Some Topics in Elementary Mathematics/Grade 12

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 3 tháng 10 năm 2022

Tóm tắt nội dung

Mục lục

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

1 Ứng Dụng Đạo Hàm Để Khảo Sát & Vẽ Đồ Thị của Hàm Số

Nội dung. Ứng dụng đạo hàm & giới hạn để xét 1 số tính chất quan trọng của hàm số & đồ thị như: tính đơn điệu, cực trị, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số & các đường tiệm cận của đồ thị; khảo sát sự biến thiên, khảo sát tính lồi lõm, & vẽ đồ thị của hàm số của 1 số hàm số đơn giản, e.g., căn thức, đa thức, phân thức; 1 số dạng toán liên quan đến đồ thị hàm số & ứng dụng của đồ thị hàm số trong các bài toán về biện luận số nghiệm của phương trình.

1.1 Tính Đơn Điệu của Hàm Số

Nội dung. Ứng dụng đạo hàm để xét tính *đơn điệu* (i.e., tính *đồng biến* & tính *nghịch biến*) của hàm số.

Định nghĩa 1.1 (Hàm số đồng/nghịch biến)**.** *Giả sử K là 1 khoảng, 1 đoạn hoặc 1 nửa khoảng & f là hàm số xác định trên K. Hàm số f được gọi là* đồng biến *trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Hàm số f được gọi là* nghịch biến *trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K$, $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.*

I.e., "nếu hàm số f xác định trên K thì hàm số f đồng biến trên K khi & chỉ khi với $x \in k$ tùy ý, ta có $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0$, $\forall \Delta x \neq 0$ mà $x + \Delta x \in K$; hàm số f nghịch biến trên K khi & chỉ khi với $x \in K$ tùy ý, ta có $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} < 0$, $\forall \Delta x \neq 0$ mà $x + \Delta x \in K$." – **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**

Định lý 1.1. *Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I. (a) Nếu hàm số f đồng biến trên khoảng I thì $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in I$. (b) Nếu hàm số f nghịch biến trên khoảng I thì $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in I$.*

Đảo lại:

Định lý 1.2. *Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I. (a) Nếu $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$ thì hàm số f đồng biến trên khoảng I. (b) Nếu $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$ thì hàm số f nghịch biến trên khoảng I. (c) Nếu $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$ thì hàm số f không đổi trên khoảng I.*

Định lý trên cho ta 1 điều kiện đủ để hàm số đơn điệu trên 1 khoảng.

Lưu ý 1.1. *Khoảng I trong định lý trên có thể được thay đổi bởi 1 đoạn hoặc 1 nửa khoảng. Khi đó phải bổ sung giả thiết "Hàm số liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó". E.g.:*

Định lý 1.3. *Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ & có đạo hàm $f'(x) > 0$ trên khoảng $(a;b)$ thì hàm số f đồng biến trên đoạn $[a;b]$.*

Người ta thường diễn đạt khẳng định này qua bảng biến thiên như sau:

x	a		b
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(b)$

"Việc tìm các khoảng đồng biến & nghịch biến của 1 hàm số còn được nói gọn là xét *chiều biến thiên của hàm số* đó. Qua định lý đã nêu, ta thấy việc xét chiều biến thiên của 1 hàm số có đạo hàm có thể chuyển về việc xét dấu đạo hàm của nó." – **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**

Có thể mở rộng định lý 1.2 như sau:

Định lý 1.4. *Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I. Nếu $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in I$ (hoặc $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in I$) & $f'(x) = 0$ chỉ tại 1 số hữu hạn điểm của I thì hàm số f đồng biến (hoặc nghịch biến) trên I.*

1.2 Cực Trị của Hàm Số

Nội dung. Cực đại, cực tiểu của hàm số; quan hệ giữa cực đại, cực tiểu với dấu của đạo hàm cấp 1 & đạo hàm cấp 2 của hàm số.

1.2.1 Khái niệm cực trị của hàm số

Định nghĩa 1.2 (Cực trị)**.** *"Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ & $x_0 \in \mathcal{D}$. (a) x_0 được gọi là 1* điểm cực đại *của hàm số f nếu tồn tại 1 khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 sao cho $(a;b) \subset \mathcal{D}$ & $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in (a;b)\backslash\{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là* giá trị cực đại *của hàm số f. (b) x_0 được gọi là 1* điểm cực tiểu *của hàm số f nếu tồn tại 1 khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 sao cho $(a;b) \subset \mathcal{D}$ & $f(x) > f(x_0)$, $\forall x \in (a;b)\backslash\{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là* giá trị cực tiểu *của hàm số f. Điểm cực đại & điểm cực tiểu được gọi chung là* điểm cực trị*. Giá trị cực đại & giá trị cực tiểu được gọi chung là* cực trị*.*

Nếu x_0 là 1 điểm cực trị của hàm số f thì người ta nói rằng hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0." – **SGK_Toan_12_giai_tich_nang**

Lưu ý 1.2. *(a) "Giá trị cực đại (cực tiểu) $f(x_0)$ của hàm số f nói chung không phải là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên tập hợp $\mathcal{D}$; $f(x_0)$ chỉ là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên 1 khoảng $(a;b)$ nào đó chứa điểm x_0. (b) Hàm số f có thể đạt cực đại hoặc cực tiểu tại nhiều điểm trên tập hợp $\mathcal{D}$. Hàm số cũng có thể không có cực trị trên 1 tập hợp số thực cho trước. (c) Đôi khi người ta cũng nói đến điểm cực trị của đồ thị.*

Nếu x_0 là 1 điểm cực trị của hàm số f thì điểm $(x_0; f(x_0))$ được gọi là *điểm cực trị của đồ thị* hàm số f." – **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**

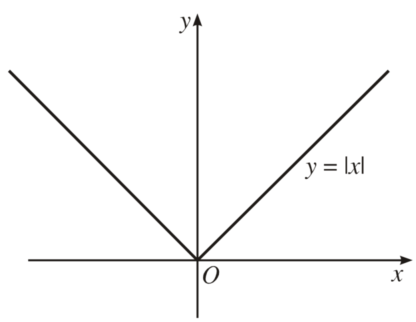
1.2.2 Điều kiện cần để hàm số đạt được cực trị

"Quan sát đồ thị của hàm số $y = f(x)$, ta thấy nếu hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 & nếu đồ thị của hàm số có tiếp tuyến tại điểm $(x_0; f(x_0))$ thì tiếp tuyến đó song song với trục hoành, i.e., $f'(x_0) = 0$.

Định lý 1.5. *Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, nếu f có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.*

"Điều ngược lại có thể không đúng. Đạo hàm f' có thể bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm số không đạt cực trị tại điểm x_0. E.g., xét hàm số $f(x) = x^3$, ta có $f'(x) = 3x^2$ & $f'(0) = 0$. Tuy nhiên, hàm số f không đạt cực trị tại điểm $x = 0$. Thật vậy, vì $f'(x) > 0$, $\forall x \neq 0$ nên hàm số f đồng biến trên $\mathbb{R}$." – **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**

Lưu ý 1.3. *"Hàm số có thể đạt cực trị tại 1 điểm mà tại điểm đó hàm số không có đạo hàm. E.g., hàm số $y = f(x) = |x|$ xác định trên $\mathbb{R}$. Vì $f(0) = 0$ & $f(x) > 0$, $\forall x \neq 0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$. Dễ thấy hàm số $y = |x|$ không có đạo hàm tại điểm $x = 0$ (Fig. 1).*



Hình 1: Đồ thị của hàm số $y = f(x) = |x|$, **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**.

