

## **Universitäts- und Landesbibliothek Tirol**

**Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik**

**Oseen, Carl Wilhelm**

**Leipzig, 1927**

[urn:nbn:at:at-ubi:2-5756](#)

# MATHEMATIK UND IHRE ANWENDUNGEN IN MONOGRAPHIEN UND LEHRBÜCHERN

HERAUSGEGEBEN VON

E. HILB

O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT WÜRZBURG

BAND 1:

C. W. OSEEN

NEUERE METHODEN UND ERGEBNISSE  
IN DER HYDRODYNAMIK



LEIPZIG 1927

AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT M. B. H.



NEUERE  
METHODEN UND ERGEBNISSE  
IN DER  
HYDRODYNAMIK

VON

C. W. OSEEN

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT UPSALA

MIT 7 TEXTFIGUREN



LEIPZIG 1927  
AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT M. B. H.



Printed in Germany  
Druck vom Bibliographischen Institut in Leipzig

## Einleitung.

In dem großen Briefe an Oldenburg, in welchem Spinoza diesem Freund seine Bemerkungen über Robert Boyles „New experiments touching the spring of the Air“ mitteilte, kommt der folgende Passus vor:

„Endlich, um auch dies nebenher zu bemerken, genügt es zum allgemeinen Verständnis der Natur der Flüssigkeiten, zu wissen, daß man seine Hand in einer Flüssigkeit mit einer ihr proportionierten Bewegung in allen Richtungen ohne Widerstand bewegen kann; was denen hingänlich bekannt, die genau auf jene Begriffe achten, welche die Natur erklären, wie sie an sich ist, statt in ihrer Beziehung zur menschlichen Sinneswahrnehmung. Gleichwohl halte ich diese Beschreibung nicht für wertlos, im Gegenteil würde ich eine ebenso genaue und treue Beschreibung jeder Flüssigkeit für äußerst nützlich zum Verständnis ihrer Eigenart erachten, was ja als höchst wichtig von allen Philosophen erstrebt wird.“\*

Die Eigenschaft der „idealen“ Flüssigkeiten, bei stationärer Bewegung keinen Widerstand gegen einen Körper zu leisten, die Spinoza hier (1662?) erwähnt, wurde im achtzehnten Jahrhundert mit dem Namen „das Paradoxon von d'Alembert“ oder „das Paradoxon von Euler“ belegt.

Der Beweggrund für die Untersuchungen des Verfassers, über welche dieses Buch berichtet, war der Wunsch, durch das Studium der Bewegungen der wirklichen, zähen Flüssigkeiten auf dieses Paradoxon Licht zu werfen. In der Zeit, in welcher diese Untersuchungen angefangen wurden, war die Theorie der partiellen Differentialgleichungen ein beliebter Gegenstand der mathematischen Forschung. Es schien mir eine verlockende Aufgabe, die Methoden, welche in diesem Teile der reinen Mathematik gewonnen waren, zur Lösung jenes Rätsels anzuwenden.

Um eine Grundlage für folgende Untersuchungen zu gewinnen, hatte ich zuerst die linearen Systeme von partiellen Differentialgleichungen zu

---

\* Übersetzung von J. Stern.

untersuchen, welche man aus den Bewegungsgleichungen einer zähen Flüssigkeit durch Weglassen der quadratischen Glieder erhält. Ich hatte die Grundlösungen jener Systeme zu bestimmen. Über diese Untersuchungen berichtet der erste Teil dieses Buches.

Die oben erwähnten linearen Systeme von partiellen Differentialgleichungen, welche man aus den vollständigen hydrodynamischen Differentialgleichungen durch Weglassen der quadratischen Glieder erhält, gelten annähernd für langsame Bewegungen einer zähen Flüssigkeit. Durch die Kolloidchemie hat dieses Gebiet der langsamen Bewegungen wissenschaftliche Bedeutung bekommen. Meine Beschäftigung mit dem Gegenstand gab mir die Lösung eines hydrodynamischen Rätsels auf diesem Gebiete, des Paradoxons von Whitehead. Lamb zeigte, daß auch ein anderes hydrodynamisches Rätsel, das Paradoxon von Stokes, durch meine Methoden seine Lösung findet. Faxén hat im Anschluß an meine Arbeiten die Theorie der langsamen Flüssigkeitsbewegungen durch ausgedehnte und wertvolle Untersuchungen gefördert. Ich hoffe, daß die Zusammenstellung der auf diesem Gebiete in den letzten Jahren gewonnenen Ergebnisse, welche ich im zweiten Teile meines Buches gebe, für die Kolloidchemie willkommen sein wird.

Das Hauptziel meiner Untersuchungen war aber, den Grenzübergang zu verschwindender Zähigkeit in exakter Weise auszuführen. Dieses Ziel habe ich noch nicht erreicht. Dagegen konnte ich in den linearen Systemen, von welchen ich oben gesprochen habe, den Grenzübergang ausführen. Die Ergebnisse, welche ich dabei erhielt, stehen in schroffem Widerspruch zu der Theorie der idealen Flüssigkeiten, dagegen in qualitativer Übereinstimmung mit dem Verhalten der wirklichen Flüssigkeiten. Schon aus diesen Tatsachen schien mir hervorzugehen, daß das d'Alembertsche Paradoxon auf einem schlecht vollzogenen Grenzübergange zu verschwindender Zähigkeit beruht. Die Untersuchungen von Zeilon, der auf diesem Gebiete meine Arbeit fortgeführt hat, haben gezeigt, daß mein Grenzübergang weit mehr als dieses negative Resultat ergibt. In bezug auf den Widerstand gibt er zwar nicht genau, aber doch der Größenordnung nach richtige Werte. Und von der Druckverteilung auf der Vorderseite eines Körpers gibt er ein auch quantitativ fast richtiges Bild. Über diese Dinge berichtet der dritte Teil des Buches.

Durch Untersuchungen, welche noch nicht veröffentlicht sind, hat Zeilon gezeigt, daß man durch einen weiteren Ausbau meines Ansatzes die Übereinstimmung mit den Tatsachen zu einer fast vollständigen machen kann. Auch hat er den Magnuseffekt in sehr schöner Weise behandelt. Es war mir nicht möglich, diese neuen Ergebnisse in mein

Buch aufzunehmen. Einen Ersatz ergeben zwei Vorträge von Herrn Zeilon, welche im Anhange mitgeteilt werden.

Um die Übersicht zu erleichtern und die Bedeutung der verschiedenen Methoden und Resultate zu charakterisieren, geben wir im folgenden eine genauere Übersicht über den Inhalt des Buches, die einige Einzelaussagen bringen wird, die wir im Text nicht wiederholen werden.

Im ersten Paragraphen werden die hydrodynamischen Differentialgleichungen abgeleitet. Als Ausgangspunkt wird dabei der Impulssatz der Newtonschen Mechanik benutzt. Dieser Satz wird auf einen beliebig herausgegriffenen Teil der Flüssigkeit angewandt. Die Beziehungen, welche so erhalten werden, haben die Form von Integralgleichungen. In diesen Integralgleichungen kommen die zunächst unbekannten Kräfte vor, welche die Umgebung des herausgegriffenen Teiles der Flüssigkeit auf jenen Teil ausübt. Die Annahme, daß diese Kräfte von der Formänderung der Flüssigkeit abhängen, ermöglicht es, einen Ansatz für sie zu gewinnen. Aus den Integralgleichungen, welche keine andere Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten oder des Druckes als die Ableitungen erster Ordnung der Geschwindigkeitskomponenten in bezug auf die Raumkoordinaten enthalten, werden in gewöhnlicher Weise, unter Voraussetzung, daß die Geschwindigkeitskomponenten stetige Ableitungen erster Ordnung in bezug auf die Zeit, zweiter Ordnung in bezug auf die Raumkoordinaten haben und daß der Druck einmal stetig in bezug auf die Raumkoordinaten differenzierbar ist, die hydrodynamischen Differentialgleichungen abgeleitet. Außer den allgemeinen hydrodynamischen Differentialgleichungen werden zwei in speziellen Fällen gültige Formen derselben aufgestellt, nämlich die Gleichungen für stationäre Bewegung in bezug auf ein ruhendes Bezugssystem und die Gleichungen für stationäre Bewegung in bezug auf ein mit konstanter Geschwindigkeit bewegtes Bezugssystem.

Der zweite Paragraph hat den Zweck, die mathematische Methode, welche später verwendet wird, durch ein einfaches Beispiel zu erläutern. Hierzu wird die verallgemeinerte Poissonsche Gleichung benutzt. Es wird gezeigt, wie das innere Problem für diese Gleichung durch Reihenentwicklung nach Potenzen eines Parameters  $\lambda$  auf ein unendliches System von gewöhnlichen Poissonschen Gleichungen zurückgeführt werden kann. Die Lösung der Poissonschen Gleichung mit Hilfe des Greenschen Satzes, der Grundlösung und der ersten Greenschen Funktion wird dargelegt. Betreffs des äußeren Problems wird auf eine charakteristische Schwierigkeit hingewiesen, welche darin ihre Wurzel hat, daß die Lösung nicht mehr in der Umgebung von  $\lambda = 0$  eine analytische

Funktion des Parameters  $\lambda$  ist. Die hydrodynamische Bedeutung dieser Tatsache wird hervorgehoben.

Im dritten Paragraphen wird, nach dem Vorgange von H. A. Lorentz, der verallgemeinerte Greensche Satz für das lineare System der Gleichungen aufgestellt, die man im stationären Falle durch Weglassen der quadratischen Glieder aus den vollständigen hydrodynamischen Gleichungen erhält und die man kurz die Stokesschen Gleichungen nennen kann. Mit Hilfe von Symmetriebetrachtungen werden die Grundlösungen (von H. A. Lorentz) wiedergefunden. Mit Hilfe dieser Grundlösungen werden die vollständigen hydrodynamischen Differentialgleichungen für stationäre Bewegung in ein System von Integrodifferentialgleichungen umgeformt.

Im vierten Paragraphen werden dieselben Aufgaben für die „erweiterten Stokesschen Gleichungen“ gelöst, d. h. für das lineare System von partiellen Differentialgleichungen, welches man durch Weglassen der quadratischen Glieder aus dem System erhält, das für stationäre Bewegung in bezug auf ein mit konstanter Geschwindigkeit bewegtes Bezugssystem gültig ist.

Der fünfte Paragraph gibt die Lösung derselben Aufgaben für das lineare System von Differentialgleichungen, das man durch Weglassen der quadratischen Glieder aus den allgemeinen hydrodynamischen Differentialgleichungen erhält. In diesem Paragraphen wird also das allgemeine vollständige System von hydrodynamischen Differentialgleichungen in ein System von Integrodifferentialgleichungen umgeformt. In diesen Gleichungen kommen keine anderen Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten oder des Druckes vor als die Ableitungen erster Ordnung von den Geschwindigkeitskomponenten in bezug auf die Raumkoordinaten.

In den Paragraphen 1—5 sind die Integralgleichungen — oder genauer Integrodifferentialgleichungen —, welche der unmittelbare Ausdruck der zugrunde gelegten mechanischen Sätze sind und welche nur die Ableitungen erster Ordnung der Geschwindigkeitskomponenten in bezug auf die Raumkoordinaten enthalten, durch Vermittlung der hydrodynamischen Differentialgleichungen und ihrer Grundlösungen in ein neues System von Integrodifferentialgleichungen umgeformt worden, welche ebenfalls nur die Ableitungen erster Ordnung der Geschwindigkeitskomponenten in bezug auf die Raumkoordinaten enthalten. Es ist eine naheliegende Frage, ob man nicht, ohne Vermittlung der Differentialgleichungen, direkt aus den zugrunde gelegten mechanischen Sätzen zu den schließlich Integrodifferentialgleichungen gelangen kann. Para-

graph 6 zeigt, daß dies tatsächlich der Fall ist. Wie aus diesem Bericht über den Inhalt dieses Paragraphen unmittelbar klar sein dürfte, liegt sein Interesse wesentlich auf dem mathematischen Gebiete. Die Kenntnis dieses Paragraphen ist für das Verständnis des folgenden nicht notwendig.

Paragraph 7 gibt eine erste Anwendung der gefundenen Integrodifferentialgleichungen. Es handelt sich um die Berechnung der Bewegung einer zähen, den ganzen Raum erfüllenden Flüssigkeit, wenn die Geschwindigkeit in einem gewissen Momente,  $t = T$ , bekannt ist und der Kontinuitätsgleichung genügt. Man kann diese Aufgabe mittelst der im zweiten Paragraphen dargelegten Methode der Reihenentwicklung nach den Potenzen eines Parameters angreifen. Es war leider bei der Darstellung dieser Untersuchungen nicht möglich, die Beweise für die mitgeteilten Sätze vollständig zu geben. Betreffend einiger Integralabschätzungen mußte ich auf die Originalabhandlungen verweisen. Als erstes Resultat ergibt sich der Satz: Wenn die Bewegung einer zähen Flüssigkeit in einem gewissen Momente  $t = T$  regulär (in einem gewissen Sinne) ist, dann gibt es stets ein Intervall  $T \leq t < T + \tau$  ( $\tau > 0$ ), in welchem die Bewegung regulär bleibt. Dieser Satz gibt zu einer Frage Anlaß: Kann die Größe  $\tau$  stets beliebig groß genommen werden, oder gibt es, wenigstens in gewissen Fällen, eine endliche obere Grenze der Größe  $\tau$ , das heißt der Zeit, während welcher die Bewegung regulär bleibt? Der Verfasser hat sich lange bemüht, durch Verschärfung der Ungleichungen, welche die Grundlage der Konvergenzbeweise bilden, den Beweis dafür zu führen, daß die in einem Momente  $T$  reguläre Bewegung für  $t > T$  stets regulär bleibt. Das Ergebnis dieser Bemühungen war, daß es, wenigstens in dieser Weise, nicht möglich ist, einen solchen Beweis zu führen. Wir müssen vielmehr damit rechnen, daß eine in einem Momente reguläre Bewegung in einem späteren Momente irregulär werden kann. Es ist unter diesen Umständen von erheblichem Interesse zu wissen, welcher Art die Irregularitäten sind, die in einer den ganzen Raum erfüllenden zähen Flüssigkeit auftreten können. Es wird bewiesen, daß sie entweder darin bestehen, daß der Wirbelvektor irgendwo unendlich groß wird, oder darin, daß die Wirbelbewegung sich in solcher Weise in unendlicher Ferne ausbreitet, daß die Bewegung nicht mehr „regulär“ ist. Es wird auf die Bedeutung dieses Ergebnisses hingewiesen. Die Hypothese wird (mit allem Vorbehalt) aufgestellt, daß die irregulären Flüssigkeitsbewegungen mit den „turbulenten“ Bewegungen der Hydraulik identisch sind.

Der letzte Paragraph des ersten Teiles behandelt die einfachsten Beispiele von Wirbelbewegung in einer zähen Flüssigkeit. Gegenstand

der Untersuchung ist einmal der einzelne, geradlinige, rotationssymmetrische Wirbelfaden, andererseits die Wechselwirkung zwischen zwei solchen Wirbelfäden. Bei der ersten Aufgabe geben die Integrodifferentialgleichungen direkt die exakte Lösung des Problems. Die Bewegung ist nur wenig komplizierter als die im Grenzfall  $\mu = 0$  auftretende Helmholtzsche Bewegung. Bei dem zweiten Problem wird nur eine angenäherte Lösung gegeben. Sie wird zur Ableitung eines Satzes über die Wechselwirkung zwischen zwei Wirbeln in einer zähen Flüssigkeit angewandt.

Der zweite Teil des Buches ist, wie schon erwähnt wurde, den hydrodynamischen Randwertaufgaben gewidmet. Er ist in drei Abschnitte zerlegt. Im ersten Abschnitte werden einige Fälle behandelt, in denen es möglich ist, eine exakte Lösung der Randwertaufgabe zu geben. Zuerst wird in Paragraph 9 das Problem behandelt, eine Lösung der linearen Stokeschen Gleichungen für stationäre Bewegung zu finden, bei welchen die Geschwindigkeitskomponenten  $u_j$  im Unendlichen verschwinden und auf der Oberfläche einer Kugel vorgeschriebene Werte annehmen. Lamb hat dieses Problem durch Reihenentwicklung gelöst. Hier wird eine Lösung in geschlossener Form gegeben, indem die verallgemeinerten Greenschen Funktionen des Problems aufgestellt werden. Die gefundenen Formeln geben theoretisch die Lösung der allgemeinsten hydrodynamischen Randwertaufgabe der Kugel für die Stokesschen Gleichungen. Einfache Aufgaben löst man aber bequemer durch spezielle Methoden. So erhält man sehr einfach mit Hilfe der Grundlösung der Stokesschen Gleichungen die Lösung der Randwertaufgabe, wenn die vorgeschriebenen Werte auf der Kugel konstant sind. Man kann mit Hilfe dieser Lösung die sogenannte Stokessche Widerstandsformel ableiten, welche den Widerstand ergibt, den eine kleine Kugel erfährt, welche sich mit konstanter Geschwindigkeit in einer Flüssigkeit bewegt. Faxén hat diese Stokessche Formel in schöner Weise verallgemeinert, indem er gezeigt hat, wie man die Resultierende der Kräfte berechnen kann, welche eine in beliebiger stationärer Bewegung begriffene Flüssigkeit auf eine darin versenkte Kugel ausübt. Man kann dieses Resultat mit Hilfe der Lösung der allgemeinen Randwertaufgabe gewinnen. Leider sind aber die hierfür nötigen Rechnungen so langwierig, daß ich davon absehen mußte, sie hier zu reproduzieren, und mich darauf beschränken mußte, den Gang des Beweises anzudeuten. Paragraph 9 gibt endlich die Lösung der Randwertaufgabe der ebenen Wand für die Stokesschen Gleichungen.

Paragraph 10 ist derjenigen Randwertaufgabe der Kugel gewidmet, zu welcher die allgemeinen hydrodynamischen Differentialgleichungen für

nichtstationäre Bewegungen Anlaß geben. Verfasser hat vor Jahren dieses Problem durch Reihenentwicklungen gelöst. Später gelang es ihm durch Summieren jener Reihen, das Problem auf bekannte Randwertaufgaben für die Laplacesche Gleichung und die Wärmeleitungsgleichung zurückzuführen. Hier wird der Versuch gemacht, durch Hervorhebung der analytischen Tatsache, auf welcher diese Zurückführung beruht, den Kern des Problems in möglichst helles Licht zu setzen. Der Beweis jener analytischen Tatsache wird auch hier durch Reihenentwicklungen gegeben. Von einer Darlegung der (übrigens leicht zu führenden) Konvergenzbeweise mußte hier abgesehen werden. Eine einfache Anwendung der gefundenen Ergebnisse gibt die Lösung der Boussinesqschen Aufgabe, den Widerstand gegen die nichtstationäre Bewegung einer kleinen Kugel in einer zähen Flüssigkeit zu berechnen.

Paragraph 11 reproduziert, als Vorbereitung zum folgenden, die von Oberbeck gegebene Theorie für die stationäre Bewegung eines Ellipsoids in einer zähen Flüssigkeit.

Der zweite Abschnitt des zweiten Teiles bringt angenäherte Lösungen von Randwertaufgaben bei den Stokesschen Differentialgleichungen für die stationäre Bewegung. Es dürfte hier am Platze sein, den Grund dafür anzugeben, daß wir diesen Stokesschen Differentialgleichungen soviel Raum und Interesse widmen. Schon beim flüchtigen Durchblättern dieses zweiten Abschnitts wird es dem Leser sicher auffallen, daß nirgends Bedingungen für die Gültigkeit der mitgeteilten Formeln angegeben werden. Den Grund hierzu findet er im letzten Paragraphen des Abschnitts, wo gezeigt wird, daß die Stokesschen Differentialgleichungen eine nicht zulässige Annäherung darstellen, indem man, um zu diesen Gleichungen zu kommen, in den vollständigen hydrodynamischen Differentialgleichungen Glieder vernachlässigen muß, welche nicht nur von derselben Größenordnung wie die von Stokes beibehaltenen Glieder sind, sondern sogar, diesen Gliedern gegenüber, beliebig groß sein können. Der ganze zweite Abschnitt entbehrt infolge dieses Umstandes einer festen Grundlage. Nun stimmt aber das Stokessche Widerstandsgesetz mit den Tatsachen gut überein. Der Grund hierzu liegt darin, daß man bei strenger Lösung der hydrodynamischen Differentialgleichungen eine Bewegung bekommt, die zwar in großen Entfernungen von der Kugel einen ganz anderen Charakter als die von Stokes untersuchte Bewegung hat, die aber in der Nähe der Kugel nahezu mit der Stokesschen Bewegung übereinstimmt. In solchen Fällen, wo nur die Bewegung der Flüssigkeit in der Nähe des bewegten Körpers von Bedeutung ist, kann man also die Bewegung in erster Näherung nach der Stokesschen Methode berechnen. Solche Fälle

kommen in der Kolloidchemie in großer Zahl vor. Dies ist der Grund, warum wir, obwohl die Stokesschen Gleichungen von theoretischem Standpunkte aus unrichtig sind, ihnen doch soviel Aufmerksamkeit widmen.

Paragraph 12 behandelt die stationäre Bewegung einer Kugel in einer von einer ebenen Wand begrenzten zähen Flüssigkeit. Es handelt sich hier wesentlich um einen Bericht über eine Untersuchung von H. A. Lorentz.

In Paragraph 13 wird die Bewegung einer Kugel zwischen zwei parallelen, ebenen Wänden untersucht. Es ist die Hoffnung des Verfassers, daß seine Darstellung in diesem Paragraphen die schöne, von Faxén gegebene Lösung dieses für die Kolloidchemie bedeutsamen Problems leichter zugänglich machen wird.

Paragraph 14 gibt einen Bericht über die Untersuchungen betreffend die Wechselwirkungen zwischen zwei Kugeln, die sich in einer zähen Flüssigkeit bewegen. Die erste, angenäherte Lösung des Problems röhrt von Smoluchowski her. Tiefergehende Untersuchungen verdanken wir Faxén, Dahl und in neuester Zeit Margaret Stimson und G. B. Jeffery.

In Paragraph 15 werden die sogenannten Paradoxien von Stokes und von Whitehead besprochen. Das erste Paradoxon besagt, daß es unmöglich ist, eine Lösung der hydrodynamischen Differentialgleichungen zu finden, welche dem Fall entspricht, wo ein Kreiszylinder sich mit konstanter Geschwindigkeit in einer zähen Flüssigkeit bewegt. Das Paradoxon von Whitehead besagt, daß es bei Zugrundelegung der Stokes'schen Theorie für die translatorische Bewegung einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit unmöglich ist, diese Theorie dadurch zu verbessern, daß man weitere Glieder für die Geschwindigkeitskomponenten und für den Druck berechnet. Es wird gezeigt, daß die Wurzel der Schwierigkeiten in beiden Fällen dieselbe ist und daß sie einfach darin besteht, daß die Stokesschen Gleichungen im oben erörterten Sinne eine unzulässige Näherung darstellen.

Der zweite Abschnitt endet mit dem Nachweis, daß in den Stokesschen Differentialgleichungen Glieder vernachlässigt worden sind, welche dieselbe Größenordnung wie die berücksichtigten Glieder haben. Wenn man jene Glieder schon in erster Näherung in die Differentialgleichungen aufnimmt, erhält man die Gleichungen, welche ich die erweiterten Stokes'schen Gleichungen genannt habe. Diesen Gleichungen und den bei ihnen auftretenden Randwertaufgaben ist der dritte Abschnitt gewidmet. Ein Beweis, daß diese Gleichungen eine zuverlässige Grundlage einer exakten Berechnung der durch die Verschiebung eines Körpers hervorgerufenen

Bewegung einer zähen Flüssigkeit darstellen, wird hier nicht gegeben. Als ich mich zuerst mit diesen Gleichungen beschäftigte, konnte ich diesen Beweis nicht führen, weil die allgemeine Randwertaufgabe für diese Gleichungen nicht gelöst war. Als einen Ersatz für den mangelnden Beweis zeigte ich, daß man, von den erweiterten Stokesschen Gleichungen ausgehend, durch sukzessive Näherungen in exakter Weise die Bewegung berechnen kann, welche in einer den ganzen Raum erfüllenden zähen Flüssigkeit von einem System von Kräften erzeugt wird, deren Angriffspunkte sich mit konstanter Geschwindigkeit verschieben, die aber sonst von der Zeit unabhängig sind. In der letzten Zeit ist nun die allgemeine Randwertaufgabe der erweiterten Stokesschen Gleichungen in mathematischem Sinne gelöst worden. Es wäre also aller Wahrscheinlichkeit nach jetzt möglich, den Beweis zu führen, daß man auf der Grundlage der erweiterten Stokesschen Gleichungen in exakter Weise diejenige Bewegung einer zähen Flüssigkeit berechnen kann, die durch die Verschiebung eines starren Körpers darin hervorgerufen wird. Doch würde ein solcher Beweis notwendig einen sehr abstrakten, rein mathematischen Charakter haben und würde deshalb in diesem Buche kaum am Platze sein.

In Paragraph 16 wird mit der neuen Methode für eine zähe Flüssigkeit die Bewegung untersucht, welche durch eine kleine Kugel erzeugt wird, die sich mit konstanter Geschwindigkeit darin bewegt. Es wird gezeigt, daß schon die Bewegung, die man in erster Näherung bekommt, einen ganz anderen Charakter als die Stokessche Bewegung hat. Kurz kann man den Unterschied so ausdrücken, daß, während nach Stokes die Bewegung hinter der Kugel ein Spiegelbild der Bewegung vor der Kugel ist, in der neuen Theorie eine ausgeprägte Dissymmetrie hervortritt, indem hinter der Kugel ein Wirbelschwanz zum Vorschein kommt. Es wird ferner gezeigt, daß man in zweiter Näherung ein neues, mit dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionales Glied im Ausdrucke für den Widerstand erhält. Endlich wird die Bewegung in der Umgebung der Kugel in zweiter Näherung untersucht.

Paragraph 17 behandelt das Problem des Kreiszylinders. Zuerst wird Lambs für kleine Geschwindigkeiten gültige Lösung dieses Problems wiedergegeben. Es folgt eine Übersicht über die Untersuchungen von Prof. Bairstow, Miß Cave und Miß Lang.

In Paragraph 18 wird das Problem des Ellipsoids wieder aufgenommen. Für die Komponenten der Resultierenden der Kräfte, welche die Flüssigkeit auf den Körper ausübt, erhält man in erster Näherung die Werte von Oberbeck. In zweiter Näherung kommen neue Glieder hinzu, welche mit dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional sind. Das

zweidimensionale Analogon des Problems, die Bewegung eines elliptischen Zylinders in einer zähen Flüssigkeit, hat Harrison behandelt. Seine Ergebnisse werden (ohne Beweis) mitgeteilt.

Paragraph 19 behandelt die stationäre Bewegung einer Kugel in einer von einer ebenen Wand begrenzten Flüssigkeit. Dieses Problem hat prinzipielle Bedeutung, weil der darin untersuchte Fall der einfachste ist, worin sich eine Kugel in der Nähe einer Wand bewegt. Die Lösung des Problems verdanken wir Faxén. Der Paragraph gibt die Ausdrücke der Geschwindigkeitskomponenten in Form von Integralen. Dagegen war es nicht möglich, auf die Auswertung dieser Integrale einzugehen. Ich mußte mich darauf beschränken, die Schlußformeln von Faxén mitzuteilen. Die Widerstandsformel zeigt, daß die Wand sozusagen den Einfluß der Trägheitsglieder aufhebt. Wenn die Entfernung des Kugelmittelpunktes von der Wand,  $\zeta$ , und die Geschwindigkeit der Kugel,  $U$ , so klein sind, daß  $\varrho U \zeta / 2\mu$  eine kleine Größe ist, fällt das oben erwähnte, mit dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionale Glied im Ausdrucke für den Widerstand weg. Dagegen kommt es bei größeren  $\zeta$ -Werten, also bei größeren Entfernungen der Kugel von der Wand, wieder zum Vorschein.

Paragraph 20 ist mit Paragraph 19 nahe verwandt. Gegenstand der Untersuchung ist hier die Bewegung einer Kugel längs der Achse einer Röhre. Dieses Problem hat praktische Bedeutung, weil Untersuchungen über Fallbewegungen von Kugeln meistens in dieser Weise ausgeführt werden. Ladenburg hat als erster dieses Problem behandelt. Er ging, was damals selbstverständlich war, von den Stokesschen Gleichungen aus. Faxén hat dann das Problem unter Zugrundelegung der erweiterten Stokesschen Gleichungen gelöst. Der Paragraph gibt die Theorie von Faxén.

Paragraph 21 behandelt auf Grundlage der erweiterten Stokesschen Gleichungen die Wechselwirkung zwischen zwei Kugeln, welche sich mit derselben konstanten Geschwindigkeit in einer Flüssigkeit bewegen.

Paragraph 22 gibt endlich eine Zusammenstellung der mitgeteilten Widerstandsformeln.

Der dritte Teil beschäftigt sich, wie schon oben mitgeteilt wurde, mit dem Grenzübergang zu verschwindender Zähigkeit. Um diese Aufgabe in endgültiger und vollauf befriedigender Weise auszuführen, hätten wir die Differential- oder Integralgleichungen für die Bewegung einer zähen Flüssigkeit exakt zu lösen und dann den Grenzübergang  $\mu \rightarrow 0$  in der erhaltenen Lösung auszuführen. Es ist wohl kaum notwendig zu sagen, daß dieses Problem zur Zeit unlösbar ist. Eine exakte Lösung der hydrodynamischen Differentialgleichungen können wir bei endlichem  $\mu$  nur in

der Form von Reihen geben, die bei genügend großen  $\mu$ -Werten konvergieren. Aus jenen Reihen müßten wir Ausdrücke bilden, welche bei beliebig kleinem  $\mu$  ihren Sinn und Bedeutung behalten, und dann in diesen Ausdrücken  $\mu$  gegen Null konvergieren lassen. In mathematischem Sinne mag diese Aufgabe lösbar sein. Aber ein anderes ist es, ein mechanisches Problem durch eine mathematische Formel zu lösen, ein anderes, es im mechanischen Sinne zu lösen. Von einer Lösung des hier vorliegenden Problems, welche den Anforderungen der Hydrodynamik genügt, sind wir noch weit entfernt.

Die Aufgabe, mit welcher wir uns im dritten Teile des Buches beschäftigen, ist eine bescheidenere. Wir führen in den linearisierten hydrodynamischen Differentialgleichungen, also in den erweiterten Stokesschen Gleichungen, und in den entsprechenden, die zeitlichen Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten enthaltenden Differentialgleichungen für nichtstationäre Bewegung den Grenzübergang  $\mu \rightarrow 0$  aus.

In Paragraph 23 untersuchen wir die stationäre Bewegung einer ebenen Scheibe in der gegen die Scheibe senkrechten Richtung. Dies war der erste Fall, in welchem der Grenzübergang ausgeführt wurde. Das Ergebnis ist, daß die Bewegung der Flüssigkeit in dem nicht von der Scheibe durchschrittenen Bereiche bei  $\mu = 0$  eine Potentialbewegung ist, während sie in dem durchschrittenen Bereiche eine Wirbelbewegung ist. Die explizite Bestimmung der Bewegung wird auf die Auffindung einer vierwertigen Potentialfunktion zurückgeführt, deren Werte permutiert werden, wenn der Aufpunkt eine kleine geschlossene Kurve um die Randkurve beschreibt und dabei die Platte einmal durchdringt, und die einen Zweig hat, der in einem gewissen, übrigens willkürlichen Punkte wie  $1/R$  unendlich wird, sonst aber überall regulär ist und im Unendlichen verschwindet. In dem Falle, worin die Scheibe kreisförmig ist, gelingt es leicht, eine solche Potentialfunktion herzustellen. In diesem Falle ist also das Problem explizit lösbar. Die Behandlung dieses speziellen Falles wird indessen erst in Paragraph 31 gegeben.

In Paragraph 24 wird der allgemeinste Fall untersucht. Es wird nur vorausgesetzt, daß eine im allgemeinen nicht starre Fläche sich in irgend-einer Weise in einer Flüssigkeit bewegt und daß dabei die Werte der Geschwindigkeitskomponenten auf jener Fläche vorgeschrieben sind. Die Ergebnisse bestätigen die in Paragraph 23 gefundenen Resultate, gehen aber weit über sie hinaus.

In Paragraph 25 werden die in Paragraph 24 gefundenen Ergebnisse auf den speziellen Fall angewandt, daß ein starrer Körper mit veränderlicher Geschwindigkeit, aber in einer konstanten Richtung sich in einer

Flüssigkeit bewegt. Die Lösung des Problems wird in diesem Fall auf die Bestimmung von zwei Potentialfunktionen,  $\varphi_v$  und  $\varphi_h$ , zurückgeführt, von welchen  $\varphi_v$  in dem vom Körper nicht durchschrittenen Bereiche existieren soll,  $\varphi_h$  dagegen in dem vom Körper durchschrittenen Bereiche.  $\varphi_v$  soll auf der Vorderseite des Körpers der Bedingung:

$$\frac{d\varphi_v}{dn} = U_n$$

genügen;  $\varphi_h$  auf der Rückseite des Körpers der Bedingung:

$$\frac{d}{dn} \frac{\partial \varphi_h}{\partial t} = \frac{\partial U_n}{\partial t}.$$

Auf der Grenze zwischen den beiden Bereichen soll  $\varphi_v = \varphi_h$  sein. Dagegen sollen die beiden normalen Ableitungen:

$$\frac{d\varphi_v}{dn} \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi_h}{dn}$$

sich in bestimmter Weise voneinander unterscheiden.

In Paragraph 26 wird das Problem der stationären Bewegung mittelst einer neuen Methode untersucht. Die früher gefundenen Ergebnisse werden wiedergefunden. Außerdem ergeben sich neue Resultate. Es wird gezeigt, daß in dem zweidimensionalen Probleme und in dem rotations-symmetrischen dreidimensionalen Probleme die Funktionen  $\varphi_v$  und  $\varphi_h$  eine einzige, überall außerhalb des Körpers reguläre Potentialfunktion definieren. Wenn die  $x_1$ -Achse in der Bewegungsrichtung des Körpers gelegt wird, kann die Randbedingung, welcher jene Funktion auf der Rückseite des Körpers genügen muß, in der Form:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0$$

geschrieben werden. In dem rotationssymmetrischen dreidimensionalen Falle kann die entsprechende Bedingung, wenn die  $x_1$ -Achse die Symmetriearchse ist und wenn  $\bar{R}$  die Entfernung eines Punktes von jener Achse ist, in der Form:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{R}} = 0$$

geschrieben werden. Die Lösung des Problems der stationären Bewegung wird in Paragraph 26 allgemein auf die Auflösung gewisser Fredholm-scher Integralgleichungen zurückgeführt werden.

In Paragraph 27 wird im Anschluß an Hilbert eine Methode entwickelt, das mathematische Problem, zu welchem die stationäre Bewegung eines Zylinders (mit beliebigem Querschnitt und in einer gegen die Erzeugenden des Zylinders senkrechten Richtung) Anlaß gibt, explizit zu lösen. Es wird gezeigt, daß, wenn der Querschnitt keine Ecken oder Spalten hat, die Lösung eindeutig bestimmt ist.

Paragraph 28 schließt sich eng an Paragraph 27 an. Er gibt Ausdrücke für den Widerstand gegen die Bewegung des Zylinders und für die Tragkraft der Flüssigkeit.

In Paragraph 29 wird die in Paragraph 27 und Paragraph 28 entwickelte Theorie auf den Fall des Kreiszylinders angewandt.

Paragraph 30 behandelt, ebenfalls nach der in Paragraph 27 und Paragraph 28 entwickelten Methode, die Bewegung der ebenen Platte.

Paragraph 31 gibt, wie schon oben erwähnt wurde, die explizite Theorie der kreisförmigen Platte. Die elliptischen Funktionen spielen in dieser Theorie eine wesentliche Rolle. Mit denselben Hilfsmitteln kann man die Bewegung einer Halbkugel in den beiden rotationssymmetrischen Fällen behandeln. Doch gibt der Paragraph in bezug auf diese beiden Fälle nur die numerischen Resultate.

## Erster Teil.

### Die Grundlösungen.

#### Erste Anwendungen derselben.

§ 1. Die hydrodynamischen Differentialgleichungen .....	3
1 1. Der Impulssatz. Die Kontinuitätsbedingung .....	3
1 2. Der Deformationstensor.....	4
1 3. Beziehung zwischen Reibungskräften und Deformationstensor.....	6
1 4. Aufstellung der grundlegenden hydrodynamischen Integralgleichungen	8
1 5. Die hydrodynamischen Differentialgleichungen.....	10
§ 2. Die verallgemeinerte Poissonsche Gleichung.....	13
2 1. Zurückführung auf Poissonsche Gleichungen für das innere Problem ..	13
2 2. Lösung der Poissonschen Gleichungen mittels der Greenschen Funktion	14
2 3. Anwendung auf die verallgemeinerte Poissonsche Gleichung .....	17
2 4. Das äußere Problem. Eine charakteristische Schwierigkeit .....	18
2 5. Auflösung der Schwierigkeit .....	19
§ 3. Die Grundlösungen der hydrodynamischen Differentialgleichungen von Stokes	21
3 1. Die Stokesschen Gleichungen .....	21
3 2. Verallgemeinerung der Greenschen Formel .....	21
3 3. Grundeigenschaften der Tensoren .....	22
3 4. Grundlösungen zur Bestimmung der Geschwindigkeitskomponenten ..	25
3 5. Grundlösung zur Bestimmung des Druckes .....	27
3 6. Zusammenfassung. Die hydrodynamischen Integralgleichungen .....	28
3 7. Das zweidimensionale Problem .....	29
§ 4. Die Grundlösungen der erweiterten Stokesschen Gleichungen .....	30
4 1. Verallgemeinerung der Greenschen Formel .....	30
4 2. Die Grundlösungen zur Bestimmung der Geschwindigkeitskomponenten.	
Einführung der Funktion $\Omega$ .....	31
4 3. Grundlösung für den Druck .....	35
4 4. Zusammenfassung. Die hydrodynamischen Integralgleichungen .....	35
4 5. Das zweidimensionale Problem .....	36
§ 5. Die Grundlösungen der allgemeinen, linearen, homogenen hydrodynamischen	
Differentialgleichungen .....	38
5 1. Verallgemeinerung der Greenschen Formel .....	38
5 2. Ansatz für die Grundlösungen der Geschwindigkeitskomponenten .....	39
5 3. Der Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ in der linken Seite von (12) .....	41
5 4. Der Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ in der rechten Seite von (12) .....	43
5 5. Erweiterung des gefundenen Ergebnisses .....	44

5 6. Grundlösung zur Bestimmung des Druckes .....	47
5 7. Ausführung des Grenzüberganges auf der linken Seite von (27) .....	48
5 8. Ausführung des Grenzüberganges in der rechten Seite von (27) .....	50
5 9. Zusammenfassung. Die hydrodynamischen Integralgleichungen .....	52
5 10. Das zweidimensionale Problem .....	54
<b>§ 6. Die hydrodynamischen Integralgleichungen .....</b>	<b>56</b>
6 1. Die Aufgabe: Direkte Ableitung der hydrodynamischen Integralgleichungen aus den grundlegenden mechanischen Sätzen .....	56
6 2. Mathematische Formulierung der Aufgabe .....	58
6 3. Ableitung einer grundlegenden Integralbeziehung .....	59
6 4. Ausführung des Grenzüberganges $\Delta x_j \rightarrow 0$ ( $j = 1, 2, 3$ ) in den drei ersten Gliedern der Gleichung (4) .....	60
6 5. Ausführung des Grenzüberganges $\Delta x_j \rightarrow 0$ ( $j = 1, 2, 3$ ) im letzten Gliede der Gleichung (4) .....	61
6 6. Das Ergebnis des Grenzüberganges $\Delta x_j \rightarrow 0$ ( $j = 1, 2, 3$ ) .....	63
6 7. Der Grenzübergang $\delta t \rightarrow 0$ .....	63
6 8. Die Bedeutung des gefundenen Ergebnisses .....	65
<b>§ 7. Erste Anwendungen der hydrodynamischen Integralgleichungen. Theorie der Singularitäten in der Bewegung einer den ganzen Raum erfüllenden Flüssigkeit</b> .....	<b>66</b>
7 1. Das Problem. Definition des Begriffes „reguläre Bewegung“ für eine den ganzen Raum erfüllende Flüssigkeit .....	66
7 2. Integralgleichungen zur Berechnung der regulären Bewegung einer zähen Flüssigkeit .....	68
7 3. Abschätzungen der Größen $t_{jk}$ , $\frac{\partial t_{jk}}{\partial x_l}$ .....	68
7 4. Lösung der Integralgleichungen durch Reihen .....	71
7 5. Fortführung der Berechnung der regulären Bewegung .....	72
7 6. Analyse der Singularitäten, welche in der Bewegung einer den ganzen Raum erfüllenden Flüssigkeit auftreten können. Der Hauptsatz .....	73
7 7. Erster Teil des Beweises des Hauptsatzes. Ausdruck der Geschwindigkeitskomponenten durch die Wirbelkomponenten. Abschätzung derselben .....	74
7 8. Durchführung des Beweises des Hauptsatzes. Die Bedeutung desselben .....	79
<b>§ 8. Einfachste Beispiele von Wirbelbewegungen in einer zähen Flüssigkeit .....</b>	<b>82</b>
8 1. Zirkulation um einen geradlinigen Wirbelfaden .....	82
8 2. Zwei parallele, geradlinige Wirbel in einer zähen Flüssigkeit .....	87

## Zweiter Teil.

### Die Randwertaufgaben.

#### I.

##### Exakte Lösungen hydrodynamischer Randwertaufgaben.

Einleitung .....	95
<b>§ 9. Die Stokesschen Gleichungen .....</b>	<b>97</b>
9 1. Eine Kugel. Randwertaufgabe für das innere Problem .....	97
9 2. Zusammenstellung der Formeln für das innere Problem der Kugel....	105

9 3. Eine Kugel. Randwertaufgabe für das äußere Problem .....	106
9 4. Zusammenstellung der Formeln für das äußere Problem der Kugel ..	108
9 5. Die Stokessche Widerstandsformel .....	109
9 6. Ein Satz von Faxén .....	111
9 7. Das Problem der ebenen Wand .....	113
§ 10. Die nicht-stationären Gleichungen. Das Problem der Kugel. Die Formel von Boussinesq. Das Problem des Kreiszylinders .....	114
10 1. Der Ansatz .....	114
10 2. Einführung eines Hilfsproblems .....	117
10 3. Ansatz zur Lösung durch Reihen nach Kugelfunktionen .....	120
10 4. Berechnung von $F_R$ , $\Delta v F$ und $n \text{ rot } F$ für $R = a$ .....	121
10 5. Verifikation der Bedingungen .....	124
10 6. Neue Darstellung von $F_R$ .....	127
10 7. Zusammenfassung .....	128
10 8. Erste Anwendung .....	129
10 9. Zweite Anwendung .....	130
10 10. Das Problem von Boussinesq .....	132
10 11. Das zweidimensionale Problem .....	134
§ 11. Die Stokesschen Gleichungen. Ein Ellipsoid mit konstanter Geschwindig- keit. Die Formeln von Oberbeck .....	136

## II.

**Angenäherte Lösungen von Randwertaufgaben bei den  
Stokesschen Differentialgleichungen für stationäre Bewegung.**

§ 12. Eine kleine Kugel und eine ebene Wand .....	140
12 1. Berechnung des Widerstandes .....	140
12 2. Eine Spiegelungsmethode von H. A. Lorentz .....	143
§ 13. Eine Kugel oder ein Kreiszylinder zwischen zwei ebenen Wänden .....	144
13 1. Einleitung und Darstellung des Abstandes $R$ durch Integrale .....	144
13 2. Einsetzung der so gewonnenen Darstellungen von $R$ usw. in die Stokessche Formel behufs Gewinnung allgemeiner Integrale .....	148
13 3. Ansatz zur Lösung und zur Widerstandsberechnung .....	151
13 4. Durchführung in speziellen Fällen .....	152
13 5. Das zweidimensionale Problem .....	155
§ 14. Zwei Kugeln in einer Flüssigkeit .....	156
14 1. Einleitung und Satz von Faxén über die Wechselwirkung zwischen zwei Kugeln von derselben Größe .....	156
14 2. Erste Näherung bei Kugeln mit verschiedenen Radien .....	157
14 3. Genauere Formeln .....	160
§ 15. Die sogenannten Paradoxien von Stokes und von Whitehead .....	162
15 1. Das Paradoxon von Stokes .....	162
15 2. Das Paradoxon von Whitehead .....	163
15 3. Erklärung dieser Paradoxien .....	165

## III.

**Angenäherte Lösungen von Randwertaufgaben bei den erweiterten Stokesschen Gleichungen.**

§ 16. Das Problem der Kugel .....	166
16 1. Aufstellung spezieller Lösungen der erweiterten Stokesschen Gleichungen .....	166
16 2. Lösungen der erweiterten Stokesschen Gleichungen, welche die Randbedingungen angenähert erfüllen .....	167
16 3. Untersuchung der Gültigkeit der Lösung. Vergleich mit der Stokeschen Lösung .....	169
16 4. Eigenschaften der neuen Lösung. Ausblick auf die Theorie der idealen Flüssigkeiten .....	170
16 5. Teilung der vernachlässigten Glieder zweiter Ordnung in Glieder mit $U_1   U_1  $ und in Glieder mit $U_1^2$ .....	173
16 6. Berücksichtigung der Glieder mit $U_1   U_1  $ . Genaue Widerstandsformel .....	174
16 7. Berücksichtigung der Glieder mit $U_1^2$ .....	174
§ 17. Das Problem des Kreiszylinders .....	177
17 1. Die Lambsche Lösung .....	177
17 2. Magnuseffekt bei kleinen Geschwindigkeiten .....	179
17 3. Methode zur numerischen Berechnung des Widerstandes bei größeren Werten von $\sigma/a$ bzw. des Reynoldsschen Zahl $2\sigma/a$ .....	179
§ 18. Das Problem des Ellipsoides .....	182
18 1. Einleitung .....	182
18 2. Herstellung dreier spezieller Lösungen des Systems (1) .....	183
18 3. Ansatz zur Lösung des Problems .....	185
18 4. Berechnung des Widerstandes .....	187
§ 19. Eine kleine Kugel und eine ebene Wand .....	190
19 1. Einleitung. Die von der Kugel primär hervorgerufene Strömung .....	190
19 2. Integraldarstellung der Funktionen $\Phi_1$ und $P$ .....	191
19 3. Berechnung der von der Wand zurückgeworfenen Strömung .....	193
19 4. Resultierende Kraft auf die Kugel .....	194
§ 20. Eine Kugel in einer Röhre .....	196
20 1. Einleitung. Integraldarstellungen für die Funktionen $\frac{1}{R}$ und $\frac{e-\sigma' R - \sigma x_1}{R}$ .....	196
20 2. Ansatz zur Lösung des Problems .....	198
20 3. Die Widerstandsformel .....	198
§ 21. Zwei Kugeln in einer Flüssigkeit .....	199
21 1. Einleitung. Die Theorie von Smochulowski nach § 14 .....	199
21 2. Neue Lösung auf Grund der erweiterten Stokesschen Gleichungen ..	200
21 3. Diskussion der neuen Lösung .....	201
§ 22. Zusammenstellung der mitgeteilten Widerstandsformeln .....	203
22 1. Stationäre Bewegung. Die Stokesschen Gleichungen .....	203
22 2. Stationäre Bewegung. Die erweiterten Stokesschen Gleichungen ..	205
22 3. Nicht-stationäre Bewegung .....	208

## Dritter Teil.

## Der Grenzübergang zu verschwindender Zähigkeit.

Einleitung .....	211
§ 23. Ein spezieller Fall. Eine dünne Platte .....	214
23 1. Ansatz zur Lösung des Problems im Anschluß an den früheren Ansatz bei dem Ellipsoid .....	214
23 2. Aufstellung von Integro-Differentialgleichungen zur Bestimmung der Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ .....	215
23 3. Vereinfachung der Integro-Differentialgleichungen bei $\mu \rightarrow 0$ .....	216
23 4. Vereinfachung der Integro-Differentialgleichungen für die Funktionen $\varphi_1^{(0)}$ und $\psi^{(0)}$ .....	218
23 5. Zurückführung der Funktionen $\varphi_1^{(0)}$ und $\psi^{(0)}$ auf eine Potential- funktion $A$ .....	218
23 6. Aufstellung einer Greenschen Funktion zur Bestimmung von $A$ .....	219
23 7. Untersuchung der Bewegung der Flüssigkeit außerhalb des von der Scheibe durchschrittenen Raumes .....	222
23 8. Untersuchung der Bewegung der Flüssigkeit in dem von der Scheibe durchschrittenen Raum .....	223
23 9. Zusammenfassung .....	227
§ 24. Allgemeinere Untersuchungen .....	228
24 1. Aufgabestellung. Ansatz zur Lösung auf Grund des § 5 .....	228
24 2. Vorläufige Zerlegung des Flächenintegrals in zwei Summanden $J_{j\sigma}^{(1)}$ und $J_{j\sigma}^{(2)}$ .....	230
24 3. Definitive Zerlegung des Flächenintegrals in zwei Summanden $\tilde{J}_{j\sigma}^{(1)}$ und $\tilde{J}_{j\sigma}^{(2)}$ .....	231
24 4. Das Verhalten des Integrals $J_{j\sigma}^{(1)}$ bei kleinem $\mu$ .....	232
24 5. Beweis, daß $\lim_{\mu \rightarrow 0} J_{j\sigma}^{(2)} = 0$ , wenn bei $\mu \rightarrow 0$ die Funktionen $h_j$ endlich bleiben .....	235
24 6. Untersuchung des Verhaltens von $J_{j\sigma}^{(2)}$ , wenn bei $\mu \rightarrow 0$ die Funktionen $\sqrt{\mu} h_j$ endlich bleiben .....	236
24 7. Die Randbedingungen. Ruhendes Flächenelement .....	237
24 8. Bewegtes Flächenelement. Grundlegende Voraussetzungen .....	239
24 9. Untersuchung des Integrals $\int_{t_0}^t J_{j\sigma}^{(1)} d\tau$ , wenn der betrachtete Punkt im betrachteten Zeitmoment auf dem Flächenelement liegt .....	239
24 10. Entsprechende Resultate in den anderen Fällen .....	241
24 11. Entsprechende Untersuchung für das Integral $\int_{t_0}^t J_{j\sigma}^{(2)} d\tau$ .....	241
24 12. Aufstellung von Integrodifferentialgleichungen für die Größen $h_j$ bei kleinem $\mu$ .....	242
24 13. Nachweis, daß in dem von der Fläche nicht durchschrittenen Bereiche die Bewegung eine Potentialbewegung ist .....	242
24 14. Nachweis, daß die Flüssigkeit an der Vorderseite der Fläche gleitet ..	244
24 15. Untersuchung der Bewegung in dem von der Fläche durchschrittenen Teilbereiche .....	245
24 16. Zusammenfassung .....	246

§ 25. Translatorische Bewegung .....	247
25 1. Vereinfachungen durch die Annahme, daß der Körper sich stets in derselben Richtung bewegt .....	247
25 2. Beginn der Umformung der Gleichung (3). Verwandlung der Zeit-Oberflächenintegrale in Ableitungen von Potentialfunktionen .....	249
25 3. Durchführung der Umformung der Gleichung (3). Darstellung der Größen $k_j(v)$ durch eine Potentialfunktion $\varphi$ .....	251
25 4. Beginn der entsprechenden Umformung der Gleichung (4). Zurückführung der Zeitflächenintegrale auf Potentialfunktionen nebst einem Zusatzgliede .....	252
52 5. Weitere Umformung vermittelst der Sätze der Potentialtheorie .....	254
25 6. Durchführung der Umformung. Darstellung der Größen $L_j$ durch die Potentialfunktion $\varphi$ .....	256
25 7. Vorläufige Formulierung der Bedingungen für die Potentialfunktion $\varphi$ .....	256
25 8. Darstellung der Bewegung im Inneren der Flüssigkeit vermittelst der Funktion $\varphi$ .....	256
25 9. Definitive Formulierung der Bedingungen für $\varphi$ . Verifikation der Kontinuitätsbedingung .....	258
25 10. Befreiung von einschränkenden Voraussetzungen .....	261
25 11. Stationärer Fall .....	262
25 12. Ausführungen über den Begriff der hydrodynamischen Rückseite .....	263
§ 26. Neue Methode zur Behandlung des stationären Falles .....	264
A. Zweidimensionaler Fall .....	264
26 1. Der Grenzübergang bei geradliniger Begrenzung .....	264
26 2. Ansatz zur Lösung des allgemeinen Problems .....	266
26 3. Zurückführung der Randbedingungen auf eine Fredholmsche Integralgleichung .....	267
26 4. Nachweis, daß die erhaltene Lösung dieselbe Gestalt hat wie die in den Paragraphen 23 und 25 gewonnene Lösung .....	268
B. Dreidimensionaler Fall .....	272
26 5. Der Grenzübergang bei ebener Begrenzung .....	272
26 6. Ansatz zur Lösung des allgemeinen Problems .....	273
26 7. Nachweis, daß der Ansatz sich auf die aus § 23 und § 25 bekannte Form zurückführen läßt .....	274
26 8. Die Randbedingungen .....	275
26 9. Nachweis, daß die Potentialfunktion $\varphi$ im rotationssymmetrischen Falle außerhalb des Körpers regulär ist .....	276
26 10. Vereinfachung der Randbedingungen im rotationssymmetrischen Falle .....	278
26 11. Zusammenfassung .....	279
§ 27. Lösung der potentialtheoretischen Randwertaufgabe, zu welcher die statio-näre Bewegung in der Ebene Anlaß gibt .....	280
27 1. Lösung eines potentialtheoretischen Problems nach Hilbert .....	280
27 2. Unterschied unserer hydrodynamischen Randwertaufgabe von der Hilbertschen .....	282
27 3. Konforme Abbildung des Bereiches auf das Äußere eines Kreises .....	283
27 4. Ansatz zur Lösung der Randwertaufgabe für den Kreis mit Hilfe des Poissonschen Integrales .....	284
27 5. Herstellung einer Lösung der Randwertaufgabe im Falle $c = 0$ auf dem ganzen Kreise .....	285

27 6. Herstellung einer Lösung der Randwertaufgabe im Falle $c = U_1 a$ . . . . .	285
27 7. Herstellung einer Lösung der allgemeinen Randwertaufgabe . . . . .	285
27 8. Herstellung der allgemeinen Nulllösung. Untersuchung der singulären Stellen auf dem Kreise $C$ . . . . .	286
27 9. Lösung des Problems . . . . .	289
27 10. Zusammenfassung . . . . .	290
§ 28. Die Druckverteilung und der Widerstand bei zweidimensionalen hydrodynamischen Problemen . . . . .	291
28 1. Einleitung. Ist der Druck bei $\mu \rightarrow 0$ überall stetig? . . . . .	291
28 2. Zerlegung des Druckes in zwei Teile . . . . .	292
28 3. Berechnung des Widerstandes . . . . .	293
28 4. Berechnung des Druckes senkrecht zur Bewegungsrichtung . . . . .	295
28 5. Zusammenfassung . . . . .	296
§ 29. Das Problem des Kreiszylinders . . . . .	296
29 1. Bericht über die Methode von Prof. Burgers . . . . .	296
29 2. Berechnung der Funktion $w(z)$ . . . . .	297
29 3. Lösung des Problems . . . . .	298
29 4. Verhalten der Lösung in unendlicher Ferne . . . . .	299
29 5. Werte von $v_1$ und $v_2$ auf der Oberfläche des Zylinders . . . . .	300
29 6. Numerische Ergebnisse. Vergleich mit der Erfahrung . . . . .	300
§ 30. Das Problem einer dünnen Platte . . . . .	304
30 1. Einleitung. Konforme Abbildung . . . . .	304
30 2. Formulierung der Aufgabe. Berechnung der Funktion $w(z')$ . . . . .	304
30 3. Berechnung der Funktion $W(z)$ . Eigenschaften . . . . .	305
30 4. Berechnung des Widerstandes und der Tragkraft . . . . .	306
30 5. Vergleich mit der Erfahrung . . . . .	309
§ 31. Die kreisförmige Platte und verwandte Probleme . . . . .	311
31 1. Formulierung des Problems . . . . .	311
31 2. Einführung von dipolaren Koordinaten . . . . .	312
31 3. Einführung einer aus vierwertigen Funktionen aufgebauten Potentialfunktion mit Hilfe der Sommerfeldschen Methode. Eigenschaften der selben . . . . .	313
31 4. Lösung des Problems . . . . .	315
31 5. Das Verhalten der Lösung am Rande der Scheibe . . . . .	315
31 6. Berechnung des Widerstandes. Vergleich mit der Erfahrung. Verwandte Probleme . . . . .	316

## Anhang.

**Zwei Vorträge von Prof. N. Zeilon,**

gehalten vor dem zweiten internationalen Kongreß  
für technische Mechanik Zürich 1926.

I. Ein allgemeines hydrodynamisches Potentialproblem . . . . .	321
II. Zur Berechnung des Kielwasserdrukkes in der asymptotischen Widerstandstheorie . . . . .	328

## **Erster Teil.**

**Die Grundlösungen.**

**Erste Anwendungen derselben.**



## § 1. Die hydrodynamischen Differentialgleichungen.

### 1 1. Der Impulssatz. Die Kontinuitätsbedingung.

Wir wollen in diesem Paragraphen die partiellen Differentialgleichungen aufstellen, denen die Bewegungen einer zähen Flüssigkeit, soweit wir jetzt wissen, gehorchen. Die allgemeine Form dieser Differentialgleichungen werden wir dadurch erhalten, daß wir auf einen beliebigen, zusammenhängenden Teil einer Flüssigkeit den Satz der Newtonschen Mechanik anwenden, nach dem man den Zuwachs des Impulses, den ein materielles System während einer gewissen Zeit erfährt, dadurch finden kann, daß man das Zeitintegral der Resultierenden der äußeren, auf das System wirkenden Kräfte für diese Zeit berechnet. Um diesen Satz auf die Hydrodynamik anwenden zu können, müssen wir die Kräfte kennen, welche auf einen beliebig herausgegriffenen Teil einer Flüssigkeit wirken. Daß äußere Kräfte, welche jedes Volumenelement angreifen, vorkommen können, ist unmittelbar klar. Eine solche Kraft ist ja die Schwere. Die Hauptfrage ist aber, was wir von den Kräften aussagen können, welche die Umgebung des herausgegriffenen Teiles der Flüssigkeit auf denselben ausübt. Den mathematischen Ausdruck für diese Kraft zu bestimmen, ist unsere wichtigste Aufgabe in diesem Paragraphen. An dieser Stelle möge nur vorbereitend gesagt sein, daß der innere Grund dieser Kraft die zwischen den Molekülen der Flüssigkeit wirkende Molekularkraft ist. Wir wissen, daß die Molekularkraft nur, wenn die Entfernung zwischen den Molekülen sehr klein ist, eine merkliche Größe hat. Wir schließen hieraus, daß die Kräfte, welche die Umgebung des herausgegriffenen Teiles der Flüssigkeit auf denselben ausübt, nur in der unmittelbaren Nähe der Grenzfläche eine merkliche Größe haben. Wir können deshalb die Komponenten der Resultierenden aller dieser Kräfte als über die Grenzfläche erstreckte Flächenintegrale darstellen.

Wir wenden ein rechtwinkliges Bezugssystem an. Wir bezeichnen mit  $u_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) die Komponenten der Geschwindigkeit der Flüssigkeit und fassen  $u_j$  als Funktionen der Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  und der

Zeit  $t$  auf.  $\varrho$  sei die Dichte der Flüssigkeit.  $X_j$  seien die auf die Masseneinheit der Flüssigkeit bezogenen Komponenten der äußeren, auf die Flüssigkeit wirkenden Kraft.  $F_j$  seien endlich die auf die Flächeneinheit der Grenzfläche,  $F(t)$ , bezogenen Komponenten der Kraft, welche die Umgebung des herausgegriffenen Teiles der Flüssigkeit auf die Oberfläche desselben ausübt. Wir nehmen an, daß  $F(t)$  eine geschlossene Fläche mit einer stückweise stetigen Tangentenebene ist. Den von  $F(t)$  begrenzten Raumbereich, den der herausgegriffene Teil der Flüssigkeit im Momente  $t$  einnimmt, nennen wir  $B(t)$ . Der oben erwähnte Satz aus der Newtonschen Mechanik ergibt dann, wenn  $d\omega = dx_1 dx_2 dx_3$  ein Volumenelement und  $dS$  ein Flächenelement bezeichnet:

$$\int_{B(t)} (\varrho u_j)_t d\omega - \int_{B(t)} (\varrho u_j)_r d\omega = \int_0^t dt \int_{B(t)} \varrho X_j d\omega + \int_0^t dt \int_{F(t)} F_j dS. \quad (1)$$

Wir wollen annehmen, daß unsere Flüssigkeit unzusammendrückbar sei, daß also die Dichte  $\varrho$  konstant sei. Durch die Grenzfläche  $F(t)$  tritt dann stets ebensoviel Flüssigkeit ein wie aus. Die gesamte Menge von Flüssigkeit, welche während einer Zeiteinheit durch  $F(t)$  hindurchtritt, ist also Null. Wir bezeichnen mit  $n$  eine nach außen gezogene Normale eines Flächenelementes,  $dS$ , von  $F(t)$  von der Länge 1. Mit  $n_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) bezeichnen wir die Richtungskosinusse dieser Normalen. Die gesamte Menge von Flüssigkeit, welche während der Zeiteinheit durch  $F(t)$  hindurchtritt, ist dann:

$$\int_{F(t)} \varrho \sum_j u_j n_j dS.$$

Dieses Integral muß also den Wert Null haben. *Wir wollen im folgenden die von Einstein eingeführte Bezeichnung benutzen, wonach ein Glied, das denselben Index zweimal enthält, in bezug auf diesen Index summiert werden soll*, hier über die Werte 1, 2, 3. Wir können dann unsere Gleichung in der einfacheren Form:

$$\int_{F(t)} \varrho u_j n_j dS = 0 \quad (2)$$

schreiben. (2) ist die Kontinuitätsbedingung.

## 12. Der Deformationstensor.

Wir müssen jetzt untersuchen, wie die Größen  $F_j$  von der Bewegung der Flüssigkeit abhängen. Eine erschöpfende Antwort auf diese Frage kann nur die Molekulartheorie geben. Hier wollen wir uns nicht in diese Theorie vertiefen. Durch eine phänomenologische

Betrachtung können wir eine Antwort auf unsere Frage erhalten, die für unseren Zweck genügt. Einen ersten Teil von  $F_j$  kennen wir schon aus der Hydrostatik. Auf die Grenzfläche  $F(t)$  muß ein Druck wirken. Nennen wir diesen hydrostatischen Druck  $p$ , so erhalten wir als erstes Glied von  $F_j$  die Größe  $-pn_j$ . Die Annahme, daß die Größen  $F_j$  durch diese ersten Glieder erschöpft sind, würde uns zu der Theorie der idealen Flüssigkeiten führen. Bei den zähen Flüssigkeiten müssen die  $F_j$  auch andere Glieder enthalten. Von diesen anderen Gliedern müssen wir annehmen, daß sie von den Formänderungen, den Deformationen, abhängen, welche die Flüssigkeit während der Bewegung erleidet. Um unsere Aufgabe zu lösen, müssen wir uns zuerst klarmachen, wie man diese Formänderungen mathematisch beschreiben kann.

Wir betrachten einen beliebigen Punkt,  $P$ , mit den Koordinaten  $x_i$ , in der Flüssigkeit.  $u_j$  sei dort die Geschwindigkeit. Ein anderer Punkt,  $P'$ , in der Flüssigkeit habe die Koordinaten  $x'_j$  und die Geschwindigkeit  $u'_j$ . Wenn die Größen  $u_j$  als Funktionen von  $x_1, x_2, x_3$  stetige Ableitungen erster Ordnung haben und wenn die drei Größen  $|x'_j - x_j|$  genügend klein sind, so gilt annähernd:

$$\begin{aligned} u'_j = u_j + (x'_k - x_k) \frac{\partial u_j}{\partial x_k} &= u_j + (x'_k - x_k) \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) + \\ &+ (x'_k - x_k) \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right). \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen untersuchen wir die Bewegung der Flüssigkeit in der Umgebung von  $P$ . Wir halten also diesen Punkt fest, lassen aber  $P'$  einen beliebigen Punkt der Umgebung von  $P$  sein. Das erste Glied in unserem letzten Ausdrucke für  $u'_j$  ist von  $P'$  unabhängig. Es entspricht einer Translation des ganzen,  $P$  umgebenden Flüssigkeitsvolumens. Das zweite Glied gibt, explizit ausgeschrieben, in den drei Fällen  $j = 1, 2, 3$ :

$$\begin{aligned} (x'_3 - x_3) \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) - (x'_2 - x_2) \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right), \\ (x'_1 - x_1) \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) - (x'_3 - x_3) \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right), \\ (x'_2 - x_2) \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) - (x'_1 - x_1) \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right). \end{aligned}$$

Diese Geschwindigkeitskomponenten entsprechen einer Drehung des  $P$  umgebenden Flüssigkeitsvolumens um eine durch  $P$  gehende

Drehachse mit den Komponenten:  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)$ ,  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)$ ,  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$ . Die beiden ersten Glieder in unserem Ausdruck für  $u_j'$  entsprechen also zusammen der allgemeinsten Bewegung, welche ein fester Körper ausführen kann. Wir schließen hieraus, daß das letzte Glied in unserem Ausdruck für  $u_j'$  einer Bewegung entspricht, bei welcher die Volumenelemente der Flüssigkeit ihre Form ändern und also fortwährend deformiert werden. Wir sehen, daß wir als Maß der Geschwindigkeit, mit welcher die Deformationen ablaufen, die neun Größen:  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) = D_{jk} = D_{kj}$  ( $j, k = 1, 2, 3$ )

verwenden können. Wir bezeichnen diese neun Größen als Komponenten des Deformationstensors. Der Tensorkomponentencharakter kommt in unserer Formel für  $u_j'$  darin zum Ausdruck, daß die drei Größen  $(x_k' - x_k) D_{jk}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) Komponenten eines Vektors sind, was bekanntlich besagt, daß sie bei Übergang zu einem anderen rechtwinkligen Bezugssysteme mit demselben Anfangspunkte in derselben Weise wie die Koordinaten transformiert werden. Dies gilt stets, wo wir auch den Punkt  $P'$  in der Nähe von  $P$  nehmen. Wir sehen hieraus, daß, wenn  $v_i$  die Komponenten eines ganz beliebigen Vektors sind, immer die drei Summen  $v_k D_{jk}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) Komponenten eines Vektors sind. Hieraus folgt ferner, daß Größetripeln wie  $v_k D_{kl}^m D_{lm}$  usw. Vektoren sind.\*

### 13. Beziehung zwischen Reibungskräften und Deformationstensor.

Wir haben angenommen, daß die Größen  $F$ , außer den Druckkomponenten andere Glieder enthalten, welche von den Deformationen der Flüssigkeit während der Bewegung abhängen. Wir können jetzt diese Annahme in bestimmterer Form aussprechen. Wir nehmen an, daß diese Glieder von den Deformationskomponenten  $D_{jk}$  und von den drei Größen  $n_j$ , welche die Orientierung des betrachteten Flächen-elementes von  $F(t)$  festlegen, abhängen. Wir setzen also:

$$F_j = -pn_j + \Phi_j(n_k, D_{lm}).$$

Die drei Größen  $\Phi_j$  müssen, wie unsere Formel zeigt, Komponenten eines Vektors sein.

---

\* Vgl. wegen weiterer Ausführungen über Tensoren 3 3.

Über die Abhängigkeit der Funktionen  $\Phi_j$  von  $n_k$  gibt unsere Bewegungsgleichung (1) Aufschluß. Wir wenden diese Gleichung auf ein räumliches Viereck an, das wir in der Weise erhalten, daß wir durch einen beliebigen Punkt  $P$  der Flüssigkeit drei mit den Koordinatenachsen parallele Geraden ziehen und diese Geraden mit einer nicht durch  $P$  hindurchgehenden Ebene abschneiden. Wenn wir diese Ebene sich dem Punkte  $P$  nähern lassen, konvergieren sowohl das Volumen des Vierecks wie die Flächeninhalte seiner Grenzflächen gegen Null, wobei jedoch das Volumen schneller als die Flächeninhalte gegen Null geht. Wir bezeichnen mit  $S_k$  den Flächeninhalt der Seite des räumlichen Vierecks, die gegen die  $x_k$ -Achse senkrecht ist, und mit  $F_j^{(k)}$  den dieser Seite entsprechenden Wert der Größe  $F_j$ .  $S$  und  $F_j$  haben dieselbe Bedeutung für die vierte Seite des Vierecks. Die Gleichung (1) ergibt für ein sehr kleines Gebiet annähernd:

$$\int_S F_j dS = 0$$

und also für unser Viereck in den hier eingeführten Bezeichnungen:

$$SF_j + S_k F_j^{(k)} = 0.$$

Da:

$$S_k = S n_k,$$

so folgt:

$$F_j = -n_k F_j^{(k)}.$$

Wir sehen hieraus, daß  $F_j$  eine lineare und homogene Funktion der Größen  $n_k$  ist. Dasselbe gilt offenbar von den Größen  $\Phi_j$ .

Unsere Aufgabe ist jetzt, einen von den Größen  $n_k$ ,  $D_{lm}$  abhängigen Vektor zu bestimmen, der von den Größen  $n_k$  linear abhängt. Es gibt unendlich viele solche Vektoren. Wir können für  $\Phi_j$  den Ansatz:

$$\Phi_j = \varphi_1 n_j + \varphi_2 n_k D_{jk} + \varphi_3 n_k D_{jl} D_{lk} + \dots$$

machen, wo  $\varphi_1, \varphi_2 \dots$  beliebige Funktionen der skalaren Größen sind, die man aus dem Tensor  $D_{jk}$  erhalten kann ( $D_{kk}, D_{jk}^2, D_{jk} D_{kl} D_{lf}$  usw.). Das erste Glied in diesem Ansatz gibt ersichtlich nichts Neues. Es hat genau dieselbe Form wie das Glied:  $-pn_j$ , das wir aus dem hydrostatischen Drucke erhielten. Dieses erste Glied in unserem Ansatz können wir deshalb weglassen. Aber selbst wenn wir dies tun, bleibt eine unendliche Zahl von Ansätzen für  $\Phi_j$  übrig, die alle theoretisch möglich sind. Der einfachste Ansatz, den wir für  $F_j$  machen können, wenn  $F_j$  überhaupt von den Deformationsgrößen abhängen soll, ist:

$$F_j = -pn_j + 2\mu n_k D_{jk} = -pn_j + \mu n_k \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right), \quad (3)$$

wo  $\mu$  bei konstanter Temperatur und Dichte eine konstante Größe ist. Bei langsamem Bewegungen hat sich dieser Ansatz bewährt. Ob er auch bei schnellen Bewegungen genügt, kann nur der Vergleich zwischen der auf dieser Annahme aufgebauten Theorie und der Erfahrung lehren. In diesem Buch werden wir den Ansatz (3) unseren Betrachtungen zu grunde legen.

#### 14. Aufstellung der grundlegenden hydrodynamischen Integralgleichungen.

Wir führen den Wert (3) von  $F_j$  in unsere Gleichung (1) ein und bekommen:

$$\int_{B(t)} (\varrho u_j)_t d\omega - \int_{B(t^0)} (\varrho u_j)_{t^0} d\omega = \int_0^t dt \int_{B(t)} \varrho X_j d\omega + \\ + \int_0^t dt \int_{F(t)} \left\{ -pn_j + \mu n_k \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \right\} dS.$$

Wir haben angenommen, daß die Dichte der Flüssigkeit konstant ist.  $\varrho$  hat also in der ganzen Flüssigkeit denselben, von der Zeit unabhängigen Wert. Wir wollen annehmen, daß mit genügender Näherung dasselbe in bezug auf die Temperatur gilt. Auch die Zähigkeit  $\mu$  muß dann in der ganzen Flüssigkeit denselben, von der Zeit unabhängigen Wert haben. Wir können unter diesen Voraussetzungen unsere Bewegungsgleichung in einfacherer Weise schreiben. Für eine beliebige geschlossene Fläche innerhalb der Flüssigkeit gilt wegen der Kontinuitätsbedingung (2):

$$\int u_k n_k dS = 0.$$

Wir verschieben die geschlossene Fläche ein Stückchen  $\Delta x_j$  in der Richtung der  $x_j$ -Achse und stellen ebenfalls für die so erhaltene Fläche die Kontinuitätsbedingung auf. Sie kann in der Form:

$$\int u'_k n'_k dS' = 0$$

geschrieben werden, wo:  $n'_k = n_k$ ,  $dS' = dS$ ,  $u'_k = u_k + \Delta x_j \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$ . Wir erhalten also durch Subtraktion und Division mit  $\Delta x_j$ :

$$\int \frac{\partial u_k}{\partial x_j} n_k dS = 0.$$

Unsere Bewegungsgleichung kann also auch in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} \varrho \int_B (u_j)_t d\omega - \varrho \int_B (u_j)_{t^0} d\omega &= \varrho \int_{t^0}^t dt \int_B X_j d\omega + \\ &+ \int_{t^0}^t dt \int_F \left( -pn_j + \mu n_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) dS. \end{aligned} \right\} (4)$$

Wir können den Inhalt der Gleichung (4) auch in anderer Weise schreiben. Wir betrachten einen unbeweglichen Raumbereich,  $B$ , von dessen Grenzfläche  $F$  wir annehmen, daß sie eine stückweise stetige Tangentenebene besitzt. Wir nehmen an, daß  $B$  während der Zeit  $t^0$  bis  $t$  innerhalb der Flüssigkeit liegt. Wir können den Impuls, der während derselben Zeit in  $B$  erzeugt wird, dadurch berechnen, daß wir die Resultierende der Kräfte, die auf die Flüssigkeit in  $B$  wirken, zwischen  $t^0$  und  $t$  integrieren. Ein Teil dieses Impulses befindet sich noch zur Zeit  $t$  in  $B$ . Er hat in der Richtung der  $x_j$ -Achse die Komponente:

$$\varrho \int_B (u_j)_t d\omega - \varrho \int_B (u_j)_{t^0} d\omega.$$

Der andere Teil ist, der Flüssigkeit folgend, durch die Grenzfläche  $F$  hinausgeströmt. Es ist leicht, die Komponenten dieses Teiles zu berechnen. Während der Zeit  $dt$  strömt durch das Flächenelement  $dS$  eine Flüssigkeitsmenge  $\varrho u_k n_k dS dt$  hinaus, wenn  $n_k$  die Richtungscosinusse der nach außen gezogenen Normale von  $dS$  sind. Gleichzeitig strömt ein längs der  $x_j$ -Achse gerichteter Impuls von dem Betrage  $\varrho u_j u_k n_k dS dt$  durch  $dS$  hinaus. Der gesamte Impuls in der Richtung der  $x_j$ -Achse, der während der Zeit  $t^0$  bis  $t$  durch  $F$  hinausströmt, ist also:

$$\varrho \int_{t^0}^t dt \int_F u_j u_k n_k dS,$$

und wir haben:

$$\begin{aligned} \varrho \int_B (u_j)_t d\omega - \varrho \int_B (u_j)_{t^0} d\omega + \varrho \int_{t^0}^t dt \int_F u_j u_k n_k dS = \\ = \varrho \int_{t^0}^t dt \int_B X_j d\omega + \int_{t^0}^t dt \int_F \left( -pn_j + \mu n_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) dS. \end{aligned}$$

Wir erhalten durch direkte Integration:

$$\int_B \frac{\partial (u_j u_k)}{\partial x_k} d\omega = \int_S u_j u_k n_k dS.$$

Folglich ist:

$$\int_S u_j u_k n_k dS = \int_B \left( u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) d\omega.$$

Die Kontinuitätsbedingung:

$$\varrho \int u_k n_k dS = 0,$$

welche für jede geschlossene Fläche in der Flüssigkeit gilt, zeigt, daß für jeden Bereich innerhalb der Flüssigkeit:

$$\int \frac{\partial u_k}{\partial x_k} d\omega = 0.$$

Daraus folgt als andere Form der Kontinuitätsgleichung  $\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$ , so daß auch:

$$\int_B u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_k} d\omega = 0,$$

folglich:

$$\int_S u_j u_k n_k dS = \int_B u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} d\omega.$$

Wir erhalten also endlich unsere Bewegungsgleichung in der folgenden Form:

$$\left. \begin{aligned} \varrho \int_B (u_j)_t d\omega - \varrho \int_B (u_j)_t^* d\omega &= \varrho \int_{t^0}^t dt \int_B \left( X_j - u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) d\omega + \\ &+ \int_{t^0}^t dt \int_F \left( -p n_j + \mu n_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) dS. \end{aligned} \right\} (5)$$

## 15. Die hydrodynamischen Differentialgleichungen.

Über die Geschwindigkeitskomponenten  $u_j$  haben wir bis jetzt nur vorausgesetzt, daß sie stetige Ableitungen nach  $x_1, x_2, x_3$  haben. Wir wollen jetzt unsere Voraussetzungen erweitern. Wir nehmen zunächst an, daß die Größen  $u_j$  Ableitungen nach  $t$  besitzen, welche in Raum und Zeit stetig sind. Wir setzen dann in (5)  $t^0 = t - \delta t$ , dividieren unsere Gleichung mit  $\delta t$  und führen den Grenzübergang  $\delta t \rightarrow 0$  aus. Wir erhalten:

$$\varrho \int_B \frac{\partial u_j}{\partial t} d\omega = \varrho \int_B \left( X_j - u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) d\omega + \int_F \left( -p n_j + \mu n_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) dS. \quad (6)$$

Die Beschleunigung eines Partikels mit der Geschwindigkeit  $u_j(x_1, x_2, x_3, t)$  hat die Komponenten:

$$\frac{d}{dt} u_j(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}.$$

Wir können deshalb unsere Gleichung (6) kürzer in der folgenden Form schreiben:

$$\varrho \int_B \frac{d u_j}{d t} d\omega = \varrho \int_B X_j d\omega + \int_F \left( -p n_j + \mu n_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) dS. \quad (7)$$

Wir nehmen jetzt an, daß die Größen  $u_j$  stetige Ableitungen zweiter Ordnung in bezug auf die Koordinaten  $x_k$  besitzen. Außerdem nehmen wir an, daß der Druck  $p$  stetige Ableitungen erster Ordnung in bezug auf dieselben Variablen besitzt. Wir können in diesem Fall das in Gleichung (6) vorkommende Flächenintegral in ein Volumenintegral umformen. Wir haben schon oben die Tatsache benutzt, daß, wenn  $f$  eine in einem Bereich  $B$  stetige Funktion ist und wenn die Grenzfläche  $F$  von  $B$  eine stückweise stetige Tangentenebene besitzt:

$$\int_B \frac{\partial f}{\partial x_k} d\omega = \int_F f n_k dS$$

ist. Wir setzen in dieser Formel  $f$  einerseits  $= p$ , andererseits  $= \frac{\partial u_j}{\partial x_k}$  und erhalten:

$$\int_F p n_k dS = \int_B \frac{\partial p}{\partial x_k} d\omega, \quad \int_F n_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} dS = \int_B \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k^2} d\omega = \int_B \Delta u_j d\omega,$$

wenn wir in üblicher Weise:

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_3^2} = \Delta u_j$$

setzen. Unter den oben gemachten Voraussetzungen können wir also unsere Bewegungsgleichung in der folgenden Form schreiben:

$$\int_B \left[ \mu \Delta u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} - \varrho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \varrho \left( X_j - u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \right] d\omega = 0.$$

Diese Gleichung soll erfüllt sein, wie wir auch den Bereich  $B$  innerhalb der Flüssigkeit wählen. Von allen im Integranden vorkommenden Größen mit Ausnahme von  $X_j$  haben wir vorausgesetzt, daß sie stetige Funktionen von  $x_1, x_2, x_3$  sind. Wir nehmen jetzt an, daß auch die Größen  $X_j$  stetig sind. Der Integrand in unserem Integrale ist dann eine stetige Funktion von  $x_1, x_2, x_3$ . Hat diese Funktion in irgendeinem Punkte einen nicht verschwindenden Wert, so können

wir diesen Punkt mit einer geschlossenen Fläche umgeben, innerhalb welcher der Integrand überall dasselbe Vorzeichen hat. Da dies in Widerspruch mit unserer Gleichung steht, so können wir schließen, daß diese Gleichung unter den zugrunde gelegten Annahmen nur dann erfüllt sein kann, wenn überall in der Flüssigkeit:

$$\mu \Delta u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} - \varrho \frac{\partial u_j}{\partial t} = -\varrho X_j + \varrho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}. \quad I^a$$

Da:

$$u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = u_k \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_k^2}{\partial x_j} \quad (u_k^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2),$$

so läßt sich diese Gleichung auch in der Form:

$$\mu \Delta u_j - \frac{\partial q}{\partial x_j} - \varrho \frac{\partial u_j}{\partial t} = -\varrho X_j + \varrho u_k \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \\ q = p + \frac{1}{2} \varrho u_k^2 \quad I^b$$

schreiben. Im stationären Falle, d. h. wenn die Größen  $u_j$  von  $t$  unabhängig sind, gehen diese Gleichungen in die folgenden über:

$$\mu \Delta u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} = -\varrho X_j + \varrho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}, \quad II^a$$

$$\mu \Delta u_j - \frac{\partial q}{\partial x_j} = -\varrho X_j + \varrho u_k \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \\ q = p + \frac{1}{2} \varrho u_k^2. \quad II^b$$

Wir betrachten schließlich den Fall, wo ein Körper sich mit konstanter Geschwindigkeit  $U$  in einer Flüssigkeit bewegt. Wir wenden ein Bezugssystem an, das dem Körper in seiner Bewegung folgt und das wir so orientieren, daß die  $x_1$ -Achse mit der Bewegungsrichtung des Körpers parallel ist. Wenn  $\bar{u}_j$  die in diesem Bezugssystem gemessenen Geschwindigkeitskomponenten sind, so setzen wir:  $\bar{u}_1 = -U + u_1$ ,  $\bar{u}_2 = u_2$ ,  $\bar{u}_3 = u_3$ . Wir erhalten so im stationären Falle und auf ein Koordinatensystem bezogen, das sich mit der Geschwindigkeit  $u$  längs der  $x_1$ -Achse bewegt:

$$\mu \Delta u_j + \varrho U \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - \frac{\partial p}{\partial x_j} = -\varrho X_j + \varrho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \quad III^a$$

$$\mu \Delta u_j + \varrho U \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - \frac{\partial q}{\partial x_j} = -\varrho X_j + \varrho u_k \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right). \quad \text{III}^b$$

$$q = p + \frac{1}{2} \varrho u_k^2.$$

Die Kontinuitätsbedingung hat in allen drei Fällen dieselbe Form:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0.$$

## § 2. Die verallgemeinerte Poissonsche Gleichung.

### 21. Zurückführung auf Poissonsche Gleichungen für das innere Problem.

Zur Vorbereitung unserer Behandlung des hydrodynamischen Problems werden wir in diesem Paragraphen eine mathematische Aufgabe betrachten, die eine weitgehende Ähnlichkeit mit einem wichtigen Spezialfalle des hydrodynamischen Problems besitzt, die aber viel einfacher ist und die man außerdem als ein klassisches mathematisches Problem bezeichnen kann. Wir betrachten die verallgemeinerte Poissonsche Gleichung:

$$\Delta u = X(x_1, x_2, x_3) + f\left(x_j; u, \frac{\partial u}{\partial x_j}\right), \quad (1)$$

wo wir unter  $f$  eine ganze rationale Funktion von  $u$  und den partiellen Ableitungen  $\frac{\partial u}{\partial x_j}$  verstehen, von welcher wir übrigens offenbar annehmen

können, daß sie kein von  $u$  und  $\frac{\partial u}{\partial x_j}$  unabhängiges Glied besitzt. Wir stellen uns hinsichtlich dieser Gleichung zwei Fragen. Eine lautet: wie findet man eine Lösung dieser Gleichung, die innerhalb einer gegebenen geschlossenen Fläche  $F$  regulär ist und auf dieser Fläche vorgeschriebene Werte annimmt? Die andere lautet: wie findet man eine Lösung dieser Gleichung, die außerhalb einer gegebenen, geschlossenen Fläche  $F$  regulär ist, auf dieser Fläche vorgeschriebene Werte annimmt und in unendlich fernen Punkten verschwindet?

