

# Fraction & Decimal – Phân Số & Số Thập Phân

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 17 tháng 3 năm 2023

## Tóm tắt nội dung

[EN] This text is a collection of problems, from easy to advanced, about *fraction*. This text is also a supplementary material for my lecture note on Elementary Mathematics grade 6, which is stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 6/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_6/lecture)<sup>1</sup>. The latest version of this text has been stored & downloadable at the following link: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 6/fraction](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_6/fraction)<sup>2</sup>.

[VI] Tài liệu này là 1 bộ sưu tập các bài tập chọn lọc từ cơ bản đến nâng cao về *phân số*. Tài liệu này là phần bài tập bổ sung cho tài liệu chính – bài giảng [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 6/lecture](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_6/lecture) của tác giả viết cho Toán Sơ Cấp lớp 6. Phiên bản mới nhất của tài liệu này được lưu trữ & có thể tải xuống ở link sau: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 6/fraction](https://github.com/NQBH/hobby/elementary_mathematics/grade_6/fraction).

**Nội dung.** Phân số với tử & mẫu là số nguyên; các phép tính với phân số; số thập phân; các phép tính với số thập phân; tỷ số, tỷ số phần trăm, làm tròn số.

## Mục lục

<b>1</b>	<b>Phân Số với Tử &amp; Mẫu Là Số Nguyên</b>	<b>2</b>
1.1	Khái niệm phân số	2
1.2	Phân số bằng nhau	2
1.3	Tính chất cơ bản của phân số	3
1.3.1	Tính chất cơ bản	3
1.3.2	Rút gọn về phân số tối giản	3
1.3.3	Quy đồng mẫu nhiều phân số	4
<b>2</b>	<b>So Sánh Các Phân Số</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Hỗn Số Dương</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>Phép Cộng, Phép Trừ Phân Số</b>	<b>12</b>
4.1	Phép Cộng Phân Số	12
4.1.1	Quy tắc cộng phân số	12
4.1.2	Tính chất của phép cộng phân số	12
4.2	Phép Trừ Phân Số	13
4.2.1	Số đối của 1 phân số	13
4.2.2	Quy tắc trừ phân số	13
4.3	Quy tắc dấu ngoặc	14
4.4	Biểu diễn phân số trên trục số nằm ngang	15
<b>5</b>	<b>Phép Nhân, Phép Chia Phân Số</b>	<b>15</b>
5.1	Phép Nhân Phân số	15
5.1.1	Tính chất của phép nhân phân số	15
5.2	Phép Chia Phân số	16
<b>6</b>	<b>Số Thập Phân</b>	<b>18</b>
6.1	So sánh các số thập phân	18
<b>7</b>	<b>Làm Tròn Số Thập Phân. Các Phép Tính với Số Thập Phân</b>	<b>18</b>
<b>8</b>	<b>Tìm Giá Trị Phân Số của 1 Số Cho Trước. Tìm 1 Số Biết Giá Trị 1 Phân Số của Nó</b>	<b>18</b>
<b>9</b>	<b>Tìm Tỷ Số &amp; Tỷ Số % của 2 Đại Lượng</b>	<b>18</b>

\*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam  
e-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com); website: <https://nqbh.github.io>.

<sup>1</sup>URL: [https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary\\_mathematics/grade\\_6/NQBH\\_elementary\\_mathematics\\_grade\\_6.pdf](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_6/NQBH_elementary_mathematics_grade_6.pdf).

<sup>2</sup>URL: [https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary\\_mathematics/grade\\_6/fraction/NQBH\\_fraction.pdf](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_6/fraction/NQBH_fraction.pdf).

10 Toán về Công Việc Làm Đồng Thời . . . . .	18
11 Tổng Các Phân Số Viết Theo Quy Luật . . . . .	18
12 Miscellaneous . . . . .	18
Tài liệu . . . . .	18

# 1 Phân Số với Tử & Mẫu Là Số Nguyên

## 1.1 Khái niệm phân số

**Bài toán 1** (Thái et al., 2022, p. 25). 1 tòa nhà chung cư có 3 tầng hầm được ký hiệu theo thứ tự từ trên xuống là B1, B2, B3. Độ cao của 3 tầng hầm bằng nhau. Biết độ cao của mặt sàn tầng hầm B3 so với mặt đất là  $-10\text{m}$ . Tính độ cao của mặt sàn tầng hầm B1 so với mặt đất.

*Giải.* Độ cao của mặt sàn tầng hầm B1 so với mặt đất bằng  $-10 : 3 = \frac{10}{3}\text{m}$ . □

**Định nghĩa 1** (Phân số). Kết quả của phép chia số nguyên  $a$  cho số nguyên  $b$  khác 0 có thể viết dưới dạng  $\frac{a}{b}$ , gọi là phân số. Ký hiệu:  $\frac{a}{b}$ , với  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ .

Phân số  $\frac{a}{b}$  đọc là:  $a$  phần  $b$ ,  $a$  là tử số (còn gọi tắt là tử,  $b$  là mẫu số (còn gọi tắt là mẫu). Mọi số nguyên  $a \in \mathbb{Z}$  có thể viết ở dạng phân số là  $\frac{a}{1}$ , i.e.,  $a = \frac{a}{1}, \forall a \in \mathbb{Z}$ .

**Bài toán 2** (Thái et al., 2022, Ví dụ 1, 1, p. 26). Viết & đọc phân số trong mỗi trường hợp sau: (a) Tử là 11, mẫu là  $-3$ . (b) Tử là  $-7$ , mẫu là  $-5$ . (c) Tử là  $-6$ , mẫu là 17. (d) Tử là  $-12$ , mẫu là  $-37$ .

*Giải.* (a) Viết:  $\frac{11}{-3}$ , đọc: mười một phần âm ba. (b) Viết:  $\frac{-7}{-5}$ , đọc: âm bảy phần âm năm. (c) Viết:  $\frac{-6}{17}$ , đọc: âm sáu phần mười bảy. (d) Viết:  $\frac{-12}{-37}$ , đọc: âm mười hai phần âm ba mươi bảy. □

**Bài toán 3** (Thái et al., 2022, 2, p. 26). Cách viết nào sau đây cho ta phân số: (a)  $\frac{4}{-9}$ . (b)  $\frac{0.25}{-9}$ . (c)  $\frac{-9}{0}$ ?

*Giải.* (a)  $\frac{4}{-9}$  là phân số. (b)  $\frac{0.25}{-9}$  không là phân số theo 1 vì  $0.25 \notin \mathbb{Z}$ . (c)  $\frac{-9}{0}$  không là phân số, thậm chí không có nghĩa (về mặt toán học) vì phép chia cho 0 không có nghĩa. □

Mọi số nguyên  $a$  đều có thể viết ở dạng phân số là  $\frac{a}{1}$ , i.e.,  $a = \frac{a}{1}, \forall a \in \mathbb{Z}$ .

**Bài toán 4** (Thái et al., 2022, Ví dụ 2, p. 26). Viết mỗi số nguyên sau dưới dạng phân số: 19,  $-7$ , 0.

*Giải.*  $19 = \frac{19}{1}$ ,  $-7 = \frac{-7}{1}$ ,  $0 = \frac{0}{1}$ . □

**Lưu ý 1** ( $0 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ ). 0 là 1 số nguyên nên 0 có thể viết được dưới dạng phân số là  $\frac{0}{1}$ .

## 1.2 Phân số bằng nhau

**Định nghĩa 2** (2 phân số bằng nhau). 2 phân số được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng biểu diễn 1 giá trị.

**Định lý 1** (Quy tắc bằng nhau của 2 phân số). Xét 2 phân số  $\frac{a}{b}$  &  $\frac{c}{d}$ , với  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ,  $bd \neq 0$ . Nếu  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  thì  $ad = bc$ . Ngược lại, nếu  $ad = bc$  thì  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ .

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \begin{cases} bd \neq 0, \\ ad = bc. \end{cases}$$

Với  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ , luôn có:  $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b}$  &  $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$ .

**Bài toán 5** (Thái et al., 2022, Ví dụ 3, 3, p. 27). Các cặp phân số sau có bằng nhau không? Vì sao? (a)  $\frac{3}{-7}$  &  $\frac{3}{7}$ . (b)  $\frac{2}{5}$  &  $\frac{4}{10}$ . (c)  $\frac{4}{8}$  &  $\frac{-1}{-2}$ . (d)  $\frac{1}{-6}$  &  $\frac{-3}{-18}$ .

*Giải.* (a) Vì  $3 \cdot 7 = (-7) \cdot (-3) = 21$  nên  $\frac{3}{-7} = \frac{3}{7}$ . (b) Vì  $2 \cdot (-10) \neq 5 \cdot 4$  (vì  $-20 \neq 20$ ) nên  $\frac{2}{5} \neq \frac{4}{10}$ . (c) Vì  $4 \cdot (-2) = 8 \cdot (-1) = -8$  nên  $\frac{4}{8} = \frac{-1}{-2}$ . (d) Vì  $1 \cdot (-18) \neq (-6) \cdot (-3)$  (vì  $-18 \neq 18$ ) nên  $\frac{1}{-6} \neq \frac{-3}{-18}$ . □

## 1.3 Tính chất cơ bản của phân số

### 1.3.1 Tính chất cơ bản

**Định lý 2** (Tính chất cơ bản của phân số). Nếu ta nhân cả tử & mẫu của 1 phân số với cùng 1 số nguyên khác 0 thì ta được 1 phân số bằng phân số đã cho. Nếu ta chia cả tử & mẫu của 1 phân số cho cùng 1 ước chung của chúng thì ta được 1 phân số bằng phân số đã cho.

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{an}, \forall a, b, m \in \mathbb{Z}, bm \neq 0, \quad \frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}, \forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, \forall n \in \text{ƯC}(a, b).$$

Mỗi phân số đều đưa được về 1 phân số bằng nó & có mẫu là số dương.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \text{ sign } b}{|b|} = \begin{cases} \frac{a}{b}, & \text{nếu } b > 0, \\ \frac{-a}{-b}, & \text{nếu } b < 0. \end{cases}$$

**Bài toán 6** (Thái et al., 2022, Ví dụ 4, p. 28). Viết mỗi phân số sau thành phân số bằng nó & có mẫu là số dương: (a)  $\frac{3}{-5}$ . (b)  $\frac{-2}{-9}$ .

*Giải.* Theo tính chất cơ bản của phân số: (a)  $\frac{3}{-5} = \frac{3 \cdot (-1)}{(-5) \cdot (-1)} = \frac{-3}{5}$ . (b)  $\frac{-2}{-9} = \frac{(-2) \cdot (-1)}{(-9) \cdot (-1)} = \frac{2}{9}$ .  $\square$

**Bài toán 7** (Thái et al., 2022, 4, p. 28). Viết phân số sau thành phân số bằng nó & có mẫu là số dương:  $\frac{a}{-b}$ ,  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{N}^*$ .

*Giải.* Vì  $b \in \mathbb{N}^*$  nên  $b > 0$ . Theo tính chất cơ bản của phân số:  $\frac{a}{-b} = \frac{a \cdot (-1)}{(-b) \cdot (-1)} = \frac{-a}{b}$ .  $\square$

Nếu bỏ đi điều kiện  $b \in \mathbb{N}^*$  trong bài toán trên, ta được mở rộng sau:

**Bài toán 8** (Mở rộng Thái et al., 2022, 4, p. 28). Viết phân số sau thành phân số bằng nó & có mẫu là số dương:  $\frac{a}{-b}$ ,  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

*Giải.* Nếu  $b < 0$ , phân số  $\frac{a}{-b}$  đã có mẫu số dương  $-b > 0$  nên không cần làm gì thêm. Nếu  $b > 0$ , theo bài toán trên:  $\frac{a}{-b} = \frac{a \cdot (-1)}{(-b) \cdot (-1)} = \frac{-a}{b}$ . Có thể viết gom 2 trường hợp này lại thành<sup>3</sup>:  $\frac{a}{-b} = \frac{a \text{ sign } b}{|b|}$  với  $\text{sign } b$  là hàm dấu<sup>4</sup> của  $b$ .  $\square$

### 1.3.2 Rút gọn về phân số tối giản

**Định nghĩa 3** (Phân số tối giản). Phân số tối giản là phân số mà tử & mẫu chỉ có ước chung là  $\pm 1$ .

$\frac{a}{b}$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$  là phân số tối giản  $\Leftrightarrow \text{ƯC}(a, b) = \{\pm 1\} \Leftrightarrow \text{ƯCLN}(a, b) = 1 \Leftrightarrow |\text{ƯC}(a, b) \cap \mathbb{N}| = 1 \Leftrightarrow |\text{ƯC}(a, b) \cap \mathbb{Z}| = 2$ .

Dựa vào tính chất cơ bản của phân số, để rút gọn phân số với tử & mẫu là số nguyên về phân số tối giản ta thường làm như sau: *Bước 1*: Tìm ƯCLN của tử & mẫu sau khi đã bỏ đi dấu “-” (nếu có). *Bước 2*: Chia cả tử & mẫu cho ƯCLN vừa tìm được, ta có phân số tối giản cần tìm.

$$\frac{a}{b} = \frac{a : \text{ƯCLN}(a, b)}{b : \text{ƯCLN}(a, b)} = \frac{a : \text{ƯCLN}(a, b) \text{ sign } b}{|b| : \text{ƯCLN}(a, b)}, \forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0.$$

**Bài toán 9** (Thái et al., 2022, Ví dụ 5, p. 28). Rút gọn mỗi phân số sau về phân số tối giản: (a)  $\frac{12}{-15}$ . (b)  $\frac{-24}{36}$ .

*Giải.* (a)  $\text{ƯCLN}(12, 15) = 3$ ,  $\frac{12}{-15} = \frac{12:3}{-15:3} = \frac{4}{-5}$ . (b)  $\text{ƯCLN}(24, 36) = 12$ ,  $\frac{-24}{36} = \frac{-24:12}{36:12} = \frac{-2}{3}$ .  $\square$

**Bài toán 10** (Thái et al., 2022, Ví dụ 6, p. 29). (a) Rút gọn phân số  $\frac{-2}{6}$  về phân số tối giản. (b) Viết tất cả các phân số bằng phân số  $\frac{-2}{6}$  mà mẫu là số tự nhiên có 1 chữ số.

*Giải.* (a)  $\text{ƯCLN}(2, 6) = 2$ ,  $\frac{-2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{2:2}{6:2} = \frac{1}{3}$ . (b)  $\frac{-2}{6} = \frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$ ,  $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{3}{9}$ . Vậy phân số  $\frac{-2}{6}$  bằng các phân số có mẫu là số tự nhiên có 1 chữ số:  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{6}$ ,  $\frac{3}{9}$ .  $\square$

<sup>3</sup>Suy ra trực tiếp từ đẳng thức:  $|x| = x \text{ sign } x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Giá trị tuyệt đối của 1 số thực bằng số đó nhân với hàm dấu của nó.

<sup>4</sup>Hàm dấu của 1 số thực  $x \in \mathbb{R}$  được xác định như sau:

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1, & \text{nếu } x > 0, \\ 0, & \text{nếu } x = 0, \\ -1, & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

### 1.3.3 Quy đồng mẫu nhiều phân số

Dựa vào tính chất cơ bản của phân số ta có thể quy đồng mẫu nhiều phân số có tử & mẫu là số nguyên. Để quy đồng mẫu nhiều phân số, ta thường làm như sau: *Bước 1*: Viết các phân số đã cho về phân số có mẫu dương. Tìm BCNN của các mẫu dương đó để làm mẫu chung. *Bước 2*: Tìm thừa số phụ của mỗi mẫu (bằng cách chia mẫu chung cho từng mẫu). *Bước 3*: Nhân tử & mẫu của mỗi phân số ở *Bước 1* với thừa số phụ tương ứng.

“**1** Quy tắc quy đồng mẫu nhiều phân số với mẫu dương: *Bước 1*. Tìm BCNN của các mẫu để làm mẫu chung. *Bước 2*. Tìm thừa số phụ của mỗi mẫu. *Bước 3*. Nhân tử & mẫu của mỗi phân số với thừa số phụ tương ứng. **2** So sánh 2 phân số: Muốn so sánh 2 phân số không cùng mẫu ta viết chúng dưới dạng 2 phân số có cùng mẫu dương rồi so sánh các tử với nhau, phân số nào có tử lớn hơn thì phân số đó lớn hơn. **3** Hỗn số dương: 1 phân số lớn hơn 1 có thể viết dưới dạng 1 hỗn số. Đó là 1 số gồm phần nguyên kèm theo 1 phân số nhỏ hơn 1. **4** Trong 2 phân số có tử & mẫu đều dương, nếu 2 tử số bằng nhau, phân số nào có mẫu nhỏ hơn thì phân số đó sẽ lớn hơn & ngược lại. **5** Phân số có tử & mẫu là 2 số nguyên cùng dấu thì lớn hơn 0 & gọi là *phân số dương*. Phân số có tử & mẫu là 2 số nguyên khác dấu thì nhỏ hơn 0 & gọi là *phân số âm*.” – Tuyên, 2022, Chap. III, §2, p. 48

**Bài toán 11** (Thái et al., 2022, Ví dụ 7, p. 29). Quy đồng mẫu những phân số sau: (a)  $\frac{-1}{2}, \frac{3}{-5}$ . (b)  $\frac{3}{-20}, \frac{-7}{20}, \frac{-11}{-30}$ .

*Giải.* (a)  $\frac{3}{-5} = \frac{-3}{5}$ , BCNN(2, 5) = 10,  $10 : 2 = 5$ ,  $10 : 5 = 2$ . Quy đồng:  $\frac{-1}{2} = \frac{-1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{-5}{10}$ ,  $\frac{3}{-5} = \frac{-3}{5} = \frac{(-3) \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{-6}{10}$ . (b)  $\frac{3}{-20} = \frac{-3}{20}$ , BCNN(20, 15, 30) = 60,  $60 : 20 = 3$ ,  $60 : 15 = 4$ ,  $60 : 30 = 2$ . Vậy  $\frac{3}{-20} = \frac{-3}{20} = \frac{-3 \cdot 3}{20 \cdot 3} = \frac{-9}{60}$ ,  $\frac{-7}{15} = \frac{-7 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{-28}{60}$ ,  $\frac{-11}{-30} = \frac{11}{30} = \frac{11 \cdot 2}{30 \cdot 2} = \frac{22}{60}$ . □

**Bài toán 12** (Thái et al., 2022, 5, p. 30). Quy đồng mẫu những phân số sau:  $\frac{-3}{8}, \frac{2}{-3}, \frac{3}{72}$ .

*Giải.*  $\frac{2}{-3} = \frac{-2}{3}$ , BCNN(8, 3, 72) = 72 (vì  $72 : 8$  &  $72 : 3$ ),  $72 : 8 = 9$ ,  $72 : 3 = 24$ . Quy đồng:  $\frac{-3}{8} = \frac{-3 \cdot 9}{8 \cdot 9} = \frac{-27}{72}$ ,  $\frac{-2}{3} = \frac{-2 \cdot 24}{3 \cdot 24} = \frac{-48}{72}$ ,  $\frac{3}{72}$  (không cần quy đồng vì mẫu đã là mẫu chung). Vậy  $\frac{-3}{8} = \frac{-27}{72}$ ,  $\frac{2}{-3} = \frac{-48}{72}$ ,  $\frac{3}{72}$ . □

**Tóm tắt kiến thức.** “Phân số có dạng  $\frac{a}{b}$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ , có thể hiểu là phép chia số nguyên  $a$  cho số nguyên  $b$  khác 0. Nếu  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  thì  $ad = bc$ . Ngược lại, nếu  $ad = bc$  thì  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ,  $bd \neq 0$ . Có  $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$ ,  $\forall a, b, m \in \mathbb{Z}$ ,  $bm \neq 0$ .  $\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $\forall n \in \text{ƯC}(a, b)$ . *Phân số tối giản* là phân số mà tử & mẫu chỉ có ước chung là  $\pm 1$ .” – Thái, 2022, Chap. V, §1, p. 29

**Bài toán 13** (Thái et al., 2022, 1., p. 30). Viết & đọc phân số trong mỗi trường hợp sau: (a) Tử số là  $-43$ , mẫu số là 19. (b) Tử số là  $-123$ , mẫu số là  $-63$ .