Như vậy, 1 hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại 1 điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0, hoặc tại đó hàm số không có đạo hàm." – **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**

1.2.3 Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị

"Định lý sau cho ta 1 điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị.

Định lý 1.6. *Giả sử hàm số f liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 & có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ & $(x_0;b)$. Khi đó: (a) Nếu $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a;x_0)$ & $f'(x) > 0$, $\forall x \in (x_0;b)$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0. (b) Nếu $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a;x_0)$ & $f'(x) < 0$, $\forall x \in (x_0;b)$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0.*

I.e., (a) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0. (b) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0.

Chứng minh. (a) Vì hàm số f liên tục trên nửa khoảng $(a;x_0]$ & $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a;x_0)$ nên hàm số f nghịch biến trên $(a;x_0]$. Do đó, $f(x) > f(x_0)$, $\forall x \in (a;x_0)$. Tương tự, vì hàm số f liên tục trên nửa khoảng $[x_0;b)$ & $f'(x) > 0$, $\forall x \in (x_0;b)$ nên hàm số đồng biến trên $[x_0;b)$. Do đó $f(x) > f(x_0)$, $\forall x \in (x_0;b)$. Vậy $f(x) > f(x_0)$, $\forall x \in (a;b)\backslash\{x_0\}$, i.e., hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0. (b) Chứng minh tương tự. □

Định lý 1.6 được viết gọn lại trong 2 bảng biến thiên sau:

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$	

Từ định lý 1.6 ta có quy tắc tìm cực trị sau đây.

Quy tắc 1. *1. Tìm $f'(x)$. 2. Tìm các điểm x_i tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm. 3. Xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i."* – **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**

"Có thể sử dụng đạo hàm cấp 2 để tìm cực trị của hàm số.

Định lý 1.7. *Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp 1 trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0, $f'(x_0) = 0$ & f có đạo hàm cấp 2 khác 0 tại điểm x_0. (a) Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0. (b) Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0.*

Từ định lý 1.7, ta có 1 quy tắc khác để tìm cực trị của hàm số (nếu hàm số có đạo hàm cấp 2).

Quy tắc 2. *1. Tìm $f'(x)$. 2. Tìm các nghiệm x_i của phương trình $f'(x) = 0$. 3. Tìm $f''(x)$ & tính $f''(x_i)$. Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i. Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i."* – **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**

1.3 Giá Trị Lớn Nhất & Giá Trị Nhỏ Nhất của Hàm Số

Nội dung. Các bài toán dẫn đến việc tìm giá trị lớn nhất & giá trị nhỏ nhất của hàm số trên 1 tập hợp số thực cho trước, ứng dụng tính đơn điệu & cực trị của hàm số để tìm giá trị lớn nhất & giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Định nghĩa 1.3 (Giá trị lớn/nhỏ nhất). *"Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$. (a) Nếu tồn tại 1 điểm $x_0 \in \mathcal{D}$ sao cho $f(x) \le f(x_0)$, $\forall x \in \mathcal{D}$ thì số $M = f(x_0)$ được gọi là* giá trị lớn nhất *của hàm số f trên $\mathcal{D}$, ký hiệu là $M := \max_{x\in\mathcal{D}} f(x)$. (b) Nếu tồn tại 1 điểm $x_0 \in \mathcal{D}$ sao cho $f(x) \ge f(x_0)$, $\forall x \in \mathcal{D}$ thì số $m = f(x_0)$ được gọi là* giá trị nhỏ nhất *của hàm số f trên $\mathcal{D}$, ký hiệu là $m = \min_{x\in\mathcal{D}} f(x)$.*

Như vậy, muốn chứng tỏ rằng số M (hoặc m) là giá trị lớn nhất (hoặc giá trị nhỏ nhất) của hàm số f trên tập hợp $\mathcal{D}$ cần chỉ rõ: (a) $f(x) \le M$ (hoặc $f(x) \ge m$), $\forall x \in \mathcal{D}$. (b) Tồn tại ít nhất 1 điểm $x_0 \in \mathcal{D}$ sao cho $f(x_0) = M$ (hoặc $f(x_0) = m$). Ta quy ước rằng khi nói giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của hàm số f (mà không nói "trên tập $\mathcal{D}$") thì ta hiểu đó là giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của f trên tập xác định của nó." – **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**

"Phương pháp thường được sử dụng để tìm giá trị lớn nhất & giá trị nhỏ nhất của hàm số trên 1 tập hợp là lập bảng biến thiên của hàm số trên tập hợp đó." – **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**

Nhận xét 1.1. *"Người ta đã chứng minh được rằng hàm số liên tục trên 1 đoạn thì đạt được giá trị lớn nhất & nhỏ nhất trên đoạn đó. Trong nhiều trường hợp, có thể tìm giá trị lớn nhất & giá trị nhỏ nhất của hàm số trên 1 đoạn mà không cần lập bảng biến thiên của nó.*

Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ & có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$, có thể trừ 1 số hữu hạn điểm. Nếu $f'(x) = 0$ chỉ tại 1 số hữu hạn điểm thuộc $(a;b)$ thì ta có quy tắc tìm giá trị lớn nhất & nhỏ nhất của hàm f trên đoạn $[a;b]$ như sau:

Quy tắc 3. *1. Tìm các điểm $x_i \in (a;b)$, $i = 1,\ldots,m$, tại đó hàm số f có đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm. 2. Tính $f(x_i)$, $i = 1,\ldots,m$, $f(a)$, & $f(b)$. 3. So sánh các giá trị tìm được. Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của f trên đoạn $[a;b]$, số nhỏ nhất trong các gía trị đó là giá trị nhỏ nhất của f trên đoạn $[a;b]$."* – **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**

1.4 Đồ Thị của Hàm Số & Phép Tịnh Tiến Hệ Tọa Độ

Nội dung. Phép tịnh tiến hệ tọa độ, nhờ đó có thể xác định được trục đối xứng & tâm đối xứng của 1 số đường cong.

Định nghĩa 1.4 (Đồ thị của hàm số).

- "Đồ thị của hàm số *$y = f(x)$ xác định trên tập $\mathcal{D}$ là tập hợp tất cả các điểm $(x; f(x))$, $x \in \mathcal{D}$ của mặt phẳng tọa độ."* – – **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**
- *"Nếu f là 1 hàm số có miền xác định D thì* đồ thị *của hàm số f là tập hợp các cặp sắp thứ tự $\{(x; f(x))|x \in D\}$. I.e., đồ thị của f bao gồm tất cả các điểm $(x;y)$ của mặt phẳng tọa độ với $y = f(x)$ & x thuộc vào miền xác định. (Đôi khi cũng gọi đồ thị đó là 1* đường cong, *đặc biệt khi miền xác định là 1 khoảng, đoạn)." – Quỳnh, Dũng, et al., 2020, p. 5*

"Người ta còn gọi đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là *đường cong có phương trình là* $y = f(x)$ (gọi tắt là *đường cong* $y = f(x)$). Trong nhiều trường hợp việc thay hệ tọa độ đã có bởi 1 hệ tọa độ mới giúp ta nghiên cứu đường cong thuận tiện hơn." – **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**