Wir betrachten zuerst das innere Problem. Es erweist sich als zweckmäßig, in die partielle Differentialgleichung einen Parameter  $\lambda$  einzuführen und sie folgendermaßen zu schreiben:

$$\Delta u = X(x_j) + \lambda f\left(x_j; u, \frac{\partial u}{\partial x_j}\right). \quad (2)$$

Man kann, wenn man will, gleichzeitig den Parameter  $\lambda$  in die Werte einführen, welche  $u$  auf der Grenzfläche  $F$  annehmen soll. Wir schreiben vor, daß auf  $F$ :

$$u = U^{(0)} + \lambda U^{(1)} + \dots + \lambda^n U^{(n)} + \dots \quad (3)$$

sein soll, wo  $U^{(0)}, U^{(1)} \dots$  vorgeschriebene Funktionen sind. Wir versuchen die so abgeänderte Aufgabe durch eine Reihe zu lösen, welche nach Potenzen von  $\lambda$  fortschreitet:

$$u(x_j; \lambda) = u^{(0)} + \lambda u^{(1)} + \dots \quad (4)$$

Zur Bestimmung der Funktionen  $u^{(0)}, u^{(1)} \dots$  erhalten wir die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u^{(0)} &= X(x_j), \quad \Delta u^{(1)} = f\left(x_j; u^{(0)}, \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x_j}\right) \dots \\ \Delta u^{(n)} &= f^{(n)}\left(x_j; u^{(0)}, \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x_j}; u^{(1)}, \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_j}; \dots u^{(n-1)}, \frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial x_j}\right) \dots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

wo die Glieder rechts durch Einsetzung der Reihe (4) in das rechte Glied der Gleichung (2) und nachfolgender Entwicklung nach Potenzen von  $\lambda$  erhalten werden. Die zugehörigen Nebenbedingungen sind: auf der Grenzfläche  $F: u^{(n)} = U^{(n)}$  ( $n = 0, 1, 2 \dots$ ). Offenbar müssen wir bei der Lösung des Systems (5) so verfahren, daß wir zuerst die erste Gleichung mit der Nebenbedingung  $u^{(0)} = U^{(0)}$  auf  $F$  lösen, dann die gefundene Funktion  $u^{(0)}$  rechts in die zweite Gleichung einsetzen, diese Gleichung mit der Nebenbedingung  $u^{(1)} = U^{(1)}$  auf  $F$  auflösen und so fortfahren. Die partiellen Differentialgleichungen und die Nebenbedingungen, zu welchen wir durch dieses Rekursionsverfahren geführt werden, sind alle von demselben Typus. Die Differentialgleichungen sind von der Poissonschen Art:

$$\Delta u = X(x_j), \quad (6)$$

und die Nebenbedingung ist immer, daß die Funktion  $u$  auf der Grenzfläche  $F$  vorgeschriebene Werte  $U$  annehmen soll. Mit diesem Poissonschen Problem müssen wir uns zuerst beschäftigen.

## 22. Lösung der Poissonschen Gleichungen mittels der Greenschen Funktion.

Wir erinnern zunächst daran, wie man mittels der von Green eingeführten Methoden die Poissonsche Gleichung (6) auf die Laplacesche Gleichung:

$$\Delta u = 0 \quad (7)$$

zurückführen kann. Wenn  $V_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) die Komponenten eines im Bereich  $B$  stetigen und in bezug auf  $x_1, x_2, x_3$  stetig differenzierbaren Vektors sind, so ist, wie wir oben gesehen haben:

$$\int_B \frac{\partial V_k}{\partial x_k} d\omega = \int_F n_k V_k dS.$$

$v$  sei jetzt eine in  $B$  stetige und zweimal stetig differenzierbare Funktion von  $x_1, x_2, x_3$ . Wir setzen  $V_k = u \frac{\partial v}{\partial x_k}$  und erhalten:

$$\int_B \left( u \Delta v + \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) d\omega = \int_F u n_k \frac{\partial v}{\partial x_k} dS = \int_F u \frac{dv}{dn} dS,$$

wenn wir  $n_k \frac{\partial v}{\partial x_k} = \frac{dv}{dn}$  setzen. Wir erhalten in derselben Weise, wenn  $u$  ebenfalls in  $B$  zweimal stetig differenzierbar ist:

$$\int_B \left( v \Delta u + \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) d\omega = \int_F v \frac{du}{dn} dS.$$

Also:

$$\int_B (u \Delta v - v \Delta u) d\omega = \int_F \left( u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn} \right) dS. \quad (8)$$

$x_j^0$  ( $j = 1, 2, 3$ ) seien jetzt die Koordinaten eines Punktes  $P^{(0)}$  innerhalb von  $F$ . Wir verstehen unter  $B(\varepsilon)$  den Bereich, der innerhalb von  $F$  und außerhalb einer Kugel mit dem Mittelpunkte in  $P^{(0)}$  und dem Radius  $\varepsilon$  liegt. Wir wählen  $\varepsilon$  von Anfang an so klein, daß die innere Grenzfläche ganz im Innern des Gebietes  $B$  liegt, und werden bald  $\varepsilon$  gegen Null konvergieren lassen. Wir nehmen an, daß  $v$  innerhalb von  $S$  in der Form:

$$\frac{1}{r} + w(x_j)$$

dargestellt werden kann, wo  $r = \sqrt{(x_j - x_j^{(0)})^2}$  die Entfernung zwischen dem Aufpunkte  $x_j$  und dem Punkte  $P^{(0)}$  ist und wo  $w$  eine stetige und zweimal stetig differenzierbare Funktion von  $x_j$  ist, welche der Differentialgleichung

$$\Delta w = 0$$

genügt. Wenn  $u$  eine Lösung der Poissonschen Gleichung (7) ist, so haben wir dann in  $B(\varepsilon)$ :

$$\Delta u = X, \quad \Delta v = 0.$$

Folglich:

$$\int_{B(\varepsilon)} (u \Delta v - v \Delta u) d\omega = - \int_{B(\varepsilon)} vX d\omega.$$

Wir wenden die Gleichung (8) auf die Funktionen  $u$  und  $v$  und den Bereich  $B(\varepsilon)$  an. Wir erhalten:

$$\int_{r=\varepsilon} \left( u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn} \right) dS + \int_F \left( u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn} \right) dS = - \int_{B(\varepsilon)} vX d\omega.$$

Wir haben auf der Kugel  $r = \varepsilon$ :

$$\frac{dv}{dn} = \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{dw}{dn}.$$

Ferner:

$$\int_{r=\varepsilon} dS = 4\pi\varepsilon^2.$$

Folglich:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r=\varepsilon} \left( u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn} \right) dS = 4\pi u(x_j^{(0)})$$

und:

$$u(x_j^{(0)}) = -\frac{1}{4\pi} \int_B vX d\omega + \frac{1}{4\pi} \int_F \left( v \frac{du}{dn} - u \frac{dv}{dn} \right) dS.$$

Wir wollen über die Funktion  $v$  noch eine Annahme machen. Auf der Fläche  $F$  soll  $v$  verschwinden. Dann folgt wegen  $u = U$  auf  $F$ :

$$u(x_j^{(0)}) = -\frac{1}{4\pi} \int_B vX d\omega - \frac{1}{4\pi} \int_F U \frac{dv}{dn} dS. \quad (9)$$

Wenn die Poissonsche Gleichung (6) mit der Nebenbedingung  $u = U$  auf  $F$  eine Lösung besitzt, welche in  $B$  zweimal stetig differenzierbar ist, so wird sie durch das rechte Glied von (9) dargestellt. Umgekehrt genügt die durch (9) definierte Funktion  $u$ , wenn  $X$  stetig differenzierbar ist, im Innern von  $F$  stets der Gleichung  $\Delta u = X$  und nimmt, wenn  $F$  stetige Tangentenebenen und stetige Krümmungen besitzt und  $U$  stetig ist, auf  $F$  den Wert  $U$  an. In diesem Sinne kann man sagen, daß durch diese Gleichung das Poissonsche Problem auf eine spezielle Randwertaufgabe bei der Laplaceschen Gleichung zurückgeführt worden ist, auf die Aufgabe, eine in  $B$  reguläre, d. h. stetige und zweimal stetig differenzierbare Lösung  $w$  der Laplaceschen Gleichung zu bestimmen, die an der Grenzfläche  $F$  die Werte  $-1/r$  annimmt. Man sieht, daß die hiermit gewonnene Reduktion des Poissonschen Problems ganz und gar auf den Eigenschaften der Funktion  $1/r$  beruht. Dies ist ein Grund, warum man diese Funktion als die Grundlösung der Laplaceschen Gleichung bezeichnet. Die oben definierte

### 23. Anwendung auf die verallgemeinerte Poissonsche Gleichung 17

Funktion  $v$  nennt man die (erste) Greensche Funktion der Laplaceschen Gleichung.

Wie bestimmt man die Funktion  $w$ ? — In einigen Fällen, wie bei einer Kugel, kann man mit einfachen Mitteln diese Funktion herstellen. Im allgemeinen ist aber die Bestimmung von  $w$  ebenso kompliziert wie das Problem, eine in  $B$  reguläre Lösung,  $v$ , der Laplaceschen Differentialgleichung zu bestimmen, welche auf  $F$  beliebig vorgeschriebene Werte annimmt. Um  $v$  allgemein zu bestimmen, machen wir unter Benutzung der Grundlösung den Ansatz:

$$v(P^{(0)}) = \frac{1}{2\pi} \int_F \sigma(P) \frac{d}{dn_P} \frac{1}{r} dS_P.$$

$P^{(0)}$  ist hier ein beliebiger Punkt innerhalb von  $F$ ,  $P$  ein Punkt auf  $F$ .  $r$  ist die Entfernung  $P \rightarrow P^{(0)}$ .  $\frac{d}{dn_P}$  hat die Bedeutung  $n_k \frac{\partial}{\partial x_k}$  ( $x_k$  die Koordinaten von  $P$ ,  $x_k^{(0)}$  die Koordinaten von  $P^{(0)}$ ).  $\sigma$  ist eine Funktion, deren Werte auf  $F$  aus der Bedingung  $v = V$  auf  $F$  zu bestimmen sind. Diese Bedingung führt, wenn man  $P^{(0)}$  auf  $F$  rücken läßt, nach einem bekannten Satze der Potentialtheorie auf die Integralgleichung vom Fredholmschen Typus\*:

$$\sigma(P') + \frac{1}{2\pi} \int_F \sigma(P) \frac{d}{dn_P} \frac{1}{r} dS_P = V(P').$$

Die Auflösung dieser Integralgleichung gibt uns  $\sigma$  und damit  $v$ .

### 23. Anwendung auf die verallgemeinerte Poissonsche Gleichung.

Wir nehmen an, daß es uns gelungen ist, die Funktionen  $u^{(n)}$  zu bestimmen. Wir können jetzt die Reihe  $\sum_0^\infty u^{(n)} \lambda^n$  bilden. Wir begegnen hier der Frage, ob diese Reihe konvergiert. Wir werden nicht auf diese Frage eingehen, sondern erwähnen nur, daß man unter sehr allgemeinen Voraussetzungen beweisen kann, daß die Reihe konvergiert, wenn  $|\lambda|$  unterhalb einer gewissen Grenze liegt. Die Reihe definiert dann in der Umgebung von  $\lambda = 0$  eine Funktion  $u(x_j; \lambda)$ , die in  $\lambda$  analytisch ist. Wir können unter denselben Voraussetzungen beweisen, daß  $u(x_j; \lambda)$  innerhalb von  $F$  partielle Ableitungen der zwei ersten Ordnungen in bezug auf  $x_1, x_2, x_3$  besitzt und der partiellen Differentialgleichung:

\* Man vergleiche hierzu etwa Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik I, Kap. III.

$$\Delta u = X + \lambda f\left(x_j; u, \frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$$

genügt. Liegt der Punkt  $\lambda = 1$  im Konvergenzbereiche der Reihe, so können wir in derselben  $\lambda = 1$  setzen und erhalten dadurch eine Lösung unseres Problems. Es ist aber wohl zu bemerken, daß es keineswegs sicher ist, daß nur diese Lösung existiert. Man kann in der komplexen  $\lambda$ -Ebene längs verschiedener Wege vom Punkte  $\lambda = 0$  zum Punkte  $\lambda = 1$  kommen. Wenn die Funktion  $u(x_j; \lambda)$  eine vieldeutige Funktion von  $\lambda$  ist, so kann man auf diese Weise mehrere Werte dieser Funktion im Punkte  $\lambda = 1$  erhalten. Wir haben erst dann unser Problem vollständig gelöst, wenn wir das Verhalten der Funktion  $u(x_j; \lambda)$  in der ganzen komplexen  $\lambda$ -Ebene kennen. — Wenn der Punkt  $\lambda = 1$  außerhalb des Konvergenzkreises unserer Reihe liegt, so liegt er doch oft im Existenzbereiche der Funktion  $u(x_j; \lambda)$ . Man kann dann den Wert (oder die Werte) dieser Funktion im Punkte  $\lambda = 1$  aus der Potenzreihe durch analytische Fortsetzung erhalten oder auch durch eine der Polynomreihen, durch welche man, nach dem Vorgange von Mittag-Leffler, die analytische Fortsetzung ersetzen kann.

#### 24. Das äußere Problem. Eine charakteristische Schwierigkeit.

Wir wenden uns zum zweiten Problem, das wir bei der verallgemeinerten Poissonschen Gleichung zu betrachten haben, dem äußeren Probleme. Es liegt nahe, die Lösung in derselben Weise wie für das innere Problem zu versuchen. Wir führen wieder sowohl in die Differentialgleichung wie in die Randwerte einen Parameter  $\lambda$  ein und erhalten wieder ein System von Poissonschen Gleichungen. Was neu hinzugekommen ist, ist nur, daß wir jetzt von den Lösungen dieser Gleichungen nicht nur verlangen müssen, daß sie außerhalb von  $F$  regulär sind und auf  $F$  vorgeschriebene Werte annehmen, sondern auch, daß sie im unendlich Fernen verschwinden. Daß mit dieser Bedingung etwas wesentlich Neues hinzugekommen ist, das wird, wie ich glaube, am einfachsten und besten aus der Behandlung eines speziellen Beispieles hervorgehen.

Wir stellen uns die Aufgabe, eine Lösung der partiellen Differentialgleichung:

$$\Delta u = 2\lambda \frac{\partial u}{\partial x_1} \quad (10)$$

zu bestimmen, welche außerhalb von der Kugel  $R^2 = x_k^2 = a^2$  regulär ist, im unendlich Fernen verschwindet und auf der Kugel den Wert:

$$\sum_u \frac{\lambda^n x_1^n}{n!} = e^{\lambda x_1}$$

annimmt. Wir versuchen unser Problem durch eine Potenzreihe:  $u(x_j, \lambda) = \sum_n u^{(n)} \lambda^n$  zu lösen. Wir erhalten zur Bestimmung der Funktionen  $u^{(n)}$  die Differentialgleichungen:

$$\Delta u^{(0)} = 0, \quad \Delta u^{(1)} = 2 \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x_1}, \dots \quad \Delta u^{(n)} = 2 \frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial x_1}, \dots$$

Die Grenzbedingungen sind: im unendlich Fernen:  $u^{(n)} = 0$ ,  $n = 0, 1, 2 \dots$ ; auf der Kugel  $R = a$ :  $u^{(0)} = 1$ ,  $u^{(1)} = x_1, \dots$ ,  $u^{(n)} = \frac{x_1^n}{n!} \dots$  Wir erhalten sofort:  $u^{(0)} = a/R$ . Zur Bestimmung von  $u^{(1)}$  dient die Differentialgleichung:

$$\Delta u^{(1)} = -\frac{2ax_1}{R^3}$$

mit den Nebenbedingungen: für  $R = a$ :  $u^{(1)} = x_1$ ; im unendlich Fernen:  $u^{(1)} = 0$ . Man kann nun leicht unendlich viele außerhalb von  $R = a$  reguläre Lösungen dieser Differentialgleichung finden, welche auf der Kugel  $R = a$  den Wert  $x_1$  annehmen. Eine solche Lösung ist, wie wir auch die Konstanten  $A, B \dots$  wählen:

$$\frac{ax_1}{R} + A \left(1 - \frac{a}{R}\right) + B \left(x_1 - \frac{a^3 x_1}{R^3}\right) + \dots$$

Aber für kein Wertsystem  $A, B \dots$  verschwindet dieser Ausdruck im unendlich Fernen, und eine nähere Untersuchung zeigt, daß es keine Funktion gibt, welche alle unsere Bedingungen für  $u^{(1)}$  erfüllt. Wir müssen hieraus schließen, daß die oben dargelegte Methode zur Lösung einer partiellen Differentialgleichung in dem hier betrachteten Falle nicht anwendbar ist.

## 25. Auflösung der Schwierigkeit.

Es ist nicht schwer, den inneren Grund der oben hervorgehobenen Schwierigkeit zu finden. Wir können leicht diejenige Lösung der Gleichung (10) bilden, welche den vorgeschriebenen Grenzbedingungen genügt. Wir setzen zu diesem Zweck:

$$u = \frac{a}{R} e^{\lambda x_1} f(R) \cdot$$

Zur Bestimmung der Funktion  $f$  erhalten wir aus (10):

$$\frac{d^2f}{dR^2} = \lambda^2 f.$$

Diese Differentialgleichung hat zwei partikuläre Integrale:  $e^{\pm \lambda R}$ . Für uns kommt nur diejenige Lösung der Differentialgleichung in Betracht, die im unendlich Fernen verschwindet. Wir bezeichnen mit  $\lambda'$  diejenige der beiden Zahlen  $\pm \lambda$ , deren reeller Teil positiv ist. Die Lösung unseres Problems ist dann:

$$u = \frac{a}{R} e^{-\lambda'(R-a)+\lambda x_1}.$$

Wenn der reelle Teil von  $\lambda$  positiv ist, so erhalten wir hieraus:

$$u = \frac{a}{R} e^{-\lambda(R-a-x_1)} = \frac{a}{R} + a \left( \frac{x_1}{R} - 1 + \frac{a}{R} \right) \lambda + \dots$$

Wenn dagegen der reelle Teil von  $\lambda$  negativ ist, so erhalten wir:

$$u = \frac{a}{R} e^{\lambda(R-a+x_1)} = \frac{a}{R} + a \left( \frac{x_1}{R} + 1 - \frac{a}{R} \right) \lambda + \dots$$

Wir sehen, daß man in beiden Fällen  $u$  in eine nach steigenden Potenzen von  $\lambda$  fortschreitende Reihe entwickeln kann. Wir sehen aber, daß die Koeffizienten  $u^{(n)}$  dieser Reihen, wenn  $n \geq 1$  ist, im unendlich Fernen nicht verschwinden. Wir sehen schließlich, daß diese Koeffizienten in den beiden Fällen verschiedene Werte haben. Die letzte Tatsache ist die wichtigste. Sie zeigt sofort, daß es keine Potenzreihe in  $\lambda$  gibt, die in ihrem ganzen Konvergenzbereiche unsere Lösung darstellt. Es ist also nicht möglich, diese Lösung durch eine nach steigenden Potenzen von  $\lambda$  fortschreitende Reihe darzustellen. Der innere Grund der Schwierigkeit, auf welche wir gestoßen sind, war der unrichtige Ansatz der Lösung, von welchem wir ausgegangen sind.

Wir werden im zweiten Teile, Kap. 3, zu einem Problem geführt werden, das in mathematischer Hinsicht dieselbe Natur wie das zuletzt behandelte hat. Wir werden dort sehen, daß solche Fragen wie diejenigen, mit welchen wir uns in diesem Paragraphen beschäftigt haben, nicht nur ein mathematisches Interesse besitzen, sondern daß die Lösung der hydrodynamischen Paradoxien auf der richtigen Beantwortung solcher Fragen beruht.

### § 3. Die Grundlösungen der hydrodynamischen Differentialgleichungen von Stokes.

#### 31. Die Stokesschen Gleichungen.

Wenn wir die oben dargelegte Methode zur Lösung der verallgemeinerten Poissonschen Gleichung auf das hydrodynamische Problem anwenden wollen, haben wir zuerst die Grundlösungen der linearen, homogenen Systeme von partiellen Differentialgleichungen aufzusuchen, die man aus den verschiedenen Systemen von hydrodynamischen Differentialgleichungen erhält. Diese Lösungen haben für jene linearen Gleichungen dieselbe Bedeutung wie die Funktion  $1/r$  für die Laplacesche Gleichung. Wir behandeln zuerst den einfachsten Fall, den stationären. Wir kehren also zu den Systemen II<sup>a</sup> und II<sup>b</sup> in § 1 zurück. Durch Vernachlässigung der in  $u_j$ ,  $\frac{\partial u_j}{\partial x_k}$  quadratischen Glieder und durch die Annahme  $X_j = 0$  erhalten wir aus diesen beiden Systemen dieselben linearen, homogenen Systeme von partiellen Differentialgleichungen:

$$\mu \Delta u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \quad (1)$$

Wir nennen diese Gleichungen die Stokesschen, weil Stokes eine Methode zur Herleitung der Differentialgleichungen der Hydrodynamik angegeben hat, und weil er eine wichtige Anwendung der vereinfachten Form (1) derselben gemacht hat.

#### 32. Verallgemeinerung der Greenschen Formel.

Wir nehmen an, daß in einem Bereich  $B$  des  $x_1, x_2, x_3$ -Raumes zwei Systeme von Lösungen des Systems (1),  $u_j, p$  und  $v_j, \bar{p}$ , existieren. Wir nehmen an, daß  $u_j, v_j$  in  $B$  eindeutig, stetig und zweimal stetig differenzierbar sind, ferner daß  $p$  und  $\bar{p}$  eindeutig, stetig und einmal stetig differenzierbar sind. Wir haben dann in  $B$ :

$$\mu \Delta u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} = 0, \quad \mu \Delta v_j - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0,$$

also:

$$\int_B \left\{ v_j \left( \mu \Delta u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) - u_j \left( \mu \Delta v_j - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \right) \right\} d\omega = 0$$

und, wenn wir mit  $F$  die Grenzfläche von  $B$  und mit  $n_j$  die Komponenten einer nach außen gezogenen Normale von der Länge 1 bezeichnen:

$$\int_F \left\{ v_j \left( \mu \frac{du_j}{dn} - p n_j \right) - u_j \left( \mu \frac{dv_j}{dn} - \bar{p} n_j \right) \right\} dS = 0. \quad (2)$$

Unsere Aufgabe ist, solche Lösungen  $v_j, \bar{p}$  des Systemes (1) zu finden, daß wir mit Hilfe von ihnen und der Gleichung (2) die Werte von  $u_1, u_2, u_3$  in einem beliebigen Punkte  $x_j^0$  von  $B$  berechnen können, in ähnlicher Weise wie wir mit Hilfe der Funktion  $1/r$  den Wert einer Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung in einem inneren Punkte bei gegebenen Werten der Lösung selbst und ihrer normalen Ableitung an der Grenzfläche berechnen konnten. Wir brauchen offenbar drei verschiedene Systeme von Lösungen des Systemes (1), um die drei Komponenten  $u_1, u_2, u_3$  in den Randwerten ausdrücken zu können. Klar ist ferner, daß wir dieses System von neun Funktionen  $v$  so wählen können, daß es nur von den beiden Punkten  $P = x_1, x_2, x_3, P^{(0)} = x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}$  abhängt, und daß es dann eine Form haben muß, welche von dem speziellen Bezugssysteme, das wir unserer Untersuchung zugrunde gelegt haben, vollständig unabhängig ist. Wir haben wieder mit einem Tensor zu tun und wollen deshalb hier einige Bemerkungen über Tensoren einschalten.

### 33. Grundeigenschaften der Tensoren.

Wenn ein bestimmtes, rechtwinkliges Bezugssystem  $x$  gegeben ist, kann man drei beliebige Größen  $v_1, v_2, v_3$  stets als Komponenten eines Vektors in diesem Bezugssysteme auffassen. Geht man durch eine Transformation:

$$x'_j = a_j + l_{jk} x_k, \quad (3)$$

wo:

$$l_{j1}^2 = l_{j2}^2 = l_{j3}^2 = 1, \quad l_{jk} l_{jl} (k \neq l) = 0, \quad (4)$$

zu einem neuen rechtwinkligen Bezugssysteme über, so werden die Komponenten des soeben betrachteten Vektors im neuen Systeme  $v'_j$  aus den Formeln:

$$v'_j = l_{jk} v_k \quad (5)$$

erhalten. In entsprechender Weise kann man stets neun beliebige Größen  $t_{jk}$  ( $j, k = 1, 2, 3$ ), als die Komponenten eines Tensors (vom Range 2) in einem bestimmten Bezugssysteme auffassen. Geht man dann durch eine Transformation (3), (4) zu einem neuen Bezugssysteme über, so bekommt der Tensor in diesem Systeme die Komponenten:

$$t'_{jk} = l_{jm} l_{kn} t_{mn}. \quad (6)$$

Wir nehmen jetzt an, daß drei Funktionen  $v_j(x, x^{(0)}, x^{(1)}, \dots)$  gegeben sind, welche von einem veränderlichen Punkte  $P$  mit den Koordinaten

$x_1, x_2, x_3$  und außerdem von festen Punkten  $P^{(0)}, P^{(1)} \dots$  mit den Koordinaten  $x_j^{(0)}, x_j^{(1)} \dots$  abhängen mögen. Wenn ein bestimmtes Bezugssystem vorliegt, ordnen die Funktionen  $v_j$  jedem Punkte  $P$  einen bestimmten Vektor zu. Sie definieren mit anderen Worten ein Vektorfeld. Gehen wir durch die Transformation (3), (4) zu einem anderen Bezugssysteme über, so erhalten wir die Komponenten unseres Vektorfeldes im neuen Bezugssysteme durch die Formeln (5). Es kann nun vorkommen, daß:

$$v'_j = l_{jk} v_k = v_j(x', x^{(0)\prime}, x^{(1)\prime} \dots), \quad (7)$$

wo  $x_j^{(0)\prime}, x_j^{(1)\prime} \dots$  aus  $x_j^{(0)}, x_j^{(1)} \dots$  in derselben Weise wie  $x'$  aus  $x$  erhalten werden und also:

$$x'_j = a_j + l_{jk} x_k, \quad x_j^{(n)\prime} = a_j + l_{jk} x_k^{(n)}, \quad n = 0, 1 \dots \quad (8)$$

oder, wie wir wegen (4) diese Gleichungen auch schreiben können:

$$x_j = -l_{kj} a_k + l_{kj} x_k', \quad x_j^{(n)} = -l_{kj} a_k + l_{kj} x_k^{(n)\prime}.$$

Wenn die Beziehungen (7) für alle Werte von  $a_j$  und alle mit der Bedingung (4) verträglichen Werte von  $l_{jk}$  bestehen, wenn also die Komponenten des Vektorfeldes dieselben Funktionen der Koordinaten bleiben, wie man auch das rechtwinklige Bezugssystem wählt, so sagen wir, daß das Vektorfeld gegenüber der kontinuierlichen Transformationsgruppe (8) invariant ist. Wir sagen in derselben Weise, daß ein Tensorfeld  $t_{jk}(x, x^{(0)}, x^{(1)} \dots)$  gegenüber der Transformationsgruppe (8) invariant ist, wenn:

$$t'_{jk} = l_{jm} l_{kn} t_{mn}(x, x^{(0)}, x^{(1)} \dots) = t_{jk}(x', x^{(0)\prime}, x^{(1)\prime} \dots). \quad (9)$$

Aus den Beziehungen (9) folgt:

$$t'_{jj} = t_{jj}(x, x^{(0)}, x^{(1)} \dots) = t_{jj}(x', x^{(0)\prime}, x^{(1)\prime} \dots).$$

Aus jedem gegenüber den Transformationen (8) invarianten Tensor vom zweiten Range können wir also eine skalare Größe  $t_{jj}$  ableiten, welche dieselbe Funktion der Koordinaten bleibt, welches rechtwinklige Bezugssystem man auch benutzt.

Es ist leicht, Beispiele invariante Vektorfelder zu bilden.  $\Phi(r)$  sei eine beliebige Funktion der Entfernung  $r$  zwischen zwei Punkten  $P = x_1, x_2, x_3$  und  $P^{(0)} = x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}$ . Wir bilden die drei Funktionen  $v_j = \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}$ . Wir haben bei einer Transformation (8):

$$r^2 = (x_j - x_j^{(0)})^2 = (x'_j - x_j^{(0)\prime})^2 = r'^2, \quad \text{also } r = r'$$

und:

$$v'_j = l_{jk} \frac{\partial \Phi(r)}{\partial x_k} = \frac{\partial x_k}{\partial x'_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = \frac{\partial \Phi(r')}{\partial x'_j} = v_j(x', x^{(0)\prime}).$$

Also:

$$v_j' = l_{jk} v_k(x, x^{(0)}) = v_j(x', x^{(0)\prime}),$$

wenn:

$$x_j' = a_j + l_{jk} x_k, \quad x_j^{(0)\prime} = a_j + l_{jk} x_k^{(0)} \quad (10)$$

und wenn die  $l_{jk}$  der Bedingung (4) genügen.

Es ist ebenso leicht, Beispiele invariante Tensorfelder zu bilden. In einem bestimmten Bezugssystem definieren wir ein Tensorfeld durch die Beziehungen:  $t_{11} = t_{22} = t_{33} = A$ ,  $t_{jk} = 0$  ( $j \neq k$ ), wo  $A$  eine Konstante ist. Die Transformation (6) ergibt für ein beliebiges, rechtwinkliges Bezugssystem:

$$t_{11}' = t_{22}' = t_{33}' = A, \quad t_{jk}' (j \neq k) = 0.$$

Folglich:

$$t_{jk}' = l_{jm} l_{kn} t_{mn} = t_{jk}(x').$$

Ein anderes invariantes Tensorfeld ist:

$$t_{jk} = \frac{\partial^2 \Phi(r)}{\partial x_j \partial x_k}, \quad r = P \rightarrow P^0 = \sqrt{(x_j - x_j^{(0)})^2}.$$

Wir erhalten in der Tat bei der Transformation (10):

$$t_{jk}' = l_{jm} l_{kn} t_{mn} = \frac{\partial x_m}{\partial x_j'} \frac{\partial x_n}{\partial x_k'} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_m \partial x_n} = \frac{\partial^2 \Phi(r')}{\partial x_j' \partial x_k'} = t_{jk}(x', x^{(0)\prime}).$$

Aus diesem Vektorfelde erhalten wir eine skalare Größe  $t_{jj}' = \Delta_x \Phi$ , welche gegenüber der Transformation (10) invariant ist. Aus dieser Invariante können wir ein neues invariantes Tensorfeld bilden, indem wir setzen:  $t_{11} = t_{22} = t_{33} = \Delta_x \Phi(r)$ ,  $t_{jk}(j \neq k) = 0$ . Bei der Transformation (10) haben wir dann:

$$t_{11}' = t_{22}' = t_{33}' = \Delta_x \Phi(r) = \Delta_{x'} \Phi(r'), \quad t_{jk}' (j \neq k) = 0,$$

also:

$$t_{jk}' = t_{jk}(x', x^{(0)\prime}).$$

Eine Bemerkung über die in der Physik auftretenden Vektorfelder und Tensorfelder möge endlich hier Platz finden. Man kann sie stets in solcher Form darstellen, daß sie gegenüber einer Transformationsgruppe von der Form (8) invariant sind. Dies folgt unmittelbar daraus, daß man sie immer als Funktionen der realen Dinge darstellen kann, welche einen Einfluß auf die physikalischen Erscheinungen ausüben. Wenn wir auf alle diese Dinge Rücksicht genommen haben, kann das benutzte Bezugssystem keinen Einfluß auf die Form des Vektor- oder Tensorfeldes haben. Wir sehen aber, daß wir in der Transformationsgruppe (8), gegenüber welcher ein Feld invariant ist, ein Maß für die Einfachheit des Feldes haben. Je geringer die Zahl der Punkte  $P^{(n)}$  ist, die wir zu berücksichtigen haben, um so einfacher ist das Feld.

### 34. Grundlösungen zur Bestimmung der Geschwindigkeitskomponenten.

Wir kehren zu unserem Problem, die Grundlösungen der Stokesschen Differentialgleichungen zu bestimmen, zurück. Wie gesagt, wollen wir diese Grundlösungen so wählen, daß die darin eingehenden Funktionen  $v$  nur von zwei Punkten,  $P$  und  $P^{(0)}$ , abhängen, und ferner, daß das System dieser neun Funktionen in ganz derselben Weise von den Koordinaten abhängt, wie man auch das rechtwinklige Bezugssystem wählt. Es liegt nahe, anzunehmen, daß diese neun Funktionen die Komponenten eines gegenüber der Transformation (10) invarianten Tensors vom Range zwei sind. Wir betrachten, von dieser Überlegung geleitet, einen Tensor, der in einem beliebigen rechtwinkligen Bezugssystem die folgenden Komponenten hat:

$$t_{jk} = \delta_{jk} \Delta \Phi(r) - \frac{\partial^2 \Phi(r)}{\partial x_j \partial x_k}, \quad r^2 = (x_j - x_j^{(0)})^2, \quad r > 0, \quad (11)$$

$\delta_{jk}$  ist hier und im folgenden die  $jk$ -Komponente eines Tensors, dessen Diagonalkomponenten ( $j = k$ ) den Wert 1 und dessen übrige Komponenten den Wert 0 haben.

Die drei Funktionen  $t_{1k}$ ,  $t_{2k}$ ,  $t_{3k}$  genügen stets, d. h. wenn  $k$  den Wert 1, 2 oder 3 hat, der Gleichung:

$$\frac{\partial t_{jk}}{\partial x_j} = 0. \quad (12)$$

Wenn wir vorschreiben, daß  $\Phi$  der Gleichung:

$$\Delta_x \Delta_x \Phi = 0 \quad \left( \Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right)^* \quad (13)$$

genügen soll, und wenn wir:

$$-\mu \frac{\partial}{\partial x_k} \Delta_x \Phi = p_k$$

setzen, so haben wir für alle zulässigen  $j$ - und  $k$ -Werte:

$$\mu \Delta_x t_{jk} - \frac{\partial p_k}{\partial x_j} = 0. \quad (14)$$

Für jeden  $k$ -Wert (1, 2 oder 3) sind also die drei Funktionen  $t_{1k}$ ,  $t_{2k}$ ,  $t_{3k}$  und  $p_k$  eine Lösung der Stokesschen Gleichungen. — Die Differentialgleichung (13) kann, da  $\Phi$  nur von  $r$  abhängt, nach der bekannten Transformation von  $\Delta$  in Polarkoordinaten, in der Form:

---

\* Bei einer Funktion, die von mehreren Punkten abhängt, ist es zweckmäßig und zuweilen notwendig, durch einen Index auf den Punkt hinzuweisen, in bezug auf welchen man die Operation  $\Delta$  auszuführen hat.

$$\frac{d^4(r\Phi)}{dr^4} = 0$$

geschrieben werden. Ihre allgemeine Lösung ist also:  $\Phi = ar^2 + br + c + \frac{d}{r}$ , wo  $a, b, c, d$  Konstanten sind. Wir setzen aus Gründen, die bald deutlich werden,  $\Phi(r) = r$ . Wir haben dann:

$$\Delta\Phi = \frac{2}{r}, \quad t_{jk} = \frac{\delta_{jk}}{r} + \frac{(x_j - x_j^{(0)}) (x_k - x_k^{(0)})}{r^3},$$

$$p_k = -2\mu \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r} = 2\mu \frac{x_k - x_k^{(0)}}{r^3}.$$

Wir betrachten jetzt einen Bereich  $B$  des  $x_1 x_2 x_3$ -Raumes.  $F$  sei seine Grenzfläche. Wir nehmen an, daß die Stokesschen Differentialgleichungen eine in  $B$  reguläre Lösung haben. Wir bezeichnen mit  $P^{(0)} = x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}$  einen beliebigen Punkt im Innern von  $B$ . Wir umgeben  $P^{(0)}$  mit einer Kugel  $r = \varepsilon$  und wählen  $\varepsilon$  so klein, daß diese Kugel innerhalb von  $F$  liegt.  $B(\varepsilon)$  sei der Teil von  $B$ , der außerhalb der Kugel  $r = \varepsilon$  fällt. Wir wenden Formel (2) auf das Gebiet  $B(\varepsilon)$  an und setzen dabei  $v_j = t_{jk}$ ,  $\bar{p} = p_k$ . Die Grenzfläche besteht jetzt aus zwei Teilen, aus  $F$  und der Kugel  $r = \varepsilon$ . Wir haben, weil die Größen  $rt_{jk}$  überall, auch im Punkte  $P^{(0)}$ , stetig sind und weil die Oberfläche der Kugel  $r = \varepsilon$  mit  $\varepsilon^2$  proportional ist:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r=\varepsilon} t_{jk} \left( \mu \frac{du_j}{dn} - p n_j \right) dS = 0.$$

Ferner:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r=\varepsilon} u_j \left( \mu \frac{dt_{jk}}{dn} - p_k n_j \right) dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu \int_{r=\varepsilon} \left[ u_k + 3u_j (x_j - x_j^{(0)}) \frac{x_k - x_k^{(0)}}{r^2} \right] \frac{dS}{r^2}.$$

Wir setzen:  $u_j = u_j^{(0)} + r\varphi$ , wo  $u_j^{(0)} = u_j(P^{(0)})$

und wo wir mit  $\varphi$  eine in der Umgebung von  $P^{(0)}$  endliche Funktion des Punktes  $P$  bezeichnen. Wir haben dann, weil

$$\int_{r=\varepsilon} \frac{dS}{r^2} = 4\pi, \quad \int_{r=\varepsilon} \frac{(x_j - x_j^{(0)}) (x_k - x_k^{(0)})}{r^2} \frac{dS}{r^2} = \frac{4\pi}{3} \delta_{jk}:$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r=\varepsilon} u_j \left( \mu \frac{dt_{jk}}{dn} - p_k n_j \right) dS = 8\pi\mu u_k(P^{(0)}).$$

Also:

$$u_k(P^{(0)}) = \frac{1}{8\pi\mu} \int_F \left[ t_{jk} \left( \mu \frac{du_j}{dn} - p n_j \right) - u_j \left( \mu \frac{dt_{jk}}{dn} - p_k n_j \right) \right] dS. \quad (15)$$

Wenn man zwölf Funktionen  $T_{jk}$  und  $P_k$  kennt, welche innerhalb einer geschlossenen Fläche  $F$  in der Form  $T_{jk} = \hat{t}_{jk} + \tau_{jk}$ ,  $P_k = p_k + \pi_k$  dargestellt werden können, wo  $\tau_{jk}$ ,  $p_k$  für jeden  $k$ -Wert ( $k = 1, 2$  oder  $3$ ) eine innerhalb von  $F$  reguläre Lösung der Stokesschen Gleichungen ergeben, so können wir, wie aus der Gewinnung von (15) unmittelbar folgt, in den Gleichungen (15)  $t_{jk}$ ,  $p_k$  durch  $T_{jk}$ ,  $P_k$  ersetzen. Wenn die neun Funktionen  $T_{jk}$  alle verschwinden, wenn der Punkt  $P$  in die Grenzfläche  $F$  hineinfällt, so erhalten wir:

$$u_k(P^{(0)}) = -\frac{1}{8\pi\mu} \int_F u_j \left( \mu \frac{d T_{jk}}{dn} - P_k n_j \right) dS. \quad (16)$$

### 35. Grundlösung zur Bestimmung des Druckes.

Die Gleichungen (15) drücken die Größen  $u_k(P^{(0)})$  durch andere Größen aus, welche sich auf die Grenzfläche  $F$  beziehen. Man kann in ähnlicher Weise  $p(P^{(0)})$  durch jene Größen ausdrücken. Wir wenden noch einmal die Formel (2) auf den Bereich  $B(\varepsilon)$  an, setzen aber jetzt:

$$v_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r}, \quad \bar{p} = 0,$$

welcher Ansatz ersichtlich dem System (1) genügt. Wir führen dann wieder den Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  aus. Wir haben, da auf der Kugel  $r = \varepsilon$ :  $n_j = (x_j^{(0)} - x_j) / r$ :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r=\varepsilon} v_j \left( \mu \frac{d u_j}{dn} - p n_j \right) dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r=\varepsilon} \left( \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_k} n_j n_k - p \right) \frac{dS}{r^2}.$$

Wir können in der Umgebung des Punktes  $P^{(0)}$ :

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)^{(0)} + r \varphi, \quad p = p^{(0)} + r \varphi$$

setzen und erhalten wegen der Beziehung:

$$\int_{r=\varepsilon} n_j n_k \frac{dS}{r^2} = \frac{4\pi}{3} \delta_{jk}:$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r=\varepsilon} v_j \left( \mu \frac{d u_j}{dn} - p n_j \right) dS = -4\pi p^{(0)} + \frac{4\pi}{3} \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)^{(0)} = -4\pi p^{(0)},$$

weil ja:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0.$$

Wir haben ferner:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r=\varepsilon} \mu u_j \frac{dv_j}{dn} dS = 2\mu \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int u_j (x_j^{(0)} - x_j) \frac{dS}{r^4}.$$

Wir setzen:

$$u_j = u_j^{(0)} + \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)^{(0)} (x_k - x_k^{(0)}) + r^2 \varphi$$

und erhalten:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r=\varepsilon} \mu u_j \frac{dv_j}{dn} dS = \frac{8\pi}{3} \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)^{(0)} = 0.$$

Die Formel (2) gibt also:

$$p(P^{(0)}) = \frac{1}{4\pi} \int_F \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{r} \right) \cdot \left( \mu \frac{du_j}{dn} - pn_j \right) - \mu u_j \frac{d}{dn} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} \right\} dS \quad (17)$$

### 3.6. Zusammenfassung. Die hydrodynamischen Integralgleichungen.

Wir wenden unsere Methoden und Ergebnisse auf die vollständigen hydrodynamischen Differentialgleichungen für den stationären Fall, also auf die Gleichungen II<sup>a</sup> und II<sup>b</sup> an. Wir erhalten aus II<sup>a</sup>:

$$u_k(P^{(0)}) = \frac{1}{8\pi\mu} \int_F \left\{ t_{jk} \left( \mu \frac{du_j}{dn} - pn_j \right) - u_j \left( \mu \frac{dt_{jk}}{dn} - p_k n_j \right) \right\} dS + \\ + \frac{\varrho}{8\pi\mu} \int_B \left( X_j - u_m \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \right) t_{jk} d\omega, \quad \text{II}^a$$

$$p(P^{(0)}) = \frac{1}{4\pi} \int_F \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{r} \right) \left( \mu \frac{du_j}{dn} - pn_j \right) - \mu u_j \frac{d}{dn} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} \right\} dS + \\ + \frac{\varrho}{4\pi} \int_B \left( X_j - u_m \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} d\omega,$$

und in derselben Weise aus II<sup>b</sup>:

$$u_k(P^{(0)}) = \frac{1}{8\pi\mu} \int_F \left\{ t_{jk} \left( \mu \frac{du_j}{dn} - qn_j \right) - u_j \left( \mu \frac{dt_{jk}}{dn} - p_k n_j \right) \right\} dS + \\ + \frac{\varrho}{8\pi\mu} \int_B \left\{ X_j - u_m \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_m} - \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) \right\} t_{jk} d\omega, \quad \text{II}^b$$

$$q(P^{(0)}) = \frac{1}{4\pi} \int_F \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{r} \right) \cdot \left( \mu \frac{du_j}{dn} - qn_j \right) - \mu n_j \frac{d}{dn} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{r} \right) \right\} dS + \\ + \frac{\varrho}{4\pi} \int_B \left\{ X_j - u_m \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_m} - \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) \right\} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} d\omega.$$

$t_{jk}$  und  $p_k$  haben in diesen Formeln die Bedeutungen:

$$t_{jk} = \delta_{jk} \Delta r - \frac{\partial^2 r}{\partial x_j \partial x_k}, \quad p_k = -2\mu \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r}.$$

Die Gleichungen II<sup>c</sup> und II<sup>d</sup> sind für jede geschlossene Fläche  $F$  gültig, welche eine stückweise stetige Tangentenebene besitzt und welche einen inneren Bereich  $B$  begrenzt, wo eine reguläre Lösung des Systemes II<sup>a</sup> bzw. II<sup>b</sup> existiert. Aus II<sup>c</sup> bzw. II<sup>d</sup> folgt umgekehrt, wenn die Größen  $X_j$ ,  $u_j$ ,  $\frac{\partial u_j}{\partial x_k}$  in bezug auf  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  stetig differenzierbar sind, die Gültigkeit von II<sup>a</sup> bzw. II<sup>b</sup> sowie der Kontinuitätsbedingung. Der Inhalt dieser Integro-Differentialgleichungen ist also unter den angegebenen Voraussetzungen sachlich derselbe wie der Inhalt der Differentialgleichungen II<sup>a</sup> und II<sup>b</sup> sowie der Kontinuitätsbedingung.

Wenn die der Fläche  $F$  zugehörigen Funktionen  $T_{jk}$  und  $P_k$  bekannt sind, kann man offenbar in II<sup>c</sup> und II<sup>d</sup>  $t_{jk}$  und  $p_k$  mit  $T_{jk}$  und  $P_k$  vertauschen und dadurch diese Formeln vereinfachen.

Die Grundlösungen der Stokesschen Differentialgleichungen wurden im Jahre 1896 von H. A. Lorentz aufgestellt.

### 37. Das zweidimensionale Problem.

Wir schließen diesen Paragraphen mit einigen Worten über die zweidimensionalen Stokesschen Gleichungen ab. Die Differentialgleichungen sind wieder:

$$\mu \Delta u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0.$$

$j$  soll aber jetzt nur die Werte 1 und 2 annehmen. Wir setzen auch jetzt:

$$r^2 = (x_j - x_j^{(0)})^2, \quad (r \geq 0), \quad t_{jk} = \delta_{jk} \Delta \Phi(r) - \frac{\partial^2 \Phi(r)}{\partial x_j \partial x_k},$$

$$p_k = -\mu \frac{\partial}{\partial x_k} \Delta \Phi(r).$$

$\Phi(r)$  soll aber jetzt die Funktion:  $\frac{1}{2} r^2 \log \frac{1}{r}$  sein. Wir haben:

$$\Delta \Phi(r) = 2 \log \frac{1}{r} - 2, \quad \Delta \Delta \Phi(r) = 0, \quad p_k = 2\mu \frac{x_k - x_k^{(0)}}{r^2},$$

$$t_{jk} = \delta_{jk} \left( \log \frac{1}{r} - \frac{3}{2} \right) + \frac{(x_j - x_j^{(0)})(x_k - x_k^{(0)})}{r^2}.$$

Wir betrachten jetzt eine Lösung der zweidimensionalen Stokesschen

Gleichungen, die innerhalb einer geschlossenen Kurve  $K$  in der  $x_1x_2$ -Ebene regulär ist. Wir verstehen unter  $x^{(0)}_1, x^{(0)}_2$  die Koordinaten eines beliebigen Punktes innerhalb von  $K$ . Wir legen um diesen Punkt einen kleinen Kreis  $r = \varepsilon$  und bilden die Gleichung:

$$\int \left\{ t_{jk} \left( \mu \frac{du_j}{dn} - p n_j \right) - u_j \left( \mu \frac{dt_{jk}}{dn} - p_k n_j \right) \right\} ds = 0,$$

wo die Integration längs der Kurve  $K$  und des Kreises  $r = \varepsilon$  geführt werden soll und wobei die Normale am Rande des von diesen beiden Kurven begrenzten Bereiches stets nach außen gezogen wird. Wir haben:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r=\varepsilon} t_{jk} \left( \mu \frac{du_j}{dn} - p n_j \right) ds = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r=\varepsilon} u_j \left( \mu \frac{dt_{jk}}{dn} - p_k n_j \right) ds &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu \int_{r=\varepsilon} \left\{ u_k + 2u_j(x_j - x_j^{(0)}) \frac{x_k - x_k^{(0)}}{r} \right\} \frac{ds}{r} = \\ &= 4\pi\mu u_k(P^{(0)}). \end{aligned}$$

Also:

$$u_k(P^{(0)}) = \frac{1}{4\pi\mu} \int_K \left\{ t_{jk} \left( \mu \frac{du_j}{dn} - p n_j \right) - u_j \left( \mu \frac{dt_{jk}}{dn} - p_k n_j \right) \right\} ds \quad (18)$$

Daß man diese Gleichung in derselben Weise wie die entsprechende Formel (16) im dreidimensionalen Falle anwenden kann, ist unmittelbar klar.

## § 4. Die Grundlösungen der erweiterten Stokesschen Gleichungen.

### 4.1. Verallgemeinerung der Greenschen Formel.

Wir wenden uns zu den Gleichungen III<sup>a</sup> und III<sup>b</sup> im ersten Paragraphen. Das lineare, homogene System von Differentialgleichungen, welches aus diesen Gleichungen erhalten wird, ist:

$$\mu \Delta u_j + \varrho U \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - \frac{\partial p}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \quad (2)$$

Wir nennen diese Gleichungen die erweiterten Stokesschen Gleichungen. Sie unterscheiden sich von den Stokesschen Gleichungen durch

ein Glied in den Gleichungen (1). Unsere Aufgabe ist, die Grundlösungen der erweiterten Stokesschen Gleichungen zu bestimmen. Daß diese Aufgabe weniger einfach als diejenige ist, womit wir uns im vorigen Paragraphen beschäftigt haben, ist schon daraus deutlich, daß die Gleichungen (1) nicht mehr gegenüber einer beliebigen Drehung des Bezugssystems invariant sind.

Wir bezeichnen mit  $v_j, \bar{p}$  eine Lösung des „adjungierten“ Systemes der Gleichungen (1), (2):

$$\mu \Delta v_j - \varrho U \frac{\partial v_j}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0. \quad (4)$$

Wir betrachten einen Bereich  $B$ , mit der Grenzfläche  $F$ , im  $x_1 x_2 x_3$ -Raume. Wir nehmen an, daß in  $B$  eine Lösung  $u_j, p$  des Systemes (1), (2) und eine Lösung  $v_j, \bar{p}$  des Systemes (3), (4) beide regulär sind. Wir behandeln die Gleichungen (1) und (3) in der üblichen Weise, multiplizieren also (1) mit  $v_j$  und (3) mit  $u_j$ , ziehen dann (3) von (1) ab und integrieren die so erhaltene Differenz über den Bereich  $B$ . Partielle Integration ergibt, wegen (2) und (4):

$$\int_F \left\{ v_j \left( \mu \frac{du_j}{dn} - pn_j \right) - u_j \left( \mu \frac{dv_j}{dn} - \bar{p} n_j \right) + \varrho U u_j v_j n_1 \right\} dS = 0. \quad (5)$$

## 4.2. Die Grundlösungen zur Bestimmung der Geschwindigkeitskomponenten. Einführung der Funktion 0.

Unsere Aufgabe ist jetzt solche Lösungen  $v_j, \bar{p}$  des Systemes (3), (4) zu finden, daß wir aus (5) die Werte der Größen  $u_j$  in einem beliebigen Punkt von  $B$ , durch Randwerte ausgedrückt, erhalten können. Wir betrachten zu diesem Zweck wieder einen Tensor:<sup>\*</sup>

$$t_{jk} = \delta_{jk} \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k}$$

und einen Vektor:

$$p_k = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \mu \Delta \Phi - \varrho U \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right).$$

Wir schreiben vor, daß  $\Phi$  der partiellen Differentialgleichung:

$$\Delta \left( \mu \Delta \Phi - \varrho U \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (6)$$

genügen soll. Wir haben dann für jeden  $k$ -Wert ( $k = 1, 2, 3$ ):

\* Man vergleiche hierzu die Entwicklungen S. 22—24.

$$\mu \Delta t_{jk} - \varrho U \frac{\partial t_{jk}}{\partial x_1} - \frac{\partial p_k}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial t_{jk}}{\partial x_j} = 0.$$

Von der Funktion  $\Phi$  müssen wir verlangen, daß sie überall mit Ausnahme eines Punktes  $P^{(0)}$  mit den Koordinaten  $x_j^{(0)}$  stetig und beliebig oft stetig differenzierbar ist. Wir können ferner erwarten, daß, wenn der Aufpunkt  $P$  in der Umgebung von  $P^{(0)}$  liegt,  $\Phi$  sich in ähnlicher Weise wie die Funktion  $r$  verhalten wird, welche im Grenzfalle  $U = 0$  uns die Lösung unseres Problems gab. Um nun eine Funktion mit diesen Eigenschaften zu bilden, gehen wir von der Tatsache aus, daß die Laplacesche Gleichung die Lösung  $1/r$  besitzt. Wir sehen aus (6), daß wenn  $\Phi$  der Gleichung:

$$\Delta \Phi - 2\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{2}{r} \quad (7)$$

genügt, wo  $\sigma = \varrho U / 2\mu$  ist,  $\Phi$  auch der Gleichung (6) genügt. Im Grenzfalle  $U = \sigma = 0$  besitzt die Gleichung (7) die Lösung  $\Phi = r$  und wir können erwarten, daß sie auch im allgemeinen Falle eine Lösung besitzen wird, welche sich in der Umgebung des singulären Punktes  $P^{(0)}$  in derselben Weise wie die Funktion  $r$  verhalten wird. Nun können wir aber die Gleichung (6) auch in der Form:

$$\left( \Delta - 2\sigma \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \Delta \Phi = 0 \quad (8)$$

schreiben. Die Gleichung:

$$\Delta \Phi - 2\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0$$

besitzt die Lösung:

$$\Phi = \frac{e^{-\sigma' r - \sigma(x_1^{(0)} - x_1)}}{r}. \quad (9)$$

$\sigma'$  ist hier diejenige der beiden Größen  $\pm \sigma$ , deren reeller Teil positiv ist. Die Funktion (9) verhält sich in der Umgebung des singulären Punktes wie  $1/r$ . Wir schließen hieraus, daß wir die Lösung unserer Aufgabe auch in der Weise herstellen können, daß wir für  $\Phi$  eine geeignete Lösung der Gleichung

$$\Delta \Phi = \frac{2e^{-\sigma' r - \sigma(x_1^{(0)} - x_1)}}{r} \quad (10)$$

wählen.

Wir werden durch die obigen Überlegungen zu der Vermutung geführt, daß es eine Lösung der Gleichung (6) gibt, welche überall

mit Ausnahme vom Punkte  $P^{(0)}$  regulär ist, sich dort wie die Funktion  $r$  verhält und welche gleichzeitig den beiden Gleichungen (7) und (10), folglich auch der Gleichung:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = -\frac{1 - e^{-\sigma' r - \sigma(x_1^{(0)} - x_1)}}{\sigma r}$$

genügt.

Es ist jetzt leicht, einen expliziten Ausdruck für die gesuchte Funktion zu bilden. Wir setzen:

$$r + \frac{\sigma}{\sigma'} (x_1^{(0)} - x_1) = s.$$

Wir haben dann:

$$\Phi(x_j) = \frac{1}{\sigma'} \int_0^{\sigma' s} \frac{1 - e^{-a}}{a} da = \frac{1}{\sigma'} O(\sigma' s), \quad (11)$$

wenn wir mit  $O(x)$  die Funktion

$$\int_0^x \frac{1 - e^{-a}}{a} da$$

bezeichnen.

Die durch die Formel (11) definierte Funktion  $\Phi$  ist eine in jedem endlichen Bereich des  $x_1 x_2 x_3$ -Raumes endliche, eindeutige und stetige Funktion des Punktes  $P$  mit den Koordinaten  $x_j$ . Die Ableitungen beliebiger Ordnung in bezug auf  $x_1, x_2, x_3$  sind im ganzen Raum mit Ausnahme des Anfangspunktes endlich, eindeutig und stetig. Wenn  $P$  sich ins Unendliche entfernt, wächst  $\Phi$  im allgemeinen ins Unendliche. Doch gibt es eine Ausnahme von dieser Regel. Wenn  $P$  sich in einer Richtung entfernt, welche, wenn  $\sigma' = \sigma$  ist, mit der positiven  $x_1$ -Achse und, wenn  $\sigma' = -\sigma$  ist, mit der negativen  $x_1$ -Achse parallel ist, so nähert sich  $\Phi$  der Null. Die Ableitungen von  $\Phi$  gehen nach Null, wenn  $P$  sich ins Unendliche entfernt. Wir haben:

$$\frac{\partial s}{\partial x_1} = -\frac{\sigma}{\sigma'} \frac{s}{r}, \quad \left( \frac{\partial s}{\partial x_j} \right)^2 = \frac{2s}{r}, \quad \frac{\partial^2 s}{\partial x_j^2} = \Delta s = \frac{2}{r}.$$

Folglich:

$$\Delta \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial s} \Delta s + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} \left( \frac{\partial s}{\partial x_j} \right)^2 = \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial s} \left( s \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right) = \frac{2}{r} e^{-\sigma' s},$$

$$\Delta \Phi - \varrho \frac{|U|}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \Delta \Phi - 2\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{2}{r} e^{-\sigma' s} + \frac{2}{r} (1 - e^{-\sigma' s}) = \frac{2}{r}.$$

Wir sehen hieraus, daß  $\Phi$  die Gleichung (6) erfüllt. Wir haben endlich, für kleine Werte von  $|\sigma' s|$ :

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= s - \frac{1}{4} \sigma' s^2 + \dots = r + \frac{\sigma}{\sigma'} (x_1^{(0)} - x_1) - \\ &\quad - \frac{1}{4} \sigma' [r^2 + (x_1^{(0)} - x_1)^2] - \frac{1}{2} \sigma r (x_1^{(0)} - x_1) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Wir sehen aus der Formel (12), daß die in diesem Paragraphen eingeführten Tensorkomponenten  $t_{jk}$  in der Umgebung des Punktes  $P^{(0)}$  in der Form:

$$t_{jk} = \delta_{jk} \frac{2}{r} - \frac{\partial^2 r}{\partial x_j \partial x_k} + \dots$$

geschrieben werden können, wo die nicht ausgeschriebenen Glieder im Punkte  $P^{(0)}$  endliche Werte haben, während ihre ersten Ableitungen in bezug auf  $x_1, x_2, x_3$  in demselben Punkte höchstens wie  $1/r$  unendlich werden. Für  $p_k$  hat man im ganzen Raum den einfachen Ausdruck:

$$p_k = -2\mu \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r} = 2\mu \frac{x_k - x_k^{(0)}}{r^3}. \quad (13)$$

Wir kehren zur Formel (5) zurück. Wir setzen in dieser Formel  $v_j = t_{jk}$ ,  $\bar{p} = p_k$  und wenden sie auf den in derselben Weise wie oben definierten Bereich  $B(\varepsilon)$  an. Wir führen dann den Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  aus und erhalten:

$$\boxed{u_k(P^{(0)}) = \frac{1}{8\pi\mu} \int_F \left[ t_{jk} \left( \mu \frac{d u_j}{d n} - p n_j \right) - u_j \left( \mu \frac{d t_{jk}}{d n} - p_k n_j \right) + \right.} \\ \left. + \varrho U u_j t_{jk} n_1 \right] dS. \quad (14)}$$

Hier ist:

$$\boxed{\begin{aligned} t_{jk} &= \delta_{jk} \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k}, & p_k &= -\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \mu \Delta \Phi - \varrho U \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) \\ \Phi &= \frac{1}{\sigma'} O(\sigma' s) = \frac{1}{\sigma'} \int_0^{\sigma' s} \frac{1 - e^{-a}}{a} da \\ \sigma &= \frac{\varrho U}{2\mu}, & \sigma'^2 &= \sigma^2, & \sigma' > 0 \\ s &= r + \frac{\sigma}{\sigma'} (x_1^{(0)} - x_1). \end{aligned}}$$

### 43. Grundlösung für den Druck.

Um die entsprechende Formel für  $p$  abzuleiten, setzen wir in (5):

$$v_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r}, \quad \bar{p} = -\varrho U \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r}$$

und wenden sie dann wieder auf den Bereich  $B(\varepsilon)$  an. Wir haben an der Kugel  $r = \varepsilon$ :

$$v_j = \frac{x_j^{(0)} - x_j}{r^3} = \frac{n_j}{r^2}, \quad \bar{p} = \varrho U \frac{x_1 - x_1^{(0)}}{r^3} = -\varrho \frac{U n_1}{r^2},$$

folglich:

$$\bar{p} n_j + \varrho U n_1 v_j = 0.$$

Die Glieder:

$$\bar{p} u_j n_j + \varrho U n_1 u_j v_j$$

in der Formel (5) geben also, sofern es sich um die Kugel  $r = \varepsilon$  handelt, keinen Beitrag zum rechten Gliede. Wir können deshalb den Grenzübergang ganz in derselben Weise wie im vorigen Paragraphen ausführen und bekommen:

$$p(P^{(0)}) = \frac{1}{4\pi} \int_F \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{r} \right) \cdot \left( \mu \frac{du_j}{dn} - p n_j \right) - \mu u_j \frac{d}{dn} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} + \right. \\ \left. + \varrho U u_j \left( n_1 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} - n_j \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} \right) \right\} dS. \quad (15)$$

### 44. Zusammenfassung. Die hydrodynamischen Integralgleichungen.

Mit Hilfe der gefundenen Grundlösung kann man die Differentialgleichungen III<sup>a</sup> und III<sup>b</sup> nebst der zugehörigen Kontinuitätsbedingung in Integrodifferentialgleichungen überführen. Sie lauten:

$$u_k(P^{(0)}) = \frac{1}{8\pi\mu} \int_F \left\{ t_{jk} \left( \mu \frac{du_j}{dn} - p n_j \right) - u_j \left( \mu \frac{dt_{jk}}{dn} - p_k n_j \right) + \right. \\ \left. + \varrho U u_j t_{jk} n_1 \right\} dS + \frac{\varrho}{8\pi\mu} \int_B \left( X_j - u_m \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \right) t_{jk} d\omega,$$

$$p(P^{(0)}) = \frac{1}{4\pi} \int_F \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{r} \right) \left( \mu \frac{du_j}{dn} - p n_j \right) - \mu u_j \frac{d}{dn} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} + \right. \\ \left. + \varrho U u_j \left( n_1 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} - n_j \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} \right) \right\} dS + \\ + \frac{\varrho}{4\pi} \int_B \left( X_j - u_m \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{r} \right) d\omega$$

III<sup>c</sup>

$$\left. \begin{aligned}
 u_k(P^{(0)}) &= \frac{1}{8\pi\mu} \int_F \left\{ t_{jk} \left( \mu \frac{du_j}{dn} - q n_j \right) - u_j \left( \mu \frac{dt_{jk}}{dn} - p_k n_j \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \varrho U u_j t_{jk} n_1 \right\} dS + \frac{\varrho}{8\pi\mu} \int_B \left\{ X_j - u_m \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_m} - \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) \right\} t_{jk} d\omega, \\
 q(P^{(0)}) &= \frac{1}{4\pi} \int_F \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{r} \right) \left( \mu \frac{du_j}{dn} - q n_j \right) - \mu u_j \frac{d}{dn} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} + \right. \\
 &\quad \left. + \varrho U u_j \left( n_1 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} - n_j \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} \right) \right\} dS + \\
 &\quad + \frac{\varrho}{4\pi} \int_B \left\{ X_j - u_m \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_m} - \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) \right\} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{r} \right) d\omega.
 \end{aligned} \right\} \text{III}^d$$

Die Größen  $t_{jk}$ ,  $p_k$  haben hier die Bedeutung:

$$\begin{aligned}
 t_{jk} &= \delta_{jk} \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_k}, \quad \Phi = \frac{1}{\sigma'} O(\sigma' s) = \frac{1}{\sigma'} \int_0^{\sigma' s} \frac{1 - e^{-a}}{a} da, \\
 s &= r + \frac{\sigma}{\sigma'} (x_1^{(0)} - x_1), \quad p_k = -2\mu \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r}, \quad \sigma'^2 = \sigma^2 = \frac{\varrho^2 U^2}{4\mu^2}, \quad \sigma' > 0.
 \end{aligned}$$

Die Gleichungen III<sup>c</sup> und III<sup>d</sup> sind erfüllt, wie man auch die geschlossene Fläche  $F$  innerhalb des Regularitätsbereiches einer Lösung des Systems III<sup>a</sup> bzw. III<sup>b</sup> wählt. Aus III<sup>c</sup> bzw. III<sup>d</sup> folgt wiederum, wenn  $X_j$ ,  $u_j$ ,  $\frac{\partial u_j}{\partial x_k}$  in bezug auf  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  stetig differenzierbar sind, die Gültigkeit von III<sup>a</sup> bzw. III<sup>b</sup> sowie der Kontinuitätsbedingung. III<sup>c</sup> und III<sup>d</sup> sind sachlich mit III<sup>a</sup> und III<sup>b</sup> nebst der Kontinuitätsbedingung gleichbedeutend.

Die Grundlösungen der erweiterten Stokesschen Gleichungen wurden vom Verfasser dieses Buches im Jahre 1910 gefunden.

#### 4.5. Das zweidimensionale Problem.

Wir lösen zum Schluß das zweidimensionale Problem, das dem oben behandelten dreidimensionalen Problem entspricht. Wir bestimmen also die Grundlösung des Systems (3), (4), wo  $j$  jetzt nur die Werte 1, 2 annimmt. Wir müssen, um dieses Ziel zu erreichen, der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - 2\sigma \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \tag{16}$$

eine kurze Betrachtung widmen. Wir setzen:

$$r = \sqrt{(x_1 - x_1^{(0)})^2 + (x_2 - x_2^{(0)})^2}, \quad u = e^{\sigma(x_1 - x_1^{(0)})} f(r).$$

Zur Bestimmung der Funktion  $f(r)$  erhalten wir aus (16):

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \sigma^2 f = 0. \quad (17)$$

Diese Gleichung zeigt, daß  $f(r)$  eine Zylinderfunktion 0-ter Ordnung mit der Veränderlichen  $i\sigma r$  ist. Für uns kommen nur solche Lösungen in Betracht, die im unendlich Fernen verschwinden. Wir bezeichnen wieder mit  $\sigma'$  diejenige der beiden Größen  $\pm\sigma$ , deren reeller Teil positiv ist. Wir erhalten dann eine im Unendlichen verschwindende Lösung der Gleichung (17) durch das Integral:

$$\int_0^\infty e^{-\sigma' r \cosh \tilde{\omega}} d\tilde{\omega} = \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(i\sigma' r)^*,$$

wo  $H_0^{(1)}$ , die sogenannte Hankelsche Funktion, von einem konstanten Faktor abgesehen das einzige Integral der Differentialgleichung (17) ist, das im Unendlichen verschwindet. Um nicht fortwährend mit imaginären Größen rechnen zu müssen, benutzen wir für das Integral die Bezeichnung  $K_0(\sigma' r)$ . Wir lösen also die Differentialgleichung (15) durch den Ansatz:

$$u = e^{\sigma(x_1 - x_1^{(0)})} K_0(\sigma' r).$$

Das Verhalten von  $K_0(\sigma' r)$  für kleine und für große Werte von  $\sigma' r$  geht aus den bekannten Reihenentwicklungen bzw. asymptotischen Entwicklungen für die Hankelschen Zylinderfunktionen hervor. Wir haben für kleine Werte von  $\sigma' r$ :

$$K_0(\sigma' r) = \int_0^\infty e^{-\sigma' r \cosh \tilde{\omega}} d\tilde{\omega} = -\log \frac{\gamma \sigma' r}{2} \left( 1 + \frac{\sigma'^2 r^2}{2^2} + \dots \right) + \frac{\sigma'^2 r^2}{2^2} + \dots \quad (18)$$

$$\gamma = 1,7811 \dots$$

Für große Werte von  $\sigma' r$  haben wir:

$$K_0(\sigma' r) = \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma' r}} e^{-\sigma' r} \left( 1 - \frac{1}{8\sigma' r} + \dots \right) \quad (19)$$

Wir definieren jetzt einen Tensor  $t_{jk}$  und einen Vektor  $p_k$  durch die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} t_{11} &= 2K_0(\sigma' r) e^{\sigma(x_1 - x_1^{(0)})} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, & t_{12} = t_{21} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \\ t_{22} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, & \Phi &= \frac{1}{\sigma} \{ \log r + K_0(\sigma' r) e^{\sigma(x_1 - x_1^{(0)})} \}, \\ p_k &= -2\mu \frac{\partial}{\partial x_k} \log \frac{1}{r}. \end{aligned} \right\} (20)$$

\* Man vergleiche hier und im Folgenden: Jahnke-Emde, Funktionentafeln.

Wir haben dann für  $j, k = 1, 2$ :

$$\mu \Delta t_{jk} - \varrho U \frac{\partial t_{jk}}{\partial x_1} - \frac{\partial p_k}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial t_{jk}}{\partial x_j} = 0. \quad (21)$$

Wir haben ferner für kleine Werte von  $\sigma' r$ :

$$\left. \begin{aligned} t_{11} &= \log \frac{1}{r} + \frac{(x_1 - x_1^{(0)})^2}{r^2} - \log \frac{\gamma \sigma'}{2} + \dots, \\ t_{12} = t_{21} &= \frac{(x_1 - x_1^{(0)}) (x_2 - x_2^{(0)})}{r^2} + \dots, \\ t_{22} &= \log \frac{1}{r} + \frac{(x_2 - x_2^{(0)})^2}{r^2} - 1 - \log \frac{\gamma \sigma'}{2} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Die Hauptglieder unserer Größen  $t_{jk}, p_k$  in der Umgebung von  $r = 0$  sind mit den Hauptgliedern der entsprechenden, ebenso benannten Größen des vorigen Paragraphen identisch. Wir können infolgedessen das dort gefundene Ergebnis benutzen und erhalten sofort:

$$u_k(P^{(0)}) = \frac{1}{4\pi\mu} \int_K \left\{ t_{jk} \left( \mu \frac{du_j}{dn} - p n_j \right) - u_j \left( \mu \frac{dt_{jk}}{dn} - p_k n_j \right) + \varrho U u_j t_{jk} n_1 \right\} ds. \quad (23)$$

Die Größen  $t_{jk}$  und  $p_k$  haben hier die in (20) angegebenen Werte.

## § 5. Die Grundlösungen der allgemeinen, linearen, homogenen hydrodynamischen Differentialgleichungen.

### 5.1. Verallgemeinerung der Greenschen Formel.

Die vollständigen hydrodynamischen Differentialgleichungen I<sup>a</sup> und I<sup>b</sup> geben zu demselben linearen homogenen System:

$$\mu \Delta u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} - \varrho \frac{\partial u_j}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (1)$$

Anlaß. Wir wollen die Grundlösungen dieses Systemes bestimmen. Es sei  $v_i, \bar{p}$  eine Lösung des Systems:

$$\mu \Delta v_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \varrho \frac{\partial v_i}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0 \quad (2)$$

des sogenannten adjungierten Systems.

Aus (1) und (2) folgt:

$$\mu(v_i \Delta u_j - u_j \Delta v_i) - v_i \frac{\partial p}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \varrho \frac{\partial}{\partial t} (u_j v_i) = 0.$$

Wir betrachten einen Bereich  $B(t)$  des  $x_1, x_2, x_3$ -Raumes, in welchem zwei Lösungen  $u_j, p; v_i, \bar{p}$  der Systeme (1) und (2) regulär sind. Wir nehmen an, daß die Begrenzung  $F(t)$  von  $B$  aus einer oder mehreren, im allgemeinen bewegten Flächen besteht. Wir integrieren unsere zuletzt erhaltene Gleichung über  $B(t)$  und außerdem in bezug auf  $t$  von einer beliebigen Anfangszeit  $T$  bis  $t^{(0)}$ . Wir erhalten, unter Benutzung der Greenschen Identität, wenn wir mit  $U_n$  die Komponente der Geschwindigkeit eines Punktes von  $F(t)$  in Richtung der nach außen gezogenen Normalen im selben Punkte bezeichnen und wenn wir beachten, daß  $\int_{B(t)} \frac{\partial}{\partial t} (u_j v_i) d\omega = \frac{\partial}{\partial t} \int_{B(t)} u_j v_i d\omega - \int_{F(t)} U_n u_j v_i dS$ :

$$\begin{aligned} & \int_T^{t^{(0)}} dt \int_{F(t)} \left\{ v_i \left( \mu \frac{du_j}{dn} - p n_j \right) - u_j \left( \mu \frac{dv_i}{dn} - \bar{p} n_i \right) \right\} dS - \varrho \int_{B(t^{(0)})} (u_j v_i)_{t^{(0)}} d\omega + \\ & + \varrho \int_T^{t^{(0)}} dt \int_{F(t)} U_n u_j v_i dS + \varrho \int_{B(T)} (u_j v_i)_T d\omega = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

## 52. Ansatz für die Grundlösungen der Geschwindigkeitskomponenten.

Um drei Lösungen der Gleichungen (2) zu finden, welche für  $v, \bar{p}$  in (3) eingesetzt uns die Werte von  $u_k(P^{(0)}, t^{(0)})$ , durch die Werte der Funktionen  $u_j$  und ihrer normalen Ableitungen sowie von  $p$  an der Grenzfläche  $F(t)$  ausgedrückt, geben können, lassen wir uns von den im dritten Paragraphen mitgeteilten Betrachtungen leiten. Die gesuchten Lösungen müssen von zwei Punkten  $P$  und  $P^{(0)}$  und außerdem von  $t$  und  $t^{(0)}$  abhängen. Wir müssen sie so wählen können, daß sie, von den konstanten Größen  $\varrho$  und  $\mu$  abgesehen, nur von diesen Größen abhängen. Sie müssen in ganz derselben Weise von den Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  abhängen, wie man auch das rechtwinkelige Bezugssystem im  $x_1, x_2, x_3$ -Raume wählt. Wir genügen diesen Bedingungen, indem wir annehmen, daß die neun Größen  $v$  die Komponenten eines gegenüber der Transformation (10) im dritten Paragraphen invarianten Tensors vom Range 2 sind und daß die 3 Größen  $\bar{p}$  die Komponenten eines bei derselben Transformation invarianten Vektors sind. Wir haben im dritten Paragraphen gesehen, wie man invariante

Tensoren und Vektoren bilden kann. Wir setzen in Übereinstimmung damit:

$$t_{jk} = -\delta_{jk} \Delta \Phi(r, t, t^{(0)}) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k}, \quad p_k = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \mu \Delta \Phi + \varrho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \quad (4)$$

und schreiben vor, daß  $\Phi$  der Bedingung:

$$\Delta \left( \mu \Delta \Phi + \varrho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = 0 \quad (5)$$

genügen soll.

Wir haben dann für  $j, k = 1, 2, 3$ :

$$\mu \Delta t_{jk} - \frac{\partial p_k}{\partial x_j} + \varrho \frac{\partial t_{jk}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial t_{jk}}{\partial x_j} = 0. \quad (6)$$

Die Gleichung (5) können wir, weil  $\Phi$  die Größen  $x_j, x_j^{(0)}$  nur in der Kombination  $r$  enthält, in der Form:

$$\left( \mu \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \varrho \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 (r \Phi)}{\partial r^2} = 0 \quad (7)$$

schreiben. Diese partielle Differentialgleichung besitzt offenbar unendlich viele Lösungen. Unter ihnen befindet sich auch diejenige, die wir brauchen. Wir finden sie in der folgenden Weise. Die Gleichung

$$\mu \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \varrho \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

hat eine aus der Theorie der Wärmeleitungsgleichung wohlbekannte Lösung:

$$f = \frac{e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t^{(0)}-t)}}}{\sqrt{t^{(0)}-t}} = E(r, t^{(0)}-t).$$

Eine andere Lösung derselben Differentialgleichung ist folglich:

$$\frac{\partial}{\partial r} E(r, t^{(0)}-t) = \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t^{(0)}-t)}}}{\sqrt{t^{(0)}-t}}.$$

Wir können also der Gleichung (7) durch den Ansatz

$$\Phi = \frac{1}{r} \int_0^r E(a, t^{(0)}-t) da \quad (8)$$

genügen.