*Giải.* (a) Viết:  $\frac{-43}{19}$ , đọc: âm bốn mươi ba phần mười chín. (b) Viết:  $\frac{-123}{-63}$ , đọc: âm một trăm hai mươi ba phần âm sáu mươi ba. (Chú ý: Bài toán này chỉ yêu cầu viết & đọc, không yêu cầu chuyển về mẫu dương hay rút gọn phân số). □

**Bài toán 14** (Thái et al., 2022, 2., p. 30). Các cặp phân số sau có bằng nhau không? Vì sao? (a)  $\frac{-2}{9}, \frac{6}{-27}$ . (b)  $\frac{-1}{-5}, \frac{4}{25}$ .

*Giải.* (a) Vì  $-2 \cdot (-27) = 9 \cdot 6 = 54$  nên  $\frac{-2}{9} = \frac{6}{-27}$ . (b) Vì  $-1 \cdot 25 \neq -5 \cdot 4$  (vì  $-25 \neq -20$ ) nên  $\frac{-1}{-5} \neq \frac{4}{25}$ . □

**Bài toán 15** (Thái et al., 2022, 3., p. 30). Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  biết: (a)  $\frac{-28}{35} = \frac{16}{x}$ . (b)  $\frac{x+7}{15} = \frac{-24}{36}$ .

*Giải.* (a)  $\frac{-28}{35} = \frac{16}{x} \Leftrightarrow x \neq 0$  &  $-28x = 35 \cdot 16 \Leftrightarrow x \neq 0$  &  $x = \frac{35 \cdot 16}{-28} = -20$  (thỏa mãn  $x \neq 0$  nên nhận). Vậy  $x = -20$ . (b)  $\frac{x+7}{15} = \frac{-24}{36} \Leftrightarrow 36(x+7) = 15 \cdot (-24) \Leftrightarrow x+7 = \frac{15 \cdot (-24)}{36} = -10 \Leftrightarrow x = -10 - 7 = -17$ . Vậy  $x = -17$ . □

**Lưu ý 2.** Ở (a), vì  $x$  nằm ở dưới mẫu nên ta phải kèm theo điều kiện  $x \neq 0$  để phân số  $\frac{16}{x}$  xác định. Sau khi biến đổi tương đương để giải ra  $x$ , ta phải kiểm tra lại xem  $x$  thỏa mãn điều kiện ban đầu để (các) phân số xác định hay không. Điều này quan trọng với các bài toán chứa phân thức có mẫu thức chứa biến số  $x$ , e.g., xét bài toán sau:

**Ví dụ 1.** Tìm  $x$  thỏa  $\frac{1}{2} = \frac{0}{x}$ .

Nếu không đặt điều kiện  $x \neq 0$  mà tiến hành giải trực tiếp kiểu:  $\frac{1}{2} = \frac{0}{x} \Rightarrow 1x = 0 \cdot 2 = 0 \Rightarrow x = 0$ . Nhưng khi thay  $x = 0$  vào phương trình ban đầu:  $\frac{1}{2} = \frac{0}{0}$ , vô nghĩa vì phân số  $\frac{0}{0}$  không xác định (hay không có nghĩa, không được định nghĩa), nên bỏ đi điều kiện  $x \neq 0$  khiến lời giải này sai hoàn toàn. Lời giải đúng sẽ là:

*Giải.*  $\frac{1}{2} = \frac{0}{x} \Leftrightarrow x \neq 0$  &  $1x = 0 \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow x \neq 0$  &  $x = 0$  (loại vì  $x \neq 0$  &  $x = 0$  không thể này xảy ra cùng 1 lúc). Vậy phương trình  $\frac{1}{2} = \frac{0}{x}$  vô nghiệm. □

Tuy nhiên, ở (b), 2 phân số  $\frac{x+7}{15}, \frac{-24}{36}$  trong phương trình có mẫu lần lượt là  $15 \neq 0$ ,  $36 \neq 0$  đã khác 0 rồi nên không cần điều kiện xác định như (a) nữa, mà có thể biến đổi tương đương trực tiếp luôn. Đây là điểm khác biệt giữa 2 phương trình. Cần thận với các bài toán có phân thức có chứa biến  $x$  ở mẫu thức sẽ học kỹ ở chương trình Toán 7 & 8.<sup>5</sup>

**Bài toán 16** (Thái et al., 2022, 4., p. 30). Rút gọn mỗi phân số sau về phân số tối giản:  $\frac{14}{21}, \frac{-36}{48}, \frac{28}{-52}, \frac{-54}{-90}$ .

<sup>5</sup>See, e.g., [GitHub/NQBH/elementary mathematics/grade 7/algebraic expressions](#) (biểu thức đại số) & [GitHub/NQBH/elementary mathematics/grade 8/algebraic fractions](#) (phân thức hữu tỷ).

**Giải.**  $\text{ƯCLN}(14, 21) = 7$ ,  $\frac{14}{21} = \frac{14:7}{21:7} = \frac{2}{3}$ .  $\text{ƯCLN}(36, 48) = 12$ ,  $\frac{-36}{48} = \frac{-36:12}{48:12} = \frac{-3}{4}$ .  $\text{ƯCLN}(28, 52) = 4$ ,  $\frac{28}{-52} = \frac{28:4}{-52:4} = \frac{7}{-13}$ .  
 $\text{ƯCLN}(54, 90) = 18$ ,  $\frac{-54}{-90} = \frac{54}{90} = \frac{54:18}{90:18} = \frac{3}{5}$ .  $\square$

**Bài toán 17** (Thái et al., 2022, 5., p. 30). (a) Rút gọn phân số  $\frac{-21}{39}$  về phân số tối giản. (b) Viết tắt cả các phân số bằng  $\frac{-21}{39}$  mà mẫu là số tự nhiên có 2 chữ số.

**Giải.** (a)  $\text{ƯCLN}(21, 39) = 3$ ,  $\frac{-21}{39} = \frac{-21:3}{39:3} = \frac{-7}{13}$ . (b) Theo tính chất cơ bản của phân số  $\frac{-7}{13} = \frac{-7n}{13n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq 0$ . Để  $13n$  là số tự nhiên có 2 chữ số thì  $n \in \mathbb{Z}$  phải thỏa  $10 < 13n < 99$  hay  $\frac{10}{13} < n < \frac{99}{13}$  mà  $0 < \frac{10}{13} < 1$  &  $7 < \frac{99}{13} < 8$ , suy ra  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . Vậy tập hợp tất cả các phân số bằng  $\frac{-21}{39}$  mà mẫu là số tự nhiên có 2 chữ số là:  $\{\frac{-7n}{13n} | n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{\frac{-7}{13}, \frac{-14}{26}, \frac{-21}{39}, \frac{-28}{52}, \frac{-35}{65}, \frac{-42}{78}, \frac{-49}{91}\}$ .  $\square$

**Bài toán 18** (Thái et al., 2022, 6., p. 30). Quy đồng mẫu những phân số sau: (a)  $\frac{-5}{14}$ ,  $\frac{1}{-21}$ . (b)  $\frac{17}{60}$ ,  $\frac{-5}{18}$ ,  $\frac{-64}{90}$ .

**Giải.** (a)  $\frac{1}{-21} = \frac{-1}{21}$ ,  $\text{BCNN}(14, 21) = 42$ ,  $42 : 14 = 3$ ,  $42 : 21 = 2$ . Quy đồng:  $\frac{-5}{14} = \frac{-5:3}{14:3} = \frac{-15}{42}$ ,  $\frac{1}{-21} = \frac{-1:2}{21:2} = \frac{-2}{42}$ . (b)  $\text{BCNN}(60, 18, 90) = 180$ ,  $180 : 60 = 3$ ,  $180 : 18 = 10$ ,  $180 : 90 = 2$ . Quy đồng:  $\frac{17}{60} = \frac{17:3}{60:3} = \frac{51}{180}$ ,  $\frac{-5}{18} = \frac{-5:10}{18:10} = \frac{-50}{180}$ ,  $\frac{-64}{90} = \frac{-64:2}{90:2} = \frac{-128}{180}$ .  $\square$

**Bài toán 19** (Thái et al., 2022, 7., p. 30). Trong các phân số sau, tìm phân số không bằng phân số nào trong các phân số còn lại:  $\frac{6}{25}$ ,  $\frac{-4}{50}$ ,  $\frac{-27}{54}$ ,  $\frac{-18}{-75}$ ,  $\frac{28}{-56}$ .

**Giải.** Phân số  $\frac{6}{25}$  tối giản.  $\text{ƯCLN}(4, 50) = 2$ ,  $\frac{-4}{50} = \frac{-4:2}{50:2} = \frac{-2}{25}$ .  $\text{ƯCLN}(27, 54) = 27$  (vì  $54 : 27$ ),  $\frac{-27}{54} = \frac{-27:27}{54:27} = \frac{-1}{2}$ .  $\text{ƯCLN}(18, 75) = 3$ ,  $\frac{-18}{-75} = \frac{18}{75} = \frac{18:3}{75:3} = \frac{6}{25}$  bằng phân số đầu tiên.  $\text{ƯCLN}(28, 56) = 28$  (vì  $56 : 28$ ),  $\frac{28}{-56} = \frac{-28}{56} = \frac{-28:28}{56:28} = \frac{-1}{2}$  nên bằng với phân số thứ 3:  $\frac{28}{-56} = \frac{-27}{54} = \frac{-1}{2}$ . Vậy phân số  $\frac{-4}{50}$  là phân số không bằng phân số nào trong các phân số còn lại.  $\square$

**Bài toán 20** (Thái, 2022, Ví dụ 1, p. 29). Viết tắt cả các phân số  $\frac{a}{b}$  biết  $a, b$  được chọn trong các số:  $-3, 0, 5$ . Có tất cả bao nhiêu phân số?

**Giải.** Vì  $b \neq 0$  nên có 2 trường hợp: (1)  $b = -3$ , có 3 phân số:  $\frac{-3}{-3}$ ,  $\frac{0}{-3}$ ,  $\frac{5}{-3}$ . (2)  $b = 5$ , có 3 phân số:  $\frac{-3}{5}$ ,  $\frac{0}{5}$ ,  $\frac{5}{5}$ . Viết được tất cả 6 phân số.  $\square$

**Bài toán 21** (Mở rộng Thái, 2022, Ví dụ 1, p. 29). Viết tắt cả các phân số  $\frac{a}{b}$  biết  $a, b$  được chọn trong các số:  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , với  $n \in \mathbb{N}^*$ , phân biệt cho trước. Có tất cả bao nhiêu phân số?

**Giải.** Xét 2 trường hợp sau: (1) Nếu trong  $n$  số  $a_i$  đã cho có 1 số bằng 0 (lúc nào cũng chỉ có tối đa 1 số bằng 0 vì các số này phân biệt), i.e., có 1 chỉ số  $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$  sao cho  $a_{i_0} = 0$  &  $a_i \neq 0$ ,  $\forall i \neq i_0$ . Khi đó, có thể viết được các phân số  $\frac{a}{b} = \frac{a_i}{a_j}$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $j \neq i_0$ . Có tất cả  $n(n-1)$  phân số trong trường hợp này. (2) Nếu tất cả các số  $a_i$  đã cho đều khác 0, i.e.,  $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$  thì có thể viết được các phân số  $\frac{a}{b} = \frac{a_i}{a_j}$ ,  $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$ . Có tất cả  $n \cdot n = n^2$  phân số trong trường hợp này.  $\square$

**Bài toán 22** (Thái, 2022, Ví dụ 2, p. 29). 1 trường học có số học sinh giỏi chiếm  $\frac{12}{35}$  số học sinh toàn trường, số học sinh khá chiếm  $\frac{13}{25}$  số học sinh toàn trường. Số học sinh giỏi & số học sinh khá của trường đó có bằng nhau không? Vì sao?

**Giải.**  $12 \cdot 25 \neq 35 \cdot 13 \Rightarrow \frac{12}{35} \neq \frac{13}{25}$ , nên số học sinh giỏi & số học sinh khá của trường đó không bằng nhau.  $\square$

**Lưu ý 3.** Có thể thay  $\frac{12}{35}$ ,  $\frac{13}{25}$  trong bài toán trên bằng 2 phân số  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{c}{d}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ,  $bd \neq 0$ . Theo tính chất của 2 phân số bằng nhau: Nếu  $ad = bc$  thì số học sinh giỏi & số học sinh khá của trường đó bằng nhau. Ngược lại, nếu  $ad \neq bc$  thì số học sinh giỏi & số học sinh khá của trường đó không bằng nhau.

**Bài toán 23** (Thái, 2022, Ví dụ 3, p. 30). Rút gọn về phân số tối giản: (a)  $\frac{3510-135}{4680-180}$ . (b)  $\frac{2^4 \cdot 3^2}{6^2 \cdot 5}$ . (c)  $\frac{11 \cdot 2^n}{6^m}$  với  $m, n \in \mathbb{N}$ .

**Giải.** (a)  $\frac{3510-135}{4680-180} = \frac{3 \cdot 45 \cdot (26-1)}{4 \cdot 45 \cdot (26-1)} = \frac{3}{4}$ . (b)  $\frac{2^4 \cdot 3^2}{6^2 \cdot 5} = \frac{2^4 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = \frac{2^2}{5} = \frac{4}{5}$ . (c) Nếu  $m > n$ ,  $\frac{11 \cdot 2^n}{6^m} = \frac{11 \cdot 2^n}{2^m \cdot 3^m} = \frac{11}{2^{m-n} \cdot 3^n}$ . Nếu  $m = n$ ,  $\frac{11 \cdot 2^n}{6^m} = \frac{11 \cdot 2^n}{2^m \cdot 3^m} = \frac{11}{3^n}$ . (c) Nếu  $m < n$ ,  $\frac{11 \cdot 2^n}{6^m} = \frac{11 \cdot 2^n}{2^m \cdot 3^m} = \frac{11 \cdot 2^{n-m}}{3^n}$ .  $\square$

**Bài toán 24** (Thái, 2022, 3., p. 30). Trong các cách viết sau, cách viết nào cho ta phân số? (a)  $-\frac{9.4}{11.5}$ . (b)  $\frac{-8}{0}$ . (c)  $\frac{7}{1}$ . (d)  $\frac{n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Bài toán 25** (Thái, 2022, 4., p. 31). Trong các cặp phân số sau, cặp phân số nào bằng nhau? Vì sao?  $\frac{3}{7}$  &  $\frac{6}{-14}$ ,  $\frac{12}{-4}$  &  $\frac{-9}{3}$ ,  $\frac{-13}{9}$  &  $\frac{13}{-9}$ ,  $-5$  &  $\frac{-10}{2}$ ,  $\frac{2x}{6}$  &  $\frac{x}{3}$ ,  $x \in \mathbb{Z}$ .

**Bài toán 26** (Thái, 2022, 5., p. 31). Viết mỗi phân số sau thành phân số bằng nó & có mẫu là số nguyên dương: (a)  $\frac{-32}{-17}$ . (b)  $\frac{14}{-17}$ . (c)  $\frac{5}{-39}$ . (d)  $\frac{-x}{-y}$ ,  $x, y \in \mathbb{Z}$ ,  $y > 0$ .

**Bài toán 27** (Thái, 2022, 6., p. 31). Tìm  $x, y \in \mathbb{Z}$ : (a)  $\frac{4}{x} = \frac{y}{21} = \frac{28}{49}$ . (b)  $\frac{x}{7} = \frac{y}{9}$  &  $x > y$ . (c)  $\frac{x}{15} = \frac{3}{y}$  &  $x < y < 0$ . (d)  $\frac{x}{y} = \frac{21}{28}$ .

**Bài toán 28** (Thái, 2022, 7., p. 31). Rút gọn về phân số tối giản: (a)  $\frac{-147}{252}$ . (b)  $\frac{765}{900}$ . (c)  $\frac{11 \cdot 3 - 11 \cdot 8}{17 - 6}$ . (d)  $\frac{3^5 \cdot 2^4}{8 \cdot 3^6}$ . (e)  $\frac{84 \cdot 45}{49 \cdot 54}$ .



**Bài toán 29** (Thái, 2022, 8., p. 31). Giải thích tại sao các phân số sau đây bằng nhau: (a)  $\frac{-630}{224} = \frac{-45}{16}$ . (b)  $\frac{352352}{-470470} = \frac{-176}{235}$ . (c)  $\frac{199\cdots9}{99\cdots95} = \frac{1}{5}$  biết có 100 chữ số 9 ở tử số & 100 chữ số 9 ở mẫu số.

**Bài toán 30** (Thái, 2022, 9., p. 31). Cho biểu thức  $A = \frac{3}{n+2}$ . (a) Số nguyên  $n$  phải thỏa mãn điều kiện gì để  $A$  là phân số? (b) Tìm phân số  $A$  khi  $n = 0$ ,  $n = 2$ ,  $n = -7$ . (c) Tìm các số nguyên  $n$  để  $A$  là 1 số nguyên.

**Bài toán 31** (Thái, 2022, 10., p. 31). Cho phân số  $A = \frac{1+2+\cdots+9}{11+12+\cdots+19}$ . (a) Rút gọn  $A$ . (b) Xóa 1 số hạng ở tử & xóa 1 số hạng ở mẫu của phân số  $A$  để được phân số mới có giá trị vẫn bằng  $A$ .

**Bài toán 32** (Thái, 2022, 11., pp. 31–32). (a) 1 mẫu Bắc Bộ bằng 3600m<sup>2</sup>. 1 mẫu Bắc Bộ bằng bao nhiêu phần của 1 hecta? (b) 1 pound bằng 0.45kg. 1 pound bằng bao nhiêu phần của 1kg? (c) 1 vòi nước chảy vào bể không có nước trong 48 phút thì đầy bể. Nếu mở vòi vào bể không có nước trong 36 phút thì lượng nước chiếm bao nhiêu phần bể?

**Bài toán 33** (Thái, 2022, 13., p. 32). Cho phân số  $\frac{-5}{9}$ . Phải cộng thêm vào tử & mẫu cùng 1 số nào để được phân số mới có giá trị bằng phân số  $\frac{2}{9}$ ?