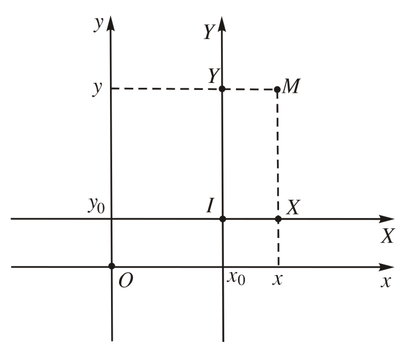
"Về mặt nguyên tắc, 1 hàm số bất kỳ có thể được khảo sát & vẽ đồ thị theo 1 sơ đồ tổng quát .... Tuy nhiên, đồ thị của những hàm số có mối liên quan đặc biệt có thể thu được từ nhau trực tiếp thông qua các phép biến đổi đồ thị. Điều này rút ngắn thời gian thực hiện cũng như cho phép chúng ta nhìn các đồ thị trong 1 mối tương quan thống nhất chứ không phải là các đối tượng riêng lẻ." – Quỳnh, Dũng, et al., 2020, p. 5

1.4.1 Phép tịnh tiến hệ tọa độ & công thức chuyển hệ tọa độ

Định lý 1.8. *"Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đồ thị (G) của hàm số $y = f(x)$; p & q là 2 số dương tùy ý. Khi đó: (a) Tịnh tiến (G) lên trên q đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x) + q$; (b) Tịnh tiến (G) xuống dưới q đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x) - q$; (c) Tịnh tiến (G) sang trái p đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x + p)$; (d) Tịnh tiến (G) sang phải p đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x - p)$." – Quỳnh, Dũng, et al., 2020, p. 6*

Định lý 1.9. *"Nếu (G) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Khi đó: (a) Nếu lấy hình đối xứng của (G) qua trục Oy, ta được đồ thị của hàm số $y = f(-x)$; (b) Nếu lấy phần $(G^{\rm p})$ của (G) nằm bên phải của trục Oy hợp với ảnh của $(G^{\rm p})$ qua phép đối xứng qua trục Oy, ta được đồ thị của hàm số $y = f(|x|)$; (c) Nếu lấy hình đối xứng của (G) qua trục Ox, ta được đồ thị hàm số $y = -f(x)$; (d) Nếu lấy phần $(G^{\rm t})$ của (G) nằm bên trên trục Ox hợp với ảnh của $(G^{\rm d})$ (là phần của (G) nằm bên dưới trục Ox) qua phép đối xứng qua trục Ox, ta được đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$." – Quỳnh, Dũng, et al., 2020, p. 6*

"Giả sử I là 1 điểm của mặt phẳng & $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm I đối với hệ tọa độ Oxy. Gọi IXY là hệ tọa độ mới có gốc là điểm I & 2 trục IX, IY theo thứ tự có cùng các vector đơn vị $\vec{i}, \vec{j}$ với 2 trục Ox, Oy (Fig. 2).



Hình 2: 2 hệ trục tọa độ, **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**.

Giả sử M là 1 điểm bất kỳ của mặt phẳng. Gọi $(x; y)$ là tọa độ của điểm M đối với hệ tọa độ Oxy & $(X; Y)$ là tọa độ của điểm M đối với hệ tọa độ IXY. Khi đó: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}$ hay $x\vec{i} + y\vec{j} = (x_0\vec{i} + y_0\vec{j}) + (X\vec{i} + Y\vec{j}) = (X + x_0)\vec{i} + (Y + y_0)\vec{j}$. Do đó

$$\begin{cases} x = X + x_0, \\ y = Y + y_0. \end{cases}$$

Các hệ thức trên gọi là *công thức chuyển hệ tọa độ* trong phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{OI}$." – **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**; Quỳnh, Dũng, et al., 2020, p. 6

1.4.2 Phương trình của đường cong đối với hệ tọa độ mới

"Giả sử $(\mathcal{G})$[1] là đồ thị[2] của hàm số $y = f(x)$ đối với hệ tọa độ Oxy đã cho. Khi đó phương trình của đường cong $(\mathcal{G})$ đối với hệ tọa độ Oxy là $y = f(x)$. Ta sẽ viết phương trình của $(\mathcal{G})$ đối với hệ tọa độ mới IXY. Giả sử M là 1 điểm bất kỳ của mặt phẳng, $(x; y)$ & $(X; Y)$ là tọa độ của điểm M, theo thứ tự, đối với hệ tọa độ Oxy & IXY. Khi đó: $M \in (\mathcal{G}) \Leftrightarrow y = f(x)$. Áp dụng công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{OI}$, ta có $M \in (\mathcal{G}) \Leftrightarrow Y + y_0 = f(X + x_0) \Leftrightarrow Y = f(X + x_0) - y_0$. Vậy phương trình của đường cong $\mathcal{G}$ đối với hệ tọa độ IXY là $Y = f(X + x_0) - y_0$." – **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**; Quỳnh, Dũng, et al., 2020, pp. 6–7

[1] Ký hiệu $\mathcal{G}$ được lấy từ chữ cái đầu của từ *graph*, i.e., đồ thị.

[2] **graph** [n] a diagram, consisting of a line or lines, showing the relation between 2 or more sets of numbers.

1.4.3 Sơ lược về phép co dãn theo phương trục hoành

"Cho $p \in (0; +\infty)$. Ta xét phép biến đổi biến điểm $M_0(x_0; y_0)$ thành điểm $M_1(px_0; y_0)$. Ta nói đây là *phép co dãn theo trục hoành*. Nếu $p < 1$, đó là *phép co*, $p > 1$ thì đó là *phép dãn*, với $p = 1$ ta có *phép biến đổi đồng nhất*. Số p được gọi là *tỷ số của phép co/dãn* theo phương trục hoành."

Định lý 1.10. *"Nếu (G) là đồ thị hàm số $y = f(x)$ & $p \in (0; +\infty)$. Khi đó, nếu lấy ảnh của (G) qua phép co dãn theo phương trục hoành với tỷ số p, ta được đồ thị (G_p) của hàm số $y = f\left(\frac{x}{p}\right)$.*

Chứng minh. Giả sử $M(x_0; y_0) \in (G)$, ta có $y_0 = f(x_0)$. Ảnh của M_0 qua phép co dãn theo phương trục hoành với tỷ số p là $M_1(x_1; y_1)$ với $x_1 = px_0$, $y_1 = y_0$. Đẳng thức $y_0 = f(x_0)$ bây giờ có thể viết lại thành $y_1 = f\left(\frac{x_1}{p}\right)$, do đó $M_1 \in (G_p)$." – Quỳnh, Dũng, et al., 2020, pp. 7–8 □

1.4.4 Sơ lược về phép co dãn theo phương trục tung

"Cho $q \in (0; +\infty)$. Ta xét phép biến đổi biến điểm $M_0(x_0; y_0)$ thành điểm $M_1(x_0; qy_0)$. Ta nói đây là *phép co dãn theo trục tung*. Nếu $q < 1$, đó là *phép co*; $q > 1$, đó là *phép dãn*; với $q = 1$ ta có *phép biến đổi đồng nhất*. Số q được gọi là *tỷ số của phép co/dãn* theo phương trục tung."