Aus (8) folgt sofort:

$$\Delta \Phi = -\frac{\varrho}{2\mu} \frac{E(r, t^{(0)}-t)}{t^{(0)}-t}. \quad (9)$$

Wir haben andererseits:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \frac{1}{r} \int_0^r \frac{\partial}{\partial t} E(a, t^{(0)} - t) da = -\frac{\mu}{\varrho r} \int_0^r \frac{\partial^2}{\partial a^2} E(a, t^{(0)} - t) da = \\ &= \frac{1}{2} \frac{E(r, t^{(0)} - t)}{t^{(0)} - t}.\end{aligned}$$

Also:

$$\mu \Delta \Phi + \varrho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (10)$$

Die Formeln (4) ergeben folglich:

$$t_{jk} = \delta_{jk} \frac{\varrho}{2\mu} \frac{E(r, t^{(0)} - t)}{t^{(0)} - t} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k}, \quad p_k = 0. \quad (11)$$

Die Funktionen  $t_{jk}$ ,  $p_k$  sind für  $t^{(0)} - t > 0$  endlich, stetig und beliebig oft stetig differenzierbar. Dagegen sind die Funktionen  $t_{jk}$  für  $t = t^{(0)}$ ,  $r = 0$  singulär. Wenn wir in der Gleichung (3)  $v_j = t_{jk}$ ,  $p_k = 0$  setzen wollen und wenn, wie wir voraussetzen wollen, der Punkt  $P^{(0)}$  im Innern des Bereiches  $B(t^{(0)})$  liegt, so dürfen wir deshalb nicht die Integration in bezug auf  $t$  bis nach  $t = t^{(0)}$  ausdehnen, sondern müssen als obere Grenze für  $t$ :  $t^{(0)} - \varepsilon$  anwenden, wo  $\varepsilon$  eine positive Größe ist. Wir schreiben die in dieser Weise aus (3) hervorgehende Gleichung in der Form:

$$\left. \begin{aligned} \varrho \int_{B(t^{(0)} - \varepsilon)} (u_j t_{jk})_{t=t^{(0)}-\varepsilon} d\omega &= \varrho \int_{B(T)} (u_j t_{jk})_{t=T} d\omega + \\ &+ \int_T^{t^{(0)} - \varepsilon} dt \int_F(t) \left\{ t_{jk} \left( \mu \frac{du_j}{dn} - p n_j + \varrho U_n u_j \right) - \mu u_j \frac{dt_{jk}}{dn} \right\} dS. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Wir wollen in dieser Gleichung den Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  ausführen.

### 53. Der Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ in der linken Seite von (12).

Wir benutzen den Ausdruck (11) für  $t_{jk}$ . Wenn wir diesen Ausdruck links in (12) einführen, bekommen wir:

$$\frac{\varrho^2}{2\mu} \int_{B(t^{(0)} - \varepsilon)} u_k E(r, t^{(0)} - t) \frac{d\omega}{t^{(0)} - t} + \varrho \int_{B(t^{(0)} - \varepsilon)} u_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k} d\omega.$$

Wir formen das letzte Glied durch partielle Integration um. Wegen der Kontinuitätsbedingung  $\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$  erhalten wir dabei kein neues Raumintegral, sondern nur ein Flächenintegral. Indem wir gleichzeitig

in das erste Glied den Wert der Funktion  $E$  einführen, erhalten wir:

$$\frac{\varrho^2}{2\mu} \int_{B(t^{(0)} - \varepsilon)}^* u_k(x_j, t^{(0)} - \varepsilon) \frac{e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu\varepsilon}}}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} d\omega_x + \varrho \int_{F(t^{(0)} - \varepsilon)}^* u_j n_j \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right)_{t=t^{(0)}-\varepsilon} dS.$$

Bei dem Grenzübergange  $\varepsilon \rightarrow 0$  konvergiert die Funktion (von  $x_1, x_2, x_3$ ):

$$\frac{e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu\varepsilon}}}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}$$

überall mit Ausnahme von der Umgebung des Punktes  $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}$  gleichmäßig gegen Null. Wir haben deshalb, wenn  $\delta$  eine beliebig kleine positive Größe ist:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varrho^2}{2\mu} \int_{B(t^{(0)} - \varepsilon)}^* u_k(x_j, t^{(0)} - \varepsilon) \frac{e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu\varepsilon}}}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} d\omega_x = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varrho^2}{2\mu} \int_{r < \delta}^* u_k(x_j, t^{(0)} - \varepsilon) \frac{e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu\varepsilon}}}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} d\omega_x. \end{aligned}$$

Wir setzen:

$$\begin{aligned} & \frac{\varrho^2}{2\mu} \int_{r < \delta}^* u_k(x_j, t^{(0)} - \varepsilon) \frac{e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu\varepsilon}}}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} d\omega_x = \frac{\varrho^2}{2\mu} u_k(x_j^{(0)}, t^{(0)}) \int_{r < \delta}^* \frac{e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu\varepsilon}}}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} d\omega_x + \\ &+ \frac{\varrho^2}{2\mu} \int_{r < \delta}^* \{ u_k(x_j, t^{(0)} - \varepsilon) - u_k(x_j^{(0)}, t^{(0)}) \} \frac{e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu\varepsilon}}}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} d\omega_x. \quad (14) \end{aligned}$$

Wir haben:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r < \delta}^* \frac{e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu\varepsilon}}}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} d\omega_x = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 4\pi \left( \frac{4\mu}{\varrho} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\delta \sqrt{\frac{\varrho}{4\mu\varepsilon}}} a^2 e^{-a^2} da = \\ &= 4\pi \left( \frac{4\mu}{\varrho} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty a^2 e^{-a^2} da = \left( \frac{4\pi\mu}{\varrho} \right)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Der Grenzwert des ersten Gliedes von (14) ist also:

$$4\pi \sqrt{\pi\mu\varrho} u_k(x_j^{(0)}, t^{(0)}).$$

Das zweite Glied desselben Ausdrückes ist dem absoluten Betrage nach kleiner als:

$$4\pi \sqrt{\pi \mu \varrho} \max_{\substack{r < \delta \\ r^2 - t^2 < \varepsilon}} |u_k(x_j, t) - u_k(x_j^{(0)}, t^{(0)})|.$$

$\delta$  kann beliebig klein gewählt werden,  $\varepsilon$  soll nach Null gehen. Wir können über  $\delta$  und  $\varepsilon$  so verfügen, daß der letzte Ausdruck beliebig klein wird. Es folgt, daß das zweite Glied in (13) den Grenzwert Null haben muß. Wir haben also:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varrho^2}{2\mu} \int_{B(t^{(0)} - \varepsilon)} u_k(x_j, t^{(0)} - \varepsilon) \frac{e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu\varepsilon}}}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} d\omega_x = 4\pi \sqrt{\pi \mu \varrho} u_k(x_j^{(0)}, t^{(0)}). \quad (15)$$

Wir haben andererseits nach (8):

$$\Phi_{t=t^{(0)} - \varepsilon} = \frac{1}{r} \int_0^r \frac{e^{-\frac{\varrho a^2}{4\mu\varepsilon}}}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} da = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{4\mu}{\varrho}} \int_0^r e^{-\beta^2} d\beta.$$

Folglich, wenn  $r > 0$  ist

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_{t=t^{(0)} - \varepsilon} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{4\mu}{\varrho}} \int_0^\infty e^{-\beta^2} d\beta = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\pi\mu}{\varrho}}.$$

In derselben Weise findet man, immer unter der Voraussetzung  $r > 0$ :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right)_{t=t^{(0)} - \varepsilon} = \sqrt{\frac{\pi\mu}{\varrho}} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r}.$$

Die Konvergenz gegen den Grenzwert ist auf jeder Fläche, welche nicht durch den Punkt  $P^{(0)}$  geht, sondern von ihm eine endliche Entfernung hat, gleichmäßig. Da diese Bedingung nach unserer Voraussetzung für die Grenzfläche  $F(t^{(0)})$  gilt, so folgt:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varrho \int_{F(t^{(0)} - \varepsilon)} u_j n_j \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right)_{t=t^{(0)} - \varepsilon} dS = \sqrt{\pi \mu \varrho} \int_{F(t^{(0)})} u_j n_j \frac{x_k^{(0)} - x_k}{r^3} dS. \quad (16)$$

Wir haben wegen (13), (15), (16):

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varrho \int_{B(t^{(0)} - \varepsilon)} (u_j t_{jk})_{t=t^{(0)} - \varepsilon} d\omega &= 4\pi \sqrt{\pi \mu \varrho} u_k(x_j^{(0)}, t^{(0)}) + \\ &+ \sqrt{\pi \mu \varrho} \int_{F(t^{(0)})} u_j n_j \frac{x_k^{(0)} - x_k}{r^3} dS. \end{aligned} \quad (17)$$

#### 54. Der Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ in der rechten Seite von (12).

Das erste Glied rechts in (12) hängt nicht von  $\varepsilon$  ab. Im zweiten Gliede kommt  $\varepsilon$  nur in der oberen Grenze für  $t$  vor. Wir wissen, daß

für positive  $r$ -Werte  $t_{jk}$  und  $\frac{dt_{jk}}{dn}$  bei  $t \rightarrow t^{(0)}$  gegen endliche und stetige Grenzwerte konvergieren. Wir können deshalb den Grenzübergang einfach so machen, daß wir  $t^{(0)}$  statt  $t^{(0)} - \varepsilon$  als obere Grenze für  $t$  einführen.

Als Ergebnis unseres Grenzüberganges erhalten wir also die Gleichung:

$$\begin{aligned} 4\pi \sqrt{\pi \mu \varrho} u_k(P^{(0)}, t^{(0)}) &= \varrho \int_{B(T)} (u_j t_{jk})_{t=T} d\omega - \\ &- \int_T^{t^{(0)}} dt \int_{F(t)} \left\{ \mu u_j \frac{dt_{jk}}{dn} - t_{jk} \left( \mu \frac{du_j}{dn} - p n_j + \varrho U_n u_j \right) \right\} dS + \\ &+ \sqrt{\pi \mu \varrho} \int_{F(t^{(0)})} (u_j n_j)_{t=t^{(0)}} \frac{x_k - x_k^{(0)}}{r^3} dS. \end{aligned} \quad (18)$$

In der Formel (18) treten rechts die Raum- und Zeitflächenintegrale auf, welche wir nach (3) zu erwarten hatten. Aber außerdem tritt ein über die Grenzfläche der Flüssigkeit im betrachteten Zeitmomenten  $t^{(0)}$  zu erstreckendes Flächenintegral auf. Der innere Grund dieses Gliedes ist die Unzusammendrückbarkeit der Flüssigkeit, welche wir vorausgesetzt haben. Wegen dieser Unzusammendrückbarkeit ruft eine Bewegung der Grenzfläche der Flüssigkeit momentan eine Bewegung der ganzen Flüssigkeit hervor. Diese momentan einsetzende Bewegung ist stets eine Potentialbewegung.

Daß wir, um unser Ergebnis zu erhalten, einen Grenzübergang auszuführen hatten, wird durch das letzte Glied der rechten Seite von (18) erklärlich.

## 55. Erweiterung des gefundenen Ergebnisses.

Wir betrachten das System:

$$\mu \Delta u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} - \varrho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \varrho X_j = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (19)$$

das sich nur durch die Glieder  $\varrho X_j$  von (1) unterscheidet. Wir nehmen an, daß diese Glieder stetige Funktionen von  $x_1, x_2, x_3, t$  sind. Wir erhalten statt Gleichung (12):

$$\left. \begin{aligned} & \varrho \int_{B(t^{(0)} - \varepsilon)} (u_j t_{jk})_{t=t^{(0)}-\varepsilon} d\omega = \varrho \int_{B(T)} (u_j t_{jk})_{t=T} d\omega + \\ & + \int_T^{t^{(0)} - \varepsilon} dt \int_{F(t)} \left\{ t_{jk} \left( \mu \frac{du_j}{dn} - p n_j + \varrho U_n u_j \right) - \mu u_j \frac{dt_{jk}}{dn} \right\} dS + \\ & + \varrho \int_T^{t^{(0)} - \varepsilon} dt \int_{B(t)} X_j t_{jk} d\omega . \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Wir haben demnach den Grenzwert:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varrho \int_T^{t^{(0)} - \varepsilon} dt \int_{B(t)} X_j t_{jk} d\omega$$

zu berechnen. Zu diesem Zweck müssen wir das Verhalten der Funktionen  $t_{jk}$  in der Umgebung des Punktes  $P^{(0)}$  und bei kleinen Werten von  $t^{(0)} - t$  kennen. Wir haben nach (11):

$$t_{jk} = \delta_{jk} \frac{\varrho}{2\mu} \frac{E(r, t^{(0)} - t)}{t^{(0)} - t} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k}.$$

Wir haben ferner:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k} &= \delta_{jk} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{(x_j - x_j^{(0)}) (x_k - x_k^{(0)})}{r^2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \{ \Phi - E(r, t^{(0)} - t) \}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = \frac{2}{r^2} \{ \Phi - E(r, t^{(0)} - t) \} - \\ &- \frac{\varrho}{2\mu} \frac{E(r, t^{(0)} - t)}{t^{(0)} - t}. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\left. \begin{aligned} t_{jk} &= \frac{\varrho}{2\mu} \left\{ \delta_{jk} - \frac{(x_j - x_j^{(0)}) (x_k - x_k^{(0)})}{r^2} \right\} \frac{E(r, t^{(0)} - t)}{t^{(0)} - t} - \\ &- \frac{1}{r^2} \left( \delta_{jk} - \frac{3(x_j - x_j^{(0)}) (x_k - x_k^{(0)})}{r^2} \right) (\Phi - E(r, t^{(0)} - t)) . \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Wir wenden die Formel (21) an, um eine obere Grenze für  $|t_{jk}|$  zu berechnen. Wir haben:

$$-1 \leq \frac{(x_j - x_j^{(0)}) (x_k - x_k^{(0)})}{r^2} \leq 1.$$

Ferner:

$|\Phi - E(r, t^{(0)} - t)|$  kleiner als die größere der Zahlen  $\Phi$  und  $E(r, t^{(0)} - t)$ .

Da nun sowohl:

$$E(r, t^{(0)} - t) = \frac{e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t^{(0)} - t)}}}{\sqrt{t^{(0)} - t}}$$

wie:

$$\Phi = \frac{1}{r} \int_0^r E(a, t^{(0)} - t) da$$

kleiner als  $(t^{(0)} - t)^{-\frac{1}{2}}$  ist, so folgt:

$$|\Phi - E(r, t^{(0)} - t)| < \frac{1}{\sqrt{t^{(0)} - t}}.$$

Wir haben endlich für  $x \geq 0 : xe^{-x} \leq e^{-1}$  und also:

$$\frac{\varrho}{\mu} \frac{E(r, t^{(0)} - t)}{t^{(0)} - t} = \frac{\varrho}{\mu} \frac{e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t^{(0)} - t)}}}{(t^{(0)} - t)^{3/2}} \leq \frac{4}{e r^2 \sqrt{t^{(0)} - t}} < \frac{2}{r^2 \sqrt{t^{(0)} - t}}.$$

Aus diesen Ungleichungen folgt:

$$|t_{jk}| < \frac{6}{r^2 \sqrt{t^{(0)} - t}}. \quad (22)$$

Wir kehren zum Integral:

$$\varrho \int_T^{t^{(0)} - \varepsilon} dt \int_{B(t)} X_j t_{jk} d\omega$$

zurück. Aus (22) folgt, daß dieses Integral auch für  $\varepsilon = 0$  einen Sinn hat und daß:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varrho \int_T^{t^{(0)} - \varepsilon} dt \int_{B(t)} X_j t_{jk} d\omega = \varrho \int_T^{t^{(0)}} dt \int_{B(t)} X_j t_{jk} d\omega.$$

Die Gleichung (20) ergibt unter diesen Umständen:

$$4\pi\sqrt{\pi\mu\varrho} u_k(P^{(0)}, t^{(0)}) = \varrho \int_{B(T)} (u_j t_{jk})_{t=T} d\omega + \varrho \int_T^{t^{(0)}} dt \int_{B(t)} X_j t_{jk} d\omega - \\ - \int_T^{t^{(0)}} dt \int_{F(t)} \left\{ \mu u_j \frac{dt_{jk}}{dn} - t_{jk} \left( \mu \frac{du_j}{dn} - p n_j + \varrho U_n u_j \right) \right\} dS + \\ + \sqrt{\pi\mu\varrho} \int_{F(t^{(0)})} (u_j n_j)_{t=t^{(0)}} \frac{x_k - x^{(0)}_k}{r^3} dS. \quad (23)$$

$B(t)$  ist in dieser Formel der von der Fläche  $F(t)$  eingeschlossene Bereich des  $x_1 x_2 x_3$ -Raumes.  $t_{jk}$  ist durch die Gleichung:

$$t_{jk} = -\delta_{jk} \Delta \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k}, \quad \Phi = \frac{1}{r} \int_0^r \frac{e^{-\frac{\varrho \alpha^2}{4\mu(t^{(0)}-t)}}}{\sqrt{t^{(0)}-t}} da$$

definiert.

### 56. Grundlösung zur Bestimmung des Druckes.

Wir haben noch eine Formel für  $p(P^{(0)}, t^{(0)})$  abzuleiten. Dies kann nun auf vielen verschiedenen Wegen geschehen. Wenn es erlaubt ist, die Gleichungen (19) in bezug auf  $x_1, x_2, x_3$  zu differenzieren, so erhält man aus ihnen:

$$\Delta p = \varrho \frac{\partial X_j}{\partial x_j}.$$

Aus dieser Poissonschen Gleichung kann man mit Hilfe der Greenschen Formeln einen Ausdruck für  $p(P^{(0)}, t^{(0)})$  ableiten und dies ist die einfachste Methode, um zu einem solchen Ausdruck zu gelangen. Sie ist aber in unserem Falle wenig befriedigend. Einmal macht sie über die Funktionen  $u_j, p, X_j$  Annahmen nötig, die früher nicht notwendig waren. Andererseits ist aus jenem Ausdruck nicht ersichtlich, daß er zusammen mit dem durch die Formel (23) gegebenen Werte von  $u_k(P^{(0)}, t^{(0)})$  den Differentialgleichungen (19) genügt. Wir werden aus diesen Gründen einen Weg einschlagen, der zwar ein wenig lang ist, der aber ohne unnötige Annahmen zu eben dem Ausdruck für  $p(P^{(0)}, t^{(0)})$  führt, der den Ausdrücken (23) entspricht. — Wir bezeichnen wieder mit  $u_j, p$  eine Lösung der Gleichungen (19) und mit  $v_j, \bar{p}$  eine Lösung der adjungierten Gleichungen (2). Wir erhalten aus (19) und (2) in üblicher Weise:

$$\left. \begin{aligned} & \int_T^{t^{(0)}} dt \int_{F(t)} \left\{ v_j \left( \mu \frac{d u_j}{d n} - p n_j + \varrho U_n u_j \right) - u_j \left( \mu \frac{d v_j}{d n} - \bar{p} n_j \right) \right\} dS - \\ & - \varrho \int_{B(t^{(0)})} (u_j v_j)_{t^{(0)}} d\omega + \varrho \int_{B(T)} (u_j v_j)_T d\omega + \varrho \int_T^{t^{(0)}} dt \int_{B(t)} X_j v_j d\omega = 0. \end{aligned} \right\} (24)$$

Die Frage ist jetzt, wie wir die Lösung  $v_j, \bar{p}$  des adjungierten Systems wählen sollen. In § 3 und § 4 haben wir, um unsere Formel für  $p(P^{(0)})$  zu erhalten, den Umstand benutzt, daß die adjungierten Gleichungen der hydrodynamischen Differentialgleichungen Lösungen besitzen, bei welchen  $v_j$  die partielle Ableitung der Funktion  $1/r$  in bezug auf  $x_j$  ist. Auch jetzt wollen wir eine Lösung der adjungierten

Gleichungen (2) benutzen, bei welcher die Größen  $v_j$  mit den partiellen Ableitungen von  $1/r$  proportional sind. Wir setzen aber jetzt:

$$v_j = \frac{\varrho r' E(r', t^{(0)} - t)}{2(t^{(0)} - t)} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} \quad (25)$$

und können dann:

$$\bar{p} = \frac{\varrho^2 r'}{2r} \frac{\partial}{\partial t} \frac{E(r', t^{(0)} - t)}{t^{(0)} - t} \quad (26)$$

setzen. Wir tragen diese Werte von  $v_j$  und  $\bar{p}$  in die Gleichung (24) ein und wenden diese Formel auf den Bereich  $B(t, r')$  an, den man aus  $B(t)$  durch Ausschließung des Bereiches  $r < r'$  erhält. Wir setzen dabei voraus, daß der Punkt  $P^{(0)}$  im Innern des Bereiches  $B(t^{(0)})$  liegt. Wir setzen  $T = t^{(0)} - \varepsilon$  und nehmen an, daß die positiven Größen  $r'$  und  $\varepsilon$  so klein sind, daß die Kugel  $r = r'$  während der Zeit

$$t^{(0)} - \varepsilon < t < t^{(0)}$$

im Innern des Bereiches  $B(t)$  liegt. Wir schreiben die Gleichung, welche wir unter diesen Voraussetzungen aus (24) erhalten, in der Form:

$$\left. \begin{aligned} & \int_{t^{(0)} - \varepsilon}^{t^{(0)}} \int_{r=r'} \left\{ v_j \left( \mu \frac{du_j}{dn} - p n_j \right) - u_j \left( \mu \frac{dv_j}{dn} - \bar{p} n_j \right) \right\} dS = \\ &= \varrho \int_{B(t^{(0)}, r')} (u_j v_j)_{t^{(0)}} d\omega - \varrho \int_{B(t^{(0)} - \varepsilon, r')} (u_j v_j)_{t^{(0)} - \varepsilon} d\omega - \varrho \int_{t^{(0)} - \varepsilon}^{t^{(0)}} dt \int_{B(t, r')} X_j v_j d\omega - \\ & - \int_{t^{(0)} - \varepsilon}^{t^{(0)}} dt \int_{F(t)} \left\{ v_j \left( \mu \frac{du_j}{dn} - p n_j + \varrho U_n u_j \right) - u_j \mu \frac{dv_j}{dn} \right\} dS - \\ & - \int_{t^{(0)} - \varepsilon}^{t^{(0)}} dt \int_{F(t)} \bar{p} \cdot u_j n_j dS. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Wir wollen in dieser Gleichung zuerst den Grenzübergang  $r' \rightarrow 0$  und dann den Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  ausführen.

### 57. Ausführung des Grenzüberganges auf der linken Seite von (27).

Wir haben bei der Ableitung der hydrodynamischen Differentialgleichungen vom Anfang an angenommen, daß die Größen  $u_j$  und ihre Ableitungen erster Ordnung in bezug auf  $x_1, x_2, x_3$  stetige Funktionen von  $x_1, x_2, x_3, t$  sind. Wir haben unter dieser Voraussetzung:

$$u_j(P, t) = u_j(P^{(0)}, t) + \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)_{P^{(0)}, t} (x_k - x_k^{(0)}) + r \delta(r) \varphi,$$

$$\left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)_{P, t} = \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)_{P^{(0)}, t} + \delta(r) \varphi.$$

Hier ist  $\varphi$  irgendeine Funktion von  $P$  und  $P^{(0)}$ , von welcher wir nur zu wissen brauchen, daß sie einen endlichen Wert hat, wenn  $P$  in der Umgebung von  $P^{(0)}$  liegt.  $\delta(r)$  ist eine Funktion von  $r$ , welche der Bedingung:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \delta(r) = 0$$

genügt. Wir haben ebenfalls, wenn  $p$  eine stetige Funktion der Größen  $x_1, x_2, x_3, t$  ist:

$$p(P, t) = p(P^{(0)}, t) + \delta(r) \varphi.$$

Wir führen diese Ausdrücke in die linke Seite von (27) ein und erhalten, weil:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= 0, \quad \int_{r=\text{Konst.}} n_j n_k \frac{dS}{r^2} = \frac{4\pi}{3} \delta_{jk}: \\ \int_{r=r'} v_j \left( \mu \frac{du_j}{dn} - p n_j \right) dS &= \\ &= \varrho \frac{E(r', t^{(0)} - t)}{2r'(t^{(0)} - t)} \int_{r=r'} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)_{P^{(0)}, t} n_k - p(P^{(0)}, t) n_j + \delta(r) \varphi \right] n_j dS = \\ &= -2\pi \varrho p(P^{(0)}, t^{(0)}) \frac{r' E(r', t^{(0)} - t)}{t^{(0)} - t} + r' \delta(r') \varphi \frac{E(r', t^{(0)} - t)}{t^{(0)} - t}. \end{aligned}$$

Wir haben:

$$\begin{aligned} \lim_{r' \rightarrow 0} \int_{t^{(0)} - \varepsilon}^{t^{(0)}} \frac{r' E(r', t^{(0)} - t)}{t^{(0)} - t} dt &= \lim_{r' \rightarrow 0} \int_{t^{(0)} - \varepsilon}^{t^{(0)}} \frac{r' e^{-\frac{\varrho r'^2}{4\mu(t^{(0)} - t)}}}{(t^{(0)} - t)^{3/2}} dt = \\ &= \lim_{r' \rightarrow 0} \sqrt{\frac{4\mu}{\varrho}} \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\frac{\pi\mu}{\varrho}}. \end{aligned}$$

Wir schließen aus diesem Ergebnis, daß, wenn  $f(t^{(0)})$  eine stetige Funktion von  $t$  ist:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{r' \rightarrow 0} \int_{t^{(0)} - \varepsilon}^{t^{(0)}} f(t) \cdot \frac{r' e^{-\frac{\varrho r'^2}{4\mu(t^{(0)} - t)}}}{(t^{(0)} - t)^{3/2}} dt = 2 \sqrt{\frac{\pi\mu}{\varrho}} f(t^{(0)}).$$

Wir schließen ferner aus demselben Ergebnis:

$$\lim_{r' \rightarrow 0} \int_{t^{(0)} - \varepsilon}^{t^{(0)}} \frac{\int r' \delta(r') E(r', t^{(0)} - t) dt}{t^{(0)} - t} = 0.$$

Also:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{r' \rightarrow 0} \int_{t^{(0)} - \varepsilon}^{t^{(0)}} dt \int_{r=r'} v_j \left( \mu \frac{du_j}{dn} - p n_j \right) dS = -4\pi \sqrt{\pi \mu \varrho} p(P^{(0)}, t^{(0)}).$$

Man findet durch ähnliche Rechnungen:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{r' \rightarrow 0} \int_{t^{(0)} - \varepsilon}^{t^{(0)}} dt \int_{r=r'} u_j \left( \mu \frac{dv_j}{dn} - \bar{p} n_j \right) dS = 0.$$

Der Grenzwert der linken Seite von (27) ist also:

$$-4\pi \sqrt{\pi \mu \varrho} p(P^{(0)}, t^{(0)}).$$

### 58. Ausführung des Grenzüberganges in der rechten Seite von (27).

Das erste Glied rechts in (27) hat den Wert Null. Im Bereich  $B(t^{(0)}, r')$  konvergieren in der Tat die Funktionen  $v_j$  bei  $t \rightarrow t^{(0)}$  gleichmäßig gegen Null.

Wir betrachten sodann das zweite Glied rechts in (27). Durch eine Kugel  $r = \bar{r}$  zerlegen wir den Integrationsbereich  $B(t^{(0)} - \varepsilon, r')$  in zwei Teile, indem wir voraussetzen, daß  $r' < \bar{r}$  ist. In dem äußeren Teile konvergieren unsere Größen  $v$  beim Grenzübergang  $r' \rightarrow 0$  gleichmäßig gegen Null. Vom inneren Teile erhalten wir einen Beitrag, dessen absoluter Betrag kleiner als:

$$\frac{3\varrho^2 r'}{2\varepsilon} E(r', \varepsilon) \underset{\substack{0 \leq r \leq \bar{r} \\ j=1,2,3}}{\text{Max}} |u_j| \int_{r \leq \bar{r}} \frac{d\omega}{r^2} = \frac{6\pi \varrho^2 \bar{r} r'}{\varepsilon} E(r', \varepsilon) \underset{\substack{0 \leq r \leq \bar{r} \\ j=1,2,3}}{\text{Max}} |u_j|$$

ist. Auch der von dem inneren Teile herrührende Beitrag hat also einen beim Grenzübergang  $r' \rightarrow 0$  verschwindenden Grenzwert. Wir haben folglich:

$$\lim_{r' \rightarrow 0} \int_{B(t^{(0)} - \varepsilon, r')} (u_j v_j)_{t=t^{(0)} - \varepsilon} d\omega = 0$$

und folglich:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{r' \rightarrow 0} \int_{B(t^{(0)} - \varepsilon, r')} (u_j v_j)_{t=t^{(0)}-\varepsilon} d\omega = 0.$$

Wir betrachten sodann das dritte Glied rechts in (27). Auch hier zerlegen wir den Integrationsbereich im  $x_1 x_2 x_3$ -Raume durch die Kugel  $r = \bar{r}$  in zwei Teile. Wir schreiben das dritte Glied in der Form:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \varrho^2 \int_{t^{(0)} - \varepsilon}^{t^{(0)}} \frac{r' e^{-\frac{\varrho r'^2}{4\mu(t^{(0)}-t)}}}{(t^{(0)}-t)^{3/2}} dt \int_{B(t, \bar{r})} X_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} d\omega - \\ & -\frac{1}{2} \varrho^2 \int_{t^{(0)} - \varepsilon}^{t^{(0)}} \frac{r' e^{-\frac{\varrho r'^2}{4\mu(t^{(0)}-t)}}}{(t^{(0)}-t)^{3/2}} dt \int_{B(t, r') - B(t, \bar{r})} X_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} d\omega. \end{aligned}$$

Auf den ersten Teil dieses Ausdrucks wenden wir das oben gewonnene Resultat an, daß, wenn  $f(t)$  eine stetige Funktion von  $t$  ist:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{r' \rightarrow 0} \int_{t^{(0)} - \varepsilon}^{t^{(0)}} f(t) \frac{r' e^{-\frac{\varrho r'^2}{4\mu(t^{(0)}-t)}}}{(t^{(0)}-t)^{3/2}} dt = 2 \sqrt{\frac{\pi \mu}{\varrho}} f(t^{(0)}). \quad (28)$$

Wir erhalten so den Grenzwert:

$$-\varrho \sqrt{\pi \mu \varrho} \int_{B(t^{(0)}, \bar{r})} X_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} d\omega.$$

Betreffs des zweiten Teiles sehen wir sofort, daß es dem absoluten Betrage nach kleiner ist als:

$$6\pi \varrho^2 \bar{r} \max_{\substack{t^{(0)} - \varepsilon \leq t \leq t^{(0)} \\ 0 \leq r \leq \bar{r} \\ j=1, 2, 3}} |X_j| \int_{t^{(0)} - \varepsilon}^{t^{(0)}} \frac{r' e^{-\frac{\varrho r'^2}{4\mu(t^{(0)}-t)}}}{(t^{(0)}-t)^{3/2}} dt < 12\pi \bar{r} \varrho \sqrt{\pi \mu \varrho} \max |X_j|.$$

Wir lassen schließlich  $\bar{r}$  gegen Null abnehmen und erhalten:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{r' \rightarrow 0} -\varrho \int_{t^{(0)} - \varepsilon}^{t^{(0)}} dt \int_{B(t, r')} X_j v_j d\omega = -\varrho \sqrt{\pi \mu \varrho} \int_{B(t^{(0)})} \left( X_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} \right)_{t=t^{(0)}} d\omega.$$

Den Grenzwert des vierten Gliedes rechts in (27) erhält man ohne Schwierigkeit mit Hilfe von (28). Er ist:

$$-\sqrt{\pi\mu\varrho}\int_{F(t^{(0)})}^{\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} \left( \mu \frac{du_j}{dn} - pn_j + \varrho U_n u_j \right) - \mu u_j \frac{d}{dn} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} \} dS}.$$

Das letzte Glied in (27), dessen Grenzwert wir zu berechnen haben, ist:

$$-\int_{t^{(0)}-\varepsilon}^{t^{(0)}} dt \int_{F(t)} \bar{p} u_j n_j dS = -\frac{1}{2} \varrho^2 r' \int_{t^{(0)}-\varepsilon}^{t^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t} \frac{E(r', t^{(0)}-t)}{t^{(0)}-t} dt \int_{F(t)} u_j n_j \frac{dS}{r^2}.$$

Eine partielle Integration führt diesen Ausdruck in den folgenden über:

$$\frac{\varrho^2 r'}{2\varepsilon} E(r', \varepsilon) \int_{F(t^{(0)}-\varepsilon)} (u_j n_j)_{t=t^{(0)}-\varepsilon} \frac{dS}{r} + \frac{1}{2} \varrho^2 \int_{t^{(0)}-\varepsilon}^{t^{(0)}} \frac{r' e^{-\frac{\varrho r'^2}{4\mu(t^{(0)}-t)}}}{(t^{(0)}-t)^{1/2}} dt \frac{d}{dt} \int_{F(t)} u_j n_j \frac{dS}{r^2}.$$

Die Grenzübergänge  $r' \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$  ergeben wegen (28):

$$\varrho \sqrt{\pi\mu\varrho} \frac{d}{dt^{(0)}} \int_{F(t^{(0)})} (u_j n_j)_{t=t^{(0)}} \frac{dS}{r}.$$

Indem wir unsere Ergebnisse zusammenfassen, erhalten wir die gesuchte Formel für  $p(P^{(0)}, t^{(0)})$ :

$$p(P^{(0)}, t^{(0)}) = \frac{\varrho}{4\pi} \int_{B(t^{(0)})} \left( X_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} \right)_{t=t^{(0)}} d\omega +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{F(t^{(0)})} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} \left( \mu \frac{du_j}{dn} - pn_j + \varrho U_n u_j \right) - \mu u_j \frac{d}{dn} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} \right\} dS -$$

$$- \frac{\varrho}{4\pi} \frac{d}{dt^{(0)}} \int_{F(t^{(0)})} (u_j n_j)_{t=t^{(0)}} \frac{dS}{r}. \quad (29)$$

### 5.9. Zusammenfassung. Die hydrodynamischen Integralgleichungen.

Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen und wenden sie gleichzeitig auf die vollständigen hydrodynamischen Differentialgleichungen an. Diese werden dadurch in Integrodifferentialgleichungen umgeformt. Wir erhalten den Gleichungen I<sup>a</sup> entsprechend:

$$\begin{aligned}
 4\pi\sqrt{\pi\mu\varrho}u_k(P^{(0)}, t^{(0)}) &= \varrho \int_{B(T)} (u_j t_{jk})_{t=T} d\omega + \\
 &+ \varrho \int_T^{t^{(0)}} dt \int_{B(t)} \left( X_j - u_m \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \right) t_{jk} d\omega - \int_T^{t^{(0)}} dt \int_{F(t)} \left\{ \mu u_j \frac{dt_{jk}}{dn} - \right. \\
 &- t_{jk} \left. \left( \frac{du_j}{dn} - p n_j + \varrho U_n u_j \right) \right\} dS + \sqrt{\pi\mu\varrho} \int_{F(t^{(0)})} (u_j n_j)_{t=t^{(0)}} \frac{x_k - x_k^{(0)}}{r^3} dS, \\
 p(P^{(0)}, t^{(0)}) &= \frac{\varrho}{4\pi} \int_{B(t^{(0)})} \left( X_j - u_m \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} d\omega + \\
 &+ \frac{1}{4\pi} \int_{F(t^{(0)})} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} \cdot \left( \mu \frac{du_j}{dn} - p n_j + \varrho U_n u_j \right) - \mu u_j \frac{d}{dn} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} \right\} dS - \\
 &- \frac{\varrho}{4\pi} \frac{d}{dt^{(0)}} \int_{F(t^{(0)})} (u_j n_j)_{t=t^{(0)}} \frac{dS}{r}.
 \end{aligned}
 \quad \boxed{\text{I}^c}$$

Wir erhalten anderseits, I<sup>b</sup> entsprechend:

$$\begin{aligned}
 4\pi\sqrt{\pi\mu\varrho}u_k(P^{(0)}, t^{(0)}) &= \varrho \int_{B(T)} (u_j t_{jk})_{t=T} d\omega + \\
 &+ \varrho \int_T^{t^{(0)}} dt \int_{B(t)} \left\{ X_j - u_m \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_m} - \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) \right\} t_{jk} d\omega - \\
 &- \int_T^{t^{(0)}} dt \int_{F(t)} \left\{ \mu u_j \frac{dt_{jk}}{dn} - t_{jk} \left( \mu \frac{du_j}{dn} - q n_j + \varrho U_n u_j \right) \right\} dS + \\
 &+ \sqrt{\pi\mu\varrho} \int_{F(t^{(0)})} (u_j n_j)_{t=t^{(0)}} \frac{x_k - x_k^{(0)}}{r^3} dS, \\
 q(P^{(0)}, t^{(0)}) &= \frac{\varrho}{4\pi} \int_{B(t^{(0)})} \left\{ X_j - u_m \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_m} - \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) \right\} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} d\omega + \\
 &+ \frac{1}{4\pi} \int_{F(t^{(0)})} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} \cdot \left( \mu \frac{du_j}{dn} - q n_j + \varrho U_n u_j \right) - \mu u_j \frac{d}{dn} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} \right\}_{t=t^{(0)}} dS - \\
 &- \frac{\varrho}{4\pi} \frac{d}{dt^{(0)}} \int_{F(t^{(0)})} (u_j n_j)_{t=t^{(0)}} \frac{dS}{r}.
 \end{aligned}
 \quad \boxed{\text{I}^d}$$

In diesen Formeln ist:

$$t_{jk} = -\delta_{jk} \Delta \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k}, \quad \Phi = \frac{1}{r} \int_0^r \frac{e^{-\frac{\varrho a^2}{4\mu(t^{(0)}-t)}}}{\sqrt{t^{(0)}-t}} da.$$

Man zeigt ohne Schwierigkeit, daß umgekehrt, wenn  $X_j$ ,  $u_j$ ,  $\frac{\partial u_j}{\partial x_k}$  in bezug auf  $x_1, x_2, x_3$  stetig differenzierbar sind, I<sup>a</sup> bzw. I<sup>b</sup> aus I<sup>c</sup> bzw. I<sup>d</sup> folgt.

### 5 10. Das zweidimensionale Problem.

Die Formeln (23) und (29) nebst den aus ihnen abgeleiteten Formeln I<sup>c</sup> und I<sup>d</sup> enthalten für den dreidimensionalen Fall die Lösung der Aufgabe, welche wir uns in diesem Paragraphen gestellt hatten. Es bleibt noch übrig die Lösung derselben Aufgabe für den zweidimensionalen Fall anzugeben, den man z. B. durch die Annahme  $u_3 = X_3 = 0$  erhält. Die Methoden, die in diesem zweidimensionalen Falle zum Ziele führen, sind denjenigen, welche wir im dreidimensionalen Falle angewandt haben, sehr ähnlich. Wir begnügen uns deshalb damit, außer den Schlußformeln die Hilfsfunktionen anzugeben, die man zu benutzen hat.

Die partiellen Differentialgleichungen, mit denen wir uns jetzt zu beschäftigen haben, sind:

$$\mu \Delta u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} - \varrho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \varrho X_j = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (30)$$

Das adjungierte System ist:

$$\mu \Delta v_j - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \varrho \frac{\partial v_j}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0. \quad j = 1, 2.$$

Wir befriedigen, für  $k = 1$  oder  $2$ , dieses System durch den Ansatz:

$$v_j = t_{jk}(\varepsilon) = \delta_{jk} \Delta \Phi(\varepsilon) - \frac{\partial^2 \Phi(\varepsilon)}{\partial x_j \partial x_k}, \quad p_k(\varepsilon) = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \varrho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mu \Delta \Phi(\varepsilon) \right),$$

$$\left( \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right),$$

wo:

$$\Phi(\varepsilon) = \int_r^\infty e^{-\frac{\varrho a^2}{4\mu(t^{(0)}-t)}} \frac{da}{a} - \log \frac{1}{r}$$

und wo  $r$  die Entfernung zwischen den Punkten  $P$  und  $P^{(0)}$  ist. Die so erhaltenen beiden Lösungen sind für  $t < t^{(0)}$  für alle Werte von  $x_j$  regulär. Wir wenden diese Lösungen in derselben Weise an, wie wir oben die entsprechenden Lösungen des dreidimensionalen Problems angewandt haben. Wir erhalten, wenn  $K(t)$  die Grenzkurve eines zweidimensionalen Bereiches  $B(t)$  ist, in welchem eine Lösung  $u_j$ ,  $p$  der

Gleichungen (30) für  $T \leqq t \leqq t^{(0)}$  regulär ist und wenn  $P^{(0)}$  (mit den Koordinaten  $x_j^{(0)}$ ) innerhalb von  $K(t^{(0)})$  liegt:

$$\left. \begin{aligned} 2\pi\varrho u_k(P^{(0)}, t^{(0)}) &= \varrho \int_{B(T)} (u_j t_{jk})_{t=T} d\omega + \varrho \int_T^{t^{(0)}} dt \int_{B(t)} X_j t_{jk} d\omega - \\ &- \int_T^{t^{(0)}} dt \int_{K(t)} \left\{ \mu u_j \frac{dt_{jk}}{dn} - t_{jk} \left( \mu \frac{du_j}{dn} - p n_j + \varrho U_n u_j \right) \right\} ds + \\ &+ \varrho \int_{K(t^{(0)})} (u_j n_j)_{t=t^{(0)}} \frac{x_k - x_k^{(0)}}{r^2} ds. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Hier ist:

$$t_{jk} = \delta_{jk} \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k}, \quad \Phi = \int_r^\infty e^{-\frac{\varrho a^2}{4\mu(t^{(0)}-t)}} \frac{da}{a} - \log \frac{1}{r}.$$

Die Funktion  $\Phi$  ist, bis auf eine hier belanglose Konstante, mit der Funktion:

$$\int_0^r \frac{1 - e^{-\frac{\varrho a^2}{4\mu(t^{(0)}-t)}}}{a} da = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-a}}{a} da = \frac{1}{2} O\left(\frac{\varrho r^2}{4\mu(t^{(0)}-t)}\right)$$

identisch.

Um die entsprechende Formel für  $p(P^{(0)}, t^{(0)})$  zu finden, geht man von der Tatsache aus, daß das adjungierte System von (30) eine Lösung:

$$v_j(\varepsilon) = \frac{\varrho \varepsilon^2 e^{-\frac{\varrho \varepsilon^2}{4\mu(t^{(0)}-t)}}}{4\mu(t^{(0)}-t)^2} \frac{\partial}{\partial x_j} \log r, \quad \bar{p}(\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\varrho^2 \varepsilon^2 e^{-\frac{\varrho \varepsilon^2}{4\mu(t^{(0)}-t)}}}{4\mu(t^{(0)}-t)^2} \log r$$

besitzt. Indem man diese Lösung in wohlbekannter Weise anwendet, findet man:

$$\left. \begin{aligned} 2\pi p(P^{(0)}, t^{(0)}) &= \varrho \int_{B(t^{(0)})} (X_j)_{t=t^{(0)}} \frac{\partial}{\partial x_j} \log \frac{1}{r} d\omega - \\ &- \int_{B(t^{(0)})} \left\{ \mu u_j \frac{d}{dn} \frac{\partial}{\partial x_j} \log \frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial x_j} \log \frac{1}{r} \left( \mu \frac{du_j}{dn} - p n_j + \varrho U_n u_j \right) \right\} ds - \\ &- \varrho \frac{\partial}{\partial t^{(0)}} \int_{K(t^{(0)})} (u_j n_j)_{t=t^{(0)}} \log \frac{1}{r} ds. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

## § 6. Die hydrodynamischen Integralgleichungen.\*

### 61. Die Aufgabe: Direkte Ableitung der hydrodynamischen Integralgleichungen aus den grundlegenden mechanischen Sätzen.

Als wir im ersten Paragraphen die Gesetze für die Bewegung einer zähen Flüssigkeit mathematisch zu formulieren versuchten, wurden wir zu den Gleichungen (2), (4), (5) geführt. Diese Gleichungen stellen Beziehungen zwischen gewissen Integralen dar. Sie sind, kurz ausgedrückt, Integralgleichungen. Für ihre Gültigkeit ist hinreichend (aber nicht notwendig), daß  $u_j$  und  $p$  stetige Funktionen von  $x_1, x_2, x_3$  und  $t$  sind, daß die  $u_j$  partielle Ableitungen erster Ordnung in bezug auf die Variablen  $x_j$  besitzen (Ableitungen, die selbst stetige Funktionen von  $x_1, x_2, x_3$  und  $t$  sind), endlich daß die Größen  $X_j$  ihren absoluten Beträgen nach unterhalb einer endlichen Grenze liegen und in dem Sinne integrabel sind, daß die aus ihnen gebildeten Raum-Zeit-Integrale einen bestimmten Sinn haben. Aus den Gleichungen (2), (4) und (5) leiteten wir partielle Differentialgleichungen für  $u_j$  und  $p$  ab. Dabei mußten wir voraussetzen, daß die Größen  $u_j$  partielle Ableitungen zweiter Ordnung in bezug auf die  $x$ -Variablen und erster Ordnung in bezug auf  $t$  besitzen und daß  $p$  partielle Ableitungen erster Ordnung in bezug auf  $x_1, x_2, x_3$  besitzt, endlich, daß alle diese Ableitungen sowie die Größen  $X_j$  stetige Funktionen von  $x_1, x_2, x_3, t$  sind. Unter diesen Voraussetzungen erhielten wir die Grundgleichungen I<sup>a</sup>, I<sup>b</sup>, II<sup>a</sup>, II<sup>b</sup>, III<sup>a</sup>, III<sup>b</sup> in § 1. Aus diesen Differentialgleichungen haben wir in den Paragraphen 3, 4, 5 neue Gleichungen I<sup>c</sup>, I<sup>d</sup> usw. hergeleitet, welche die Werte von  $u_j$  und  $p$  in einem beliebigen Raum-Zeit-Punkte durch gewisse Integrale ausdrücken. Wenn diese Integrale von  $u_j$  und  $p$  unabhängig wären, so hätten wir hiermit die Grundgleichungen gelöst. Dies ist nicht der Fall. Was wir getan haben, ist also nur, daß wir die Gesetze für die Bewegung einer Flüssigkeit in ein neues mathematisches Gewand gekleidet haben, das insofern demjenigen ähnelt, in welchem jene Gesetze zuerst auftraten, als es wieder die Form von Integralgleichungen hat. Wenn wir diese Integralgleichungen betrachten, so werden wir finden, daß, mit einer Ausnahme, in ihnen keine anderen Ableitungen der Größen  $u_j$  und  $p$  vorkommen als die partiellen Ableitungen erster Ordnung nach  $x_1, x_2, x_3$  von den Größen  $u_j$ . Die Ausnahme bildet die Formel für  $p(P^{(0)}, t^{(0)})$ ,

---

\* Wegen der theoretischen Bedeutung dieser Untersuchungen vgl. 68!

in welcher rechts eine Ableitung eines Flächenintegrals in bezug auf  $t^{(0)}$  vorkommt, welches  $u_j(t^{(0)})$  enthält. Wenn man bedenkt, daß wir zur Grenzfläche die wirkliche Begrenzung der Flüssigkeit wählen können, so sieht man indessen, daß die Existenz der Ableitungen  $\partial u_j / \partial t^{(0)}$  im Innern der Flüssigkeit nicht vorausgesetzt zu werden braucht. Es ist auch nicht notwendig, die Existenz anderer Ableitungen vorauszusetzen, um zu erreichen, daß die in unseren Formeln  $I^c$ ,  $I^d$  usw. vorkommenden Integrale einen Sinn haben. Auch ist es von dem Gesichtspunkte der Formeln  $I^c$ ,  $I^d$  usw. aus gleichgültig, ob die Funktionen  $X_i$  stetig sind. Notwendig ist nur, daß sie integrierbar sind. Die hier hervorgehobenen Tatsachen deuten darauf hin, daß die Formeln  $I^c$ ,  $I^d$  usw. unter allgemeineren Voraussetzungen gültig sind, als wir unseren bis jetzt gegebenen Beweisen zugrunde gelegt haben. Wir werden in diesem Paragraphen zeigen, daß es sich tatsächlich so verhält. Indem wir uns, der Kürze wegen, auf die Gleichungen  $I^c$  und  $I^d$  beschränken, werden wir zeigen, daß sie unter den allgemeineren Voraussetzungen gültig sind, die wir im Anfang dieses Paragraphen als für die Gültigkeit der Grundgleichungen (1, 2)\*, (1, 4) und (1, 5) hinreichend (nicht notwendig) erwähnt haben. Es verhält sich also so, daß die Existenz der Ableitungen  $\frac{\partial u_j}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial x_j}$  weder für die Grundgleichungen (1, 2), (1, 4), (1, 5), noch für die Systeme  $I^c$ ,  $I^d$  notwendig ist, sondern daß wir sie nur des Beweises wegen voraussetzen mußten. Die partiellen Differentialgleichungen  $I^a$ ,  $I^b$ , welche Beziehungen zwischen diesen nicht notwendigen Ableitungen enthalten, können nicht als der sinngemäße Ausdruck der allgemeinen Gesetze für die Bewegung einer zähen Flüssigkeit aufgefaßt werden. Der sinngemäße Ausdruck sind statt dessen die Gleichungen (1, 2), (1, 4) und (1, 5). Man kann diese Gleichungen als die hydrodynamischen Integralgleichungen bezeichnen.

Wir haben zu zeigen, daß, wenn  $u_j$  und  $p$  den obenerwähnten Bedingungen betreffs Stetigkeit und Differenzierbarkeit genügen und wenn für jeden Teil der Flüssigkeit die Gleichungen (1, 2), (1, 4) und also für jeden Teil des Raumes die Gleichung (1, 5) gilt, diejenigen Teile der Gleichungen  $I^c$  und  $I^d$  wahr sind, welche sich auf die Größen  $u_j(P^{(0)}, t^{(0)})$  beziehen. Wir haben ferner zu zeigen, daß, wenn wir außerdem annehmen, daß an der physikalischen Begrenzung der Flüssigkeit die Größen  $u_j$  differenzierbare Funktionen von  $t$  sind, dann,

---

\* (1, 2) hat die Bedeutung: Formel 2 im Paragraphen 1.

vorausgesetzt, daß wir zur Fläche  $F(t)$  gerade die physikalische Begrenzung der Flüssigkeit wählen, auch der Teil der Gleichungen  $I^c$  und  $I^d$  wahr ist, der sich auf  $p(P^{(0)}, t^{(0)})$  bezieht.

## 6 2. Mathematische Formulierung der Aufgabe.

Wir bemerken zuerst, daß wir, um diese Sätze zu beweisen, nur zu zeigen haben, daß aus (1, 4) oder (1, 5) folgt:

$$\left. \begin{aligned} & \int_T^{t^{(0)}} dt \int_{F(t)} \left\{ v_j \left( \mu \frac{du_j}{dn} - p n_j + \varrho U_n u_j \right) - u_j \left( \mu \frac{dv_j}{dn} - \bar{p} n_j \right) \right\} dS - \\ & - \varrho \int_{B(t^{(0)})} (u_j v_j)_{t=t^{(0)}} d\omega + \varrho \int_{B(T)} (u_j v_j)_{t=T} d\omega + \\ & + \varrho \int_T^{t^{(0)}} dt \int_{B(t)} \left( X_j - u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) d\omega = 0, \end{aligned} \right\} (1)$$

wo  $v_j$ ,  $\bar{p}$  eine beliebige in  $B(t)$ , also innerhalb von  $F(t)$ , reguläre Lösung des adjungierten Systems:

$$\mu \Delta v_j - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \varrho \frac{\partial v_j}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2)$$

ist. Aus der Gleichung (1) (wo wir der Einfachheit wegen anfangs das letzte Glied vernachlässigten) haben wir nämlich im vorigen Paragraphen die Systeme  $I^c$  und  $I^d$  abgeleitet. Wir haben bei dieser Ableitung betont, daß wir von unseren damaligen Voraussetzungen betreffend die Funktionen  $u_j$  bei der Berechnung von  $u_j(P^{(0)}, t^0)$  nur die Annahme benutzt haben, daß die  $u_j$  stetige Funktionen von  $x_1, x_2, x_3, t$  sind, welche stetige Ableitungen erster Ordnung in bezug auf  $x_1, x_2, x_3$  besitzen. Bei der Berechnung von  $p(P^{(0)}, t^{(0)})$  kommt die schon besprochene Bedingung hinzu, daß:

$$\frac{d}{dt^{(0)}} \int_{F(t^{(0)})} (u_j n_j)_{t=t^{(0)}} \frac{dS}{r}$$

einen Sinn haben soll. Wenn man den Paragraphen (5) nachprüft, wird man finden, daß auch betreffend ' $p$ ' und  $X_j$  keine andere Annahmen notwendig sind als diejenigen, welche wir hier oben gemacht haben.

Wir betrachten jetzt ein beliebiges Zeitintervall  $T \leqq t \leqq t^{(0)}$  und wählen einen Bereich  $B(t)$ , von dessen Grenzfläche  $F(t)$  wir unsere

üblichen Annahmen machen. Sie können in der folgenden Form ausgedrückt werden:  $F(t)$  soll aus einer endlichen Zahl von Teilen bestehen, derart, daß für jeden Teil die Koordinaten eines Punktes desselben als stetige und einmal stetig differenzierbare Funktionen von zwei Parametern  $s_1$  und  $s_2$  und von  $t$  dargestellt werden können. Wir nehmen an, daß  $u_1, u_2, u_3$  und  $p$  innerhalb von  $B(t)$  und für  $T \leq t \leq t^{(0)}$  stetige Funktionen von  $x_1, x_2, x_3$  und  $t$  sind und daß  $u_1, u_2, u_3$  in demselben Raum-Zeit-Bereich in bezug auf  $x_1, x_2, x_3$  stetig differenzierbar sind. Wir nehmen an, daß für jeden Bereich  $B$  innerhalb von  $B(t)$  und für jedes Zeitintervall zwischen den Grenzen  $T$  und  $t^{(0)}$  die Gleichungen (1, 5) bestehen. Wir behaupten, daß dann die Gleichung (1) gültig ist, wie man auch die innerhalb von  $B(t)$  reguläre Lösung  $v_1, v_2, v_3, \bar{p}$  des adjungierten Systems (2) wählt.

### 63. Ableitung einer grundlegenden Integralbeziehung.

Um diesen Satz zu beweisen, betrachten wir zunächst das Zeit-Intervall  $\tau \leq t \leq \tau + \delta t$ . Wir wählen  $\delta t$  so klein, daß die Veränderung der Lage der Fläche  $F(t)$  während  $\delta t$  sehr klein ist. Durch drei Scharen von parallelen, äquidistanten, mit den Koordinatenebenen parallelen Ebenen zerlegen wir dann den  $x_1 x_2 x_3$ -Raum in parallelepipedische Teilgebiete. Ihre Größe wird  $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$  sein, wenn  $\Delta x_i$  die Entfernung zweier benachbarter, gegen die  $x_i$ -Achse senkrechter Ebenen ist. Wenn wir die  $\Delta x_i$  genügend klein wählen, so wird der Bereich  $B(t)$  durch jene Scharen von Ebenen in Teilgebiete zerlegt werden, von denen die überwiegende Mehrzahl parallelepipedische Gestalt haben, während eine kleinere Zahl von Teilbereichen, welche längs der Grenzfläche  $F(t)$  liegen, zum Teil von dieser Fläche begrenzt werden. Wir numerieren in irgendeiner Weise diese Teilbereiche und bezeichnen mit  $B_k$  den  $k$ ten Bereich.  $F_k$  sei die Grenzfläche von  $B_k$ . Jedem Bereich  $B_k$  ordnen wir einen bestimmten Punkt  $P_k$  zu. Wie wir diesen Punkt innerhalb von  $B_k$  wählen, ist ziemlich gleichgültig, der Einfachheit wegen wollen wir ihn aber bei den parallelepipedischen Teilbereichen in den Mittelpunkt derselben verlegen. Die Funktionen  $v_j$  nehmen in  $P_k$ , wenn  $t = \tau$  ist, die Werte  $v_j(P_k, \tau)$  an.

Wir wenden jetzt die Gleichungen (I, 5) auf das Zeitintervall  $\tau \leq t \leq \tau + \delta t$  und auf den Bereich  $B_k$  an. Wegen der Kleinheit von  $\delta t$  können wir das Ergebnis in der Form:

$$\varrho \int_{B_k} (u_j)_{\tau + \delta t} d\omega - \varrho \int_{B_k} (u_j)_{\tau} d\omega = \varrho \delta t \int_{B_k} X_j' d\omega + \delta t \int_{F_k} T_{j\ell} n_\ell dS \quad (3)$$

schreiben, wenn wir zur Abkürzung:

$$X_j - u_l \frac{\partial u_j}{\partial x_l} = X'_j, \quad -p \delta_{jl} + \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_l} = T_{jl}$$

setzen. Wir multiplizieren die Gleichung (3) mit  $v_j(P_k, \tau)$  und summieren hinsichtlich  $j$  über die Werte 1, 2, 3, hinsichtlich  $k$  über alle Teilgebiete von  $B(\tau)$ . Wir erhalten:

$$\left. \begin{aligned} & \varrho \sum_{(k)} \int_{B_k} u_j(P, \tau + \delta t) v_j(P_k, \tau) d\omega - \varrho \sum_{(k)} \int_{B_k} u_j(P, \tau) v_j(P_k, \tau) d\omega = \\ & = \varrho \delta t \sum_{(k)} \int_{B_k} X'_j(P, \tau) v_j(P_k, \tau) d\omega + \delta t \sum_{(k)} \int_{F_k} T_{jl}(P, \tau) n_l v_j(P_k, \tau) dS. \end{aligned} \right\} (4)$$

#### 6.4. Ausführung des Grenzüberganges $\Delta x_j \rightarrow 0$ ( $j = 1, 2, 3$ ) in den drei ersten Gliedern der Gleichung (4).

Wir lassen jetzt  $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$  gegen Null konvergieren. Gleichzeitig wächst die Anzahl der Teilbereiche von  $B(t)$  über alle Grenzen. Wir untersuchen, was die Gleichung (4) in der Grenze, bei verschwindenden  $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$  gibt.

Das erste Glied kann in der Form:

$$\begin{aligned} & \varrho \int_{B(\tau)} u_j(P, \tau + \delta t) v_j(P, \tau) d\omega + \\ & + \varrho \sum_{(k)} \int_{B_k} u_j(P, \tau + \delta t) \{v_j(P_k, \tau) - v_j(P, \tau)\} d\omega \end{aligned} \quad (5)$$

geschrieben werden. Die  $v_j$  sind stetige Funktionen von  $x_1, x_2, x_3$ . Wir können deshalb eine solche, von  $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$  abhängige Größe  $\varepsilon$  bestimmen, daß, wenn  $P$  in  $B_k$  liegt:

$$|v_j(P_k, \tau) - v_j(P, \tau)| < \varepsilon,$$

während gleichzeitig:

$$\lim_{\substack{\Delta x_j \rightarrow 0 \\ j=1,2,3}} \varepsilon = 0.$$

Die Größen  $u_j$  sind nach unseren Annahmen stetige Funktionen von  $x_1, x_2, x_3$ . Es gibt also eine solche positive Größe  $M$ , daß in  $B(t)$ ,  $T \leq t \leq t^{(0)}$ :

$$|u_j(P, \tau + \delta t)| < M.$$

Folglich:

$$\left| \sum_{(k)} \int_{B_k} u_j(P, \tau + \delta t) \{v_j(P_k, \tau) - v_j(P, \tau)\} d\omega \right| < 3\varepsilon M \int_{B(\tau)} d\omega.$$

Das zweite Glied in (5) konvergiert also gleichzeitig mit den  $\Delta x_j$  gegen Null und wir haben

$$\lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \varrho \sum_{j=1,2,3}^{(k)} \int_{B_k} u_j(P, \tau + \delta t) v_j(P_k, \tau) d\omega = \varrho \int_{B(\tau)} (u_j)_\tau + \delta t (v_j)_\tau d\omega.$$

Die einfache Beweismethode, die wir hier angewandt haben, führt auch bei den folgenden Gliedern der Gleichung (4) zum Ziele. Um nicht durch Wiederholungen zu ermüden, geben wir für das zweite und dritte Glied sofort das Ergebnis des Grenzüberganges  $\Delta x_j \rightarrow 0$  an.

Wir haben ersichtlich:

$$\lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \varrho \sum_{j=1,2,3}^{(k)} \int_{B_k} u_j(P, \tau) v_j(P_k, \tau) d\omega = \varrho \int_{B(\tau)} (u_j v_j)_\tau d\omega,$$

$$\lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \varrho \sum_{j=1,2,3}^{(k)} \int_{B_k} X_j'(P, \tau) v_j(P_k, \tau) d\omega = \varrho \int_{B(\tau)} (X_j' v_j)_\tau d\omega.$$

### 65. Ausführung des Grenzüberganges $\Delta x_j \rightarrow 0$ ( $j = 1, 2, 3$ ) im letzten Gliede der Gleichung (4).

Dem letzten Gliede in (4) müssen wir dagegen eine nähere Untersuchung widmen. Wir betrachten die ebenen Grenzflächen, welche wir im Innern von  $B(\tau)$  durch unsere drei Scharen von Ebenen erhalten haben. Wir wollen, um einen bestimmten Fall zu haben, einen mit der  $x_2 x_3$ -Ebene parallelen Teil einer Grenzfläche  $F_k$  betrachten. Dieses ebene Flächenstück ist die Grenze zwischen zwei Teilbereichen  $B_k$ . Es kommt also in der Summe, aus welcher das letzte Glied in (4) besteht, an zwei Stellen vor. Einmal grenzt es in der Richtung der positiven  $x_1$ -Achse einen gewissen Bereich, etwa  $B_{k-1}$ , ab. Man hat dann  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = n_3 = 0$ . Andererseits ist es die Grenze in der Richtung der negativen  $x_1$ -Achse eines anderen Bereiches, etwa  $B_k$ . Man hat in diesem Falle  $n_1 = -1$ ,  $n_2 = n_3 = 0$ . Wenn wir mit  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  die Koordinaten des Mittelpunktes des hervorgehobenen Flächenstückes bezeichnen, so erhalten wir also aus dem letzten Gliede in (4), diesem Flächenstück entsprechend:

$$\delta t \int_{\xi_2 - \frac{1}{2} \Delta x_2}^{\xi_2 + \frac{1}{2} \Delta x_2} \int_{\xi_3 - \frac{1}{2} \Delta x_3}^{\xi_3 + \frac{1}{2} \Delta x_3} dx_2 dx_3 T_{j1} \{ v_j(\xi_1 - \frac{1}{2} \Delta x_1, \xi_2, \xi_3) - v_j(\xi_1 + \frac{1}{2} \Delta x_1, \xi_2, \xi_3) \}.$$

Nach unseren Annahmen besitzen die Funktionen  $v_j$  stetige Ableitungen erster Ordnung in bezug auf  $x_1, x_2, x_3$ . Wir haben demnach:

$$\begin{aligned} v_j(\xi_1 - \frac{1}{2} \Delta x_1, \xi_2, \xi_3) - v_j(\xi_1 + \frac{1}{2} \Delta x_1, \xi_2, \xi_3) &= \\ &= - \int_{\xi_1 - \frac{1}{2} \Delta x_1}^{\xi_1 + \frac{1}{2} \Delta x_1} \frac{\partial v_j(x_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial x_1} dx_1. \end{aligned}$$

Wir erhalten also:

$$-\delta t \int_{\xi_1 - \frac{1}{2} \Delta x_1}^{\xi_1 + \frac{1}{2} \Delta x_1} dx_1 \int_{\xi_2 - \frac{1}{2} \Delta x_2}^{\xi_2 + \frac{1}{2} \Delta x_2} dx_2 \int_{\xi_3 - \frac{1}{2} \Delta x_3}^{\xi_3 + \frac{1}{2} \Delta x_3} T_{j1}(\xi_1, x_2, x_3) \frac{\partial v_j(x_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial x_1} dx_3.$$

Unter Vernachlässigung von Größen, welche bei dem Grenzübergange  $\Delta x_j \rightarrow 0$  ( $j = 1, 2, 3$ ) verschwinden, lässt sich dies auch in der Form:

$$-\frac{1}{2} \delta t \int_{B_{k-1}} T_{j1} \frac{\partial v_j}{\partial x_1} d\omega - \frac{1}{2} \delta t \int_{B_k} T_{j1} \frac{\partial v_j}{\partial x_1} d\omega$$

schreiben. Wenn wir bedenken, daß jeder parallelepipedische Teilbereich zwei mit der  $x_2 x_3$ -Ebene parallele Grenzebenen besitzt und daß die mit den  $x_3 x_1$ - und  $x_1 x_2$ -Ebenen parallelen Grenzebenen ähnliche Beiträge ergeben, so scheint aus unserem Resultat hervorzugehen, daß wir bei dem Grenzübergange  $\Delta x_j \rightarrow 0$  aus den Teilen der Integrationsflächen  $F_k$ , welche nicht Teile der äußeren Grenzfläche  $F(\tau)$  sind, einen Beitrag:

$$\begin{aligned} -\delta t \int_{B(\tau)} T_{jl} \frac{\partial v_j}{\partial x_l} d\omega &= -\delta t \int_{B(\tau)} \left( -p \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \frac{\partial v_j}{\partial x_l} \right) d\omega = \\ &= -\mu \delta t \int_{B(\tau)} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \frac{\partial v_j}{\partial x_l} d\omega \end{aligned}$$

erhalten. Um zu beweisen, daß dies tatsächlich der Fall ist, müssen wir doch auch die besonderen Verhältnisse in der Nähe der äußeren Grenzfläche  $F(\tau)$  in Betracht ziehen. Wir behandeln die Integrale, welche von den ebenen Grenzflächen der an  $F(\tau)$  grenzenden Teilgebiete herrühren, in derselben Weise wie wir aus den inneren Teilgebieten herrührende Flächenintegrale behandelt haben. Wir stellen also den von einem solchen ebenen Flächenstück herrührenden Beitrag als eine Summe von zwei Raumintegralen dar. Wenn das ebene Flächenstück an der einen Seite einen Teilbereich hat, der ganz im Innern von  $B(\tau)$  liegt, so wird der Integrationsbereich eines dieser Raumintegrale die Größe:  $\frac{1}{2} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$  haben und also wie oben die Hälfte eines inneren Teilbereiches sein. Die Schwierigkeit, welche hier auftritt, ist die, daß der Integrationsbereich des anderen Raum-

integrals keine bestimmte Beziehung zu dem an  $F(\tau)$  grenzenden Teilbereiche haben wird. Von derselben Art ist die Schwierigkeit, zu welcher ein ebenes Flächenstück Anlaß gibt, welches die Grenze zwischen zwei Teilbereichen ist, die beide an  $F(\tau)$  grenzen. Daß nun diese Schwierigkeiten jedoch keine wesentliche Bedeutung haben, geht daraus hervor, daß der Rauminhalt einerseits aller an  $F(\tau)$  grenzenden Teilbereiche  $B_k$ , andererseits aller Integrationsbereiche, die wir bei unserer Umformung aus den ebenen Grenzflächen derselben Teilbereiche erhalten, bei verschwindenden  $\Delta x_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) gegen Null konvergieren. Der oben angegebene Wert ist aus diesem Grunde wirklich der Grenzwert der Beiträge, die wir im letzten Gliede von (4) aus den ebenen Grenzflächen erhalten, die im Innern von  $F(\tau)$  liegen.

Wir berechnen schließlich den Beitrag, den die Grenzfläche  $F(\tau)$  ergibt. Er ist, wie man sofort findet:

$$\delta t \int_{F(\tau)} T_{jl} v_j n_l dS = \delta t \int_{F(\tau)} \left( -p n_j + \mu n_l \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) v_j dS.$$

### 66. Das Ergebnis des Grenzüberganges $\Delta x_j \rightarrow 0$ ( $j = 1, 2, 3$ ).

Das Ergebnis unserer Untersuchung ist also die Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} & \varrho \int_{B(\tau)} (u_j)_{\tau+\delta t} (v_j)_\tau d\omega - \varrho \int_{B(\tau)} (u_j v_j)_\tau d\omega = \\ &= \varrho \delta t \int_{B(\tau)} \left( X_j - u_l \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) v_j d\omega - \mu \delta t \int_{B(\tau)} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \frac{\partial v_j}{\partial x_l} d\omega + \\ &+ \delta t \int_{F(\tau)} \left( -p n_j + \mu n_l \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) v_j dS. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

### 67. Der Grenzübergang $\delta t \rightarrow 0$ .

Um weiter zu kommen, setzen wir in (6)  $\delta t = (t^{(0)} - T)/N$ , wo  $N$  eine ganze Zahl ist. Wir setzen dann nacheinander  $\tau = T, T + \delta t, T + 2\delta t, \dots, T + (N-1)\delta t$  und addieren die so erhaltenen Gleichungen (6). Wir lassen dann  $N$  ins Unendliche wachsen. Rechts können wir sofort den Grenzübergang ausführen. Das Ergebnis ist eine Summe von drei Raum-Zeit-Integralen. Links müssen wir eine Umformung machen, um den Grenzübergang ausführen zu können. Wir schreiben die linke Seite in der Form:

$$\begin{aligned} & \varrho \int_{B(t^{(0)} - \delta t)} (u_j)_{t^{(0)}} (v_j)_{t^{(0)} - \delta t} d\omega - \varrho \int_{B(T)} (u_j v_j)_T d\omega + \\ & + \varrho \sum_0^{N-2} {}^{(n)} \left\{ \int_{B(T + n \delta t)} (u_j)_{T + (n+1) \delta t} (v_j)_{T + n \delta t} d\omega - \int_{B(T + (n+1) \delta t)} (u_j v_j)_{T + (n+1) \delta t} d\omega \right\}. \end{aligned}$$

Die hier vorkommende Summe kann auch in der Form:

$$\begin{aligned} & \sum_0^{N-2} {}^{(n)} \left\{ \int_{B(T + (n+1) \delta t)} (u_j)_{T + (n+1) \delta t} [(v_j)_{T + n \delta t} - (v_j)_{T + (n+1) \delta t}] d\omega \right\} - \\ & - \sum_0^{N-2} {}^{(n)} \int_{B(T + (n+1) \delta t) - B(T + n \delta t)} (u_j)_{T + (n+1) \delta t} (v_j)_{T + n \delta t} d\omega \end{aligned}$$

geschrieben werden. Die Funktionen  $v_j$  besitzen nach unseren Annahmen stetige Ableitungen in bezug auf  $t$ . Wir haben deshalb mit genügender Genauigkeit:

$$(v_j)_{T + n \delta t} - (v_j)_{T + (n+1) \delta t} = - \delta t \left( \frac{\partial v_j}{\partial t} \right)_{T + n \delta t}.$$

Wir haben ferner, wenn wir mit  $U_j$  die Komponenten der Geschwindigkeit des Flächenelementes  $dS$  bezeichnen und wenn wir  $U_j n_j = U_n$  setzen:

$$B_{(T + (n+1) \delta t)} - B_{(T + n \delta t)} = \delta t \int_{F(T + n \delta t)} U_n dS.$$

Wir haben folglich mit genügender Genauigkeit:

$$\int_{B(T + (n+1) \delta t) - B(T + n \delta t)} (u_j)_{T + (n+1) \delta t} (v_j)_{T + n \delta t} d\omega = \delta t \int_{F(T + n \delta t)} u_j v_j U_n dS.$$

Nach diesen Umformungen können wir auch links den Grenzübergang  $N \rightarrow \infty$  ausführen. Wir erhalten:

$$\left. \begin{aligned} & \varrho \int_{B(t^{(0)})} (u_j v_j)_{t^{(0)}} d\omega - \varrho \int_{B(T)} (u_j v_j)_T d\omega - \varrho \int_T^{t^{(0)}} dt \int_{R(\tau)} u_j \frac{\partial v_j}{\partial t} d\omega - \\ & - \varrho \int_T^{t^{(0)}} dt \int_{F(t)} u_j v_j U_n dS = \\ & = \varrho \int_T^{t^{(0)}} dt \int_{B(t)} \left( X_j - u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) v_j d\omega - \mu \int_T^{t^{(0)}} dt \int_{B(t)} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} d\omega + \\ & + \int_T^{t^{(0)}} dt \int_{F(t)} \left( - p n_j + \mu n_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) v_j dS. \end{aligned} \right\} (7)$$

Nach unseren Annahmen genügen die Funktionen  $v_j$  den Differentialgleichungen:

$$\varrho \frac{\partial v_j}{\partial t} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} - \mu \Delta v_j, \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0.$$

Wir führen in (7) den Wert von  $\frac{\partial v_j}{\partial t}$  ein, den wir aus der ersten dieser Gleichungen erhalten. Eine partielle Integration gibt uns dann, wenn wir beachten, daß auch nach unsren jetzigen Voraussetzungen aus der Kontinuitätsgleichung (1, 2) die Beziehung  $\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$  folgt:

$$\int_T^{t^{(0)}} dt \int_{F(t)} \left\{ v_j \left( \mu \frac{du_j}{dn} - p n_j + \varrho U_n u_j \right) - u_j \left( \mu \frac{dv_j}{dn} - \bar{p} n_j \right) \right\} dS - \\ - \varrho \int_{B(t^{(0)})} (u_j v_j)_{t^{(0)}} d\omega + \varrho \int_{B(T)} (u_j v_j)_T d\omega + \varrho \int_T^{t^{(0)}} dt \int_{B(t)} \left( X_j - u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) v_j d\omega = 0.$$

Dies war die Gleichung, welche wir herleiten wollten. Unser Beweis ist damit zu Ende geführt. Wir haben gesehen, daß man aus den Integralgleichungen (1, 2), (1, 4) und (1, 5) direkt, ohne Vermittelung der hydrodynamischen Differentialgleichungen I<sup>a</sup>, I<sup>b</sup> und ohne die Existenz der in diesen Differentialgleichungen vorkommenden Ableitungen  $\frac{\partial u_j}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_i}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial x_j}$  vorauszusetzen, zu der Integralgleichung gelangen kann, welche die Grundlage unserer Formeln I<sup>c</sup> und I<sup>d</sup> war. Umgekehrt kann man aus I<sup>c</sup> bzw. I<sup>d</sup> rückwärts die Gleichung (6, 1) ableiten.

## 68. Die Bedeutung des gefundenen Ergebnisses.

Welche Bedeutung hat der Satz, den wir in diesem Paragraphen bewiesen haben? Um diese Frage zu beantworten, erinnern wir daran, daß es eine unkorrekte Ausdrucksweise ist, wenn man von der Geschwindigkeit einer Flüssigkeit in einem bestimmten Punkte oder von der Kraft spricht, welche in einem bestimmten Punkte eine Flüssigkeit angreift. Was man in der Hydrodynamik unter der Geschwindigkeit einer Flüssigkeit versteht, ist der Mittelwert der Geschwindigkeiten der Molekel innerhalb eines Bereiches, der zwar klein sein soll, aber doch viele Molekel enthalten muß. Ebenso verstehen wir unter der Kraft in einem Punkte einer Flüssigkeit den Mittelwert der Kräfte auf die Molekel in einem Bereich um den Punkt herum. Da also die grundlegenden Begriffe der Hydrodynamik durch Mittelwerte definiert sind, also durch Summen, welche wir wegen der großen Anzahl der Molekel durch Integrale ausdrücken müssen, so ist verständlich, daß die

Grundgesetze der Hydrodynamik Beziehungen zwischen Integralen sein müssen. Wenn wir diese ursprünglichen Integralgleichungen statt der, unter speziellen und keineswegs notwendigen Annahmen, aus ihnen abgeleiteten Differentialgleichungen zum Ausgangspunkt unserer Theorie wählen, so bedeutet dies, daß wir die Theorie die Form behalten lassen, welche am besten dem Wesen der Erscheinungen angepaßt ist. Man kann, wenn man so will, sagen, daß dies ein Fortschritt in bezug auf die Reinheit der Methode ist. — Dieser Fortschritt in bezug auf Reinheit ist gleichzeitig ein wesentlicher Fortschritt in bezug auf Einfachheit. Die einzige Methode zur Berechnung der Bewegung einer zähen Flüssigkeit, welche wir zur Zeit besitzen, ist die Methode der sukzessiven Annäherungen. Wenn man bei der Anwendung dieser Methode von den hydrodynamischen Differentialgleichungen ausgeht, so muß man bei jedem Schritt der Rechnung nachprüfen, ob die Ableitungen, deren Existenz die hydrodynamischen Differentialgleichungen voraussetzen, wirklich existieren. Es verhält sich nun mit diesen Ableitungen so, daß man sehr leicht und unter sehr allgemeinen Voraussetzungen beweisen kann, daß die partiellen Ableitungen erster Ordnung von  $u_1, u_2, u_3$  in bezug auf  $x_1, x_2, x_3$ , deren Existenz ja auch die Integralgleichungen voraussetzen, wirklich existieren und stetige Funktionen von  $x_1, x_2, x_3, t$  sind. Dagegen ist die Frage von den notwendigen Bedingungen für die Existenz der Ableitungen zweiter Ordnung derselben Größen nach  $t$  von sehr komplizierter Natur. Dieses verwickelte Problem fällt weg, wenn wir bei unseren Berechnungen von den Integralgleichungen anstatt von den Differentialgleichungen ausgehen. Darin besteht die prinzipielle Vereinfachung, die in dieser Weise gewonnen wird.

## § 7. Erste Anwendungen der hydrodynamischen Integralgleichungen. Theorie der Singularitäten in der Bewegung einer den ganzen Raum erfüllenden Flüssigkeit.

### 71. Das Problem. Definition des Begriffes „reguläre Bewegung“ für eine den ganzen Raum erfüllende Flüssigkeit.

Die einfachste Aufgabe, die wir uns betreffs der Bewegung einer zähen Flüssigkeit stellen können, ist die folgende. Auf eine den ganzen Raum erfüllende Flüssigkeit wirkt ein bekanntes System von

Kräften. In einem gewissen Momente, etwa  $t = T$ , ist die Geschwindigkeit überall bekannt. Sie genügt der Kontinuitätsbedingung. Man soll die Bewegung für  $t > T$  berechnen.

Wir legen unserer Behandlung der erwähnten Aufgabe die Annahme zugrunde, daß der absolute Betrag der auf die Flüssigkeit pro Masseneinheit wirkenden Kraft  $X_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ), einer Bedingung von der Form:

$$\sqrt{X_j^2} = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2} < \frac{K}{(1 + \beta R)^{1+\alpha}} \quad (1)$$

genügt.  $R = \sqrt{x_j^2}$  soll hier die Entfernung des betrachteten Punktes von einem festen Punkte sein, den wir zum Anfangspunkte wählen können.  $\beta$  ist eine Konstante mit der Dimension einer inversen Länge.  $\alpha$  und  $K$  sind positive Konstanten, von denen  $\alpha$  dimensionslos ist, während  $K$  die Dimension einer Beschleunigung hat. — Wir nehmen ferner an, daß die Geschwindigkeit ( $u_j = u_j^*$ ,  $j = 1, 2, 3$ ) der Flüssigkeit im Momente  $t = T$  sowie der Druck ( $p = p^*$ ) bzw. die Funktion  $q (= q^*)$  Bedingungen von der Form:

$$\begin{aligned} \sqrt{u_j^2} &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} < \frac{U}{(1 + \beta R)^\alpha}, \\ \left| \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right| &< \frac{\beta U}{(1 + \beta R)^{1+\alpha}} \quad (j, k = 1, 2, 3) \\ |p|, |q| &< \frac{P}{(1 + \beta R)^\alpha} \end{aligned} \quad (2)$$

genügen, wo  $U$  und  $P$  Konstanten sind, von denen  $U$  der Dimension nach eine Geschwindigkeit,  $P$  ein Druck ist.