**Bài toán 34** (Thái, 2022, 14., p. 32). Chứng minh  $\frac{14n+3}{21n+4}$  là phân số tối giản với mọi số tự nhiên  $n$

“[1] Ta gọi  $\frac{a}{b}$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$  là 1 phân số,  $a$  là tử,  $b$  là mẫu của phân số. Ta có thể viết thương của phép chia  $a \in \mathbb{Z}$  cho  $b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$  dưới dạng  $\frac{a}{b}$  & cũng gọi  $\frac{a}{b}$  là phân số.  $a \in \mathbb{Z}$  có thể viết dưới dạng phân số  $\frac{a}{1}$ . [2] 2 phân số bằng nhau. Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ ,  $d \neq 0$ . Nếu  $ad = bc$  thì  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , ngược lại nếu  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  thì  $ad = bc$ . [3] 2 tính chất cơ bản của phân số:  $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$ ,  $\forall a, b, m \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ ,  $m \neq 0$ .  $\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}$ ,  $\forall a, b, n \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ ,  $n \in \text{ƯC}(a, b)$ . [4] Rút gọn phân số: Muốn rút gọn 1 phân số, ta chia cả tử & mẫu của phân số đó cho 1 ước chung khác  $\pm 1$  của chúng. Phân số tối giản là phân số mà tử & mẫu chỉ có ước chung là  $\pm 1$ , i.e.,  $\frac{a}{b}$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ ,  $\text{ƯCLN}(a, b) = 1$ . [5] Nếu đổi dấu cả tử & mẫu của 1 phân số thì được 1 phân số mới bằng phân số đã cho.  $\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$ ,  $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ . [6] Nếu  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản thì mọi phân số bằng nó đều có dạng  $\frac{am}{bm}$  với  $m \in \mathbb{Z}$  &  $m \neq 0$ .” – Tuyên, 2022, Chap. 3, §1, p. 45

“Số có dạng  $\frac{a}{b}$  trong đó  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$  được gọi là phân số. Số nguyên  $n \in \mathbb{Z}$  được đồng nhất với phân số  $\frac{n}{1}$ . Tính chất cơ bản của phân số:  $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{a:n}{b:n}$  với  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $m \neq 0$ ,  $n \in \text{ƯC}(a, b)$ . Nếu  $\text{ƯCLN}(|a|, |b|) = 1$  thì  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Nếu  $\frac{m}{n}$  là dạng tối giản của phân số  $\frac{a}{b}$  thì tồn tại số nguyên  $k \in \mathbb{Z}$  sao cho  $a = mk$ ,  $b = nk$ .” – Bình, 2022, Chap. III, §1, p. 4

**Bài toán 35** (Tuyên, 2022, Ví dụ 49, p. 45). Cho  $A = \{-5, 0, 9\}$ . Viết tất cả các phân số  $\frac{a}{b}$  với  $a, b \in A$ . Có bao nhiêu phân số thỏa mãn?

*Giải.* Số 0 không thể lấy làm mẫu của phân số. Lấy  $-5$  làm mẫu:  $\frac{-5}{-5}, \frac{0}{-5}, \frac{9}{-5}$ . Lấy 9 làm mẫu:  $\frac{-5}{9}, \frac{0}{9}, \frac{9}{9}$ . Có 6 phân số thỏa mãn. □

**Bài toán 36** (Mở rộng Tuyên, 2022, Ví dụ 49, p. 45). Cho  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{Z}$ . Viết tất cả các phân số  $\frac{a}{b}$  với  $a, b \in A$ . Có bao nhiêu phân số thỏa mãn?

*Giải.* Xét 2 trường hợp: (a) Nếu  $0 \notin A$ , i.e.,  $a_i \neq 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ . Tất cả các phân số  $\frac{a}{b}$  với  $a, b \in A$ :  $\frac{a_i}{a_j}$ ,  $\forall i, j = 1, \dots, n$ , có tổng cộng  $n^2$  phân số thỏa mãn. (b) Nếu  $0 \in A$ , i.e., tồn tại chỉ số  $k \in \{1, \dots, n\}$  sao cho  $a_k = 0$ , ngoài ra  $a_i \neq 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ ,  $i \neq k$  (vì  $A$  là 1 tập hợp nên không có các phần tử trùng nhau). Tất cả các phân số  $\frac{a}{b}$  với  $a, b \in A$ :  $\frac{a_i}{a_j}$ ,  $\forall i, j = 1, \dots, n$ ,  $j \neq k$  có tổng cộng  $n(n-1) = n^2 - n$  phân số thỏa mãn. □

**Nhận xét 1.** “Mẫu của 1 phân số phải khác 0 nhưng tử của phân số có thể bằng 0, khi đó giá trị của phân số đúng bằng 0, i.e.,  $\frac{0}{b} = 0$ ,  $\forall b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ . Tử & mẫu của 1 phân số có thể bằng nhau, khi đó giá trị của phân số đúng bằng 1, i.e.,  $\frac{a}{a} = 1$ ,  $\forall a \in \mathbb{Z}$ ,  $a \neq 0$ .” – Tuyên, 2022, p. 46

**Bài toán 37** (Tuyên, 2022, Ví dụ 50, p. 46). Viết tập hợp  $B$  các phân số bằng phân số  $\frac{7}{-15}$  với mẫu dương có 2 chữ số.

*Giải.*  $\frac{7}{-15} = \frac{-7}{15}$ . Phân số này là 1 phân số tối giản với mẫu dương. Mọi phân số bằng nó đều có dạng  $\frac{-7m}{15m}$  với  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $m \neq 0$ . Mẫu số của các phân số cần phải tìm là 1 số có 2 chữ số nên chọn  $m \in \mathbb{Z}$  sao cho  $10 \leq 15m \leq 99$ , suy ra<sup>6</sup>  $1 \leq m \leq 6$ , i.e.,  $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Vậy  $B = \{\frac{-7}{15}, \frac{-14}{30}, \frac{-21}{45}, \frac{-28}{60}, \frac{-35}{75}, \frac{-42}{90}\}$ . □

**Bài toán 38** (Mở rộng Tuyên, 2022, Ví dụ 50, p. 46). Cho trước  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ , &  $n \in \mathbb{N}^*$ . Viết tập hợp  $B$  các phân số bằng phân số  $\frac{a}{b}$  với mẫu dương có  $n$  chữ số.

**Bài toán 39** (Tuyên, 2022, Ví dụ 51, p. 46). Tìm phân số bằng phân số  $\frac{32}{60}$ , biết tổng của tử & mẫu là 115.

*Giải.* Có  $\frac{32}{60} = \frac{8}{15} = \frac{8m}{15m}$ ,  $\forall m \in \mathbb{Z}$ ,  $m \neq 0$ . Tổng của tử & mẫu là 115  $\Rightarrow 8m + 15m = 115 \Rightarrow 23m = 115 \Rightarrow m = \frac{115}{23} = 5$ . Phân số cần tìm:  $\frac{8 \cdot 5}{15 \cdot 5} = \frac{40}{75}$ . □

**Nhận xét 2.** “Nếu không rút gọn phân số  $\frac{32}{60}$  thành phân số tối giản  $\frac{8}{15}$  mà khẳng định các phân số bằng phân số  $\frac{32}{60}$  có dạng  $\frac{32m}{60m}$  thì sẽ mắc sai lầm là bỏ sót rất nhiều phân số bằng phân số  $\frac{32}{60}$  do đó không thể tìm được đáp số của bài toán trên.” – Tuyên, 2022, p. 46

<sup>6</sup> $m \in \mathbb{Z} \wedge (10 \leq 15m \leq 99) \Leftrightarrow \lfloor \frac{15}{10} \rfloor = 1 \leq m \leq \lfloor \frac{99}{15} \rfloor = 6$ .

**Bài toán 40** (Mở rộng Tuyên, 2022, Ví dụ 51, p. 46). Cho trước  $a, b, n \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ . Tìm phân số bằng phân số  $\frac{a}{b}$ , biết tổng của tử & mẫu là  $n$ .

**Bài toán 41** (Tuyên, 2022, 236., p. 47). Trong các phân số sau, những phân số nào bằng nhau?  $\frac{15}{60}, \frac{-7}{5}, \frac{6}{15}, \frac{28}{-20}, \frac{3}{12}$ .

**Bài toán 42** (Tuyên, 2022, 237., p. 47). Cho  $A = \frac{3n-5}{n+4}$ . Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để  $A \in \mathbb{Z}$ .

**Bài toán 43** (Tuyên, 2022, 238., p. 47). Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để cho các phân số sau đồng thời có giá trị nguyên:  $\frac{-12}{n}, \frac{15}{n-2}, \frac{8}{n+1}$ .

**Bài toán 44** (Tuyên, 2022, 239., p. 47). Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  biết: (a)  $\frac{x-1}{9} = \frac{8}{3}$ . (b)  $\frac{-x}{4} = \frac{-9}{x}$ . (c)  $\frac{x}{4} = \frac{18}{x+1}$ .

**Bài toán 45** (Tuyên, 2022, 240., p. 47). Tìm  $x, y \in \mathbb{Z}$  thỏa  $\frac{x-4}{y-3} = \frac{4}{3}$  &  $x - y = 5$ .

**Bài toán 46** (Tuyên, 2022, 241., p. 47). Viết dạng tổng quát các phân số bằng phân số  $\frac{-12}{30}$ .

**Bài toán 47** (Tuyên, 2022, 242., p. 47). Rút gọn phân số: (a)  $\frac{990}{2610}$ . (b)  $\frac{374}{506}$ . (c)  $\frac{3600-75}{8400-175}$ . (d)  $\frac{9^{14} \cdot 25^5 \cdot 8^7}{18^{12} \cdot 625^3 \cdot 24^3}$ .

**Bài toán 48** (Tuyên, 2022, 243., p. 47). Cho phân số  $\frac{a}{b}$ . Chứng minh: Nếu  $\frac{a-x}{b-y} = \frac{a}{b}$  thì  $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ .

**Bài toán 49** (Tuyên, 2022, 244., p. 47). Cho phân số  $A = \frac{1+3+5+\dots+19}{21+23+25+\dots+39}$ . (a) Rút gọn  $A$ . (b) Xóa 1 số hạng ở tử & xóa 1 số hạng ở mẫu để được 1 phân số mới vẫn bằng  $A$ .

**Bài toán 50** (Tuyên, 2022, 245., p. 47). Rút gọn phân số  $A = \frac{71 \cdot 52 + 53}{530 \cdot 71 - 180}$  mà không cần thực hiện các phép tính ở tử.

**Bài toán 51** (Tuyên, 2022, 246., p. 47). 2 phân số sau có bằng nhau không?  $\frac{\overline{abab}}{\overline{cdcd}}, \frac{\overline{ababab}}{\overline{cdcdcd}}$ .

**Bài toán 52** (Tuyên, 2022, 247., p. 47). Chứng minh: (a)  $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 39}{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot \dots \cdot 40} = \frac{1}{2^{20}}$ . (b)  $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(n+1)(n+2)(n+3) \cdot \dots \cdot 2n} = \frac{1}{2^n}$  với  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Bài toán 53** (Tuyên, 2022, 248., p. 47). Tìm phân số  $\frac{a}{b}$  bằng phân số  $\frac{60}{108}$  biết: (a)  $\text{ƯCLN}(a, b) = 15$ . (b)  $\text{BCNN}(a, b) = 180$ .

**Bài toán 54** (Tuyên, 2022, 249., p. 48). Tìm phân số bằng phân số  $\frac{200}{520}$  sao cho: (a) Tổng của tử & mẫu là 306. (b) Hiệu của tử & mẫu là 184. (c) Tích của tử & mẫu là 2340.

**Bài toán 55** (Tuyên, 2022, 250., p. 48). Chứng minh:  $\forall n \in \mathbb{Z}$ , các phân số sau là các phân số tối giản: (a)  $\frac{3n-2}{4n-3}$ . (b)  $\frac{4n+1}{6n+1}$ .

**Bài toán 56** (Tuyên, 2022, 251., p. 48). Cho  $\frac{a}{b}$  là 1 phân số chưa tối giản. Chứng minh các phân số sau chưa tối giản: (a)  $\frac{a}{a-b}$ . (b)  $\frac{2a}{a-2b}$ .

**Bài toán 57** (Tuyên, 2022, 252., p. 48). 1 mẫu Bắc Bộ bằng 3600m<sup>2</sup>. Hỏi 1 mẫu Bắc Bộ bằng mấy phần của 1 hecta?

**Bài toán 58** (Bình, 2022, Ví dụ 1, p. 4). Tìm  $n \in \mathbb{N}$  để phân số  $A = \frac{n+10}{2n-8} \in \mathbb{Z}$  (i.e., có giá trị là 1 số nguyên).

*Giải.* Để phân số  $A$  có giá trị là 1 số nguyên, tử phải chi hết cho mẫu:  $n+10 : 2n-8 \Rightarrow n+10 : n-4 \Rightarrow n-4+14 : n-4 \Rightarrow 14 : n-4 \Rightarrow n-4 \in \text{Ư}(14) \cap \mathbb{Z} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14\}$ . Vì  $n-4 \geq -4$  (vì  $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$ ) nên  $n-4 \in \{\pm 1, \pm 2, 7, 14\}$ . Nếu  $n-4 = 1$ ,  $n = 5$ ,  $A = \frac{15}{2}$  (loại). Nếu  $n-4 = -1$ ,  $n = 3$ ,  $A = \frac{13}{-2}$  (loại). Nếu  $n-4 = 2$ ,  $n = 6$ ,  $A = \frac{16}{4} = 4$ . Nếu  $n-4 = -2$ ,  $n = 2$ ,  $A = \frac{12}{-4} = -3$ . Nếu  $n-4 = 7$ ,  $n = 11$ ,  $A = \frac{21}{14} = \frac{3}{2}$  (loại). Nếu  $n-4 = 14$ ,  $n = 18$ ,  $A = \frac{28}{8} = 1$ . Vậy  $n \in \{2, 6, 18\}$ .  $\square$

**Bài toán 59** (Mở rộng Bình, 2022, Ví dụ 1, p. 4). Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ,  $c^2 + d^2 \neq 0$ . Tìm  $n \in \mathbb{N}$  để phân số  $A = \frac{an+b}{cn+d} \in \mathbb{Z}$ .

**Bài toán 60** (Bình, 2022, Ví dụ 2, p. 5). Tìm  $n \in \mathbb{N}$  để phân số  $A = \frac{21n+3}{6n+4}$  rút gọn được.

**Bài toán 61** (Mở rộng Bình, 2022, Ví dụ 2, p. 5). Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ,  $c^2 + d^2 \neq 0$ . Tìm  $n \in \mathbb{N}$  để phân số  $A = \frac{an+b}{cn+d}$  rút gọn được.

**Bài toán 62** (Bình, 2022, Ví dụ 3, p. 5). Tìm  $a, b, c, d \in \mathbb{N}$  nhỏ nhất sao cho  $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$ ,  $\frac{b}{c} = \frac{12}{21}$ ,  $\frac{c}{d} = \frac{6}{11}$ .

**Bài toán 63** (Bình, 2022, Ví dụ 4, p. 5). Tìm số tự nhiên lớn nhất có 3 chữ số sao cho số đó bằng mỗi tổng  $a+b, c+d, e+f$  &  $\frac{a}{b} = \frac{35}{49}$ ,  $\frac{c}{d} = \frac{130}{143}$ ,  $\frac{e}{f} = \frac{7}{13}$ .

**Bài toán 64** (Bình, 2022, 1., p. 6). Rút gọn phân số: (a)  $\frac{199 \dots 9}{99 \dots 95}$  (10 chữ số 9 ở tử, 10 chữ số 9 ở mẫu). (b)  $\frac{121212}{424242}$ . (c)  $\frac{187187187}{221221221}$ . (d)  $\frac{3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 39 - 10101}{505050 + 70707}$ .

**Bài toán 65** (Bình, 2022, 2., p. 6). Chứng minh các phân số sau có giá trị là số tự nhiên: (a)  $\frac{10^{2002}+2}{3}$ . (b)  $\frac{10^{2003}+8}{9}$ .

**Bài toán 66** (Bình, 2022, 3., p. 6). Chứng minh các phân số sau bằng nhau: (a)  $\frac{1717}{2929}$  &  $\frac{171717}{292929}$ . (b)  $\frac{3210-34}{4170-41}$  &  $\frac{6420-68}{8340-82}$ . (c)  $\frac{2106}{7320}$ ,  $\frac{4212}{14640}$ , &  $\frac{6318}{21960}$ .

**Bài toán 67** (Bình, 2022, 4., p. 6). Tìm  $x, y \in \mathbb{Z}$  thỏa: (a)  $\frac{x}{3} = \frac{y}{5}$ . (b)  $\frac{x}{28} = \frac{y}{35}$ .

**Bài toán 68** (Bình, 2022, 5., p. 6). Tìm các phân số  $\frac{a}{b}$ ,  $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}^*$ , có giá trị bằng: (a)  $\frac{36}{45}$  biết  $\text{BCNN}(a, b) = 300$ . (b)  $\frac{21}{35}$  biết  $\text{ƯCLN}(a, b) = 30$ . (c)  $\frac{15}{35}$  biết  $\text{ƯCLN}(a, b) \cdot \text{BCNN}(a, b) = 3549$ .

**Bài toán 69** (Bình, 2022, 6., p. 7). Chứng minh các phân số sau tối giản với mọi  $n \in \mathbb{N}$ . (a)  $\frac{n+1}{2n+3}$ . (b)  $\frac{2n+3}{4n+8}$ . (c)  $\frac{3n+2}{5n+3}$ .

**Bài toán 70** (Bình, 2022, 7., p. 7). Cho phân số  $A = \frac{63}{3n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . (a) Với giá trị nào của  $n$  thì  $A$  rút gọn được? (b) Với giá trị nào của  $n$  thì  $A \in \mathbb{N}$ ?

**Bài toán 71** (Bình, 2022, 8., p. 7). Tìm các số tự nhiên  $n$  để các phân số sau là phân số tối giản: (a)  $\frac{2n+3}{4n+1}$ . (b)  $\frac{3n+2}{7n+1}$ . (c)  $\frac{2n+7}{5n+2}$ .

**Bài toán 72** (Bình, 2022, 9., p. 7). Có bao nhiêu số nguyên dương  $n$  không vượt quá 1000 để phân số  $\frac{n+12}{n^2+9n-13}$  là phân số tối giản?

**Bài toán 73** (Bình, 2022, 10., p. 7). Tìm  $n \in \mathbb{N}$  để phân số  $\frac{n+3}{2n-2} \in \mathbb{Z}$ .

**Bài toán 74** (Bình, 2022, 11., p. 7). Tìm các số nguyên  $n$  sao cho các phân số sau có giá trị là số nguyên: (a)  $\frac{12}{3n-1}$ . (b)  $\frac{2n+3}{7}$ .

**Bài toán 75** (Bình, 2022, 12., p. 7). Tìm  $n \in \mathbb{N}$  để phân số  $A = \frac{8n+193}{4n+3}$ : (a) Có giá trị là số tự nhiên. (b) Là phân số tối giản. (c) Với giá trị nào của  $n$  trong khoảng từ 150 đến 170 thì phân số  $A$  rút gọn được?

**Bài toán 76** (Bình, 2022, 13., p. 7). Tìm các phân số tối giản nhỏ hơn 1 có tử 8 mẫu đều dương, biết tích của tử 8 mẫu của phân số bằng 120.

**Bài toán 77** (Bình, 2022, 14., p. 7). Tìm  $n \in \mathbb{N}$  nhỏ nhất để các phân số sau đều là phân số tối giản:  $\frac{5}{n+8}, \frac{6}{n+9}, \frac{7}{n+10}, \dots, \frac{17}{n+20}$ .

**Bài toán 78** (Bình, 2022, 15., p. 7). Cho 3 phân số  $\frac{15}{42}, \frac{49}{56}, \frac{36}{51}$ . Biến đổi 3 phân số trên thành các phân số bằng chúng sao cho mẫu của phân số thứ nhất bằng tử của phân số thứ 2, mẫu của phân số thứ 2 bằng tử của phân số thứ 3.