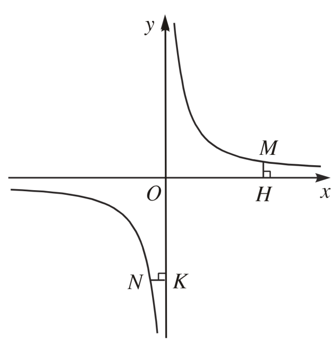
Định lý 1.11. *"Nếu (G) là đồ thị hàm số $y = f(x)$ & $q \in (0; +\infty)$. Khi đó, nếu lấy (G_q) là ảnh của (G) qua phép co dãn theo phương trục tung với tỷ số q, ta được đồ thị hàm số $y = qf(x)$." – Quỳnh, Dũng, et al., 2020, p. 8*

Chứng minh. Giả sử $M(x_0; y_0) \in (G)$, ta có $y_0 = f(x_0)$. Ảnh của M_0 qua phép co dãn theo phương trục tung với tỷ số q là $M(x_1; y_1)$ với $x_1 = x_0$, $y_1 = qy_0$. Đẳng thức $y_0 = f(x_0)$ bây giờ có thể viết lại thành $y_1 = qf(x_1)$, do đó M_1 thuộc đồ thị của hàm số $y = qf(x)$. □

1.5 Đường Tiệm Cận của Đồ Thị Hàm Số

1.5.1 Đường tiệm cận đứng & đường tiệm cận ngang

"Ta đã biết đồ thị của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ là đường hyperbol gồm 2 nhánh nằm trong góc phần 4 thứ nhất & thứ 3 của mặt phẳng tọa độ.

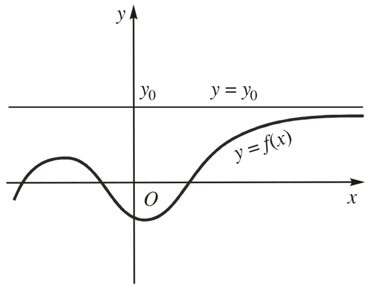


Hình 3: Đồ thị của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$, **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**.

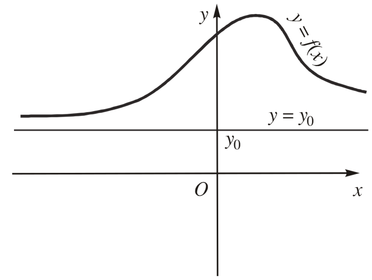
Ta có: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$. I.e., khoảng cách $MH = |f(x)|$ từ điểm M của đồ thị đến trục hoành dần đến 0 khi điểm M theo đường hyperbol đi xa ra vô tận về phía phải hoặc phía trái. Người ta gọi trục hoành là *đường tiệm cận ngang* của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$. Ta cũng có: $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ & $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. I.e., khoảng cách $NK = |x|$ từ 1 điểm N của đồ thị đến trục tung dần đến 0 khi điểm N theo đồ thị đi xa ra vô tận về phía trên hoặc phía dưới. Người ta gọi trục tung là *đường tiệm cận đứng* của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$. 1 cách tổng quát, ta có:

Định nghĩa 1.5 (Tiệm cận ngang)**.** *Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là* đường tiệm cận ngang *(gọi tắt là* tiệm cận ngang*) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0$.*

Định nghĩa 1.6 (Tiệm cận đứng)**.** *Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là* đường tiệm cận đứng *(gọi tắt là* tiệm cận đứng*) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất 1 trong các điều kiện sau được thỏa mãn: $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$." –* **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao***; Quỳnh, Dũng, et al., 2020, p. 10–11*

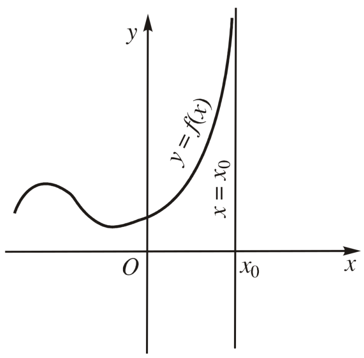


(a) Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to +\infty$).

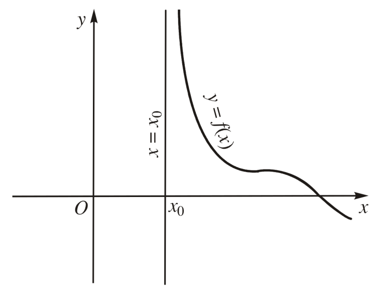


(b) Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to -\infty$).

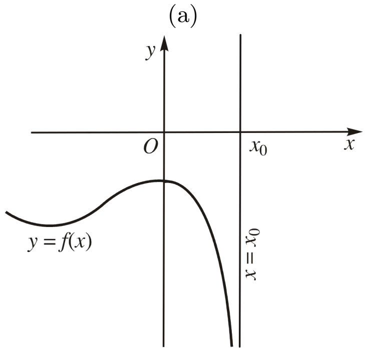
Hình 4: Tiệm cận ngang của đồ thị, **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**.



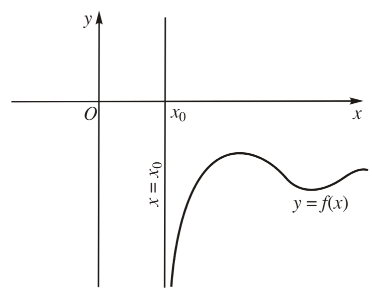
(a)



(b)



(c)

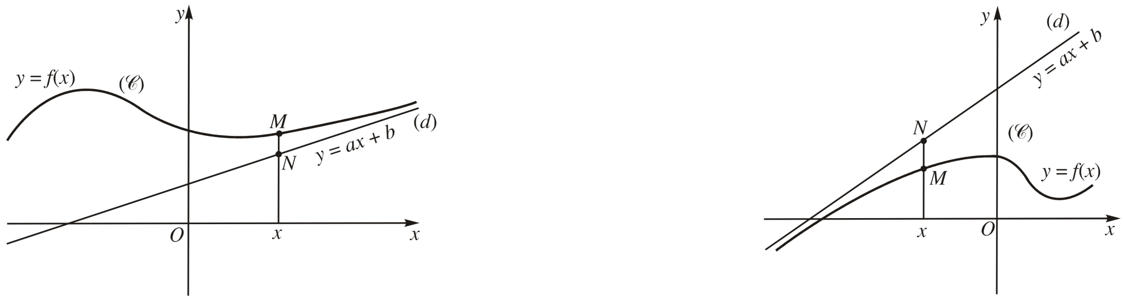


(d)

Hình 5: (a) & (c) Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \to x_0^-$), (b) & (d) Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \to x_0^+$), **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**.

1.5.2 Đường tiệm cận xiên

"Cho $(\mathcal{C})$ là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ & (d) là đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$. Gọi M & N là 2 điểm của $(\mathcal{C})$ & (d) có cùng hoành độ x (Fig. 6).



(a) Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to +\infty$).

(b) Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to -\infty$).

Hình 6: Tiệm cận xiên của đồ thị, **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**.

