqrt{\sqrt{xy}} \geq 2\sqrt{4} = 4$ . “=”  $\Leftrightarrow x = y$  &  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = 4$ . Vậy  $\min A = 4 \Leftrightarrow x = y = 4$ .  $\square$

2nd proof. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy lần lượt cho  $(\sqrt{x}, \sqrt{y})$  &  $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ , được:

$$A = \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2\sqrt{\sqrt{x}\sqrt{y}} = 2\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}}} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)}} = 2\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = 4.$$

“=”  $\Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y}$  &  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y$  &  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = 4$ . Vậy  $\min_{x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0} A = 4 \Leftrightarrow x = y = 4$ .  $\square$

**Nhận xét 1.** “Trong thí dụ trên ta đã vận dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz theo 2 chiều ngược nhau. Lần thứ nhất ta đã “làm trội”  $\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}}$  bằng cách vận dụng  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$  để dùng điều kiện tổng  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ , từ đó được  $\sqrt{xy} \geq 4$ . Lần thứ 2 ta đã “làm giảm” tổng  $\sqrt{x} + \sqrt{y}$  bằng cách vận dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz theo chiều  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$  để dùng kết quả  $\sqrt{xy} \geq 4$ . Không phải lúc nào ta cũng có thể dùng trực tiếp bất đẳng thức Cauchy–Schwarz đối với các số trong đề bài.” – [Tuy23, p. 24]

**Lưu ý 3.** TXD của  $A$  chỉ là  $D_A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y \geq 0\}$ , nhưng để điều kiện  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$  có nghĩa thì cần thêm  $x \neq 0, y \neq 0$ , nên ta cần xét  $A$  trên tập hợp  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y > 0, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}\} \subset D_A$ . Hơn nữa, nếu viết GTNN của biểu thức  $A = A(x, y)$  trên tập  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y > 0\}$  1 cách chính xác về mặt toán học thì nên viết tường minh là  $\min_{x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0} A(x, y)$  hoặc  $\min_{(x, y) \in D} A(x, y)$  hoặc  $\min_{x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0} A$  như trong 2nd proof thay vì chỉ đơn giản là  $\min A$  như trong 1st proof.

Ta có thể mở rộng & tổng quát bài toán trên như sau:

**Bài toán 11.** Cho  $x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0$  thỏa mãn điều kiện  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = m > 0, m \in \mathbb{R}$  cho trước. Có thể tìm GTNN & GTLN của các biểu thức nào? Liệt kê & chứng minh nhiều nhất có thể.

**Bài toán 12.** Cho  $x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0$  thỏa mãn điều kiện  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = m > 0, a, b, m \in \mathbb{R}$  cho trước. Có thể tìm GTNN & GTLN của các biểu thức nào? Liệt kê & chứng minh nhiều nhất có thể.

**Bài toán 13.** Cho  $x, y \in \mathbb{R}, x, y, z > 0$  thỏa mãn điều kiện  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = m > 0, a, b, c, m \in \mathbb{R}$  cho trước. Có thể tìm GTNN & GTLN của các biểu thức nào? Liệt kê & chứng minh nhiều nhất có thể.

**Bài toán 14.** Cho  $n \in \mathbb{N}^*, x_i \in \mathbb{R}, x_i > 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$ , thỏa mãn điều kiện  $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x_i} = m > 0, a_i, m \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, n$ , cho trước. Có thể tìm GTNN & GTLN của các biểu thức nào? Liệt kê & chứng minh nhiều nhất có thể.