Wenn die Geschwindigkeit und der Druck einer Flüssigkeit Bedingungen von der Form (2) genügen, werden wir im folgenden sagen, daß die Bewegung der Flüssigkeit regulär ist.

Wir haben angenommen, daß die Bewegung unserer Flüssigkeit im Momente  $t = T$  regulär ist. Wir fragen, ob sie auch für  $t > T$  regulär bleibt und wie man sie unter dieser Voraussetzung berechnen kann.

Wir gehen im folgenden nicht auf alle Einzelheiten ein. Man findet die hier nicht ausgeführten Integralabschätzungen, auf welchen die Beweise der mitgeteilten Sätze beruhen, in den im Literaturverzeichnis erwähnten Abhandlungen.\*

---

\* Wir verweisen an dieser Stelle besonders auf die letzte dieser Abhandlungen: Sur la représentation analytique usw.

## 7 2. Integralgleichungen zur Berechnung der regulären Bewegung einer zähen Flüssigkeit.

Für die Bewegung einer zähen Flüssigkeit gelten, wie wir in den zwei letzten Paragraphen gesehen haben, die Integralgleichungen (oder, wenn man so will, Integro-Differentialgleichungen)  $I^c$  und  $I^d$ . Wir gehen hier von  $I^d$  aus. Sie muß erfüllt sein, wie wir auch die Grenzfläche  $F$  wählen. Insbesondere können wir zur Grenzfläche eine Kugel wählen, deren Radius wir dann ins Unendliche wachsen lassen können. Die Flächenintegrale rechts in den Formeln  $I^d$  konvergieren bei diesem Grenzübergang wegen der Ungleichungen (2), welche hier gültig sind, weil nach unserer Voraussetzung die Bewegung regulär ist, und wegen der Kontinuitätsbedingung:

$$\int_F (u_j n_j) dS = 0$$

gegen Null und wir erhalten die einfachen Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} 4\pi\sqrt{\pi\mu\rho} u_k(P^{(0)}, t^{(0)}) &= \rho \int_{-\infty}^{\infty} (u_i^* t_{jk})_{t=T} d\omega + \\ &+ \rho \int_T^{t^{(0)}} dt \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ X_j - u_m \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_m} - \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) \right\} t_{jk} d\omega, \\ q(P^{(0)}, t^{(0)}) &= \frac{\rho}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ X_j - u_m \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_m} - \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) \right\} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

## 7 3. Abschätzungen der Größen $t_{jk}$ , $\frac{\partial t_{jk}}{\partial x_l}$ .

Die Größen  $t_{jk}$  wurden in § 5 (vgl. z. B. S. 40) durch die Formeln:

$$t_{jk} = -\delta_{jk} \Delta \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k}, \quad \Phi = \frac{1}{r} \int_0^r e^{-\frac{\rho a^2}{4\mu(t^{(0)}-t)}} \frac{da}{\sqrt{t^{(0)}-t}}$$

definiert. Man findet (vgl. S. 45) durch Ausführung der Differentiationen, wenn wieder:

$$\frac{e^{-\frac{\rho r^2}{4\mu(t^{(0)}-t)}}}{\sqrt{t^{(0)}-t}} = E(r, t^{(0)}-t)$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
 t_{jk} &= \frac{1}{r^2} \left( \frac{3(x_j - x_j^{(0)})(x_k - x_k^{(0)})}{r^2} - \delta_{jk} \right) (\Phi - E(r, t^{(0)} - t)) - \\
 &\quad - \frac{\varrho}{2\mu} \left( \frac{(x_j - x_j^{(0)})(x_k - x_k^{(0)})}{r^2} - \delta_{jk} \right) \frac{E(r, t^{(0)} - t)}{t^{(0)} - t} = \\
 &\quad - \left( \frac{3(x_j - x_j^{(0)})(x_k - x_k^{(0)})}{r^2} - \delta_{jk} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r E(a, t^{(0)} - t) da \right\} - \\
 &\quad - \frac{\varrho}{2\mu} \left( \frac{(x_j - x_j^{(0)})(x_k - x_k^{(0)})}{r^2} - \delta_{jk} \right) \frac{E(r, t^{(0)} - t)}{t^{(0)} - t}.
 \end{aligned}$$

Die Funktion  $E(a, t^{(0)} - \beta)$  genügt der partiellen Differentialgleichung:

$$\varrho \frac{\partial E}{\partial \beta} + \mu \frac{\partial^2 E}{\partial a^2} = 0.$$

Wir multiplizieren mit  $da d\beta$  und integrieren zwischen den Grenzen  $a = 0$ ,  $a = r$ ;  $\beta = -\infty$ ,  $\beta = t$  ( $t < t^{(0)}$ ). Wir erhalten, da:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\beta \rightarrow -\infty} E(a, t^{(0)} - \beta) &= 0, \\
 \varrho \int_0^r E(a, t^{(0)} - t) da + \mu \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial r} E(r, t^{(0)} - \beta) d\beta - \\
 &\quad - \mu \int_{-\infty}^t \left( \frac{\partial}{\partial a} E(a, t^{(0)} - \beta) \right)_{a=0} d\beta = 0.
 \end{aligned}$$

Da (für  $\beta < t^{(0)}$ ):

$$\left( \frac{\partial}{\partial a} E(a, t^{(0)} - \beta) \right)_{a=0} = 0,$$

so folgt:

$$\begin{aligned}
 \int_0^r E(a, t^{(0)} - t) da &= - \frac{\mu}{\varrho} \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial r} E(r, t^{(0)} - \beta) d\beta = \\
 \frac{r}{2} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t^{(0)}-\beta)}} \frac{d\beta}{(t^{(0)}-\beta)^{\frac{3}{2}}} &= r \int_{\beta=-\infty}^{\beta=t} e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t^{(0)}-\beta)}} \frac{d\beta}{(t^{(0)}-\beta)^{\frac{1}{2}}} - r \int_{-\infty}^t \left( \frac{\partial}{\partial \beta} e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t^{(0)}-\beta)}} \right) \frac{d\beta}{(t^{(0)}-\beta)} = \\
 r E(r, t^{(0)} - t) + \frac{\varrho r^3}{4\mu} \int_{-\infty}^t E(r, t^{(0)} - \beta) \frac{d\beta}{(t^{(0)} - \beta)^2}.
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Beziehung können wir unseren Ausdruck für  $t_{jk}$  in der folgenden Form schreiben:

$$\left. \begin{aligned} t_{jk} = & \frac{\varrho}{4\mu} \left( \frac{3(x_j - x_j^{(0)})(x_k - x_k^{(0)})}{r^2} - \delta_{jk} \right) \int_{-\infty}^t E(r, t^{(0)} - \beta) \frac{d\beta}{(t^{(0)} - \beta)^2} - \\ & - \frac{\varrho}{2\mu} \left( \frac{(x_i - x_j^{(0)})(x_k - x_k^{(0)})}{r^2} - \delta_{jk} \right) \frac{E(r, t^{(0)} - t)}{t^{(0)} - t}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Wir bezeichnen mit  $a(n)$  das Maximum der Funktion

$$(1 + x^2)^n e^{-x^2}$$

für  $0 \leq x \leq \infty$ . Wir haben dann:

$$E(r, t^{(0)} - \beta) \leq \frac{a(n)}{\sqrt{t^{(0)} - \beta} \left[ 1 + \frac{\varrho r^2}{4\mu(t^{(0)} - \beta)} \right]^n}.$$

Folglich:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^t E(r, t^{(0)} - \beta) \frac{d\beta}{(t^{(0)} - \beta)^2} &< a(2\frac{1}{2}) \int_{-\infty}^t \frac{d\beta}{\left( t^{(0)} - \beta + \frac{\varrho r^2}{4\mu} \right)^{5/2}} = \\ & = \frac{2a(2\frac{1}{2})}{3 \left( t^{(0)} - t + \frac{\varrho r^2}{4\mu} \right)^{5/2}}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Andererseits:

$$\frac{E(r, t^{(0)} - t)}{t^{(0)} - t} \leq \frac{a(1\frac{1}{2})}{\left( t^{(0)} - t + \frac{\varrho r^2}{4\mu} \right)^{3/2}}. \quad (6)$$

Aus (4), (5), (6) folgt, daß man eine solche positive Größe  $A$  bestimmten kann, daß, für  $r \geq 0, t^{(0)} - t \geq 0$ :

$$|t_{jk}| < \frac{A}{\left( t^{(0)} - t + \frac{\varrho r^2}{4\mu} \right)^{5/2}}. \quad (7)$$

Man beweist in ähnlicher Weise, daß man eine solche positive Größe  $B$  angeben kann, daß, für  $r \geq 0, t^{(0)} - t \geq 0$ :

$$\left| \frac{\partial t_{jk}}{\partial x_l} \right| < \frac{B}{r \left( t^{(0)} - t + \frac{\varrho r^2}{4\mu} \right)^{3/2}}. \quad (8)$$

## 74. Lösung der Integralgleichungen durch Reihen.

In den Gleichungen (3) führen wir einen Parameter  $\lambda$  ein und schreiben sie folgendermaßen:

$$\left. \begin{aligned} 4\pi\sqrt{\pi\mu\varrho}u_k(P^{(0)}, t^{(0)}) &= \varrho \int_{-\infty}^{\infty} (u_j * t_{jk})_{t=T} d\omega + \\ &+ \varrho \int_T^{t^{(0)}} dt \int_{-\infty}^{\infty} X_j t_{jk} d\omega - \lambda \varrho \int_T^{t^{(0)}} dt \int_{-\infty}^{\infty} u_m \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_m} - \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) t_{jk} d\omega, \\ q(P^{(0)}, t^{(0)}) &= \frac{\varrho}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} d\omega - \frac{\lambda \varrho}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_m \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_m} - \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Wir versuchen diese Integralgleichungen für  $u_j$  und  $q$  durch Reihen zu lösen, welche nach Potenzen von  $\lambda$  fortschreiten. Wir setzen also:

$$u_j = \sum_0^{\infty} {}_{(n)} \lambda^n u_j^{(n)}, \quad q = \sum_0^{\infty} {}_{(n)} \lambda^n q^{(n)}. \quad (10)$$

Einsetzen dieser Reihen in (9) gibt sofort:

$$\left. \begin{aligned} 4\pi\sqrt{\pi\mu\varrho}u_k^{(0)}(P^{(0)}, t^{(0)}) &= \varrho \int_{-\infty}^{\infty} (u_j * t_{jk})_{t=T} d\omega + \varrho \int_T^{t^{(0)}} dt \int_{-\infty}^{\infty} X_j t_{jk} d\omega, \\ q^{(0)}(P^{(0)}, t^{(0)}) &= \frac{\varrho}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} d\omega; \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} 4\pi\sqrt{\pi\mu\varrho}u_k^{(1)}(P^{(0)}, t^{(0)}) &= -\varrho \int_T^{t^{(0)}} dt \int_{-\infty}^{\infty} u_m^{(0)} \left( \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_m} - \frac{\partial u_m^{(0)}}{\partial x_j} \right) t_{jk} d\omega, \\ q^{(1)}(P^{(0)}, t^{(0)}) &= -\frac{\varrho}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_m^{(0)} \left( \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_m} - \frac{\partial u_m^{(0)}}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} d\omega; \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} 4\pi\sqrt{\pi\mu\varrho}u_k^{(2)}(P^{(0)}, t^{(0)}) &= -\varrho \int_T^{t^{(0)}} dt \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ u_m^{(1)} \left( \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_m} - \frac{\partial u_m^{(0)}}{\partial x_j} \right) + \right. \\ &\quad \left. + u_m^{(0)} \left( \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_m} - \frac{d u_m^{(1)}}{\partial x_j} \right) \right\} t_{jk} d\omega, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} q^{(2)}(P^{(0)}, t^{(0)}) &= -\frac{\varrho}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ u_m^{(1)} \left( \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_m} - \frac{\partial u_m^{(0)}}{\partial x_j} \right) + \right. \\ &\quad \left. + u_m^{(0)} \left( \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_m} - \frac{\partial u_m^{(1)}}{\partial x_j} \right) \right\} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} d\omega \end{aligned} \right\}$$

usw.

Nach unserer Voraussetzung ist die Bewegung im Moment  $t = T$  regulär. Die Ungleichung (7) zeigt unter diesen Umständen sofort, daß das erste Integral rechts in (11) konvergent ist und also einen bestimmten Sinn hat. Wegen der Ungleichung (1) haben auch die übrigen Integrale rechts in (11) einen bestimmten Sinn. Man kann ferner zeigen, daß die durch (11) definierte Strömung  $u_j^{(0)}, q^{(0)}$  für  $t \geq T$  regulär ist. Aus diesen Ergebnissen folgt wiederum, daß die Integrale rechts in (12) einen bestimmten Sinn haben und daß die durch (12) definierte Bewegung  $u_j^{(1)}, q^{(1)}$  ebenfalls für  $t > T$  regulär ist. So kann man fortfahren und zeigen, daß für jedes ganzzahlige nicht negative  $n$  die Funktionen  $u_j^{(n)}, q^{(n)}$  existieren und eine reguläre Strömung definieren.

In bezug auf die Konvergenz der Reihen (10) lehren die Integralabschätzungen, welche den Beweis der oben mitgeteilten Ergebnisse ergeben, daß es eine solche positive Größe  $\tau$  gibt, daß die beiden Reihen unbedingt und gleichmäßig konvergieren, wenn:

$$0 \leq |\lambda|^2(t - T) \leq \tau.$$

Wenn wir  $0 \leq t - T \leq \tau$  annehmen, können wir  $\lambda = 1$  setzen. Die Reihen (10) geben uns dann eine Lösung unseres Problems. Wir haben also den Satz gewonnen:

Wenn im Moment  $\tau = T$  eine reguläre Bewegung einer den ganzen Raum erfüllenden zähen Flüssigkeit vorgeschrieben ist, so gibt es stets eine in einem Intervall  $T \leq t \leq T + \tau$  reguläre Bewegung der Flüssigkeit, welche im Moment  $t = T$  mit der vorgeschriebenen Bewegung übereinstimmt.

Man kann zeigen, daß es nur *eine* reguläre Bewegung mit diesen Eigenschaften geben kann.

Wenn wir das Verhalten der Flüssigkeit in unendlicher Ferne durch die Vorschrift bestimmen, daß für genügend großes  $R$  stets die Bedingungen (2) erfüllt sein sollen, so können wir unser Ergebnis auch in der Form aussprechen:

Wenn die Bewegung einer den ganzen Raum erfüllenden zähen Flüssigkeit in einem Moment  $t = T$  regulär ist, so gibt es stets ein Intervall  $T \leq t \leq T + \tau$ , innerhalb dessen die Bewegung regulär bleibt.

## 75. Fortführung der Berechnung der regulären Bewegung.

Wir gehen von einem Moment  $t = T$  aus und nehmen an, daß in diesem Moment die Bewegung der Flüssigkeit regulär ist. Es gibt dann ein Intervall  $T \leq t \leq T + \tau$ , innerhalb dessen die Bewegung regulär

bleibt und für welches wir sie berechnen können. Wir kennen also die Bewegung im Momente  $T + \tau$ . Sie ist regulär. Es gibt dann ein neues Intervall  $T + \tau_1 \leq t \leq T + \tau_1 + \tau_2$ , innerhalb dessen die Bewegung regulär bleibt und also der Berechnung zugänglich ist. So können wir fortsetzen. Wir erhalten eine unendliche Reihe von positiven Zahlen  $\tau_1, \tau_2, \dots$ . Zwei Fälle sind jetzt möglich. Wenn die Reihe:

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \dots \quad (14)$$

divergiert, dann bleibt die Flüssigkeit für  $t > T$  stets regulär und kann für ein beliebiges  $t (> T)$  berechnet werden. Wenn dagegen die Reihe konvergiert, dann gibt es einen Moment:

$$t = T + \tau_1 + \tau_2 + \dots,$$

in welchem die Bewegung aufhört regulär zu sein.

Es ist nicht gelungen zu zeigen, daß die Reihe (14) stets divergent ist. Wir müssen also damit rechnen, daß sie, wenigstens unter gewissen Umständen, konvergent ist. So werden wir zu der Frage geführt, was dann geschieht, wenn die Bewegung einer Flüssigkeit aufhört regulär zu sein. Wir können unsere Frage auch so formulieren: welcher Art sind die Singularitäten, die in der Bewegung einer zähen Flüssigkeit auftreten können?

## 76. Analyse der Singularitäten, welche in der Bewegung einer den ganzen Raum erfüllenden Flüssigkeit auftreten können.

### Der Hauptsatz.

Im Momente  $t = T$  sei die Bewegung der Flüssigkeit regulär. Es gibt dann ein Intervall  $T \leq t < T_1$ , in welchem die Bewegung ebenfalls regulär ist. Wir nehmen an, daß  $T_1$  die Grenze dieses Intervalls ist, so daß es kein Intervall  $T \leq t < T_1 + \tau (\tau > 0)$  gibt, in welchem die Bewegung regulär ist. Wir wollen untersuchen, was sich über die Bewegung der Flüssigkeit im Momente  $t = T_1$  aussagen läßt und setzen dabei voraus, daß die äußere Kraft stets der Bedingung (1) genügt.

Die reguläre Bewegung ist dadurch gekennzeichnet, daß jedem Raum-Zeit-Punkte  $x_1, x_2, x_3, t$  bestimmte Geschwindigkeitskomponenten  $u_i$  und ein bestimmter Druck  $p$  zugeordnet werden können und daß diese Geschwindigkeitskomponenten, die Ableitungen derselben nach  $x_1, x_2, x_3$  sowie der Druck (bzw. die Funktion  $q$ ) Ungleichungen von der Form (2) genügen. Wenn die Bewegung bei  $t = T_1$  aufhört regulär zu sein, so muß es sich also entweder so verhalten, daß, wenn  $t$  sich dem Werte  $T_1$  nähert, in gewissen Punkten oder vielleicht ge-

wissen Teilen der Flüssigkeit eine Geschwindigkeitskomponente  $u_j$  oder der Druck  $p$  nicht gegen bestimmte Grenzwerte konvergieren, oder so, daß zwar diese Grenzwerte existieren, aber nicht Ungleichungen von der Form (2) genügen.

Von den verschiedenen Arten von Singularitäten, welche nach dem obigen als möglich erscheinen, können wir sofort einige ausschließen. Wenn bei  $t \rightarrow T_1$  die Größen  $u_j$  gegen bestimmte, in bezug auf  $x_1, x_2, x_3$  stetig differenzierbare Funktionen konvergieren und wenn diese Funktionen und ihre Ableitungen den zwei ersten Ungleichungen (2) genügen, dann hat nach der letzten Formel (3) die Funktion  $q$  — und somit auch  $p$  — in jedem Punkte  $x_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) für  $t = T_1$  einen bestimmten Wert, und dieser Wert genügt, wie wir schon oben erwähnt haben, und wie sich leicht direkt zeigen läßt, einer Ungleichung von der in (2) vorkommenden Form. Eine Singularität, welche nur den Druck betrifft, kann nicht vorkommen. Jede Singularität ist auch eine Singularität für die Geschwindigkeitskomponenten oder für ihre Ableitungen.

Wir wollen jetzt zeigen, daß das Wesen einer Singularität — wenigstens wenn sie im Endlichen liegt — darin besteht, daß der Wirbelvektor unendlich groß wird. Wir wollen, präziser ausgedrückt, den folgenden Satz beweisen:

Wenn im Intervalle  $T \leq t < T_1$  der Wirbelvektor  $\bar{u} = \text{rot } u$  einer Ungleichung von der Form:

$$|\text{rot } u| = \sqrt{\bar{u}_j^2} < \frac{W}{(1 + \beta R)^{1+\alpha}} \quad (15)$$

genügt, wo  $W$  und  $\alpha$  positive Konstanten sind, so ist die Bewegung der Flüssigkeit im Momente  $t = T_1$  regulär.

Dieser Satz ist der Hauptsatz unserer Theorie der Singularitäten.

## 77. Erster Teil des Beweises des Hauptsatzes. Ausdruck der Geschwindigkeitskomponenten durch die Wirbelkomponenten. Abschätzung derselben.

Um unseren Satz zu beweisen, wollen wir zunächst die Geschwindigkeitskomponenten  $u_j$  durch die Komponenten des Wirbelvektors:

$$\bar{u}_1 = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \bar{u}_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \bar{u}_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad (16)$$

ausdrücken. Die Gleichungen (16) können als ein System von partiellen Differentialgleichungen für  $u_1, u_2, u_3$  aufgefaßt werden. Aus diesem System, der Kontinuitätsbedingung:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

und der Nebenbedingung  $u_j = 0$  ( $j = 1, 2, 3$ ) in unendlicher Ferne können wir für  $T \leq t < T_1$  die Größen  $u_j$  bestimmen. Wir machen für  $\mathbf{u}$  den Ansatz:

$$\mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{F} + \operatorname{grad} \varphi. \quad (17)$$

Wegen der Kontinuitätsbedingung muß dabei:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi = 0 \quad (18)$$

sein. Aus (17) folgt andererseits:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F} - \Delta \mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}.$$

Wir schreiben vor, daß überall:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = 0 \quad (19)$$

sein soll. Zur Bestimmung von  $\mathbf{F}$  erhalten wir dann die Gleichung:

$$\Delta \mathbf{F} = -\bar{\mathbf{u}}.$$

Wir lösen sie durch den Ansatz:

$$\mathbf{F}(x) = \frac{1}{4\pi} \int \bar{\mathbf{u}}(x^{(0)}) \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R^{(0)}} \right) d\omega^{(0)}, \quad (20)$$

$$r^2 = (x_j - x_j^{(0)})^2, r \geqq 0; R^{(0)2} = x_j^{(0)2}, R^{(0)} \geqq 0;$$

$$d\omega^{(0)} = dx_1^{(0)} dx_2^{(0)} dx_3^{(0)}.$$

Die rechte Seite von (20) hat einen bestimmten Sinn, wenn die Ungleichung (15) erfüllt ist. Dies ist, wegen der Voraussetzung  $T \leq t < T_1$ , der Fall.

Wir haben jetzt zu prüfen, ob die Gleichung (19) erfüllt ist. Um zu beweisen, daß dies tatsächlich der Fall ist, zeigen wir, daß, wie klein auch die positive Größe  $\delta$  gewählt wird, stets:

$$|\operatorname{div} \mathbf{F}| < \delta$$

ist. Wir haben in der Tat:

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x) = -\frac{1}{4\pi} \int \bar{u}_j(x^{(0)}) \frac{\partial}{\partial x_j^{(0)}} \frac{1}{r} d\omega^{(0)}.$$

Denjenigen Teil des Integrals rechts, der sich auf das Innere einer Kugel  $R^{(0)} = R^*$  bezieht, formen wir durch partielle Integration um. Wir erhalten wegen der Beziehung:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} &= 0: \\ \operatorname{div} \mathbf{F}(x) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{R^{(0)} > R^*} \bar{u}_j(x^{(0)}) \frac{\partial}{\partial x_j^{(0)}} \frac{1}{r} d\omega^{(0)} - \frac{1}{4\pi} \int_{R^{(0)} = R^*} \bar{u}_j x_j^{(0)} \frac{dS}{r R^{(0)}}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Wir wählen  $R^*$  so groß, daß:

$$x_j^2 = R^2 < R^{*2}.$$

Im ersten Integral ist dann:

$$r \geq R^{(0)} - R.$$

Der absolute Betrag des ersten Gliedes rechts in (21) ist also, wegen (15), kleiner als:

$$3 W \int_{R^*}^{\infty} \frac{R^{(0)2} dR^{(0)}}{(1 + \beta R^{(0)})^{1+\alpha} (R^{(0)} - R)^2}. \quad (22)$$

Der absolute Betrag des zweiten Gliedes rechts in (21) ist kleiner als:

$$\frac{3 W R^{*2}}{(R^* - R)(1 + \beta R^*)^{1+\alpha}}. \quad (23)$$

Die Ausdrücke (22) und (23) konvergieren beide bei wachsendem  $R^*$  gegen Null. Wir können also  $R^*$  so groß wählen, daß die Summe von (22) und (23) kleiner als  $\delta$  wird. Damit haben wir die Ungleichung:

$$|\operatorname{div} \mathbf{F}| < \delta$$

bewiesen. Da diese Ungleichung gültig ist, wie klein wir auch die positive Größe  $\delta$  wählen, so folgt:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 0. \quad (19)$$

Daß andererseits:

$$\Delta \mathbf{F} = -\bar{\mathbf{u}}$$

ist wohl bekannt.

Der Ansatz:

$$\mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{F}$$

gibt uns eine partikuläre Lösung des Systems (16) sowie der Kontinuitätsgleichung. Die allgemeine Lösung gibt der Ansatz (17) mit der daraus folgenden Gleichung (18). Unsere Aufgabe ist jetzt, die Potentialfunktion  $\varphi$  zu bestimmen. Dazu müssen wir die Randbedingungen:  $u_j = 0$  in unendlicher Ferne benutzen.

Wir haben, wenn wir mit  $\mathbf{r}$  den Vektor mit den Komponenten  $x_j - x_j^{(0)}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) bezeichnen und wenn wir unter  $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$  das vektorielle Produkt der beiden Vektoren  $\mathbf{v}_1$  und  $\mathbf{v}_2$  verstehen:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\infty} \frac{\mathbf{r} \times \bar{\mathbf{u}}(x^{(0)})}{r^3} d\omega^{(0)}.$$

Wir schließen hieraus:

$$|\operatorname{rot} F| < \frac{3W}{2\pi} \int_{\infty}^{\frac{R}{2}} \frac{d\omega^{(0)}}{(1 + \beta R^{(0)})^{1+\alpha} r^2}. \quad (24)$$

Wir wollen das in der rechten Seite von (24) vorkommende Integral abschätzen. Wir zerlegen es zu diesem Zwecke in drei Teile.  $J_1$  sei derjenige Teil des Integrals, der dem Inneren der Kugel  $R^{(0)} = R/2$  entspricht,  $J_2$  der Teil, der von dem Zwischenraume zwischen den beiden Kugeln  $R^{(0)} = R/2$  und  $R^{(0)} = 3R/2$  herröhrt, endlich  $J_3$  der Teil, den man aus dem Bereich  $R^{(0)} > 3R/2$  erhält. Wir haben dann in  $J_1$ :

$$r \geq \frac{R}{2}.$$

Also:

$$J_1 < \frac{4}{R^2} \int_0^{\frac{R}{2}} \frac{4\pi R^{(0)2} dR^{(0)}}{(1 + \beta R^{(0)})^{1+\alpha}} < \frac{16\pi}{\beta^{1+\alpha} R^2} \int_0^{\frac{R}{2}} R^{(0)(1-\alpha)} dR^{(0)}.$$

Wenn die Ungleichung (15) für ein gewisses  $\alpha$  erfüllt ist, ist sie es um so mehr für ein kleineres  $\alpha$ . Es ist also stets erlaubt anzunehmen, daß  $\alpha < 2$  ist. Wir haben unter dieser Voraussetzung:

$$J_1 < \frac{16\pi}{2^{2-\alpha}(2-\alpha)\beta^{1+\alpha} R^\alpha}.$$

In  $J_2$  besteht die Ungleichung:

$$R^{(0)} \geq \frac{R}{2}.$$

Folglich:

$$J_2 < \frac{2^{1+\alpha}}{(\beta R)^{1+\alpha}} \int_0^{\frac{5R}{2}} \frac{4\pi r^2 dr}{r^2} = \frac{2^{1+\alpha} \cdot 10\pi}{\beta^{1+\alpha} R^\alpha}.$$

Wir haben endlich:

$$J_3 < 4\pi \int_{\frac{3R}{2}}^{\infty} \frac{R^{(0)2} dR^{(0)}}{(1 + \beta R^{(0)})^{1+\alpha} (R^{(0)} - R)^2}.$$

Für  $\frac{3R}{2} \leq R^{(0)} < \infty$  gilt die Ungleichung:

$$\frac{R^{(0)}}{R^{(0)} - R} = 1 + \frac{R}{R^{(0)} - R} \leq 3.$$

Folglich:

$$J_3 < \frac{36\pi \cdot 2^\alpha}{3^\alpha \beta^{1+\alpha} \cdot \alpha R^\alpha}.$$

Unsere Abschätzungen von  $J_1, J_2, J_3$  zeigen, daß man eine solche positive Zahl  $C$  bestimmen kann, daß:

$$|\operatorname{rot} \mathbf{F}| < \frac{C W}{(\beta R)^\alpha}. \quad (25)$$

Wir kehren zur Gleichung (17) zurück. Wenn der Punkt  $x_1, x_2, x_3$  sich ins Unendliche entfernt, so wächst  $R = \sqrt{x_j^2}$  über alle Grenzen. Nach unserer Annahme konvergiert dabei der Vektor  $\mathbf{u}$  gegen Null. Nach (25) konvergiert ebenfalls  $\operatorname{rot} \mathbf{F}$  gegen Null. Wir schließen hieraus, daß auch  $\operatorname{grad} \varphi$  gegen Null konvergieren muß. Nun genügen die Komponenten dieses Vektors nach (18) der Laplaceschen Gleichung. Sie können also nirgends Maxima oder Minima haben. Wenn sie im Unendlichen verschwinden, müssen sie deshalb überall verschwinden.

Wir haben also:

$$\operatorname{grad} \varphi = 0$$

und folglich:

$$\mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{F} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\infty} \frac{\mathbf{r} \times \bar{\mathbf{u}}(x^{(0)})}{r^3} d\omega^{(0)}. \quad (26)$$

Die Formel (26) drückt die Geschwindigkeitskomponenten durch die Wirbelkomponenten aus.

Wir betrachten jetzt die Funktion:

$$(1 + \beta R)^\alpha |\operatorname{rot} \mathbf{F}|. \quad (27)$$

Die Ungleichung (25) lehrt, daß diese positive Funktion kleiner als:

$$CW \left(1 + \frac{1}{\beta R}\right)^\alpha$$

ist. Wenn  $\bar{R}$  eine beliebige Länge ist, so haben wir also für  $R > \bar{R}$ :

$$(1 + \beta R)^\alpha |\operatorname{rot} \mathbf{F}| < CW \left(1 + \frac{1}{\beta \bar{R}}\right)^\alpha.$$

Andererseits ist die Funktion (27) für  $R < \bar{R}$  offenbar stetig und hat also in diesem Bereich einen endlichen größten Wert, etwa  $M(\bar{R}) \cdot W$ . Wenn  $D$  die größere der beiden Zahlen:

$$C \left(1 + \frac{1}{\beta \bar{R}}\right)^\alpha \text{ und } M(\bar{R})$$

ist, so haben wir also überall:

$$|\operatorname{rot} \mathbf{F}| < \frac{DW}{(1 + \beta R)^\alpha}.$$

Also (für  $T \leqq t < T_1$ ):

$$|u_j| \leqq \sqrt{(u_j)^2} = |\operatorname{rot} \mathbf{F}| < \frac{DW}{(1 + \beta R)^\alpha}. \quad (28)$$

### 78. Durchführung des Beweises des Hauptsatzes. Die Bedeutung desselben.

Wir haben angenommen, daß die Bewegung im Intervalle  $T \leq t < T_1$  regulär ist. Überdies haben wir angenommen, daß der Wirbelvektor in diesem Intervalle der Bedingung (15) mit festen Werten von  $W$  und  $\alpha$  genügt. Wir haben gesehen, daß aus dieser Bedingung die Ungleichung (28) für die Geschwindigkeit folgt. Ob die Größen  $\bar{u}_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) beim Grenzübergange  $t \rightarrow T_1$  gegen bestimmte Grenzwerte konvergieren, wissen wir nicht. Ebensowenig wissen wir, ob die Geschwindigkeitskomponenten  $u_j$  bei demselben Grenzübergange gegen bestimmte Grenzwerte konvergieren. Wir wissen aber, daß die Ungleichungen (15) und (28) mit festen Werten von  $W, \alpha$  und  $D$  im ganzen Intervalle  $T \leq t < T_1$  erfüllt sind.

Um weiter zu kommen, müssen wir die Integralgleichungen (3) benutzen. Sie sind im Intervalle  $T \leq t < T_1$  gültig. Wir betrachten die erste dieser Integralgleichungen und wollen in der rechten Seite jener Gleichung den Grenzübergang  $t^{(0)} \rightarrow T_1$  ausführen. Wir behaupten, daß sie bei diesem Grenzübergang gegen einen bestimmten Grenzwert konvergiert. Daß diese Behauptung für die Glieder:

$$\varrho \int_{-\infty}^{\omega} (u_j * t_{jk})_{t=T} d\omega \quad \text{und} \quad \varrho \int_T^{t^{(0)}} dt \int_{-\infty}^{\omega} X_j t_{jk} d\omega$$

zutrifft, bedarf keines besonderen Beweises. Was wir zu beweisen haben, ist also nur, daß bei  $t^{(0)} \rightarrow T_1$  die Integrale:

$$\varrho \int_T^{t^{(0)}} dt \int_{-\infty}^{\omega} u_m \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_m} - \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) t_{jk} d\omega$$

gegen bestimmte Grenzwerte konvergieren. Um diesen Beweis zu führen, genügt es wiederum, zu zeigen, daß die absoluten Beträge der Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} & \varrho \int_T^{T_1-\delta} dt \int_{-\infty}^{\omega} u_m \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_m} - \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) t_{jk} (x, t; x^{(0)}, T_1 - \delta) d\omega - \\ & - \varrho \int_T^{T_1-\varepsilon} dt \int_{-\infty}^{\omega} u_m \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_m} - \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) t_{jk} (x, t; x^{(0)}, T_1 - \varepsilon) d\omega, \end{aligned} \right\} (29)$$

wo  $\varepsilon > \delta > 0$  ist, gleichzeitig mit  $\varepsilon$  gegen Null konvergieren. Dies ist aber leicht durchzuführen. Wir schreiben unsere Ausdrücke in der

folgenden Form, worin wir unter  $\gamma$  eine positive Größe verstehen, die größer als  $\varepsilon$  ist, die wir aber sonst beliebig klein wählen können:

$$\left. \begin{aligned} & \varrho \int_{T_1 - \gamma}^{T_1 - \delta} dt \int_{-\infty} u_m \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_m} - \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) t_{jk}(x, t; x^{(0)}, T_1 - \delta) d\omega - \\ & - \varrho \int_{T_1 - \gamma}^{T_1 - \varepsilon} dt \int_{-\infty} u_m \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_m} - \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) t_{jk}(x, t; x^{(0)}, T_1 - \varepsilon) d\omega + \\ & + \varrho \int_T^{T_1 - \gamma} dt \int_{-\infty} u_m \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_m} - \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) \{t_{jk}(x, t; x^{(0)}, T_1 - \delta) - \\ & - t_{jk}(x, t; x^{(0)}, T_1 - \varepsilon)\} d\omega. \end{aligned} \right\} (30)$$

Das erste Glied ist wegen (7), (15), (28) dem absoluten Betrage nach kleiner als:

$$\begin{aligned} & 6 \varrho A D W^2 \int_{T_1 - \gamma}^{T_1 - \delta} dt \int_{-\infty} \frac{d\omega}{(1 + \beta R)^{1+2\alpha} \left( T_1 - \delta - t + \frac{\varrho r^2}{4\mu} \right)^{\frac{1}{2}}} < \\ & < 24 \mu A D W^2 \int_{T_1 - \gamma}^{T_1 - \delta} \frac{dt}{\sqrt{T_1 - \delta - t}} \int_{-\infty} \frac{d\omega}{(1 + \beta R)^{1+\alpha} r^2} = \\ & = 48 \mu A D W^2 \sqrt{\gamma - \delta} \int \frac{d\omega}{(1 + \beta R)^{1+\alpha} r^2}. \end{aligned}$$

In 7,7 haben wir gesehen, daß:

$$\frac{3}{2\pi} \int \frac{d\omega_0}{(1 + \beta R^{(0)})^{1+\alpha} r^2} < \frac{D}{(1 + \beta R)^\alpha}.$$

Wir schließen hieraus, da  $R^2 = x_j^2$ ,  $R^{(0)2} = x_j^{(0)2}$ ,  $r^2 = (x_j - x_j^{(0)})^2$ , daß:

$$\frac{3}{2\pi} \int \frac{d\omega}{(1 + \beta R)^{1+\alpha} r^2} < \frac{D}{(1 + \beta R^{(0)})^\alpha}.$$

Da außerdem  $\sqrt{\gamma - \delta} \leq \sqrt{\gamma}$  ist, so sehen wir, daß das erste Glied des Ausdrückes (30) kleiner als:

$$\frac{32\pi\mu A D^2 W^2}{(1 + \beta R^{(0)})^\alpha} \sqrt{\gamma}$$

ist. Der absolute Betrag des zweiten Gliedes in (30) genügt derselben Ungleichung. Im letzten Gliede von (30) ist der Faktor:

$$t_{jk}(x, t; x^{(0)}, T_1 - \delta) - t_{jk}(x, t; x^{(0)}, T_1 - \varepsilon)$$

des Integranden eine im ganzen Integrationsbereiche stetige und beliebig oft stetig differenzierbare Funktion aller darin vorkommenden Veränderlichen. Dieser Faktor konvergiert gegen Null gleichzeitig mit  $\varepsilon - \delta$ . Eine nähere Betrachtung, die sehr einfach ist, die wir aber hier nicht ausführen wollen, zeigt, daß bei beliebigen  $x_1, x_2, x_3$ , das dritte Glied des Ausdrucks (30), bei festem  $\gamma$ , gleichzeitig mit  $\varepsilon - \delta$  verschwindet. Wenn nun  $\delta^*$  eine beliebig kleine positive Größe ist, so können wir  $\gamma$  so klein wählen, daß die Summe der absoluten Beträge der beiden ersten Glieder in (30) kleiner als  $\frac{2}{3} \delta^*$  ausfällt. Wir können dann  $\varepsilon$  und  $\delta$  ( $0 < \delta < \varepsilon < \gamma$ ) so klein wählen, daß das letzte Glied in (30) dem absoluten Betrage nach  $\delta$  kleiner als  $\frac{1}{3} \delta^*$  ist. Wie klein auch  $\delta^*$  ist, wir können also  $\varepsilon$  und  $\delta$  ( $0 < \delta < \varepsilon$ ) so klein wählen, daß der Ausdruck (29) dem absoluten Betrage nach kleiner als  $\delta^*$  ist. Damit ist bewiesen, daß die Größen  $u_k(P^{(0)}, t^{(0)})$ , welche durch die erste Gleichung (3) definiert werden, bei  $t^{(0)} \rightarrow T_1$  gegen bestimmte Grenzwerte konvergieren.

Man beweist in ähnlicher Weise, indem man sich diesmal auf die Ungleichungen (8) stützt, daß die Ableitungen:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_l} \quad (k, l = 1, 2, 3)$$

bei  $t \rightarrow T_1$  gegen bestimmte Grenzwerte konvergieren.

Sowohl für die Geschwindigkeitskomponenten wie für ihre Ableitungen nach  $x_1, x_2, x_3$  kann man beweisen — die oben dargelegten Hilfsmittel reichen hierzu vollkommen aus — daß die Konvergenz gegen die Grenzwerte im ganzen Raum gleichmäßig ist. Daraus folgt, daß die Größen  $u_k$  bei  $t = T_1$  stetige und in bezug auf  $x_1, x_2, x_3$  einmal stetig differenzierbare Funktionen sind und daß die Ableitungen  $\frac{\partial u_k(T_1)}{\partial x_l}$  dieser Funktionen die Grenzwerte sind, gegen welche die

Größen  $\frac{\partial u_k(t)}{\partial x_l}$  bei  $t \rightarrow T_1$  konvergieren.

Aus der ersten Gleichung (3) folgt nun weiter wegen (7), (15) und (28), daß für  $t = T_1$ ,  $u_j$  und  $\frac{\partial u_j}{\partial x_k}$  Ungleichungen von der in (2) angegebenen Form genügen. Aus der zweiten Gleichung (3) folgt schließlich, daß  $q$  für  $t = T_1$  eine stetige Funktion von  $x_1, x_2, x_3$  ist, welche einer Ungleichung von der in (2) angegebenen Form genügt.

Unser Hauptsatz ist hiermit bewiesen. Er sagt aus, daß die Singularitäten, welche in der Bewegung einer zähen Flüssigkeit auftreten können, wesentlich Singularitäten der Wirbel sind. Wenn in einem

Momente  $T_1$  die Bewegung einer zähen, den ganzen Raum erfüllenden Flüssigkeit aufhört regulär zu sein, so heißt das nach unserem Hauptsatze entweder, daß der Wirbelvektor irgendwo im Momente  $t = T_1$  unendlich groß wird, oder daß die Wirbelbewegung sich so ins Unendliche ausgebreitet hat, daß, wie klein die positive Größe  $\alpha$  auch gewählt wird, doch der größte Wert der Funktion:

$$(1 + \beta R)^{1+\alpha} |\operatorname{rot} \mathbf{u}|$$

im Raume bei  $t \rightarrow T_1$  ins Unendliche wächst.

Über die Bedeutung unseres Hauptsatzes wollen wir an dieser Stelle folgendes sagen. Nach der klassischen Hydrodynamik, welche von vornherein die Zähigkeit vernachlässigt, können in einer Flüssigkeit niemals Wirbel entstehen. Andererseits muß auch diese Theorie, um mit den Tatsachen einigermaßen in Übereinstimmung zu kommen, annehmen, daß Wirbel existieren. Meistens nimmt man an, daß der Wirbelvektor längs einzelner Wirbelfäden unendlich groß ist. Unser Hauptsatz eröffnet die Aussicht zu einer Theorie der Entstehung solcher Wirbelfäden.

Auch von einem anderen Gesichtspunkte aus scheint es verlohnend, die Singularitäten in der Bewegung einer zähen Flüssigkeit einem näheren Studium zu unterwerfen. Wenn Singularitäten auftreten können, dann müssen wir offenbar zwei Arten von Bewegungen einer zähen Flüssigkeit unterscheiden, die regulären Bewegungen, d. h. die Bewegungen ohne Singularitäten, und die irregulären Bewegungen, d. h. die Bewegungen mit Singularitäten. Nun unterscheidet man andererseits in der Hydraulik zwei Arten von Bewegungen, die laminaren und die turbulenten Bewegungen. Es liegt nahe zu vermuten, daß die experimentellen „laminaren“ Bewegungen mit den theoretischen „regulären“, die experimentellen „turbulenten“ Bewegungen mit den theoretischen „irregulären“ Bewegungen identisch sind. Ob diese Vermutung der Wahrheit entspricht, kann freilich erst durch weitere Untersuchungen entschieden werden.

## § 8. Einfachste Beispiele von Wirbelbewegungen in einer zähen Flüssigkeit.

### 81. Zirkulation um einen geradlinigen Wirbelfaden.

Wir behandeln das folgende Problem. In einer Flüssigkeit, welche den ganzen Raum erfüllt, sei in einem gewissen Momente, etwa  $t = 0$ ,  $u_3$  überall gleich Null. Ebenso sollen für  $t = 0$  überall:

$$\bar{u}_1 = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \quad \bar{u}_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3}$$

gleich Null sein. Dagegen soll:

$$\bar{u}_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

im Innern des Zylinders  $R^2 = x_1^2 + x_2^2 = a^2$  eine stetige und stetig differenzierbare nirgends verschwindende Funktion von  $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  sein. Für  $R \geq a$  soll  $\bar{u}_3 = 0$  sein. Die Bewegung der Flüssigkeit ist also im Anfangsmomente eine Helmholtzsche Wirbelbewegung um einen zylindrischen Wirbel. Wir wollen untersuchen, welche Bewegung sich aus diesem Anfangszustande entwickelt.

Wir gehen bei unserer Untersuchung von Formel (31) S. 55 aus. Sie wurde aus dem System (5, 30) abgeleitet. Wenn wir in (5, 30):

$$X_j = -u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \quad (j, k = 1, 2)$$

setzen, so geht dieses System in die vollständigen hydrodynamischen Differentialgleichungen (jedoch ohne äußere Kräfte) für den zweidimensionalen Fall über. Wir können aber dasselbe Ziel auch dadurch erreichen, daß wir:

$$X_1 = u_2 \bar{u}_3, \quad X_2 = -u_1 \bar{u}_3, \quad \left( \bar{u}_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$$

setzen und gleichzeitig  $p$  durch  $p + \frac{1}{2} \varrho (u_1^2 + u_2^2) = q$  ersetzen. Wir legen also unserer Untersuchung das folgende System zugrunde ( $d\omega = dx_1 dx_2$ ):

$$\begin{aligned} 2\pi \varrho u_k (P^{(0)}, t^{(0)}) &= \varrho \int_{B(T)} (u_j t_{jk})_t \Big|_T d\omega + \varrho \int_T^{t^{(0)}} dt \int_{B(t)} (u_2 t_{1k} - u_1 t_{2k}) \bar{u}_3 d\omega - \\ &\quad - \int_T^{t^{(0)}} dt \int_{K(t)} \left\{ \mu u_j \frac{dt_{jk}}{dn} - t_{jk} \left( \mu \frac{du_j}{dn} - q n_j + \varrho U_n u_j \right) \right\} ds + \\ &\quad + \varrho \int_{K(t^{(0)})} (u_j n_j)_t \frac{x_k - x_k^{(0)}}{r^2} ds, \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} (1)$$

$$t_{jk} = \delta_{jk} \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k}, \quad \Phi = \int_r^\infty e^{-\frac{\varrho a^2}{4\mu(t^{(0)}-t)}} \frac{da}{a} - \log \frac{1}{r}.$$

$$(j, k = 1, 2)$$

Wir nehmen an, daß im Intervalle  $T \leq t \leq t^{(0)}$  die Größen  $u_j$  und ihre Ableitungen den folgenden Ungleichungen genügen:

$$\left. \begin{aligned} |u_j| &< \frac{U}{(1 + \beta R)^\alpha}, \quad \left| \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right| < \frac{\beta U}{(1 + \beta R)^{1+\alpha}}, \\ |p|, \quad |q| &< \frac{P}{(1 + \beta R)^\alpha}, \quad \alpha > 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Wir wenden das System (1) auf das Innere eines Kreises an, dessen Radius wir nachträglich ins Unendliche wachsen lassen. Wegen (2) konvergieren die Kurvenintegrale in (1) dabei gegen Null und wir erhalten, indem wir  $T = 0$  setzen:

$$2\pi u_k(P^{(0)}, t^{(0)}) = \int_{-\infty}^{\infty} (u_j t_{jk})_{t=0} d\omega + \int_0^{t^{(0)}} dt \int_{-\infty}^{\infty} (u_2 t_{1k} - u_1 t_{2k}) \bar{u}_3 d\omega. \quad (3)$$

Hier ist:

$$t_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}, \quad t_{12} = t_{21} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad t_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}.$$

Die Gleichung (3) läßt sich wesentlich vereinfachen. Partielle Integration ergibt:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (u_j t_{jk})_{t=0} d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \bar{u}_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)_{t=0} d\omega = \int_{R < a} \left( \bar{u}_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)_{t=0} d\omega, \\ \int_{-\infty}^{\infty} (u_j t_{jk})_{t=0} d\omega &= - \int_{R < a} \left( \bar{u}_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)_{t=0} d\omega. \end{aligned}$$

Wir haben ferner, wenn wir die Integration zunächst über ein endliches Gebiet  $\Omega$  mit der Randkurve  $K$  ausdehnen:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u_2 t_{11} - u_1 t_{12}) \bar{u}_3 d\omega &= - \int_{\Omega} \left\{ \bar{u}_3 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + u_1 \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2} \right\} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} d\omega + \int_K u_n \bar{u}_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} ds. \end{aligned} \quad (4)$$

Wegen der Kontinuitätsbedingung müssen wir verlangen, daß:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0,$$

und in der Tat folgt diese Beziehung aus (3). Aus Symmetriegründen ist ferner ersichtlich, daß die Partikel der Flüssigkeit Kreise um die  $x_3$ -Achse beschreiben und daß  $\bar{u}_3$  auch für  $t > 0$  nur von  $R$  abhängen kann. Wir haben folglich:

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 = 0, \quad x_2 \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2} = 0.$$

Also:

$$u_1 \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2} = 0.$$

Das Randintegral in (4) konvergiert gegen Null, wenn die Kurve  $K$  ins Unendliche wächst. Wir haben also:

$$\int_{\infty} (\bar{u}_2 t_{11} - \bar{u}_1 t_{12}) \bar{u}_3 d\omega = 0$$

und finden in derselben Weise:

$$\int_{\infty} (\bar{u}_2 t_{21} - \bar{u}_1 t_{22}) \bar{u}_3 d\omega = 0.$$

Wir erhalten also schließlich aus (3):

$$\left. \begin{aligned} u_1(P^{(0)}, t^{(0)}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{R < a} \left( \bar{u}_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)_{t=0} d\omega = \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{R < a} \bar{u}_3(x_1, x_2, 0) \left( 1 - e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu t}} \right) \frac{x_2^{(0)} - x_2}{r^2} d\omega, \\ u_2(P^{(0)}, t^{(0)}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{R < a} \bar{u}_3(x_1, x_2, 0) \left( 1 - e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu t}} \right) \frac{x_1^{(0)} - x_1}{r^2} d\omega \\ r &= \sqrt{(x_1 - x_1^{(0)})^2 + (x_2 - x_2^{(0)})^2}, \quad d\omega = dx_1 dx_2. \end{aligned} \right\} (5)$$

Für die zugehörige Funktion  $q$  erhält man (aus § 5, 32):

$$q = \frac{\varrho}{2\pi} \int_{\infty} \bar{u}_3 \left( u_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - u_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \log \frac{1}{r} d\omega.$$

Man sieht sofort, daß  $u_1$  und  $u_2$  Ungleichungen von der Form (2) genügen. Man bestätigt ferner ohne Schwierigkeit, daß  $q$  einer Ungleichung von der in (2) angegebenen Form genügt.

Man erhält aus (5) die Helmholtzschen Formeln, wenn man das Glied:

$$e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu t^{(0)}}}$$

wegläßt. Dieses Glied verschwindet in der Tat, wenn  $\mu$  gegen Null konvergiert. Die Helmholtzsche Theorie stellt also tatsächlich die Grenze dar, gegen welche die Bewegung bei  $\mu \rightarrow 0$  konvergiert. Man sieht aber, daß in diesem Falle die Lösung bei Berücksichtigung der Zähigkeit nicht wesentlich komplizierter ist als bei Vernachlässigung der Zähigkeit.

Betrachten wir einen Punkt in der Flüssigkeit, dessen Abstand vom anfänglichen Wirbel groß ist, so haben wir annähernd:

$$r = R, \quad \frac{x_1}{r} = \frac{x_2}{r} = 0.$$

Wir erhalten mit dieser Näherung:

$$\left. \begin{aligned} u_1(x_1, x_2, t) &= -\frac{J_0}{2\pi} \frac{x_2}{R^2} \left(1 - e^{-\frac{\varrho R^2}{4\mu t}}\right), \\ u_2(x_1, x_2, t) &= +\frac{J_0}{2\pi} \frac{x_1}{R^2} \left(1 - e^{-\frac{\varrho R^2}{4\mu t}}\right), \\ R^2 &= x_1^2 + x_2^2, \quad J_0 = \int_{R \leq a} \bar{u}_3(x_1, x_2, 0) d\omega. \end{aligned} \right\} (6)$$

$J_0$  ist das Maß der Intensität des Wirbels bei  $t = 0$ .

Man sieht aus den Formeln (6), daß die Geschwindigkeit, mit der die Partikel ihre kreisförmigen Bahnen um den anfänglichen Wirbel beschreiben, in einem gegen den Durchmesser des anfänglichen Wirbels großen Abstande gleich:

$$\frac{J_0}{2\pi R} \left(1 - e^{-\frac{\varrho R^2}{4\mu t}}\right)$$

ist. Die Zeit, nach welcher diese Geschwindigkeit auf die Hälfte ihres anfänglichen Wertes gesunken ist, wird aus der Gleichung:

$$1 - e^{-\frac{\varrho R^2}{4\mu t}} = \frac{1}{2}$$

bestimmt. Sie ergibt sich zu:

$$t = \frac{\varrho R^2}{2,772 \mu}.$$

Sucht man die Punkte zu bestimmen, für welche die Geschwindigkeit nach den Formeln (6) am größten ist, so bekommt man die Gleichung:

$$1 + \frac{\varrho R^2}{2\mu t} = e^{\frac{\varrho R^2}{4\mu t}}.$$

Der Abstand dieser Punkte vom Mittelpunkte des Wirbels ist also zu  $\sqrt{\frac{\mu t}{\varrho}}$  proportional.

Der Betrag des Wirbelvektors im Abstande  $R$  von der Achse ist:

$$|\bar{u}_3| = \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right| = \frac{\varrho |J_0|}{4\pi\mu t} e^{-\frac{\varrho R^2}{4\mu t}}.$$

Seinen größten Wert hat dieser Vektor also stets im anfänglichen Wirbel oder wenigstens in der Umgebung desselben.

Der qualitative Inhalt der Gleichungen (5) kann folgendermaßen zusammengefaßt werden: vom Zentrum des anfänglichen Wirbels breitet

sich in der Flüssigkeit eine Bewegung aus, deren Rotation überall außerhalb des anfänglichen Wirbels dasselbe Vorzeichen wie dieser hat, deren Geschwindigkeit aber der anfänglichen Geschwindigkeit entgegengesetzt ist.

## 8 2. Zwei parallele, geradlinige Wirbel in einer zähen Flüssigkeit.

Wir haben in dem oben behandelten, exakt lösbarer Falle des einzelnen geradlinigen Wirbelfadens gesehen, daß die Helmholtzsche Theorie die Grenze bildet, gegen welche die Erscheinungen bei  $\mu \rightarrow 0$  konvergieren. In dem jetzt vorliegenden Problem gehen wir deshalb von der Helmholtzschen Theorie als einer ersten Näherung aus. Wir nehmen also in erster Näherung an, daß der Wirbelvektor  $\bar{u}_3^{(0)}$  außerhalb von den beiden Wirbeln überall verschwindet. Im Inneren eines Wirbelfadens soll  $\bar{u}_3^{(0)}$  nur von der Entfernung von der Achse des Wirbelfadens abhängen. Die beiden Wirbelachsen bewegen sich bei dieser Näherung in Kreisen um einen gemeinsamen Mittelpunkt oder, wenn die Intensitäten derselben entgegengesetzt gleich sind, längs zwei paralleler Geraden.

Um nun die Annäherung einen Schritt weiter zu treiben, führen wir in den Formeln (3) rechts für  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $\bar{u}_3$  die Werte  $u_1^{(0)}$ ,  $u_2^{(0)}$ ,  $\bar{u}_3^{(0)}$  ein, welche die Helmholtzsche Theorie für diese Größen gibt. Die so erhaltenen Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} u_k(P^{(0)}, t^{(0)}) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (u_j^{(0)} t_{jk})_{t=0} d\omega + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{t^{(0)}} dt \int_{-\infty}^{\infty} (u_2^{(0)} t_{k_1} - u_1^{(0)} t_{k_2}) \bar{u}_3^{(0)} d\omega \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

geben uns die in zweiter Näherung gültigen Werte der Geschwindigkeitskomponenten.

Um die rechten Seiten der Gleichungen (7) zu vereinfachen, formen wir zunächst das erste Glied rechts mittels der in 81 dargelegten Methode um. Wir erhalten:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (u_j^{(0)} t_{j1})_{t=0} d\omega = & \frac{1}{2\pi} \int_1 \left( \bar{u}_3^{(0)} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)_{t=0} d\omega + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_2 \left( \bar{u}_3^{(0)} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)_{t=0} d\omega, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\infty} (u_j^{(0)} t_{j2})_{t=0} d\omega &= - \frac{1}{2\pi} \int_1 \left( \bar{u}_3^{(0)} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)_{t=0} d\omega - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_2 \left( \bar{u}_3^{(0)} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)_{t=0} d\omega, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

wo die beiden Glieder rechts sich auf die Querschnitte der beiden Wirbelfäden beziehen.

Wir betrachten dann das zweite Glied rechts in (7). Da  $\bar{u}_3^{(0)}$  überall außerhalb der Helmholtzchen Wirbelfäden verschwindet, so zerfällt dieses Glied in zwei Teile, welche den beiden Wirbelfäden entsprechen.  $\bar{u}_3^{(0)}$  hat nur in den beiden Wirbeln einen von Null verschiedenen Wert und hängt im Inneren eines Wirbels nur von der Entfernung von der Achse desselben ab. Wir bezeichnen die Koordinaten der Achse des ersten Wirbels mit  $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$ . Für den zweiten Wirbel bezeichnen wir die entsprechenden Größen mit  $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}$ .  $\bar{u}_3^{(0)}$  hängt also im ersten Wirbel nur von der Größe:

$$\sqrt{(x_1 - x_1^{(1)})^2 + (x_2 - x_2^{(1)})^2}$$

ab, im zweiten nur von der Größe:

$$\sqrt{(x_1 - x_1^{(2)})^2 + (x_2 - x_2^{(2)})^2}.$$

Wir haben ferner im ersten Wirbel nach dem Taylorschen Lehrsatz:

$$u_j^{(0)}(x_1, x_2, t) = u_j^{(0)}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, t) + \left( \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_k} \right)_{x_1^*, x_2^*} (x_k - x_k^{(1)}).$$

Hier ist  $x_1^*, x_2^*$  ein von  $x_1, x_2$  abhängiger Punkt im Inneren des Wirbels. Wenn der Wirbel dünn ist und wenn die Ableitungen:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \quad (j, k = 1, 2)$$

im Inneren des Wirbels nicht dem absoluten Betrage nach sehr große Werte annehmen, so können wir mit genügender Annäherung im ersten Wirbel:

$$u_j^{(0)}(x_1, x_2, t) = u_j^{(0)}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, t) = \frac{dx_j^{(1)}}{dt}$$

setzen. Unter entsprechenden Voraussetzungen haben wir im zweiten Wirbel annähernd:

$$u_j^{(0)}(x_1, x_2, t) = \frac{dx_j^{(2)}}{dt}.$$

Wir betrachten jetzt den vom ersten Wirbel herrührenden Teil des Ausdruckes:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{t(0)} dt \int_{-\infty}^{\infty} (u_2^{(0)} t_{11} - u_1^{(0)} t_{12}) \bar{u}_3^{(0)} d\omega. \quad (10)$$

Er hat nach dem Obigen annähernd den Wert:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{t(0)} dt \int_1^{\infty} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{dx_1^{(1)}}{dt} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \frac{dx_2^{(1)}}{dt} \right) \bar{u}_3^{(0)} d\omega. \quad (11)$$

Wir betrachten den Ausdruck:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \bar{u}_3^{(0)} (x_1 - x_1^{(1)}, x_2 - x_2^{(1)}) d\omega,$$

wo bei der Differentiation  $x_1$  und  $x_2$  konstant gehalten werden sollen und wo  $t < t^{(0)}$  angenommen wird. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_1^{\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \bar{u}_3^{(0)} d\omega &= \int_1^{\infty} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial t} \bar{u}_3^{(0)} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{u}_3^{(0)}}{\partial t} \right) d\omega = \\ &= \int_1^{\infty} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial t} \bar{u}_3^{(0)} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \bar{u}_3^{(0)}}{\partial x_1} \frac{dx_1^{(1)}}{dt} + \frac{\partial \bar{u}_3^{(0)}}{\partial x_2} \frac{dx_2^{(1)}}{dt} \right) \right\} d\omega = \\ &= \int_1^{\infty} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial t} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{dx_1^{(1)}}{dt} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \frac{dx_2^{(1)}}{dt} \right\} \bar{u}_3^{(0)} d\omega. \end{aligned}$$

Der Ausdruck (40) kann mit Hilfe dieses Ergebnisses in der Form:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{t(0)} dt \frac{\partial}{\partial t} \int_1^{\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \bar{u}_3^{(0)} d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_0^{t(0)} dt \int_1^{\infty} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial t} \bar{u}_3^{(0)} d\omega$$

geschrieben werden. Ausführung der Integration im ersten Gliede und Einsetzen des Wertes von  $\Phi$ :

$$\Phi = \int_r^{\infty} e^{-\frac{\rho \alpha^2}{4\mu(t^{(0)}-t)}} \frac{d\alpha}{\alpha} - \log \frac{1}{r}$$

ergibt:

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{2\pi} \int_1^{\infty} \left( \frac{x_2^{(0)} - x_2}{r^2} \bar{u}_3^{(0)} \right)_t d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_1^{\infty} \left( \bar{u}_3^{(0)} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)_{t=0} d\omega + \\ &+ \frac{\rho}{8\pi\mu} \int_0^{t(0)} dt \int_1^{\infty} \frac{x_2^{(0)} - x_2}{(t^{(0)} - t)^2} e^{-\frac{\rho r^2}{4\mu(t^{(0)}-t)}} \bar{u}_3^{(0)} d\omega. \end{aligned}$$

Einen ähnlichen Beitrag erhalten wir vom zweiten Wirbelfaden. Wir haben also, annähernd:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{t(0)} dt \int_{-\infty}^{\infty} (u_2^{(0)} t_{11} - u_1^{(0)} t_{12}) \bar{u}_3^{(0)} d\omega = \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_1^{t(0)} \left( \frac{x_2^{(0)} - x_2}{r^2} \bar{u}_3^{(0)} \right)_t d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_1^{t(0)} \left( \bar{u}_3^{(0)} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)_{t=0} d\omega + \\ & + \frac{\varrho}{8\pi\mu} \int_0^{t(0)} dt \int_{1+2}^{\infty} \frac{x_2^{(0)} - x_2}{(t^{(0)} - t)^2} e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t^{(0)} - t)}} \bar{u}_3^{(0)} d\omega. \end{aligned} \right\} (12)$$

Die Formel (7) ergibt jetzt, wegen (8), (9), (12):

$$\left. \begin{aligned} u_1(P^{(0)}, t^{(0)}) = & \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_1^{t(0)} \left( \frac{x_2^{(0)} - x_2}{r^2} \bar{u}_3^{(0)} \right)_{t^{(0)}} d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_2^{t(0)} \left( \frac{x_2^{(0)} - x_2}{r^2} \bar{u}_3^{(0)} \right)_{t^{(0)}} d\omega + \\ & + \frac{\varrho}{8\pi\mu} \int_0^{t(0)} dt \int_1^{\infty} \frac{x_2^{(0)} - x_2}{(t^{(0)} - t)^2} e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t^{(0)} - t)}} \bar{u}_3^{(0)} d\omega + \\ & + \frac{\varrho}{8\pi\mu} \int_0^{t(0)} dt \int_2^{\infty} \frac{x_2^{(0)} - x_2}{(t^{(0)} - t)^2} e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t^{(0)} - t)}} \bar{u}_3^{(0)} d\omega. \end{aligned} \right\} (13)$$

Wir erhalten in ähnlicher Weise, in derselben Annäherung:

$$\left. \begin{aligned} u_2(P^{(0)}, t^{(0)}) = & \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_1^{t(0)} \left( \frac{x_1^{(0)} - x_1}{r^2} \bar{u}_3^{(0)} \right)_{t^{(0)}} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_2^{t(0)} \left( \frac{x_1^{(0)} - x_1}{r^2} \bar{u}_3^{(0)} \right)_{t^{(0)}} d\omega - \\ & - \frac{\varrho}{8\pi\mu} \int_0^{t(0)} dt \int_1^{\infty} \frac{x_1^{(0)} - x_1}{(t^{(0)} - t)^2} e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t^{(0)} - t)}} \bar{u}_3^{(0)} d\omega - \\ & - \frac{\varrho}{8\pi\mu} \int_0^{t(0)} dt \int_2^{\infty} \frac{x_1^{(0)} - x_1}{(t^{(0)} - t)^2} e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t^{(0)} - t)}} \bar{u}_3^{(0)} d\omega. \end{aligned} \right\} (14)$$

Wenn wir in den Gleichungen (13), (14) den Grenzübergang  $\mu \rightarrow 0$  ausführen, so konvergieren in beiden Gleichungen die beiden letzten Glieder rechts gegen Null, wie man sofort sieht, wenn man statt  $x_1, x_2$  durch die Substitutionen

$$x_1 - x_1^{(0)} = \xi_1 \sqrt{\mu(t^{(0)} - t)}, \quad x_2 - x_2^{(0)} = \xi_2 \sqrt{\mu(t^{(0)} - t)}$$

neue Veränderliche,  $\xi_1, \xi_2$  einführt. Die so erhaltenen, im Grenzfalle  $\mu = 0$  gültigen Formeln:

$$u_1(P^{(0)}, t^{(0)}) = -\frac{1}{2\pi} \int_1^2 \left( \frac{x_2^{(0)} - x_2 \bar{u}_3^{(0)}}{r^2} \right)_{t^{(0)}} d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_2^1 \left( \frac{x_2^{(0)} - x_2 \bar{u}_3^{(0)}}{r^2} \right)_{t^{(0)}} d\omega,$$

$$u_2(P^{(0)}, t^{(0)}) = -\frac{1}{2\pi} \int_1^2 \left( \frac{x_1^{(0)} - x_1 \bar{u}_3^{(0)}}{r^2} \right)_{t^{(0)}} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_2^1 \left( \frac{x_1^{(0)} - x_1 \bar{u}_3^{(0)}}{r^2} \right)_{t^{(0)}} d\omega$$

stimmen mit der Helmholtzschen Theorie überein.

Lassen wir einen Wirbelfaden, etwa den zweiten, sich unbegrenzt vom Anfangspunkte und von dem ersten Wirbelfaden entfernen, so geht der Einfluß jenes Wirbelfadens nach Null und wir kommen zu der in § 81 dargelegten exakten Theorie eines einzelnen Wirbelfadens zurück.

Nach der Helmholtzschen Theorie bleibt die Entfernung zwischen den beiden Wirbeln stets dieselbe. Wir benutzen die Formeln (13), (14) zu einer qualitativen Untersuchung darüber, wie die Zähigkeit dieses Gesetzes beeinflußt. Wir untersuchen zu diesem Zweck, wie die Bewegung desjenigen Teiles der Flüssigkeit, der in einem gewissen Moment sich gerade dort befindet, wo nach der Helmholtzschen Theorie ein Wirbel sein soll, von der Bewegung abweicht, welche jener Wirbel nach Helmholtz haben soll. Wir haben gesehen, daß die zwei ersten Glieder rechts in unseren Formeln (13) und (14) mit den von Helmholtz gefundenen übereinstimmen. Die Abweichung röhrt also von den zwei letzten Gliedern her. Betrachten wir jetzt z. B. den ersten Wirbelfaden, so ist klar, daß die Integrale, welche von diesem ersten Wirbelfaden herrühren, im allgemeinen die von dem zweiten Wirbelfaden herrührenden überwiegen müssen. Der Inhalt jener Integrale kann folgendermaßen ausgedrückt werden: von jedem Punkt der vom Wirbel zurückgelegten Bahn breitet sich eine Bewegung aus, deren Rotation außerhalb der nächsten Umgebung des Punktes dasselbe Vorzeichen wie der Wirbel selbst hat, deren Geschwindigkeit aber derjenigen entgegengesetzt ist, welche nach Helmholtz vom Wirbel selbst in dem Momente hervorgerufen wurde, wo er sich im betrachteten Punkt der Bahn befand. Die Geschwindigkeit jener Bewegung nimmt, wenn  $\mu$  klein ist, mit wachsender Entfernung vom Mittelpunkte schnell ab. Ebenso nimmt sie schnell mit wachsendem  $t$  ab. Es folgt hieraus, daß der Teil der Flüssigkeit, der in einem gewissen Momente sich gerade im Helmholtzschen Wirbel befindet, sich von diesem in der Richtung entfernen muß, in der sich die Flüssigkeit hinter dem Helmholtzschen Wirbel bewegt. Wenn man auf dieselbe Weise die von

dem zweiten Wirbelfaden herrührenden Integrale untersucht, so findet man, daß die Flüssigkeit hinter dem Helmholtzschen Wirbel zurückbleiben muß. Den ersten Teil unseres Resultates können wir im folgenden Satze zusammenfassen:

Die Teilchen, welche sich in den Wirbeln befinden, bewegen sich so, als wenn die beiden Wirbel durch Vermittlung der Flüssigkeit eine Kraft aufeinander ausübten, abstoßend, wenn die Wirbel gleichnamig sind, anziehend, wenn sie ungleichnamig sind.

## **Zweiter Teil.**

### **Die Randwertaufgaben.**



## Einleitung.

Mit Hilfe der im ersten Teile entwickelten Formeln ist es möglich, die Bewegung einer zähen unzusammendrückbaren Flüssigkeit zu berechnen, wenn man annehmen darf, daß diese Flüssigkeit den ganzen Raum ausfüllt und in unendlicher Ferne ruht, und wenn entweder die Bewegung stationär, d. h. von der Zeit unabhängig ist oder auch in einem bestimmten Momente, etwa für  $t = 0$ , bekannt ist. Jene Probleme sind aber nicht diejenigen, zu welchen die wirkliche Bewegung einer zähen Flüssigkeit Anlaß gibt. Diese Probleme haben einen anderen Charakter. Eine wirkliche Flüssigkeit hat stets eine Begrenzung, die übrigens aus einer oder mehreren, festen oder bewegten Grenzflächen bestehen kann. Wir nehmen an, daß die Flüssigkeit an diesen Grenzflächen haftet, so daß die Bewegung der Grenzflächen die Bewegung der äußersten Schichten der Flüssigkeit bestimmt. Wir bezeichnen mit  $U_j (j = 1, 2, 3)$  die Komponenten der Geschwindigkeit eines Punktes einer Grenzfläche. Das mathematische Problem, zu welchem die wirkliche Bewegung einer zähen Flüssigkeit Anlaß gibt, besteht dann darin, eine Lösung der hydrodynamischen Gleichungen I, II oder III zu finden, welche an den Grenzflächen den Bedingungen  $u_j = U_j (j = 1, 2, 3)$  genügt. Wenn die Bewegung nicht stationär ist, kommt noch die Bedingung hinzu, daß in einem gewissen Momente, etwa für  $t = 0$ , die Größen  $u_j$  in dem von der Flüssigkeit erfüllten Bereiche bestimmte, vorgeschriebene Werte annehmen sollen. Jene Werte müssen jedoch der Kontinuitätsbedingung genügen. Die Methode zur Lösung dieses Problems, die wir zur Zeit besitzen, ist wieder die Methode der sukzessiven Annäherungen. Sie erfordert in erster Linie die Lösung des linearen Problems, das man durch Weglassen der quadratischen Glieder erhält. So werden wir zu den Problemen geführt, die man die hydrodynamischen Randwertaufgaben nennen kann. Wir werden uns im folgenden mit speziellen Fällen beschäftigen, in denen man die hydrodynamische Randwertaufgabe exakt oder annähernd lösen konnte. Zwar gibt es auch allgemeine mathematische Untersuchungen über die hydrodyna-

mischen Randwertaufgaben. Sie sind aber noch nicht so weit gefördert, daß sie Bedeutung für die Hydrodynamik gewonnen hätten. Wir gehen deshalb hier nicht auf diese allgemeinen mathematischen Probleme ein. Im ersten Kapitel behandeln wir einige Fälle, in denen es gelungen ist, eine exakte Lösung der hydrodynamischen Randwertaufgabe zu finden. Im zweiten Kapitel beschäftigen wir uns mit dem linearen System, welches aus II<sup>a</sup> (oder II<sup>b</sup>) durch Vernachlässigung der quadratischen Glieder hervorgeht, und geben angenäherte Lösungen einiger spezieller Fälle der diesem System entsprechenden Randwertaufgabe. Im dritten Kapitel behandeln wir in ähnlicher Weise die Randwertaufgabe des Systems III<sup>a</sup> (oder III<sup>b</sup>).

Es ist aus dem oben Gesagten ersichtlich, daß die Randwerte, welche in den hydrodynamischen Problemen vorkommen, im allgemeinen in sehr einfacher Weise von den Koordinaten der Punkte der Grenzfläche abhängen. Trotzdem muß man, um die Methode der sukzessiven Annäherungen anwenden zu können, bei den linearen Systemen, welche wir hier zu behandeln haben, Randwerte allgemeinster Art betrachten.

# I.

## Exakte Lösungen hydrodynamischer Randwertaufgaben.

### § 9. Die Stokesschen Gleichungen.

#### 91. Eine Kugel. Randwertaufgabe für das innere Problem.

Wir nehmen in diesem Paragraphen an, daß die Bewegung der Flüssigkeit stationär ist. In den Gleichungen II<sup>a</sup> (oder II<sup>b</sup>) vernachlässigen wir die quadratischen Glieder und setzen außerdem  $X_j = 0$ . Wir werden so zu dem System:

$$\mu \Delta u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \quad (1)$$

geführt.

Wir unterscheiden zwei Fälle. Bei dem inneren hydrodynamischen Problem betrachtet man eine Flüssigkeit, die sich im Inneren einer geschlossenen Fläche befindet und deren Geschwindigkeit an dieser Fläche bekannt ist. Bei dem äußeren hydrodynamischen Problem betrachtet man eine Flüssigkeit, welche den ganzen Raum außerhalb einer geschlossenen Fläche erfüllt. In diesem Falle muß man die Geschwindigkeit sowohl an der inneren Grenzfläche wie in unendlicher Ferne kennen.

Wir lösen in diesem Paragraphen die innere und die äußere hydrodynamische Randwertaufgabe der Gleichungen (1) für eine Kugel. Wir betrachten zuerst das innere Problem. Die Randbedingungen sind in diesem Fall:  $u_j = U_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) an der Oberfläche der Kugel. Die Größen  $U_j$  müssen wegen der Kontinuitätsbedingung (1, 2) S. 4 der Beziehung:

$$\int U_j n_j dS = 0$$

genügen, wo die Integration über die Oberfläche der Kugel erstreckt wird und wo, wie üblich,  $n_j$  die Richtungscosinusse der nach außen gezogenen Normalen dieser Fläche sind.

Wir haben im dritten Paragraphen S. 27 folgendes gesehen. Wenn man einen Tensor  $T_{jk}$  und einen Vektor  $P_k$  finden kann, die an einer geschlossenen Fläche  $S$  den Bedingungen  $T_{jk} = 0$  genügen, im Innern derselben Fläche überall mit Ausnahme eines Punktes  $x_j^{(0)}(P^{(0)})$  regulär sind und den Differentialgleichungen:

$$\mu \Delta T_{jk} - \frac{\partial P_k}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_j} = 0 \quad (2)$$

genügen, endlich sich in der Umgebung des Punktes  $x_j^{(0)}$ , bis auf reguläre Glieder, wie der Tensor  $t_{jk}$  und der Vektor  $p_k$ :

$$t_{jk} = \frac{\delta_{jk}}{r} + \frac{(x_j - x_j^{(0)})(x_k - x_k^{(0)})}{r^3}, \quad p_k = 2\mu \frac{x_k - x_k^{(0)}}{r^3}, \quad r = \sqrt{|x_j - x^{(0)}|^2}$$

verhalten, dann gilt für jede innerhalb derselben Fläche reguläre Lösung des Systemes (1):

$$u_k(P^{(0)}) = -\frac{1}{8\pi\mu} \int U_j \left( \mu \frac{dT_{jk}}{dn} - P_k n_j \right) dS. \quad (3)$$

Um unsere Aufgabe zu lösen, bestimmen wir eine Lösung  $\tau_{jk}, \pi_k$  des Systems (2), die innerhalb von  $S$  regulär ist und an  $S$  den Bedingungen:  $\tau_{jk} = t_{jk}$  genügt; dann hat  $T_{jk} = t_{jk} - \tau_{jk}$ ,  $P_k = p_k - \pi_k$  die verlangten Eigenschaften.

Für eine Kugel kann man mit einfachen Mitteln die Größen  $\tau_{jk}$  und  $\pi_k$  herstellen. Wir wenden dazu das Spiegelungsverfahren an, durch welches W. Thomson das elektrostatische Problem der Kugel löste. Wir legen den Anfangspunkt des Bezugssystems in den Mittelpunkt unserer Kugel, bezeichnen mit  $a$  den Radius derselben und setzen:

$$x_j^2 = R^2, \quad x_j^{(0)2} = R^{(0)2}, \quad R \geq 0, \quad R^{(0)} \geq 0.$$

Durch die Formeln:

$$\bar{x}_j^{(0)} = \frac{a^2}{R^{(0)2}} x_j^{(0)}$$

definieren wir dann das Spiegelbild  $\bar{P}^{(0)}$  des Punktes  $P^{(0)} (= x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$ . Wir setzen ferner:

$$\bar{x}_j^{(0)2} = \bar{R}^{(0)2}, \quad (x_j - \bar{x}_j^{(0)})^2 = \bar{r}^2, \quad \bar{R}^{(0)} \geq 0, \quad \bar{r} \geq 0.$$

Um nun  $\tau_{jk}$  und  $\pi_k$  zu berechnen, verzichten wir zunächst auf die Erfüllung der Kontinuitätsbedingung (2b) und stellen uns die Aufgabe, einen Tensor  $\tau_{jk}^*$  und einen Vektor  $\pi_k^*$  zu berechnen, die überall, außer im Punkte  $\bar{P}^{(0)}$ , regulär sind und die Differentialgleichungen:

$$\mu \Delta \tau_{jk}^* - \frac{\partial \pi_k^*}{\partial x_j} = 0 \quad (4)$$

befriedigen und die an der Kugel  $R = a$  den Bedingungen  $\tau_{jk}^* = t_{jk}$  genügen. Wir versuchen diese vorbereitende Aufgabe durch den Ansatz:

$$\begin{aligned}\tau_{jk}^* &= \frac{a_{jk}}{r} + b_j \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r} + c_k \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} + 2d_{jk}\bar{x}_l^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{1}{r} + e \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial x_j \partial x_k}, \\ \pi_k^* &= 2\mu e \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r}\end{aligned}$$

zu lösen, wo  $a_{jk}$ ,  $b_j$ ,  $c_k$ ,  $d_{jk}$  und  $e$  Konstanten sind. Dieser Ansatz erfüllt, wie sofort ersichtlich ist, die Bedingung, daß  $\tau_{jk}^*$  und  $p_k^*$  überall mit Ausnahme des Punktes  $\bar{P}^{(0)}$  regulär sind. Wir haben ferner:

$$\mu \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} \tau_{jk}^* = \mu \Delta_x \tau_{jk}^* = 2\mu e \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \frac{1}{r} = \frac{\partial \pi_k^*}{\partial x_j}.$$

Wenn wir die Konstanten so bestimmen können, daß an der Kugel  $R = a$  noch  $\tau_{jk} = t_{jk}$  ( $j, k = 1, 2, 3$ ) wird, so ist unsere vorbereitende Aufgabe gelöst. Nun ist für  $R = a$ :

$$\bar{r}^2 = x_j^2 - 2x_j\bar{x}_j^{(0)} + \bar{x}_j^{(0)2} = a^2 \left(1 - \frac{2x_j\bar{x}_j^{(0)}}{R^{(0)2}} + \frac{a^2}{R^{(0)2}}\right) = \frac{a^2 r^2}{R^{(0)2}},$$

also:

$$\bar{r} = \frac{ar}{R^{(0)}}$$

und ferner:

$$x_j \bar{x}_j^{(0)} = \frac{1}{2} (a^2 + \bar{R}^{(0)2}) - \frac{1}{2} \bar{r}^2 = \frac{a^2}{2} \left(1 + \frac{a^2}{R^{(0)2}}\right) - \frac{1}{2} \bar{r}^2.$$

Wir erhalten mit Hilfe dieser Beziehungen für  $R = a$ :

$$\bar{x}_l^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{1}{r} = - \frac{\bar{x}_l^{(0)} (x_l - \bar{x}_l^{(0)})}{r^3} = \frac{1}{2\bar{r}} - \frac{a^2(R^{(0)2} - a^2)}{2R^{(0)2}\bar{r}^3}$$

und folglich:

$$\begin{aligned}\tau_{jk}^* &= \frac{R^{(0)}}{a} (a_{jk} + d_{jk} + e\delta_{jk}) \frac{1}{r} - \frac{R^{(0)3}}{a^3} \left\{ ex_j x_k - \right. \\ &\quad \left. - (e\bar{x}_j^{(0)} - b_j)x_k - (e\bar{x}_k^{(0)} - c_k)x_j + e\bar{x}_j^{(0)}\bar{x}_k^{(0)} - b_j\bar{x}_k^{(0)} - c_k\bar{x}_j^{(0)} + \right. \\ &\quad \left. + a^2 \left(1 - \frac{a^2}{R^{(0)2}}\right) d_{jk} \right\} \frac{1}{r^3}.\end{aligned}$$

Die Forderung:

$$\tau_{jk}^* = t_{jk} = \frac{\delta_{jk}}{r} + \frac{(x_j - x_j^{(0)})(x_k - x_k^{(0)})}{r^3}$$

für  $R = a$  ergibt jetzt:

$$\begin{aligned}\frac{R^{(0)}}{a} (a_{jk} + d_{jk} + e\delta_{jk}) &= \delta_{jk}, \quad - \frac{R^{(0)3}}{a^3} e = 1, \\ - \frac{R^{(0)3}}{a^3} (e\bar{x}_j^{(0)} - b_j) &= x_j^{(0)}, \quad - \frac{R^{(0)3}}{a^3} (e\bar{x}_k^{(0)} - c_k) = x_k^{(0)}, \\ - \frac{R^{(0)3}}{a^3} \left\{ e\bar{x}_j^{(0)}\bar{x}_k^{(0)} - b_j\bar{x}_k^{(0)} - c_k\bar{x}_j^{(0)} + a^2 \left(1 - \frac{a^2}{R^{(0)2}}\right) d_{jk} \right\} &= x_j^{(0)}x_k^{(0)}.\end{aligned}$$

Wir erhalten schließlich:

$$\begin{aligned} a_{jk} &= \frac{a}{R^{(0)}} \left( 1 + \frac{a^2}{R^{(0)2}} \right) \delta_{jk} + \frac{R^{(0)2} - a^2}{R^{(0)} a^3} \bar{x}_j^{(0)} \bar{x}_k^{(0)}, \\ b_j &= \frac{a}{R^{(0)}} \left( 1 - \frac{a^2}{R^{(0)2}} \right) \bar{x}_j^{(0)}, \quad c_k = \frac{a}{R^{(0)}} \left( 1 - \frac{a^2}{R^{(0)2}} \right) \bar{x}_k^{(0)}, \\ d_{jk} &= -\frac{R^{(0)2} - a^2}{R^{(0)} a^3} \bar{x}_j^{(0)} \bar{x}_k^{(0)}, \quad e = -\frac{a^3}{R^{(0)3}} \end{aligned}$$

und damit:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{jk}^* &= \frac{a}{R^{(0)} \bar{r}} \delta_{jk} + \frac{a^3}{R^{(0)3}} \frac{(x_j - \bar{x}_j^{(0)}) (x_k - \bar{x}_k^{(0)})}{\bar{r}^3} + \\ &+ \frac{R^{(0)2} - a^2}{R^{(0)}} \left\{ \frac{\bar{x}_j^{(0)} \bar{x}_k^{(0)}}{a^3 \bar{r}} - \frac{a}{R^{(0)2} \bar{r}^3} [\bar{x}_j^{(0)} (x_k - \bar{x}_k^{(0)}) + \right. \\ &\left. + \bar{x}_k^{(0)} (x_j - \bar{x}_j^{(0)})] - \frac{2 \bar{x}_j^{(0)} \bar{x}_k^{(0)}}{a^3} \bar{x}_l^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{1}{\bar{r}} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\pi_k^* = -\frac{2 \mu a^3}{R^{(0)3}} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\bar{r}}. \quad (6)$$

Wir setzen jetzt, um unser anfängliches Problem zu lösen:

$$\tau_{jk} = \tau_{jk}^* + (R^2 - a^2) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}, \quad (7)$$

so daß also das Zusatzglied für  $R = a$  also auf der Kugel verschwindet.