Nếu độ dài của đoạn thẳng MN dần đến 0 khi x dần đến $+\infty$ (hoặc khi x dần đến $-\infty$) thì đường thẳng (d) được gọi là *đường tiệm cận xiên* của $(\mathcal{C})$. Vì $MN = |f(x) - (ax+b)|$ nên ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 1.7 (Tiệm cận xiên)**.** *Đường thẳng $y = ax + b$, $a \neq 0$, được gọi là* đường tiệm cận xiên *(*gọi tắt là tiệm cận xiên*) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (ax+b)] = 0$, hoặc $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (ax+b)] = 0$."* – **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao***; Quỳnh, Dũng, et al., 2020, p. 13*

Lưu ý 1.4. *"Để xác định các hệ số a, b trong phương trình của đường tiệm cận xiên, ta có thể áp dụng các công thức sau: $a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - ax]$, hoặc $a = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - ax]$. (Khi $a = 0$ thì ta có tiệm cận ngang).*

Chứng minh. Thật vậy, xét trường hợp $x \to +\infty$, giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(\alpha; +\infty)$ & đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ (khi $x \to +\infty$). Khi đó, theo định nghĩa 1.7, ta có $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (ax+b)] = 0$ (1). Do đó $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-(ax+b)}{x} = 0$, i.e., $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right] = 0$. Vì $\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{x} = 0$ nên $a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ (2). Từ (1) suy ra $b = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - ax]$ (3). Đảo lại, nếu a & b thỏa mãn (2) & (3) thì từ (3) suy ra (1). Do đó đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $a \neq 0$ & là tiệm cận ngang nếu $a = 0$. Trường hợp $x \to -\infty$ được chứng minh tương tự." – **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**; Quỳnh, Dũng, et al., 2020, pp. 14–15 □

1.6 Khảo Sát Sự Biến Thiên & Vẽ Đồ Thị của 1 Số Hàm Đa Thức

1.6.1 Các bước khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số

"Khi khảo sát & vẽ đồ thị của hàm số, ta tiến hành các bước sau đây: **1.** Tìm tập xác định của hàm số. **2.** Xét sự biến thiên của hàm số. (a) Tìm giới hạn tại vô cực & giới hạn vô cực (nếu có) của hàm số. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị (nếu có). (b) Lập bảng biến thiên của hàm số, bao gồm: Tìm đạo hàm của hàm số, xét dấu đạo hàm, xét chiều biến thiên & tìm cực trị của hàm số (nếu có), điền các kết quả vào bảng. **3.** Vẽ đồ thị của hàm số. (a) Vẽ các đường tiệm cận của đồ thij (nếu có). (b) Xác định 1 số điểm đặc biệt của đồ thị, e.g. tìm giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ. (Trong trường hợp đồ thị không cắt các trục tọa độ hoặc việc tìm tọa độ giao điểm phức tạp thì bỏ qua phần này). (c) Nhận xét về đồ thị: Chỉ ra trục & tâm đối xứng của đồ thị (nếu có, không yêu cầu chứng minh)." – **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**

"Để khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của 1 hàm số bất kỳ, ta thực hiện các bước như sau: **1.** Tìm tập xác định của hàm số. **2.** Khảo sát sự biến thiên của hàm số. (a) Tìm 1 số giới hạn của hàm số: giới hạn tại vô cực & giới hạn vô cực. Tìm các tiệm cận của đồ thị. (b) Lập bảng biến thiên của hàm số: • Tìm đạo hàm y' của hàm số. • Xét dấu y'. Từ đó suy ra chiều biến thiên & tìm cực trị của hàm số. • Điền các kết quả vào bảng biến thiên. **3.** Tìm điểm uốn của đồ thị hàm số: Tìm đạo hàm y''; xét dấu y'', từ đó suy ra các điểm uốn của đồ thị hàm số. **4.** Vẽ đồ thị của hàm số: • Vẽ các đường tiệm cận của đồ thị (nếu có). • Xác định các điểm cực trị. Tìm các điểm đặc biệt khác của đồ thị (giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ ...). • Vẽ đồ thị của hàm số. • Nhận xét về đồ thị: chỉ ra trục đối xứng & tâm đối xứng của đồ thị (nếu có)." – Quỳnh, Dũng, et al., 2020, pp. 16–17

1.6.2 Khảo sát 1 số hàm số đa thức

1.6.2.1 Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$.

Điểm uốn của đồ thị

Định nghĩa 1.8. *"Điểm $U(x_0; f(x_0))$ được gọi là* điểm uốn *của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu tồn tại 1 khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 sao cho trên 1 trong 2 khoảng $(a; x_0)$ & $(x_0; b)$ tiếp tuyến của đồ thị tại điểm U nằm phía trên đồ thị còn trên khoảng kia tiếp tuyến nằm phía dưới đồ thị.*

Người ta nói rằng tiếp tuyến tại điểm uốn xuyên qua đồ thị. Để tìm điểm uốn của đồ thị có thể sử dụng điều khẳng định đã được chứng minh sau đây.

Định lý 1.12. *Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên 1 khoảng chứa điểm x_0, $f''(x_0) = 0$ & $f''(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_0 thì $U(x_0; f(x_0))$ là 1 điểm uốn của đồ thị hàm số $y = f(x)$."*

"Dễ chứng minh được rằng:

Định lý 1.13. *Đồ thị của hàm số bậc 3 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a \neq 0)$ luôn có 1 điểm uốn & điểm đó là tâm đối xứng của đồ thị."* – **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**

1.6.2.2 Hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ là hàm số chẵn nên đồ thị của nó nhận trục tung làm trục đối xứng.

Lưu ý 1.5. *"Gọi $(\mathcal{C})$ là đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, $(a \neq 0)$. Người ta chứng minh được rằng: • Nếu phương trình $f''(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x = \pm x_0$ $(x_0 > 0)$ thì đồ thị $(\mathcal{C})$ có 2 điểm uốn $U_1(x_0; f(x_0))$ & $U_2(-x_0; f(-x_0))$ đối xứng với nhau qua trục tung. • Nếu phương trình $f''(x) = 0$ có 1 nghiệm kép hoặc vô nghiệm thì đồ thị $(\mathcal{C})$ không có điểm uốn."* – **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**

1.7 Khảo Sát Sự Biến Thiên & Vẽ Đồ Thị của 1 Số Hàm Phân Thức Hữu Tỷ

1.7.1 Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0$ & $ad - bc \neq 0)$

1.7.2 Hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}$ $(a \neq 0, a' \neq 0)$

1.8 1 Số Bài Toán Thường Gặp về Đồ Thị

1.8.1 Giao điểm của 2 đồ thị

"Các đồ thị của 2 hàm số $y = f(x)$ & $y = g(x)$ cắt nhau tại điểm $M(x_0; y_0)$ khi & chỉ khi $y_0 = f(x_0)$ & $y_0 = g(x_0)$, i.e., $(x_0; y_0)$ là 1 nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = f(x), \\ y = g(x). \end{cases}$$

Như vậy hoành độ giao điểm của 2 đồ thị trên là nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$. Số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ bằng số giao điểm của 2 đồ thị." – **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**

Bài toán 1.1. *Với các giá trị nào của a, b, c, m, đường thẳng $y = m$ cắt đường cong $y = ax^4 + bx^2 + c$, $(a \neq 0)$, tại 4 điểm phân biệt?*

Giải. Hoành độ giao điểm của đường thẳng & đường cong đã cho là nghiệm của phương trình $ax^4 + bx^2 + c = m$, i.e., $ax^4 + bx^2 + c - m = 0$. Đặt $X = x^2$, $X \geq 0$, ta được $aX^2 + bX + c - m = 0$. Đường thẳng cắt đường cong đã cho tại 4 điểm phân biệt khi & chỉ khi phương trình $ax^4 + bx^2 + c - m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi & chỉ khi phương trình $aX^2 + bX + c - m = 0$ có 2 nghiệm dương X_1, X_2 phân biệt, i.e.,