**Bài toán 79** (Bình, 2022, 16., p. 7). Cho 3 phân số  $\frac{5}{8}, \frac{11}{20}, \frac{4}{15}$ . Tìm 3 phân số (có tử 8 mẫu dương) theo thứ tự bằng 3 phân số trên sao cho hiệu của mẫu 8 tử của mỗi phân số này đều bằng nhau 8 hiệu đó có giá trị nhỏ nhất.

**Bài toán 80** (Bình, 2022, 17., p. 8). Tìm các phân số lớn hơn  $\frac{1}{5}$  8 khác số tự nhiên biết nếu lấy mẫu nhân với 1 số, lấy tử cộng với số đó thì giá trị của phân số không đổi.

**Bài toán 81** (Bình, 2022, 18., p. 8). Cho phân số  $A = \frac{23+22+21+\dots+13}{11+10+9+\dots+1}$ . Nêu cách xóa 1 số hạng ở tử 8 1 số hạng ở mẫu của  $A$  để được 1 phân số mới vẫn bằng phân số  $A$ .

**Bài toán 82** (Bình, 2022, 19., p. 8, Bộ sử Hume). Người Anh có thói quen xếp bộ sử nước Anh của Hume (David Hume, nhà sử học Scotland) gồm 9 tập ở tủ sách đặc biệt gồm 2 ngăn: ngăn trên xếp 5 cuốn, ngăn dưới xếp 4 cuốn, ở gáy các cuốn sách đó ghi các số 1, 2, 3, ..., 9. Nếu chủ nhân xếp  $\frac{13458}{6729}$  (phân số này có giá trị bằng 2) thì chứng tỏ chủ nhân đã đọc 2 tập (riêng trường hợp mới đọc 1 tập thì xếp  $\frac{12345}{6789}$ ). Nêu cách xếp 9 cuốn sách đó để chứng tỏ chủ nhân của bộ sách đã đọc 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 tập.

## 2 So Sánh Các Phân Số

Trong 2 số nguyên  $a, b \in \mathbb{Z}$  khác nhau ( $a \neq b$ ), luôn có 1 số nhỏ hơn số kia, i.e.,  $a < b$  hoặc  $a > b$ . Cũng như số nguyên, trong 2 phân số  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  khác nhau ( $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ ) luôn có 1 phân số nhỏ hơn phân số kia, i.e.,  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  hoặc  $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ . Nếu phân số  $\frac{a}{b}$  nhỏ hơn phân số  $\frac{c}{d}$  thì ta viết  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  hoặc  $\frac{c}{d} > \frac{a}{b}$ . Phân số lớn hơn 0 gọi là *phân số dương*. Phân số nhỏ hơn 0 gọi là *phân số âm*. *Tính chất bắc cầu*: Nếu  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  &  $\frac{c}{d} < \frac{e}{f}$  thì  $\frac{a}{b} < \frac{e}{f}$ .

$$\left(\frac{a}{b} < \frac{c}{d}\right) \wedge \left(\frac{c}{d} < \frac{e}{f}\right) \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{e}{f}, \forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}, bdf \neq 0.$$

**Cách so sánh 2 phân số.** *Bước 1*: Quy đồng mẫu 2 phân số đã cho (về cùng 1 mẫu dương). *Bước 2*: So sánh tử của các phân số: Phân số nào có tử lớn hơn thì lớn hơn.

**Mệnh đề 1** (So sánh các phân số). Để so sánh 2 phân số không cùng mẫu, ta quy đồng mẫu 2 phân số đó (về cùng 1 mẫu dương) rồi so sánh các tử với nhau: Phân số nào có tử lớn hơn thì phân số đó lớn hơn.

**Bài toán 83** (Thái et al., 2022, 2, p. 31). So sánh:  $\frac{3}{-5}$  8  $\frac{-5}{9}$ .

*Giải.*  $\frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$ ,  $\text{BCNN}(5, 9) = 45$ ,  $45 : 5 = 9$ ,  $45 : 9 = 5$ . Quy đồng:  $\frac{3}{-5} = -\frac{3}{5} = \frac{-3 \cdot 9}{5 \cdot 9} = \frac{-27}{45}$  &  $\frac{-5}{9} = \frac{-5 \cdot 5}{9 \cdot 5} = \frac{-25}{45}$ . Vì  $-27 < -25$  nên  $\frac{-27}{45} < \frac{-25}{45}$ . Vậy  $\frac{3}{-5} < \frac{-5}{9}$ .  $\square$

**Bài toán 84** (Thái et al., 2022, Ví dụ 1, 1, p. 32). So sánh: (a)  $\frac{5}{-9}$  8  $\frac{2}{-9}$ . (b)  $\frac{5}{-6}$  8  $\frac{-6}{7}$ . (c)  $\frac{7}{-11}$  8  $\frac{8}{-11}$ . (d)  $\frac{-5}{3}$  8  $\frac{5}{-4}$ .



**Giải.** (a)  $\frac{5}{-9} = \frac{-5}{9}$ ,  $\frac{2}{-9} = \frac{-2}{9}$ . Vì  $-5 < -2$  nên  $\frac{-5}{9} < \frac{-2}{9}$ . Vậy  $\frac{5}{-9} < \frac{2}{-9}$ . (b)  $\frac{5}{-6} = \frac{-5}{6}$ ,  $\frac{-5}{6} = \frac{-5 \cdot 7}{6 \cdot 7} = \frac{-35}{42}$ ,  $\frac{-6}{7} = \frac{-6 \cdot 6}{7 \cdot 6} = \frac{-36}{42}$ . Vì  $-35 > -36$  nên  $\frac{-35}{42} > \frac{-36}{42}$ . Vậy  $\frac{5}{-6} > \frac{-6}{7}$ . (c)  $\frac{7}{-11} = \frac{-7}{11}$ ,  $\frac{8}{-11} = \frac{-8}{11}$ . Vì  $-7 > -8$  nên  $\frac{-7}{11} > \frac{-8}{11}$ . Vậy  $\frac{7}{-11} > \frac{8}{-11}$ . (d)  $\frac{-5}{3} = \frac{-5 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{-20}{12}$ ,  $\frac{5}{-4} = \frac{-5}{4} = \frac{-5 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{-15}{12}$ . Vì  $-20 < -15$  nên  $\frac{-20}{12} < \frac{-15}{12}$ . Vậy  $\frac{-5}{3} < \frac{5}{-4}$ .  $\square$

**Bài toán 85** (Thái et al., 2022, 1., p. 33). So sánh: (a)  $\frac{-9}{4}$ ,  $\frac{1}{3}$ . (b)  $\frac{-8}{3}$ ,  $\frac{4}{-7}$ . (c)  $\frac{9}{-5}$ ,  $\frac{7}{-10}$ .

**Giải.** (a)  $\frac{-9}{4} = \frac{-9 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{-27}{12}$ ,  $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{4}{12}$ . Vì  $-27 < 4$  nên  $\frac{-27}{12} < \frac{4}{12}$ . Vậy  $\frac{-9}{4} < \frac{1}{3}$ . (b)  $\frac{-8}{3} = \frac{-8 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{-56}{21}$ ,  $\frac{4}{-7} = \frac{-4}{7} = \frac{-4 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{-12}{21}$ . Vì  $-56 < -12$  nên  $\frac{-56}{21} < \frac{-12}{21}$ . Vậy  $\frac{-8}{3} < \frac{4}{-7}$ . (c)  $\frac{9}{-5} = \frac{-9}{5} = \frac{-9 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{-18}{10}$ ,  $\frac{7}{-10} = \frac{-7}{10}$ . Vì  $-18 < -7$  nên  $\frac{-18}{10} < \frac{-7}{10}$ . Vậy  $\frac{9}{-5} < \frac{7}{-10}$ .  $\square$

**Lưu ý 4** (Số âm  $< 0 < \text{số dương}$ ). Có thể giải (a) ngắn hơn như sau: Có  $\frac{-9}{4} < 0$ ,  $0 < \frac{1}{3}$ . Áp dụng tính chất bắc cầu của phép so sánh phân số, suy ra  $\frac{-9}{4} < \frac{1}{3}$ .

**Bài toán 86** (Thái et al., 2022, 2., p. 33). Viết các phân số sau theo thứ tự tăng dần: (a)  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{-1}{2}$ ,  $\frac{2}{7}$ . (b)  $\frac{12}{5}$ ,  $\frac{-7}{3}$ ,  $\frac{-11}{4}$ .

**Giải.** (a) BCNN(5, 2, 7) = 70,  $70 : 5 = 14$ ,  $70 : 2 = 35$ ,  $70 : 7 = 10$ . Quy đồng:  $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 14}{5 \cdot 14} = \frac{28}{70}$ ,  $\frac{-1}{2} = \frac{-1 \cdot 35}{2 \cdot 35} = \frac{-35}{70}$ ,  $\frac{2}{7} = \frac{2 \cdot 10}{7 \cdot 10} = \frac{20}{70}$ . Vì  $-35 < 20 < 28$  nên  $\frac{-35}{70} < \frac{20}{70} < \frac{28}{70}$ . Vậy  $\frac{-1}{2} < \frac{2}{7} < \frac{2}{5}$ . (b) BCNN(5, 3, 4) = 60,  $60 : 5 = 12$ ,  $60 : 3 = 20$ ,  $60 : 4 = 15$ . Quy đồng:  $\frac{12}{5} = \frac{12 \cdot 12}{5 \cdot 12} = \frac{144}{60}$ ,  $\frac{-7}{3} = \frac{-7 \cdot 20}{3 \cdot 20} = \frac{-140}{60}$ ,  $\frac{-11}{4} = \frac{-11 \cdot 15}{4 \cdot 15} = \frac{-165}{60}$ . Vì  $-165 < -140 < 144$  nên  $\frac{-165}{60} < \frac{-140}{60} < \frac{144}{60}$ . Vậy  $\frac{-11}{4} < \frac{-7}{3} < \frac{12}{5}$ .  $\square$

**Bài toán 87** (Thái et al., 2022, 3., p. 33). Hà thể hiện thời gian trong ngày của mình bằng biểu đồ tròn với  $\frac{1}{3}$  thời gian trong ngày để ngủ,  $\frac{1}{6}$  thời gian trong ngày cho hoạt động khác,  $\frac{7}{24}$  thời gian trong ngày để học ở trường,  $\frac{1}{12}$  thời gian trong ngày để ăn,  $\frac{1}{8}$  thời gian trong ngày để tự học. (a) Hỏi Hà dành thời gian cho hoạt động nào nhiều nhất? Ít nhất? (b) Sắp xếp các phân số này theo thứ tự giảm dần.

**Giải.** (a) Hà dành thời gian để ngủ nhiều nhất. Hà dành thời gian để ăn ít nhất. (b) BCNN(3, 6, 24, 12, 8) = 24,  $24 : 3 = 8$ ,  $24 : 6 = 4$ ,  $24 : 12 = 2$ ,  $24 : 8 = 3$ . Quy đồng:  $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{8}{24}$ ,  $\frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{4}{24}$ ,  $\frac{7}{24}$  không cần quy đồng,  $\frac{1}{12} = \frac{1 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{2}{24}$ ,  $\frac{1}{8} = \frac{1 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{3}{24}$ . Vì  $8 > 7 > 4 > 3 > 2$  nên  $\frac{8}{24} > \frac{7}{24} > \frac{4}{24} > \frac{3}{24} > \frac{2}{24}$ . Vậy các phân số này được sắp xếp theo thứ tự giảm dần:  $\frac{1}{3} > \frac{7}{24} > \frac{1}{6} > \frac{1}{8} > \frac{1}{12}$ .  $\square$

**Bài toán 88** (Thái et al., 2022, 5., p. 33). Tìm  $x, y \in \mathbb{Z}$ : (a)  $\frac{-11}{15} < \frac{x}{15} < \frac{y}{15} < \frac{-8}{15}$ . (b)  $\frac{-1}{3} < \frac{x}{36} < \frac{y}{18} < \frac{-1}{4}$ . (c)  $\frac{4}{-12} > \frac{x}{-12} > \frac{y}{-12} > \frac{7}{-12}$ . (d)  $\frac{-1}{4} > \frac{x}{x} > \frac{-1}{y} > \frac{1}{7}$ .

**Giải.** (a) Vì 4 phân số đều có cùng mẫu dương là 15 > 0 nên tử số càng lớn thì phân số càng lớn.  $\frac{-11}{15} < \frac{x}{15} < \frac{y}{15} < \frac{-8}{15} \Leftrightarrow -11 < x < y < -8$  mà  $x, y \in \mathbb{Z}$ , suy ra  $x = -10$ ,  $y = -9$ . (b) BCNN(3, 36, 18, 4) = 36,  $36 : 3 = 12$ ,  $36 : 18 = 2$ ,  $36 : 4 = 9$ . Quy đồng:  $\frac{-1}{3} = \frac{-1 \cdot 12}{3 \cdot 12} = \frac{-12}{36}$ ,  $\frac{x}{36}$  không cần quy đồng do có mẫu đã là mẫu chung,  $\frac{y}{18} = \frac{y \cdot 2}{18 \cdot 2} = \frac{2y}{36}$ ,  $\frac{-1}{4} = \frac{-1 \cdot 9}{4 \cdot 9} = \frac{-9}{36}$ . Có  $\frac{-12}{36} < \frac{x}{36} < \frac{2y}{36} < \frac{-9}{36} \Leftrightarrow -12 < x < 2y < -9$  mà  $x, y \in \mathbb{Z}$ , suy ra  $x = -11$ ,  $2y = -10$  hay  $y = -5$ . (c)  $\frac{4}{-12} > \frac{x}{-12} > \frac{y}{-12} > \frac{7}{-12} \Leftrightarrow \frac{-4}{12} < \frac{x}{12} < \frac{y}{12} < \frac{-7}{12} \Leftrightarrow -4 < x < y < -7$  mà  $x, y \in \mathbb{Z}$ , suy ra  $-x = -5$  hay  $x = 5$  &  $-y = -6$  hay  $y = 6$ . (d) Sử dụng  $a > b > 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ , có  $\frac{-1}{4} > \frac{-1}{x} > \frac{-1}{y} > \frac{1}{7} \Leftrightarrow \frac{1}{4} > \frac{1}{-x} > \frac{1}{-y} > \frac{1}{7} \Leftrightarrow 4 < -x < -y < 7$  mà  $x, y \in \mathbb{Z}$ , suy ra  $-x = 5$  hay  $x = -5$ ,  $-y = 6$  hay  $y = -6$ .  $\square$

**Tóm tắt kiến thức.** “**1** Trong 2 phân số khác nhau luôn có 1 phân số nhỏ hơn phân số kia. Nếu phân số  $\frac{a}{b}$  nhỏ hơn phân số  $\frac{c}{d}$  thì ta viết  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  hay  $\frac{c}{d} > \frac{a}{b}$ . Phân số lớn hơn 0 gọi là *phân số dương*, phân số nhỏ hơn 0 gọi là *phân số âm*. Nếu  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  &  $\frac{c}{d} < \frac{e}{f}$  thì  $\frac{a}{b} < \frac{e}{f}$ . Có thể thực hiện so sánh 2 phân số bằng cách: Quy đồng mẫu số (đưa về cùng mẫu dương) rồi so sánh tử số: Nếu  $m > 0$ ,  $a > b$  thì  $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$ . **2** Viết 1 phân số lớn hơn 1 thành tổng của 1 số nguyên dương & 1 phân số nhỏ hơn 1 (với tử & mẫu dương) rồi viết chúng liền nhau thì được 1 hỗn số dương.” – Thái, 2022, Chap. V, §2, pp. 32–33

**Bài toán 89** (Thái, 2022, Ví dụ 1, p. 33). So sánh các cặp phân số sau: (a)  $\frac{-5}{9}$  &  $\frac{9}{-5}$ . (b)  $-\frac{2}{3}$  &  $\frac{2}{3}$ .

**Giải.** (a)  $\frac{-5}{9} = \frac{-25}{45}$  &  $\frac{9}{-5} = \frac{-81}{45}$  mà  $\frac{-25}{45} > \frac{-81}{45}$ , suy ra  $\frac{-5}{9} > \frac{9}{-5}$ . (b)  $-\frac{2}{3} < 0 < \frac{2}{3}$ , suy ra  $-\frac{2}{3} < \frac{2}{3}$ .  $\square$

**Bài toán 90** (Thái, 2022, Ví dụ 2, p. 33). (a) Viết mỗi phân số sau thành hỗn số:  $\frac{47}{3}$ ,  $\frac{105}{100}$ . (b) Viết mỗi hỗn số sau thành phân số:  $14\frac{2}{3}$ ,  $4\frac{2}{5}$ .

**Giải.** (a)  $\frac{47}{3} = \frac{3 \cdot 15 + 2}{3} = \frac{3 \cdot 15}{3} + \frac{2}{3} = 15 + \frac{2}{3} = 15\frac{2}{3}$ .  $\frac{105}{100} = \frac{100 \cdot 1 + 5}{100} = \frac{100 \cdot 1}{100} + \frac{5}{100} = 1 + \frac{5}{100} = 1 + \frac{1}{20} = 1\frac{1}{20}$ . (b)  $14\frac{2}{3} = 14 + \frac{2}{3} = \frac{14 \cdot 3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{42 + 2}{3} = \frac{44}{3}$ .  $4\frac{2}{5} = 4 + \frac{2}{5} = \frac{4 \cdot 5}{5} + \frac{2}{5} = \frac{20 + 2}{5} = \frac{22}{5}$ .  $\square$

**Bài toán 91** (Thái, 2022, Ví dụ 3, p. 33). Tìm  $x \in \mathbb{N}$  biết: (a)  $2\frac{x}{7} = \frac{75}{35}$ . (b)  $2\frac{3}{x} = \frac{13}{x}$ .

**Giải.** (a) Vì  $\frac{75}{35} = \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$  nên  $2\frac{x}{7} = 2\frac{1}{7}$ . Vậy  $x = 1$ . (b) Điều kiện xác định (ĐKXD):  $x \neq 0$ . Vì  $2\frac{3}{x} = \frac{2x+3}{x}$  nên  $\frac{2x+3}{x} = \frac{13}{x}$  hay  $2x + 3 = 13$ . Vậy  $x = 5$ .  $\square$

**Bài toán 92** (Thái, 2022, 15., p. 34). So sánh: (a)  $\frac{3}{14}$  &  $\frac{-6}{14}$ . (b)  $\frac{7}{-12}$  &  $\frac{11}{-18}$ . (c)  $\frac{-4}{7}$  &  $\frac{4}{-10}$ . (d)  $\frac{-8}{15}$  &  $\frac{5}{-24}$ . (e)  $\frac{69}{-230}$  &  $\frac{-39}{143}$ . (f)  $\frac{7}{41}$  &  $\frac{13}{47}$ .

**Bài toán 93** (Thái, 2022, 16., p. 34). (1) Viết các phân số sau theo thứ tự tăng dần: (a)  $\frac{-7}{9}, \frac{3}{2}, \frac{-7}{5}, 0, \frac{-4}{-3}$ . (b)  $\frac{-2}{5}, \frac{5}{-6}, \frac{7}{12}, \frac{5}{-24}, \frac{17}{30}, \frac{-11}{20}$ . (2) Viết các phân số sau theo thứ tự giảm dần: (a)  $\frac{5}{14}, \frac{3}{-40}, \frac{-13}{-140}, \frac{8}{-35}$ . (b)  $\frac{3}{400}, \frac{-6}{217}, \frac{-7}{-284}, \frac{112}{-305}$ .