Die Funktionen  $\varphi_k$  sollen Lösungen der Laplaceschen Differentialgleichung sein, die im Innern der Kugel  $R = a$  regulär sind. Wir haben unter dieser Voraussetzung in demselben Bereich:

$$\Delta_x \tau_{jk} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ 2 \varphi_k + 4 x_l \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} - \frac{2 a^3}{R^{(0)3}} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\bar{r}} \right\}.$$

Wenn wir:

$$\pi_k = 2 \mu \left( \varphi_k + 2 x_l \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} - \frac{a^3}{R^{(0)3}} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\bar{r}} \right) \quad (8)$$

setzen, so sind dann  $\tau_{jk}, \pi_k$  innerhalb der Kugel  $R = a$  regulär und genügen den Differentialgleichungen (4). — Wir bestimmen schließlich die Potentialfunktionen  $\varphi_k$  so, daß die Kontinuitätsbedingung erfüllt wird. Wir haben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_j} &= \frac{\partial \tau_{jk}^*}{\partial x_j} + 2 x_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}, \\ \frac{\partial \tau_{jk}^*}{\partial x_j} &= -\frac{R^{(0)2} - a^2}{R^{(0)3}} \left\{ \frac{a (x_k - \bar{x}_k^{(0)})}{\bar{r}^3} - \frac{\bar{x}_k^{(0)}}{a} \bar{x}_j^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\bar{r}} + \right. \\ &\left. + a \bar{x}_j^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_k - \bar{x}_k^{(0)}}{\bar{r}^3} + \frac{2 x_k^{(0)}}{a} \left( \bar{x}_j^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left( \bar{x}_l^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \frac{1}{\bar{r}} \right\}. \end{aligned}$$

Da:

$$x_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\bar{r}} - \bar{x}_k^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\bar{r}} = -\frac{1}{\bar{r}}, \quad (x_j - \bar{x}_j^{(0)}) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_k - \bar{x}_k^{(0)}}{\bar{r}} = -\frac{2(x_k - \bar{x}_k^{(0)})}{\bar{r}^3}.$$

$$\left( \bar{x}_j^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left( \bar{x}_l^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \frac{1}{\bar{r}} = \left( x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left( \bar{x}_l^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \frac{1}{\bar{r}} + 2x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\bar{r}} + \frac{2}{\bar{r}},$$

so können wir unseren Ausdruck für  $\frac{\partial \tau_{jk}^*}{\partial x_j}$  auch in der Form:

$$-\frac{R^{(0)2} - a^2}{R^{(0)3}} \left\{ 3a \frac{x_k - \bar{x}_k^{(0)}}{\bar{r}^3} + \frac{3x_k^{(0)}}{a\bar{r}} + \frac{3x_k^{(0)}}{a} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\bar{r}} + \right. \\ \left. + ax_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_k - \bar{x}_k^{(0)}}{\bar{r}^3} + \frac{2x_k^{(0)}}{a} \left( x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left( \bar{x}_l^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \frac{1}{\bar{r}} \right\}$$

schreiben. In der Kontinuitätsbedingung:

$$\frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_j} = 0 \quad \text{oder} \quad x_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{jk}^*}{\partial x_j}$$

haben auf der rechten Seite einige Glieder unmittelbar die Gestalt  $x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ ; diese geben für  $\varphi_k$  den Beitrag:

$$\frac{R^{(0)2} - a^2}{2R^{(0)3}} \left\{ \frac{3x_k^{(0)}}{a\bar{r}} + \frac{a(x_k - \bar{x}_k^{(0)})}{\bar{r}^3} + \frac{2x_k^{(0)}}{a} \bar{x}_j^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\bar{r}} \right\},$$

welcher der Laplaceschen Gleichung genügt.

Um die noch übrigen Glieder von  $\varphi_k$  zu bestimmen, müssen wir eine für  $R \leq a$  reguläre Lösung  $\psi_k$  der Differentialgleichung:

$$x_j \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} = \frac{x_k^{(0)}}{\bar{r}} + a^2 \frac{x_k - \bar{x}_k^{(0)}}{\bar{r}^3}$$

suchen, welche außerdem der Laplaceschen Gleichung  $\Delta_x \psi_k = 0$  genügt. Dies geschieht ohne Schwierigkeit. Wir führen statt  $x_1, x_2, x_3$  Polarkoordinaten ein und drücken also  $x_1, x_2, x_3$  durch  $R$  und zwei Winkel aus. Die linke Seite unserer Differentialgleichung bekommt dadurch die Form:

$$R \frac{\partial \psi_k}{\partial R}.$$

Die rechte Seite können wir in eine nach steigenden Potenzen der Größe  $R/\bar{R}^{(0)}$  fortlaufende Reihe entwickeln. Da die rechte Seite für alle  $\bar{R}^{(0)}$  eine Lösung der Laplaceschen Gleichung  $\Delta_x \psi = 0$  ist, so wird jedes Glied der Reihe ebenfalls eine Lösung der Laplaceschen Gleichung sein. Da ferner, wie man leicht verifiziert, die rechte Seite für  $R = 0$  verschwindet, wird die Reihe kein konstantes Glied enthalten. Nicht

nur die rechte Seite selbst, sondern auch die mit  $R$  dividierte rechte Seite lässt sich also in eine Potenzreihe nach  $R/\bar{R}^0$  entwickeln. Wenn wir diese Reihe in bezug auf  $R$  zwischen 0 und  $R$  gliedweise integrieren, so bekommen wir eine neue Reihe, deren Glieder sich nur durch konstante Faktoren von den entsprechenden Gliedern der Entwicklung der rechten Seite selbst unterscheiden. Sie sind also ebenfalls Lösungen der Laplaceschen Gleichung. Die Summe dieser Glieder ist  $\psi_k$ . Es ist indessen nicht notwendig,  $\psi_k$  durch eine Potenzreihe darzustellen. Es gibt einen ziemlich einfachen, geschlossenen Ausdruck für  $\psi_k$ . Wir setzen:  $x_j \bar{x}_j^{(0)} = \bar{R} R^{(0)} \cos \vartheta$ , wo also  $\vartheta$  der Winkel zwischen den Vektoren  $x_j$  und  $\bar{x}_j^{(0)}$  ist, und haben dann unter Benutzung der Formeln S. 98:

$$\begin{aligned}\frac{x_k^{(0)}}{\bar{r}} + \frac{a^2(x_k - \bar{x}_k^{(0)})}{\bar{r}^3} &= \frac{x_k^{(0)}}{\bar{r}^3} \left( \bar{r}^2 - \frac{a^4}{R^{(0)2}} \right) + \frac{a^2 x_k}{\bar{r}^3} = \\ &= \frac{x_k^{(0)}}{\bar{r}^3} (R^2 - 2 R \bar{R}^{(0)} \cos \vartheta) + \frac{a^2 x_k}{\bar{r}^3}.\end{aligned}$$

Also:

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial R} = \frac{x_k^{(0)}(R - 2 \bar{R}^{(0)} \cos \vartheta)}{(R^2 - 2 R \bar{R}^{(0)} \cos \vartheta + \bar{R}^{(0)2})^{3/2}} + \frac{a^2 x_k}{R(R^2 - 2 R \bar{R}^{(0)} \cos \vartheta + \bar{R}^{(0)2})^{3/2}}$$

und:

$$\begin{aligned}\psi_k &= x_k^{(0)} \int_0^R \frac{(R - 2 \bar{R}^{(0)} \cos \vartheta) dR}{(R^2 - 2 R \bar{R}^{(0)} \cos \vartheta + \bar{R}^{(0)2})^{3/2}} + \\ &+ \frac{a^2 x_k}{R} \int_0^R \frac{dR}{(R^2 - 2 R \bar{R}^{(0)} \cos \vartheta + \bar{R}^{(0)2})^{3/2}} = x_k^{(0)} \left( \frac{1}{\bar{R}^{(0)}} - \frac{1}{\bar{r}} \right) + \\ &+ \frac{R - \bar{R}^{(0)} \cos \vartheta + \bar{r} \cos \vartheta}{R \bar{R}^{(0)2} \sin^2 \vartheta \cdot \bar{r}} (a^2 x_k - x_k^{(0)} \cdot x_j \bar{x}_j^{(0)}).\end{aligned}\quad (9)$$

Wir haben also:

$$\begin{aligned}\psi_k &= \frac{R^{(0)2} - a^2}{2 R^{(0)3}} \left\{ \frac{3 x_k^{(0)}}{a \bar{r}} + \frac{a(x_k - \bar{x}_k^{(0)})}{\bar{r}^3} + \frac{2 x_k^{(0)}}{a} \bar{x}_j^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\bar{r}} + \frac{3}{a} \psi_k \right\} = \\ &= \frac{R^{(0)2} - a^2}{2 R^{(0)3}} \left\{ \frac{3 x_k^{(0)}}{a \bar{R}^{(0)}} + \frac{a(x_k - \bar{x}_k^{(0)})}{\bar{r}^3} + \frac{2 x_k^{(0)}}{a} \bar{x}_j^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\bar{r}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{a} \frac{R - \bar{R}^{(0)} \cos \vartheta + \bar{r} \cos \vartheta}{R \bar{R}^{(0)2} \sin^2 \vartheta \cdot \bar{r}} (a^2 x_k - x_k^{(0)} \cdot x_j \bar{x}_j^{(0)}) \right\}.\end{aligned}\quad (10)$$

Durch die Gleichungen (5)–(8) S. 100 und (10) sind die Größen  $\tau_{jk}$  und  $\pi_k$  bestimmt. Wir setzen jetzt:

$$T_{jk} = t_{jk} - \tau_{jk} = \frac{\delta_{jk}}{r} + \frac{(x_j - x_j^{(0)})(x_k - x_k^{(0)})}{r^3} - \tau_{jk},$$

$$P_k = p_k - \pi_k = 2\mu \frac{x_k - x_k^{(0)}}{r^3} - \pi_k.$$

Die Formel (3) ergibt uns dann den Wert von  $u_k$  in einem beliebigen Punkt  $P^{(0)}$  innerhalb der Kugel.

Um zur vollständigen Lösung unseres Problems zu gelangen, müssen wir noch eine Formel für  $p$  ableiten. Da  $p$  durch die Differentialgleichungen und Randbedingungen nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, so suchen wir die Differenz  $p(P^{(0)}) - p(O)$  zu berechnen, wobei wir unter  $O$  den Mittelpunkt der Kugel verstehen. Wir gehen von der Formel (3, 17) S. 28 aus und bezeichnen mit  $v_j$ ,  $\bar{p}$  eine innerhalb der Kugel  $R = a$  reguläre Lösung der Stokesschen Gleichungen:

$$\mu \Delta v_j - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0, \quad (11)$$

welche an der Kugel  $R = a$  den Bedingungen:  $v_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$  genügt. Wir haben nach (3, 2) S. 22:

$$\int_{R=a} \left\{ v_j \left( \mu \frac{d u_j}{d n} - p n_j \right) - u_j \left( \mu \frac{d v_j}{d n} - \bar{p} n_j \right) \right\} dS = 0,$$

und folglich nach (3, 17), wenn wir  $\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) - v_j = V_j$  setzen:

$$p(P^{(0)}) - p(O) = -\frac{1}{4\pi} \int_{R=a} U_j \left( \mu \frac{d V_j}{d n} + \bar{p} n_j \right) dS. \quad (12)$$

Die Schwierigkeit besteht also nur in der Bestimmung der Größen  $v_j$  und  $\bar{p}$ . Wir gehen, um diese Aufgabe zu lösen, in ähnlicher Weise wie oben hervor. Wir setzen:

$$v_j = v_j^* + (R^2 - a^2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, \quad \bar{p} = \bar{p}^* + 2\mu \left( \varphi + 2x_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right). \quad (13)$$

Hier soll  $v_j^*$ ,  $\bar{p}^*$  eine innerhalb der Kugel reguläre Lösung des Systems:

$$\mu \Delta v_j^* - \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_j} = 0$$

sein, welche an der Kugel den Bedingungen  $v_j^* = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$  genügt.  $\varphi$  soll eine im Innern der Kugel reguläre Lösung der Laplaceschen Gleichung sein. — Um  $v_j^*$ ,  $\bar{p}^*$  zu bestimmen, gehen wir von der Tatsache aus, daß auf der Kugel  $R = a$ :

$$\frac{1}{r} = \frac{a}{R^{(0)}\bar{r}}$$

ist. Wir differenzieren diese Gleichung nach  $x_j^{(0)}$  und erhalten für  $R = a$ :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} &= \frac{\partial}{\partial x_j^{(0)}} \frac{1}{r} = -\frac{ax_j^{(0)}}{R^{(0)3}\bar{r}} - \frac{a}{R^{(0)}} \frac{\partial \bar{x}_k^{(0)}}{\partial x_j^{(0)}} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\bar{r}} = \\ &= -\frac{a}{R^{(0)3}} \frac{x_j^{(0)}}{\bar{r}} - \frac{a^3}{R^{(0)3}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\bar{r}} + \frac{2}{aR^{(0)}} \bar{x}_j^{(0)} \bar{x}_k^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\bar{r}}. \end{aligned}$$

Wir setzen jetzt:

$$v_j^* = \frac{a}{R^{(0)3}} \frac{x_j^{(0)}}{\bar{r}} + \frac{a^3}{R^{(0)3}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\bar{r}} - \frac{2}{aR^{(0)}} \bar{x}_j^{(0)} \bar{x}_k^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\bar{r}} + \frac{x_j}{a^3}, \quad (14)$$

$$\bar{p}^* = 0, \quad (15)$$

und haben dann:

$$\mu \Delta v_j^* = 0 = \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_j}$$

innerhalb der Kugel  $R = a$ , und an der Kugel:  $v_j^* = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$ .

Zur Bestimmung der Potentialfunktion  $\varphi$  erhalten wir die Gleichung:

$$\begin{aligned} x_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial v_j^*}{\partial x_j} = -\frac{1}{2aR^{(0)}} \bar{x}_j^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\bar{r}} + \frac{1}{aR^{(0)}} \bar{x}_j^{(0)} \bar{x}_k^{(0)} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \frac{1}{\bar{r}} - \\ &- \frac{3}{2a^3} = \frac{3}{2a} \left( \frac{1}{R^{(0)}\bar{r}} - \frac{1}{a^2} \right) + \frac{1}{2aR^{(0)}} \left( x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left( \frac{3}{\bar{r}} + 2x_k^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\bar{r}} \right). \end{aligned}$$

Sie ergibt:

$$\varphi = \frac{1}{2aR^{(0)}} \left( \frac{3}{\bar{r}} + 2\bar{x}_k^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\bar{r}} + 3\psi \right). \quad (16)$$

$\psi$  ist hier eine innerhalb der Kugel  $R = a$  reguläre Lösung der Laplaceschen Gleichung, welche außerdem der Gleichung:

$$x_j \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = \frac{1}{\bar{r}} - \frac{R^{(0)}}{a^2} = \frac{1}{\bar{r}} - \frac{1}{\bar{R}^{(0)}}$$

genügen muß. Aus dieser Gleichung können wir  $\psi$  in der oben auseinandergesetzten Weise entweder durch Reihenentwicklung der rechten Seite oder durch direkte Integration berechnen. Wir setzen wieder:

$$x_j \bar{x}_j^{(0)} = R \bar{R}^{(0)} \cos \vartheta$$

und haben dann:

$$\frac{1}{\bar{r}} = \sum_0^\infty {}^{(n)} P^{(n)} (\cos \vartheta) \frac{R^n}{\bar{R}^{(0)n+1}},$$

wo die  $P^{(n)}$  die Kugelfunktionen sind und also  $P^{(0)} = 1$  ist. Wir erhalten so:

$$\psi = \sum_1^{\infty} P^{(n)}(\cos \vartheta) \frac{R^{(n)}}{n \bar{R}^{(0)n+1}}.$$

Durch direkte Integration erhalten wir dagegen:

$$\psi = \int_0^R \left( \frac{1}{\bar{r}} - \frac{1}{\bar{R}^{(0)}} \right) \frac{dR}{R} = - \frac{1}{\bar{R}^{(0)}} \log \frac{\bar{r} + \bar{R}^{(0)} - R \cos \vartheta}{2 \bar{R}^{(0)}}.$$

Wir haben also schließlich:

$$\varphi = \frac{1}{2a\bar{R}^{(0)}} \left( \frac{3}{\bar{r}} + 2\bar{x}_k^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\bar{r}} - \frac{3}{\bar{R}^{(0)}} \log \frac{\bar{r} + \bar{R}^{(0)} - R \cos \vartheta}{2 \bar{R}^{(0)}} \right). \quad (17)$$

Die Formeln (12)–(17) vermitteln die Bestimmung von  $p(P^{(0)}) - p(O)$ .

## 92. Zusammenstellung der Formeln für das innere Problem der Kugel.

Wir fassen unsere bis jetzt gewonnenen Ergebnisse in dem folgenden Satze zusammen:

Um eine innerhalb einer Kugel:

$$R = \sqrt{x_j^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = a$$

reguläre Lösung der Stokesschen Gleichungen:

$$\mu \Delta u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

zu konstruieren, welche auf der Kugel den Randbedingungen  $u_j = U_j$  genügt, wo  $U_j$  vorgeschriebene Funktionen auf der Oberfläche der Kugel sind, bildet man die Funktionen:

$$\begin{aligned} T_{jk} &= \frac{\delta_{jk}}{r} + \frac{(x_j - x_j^{(0)}) (x_k - x_k^{(0)})}{r^3} - \frac{a}{R^{(0)} \bar{r}} \delta_{jk} - \\ &- \frac{a^3}{R^{(0)3}} \frac{(x_j - \bar{x}_j^{(0)}) (x_k - \bar{x}_k^{(0)})}{\bar{r}^3} - \frac{R^{(0)2} - a^2}{R^{(0)}} \left\{ \frac{\bar{x}_j^{(0)} \bar{x}_k^{(0)}}{a^3 \bar{r}} - \right. \\ &\left. - \frac{a}{R^{(0)2} \bar{r}^3} [\bar{x}_j^{(0)} (x_k - x_k^{(0)}) + \bar{x}_k^{(0)} (x_j - \bar{x}_j^{(0)})] - \right. \\ &\left. - \frac{2\bar{x}_j^{(0)} \bar{x}_k^{(0)}}{a^3} \bar{x}_l^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{1}{\bar{r}} \right\} - (R^2 - a^2) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}; \end{aligned}$$

$$P_k = 2\mu \frac{x_k - x_k^{(0)}}{r^3} - 2\mu \frac{a^3}{R^{(0)3}} \frac{x_k - \bar{x}_k^{(0)}}{\bar{r}^3} - 2\mu \left( \varphi_k + 2x_l \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} \right);$$

$$\begin{aligned}
\varphi_k &= \frac{1}{2R^{(0)3}} (R^{(0)2} - a^2) \left\{ \frac{3x_k^{(0)}}{aR^{(0)}} + \frac{a(x_k - \bar{x}_k^{(0)})}{\bar{r}^3} + \frac{2x_k^{(0)}}{a} \bar{x}_j^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\bar{r}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{a} \frac{R - \bar{R}^{(0)} \cos \vartheta + \bar{r} \cos \vartheta}{R \bar{R}^{(0)2} \sin^2 \vartheta \cdot \bar{r}} (a^2 x_k - x_k^{(0)} \cdot x_j \bar{x}_j^{(0)}) \right\}; \\
V_i &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) - \frac{a}{R^{(0)3}} \frac{x_j^{(0)}}{\bar{r}} - \frac{a^3}{R^{(0)3}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\bar{r}} + \\
&\quad + \frac{2}{a R^{(0)}} \bar{x}_j^{(0)} \bar{x}_k^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\bar{r}} - \frac{x_j}{a^3} - (R^2 - a^2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}; \\
\bar{p} &= 2\mu \left( \varphi + 2x_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right); \\
\varphi &= \frac{1}{2aR^{(0)}} \left\{ \frac{3}{\bar{r}} + 2\bar{x}_k^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\bar{r}} - \frac{3}{\bar{R}^{(0)}} \log \frac{\bar{r} + \bar{R}^{(0)} - R \cos \vartheta}{2\bar{R}^{(0)}} \right\}, \\
R^{(0)} &= \sqrt{x_j^{(0)2}}, \quad \bar{x}_j^{(0)} = \frac{a^2}{R^{(0)2}} x_j^{(0)}, \quad \bar{R}^{(0)} = \sqrt{\bar{x}_j^{(0)2}}, \\
r &= \sqrt{(x_j - x_j^{(0)})^2}, \quad \bar{r} = \sqrt{(x_j - \bar{x}_j^{(0)})^2}, \quad \cos \vartheta = \frac{x_j \bar{x}_j^{(0)}}{R \bar{R}^{(0)}}.
\end{aligned}$$

Dann geben die Formeln:

$$\begin{aligned}
u_k(P^{(0)}) &= -\frac{1}{8\pi\mu} \int_{R=a} U_j \left( \mu \frac{dT_{jk}}{dn} - P_k n_j \right) dS, \\
p(P^{(0)}) - p(O) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{R=a} U_j \left( \mu \frac{dV_j}{dn} + \bar{p} n_j \right) dS,
\end{aligned}$$

wo  $P^{(0)}$  der Punkt  $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}$  und  $O$  der Mittelpunkt der Kugel ist, die Lösung des Problems.

### 9.3. Eine Kugel. Randwertaufgabe für das äußere Problem.

Wir wenden uns zum äußeren Probleme, also zu der Aufgabe, eine Lösung des Systems (1) zu finden, die außerhalb der Kugel  $R = a$  regulär ist und an dieser Kugel der Bedingung  $u_j = U_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) genügt. Eine solche Lösung ist nur dann eindeutig bestimmt, wenn ihr Verhalten in unendlicher Ferne vorgeschrieben ist. Wir schreiben vor, daß die Größen  $R|u_j|, R^2 \left| \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right|, R^2 |p|$  ( $j, k = 1, 2, 3$ ) für  $R > a$  eine endliche obere Grenze haben sollen. Man sieht leicht, daß diese Bedingung nebst der Grenzbedingung  $u_j = U_j$  für  $R = a$  genügt, um eine für  $R = a$  reguläre Lösung des Systems (1) eindeutig festzulegen. Die Formel (3, 17) gibt in unserem Falle, wenn wir auch jetzt die

Normale der Kugel  $R = a$  nach außen ziehen und wenn der Punkt  $P^{(0)}$  (mit den Koordinaten  $x_j^{(0)}$ ) jetzt außerhalb der Kugel liegt:

$$u_k(P^{(0)}) = \frac{1}{8\pi\mu} \int_{R=a} U_j \left( \mu \frac{dT_{jk}}{dn} - P_k n_j \right) dS \quad (18)$$

$T_{jk}$ ,  $P_k$  soll hier eine Lösung des Systems (2) sein, die sich in der Umgebung des Punktes  $P^{(0)}$  wie die oben eingeführte Lösung  $t_{jk}$ ,  $p_k$  verhält, für  $R = a$  den Bedingungen  $T_{jk} = 0$  genügt und ferner der Bedingung genügt, daß die Größen  $R|T_{jk}|$ ,  $R^2 \left| \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_l} \right|$ ,  $R^2 |P_k| (j, k, l = 1, 2, 3)$  für  $R > 2R^{(0)}$  eine vom Punkte  $P^{(0)}$  unabhängige, obere Grenze haben. Um  $T_{jk}$  und  $P_k$  zu bestimmen, benutzen wir dieselbe Methode wie beim inneren Problem. Wir setzen wieder  $T_{jk} = t_{jk} - \tau_{jk}$ ,  $P_k = p_k - \bar{p}_k$ . Für  $\tau_{jk}$  und  $\bar{p}_k$  machen wir wieder die Ansätze (7) und (8).  $\tau_{jk}^*$  hat dieselbe Bedeutung wie oben. Für  $\varphi_k$  erhalten wir wieder den ersten, in Formel (10) angegebenen Ausdruck.  $\psi_k$  soll jedoch eine andere Bedeutung haben. Zur Bestimmung dieser Funktion erhalten wir dieselben Gleichungen wie früher:

$$\Delta \psi_k = 0, \quad x_j \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} = \frac{x_k^{(0)}}{\bar{r}} + a^2 \frac{x_k - \bar{x}_k^{(0)}}{\bar{r}^3}.$$

Wir müssen aber jetzt eine für  $R > a$  reguläre Lösung dieser Gleichung suchen. Um  $\psi_k$  zu bestimmen, genügt es, eine für  $R > a$  reguläre Lösung der Gleichungen:

$$\Delta \psi = 0, \quad x_j \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = \frac{1}{\bar{r}} \quad (19)$$

zu bestimmen. Man erhält sie entweder durch Reihenentwicklung von  $1/\bar{r}$  nach Potenzen von  $1/R$  oder durch direkte Integration. Das Ergebnis ist:

$$\psi = - \sum_0^\infty P^{(n)}(\cos \vartheta) \frac{\bar{R}^{(0)n}}{(n+1)R^{n+1}} = \left. \begin{aligned} &= \frac{1}{\bar{R}^{(0)}} \log \frac{\bar{r} + R \cos \vartheta - \bar{R}^{(0)}}{R(1 + \cos \vartheta)} \\ &= \frac{1}{\bar{R}^{(0)}} \log \frac{\bar{R}^{(0)}\bar{r} + x_j \bar{x}_j^{(0)} - \bar{R}^{(0)2}}{R \bar{R}^{(0)} + x_j \bar{x}_j^{(0)}}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Wir haben dann:

$$\psi_k = x_k^{(0)} \psi + a^2 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}_k^{(0)}} = \frac{a^2}{\bar{R}^{(0)}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_k^{(0)}} \log \frac{\bar{R}^{(0)}\bar{r} + x_j \bar{x}_j^{(0)} - \bar{R}^{(0)2}}{R \bar{R}^{(0)} + x_j \bar{x}_j^{(0)}}. \quad (21)$$

Man bestätigt durch elementare Rechnungen, daß die hiermit erhaltenen Größen  $T_{jk}$ ,  $P_k$  den oben angegebenen Bedingungen genügen.

Aus unserer Voraussetzung, daß  $R^2 |p|$  für  $R > a$  eine obere Grenze hat, folgt, daß  $p$  in unendlicher Ferne verschwindet. Unter diesen Umständen ist es möglich, den Wert von  $p$  in einem beliebigen Punkte  $P^{(0)}$  außerhalb der Kugel durch die Werte  $U_j$ , welche die Größen  $u_j$  auf der Kugel annehmen, auszudrücken. Wir haben:

$$p(P^{(0)}) = \frac{1}{4\pi} \int U_j \left( \mu \frac{dV_j}{dn} + \bar{p} n_j \right) dS. \quad (22)$$

Hier ist:

$$V_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} - v_j.$$

$v_j$  und  $\bar{p}$  ist eine für  $R > a$  reguläre Lösung des Systems (11), welche für  $R = a$  der Bedingung  $V_j = 0$  genügt. Wir machen für  $v_j$  und  $\bar{p}$  wieder den Ansatz (13), setzen aber jetzt:

$$v_j^* = \frac{a}{R^{(0)3}} \frac{x_j^{(0)}}{r} + \frac{a^3}{R^{(0)3}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} - \frac{2}{a R^{(0)}} \bar{x}_j^{(0)} \bar{x}_k^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r}, \quad \bar{p}^* = 0.$$

Für  $\varphi$  erhalten wir wieder den Ausdruck (16).  $\psi$  muß aber jetzt den Gleichungen (19) genügen. Für  $\psi$  können wir also den Ausdruck (20) benutzen.

#### 9.4. Zusammenstellung der Formeln für das äußere Problem der Kugel.

Um eine außerhalb einer Kugel:

$$R = \sqrt{x_j^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = a$$

reguläre Lösung der Stokesschen Gleichungen:

$$\mu \Delta u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

zu konstruieren, welche in unendlicher Ferne der Bedingung  $u_j \rightarrow 0$ ,  $p \rightarrow 0$  und auf der Kugel der Bedingung  $u_j = U_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) genügt, wo  $U_j$  vorgeschriebene Funktionen auf der Oberfläche der Kugel sind, bildet man die Funktionen:

$$T_{jk} = \frac{\delta_{jk}}{r} + \frac{(x_i - x_j^{(0)})(x_k - x_k^{(0)})}{r^3} - \frac{a}{R^{(0)} r} \delta_{jk} - \frac{a^3}{R^{(0)3}} \frac{(x_j - \bar{x}_j^{(0)})(x_k - \bar{x}_k^{(0)})}{r^3} - \\ - \frac{R^{(0)2} - a^2}{R^{(0)}} \left\{ \frac{\bar{x}_j^{(0)} \bar{x}_k^{(0)}}{a^3 r} - \frac{a}{R^{(0)2} r^3} [\bar{x}_j^{(0)} (x_k - \bar{x}_k^{(0)}) + \bar{x}_k^{(0)} (x_j - \bar{x}_j^{(0)})] - \right. \\ \left. - \frac{2 \bar{x}_j^{(0)} \bar{x}_k^{(0)}}{a^3} \bar{x}_l^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{1}{r} \right\} - (R^2 - a^2) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j};$$

$$\begin{aligned}
 P_k &= 2\mu \frac{x_k - x_k^{(0)}}{r^3} - 2\mu \frac{a^3}{R^{(0)3}} \frac{x_k - \bar{x}_k^{(0)}}{\bar{r}^3} - 2\mu \left( \varphi_k + 2x_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \right); \\
 \varphi_k &= \frac{R^{(0)2} - a^2}{2R^{(0)3}} \left\{ \frac{3x_k^{(0)}}{a\bar{r}} + \frac{a(x_k - \bar{x}_k^{(0)})}{\bar{r}^3} + \frac{2x_k^{(0)}}{a} \bar{x}_j^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\bar{r}} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3a}{\bar{R}^{(0)}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_k^{(0)}} \log \frac{\bar{R}^{(0)}\bar{r} + x_j \bar{x}_j^{(0)} - \bar{R}^{(0)2}}{R\bar{R}^{(0)} + x_j \bar{x}_j^{(0)}} \right\}; \\
 V_j &= \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} - \frac{a}{R^{(0)3}} \frac{x_j^{(0)}}{\bar{r}} - \frac{a^3}{R^{(0)3}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\bar{r}} + \frac{2}{aR^{(0)}} \bar{x}_j^{(0)} \bar{x}_k^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\bar{r}} - \\
 &\quad - (R^2 - a^2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}; \\
 \bar{p} &= 2\mu \left( \varphi + 2x_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right); \\
 \varphi &= \frac{1}{2aR^{(0)}} \left( \frac{3}{\bar{r}} + 2\bar{x}_k^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\bar{r}} + \frac{3}{\bar{R}^{(0)}} \log \frac{\bar{R}^{(0)}\bar{r} + x_j \bar{x}_j^{(0)} - \bar{R}^{(0)2}}{R\bar{R}^{(0)} + x_j \bar{x}_j^{(0)}} \right); \\
 R^{(0)} &= \sqrt{x_j^{(0)2}}, \quad \bar{x}_j^{(0)} = \frac{a^2}{R^{(0)2}} x_j^{(0)}, \quad \bar{R}^{(0)} = \sqrt{\bar{x}_j^{(0)2}}, \\
 r &= \sqrt{(x_j - x_j^{(0)})^2}, \quad \bar{r} = \sqrt{(x_j - \bar{x}_j^{(0)})^2}.
 \end{aligned}$$

Dann geben die Formeln:

$$\begin{aligned}
 u_k(P^{(0)}) &= \frac{1}{8\pi\mu} \int_{R=a} U_j \left( \mu \frac{dT_{jk}}{dn} - P_k n_j \right) dS, \\
 p(P^{(0)}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{R=a} U_j \left( \mu \frac{dV_j}{dn} + \bar{p} n_j \right) dS,
 \end{aligned}$$

wo  $P^{(0)}$  der Punkt  $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}$  ist und wo die Normale der Kugel (von der Länge 1):  $n_1, n_2, n_3$  nach außen gezogen wird, die Lösung des Problems.

Die beiden Probleme der Kugel können auch mit Hilfe von Reihenentwicklungen gelöst werden. Solche Reihen wurden von Lamb untersucht.

## 95. Die Stokessche Widerstandsformel.

Wenn wir in Formel (18) S. 107 die Größen  $U_j$  konstant annehmen, erhalten wir die Lösung des Stokesschen Problems, eine für  $R > a$  reguläre Lösung des Systems (1) zu finden, bei welcher die Größen  $u_j$  in unendlicher Ferne verschwinden und an der Kugel  $R = a$  vorgeschriebene, konstante Werte,  $U_j$ , annehmen. Man kann indessen diese Lösung in viel einfacherer Form darstellen. Es genügt:

$$u_j = \frac{3}{2} U_j \frac{a}{R} - \frac{a}{4} U_k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \left( 3R + \frac{a^2}{R} \right), \quad p = -\frac{3}{2} \mu a U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{R} \quad (23)$$

zu setzen. Stokes wurde zu diesem Problem durch die Aufgabe geführt, den Widerstand zu berechnen, den eine kleine Kugel erfährt, wenn sie sich mit konstanter Geschwindigkeit  $U_j$  in einer zähen Flüssigkeit bewegt. Er führte, um diese Aufgabe zu lösen, ein Bezugssystem ein, dessen Anfangspunkt sich im Mittelpunkte der Kugel befand und sich also mit dieser bewegte. Er führte dadurch seine Aufgabe auf den Fall zurück, wo eine ruhende, kleine Kugel in eine mit der Geschwindigkeit  $-U_j$  strömenden Flüssigkeit eingetaucht ist. Indem er die Größen  $U_j$  klein annahm und alle (sei es in  $U_j$  oder  $u_k$ ) quadratischen Glieder vernachlässigte, erhielt er zur Bestimmung der Bewegung der Flüssigkeit das System (1) mit den Nebenbedingungen: für  $R = a$ :  $u_j = 0$ , in unendlicher Ferne:  $u_j = -U_j$ . Durch die Substitution:  $u_j = -U_j + u'_j$  führte er dieses Problem auf das oben behandelte zurück. Auf ein mit der Kugel fest verbundenes Bezugssystem bezogen, ist also seine Lösung des Problems:

$$\left. \begin{aligned} u_j &= -U_j + \frac{3}{2} U_j \frac{a}{R} - \frac{a}{4} U_k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \left( 3R + \frac{a^2}{R} \right), \\ p &= -\frac{3}{2} \mu a U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

In schroffem Gegensatz zu den bei gewöhnlichen Körpern und gewöhnlichen Geschwindigkeiten beobachteten Erscheinungen ist diese Bewegung in gewissem Sinne symmetrisch in bezug auf eine gegen die Strömungsrichtung senkrechte, durch den Mittelpunkt der Kugel gelegte Ebene. In zwei Punkten, welche in bezug auf diese Ebene Spiegelbilder voneinander sind, haben die Geschwindigkeiten in der Strömungsrichtung gleiche, die Geschwindigkeiten in einer gegen jene Richtung senkrechten Richtung entgegengesetzt gleiche Werte. Daß dieses Ergebnis nicht zum Wesen der Sache gehört, sondern durch die angewandte Näherungsmethode bedingt wird, werden wir später sehen.

Wir berechnen mit Hilfe der Stokesschen Lösung die Resultierende der Kräfte, welche die Flüssigkeit auf die Kugel ausübt. Wir haben im ersten Paragraphen gesehen (vgl. S. 7), daß jene Resultierende die Komponenten:

$$\int_{R=a} \left\{ -p n_j + \mu n_k \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \right\} dS$$

hat. Aus den Gleichungen (1) folgt leicht, daß die Werte dieser Inte-

grale von der Integrationsfläche unabhängig sind, vorausgesetzt, daß diese eine geschlossene Fläche ist, welche den Anfangspunkt umgibt. Dies folgt aus der Beziehung:

$$\begin{aligned} \int_{\bar{S}} \left\{ -pn_j + \mu n_k \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \right\} dS = \\ = \int_{\bar{\Omega}} \left\{ -\frac{\partial p}{\partial x_k} + \mu \Delta u_j + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right\} d\omega = 0, \end{aligned}$$

welche gültig ist, wenn  $u_1, u_2, u_3, p$  in dem von der geschlossenen Fläche  $\bar{S}$  begrenzten Bereich  $\bar{\Omega}$  eine reguläre Lösung der Stokesschen Gleichungen (1) bilden. Wir benutzen die Unabhängigkeit des Integrals von der Integrationsfläche in der Weise, daß wir zur Integrationsfläche eine Kugel um den Anfangspunkt mit sehr großem Radius  $R$  wählen. Wir haben auf jener Kugel in genügender Annäherung:

$$-pn_j + \mu n_k \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) = -\frac{9}{2} \mu a U_k \frac{x_j x_k}{R^4},$$

ferner ist:

$$\int_{R=\text{Konst.}} \frac{x_i x_k}{R^4} dS = \frac{4\pi}{3} \delta_{ik}.$$

Die Resultierende der Kräfte, welche die Flüssigkeit auf die Kugel ausübt, hat also die Komponenten  $-6\pi\mu a U_i$ . Dies ist die berühmte Stokessche Widerstandsformel.

Die Stokessche Formel hat eine sehr große Bedeutung für die Molekularphysik, die Kolloidchemie und Meteorologie gewonnen. Die genaueren Bedingungen für ihre Gültigkeit werden wir später diskutieren. Wir werden dort auch etwas Näheres über ihre Anwendungen sagen.

### 96. Ein Satz von Faxén.

Dr. H. Faxén hat die Stokessche Widerstandsformel in sehr bemerkenswerter Weise verallgemeinert. Man kann den Satz von Faxén mit Hilfe der oben gegebenen, allgemeinen Lösung des Problems der Kugel beweisen. Obwohl wir den Beweis seiner Länge wegen hier nicht ausführen können, wollen wir doch den Gang desselben andeuten. Wir fragen zunächst, wie kann man, wenn die Bewegung einer Flüssigkeit den linearen Stokesschen Gleichungen gehorcht, die Geschwindigkeitskomponenten  $u_k$  sowie die Größen  $\Delta u_k$  in einem Punkte  $P^{(0)}$  in der Flüssigkeit durch die Werte ausdrücken, welche die Größen  $u_j$  auf einer in der Flüssigkeit gelegenen Kugel annehmen, die ihren Mittel-

punkt im Punkte  $P^{(0)}$  hat? Die Formel (3) S. 98 gibt hinsichtlich der Größen  $u_k$  unmittelbar eine Antwort auf diese Frage. Wir verlegen für einen Augenblick den Anfangspunkt unseres Bezugssystems in den Punkt  $P^{(0)}$ . Es wäre ziemlich mühsam, aus der allgemeinen Formel für die Greenschen Funktionen durch Grenzübergang die Werte von  $T_{jk}$  und  $P_k$  zu berechnen. Man bestätigt aber leicht, daß diese Größen die folgenden Werte haben:

$$T_{jk} = \delta_{jk} \left( \frac{1}{R} + \frac{2R^2}{a^3} - \frac{3}{a} \right) + x_j x_k \left( \frac{1}{R^3} - \frac{1}{a^3} \right),$$

$$P_k = \frac{10\mu x_k}{a^3} + \frac{2\mu x_k}{R^3}.$$

In der Tat genügen  $T_{jk}$ ,  $P_k$  bei festem  $k$  den Stokesschen Gleichungen und sind im Anfangspunkte in der richtigen Weise singulär. Die Formel (3) ergibt unter diesen Umständen nach Ausführung der Integrationen und wenn wir wieder den Anfangspunkt in einen beliebigen Punkt verlegen:

$$u_k(P^{(0)}) = \frac{3}{8\pi} \int_{r=\text{Konst.}} u_j \left\{ \frac{5}{r^2} (x_j - x_j^{(0)}) (x_k - x_k^{(0)}) - \delta_{jk} \right\} \frac{dS}{r^4}. \quad (25)$$

Durch ähnliche Rechnungen findet man:

$$(\Delta u_k)_{P^{(0)}} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x_k} \right)_{P^{(0)}} = \frac{15}{4\pi} \int_{r=\text{Konst.}} u_j \left\{ \delta_{jk} - \frac{3(x_j - x_j^{(0)})(x_k - x_k^{(0)})}{r^2} \right\} \frac{dS}{r^4}. \quad (26)$$

Wir nehmen jetzt an, daß eine Flüssigkeit sich in Übereinstimmung mit den linearen Stokesschen Gleichungen stationär bewegt. Wir betrachten einen Bereich, wo die Bewegung regulär ist. In diesen Bereich tauchen wir einen kugelförmigen starren Körper mit dem Radius  $a$  ein und denken uns ihn dort festgehalten. Die Flüssigkeit übt auf die Kugel Kräfte aus, deren Resultierende wir berechnen wollen. Wir haben zu diesem Zweck zuerst die von der Kugel hervorgerufene Störung der Flüssigkeitsbewegung zu berechnen. Diese Aufgabe ist durch die Formel (18) S. 107 gelöst. Wir haben hier die mit entgegengesetzten Vorzeichen genommenen Komponenten der Geschwindigkeit der anfänglichen ungestörten Flüssigkeitsbewegung zu nehmen. Die wirkliche Bewegung der Flüssigkeit ist aus dieser Bewegung und der von der Kugel hervorgerufenen Störung zusammengesetzt. Man sieht nun leicht, daß unsere Resultierende nur von der Störung abhängt. Wie wir schon oben hervorgehoben haben, können wir in den Integralen, welche die Komponenten der Resultierenden darstellen, zur Integrationsfläche eine

beliebige, geschlossene Fläche wählen, welche dieselben Singularitäten der Größen  $u_j$  wie unsere Kugel umschließt. Nun hat die anfängliche, ungestörte Bewegung der Flüssigkeit nach unserer Annahme im Innern der Kugel keine Singularitäten. Bei der Berechnung der Resultierenden der von dieser ungestörten Bewegung herrührenden Kräfte können wir deshalb die Integrationsfläche zu einem Punkt zusammenziehen. Das Ergebnis der Integration ist also Null. Betreffs der Störung kann man mit Hilfe der Formel (18), allerdings nur durch langwierige Rechnungen, die Komponenten der Resultierenden berechnen. Das Ergebnis lässt sich, wenn wir mit  $u_k^{(r)}$  die Komponenten der Geschwindigkeit in der anfänglichen, ungestörten, regulären Bewegung bezeichnen, in der einfachen Form:

$$\frac{3}{2} a \mu \int_{r=a} u_k^{(r)} \frac{dS}{r^2} \quad (27)$$

schreiben. Wegen (25) können wir diesen Ausdruck der Komponenten der Resultierenden auch in der integrallosen Form:

$$6\pi\mu a u_k^{(r)}(P^{(0)}) + \pi a^3 \left( \frac{\partial p^{(r)}}{\partial x_k} \right)_{P^{(0)}}. \quad (28)$$

darstellen. Dies ist der Satz von Faxén. Er ermöglicht es unter ganz allgemeinen Verhältnissen in sehr einfacher Weise die Kräfte, welche eine stationär bewegte, zähe Flüssigkeit auf eine Kugel ausübt, in erster Näherung zu berechnen.\*

Wenn wir nur den Mittelpunkt der Kugel festhalten, wird die Kugel sich um diesen Punkt drehen. Für die Drehgeschwindigkeit hat Dr. Faxén einen sehr einfachen Ausdruck berechnet. Man drückt ihn am einfachsten in der vektoriellen Schreibweise aus. Die Drehgeschwindigkeit ist:

$$\frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{u}^{(r)},$$

wenn  $\mathbf{u}$  der Vektor mit den Komponenten  $u_j$  ist.

## 97. Das Problem der ebenen Wand.

Das Problem der Kugel enthält als speziellen Fall das Problem der Ebene, mit anderen Worten die Aufgabe, eine in einem Halbraume  $x_3 > 0$  reguläre Lösung der Gleichungen (1) zu finden, welche den

---

\* Dr. Faxén hat seinen Satz ohne Beweis in seiner Dissertation mitgeteilt. Einen Beweis gab er später in dem Aufsatze: Der Widerstand gegen die Bewegung einer starren Kugel in einer zähen Flüssigkeit, die zwischen zwei parallelen, ebenen Wänden eingeschlossen ist. Arkiv f. mat., astr. och fysik. Bd. 18, 1924. Ein einfacher Beweis wäre sehr erwünscht.

Bedingungen: für  $x_3 = 0$ :  $u_j = U_j$ ;  $\lim_{x_3 \rightarrow \infty} u_j = 0$  ( $j = 1, 2, 3$ ) genügt. Um die Lösung dieses Problems zu erhalten, hat man nur nötig, in  $T_{jk}$  und  $P_k$   $x_3$  und  $x_3^{(0)}$  mit  $x_3 + a$  und  $x_3^{(0)} + a$  zu vertauschen und dann den Grenzübergang  $a \rightarrow \infty$  auszuführen.  $t_{jk}$  und  $p_k$  bleiben dabei unverändert. Man findet:  $\bar{x}_1^{(0)} = x_1^{(0)}$ ,  $\bar{x}_2^{(0)} = x_2^{(0)}$ ,  $\bar{x}_3^{(0)} = -x_3^{(0)}$  und folglich:  $\bar{r} = \sqrt{(x_1 - x_1^{(0)})^2 + (x_2 - x_2^{(0)})^2 + (x_3 + x_3^{(0)})^2}$ . Man erhält ferner:

für  $j = 1, 2, 3$ ;  $k = 1, 2$ :

$$\tau_{jk} = \frac{\delta_{jk}}{\bar{r}} + \frac{(x_j - x_j^{(0)}) (x_k - x_k^{(0)})}{\bar{r}^3} - 2 x_3 x_3^{(0)} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \frac{1}{\bar{r}},$$

$$\pi_k = -2 \mu \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\bar{r}} - 4 \mu x_3^{(0)} \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_k} \frac{1}{\bar{r}}.$$

für  $j = 1, 2$ :

$$\tau_{j3} = \frac{(x_j - x_j^{(0)}) (x_3 - x_3^{(0)})}{\bar{r}^3} + 2 x_3 x_3^{(0)} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_3} \frac{1}{\bar{r}},$$

$$\tau_{33} = \frac{1}{\bar{r}} + \frac{(x_3 + x_3^{(0)})^2}{\bar{r}^3} + 2 x_3 x_3^{(0)} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \frac{1}{\bar{r}},$$

$$\pi_3 = -2 \mu \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{\bar{r}} + 4 \mu x_3^{(0)} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \frac{1}{\bar{r}}.$$

Man beweist am einfachsten diese Formeln durch direkte Ausrechnung, indem man zeigt, daß die Funktionen  $\tau_{jk}$ ,  $\pi_k$  den Differentialgleichungen (2) und den zugehörigen Nebenbedingungen genügen.

Das Problem der ebenen Wand wurde zuerst von H. A. Lorentz im Jahre 1896 gelöst.

## § 10. Die nicht-stationären Gleichungen. Das Problem der Kugel. Die Formel von Boussinesq. Das Problem des Kreiszylinders.

### 10.1. Der Ansatz.

In den Gleichungen I<sup>a</sup> S. 12 setzen wir  $X_j = 0$  und vernachlässigen die quadratischen Glieder. So erhalten wir das System:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \nu \Delta u_j, \quad \nu = \frac{\mu}{\varrho}, \quad (j = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Die Kontinuitätsbedingung ergibt:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \quad (2)$$

Wir stellen uns die Aufgabe, eine Lösung dieses Systems zu finden, welche den folgenden Bedingungen genügt. Für  $t = 0$  sollen  $u_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) den Wert Null annehmen. Für  $t > 0$  sollen  $u_j, p$  in dem Bereich  $\Omega$ , das heißt hier für  $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} > a$ , nebst den in den Gleichungen (1), (2) vorkommenden Ableitungen stetig sein. An der Kugel  $R = a$  sollen die Größen  $u_j$  vorgeschriebene, im allgemeinen vom Orte und von  $t$  abhängige Werte  $U_j$  annehmen. Endlich soll die Bedingung  $\lim_{R \rightarrow \infty} u_j = 0$  erfüllt sein.

Verfasser hat dieses Problem zuerst durch Reihen gelöst, welche nach Kugelfunktionen fortschreiten und wurde später durch Summierung dieser Reihen zu dem folgenden Ansatz geführt. Wir setzen:

$$u_j = \frac{\partial F_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Psi - \nu \frac{\partial F_k}{\partial x_k} \right), \quad p = -\varrho \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (3)$$

$\Psi$  soll dabei eine in  $\Omega$  reguläre und im Unendlichen verschwindende Lösung der Laplaceschen Gleichung sein. Die Größen  $F_j$  sollen die Komponenten eines der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = \nu \Delta \mathbf{F} \quad (4)$$

genügenden Vektors sein. Dieser Vektor soll für  $t = 0$  verschwinden, für  $t > 0$  in  $\Omega$  regulär sein und in unendlicher Ferne verschwinden. Unser Ansatz (3) befriedigt unter diesen Umständen, wie man sofort sieht, die Systeme (1) und (2).

Wir betrachten jetzt einen beliebigen Punkt der Kugel  $R = a$ .  $n_j$  sind die Komponenten einer nach außen gezogenen Normale von der Länge 1 in diesem Punkte. Mit  $T_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) bezeichnen wir die Komponenten eines beliebigen, zur Normalen senkrechten, also die Kugel im betrachteten Punkte tangierenden Vektors von der Länge 1. Wir haben nach diesen Festsetzungen stets:

$$n_j T_j = 0. \quad (5)$$

Die Bedingungen  $u_j = U_j$  für  $R = a$  ergeben jetzt:

$$\left( \frac{\partial F_j}{\partial t} - U_j + \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_j \partial x_k} \right) T_j = 0, \quad (6)$$

$$\left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} - U_j + \nu \Delta F_j - \nu \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_j \partial x_k} \right) n_j = 0. \quad (7)$$

Wir befriedigen die Beziehungen (6) und (7) in der folgenden Weise. Wir setzen:

$$\Psi = \Phi + \Phi^*, \quad (8)$$

und bestimmen  $\Phi$  durch die Forderung, daß  $\Phi$  eine für  $R > a$  reguläre und in unendlicher Ferne verschwindende Lösung der Laplaceschen Gleichung sein soll, welche auf der Kugel  $R = a$  der Bedingung:

$$\frac{d\Phi}{dn} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} n_j = U_j n_j = U_n \quad (9)$$

genügt. Wir bestimmen sodann die Tangentialkomponenten des Vektors  $\mathbf{F}$  auf der Kugel  $R = a$  durch die Bedingung: für  $R = a$ :

$$\left( \frac{\partial F_j}{\partial t} - U_j + \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) T_j = 0, \quad \text{wenn } n_j T_j = 0. \quad (10)$$

Sie ergibt:

$$T_j F_j = T_j \int_0^t \left( U_j(\tau) - \frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial x_j} \right) d\tau \quad \text{für } R = a. \quad (11)$$

Aus (6) folgt dann:

$$T_j \left( \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_j \partial x_k} \right) = 0, \quad \text{wenn } R = a. \quad (12)$$

Da diese Beziehung für jeden zu  $\mathbf{n}$  senkrechten Vektor gelten soll, so ist, wie man auch auf der Kugel  $R = a$  fortschreitet, die Änderung von  $\Phi^* - \nu \frac{\partial F_k}{\partial x_k}$  Null, also:

$$\Phi^* - \nu \frac{\partial F_k}{\partial x_k} = \text{Konstante}, \quad \text{wenn } R = a. \quad (13)$$

Wegen (7) muß  $\Phi^*$  außerdem der Bedingung:

$$\frac{d\Phi^*}{dn} + \nu \left( \Delta F_j - \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_j \partial x_k} \right) n_j = 0, \quad \text{für } R = a \quad (14)$$

genügen.

Wir haben also zwei Potentialfunktionen  $\Phi$  und  $\Phi^*$  und eine Vektorfunktion  $\mathbf{F}$ , welche der Gleichung (4) genügt, eingeführt.  $\Phi$  ist durch seine Randbedingung vollständig bestimmt. Von dem Vektor  $\mathbf{F}$  kennen wir den Wert für  $t = 0$ , das Verhalten im Unendlichen, sowie die Tangentialkomponenten an der Kugel bei beliebigem  $t$ , so daß also der Wert der Normalkomponente von  $\mathbf{F}$  auf der Kugel noch zur Verfügung steht. Es entsteht dann die Aufgabe, über den Wert dieser Normalkomponente von  $\mathbf{F}$  auf der Kugel so zu verfügen, daß die beiden Randbedingungen (13), (14) für  $\Phi^*$  auf der Kugel so erfüllt werden können, daß  $\Phi^*$  noch im Unendlichen verschwindet.

## 10 2. Einführung eines Hilfsproblems.

Die Lösung der komplizierten, durch die Beziehungen (13), (14) gekennzeichneten Aufgabe, welche wir hier geben werden, beruht auf einer analytischen Tatsache, welche durch die oben erwähnten Reihenentwicklungen des Verfassers aufgedeckt wurde. Wir behaupten: man kann die Normalkomponente des Vektors  $\mathbf{F}$  auf der Kugel so bestimmen, daß zwei außerhalb der Kugel  $R = a$  reguläre und im Unendlichen verschwindende Potentialfunktionen  $P$  und  $P^*$  existieren, welche Ableitungen in bezug auf  $x_1, x_2, x_3$  besitzen,  $P$  von den ersten Ordnungen,  $|P^*$  von der ersten Ordnung, die an der Kugel  $R = a$  endliche und stetige Werte annehmen und in unendlicher Ferne verschwinden und welche an der Kugel  $R = a$  die Bedingungen:

$$\left. \begin{aligned} P &= n_j F_j = F_n, \quad \frac{dP}{dn} = n_j \frac{\partial P}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_j} - n_j n_k \frac{\partial F_j}{\partial x_k} - \\ &\quad - \frac{2}{a} n_j F_j = \Delta v F; \\ P^* &= n_j n_k \frac{\partial F_j}{\partial x_k} = \frac{dF_n}{dn}, \quad \frac{dP^*}{dn} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{x_k}{R} \frac{\partial F_j}{\partial x_k} \right) - \\ &\quad - n_j n_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{x_l}{R} \frac{\partial F_j}{\partial x_l} \right) - \frac{2}{a} n_j \frac{x_k}{R} \frac{\partial F_j}{\partial x_k} = \Delta v \frac{dF}{dn} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

erfüllen.

Wir behaupten ferner: wenn  $P$  und  $P^*$  in dieser Weise bestimmt worden sind, dann hat der Ausdruck

$$\nu \left( \frac{x_j}{a} \frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{2}{a} P + P^* \right)$$

alle die Eigenschaften, welche wir von der Funktion  $\Phi^*$  verlangen müssen, und es ist also:

$$\Phi^* = \nu \left( \frac{x_j}{a} \frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{2}{a} P + P^* \right). \quad (16)$$

Wir beweisen zuerst die Richtigkeit der zweiten Behauptung. Daß die durch (16) definierte Funktion  $\Phi^*$  (wenn  $P$  und  $P^*$  existieren) eine außerhalb der Kugel  $R = a$  reguläre und in unendlicher Ferne verschwindende Potentialfunktion ist, ist unmittelbar klar. Auf der Kugel  $R = a$  hat man ferner nach (15):

$$\Phi^* = \nu \left( \frac{dP}{dn} + \frac{2}{a} P + P^* \right) = \nu \frac{\partial F_j}{\partial x_j}.$$

Die Bedingung (13) ist also erfüllt. Es ist also nur mehr zu zeigen, daß an der Kugel  $R = a$  die Bedingung (14) erfüllt ist. Nun ist\*:

$$\Delta \nu F = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \int_s F_j T_j^{(n)} ds,$$

wo  $ds$  das Linienelement einer beliebigen kleinen Kurve auf der Kugel ist, welche das Flächenelement  $\sigma$  umschließt, und  $T_j^{(n)}$  die Komponenten der die Kugel  $R = a$  tangierenden, äußeren Normale (von

\* Man definiert in der Vektoranalysis die Divergenz eines vom Orte abhängigen Vektors als den Grenzwert:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \int_s V_j n_j dS.$$

Hier ist  $S$  eine beliebige geschlossene Fläche im Raum,  $n$  die nach außen gezogene Normale von der Länge 1 der Fläche  $S$  und  $\omega$  das Volumen des von  $S$  eingeschlossenen Raumbereiches. Es wird vorausgesetzt, daß beim Grenzübergange  $\omega \rightarrow 0$  die Fläche  $S$  sich um einen bestimmten Punkt zusammenzieht. Wir nehmen jetzt an, daß ein Vektor  $V$  außerhalb der Kugel  $R = a$ , also im Bereich  $\Omega$ , definiert ist. Wir wollen  $\operatorname{div} V$  in einem Punkte der Kugel  $R = a$  berechnen. Wir ziehen zu diesem Zweck auf der Kugel eine kleine geschlossene Kurve  $s$  und verbinden die Punkte dieser Kurve mit dem Mittelpunkte der Kugel. Die so definierte konische Fläche und die beiden Kugeln  $R = a$  und  $R = a + da$  grenzen einen kleinen Bereich im Raum ab. Das Volumen dieses Bereiches ist  $\sigma da$ , wenn  $\sigma$  der Flächeninhalt des von der Kurve  $s$  begrenzten kleineren Teiles der Kugel  $R = a$  ist. Wie erhalten, indem wir bei der Berechnung von  $\operatorname{div} V$  diesen Bereich benutzen und indem wir mit  $T_j^{(n)}$  die Komponenten einer die Kugel  $R = a$  tangierenden, äußeren Normale (von der Länge 1) der Kurve  $s$  bezeichnen und bedenken, daß, wenn  $dS$  ein Flächenelement einer Kugel mit dem Radius  $R$  ist, welches vom Mittelpunkte aus unter einem bestimmten Raumwinkel gesehen wird,  $dS/R^2$  konstant ist:

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} V)_R = a &= \lim_{\sigma da \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\sigma da} \int_s \left\{ (V_j R^2)_R = a + da - V_j R^2 \right\}_R \frac{x_j dS}{R^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sigma} \int_s V_j T_j^{(n)} ds \right] = \left\{ \frac{x_j x_k}{a^4} \frac{\partial}{\partial x_k} (V_j R^2) \right\}_R = a + \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \int_s V_j T_j^{(n)} ds = \\ &= \left( n_j n_k \frac{\partial V_j}{\partial x_k} + \frac{2}{a} n_j V_j \right)_R = a + \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \int_s V_j T_j^{(n)} ds. \end{aligned}$$

Nun haben wir andererseits:

$$\operatorname{div} V = \frac{\partial V_j}{\partial x_j}.$$

Folglich, nach (15), für  $R = a$ :

$$\Delta \nu V = \left( \operatorname{div} V - n_j n_k \frac{\partial V_j}{\partial x_k} - \frac{2}{a} n_j V_j \right)_R = a = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \int_s V_j T_j^{(n)} ds.$$

der Länge 1) der Kurve  $s$  sind.  $\Delta \nu \mathbf{F}$  hängt also nur von den Tangentialkomponenten von  $\mathbf{F}$  auf der Kugel ab. — Bei Einführung von Polarkoordinaten ist nun:

$$\frac{x_j}{R} F_j = F_R, \quad \frac{x_k}{R} \frac{\partial F_j}{\partial x_k} = \frac{\partial F_j}{\partial R}.$$

Wir haben ferner entsprechend der Definition von  $\Delta \nu$  in (15) auf der Kugel  $R = a$ :

$$0 = \Delta P = \operatorname{div} \operatorname{grad} P = \frac{\partial^2 P}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial P}{\partial R} + \Delta \nu \operatorname{grad} P.$$

Da nach (15)  $P$  auf der betrachteten Kugel gleich  $F_R$  ist, so folgt aus dem in der Anmerkung S. 18 bewiesenen Satz, daß:

$$\Delta \nu \operatorname{grad} P = \Delta \nu \operatorname{grad} F_R$$

ist. Wir haben also:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial P}{\partial R} = -\Delta \nu \operatorname{grad} F_R, \quad \text{für } R = a,$$

folglich:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial P}{\partial R} = -\Delta F_R + \frac{\partial^2 F_R}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial F_R}{\partial R}, \quad \text{für } R = a.$$

Die Gleichungen (15) ergeben für  $R = a$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial R} &= \operatorname{div} \mathbf{F} - \frac{\partial F_R}{\partial R} - \frac{2}{a} F_R, \\ \frac{\partial P^*}{\partial R} &= \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial R} - \frac{\partial^2 F_R}{\partial R^2} - \frac{2}{a} \frac{\partial F_R}{\partial R}. \end{aligned}$$

Aus den letzten drei Gleichungen folgt, immer unter der Voraussetzung  $R = a$ :

$$\frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{R}{a} \frac{\partial P}{\partial R} + \frac{2}{a} P + P^* \right) = \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial R} - \Delta F_R + \frac{1}{a} \operatorname{div} \mathbf{F} - \frac{1}{a} \frac{\partial F_R}{\partial R} - \frac{2}{a^2} F_R.$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial R} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{x_k}{R} \frac{\partial F_j}{\partial x_k} \right) = \frac{x_k}{R} \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{1}{R} \frac{\partial F_j}{\partial x_j} - \frac{x_j x_k}{R^3} \frac{\partial F_j}{\partial x_k} = \\ &= \frac{\partial}{\partial R} \operatorname{div} \mathbf{F} + \frac{1}{R} \operatorname{div} \mathbf{F} - \frac{1}{R} \frac{\partial F_R}{\partial R}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta F_R &= \Delta \left( \frac{x_j}{R} F_j \right) = \frac{x_j}{R} \Delta F_j + \frac{2}{R} \frac{\partial F_j}{\partial x_j} - \frac{2 x_j x_k}{R^3} \frac{\partial F_j}{\partial x_k} - \frac{2 x_j}{R^3} F_j = \\ &= (\Delta \mathbf{F})_R + \frac{2}{R} \operatorname{div} \mathbf{F} - \frac{2}{R} \frac{\partial F_R}{\partial R} - \frac{2}{R^2} F_R. \end{aligned}$$

Folglich für  $R = a$ :

$$\frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{R}{a} \frac{\partial P}{\partial R} + \frac{2}{a} P + P^* \right) = \frac{\partial}{\partial R} \operatorname{div} \mathbf{F} - (\Delta \mathbf{F})_R.$$

Diese Gleichung zeigt, daß, wenn die Funktionen  $P$  und  $P^*$  die hier vorausgesetzten Eigenschaften haben, der Ansatz (16) in der Tat nicht nur der Bedingung (13), sondern auch der Bedingung (14) genügt.

### 103. Ansatz zur Lösung durch Reihen nach Kugelfunktionen.

Wir gehen zum Beweise der Existenz unserer Lösung über. Es muß gezeigt werden, daß die Normalkomponente des Vektors  $\mathbf{F}$  an der Kugel  $R = a$  so bestimmt werden kann, daß zwei in  $\Omega$  reguläre und in unendlicher Ferne verschwindende Potentialfunktionen  $P$  und  $P^*$  existieren, welche an der Kugel  $R = a$  den Bedingungen (15) genügen. Wir führen zu diesem Nachweis Polarkoordinaten ein, indem wir  $x_1 = R \cos \vartheta$ ,  $x_2 = R \sin \vartheta \cos \varphi$ ,  $x_3 = R \sin \vartheta \sin \varphi$  setzen und entwickeln die Funktionen  $F_i$  in Reihen von der folgenden Form:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \sum_0^{\infty} {}_{(m)} \sum_0^m {}_{(n)} (c_{m,n}^{(1)} \cos n\varphi + s_{m,n}^{(1)} \sin n\varphi) P_{m,n}(\cos \vartheta), \\ F_2 &= \sum_0^{\infty} {}_{(m)} \sum_0^m {}_{(n)} [(c_{m,n}^{(2)} + c_{m,n}^{(3)}) \cos n\varphi + \\ &\quad + (s_{m,n}^{(2)} + s_{m,n}^{(3)}) \sin n\varphi] P_{m,n}(\cos \vartheta), \\ F_3 &= \sum_0^{\infty} {}_{(m)} \sum_0^m {}_{(n)} [(s_{m,n}^{(3)} - s_{m,n}^{(2)}) \cos n\varphi + \\ &\quad + (c_{m,n}^{(2)} - c_{m,n}^{(3)}) \sin n\varphi] P_{m,n}(\cos \vartheta). \end{aligned} \right\} (17)$$

Hier sind:

$$\begin{aligned} P_{m,n}(x) &= \frac{(m-n)!}{(2m)!} (1-x^2)^{\frac{n}{2}} \frac{d^{m+n} (x^2-1)^m}{dx^{m+n}} = \\ &= (-1)^n \frac{(m+n)!}{(2m)!} (1-x^2)^{-\frac{n}{2}} \frac{d^{m-n} (x^2-1)^m}{dx^{m-n}} \end{aligned}$$

die zugeordneten Kugelfunktionen. Sie sind miteinander durch die Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P_{m,n}(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} &= n \cot \vartheta P_{m,n} - (m-n) P_{m,n+1} = \\ &\quad - n \cot \vartheta P_{m,n} + (m+n) P_{m,n-1} \\ \frac{\partial P_{m,o}}{\partial \vartheta} &= -m P_{m,1}, \quad \frac{\partial P_{m,m}}{\partial \vartheta} = m \cot \vartheta P_{m,m} = \\ &\quad - m \cot \vartheta P_{m,m} + 2m P_{m,m-1} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} (m+1) \cos \vartheta P_{m,n} + \sin \vartheta \frac{\partial P_{m,n}}{\partial \vartheta} &= (2m+1) P_{m+1,n} \\ \sin \vartheta P_{m,m} &= P_{m+1,m+1} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

verbunden.  $c_{m,n}^{(j)}$  und  $s_{m,n}^{(j)}$  sind Funktionen von  $R$  und  $t$ . Wir nehmen an, daß sie der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial f_m}{\partial t} = \nu \left( \frac{\partial^2 f_m}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial f_m}{\partial R} - \frac{m(m+1)}{R^2} f_m \right)$$

genügen, für  $t = 0$ ,  $R > a$  verschwinden und bei  $R \rightarrow \infty$  den Bedingungen:  $\lim c_{m,n}^{(j)} = \lim s_{m,n}^{(j)} = 0$  genügen. Die durch die Reihen (17) definierten drei Vektorkomponenten befriedigen dann für  $t > 0$  und  $R > a$ , wenn gliedweise Differentiation erlaubt ist, die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = \nu \Delta \mathbf{F}.$$

Wir zeigen jetzt, daß, wenn wir den Funktionen  $c$  und  $s$  folgende neue Bedingungen auferlegen, alle unsere Bedingungen erfüllt sind: für  $1 \leq n \leq m-1$ :

$$\left. \begin{aligned} (m^2 - n^2) c_{m,n}^{(1)} + (m+n)(m+n+1) c_{m,n+1}^{(2)} - \\ - (m-n)(m-n+1) c_{m,n-1}^{(3)} &= 0, \\ (m^2 - n^2) s_{m,n}^{(1)} + (m+n)(m+n+1) s_{m,n+1}^{(2)} - \\ - (m-n)(m-n+1) s_{m,n-1}^{(3)} &= 0, \\ m c_{m,o}^{(1)} + (m+1) c_{m,1}^{(2)} &= 0, \quad c_{m,o}^{(2)} = 0, \\ 2m c_{m,m}^{(1)} - c_{m,m-1}^{(3)} &= 0, \quad s_{m,o}^{(2)} = 0, \quad 2m s_{m,m}^{(1)} - s_{m,m-1}^{(3)} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

#### 104. Berechnung von $F_R$ , $\Delta v F$ und $n \operatorname{rot} F$ für $R = a$ .

Wir berechnen unter der Voraussetzung, daß die Beziehungen (20) bestehen,  $F_R$  und  $\Delta v F$  und berechnen außerdem die Normalkomponente von  $\operatorname{rot} \mathbf{F}$  auf der Kugel  $R = a$ . Wir gehen bei der Berechnung

122 § 10. Die nicht-stationären Gleichungen. Das Problem der Kugel von  $F_R$  auf die Einzelheiten ein, geben aber betreffs  $\Delta v F$  nur das Ergebnis der Rechnung. Wir haben:

$$\begin{aligned}
 F_R = & \sum_0^{\infty} {}_{(m)} \sum_0^m {}_{(n)} [ [ c_{m,n}^{(1)} \cos \vartheta \cos n\varphi + c_{m,n}^{(2)} \sin \vartheta \cos (n-1)\varphi + \\
 & + c_{m,n}^{(3)} \sin \vartheta \cos (n+1)\varphi ] P_{m,n} + [ s_{m,n}^{(1)} \cos \vartheta \sin n\varphi + \\
 & + s_{m,n}^{(2)} \sin \vartheta \sin (n-1)\varphi + s_{m,n}^{(3)} \sin \vartheta \sin (n+1)\varphi ] P_{m,n} ] = \\
 = & \sum_0^{\infty} {}_{(m)} \left\{ \sum_1^{m-1} {}_{(n)} [ [ c_{m,n}^{(1)} P_{m,n} \cos \vartheta + c_{m,n+1}^{(2)} P_{m,n+1} \sin \vartheta + \right. \\
 & + c_{m,n-1}^{(3)} P_{m,n-1} \sin \vartheta ] \cos n\varphi + [ s_{m,n}^{(1)} P_{m,n} \cos \vartheta + \\
 & + s_{m,n+1}^{(2)} P_{m,n+1} \sin \vartheta + s_{m,n-1}^{(3)} P_{m,n-1} \sin \vartheta ] \sin n\varphi ] + \\
 & + c_{m,0}^{(1)} P_{m,0} \cos \vartheta + c_{m,1}^{(2)} P_{m,1} \sin \vartheta + (c_{m,m}^{(1)} P_{m,m} \cos \vartheta + \\
 & + c_{m,m-1}^{(3)} P_{m,m-1} \sin \vartheta) \cos m\varphi + c_{m,m}^{(3)} P_{m,m} \sin \vartheta \cos (m+1)\varphi + \\
 & + (s_{m,m}^{(1)} P_{m,m} \cos \vartheta + s_{m,m-1}^{(2)} P_{m,m-1} \sin \vartheta) \sin m\varphi + \\
 & \left. + s_{m,m}^{(3)} P_{m,m} \sin \vartheta \sin (m+1)\varphi \right\}.
 \end{aligned}$$

Wir formen diesen Ausdruck um, indem wir mit Hilfe von (18)  $P_{m,n-1}$  und  $P_{m,n+1}$  durch  $P_{m,n}$  und  $\frac{\partial P_{m,n}}{\partial \vartheta}$  ausdrücken. Wenn wir beachten, daß aus (20) folgt:

$$\begin{aligned}
 c_{m,n}^{(1)} + \frac{n}{m-n} c_{m,n+1}^{(2)} + \frac{n}{m+n} c_{m,n-1}^{(3)} = \\
 = (m+1) \left( \frac{1}{m+n} c_{m,n-1}^{(3)} - \frac{1}{m-n} c_{m,n+1}^{(2)} \right), \\
 s_{m,n}^{(1)} + \frac{n}{m-n} s_{m,n+1}^{(2)} + \frac{n}{m+n} s_{m,n-1}^{(3)} = \\
 = (m+1) \left( \frac{1}{m+n} s_{m,n-1}^{(3)} - \frac{1}{m-n} s_{m,n+1}^{(2)} \right)
 \end{aligned}$$

$$1 \leq n \leq m-1$$

und außerdem:

$$\begin{aligned}
 c_{m,0}^{(1)} = -\frac{m+1}{m} c_{m,1}^{(2)}, \quad c_{m,m}^{(1)} + \frac{1}{2} c_{m,m-1}^{(3)} = \frac{m+1}{2m} c_{m,m-1}^{(3)}, \\
 s_{m,m}^{(1)} + \frac{1}{2} s_{m,m-1}^{(3)} = \frac{m+1}{2m} s_{m,m-1}^{(3)}
 \end{aligned}$$

so können wir das Ergebnis in der folgenden Form schreiben:

$$\begin{aligned}
F_R = & \sum_0^{\infty} {}_{(m)} \left\{ \sum_1^{m-1} {}_{(n)} \left\{ \left( \frac{1}{m+n} c_{m,n-1}^{(3)} - \frac{1}{m-n} c_{m,n+1}^{(2)} \right) \cos n\varphi + \right. \right. \\
& + \left( \frac{1}{m+n} s_{m,n-1}^{(3)} - \frac{1}{m-n} s_{m,n+1}^{(2)} \right) \sin n\varphi \Big\} \Big\} (m+1) P_{m,n} \cos \vartheta + \\
& + \frac{\partial P_{m,n}}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \Big\} - \frac{1}{m} c_{m,1}^{(2)} \left\{ (m+1) P_{m,0} \cos \vartheta + \frac{\partial P_{m,0}}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \right\} + \\
& + \frac{1}{2m} \left\{ c_{m,m-1}^{(3)} \cos m\varphi + s_{m,m-1}^{(3)} \sin m\varphi \right\} \left\{ (m+1) P_{m,m} \cos \vartheta + \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial P_{m,m}}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \right\} + \left\{ c_{m,m}^{(3)} \cos (m+1)\varphi + s_{m,m}^{(3)} \sin (m+1)\varphi \right\} P_{m,m} \sin \vartheta \right\}.
\end{aligned}$$

Wir wenden jetzt die Identitäten (19) an. Da wegen (20):

$$\begin{aligned}
(2m+1) \left( \frac{c_{m,n-1}^{(3)}}{m+n} - \frac{c_{m,n+1}^{(2)}}{m-n} \right) &= c_{m,n}^{(1)} - c_{m,n+1}^{(2)} + c_{m,n-1}^{(3)}, \\
(2m+1) \left( \frac{s_{m,n-1}^{(3)}}{m+n} - \frac{s_{m,n+1}^{(2)}}{m-n} \right) &= s_{m,n}^{(1)} - s_{m,n+1}^{(2)} + s_{m,n-1}^{(3)}, \\
-\frac{2m+1}{m} c_{m,1}^{(2)} &= c_{m,0}^{(1)} - c_{m,1}^{(2)}, \quad \frac{2m+1}{2m} c_{m,m-1}^{(3)} = c_{m,m}^{(1)} + c_{m,m-1}^{(3)},
\end{aligned}$$

$$-\frac{2m+1}{2m} s_{m,m-1}^{(3)} = s_{m,m}^{(1)} + s_{m,m-1}^{(3)},$$

können wir das Ergebnis in der einfachen Form:

$$F_R = \sum_0^{\infty} {}_{(m)} S_{m+1} \tag{21}$$

schreiben, wo:

$$\begin{aligned}
S_{m+1} = & \sum_0^{m-1} {}_{(n)} P_{m+1,n} \left[ (c_{m,n}^{(1)} - c_{m,n+1}^{(2)} + c_{m,n-1}^{(3)}) \cos n\varphi + \right. \\
& + (s_{m,n}^{(1)} - s_{m,n+1}^{(2)} + s_{m,n-1}^{(3)}) \sin n\varphi \Big] + \\
& + P_{m+1,0} (c_{m,0}^{(1)} - c_{m,1}^{(2)}) + P_{m+1,m} \left[ (c_{m,m}^{(1)} + c_{m,m-1}^{(3)}) \cos m\varphi + \right. \\
& + (s_{m,m}^{(1)} + s_{m,m-1}^{(3)}) \sin m\varphi \Big] \\
& + P_{m+1,m+1} \left[ c_{m,m}^{(3)} \cos (m+1)\varphi + s_{m,m}^{(3)} \sin (m+1)\varphi \right].
\end{aligned}$$

Man findet durch ähnliche Rechnungen:

$$\operatorname{div} F = \sum_0^{\infty} {}_{(m)} \left( \frac{\partial}{\partial R} - \frac{m}{R} \right) S_{m+1} \tag{22}$$

Aus (21) und (22) folgt:

$$\Delta \nu F = \left( \operatorname{div} F - \frac{\partial F_R}{\partial R} - \frac{2}{R} F_R \right)_{R=a} = -\frac{1}{a} \sum_0^{\infty} {}_{(m)} (m+2) S_{m+1} \tag{23}$$

Wir betrachten schließlich:

$$\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \frac{x_1}{a} \left( \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right) + \frac{x_2}{a} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \right) + \frac{x_3}{a} \left( \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right).$$

Die Berechnung geschieht ohne Schwierigkeit und man findet, ohne die Beziehungen (20) zu benutzen:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{F} = & \frac{1}{a} \sum_0^{\infty} {}^{(m)} \left\{ \sum_2^{m-1} {}^{(n)} \{ [ (m-n+1) c_{m,n-1}^{(3)} + (m+n+1) c_{m,n+1}^{(2)} - \right. \right. \\ & - n c_{m,n}^{(1)} ] \sin n \varphi - [ (m-n+1) s_{m,n-1}^{(3)} + (m+n+1) s_{m,n+1}^{(2)} - \right. \\ & - n s_{m,n}^{(1)} ] \cos n \varphi \} P_{m,n} (\cos \vartheta) - (m+1) s_{m,1}^{(2)} P_{m,0} + \\ & + [ m (c_{m,0}^{(2)} + c_{m,0}^{(3)}) + (m+2) c_{m,2}^{(2)} - c_{m,1}^{(1)} ] \sin \varphi P_{m,1} - \\ & - [ m (s_{m,0}^{(2)} + s_{m,0}^{(3)}) + (m+2) s_{m,2}^{(2)} - s_{m,1}^{(1)} ] \cos \varphi P_{m,1} - \\ & - (c_{m,m-1}^{(3)} - m c_{m,m}^{(1)}) \sin m \varphi P_{m,m} - \\ & \left. \left. - (s_{m,m-1}^{(3)} - m s_{m,m}^{(1)}) \cos m \varphi P_{m,m} \right\} \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

### 10.5. Verifikation der Bedingungen.

Wir können leicht zeigen, daß, wenn eine Vektorfunktion  $\mathbf{F}$  existiert, welche allen bis jetzt aufgestellten Bedingungen genügt, welche also die Differentialgleichung (4) befriedigt, für  $t = 0$ ,  $R > a$  und für  $t > 0$ ,  $R \rightarrow \infty$  verschwindet, an der Kugel  $R = a$  Tangentialkomponenten hat, welche der Bedingung (11) genügen, und endlich die Bedingungen (20) erfüllt, daß dann tatsächlich die beiden Potentialfunktionen  $P$  und  $P^*$  existieren. Wir haben in der Tat:

$$P = \sum_0^{\infty} {}^{(m)} (S_{m+1})_{R=a} \frac{a^{m+2}}{R^{m+2}}, \quad P^* = \sum_0^{\infty} {}^{(m)} \left( \frac{\partial S_{m+1}}{\partial R} \right)_{R=a} \frac{a^{m+2}}{R^{m+2}}.$$

Die Frage, welche wir schließlich zu beantworten haben, ist also die, ob es eine Vektorfunktion  $\mathbf{F}$  gibt, die den oben aufgestellten Bedingungen genügt. Wir können diese Frage auch so formulieren: gibt es eine Vektorfunktion  $\mathbf{F}$ , welche der Differentialgleichung (4) und den Bedingungen (20) genügt und deren Tangentialkomponenten an der Kugel  $R = a$  vorgeschriebene Werte annehmen? Um diese Frage zu beantworten, bemerken wir zunächst, daß die linken Seiten der Gleichungen (20) partiellen Differentialgleichungen vom Typus der Wärmeleitungsgleichung genügen und für  $t = 0$ ,  $R > a$  sowie für  $t > 0$ ,  $R \rightarrow \infty$  verschwinden. Wenn die Bedingungen (20) für  $R = a$  erfüllt sind, so

müssen sie unter diesen Umständen auch für  $R > a$  erfüllt sein.\* Wir bemerken ferner, daß durch die Beziehungen (20) nur eine der Komponenten von  $\mathbf{F}$  bestimmt wird, während die übrigen unbestimmt bleiben. Die Bedeutung der Beziehungen (20) ist also, daß eine Komponente von  $\mathbf{F}$  an der Kugel  $R = a$  durch die anderen Komponenten ausgedrückt wird. Wenn wir zeigen können, daß die Beziehungen sich insbesondere so deuten lassen, daß sie die Normalkomponente von  $\mathbf{F}$  an der Kugel  $R = a$  durch die Tangentialkomponenten ausdrücken, während diese vollständig unbestimmt bleiben, so haben wir unseren Beweis zu Ende geführt.