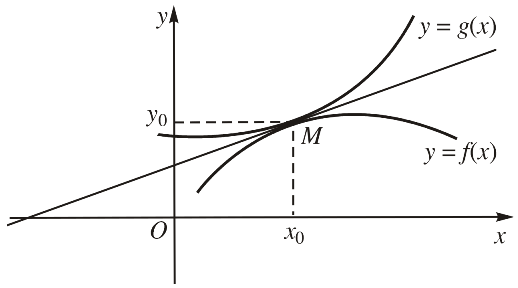
$$\begin{cases} \Delta > 0, \\ X_1X_2 > 0, \\ X_1 + X_2 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 4a(c-m) > 0, \\ c - m > 0, \\ b < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4am > 4ac - b^2, \\ m < c, \\ b < 0, \end{cases}$$

Để đơn giản tiếp, xét dấu của a. Nếu $a > 0$, hệ bất phương trình cuối tương đương với $(b < 0) \wedge \left(m \in \left(c - \frac{b^2}{4a}; c\right)\right)$. Nếu $a < 0$, hệ bất phương trình cuối tương đương với $(b < 0) \wedge (m < c)$. Vậy tập hợp các bộ (a, b, c, m) thỏa mãn là $\left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4; b < 0, \left(a > 0, m \in \left(c - \frac{b^2}{4a}; c\right)\right) \vee (a < 0, m < c)\right\}$. □

1.8.2 Sự tiếp xúc của 2 đường cong

Định nghĩa 1.9 (2 đường cong tiếp xúc, tiếp điểm)**.** *"Giả sử 2 hàm số f & g có đạo hàm tại điểm x_0. Ta nói rằng 2 đường cong $y = f(x)$ & $y = g(x)$* tiếp xúc *với nhau tại điểm $M(x_0; y_0)$ nếu M là 1 điểm chung của chúng & 2 đường cong có tiếp tuyến chung tại điểm M. Điểm M được gọi là* tiếp điểm *của 2 đường cong đã cho.*

Hiển nhiên các đồ thị của 2 hàm số đã cho tiếp xúc với nhau tại điểm $M(x_0;y_0)$ (Fig. 7) khi & chỉ khi $y_0 = f(x_0)$, $y_0 = g(x_0)$ & $f'(x_0) = g'(x_0)$.



Hình 7: 2 đường cong tiếp xúc nhau, **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**.

Từ đó dễ dàng suy ra rằng

Định lý 1.14. *2 đường cong $y = f(x)$ & $y = g(x)$ tiếp xúc với nhau khi & chỉ khi hệ phương trình*

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f'(x) = g'(x), \end{cases}$$

có nghiệm & nghiệm của hệ phương trình trên là hoành độ tiếp điểm của 2 đường cong đó.” – **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_ca**

Bài toán 1.2 (**SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**, Ví dụ 3, pp. 53–54)**.** *“Chứng minh rằng đường thẳng $y = px + q$ là tiếp tuyến của parabol $y = ax^2 + bx + c$ khi & chỉ khi phương trình $ax^2 + bx + c = px + q$ hay*

$$ax^2 + (b - p)x + c - q = 0 \tag{1.1}$$

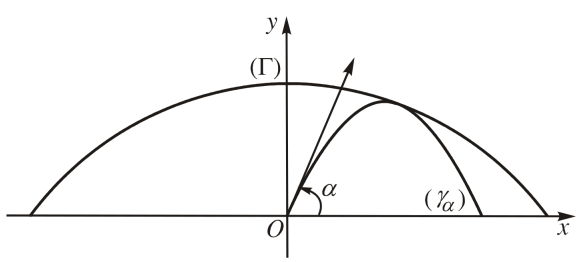
có nghiệm kép, i.e., $\Delta = (b - p)^2 - 4(c - q) = 0$.

Chứng minh. Đường thẳng & parabol đã cho tiếp xúc với nhau khi & chỉ khi hệ phương trình

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = px + q, \\ (ax^2 + bx + c)' = (px + q)' \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} ax^2 + (b - p)x + c - q = 0, \\ 2ax + b = p, \end{cases} \tag{1.2}$$

có nghiệm. Nếu đường thẳng tiếp xúc với parabol thì hệ phương trình trên có nghiệm. Giả sử $x = x_0$ là nghiệm của hệ phương trình trên. Khi đó, vì $a \neq 0$ nên từ (1.2) ta có $x_0 = \frac{p-b}{2a}$. Thay vào (1.1), ta được $a\frac{(p-b)^2}{4a^2} + (b - p)\frac{p-b}{2a} + c - q = 0$. Từ đó suy ra $(b - p)^2 - 4a(c - q) = 0$. Vậy phương trình (1.1) có nghiệm kép. Đảo lại, nếu phương trình (1.1) có nghiệm kép x_0 thì $x_0 = \frac{p-b}{2a}$. Hiển nhiên $x = x_0$ cũng là nghiệm của phương trình (1.2). Vậy hệ phương trình trên có nghiệm. Do đó đường thẳng là tiếp tuyến của parabol.” – **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao** □

Bài toán 1.3 (**SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**, **61.**, p. 56)**.** *1 viên đạn được bắn ra với vận tốc ban đầu $v_0 > 0$ từ 1 nòng súng đặt ở gốc tọa độ O, nghiêng 1 góc α với mặt đất (nòng súng nằm trong mặt phẳng thẳng đứng Oxy & tạo với trục hoành Ox góc α) (Fig. 8)*



Hình 8: Quỹ đạo chuyển động của viên đạn là parabol, **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**.

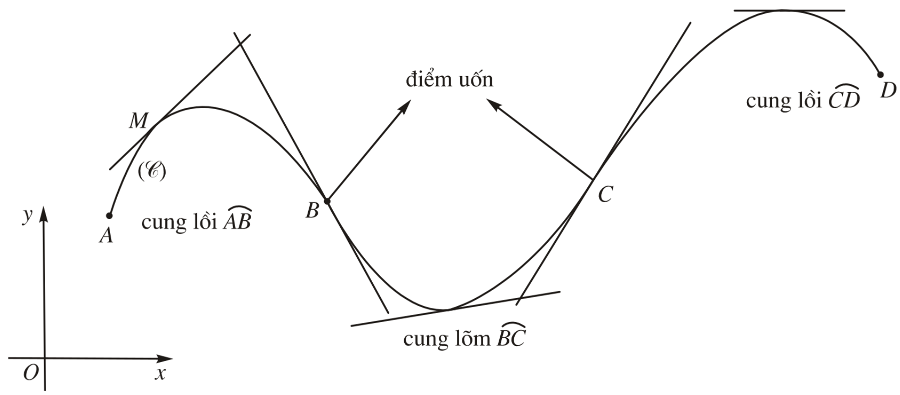
Biết quỹ đạo chuyển động của viên đạn là parabol.

$$(\gamma_\alpha): \ y = -\frac{g}{2v_0^2}(1 + \tan^2\alpha)x^2 + x\tan\alpha,$$

(g là gia tốc trọng trường*). Chứng minh rằng với mọi $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, (γ_α) luôn tiếp xúc với parabol (Γ) có phương trình là $y = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + \frac{v_0^2}{2g}$ & tìm tọa độ tiếp điểm ((Γ) được gọi là* parabol an toàn*).*

1.9 Tính Lồi, Lõm & Điểm Uốn của Đường Cong

"Đường cong $(\mathcal{C})$ trên Fig. 9 gồm 3 cung $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}$, & $\overset{\frown}{CD}$. Ta thấy tiếp tuyến của đường cong tại mỗi điểm M của cung $\overset{\frown}{AB}$ đều nằm phía trên của cung; nguowif ta gọi $\overset{\frown}{AB}$ là 1 *cung lồi*. Trái lại, tiếp tuyến tại mỗi điểm của cung $\overset{\frown}{BC}$ nằm phía dưới của cung; $\overset{\frown}{BC}$ được gọi là 1 *cung lõm*. Điểm B là điểm phân chia 2 cung lồi & cung lõm của đường cong; người ta gọi nó là 1 *điểm uốn* của đường cong $(\mathcal{C})$. Tương tự, C cũng là 1 điểm uốn vì nó phân chia cung lõm $\overset{\frown}{BC}$ & cung lồi $\overset{\frown}{CD}$. Ta cũng thấy tiếp tuyến của đường cong tại điểm uốn xuyên qua đường cong." – **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**



Hình 9: Đường cong $(\mathcal{C})$ gồm 3 cung, **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**.