**Bài toán 15** ([Tuy23], Ví dụ 10, p. 24). Tìm GTLN & GTNN của biểu thức  $A = \sqrt{3x-5} + \sqrt{7-3x}$ .

*Giải.* ĐKXD:  $\frac{5}{3} \leq x \leq \frac{7}{3}$ .  $A^2 = 3x - 5 + 7 - 3x + 2\sqrt{3x-5}\sqrt{7-3x} \leq 2 + (3x-5+7-3x) = 4 \Rightarrow A \leq 2$  ( $A \geq 0$  vì  $\sqrt{3x-5} \geq 0, \sqrt{7-3x} \geq 0$ ). “=”  $\Leftrightarrow 3x-5 = 7-3x \Leftrightarrow x = 2$ . Mặt khác,  $A^2 = 2 + 2\sqrt{3x-5}\sqrt{7-3x} \geq 2$ . “=”  $\Leftrightarrow (3x-5)(7-3x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\}$ . Vậy  $\max A = 2 \Leftrightarrow x = 2$  &  $\min A = \sqrt{2} \Leftrightarrow x \in \{\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\}$ .  $\square$

**Bài toán 16** (Mở rộng [Tuy23], Ví dụ 10, p. 24). Biện luận theo các tham số  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  để tìm GTLN & GTNN của biểu thức  $A = \sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d}$ .

**Bài toán 17** ([Tuy23], Ví dụ 11, p. 25). Tìm GTLN & GTNN của biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x-9}}{5x}$ .

**Bài toán 18** ([Tuy23], Ví dụ 12, p. 25). Tìm GTNN của biểu thức  $A = \frac{3x^4+16}{x^3}$ .  $A$  có GTLN không?

**Bài toán 19** ([Tuy23], Ví dụ 13, p. 26). Cho  $0 < x < 2$ , tìm GTNN của biểu thức  $A = \frac{9x}{2-x} + \frac{2}{x}$ .

**Bài toán 20** ([Tuy23], Ví dụ 14, p. 27). Cho  $x, y, z \in \mathbb{R}, x, y, z > 0$  thỏa mãn điều kiện  $x + y + z = 2$ . Tìm GTNN của biểu thức  $A = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$ .

**Bài toán 21** ([Tuy23], 63., p. 28). Cho  $a, x, y \in \mathbb{R}, a, x, y > 0, x + y = 2a$ . Tìm GTNN của biểu thức  $A = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ .

**Bài toán 22** ([Tuy23], 64., p. 28). Tìm GTLN của biểu thức  $A = \sqrt{x-5} + \sqrt{23-x}$ .

**Bài toán 23** ([Tuy23], 65., p. 28). Cho  $x + y = 15$ , tìm GTNN, GTLN của biểu thức  $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{y-3}$ .

**Bài toán 24** ([Tuy23], 66., p. 28). Tìm GTNN của biểu thức  $A = \frac{2x^2-6x+5}{2x}$  với  $x \in \mathbb{R}, x > 0$ .

**Bài toán 25** ([Tuy23], 67., p. 28). Cho  $a, b, x \in \mathbb{R}, a, b, x > 0$ . Tìm GTNN của biểu thức  $A = \frac{(x+a)(x+b)}{x}$ .

**Bài toán 26** ([Tuy23], 68., p. 28). Cho  $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ , tìm GTNN của biểu thức  $A = \frac{x^2+2x+17}{2(x+1)}$ .

**Bài toán 27** ([Tuy23], 69., p. 28). Tìm GTNN của biểu thức  $A = \frac{x+6\sqrt{x}+36}{\sqrt{x}+3}$ .

**Bài toán 28** ([Tuy23], 70., p. 28). Cho  $x \in \mathbb{R}, x > 0$ , tìm GTNN của biểu thức  $A = \frac{x^3+2000}{x}$ .

**Bài toán 29** ([Tuy23], 71., p. 28). Cho  $x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0$  &  $x + y \geq 6$ . Tìm GTNN của biểu thức:  $A = 5x + 3y + \frac{12}{x} + \frac{16}{y}$ .

**Bài toán 30** ([Tuy23], 72., p. 29). Cho  $x, y \in \mathbb{R}, x > y$  &  $xy = 5$ , tìm GTNN của biểu thức  $A = \frac{x^2+1.2xy+y^2}{x-y}$ .

**Bài toán 31** ([Tuy23], 73., p. 29). Cho  $x \in \mathbb{R}, x > 1$ , tìm GTLN của biểu thức  $A = 4x + \frac{25}{x-1}$ .

**Bài toán 32** ([Tuy23], 74., p. 29). Cho  $x \in \mathbb{R}$ ,  $0 < x < 1$ , tìm GTNN của biểu thức  $A = \frac{3}{1-x} + \frac{4}{x}$ .