**Bài toán 94** (Thái, 2022, 17., p. 34). Tìm số nguyên thích hợp điền vào ô trống: (a)  $\frac{-12}{19} < \frac{\square}{19} < \frac{\square}{19} < \frac{\square}{19} < \frac{-8}{19}$ . (b)  $\frac{-1}{2} < \frac{\square}{24} < \frac{\square}{24} < \frac{\square}{24} < \frac{-1}{3}$ .

**Bài toán 95** (Thái, 2022, 18., p. 34). Viết các hỗn số thích hợp vào chỗ chấm: (a)  $4\text{m } 7\text{dm} = \dots \text{m}$ . (b)  $3\text{kg } 315\text{g} = \dots \text{kg}$ . (c)  $5\text{ giờ } 45\text{ phút} = \dots \text{giờ}$ . (d)  $21\text{m}^2 \text{ } 8\text{dm}^2 = \dots \text{m}^2$ .

**Bài toán 96** (Thái, 2022, 19., p. 34). Lúc 7 giờ 15 phút, 1 xe máy đi từ A đến B. Biết xe máy đi từ A đến B hết 1 giờ 20 phút. Xe máy đến B lúc mấy giờ? Viết kết quả dưới dạng hỗn số với đơn vị giờ.

**Bài toán 97** (Thái, 2022, 20., p. 34). Đức, Hòa, Bình tham gia 1 cuộc thi chạy 100m. Đức chạy mất  $\frac{3}{10}$  phút, Hòa chạy mất  $\frac{7}{15}$  phút, Bình chạy mất  $\frac{7}{30}$  phút. Ai chạy nhanh nhất?

**Bài toán 98** (Thái, 2022, 21., p. 35). 2 người cùng đi quãng đường như nhau từ nhà đến siêu thị. Người thứ nhất đi hết 32 phút, người thứ 2 đi hết 48 phút. Biết vận tốc của mỗi người không đổi. (a) So sánh quãng đường người thứ nhất đi trong 20 phút với quãng đường người thứ 2 đi trong 25 phút. (b) Người thứ 2 phải đi trong bao lâu để được quãng đường bằng người thứ nhất đi trong 24 phút?

**Bài toán 99** (Thái, 2022, 22., p. 35). Theo 1 khảo sát lấy ý kiến bình chọn Quốc hoa được công bố vào tháng 1/2011,  $\frac{62}{100}$  số người chọn hoa sen,  $\frac{3}{20}$  số người chọn hoa mai,  $\frac{4}{25}$  số người chọn hoa đào. (a) Sắp xếp các phân số trên theo thứ tự giảm dần. (b) Loài hoa nào được bình chọn nhiều nhất?

**Bài toán 100** (Thái, 2022, 23., p. 35). Phân số chỉ số phần nước trong 1 số loại củ, quả được cho ở bảng sau:

Loại củ, quả	Củ cải trắng	Mâm xôi	Dưa vàng	Đào
Số phần nước	$\frac{19}{20}$	$\frac{87}{100}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{22}{25}$

Củ, quả nào có lượng nước chiếm tỷ lệ cao nhất? Thấp nhất?

**Bài toán 101** (Thái, 2022, 24., p. 35). Tìm phân số có mẫu bằng 7 biết khi cộng tử với 16 & nhân mẫu với 5 thì giá trị của phân số đó không thay đổi.

**Bài toán 102** (Thái, 2022, 25., p. 35). Theo 1 thống kê, trong tổng số lượng sách được người đọc yêu thích: sách kỹ năng sống chiếm  $\frac{1}{4}$ , sách văn học chiếm  $\frac{3}{20}$ , sách nuôi dạy con chiếm  $\frac{3}{25}$ , sách khoa học công nghiệp chiếm  $\frac{31}{100}$ , sách kinh doanh đầu tư chiếm  $\frac{17}{100}$ . Sách nào được nhiều bạn đọc yêu thích nhất?

**Bài toán 103** (Thái, 2022, 26., p. 35). Tìm  $x, y \in \mathbb{Z}$  sao cho  $\frac{1}{8} < \frac{x}{18} < \frac{y}{24} < \frac{2}{9}$ .

“Để so sánh 2 phân số có tử & mẫu đều dương, ngoài cách quy đồng tử hoặc quy đồng mẫu, người ta thường dùng 1 phân số trung gian & sử dụng tính chất bắc cầu của bất đẳng thức.

Thường sử dụng các tính chất sau: (a) Trong 2 phân số cùng tử, phân số nào có mẫu nhỏ hơn thì phân số đó lớn hơn. (b) Trong 2 phân số nhỏ hơn 1, phân số nào có phần bù đến 1 nhỏ hơn thì phân số đó lớn hơn:  $1 - \frac{a}{b} < 1 - \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ . (c) Nếu  $0 < a < 1$  &  $m < n$  thì  $a^m > a^n$ .” – Bình, 2022, Chap. 1, §2, p. 8

**Bài toán 104** (Tuyên, 2022, Ví dụ 52, p. 48). So sánh 2 phân số  $\frac{-101}{-100}$  &  $\frac{200}{201}$ .

*Giải.*  $\frac{-101}{-100} = \frac{101}{100} > \frac{100}{100} = 1 = \frac{201}{201} > \frac{200}{201}$ . Vậy  $\frac{-101}{-100} > \frac{200}{201}$ . □

**Bài toán 105** (Mở rộng Tuyên, 2022, Ví dụ 52, p. 48). Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ ,  $a > b > 0$ ,  $d > c > 0$ . So sánh:  $\frac{\pm a}{\pm b}$  &  $\frac{\pm c}{\pm d}$ .

**Bài toán 106** (Tuyên, 2022, Ví dụ 53, p. 48). Sắp xếp các phân số sau theo thứ tự tăng dần:  $\frac{5}{8}, \frac{9}{16}, \frac{2}{-3}, \frac{-7}{12}$ .

**Bài toán 107** (Bình, 2022, Ví dụ 5, p. 8). So sánh  $A = \frac{10^{15}+1}{10^{16}+1}$  &  $B = \frac{10^{16}+1}{10^{17}+1}$ .

**Bài toán 108** (Bình, 2022, Ví dụ 6, p. 9). 1 phân số có tử & mẫu đều là số nguyên dương. Nếu cộng tử & mẫu của phân số đó với cùng  $n \in \mathbb{N}^*$  thì phân số thay đổi thế nào?

**Bài toán 109** (Bình, 2022, Ví dụ 7, p. 9). So sánh  $\left(\frac{1}{32}\right)^7$  &  $\left(\frac{1}{16}\right)^9$ .

**Bài toán 110** (Bình, 2022, Ví dụ 8, p. 9). Chứng minh  $95^8$  là 1 số có 16 chữ số khi viết kết quả của nó trong hệ thập phân.

**Bài toán 111** (Bình, 2022, Ví dụ 9, p. 10). Cho  $a, b \in \mathbb{N}^*$  thỏa  $\frac{5}{7} < \frac{a}{b} < \frac{9}{11}$ . Tìm  $a + b$  khi  $b$  nhỏ nhất.

**Bài toán 112** (Bình, 2022, 20., p. 10). So sánh  $a, b \in \mathbb{N}$  biết  $\frac{1+2+3+\dots+a}{a} < \frac{1+2+3+\dots+b}{b}$ .

**Bài toán 113** (Bình, 2022, 21., p. 10). So sánh: (a)  $\frac{18}{91}$  &  $\frac{23}{114}$ . (b)  $\frac{21}{52}$  &  $\frac{213}{523}$ . (c)  $\frac{1313}{9191}$  &  $\frac{1111}{7373}$ .

- Bài toán 114** (Bình, 2022, 22., p. 10). So sánh các phân số sau, với  $n \in \mathbb{N}$ : (a)  $\frac{n}{n+1}$  &  $\frac{n+2}{n+3}$ . (b)  $\frac{n+1}{n+4}$  &  $\frac{n}{n+5}$ . (c)  $\frac{n}{2n+1}$  &  $\frac{3n+1}{6n+3}$ .
- Bài toán 115** (Bình, 2022, 23., p. 11). So sánh  $A$  &  $B$ : (a)  $A = \frac{20}{39} + \frac{22}{27} + \frac{18}{43}$ ,  $B = \frac{14}{39} + \frac{22}{29} + \frac{18}{41}$ . (b)  $A = \frac{3}{8^3} + \frac{7}{8^4}$ ,  $B = \frac{7}{8^3} + \frac{3}{8^4}$ . (c)  $A = \frac{10^7+5}{10^7-8}$ ,  $B = \frac{10^8+6}{10^8-7}$ . (d)  $A = \frac{10^{1992}+1}{10^{1991}+1}$ ,  $B = \frac{10^{1993}+1}{10^{1992}+1}$ .
- Bài toán 116** (Bình, 2022, 24., p. 11). Tìm  $x \in \mathbb{N}$  sao cho  $\frac{4}{11} < \frac{x}{20} < \frac{5}{11}$ .
- Bài toán 117** (Bình, 2022, 25., p. 11). Tìm 2 phân số có các mẫu bằng 9, các tử là 2 số tự nhiên liên tiếp sao cho phân số  $\frac{4}{7}$  nằm giữa 2 phân số đó.
- Bài toán 118** (Bình, 2022, 26., p. 11). Tìm 2 phân số có các tử bằng 1, các mẫu là 2 số tự nhiên liên tiếp sao cho phân số  $\frac{13}{84}$  nằm giữa 2 phân số đó.
- Bài toán 119** (Bình, 2022, 27., p. 11). Tìm 2 phân số có mẫu bằng 21 biết nó lớn hơn  $\frac{5}{7}$  & nhỏ hơn  $\frac{5}{6}$ .
- Bài toán 120** (Bình, 2022, 28., p. 11). Tìm phân số  $\frac{a}{b}$  sao cho  $a$  là số tự nhiên nhỏ nhất thỏa mãn  $\frac{4}{15} < \frac{a}{b} < \frac{1}{3}$ .
- Bài toán 121** (Bình, 2022, 29., p. 11). Tìm phân số  $\frac{a}{b}$  lớn nhất nhỏ hơn 1 với  $a, b$  là các số nguyên dương có 1 chữ số.
- Bài toán 122** (Bình, 2022, 30., p. 11). So sánh 2 phân số  $(\frac{1}{243})^9$  &  $(\frac{1}{83})^{13}$ .

### 3 Hỗn Số Dương

Hỗn số dương = hỗn hợp của số nguyên dương & phân số dương.

**Mệnh đề 2** (Hỗn số dương). Viết 1 phân số lớn hơn 1 (i.e., tử > mẫu > 0) thành tổng của 1 số nguyên dương & 1 phân số nhỏ hơn 1 (với tử & mẫu dương) rồi viết chúng liền nhau thì được 1 hỗn số dương

- Bài toán 123** (Bình, 2022, Ví dụ 2, p. 32). (a) Viết phân số  $\frac{7}{4}$  dưới dạng tổng của 1 số nguyên dương & 1 phân số bé hơn 1. (b) Viết phân số  $\frac{21}{5}$  dưới dạng hỗn số.

*Giải.* (a)  $\frac{7}{4} = \frac{4+3}{4} = \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4} = 1\frac{3}{4}$ . (b)  $\frac{21}{5} = \frac{5 \cdot 4 + 1}{5} = \frac{5 \cdot 4}{5} + \frac{1}{5} = 4 + \frac{1}{5} = 4\frac{1}{5}$ . □

- Bài toán 124** (Bình, 2022, Ví dụ 3, 2, p. 33). (a) Viết hỗn số  $2\frac{3}{5}$  thành phân số. (b) Viết mỗi phân số sau thành hỗn số:  $\frac{14}{3}$ ,  $\frac{22}{7}$ . (c) Viết mỗi hỗn số sau thành phân số:  $2\frac{3}{4}$ ,  $5\frac{1}{6}$ .

*Giải.* (a)  $2\frac{3}{5} = 2 + \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5}{5} + \frac{3}{5} = \frac{10+3}{5} = \frac{13}{5}$ . (b)  $\frac{14}{3} = \frac{3 \cdot 4 + 2}{3} = \frac{3 \cdot 4}{3} + \frac{2}{3} = 4 + \frac{2}{3} = 4\frac{2}{3}$ ,  $\frac{22}{7} = \frac{7 \cdot 3 + 1}{7} = \frac{7 \cdot 3}{7} + \frac{1}{7} = 3 + \frac{1}{7} = 3\frac{1}{7}$ . (c)  $2\frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{11}{4}$ ,  $5\frac{1}{6} = 5 + \frac{1}{6} = \frac{5 \cdot 6}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5 \cdot 6 + 1}{6} = \frac{31}{6}$ . □

- Bài toán 125** (Thái et al., 2022, 4., p. 33). (a) Viết các số đo thời gian dưới dạng hỗn số với đơn vị là giờ: 2 giờ 15 phút, 10 giờ 20 phút. (b) Viết các số đo diện tích sau dưới dạng hỗn số với đơn vị là hecta biết 1ha = 100a: 1ha7a, 3ha50a,

*Giải.* (a) Vì 1 giờ = 60 phút nên 1 phút =  $\frac{1}{60}$  giờ, suy ra 2 giờ 15 phút =  $2 + \frac{15}{60} = 2 + \frac{15:15}{60:15} = 2 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$  giờ, 10 giờ 20 phút =  $10 + \frac{20}{60} = 10 + \frac{20:20}{60:20} = 10 + \frac{1}{3} = 10\frac{1}{3}$  giờ. (b) Vì 1ha = 100a nên 1a =  $\frac{1}{100}$ ha, suy ra 1ha7a =  $1 + \frac{7}{100} = 1\frac{7}{100}$ ha, 3ha50a =  $3 + \frac{50}{100} = 3 + \frac{50:50}{100:50} = 3 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$ ha. □

- Bài toán 126** (Chuyển đổi phân số & hỗn số dương). (a) Khi nào 1 phân số có thể chuyển thành 1 hỗn số dương? (b) Ngược lại, khi nào 1 hỗn số dương có thể chuyển thành 1 phân số? (c) Nếu định nghĩa 1 hỗn số âm là 1 số đối của hỗn số dương tương ứng thì khi nào 1 hỗn số âm có thể chuyển thành 1 phân số?

*Giải.* (a) 1 phân số muốn chuyển thành 1 hỗn số dương thì tử & mẫu của phân số đó phải cùng dấu (để phân số đó dương) & tử phải lớn hơn mẫu (để phân số đó > 1). Nói cách khác, 1 phân số có thể chuyển thành 1 hỗn số dương khi & chỉ khi phân số đó lớn hơn 1 (phân số lớn hơn 1 thì tự động là phân số dương vì tính chất bắc cầu  $\frac{a}{b} > 1 > 0$ ). (b) Mọi hỗn số dương đều có thể chuyển thành phân số nhờ công thức  $a\frac{b}{c} = a + \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$ ,  $\forall a, b, c \in \mathbb{N}^*$ . (c) Mọi hỗn số âm đều có thể chuyển thành phân số nhờ công thức  $-a\frac{b}{c} = -(a + \frac{b}{c}) = -(\frac{ac}{c} + \frac{b}{c}) = -\frac{ac+b}{c}$ ,  $\forall a, b, c \in \mathbb{N}^*$ . □

**Lưu ý 5** (Tổng của 2 hỗn số đối nhau bằng 0). Tổng của 1 hỗn số dương & hỗn số âm mà là số đối của hỗn số dương đó vẫn bằng 0. Thật vậy:  $a\frac{b}{c} + (-a\frac{b}{c}) = a + \frac{b}{c} - (a + \frac{b}{c}) = a + \frac{b}{c} + (-a) + (-\frac{b}{c}) = (a + (-a)) + (\frac{b}{c} + (-\frac{b}{c})) = 0 + 0 = 0$ ,  $\forall a, b, c \in \mathbb{N}^*$ . Hoặc có thể tính ngắn gọn hơn nhờ lời giải câu (c) bài toán trên:  $a\frac{b}{c} + (-a\frac{b}{c}) = \frac{ac+b}{c} + (-\frac{ac+b}{c}) = 0$ ,  $\forall a, b, c \in \mathbb{N}^*$  (tổng của 2 phân số đối nhau bằng 0).

- Bài toán 127** (Công thức hỗn số dương). Chứng minh:

$$\frac{ac+b}{c} = a + \frac{b}{c} = a\frac{b}{c}, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{N}^*,$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\lfloor \frac{a}{b} \rfloor b + \{\frac{a}{b}\}}{b} = \left[ \frac{a}{b} \right] + \frac{\{\frac{a}{b}\}}{b} = \left[ \frac{a}{b} \right] \frac{\{\frac{a}{b}\}}{b}, \quad \forall a, b \in \mathbb{N}^*, a > b.$$

## 4 Phép Cộng, Phép Trừ Phân Số

### 4.1 Phép Cộng Phân Số

#### 4.1.1 Quy tắc cộng phân số

**Mệnh đề 3** (Cộng các phân số cùng mẫu). *Muốn cộng 2 hay nhiều phân số có cùng mẫu, ta cộng các tử & giữ nguyên các mẫu:*

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}, \forall a, b, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0,$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b} = \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b} + \dots + \frac{a_n}{b} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{b}, \forall a_i, b \in \mathbb{Z}, \forall i = 1, 2, \dots, n, b \neq 0.$$

**Ví dụ 2.** (a)  $\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{1+3}{5} = \frac{4}{5}$ . (b)  $\frac{-1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{-1+3}{5} = \frac{2}{5}$ . (c)  $\frac{2}{-3} + \frac{-7}{-3} = \frac{2+(-7)}{-3} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$ .

**Bài toán 128** (Thái et al., 2022, 1, p. 34). *Tính:  $\frac{11}{-9} + \frac{5}{-6}$ .*

*Hint.* Trước hết, chuyển các mẫu âm của các phân số này thành mẫu dương bằng quy tắc  $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$ , rồi quy đồng mẫu số để 2 phân số có cùng mẫu, rồi cộng 2 phân số theo quy tắc cộng 2 phân số có cùng mẫu.