1.9.1 Tính lồi, lõm của đồ thị

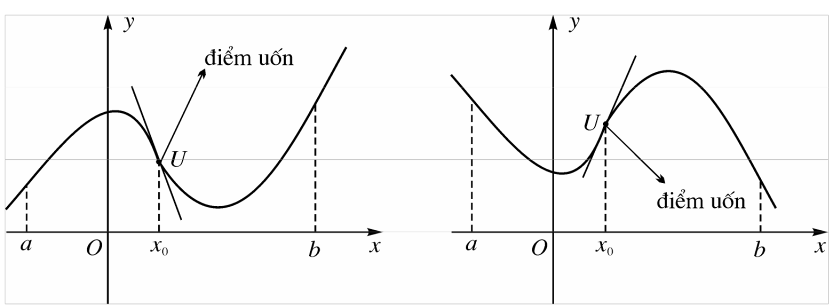
Định nghĩa 1.10 (Đồ thị lồi/lõm)**.** *"Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I. Ta nói rằng: (a) Đồ thị $(\mathcal{C})$ của hàm số $y = f(x)$ lồi trên khoảng I nếu tiếp tuyến của $(\mathcal{C})$ tại mỗi điểm của nó đều nằm phía trên đồ thị. (b) Đồ thị $(\mathcal{C})$ của hàm số $y = f(x)$ lõm trên khoảng I nếu tiếp tuyến của $(\mathcal{C})$ tại mỗi điểm của nó đều nằm phía dưới đồ thị."*

Định lý 1.15. *"Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp 3 trên khoảng I. Khi đó: (a) Nếu $f''(x) < 0, \forall x \in I$ thì đồ thị $(\mathcal{C})$ của hàm số $y = f(x)$ lồi trên I. (b) Nếu $f''(x) > 0, \forall x \in I$ thì đồ thị $(\mathcal{C})$ của hàm số $y = f(x)$ lõm trên I."*

Lưu ý 1.6. *"Điều kiện nêu trong định lý trên chỉ là điều kiện đủ chứ không phải điều kiện cần của tính lồi, lõm của đồ thị. E.g., đường cong $f(x) = x^4$ là lõm trên $\mathbb{R}$ vì tiếp tuyến của đường cong tại mỗi điểm của nó đều nằm phía dưới đường cong. Tuy nhiên, ta có $f''(x) = 12x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ & $f''(x) = 0$ tại $x = 0$."* – **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**

1.9.2 Điểm uốn của đồ thị

Định nghĩa 1.11 (Điểm uốn)**.** *"Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0. Nếu đồ thị $(\mathcal{C})$ của hàm số $y = f(x)$ lồi trên 1 trong 2 khoảng $(a;x_0)$, $(x_0;b)$ & lõm trên khoảng còn lại thì $U(x_0;f(x_0))$ được gọi là* điểm uốn *của đồ thị $(\mathcal{C})$ (Fig. 10).*



Hình 10: Điểm uốn của đồ thị, **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**.

I.e., điểm uốn của đồ thị là điểm phân chia 2 phần lồi & lõm của đồ thị. Tiếp tuyến của đồ thị tại điểm uốn luôn xuyên qua đồ thị. Từ định lý về tính lồi, lõm của đồ thị, dễ dàng suy ra:

Định lý 1.16. *Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp 2 trên khoảng I chứa điểm x_0. Nếu $f''(x_0) = 0$ & $f''(x)$ đổi dấu khi x qua điểm $x0$ thì $U(x_0;f(x_0))$ là 1 điểm uốn của đồ thị hàm số $y = f(x)$."* – **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**

2 Hàm Số Lũy Thừa, Hàm Số Mũ, & Hàm Số Logarith

2.1 Lũy Thừa với Số Mũ Hữu Tỷ

2.1.1 Lũy thừa với số mũ nguyên

Để có khái niệm lũy thừa với số mũ nguyên, ta còn phải định nghĩa lũy thừa với số mũ 0 & số mũ nguyên âm.

2.1.1.1 Lũy thừa với số mũ 0 & số mũ nguyên âm

Định nghĩa 2.1 (Lũy thừa với số mũ nguyên âm)**.** *Với $a \neq 0$, $n = 0$ hoặc n là 1 số nguyên âm,* lũy thừa bậc n của a là số a^n *xác định bởi* $a^0 = 1$, $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$.

Ví dụ 2.1. *Sử dụng lũy thừa với số mũ nguyên của* 10 *để biểu diễn 1 số thập phân dạng* $\overline{a_na_{n-1}\ldots a_1a_0.a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-m}}$*, với* $m, n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $i = -m,\ldots,n$, $a_n \neq 0$, $a_{-m} \neq 0$:

$$\overline{a_na_{n-1}\ldots a_1a_0.a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-m}} = \sum_{i=-m}^{n} 10^i a_i = 10^{-m}a_{-m} + \cdots + 10^{-1}a_{-1} + a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^{n-1}a_{n-1} + 10^n a_n.$$

Lưu ý 2.1. *(a) "Các ký hiệu* 0^0, 0^n *(n nguyên âm) không có nghĩa. (b)* $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$, $\forall a \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. *(c) Người ta thường dùng các lũy thừa của 10 với số mũ nguyên để biểu thị những số rất lớn & những số rất bé. E.g., khối lượng của Trái Đất là* $5.97 \cdot 10^{24}$ *kg, khối lượng nguyên tử của hydro là* $1.66 \cdot 10^{-24}$ *g, trò chơi Rubik có hơn* $4 \cdot 10^{19}$ *cách sắp xếp." –* **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**

2.1.1.2 Tính chất của lũy thừa với số mũ nguyên

Quy tắc tính. "Từ định nghĩa lũy thừa với số mũ của 1 số, ta thấy các quy tắc tính toán cho lũy thừa với số mũ tự nhiên vẫn còn đúng với số mũ nguyên." – **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**

Định lý 2.1. $\forall a \neq 0, b \neq 0$, $\forall m,n \in \mathbb{Z}$, *(a)* $a^ma^n = a^{m+n}$*; (b)* $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$*; (c)* $(a^m)^n = a^{mn}$*; (d)* $(ab)^n = a^nb^n$*; (e)* $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

So sánh các lũy thừa.

Định lý 2.2. *Cho* $m, n \in \mathbb{Z}$*. Khi đó: (a) Với* $a > 1$ *thì* $a^m > a^n$ *khi & chỉ khi* $m > n$*; (b) Với* $0 < a < 1$ *thì* $a^m > a^n$ *khi & chỉ khi* $m < n$.