**Bài toán 33** ([Tuy23], 75., p. 29). Cho  $x, y, z \in \mathbb{R}$ ,  $x, y, z \geq 0$  thỏa mãn điều kiện  $x + y + z = a$ . (a) Tìm GTLN của biểu thức  $A = xy + yz + zx$ . (b) Tìm GTNN của biểu thức  $B = x^2 + y^2 + z^2$ .

**Bài toán 34** ([Tuy23], 76., p. 29). Cho  $x, y, z \in \mathbb{R}$ ,  $x, y, z > 0$  thỏa mãn điều kiện  $x + y + z \geq 12$ . Tìm GTNN của biểu thức  $A = \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{z}} + \frac{z}{\sqrt{x}}$ .

**Bài toán 35** ([Tuy23], 77., p. 29). Cho  $x, y, z \in \mathbb{R}$ ,  $x, y, z > 0$  thỏa mãn điều kiện  $x + y + z = a$ . Tìm GTNN của biểu thức  $A = \left(1 + \frac{a}{x}\right) \left(1 + \frac{a}{y}\right) \left(1 + \frac{a}{z}\right)$ .

**Bài toán 36** ([Tuy23], 78., p. 29). Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a, b, c > 0$  thỏa mãn điều kiện  $a + b + c = 1$ . Tìm GTNN của biểu thức  $A = \frac{(1+a)(1+b)(1+c)}{(1-a)(1-b)(1-c)}$ .

**Bài toán 37** ([Tuy23], 79., p. 29). Cho  $x, y \in \mathbb{R}$  thỏa mãn điều kiện  $x + y = 1$  &  $x > 0$ . Tìm GTLN của biểu thức  $B = x^2 y^3$ .

**Bài toán 38** ([DCA20], Ví dụ 1.5.1, p. 73, TS PTNK ĐHQG Tp HCM 2006). Cho  $x, y \in \mathbb{R}$  thỏa mãn  $x + y = 2$ . Chứng minh  $xy(x^2 + y^2) \leq 2$ .

*1st chứng minh.* Sử dụng bất đẳng thức  $ab \leq \frac{1}{4}(a+b)^2$  ở (1), có:  $xy(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}(2xy)(x^2 + y^2) \leq \frac{1}{8}[2xy + (x^2 + y^2)]^2 = \frac{1}{8}(x+y)^4 = 2$ . “=”  $\Leftrightarrow x + y = 2$  &  $2xy = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x + y = 2$  &  $(x - y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 1$ .  $\square$

*2nd chứng minh.* Sử dụng kỹ thuật đồng bậc, cần chứng minh  $8xy(x^2 + y^2) \leq (x + y)^4$  (cả 2 vế đều là bậc 4). Bất đẳng thức này đúng vì  $8xy(x^2 + y^2) \leq (x + y)^4 \Leftrightarrow 8xy(x^2 + y^2) \leq x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \Leftrightarrow x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4 \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^4 \geq 0$  hiển nhiên đúng  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ . “=”  $\Leftrightarrow x = y$  &  $x + y = 2 \Leftrightarrow x = y = 1$ .  $\square$

Ta có thể mở rộng bài toán trên như sau:

**Bài toán 39.** Cho  $x, y, m \in \mathbb{R}$  thỏa mãn  $x + y = m$ . Biện luận theo tham số  $m$  để tìm GTLN & GTNN của: (a)  $A = xy(x^2 + y^2)$ . (b)  $B = xy(x^3 + y^3)$ . (c)  $B = xy(x^4 + y^4)$ . (d\*)  $x^a y^a (x^b + y^b)$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$ .

## 4 Uncategorized

**Bài toán 40** ([Son+21], Bổ đề 1.1, p. 5). Chứng minh:  $4ab \leq (a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ , hay có thể viết dưới dạng  $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ,  $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ . Đẳng thức xảy ra khi nào?