*Giải.* Quy đồng mẫu 2 phân số trước hết, chuyển các phân số về mẫu dương:  $\frac{11}{-9} = \frac{-11}{9}$ ,  $\frac{5}{-6} = \frac{-5}{6}$ , BCNN(9, 6) = 18,  $18 : 9 = 2$ ,  $18 : 6 = 3$ .  $\frac{11}{-9} = \frac{-11 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{-22}{18}$ ,  $\frac{5}{-6} = \frac{-5 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{-15}{18}$ . Suy ra  $\frac{11}{-9} + \frac{5}{-6} = \frac{-22}{18} + \frac{-15}{18} = \frac{-22+(-15)}{18} = \frac{-37}{18}$ . Vậy  $\frac{11}{-9} + \frac{5}{-6} = \frac{-37}{18}$ .  $\square$

**Lưu ý 6.** *Khi tính toán với các phân số, luôn chuyển các mẫu âm thành các mẫu dương bằng cách sử dụng công thức:  $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} = -\frac{a}{b}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ .*

**Mệnh đề 4** (Cộng các phân số khác mẫu). *Muốn cộng 2 hay nhiều phân số không cùng mẫu, ta quy đồng mẫu những phân số đó rồi cộng các tử & giữ nguyên mẫu chung.*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot \frac{\text{BCNN}(b,d)}{b}}{\text{BCNN}(b,d)} + \frac{c \cdot \frac{\text{BCNN}(b,d)}{d}}{\text{BCNN}(b,d)} = \frac{a \cdot \frac{\text{BCNN}(b,d)}{b} + c \cdot \frac{\text{BCNN}(b,d)}{d}}{\text{BCNN}(b,d)}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}, bd \neq 0,$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i \cdot \frac{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}{b_i}}{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}{b_i}}{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}, \forall a_i, b_i \in \mathbb{Z}, b_i \neq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Công thức này nhìn lướt qua có vẻ phức tạp nhưng thực ra dễ hiểu bằng cách chú ý ở phân số  $\frac{a}{b}$ , ta đã nhân cả tử & mẫu cho thừa số phụ  $\frac{\text{BCNN}(b,d)}{b}$ , còn ở phân số  $\frac{c}{d}$ , ta đã nhân cả tử & mẫu cho thừa số phụ  $\frac{\text{BCNN}(b,d)}{d}$ . Không dùng ký hiệu tổng  $\sigma$ , công thức thứ 2 có thể viết cụ thể hơn như sau:

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} &= \frac{a_1 \cdot \frac{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}{b_1}}{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)} + \frac{a_2 \cdot \frac{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}{b_2}}{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)} + \dots + \frac{a_n \cdot \frac{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}{b_n}}{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)} \\ &= \frac{a_1 \cdot \frac{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}{b_1} + a_2 \cdot \frac{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}{b_2} + \dots + a_n \cdot \frac{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}{b_n}}{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}, \forall a_i, b_i \in \mathbb{Z}, b_i \neq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

**Bài toán 129** (Thái et al., 2022, Ví dụ 1, 1, p. 35). *Tính: (a)  $\frac{2}{3} + \frac{2}{-3}$ . (b)  $\frac{-5}{6} + \frac{-3}{8}$ . (c)  $\frac{-3}{7} + \frac{2}{7}$ . (d)  $\frac{-4}{9} + \frac{2}{-3}$ .*

*Giải.* (a)  $\frac{2}{3} + \frac{2}{-3} = \frac{2}{3} + \frac{-2}{3} = \frac{2+(-2)}{3} = \frac{0}{3} = 0$ . (b)  $\frac{-5}{6} + \frac{-3}{8} = \frac{-5 \cdot 4}{6 \cdot 4} + \frac{-3 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{-20}{24} + \frac{-9}{24} = \frac{-20-9}{24} = \frac{-29}{24}$ . (c)  $\frac{-3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{-3+2}{7} = \frac{-1}{7}$ . (d)  $\frac{-4}{9} + \frac{2}{-3} = \frac{-4}{9} + \frac{-2}{3} = \frac{-4}{9} + \frac{-2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{-4}{9} + \frac{-6}{9} = \frac{-4-6}{9} = \frac{-10}{9}$ .  $\square$

#### 4.1.2 Tính chất của phép cộng phân số

Giống như phép cộng số tự nhiên, phép cộng phân số cũng có các tính chất: giao hoán, kết hợp, cộng với số 0:

- *Giao hoán:*  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$ ,  $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}, bd \neq 0$  (chú ý  $bd \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 0 \text{ \& } d \neq 0$ ).
- *Kết hợp:*  $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$ ,  $\forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}, bdf \neq 0$  (chú ý  $bdf \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 0 \text{ \& } d \neq 0 \text{ \& } f \neq 0$ ).
- *Cộng với số 0:*  $\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ .

**Bài toán 130** (Thái et al., 2022, Ví dụ 2, 2, p. 35). *Tính hợp lý: (a)  $\frac{3}{13} + \frac{-3}{7} + \frac{10}{13} + \frac{-4}{7}$ . (b)  $\frac{-5}{9} + \frac{4}{11} + \frac{7}{11}$ . (c)  $\frac{-2}{5} + \frac{3}{8} + \frac{-3}{5} + \frac{13}{8}$ .*

*Giải.* (a)  $\frac{3}{13} + \frac{-3}{7} + \frac{10}{13} + \frac{-4}{7} = \frac{3}{13} + \frac{10}{13} + \frac{-3}{7} + \frac{-4}{7} = \left(\frac{3}{13} + \frac{10}{13}\right) + \left(\frac{-3}{7} + \frac{-4}{7}\right) = \frac{3+10}{13} + \frac{-3+(-4)}{7} = 1 + (-1) = 0$ . (b)  $\frac{-5}{9} + \frac{4}{11} + \frac{7}{11} = \frac{-5}{9} + \left(\frac{4}{11} + \frac{7}{11}\right) = \frac{-5}{9} + \frac{4+7}{11} = \frac{-5}{9} + \frac{11}{11} = \frac{-5}{9} + 1 = \frac{-5}{9} + \frac{9}{9} = \frac{-5+9}{9} = \frac{4}{9}$ . (c)  $\frac{-2}{5} + \frac{3}{8} + \frac{-3}{5} + \frac{13}{8} = \left(\frac{-2}{5} + \frac{-3}{5}\right) + \left(\frac{3}{8} + \frac{13}{8}\right) = \frac{-2+(-3)}{5} + \frac{3+13}{8} = \frac{-5}{5} + \frac{16}{8} = -1 + 2 = 1$ .  $\square$

## 4.2 Phép Trừ Phân Số

### 4.2.1 Số đối của 1 phân số

Giống như số nguyên, mỗi phân số đều có số đối sao cho tổng của 2 số đó bằng 0.

**Định nghĩa 4** (Số đối của phân số). Số đối của phân số  $\frac{a}{b}$  ký hiệu là  $-\frac{a}{b}$ . Có:  $\frac{a}{b} + (-\frac{a}{b}) = 0, \forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ .

Có:  $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}, \forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ , i.e., dấu  $-$  có thể đặt trước 1 phân số, cũng có thể đem lên tử, hoặc đem xuống mẫu thì phân số vẫn không đổi giá trị. Số đối của  $-\frac{a}{b}$  là  $\frac{a}{b}$ , i.e.,  $-(-\frac{a}{b}) = \frac{a}{b}, \forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ .

**Ví dụ 3.** Số đối của phân số  $\frac{2}{5}$  là  $-\frac{2}{5}$ . Số đối của phân số  $\frac{-3}{7}$  là  $-(\frac{-3}{7}) = \frac{-(-3)}{7} = \frac{3}{7}$ .

### 4.2.2 Quy tắc trừ phân số

**Mệnh đề 5** (Trừ các phân số cùng mẫu). Muốn trừ 2 hay nhiều phân số có cùng mẫu, ta trừ tử của số bị trừ cho tử của số trừ giữ nguyên mẫu:

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}, \forall a, b \in \mathbb{Z}, m \neq 0.$$

Có thể ghi gộp lại quy tắc cộng/trừ 2 hay nhiều phân số cùng mẫu như sau (với các dấu  $+$ ,  $-$  được sắp xếp tương ứng với dấu của biểu thức ban đầu):

$$\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} = \frac{a \pm b}{m}, \forall a, b \in \mathbb{Z}, m \neq 0,$$
$$\sum_{i=1}^n \pm \frac{a_i}{b} = \pm \frac{a_1}{b} \pm \frac{a_2}{b} \pm \dots \pm \frac{a_n}{b} = \frac{\pm a_1 \pm a_2 + \dots \pm a_n}{b} = \frac{\sum_{i=1}^n \pm a_i}{b}, \forall a_i, b \in \mathbb{Z}, \forall i = 1, 2, \dots, n, b \neq 0.$$

**Ví dụ 4.** (a)  $\frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{4-3}{5} = \frac{1}{5}$ . (b)  $\frac{-1}{5} - \frac{3}{5} = \frac{-1-3}{5} = \frac{-4}{5}$ .

**Bài toán 131** (Thái et al., 2022, 3, p. 36). Tính:  $\frac{13}{-9} - \frac{7}{-6}$ .

*Hint.* Trước hết, chuyển các mẫu âm của các phân số này thành mẫu dương bằng quy tắc  $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$ , rồi quy đồng mẫu số để 2 phân số có cùng mẫu, rồi trừ 2 phân số theo quy tắc trừ 2 phân số có cùng mẫu.

*Giải.* Quy đồng mẫu 2 phân số:  $\frac{13}{-9} = \frac{-13}{9}$ ,  $\frac{7}{-6} = \frac{-7}{6}$ , BCNN(9,6) = 18,  $18 : 9 = 2$ ,  $18 : 6 = 3$ ,  $\frac{13}{-9} = \frac{-13 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{-26}{18}$ ,  $\frac{7}{-6} = \frac{-7 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{-21}{18}$ . Suy ra  $\frac{13}{-9} - \frac{7}{-6} = \frac{-26}{18} - \frac{-21}{18} = \frac{-26-(-21)}{18} = \frac{-5}{18}$ . Vậy  $\frac{13}{-9} - \frac{7}{-6} = \frac{-5}{18}$ .  $\square$

s

**Mệnh đề 6** (Trừ các phân số khác mẫu). Muốn trừ 2 phân số không cùng mẫu, ta quy đồng mẫu những phân số đó rồi trừ tử của số bị trừ cho tử của số trừ giữ nguyên mẫu chung.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot \frac{\text{BCNN}(b,d)}{b}}{\text{BCNN}(b,d)} - \frac{c \cdot \frac{\text{BCNN}(b,d)}{d}}{\text{BCNN}(b,d)} = \frac{a \cdot \frac{\text{BCNN}(b,d)}{b} - c \cdot \frac{\text{BCNN}(b,d)}{d}}{\text{BCNN}(b,d)}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}, bd \neq 0,$$
$$\sum_{i=1}^n \pm \frac{a_i}{b_i} = \sum_{i=1}^n \pm \frac{a_i \cdot \frac{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}{b_i}}{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)} = \frac{\sum_{i=1}^n \pm a_i \cdot \frac{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}{b_i}}{\text{BCNN}(b_1, b_2, \dots, b_n)}, \forall a_i, b_i \in \mathbb{Z}, b_i \neq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

**Bài toán 132** (Thái et al., 2022, Ví dụ 4, 3, p. 37). Tính: (a)  $\frac{1}{3} - \frac{2}{-3}$ . (b)  $\frac{-5}{6} - \frac{-7}{8}$ . (c)  $\frac{7}{-10} - \frac{9}{10}$ .

*Giải.* (a)  $\frac{1}{3} - \frac{2}{-3} = \frac{1}{3} - \frac{-2}{3} = \frac{1-(-2)}{3} = \frac{3}{3} = 1$ . (b)  $\frac{-5}{6} - \frac{-7}{8} = \frac{-5 \cdot 4}{6 \cdot 4} - \frac{-7 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{-20}{24} - \frac{-21}{24} = \frac{-20-(-21)}{24} = \frac{1}{24}$ . (c)  $\frac{7}{-10} - \frac{9}{10} = \frac{-7}{10} - \frac{9}{10} = \frac{-7-9}{10} = \frac{-16}{10} = \frac{-8}{5}$ .  $\square$

**Bài toán 133** (Thái et al., 2022, 4, p. 37). (a) Phân số  $\frac{2}{5}$  có phải là số đối của phân số  $\frac{2}{-5}$  không? (b) Tính & so sánh:  $\frac{-3}{7} - \frac{2}{-5}$  &  $\frac{-3}{7} + \frac{2}{5}$ .

*Giải.* (a) Phân số  $\frac{2}{5}$  là số đối của phân số  $\frac{2}{-5}$  vì  $-\frac{2}{5} = \frac{2}{-5}$ . (b)  $\frac{-3}{7} - \frac{2}{-5} = \frac{-3}{7} - \frac{-2}{5} = \frac{-3}{7} - \frac{-2}{5} = \frac{-3 \cdot 5}{7 \cdot 5} - \frac{-2 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{-15}{35} - \frac{-14}{35} = \frac{-15-(-14)}{35} = \frac{-1}{35}$ ,  $\frac{-3}{7} + \frac{2}{5} = \frac{-3 \cdot 5}{7 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{-15}{35} + \frac{14}{35} = \frac{-15+14}{35} = \frac{-1}{35}$ . Vậy  $\frac{-3}{7} - \frac{2}{-5} = \frac{-3}{7} + \frac{2}{5} = \frac{-1}{35}$ .  $\square$

**Mệnh đề 7.** Muốn trừ 2 phân số, ta cộng số bị trừ với số đối của số trừ:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \left(-\frac{c}{d}\right), \forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}, bd \neq 0.$$

**Bài toán 134** (Thái et al., 2022, Ví dụ 5, 4, p. 37). Tính: (a)  $\frac{2}{-9} - \frac{5}{-12}$ . (b)  $\frac{7}{12} - \frac{-9}{20}$ .

*Giải.* (a)  $\frac{2}{-9} - \frac{5}{-12} = \frac{-2}{9} + \frac{5}{12} = \frac{-2 \cdot 4}{9 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{-8}{36} + \frac{15}{36} = \frac{-8+15}{36} = \frac{7}{36}$ . (b)  $\frac{7}{12} - \frac{-9}{20} = \frac{7}{12} + \frac{9}{20} = \frac{7 \cdot 5}{12 \cdot 5} + \frac{9 \cdot 3}{20 \cdot 3} = \frac{35}{60} + \frac{27}{60} = \frac{35+27}{60} = \frac{62}{60} = \frac{31}{30}$ .  $\square$



### 4.3 Quy tắc dấu ngoặc

Quy tắc dấu ngoặc đối với phân số giống như quy tắc dấu ngoặc đối với số nguyên.

**Bài toán 135** (Thái et al., 2022, Ví dụ 6, 5, p. 37). *Tính hợp lý: (a)  $\frac{14}{13} + (\frac{-1}{13} - \frac{19}{20})$ . (b)  $\frac{-24}{17} - (\frac{-7}{17} - \frac{1}{16})$ . (c)  $\frac{-2}{49} - (\frac{47}{49} + \frac{5}{-3})$ .*

*Giải.* (a)  $\frac{14}{13} + (\frac{-1}{13} - \frac{19}{20}) = \frac{14}{13} + \frac{-1}{13} - \frac{19}{20} = (\frac{14}{13} + \frac{-1}{13}) - \frac{19}{20} = \frac{14-1}{13} - \frac{19}{20} = \frac{13}{13} - \frac{19}{20} = 1 - \frac{19}{20} = \frac{20}{20} - \frac{19}{20} = \frac{20-19}{20} = \frac{1}{20}$ . (b)  $\frac{-24}{17} - (\frac{-7}{17} - \frac{1}{16}) = \frac{-24}{17} - \frac{-7}{17} + \frac{1}{16} = (\frac{-24}{17} + \frac{7}{17}) + \frac{1}{16} = \frac{-24+7}{17} + \frac{1}{16} = \frac{-17}{17} + \frac{1}{16} = -1 + \frac{1}{16} = \frac{-16}{16} + \frac{1}{16} = \frac{-16+1}{16} = \frac{-15}{16}$ . (c)  $\frac{-2}{49} - (\frac{47}{49} + \frac{5}{-3}) = \frac{-2}{49} - \frac{47}{49} - \frac{5}{-3} = (\frac{-2}{49} - \frac{47}{49}) + \frac{5}{3} = \frac{-2-47}{49} + \frac{5}{3} = \frac{-49}{49} + \frac{5}{3} = -1 + \frac{5}{3} = \frac{-3}{3} + \frac{5}{3} = \frac{-3+5}{3} = \frac{2}{3}$ .  $\square$

**Bài toán 136** (Thái et al., 2022, 1., p. 38). *Tính: (a)  $\frac{-2}{9} + \frac{7}{-9}$ . (b)  $\frac{1}{-6} + \frac{13}{-15}$ . (c)  $\frac{5}{-6} + \frac{-5}{12} + \frac{7}{18}$ .*

**Bài toán 137** (Thái et al., 2022, 2., p. 38). *Tính hợp lý: (a)  $\frac{2}{9} + \frac{-3}{10} + \frac{-7}{10}$ . (b)  $\frac{-11}{6} + \frac{2}{5} + \frac{-1}{6}$ . (c)  $\frac{-5}{8} + \frac{12}{7} + \frac{13}{8} + \frac{2}{7}$ .*

**Bài toán 138** (Thái et al., 2022, 3., p. 38). *Tìm số đối của mỗi phân số sau:  $\frac{9}{25}$ ,  $\frac{-8}{27}$ ,  $-\frac{15}{31}$ ,  $\frac{-3}{-5}$ ,  $\frac{5}{-6}$ .*

**Bài toán 139** (Thái et al., 2022, 4., p. 38). *Tính: (a)  $\frac{5}{16} - \frac{5}{24}$ . (b)  $\frac{2}{11} + (\frac{-5}{11} - \frac{9}{11})$ . (c)  $\frac{1}{10} - (\frac{1}{12} - \frac{1}{15})$ .*

**Bài toán 140** (Thái et al., 2022, 5., p. 38). *Tính hợp lý: (a)  $\frac{27}{13} - \frac{106}{111} + \frac{-5}{111}$ . (b)  $\frac{12}{11} - \frac{-7}{19} + \frac{12}{19}$ . (c)  $\frac{5}{17} - \frac{25}{31} + \frac{12}{17} + \frac{-6}{31}$ .*

**Bài toán 141** (Thái et al., 2022, 6., p. 38). *Tìm  $x$ : (a)  $x - \frac{5}{6} = \frac{1}{2}$ . (b)  $\frac{-3}{4} - x = \frac{-7}{12}$ .*

**Bài toán 142** (Thái et al., 2022, 7., p. 38). *1 xí nghiệp trong tháng Giêng đạt  $\frac{3}{8}$  kế hoạch của Quý I, tháng 2 đạt  $\frac{2}{7}$  kế hoạch của Quý I. Tháng 3 xí nghiệp phải đạt được bao nhiêu phần kế hoạch của Quý I?*

**Bài toán 143** (Thái et al., 2022, 8., p. 38). *4 tổ của lớp 6A đóng góp sách cho góc thư viện như sau: tổ I góp  $\frac{1}{4}$  số sách của lớp, tổ II góp  $\frac{9}{40}$  số sách của lớp, tổ III góp  $\frac{1}{5}$  số sách của lớp, tổ IV góp phần sách còn lại. Tổ IV đã góp bao nhiêu phần số sách của lớp?*

**Tóm tắt kiến thức.** “**1** *Phép cộng 2 phân số*: 2 phân số cùng mẫu:  $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}$ ,  $\forall a, b, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$ . Nếu 2 phân số khác mẫu, ta quy đồng về cùng mẫu rồi cộng các tử & giữ nguyên mẫu chung. Tính chất của phép cộng phân số: giao hoán, kết hợp, cộng với số 0. **2** *Phép trừ phân số*: Muốn trừ 2 phân số ta cộng số bị trừ với số đối của số trừ:  $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + (\frac{-c}{d})$ ,  $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}, bd \neq 0$ .” – Thái, 2022, Chap. V, §3, p. 36

**Bài toán 144** (Thái, 2022, Ví dụ 1, p. 36). *Tính tổng  $\frac{3}{7} + \frac{-2}{3}$ , từ đó có thể suy ra ngay kết quả của các phép cộng sau:  $\frac{21}{49} + \frac{-12}{18}$  &  $\frac{-27}{-63} + \frac{-22}{33}$  được không? Vì sao?*

*Giải.* Có  $\frac{3}{7} + \frac{-2}{3} = \frac{3 \cdot 3}{7 \cdot 3} + \frac{-2 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{9+(-14)}{21} = \frac{-5}{21}$ . Vậy  $\frac{3}{7} + \frac{-2}{3} = \frac{-5}{21}$ . Từ đó có thể suy ra ngay kết quả các phép cộng:  $\frac{21}{49} + \frac{-12}{18} = \frac{-5}{21}$  vì  $\frac{21}{49} = \frac{3}{7}$  &  $\frac{-12}{18} = \frac{-2}{3}$ ;  $\frac{-27}{-63} + \frac{-22}{33} = \frac{-5}{21}$  vì  $\frac{-27}{-63} = \frac{3}{7}$  &  $\frac{-22}{33} = \frac{-2}{3}$ .  $\square$