Hệ quả 2.1. *Với* $0 < a < b$ *&* $m \in \mathbb{Z}$ *thì (a)* $a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0$*; (b)* $a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$.

Chứng minh. "Vì $0 < a < b$ nên $\frac{b}{a} > 1$ & $0 < \frac{a}{b} < 1$. Theo (a) của định lý 2.2, ta có $\left(\frac{b}{a}\right)^m > \left(\frac{b}{a}\right)^0 \Leftrightarrow m > 0$, hay $a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0$. Theo (b) của định lý 2.2, ta có $\left(\frac{a}{b}\right)^m > \left(\frac{a}{b}\right)^0 \Leftrightarrow m < 0$, hay $a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$." – **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao** □

Hệ quả 2.2. *Với* $a < b$, $n \in \mathbb{N}$, *n lẻ thì* $a^n < b^n$.

Hệ quả 2.3. *Với* $a, b > 0$, $n \in \mathbb{Z}^\star$ *thì* $a^n = b^n \Leftrightarrow a = b$.

2.1.2 Căn bậc n & lũy thừa với số mũ hữu tỷ

Định nghĩa 2.2 (Căn bậc n)**.** *"Với* $n \in \mathbb{N}^\star$, căn bậc n *của* $a \in \mathbb{R}$ *là* $b \in \mathbb{R}$ *sao cho* $b^n = a$."

Mệnh đề 2.1. *"Khi n là số lẻ, mỗi* $a \in \mathbb{R}$ *chỉ có 1 căn bậc n. Căn đó được ký hiệu là* $\sqrt[n]{a}$*. Khi n là số chẵn, mỗi* $a \in (0;+\infty)$ *có đúng 2 căn bậc n là 2 số đối nhau. Căn có giá trị dương ký hiệu là* $\sqrt[n]{a}$ *(còn gọi là* căn số học bậc n *của a), căn có giá trị âm ký hiệu là* $-\sqrt[n]{a}$*. Đặc biệt,* $\sqrt[2]{a}$ *được ký hiệu đơn giản là* $\sqrt{2}$*." –* **SGK_Toan_12_giai_tich_nang_cao**

Nhận xét 2.1. *(a) Căn bậc 1 của số a chính là a. (b) Căn bậc n của số 0 là 0. (c) Số âm không có căn bậc chẵn vì lũy thừa bậc chẵn của 1 số thực bất kỳ là số không âm. (d) Với* $n \in \mathbb{N}$*, n lẻ, ta có* $\sqrt[n]{a} > 0$ *khi* $a > 0$, $\sqrt[n]{a} < 0$ *khi* $a < 0$*. (e)*

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{khi } n \text{ lẻ}, \\ |a|, & \text{khi } n \text{ chẵn}. \end{cases}$$

2.2 Lũy Thừa với Số Mũ Thực

2.3 Logarithm

2.4 Số e & Logarith Tự Nhiên

2.5 Hàm Số Mũ & Hàm Số Logarithm

2.6 Hàm Số Lũy Thừa

2.7 Phương Trình Mũ & Logarithm

2.8 Hệ Phương Trình Mũ & Logarithm

2.9 Bất Phương Trình Mũ & Logarithm

3 Nguyên Hàm, Tích Phân, & Ứng Dụng

3.1 Nguyên Hàm

3.2 1 Số Phương Pháp Tìm Nguyên Hàm

3.3 Tích Phân

3.4 1 Số Phương Pháp Tính Tích Phân

3.5 Ứng Dụng Tích Phân Để Tính Diện Tích Hình Phẳng

3.6 Ứng Dụng Tích Phân Để Tính Thể Tích Vật Thể

4 Số Phức

4.1 Số Phức

4.2 Căn Bậc 2 của Số Phức & Phương Trình Bậc 2

4.3 Dạng Lượng Giác của Số Phức & Ứng Dụng

5 Khối Đa Diện & Thể Tích của Chúng

Nội dung. Khối đa diện, hình đa diện, sự bằng nhau & sự đồng dạng của các khối đa diện, các khối đa diện đều; công thức tính thể tích khối chóp, khối lăng trụ, các tính thể tích các khối phức tạp hơn.

5.1 Khái Niệm về Khối Đa Diện

5.1.1 Khối đa diện. Khối chóp, khối lăng trụ

Định nghĩa 5.1 (Khối đa diện)**.** *"1 tập hợp điểm $\mathcal{H} \neq \emptyset$ & không nằm trên 1 mặt phẳng được gọi là* hình đa diện *nếu nó là hợp của 1 số hữu hạn các miền đa giác phẳng (mà ta gọi là các* mặt của hình đa diện *$\mathcal{H}$) có các tính chất sau đây: (a) 2 mặt phân biệt của $\mathcal{H}$ hoặc không có điểm chung, hoặc có 1 đỉnh chung, hoặc có 1 cạnh chung. (b) Mỗi cạnh của mặt nào cũng là cạnh chung của đúng 2 mặt. (c) Với 2 mặt bất kỳ s & s' của $\mathcal{H}$, luôn luôn có 1 dãy các mặt $(s_i)_{i=1}^n$ sao cho s_i & s_{i+1} có cạnh chung, với s_1 là s, s_n là s'.*

Các đỉnh, các cạnh của các mặt gọi là *đỉnh* & *cạnh* của đa diện $\mathcal{H}$. Mỗi mặt của $\mathcal{H}$ là 1 tam giác, tứ giác, ..., nói chung là 1 p-giác với $p \geq 3$. Góc ở đỉnh của 1 mặt nào đó của $\mathcal{H}$ gọi là *1 góc phẳng ở đỉnh* của $\mathcal{H}$. Mỗi đỉnh của $\mathcal{H}$ là đỉnh chung của q mặt ($q \geq 3$), tức cũng là đỉnh chung của q cạnh. Tập hợp các góc phẳng ở 1 đỉnh nào đó của $\mathcal{H}$ tạo thành 1 góc đa diện gọi là *góc đa diện* của $\mathcal{H}$ (tại đỉnh ấy). Như vậy $\mathcal{H}$ có thể có các góc tam diện, các góc tứ diện, ..." – Quỳnh, Anh, et al., 2017, p. 5

5.2 Phép Đối Xứng qua Mặt Phẳng & Sự Bằng Nhau của Các Khối Đa Diện

5.3 Phép Vị Tự & Sự Đồng Dạng của Các Khối Đa Diện. Các Khối Đa Diện Đều

5.4 Thể Tích của Khối Đa Diện

6 Mặt Cầu, Mặt Trụ, Mặt Nón

6.1 Mặt Cầu, Khối Cầu

6.2 Khái Niệm về Mặt Tròn Xoay

6.3 Mặt Trụ, Hình Trụ, & Khối Trụ

6.4 Mặt Nón, Hình Nón, & Khối Nón

7 Phương Pháp Tọa Độ Trong Không Gian

7.1 Hệ Tọa Độ Trong Không Gian

7.2 Phương Trình Mặt Phẳng

7.3 Phương Trình Đường Thẳng

Tài liệu

Quỳnh, Đoàn, Hạ Vũ Anh, et al. (2017). *Tài Liệu Chuyên Toán Hình Học 12*. Tái bản lần thứ 3. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 344.

Quỳnh, Đoàn, Trần Nam Dũng, et al. (2020). *Tài Liệu Chuyên Toán Giải Tích 12*. Tái bản lần thứ 4. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 364.