Um nun zu zeigen, daß die Beziehungen (20) in keiner Weise die Tangentialkomponenten des Vektors  $\mathbf{F}$  an der Kugel  $R = a$  bestimmen, betrachten wir für  $R = a$  die Ausdrücke (23) und (24) für  $\Delta \nu \mathbf{F}$  und  $\mathbf{n} \text{ rot } \mathbf{F}$ . Wir behaupten, daß diese trotz der Beziehungen (20) frei wählbar sind. Um dies zu beweisen, haben wir nur zu zeigen, daß wir die Größen  $c_{m,n}^{(j)}$ ,  $s_{m,n}^{(j)}$  (für  $R = a$ ) so bestimmen können, daß (20) erfüllt ist und daß gleichzeitig (für  $R = a$ ) die Koeffizienten der Reihen (23) und (24) vorgeschriebene Funktionen von  $t$  sind. Wenn wir uns der Kürze wegen auf die Hauptglieder, für die  $1 \leq n < m$  ist, beschränken und ferner nur die Größen  $c$  betrachten, so ergeben diese Bedingungen:

$$(m^2 - n^2) c_{m,n}^{(1)} + (m+n)(m+n+1) c_{m,n+1}^{(2)} - (m-n)(m-n+1) c_{m,n-1}^{(3)} = 0,$$

$$c_{m,n}^{(1)} - c_{m,n-1}^{(2)} + c_{m,n+1}^{(3)} = a_{m,n}(t),$$

$$-n c_{m,n}^{(1)} + (m+n+1) c_{m,n+1}^{(2)} + (m-n+1) c_{m,n-1}^{(3)} = \beta_{m,n}(t),$$

wo  $a_{m,n}(t)$  und  $\beta_{m,n}(t)$  vorgeschriebene Funktionen von  $t$  sind. Die Determinante dieses linearen Systemes ist:

$$-2m(m+1)(2m+1).$$

Sie kann also niemals verschwinden. Da auch die „pathologischen“ Glieder in (23) und (24), d. h. die Glieder, bei denen in  $\sin n\varphi$ ,  $\cos n\varphi$   $n = 0, 1$  oder  $n = m$  ist, willkürlich bestimmt werden können, so ist bewiesen, daß die Werte von  $\Delta \nu \mathbf{F}$  und  $\mathbf{n} \text{ rot } \mathbf{F}$  auf der Kugel  $R = a$  in keiner Weise durch die Beziehungen (20) bestimmt sind.

\* Es ist eine wohlbekannte Eigenschaft der Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \quad (\mu > 0),$$

daß eine Lösung, welche für  $r \geq a$ ,  $t \geq 0$  regulär ist und für  $r > a$ ,  $t = 0$  und für  $t > 0$ ,  $r = a$  und  $r = \infty$  verschwindet, für  $r > a$ ,  $t > 0$  identisch gleich Null ist.

Wir zeigen ferner kurz, daß durch die Werte von  $\Delta \nu \mathbf{F}$  und  $\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{F}$  auf der Kugel  $R = a$  die Tangentialkomponenten dieses Vektors eindeutig bestimmt sind, präziser ausgedrückt, daß wenn eine auf der Kugel  $R = a$  definierte Vektorfunktion dort stetige und stetig differenzierbare Tangentialkomponenten hat und wenn auf der Kugel sowohl  $\Delta \nu \mathbf{F} = 0$  wie  $\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$  sind, daß dann die Tangentialkomponenten von  $\mathbf{F}$  auf der Kugel verschwinden. Wir haben in der Tat:

$$\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \int_s F_j dx_j,$$

wobei die Integration in positiver Richtung um die geschlossene Kurve  $s$  geführt wird, welche das Flächenelement  $\sigma$  umschließt. Aus  $\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$  folgt unmittelbar, daß

$$\int_s F_j dx_j = 0$$

für jede geschlossene Kurve  $s$  auf der Kugel. Daraus folgt wiederum, daß das Integral:

$$\int_{P^{(0)}}^P F_j dx_j,$$

wo  $P^{(0)}$  ein fester und  $P$  ein variabler Punkt der Kugel  $R = a$  ist, vom Wege unabhängig ist und also als eine offenbar stetige und stetig differenzierbare Funktion des Punktes  $P$  aufgefaßt werden kann. Wir setzen:

$$\int_{P^{(0)}}^P F_j dx_j = G(P).$$

Aus der Beziehung:

$$\Delta \nu \mathbf{F} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \int_s F_j T_j^{(n)} ds = 0$$

folgt andererseits für jede geschlossene Kurve  $s$ :

$$\int_s F_j T_j^{(n)} ds = 0.$$

Diese Beziehung läßt sich auch in der Form:

$$\int_s \frac{\partial G}{\partial x_j} T_j^{(n)} ds = 0 \quad (25)$$

schreiben, indem für jeden die Kugel tangierenden Vektor  $T$  gilt:

$$F_j T_i = \frac{\partial G}{\partial x_j} T_i.$$

Die Beziehung (25) entspricht der bekannten Gleichung:

$$\int_s \frac{\partial G}{\partial n} ds = 0$$

in der Theorie des ebenen Potentials und zeigt wie diese Gleichung, daß die Funktion  $G$  keine Maximum- oder Minimumstelle haben kann. Da dies auf der ganzen Kugel gilt, muß  $G$  konstant sein und also die Tangentialkomponenten des Vektors  $\mathbf{F}$  auf der Kugel  $R = a$  verschwinden.

Um nun auf der Kugel  $R = a$  eine Vektorfunktion  $\mathbf{F}$  zu konstruieren, welche vorgeschrriebene Tangentialkomponenten hat und den Bedingungen (20) genügt, berechnet man zunächst aus den Tangentialkomponenten  $\Delta \nu \mathbf{F}$  und  $\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{F}$ . Man bildet dann, z. B. durch Reihenentwicklungen, die Vektorfunktion, welche den so gefundenen Werten von  $\Delta \nu \mathbf{F}$  und  $\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{F}$  entspricht und welche außerdem den Bedingungen (20) genügt. Die Tangentialkomponenten dieser Vektorfunktion auf der Kugel  $R = a$  nehmen notwendig die vorgeschrriebenen Werte an. Abgesehen von der Stetigkeit, stetigen Differenzierbarkeit usw., welche wir für die Tangentialkomponenten des Vektors  $\mathbf{F}$  zur Sicherung der Existenz von  $\Delta \nu \mathbf{F}$  und  $\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{F}$  und der Konvergenz unserer Reihen voraussetzen müssen, sind also diese Tangentialkomponenten trotz der Beziehungen (20) frei wählbar.

Unser Beweis ist hiermit zu Ende geführt.

### 106. Neue Darstellung von $F_R$ .

Wir zeigen jetzt, wie man, wenn (wie wir jetzt wissen) die Funktionen  $P$  und  $P^*$  existieren, die Normalkomponente des Vektors  $\mathbf{F}$  an der Kugel  $R = a$  bestimmen kann. Wir haben an dieser Kugel nach (15) S. 117:

$$\frac{dP}{dn} = \Delta \nu \mathbf{F}.$$

Folglich, wegen (11) S. 116:

$$\frac{dP}{dn} = \int_0^t \Delta \nu \{U(\tau) - \operatorname{grad} \Phi(\tau)\} d\tau.$$

Wir bezeichnen mit  $\overline{\Phi}$  eine in  $\Omega$  reguläre und in unendlicher Ferne verschwindende Potentialfunktion, welche an der Kugel  $R = a$  der Bedingung:

$$\frac{d\bar{\Phi}}{dn} = \Delta_{\text{lv}} U$$

genügt. Da:

$$\begin{aligned}\Delta_{\text{lv}} \text{grad } \Phi &= \left( \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} - \frac{2}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_{R=a} = - \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_{R=a} = \\ &= - \frac{1}{a} \left\{ \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \Phi \right) \right\}_{R=a}\end{aligned}$$

ist, so können wir, für beliebige  $R$ -Werte:

$$P = \int_0^t \left\{ \bar{\Phi}(\tau) + \frac{R}{a} \frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial R} + \frac{1}{a} \Phi(\tau) \right\} d\tau$$

setzen. Für  $R = a$  erhalten wir hieraus:

$$F_R = P = \int_0^t \left\{ U_j(\tau) n_j + \bar{\Phi}(\tau) + \frac{1}{a} \Phi(\tau) \right\} d\tau. \quad (26)$$

### 10.7. Zusammenfassung.

Wir fassen die gewonnenen Ergebnisse in dem folgenden Satze zusammen:

Um eine für  $t > 0$ ,  $R > a$  reguläre Lösung des Systems (1), (2) zu bestimmen, welche für  $t = 0$ ,  $R > a$  und für  $t > 0$ ,  $R \rightarrow \infty$  der Bedingung  $u_j = 0$  ( $j = 1, 2, 3$ ) und an der Kugel  $R = a$  der Bedingung  $u_j = U_j$  genügt, bestimmt man zunächst zwei außerhalb der Kugel reguläre, in unendlich entfernten Punkten verschwindende Potentialfunktionen  $\Phi$  und  $\bar{\Phi}$ , die an der Kugel  $R = a$  den Bedingungen:

$$\frac{d\Phi}{dn} = U_n, \quad \frac{d\bar{\Phi}}{dn} = \Delta_{\text{lv}} U$$

genügen. Die Normale wird hier nach außen gezogen. Die Operation  $\Delta_{\text{lv}} U$  ist durch die Gleichung:

$$\Delta_{\text{lv}} U = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \int_s T_j^{(n)} U_j ds = \frac{\partial U_j}{\partial x_j} - n_j n_k \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \frac{2}{a} n_j U_j$$

definiert, wo  $\sigma$  ein Flächenelement der Kugel  $R = a$ ,  $s$  die Randkurve von  $\sigma$  und  $T_j^{(n)}$  die Komponenten eines die Kugel tangierenden, gegen das Element  $ds$  der Kurve  $s$  senkrechten, von  $\sigma$  nach außen gezogenen Vektors von der Länge 1 ist.

Nachdem  $\Phi$  und  $\bar{\Phi}$  bestimmt worden sind, sucht man eine für  $t > 0$ ,  $R > a$  reguläre, für  $t = 0$ ,  $R > a$  und  $t > 0$ ,  $R \rightarrow \infty$  verschwindende Lösung der Gleichung:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = \nu \Delta \mathbf{F}, \quad \left( \nu = \frac{\mu}{\varrho} \right)$$

die an der Kugel  $R = a$  den Wert:

$$\int_0^t \left\{ \mathbf{U}(\tau) - \text{grad } \Phi + \mathbf{n} \left( U_n(\tau) + \bar{\Phi}(\tau) + \frac{1}{a} \Phi(\tau) \right) \right\} d\tau$$

annimmt. Die Tangentialkomponenten dieses Vektors haben die Werte:

$$T_j \int_0^t \left( U_j(\tau) - \frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial x_j} \right) d\tau$$

was mit (11) übereinstimmt. Die Normalkomponente hat wegen (9) den Wert:

$$\int_0^t \left( U_n(\tau) + \bar{\Phi}(\tau) + \frac{1}{a} \Phi(\tau) \right) d\tau,$$

was mit (26) übereinstimmt.

Man bestimmt schließlich eine für  $t > 0$ ,  $R > a$  reguläre, in unendlicher Ferne verschwindende Potentialfunktion  $\Phi^*$ , die an der Kugel  $R = a$  den Wert:

$$\nu \frac{\partial F_j}{\partial x_j}$$

annimmt. Dann ist an derselben Kugel:

$$\frac{d\Phi^*}{dn} = \nu n_j \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_j \partial x_k} - \nu n_k \Delta F_k$$

und die Lösung des Problems ist:

$$u_j = \frac{\partial F_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Phi + \Phi^* - \nu \frac{\partial F_j}{\partial x_j} \right), \quad p = -\varrho \frac{\partial}{\partial t} (\Phi + \Phi^*).$$

## 108. Erste Anwendung.

Um die Anwendung dieses Satzes zu illustrieren, behandeln wir zwei spezielle Fälle,<sup>9</sup> von denen der erste trivial ist, während der zweite hydrodynamisches Interesse besitzt.

$\varphi(x_j, t)$  sei eine für  $t > 0, R > a$  reguläre, für  $t = 0, R > a$  und für  $t > 0, R \rightarrow \infty$  verschwindende Potentialfunktion. Wir setzen in der in 10, 1 formulierten Aufgabe:

$$U_j = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)_{R=a}.$$

Die Lösung des hiermit gegebenen Problems ist

$$u_j = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, \quad p = -\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (j = 1, 2, 3).$$

Wir bestätigen, daß man aus unserer Regel dieses Ergebnis bekommt. Wir haben:

$$U_n = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right)_{R=a}, \quad \Delta \nu U = - \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right)_{R=a},$$

also:

$$\Phi = \varphi, \quad \bar{\Phi} = -\frac{R}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial R} - \frac{1}{a} \varphi.$$

Folglich:

$$\left( U_j - \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right)_{R=a} = 0, \quad \left( U_n + \bar{\Phi} + \frac{1}{a} \Phi \right)_{R=a} = 0.$$

Also:

$$\mathbf{F} = 0, \quad \Phi^* = 0.$$

Also schließlich:

$$u_j = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, \quad p = -\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

## 10 9. Zweite Anwendung.

In unserem zweiten Beispiel nehmen wir an, daß die Größen  $U_j(t)$  an der Kugel  $R = a$  vom Orte unabhängig sind. Wir haben unter diesen Umständen für  $R = a$ :

$$\frac{d\Phi}{dn} = U_n = \frac{1}{a} x_j U_j, \quad \frac{d\bar{\Phi}}{dn} = \Delta \nu U = -\frac{2}{a^2} x_j U_j,$$

folglich:

$$\Phi = -\frac{1}{2} x_j U_j \frac{a^3}{R^3}, \quad \bar{\Phi} = x_j U_j \frac{a^2}{R^3}$$

und, für  $R = a$ :

$$\mathbf{F} = \frac{3}{2} \int_0^t \mathbf{U}(\tau) d\tau.$$

Wir sind also zu der Aufgabe geführt worden, eine für  $t > 0, R > a$  reguläre, für  $t = 0, R > a$  und für  $t > 0, R \rightarrow \infty$  verschwindende Lösung der Vektorgleichung (4) zu bestimmen, die an der Kugel  $R = a$  einen nur von der Zeit abhängigen Wert annimmt. Die Substitution:

$$F = \frac{1}{R} f(R, t)$$

führt die Differentialgleichung (4) in die einfachere Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 f}{\partial R^2}$$

über. Eine Lösung dieser Gleichung, welche für  $t > 0$ ,  $R > a$  regulär ist, für  $t = 0$ ,  $R > a$  und für  $t > 0$ ,  $R \rightarrow \infty$  verschwindet und an der Kugel  $R = a$  den Wert:

$$\frac{3}{2} a \int_0^t U(\tau) d\tau$$

annimmt, ist (vgl. hierzu unsere Ausführungen im fünften Paragraphen S. 40ff.):

$$f = \frac{3}{4\sqrt{\pi\nu}} a \int_0^t (R - a) \frac{e^{-\frac{(R-a)^2}{4\nu(t-t^{(0)})}}}{(t-t^{(0)})^{3/2}} dt^{(0)} \int_0^{t^{(0)}} U(\tau) d\tau.$$

Sie ergibt:

$$F = \frac{3}{4\sqrt{\pi\nu}} \frac{a}{R} \int_0^t (R - a) \frac{e^{-\frac{(R-a)^2}{4\nu(t-t^{(0)})}}}{(t-t^{(0)})^{3/2}} dt^{(0)} \int_0^{t^{(0)}} U(\tau) d\tau.$$

Wir erhalten hieraus:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_j}{\partial x_j} &= \frac{x_j}{R} \frac{\partial F_j}{\partial R} = -\frac{1}{R^2} x_j F_j - \\ &\quad - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{ax_j}{R} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial R^2} \frac{e^{-\frac{(R-a)^2}{4\nu(t-t^{(0)})}}}{(t-t^{(0)})^{1/2}} dt^{(0)} \int_0^{t^{(0)}} U_j(\tau) d\tau = \\ &\quad - \frac{1}{R^2} x_j F_j + \frac{3x_j}{2\sqrt{\pi\nu}} \frac{a}{R} \int_0^t \frac{\partial}{\partial t^{(0)}} \frac{e^{-\frac{(R-a)^2}{4\nu(t-t^{(0)})}}}{(t-t^{(0)})^{1/2}} dt^{(0)} \int_0^{t^{(0)}} U_j(\tau) d\tau = \\ &\quad - \frac{1}{R^2} x_j F_j - \frac{3x_j}{2\sqrt{\pi\nu}} \frac{a}{R} \int_0^t U_j(t^{(0)}) \frac{e^{-\frac{(R-a)^2}{4\nu(t-t^{(0)})}}}{(t-t^{(0)})^{1/2}} dt^{(0)} \end{aligned}$$

und für  $R = a$ :

$$\nu \frac{\partial F_j}{\partial x_j} = \Phi^* = -\frac{3\nu x_j}{2a^2} \left\{ \int_0^t U_j(\tau) d\tau + \frac{a}{\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \frac{U_j(t^{(0)})}{\sqrt{t-t^{(0)}}} dt^{(0)} \right\}.$$

Folglich:

$$\Phi^* = -\frac{3\nu x_j}{2R^3} \left\{ a \int_0^t U_j(\tau) d\tau + \frac{a^2}{\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \frac{U_j(t^{(0)})}{\sqrt{t-t^{(0)}}} dt^{(0)} \right\}.$$

### 10 10. Das Problem von Boussinesq.

Das hydrodynamische Problem, das zu der eben gelösten Randwertaufgabe führt, ist das folgende. In einer zähen Flüssigkeit, welche sonst den ganzen Raum erfüllt, befindet sich ein kugelförmiger Körper. Bis zu dem Momente  $t = 0$  ruht die Flüssigkeit und der Körper. Bei  $t = 0$  fängt der Körper eine translatorische Bewegung an. Man will die dadurch hervorgerufene Bewegung der Flüssigkeit und den Widerstand derselben gegen die Bewegung des Körpers berechnen.

Wir wenden zunächst ein im Raume festes Bezugssystem an. Für die Bewegung der Flüssigkeit gelten dann die Gleichungen Ia S. 12 (wo jedoch  $X_j = 0$  zu setzen ist) und die Kontinuitätsbedingung. Die Nebenbedingungen sind: für  $t = 0$  in der ganzen Flüssigkeit  $u_j = 0$  ( $j = 1, 2, 3$ ); für  $t > 0$  in unendlicher Ferne  $u_j = 0$ , an der Oberfläche der Kugel  $u_j = U_j$ , wenn  $U_j(t)$  die Komponenten der Geschwindigkeit derselben sind. Wir transformieren jetzt die Koordinaten (aber nicht die Geschwindigkeitskomponenten), indem wir ein Bezugssystem einführen, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt der Kugel ist, während die Achsen mit den festen Achsen parallel sind. Wir erhalten so die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varrho \frac{\partial u_j}{\partial t} - \mu \Delta u_j &= -\frac{\partial p}{\partial x_j} - \varrho(u_k + U_k) \frac{\partial u_j}{\partial x_k}, \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= 0, \end{aligned}$$

mit den Nebenbedingungen: für  $t = 0$ ,  $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} > a$ :  $u_j = 0$ ; für  $t > 0$ ,  $R \rightarrow \infty$ :  $u_j = 0$ , für  $R = a$ :  $u_j = U_j$ . Wenn wir nach dem Vorgange von Stokes die quadratischen Glieder vernachlässigen, werden die obigen Differentialgleichungen mit unseren Gleichungen (1), (2) identisch. Die in unserem zweiten Beispiele entwickelten Formeln geben uns also die Lösung unserer Aufgabe, so weit sich diese Aufgabe auf die Bewegung der Flüssigkeit bezieht.

Um die Resultante der von der Flüssigkeit auf den Körper ausgeübten Kräfte zu berechnen, haben wir die Integrale:

$$\int_{R=a} \left( -p n_j + \mu n_k \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \right) dS$$

auszuwerten. Wegen der Kontinuitätsbedingung ist das Integral:

$$\int_{R=A} n_k \frac{\partial u_k}{\partial x_j} dS \quad (A \geq a)$$

von  $A$  unabhängig, da für  $A > B \geq a$ :

$$\int_{R=A} n_k \frac{\partial u_k}{\partial x_j} dS - \int_{R=B} n_k \frac{\partial u_k}{\partial x_j} dS = \int_{A>R>B} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} d\omega = 0.$$

Da:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{R=a} n_k \frac{\partial u_k}{\partial x_j} dS = 0,$$

so folgt:

$$\int_{R=a} n_k \frac{\partial u_k}{\partial x_j} dS = 0$$

und also:

$$\int_{R=a} \left( -pn_j + \mu n_k \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \right) dS = \int_{R=a} \left( pn_j + \mu n_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) dS.$$

Wir haben (vgl. S. 129, 130 und 132):

$$\begin{aligned} p = -\varrho \frac{\partial(\Phi + \Phi^*)}{\partial t} &= \varrho \frac{x_j}{R^3} \left\{ \frac{1}{2} a^3 U'_j(t) + \frac{3}{2} \nu a U_j(t) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} a^2 \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{U_j(t^{(0)})}{\sqrt{t-t^{(0)}}} dt^{(0)} \right\} \quad \left( U'_j = \frac{d U_j}{dt} \right). \end{aligned}$$

Da:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{U_j(t^{(0)})}{\sqrt{t-t^{(0)}}} dt^{(0)} = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t U_j(t-\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} = \frac{U_j(0)}{\sqrt{t}} + \int_0^t \frac{U'_{j(t^{(0)})}}{\sqrt{t-t^{(0)}}} dt^{(0)},$$

so folgt:

$$\begin{aligned} - \int_{R=a} p n_j dS &= -\frac{2}{3} \pi \varrho a^3 U'_j(t) - 2\pi \mu a \left\{ U_j(t) + \frac{a}{\sqrt{\pi \nu}} \frac{U_j(0)}{\sqrt{t}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a}{\sqrt{\pi \nu}} \int_0^t \frac{U'_{j(t^{(0)})}}{\sqrt{t-t^{(0)}}} dt^{(0)} \right\}. \end{aligned}$$

Wir haben ferner:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial F_j}{\partial t} - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial F_k}{\partial x_k} = \\
&= \frac{3}{4\sqrt{\pi\nu}} \frac{a}{R} \left( \delta_{jk} - \frac{x_j x_k}{R^2} \right) \int_0^t U_k(t^{(0)}) (R-a) \frac{e^{-\frac{(R-a)^2}{4\nu(t-t^{(0)})}}}{(t-t^{(0)})^{3/2}} dt^{(0)} + \\
&+ \frac{3av}{4\sqrt{\pi\nu}} \frac{1}{R^3} \left( \delta_{jk} - \frac{3x_j x_k}{R^2} \right) \int_0^t (R-a) \frac{e^{-\frac{(R-a)^2}{4\nu(t-t^{(0)})}}}{(t-t^{(0)})^{3/2}} dt^{(0)} \int_0^{t^{(0)}} U_k(\tau) d\tau + \\
&+ \frac{3av}{2\sqrt{\pi\nu}} \frac{1}{R^2} \left( \delta_{jk} - \frac{3x_j x_k}{R^2} \right) \int_0^t U_k(t^{(0)}) \frac{e^{-\frac{(R-a)^2}{4\nu(t-t^{(0)})}}}{\sqrt{t-t^{(0)}}} dt^{(0)}.
\end{aligned}$$

Hieraus:

$$\mu \int_{R=a} \frac{d}{dn} \left( \frac{\partial F_j}{\partial t} - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial F_k}{\partial x_k} \right) dS = -4\pi\mu a U_j(t) - \frac{4a^2}{\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \frac{U'_j(t^{(0)})}{\sqrt{t-t^{(0)}}} dt^{(0)}.$$

Die aus  $\Phi$  und  $\Phi^*$  hervorgehenden Glieder von  $u_j$  geben keinen Beitrag zur Resultante. Die Resultante der Kräfte, welche die Flüssigkeit auf den Körper ausübt, ist also:

$$\begin{aligned}
-\int_{R=a} \left( p\mathbf{u} - \mu \frac{d\mathbf{u}}{dn} \right) dS = & -\frac{2}{3} \pi \varrho a^3 U'(t) - 6\pi\mu a \left\{ U(t) + \right. \\
& \left. + \frac{a}{\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \frac{U'(t^{(0)})}{\sqrt{t-t^{(0)}}} dt^{(0)} \right\} - 2a^2 \sqrt{\frac{\mu\pi\varrho}{t}} U(0).
\end{aligned}$$

Der Betrag der Resultante wird für  $t = 0$  unendlich groß ausfallen, wenn nicht  $U(0) = 0$  ist. Wir sehen hieraus, daß es nicht möglich ist, einem Körper in einer zähen Flüssigkeit plötzlich eine endliche Geschwindigkeit zu geben. Wir setzen also  $U(0) = 0$ . Die so modifizierte Formel wurde zuerst von Boussinesq gefunden.

Das Problem der Kugel enthält als speziellen Fall das Problem der ebenen Wand. Die Regel, welche wir oben zur Lösung des Problems der Kugel gegeben haben, kann auch zur Lösung des Problems der ebenen Wand verwendet werden.

### 1011. Das zweidimensionale Problem.

Mit dem Problem der Kugel eng verwandt ist endlich die entsprechende zweidimensionale Aufgabe, also das Problem des Kreiszylinders. Die Methode, welche uns die Lösung des Problems der Kugel gab, läßt

sich auch zur Lösung des Problems des Kreiszylinders benutzen. Die Rechnungen sind im zweidimensionalen Falle wesentlich einfacher als im dreidimensionalen. Wir gehen deshalb nicht auf diese Rechnungen ein, sondern begnügen uns damit, ihr Ergebnis in dem folgenden Satz zusammenzufassen:

Um das System:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \nu \Delta u_j, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2)$$

für  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} > a$ ,  $t > 0$  und mit den Nebenbedingungen: für  $t = 0$ ,  $r > a$  und für  $t > 0$ ,  $r \rightarrow \infty$ :  $u_j = 0$ ; für  $r = a$ :  $u_j = U_j$ , zu lösen, bestimmt man zuerst zwei für  $r > a$  reguläre und in unendlicher Ferne verschwindende Lösungen  $\bar{\Phi}$  und  $\Phi$  der Laplaceschen Gleichung mit zwei Veränderlichen, welche für  $r = a$  den Bedingungen:

$$\frac{d\Phi}{dn} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = U_n - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_n d\vartheta,$$

$$\frac{d\bar{\Phi}}{dn} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r} = U_\vartheta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_\vartheta d\vartheta$$

genügen, wo  $U_n$  und  $U_\vartheta$  die durch die Beziehungen  $x_1 = r \cos \vartheta$ ,  $x_2 = r \sin \vartheta$ ,  $U_n = U_1 \cos \vartheta + U_2 \sin \vartheta$ ,  $U_\vartheta = U_2 \cos \vartheta - U_1 \sin \vartheta$  festgelegten Bedeutungen haben. Man bestimmt dann eine für  $t > 0$ ,  $r > a$  reguläre, für  $t = 0$ ,  $r > a$  und für  $t > 0$ ,  $r \rightarrow \infty$  verschwindende Lösung der Vektorgleichung:

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} = \nu \Delta f_j, \quad (j = 1, 2)$$

welche für  $r = a$  den Bedingungen genügt:

$$f_1 = \int_0^t \left\{ U_1(\tau) - \frac{\cos \vartheta}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_n(\tau) d\vartheta + \frac{\cos \vartheta}{a} \frac{\partial \bar{\Phi}(\tau)}{\partial \vartheta} + \frac{\sin \vartheta}{a} \frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial \vartheta} \right\} d\tau,$$

$$f_2 = \int_0^t \left\{ U_2(\tau) - \frac{\sin \vartheta}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_n(\tau) d\vartheta + \frac{\sin \vartheta}{a} \frac{\partial \bar{\Phi}(\tau)}{\partial \vartheta} - \frac{\cos \vartheta}{a} \frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial \vartheta} \right\} d\tau.$$

Man bestimmt schließlich eine für  $r > a$  reguläre, in unendlicher Ferne verschwindende Lösung  $\Phi^*$  der Laplaceschen Gleichung, die auf dem Kreise  $r = a$  den Wert  $\nu \operatorname{div} f$  annimmt. Dann gilt an demselben Kreise:

$$\frac{d\Phi^*}{dn} = \nu \frac{d}{dn} \operatorname{div} \mathbf{f} - \frac{d\Phi}{dn} - \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \vartheta}$$

und die Lösung des Problems ist:

$$u_j = \frac{\partial f_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \Phi + \Phi^* + \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_n(t) d\vartheta \cdot \log r - \nu \frac{\partial f_k}{\partial x_k} \right\}, \quad (j, k = 1, 2)$$

$$p = -\varrho \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \Phi + \Phi^* + \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_n(t) d\vartheta \cdot \log r \right\}.$$

## § 11. Die Stokesschen Gleichungen. Ein Ellipsoid mit konstanter Geschwindigkeit. Die Formeln von Oberbeck.

Unter den speziellen hydrodynamischen Randwertaufgaben, deren Lösung bekannt ist, gibt es eine, die ein so großes Interesse besitzt, daß wir hier einen Bericht darüber geben wollen. Es ist die zuerst von Oberbeck behandelte Aufgabe, eine Lösung der Stokesschen Gleichungen:

$$\mu \Delta u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (1)$$

zu bilden, welche außerhalb des Ellipsoids:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1 \quad (2)$$

regulär ist, in unendlicher Ferne den Bedingungen  $u_j = 0$  und am Ellipsoid den Bedingungen  $u_j = U_j$  genügt, wo  $U_j$  Konstanten sind.

Durch die Gleichung:

$$\frac{x_1^2}{a^2 + \lambda} + \frac{x_2^2}{b^2 + \lambda} + \frac{x_3^2}{c^2 + \lambda} = 1 \quad (3)$$

und die Bedingung  $\lambda > 0$  definieren wir eine Funktion  $\lambda(x_1, x_2, x_3)$ . Wir setzen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_1^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{x_2^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{x_3^2}{(c^2 + \lambda)^2} &= D, \\ \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)} &= W(\lambda), \\ \frac{d \log W(\lambda)}{d \lambda} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{a^2 + \lambda} + \frac{1}{b^2 + \lambda} + \frac{1}{c^2 + \lambda} \right\} = E(\lambda). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Wir erhalten aus (3) durch Differenzieren:

$$D \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} = \frac{2x_1}{a^2 + \lambda} \text{ usw.}$$

Folglich:

$$\frac{x_1}{a^2 + \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} + \frac{x_2}{b^2 + \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} + \frac{x_3}{c^2 + \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} = 2. \quad (5)$$

$$D \left\{ \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} \right)^2 \right\} = 4. \quad (6)$$

Nochmaliges Differenzieren der Gleichungen (3) ergibt:

$$D \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_1^2} = \frac{2}{a^2 + \lambda} - \frac{4x_1}{(a^2 + \lambda)^2} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} + 2 \left\{ \frac{x_1^2}{(a^2 + \lambda)^3} + \frac{x_2^2}{(b^2 + \lambda)^3} + \frac{x_3^2}{(c^2 + \lambda)^3} \right\} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \right)^2 \text{ usw.}$$

Folglich wegen (5) und (6):

$$D \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_j^2} = D \Delta \lambda = 4E(\lambda) = 4 \frac{\partial \log W(\lambda)}{\partial \lambda}. \quad (7)$$

Wir betrachten jetzt die beiden Funktionen:

$$\begin{aligned} \Omega(x_1, x_2, x_3) &= \pi abc \int_{\lambda}^{\infty} \left( \frac{x_1^2}{a^2 + s} + \frac{x_2^2}{b^2 + s} + \frac{x_3^2}{c^2 + s} - 1 \right) \frac{ds}{W(s)}, \\ \chi(x_1, x_2, x_3) &= abc \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{W(s)}. \end{aligned}$$

Wir haben:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = 2\pi abc \int_{\lambda}^{\infty} \frac{x_1 ds}{(a^2 + s) W(s)} \text{ usw.}$$

und:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1^2} = 2\pi abc \left\{ \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{(a^2 + s) W(s)} - \frac{1}{W(\lambda)} \frac{x_1}{a^2 + \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \right\} \text{ usw.}$$

Folglich wegen (4) und (5):

$$\Delta \Omega = 4\pi abc \left\{ \int_{\lambda}^{\infty} \frac{1}{W(s)} \frac{d}{ds} \log W(s) ds - \frac{1}{W(\lambda)} \right\} = 0.$$

Ferner wegen (6) und (7):

$$\begin{aligned} \Delta \chi &= \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} \Delta \lambda + \frac{\partial^2 \chi}{\partial \lambda^2} \left\{ \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} \right)^2 \right\} = \\ &- \frac{4abc}{W(\lambda) D} \left\{ E(\lambda) - \frac{\partial}{\partial \lambda} \log W(\lambda) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Wir versuchen unsere Aufgabe durch den Ansatz:

$$u_j = A_k^{(1)} \left( \delta_{jk} \chi - x_k \frac{\partial \chi}{\partial x_j} \right) + A_k^{(2)} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_j \partial x_k}$$

zu lösen. Dieser Ansatz befriedigt für alle konstanten Werte von  $A_k^{(1)}$  und  $A_k^{(2)}$  die Gleichung  $\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$ . Wir haben ferner:

$$\Delta u_j = -2A_k^{(1)} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_j \partial x_k}.$$

Die Bewegungsgleichungen sind also erfüllt, wenn wir:

$$p = -2\mu A_k^{(1)} \frac{\partial \chi}{\partial x_k} + \text{Konst.}$$

setzen. Auf dem Ellipsoid (2) haben wir  $\lambda = 0$  und:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1^2} &= 2\pi abc \left\{ \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)W(s)} - \frac{x_1}{a^3 b c} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \right\}, \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{2\pi x_2}{b^2} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \text{ usw.,} \\ x_k \frac{\partial \chi}{\partial x_k} &= -x_k \frac{\partial \lambda}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

Wir sehen hieraus, daß die Bedingungen:  $u_j = U_j$  am Ellipsoide erfüllt sind, wenn wir den Konstanten  $A_k^{(1)}$  und  $A_k^{(2)}$  die Bedingungen:

$$A_1^{(2)} = \frac{a^2}{2\pi} A_1^{(1)}, \quad A_2^{(2)} = \frac{b^2}{2\pi} A_2^{(1)}, \quad A_3^{(2)} = \frac{c^2}{2\pi} A_3^{(1)},$$

$$abc \left\{ A_1^{(1)} \int_0^\infty \frac{ds}{W(s)} + 2\pi A_1^{(2)} \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)W(s)} \right\} = U_1 \text{ usw.}$$

auferlegen. Wir setzen:

$$abc \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)W(s)} = P_1 \text{ usw.,} \quad abc \int_0^\infty \frac{ds}{W(s)} = \chi_{\lambda=0} = \chi_0$$

und erhalten:

$$A_1^{(1)} = \frac{U_1}{\chi_0 + a^2 P_1}, \quad A_2^{(1)} = \frac{U^2}{\chi_0 + b^2 P_2}, \quad A_3^{(1)} = \frac{U_3}{\chi_0 + c^2 P_3}.$$

Das Problem ist hiermit gelöst. Wenn wir über die gefundene Bewegung der Flüssigkeit eine translatorische Bewegung mit der konstanten Geschwindigkeit  $u_j = -U_j$  überlagern, erhalten wir die Bewegung einer Flüssigkeit, die mit konstanter Geschwindigkeit  $-U$  an einem ellipsoidförmigen Körper vorüberströmt. Um die Resultante der Kräfte zu

berechnen, welche die Flüssigkeit auf den Körper ausübt, benutzen wir dieselbe Methode wie im 7. Paragraphen. Wir berechnen das Integral:

$$\int \left( -pn_j + \mu n_k \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \right) dS,$$

wo die Integration über eine mit dem Ellipsoide konzentrische Kugel erstreckt wird. Wir haben für große  $R$ -Werte:

$$\lambda = R^2, \quad \Omega = -\frac{4\pi abc}{3R}, \quad \chi = \frac{2abc}{R}$$

und erhalten mit Hilfe dieser Werte leicht:

$$\int \left( -pn_j + \mu n_k \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \right) dS = -16\pi\mu abc A_i^{(1)}.$$

Die Komponente der Resultante in der Richtung der  $x_1$ -Achse hat also den Betrag:

$$-\frac{16\pi\mu abc U_1}{\chi_0 + a^2 P_1}.$$

Dies ist die Formel von Oberbeck.

Wenn wir  $a = b = c$  setzen, so erhalten wir:  $P_k = \frac{2}{3}$ ,  $\chi_0 = 2a^2$ . Die Resultante der von der Flüssigkeit auf den Körper ausgeübten Kräfte ist in diesem Falle also:  $-6\pi\mu a U$ . Wir haben hiermit die Stokessche Formel wiedergefunden. Mit anderen speziellen Fällen der Formel von Oberbeck werden wir uns beschäftigen, nachdem wir die Formel erweitert haben.

## II.

# Angenäherte Lösungen von Randwertaufgaben bei den Stokesschen Differentialgleichungen für stationäre Bewegung.

## § 12. Eine kleine Kugel und eine ebene Wand.

### 12 1. Berechnung des Widerstandes.

Wir nehmen in diesem Paragraphen an, daß die Flüssigkeit den Halbraum  $x_3 > 0$  erfüllt. In dieser Flüssigkeit soll sich ein kugelförmiger Körper mit konstanter Geschwindigkeit  $\mathbf{U}$  in beliebiger Richtung bewegen. Unter der (offenbar im allgemeinen nicht genau gültigen) Voraussetzung, daß die Bewegung der Flüssigkeit als stationär aufzufassen ist, wollen wir diese Bewegung und die Resultante der von der Flüssigkeit auf den Körper ausgeübten Kräfte berechnen. Wir benutzen ein Bezugssystem, dessen  $x_3$ -Achse gegen die ebene Wand senkrecht ist und den Mittelpunkt der Kugel enthält, während die  $x_1x_2$ -Ebene mit der Ebene der Wand zusammenfällt, und die  $x_1$ - und  $x_2$ -Achsen beliebige, aber feste Richtungen haben. In bezug auf dieses System ist die Bewegung der Flüssigkeit eine Strömung mit den konstanten, d. h. vom Orte unabhängigen Komponenten  $-U_1$ ,  $-U_2$ , 0 und eine darüber gelagerte Bewegung, deren Komponenten wir mit  $u_j$  bezeichnen wollen. Indem wir mit Stokes die in den Größen  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{u}$  quadratischen Glieder vernachlässigen, erhalten wir wie in § 9, 1 S. 97 zur Bestimmung der Größen  $u_j$  die Gleichungen:

$$\mu \Delta u_j = \frac{\partial p}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

mit den Nebenbedingungen: für  $x_3 = 0$  und für  $x_3 \rightarrow \infty$ :  $u_j = 0$ ; an der Oberfläche der Kugel  $r = a$ :  $u_j = U_j$ . Wir haben hier:

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - x_3^{(0)})^2} = r$$

gesetzt, wo  $x_3^{(0)}$  die Entfernung des Mittelpunktes der Kugel von der festen Wand ist. Wir setzen im folgenden:

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + x_3^{(0)})^2} = \bar{r}.$$

Wir haben im 9. Paragraphen die Bewegung berechnet, welche eine stationär bewegte Kugel in einer den ganzen Raum erfüllenden Flüssigkeit hervorruft. Für die Komponenten jener Flüssigkeitsbewegung erhielten wir S. 110 (23) mit unseren jetzt gebrauchten Bezeichnungen:

$$\frac{3}{2} \frac{a}{r} U_i - \frac{a}{4} U_k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \left( 3r + \frac{a^2}{r} \right) \quad (2)$$

und für den Druck:

$$p = -\frac{3}{2} a \mu U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r}.$$

Diese Bewegung wird in dem jetzt vorliegenden Falle durch die feste Wand gestört. Man kann in gewissem Sinne sagen, daß sich über diese Bewegung eine durch Reflexion an der festen Wand erhaltene lagert. Um die zurückgeworfene Bewegung zu berechnen, haben wir eine für  $x_3 > 0$  reguläre Lösung des Systems (1) zu suchen, die den Randbedingungen:

$$\text{für } x_3 = 0: \quad u_j = -\frac{3}{2} \frac{a}{r} U_i + \frac{a}{4} U_k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \left( 3r + \frac{a^2}{r} \right), \quad (3)$$

$$\text{für } x_3 \rightarrow \infty: \quad u_j = 0$$

genügt. Wie wir jene Lösung in der Gestalt von Doppelintegralen darstellen können, haben wir im 9. Paragraphen S. 113 gesehen. Es gibt aber auch eine einfache, integrallose Darstellung dieser Lösung. Wenn wir mit  $u_j^*$  die Komponenten der zurückgeworfenen Strömung bezeichnen, so haben wir:

$$\text{für } j = 1, 2:$$

$$\left. \begin{aligned} u_j^* &= -\frac{3}{2} \frac{a}{\bar{r}} U_i + \frac{a}{4} \sum_{k=1,2} U_k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \left[ 3\bar{r} + \frac{a^2}{\bar{r}} + \frac{6x_3 x_3^{(0)}}{\bar{r}} + \right. \\ &\quad \left. + 2a^2 x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{\bar{r}} \right] + \frac{a}{4} U_3 \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_3} \left\{ 3\bar{r} + \frac{a^2}{\bar{r}} - \frac{6x_3 x_3^{(0)}}{\bar{r}} - 2a^2 x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{\bar{r}} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ferner:

$$\left. \begin{aligned} u_3^* &= -\frac{9}{2} \frac{a}{\bar{r}} U_3 - \frac{a}{4} \sum_{k=1,2} U_k \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_k} \left[ 3\bar{r} + \frac{a^2}{\bar{r}} - \frac{6x_3 x_3^{(0)}}{\bar{r}} - \right. \\ &\quad \left. - 2a^2 x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{\bar{r}} \right] - \frac{a}{2} \sum_{k=1,2} U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{3(x_3^{(0)} - x_3)}{\bar{r}} + a^2 \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{\bar{r}} \right\} + \\ &\quad + \frac{a}{4} U_3 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \left\{ 15\bar{r} + \frac{5a^2}{\bar{r}} - \frac{6x_3 x_3^{(0)}}{\bar{r}} - 2a^2 x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{\bar{r}} \right\} - 3a U_3 x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{\bar{r}}. \end{aligned} \right\}$$

Für den zugehörigen Druck  $p^*$  gilt:

$$\left. \begin{aligned} p^* = & \frac{1}{2} \mu a \sum_{k=1,2} U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{3}{r} + 6x_3^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{r} + 2a^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \frac{1}{r} \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \mu a U_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \frac{3}{r} - 6x_3^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{r} - 2a^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \frac{1}{r} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Man verifiziert leicht, daß  $u_i^*$  und  $p^*$  dem System (1) und den Randbedingungen (3) genügen.

Wenn wir  $a/x_3^{(0)}$ , also das Verhältnis des Kugelradius zum Abstand des Kugelmittelpunktes von der Wand so klein annehmen, daß wir Glieder von der Größenordnung  $a^2/x_3^{(0)2}$  neben 1 vernachlässigen dürfen, so haben wir im Mittelpunkt der Kugel, also im Punkte  $0, 0, x_3^{(0)}$ , mit genügender Annäherung:

$$u_k^* = -\frac{9}{16} \frac{a}{x_3^{(0)}} U_k \quad (k=1, 2), \quad u_3^* = -\frac{9}{8} \frac{a}{x_3^{(0)}} U_3.$$

Die Resultante der von der Flüssigkeit infolge der Bewegung (2) auf die Kugel ausgeübten Kräfte ist nach 9, 5 S. 111  $-6\pi\mu a U$ . Die von der Bewegung (4) abhängigen Kräfte haben nach dem Satze von Faxén S. 113 die Resultante:

$$6\pi\mu a u^*(P^{(0)}) + \pi a^3 (\text{grad } p^*)_{P^{(0)}},$$

wenn wir mit  $P^{(0)}$  den Mittelpunkt der Kugel bezeichnen. Ein Blick auf den Ausdruck (5) für  $p^*$  zeigt sofort, daß das letzte Glied des obigen Ausdrückes neben dem ersten zu vernachlässigen ist. Die Resultante der von  $u^*$  abhängigen Kräfte auf die Kugel hat also die Komponenten:

$$-\frac{27}{8} \pi \mu \frac{a^2}{x_3^{(0)}} U_1, \quad -\frac{27}{8} \pi \mu \frac{a^2}{x_3^{(0)}} U_2, \quad -\frac{27}{4} \pi \mu \frac{a^2}{x_3^{(0)}} U_3.$$

Die Flüssigkeit übt also auf die Kugel Kräfte aus, deren Resultante in der hier angestrebten Näherung die Komponenten:

$$\begin{aligned} & -6\pi\mu a U_1 \left( 1 + \frac{9}{16} \frac{a}{x_3^{(0)}} \right), \quad -6\pi\mu a U_2 \left( 1 + \frac{9}{16} \frac{a}{x_3^{(0)}} \right), \\ & -6\pi\mu a U_3 \left( 1 + \frac{9}{8} \frac{a}{x_3^{(0)}} \right) \end{aligned}$$

hat. Dieses Ergebnis röhrt von H. A. Lorentz her.

## 122. Eine Spiegelungsmethode von H. A. Lorentz.

Wenn man die Annäherung weiter treiben will, so muß man beachten, daß die aus (2) und (4) zusammengesetzte Bewegung nicht der Bedingung  $u_j = U_j$  an der Oberfläche der Kugel genügt. Mit anderen Worten: die reflektierte Bewegung  $u^*$  muß ihrerseits an der Oberfläche der Kugel reflektiert werden. Die so erhaltene, doppelt reflektierte Bewegung wird wiederum von der Ebene  $x_3 = 0$  zurückgeworfen. So kann man fortfahren. Wir wissen aus § 9, daß die Randwertaufgaben, zu welchen man durch dieses Verfahren geführt wird, mit Hilfe von Doppelintegralen gelöst werden können. Die Spiegelung in der Ebene  $x_3 = 0$  kann man indessen mit Hilfe eines von H. A. Lorentz gefundenen Satzes viel einfacher ausführen. Nehmen wir an, daß wir eine Lösung  $u_j, p$  des Systemes (1) kennen. Man bestätigt leicht, daß die Formeln:

$$\left. \begin{aligned} u_j^{(S)} &= -u_j - 2x_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_j} + \frac{x_3^2}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_j}, \quad (j = 1, 2) \\ u_3^{(S)} &= u_3 - 2x_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{x_3^2}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3}, \\ p^{(S)} &= p + 2x_3 \frac{\partial p}{\partial x_3} - 4\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

eine neue Lösung  $u_j^{(S)}, p^{(S)}$  des Systemes (1) definieren. Wenn die Größen  $u_j, p$  einen singulären Punkt  $x_j^{(0)}$  ( $x_3^{(0)} > 0$ ) haben, so ist dieser Punkt offenbar auch für  $u_j^{(S)}, p^{(S)}$  singulär. Man kann in diesem Fall, wenn  $x_j^{(0)}$  der einzige singuläre Punkt der Funktionen  $u_j, p$  ist, von der Lösung des Systemes (1) ausgehen, die man aus  $u_j, p$  durch Fortsetzung über die Grenzebene  $x_3 = 0$  hinaus und durch Spiegelung (im gewöhnlichen Sinne des Wortes) der so für  $x_3 < 0$  erhaltenen Bewegung an der  $x_1 x_2$ -Ebene erhält. Wenn wir für einen Augenblick die durch das erwähnte Verfahren aus  $u_j, p$  erhaltene Bewegung mit  $\bar{u}_j, \bar{p}$  bezeichnen, so haben wir offenbar auf der Ebene  $x_3 = 0$ :  $\bar{u}_1 = u_1, \bar{u}_2 = u_2, \bar{u}_3 = -u_3$ . Die Lösung  $\bar{u}_j^{(S)}, \bar{p}^{(S)}$  des Systemes (1), welche wir mit Hilfe der Formeln (6) aus  $\bar{u}_j, \bar{p}$  herstellen können, erfüllt also auf der Ebene  $x_3 = 0$  die Bedingungen  $\bar{u}_j^{(S)} = -u_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Sie ist überdies für  $x_3 > 0$  regulär. Sie stellt also die von der Ebene  $x_3 = 0$  zurückgeworfene Strömung  $u_j, p$  dar. — Man bestätigt leicht, daß die Größen  $u_j^*, p^*$  in dieser Weise aus den Größen (2) abgeleitet werden können.

Mit Hilfe der hier dargelegten Methode haben Stock und Faxén eingehend den Fall untersucht, daß die Kugel sich parallel zur Wand bewegt und also  $U_3 = 0$  ist. Wir werden im folgenden (S. 194) eine

Formel von Faxén mitteilen, welche in einem Grenzfalle den Widerstand gegen die Bewegung der Kugel gibt, den man aus dem System (1) bei Berücksichtigung von Gliedern von der Größenordnung  $a^5/x_3^{(0)5}$  erhalten würde.

### § 13. Eine Kugel oder ein Kreiszylinder zwischen zwei ebenen Wänden.

#### 13 1. Einleitung und Darstellung des Abstandes $R$ durch Integrale.

Die Aufgabe, den Widerstand zu berechnen, den eine Kugel erfährt, welche sich mit konstanter Geschwindigkeit zwischen zwei parallelen, ebenen Wänden in einer zu den Wänden parallelen Richtung bewegt, hat durch die Kolloidforschung Interesse gewonnen. Eine angenäherte Lösung dieses Problems erhalten wir durch das in § 12 angelegte Verfahren. Die von der Kugel zunächst hervorgerufene Bewegung der Flüssigkeit wird von den beiden Grenzebenen zurückgeworfen. Wenn wir auf die Kenntnis des weiteren Schicksals dieser zurückgeworfenen Bewegungen verzichten und die Berechnung schon an diesem Punkte abbrechen, erhalten wir für die Komponenten der Resultante der Kräfte, welche die Flüssigkeit auf die Kugel ausübt, die Werte:

$$- 6\pi\mu a U_j \left\{ 1 + \frac{9a}{16} \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \right\}, \quad (1)$$

wo  $l_1$  und  $l_2$  die Entfernungen des Mittelpunktes der Kugel von den beiden Wänden sind. Um genauere Werte dieser Komponenten zu erhalten, müssen wir für beide reflektierte Bewegungen ihre neue Reflexion an der Kugel und an der anderen Wand untersuchen. So kann man fortfahren. Man erhält auf diese Weise die gesuchten Größen durch unendliche Reihen dargestellt. Die Konvergenz dieser Reihen ist jedoch schlecht, und deshalb hat der Forscher, dem wir die Lösung dieses Problems verdanken, Faxén, eine andere Methode benutzt, die immer bei solchen Problemen anwendbar ist, in denen Randbedingungen an einer Ebene oder an zwei parallelen Ebenen eine Hauptrolle spielen.

Als wir im 9. Paragraphen die Randwertaufgabe der Stokesschen Gleichungen (für stationäre Bewegung) für die Kugel lösten, erhielten wir die Geschwindigkeitskomponenten und den Druck durch Integrale über die Oberfläche der Kugel ausgedrückt. In dem einfachen Falle, daß die Randwerte  $U_j$  vom Orte unabhängig waren, war es möglich,

eine einfache integrallose Darstellung der Lösung zu finden. In den meisten Fällen ist eine solche integrallose Lösung einer in Integralform dargestellten weitaus vorzuziehen. Aber in dem Problem, das wir hier zu behandeln haben, liegen die Verhältnisse anders. Hier ist es zweckmäßig, die einfache Lösung des Problems der Kugel bei konstanten Randwerten, die wir im 9. Paragraphen (Gl. 23) erhielten, in Integralform darzustellen.

Wir gehen von dem Integral\*:

$$\frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{ia_j x_j}) \frac{da_1 da_2 da_3}{(a_i^2)^2} \quad (2)$$

aus. Wegen des Verhaltens des Integranden im Anfangspunkte des  $a_1 a_2 a_3$ -Raumes ist dieses Integral nur bedingt konvergent. Um denselben einen bestimmten Wert zu geben, schließen wir zunächst durch eine kleine Kugel  $a_i^2 = \varepsilon^2$  den Anfangspunkt vom Integrationsbereiche aus. Der Grenzwert des so erhaltenen Integrales bei  $\varepsilon \rightarrow 0$  soll der Wert von (2) sein. Um diesen Wert zu berechnen führen wir im  $a$ -Raum Polarkoordinaten ein. Wir erhalten, wenn  $\Theta$  der Winkel zwischen den beiden Vektoren  $x_j$  und  $a_j$  ist:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{da}{a^2} \int_0^{\pi} (1 - e^{iaR \cos \Theta}) \sin \Theta d\Theta = \frac{4}{\pi R} \int_0^{\infty} \{aR - \sin(aR)\} \frac{da}{a^3} = CR,$$

wo die Substitution:  $aR = \beta$  unmittelbar zeigt, daß  $C$  eine Konstante ist.

Um  $C$  zu bestimmen, bemerken wir, daß:

$$C = \frac{d^2}{dR^2} \left( \frac{1}{2} CR^2 \right) = \frac{d^2}{dR^2} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \{aR - \sin(aR)\} \frac{da}{a^3} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(aR)}{a} da = 1^{**}.$$

Wir haben also:

$$R = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{ia_j x_j}) \frac{da_1 da_2 da_3}{(a_i^2)^2}. \quad (3)$$

Wir wollen in dem Integral rechts die Integration in bezug auf  $a_3$  ausführen. Wir betrachten also das Integral:

$$\frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{ia_j x_j}) \frac{da_3}{(a_i^2)^2}.$$

\* Wir schreiben der Kürze wegen und in Übereinstimmung mit dem hier gefolgten Brauche statt:  $e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)}$  wieder:  $e^{ia_j x_j}$ .

\*\* Man vgl. z. B. Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik. I, S. 55.

Wir nehmen zunächst an, daß  $a_1$  und  $a_2$  bestimmte Werte haben, welche der Ungleichung  $a_1^2 + a_2^2 > \varepsilon^2 > 0$  genügen.  $a_3$  soll dann alle reellen Werte zwischen  $-\infty$  und  $+\infty$  durchlaufen. Wenn wir eine komplexe  $a_3$ -Ebene einführen, können wir indessen den Integrationsweg in dieser Ebene beliebig verschieben, wenn nur dabei die Endpunkte fest bleiben. Wir benutzen diesen Umstand so, daß wir, wenn  $x_3 > 0$  ist, den Integrationsweg in seinen mittleren Teilen nach oben verschieben, dagegen wenn  $x_3 < 0$  ist, nach unten. Dabei wird einer der beiden singulären Punkte:

$$a_3 = \pm i\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \pm ik$$

überschritten. Er gibt zu einem Glied:

$$\frac{1}{2\pi k^3} \{1 - e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) - k|x_3|}\} (1 + k|x_3|)$$

Anlaß. Dagegen verschwindet das Kurvenintegral bei unbeschränkter Verschiebung des Integrationsweges nach oben (wenn  $x_3 > 0$ ) oder nach unten (wenn  $x_3 < 0$ ).

Wir zerlegen jetzt unseren Ausdruck (3) für  $R$  in zwei Teile:

$$R = \frac{1}{\pi^2} \int_{\substack{-\infty \\ a_1^2 + a_2^2 > \varepsilon^2}}^{\infty} \int \int (1 - e^{ia_j x_j}) \frac{da_1 da_2 da_3}{(a_i^2)^2} + \frac{1}{\pi^2} \int_{\substack{a_1^2 + a_2^2 < \varepsilon^2 \\ -\infty \leq a_3 \leq +\infty}} \int \int (1 - e^{ia_j x_j}) \frac{da_1 da_2 da_3}{(a_i^2)^2}.$$

Der erste Teil läßt sich nach dem Obigen, wenn  $|x_3| > 0$  ist, in der Form:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\substack{-\infty \\ a_1^2 + a_2^2 > \varepsilon^2}}^{\infty} \{1 - e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) - k|x_3|}\} (1 + k|x_3|) \frac{da_1 da_2}{k_3}$$

schreiben. Den zweiten Teil wollen wir im Grenzfalle  $\varepsilon = 0$  berechnen. Wir haben offenbar, wenn  $\delta$  irgend eine positive Größe ist:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi^2} \int_{\substack{a_1^2 + a_2^2 < \varepsilon^2 \\ -\infty \leq a_3 \leq +\infty}} \int \int (1 - e^{ia_j x_j}) \frac{da_1 da_2 da_3}{(a_i^2)^2} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi^2} \int_{\substack{a_1^2 + a_2^2 < \varepsilon^2 \\ -\delta \leq a_3 \leq +\delta}} \int \int (1 - e^{ia_j x_j}) \frac{da_1 da_2 da_3}{(a_i^2)^2} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi^2} \int_{\substack{a_1^2 + a_2^2 < \varepsilon^2 \\ -\delta \leq a_3 \leq \delta}} \int \int \left\{ -ia_j x_j - \frac{1}{2} (a_j x_j)^2 \right\} \frac{da_1 da_2 da_3}{(a_i^2)^2}. \end{aligned}$$

Bei der Berechnung unseres Integrals haben wir nach der obigen Festsetzung zuerst den Anfangspunkt durch eine kleine Kugel, deren Mittelpunkt der Anfangspunkt ist, auszuschließen. Wir haben unter diesen Umständen:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{i}{\pi^2} \iint_{\substack{a_1^2 + a_2^2 < \varepsilon^2 \\ -\delta \leq a_2 \leq \delta}} \frac{(a_j x_j) da_1 da_2 da_3}{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2} = 0,$$

da die Elemente des Integrals sich zu je zwei aufheben.

Man findet ferner:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi^2} \iint_{\substack{a_1^2 + a_2^2 < \varepsilon^2 \\ -\delta \leq a_3 \leq \delta}} a_j a_k \frac{da_1 da_2 da_3}{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2} = 0, \quad (j, k = 1, 2, 3)$$

weil das Integral unbedingt konvergent ist.

Wir haben folglich, wenn  $|x_3| > 0$  ist:

$$R = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \iint_{\substack{-\infty \\ a_1^2 + a_2^2 > \varepsilon^2}}^{+\infty} \{1 - e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2 - k|x_3|)} (1 + k|x_3|) \} \frac{da_1 da_2}{k^3}.$$

Wir können diese Gleichung in der einfacheren Form:

$$R = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \{1 - e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2 - k|x_3|)} (1 + k|x_3|) \} \frac{da_1 da_2}{k^3} \quad (4)$$

schreiben, wenn wir übereinkommen, daß bei der Berechnung der linken Seite der Anfangspunkt zunächst durch einen kleinen Kreis  $a_1^2 + a_2^2 = \varepsilon^2$  ausgeschlossen und nachträglich der Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  vollzogen werden soll.

Man sieht leicht, daß die Gleichung (4), wenn  $|x_3| > \delta > 0$  ist, beliebig oft in bezug auf  $x_1, x_2, x_3$  differenziert werden darf. So z. B. erhalten wir:

$$\frac{x_1}{R} = \frac{\partial R}{\partial x_1} = -\frac{i}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2 - k|x_3|)} \frac{a_1}{k^3} (1 + k|x_3|) da_1 da_2 \quad (5)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2} \Delta R = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2 - k|x_3|)} \frac{da_1 da_2}{k} \quad (6)$$

usw.

Die Formel (6) hat eine sehr große Bedeutung. Man kann in anderer Weise zu dieser Formel gelangen, indem man von dem Integral:

$$\frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int \frac{e^{ia_j x_j} da_1 da_2 da_3}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

ausgeht. Doch ist diese Beweismethode wesentlich komplizierter als die oben benutzte.

### 13 2. Einsetzung der so gewonnenen Darstellungen von $R$ usw. in die Stokessche Formel behufs Gewinnung allgemeiner Integrale.

Wir kehren zu unserem hydrodynamischen Probleme zurück. Wir legen den Anfangspunkt in den Mittelpunkt der Kugel und die  $x_1$ -Achse mit der Bewegungsrichtung der Kugel parallel. Die ebenen Wände mögen die Gleichungen  $x_3 = +l_1$  und  $x_3 = -l_2$  haben. Die Bewegung, welche die Kugel in einer den ganzen Raum erfüllenden, mit der Geschwindigkeit  $-U_1, 0, 0$  strömenden Flüssigkeit hervorrufen würde, ist durch die Stokessche Formel (24) S. 110 gegeben, wenn wir in dieser Formel  $U_2 = U_3 = 0$  setzen. Mit Hilfe der oben entwickelten Beziehungen finden wir leicht die unten angegebenen Ausdrücke für  $u_j$  und  $p$ :

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -U_1 + \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) - k|x_3|} \left[ \frac{2}{k} - \frac{a_1^2}{k^3} (1 + k|x_3|) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^2 a_1^2}{3k} \right] da_1 da_2, \\ u_2 &= \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) - k|x_3|} \left[ -\frac{a_1 a_2}{k^3} (1 + k|x_3|) + \frac{a^2 a_1 a_2}{3k} \right] da_1 da_2, \\ u_3 &= \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) - k|x_3|} \left[ -\frac{i a_1}{k} x_3 + i a_1 \cdot \frac{a^2 x_3}{3|x_3|} \right] da_1 da_2, \\ p &= \frac{c \mu}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) - k|x_3|} \left[ -\frac{i a_1}{k} \right] da_1 da_2. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

In diesen Formeln hat  $c$  die Bedeutung  $\frac{3}{4} a U_1$ .

Die Lösungen der Stokesschen Gleichungen, welche durch die obigen Formeln definiert werden, sind überall mit Ausnahme vom Anfangs-

punkte regulär. Selbstverständlich ist dies nicht die einzige Lösung der Stokesschen Gleichungen, welche diese Eigenschaft hat. Man kann vielmehr z. B. durch partielle Differenzierung der schon gefundenen Lösung in bezug auf  $x_1$ ,  $x_2$  oder  $x_3$ , eine unbeschränkte Zahl von solchen Lösungen herstellen. Wir werden im folgenden eine Lösung der Stokesschen Gleichungen von der folgenden Form benutzen:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -U_1 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) - k|x_3|} \left\{ \frac{ia_1}{k} g_2 + \frac{2g_1}{k} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_1^2 g_1}{k^3} (1 + k|x_3|) + \frac{a_1^2 x_3}{k} g_3 \right\} da_1 da_2, \\ u_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) - k|x_3|} i a_2 \left\{ \frac{g_2}{k} + \frac{ia_1}{k^3} g_1 (1 + k|x_3|) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{ia_1 x_3}{k} g_3 \right\} da_1 da_2, \\ u_3 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) - k|x_3|} \left\{ -\frac{x_3}{|x_3|} g_2 - \frac{ia_1}{k} g_1 x_3 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{ia_1}{k} g_3 (1 + k|x_3|) \right\} da_1 da_2, \\ p &= \frac{\mu}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) - k|x_3|} \frac{ia_1}{k} \left\{ -g_1 + \frac{x_3}{|x_3|} k g_3 \right\} da_1 da_2. \end{aligned} \right\} (8)$$

$g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$  sind hier unbekannte Funktionen von  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $k$ , von denen wir nur annehmen, daß sie die Eigenschaften haben, welche nötig sind, damit unsere Integrale (8) einen Sinn haben und wir sie unter den Integralzeichen ( $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  zweimal,  $p$  einmal) in bezug auf  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  differenzieren dürfen. Man verifiziert unter diesen Voraussetzungen umgekehrt leicht, daß  $u_j$ ,  $p$  den Stokesschen Gleichungen für stationäre Bewegung genügen. Wie aus dem oben Gesagten ersichtlich ist, können wir den Bedingungen  $u_j = 0$  an der Oberfläche der Kugel  $R = a$  durch den Ansatz:

$$g_1 = c, \quad g_2 = -\frac{1}{3} c i a_1 \cdot a^2, \quad g_3 = 0, \quad c = \frac{3}{4} a U_1$$

genügen.

Neue Lösungen der Stokesschen Gleichungen, welche mit (8) nahe verwandt sind, sind die folgenden:

$$\left. \begin{aligned}
 u_1^* &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) - k x_3} \left\{ \frac{i a_1}{k} g_5 + \frac{2}{k} g_4 - \frac{a_1^2}{k^3} g_4 (1 + k x_3) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{a_1^2}{k} x_3 g_6 \right\} d a_1 d a_2, \\
 u_2^* &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) - k x_3} i a_2 \left\{ \frac{g_5}{k} + \frac{i a_1}{k^3} g_4 (1 + k x_3) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{i a_1}{k} x_3 g_6 \right\} d a_1 d a_2, \\
 u_3^* &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) - k x_3} \left\{ -g_5 - \frac{i a_1}{k} g_4 x_3 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{i a_1}{k} g_6 (1 + k x_3) \right\} d a_1 d a_2, \\
 p^* &= \frac{\mu}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) - k x_3} \frac{i a_1}{k} \left\{ -g_4 + k g_6 \right\} d a_1 d a_2; \\
 u_1^{**} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) + k x_3} \left\{ \frac{i a_1}{k} g_8 + \frac{2}{k} g_7 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{a_1^2}{k^3} g_7 (1 - k x_3) + \frac{a_1^2}{k} x_3 g_9 \right\} d a_1 d a_2, \\
 u_2^{**} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) + k x_3} i a_2 \left\{ \frac{g_8}{k} + \frac{i a_1}{k^3} g_7 (1 - k x_3) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{i a_1}{k} x_3 g_9 \right\} d a_1 d a_2, \\
 u_3^{**} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) + k x_3} \left\{ g_8 - \frac{i a_1}{k} g_7 x_3 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{i a_1}{k} g_9 (1 - k x_3) \right\} d a_1 d a_2, \\
 p^{**} &= \frac{\mu}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) + k x_3} \frac{i a_1}{k} \left\{ -g_7 - k g_9 \right\} d a_1 d a_2.
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (9) \\ (10) \end{array}$$

Über die Funktionen  $g_4, g_5, g_6; g_7, g_8, g_9$  machen wir ähnliche Annahmen wie betreffs der Funktionen  $g_1, g_2, g_3$ . Aus der formalen Analogie mit (8) folgt unmittelbar, daß sowohl  $u_j^*, p^*$  wie  $u_j^{**}, p^{**}$  den Stokesschen Gleichungen für stationäre Bewegung genügen.

### 133. Ansatz zur Lösung und zur Widerstandsberechnung.

Wir betrachten jetzt eine Flüssigkeitsbewegung mit den Komponenten  $u_j + u_j^* + u_j^{**}$ . Wir bestimmen die Funktionen  $g$  so, daß jene Bewegung uns eine angenäherte Lösung unseres Problems ergibt. Wir fordern zunächst, daß die Geschwindigkeitskomponenten an den ebenen Wänden  $x_3 = l_1$ ,  $x_3 = -l_2$  die Werte  $-U_1, 0, 0$  annehmen. Dieses bewirken wir dadurch, daß wir die Funktionen  $g$  der Bedingung unterwerfen, daß für  $x_3 = +l_1$  und  $x_3 = -l_2$  und für  $j = 1, 2, 3$  die Summe der Integranden in unserem Ausdrucke für  $u_j + u_j^* + u_j^{**}$  verschwinden soll. Wir erhalten hieraus sechs lineare und homogene Beziehungen zwischen den Funktionen  $g$ . Wir setzen  $e^{2kl_1} = s_1$ ,  $e^{2kl_2} = s_2$  und haben dann:

$$\left. \begin{aligned} g_4 &= -\frac{s_1 - 1}{s_1 s_2 - 1} g_1, & g_7 &= -\frac{s_2 - 1}{s_1 s_2 - 1} g_1, \\ g_2 + g_5 + g_8 s_1 - 2l_1 \frac{ia_1}{k} g_7 s_1 - l_1 i a_1 (g_3 + g_6 + g_9 s_1) &= 0, \\ -g_2 - g_5 + g_8 s_1 + l_1 i a_1 (g_3 + g_6 - g_9 s_1) + \frac{ia_1}{k} (g_3 + g_6 + g_9 s_1) &= 0, \\ g_2 + g_8 + g_5 s_2 - 2l_2 \frac{ia_1}{k} g_4 s_2 + l_2 i a_1 (g_3 + g_9 + g_6 s_2) &= 0, \\ g_2 + g_8 - g_5 s_2 + l_2 i a_1 (g_3 + g_9 - g_6 s_2) + \frac{ia_1}{k} (g_3 + g_9 + g_6 s_2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Zur Befriedigung der Bedingung  $u_j = 0$  an der Oberfläche der Kugel verfügen wir über drei Funktionen  $g$ . Offenbar genügt diese Zahl nicht, um die Randbedingungen exakt zu erfüllen. Um eine angenäherte Lösung unseres Problems zu bekommen, können wir so vorgehen, daß wir den Funktionen  $g_1, g_2, g_3$  die S. 149 angegebenen Werte:  $c, -\frac{1}{3}cia_1a^2, 0$  geben und dabei  $c = \frac{3}{4}aU_1$  setzen. Die Beziehungen (11) geben dann die Werte der Funktionen  $g_4 \dots g_9$ . Wir erhalten so die Störung, welche unsere ruhende Kugel in einer mit der Geschwindigkeit  $-U_1, 0, 0$  strömenden, den ganzen Raum erfüllenden Flüssigkeit hervorrufen würde, und darüber gelagert die Bewegung, welche durch die Reflexion dieser Störung von den Wänden entstehen würde. Mit Hilfe des Satzes von Faxén (§ 9 S. 113) können wir die Resultante der Kräfte berechnen, welche die Flüssigkeit unter diesen Umständen auf die Kugel ausübt. Wir können aber auch einen etwas anderen Weg gehen. Wir können die drei Funktionen  $g$ , welche zu unserer Verfügung stehen, so bestimmen, daß die Mittelwerte der Geschwindigkeitskomponenten  $u_j + u_j^* + u_j^{**}$  an der Oberfläche der

Kugel verschwinden. Wenn wir dann die Geschwindigkeit in zwei Teile:

$$u_j^* + u_j^{**} - \frac{1}{4\pi a^2} \int_{R=a} (u_j^* + u_j^{**}) dS \text{ und } u_j - \frac{1}{4\pi a^2} \int_{R=a} u_j dS$$

zerlegen, so wird nach dem Satze von Faxén (vgl. § 9 (28) S. 113) der erste Teil keinen Beitrag zu unserer Resultante geben. Die Resultante röhrt also nur vom zweiten Teile her und zwar vom ersten Gliede dieses Teiles, weil das zweite Glied eine überall, auch im Innern der Kugel konstante Geschwindigkeit gibt, die keinen Beitrag zur Resultante geben kann.

### 13 4. Durchführung in speziellen Fällen.

Wir behandeln im folgenden nur den einfachsten und wichtigsten Fall, nämlich denjenigen, bei dem die Kugel sich gerade in der Mitte zwischen den beiden Wänden bewegt und also  $l_1 = l_2$  ist. Wir setzen in diesem Fall  $l_1 = l_2 = l$ ,  $s_1 = s_2 = s$ . Wir benutzen die zuletzt erwähnte Methode und suchen also  $g_1, g_2, g_3$  so zu bestimmen, daß

$$\int_{R=a} (u_j + u_j^* + u_j^{**}) dS = 0 \quad (j = 1, 2, 3).$$

Aus geometrischen Gründen ist nun unmittelbar klar, daß zwei von diesen Gleichungen identisch erfüllt sind. Wir können deshalb auch jetzt:

$$g_1 = c, \quad g_2 = -\frac{1}{3}ci a_1 a^2, \quad g_3 = 0 \quad (12)$$

setzen.  $c$  soll aber jetzt keineswegs den Wert  $\frac{3}{4}a U_1$  haben, sondern muß vielmehr aus der Bedingung:

$$\int_{R=a} (u_1 + u_1^* + u_1^{**}) \frac{dS}{a^2} = 0 \quad (13)$$

bestimmt werden. — Der Ansatz (12) gibt nun unmittelbar für  $R = a$ :  $u_1 = -U_1 + \frac{4}{3} \frac{c}{a}$ . Aus § 9 (27) und (28) S. 113 folgt ferner:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{R=a} (u_1^* + u_1^{**}) \frac{dS}{a^2} = (u_1^* + u_1^{**})_0 + \frac{a^2}{6\mu} \left( \frac{\partial p^*}{\partial x_1} + \frac{\partial p^{**}}{\partial x_1} \right)_0.$$

Zur Bestimmung von  $c$  erhalten wir also die Gleichung:

$$-U_1 + \frac{4}{3} \frac{c}{a} + (u_1^* + u_1^{**})_0 + \frac{a^2}{6\mu} \left( \frac{\partial p^*}{\partial x_1} + \frac{\partial p^{**}}{\partial x_1} \right)_0 = 0.$$

Da  $u_1^*, p^*, u_1^{**}, p^{**}$   $c$  als Faktor enthalten, so können wir die letzte Gleichung in der Form:

$$c = \frac{\frac{3}{4} \frac{a}{c} U_1}{1 + \frac{3}{4} \frac{a}{c} (u_1^* + u_1^{**})_0 + \frac{a^3}{8\mu c} \left( \frac{\partial(p^* + p^{**})}{\partial x_1} \right)_0}$$

auflösen.

Wir haben oben gesehen, daß die resultierende Kraft auf die Kugel nur von den Geschwindigkeitskomponenten  $u_j$  oder wie wir auch sagen können, von  $u_1 + U_1, u_2, u_3$  abhängt. Wir wissen ferner, daß diese Größen sich nur durch den Faktor  $\frac{4c}{3aU_1}$  von den Größen § 9 (23) S. 110 (mit  $U_2 = U_3 = 0$ ) unterscheiden. Nun erhielten wir in § 9 aus der Formel (23) für die Komponenten der resultierenden Kraft auf die Kugel die Werte  $-6\pi\mu a U_j$ . Wir schließen hieraus, daß jetzt die Komponenten der Resultierenden  $-8\pi\mu c, 0, 0$  sein müssen. Für den Betrag der Kraft auf die Kugel erhalten wir:

$$8\pi\mu c = \frac{6\pi\mu a U_1}{1 + \frac{3}{4} \frac{a}{c} (u_1^* + u_1^{**})_0 + \frac{a^3}{8\mu c} \left( \frac{\partial(p^* + p^{**})}{\partial x_1} \right)_0}. \quad (14)$$

Unsere Aufgabe wird durch die Formel (14) auf die Berechnung des Nenners auf der rechten Seite dieser Gleichung zurückgeführt. Wir schreiben diesen Nenner:

$$1 + \frac{3}{4} \frac{a}{c} \left[ u_1^* + u_1^{**} + \frac{a^2}{6\mu} \frac{\partial(p^* + p^{**})}{\partial x_1} \right]_0$$

und haben nach (9) und (10):

$$\left. \begin{aligned} \left[ u_1^* + u_1^{**} + \frac{a^2}{6\mu} \frac{\partial(p^* + p^{**})}{\partial x_1} \right]_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{i a_1}{k} (g_5 + g_8) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{2}{k} - \frac{a_1^2}{k^3} \right) (g_4 + g_7) + \frac{a^2}{3} \frac{a_1^2}{k} (g_4 + g_7 - k g_6 + k g_9) \right\} da_1 da_2. \end{aligned} \right\} (15)$$

Die Gleichungen (11) geben in unserem Falle ( $l_1 = l_2 = l, s_1 = s_2 = s, g_3 = 0$ ):

$$g_4 = g_7 = -\frac{g_1}{s+1}, \quad g_6 = -g_9 = -\frac{2s k g_2}{i a_1 (s^2 - 4lks - 1)} -$$

$$-\frac{2ls(s-1)g_1}{(s^2 - 4lks - 1)(s+1)},$$

$$g_5 = g_8 = \frac{2lsk - s + 1}{s^2 - 4lks - 1} g_2 - \frac{2lia_1}{k} \frac{s \frac{s-1}{s+1} - lks}{s^2 - 4lks - 1} g_1.$$

Wir haben außerdem:  $g_1 = c$ ,  $g_2 = -\frac{1}{3}cia_1a^2$ .