*Hint.*  $(a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2 \geq 0$ ,  $2(a^2 + b^2) - (a + b)^2 = (a - b)^2 \geq 0$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ . “=”  $\Leftrightarrow a = b$ .  $\square$

**Bài toán 41** ([Son+21], Bổ đề 1.2, p. 5). Chứng minh:  $3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ , hay có thể viết dưới dạng  $ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a + b + c)^2$ ,  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ . Đẳng thức xảy ra khi nào?

*Hint.*  $(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0$ ,  $3(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c)^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$ ,  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ . “=”  $\Leftrightarrow a = b = c$ .  $\square$

**Bài toán 42** ([Son+21], Bổ đề 1.3, p. 6). Chứng minh:  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ , hay có thể viết dưới dạng  $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ ,  $\forall a, b > 0$ . Đẳng thức xảy ra khi nào?

*Hint.*  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a+b} = \frac{(a-b)^2}{ab(a+b)} \geq 0$ ,  $\forall a, b > 0$ . “=”  $\Leftrightarrow a = b > 0$ .  $\square$

**Bài toán 43** ([Son+21], Bổ đề 1.4, p. 6). Chứng minh:  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ , hay có thể viết dưới dạng  $\frac{1}{a+b+c} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ ,  $\forall a, b, c > 0$ . Đẳng thức xảy ra khi nào?

**Bài toán 44** ([Son+21], Mở rộng Bổ đề 1.3–1.4, p. 6 cho  $n$  số). Chứng minh:

$$\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1 + \dots + a_n}, \text{ i.e., } \frac{1}{a_1 + \dots + a_n} \leq \frac{1}{n^2} \left( \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right), \forall a_i > 0, \forall i = 1, \dots, n,$$

hay có thể được viết gọn lại như sau:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n a_i}, \text{ i.e., } \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i} \leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}, \forall a_i > 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

**Bài toán 45** ([Son+21], Bổ đề 1.5, p. 7). Chứng minh:  $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$ ,  $\forall a, b \geq 0$ . Đẳng thức xảy ra khi nào?

**Bài toán 46** ([Son+21], Mở rộng Bổ đề 1.5, p. 7). *Chứng minh:  $\sqrt{a+b+c} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{3(a+b+c)}$ ,  $\forall a, b, c \geq 0$ . Đẳng thức xảy ra khi nào?*

**Bài toán 47** ([Son+21], Mở rộng Bổ đề 1.5, p. 7 cho  $n$  số). *Chứng minh:  $\sqrt{a_1 + \dots + a_n} \leq \sqrt{a_1} + \dots + \sqrt{a_n} \leq \sqrt{n(a_1 + \dots + a_n)}$ ,  $\forall a_i \geq 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ , hay có thể được viết gọn lại như sau:*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i} \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \leq \sqrt{n \sum_{i=1}^n a_i}, \quad \forall a_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

*Đẳng thức xảy ra khi nào?*

**Bài toán 48** ([Son+21], Bổ đề 1.6, p. 7). *Chứng minh:  $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a+b \geq 0$ . Đẳng thức xảy ra khi nào?*

*Hint.*  $a^3 + b^3 - ab(a+b) = (a+b)(a-b)^2 \geq 0$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a+b \geq 0$ . “=”  $\Leftrightarrow a = \pm b$ . □

**Bài toán 49** ([Son+21], Mở rộng Bổ đề 1.6, p. 7). *Chứng minh:  $a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2)$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ . Đẳng thức xảy ra khi nào?*

## 5 Miscellaneous

### Tài liệu

- [DCA20] Nguyễn Văn Dũng, Võ Quốc Bá Cẩn, and Trần Quốc Anh. *Phương Pháp Giải Toán Bất Đẳng Thức & Cực Trị Dành Cho Học Sinh Lớp 8, 9*. Tái bản lần thứ 4. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2020, p. 280.
- [Sơn+21] Nguyễn Ngọc Sơn, Chu Đình Nghiệp, Lê Hải Trung, and Võ Quốc Bá Cẩn. *Các Chủ Đề Bất Đẳng Thức Ôn Thi Vào Lớp 10*. Tái bản lần thứ 3. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2021, p. 143.
- [Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.