**Bài toán 145** (Thái, 2022, Ví dụ 2, p. 36). *1 hình chữ nhật có chiều rộng là  $\frac{3}{5}$ m, chiều dài hơn chiều rộng  $\frac{1}{4}$ m. Tính nửa chu vi của hình chữ nhật đó.*

*Giải.* Chiều dài hình chữ nhật bằng  $\frac{3}{5} + \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{12+5}{20} = \frac{17}{20}$ m. Nửa chu vi hình chữ nhật bằng  $\frac{3}{5} + \frac{17}{20} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} + \frac{17}{20} = \frac{12+17}{20} = \frac{29}{20}$ m.  $\square$

**Bài toán 146** (Thái, 2022, 27., p. 37). *Tính hợp lý: (a)  $\frac{7}{-27} + \frac{-8}{27}$ . (b)  $\frac{6}{13} + \frac{-17}{39}$ . (c)  $\frac{-17}{13} + \frac{25}{101} + \frac{4}{13}$ . (d)  $\frac{-13}{7} + \frac{3}{5} + \frac{-1}{7}$ . (e)  $\frac{-5}{9} + \frac{8}{15} + \frac{4}{-9} + \frac{7}{15}$ .*

**Bài toán 147** (Thái, 2022, 28., p. 37). *So sánh các biểu thức: (a)  $A = \frac{1}{2} + \frac{-3}{8} + \frac{5}{9}$  &  $B = \frac{13}{-30} + \frac{17}{45} + \frac{-7}{18}$ . (b)  $C = \frac{12}{25} + \frac{-8}{15} + \frac{-4}{9}$  &  $D = \frac{-5}{12} + \frac{4}{9} + \frac{11}{-6}$ . (c)  $M = \frac{1}{3} + \frac{2}{-5} + \frac{7}{2}$  &  $N = \frac{19}{-7} + \frac{21}{5} + \frac{-2}{7}$ . (d)  $P = \frac{34}{24} + \frac{-8}{15} + \frac{1}{10}$  &  $Q = \frac{8}{21} + 1 + \frac{-1}{-21}$ .*

**Bài toán 148** (Thái, 2022, 29., p. 37). *Không tính trực tiếp, chứng tỏ tổng của 3 phân số sau:  $\frac{20}{11}$ ,  $\frac{20}{31}$ ,  $\frac{20}{51}$  nhỏ hơn  $\frac{7}{2}$ .*

**Bài toán 149** (Thái, 2022, 30., pp. 37–38). *Tính: (a)  $\frac{-4}{5} + \frac{9}{7}$ . (b)  $\frac{7}{21} + \frac{9}{-36}$ . (c)  $1 + \frac{-1}{11}$ . (d)  $\frac{11}{15} + \frac{9}{-10}$ . (e)  $-\frac{18}{24} + \frac{15}{-21}$ . (f)  $\frac{-3}{10} + \frac{7}{24}$ . (g)  $\frac{1}{2} + \frac{-1}{3}$ . (h)  $\frac{-3}{21} + \frac{6}{42}$ . (i)  $2 + \frac{7}{-9}$ . (j)  $\frac{2}{7} - \frac{85}{77}$ .*

**Bài toán 150** (Thái, 2022, 31., p. 38). *Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  biết: (a)  $\frac{-5}{7} + 1 + \frac{30}{-7} \leq x \leq \frac{-1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{5}{6}$ . (b)  $\frac{-8}{13} + \frac{7}{17} + \frac{21}{13} \leq x \leq \frac{-9}{14} + 3 + \frac{5}{-14}$ .*

**Bài toán 151** (Thái, 2022, 32., p. 38). *Tìm tổng các phân số đồng thời lớn hơn  $\frac{-1}{2}$ , nhỏ hơn  $\frac{-1}{3}$  & có tử là 5.*

**Bài toán 152** (Thái, 2022, 33., p. 38). *3 ô tô cùng chuyển long nhãn từ 1 kho ở Hưng Yên lên Hà Nội. Ô tô thứ nhất, thứ 2, thứ 3 chuyển được lần lượt  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{2}{9}$  số long nhãn trong kho. Cả 3 ô tô chuyển được bao nhiêu phần long nhãn trong kho?*

**Bài toán 153** (Thái, 2022, 34., p. 38). *Người thứ nhất đi xe đạp từ A đến B hết 5 giờ, người thứ 2 đi xe máy từ B về A hết 2 giờ, người thứ 2 khởi hành sau người thứ nhất 2 giờ. Hỏi sau khi người thứ 2 đi được 1 giờ thì 2 người đã gặp nhau chưa?*

**Bài toán 154** (Thái, 2022, 35., p. 38). *1 người hỏi Pythagore về số học trò của ông. Pythagore nói: “1 nửa số học trò của tôi đang học Toán,  $\frac{1}{4}$  đang học Nhạc,  $\frac{1}{7}$  đang ngồi suy nghĩ. Số còn lại là 3 người.” Pythagore có bao nhiêu học trò?*

**Bài toán 155** (Thái, 2022, 36., p. 38). *Có 5 quả cam chia đều cho 6 người. Làm thế nào để chia được mà không phải cắt bất kỳ quả cam nào thành 6 phần bằng nhau?*

## 4.4 Biểu diễn phân số trên trục số nằm ngang

Tương tự như đối với các số nguyên, ta có thể biểu diễn mọi phân số trên trục số. Trên trục số, phân số & số đối của phân số đó có điểm biểu diễn nằm về 2 phía của gốc 0 & cách đều gốc 0. Trên trục số nằm ngang, nếu điểm biểu diễn phân số  $\frac{a}{b}$  nằm bên trái điểm biểu diễn phân số  $\frac{c}{d}$  (hay điểm biểu diễn phân số  $\frac{c}{d}$  nằm bên phải điểm biểu diễn phân số  $\frac{a}{b}$ ) thì ta có phân số  $\frac{a}{b}$  nhỏ hơn phân số  $\frac{c}{d}$ , i.e.,  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  (hay phân số  $\frac{c}{d}$  lớn hơn phân số  $\frac{a}{b}$ , i.e.,  $\frac{c}{d} > \frac{a}{b}$ ). Tính chất bắc cầu:  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  &  $\frac{c}{d} < \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{e}{f}$ .

## 5 Phép Nhân, Phép Chia Phân Số

**Bài toán 156** (Thái et al., 2022, p. 40). *Gấu nước được nhà sinh vật học người Ý L. Spallanzani đặt tên là Tardigrada vào năm 1776. 1 con gấu nước dài  $\approx \frac{1}{2}$  mm. 1 con gấu nước Bắc Cực trưởng thành dài  $\approx \frac{5}{2}$  m. Chiều dài con gấu nước Bắc Cực trưởng thành gấp bao nhiêu lần chiều dài con gấu nước?*

### 5.1 Phép Nhân Phân số

**Mệnh đề 8.** Muốn nhân 2 phân số, ta nhân các tử với nhau & nhân các mẫu với nhau:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}, bd \neq 0,$$

$$\prod_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdots \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{b_1 b_2 \cdots b_n} = \frac{\prod_{i=1}^n a_i}{\prod_{i=1}^n b_i}, \quad \forall a_i, b_i \in \mathbb{Z}, b_i \neq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

**Ví dụ 5.** (a)  $\frac{91}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{91 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{273}{8}$ . (b)  $\frac{-2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{-2 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{-6}{35}$ .

**Bài toán 157** (Thái et al., 2022, Ví dụ 1, p. 40). *Tính tích & viết kết quả ở dạng phân số tối giản: (a)  $\frac{-2}{5} \cdot \frac{3}{7}$ . (b)  $\frac{-8}{9} \cdot \frac{3}{-4}$ . (c)  $\frac{-9}{10} \cdot \frac{25}{12}$ . (d)  $(-\frac{3}{8}) \cdot \frac{-12}{5}$ .*

*Giải.* (a)  $\frac{-2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{-2 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{-6}{35}$ . (b)  $\frac{-8}{9} \cdot \frac{3}{-4} = \frac{-8 \cdot 3}{9 \cdot (-4)} = \frac{-24}{-36} = \frac{-24:12}{-36:12} = \frac{2}{3}$ . (c)  $\frac{-9}{10} \cdot \frac{25}{12} = \frac{-9 \cdot 25}{10 \cdot 12} = \frac{-225}{120} = \frac{-225:15}{120:15} = \frac{-15}{8}$ . (d)  $(-\frac{3}{8}) \cdot \frac{-12}{5} = \frac{-3 \cdot (-12)}{8 \cdot 5} = \frac{36}{40} = \frac{36:4}{40:4} = \frac{9}{10}$ .  $\square$

**Mệnh đề 9** (Phép nhân số nguyên với phân số). *Muốn nhân 1 số nguyên với 1 phân số (hoặc nhân 1 phân số với 1 số nguyên)<sup>7</sup>, ta nhân số nguyên với tử của phân số & giữ nguyên mẫu của phân số đó:*

$$m \cdot \frac{a}{b} = \frac{ma}{b}, \quad \frac{a}{b} \cdot n = \frac{an}{b}, \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0.$$

**Bài toán 158** (Thái et al., 2022, Ví dụ 2, p. 41). *Tính tích & viết kết quả ở dạng phân số tối giản: (a)  $4 \cdot \frac{-5}{9}$ . (b)  $\frac{-7}{11} \cdot (-9)$ . (c)  $8 \cdot \frac{-5}{6}$ . (d)  $\frac{5}{21} \cdot (-14)$ .*

*Giải.* (a)  $4 \cdot \frac{-5}{9} = \frac{4 \cdot (-5)}{9} = \frac{-20}{9}$ . (b)  $\frac{-7}{11} \cdot (-9) = \frac{-7 \cdot (-9)}{11} = \frac{63}{11}$ . (c)  $8 \cdot \frac{-5}{6} = \frac{8 \cdot (-5)}{6} = \frac{-40}{6} = \frac{-40:2}{6:2} = \frac{-20}{3}$ . (d)  $\frac{5}{21} \cdot (-14) = \frac{5 \cdot (-14)}{21} = \frac{-70}{21} = \frac{-70:7}{21:7} = \frac{-10}{3}$ .  $\square$

#### 5.1.1 Tính chất của phép nhân phân số

Giống như phép nhân số tự nhiên, phép nhân phân số cũng có các tính chất: giao hoán, kết hợp, nhân với số 1, phân phối của phép nhân đối với phép cộng & phép trừ.

- Giao hoán:**  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}, \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}, bd \neq 0$  (chú ý:  $bd \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 0$  &  $d \neq 0$ ).
- Kết hợp:**  $(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot (\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}, \quad \forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}, bdf \neq 0$  (chú ý:  $bdf \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 0$  &  $d \neq 0$  &  $f \neq 0$ ).
- Nhân với số 1:**  $\frac{a}{b} \cdot 1 = 1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}, \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ .
- Phân phối của phép nhân đối với phép cộng & phép trừ:**  $\frac{a}{b} \left( \frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}, \quad \frac{a}{b} \left( \frac{c}{d} - \frac{e}{f} \right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$ , có thể viết gọn chung lại thành  $\frac{a}{b} \left( \frac{c}{d} \pm \frac{e}{f} \right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \pm \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}, \quad \forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}, bdf \neq 0$ .

**Bài toán 159** (Thái et al., 2022, Ví dụ 3, p. 41). *Tính hợp lý: (a)  $\frac{2}{5} \cdot \frac{-3}{7} \cdot \frac{-5}{2}$ . (b)  $\frac{5}{7} \cdot \frac{-2}{11} - \frac{5}{7} \cdot \frac{9}{11}$ . (c)  $\frac{-9}{7} \cdot (\frac{14}{15} - \frac{-7}{9})$ .*

*Giải.* (a)  $\frac{2}{5} \cdot \frac{-3}{7} \cdot \frac{-5}{2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{-5}{2} \cdot \frac{-3}{7} = (\frac{2}{5} \cdot \frac{-5}{2}) \cdot \frac{-3}{7} = -1 \cdot \frac{-3}{7} = \frac{3}{7}$ . (b)  $\frac{5}{7} \cdot \frac{-2}{11} - \frac{5}{7} \cdot \frac{9}{11} = \frac{5}{7} \cdot (\frac{-2}{11} - \frac{9}{11}) = \frac{5}{7} \cdot \frac{-11}{11} = \frac{5}{7} \cdot (-1) = \frac{-5}{7}$ . (c)  $\frac{-9}{7} \cdot (\frac{14}{15} - \frac{-7}{9}) = \frac{-9}{7} \cdot \frac{14}{15} - \frac{-9}{7} \cdot \frac{-7}{9} = \frac{-9 \cdot 14}{7 \cdot 15} - \frac{-9 \cdot (-7)}{7 \cdot 9} = \frac{-6}{5} - 1 = \frac{-6}{5} - \frac{5}{5} = \frac{-6-5}{5} = \frac{-11}{5}$ .  $\square$

<sup>7</sup>2 điều này tương đương với nhau do tính chất giao hoán của phép nhân phân số.

## 5.2 Phép Chia Phân số

**Định nghĩa 5** (Phân số nghịch đảo). *Phân số  $\frac{b}{a}$  gọi là phân số nghịch đảo của phân số  $\frac{a}{b}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ .*

**Ví dụ 6** (Thái et al., 2022, Ví dụ 4, 4, p. 42). (a) *Phân số nghịch đảo của phân số  $\frac{7}{3}$  là phân số  $\frac{3}{7}$ .* (b) *Phân số nghịch đảo của phân số  $\frac{-7}{9}$  là phân số  $\frac{9}{-7}$ .* (c) *Phân số nghịch đảo của phân số  $\frac{-2}{-13}$  là phân số  $\frac{-13}{2}$ .* (d) *Phân số nghịch đảo của phân số  $\frac{-4}{11}$  là  $\frac{11}{-4}$ .* (e) *Phân số nghịch đảo của phân số  $\frac{7}{-17}$  là  $\frac{-17}{7}$ .*

**Mệnh đề 10.** *Tích của 1 phân số với phân số nghịch đảo của nó thì bằng 1, i.e.,  $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1, \forall a, b \in \mathbb{Z}, ab \neq 0$ .*

**Mệnh đề 11.** *Muốn chia 1 phân số cho 1 phân số khác 0, ta nhân số bị chia với phân số nghịch đảo của số chia:  $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}, bcd \neq 0$ .*

**Bài toán 160** (Thái et al., 2022, Ví dụ 5, 5, p. 42). *Tính thương & viết kết quả ở dạng phân số tối giản: (a)  $\frac{2}{3} : \frac{-4}{5}$ . (b)  $(-5) : \frac{-3}{7}$ . (c)  $\frac{-9}{5} : \frac{8}{3}$ . (d)  $\frac{-7}{9} : (-5)$ .*

*Giải.* (a)  $\frac{2}{3} : \frac{-4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{-4} = \frac{10}{-12} = \frac{10 \cdot (-2)}{-12 \cdot (-2)} = \frac{-5}{6}$ . (b)  $-5 : \frac{-3}{7} = -5 \cdot \frac{7}{-3} = \frac{-5 \cdot 7}{-3} = \frac{-35}{-3} = \frac{35}{3}$ . (c)  $\frac{-9}{5} : \frac{8}{3} = \frac{-9}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{-9 \cdot 3}{5 \cdot 8} = \frac{-27}{40}$ . (d)  $\frac{-7}{9} : (-5) = \frac{-7}{9} : (-5) \cdot \frac{1}{-5} = \frac{-7}{9 \cdot (-5)} = \frac{-7}{-45} = \frac{7}{45}$ .  $\square$

**Mệnh đề 12** (Phép chia số nguyên với phân số). *Muốn chia 1 số nguyên với 1 phân số (hoặc chia 1 phân số với 1 số nguyên)<sup>8</sup>:*

$$a : \frac{c}{d} = a \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{c}, \forall a, c, d \in \mathbb{Z}, cd \neq 0,$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}, \forall a, b, c \in \mathbb{Z}, bc \neq 0.$$

Thứ tự thực hiện các phép tính với phân số (trong biểu thức không chứa dấu ngoặc hoặc có chứa dấu ngoặc) cũng giống như thứ tự thực hiện các phép tính với số nguyên:  $() \rightarrow [] \rightarrow \{ \}, ^, \wedge \rightarrow \cdot, : \rightarrow \pm$ .

**Bài toán 161** (Thái et al., 2022, 1., p. 43). *Tính tích & viết kết quả ở dạng phân số tối giản: (a)  $\frac{-5}{9} \cdot \frac{12}{35}$ . (b)  $(-\frac{5}{8}) \cdot \frac{-6}{55}$ . (c)  $-7 \cdot \frac{2}{5}$ . (d)  $\frac{-3}{8} \cdot (-6)$ .*

*Giải.*  $\frac{-5}{9} \cdot \frac{12}{35} = \frac{-5 \cdot 12}{9 \cdot 35} = \frac{-60}{315} = \frac{-60 \cdot 15}{315 \cdot 15} = \frac{-4}{21}$ . (b)  $(-\frac{5}{8}) \cdot \frac{-6}{55} = \frac{-5 \cdot (-6)}{8 \cdot 55} = \frac{30}{440} = \frac{30 \cdot 10}{440 \cdot 10} = \frac{3}{44}$ . (c)  $-7 \cdot \frac{2}{5} = \frac{-7 \cdot 2}{5} = \frac{-14}{5}$ . (d)  $\frac{-3}{8} \cdot (-6) = \frac{-3 \cdot (-6)}{8} = \frac{18}{8} = \frac{18 \cdot 2}{8 \cdot 2} = \frac{9}{4}$ .  $\square$

**Bài toán 162** (Thái et al., 2022, 2., p. 43). *Tìm x: (a)  $\frac{-2}{3} \cdot \frac{x}{4} = \frac{1}{2}$ . (b)  $\frac{x}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{-5}{12}$ . (c)  $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{x} = \frac{1}{4}$ .*

*Giải.* (a)  $\frac{-2}{3} \cdot \frac{x}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-2x}{3 \cdot 4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-x}{6} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -6 \cdot \frac{1}{2} = -3$ . Vậy  $x = -3$ . (b)  $\frac{x}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{-5}{12} \Leftrightarrow x = \frac{-5}{12} : \frac{5}{8} \cdot 3 = \frac{-5}{12} \cdot \frac{8}{5} \cdot 3 = \frac{-5 \cdot 8 \cdot 3}{12 \cdot 5} = -2$ . Vậy  $x = -2$ . (c)  $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{5 \cdot 3}{6x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 6x = 5 \cdot 3 \cdot 4 \Leftrightarrow x = \frac{5 \cdot 3 \cdot 4}{6} = 10$ . Vậy  $x = 10$ .  $\square$

**Bài toán 163** (Thái et al., 2022, 3., p. 43). *Tìm phân số nghịch đảo của mỗi phân số sau: (a)  $\frac{-9}{19}$ . (b)  $-\frac{21}{13}$ . (c)  $\frac{1}{-9}$ .*

*Giải.* Phân số nghịch đảo của  $\frac{-9}{19}, -\frac{21}{13}, \frac{1}{-9}$  lần lượt là  $\frac{19}{-9}, -\frac{13}{21}, \frac{-9}{1} = -9$ .  $\square$

**Bài toán 164** (Thái et al., 2022, 4., p. 43). *Tính thương & viết kết quả ở dạng phân số tối giản: (a)  $\frac{3}{10} : (\frac{-2}{3})$ . (b)  $(-\frac{7}{12}) : (\frac{-5}{6})$ . (c)  $-15 : \frac{9}{10}$ .*