Wir tragen die gefundenen Ausdrücke für die Funktionen  $g$  in (15) ein und schreiben das Ergebnis in der Form:

$$-\frac{4c}{3l}A + \frac{4ca^2}{3l^3}B - \frac{4ca^4}{3l^5}C.$$

$A$ ,  $B$ ,  $C$  sind hier Zahlen, welche durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} A &= \frac{3l}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \left\{ \left( \frac{2}{k} - \frac{a_1^2}{k^3} \right) \frac{1}{s+1} - \frac{2la_1^2}{k^2} \frac{s}{s+1} \frac{s-1}{s^2-4lks-1} \right\} da_1 da_2, \\ B &= \frac{l^3}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \left\{ \frac{a_1^2}{k} \cdot \frac{2lks-s+1}{s^2-4lks-1} - \frac{a_1^2}{k} \left[ \frac{1}{s+1} - \frac{2lks(s-1)}{(s^2-4lks-1)(s+1)} \right] \right\} da_1 da_2, \\ C &= \frac{l^5}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_1^2 sk}{s^2-4lks-1} da_1 da_2, \end{aligned}$$

$$k = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad s = e^{2lk}$$

definiert werden.

Wenn man in der  $a_1a_2$ -Ebene Polarkoordinaten einführt, so kann man, wie unmittelbar ersichtlich ist, die Integration in bezug auf den Winkel sofort ausführen. Für die Ausführung der letzten Integration ist man dagegen auf numerische Rechnung angewiesen. Faxén findet so:  $A = 1,004$ ,  $B = 0,418$ ,  $C = 0,169$ . Eine Kugel, welche sich in der Mitte zwischen zwei parallelen ebenen Wänden in einer mit den Wänden parallelen Richtung und mit der Geschwindigkeit  $U_1$  bewegt, erfährt also, wenn  $a$  der Radius der Kugel und  $2l$  die Entfernung zwischen den Wänden ist, einen Widerstand:

$$W = \frac{6\pi\mu a U_1}{1 - 1,004 \frac{a}{l} + 0,418 \frac{a^3}{l^3} - 0,169 \cdot \frac{a^5}{l^5}}.$$

Glieder von der Größenordnung  $\frac{a^6}{l^6}$  sind hier vernachlässigt worden.

Faxén hat diese theoretische Formel mit Messungen von Westgren verglichen. Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung war gut.

Faxén hat auch den Fall  $l_2 = 3l_1$  untersucht. Er findet in diesem Fall, unter Voraussetzung, daß die Kugel sich frei um ihren Mittelpunkt drehen kann:

$$W = \frac{6\pi\mu a U_1}{1 - 0,6526 \frac{a}{l_1} + 0,1475 \frac{a^3}{l_1^3} - 0,131 \frac{a^4}{l_1^4} - 0,0644 \frac{a^5}{l_1^5}}.$$

Faxén hat endlich eine Formel für die mittlere Geschwindigkeit berechnet, mit welcher eine Kugel mit der Dichte  $\varrho$  und dem Radius  $a$  in einer Flüssigkeit mit der Zähigkeit  $\mu$  und der Dichte  $\varrho_F$  fällt, wenn die Kugel zwischen zwei vertikalen parallelen Wänden mit der Entfernung  $2L$  eingeschlossen ist. Dabei wurde angenommen, daß die verschiedenen Lagen der Kugel zwischen den Wänden dieselbe Wahrscheinlichkeit haben. Faxén fand unter diesen Voraussetzungen für die Geschwindigkeit  $U$ :

$$\begin{aligned} U &= \frac{2}{9\mu} a^2 g (\varrho - \varrho_F) \left( 1 - \frac{a}{L} \bar{A} + \frac{a^3}{L^3} \bar{B} - \dots \right), \\ \bar{A} &= \frac{3}{32H} + \frac{9}{16H} \left\{ \log \frac{2(1+H)}{(3-H)(1-H)} + (1-C)(1-H) - CH \right\} + R_A, \\ \bar{B} &= \frac{5}{64H(1-H)^2} - \frac{1}{16(1-H^2)^2} - \frac{1}{64H(3-H)^2} + \frac{s_3}{128} + R_B, \\ H &= 1 - \frac{a}{L}, \quad s_3 = 1,20205, \quad C = 0,57722. \end{aligned}$$

$R_A$  und  $R_B$  sind, wenn  $H$  in der Nähe von 1 liegt, kleine Korrektionsglieder. Für  $H = 0,9$  findet Faxén  $R_A = 0,0340$ ,  $R_B = 0,104$ ; für  $H = 0,85$ :  $R_A = 0,0352$ ,  $R_B = 0,108$ .

### 135. Das zweidimensionale Problem.

Das zweidimensionale Problem, das der hier behandelten Aufgabe entspricht, ist die Berechnung des Widerstandes einen Kreiszylinders, der sich zwischen zwei parallelen ebenen Wänden in einer zähen Flüssigkeit bewegt. Prof. Bairstow, Fräulein Cave und Fräulein Lang haben dieses Problem für den speziellen Fall gelöst, daß der Zylinder sich in der Mitte zwischen den Wänden befindet und die Entfernung zwischen diesen fünfmal größer als der Durchmesser des Zylinders ist. Sie finden unter diesen Umständen für den Widerstand pro Längeneinheit des Zylinders  $2,26\pi\mu U_1$ . Eine neuere Berechnung von Harrison gab für dieselbe Größe den Wert  $5,21\pi\mu U_1$ . Mit der in diesem

Paragraphen behandelten Aufgabe ist ferner nahe verwandt die Frage nach dem Widerstande, den eine Kugel erfährt, die sich längs der Achse einer mit Flüssigkeit gefüllten Röhre bewegt. Dieses Problem hat Ladenburg auf Grundlage der Stokesschen Gleichungen behandelt. Wir werden im folgenden Kapitel S. 196 auf diese Frage zurückkommen.

## § 14. Zwei Kugeln in einer Flüssigkeit.

### 14.1. Einleitung und Satz von Faxén über die Wechselwirkung zwischen zwei Kugeln von derselben Größe.

Wenn zwei Kugeln sich in einer zähen Flüssigkeit bewegen, so wird die Strömung der Flüssigkeit in der Umgebung einer dieser Kugeln nicht nur von der Bewegung dieser Kugel, sondern auch von der Bewegung der anderen Kugel abhängen. Die Kräfte, welche die Flüssigkeit auf einen dieser Körper ausübt, wird folglich von der Bewegung des anderen Körpers beeinflußt. Die beiden Kugeln üben mit anderen Worten durch Vermittelung der Flüssigkeit scheinbare Kräfte aufeinander aus. Diese Kräfte verdienen von mehreren Gesichtspunkten aus Interesse. Unter anderem haben sie Bedeutung für die Kolloidforschung.

Wir stellen uns zunächst die Frage: welche Kräfte übt eine zähe Flüssigkeit auf zwei gleich große, gleich schwere mit derselben konstanten Geschwindigkeit darin fallende Kugeln aus? Um diese Frage zu beantworten, bemerken wir zunächst, daß die Kräfte, welche die Flüssigkeit auf eine Kugel ausübt, auf eine Resultierende durch den Mittelpunkt und auf ein Drehmoment um denselben Punkt reduziert werden können. Wenn keine anderen äußeren Drehmomente auf die Kugeln wirken, was im allgemeinen der Fall sein wird, wenn der Schwerpunkt jeder Kugel mit dem Mittelpunkt zusammenfällt, so kann die Bewegung nur dann stationär sein, wenn jene Drehmomente verschwinden. Dies wird im allgemeinen bei rein translatorischer Bewegung der Kugeln nicht der Fall sein. Jede Kugel muß sich infolgedessen um eine durch den Mittelpunkt gehende Achse drehen, die sowohl auf der Translationsrichtung wie auf der Verbindungsstrecke zwischen den Mittelpunkten der Kugeln senkrecht steht. Wir bezeichnen mit  $U_j$  die Komponenten der translatorischen Bewegung, mit  $K_j^{(1)}$  und  $K_j^{(2)}$  die Komponenten der auf die Kugeln wirkenden Resultierenden und mit  $\omega_j^{(1)}$  und  $\omega_j^{(2)}$  die Komponenten der Drehgeschwindigkeiten.

Wegen der linearen Form der Stokesschen Gleichungen müssen  $K_j^{(1)}, K_j^{(2)}, \omega_j^{(1)}$  und  $\omega_j^{(2)}$  lineare und homogene Funktionen der Größen  $U_j$  sein. Wenn wir die Richtung des Vektors  $\mathbf{U}$  umkehren, müssen also  $K_j^{(1)}, K_j^{(2)}, \omega_j^{(1)}$  und  $\omega_j^{(2)}$  ihre Vorzeichen wechseln. Wir gehen jetzt von einer stationären Bewegung des ganzen Systems aus, kehren zunächst den Vektor  $\mathbf{U}$  um und drehen dann das System um  $180^\circ$  um eine Achse, welche sowohl auf der Bewegungsrichtung der Kugeln wie auf der Verbindungsline der Mittelpunkte senkrecht steht und welche jene Verbindungsline gerade in der Mitte zwischen den beiden Kugeln schneidet. Die Kugeln bewegen sich nach diesen beiden Operationen wieder mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{U}$ . Die Resultierende auf die erste Kugel ist wieder  $\mathbf{K}^{(1)}$ , die auf die zweite  $\mathbf{K}^{(2)}$ . Andererseits haben die beiden Kugeln durch die beiden Operationen ihre Plätze gewechselt. Die Resultierende auf die erste Kugel muß also den Wert  $\mathbf{K}^{(2)}$ , die Resultierende auf die zweite Kugel den Wert  $\mathbf{K}^{(1)}$  haben. Daraus folgt, daß  $\mathbf{K}^{(1)} = \mathbf{K}^{(2)}$ , also  $K_j^{(1)} = K_j^{(2)}$  sein muß. In derselben Weise sehen wir, daß  $\omega_j^{(1)} = -\omega_j^{(2)}$  ist. Wir haben damit den von Faxén gefundenen Satz bewiesen:

Wenn zwei Kugeln von derselben Größe und mit derselben Schwere unter dem Einfluß dieser Schwere in einer den ganzen Raum erfüllenden Flüssigkeit steigen oder sinken, so hat die Resultierende der von der Flüssigkeit auf eine Kugel ausgeübten Kräfte für beide Kugeln dieselbe Richtung und denselben Betrag. Die Entfernung und der Höhenunterschied zwischen den beiden Kugeln werden also durch diese Kräfte nicht geändert. Dagegen gerät im allgemeinen jede Kugel in eine Rotation um eine durch den Mittelpunkt gehende, gegen die Vertikalebene, welche beide Mittelpunkte enthält, senkrechte Achse. Die Drehgeschwindigkeiten haben denselben Betrag, aber entgegengesetzte Richtungen.

## 142. Erste Näherung bei Kugeln mit verschiedenen Radien.

Wir wollen jetzt für zwei Kugeln mit verschiedenen Radien,  $a_1$  und  $a_2$ , die Resultierenden  $\mathbf{K}^{(1)}$  und  $\mathbf{K}^{(2)}$  in erster Näherung berechnen.  $x_j^{(1)}$  und  $x_j^{(2)}$  seien die Koordinaten der Mittelpunkte der beiden Kugeln. Unsere Aufgabe ist, eine Lösung der Stokesschen Gleichungen:

$$\mu \Delta u_j = \frac{\partial p}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

zu finden, welche außerhalb der beiden Kugeln regulär ist und welche den folgenden Randbedingungen genügt:

$$\text{für } r_1^2 = (x_j - x_j^{(1)})^2 = a_1^2: u_1 = U_1, \quad u_2 = u_3 = 0,$$

$$\text{für } r_2^2 = (x_j - x_j^{(2)})^2 = a_2^2: u_1 = U_1, \quad u_2 = u_3 = 0,$$

$$\text{für } R^2 = x_j^2 \rightarrow \infty: u_j \rightarrow 0.$$

Eine angenäherte Lösung dieser Aufgabe finden wir in der folgenden Weise. Wir suchen zuerst eine außerhalb der Kugel  $r_1 = a_1$  reguläre Lösung  $u_j^{(1)}, p^{(1)}$  der Gleichungen (1), welche an dieser Kugel den Bedingungen  $u_j^{(1)} = v_j^{(1)}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) genügt, wo  $v_j^{(1)}$  die Komponenten eines konstanten Vektors sind. Diese Lösungen können wir offenbar in der Form:

$$u_j^{(1)} = U_{jk}^{(1)} v_k^{(1)}, \quad p^{(1)} = P_k^{(1)} v_k^{(1)} \quad (2)$$

schreiben und wir haben nach § 9 S. 110:

$$U_{jk}^{(1)} = \frac{3}{2} \frac{a_1}{r_1} \delta_{jk} - \frac{a_1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \left( 3r_1 + \frac{a^2}{r_1} \right), \quad P_k^{(1)} = -\frac{3}{2} \mu a_1 \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r_1}. \quad (3)$$

Wir suchen ferner eine außerhalb der Kugel  $r_2 = a_2$  reguläre Lösung der Gleichungen (1)  $u_j^{(2)}, p^{(2)}$ , welche an dieser Kugel den Bedingungen  $u_j^{(2)} = v_j^{(2)}$  genügt, wo  $v_j^{(2)}$  ebenfalls Komponenten eines konstanten Vektors sind. Wir haben:

$$u_j^{(2)} = U_{jk}^{(2)} v_k^{(2)}, \quad p^{(2)} = P_k^{(2)} v_k^{(2)}. \quad (4)$$

$U_{jk}^{(2)}$  und  $P_k^{(2)}$  haben in diesen Gleichungen leichtverständliche Bedeutungen. Wir versuchen jetzt unser Problem durch den Ansatz

$$u_j = u_j^{(1)} + u_j^{(2)}, \quad p = p^{(1)} + p^{(2)}$$

zu lösen. Mit diesem Ansatz den Randbedingungen exakt zu genügen, ist offenbar unmöglich. Bei unserer angenäherten Behandlung des Problems wollen wir aber die zweiten und höheren Potenzen der Größen  $a_1/r_{12}, a_2/r_{12}$  ( $r_{12}^2 = (x_j^{(1)} - x_j^{(2)})^2, r_{12} \geq 0$ ) vernachlässigen. Unter diesen Umständen ist es gar nicht nötig, den Randbedingungen exakt zu genügen. Es reicht vielmehr vollkommen aus, daß sie durchschnittlich erfüllt sind. Wir legen also den Größen  $v_j^{(1)}$  und  $v_j^{(2)}$  die Bedingungen:

$$\left. \begin{aligned} v_1^{(1)} + \frac{1}{4\pi} \int_{r_1=a_1} u_1^{(2)} \frac{dS}{a_1^2} &= U_1, \quad v_k^{(1)} + \frac{1}{4\pi} \int_{r_1=a_1} u_k^{(2)} \frac{dS}{a_1^2} = 0, \quad k = 2, 3, \\ v_1^{(2)} + \frac{1}{4\pi} \int_{r_2=a_2} u_1^{(1)} \frac{dS}{a_2^2} &= U_1, \quad v_k^{(2)} + \frac{1}{4\pi} \int_{r_2=a_2} u_k^{(1)} \frac{dS}{a_2^2} = 0, \quad k = 2, 3. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

auf. Aus (27) und (28) S. 113 folgt nun für  $l = 1, m = 2$  und  $l = 2, m = 1, k = 1, 2, 3$ :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{r_m = a_m} u_k^{(l)} \frac{dS}{a_m^2} = u_k^{(l)}(x_j^{(m)}) + \frac{2\pi}{3} \frac{a_m^2}{\mu} \left( \frac{\partial p^{(l)}}{\partial x_k} \right) x_j^{(m)}.$$

Wir setzen hier zunächst  $l = 1, m = 2$ . Einsetzen der Werte (2) von  $u_k^{(1)}, p^{(1)}$  zeigt sofort, daß das zweite Glied der rechten Seite vernachlässigt werden kann. Wir haben also annähernd:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{r_2 = a_2} u_k^{(1)} \frac{dS}{a_2^2} = u_k^{(1)}(x_j^{(2)}). \quad (6)$$

Wir erhalten in derselben Weise:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{r_1 = a_1} u_k^{(2)} \frac{dS}{a_1^2} = u_k^{(2)}(x_j^{(1)}). \quad (7)$$

Zur Bestimmung der Größen  $v_i^{(1)}$  und  $v_i^{(2)}$  erhalten wir also nach (4) und (5) die Gleichungen:

$$\begin{aligned} v_1^{(1)} + v_k^{(2)} U_{1k}^{(2)}(x_j^{(1)}) &= U_1, & v_l^{(1)} + v_k^{(2)} U_{lk}^{(2)}(x_j^{(1)}) &= 0, & l &= 1, 2, \\ v_1^{(2)} + v_k^{(1)} U_{1k}^{(1)}(x_j^{(2)}) &= U_1, & v_l^{(2)} + v_k^{(1)} U_{lk}^{(1)}(x_j^{(2)}) &= 0, & l &= 1, 2. \end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen in der hier angestrebten Genauigkeit ergibt:

$$v_k^{(1)} = U_1(\delta_{k1} - U_{k1}^{(2)}(x_j^{(1)})), \quad v_k^{(2)} = U_1(\delta_{k1} - U_{k1}^{(1)}(x_j^{(2)})).$$

Wir haben also:

$$u_k = U_1(U_{k1}^{(1)} - U_{kl}^{(1)} U_{l1}^{(2)}(x_j^{(1)})) + U_1(U_{k1}^{(2)} - U_{kl}^{(2)} U_{l1}^{(1)}(x_j^{(2)})). \quad (8)$$

Wir können dieses Ergebnis in der folgenden Weise deuten. In der Umgebung der ersten Kugel sind die Komponenten der von der zweiten Kugel herrührenden Strömung annähernd konstant und haben (annähernd) die Werte:

$$U_1 U_{k1}^{(2)}(x_j^{(1)}).$$

In dieser Strömung bewegt sich die erste Kugel mit einer relativen Geschwindigkeit, deren Komponenten:

$$U_1(\delta_{k1} - U_{k1}^{(2)}(x_j^{(1)}))$$

sind. Die Resultierende der Kräfte, welche die Flüssigkeit auf diese Kugel ausübt, kann nur von dieser relativen Bewegung abhängen. Sie hat folglich die Komponenten:

$$-6\pi\mu a_1 U_1 (\delta_{k1} - U_{k1}^{(2)}(x_j^{(1)})).$$

In derselben Weise wirkt auf die andere Kugel die Kraft:

$$- 6\pi\mu a_2 U_1 (\delta_{k1} - U_{k1}^{(1)}(x_j^{(2)})).$$

Außer dem Stokesschen Widerstande wirkt also auf die erste Kugel eine Kraft:

$$\frac{9}{2} \pi \mu \frac{a_1 a_2}{r_{12}} U_1 \delta_{k1} + \frac{9}{2} \pi \mu a_1 a_2 U_1 \frac{(x_1^{(1)} - x_1^{(2)}) (x_k^{(1)} - x_k^{(2)})}{r_{12}^3}.$$

Die Symmetrie dieses Ausdrückes in bezug auf die beiden Kugeln zeigt, daß auf die zweite Kugel eine Kraft derselben Größe und derselben Richtung wirkt. Diese Kraft kann als die Resultierende von zwei Kräften aufgefaßt werden, von welchen eine dieselbe Richtung wie die Bewegung der Kugeln hat und also auf die Kugeln beschleunigend wirkt, während die andere dieselbe Richtung wie eine vom Mittelpunkte der hinteren Kugel zum Mittelpunkte der vorderen Kugel gezogene Gerade hat. Jene Kraft hat den Betrag:

$$\frac{9}{2} \pi \mu U_1 \frac{a_1 a_2}{r_{12}}$$

und diese den Betrag:

$$\frac{9}{2} \pi \mu U_1 a_1 a_2 \frac{(x_1^{(1)} - x_1^{(2)})}{r_{12}^2}.$$

Diese Sätze sind von M. Smoluchowski gefunden worden.

### 143. Genauere Formeln.

Für den Fall, daß die Bewegungsrichtung der beiden Kugeln mit der Verbindungsgeraden ihrer Mittelpunkte zusammenfällt, hat Faxén eine genauere Formel für den Widerstand berechnet. Er findet für den Widerstand der ersten Kugel:

$$\begin{aligned} W = & 6\pi\mu a_1 U_1 \left\{ 1 - \frac{3a_2}{2r_{12}} + \frac{9a_1 a_2}{4r_{12}^2} + \right. \\ & + \frac{1}{r_{12}^3} \left( \frac{1}{2} a_1^2 a_2 - \frac{27}{8} a_1 a_2^2 + \frac{1}{2} a_2^3 \right) + \\ & + \frac{1}{r_{12}^4} \left( -\frac{3}{2} a_1^3 a_2 + \frac{81}{16} a_1^2 a_2^2 + \frac{9}{4} a_1 a_2^3 \right) - \\ & \left. - \frac{1}{r_{12}^5} \left( \frac{9}{4} a_1^3 a_2^2 + \frac{243}{32} a_1^2 a_2^3 + \frac{9}{4} a_1 a_2^4 \right) + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Den Widerstand der zweiten Kugel erhält man einfach durch Vertauschen von  $a_1$  und  $a_2$ . Welche von den beiden Kugeln vorangeht, ist für den Widerstand belanglos.

In dem Fall, daß die beiden Kugeln sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten (aber doch stets in einer zur Verbindungsline der Mittelpunkte parallelen Richtung) bewegen, findet Faxén für den Widerstand der ersten Kugel:

$$\begin{aligned} W = & 6\pi\mu a_1 U_1 \left\{ 1 + \frac{9a_1 a_2}{4r_{12}^2} + \right. \\ & + \frac{1}{r_{12}^4} \left( -\frac{3}{2} a_1^3 a_2 + \frac{81}{16} a_1^2 a_2^2 + \frac{9}{4} a_1 a_2^3 \right) + \dots \left. \right\} - \\ & - 6\pi\mu a_1 U_2 \left\{ \frac{3}{2} \frac{a_2}{r_{12}} + \frac{1}{r_{12}^3} \left( -\frac{1}{2} a_1^2 a_2 + \frac{27}{8} a_1 a_2^2 - \frac{1}{2} a_2^3 \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{r_{12}^5} \left( \frac{9}{4} a_1^3 a_2^2 + \frac{243}{32} a_1^2 a_2^3 + \frac{9}{4} a_1 a_2^4 \right) + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Den Widerstand der zweiten Kugel erhält man durch Vertauschen von  $a_1$  und  $a_2$ ,  $U_1$  und  $U_2$ .

Eine von H. Dahl ausgeführte genauere Berechnung des Falles  $a_1 = a_2 = a$  ergab für den Widerstand der ersten Kugel den Wert:

$$\begin{aligned} W = & 6\pi\mu a U_1 \{ 1 + 9x^2 + 93x^4 + 1197x^6 + 19821x^8 + \dots \} - \\ & - 6\pi\mu a U_2 \{ 3x + 19x^3 + 387x^5 + 5331x^7 + 76115x^9 + \dots \}, \end{aligned}$$

$$x = \frac{a}{2r_{12}}.$$

Den Widerstand der zweiten Kugel erhält man durch Vertauschen von  $U_1$  und  $U_2$ .

Die Bewegung zweier Kugeln mit derselben konstanten Geschwindigkeit längs der Verbindungsline der Mittelpunkte derselben ist kürzlich Gegenstand einer Untersuchung von Margaret Stimson und G. B. Jeffery gewesen. Diese Autoren geben auf der Grundlage der Stokeschen Gleichungen eine vollständige Lösung des Problems durch unendliche Reihen. In dem Falle, daß die beiden Kugeln denselben Radius ( $a$ ) haben, finden sie für den Widerstand jeder Kugel einen Ausdruck:

$$6\pi\mu a U_1 \lambda,$$

wo\*:

$$\lambda = \frac{4}{3} \sinh a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+3)} \left\{ 1 - \frac{4 \sinh^2(n+\frac{1}{2})a - (2n+1)^2 \sinh^2 a}{2 \sinh(2n+1)a + (2n+1) \sinh 2a} \right\},$$

$a$  ist dabei durch die Gleichung:

---

\* In der Formel von Miß Stimson und Dr. Jeffery fehlt infolge eines Druckfehlers rechts ein Faktor 2. Ich verdanke Dr. Faxén diese Bemerkung.

$$\cosh a = \frac{r_{12}}{2a}$$

definiert. Für  $\lambda$  haben die beiden Autoren eine Tabelle berechnet:

$a$	$r_{12}/2a$	$\lambda$
0,5	1,128	0,663
1,0	1,543	0,702
1,5	2,352	0,768
2,0	3,762	0,836
2,5	6,132	0,892
3,0	10,068	0,931
$\infty$	$\infty$	1,00

Dr. Faxén hat zu dieser Tabelle eine neue Zeile hinzugefügt:

$$a = 0, \quad r_{12}/2a = 1, \quad \lambda = 0,645.$$

## § 15. Die sogenannten Paradoxien von Stokes und von Whitehead.

### 151. Das Paradoxon von Stokes.

Wir haben in § 9 das Problem behandelt, eine Lösung der Stokeschen Gleichungen:

$$\mu \Delta u_j = \frac{\partial p}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (j = 1, 2, 3) \quad (1)$$

zu finden, bei welcher die Größen  $u_j$  außerhalb der Kugel  $R = a$  regulär sind, an dieser Kugel die konstanten Werte  $U_j$  annehmen und in unendlicher Ferne verschwinden. Das entsprechende zweidimensionale Problem ist die Aufgabe, eine Lösung der Gleichungen:

$$\mu \Delta u_k = \frac{\partial p}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \quad (k = 1, 2) \quad (2)$$

zu finden, welche außerhalb des Kreises  $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = a$  regulär ist und den Randbedingungen: für  $R = a$ ,  $u_k = U_k = \text{Konst.}$ , für  $R \rightarrow \infty$ :  $u_k \rightarrow 0$  genügt. Zu dieser Aufgabe wird man geführt, wenn man nach der Methode von Stokes die Bewegung untersuchen will, die in einer den ganzen Raum erfüllenden Flüssigkeit durch einen unendlich langen Kreiszylinder erzeugt wird, der sich mit konstanter Geschwindigkeit in einer gegen die Längsrichtung senkrechten Richtung darin bewegt. Man kann leicht eine Lösung der Gleichungen (2) angeben,

die formal der von Stokes gefundenen Lösung des Problems der Kugel entspricht. Sie ist:

$$\left. \begin{aligned} u_k &= A \left\{ 2 U_k \log R - U_l \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \left[ \frac{1}{2} R^2 (\log R - 1) + \frac{1}{2} a^2 \log R \right] \right\}, \\ p &= -2 \mu A U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \log R, \quad A = \frac{1}{\log a}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Ein Blick auf diese Lösung zeigt sofort, daß sie sich aber bei großen  $R$ -Werten nicht in der Weise verhält, wie wir von der Lösung eines hydrodynamischen Problems verlangen müssen. Bei wachsendem  $R$  konvergieren die Größen  $u_k$  nicht gegen Null, sondern wachsen vielmehr, den absoluten Beträgen nach, über alle Grenzen. Wenn man trotzdem unter Verzicht der Forderung  $u_k \rightarrow 0$  für  $R \rightarrow \infty$  der Lösung eine hydrodynamische Bedeutung zuschreiben wollte, so würde man auf die Schwierigkeit stoßen, daß die Randwertaufgabe unendlich viele Lösungen besitzt. Eine von (3) verschiedene Lösung ist z. B.  $u_k = U_k$  in der ganzen Flüssigkeit. Stokes zog aus diesen Umständen den Schluß, daß das physikalische Problem der stationären Bewegung eines Zylinders in einer zähen Flüssigkeit unlösbar ist. Natürlich ist die Tatsache, daß die in formaler Analogie gebildete Lösung die Randbedingung im Unendlichen nicht erfüllt, an sich kein Beweis für die Nichtexistenz einer solchen Lösung. Andererseits dürfte es nicht sehr schwer sein, diesen Beweis streng zu führen.

## 15 2. Das Paradoxon von Whitehead.

In der von Stokes gegebenen Lösung des Problems der stationären Bewegung der Kugel (§ 9, (23)) sind  $u_j$  und  $p$  lineare und homogene Funktionen der Größen  $U_1, U_2, U_3$ . Es ist naheliegend, die von Stokes gefundenen Ausdrücke als die ersten Glieder von Reihen aufzufassen, die nach Potenzen von  $U_1, U_2, U_3$  fortschreiten. Im Jahre 1888 machte Whitehead in Anschluß an Stokes einen Versuch, die Glieder in  $u_j, p$ , welche im  $U_1, U_2, U_3$  vom zweiten Grade sind, zu berechnen. Wir geben einen kurzen Bericht über diese Untersuchung von Whitehead. Wir legen der Einfachheit halber die Koordinatenachsen so, daß die  $x_1$ -Achse mit der Bewegungsrichtung parallel wird. Die vollständigen hydrodynamischen Differentialgleichungen für stationäre Bewegung, auf ein mit der Kugel fest verbundenes Bezugssystem bezogen, sind, wie wir im ersten Teile, S. 12, sahen, wenn wir die Geschwindigkeitskomponenten  $= -U_1 \delta_{j1} + u_j$  setzen:

$$\mu \Delta u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} = -\varrho U_1 \frac{\partial u_j}{\partial x_1} + \varrho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \quad (j, k = 1, 2, 3) \quad (4)$$

Die Nebenbedingungen sind: Für  $R^2 = x_j^2 = a^2$ ,  $u_j = U_1 \delta_{j1}$ ; für  $R \rightarrow \infty$ ,  $u_j = 0$ .

Stokes vernachlässigte in den Gleichungen (4) die rechten Seiten. Er löste also die Gleichungen:

$$\mu \Delta u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

und zwar durch den Ansatz:

$$\left. \begin{aligned} u_j &= \frac{3}{2} U_1 \frac{a}{R} \delta_{j1} - \frac{a}{4} U_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_j} \left( 3R + \frac{a^2}{R} \right) = u_j^{(1)}, \\ p &= -\frac{3}{2} \mu a U_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{R} = p^{(1)}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Wir setzen jetzt:

$$u_j = u_j^{(1)} + u_j^{(2)} + \dots, \quad p = p^{(1)} + p^{(2)} + \dots,$$

wo  $u_j^{(1)}$ ,  $p^{(1)}$  die in (5) angegebenen Werte haben sollen und wo  $u_j^{(n)}$ ,  $p^{(n)}$  den Faktor  $U_1^n$  enthalten sollen. Zur Bestimmung von  $u_j^{(2)}$ ,  $p^{(2)}$  erhalten wir aus (4) die Gleichungen:

$$\mu \Delta u_j^{(2)} - \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_j} = -\varrho U_1 \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_1} + \varrho u_k^{(1)} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial x_j} = 0. \quad (6)$$

Die Nebenbedingungen sind: für  $R = a$ ,  $u_j^{(2)} = 0$ ; für  $R \rightarrow \infty$ ,  $u_j^{(2)} \rightarrow 0$ .

Wir sehen hier vom letzten Gliede rechts in der ersten Gleichung (6) ab. Wir beschränken uns also auf die Aufgabe, eine Lösung  $u_j^{(2)}$ ,  $p^{(2)}$  der Gleichungen:

$$\mu \Delta u_j^{(2)} - \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_j} = -\varrho U_1 \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial x_j} = 0 \quad (7)$$

zu finden, welche den oben bei (6) erwähnten Nebenbedingungen genügt. Das System (7) ist ein lineares, inhomogenes System, es empfiehlt sich daher, diese Aufgabe in zwei zu zerlegen: erstens irgendeine außerhalb der Kugel  $R = a$  reguläre Lösung des Systems (7) zu finden, zweitens eine jene Lösung an der Kugel  $R = a$  und in unendlicher Ferne kompensierende, für  $R > a$  reguläre Lösung der Stokesschen Gleichungen (1) zu finden.

Es ist nicht schwer, die erste Aufgabe zu lösen. Eine Lösung des Systems (7) ist:

$$u_j^{(2)} = -\frac{\varrho a U_1^2}{\mu} \left\{ \frac{3}{4} \frac{x_1}{R} \delta_{j1} - \frac{1}{16} \frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_j} R^3 - \frac{a^2}{4} \left( \frac{x_1}{R^3} \delta_{j1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 R}{\partial x_1^2 \partial x_j} \right) \right\},$$

$$p_j^{(2)} = 0.$$

Um so schwieriger ist aber die zweite Aufgabe. Es gelang in der Tat Herrn Whitehead nicht, diese Aufgabe zu lösen. Er zog hieraus den Schluß, daß das physikalische Problem, das er lösen wollte, keine Lösung besitzt. Bei der Bewegung eines Körpers in einer zähen Flüssigkeit sollen nach Whitehead Diskontinuitätsflächen auftreten.

### 15 3. Erklärung dieser Paradoxien.

Dem inneren Grunde der Paradoxien, zu welchen Stokes und Whitehead in ihren hier dargelegten Untersuchungen sich geführt sahen, sind wir schon im 2. Paragraphen, S. 18, begegnet. Die Annahme, daß eine Lösung der Gleichungen (4), die außerhalb einer gewissen Fläche regulär ist, in eine Potenzreihe nach  $U_1$  entwickelt werden kann, ist unzulässig. Aber nicht nur diese Annahme, sondern auch die Stokesschen Gleichungen (1) sind unrichtig. Man sieht das sofort, wenn man die Glieder dieser Gleichungen hinsichtlich der Größenordnung mit den in den vollständigen Gleichungen (4) vorkommenden, aber in (1) vernachlässigten Gliedern vergleicht. Wir haben z. B.:

$$\mu \Delta u_1^{(1)} = \frac{3}{2} a \mu U_1 \left( \frac{1}{R^3} - \frac{3x_1^2}{R^5} \right).$$

Gleichzeitig haben wir:

$$-\varrho U_1 \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} = -\frac{3}{4} \varrho a U_1^2 \frac{x_1}{R^3} \left( 1 - \frac{3x_1^2}{R^2} \right) + \frac{3}{4} \varrho a^3 U_1^2 \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} \frac{1}{R}.$$

Wie klein auch  $U_1$  ist, es gibt stets Bereiche, in denen  $\left| \varrho U_1 \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} \right|$  im Verhältnis zu  $|\mu \Delta u_1^{(1)}|$  beliebig groß ist. Schon in erster Näherung ist es deshalb, wenn man ein überall richtiges Bild der Bewegung erhalten will, notwendig, das erste Glied rechts in der ersten Gleichung (4) mitzunehmen. Um so mehr ist dies notwendig, wenn man die in erster Näherung gefundene Lösung zur Grundlage einer genaueren Berechnung der Bewegung machen will. Zu einer exakten Berechnung des Widerstandes müssen wir also zunächst von den erweiterten Stokesschen Gleichungen (siehe S. 12) ausgehen.

### III.

## Angenäherte Lösungen von Randwertaufgaben bei den erweiterten Stokesschen Gleichungen.

### § 16. Das Problem der Kugel.\*

#### 16 1. Aufstellung spezieller Lösungen der erweiterten Stokesschen Gleichungen.

Wir kehren zu dem Problem zurück, die Strömung einer sonst den ganzen Raum erfüllenden, zähen Flüssigkeit zu berechnen, welche durch eine kleine Kugel erzeugt wird, die sich darin mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Wir benutzen ein Bezugssystem, dessen Anfangspunkt mit dem Mittelpunkte der Kugel zusammenfällt und dessen  $x_1$ -Achse mit der Bewegungsrichtung der Kugel parallel ist. Wir bezeichnen die auf dieses System bezogenen Geschwindigkeitskomponenten der Flüssigkeit mit  $-U_1 + u_1, u_2, u_3$ . Zur Bestimmung von  $u_j$  und des Druckes  $p$  erhalten wir, wie wir S. 12 sahen, bei Vernachlässigung der in den Größen  $u_j$  quadratischen Glieder:

$$\mu \Delta u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} = -\varrho U_1 \frac{\partial u_j}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \quad (1)$$

Wir haben eine Lösung dieses Systems zu suchen, die außerhalb der Kugel  $R = a$  regulär ist und welche den Nebenbedingungen: für  $R = a$ :  $u_1 = U_1, u_2 = u_3 = 0$ ; für  $R \rightarrow \infty$ :  $u_j \rightarrow 0$  genügt.

Wir haben im 4. Paragraphen S. 32 gesehen, daß das System (1) die Lösung:

$$u_j^{(1)} = \delta_{1j} \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_j}, \quad p^{(1)} = -\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \mu \Delta \Phi + \varrho U_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)$$

---

\* Vgl. § 15, Schlußbemerkung.

besitzt, wo:

$$\Phi = \frac{1}{\sigma'} O(\sigma' s) = \frac{1}{\sigma'} \int_0^{\sigma' s} \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} da, \quad \sigma = \frac{\varrho U_1}{2\mu}, \quad s = R + \frac{\sigma}{\sigma'} x_1,$$

$$R^2 = x_1^2, \quad R \geq 0,$$

und wo  $\sigma'$  diejenige der beiden Größen  $\pm \sigma$  ist, welche positiv ist.  $2\sigma' a$ , d. h.  $\varrho |U_1| a/\mu$  ist die sogenannte Reynoldssche Zahl. Wir nehmen zunächst an, daß sie verglichen mit 1 klein ist, d. h. wir betrachten Fälle, in denen entweder der Kugelradius oder die Geschwindigkeit verhältnismäßig klein oder aber der Reibungskoeffizient  $\mu$  groß ist. Wir haben:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{1 - e^{-\sigma' s}}{\sigma R}, \quad \Delta \Phi = \frac{2}{R} e^{-\sigma' s};$$

folglich:

$$\Delta \Phi + \frac{\varrho U_1}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{2}{R}$$

und

$$u_j^{(1)} = \delta_{1j} \frac{2}{R} e^{-\sigma' s} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_j}, \quad p^{(1)} = \frac{2\mu x_1}{R^3}. \quad (2)$$

Wir haben in § 4 Formel (12), S. 34, ferner gesehen, daß für kleine Werte von  $\sigma' s$ :

$$\Phi = s - \frac{1}{4} \sigma' s^2 + \dots = R + \frac{\sigma}{\sigma'} x_1 - \frac{1}{4} \sigma' (R^2 + x_1^2) - \frac{1}{2} \sigma R x_1 + \dots, \quad (3)$$

also für kleine  $R$  annähernd, bei Vernachlässigung der Glieder, welche  $\sigma'$  oder  $s$  als Faktor enthalten:

$$u_j^{(1)} = \delta_{1j} \frac{2}{R} - \frac{\partial^2 R}{\partial x_1 \partial x_j}.$$

Eine andere Lösung von (1) ist offenbar:

$$u_j^{(2)} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_j} \frac{1}{R}, \quad p^{(2)} = \varrho U_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{1}{R}. \quad (4)$$

## 162. Lösungen der erweiterten Stokesschen Gleichungen, welche die Randbedingungen angenähert erfüllen.

Ein Blick auf (9, 24) zeigt sofort, daß wir aus (2) und (4) eine angenäherte Lösung unseres Problems bilden können, welche dem System (1) genügt, im Unendlichen die Bedingungen  $u_j = 0$  und auf der Kugel, bis auf Glieder von der Größenordnung  $\sigma' a U_1$  die Bedingungen  $u_1 = U_1$ ,  $u_2 = u_3 = 0$  erfüllt. Wir setzen:

$$\left. \begin{aligned} u_j &= \frac{3}{4} a U_1 u_j^{(1)} - \frac{1}{4} a^3 U_1 u_j^{(2)} = \frac{3}{2} \frac{a}{R} U_1 e^{-\sigma' s} \delta_{1j} - \\ &\quad - \frac{1}{4} a U_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_j} \left( 3\Phi + \frac{a^2}{R} \right), \\ p &= \frac{3}{2} \mu a U_1 \frac{x_1}{R^3} + \frac{1}{4} \varrho U_1^2 \frac{a^3}{R^3} \left( 1 - \frac{3x_1^2}{R^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Wenn wir in (5) den Wert von  $\Phi$  einsetzen, erhalten wir:

$$u_j = \frac{3}{2} \frac{a}{R} U_1 e^{-\sigma' s} \delta_{1j} - \frac{3}{4} a U_1 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1 - e^{-\sigma' s}}{\sigma R} - \frac{1}{4} a^3 U_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_j} \frac{1}{R}. \quad (6)$$

Die gefundene Lösung besitzt offenbar Rotationssymmetrie um die  $x_1$ -Achse. Wir können sie infolgedessen durch die sogenannte Stokesche Stromfunktion ausdrücken. Wir setzen für einen Augenblick:

$$\frac{3}{4} a U_1 \Phi + \frac{1}{4} a^3 U_1 \frac{1}{R} = \Psi$$

und haben dann:

$$u_j = \Delta \Psi \cdot \delta_{1j} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_j}.$$

$\Psi$  kann als eine Funktion der beiden Größen  $x_1$  und  $h = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$  aufgefaßt werden. Wenn wir:

$$-h \frac{\partial \Psi}{\partial h} = H$$

setzen, so haben wir:

$$\begin{aligned} \Delta \Psi &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial h^2} + \frac{1}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial h} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} - \frac{1}{h} \frac{\partial H}{\partial h}, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} &= -\frac{x_2}{h^2} H, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} = -\frac{x_3}{h^2} H, \end{aligned}$$

folglich:

$$u_1 = -\frac{1}{h} \frac{\partial H}{\partial h}, \quad \frac{x_2}{h} u_2 + \frac{x_3}{h} u_3 = \frac{1}{h} \frac{\partial H}{\partial x_1}. \quad (7)$$

$H$  ist dann die Stokessche Stromfunktion für die Bewegung mit den Geschwindigkeitskomponenten  $u_1, u_2, u_3$ . Dagegen ist  $H + \frac{1}{2} U_1 h^2$  die Stromfunktion für die Bewegung, deren Geschwindigkeitskomponenten  $-U_1 + u_1, u_2, u_3$  sind. Die Gleichung der Stromlinien, d. h. der Bahnkurven der Flüssigkeitspartikel, ist in unserem Falle:

$$H + \frac{1}{2} U_1 h^2 = \text{Konst.}$$

Wir setzen die obigen Werte für  $\Psi$  und  $\Phi$  ein und erhalten so für die Funktion  $H$  den Ausdruck:

$$H = \frac{1}{4} a U_1 \frac{\hbar^2}{R} \left( \frac{a^2}{R^2} - 3 \frac{1 - e^{-\sigma' R - \sigma x_1}}{\sigma' R + \sigma x_1} \right). \quad (8)$$

Die Formeln (7) und (8) sind mit den Formeln (5) und (6) gleichbedeutend.

### 163. Untersuchung der Gültigkeit der Lösung. Vergleich mit der Stokesschen Lösung.

Wir wollen jetzt prüfen, unter welchen Umständen unsere Formeln (5) eine hinreichend genaue Lösung unseres Problems ergeben. Wir haben vorausgesetzt, daß es an der Oberfläche der Kugel  $R = a$  erlaubt ist, in der zweiten Reihe (3) nur die zwei ersten Glieder zu berücksichtigen. Ein Blick auf (3) zeigt nun sofort, daß dies nur dann gestattet ist, wenn  $\sigma' a$  eine kleine Größe ist, die neben 1 vernachlässigt werden kann. Wenn dies der Fall ist, haben wir in der Umgebung der Kugel  $R = a$  annähernd:

$$u_j = \frac{3}{2} U_1 \frac{a}{R} \delta_{1j} - \frac{1}{4} a U_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_j} \left( 3R + \frac{a^2}{R} \right),$$

d. h. die Stokessche Lösung des Problems der Kugel. Wenn man aus jener Lösung die Glieder  $\varrho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}$  der vollständigen hydrodynamischen Differentialgleichungen berechnet, so findet man, daß sie unter der Voraussetzung  $\sigma' a$  klein gegen 1 im Vergleich mit den in (1) mitgenommenen Gliedern klein sind. In der Umgebung der Kugel ist also unsere Näherung erlaubt, wenn  $\sigma' a$  klein gegen 1 ist. In den von der Kugel entfernten Teilen der Flüssigkeit ist die aus (6) berechnete Geschwindigkeit klein neben  $U_1$ . Wir haben deshalb in diesen Bereichen:

$$\left| u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right| \text{ klein gegen } \left| U_1 \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right|.$$

Wenn  $\sigma' a$  klein gegen 1 ist, so gibt also unsere Lösung (6) sowohl in der Umgebung der Kugel wie in großer Entfernung davon ein angenähert richtiges Bild der Bewegung.

Ein Vergleich der hier gefundenen Bewegung mit derjenigen, zu welcher Stokes geführt wurde, zeigt sofort einen charakteristischen Unterschied zwischen diesen beiden Bewegungen. Die Symmetrie in bezug auf die Ebene  $x_1 = 0$ , welche für die von Stokes betrachtete Bewegung

charakteristisch ist, ist in der neuen Bewegung nicht mehr vorhanden. Mit anderen Worten, die Beziehungen:

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = u_1(-x_1, x_2, x_3), \quad u_2(x_1, x_2, x_3) = -u_2(-x_1, x_2, x_3), \\ u_3(x_1, x_2, x_3) = -u_3(-x_1, x_2, x_3),$$

welche für die von Stokes untersuchte Bewegung Geltung haben, bestehen bei der neuen Bewegung nicht.

#### 16 4. Eigenschaften der neuen Lösung. Ausblick auf die Theorie der idealen Flüssigkeiten.

Wir haben gesehen, daß für die neue Lösung eine gewisse Dissymmetrie der Bewegung vor und hinter der Kugel charakteristisch ist. Um die Art dieser Dissymmetrie festzustellen, bemerken wir, daß in Bezug auf ein mitbewegtes Koordinatensystem nach der neuen Lösung in großer Entfernung von der Kugel vor derselben:

$$u_1 = \frac{3}{4} \frac{a U_1}{\sigma} \frac{x_1}{R^3},$$

hinter derselben:

$$u_1 = \frac{3}{2} \frac{a U_1}{R}$$

ist. In der Stokesschen Lösung ist dagegen sowohl vor wie hinter der Kugel in großer Entfernung:

$$u_1 = \frac{3}{2} \frac{a U_1}{R}.$$

Wir sehen, daß nach der neuen Lösung die Flüssigkeit hinter der Kugel eine Tendenz hat, dieser zu folgen, während die Flüssigkeit vor der Kugel ausweicht.

Die Art des Schwanzes, der sich hinter der Kugel bildet, erkennt man durch Berechnung des Wirbelvektors. Die Wirbellinien sind offenbar Kreise, deren Ebenen gegen die  $x_1$ -Achse senkrecht sind und deren Mittelpunkte auf dieser Achse liegen. Die Wirbelbewegung in einem beliebigen Punkte des Raumes ist unter diesen Umständen durch den Betrag des Wirbelvektors gekennzeichnet. Er ist in einem mitbewegten Bezugssystem:

$$\frac{3}{2} a U_1 \frac{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}{R^3} (1 + \sigma' R) e^{-\sigma' R - \sigma x_1}.$$

Nach Stokes würde er den Wert:

$$\frac{3}{2} a U_1 \frac{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}{R^3}$$

haben. Wir sehen, daß er nach der neuen Lösung in großen Entfernung vor der Kugel, wo  $x_1$  dasselbe Vorzeichen wie  $\sigma$  hat und also der Exponent in unserer Formel den Wert:

$$-\sigma'(R + |x_1|)$$

hat, sehr viel schneller mit  $1/R$  abnimmt, als es in der Stokesschen Theorie der Fall ist. Wir sehen ferner, daß hinter der Kugel, wo  $x_1$  dasselbe Vorzeichen wie  $-\sigma$  hat und wo also der Exponent den Wert:

$$-\sigma'(R - |x_1|)$$

hat, zwar in großen Entfernung von der Kugel im allgemeinen der Betrag des Wirbelvektors exponentiell und also schneller als nach der Stokesschen Formel abnimmt, daß aber die Umgebung der vom Mittelpunkt der Kugel durchlaufenen Bahn eine Ausnahme bildet, indem hier:

$$R = |x_1| + \frac{1}{2} \frac{x_2^2 + x_3^2}{|x_1|} + \dots$$

also annähernd:  $R = |x_1|$  ist und folglich der Exponent annähernd den Wert Null hat. In diesem Bereich ist der Betrag des Wirbelvektors annähernd:

$$\frac{3}{2} a U_1 \frac{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}{R^3} (1 + \sigma' R).$$

Bei großen  $\sigma' R$  können wir hierfür einfacher:

$$\frac{3}{2} a U_1 \sigma' \frac{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}{R^2}$$

schreiben. Hinter der Kugel nimmt also der Betrag des Wirbelvektors wie  $1/R$  ab, also langsamer als bei der Theorie von Stokes, nach welcher der Betrag des Wirbelvektors in allen Richtungen wie  $1/R^2$  abnimmt.

Wenn wir zwar  $R > a$ , aber doch  $\sigma' R$  klein annehmen, können wir die Exponentialfunktion in eine Reihe entwickeln und nur die ersten Glieder berücksichtigen. Man erhält für den Betrag des Wirbelvektors:

$$\frac{3}{2} a U_1 \frac{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}{R^3} (1 - \sigma x_1(1 + \sigma' R) + \dots).$$

Auch in der Nähe der Kugel ist wegen des Gliedes:

$$-\sigma x_1(1 + \sigma' R)$$

der Wirbelvektor vor der Kugel dem Betrage nach kleiner als hinter der Kugel. Ein Vergleich mit der Stokesschen Formel zeigt, daß auch

in diesem Bereich der Wirbelvektor vor der Kugel nach der neuen Theorie kleiner als nach der alten ist, hinter der Kugel dagegen umgekehrt nach der neuen Theorie größer als nach der alten ist.

Wir wollen, an diesem Punkte angelangt, einen Blick auf die klassische Green-Dirichletsche Theorie der Bewegung einer Kugel in einer idealen Flüssigkeit werfen. Nach jener Theorie soll die Bewegung der Flüssigkeit dieselbe Symmetrie in bezug auf eine durch den Mittelpunkt der Kugel gehende, gegen die Bewegungsrichtung derselben senkrechte Ebene aufweisen, welche wir in der von Stokes untersuchten Bewegung fanden. Kann dieses Ergebnis richtig sein? Wir haben gesehen, daß selbst bei den kleinsten Geschwindigkeiten, wo die Bewegung in so hohem Maße, wie es überhaupt möglich ist, von der Reibung beherrscht wird, doch die Trägheit eine Dissymmetrie erzeugt. Kann man annehmen, daß in dem entgegengesetzten Grenzfalle, wo die Reibung keine Rolle mehr spielt, sondern die Trägheit allein das Feld beherrscht, jene Dissymmetrie verschwinden wird? Ist es nicht wahrscheinlich, daß die Dissymmetrie auch bei verschwindender Reibung bestehen bleibt? Auf diese Frage kommen wir später zurück.

Auf den Widerstand gegen die Bewegung der Kugel können offenbar nur die Verhältnisse in der Umgebung derselben einen Einfluß haben. Da unsere Lösung in diesem Gebiete mit der von Stokes gefundenen übereinstimmt, so erhalten wir in erster Näherung für den Widerstand den Stokesschen Wert (vgl. S. 111):  $6\pi\mu a U_1$ .

Es dürfte hier am Platze sein, einige Worte über die Bedeutung des Stokesschen Widerstandsgesetzes zu sagen. Stokes wurde zu seinen Untersuchungen über den Widerstand einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit durch seine Pendelstudien geführt. Eine größere Bedeutung bekam das Gesetz erst, nachdem es in der Kolloidchemie Verwendung gefunden hatte. Das Gesetz spielt in der Tat eine wichtige Rolle in Einsteins Theorie der Brownschen Bewegung. Außerdem hat man das Gesetz dazu benutzt, die Größe der kolloidalen Partikel zu bestimmen. Durch diese Umstände hat das Gesetz eine sehr große Bedeutung für die Kolloidchemie gewonnen. Daß das Gesetz für die Theorie des Regens und damit für die Meteorologie wichtig ist, liegt auf der Hand. Aber auch bei vielen rein physikalischen Untersuchungen ist das Gesetz von Bedeutung gewesen. Es genüge, hier auf zwei Beispiele hinzuweisen. Einstein hat das Gesetz auf die Jonenbeweglichkeit angewandt. Millikan hat es bei seiner Bestimmung der Größe der Elektronenladung benutzt.

### 165. Teilung der vernachlässigten Glieder zweiter Ordnung in Glieder mit $U_1 | U_1$ und in Glieder mit $U_1^2$ .

Die oben gegebene Lösung des Problems der Kugel stellt nur eine Annäherung dar. An zwei Stellen haben wir Glieder vernachlässigt. In den hydrodynamischen Differentialgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \mu \Delta u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \varrho U_1 \frac{\partial u_j}{\partial x_1} &= \varrho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}, \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned} \right\} (9)$$

haben wir die rechte Seite der ersten Gleichung vernachlässigt. Und die Randbedingung  $u_j = U_1 \delta_{1j}$  an der Oberfläche der Kugel wird von unserer Lösung nicht exakt, sondern nur annähernd erfüllt. Eine Prüfung der vernachlässigten Glieder zeigt nun, daß sie von verschiedener Art sind. Wenn wir die oben gegebene Lösung unseres Problems unter Berücksichtigung der rechten Seite der ersten Gleichung (9) verbessern wollen, so müssen wir in jenes Glied unsere angenäherte Lösung (5) einsetzen und aus dem so erhaltenen Systeme:

$$\left. \begin{aligned} \mu \Delta u'_j - \frac{\partial p'}{\partial x_j} + \varrho U_1 \frac{\partial u'_j}{\partial x_1} &= \varrho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}, \\ \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned} \right\} (10)$$

mit den Nebenbedingungen: für  $R = a$ ,  $u'_j = 0$ ; für  $R \rightarrow \infty$ ,  $u'_j \rightarrow 0$  die Korrektionsglieder  $u'_j$ ,  $p'$  berechnen. Nun enthalten die Größen  $u_j$  in (5) den Faktor  $U_1$ . Die rechte Seite von (10) wird also den Faktor  $U_1^2$  enthalten. Offenbar werden  $u'_j$ ,  $p'$  mit demselben Faktor behaftet sein. Betrachten wir dagegen die Glieder in (5), welche wir bei der Erfüllung der Grenzbedingung  $u_j = U_1 \delta_{1j}$  für  $R = a$  vernachlässigt haben, so sehen wir aus (3) sofort, daß sich unter ihnen Glieder befinden, welche den Faktor  $U_1 \sigma'$ , also, für reelles  $U_1$ , den Faktor  $U_1 | U_1$  enthalten. Denselben Faktor werden offenbar die Korrektionsglieder enthalten, welche aus jenen Gliedern in (5) hervorgehen. Offenbar sind die beiden Arten von Korrektionsgliedern, welche wir hier unterschieden haben, von ganz verschiedener Natur. So kann in dem Ausdruck für den Widerstand wohl ein Glied mit dem Faktor  $U_1 | U_1$ , aber kein Glied mit dem Faktor  $U_1^2$  vorkommen, weil die Kräfte, welche die Flüssigkeit auf die Kugel ausübt, gleichzeitig mit  $U_1$  ihre Vorzeichen wechseln müssen. Es ist ferner ersichtlich, daß ein Glied mit dem Faktor  $U_1 | U_1$  nicht von einem Gliede mit dem Fak-

tor  $U_1^2$  aufgehoben werden kann. Es ist deshalb berechtigt, die Aufgabe, die uns jetzt obliegt, in zwei zu zerlegen, indem wir zuerst die Korrektionsglieder mit dem Faktor  $U_1 | U_1 |$  und dann, näherungsweise, die Korrektionsglieder mit dem Faktor  $U_1^2$  berechnen.

### 16 6. Berücksichtigung der Glieder mit $U_1 | U_1 |$ . Genauere Widerstandsformel.

Die erste Aufgabe können wir ohne Schwierigkeit lösen. Wir setzen statt (5):

$$u_j = A u_j^{(1)} - B u_j^{(2)}, \quad p = A p^{(1)} - B p^{(2)}$$

und bestimmen  $A$  und  $B$  aus den Bedingungen: für  $R = a$ ,  $u_j = U_1 \delta_{1j}$ , indem wir jetzt auch die Glieder:  $-\delta_{1j} \sigma'$  des Ausdrückes (2) für  $u_j^{(1)}$  berücksichtigen.

Wir erhalten:

$$\delta_{1j} \left[ A(1 - a\sigma') + \frac{B}{a^2} \right] + \frac{x_1 x_j}{a^2} \left( A - \frac{3B}{a^2} \right) = a U_1 \delta_{1j}.$$

Also:

$$A(1 - a\sigma') + \frac{B}{a^2} = a U_1, \quad A - \frac{3B}{a^2} = 0$$

und:

$$A = \frac{3}{4} a U_1 (1 + \frac{3}{4} a \sigma'), \quad B = \frac{1}{4} a^3 U_1 (1 + \frac{3}{4} a \sigma').$$

Diese Ausdrücke für  $A$  und  $B$  unterscheiden sich nur durch den Faktor  $1 + \frac{3}{4} a \sigma'$  von den Ausdrücken, welche wir in erster Näherung, bei  $a\sigma' \rightarrow 0$ , erhielten. Wenn die Geschwindigkeitskomponenten der Flüssigkeit mit diesem Faktor multipliziert werden, so muß offenbar auch der Widerstand mit ihm multipliziert werden. Der Widerstand hat also, in zweiter Näherung, den Wert:

$$6\pi\mu a U_1 \left( 1 + \frac{3}{8} \frac{\varrho a |U_1|}{\mu} \right). \quad (11)$$

Betreffs des Gültigkeitsbereiches dieser Formel darf nicht vergessen werden, daß sie unter der Voraussetzung abgeleitet worden ist, daß die Flüssigkeit, von der Kugel abgesehen, den ganzen Raum erfüllt. Wir werden später in § 19 darauf zurückkommen.

### 16 7. Berücksichtigung der Glieder mit $U_1^2$ .

Wir wenden uns zur Bestimmung der Korrektionsglieder, welche den Faktor  $U_1^2$  enthalten. Eine Gruppe dieser Glieder, wir nennen sie  $u_j^*$ ,  $p^*$ , röhren von den Nebenbedingungen her, indem wir noch nicht

auf das Glied  $-\sigma x_1$  der Exponentialfunktion und auf das letzte ausgeschriebene Glied:  $-\frac{1}{2}\sigma Rx_1$  der Reihe (3) S. 167 für  $\Phi$  Rücksicht genommen haben. Die Funktionen  $u_j^*$ ,  $p^*$  müssen also außerhalb der Kugel  $R = a$  das System (1) befriedigen, für  $R = a$  der Bedingung:

$$u_j^* = \frac{3}{8} \sigma U_1 \left[ 2x_1 \delta_{1j} + x_j \left( \frac{x_1^2}{a^2} - 1 \right) \right], \quad (12)$$

und für  $R \rightarrow \infty$  der Bedingung:  $u_j^* \rightarrow 0$  genügen. Wir setzen:

$$\begin{aligned} u_j^* &= C \left( \delta_{1j} \Delta \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_j} \right) - C' \frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_j} \frac{1}{R}, \\ p^* &= -2\mu C \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{1}{R}. \end{aligned}$$

Wir haben für kleine  $R$ -Werte:

$$u_j^* = -6C' \frac{x_1}{R^5} \delta_{1j} + \frac{x_j}{R^3} \left[ C \left( 1 - \frac{3x_1^2}{R^2} \right) - \frac{3C'}{R^2} \left( 1 - \frac{5x_1^2}{R^2} \right) \right] + \dots$$

Wir können deshalb der Bedingung (12) annähernd, d. h. bis auf Glieder der Ordnung  $\sigma^2 a^2 U_1$ , dadurch genügen, daß wir setzen:

$$C = -\frac{3}{4} \sigma U_1 a^3, \quad C' = -\frac{1}{8} \sigma U_1 a^5.$$

Die der Geschwindigkeit  $u^*$  entsprechende Stokessche Stromfunktion ist:

$$\left. \begin{aligned} H^* &= \frac{3}{4} \sigma U_1 a^3 h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial h} + \frac{1}{8} \sigma U_1 a^5 h \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial h} \frac{1}{R} = \\ &\quad -\frac{3}{4} U_1 a^3 \frac{h^2}{R^3} \left\{ 1 - (1 + \sigma' R) e^{-\sigma' s} \right\} + \frac{3}{8} \sigma U_1 a^5 \frac{x_1 h^2}{R^5}. \end{aligned} \right\} (13)$$

Wir wenden uns dem schwierigsten Teile unserer Aufgabe zu, der Lösung des Systemes (10) mit den dort angegebenen Nebenbedingungen. Ihre einfachste Gestalt nimmt diese Aufgabe an, wenn wir durch die Gleichungen (7) S. 168 die Stokessche Stromfunktion einführen. Man bestätigt durch eine direkte Rechnung, daß, wenn  $u_j^{**}$ ,  $p^{**}$  dem System (10) genügen sollen, die diesen Größen entsprechende Stromfunktion  $H^{**}$  die partielle Differentialgleichung:

$$\left( \mu D + \varrho U_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) DH^{**} = \frac{\varrho}{h} \left( \frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{\partial DH}{\partial h} - \frac{\partial H}{\partial h} \frac{\partial DH}{\partial x_1} - \frac{2}{h} \frac{\partial H}{\partial x_1} DH \right) \quad (14)$$

befriedigen muß, wo:

$$D = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial h^2} - \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial h}$$

und wo  $H$  den in Gleichung (8) angegebenen Wert hat\*. Die Schwierigkeit der Gleichung (14) beruht auf der komplizierten Form der rechten Seite. Wenn man eine im ganzen Raum gültige Lösung der Gleichung (14) wünscht, läßt sich die rechte Seite nicht vereinfachen. Anders liegt aber die Sache, wenn man nur die Bewegung in der Umgebung der Kugel berechnen will. In diesem Falle kann man  $H$  durch den einfachen Ausdruck:

$$\frac{1}{4} a U_1 \frac{h^2}{R} \left( \frac{a^2}{R^2} - 3 \right)$$

ersetzen. Man findet in diesem Falle:

$$DH = \frac{3}{2} a U_1 \frac{h^2}{R^3},$$

$$\frac{\varrho}{h} \left\{ \frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{\partial DH}{\partial h} - \frac{\partial H}{\partial h} \frac{\partial DH}{\partial x_1} - \frac{2}{h} \frac{\partial H}{\partial x_1} DH \right\} = \frac{9}{4} \varrho a^2 U_1^2 \frac{x_1 h^2}{R^6} \left( \frac{a^2}{R^2} - 3 \right).$$

Den Beweis, daß es bei der Berechnung der Bewegung in der Umgebung der Kugel tatsächlich erlaubt ist, in (14) rechts diesen einfachen Wert zu benutzen, kann man in der Weise führen, daß man mittels der in § 4 S. 30 dargelegten Methode die partielle Differentialgleichung (14)

\* Wenn man in (10):

$$u_1 = -\frac{1}{h} \frac{\partial H}{\partial h}, \quad \frac{x_2}{h} u_2 + \frac{x_3}{h} u_3 = \frac{1}{h} \frac{\partial H}{\partial x_1}, \quad (h = \sqrt{x_2^2 + x_3^2})$$

$$u_1' = -\frac{1}{h} \frac{\partial H^{**}}{\partial h}, \quad \frac{x_2}{h} u_2' + \frac{x_3}{h} u_3' = \frac{1}{h} \frac{\partial H^{**}}{\partial x_1}$$

setzt und die Rotationssymmetrie um die  $x_1$ -Achse benutzt, welche sowohl das Vektorfeld  $u_j$  wie das Vektorfeld  $u_j'$  haben muß, so erhält man einerseits:

$$\mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial h^2} + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial h} \right) \left( \frac{1}{h} \frac{\partial H^{**}}{\partial h} \right) + \frac{\partial p'}{\partial x_1} + \varrho U_1 \cdot \frac{1}{h} \frac{\partial^2 H^{**}}{\partial h \partial x_1} =$$

$$-\varrho \left\{ \frac{1}{h} \frac{\partial H}{\partial h} \cdot \frac{1}{h} \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial h} - \frac{1}{h} \frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial H}{\partial h} \right) \right\}$$

andererseits:

$$\mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial h^2} + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial h} \right) \left( \frac{1}{h} \frac{\partial H^{**}}{\partial x_1} \right) = \mu A \left( \frac{x_2}{h} u_2' + \frac{x_3}{h} u_3' \right) =$$

$$= \mu \left\{ \frac{x_2}{h} A u_2' + \frac{x_3}{h} A u_3' - \frac{2}{h} \frac{\partial u_1'}{\partial x_1} - \frac{2x_2}{h^2} \frac{\partial u_2'}{\partial h} - \frac{2x_3}{h^2} \frac{\partial u_3'}{\partial h} - \right.$$

$$- \frac{x_2 u_2' + x_3 u_3'}{h^3} \Bigg\} = \frac{\partial p'}{\partial h} - \varrho U_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial H^{**}}{\partial x_1} \right) + \frac{2\mu}{h} \frac{\partial^2 H^{**}}{\partial h \partial x_1} -$$

$$- \frac{2\mu}{h} \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial H^{**}}{\partial x_1} \right) - \frac{\varrho}{h} \frac{\partial H}{\partial h} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial H}{\partial x_1} \right) + \frac{\varrho}{h} \frac{\partial H}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial H}{\partial x_1} \right).$$

Elimination von  $p'$  zwischen diesen beiden Gleichungen gibt die Formel (14) des Textes. Einfacher kann diese Formel aus den grundlegenden hydrodynamischen Integralgleichungen in § 1 abgeleitet werden.

(welche ja einen speziellen Fall der erweiterten Stokesschen Gleichungen darstellt) durch ein über den Bereich  $R > a$  erstrecktes Integral integriert und dann aus diesem Integral die Glieder auswählt, welche in der Umgebung der Kugel  $R = a$  die Hauptglieder sind. Man findet durch dieses Verfahren, auf dessen Einzelheiten wir der Kürze wegen hier nicht eingehen wollen, daß noch eine Vereinfachung der Gleichung (14) erlaubt ist, wenn wir nur die Umgebung der Kugel in Betracht ziehen wollen. Wir können nämlich links in (14) das Glied mit dem Faktor  $\varrho U_1$  vernachlässigen und erhalten so die einfache Gleichung:

$$DDH^{**} = \frac{9}{2} a^2 U_1 \sigma \frac{x_1 h^2}{R^6} \left( \frac{a^2}{R^2} - 3 \right).$$

Es ist nun leicht, eine Lösung dieser Gleichung zu finden, die sowohl an der Kugel  $R = a$  wie in unendlicher Ferne der Bedingung genügt, daß die entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten dort verschwinden. Diese Lösung ist:

$$H^{**} = -\frac{9}{16} a^2 U_1 \sigma \frac{x_1 h^2}{R^4} \left( R^2 + \frac{1}{3} a^2 \right) + \frac{3}{16} a^3 U_1 \sigma \frac{x_1 h^2}{R^3} \left( 5 - \frac{a^2}{R^2} \right).$$

Wir bilden jetzt die Stromfunktion der ganzen Bewegung:

$$\frac{1}{2} U_1 h^2 + (1 + \frac{3}{4} a \sigma') H + H^* + H^{**}. \quad (15)$$

Wir führen in (15) für  $H$  und  $H^*$  ihre Werte in der Umgebung der Kugel ein und erhalten so den folgenden, in der Umgebung der Kugel gültigen Ausdruck für die Stromfunktion:

$$\frac{1}{4} U_1 \left( 1 - \frac{a}{R} \right)^2 \frac{h^2}{R^2} \left[ \left( 1 + \frac{3}{4} a \sigma' \right) R (2R + a) + \frac{3}{4} a \sigma \frac{x_1}{R} (2R^2 + aR + a^2) \right]. \quad (16)$$

Der Ausdruck (16) wurde, mit Ausnahme der Glieder, welche den Faktor  $\sigma'$  enthalten, zuerst von F. Noether aufgestellt (1911). Er ermöglicht offenbar ein genaues Studium der Strömung der Flüssigkeit in der Umgebung der Kugel. Die von der Trägheit bedingte Dissymmetrie tritt in den mit dem Faktor  $x_1$  behafteten Gliedern zu Tage.

## § 17. Das Problem des Kreiszylinders.

### 171. Die Lambsche Lösung.

Wir haben in § 15 ein zweidimensionales Analogon der von Stokes gegebenen Theorie der Bewegung einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit gesucht. Wir fanden, daß ein solches Analogon nicht existiert.

Wir untersuchen jetzt, ob es ein zweidimensionales Analogon der im vorigen Paragraphen gegebenen Lösung des Problemes der Kugel gibt. Um diese Frage zu beantworten, gehen wir von der am Schluß des 4. Paragraphen gefundenen Grundlösung des Systemes:

$$\mu \Delta u_k - \frac{\partial p}{\partial x_k} = -\varrho U_1 \frac{\partial u_k}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, 2 \quad (1)$$

aus. Wir setzen in (4, 20) S. 37  $x_1 = x_2 = 0$  und schreiben dann statt  $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_1$  und  $x_2$ . Aus  $t_{11}, t_{12}, p_1$  erhalten wir in dieser Weise eine Lösung des Systemes (1), die wir mit  $u_k^{(1)}, p^{(1)}$  bezeichnen. Wir haben:

$$\left. \begin{aligned} u_k^{(1)} &= 2[K_0(\sigma' R) e^{-\sigma x_1} \delta_{1k} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_k} \{\log R + K_0(\sigma' R) e^{-\sigma x_1}\}], \\ p^{(1)} &= 2\mu \frac{\partial}{\partial x_1} \log R, \quad R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \end{aligned} \right\} (2)$$

Wir haben nach (4, 2) S. 39 für kleine  $R$ -Werte:

$$\left. \begin{aligned} u_k^{(1)} &= \delta_{1k} \log \frac{2}{\gamma \sigma' R} + \frac{x_1 x_k}{R^2}, \\ \gamma &= 1,7811. \end{aligned} \right\} (3)$$

Eine andere Lösung des Systemes (1) ist:

$$u_k^{(2)} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_k} \log R, \quad p^{(2)} = \varrho U_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \log R.$$

Wir bilden jetzt eine Lösung:  $u_k = A_1 u_k^{(1)} + A_2 u_k^{(2)}$ ,  $p = A_1 p^{(1)} + A_2 p^{(2)}$  des Systemes (1) und versuchen die Konstanten  $A_1, A_2$  so zu bestimmen, daß für  $R = a$  die Bedingungen:  $u_1 = U_1, u_2 = 0$  erfüllt werden. Wir erhalten, wenn  $a$  so klein ist, daß wir mit genügender Annäherung mit dem angenäherten Wert (3) von  $u_k^{(1)}$  rechnen können:

$$A_1 = -\frac{U_1}{\log \frac{\gamma \sigma' a}{2} - \frac{1}{2}}, \quad A_2 = \frac{1}{2} a^2 A_1. \quad (4)$$

In der Nähe des Zylinders haben wir also:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= A_1 \left[ \frac{1}{2} - \log \left( \frac{1}{2} \gamma \sigma' R \right) - \frac{1}{2} (R^2 - a^2) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \log R \right] \\ u_2 &= -\frac{1}{2} A_1 (R^2 - a^2) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \log R. \end{aligned} \right\} (5)$$

Die Kräfte, welche die Flüssigkeit auf den Zylinder ausübt, haben eine Resultierende, welche pro Längeneinheit die Größe:

$$\int_{R=a} \left\{ -p \frac{x_1}{a} + \mu \left( \frac{du_1}{dn} + \mu \left( \frac{x_1}{a} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{x_2}{a} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right) \right\} ds \\ (ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2})$$

hat. Man findet leicht:

$$-\int_{R=a} p \frac{x_1}{a} ds = -2\pi \mu A_1, \quad \mu \int_{R=a} \frac{du_1}{dn} ds = -2\pi \mu A_1, \\ \int_{R=a} \left( \frac{x_1}{a} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{x_2}{a} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) ds = 0.$$

Die Resultierende, deren Richtung selbstverständlich längs der negativen  $x_1$ -Achse verläuft, hat also den Betrag:

$$|4\pi\mu A_1| = \frac{4\pi\mu |U_1|}{|\frac{1}{2} - \log(\frac{1}{2}\gamma\sigma'a)|} \quad (6)$$

Die hier entwickelte Theorie für die Bewegung eines Kreiszylinders in einer zähen Flüssigkeit wurde im Jahre 1911 von Lamb gegeben.

## 172. Magnuseffekt bei kleinen Geschwindigkeiten.

Wenn der Zylinder gleichzeitig mit der oben betrachteten translatorischen Bewegung mit der konstanten Geschwindigkeit  $U_1$  eine Drehbewegung mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ausführt, so lagert sich über die oben betrachtete Bewegung der Flüssigkeit eine andere:

$$u_k^{(3)} = a^2 \omega \frac{\partial}{\partial x_k} \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}, \quad p^{(3)} = -\varrho U_1 a^2 \omega \frac{x_2}{R^2}. \quad (7)$$

Die von dieser Bewegung erzeugten Kräfte der Flüssigkeit auf den Zylinder haben (vgl. § 1 (3) S. 7) eine Resultierende, deren Betrag pro Längeneinheit des Zylinders  $\pi \varrho U_1 a^2 \omega$  ist und deren Richtung mit der Richtung des vektoriellen Produktes des Drehvektors und der translatorischen Geschwindigkeit zusammenfällt. Was wir hier gefunden haben, ist der Magnuseffekt bei kleinen Geschwindigkeiten.

## 173. Methode zur numerischen Berechnung des Widerstandes bei größeren Werten von $\sigma' a$ bzw. der Reynoldsschen Zahl $2\sigma' a$ .

Das Problem, den Widerstand zu berechnen, den ein Kreiszylinder erfährt, der sich ohne Drehung mit konstanter, gegen die Achse senkrechter Richtung in einer zähen Flüssigkeit bewegt, wurde kürzlich

von Prof. Bairstow, Fräulein Cave und Fräulein Lang wieder aufgenommen (1923). Diese Autoren gingen vom System (1) S. 166 aus. Sie drückten die Geschwindigkeitskomponenten  $u_1$  und  $u_2$  durch eine Lagrangesche Stromfunktion  $\psi$  aus, indem sie:

$$u_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad u_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}$$

setzten. Die Stromfunktion  $\psi$  muß dabei, wie aus (1) durch Elimination von  $p$  hervorgeht, der partiellen Differentialgleichung:

$$\left( \Delta + 2\sigma \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \Delta \psi = 0 \quad (8)$$

genügen. Eine spezielle Lösung dieser Differentialgleichung können wir aus unserer Lösung (5) der Gleichungen (1) ableiten. Um jene Lösung in einfachster Weise schreiben zu können, führen wir die Besselschen Funktionen  $K_n(x)$  ein, indem wir sie durch die Gleichungen:

$$K_n(x) = \int_0^{\infty} e^{-x \cosh \operatorname{hyp} s} \cos \operatorname{hyp} ns ds$$

definieren. Zwischen den Funktionen  $K_0(x)$  und  $K_1(x)$  bestehen dann die Beziehungen:

$$K_1 + \frac{dK_0}{dx} = 0, \quad K_0 + \frac{1}{x} K_1 + \frac{dK_1}{dx} = 0.$$

Wir definieren jetzt eine Funktion  $L$  von  $x_1 = R \cos \vartheta$ ,  $x_2 = R \sin \vartheta$  durch die Gleichung:

$$L(x_1, x_2) = R K_1(\sigma' R) \left. \begin{aligned} & \frac{\sigma'}{\sigma} \int_0^{\vartheta} e^{-\sigma R \cos \alpha} d\alpha - \frac{\vartheta}{\sigma} - \\ & - R K_0(\sigma' R) \int_0^{\vartheta} e^{-\sigma R \cos \alpha} \cos \alpha d\alpha. \end{aligned} \right\} (9)$$

Man findet durch eine einfache Rechnung, daß

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial R} &= -K_0(\sigma' R) e^{-\sigma x_1} \sin \vartheta, & \frac{1}{R} \frac{\partial L}{\partial \vartheta} &= \frac{\sigma'}{\sigma} K_1(\sigma' R) e^{-\sigma x_1} - \\ & - \frac{1}{\sigma R} - K_0(\sigma' R) e^{-\sigma x_1} \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Folglich nach (2):

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_1} &= \frac{x_1}{R} \frac{\partial L}{\partial R} - \frac{x_2}{R^2} \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_2} \{ \log R + K_0(\sigma' R) e^{-\sigma x_1} \} = u_2^{(1)}, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= \frac{x_2}{R} \frac{\partial L}{\partial R} + \frac{x_1}{R^2} \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = -\frac{x_1}{\sigma R^2} - K_0(\sigma' R) e^{-\sigma x_1} + \\ &\quad + \frac{\sigma'}{\sigma} K_1(\sigma' R) e^{-\sigma x_1} \frac{x_1}{R} = \\ &= -2K_0(\sigma' R) e^{-\sigma x_1} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_1} \{ \log R + K_0(\sigma' R) e^{-\sigma x_1} \} = -u_1^{(1)}.\end{aligned}$$

$L$  ist eine eindeutige Funktion von  $x_1$  und  $x_2$ .

Aus  $L$  können wir eine etwas allgemeinere Lösung der partiellen Differentialgleichung (8) bilden. Wir setzen rechts in (9):

$$R = \sqrt{(x_1 - x_1^{(0)})^2 + (x_2 - x_2^{(0)})^2}, \quad \vartheta = \arctg \frac{x_2 - x_2^{(0)}}{x_1 - x_1^{(0)}}.$$

Die so erhaltene Funktion  $L$  hängt von zwei Punkten  $x_1, x_2, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}$  ab. Wir schreiben sie deshalb  $L(x_1, x_2; x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ . Diese Funktion haben Bairstow, Cave und Lang ihrer Lösung des Problems des Kreiszylinders zugrunde gelegt. Sie setzen:

$$\begin{aligned}\psi(x_1, x_2) &= \psi(R \cos \vartheta, R \sin \vartheta) = AL(R \cos \vartheta, R \sin \vartheta, 0, 0) + \\ &\quad + \int_0^{2\pi} L(R \cos \alpha, R \sin \alpha; \alpha \cos \alpha, \alpha \sin \alpha) f(\alpha) d\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \frac{\sin n\vartheta}{R^n}.\end{aligned}$$

$A, G_1, G_2 \dots$  sind hier Konstanten, welche zur Verfügung stehen.  $f(\alpha)$  ist eine unbekannte Funktion, von welcher die Autoren doch annehmen, daß sie in eine Reihe von der Form:

$$f(\alpha) = e^{-\alpha \cos \alpha} \sum_{q=0}^{\infty} a_q \cos q\alpha$$

entwickelt werden kann. Wenn eine Lösung dieser Form existiert, so ist das Problem offenbar auf die Berechnung der Konstanten  $A, a_1, a_2, \dots, G_1, G_2, \dots$  zurückgeführt worden. Wenn man in den Reihen eine endliche Zahl von Gliedern behält, kann man mit ihrer Hilfe erreichen, daß die Randbedingungen an der Oberfläche des Zylinders in einer gewissen Annäherung erfüllt sind. In dieser Weise haben die drei Autoren ihre Koeffizienten bestimmt.

Nach der hier dargelegten Methode haben Bairstow, Cave und Lang den Widerstand eines Kreiszylinders in dem Bereich von  $\sigma' a = 0$  bis zu  $\sigma' a = 5$  berechnet. In demjenigen Gebiete, wo experimentelle Bestimmungen des Widerstandes vorliegen, stimmt der be-

rechnete Widerstand in bezug auf die Größenordnung mit dem Beobachteten überein, ist aber durchweg größer. Etwas Überraschendes liegt darin nicht, da die Geschwindigkeiten, welche hier in Betracht kommen, weit außerhalb des Bereiches liegen, wo die in (1) weggelassenen Glieder vernachlässigt werden können.

Prof. Bairstow hat mit seinen beiden Mitarbeiterinnen auch den Widerstand berechnet, den eine ebene Scheibe erfährt, welche sich in einer mit ihrer eigenen Ebene parallelen Richtung in einer zähen Flüssigkeit bewegt.