*Giải.* (a)  $\frac{3}{10} : (\frac{-2}{3}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{-2} = \frac{3 \cdot 3}{10 \cdot (-2)} = \frac{9}{-20} = -\frac{9}{20}$ . (b)  $(-\frac{7}{12}) : (\frac{-5}{6}) = \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{5} = \frac{7 \cdot 6}{12 \cdot 5} = \frac{42}{60} = \frac{42 \cdot 6}{60 \cdot 6} = \frac{7}{10}$ . (c)  $-15 : \frac{9}{10} = 15 \cdot \frac{10}{9} = \frac{15 \cdot 10}{9} = \frac{150}{9} = \frac{150 \cdot 3}{9 \cdot 3} = \frac{50}{3}$ .  $\square$

**Bài toán 165** (Thái et al., 2022, 5., p. 43). *Tìm x: (a)  $\frac{3}{16} : \frac{x}{8} = \frac{3}{4}$ . (b)  $\frac{1}{25} : \frac{-3}{x} = \frac{-1}{15}$ . (c)  $\frac{x}{12} : \frac{-4}{9} = \frac{-3}{16}$ .*

**Bài toán 166** (Thái et al., 2022, 6., p. 43). *Tìm x: (a)  $\frac{4}{7} \cdot x - \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$ . (b)  $\frac{4}{5} + \frac{5}{7} : x = \frac{1}{6}$ .*

*Giải.* (a)  $\frac{4}{7} \cdot x - \frac{2}{3} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{4}{7} \cdot x = \frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{3}{15} + \frac{10}{15} = \frac{3+10}{15} = \frac{13}{15} \Leftrightarrow x = \frac{13}{15} : \frac{4}{7} = \frac{13}{15} \cdot \frac{7}{4} = \frac{91}{60}$ . Vậy  $x = \frac{91}{60}$ . (b)  $\frac{4}{5} + \frac{5}{7} : x = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{5}{7} : x = \frac{1}{6} - \frac{4}{5} = \frac{1 \cdot 5}{6 \cdot 5} - \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \frac{5}{30} - \frac{24}{30} = \frac{5-24}{30} = \frac{-19}{30} \Leftrightarrow x = \frac{5}{7} : \frac{-19}{30} = \frac{5}{7} \cdot \frac{30}{-19} = \frac{5 \cdot 30}{7 \cdot (-19)} = -\frac{150}{133}$ . Vậy  $x = -\frac{150}{133}$ .  $\square$

**Bài toán 167** (Thái et al., 2022, 7., p. 43). *Tính: (a)  $\frac{17}{8} : (\frac{27}{8} + \frac{-11}{2})$ . (b)  $\frac{28}{15} \cdot \frac{1}{4^2} \cdot 3 + (\frac{8}{15} - \frac{69}{60} \cdot \frac{5}{23}) : \frac{51}{54}$ .*

*Giải.* (a)  $\frac{17}{8} : (\frac{27}{8} + \frac{-11}{2}) = \frac{17}{8} : (\frac{27}{8} + \frac{-11 \cdot 4}{2 \cdot 4}) = \frac{17}{8} : \frac{27-44}{8} = \frac{17}{8} : \frac{-17}{8} = \frac{17}{8} \cdot \frac{8}{-17} = \frac{17 \cdot 8}{8 \cdot (-17)} = -1$ . (b)  $\frac{28}{15} \cdot \frac{1}{4^2} \cdot 3 + (\frac{8}{15} - \frac{69}{60} \cdot \frac{5}{23}) : \frac{51}{54} = \frac{28 \cdot 3}{15 \cdot 4^2} + (\frac{8}{15} - \frac{69 \cdot 5}{60 \cdot 23}) \cdot \frac{54}{51} = \frac{4 \cdot 7 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 4^2} + (\frac{8}{15} - \frac{23 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 23}) \cdot \frac{3 \cdot 18}{3 \cdot 17} = \frac{7}{20} + (\frac{8}{15} - \frac{1}{4}) \cdot \frac{18}{17} = \frac{7}{20} + (\frac{8 \cdot 4}{15 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 15}{4 \cdot 15}) \cdot \frac{18}{17} = \frac{7}{20} + \frac{32-15}{60} \cdot \frac{18}{17} = \frac{7}{20} + \frac{17}{60} \cdot \frac{18}{17} = \frac{7}{20} + \frac{18}{60} = \frac{7}{20} + \frac{3}{10} = \frac{7+6}{20} = \frac{13}{20}$ .  $\square$

**Bài toán 168** (Thái et al., 2022, 8., p. 43). *Chim ruồi ong hiện là loài chim bé nhỏ nhất trên Trái Đất với chiều dài chỉ khoảng 5cm. Chim ruồi “khổng lồ” ở Nam Mỹ là thành viên lớn nhất của gia đình chim ruồi trên thế giới, nó dài gấp  $\frac{33}{8}$  lần chim ruồi ong. Tính chiều dài của chim ruồi “khổng lồ” ở Nam Mỹ.*

<sup>8</sup>Chú ý 2 điều này không tương đương với nhau do phép chia phân số không có tính chất giao hoán như phép nhân phân số, i.e., 1 cách tổng quát, có:  $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \neq \frac{c}{d} : \frac{a}{b} = \frac{bd}{ad}$ .

**Tóm tắt kiến thức.** “**1** *Phép nhân phân số*: Quy tắc nhân 2 phân số:  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ ,  $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}, bd \neq 0$ ;  $m \cdot \frac{a}{b} = \frac{ma}{b}$ ,  $\forall a, b, m \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ ;  $\frac{a}{b} \cdot n = \frac{an}{b}$ ,  $\forall a, b, n \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ . Tính chất của phép nhân phân số: giao hoán, kết hợp, nhân với số 1, phân phối của phép nhân đối với phép cộng & phép trừ. Phân số  $\frac{b}{a}$  gọi là *phân số nghịch đảo* của phân số  $\frac{a}{b}$  với  $ab \neq 0$ . **2** *Phép chia phân số*:  $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ ,  $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}, bcd \neq 0$ ;  $m : \frac{a}{b} = \frac{mb}{a}$ ,  $\forall a, b, m \in \mathbb{Z}, ab \neq 0$ ;  $\frac{a}{b} : n = \frac{a}{bn}$ ,  $\forall a, b, n \in \mathbb{Z}, bn \neq 0$ .” – Thái, 2022, Chap. V, §4, p. 39

**Bài toán 169** (Thái, 2022, Ví dụ 1, p. 39). *Tính: (a)  $\frac{-5}{14} \cdot (-91)$ . (b)  $(1 - \frac{1}{6})(\frac{-3}{17} + \frac{1}{5})$ .*

*Giải.* (a)  $\frac{-5}{14} \cdot (-91) = \frac{5 \cdot 91}{14} = \frac{65}{2}$ . (b)  $(1 - \frac{1}{6})(\frac{-3}{17} + \frac{1}{5}) = \frac{5}{6} \cdot (\frac{-3 \cdot 5}{17 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 17}{5 \cdot 17}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{85} = \frac{1}{51}$ . □

**Bài toán 170** (Thái, 2022, Ví dụ 2, p. 39). *Theo <http://danso.org>, tính đến ngày 29/4/2021, dân số thế giới có khoảng 7840 triệu người & dân số Việt Nam chiếm  $\frac{1}{80}$  dân số thế giới. Dân số Việt Nam khi đó là khoảng bao nhiêu triệu người?*

*Giải.* Dân số Việt Nam khi đó là khoảng  $\frac{1}{80} \cdot 7840 = 98$  triệu người. □

**Bài toán 171** (Thái, 2022, Ví dụ 3, p. 40). *Trong 327 ngày 12 giờ, Mặt Trăng quay 12 vòng xung quanh Trái Đất. Mặt Trăng quay 1 vòng xung quanh Trái Đất trong bao nhiêu ngày?*

*Giải.* 327 ngày 12 giờ =  $\frac{655}{2}$  ngày. Mặt Trăng quay 1 vòng xung quanh Trái Đất trong  $\frac{655}{2} : 12 = \frac{655}{24} = 27\frac{7}{24}$  ngày. □

**Bài toán 172** (Thái, 2022, 38., p. 40). *Tính tích & viết kết quả ở dạng phân số tối giản: (a)  $\frac{-4}{7} \cdot \frac{-7}{16}$ . (b)  $\frac{-5}{11} \cdot 22$ . (c)  $\frac{-5}{16} \cdot (-32)$ . (d)  $35 \cdot \frac{-4}{21}$ . (e)  $\frac{25}{10} \cdot 1\frac{1}{3}$ . (f)  $\frac{-37}{401} \cdot (-1)$ . (g)  $(1 - \frac{1}{5})(\frac{-3}{10} + \frac{1}{5})$ . (h)  $\frac{-3}{5} \cdot \frac{-3}{5} \cdot \frac{1}{3}$ .*

**Bài toán 173** (Thái, 2022, 39., p. 40). *Tính: (a)  $\frac{5}{12} + \frac{21}{8} \cdot \frac{1}{14}$ . (b)  $\frac{8}{15} \cdot \frac{3}{64} - \frac{13}{25}$ . (c)  $(\frac{19}{21} - \frac{2}{3}) \cdot \frac{28}{10}$ . (d)  $(1 - \frac{5}{17})(\frac{3}{8} - \frac{5}{24})$ .*

**Bài toán 174** (Thái, 2022, 40., p. 40). *Tính 1 cách hợp lý: (a)  $\frac{11}{4} \cdot \frac{-5}{9} \cdot \frac{8}{33}$ . (b)  $\frac{-5}{6} \cdot \frac{4}{19} + \frac{-7}{12} \cdot \frac{4}{19} - \frac{40}{57}$ . (c)  $(\frac{23}{41} - \frac{15}{82}) \cdot \frac{41}{15}$ . (d)  $9 \cdot (\frac{151515}{171717} - \frac{131313}{181818})$ . (e)  $\frac{-13}{8} \cdot (\frac{8}{13} + \frac{32}{28}) - \frac{15}{7}$ . (f)  $\frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdot \frac{5^2}{4 \cdot 6} \cdot \frac{6^2}{5 \cdot 7}$ .*

**Bài toán 175** (Thái, 2022, 41., p. 40). *Tìm số nguyên thích hợp cho ô vuông: (a)  $\frac{7}{25} \cdot \frac{\square}{28} = \frac{-3}{20}$ . (b)  $\frac{46}{15} \cdot \frac{-3}{\square} = \frac{23}{5}$ . (c)  $\frac{\square}{18} \cdot \frac{5}{2} = \frac{-5}{12}$ .*

**Bài toán 176** (Thái, 2022, 42., p. 41). *1 chiếc máy tự động kiểm tra linh kiện điện tử cứ  $\frac{16}{25}$  giây thì kiểm tra được 1 linh kiện. Trong 1 giờ máy tự động kiểm tra được bao nhiêu linh kiện điện tử?*

**Bài toán 177** (Thái, 2022, 43., p. 41). *Tính: (a)  $\frac{2}{7} \cdot \frac{14}{5} \cdot \frac{-1}{3}$ . (b)  $\frac{-15}{16} \cdot \frac{-8}{-25}$ . (c)  $\frac{-5}{13} \cdot 26$ . (d)  $(\frac{3}{8})^2$ . (e)  $(2 - \frac{1}{2}) \cdot (\frac{-3}{4} - \frac{1}{2})$ . (f)  $\frac{7}{11} \cdot \frac{-1}{7} \cdot \frac{11}{9} \cdot 0$ . (g)  $18 \cdot \frac{3}{10} \cdot (-5)$ . (h)  $\frac{15}{-49} \cdot \frac{-84}{35}$ .*

**Bài toán 178** (Thái, 2022, 44., p. 41). *(a) Tìm số nguyên âm lớn nhất để khi nhân nó với 1 trong các phân số tối giản sau đều được tích là những số nguyên:  $\frac{5}{6}, \frac{-7}{15}, \frac{11}{21}$ . (b) Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất sao cho khi lấy a chia cho  $\frac{8}{9}$  hoặc  $\frac{17}{12}$ , ta đều được kết quả là số tự nhiên.*

**Bài toán 179** (Thái, 2022, 45., p. 41). *So sánh:  $A = \frac{3^2}{2 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 8} + \frac{3^2}{8 \cdot 11}$  &  $B = \frac{4}{5 \cdot 7} + \frac{4}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{4}{59 \cdot 61}$ .*

**Bài toán 180** (Thái, 2022, 46., p. 41). *Tính: (a)  $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{5} \cdot 1\frac{1}{6} \cdot 1\frac{1}{7}$ . (b)  $(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4}) \dots (1 - \frac{1}{50})$ .*

**Bài toán 181** (Thái, 2022, 47., p. 42). *(a) Cho 1 hình thoi có diện tích bằng  $\frac{81}{10}m^2$  & độ dài 1 đường chéo bằng  $\frac{18}{5}m$ . Tính độ dài đường chéo còn lại của hình thoi đó. (b) Cho 1 hình thang có diện tích bằng  $\frac{319}{120}m^2$ , & độ dài 2 đáy bằng  $\frac{4}{5}m, \frac{35}{36}m$ . Tính chiều cao của hình thang đó.*

**Bài toán 182** (Thái, 2022, 48., p. 42). *1 cano xuôi dòng trên khúc sông AB hết 6 giờ & ngược dòng trên khúc sông BA hết 8 giờ. Tính chiều dài khúc sông đó, biết vận tốc dòng nước là 50m/min.*

**Bài toán 183** (Thái, 2022, 49., p. 42). *Tìm x: (a)  $\frac{6}{7} \cdot x = \frac{18}{23}$ . (b)  $\frac{15}{119} \cdot x = 1$ . (c)  $x : \frac{5}{6} = \frac{4}{7}$ . (d)  $x - \frac{3}{7} : \frac{9}{14} = \frac{-7}{3}$ . (e)  $\frac{9}{13} \cdot x = \frac{11}{8} - \frac{125}{1000}$ . (f)  $(x - \frac{1}{2}) : \frac{3}{11} = \frac{11}{4}$ .*

**Bài toán 184** (Thái, 2022, 50., p. 42). *Tính: (a)  $\frac{\frac{3}{5} + \frac{3}{27} - \frac{3}{9} - \frac{3}{11}}{\frac{4}{5} + \frac{4}{27} - \frac{4}{9} - \frac{4}{11}}$ . (b)  $\frac{5 - \frac{5}{3} - \frac{5}{27}}{8 - \frac{8}{3} - \frac{8}{27}} : \frac{15 + \frac{15}{121} - \frac{15}{11}}{16 + \frac{16}{121} - \frac{16}{11}}$ . (c)  $\frac{1}{2} : \frac{-3}{2} : \frac{4}{3} : \frac{-5}{4} : \frac{6}{5} : \frac{-7}{6} : \dots : \frac{-101}{100}$ .*

**Bài toán 185** (Thái, 2022, 51., p. 42). *Ngọc & Hà có tổng số tiền là 76000 đồng. Biết  $\frac{3}{5}$  số tiền của Ngọc bằng  $\frac{2}{3}$  số tiền của Hà. Mỗi bạn có bao nhiêu tiền?*

**Bài toán 186** (Thái, 2022, 52., p. 42). *Bây giờ là 12 giờ. Sau ít nhất bao nhiêu phút nữa thì kim giờ & kim phút vuông góc với nhau?*

## 6 Số Thập Phân

**Bài toán 187** (Thái et al., 2022, 1, p. 44). *Viết các phân số  $\frac{-19}{10}$ ,  $\frac{-335}{100}$ ,  $\frac{-125}{1000}$ ,  $\frac{-279}{1000000}$  dưới dạng số thập phân & đọc các số thập phân đó theo mẫu.*

*Giải.*  $\frac{-19}{10} = -1.9$  được đọc là: âm một chẵn chín. □

**Định nghĩa 6.** Phân số thập phân là phân số mà mẫu là lũy thừa của 10 & tử là số nguyên, i.e.,  $\frac{a}{10^b}$ ,  $\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{N}^*$ . Phân số thập phân có thể viết được dưới dạng số thập phân. Số thập phân gồm 2 phần: phần số nguyên được viết bên trái dấu phẩy; phần thập phân được viết bên phải dấu phẩy.

**Bài toán 188** (Thái et al., 2022, Ví dụ 1, 1, pp. 44–45). *Viết các phân số & hỗn số sau dưới dạng số thập phân:  $\frac{-19}{100}$ ,  $\frac{-8}{125}$ ,  $\frac{1}{-2}$ ,  $5\frac{1}{25}$ ,  $\frac{-9}{1000}$ ,  $-\frac{5}{8}$ ,  $3\frac{2}{25}$ .*

*Giải.*  $\frac{-19}{100} = -0.19$ ,  $\frac{-8}{125} = \frac{-8 \cdot 8}{125 \cdot 8} = \frac{-64}{1000} = -0.064$ ,  $\frac{1}{-2} = \frac{1 \cdot (-5)}{-2 \cdot (-5)} = \frac{-5}{10} = -0.5$ ,  $5\frac{1}{25} = 5\frac{4}{100} = 5.04$ . □

**Bài toán 189** (Thái et al., 2022, Ví dụ 2, 2, p. 45). (a) *Chai nước khoáng của An có dung tích ghi trên tem nhãn là 750ml. Dung tích của chai nước đó là bao nhiêu lít? Viết kết quả đó dưới dạng số thập phân & phân số tối giản.* (b) *Viết các số thập phân sau dưới dạng phân số tối giản: 12.5, -0.008, -3.45.* (c) *Viết các số thập phân sau dưới dạng phân số tối giản: -0.125, -0.012, -4.005.*

*Giải.* (a)  $750\text{ml} = 0.75\text{l}$ ,  $0.75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ . Dung tích của chai nước là 0.75l hay  $\frac{3}{4}\text{l}$ . (b)  $12.5 = \frac{125}{10} = \frac{25}{2}$ ,  $-0.008 = -\frac{8}{1000} = -\frac{1}{125}$ ,  $-3.45 = -\frac{345}{100} = -\frac{69}{20}$ . □

### 6.1 So sánh các số thập phân

Cũng như số nguyên, trong 2 số thập phân khác nhau luôn có 1 số nhỏ hơn số kia. Nếu số thập phân  $a$  nhỏ hơn số thập phân  $b$  thì ta viết  $a < b$  hay  $b > a$ . Số thập phân lớn hơn 0 gọi là *số thập phân dương*. Số thập phân nhỏ hơn 0 gọi là *số thập phân âm*. *Tính chất bắc cầu:* Nếu  $a < b$  &  $b < c$  thì  $a < c$ .

## 7 Làm Tròn Số Thập Phân. Các Phép Tính với Số Thập Phân

## 8 Tìm Giá Trị Phân Số của 1 Số Cho Trước. Tìm 1 Số Biết Giá Trị 1 Phân Số của Nó

## 9 Tìm Tỷ Số & Tỷ Số % của 2 Đại Lượng

## 10 Toán về Công Việc Làm Đồng Thời

## 11 Tổng Các Phân Số Viết Theo Quy Luật

## 12 Miscellaneous

### Tài liệu

Bình, Vũ Hữu (2022). *Nâng Cao & Phát Triển Toán 6 Tập 2*. Tái bản lần thứ nhất. Kết nối tri thức với cuộc sống. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 152.

Thái, Đỗ Đức (2022). *Bài Tập Toán 6 Tập 2*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, p. 111.

Thái, Đỗ Đức, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang (2022). *Toán 6 Tập 2*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, p. 108.

Tuyên, Bùi Văn (2022). *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 6*. Tái bản lần thứ 1. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 184.