## § 18. Das Problem des Ellipsoides.

### 181. Einleitung.

Bei unserer Behandlung des Problems der Kugel sahen wir, daß in dem Ausdruck für den Widerstand, den eine Kugel erfährt, die sich in einer sonst den ganzen Raum erfüllenden Flüssigkeit bewegt, ein Glied vorkommt, das den Faktor  $U_1 \sigma'$  enthält und also mit dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist. Dieses Ergebnis läßt sich unmittelbar auf das Ellipsoid übertragen. Zu den von Oberbeck in schöner Weise berechneten Gliedern des Widerstandes müssen andere mit dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionale Glieder hinzukommen, deren Größe von der Orientierung des Ellipsoides in bezug auf die Bewegungsrichtung desselben abhängen muß. Wir wollen hier jene Glieder berechnen.

Wir wenden dieselben Bezeichnungen wie in § 9 an und setzen außerdem:

$$U_j = U a_j, \quad U \geq 0, \quad a_j^2 = 1.$$

$a_1, a_2, a_3$  sind dann die Richtungscosinusse der Bewegungsrichtung des Ellipsoides in bezug auf die Hauptachsen desselben. Wir schreiben die Komponenten der Geschwindigkeit der Flüssigkeit in der Form:  $-U a_j + u_j$ . Zur Bestimmung der Größen  $u_j$  erhalten wir die Gleichungen:

$$\mu \Delta u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} = -\varrho U a_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \quad (1)$$

Die Nebenbedingungen sind an der Oberfläche des Ellipsoides

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1: \quad (2)$$

$$u_j = U a_j;$$

$$\text{für } R^2 = x_j^2 \rightarrow \infty: \quad \lim u_j = 0.$$

## 18 2. Herstellung dreier spezieller Lösungen des Systemes (1).

Wir können die zur Lösung unserer Aufgabe nötigen Hilfsmittel dadurch gewinnen, daß wir drei verschiedene Systeme von Lösungen des Systemes (1) konstruieren. Wir gehen zunächst von dem im § 4 S. 34 betrachteten Tensor  $t_{jk}$  aus, wobei wir jedoch die Größen  $x_j$  und  $x_j^{(0)}$  vertauschen. Die drei Größen  $t_{1k}, t_{2k}, t_{3k}$  ( $k = 1, 2$  oder  $3$ ) definieren dann drei Funktionen der Größen  $x_1, x_2, x_3$ . Diese Funktionen genügen den partiellen Differentialgleichungen, welche wir im § 4 die erweiterten Stokesschen Gleichungen genannt haben und welche wir durch eine Drehung des Bezugssystems in das System (1) überführen können. Indem wir diese Drehung des Bezugssystems für die drei Funktionen  $t_{1k}, t_{2k}, t_{3k}$  selbst ausführen, erhalten wir eine erste Lösung des Systemes (1):

$$u_j = t_{jk} = \delta_{jk} \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k}, \quad p = -2\mu \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r},$$

$$\Phi = \frac{1}{\sigma} \int_0^{\sigma s} \frac{1 - e^{-a}}{a} da,$$

$$s = r + a_j(x_j - x_j^{(0)}), \quad \sigma = \frac{\rho U}{2\mu},$$

$$r^2 = (x_j - x_j^{(0)})^2, \quad r \geq 0.$$

$k$  hat in diesen Formeln den Wert 1, 2 oder 3.

Wir haben im § 11, S. 137 eine durch die Gleichungen:

$$\chi = abc \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{W(s)}, \quad (4)$$

$$\frac{x_1^2}{a^2 + \lambda} + \frac{x_2^2}{b^2 + \lambda} + \frac{x_3^2}{c^2 + \lambda} = 1, \quad (\lambda > 0), \quad (5)$$

$$W(s) = \sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}$$

definierte Potentialfunktion benutzt. Sie nimmt, wie aus (4) ersichtlich ist, auf jedem Ellipsoid  $\lambda = \text{Konst.}$  einen konstanten Wert an. Wir betrachten jetzt ein beliebiges Ellipsoid  $E$  jener Schar  $\lambda = \text{Konst.}$ , welches wir jedoch so wählen, daß es innerhalb des Ellipsoids  $\lambda = 0$  fällt.  $\lambda$  soll also auf  $E$  einen solchen negativen Wert annehmen, daß  $a^2 + \lambda, b^2 + \lambda, c^2 + \lambda$  alle positiv ausfallen. Aus dem Greenschen Satze folgt, wenn der Punkt  $x_1, x_2, x_3$  außerhalb von  $E$  liegt:

$$\chi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_E \left[ \chi(x^{(0)}) \frac{d}{dn^{(0)}} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{d\chi}{dn^{(0)}} \right] dS^{(0)}$$

oder, da auf  $E$   $\chi(x^{(0)})$  einen konstanten Wert hat und da:

$$\int_E \frac{d}{dn^{(0)}} \frac{1}{r} dS^{(0)} = 0$$

ist, weil der Punkt  $x_1, x_2, x_3$  nach unserer Annahme außerhalb von  $E$  liegt:

$$\chi(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_E \frac{d\chi(x^{(0)})}{dn^{(0)}} \frac{dS^{(0)}}{r}.$$

Wir können also die Funktion  $\chi$  außerhalb von  $E$  durch ein Integral von der Form:

$$\int_E \frac{F(x^{(0)})}{r} dS^{(0)}$$

darstellen.

Aus der Funktion  $\Phi$  bilden wir jetzt eine neue Funktion  $\Psi$  von  $x_1, x_2, x_3$ , indem wir setzen:

$$\Psi(x) = \int_E F(x^{(0)}) \Phi(x, x^{(0)}) dS^{(0)}. \quad (6)$$

In derselben Weise, wie wir aus der Funktion  $\Phi$  eine Lösung des Systems (1) abgeleitet haben, können wir jetzt aus  $\Psi$  eine Lösung desselben Systemes herleiten. Wir setzen:

$$u_{jk}^{(1)} = \delta_{jk} \Delta \Psi - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_j \partial x_k}, \quad (7)$$

$$p_k^{(1)} = 2\mu \int_E F(x^{(0)}) \frac{x_k - x_k^{(0)}}{r^2} dS^{(0)}. \quad (8)$$

Für jeden Wert von  $k$  ( $k = 1, 2$  oder  $3$ ) genügen dann die Funktionen  $u_{1k}^{(1)}, u_{2k}^{(1)}, u_{3k}^{(1)}, p_k^{(1)}$  dem System (1).

Ein neues System von Lösungen der Differentialgleichungen (1) leiten wir aus der Potentialfunktion  $\Omega$  ab, welche wir in § 11 S. 137 benutzten und durch die Gleichung:

$$\Omega = \pi abc \int_s^\infty \left[ \frac{x_1^2}{a^2 + s} + \frac{x_2^2}{b^2 + s} + \frac{x_3^2}{c^2 + s} - 1 \right] \frac{ds}{\Delta(s)} \quad (9)$$

definiert haben. Wir setzen:

$$u_{jk}^{(2)} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_j \partial x_k}, \quad p_k^{(2)} = \varrho U a_l \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_l \partial x_k}. \quad (10)$$

Ein drittes System von Lösungen erhalten wir durch den Ansatz:

$$u_j^{(3)} = \frac{\partial \Pi}{\partial x_j}, \quad p^{(3)} = \varrho U a_l \frac{\partial \Pi}{\partial x_l}, \quad (11)$$

wo  $\Pi$  eine beliebige, außerhalb der Fläche (2) reguläre und in unendlicher Ferne verschwindende Potentialfunktion ist.

### 183. Ansatz zur Lösung des Problems.

Aus den gefundenen drei Systemen von Lösungen (7)–(8), (10), (11) setzen wir eine neue allgemeinere Lösung der Gleichungen (1) zusammen:

$$\begin{aligned} u_j &= A_k^{(1)} u_{jk}^{(1)} + A_k^{(2)} u_{jk}^{(2)} + u_j^{(3)}, \\ p &= A_k^{(1)} p_k^{(1)} + A_k^{(2)} p_k^{(2)} + p^{(3)}. \end{aligned}$$

Sie enthält sechs willkürliche Konstanten  $A_k^{(1)}$ ,  $A_k^{(2)}$  und eine willkürliche Potentialfunktion  $\Pi$ . Wir werden zeigen, daß wir, wenn  $a\sigma$ ,  $b\sigma$ ,  $c\sigma$  genügend klein sind, über diese willkürlichen Elemente unserer Lösung so verfügen können, daß die Nebenbedingungen in genügender Annäherung erfüllt werden.

Wenn  $\sigma$  eine kleine Größe ist, so haben wir annähernd:

$$\Phi = r + a_j(x_j - x_j^{(0)}) - \frac{1}{4}\sigma(r^2 + [a_j(x_j - x_j^{(0)})]^2) + \dots$$

und:

$$\delta_{jk} \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{1}{r} \delta_{jk} + \frac{(x_j - x_j^{(0)})(x_k - x_k^{(0)})}{r^3} - \frac{1}{2} \sigma(3\delta_{jk} - a_j a_k).$$

Wir haben also:

$$\begin{aligned} u_{jk}^{(1)} &= \delta_{jk} \int_E \frac{F(x^{(0)})}{r} dS^{(0)} + x_k \int_E \frac{F(x^{(0)}) (x_j - x_j^{(0)})}{r^3} dS^{(0)} - \\ &- \int_E F(x^{(0)}) \frac{x_k^{(0)} (x_j - x_j^{(0)})}{r^3} dS^{(0)} - \frac{1}{2} \sigma(3\delta_{jk} - a_j a_k) \int_E F(x_0) dS^{(0)}. \end{aligned}$$

Wir hatten:

$$\int_E \frac{F(x^{(0)})}{r} dS^{(0)} = \chi$$

und haben in § 11 S. 139 gesehen, daß  $\chi$  für große Werte von  $R$  den Wert  $2abc/R$  annimmt. Da die linke Seite der obigen Gleichung für große  $R$ -Werte den Wert:

$$\frac{1}{R} \int_E F(x^{(0)}) dS^{(0)}$$

annimmt, so schließen wir, daß:

$$\int_E F(x^{(0)}) dS^{(0)} = 2abc$$

ist, folglich für kleine  $\sigma' R$ -Werte annähernd:

$$u_{jk}^{(1)} = \delta_{jk}\chi - x_k \frac{\partial \chi}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \int_E^{\infty} \frac{x_k^{(0)} F(x^{(0)})}{r} dS^{(0)} - \sigma abc(3\delta_{jk} - a_j a_k).$$

Wir setzen jetzt:

$$\Pi = -A_k^{(1)} \int_E^{\infty} \frac{x_k^{(0)} F(x^{(0)})}{r} dS^{(0)}$$

und haben dann für kleine  $\sigma' R$ -Werte:

$$A_k^{(1)} u_{jk}^{(1)} + u_j^{(3)} = A_j^{(1)} \chi - A_k^{(1)} x_k \frac{\partial \chi}{\partial x_j} - \sigma abc(3A_j^{(1)} - a_j a_k A_k^{(1)}). \quad (12)$$

Da nun auf der Fläche (2)  $\lambda = 0$ ,  $\chi = \chi^{(0)}$  und:

$$\frac{\partial \chi}{\partial x_j} = \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} = -\frac{\partial \lambda}{\partial x_j},$$

so gilt auf der Fläche (2) annähernd:

$$A_k^{(1)} u_{jk}^{(1)} + u_j^{(3)} = A_j^{(1)} \chi_0 + A_k^{(1)} x_k \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} - \sigma abc(3A_j^{(1)} - a_j a_k A_k^{(1)}). \quad (12)$$

Wir haben andererseits auf derselben Fläche:

$$\begin{aligned} A_k^{(2)} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1 \partial x_k} &= 2\pi abc A_1^{(2)} \int_0^{\infty} \frac{ds}{(a^2 + s) \Delta(s)} - \\ &\quad - 2\pi \left( \frac{A_1^{(2)} x_1}{a^2} + \frac{A_2^{(2)} x_2}{b^2} + \frac{A_3^{(2)} x_3}{c^2} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \end{aligned}$$

usw. Wir sehen aus diesen Gleichungen, daß wir, wenn  $a, b, c$  so klein sind, daß wir  $\sigma^2 a^2, \sigma^2 b^2, \sigma^2 c^2$  neben 1 vernachlässigen können, die Nebenbedingungen in genügender Annäherung dadurch erfüllen können, daß wir den Konstanten  $A_k^{(1)}, A_k^{(2)}$  die folgenden Bedingungen auferlegen:

$$A_1^{(2)} = \frac{a^2}{2\pi} A_1^{(1)}, \quad A_2^{(2)} = \frac{b^2}{2\pi} A_2^{(1)}, \quad A_3^{(2)} = \frac{c^2}{2\pi} A_3^{(1)}; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} A_1^{(1)}(\chi_0 + a^2 P_1 - 3\sigma abc) + \sigma abca_1 a_k A_k^{(1)} &= U a_1, \\ A_2^{(1)}(\chi_0 + b^2 P_2 - 3\sigma abc) + \sigma abca_2 a_k A_k^{(1)} &= U a_2, \\ A_3^{(1)}(\chi_0 + c^2 P_3 - 3\sigma abc) + \sigma abca_3 a_k A_k^{(1)} &= U a_3. \end{aligned} \quad (14)$$

Wir haben dabei der Kürze wegen:

$$\begin{aligned} abc \int_0^{\infty} \frac{ds}{(a^2 + s) W(s)} &= P_1, \quad abc \int_0^{\infty} \frac{ds}{(b^2 + s) W(s)} = P_2, \\ abc \int_0^{\infty} \frac{ds}{(c^2 + s) W(s)} &= P_3 \end{aligned}$$

gesetzt. Die Gleichungen (14) ergeben in erster Näherung, wenn wir die  $\sigma$  enthaltenden Glieder vernachlässigen:

$$A_1^{(1)} = \frac{Ua_1}{\chi_0 + a^2 P_1}, \quad A_2^{(1)} = \frac{Ua_2}{\chi_0 + b^2 P_2}, \quad A_3^{(1)} = \frac{Ua_3}{\chi_0 + c^2 P_3}.$$

In zweiter Näherung erhalten wir:

$$\begin{aligned} A_1^{(1)} &= \frac{Ua_1}{\chi_0 + a^2 P_1} \left\{ 1 + \sigma abc \left[ \frac{3}{\chi_0 + a^2 P_1} - M \right] \right\}, \\ A_2^{(2)} &= \frac{Ua_2}{\chi_0 + b^2 P_2} \left\{ 1 + \sigma abc \left[ \frac{3}{\chi_0 + b^2 P_2} - M \right] \right\}, \\ A_3^{(2)} &= \frac{Ua_3}{\chi_0 + c^2 P_3} \left\{ 1 + \sigma abc \left[ \frac{3}{\chi_0 + c^2 P_3} - M \right] \right\}, \\ M &= \frac{a_1^2}{\chi_0 + a^2 P_1} + \frac{a_2^2}{\chi_0 + b^2 P_2} + \frac{a_3^2}{\chi_0 + c^2 P_3}. \end{aligned}$$

#### 184. Berechnung des Widerstandes.

Die Kräfte, welche die Flüssigkeit auf das Ellipsoid ausübt, hängen nur von der Bewegung in der Umgebung desselben ab. Ein Vergleich zwischen den Formeln im § 11, S. 136—139 und den hier entwickelten Formeln, besonders (12), zeigt, daß, von der veränderten Bedeutung von  $A_k^{(1)}$ ,  $A_k^{(2)}$  abgesehen, die hier betrachteten Geschwindigkeitskomponenten sich nur durch konstante Glieder von den dort gefundenen unterscheiden. Da konstante Glieder der Geschwindigkeitskomponenten bei der Berechnung der auf das Ellipsoid ausgeübten Kräfte ohne Belang sind, können wir das S. 139 gewonnene Ergebnis sofort auf unsere jetzt erhaltene Lösung übertragen. Die Resultierende der Kräfte, welche die Flüssigkeit auf das Ellipsoid ausübt, hat die Komponenten:

$$- 16\pi\mu abc A_j^{(1)} \quad (j = 1, 2, 3).$$

Die Größen  $\chi_0$  und  $P_j$ , welche sowohl in Oberbecks Widerstandsformeln wie in unseren Formeln vorkommen, sind Funktionen von  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , welche durch elliptische Integrale definiert sind. Von besonderem Interesse sind diejenigen Fälle, in denen diese elliptischen Integrale in einfachere Funktionen von  $a$ ,  $b$ ,  $c$  entarten. Dies trifft ein, wenn das Ellipsoid Rotationssymmetrie um eine Achse besitzt. Wir setzen in diesem Fall  $a = b$  und erhalten, wenn  $a = b < c$ :

$$\begin{aligned}\chi_0 &= \frac{2a^2c}{\sqrt{c^2-a^2}} \log \left( \frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1} \right), \\ P_1 = P_2 &= \frac{c^2}{c^2-a^2} - \frac{a^2c}{(c^2-a^2)^{3/2}} \log \left( \frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1} \right), \\ P_3 &= \frac{2a^2c}{(c^2-a^2)^{3/2}} \log \left( \frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1} \right) - \frac{2a^2}{c^2-a^2}.\end{aligned}$$

Wir haben dagegen, wenn  $a = b > c$ ,

$$\begin{aligned}\chi_0 &= \frac{2a^2c}{\sqrt{a^2-c^2}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1} \right), \\ P_1 = P_2 &= \frac{a^2c}{(a^2-c^2)^{3/2}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1} \right) - \frac{c^2}{a^2-c^2}, \\ P_3 &= \frac{2a^2}{a^2-c^2} - \frac{2a^2c}{(a^2-c^2)^{3/2}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1} \right).\end{aligned}$$

Der Widerstand, den ein Rotationsellipsoid erfährt, das sich parallel der Symmetriechse, der  $c$ -Achse, bewegt, ist also:

$$W = \frac{16\pi\mu a^2 c U}{N} \left( 1 + \frac{2\sigma a^2 c}{N} \right),$$

wo, wenn  $c > a$  ist:

$$N = \frac{2a^2c(2c^2-a^2)}{(c^2-a^2)^{3/2}} \log \left( \frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1} \right) - \frac{2a^2c^2}{c^2-a^2}$$

ist, und wenn  $c < a$  ist:

$$N = \frac{2a^2c^2}{a^2-c^2} + \frac{2a^2c(a^2-2c^2)}{(a^2-c^2)^{3/2}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1} \right).$$

Für  $c = a$  geben beide Formeln  $N = \frac{8}{3}a^2$  und folglich:

$$W = 6\pi\mu a U \left( 1 + \frac{3}{8} \frac{\varrho a U}{\mu} \right), \quad (U > 0)$$

was mit dem S. 174 gefundenen Ergebnis übereinstimmt. — Für  $c = 0$  findet man  $N = \pi ac$  und folglich:

$$W = 16\mu a U \left( 1 + \frac{\varrho a U}{\pi\mu} \right). \quad (U > 0)$$

Das Ellipsoid kann in eine ebene Scheibe entarten, ohne daß  $a = b$  ist. Stets können wir aber in diesem Falle  $c = 0$  setzen. Wir setzen:

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{\chi_0}{c} = \chi_0^*, \quad \lim_{c \rightarrow 0} \frac{P_j}{c} = P_j^*.$$

Die Resultierende der Kräfte, welche die Flüssigkeit auf die Scheibe ausübt, hat dann die Komponenten:

$$K_1 = -\frac{16\pi\mu ab a_1 U}{\chi_0^* + a^2 P_1^*} \left\{ 1 + \sigma ab \left[ \frac{3}{\chi_0^* + a^2 P_1^*} - M^* \right] \right\},$$

$$K_2 = -\frac{16\pi\mu ab a_2 U}{\chi_0^* + b^2 P_2^*} \left\{ 1 + \sigma ab \left[ \frac{3}{\chi_0^* + b^2 P_2^*} - M^* \right] \right\},$$

$$K_3 = -\frac{16\pi\mu ab a_3 U}{\chi_0^*} \left\{ 1 + \sigma ab \left[ \frac{3}{\chi_0^*} - M^* \right] \right\},$$

wobei:

$$M^* = \frac{a_1^2}{\chi_0^* + a^2 P_1^*} + \frac{a_2^2}{\chi_0^* + b^2 P_2^*} + \frac{a_3^2}{\chi_0^*}.$$

Man sieht aus diesen Formeln, daß der mit  $U^2$  proportionale Teil der Kraft im allgemeinen nicht senkrecht gegen die Scheibe ist. Sein Betrag und seine Richtung hängen von der Orientierung des Geschwindigkeitsvektors in bezug auf die Scheibe ab. Die gegen die Scheibe senkrechte Komponente jener Kraft hat den Betrag:

$$-\frac{16\pi\mu\sigma a^2 b^2 a_3 U}{\chi_0^*} \left( \frac{3}{\chi_0^*} - M^* \right).$$

Da:

$$\frac{a}{b} P_1^* = \int_0^\infty \frac{ds}{W(s)} - \int_0^\infty \frac{s ds}{(a^2 + s) W(s)}, \quad \frac{b}{a} P_2^* = \int_0^\infty \frac{ds}{W(s)} - \int_0^\infty \frac{s ds}{(b^2 + s) W(s)},$$

so folgt, daß wenn  $a > b$  ist,  $a^2 P_1^* > b^2 P_2^*$  ist. Wenn  $a > b$  ist, so ist deshalb  $M^*$  im Falle  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = \cos \vartheta$  größer als im Falle  $a_1 = \cos \vartheta$ ,  $a_2 = 0$ . Hieraus folgt wiederum, daß die gegen die Scheibe senkrechte Komponente der mit dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionalen Kraft im „apteroid aspect“ ( $a_2 = 0$ ) größer als im „pterygoid aspect“ ( $a_1 = 0$ ) ist.

Wenn  $a = b$  ist, so können wir  $a_2 = 0$  setzen und erhalten dann:

$$K_1 = -\frac{32}{3} \mu a a_1 U \left\{ 1 + \frac{\sigma a}{3\pi} (4 - a_3^2) \right\},$$

$$K_2 = 0, \quad K_3 = -16 \mu a a_3 U \left\{ 1 + \frac{\sigma a}{3\pi} (7 - a_3^2) \right\}.$$

Die gegen die Scheibe senkrechte Komponente der mit dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionalen Kraft verschwindet, wenn  $a_3 = 0$  ist, d. h. wenn der Geschwindigkeitsvektor der Scheibe mit

der Ebene derselben parallel ist. Sie nimmt den größtmöglichen Wert an, wenn  $a_3 = 1$  ist, d. h. wenn der Geschwindigkeitsvektor gegen die Ebene der Scheibe senkrecht ist.

In einer in mehrerer Hinsicht interessanten und wertvollen Arbeit hat W. J. Harrison unter anderem auch den Widerstand berechnet, den ein elliptischer Zylinder erfährt, wenn er sich mit konstanter Geschwindigkeit in einer zähen Flüssigkeit bewegt und wenn dabei entweder die große Achse oder die kleine Achse des Querschnittes mit der Bewegungsrichtung parallel ist. Er findet für den Widerstand pro Längeneinheit im ersten Falle:

$$W_1 = \frac{4\pi\mu U}{\frac{a}{a+b} - \log\left[\frac{1}{4}\gamma\sigma'(a+b)\right]}.$$

Dabei ist  $U$  die Geschwindigkeit,  $2a$  die große und  $2b$  die kleine Achse des Querschnittes.  $\gamma$  hat den Wert 1,7811.

Wenn die Bewegungsrichtung mit der kleinen Achse des Querschnittes parallel ist, ist der Widerstand pro Längeneinheit:

$$W_2 = \frac{4\pi\mu U}{\frac{b}{a+b} - \log\left[\frac{1}{4}\gamma\sigma'(a+b)\right]}.$$

Wenn  $a = b$  ist, stimmen  $W_1$  und  $W_2$  mit dem von Lamb berechneten Widerstand eines kreisförmigen Zylinders überein.

## § 19. Eine kleine Kugel und eine ebene Wand.

### 19 1. Einleitung. Die von der Kugel primär hervorgerufene Strömung.

Wir sahen in § 12, 2, S. 143 wie man bei den Stokesschen Gleichungen Probleme behandeln kann, in denen eine ebene Grenzfläche vorkommt. Nach dieser Methode hat, wie in § 12 erwähnt wurde, Stock eine genaue Berechnung des Widerstandes ausgeführt, den eine Kugel erfährt, die in einer von einer ebenen Wand begrenzten zähen Flüssigkeit sich mit konstanter Geschwindigkeit in einer mit der Wand parallelen Richtung bewegt. Faxén hat dieses hydrodynamische Problem wieder aufgenommen, aber dabei die erweiterten Stokesschen Gleichungen zugrunde gelegt. Seine Methode ist die in § 13 dargelegte. Zuerst wird die in § 16, S. 168 gegebene

Lösung des Problems der Kugel derart umgeformt, daß die Geschwindigkeitskomponenten und der Druck durch Doppelintegrale dargestellt werden, in denen die Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  des Aufpunktes nur im Exponenten, und zwar linear, vorkommen. Faxén benutzt ein Bezugssystem, dessen  $x_1$ -Achse in die Bewegungsrichtung fällt. Er schreibt die Geschwindigkeitskomponenten der durch die Kugel primär eingeprägten Strömung in der Form  $-U\delta_{j1} + u_j$  wo:

$$u_j = 2\sigma\Phi_1\delta_{j1} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\Phi_1 + P), \quad p = \varrho U \frac{\partial P}{\partial x_1}, \quad (1)$$

$$\Phi_1 = c \left\{ 1 - \sigma a^2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \left( \frac{1}{6} + c_1 \right) \sigma^2 a^4 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right\} \frac{e^{-\sigma' R - \sigma x_1}}{R}, \quad (2)$$

$$P = -c \left\{ 1 - \frac{2}{3} \sigma a^2 \frac{\partial}{\partial x_1} + c_1 \sigma^2 a^4 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right\} \frac{1}{R}. \quad (3)$$

Hier ist:

$$c = \frac{3a\mu}{2\varrho} \frac{1}{1 - \frac{3}{4}a\sigma'}. \quad (4)$$

$c_1$  ist eine Konstante, deren Betrag ohne Belang ist.

## 192. Integraldarstellung der Funktionen $\Phi_1$ und $P$ .

Für die Funktion  $1/R$  haben wir in § 13 die Darstellung gefunden:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) - \kappa |x_3|} \frac{da_1 da_2}{\kappa} \quad (5)$$

$$R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad R \geq 0, \quad \kappa = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Um eine entsprechende Darstellung für die Funktion:

$$\frac{e^{-\sigma' R - \sigma x_1}}{R}$$

zu finden, gehen wir von dem Integrale:

$$J = \frac{\sigma^2}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int \frac{e^{ia_j x_j}}{a_k^2(a_l^2 + \sigma^2)} da_1 da_2 da_3$$

aus. Da dieses Integral für reelle  $x_j$  unbedingt konvergent ist, so haben wir:

$$\begin{aligned} J &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{2\pi^2} \int \int \int \frac{e^{ia_j x_j}}{a_k^2(a_l^2 + \sigma^2)} da_1 da_2 da_3 = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi^2} \left\{ \int \int \int \frac{e^{ia_j x_j}}{a_k^2} da_1 da_2 da_3 - \int \int \int \frac{e^{ia_j x_j}}{a_k^2 + \sigma^2} da_1 da_2 da_3 \right\}. \end{aligned}$$

Die beiden Glieder innerhalb der Klammer haben bei  $A \rightarrow \infty$  bestimmte Grenzwerte. Wir haben in der Tat:

$$\begin{aligned} \int \int \int_{\substack{0 < a_j < A^2}} \frac{e^{ia_j x_j}}{a_k^2} da_1 da_2 da_3 &= 2\pi \int_{\substack{\alpha = 0 \\ \vartheta = 0}}^A d\alpha \int_{\vartheta = 0}^{\pi} e^{i\alpha R \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta = \\ &= \frac{4\pi}{R} \int_0^A \frac{\sin(aR)}{a} da. \end{aligned}$$

Der Grenzwert dieses Integrales ist also  $\frac{2\pi^2}{R}$ .

Wir haben ferner:

$$\begin{aligned} \int \int \int_{\substack{0 < a_j^2 < A^2}} \frac{e^{ia_j x_j}}{a_k^2 + \sigma^2} da_1 da_2 da_3 &= 2\pi \int_{\substack{\alpha = 0 \\ \vartheta = 0}}^A \frac{a^2 da}{a^2 + \sigma^2} \int_{\vartheta = 0}^{\pi} e^{i\alpha R \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta = \\ &= \frac{4\pi}{R} \int_0^A \frac{a \sin(aR)}{a^2 + \sigma^2} da. \end{aligned}$$

Wir lassen jetzt  $A$  ins Unendliche wachsen. Das Integral, welches wir zuletzt bekommen haben, nähert sich dabei einem endlichen Grenzwerte, den wir am einfachsten durch komplexe Integration berechnen. Wir erhalten so:

$$\frac{2\pi^2}{R} e^{-\sigma' R}$$

und haben also schließlich:

$$J = \frac{1 - e^{-\sigma' R}}{R}. \quad (6)$$

Wir können andererseits, wegen der unbedingten Konvergenz des Integrales  $J$ , den Wert desselben in der Weise berechnen, daß wir zuerst die Integration in bezug auf  $a_3$  ausführen. Wir können dabei komplexe Integration anwenden, indem wir, wenn  $x_3 > 0$  ist, den Integrationsweg in der komplexen  $a_3$ -Ebene nach oben schieben, dagegen wenn  $x_3 < 0$  ist, nach unten. Wir erhalten so, indem wir beachten, daß der Integrand von  $J$  die singulären Punkte:

$$a_3 = \pm i\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \pm ix, \quad a_3 = \pm i\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \sigma^2} = \pm i\lambda^*$$

hat:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) - \kappa |x_3|} \frac{da_1 da_2}{\kappa} - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) - \lambda^* |x_3|} \frac{da_1 da_2}{\lambda^*}. \end{aligned}$$

Da das erste Glied rechts nach (5) den Wert  $1/R$  hat, so folgt wegen (6):

$$\frac{e^{-\sigma' R}}{R} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) - \lambda^* |x_3|} \frac{da_1 da_2}{\lambda^*}.$$

Wir sehen aus dieser Formel, daß:

$$\frac{e^{-\sigma' R - \sigma x_1}}{R} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int e^{i[(a_1 + i\sigma)x_1 + a_2 x_2] - \lambda^* |x_3|} \frac{da_1 da_2}{\lambda^*},$$

also, wenn wir rechts  $a_1 + i\sigma$  statt  $a_1$  als Integrationsvariable benutzen und diese Variable wieder mit  $a_1$  bezeichnen:

$$\frac{e^{-\sigma' R - \sigma x_1}}{R} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) - \lambda^* |x_3|} \frac{da_1 da_2}{\lambda^*}. \quad (7)$$

Hier ist:

$$\lambda = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2i\sigma a_1}.$$

Mit Hilfe der Beziehungen (5) und (7) können wir  $\Phi_1$  und  $P$  durch Integrale darstellen:

$$\Phi_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{g_1}{\lambda} e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) - \lambda^* |x_3|} da_1 da_2,$$

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{g_2}{\lambda} e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) - \lambda^* |x_3|} da_1 da_2,$$

wo:

$$g_1 = c \left[ 1 - \sigma a^2 \cdot i a_1 + \left( \frac{1}{6} + c_1 \right) \sigma^2 a^4 \cdot (i a_1)^2 \right],$$

$$g_2 = -c \left[ 1 - \frac{2}{3} \sigma a^2 \cdot i a_1 + c_1 \sigma^2 a^4 \cdot (i a_1)^2 \right].$$

### 193. Berechnung der von der Wand zurückgeworfenen Strömung.

Der jetzt folgende Teil unserer Untersuchung ist die Berechnung der von der Wand  $x_3 = -\zeta$  erzeugten, zurückgeworfenen Strömung. Für diese Strömung kann man den folgenden Ansatz machen:

$$u_j^* = 2\sigma \left( \Phi_1^* \delta_{j1} + \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial x_1} \delta_{j3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Phi_1^* + P^* + \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial x_3} \right),$$

$$p^* = \varrho U \frac{\partial P^*}{\partial x_1},$$

$$\Phi_1^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_4(a_1, a_2) e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) - \lambda(x_1 + 2\zeta)} da_1 da_2,$$

$$P^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_5(a_1, a_2) e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) - \kappa(x_1 + 2\zeta)} da_1 da_2,$$

$$\Phi_2^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_6(a_1, a_2) e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) - \lambda(x_1 + 2\zeta)} da_1 da_2.$$

Die Bedingungen  $u_j^* = -u_j$  für  $x_3 = -\zeta$  ergeben:

$$g_4 = -g_1, \quad g_5 = -g_2 \frac{(\lambda + \kappa)^2}{2i\sigma a_1} - g_1 \frac{\lambda(\lambda + \kappa)}{i\sigma a_1} e^{\zeta\kappa - \zeta\lambda},$$

$$g_6 = -g_2 \frac{\lambda(\lambda + \kappa)}{i\sigma a_1 \kappa} e^{-\zeta\kappa + \zeta\lambda} - g_1 \frac{\lambda(\lambda + \kappa)}{i\sigma a_1 \kappa}.$$

Wegen des singulären Punktes  $a_1 = 0$  sind die Integrale, durch welche wir die Funktionen  $P^*$  und  $\Phi_2^*$  darstellten, divergent. Wir definieren  $P^*$  und  $\Phi_2^*$  als die Cauchyschen Hauptwerte der Integrale, welche wir zur Darstellung derselben benutzt haben.

#### 19.4. Resultierende Kraft auf die Kugel.

Durch unsere Formeln ist die Berechnung der einmal zurückgeworfenen Strömung im mathematischen Sinne erledigt. Um die erhaltenen Formeln hydrodynamisch zu verwerten, ist man aber auf ein eingehendes Studium der Integrale angewiesen, durch welche  $\Phi_1^*$ ,  $P^*$  und  $\Phi_2^*$  definiert wurden. Wir werden hier nicht auf diese komplizierten Fragen eingehen. Wir begnügen uns damit, die Ergebnisse von Faxén mitzuteilen. Wir bemerken, daß Faxén nicht nur die oben bestimmte, einmal zurückgeworfene Strömung, sondern auch die doppelt zurückgeworfene Strömung berechnet hat. Er findet für den Widerstand gegen die Bewegung der Kugel:

$$W = \frac{6\pi\mu a U}{1 - \frac{3}{4}a\sigma' - \frac{9}{8}\frac{a}{2\zeta}\chi(\sigma'\zeta) + \left(\frac{a}{2\zeta}\right)^3 - \frac{45}{16}\left(\frac{a}{2\zeta}\right)^4 - 2\left(\frac{a}{2\zeta}\right)^5}.$$

Hier ist:

$$\chi(x) = 1 - \frac{4}{3}x + \frac{23}{16}x^2 - \frac{16}{9}x^3 + \frac{317}{864}x^4 + \frac{8}{9}x^5 - \left\{ \frac{25}{24}x^4 + \dots \right\} \log \frac{\gamma x}{2}$$

$$(\gamma = 1,781070).$$

Für  $\chi(x)$  hat Faxén die folgende Tabelle berechnet:

$x$	$\chi(x)$	$x$	$\chi(x)$	$x$	$\chi(x)$	$x$	$\chi(x)$
0	1	0,30	0,6978	0,8	0,4277	3	0,0873
0,05	0,9367	0,35	0,6608	0,9	0,3925	4	0,0479
0,10	0,8796	0,40	0,6265	1,0	0,3603	5	0,0262
0,15	0,8276	0,5	0,5660	1,5	0,2390	10	0,004
0,20	0,7804	0,6	0,5137	2,0	0,1692	18	- 0,0016
0,25	0,7370	0,7	0,4680	2,5	0,1195	$\infty$	0

Die Widerstandsformel ist gültig, wenn  $a^2 \sigma^2$  und  $a^6/\zeta^6$  neben 1 vernachlässigt werden können.

Die Resultierende der Kräfte, welche die Flüssigkeit auf die Kugel ausübt, hat auch eine gegen die Wand senkrechte Komponente. Sie strebt die Entfernung der Kugel von der Wand zu vergrößern und hat den Betrag:

$$\frac{9}{8} \pi \mu a U \cdot \sigma' a \frac{\tau(\sigma' \zeta)}{1 - \frac{27}{16} \frac{a}{\zeta}}.$$

Hier ist:

$$\begin{aligned} \tau(\sigma' \zeta) = 1 &- \frac{11}{8} \sigma'^2 \zeta^2 + \frac{8}{3} \sigma'^3 \zeta^3 - \frac{137}{288} \sigma'^4 \zeta^4 - \frac{8}{5} \sigma'^5 \zeta^5 + \dots \\ &+ \left[ \frac{175}{96} \sigma'^4 \zeta^4 + \dots \right] \log \frac{\gamma \sigma' \zeta}{2}. \end{aligned}$$

Faxén findet ferner, daß die Kugel, wenn sie um ihren Mittelpunkt frei rotieren kann, die Drehgeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{3U}{32a} \cdot \frac{a^4}{\zeta^4} \left( 1 - \frac{3a}{8\zeta} \right)$$

hat. Die Drehachse und die Drehrichtung sind dieselben wie in dem Falle, daß die Kugel die ebene Wand berührt.

Wenn man in der Widerstandsformel  $\sigma' \zeta$  und  $a/\zeta$  so klein annimmt, daß  $\sigma' \zeta \cdot \sigma' a$  und  $a^3/\zeta^3$  neben 1 vernachlässigt werden können, wird das Glied  $-\frac{3}{4}a\sigma'$  im Nenner von  $W$  durch das zweite Glied der Entwicklung von  $\chi(\sigma' \zeta)$  aufgehoben, und wir erhalten annähernd:

$$W = \frac{6\pi\mu a U}{1 - \frac{9}{16} \frac{a}{\zeta}} = 6\pi\mu a U \left( 1 + \frac{9}{16} \frac{a}{\zeta} + \dots \right).$$

Dies ist die von H. A. Lorentz aufgestellte Widerstandsformel, welche wir im 12. Paragraphen, S. 142, abgeleitet haben. Sie ist also gültig, wenn die Kugel sich in genügender Nähe der Wand befindet und wenn der Radius und die Geschwindigkeit derselben genügend klein sind.

## § 20. Eine Kugel in einer Röhre.

### 20 1. Einleitung.

**Integraldarstellungen für die Funktionen  $\frac{1}{R}$  und  $\frac{e^{-\sigma' R - \sigma x_1}}{R}$ .**

Das Problem, den Widerstand zu berechnen, den eine Kugel erfährt, die sich mit konstanter Geschwindigkeit längs der Achse einer mit einer zähen Flüssigkeit gefüllten Röhre bewegt, hat als erster Ladenburg in seiner Dissertation in Angriff genommen. Er legte seiner Berechnung die Stokesschen Differentialgleichungen zugrunde. Faxén nahm das Problem wieder auf. Er zeigte, daß man durch eine verhältnismäßig geringe Abänderung der von Ladenburg gegebenen Formeln die den erweiterten Stokesschen Differentialgleichungen entsprechende Lösung des Problems erhalten kann. Der Ausgangspunkt von Faxén ist die S. 191 (1)–(3) gegebene Darstellung der Bewegung, welche eine Kugel in einer sonst den ganzen Raum erfüllenden Flüssigkeit erzeugt. Für die Funktion:

$$\frac{e^{-\sigma' R - \sigma x_1}}{R}$$

benutzt er zunächst die Darstellung (19, 7) S. 193, führt sie jedoch durch Ausführung der Integration in bezug auf  $a_2$  in eine Form über, welche die Symmetrie des Problems in bezug auf die Achse des Rohres zum Ausdruck bringt. Wir setzen:

$$\sqrt{x_2^2 + x_3^2} = r, \quad i x_2 = r \sin \operatorname{hyp}(i\xi), \quad |x_3| = r \cos \operatorname{hyp}(i\xi).$$

Wir setzen ferner:

$$a_2 = \sqrt{a_1^2 - 2i\sigma a_1} \sin \operatorname{hyp} t,$$

und geben dabei der Wurzel ein solches Vorzeichen, daß der reelle Teil derselben positiv ausfällt. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\sigma' R - \sigma x_1}}{R} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) - \lambda |x_3|} \frac{da_1 da_2}{\lambda} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ia_1 x_1} da_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ia_2 x_2 - \lambda |x_3|} \frac{da_2}{\lambda} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ia_1 x_1} da_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r\sqrt{a_1^2 - 2i\sigma a_1} \cos \operatorname{hyp}(t - i\xi)} dt. \end{aligned}$$

Das zweite Integral in der letzten Formel definiert eine Hankelsche

Zylinderfunktion, und zwar hat man\*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r\sqrt{a_1^2 - 2i\sigma a_1}} \cos \operatorname{hyp}(t - i\tilde{s}) dt = -\pi i H_2^0(-ir\sqrt{a_1^2 - 2i\sigma a_1}).$$

Wir haben also:

$$\frac{e^{-\sigma' R - \sigma x_1}}{R} = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ia_1 x_1} H_2^0(-ir\sqrt{a_1^2 - 2i\sigma a_1}) da_1. \quad (1)$$

Ein spezieller Fall der Beziehung (1) ist die Formel:

$$\frac{1}{R} = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ia_1 x_1} H_2^0(-ir|a_1|) da_1.$$

Man erhält sie aus (1), indem man  $\sigma = 0$  setzt.

Aus den Formeln (1), (2), (3) S. 191 folgt jetzt:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= 2\sigma\Phi_1 + \frac{\partial}{\partial x_1}(\Phi_1 + P), & q &= \frac{x_2}{r}u_2 + \frac{x_3}{r}u_3 = \frac{\partial}{\partial r}(\Phi_1 + P), \\ p &= \varrho U \frac{\partial P}{\partial x_1}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\Phi_1 = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} g_1 e^{ia_1 x_1} H_2^0(-ir\sqrt{a_1^2 - 2i\sigma a_1}) da_1, \quad (3)$$

$$P = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} g_2 e^{ia_1 x_1} H_2^0(-ir|a_1|) da_1. \quad (4)$$

$g_1$  und  $g_2$  haben die S. 193 angegebenen Bedeutungen.

Umgekehrt kann man sofort verifizieren, daß diese Ausdrücke den Stokesschen Differentialgleichungen genügen, wenn man nur die Tatsache benutzt, daß die Hankelsche Zylinderfunktion  $H_2^{(0)}(-ix)$  der linearen Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - y = 0 \quad (5)$$

genügt. Hieraus erhellt sofort, daß wir eine neue Lösung der erweiterten Stokesschen Gleichungen in der Weise erhalten können, daß wir in (2) — (4)  $H_2^0(-ix)$  durch eine andere Lösung der Gleichung (5) ersetzen. Eine solche Lösung ist die Funktion:

$$J^0(-ix) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{2^{2m} (m!)^2}.$$

---

\* Vgl. N. Nielsen, Handbuch der Zylinderfunktionen. S. 128.

## 20 2. Ansatz zur Lösung des Problems.

Wir benutzen diese für alle  $x$ -Werte reguläre Lösung von (5) in unserem Ansatz für die Bewegung, welche durch die Reflexion der Strömung (3) in der zylindrischen Wand der Röhre erhalten wird. Wir setzen für die zurückgeworfene Strömung:

$$u_1^* = 2\sigma\Phi_1^* + \frac{\partial(\Phi_1^* + P^*)}{\partial x_1}, \quad q = \frac{\partial}{\partial r}(\Phi_1^* + P^*),$$

$$p = \varrho U \frac{\partial P^*}{\partial x_1},$$

$$\Phi_1^* = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} g_3 e^{ia_1 x_1} J^0(-ir|a_1^2 - 2i\sigma a_1|) da_1,$$

$$P^* = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} g_4 e^{ia_1 x_1} J^0(-ir|a_1|) da_1,$$

wobei wir uns vornehmen,  $g_3$  und  $g_4$  so zu bestimmen, daß die Integrale konvergieren.

Die Bedingungen  $u_1 + u_1^* = 0$ ,  $q + q^* = 0$  an der zylindrischen Grenzfläche, etwa für  $r = l$ , drücken  $g_3$  und  $g_4$  als lineare, homogene Funktionen von  $g_1$  und  $g_2$  aus. Die so erhaltenen Ausdrücke erfüllen die oben erwähnte Bedingung. Die Berechnung der von der Wand zurückgeworfenen Strömung ist damit in mathematischem Sinne erledigt.

## 20 3. Die Widerstandsformel.

Die weitere Aufgabe ist jetzt, aus der gefundenen Lösung den Widerstand gegen die Bewegung der Kugel zu berechnen. Wie oben erwähnt wurde, hat Ladenburg diese Aufgabe für den Fall  $\sigma = 0$  gelöst und Faxén für den allgemeinen Fall, wo  $\sigma$  einen von Null verschiedenen Wert hat. Auf die Berechnungen, welche zur Gewinnung der Widerstandsformel notwendig sind, wollen wir hier nicht eingehen. Wir begnügen uns damit, das Ergebnis mitzuteilen. Faxén findet für den Widerstand einer Kugel, die sich mit der Geschwindigkeit  $U$  längs der Achse einer zylindrischen Röhre mit dem inneren Radius  $l$  bewegt, unter Voraussetzung, daß  $\sigma'^2 a^2$ ,  $\sigma' a \cdot a^2/l^2$  und  $a^6/l^6$  gegen 1 vernachlässigt werden können:

$$W = \frac{6\pi\mu a U}{1 - \frac{3}{4}a\sigma' - \frac{a}{l}L(\sigma'l) + 2,09\frac{a^3}{l^3} - 0,95\frac{a^5}{l^5}}.$$

Hier ist:

$$L(x) = \frac{3}{8\pi x} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(a - 4ix)(a - ix)}{a \cdot 2ix} \frac{i}{[J^0(-i\lambda)]^2} -$$

$$- \frac{2|a|\lambda[J^0(-i|a|) - J^0(-i\lambda)]^2}{a A J^0(-i|a|) J^0(-i\lambda)} da,$$

$$\lambda = \sqrt{a^2 - 2ixa},$$

$$A = \lambda J^0'(-i|a|) J^0(-i\lambda) - |a| J^0(-i|a|) J^0'(-i\lambda).$$

Eine Reihenentwickelung der Funktion  $L(\sigma'l)$  ergab:

$$L(\sigma'l) = 2,104 - \frac{3}{4}\sigma'l + \dots$$

Eine numerische Berechnung ergab:

$$L(0) = 2,104, \quad L(0,5) = 1,76, \quad L(1) = 1,48, \quad L(2) = 1,04,$$

$$L(5) = 0,46.$$

Die Widerstandsformel zeigt, daß das Glied  $-\frac{3}{4}a\sigma'$  im Nenner für kleine Werte von  $\sigma'l$  vom zweiten Gliede in der Entwickelung von  $L(\sigma'l)$  aufgehoben wird. Eine Prüfung der erweiterten Stokesschen Widerstandsformel durch Messung der Fallgeschwindigkeit einer Kugel längs der Achse einer vertikal gestellten, von einer zähen Flüssigkeit erfüllten Röhre ist also nur dann möglich, wenn der innere Radius der Röhre so groß ist, daß es nicht erlaubt ist, die Entwickelung von  $L(\sigma'l)$  nach dem zweiten Gliede abzubrechen. Wie Faxén hervorgehoben hat, ist diese Bedingung bei zwei Messungsreihen von Arnold erfüllt, und bei diesen Messungen ist der Einfluß des Gliedes  $-\frac{3}{4}a\sigma'$  deutlich zu sehen\*.

## § 21. Zwei Kugeln in einer Flüssigkeit.

### 211. Einleitung.

#### Die Theorie von Smochulowski nach § 14.

Wir haben im 14. Paragraphen eine Untersuchung von Smoluchowski kennen gelernt, in welcher er die Kräfte untersucht hat, welche zwei Kugeln, welche sich mit derselben konstanten Geschwindigkeit in einer zähen Flüssigkeit bewegen, durch die Vermittlung

---

\* Nach Experimenten, die in Leipzig unter der Leitung von Prof. Schiller ausgeführt worden sind, stimmt das Widerstandsgesetz (11) in § 16 noch bei  $\sigma'a = 0,25$  bis auf ein Prozent mit den Messungen überein. Vgl. Geiger und Scheel, Handbuch der Physik. Bd. 7, S. 111.

dieser Flüssigkeit auf einander ausüben. Wenn wir die Geschwindigkeit der Kugeln  $U$  nennen und wenn wir die  $x_1$ -Achse mit der Richtung derselben parallel legen, so können wir das in § 12 gewonnene Ergebnis so ausdrücken, daß auf die Kugel 1 mit dem Mittelpunkte  $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$  und dem Radius  $a_1$  eine Kraft wirkt, deren Komponenten:

$$- 6\pi\mu a_1 U(\delta_{k1} - U_{k1}^{(2)}(x^{(1)})), \quad (k = 1, 2, 3)$$

sind, während auf die Kugel 2 mit dem Mittelpunkte  $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}$  und dem Radius  $a_2$  die Kraft:

$$- 6\pi\mu a_2 U(\delta_{k1} - U_{k1}^{(1)}(x^{(2)}))$$

wirkt. Die Größen  $U_{k1}^{(1)}, U_{k1}^{(2)}$  sind dabei durch die Annahme definiert, daß

$$u_j^{(1)} = U_{jk}^{(1)} v_k^{(1)}, \quad p^{(1)} = P_k^{(1)} v_k^{(1)};$$

und

$$u_j^{(2)} = U_{jk}^{(2)} v_k^{(2)}, \quad p^{(2)} = P_k^{(2)} v_k^{(2)},$$

wo  $v_k^{(1)}$  und  $v_k^{(2)}$  willkürliche Konstanten sind, Lösungen der Stokeschen Differentialgleichungen sind, welche den Nebenbedingungen:

für  $r_1^2 = (x_j - x_j^{(1)})^2 = a_1^2 : u_j^{(1)} = v_j^{(1)}, \lim_{r_1 \rightarrow \infty} u_j^{(1)} = 0$ ;

bzw.:

für  $r_2^2 = (x_j - x_j^{(2)})^2 = a_2^2 : u_j^{(2)} = v_j^{(2)}, \lim_{r_2 \rightarrow \infty} u_j^{(2)} = 0$

genügen.

Die hier gegebene Lösung des Problems von Smoluchowski ist nur bis auf Glieder von den Größenordnungen  $a_1^2/r_{12}^2, a_2^2/r_{12}^2 (r_{12}^2 = (x_j^{(1)} - x_j^{(2)})^2)$  richtig.

## 21 2. Neue Lösung auf Grund der erweiterten Stokeschen Gleichungen.

Wenn wir das Problem von Smoluchowski unter Zugrundelegung der erweiterten Stokeschen Differentialgleichung statt der von Stokes selbst benutzten Differentialgleichungen lösen wollen, haben wir nur in der oben gegebenen Vorschrift zur Lösung des Problems die Worte „Stokeschen Differentialgleichungen“ mit „erweiterten Stokeschen Differentialgleichungen“ zu vertauschen.

Die Werte der Größen  $U_{k1}^{(1)}, U_{k1}^{(2)}$  können wir jetzt aus (16,5) S. 168 entnehmen. Wir erhalten unter Vernachlässigung von Gliedern von den Größenordnungen  $a_1^2/r_{12}^2, a_2^2/r_{12}^2, \sigma' a_1, \sigma' a_2$ :

$$\begin{aligned} U_{k1}^{(1)}(x^{(2)}) &= \frac{3}{2} \frac{a_1}{r_{12}} e^{-\sigma' r_{12} - \sigma(x_1^{(2)} - x_1^{(1)})} \delta_{1k} - \\ &- \frac{3}{4} \frac{\partial}{\partial x_k^{(2)}} \frac{1 - e^{-\sigma' r_{12} - \sigma(x_1^{(2)} - x_1^{(1)})}}{\sigma r_{12}}, \end{aligned}$$

$$U_{k1}^{(2)}(x^{(1)}) = \frac{3}{2} \frac{a_2}{r_{12}} e^{-\sigma' r_{12} - \sigma(x_1^{(1)} - x_1^{(2)})} \delta_{1k} - \\ - \frac{3}{4} a_2 \frac{\partial}{\partial x_k^{(1)}} \frac{1 - e^{-\sigma' r_{12} - \sigma(x_1^{(1)} - x_1^{(2)})}}{\sigma r_{12}}.$$

Auf die Kugel 1 wirkt also eine Kraft mit den Komponenten:

$$- 6\pi\mu a_1 U \delta_{1k} + \frac{9}{2} \pi\mu a_1 a_2 U \frac{e^{-\sigma' r_{12} - \sigma(x_1^{(1)} - x_1^{(2)})}}{r_{12}} \delta_{1k} - \\ - \frac{9}{2} \pi\mu a_1 a_2 U \frac{x_k^{(2)} - x_k^{(1)}}{r_{12}} \frac{1 - (1 + \sigma' r_{12}) e^{-\sigma' r_{12} - \sigma(x_1^{(1)} - x_1^{(2)})}}{\sigma r_{12}^2}.$$

Die Kraft, welche auf die Kugel 2 wirkt, erhält man durch Vertauschung von  $x_j^{(1)}$ ,  $x_j^{(2)}$  sowie von  $a_1$ ,  $a_2$ .

### 213. Diskussion der neuen Lösung.

Wir sehen aus unserer Formel, daß die Kraft, welche eine Kugel durch Vermittlung der Flüssigkeit auf die andere Kugel ausübt, sich in zwei Teilkräfte zerlegen läßt. Die erste Teilkraft hat dieselbe Richtung wie die Geschwindigkeit und kann also als eine Abschwächung des Widerstandes gegen die Bewegung der Kugel aufgefaßt werden. Die zweite Teilkraft fällt in die Richtung der Verbindungsgeraden zwischen den Mittelpunkten der beiden Kugeln. Die erste Teilkraft hat für die Kugel (1) den Betrag:

$$\frac{9}{2} \pi\mu a_1 a_2 U \frac{e^{-\sigma' r_{12} - \sigma(x_1^{(1)} - x_1^{(2)})}}{r_{12}}$$

und folglich für die Kugel 2 den Betrag:

$$\frac{9}{2} \pi\mu a_1 a_2 U \frac{e^{-\sigma' r_{12} - \sigma(x_1^{(2)} - x_1^{(1)})}}{r_{12}}.$$

Wenn wir  $U > 0$ ,  $x_1^{(1)} > x_1^{(2)}$  annehmen, so hat der erste dieser beiden Ausdrücke stets einen kleineren Wert als der zweite. Die Abschwächung des Widerstandes ist also für die vorangehende Kugel stets kleiner als für die nachfolgende Kugel. Die vorangehende Kugel hat mit anderen Worten stets einen größeren Widerstand zu überwinden als die nachfolgende Kugel.

Wir gehen zur zweiten Teilkraft über. Längs der Verbindungsgeraden zwischen den Mittelpunkten der beiden Kugeln, in der Richtung von der Kugel 2 nach der Kugel 1, wirkt auf die Kugel 1 eine Kraft:

$$\frac{9}{2} \pi\mu a_1 a_2 U \frac{1 - (1 + \sigma' r_{12}) e^{-\sigma' r_{12} - \sigma(x_1^{(2)} - x_1^{(1)})}}{\sigma r_{12}^2}$$

und auf die Kugel 2 eine Kraft:

$$-\frac{9}{2}\pi\mu a_1 a_2 U \frac{1 - (1 + \sigma' r_{12}) e^{-\sigma' r_{12} + \sigma(x_1^{(1)} - x_1^{(2)})}}{\sigma r_{12}^2}.$$

Wir nehmen wieder an, daß  $U > 0$ ,  $x_1^{(1)} \geq x_1^{(2)}$  ist. Da unter diesen Umständen  $\sigma > 0$  und:

$$(1 + \sigma' r_{12}) e^{-\sigma' r_{12}} < 1, \quad e^{-\sigma(x_1^{(1)} - x_1^{(2)})} \leq 1$$

ist, so hat der erste der beiden Ausdrücke sicher einen positiven Wert. Wir sehen hieraus, daß die längs der Verbindungsgeraden wirkende Kraft auf die vorangehende Kugel stets den Charakter einer Abstoßung von der nachfolgenden Kugel hat.

Der Ausdruck:

$$\frac{1 - (1 + \sigma' r_{12}) e^{-\sigma' r_{12} + \sigma(x_1^{(1)} - x_1^{(2)})}}{\sigma r_{12}^2}$$

kann sowohl positive wie negative Werte annehmen. Er ist negativ, wenn  $\sigma > 0$  und:

$$1 + \sigma' r_{12} < e^{\sigma' r_{12} - \sigma(x_1^{(1)} - x_1^{(2)})},$$

positiv, wenn  $\sigma > 0$  und:

$$1 + \sigma' r_{12} > e^{\sigma' r_{12} - \sigma(x_1^{(1)} - x_1^{(2)})}.$$

Die längs der Verbindungsgeraden wirkende Kraft auf die nachfolgende Kugel kann also sowohl den Charakter einer Abstoßung wie den Charakter einer Anziehung von der vorangehenden Kugel haben. Wenn  $U > 0$ ,  $x_1^{(1)} > x_1^{(2)}$ ,  $x_2^{(1)} = x_2^{(2)}$ ,  $x_3^{(1)} = x_3^{(2)}$ , wenn also die nachfolgende Kugel genau hinter der vorangehenden folgt, so ist die Kraft eine Anziehung. Wenn dagegen  $x_1^{(1)} = x_1^{(2)}$  ist, so ist sie eine Abstoßung.

Wenn  $\sigma' r_{12} = \varrho |U| r_{12}/2\mu$  eine kleine Größe ist, können wir annähernd:

$$e^{-\sigma' r_{12} + \sigma(x_1^{(1)} - x_1^{(2)})} = 1, \quad 1 - e^{-\sigma' r_{12} + \sigma(x_1^{(1)} - x_1^{(2)})} = \\ \sigma' r_{12} \pm \sigma(x_1^{(1)} - x_1^{(2)})$$

setzen. Wir kommen in dieser Weise zu den in § 14 mitgeteilten, von Smoluchowski aufgestellten Sätzen zurück. Die Voraussetzung für die Gültigkeit dieser Sätze ist also, daß  $\sigma' r_{12}$  eine kleine Größe ist.

## § 22. Zusammenstellung der mitgeteilten Widerstandsformeln.

### 221. Stationäre Bewegung. Die Stokesschen Gleichungen.

$W$  = Widerstand,  $K_j (j = 1, 2, 3)$  = Komponenten der Resultierenden der Kräfte, welche die Flüssigkeit auf den Körper ausübt.

1. Eine Kugel in einer sonst den ganzen Raum erfüllenden Flüssigkeit. Formel von Stokes. § 9.  $a$  = Radius,  $U$  = Geschwindigkeit der Kugel.

$$W = 6\pi\mu a U.$$

2. Ruhende Kugel in einer in beliebiger stationärer und regulärer Bewegung begriffenen Flüssigkeit. Formel von Faxén. § 9.  $u_j^{(r)}$  = Geschwindigkeitskomponenten der Flüssigkeit bei Abwesenheit der Kugel,  $p^{(r)}$  = der Druck in derselben,  $a$  = Radius der Kugel,  $P^{(0)}$  der Mittelpunkt derselben.

$$K_j = 6\pi\mu a u_j^{(r)}(P^{(0)}) + \pi a^3 \left( \frac{\partial p^{(r)}}{\partial x_j} \right)_{P^{(0)}}.$$

3. Ein Ellipsoid in einer sonst den ganzen Raum erfüllenden Flüssigkeit. Formeln von Oberbeck. § 11.  $a, b, c$  = Halbachsen.  $U_j$  = Geschwindigkeitskomponenten des Ellipsoides,  $U_1$  längs der  $a$ -,  $U_2$  der  $b$ -,  $U_3$  der  $c$ -Achse.

$$W(s) = \sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}.$$

$$\chi_0 = abc \int_0^\infty \frac{ds}{W(s)}, \quad P_1 = abc \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)W(s)} \text{ usw.}$$

$$K_1 = -\frac{16\pi\mu abc U_1}{\chi_0 + a^2 P_1}, \quad K_2 = -\frac{16\pi\mu abc U_2}{\chi_0 + b^2 P_2},$$

$$K_3 = -\frac{16\pi\mu abc U_3}{\chi_0 + c^2 P_3}.$$

4. Eine Kugel in einer außerdem von einer ebenen Wand begrenzten Flüssigkeit. Formeln von H. A. Lorentz. § 12.  $x_1 x_2$ -Achsen in der Grenzebene.  $x_3 > 0$  in der Flüssigkeit.  $x_3^{(0)}$  = Entfernung des Mittelpunktes der Kugel von der Grenzebene.  $a$  = Radius.  $U_j$  = Geschwindigkeitskomponenten der Kugel.

$$K_1 = -6\pi\mu a U_1 \left( 1 + \frac{9}{16} \frac{a}{x_3^{(0)}} \right), \quad K_2 = -6\pi\mu a U_2 \left( 1 + \frac{9}{16} \frac{a}{x_3^{(0)}} \right),$$

$$K_3 = -6\pi\mu a U_3 \left( 1 + \frac{9}{8} \frac{a}{x_3^{(0)}} \right).$$

5. Eine Kugel zwischen zwei parallelen ebenen Wänden. Die Geschwindigkeit der Kugel den Wänden parallel. Formeln von H. Faxén.  
 § 13.  $a$  = Radius.  $U$  = Geschwindigkeit der Kugel.  $l_1, l_2$  = Entfernung des Mittelpunktes der Kugel von den Wänden.

a)  $l_2 = l_1 = l$ :

$$W = \frac{6\pi\mu a U}{1 - 1,004 \frac{a}{l} + 0,418 \frac{a^3}{l^3} - 0,169 \frac{a^5}{l^5}}.$$

b)  $l_2 = 3l_1$ :

$$W = \frac{6\pi\mu a U}{1 - 0,6526 \frac{a}{l_1} + 0,1475 \frac{a^3}{l_1^3} - 0,131 \frac{a^4}{l_1^4} - 0,0644 \frac{a^5}{l_1^5}}.$$

c) Mittlere Geschwindigkeit einer Kugel, die zwischen zwei senkrechten, parallelen, ebenen Wänden fällt. Siehe S. 155.

6. Zwei Kugeln in einer sonst unbegrenzten Flüssigkeit. § 14.  $a_1, a_2$  = Radien,  $U_1, U_2$  = Geschwindigkeiten der Kugeln,  $r_{12}$  = Entfernung zwischen den Mittelpunkten derselben,  $\vartheta$  = Winkel zwischen der gemeinsamen Bewegungsrichtung beider Kugeln und der Verbindungsgeraden zwischen den Mittelpunkten derselben ( $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ ).

a) Formeln von M. Smoluchowski.  $U_1 = U_2 = U$ .

$$W_1 = 6\pi\mu a_1 U \left(1 - \frac{3}{4} \frac{a_2}{r_{12}}\right), \quad W_2 = 6\pi\mu a_2 U \left(1 - \frac{3}{4} \frac{a_1}{r_{12}}\right).$$

Außerdem wirkt auf beide Kugeln in der Richtung vom Mittelpunkte der hinteren Kugel zum Mittelpunkte der vorderen Kugel eine Kraft:

$$\frac{9}{2} \pi \mu U a_1 a_2 \frac{\cos \vartheta}{r_{12}}.$$

b) Formeln von H. Faxén.  $\vartheta = 0$ :

$$\begin{aligned} W_1 = 6\pi\mu a_1 U_1 & \left\{ 1 + \frac{9}{4} \frac{a_1 a_2}{r_{12}^2} + \right. \\ & + \frac{1}{r_{12}^4} \left( -\frac{3}{2} a_1^3 a_2 + \frac{81}{16} a_1^2 a_2^2 + \frac{9}{4} a_1 a_2^3 \right) \Big| - \\ & - 6\pi\mu a_1 U_2 \left[ \frac{3}{2} \frac{a_2}{r_{12}} + \frac{1}{r_{12}^3} \left( -\frac{1}{2} a_1^2 a_2 + \frac{27}{8} a_1 a_2^2 - \frac{1}{2} a_2^3 \right) \right] + \\ & \left. + \frac{1}{r_{12}^5} \left( \frac{9}{4} a_1^3 a_2^2 + \frac{243}{32} a_1^2 a_2^3 + \frac{9}{4} a_1 a_2^4 \right) + \dots \right\}. \end{aligned}$$

$W_2$  wird aus  $W_1$  durch Vertauschen von  $a_1$  und  $a_2$ ,  $U_1$  und  $U_2$  erhalten.

c) Formeln von H. Dahl.  $a_1 = a_2 = a$ ,  $\vartheta = 0$ .

$$W_1 = 6\pi\mu a U_1 \{1 + 9x^2 + 93x^4 + 1197x^6 + 19821x^8 + \dots\} - \\ - 6\pi\mu a U_2 \{3x + 19x^3 + 387x^5 + 5331x^7 + 76115x^9 + \dots\}$$

$$x = \frac{a}{2r_{12}}.$$

$W_2$  wird aus  $W_1$  durch Vertauschen von  $U_1$  und  $U_2$  erhalten.

d) Formeln von M. Stimson und G. F. Jeffery.  $a_1 = a_2 = a$ ,  $U_1 = U_2 = U$ ,  $\vartheta = 0$ :

$$W_1 = W_2 = 6\pi\mu a U \lambda$$

$$\lambda = \frac{4}{3} \sinh a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+3)} \left\{ 1 - \frac{4 \sinh^2(n+\frac{1}{2})a - (2n+1)^2 \sinh^2 a}{2 \sinh(2n+1)a + (2n+1)\sinh 2a} \right\}$$

$$\cosh a = \frac{r_{12}}{2a}.$$

Tabelle für  $\lambda$  siehe S. 162.

## 222. Stationäre Bewegung. Die erweiterten Stokesschen Gleichungen.

Bezeichnungen wie oben. Außerdem:

$$U_j = U a_j, \quad U \geq 0, \quad a_j^2 = 1, \quad \sigma = \varrho U / 2\mu.$$

1. Eine Kugel in einer sonst den ganzen Raum füllenden Flüssigkeit.  
Formel vom Verf. § 16.  $a$  = Radius,  $U$  = Geschwindigkeit.

$$W = 6\pi\mu a U \left( 1 + \frac{3}{4} a \sigma \right).$$

2. Ein Ellipsoid in einer sonst den ganzen Raum füllenden Flüssigkeit. Formeln vom Verf. § 18. Vgl. oben S. 187–189.

$$K_1 = - \frac{16\pi\mu abc U a_1}{\chi_0 + a^2 P_1} \left[ 1 + \sigma abc \left[ \frac{3}{\chi_0 + a^2 P_1} - M \right] \right],$$

$$K_2 = - \frac{16\pi\mu abc U a_2}{\chi_0 + b^2 P_2} \left[ 1 + \sigma abc \left[ \frac{3}{\chi_0 + b^2 P_2} - M \right] \right],$$

$$K_3 = - \frac{16\pi\mu abc U a_3}{\chi_0 + c^2 P_3} \left[ 1 + \sigma abc \left[ \frac{3}{\chi_0 + c^2 P_3} - M \right] \right],$$

$$M = \frac{a_1^2}{\chi_0 + a^2 P_1} + \frac{a_2^2}{\chi_0 + b^2 P_2} + \frac{a_3^2}{\chi_0 + c^2 P_3}.$$

Spezielle Fälle:

a)  $a = b < c$ :

$$\chi_0 = \frac{2a^2c}{\sqrt{c^2-a^2}} \log \left( \frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1} \right),$$

$$P_1 = P_2 = \frac{c^2}{c^2-a^2} - \frac{a^2c}{(c^2-a^2)^{3/2}} \log \left( \frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1} \right),$$

$$P_3 = \frac{2a^2c}{(c^2-a^2)^{3/2}} \log \left( \frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1} \right) - \frac{2a^2}{c^2-a^2}.$$

b)  $a = b < c$ :

$$\chi_0 = \frac{2a^2c}{\sqrt{a^2-c^2}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1} \right),$$

$$P_1 = P_2 = \frac{a^2c}{(a^2-c^2)^{3/2}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1} \right) - \frac{c^2}{a^2-c^2},$$

$$P_3 = \frac{2a^2}{a^2-c^2} - \frac{2a^2c}{(a^2-c^2)^{3/2}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1} \right).$$

3. Ein Kreiszylinder in einer sonst unbegrenzten Flüssigkeit. Formel von Lamb. § 17.  $\gamma = 1,7811$ ,  $a$  = Radius,  $U$  = Geschwindigkeit des Zylinders.

$$W \text{ pro Längeneinheit} = \frac{4\pi\mu U}{\frac{1}{2} - \log(\frac{1}{2}\gamma\sigma a)}.$$

4. Ein elliptischer Zylinder in einer sonst unbegrenzten Flüssigkeit. Formeln von Harrison. § 18.  $a, b$  = Halbachsen des Querschnittes,  $U_1, U_2$  = Geschwindigkeitskomponenten des Zylinders längs der Hauptachsen.

$$K_1 \text{ pro Längeneinheit} = - \frac{4\pi\mu U_1}{\frac{a}{a+b} - \log \left[ \frac{1}{4} \gamma \sigma (a+b) \right]},$$

$$K_2 \text{ pro Längeneinheit} = - \frac{4\pi\mu U_2}{\frac{b}{a+b} - \log \left[ \frac{1}{4} \gamma \sigma (a+b) \right]}.$$

5. Eine Kugel in einer außerdem von einer ebenen Wand begrenzten Flüssigkeit. Formeln von H. Faxén. § 19. Geschwindigkeit der Kugel,  $U$ , parallel der Wand.  $a$  = Radius,  $\zeta$  = Entfernung des Mittelpunktes der Kugel von der Wand.

$$W = \frac{6\pi\mu a U}{1 - \frac{3}{4} a \sigma - \frac{9}{8} \frac{a}{2\zeta} \chi(\sigma\zeta) + \left(\frac{a}{2\zeta}\right)^3 - \frac{45}{16} \left(\frac{a}{2\zeta}\right)^4 - 2 \left(\frac{a}{2\zeta}\right)^5}$$

$$\chi(x) = 1 - \frac{4}{3}x + \frac{23}{16}x^2 - \frac{16}{9}x^3 + \frac{317}{864}x^4 + \frac{8}{9}x^5 -$$

$$-\left\{\frac{25}{24}x^4 + \dots\right\} \log \frac{\gamma x}{2}.$$

Tabelle für  $\chi(x)$  siehe S. 195.

Außerdem wirkt auf die Kugel eine Kraft, welche die Entfernung  $\zeta$  von der Wand zu vergrößern strebt. Sie hat den Betrag:

$$\frac{9}{8} \pi \mu a U \cdot \sigma a \frac{\tau(\sigma\zeta)}{1 - \frac{27}{16} \frac{a}{\zeta}},$$

wo:

$$\tau(x) = 1 - \frac{11}{8}x^2 + \frac{8}{3}x^3 - \frac{137}{288}x^4 - \frac{8}{5}x^5 + \left\{\frac{175}{96}x^4 + \dots\right\} \log\left(\frac{1}{2}\gamma x\right),$$

$$\gamma = 1,781070.$$

6. Eine Kugel in einer Röhre. Die Kugel bewegt sich längs der Achse der Röhre. Formel von Faxén. § 20.  $a$  = Radius der Kugel,  $l$  = innerer Radius des Zylinders,  $U$  = Geschwindigkeit der Kugel.

$$W = \frac{6\pi\mu a U}{1 - \frac{3}{4} a \sigma - \frac{a}{l} L(\sigma l) + 2,09 \frac{a^3}{l^3} - 0,95 \frac{a^5}{l^5}}.$$

Numerische Werte der Funktion  $L$  s. S. 199.

7. Zwei Kugeln in einer sonst unbegrenzten Flüssigkeit. Beide Kugeln bewegen sich mit der konstanten Geschwindigkeit  $U$  in der Richtung der positiven  $x_1$ -Achse. § 21. Formeln vom Verf.  $a_1, a_2$  = Radien,  $x_j^{(1)}, x_j^{(2)}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) Koordinaten der Mittelpunkte,  $r_{12}$  = Entfernung zwischen den Mittelpunkten der beiden Kugeln. Auf die erste Kugel wirkt in der Richtung der  $x_1$ -Achse eine Kraft:

$$K_1^{(1)} = -6\pi\mu a_1 U \left(1 - \frac{3}{4} \frac{a_2}{r_{12}} e^{-\sigma(r_{12} + x_1^{(1)} - x_1^{(2)})}\right).$$

Auf die zweite Kugel wirkt eine gleichgerichtete Kraft:

$$K_1^{(2)} = -6\pi\mu a_2 U \left(1 - \frac{3}{4} \frac{a_1}{r_{12}} e^{-\sigma(r_{12} + x_1^{(2)} - x_1^{(1)})}\right).$$

Außerdem wirkt auf die erste Kugel eine Kraft, welche dieselbe Richtung hat wie der Vektor vom Mittelpunkte der zweiten Kugel zum Mittelpunkte der ersten Kugel und deren Betrag:

$$\frac{9}{2} \pi \mu \frac{a_1 a_2}{\sigma r_{12}^2} U \{ 1 - (1 + \sigma r_{12}) e^{-\sigma(r_{12} + x_1^{(1)} - x_1^{(2)})} \}$$

ist. Auf die zweite Kugel wirkt eine Kraft, welche die entgegengesetzte Richtung hat und deren Betrag:

$$\frac{9}{2} \pi \mu \frac{a_1 a_2}{\sigma r_{12}^2} U \{ 1 - (1 + \sigma r_{12}) e^{-\sigma(r_{12} + x_1^{(2)} - x_1^{(1)})} \}$$

ist.

### 223. Nicht-stationäre Bewegung.

Eine Kugel bewegt sich in einer sonst unbegrenzten Flüssigkeit. Die Bewegung ist stetig und fängt bei  $t = 0$  an. Formeln von Boussinesq. § 10.  $a$  = Radius,  $U_j(t)$  = Geschwindigkeitskomponenten der Kugel,  $\nu = \mu/\varrho$ .

$$K_j = -\frac{2}{3} \pi \varrho a^3 \frac{d U_j(t)}{dt} - 6 \pi \mu a \left\{ U_j(t) + \frac{a}{\sqrt{\pi \nu}} \int_0^t \frac{d U_j(t^{(0)})}{dt^{(0)}} \frac{dt^{(0)}}{\sqrt{t - t^{(0)}}} \right\}.$$

## **Dritter Teil.**

### **Der Grenzübergang zu verschwindender Zähigkeit.**



## Einleitung.

Die Flüssigkeit, welche für uns die weitaus größte Bedeutung hat, ist das Wasser. Der Koeffizient der Zähigkeit  $\mu$  hat für das Wasser einen kleinen Wert (bei  $15^\circ \text{C}$  0,0113). Unter diesen Umständen hat die Frage, wie sich eine Flüssigkeit bei verschwindender Zähigkeit bewegen würde, ein sehr großes Interesse. Es kann scheinen, als ob man diese Frage sofort und ohne Schwierigkeit beantworten könne. In der Tat liegt der Gedanke nahe, den Grenzübergang zu verschwindender Zähigkeit einfach so auszuführen, daß man in den Differentialgleichungen für die Bewegung einer zähen Flüssigkeit  $\mu = 0$  setzt. Man kommt in dieser Weise zu den Eulerschen Differentialgleichungen für die Bewegung einer Flüssigkeit:

$$\varrho \left( \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

zurück. Das Studium dieser Gleichungen hat indessen zu Ergebnissen geführt, die mit den jedermann geläufigen Tatsachen in Widerspruch stehen. Die auf sie begründete Theorie der idealen Flüssigkeit lehrt, daß ein Wirbel niemals in einer Flüssigkeit entstehen kann. Sie lehrt ferner, daß ein starrer Körper, der sich mit konstanter Geschwindigkeit in einer Flüssigkeit bewegt, keinen Widerstand erfährt (das Paradoxon von Euler oder von d'Alembert).

Welcher ist der innere Grund dieses Widerspruches zwischen der hydrodynamischen Theorie und der Erfahrung? Kann er nicht in der Art der Ausführung des Grenzüberganges zu verschwindender Zähigkeit liegen? Es gibt von einem rein mathematischen Gesichtspunkte aus einen Grund, zu bezweifeln, daß man den Grenzübergang in der oben geschilderten einfachen Weise ausführen kann.

Bei Differentialgleichungen hängt der analytische Charakter der Lösungen wesentlich von den Gliedern höchster Differentiationsordnung ab, also bei den Differentialgleichungen für die Bewegung einer zähen Flüssigkeit von den Gliedern der Form  $\frac{\partial u_j}{\partial t}$  (höchste Ableitung in bezug auf  $t$ ),  $\mu \Delta u_j$ ,  $\frac{\partial p}{\partial x_j}$ . Es ist unter diesen Umständen mathe-

matisch nicht ohne weiteres erlaubt, den Grenzübergang in der Weise auszuführen, daß man einfach die mit  $\mu$  behafteten Glieder wegläßt.

Wir werden so zu der Aufgabe geführt, den Grenzübergang zu verschwindender Zähigkeit in exakter Weise auszuführen. Wir schreiben die hydrodynamischen Differentialgleichungen in der uns wohlbekannten Form (vgl. S. 12, I<sup>b</sup>):

$$\varrho \left\{ \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_k \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \right\} = - \frac{\partial q}{\partial x_j} + \mu \Delta u_j, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \\ q = p + \frac{1}{2} \varrho u^2.$$

Wir gehen von einem Zustand aus, in welchem die Flüssigkeit ruht. Anfänglich gibt es also keinen Wirbel in derselben. Wenn die überlieferte Theorie der idealen Flüssigkeiten der Wahrheit entspricht, so würde, wenn  $\mu = 0$  wäre, auch fernerhin kein Wirbel in der Flüssigkeit entstehen können. Nach dieser Theorie behält in der Tat die Zirkulation:

$$\oint u_j dx_j$$

für jede geschlossene, von Partikeln der Flüssigkeit gebildete Kurve einen konstanten, von der Zeit unabhängigen Wert. Wenn anfangs die Zirkulation für jede geschlossene Kurve den Wert Null hat, was insbesondere dann der Fall ist, wenn die Flüssigkeit anfangs ruht, so muß also in jedem Momente für jede geschlossene Kurve die Zirkulation verschwinden. Das ist nur ein anderer Ausdruck dafür, daß die Bewegung wirbellos ist. Wenn jetzt  $\mu$  nicht Null, aber doch sehr klein ist, so treten zu den Eulerschen Differentialgleichungen nur die kleinen Glieder  $\mu \Delta u_j$ . Wir hätten also zu erwarten, daß die Wirbelkomponenten:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

sehr klein sind und daß sie beim Grenzübergange  $\mu \rightarrow 0$  gegen Null konvergieren. Wenn die Wirbelkomponenten klein sind, so sind auch die Größen:

$$\varrho u_k \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$$

klein. Wir begehen dann einen kleinen Fehler, wenn wir in unseren hydrodynamischen Differentialgleichungen jene Glieder vernachlässigen und dieser Fehler muß gleichzeitig mit  $\mu$  gegen Null konvergieren. Sind unsere Voraussetzungen richtig, so müssen wir durch Lösung des Systems:

$$\varrho \frac{\partial u_j}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial x_j} + \mu \Delta u_j, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad q = p + \frac{1}{2} \varrho u^2$$

bei entsprechenden Randbedingungen ein annähernd richtiges Bild der Bewegung bekommen. Wenn dieses Bild bei  $\mu \rightarrow 0$  mit der Theorie der idealen Flüssigkeiten übereinstimmt, so erhält diese Theorie dadurch eine Bestätigung. Wenn dagegen die gefundene Bewegung bei  $\mu \rightarrow 0$  mit irgendeiner der zugrunde gelegten Voraussetzungen nicht übereinstimmt, dann muß mindestens eine jener Voraussetzungen falsch sein. Aber unter unseren Voraussetzungen gibt es nur eine, an welcher wir füglich zweifeln können, eben die, daß bei verschwindender Zähigkeit die Theorie der idealen Flüssigkeiten die Wahrheit trifft. Unsere Methode gibt uns also, soweit dieses theoretisch möglich ist, ein Mittel, zu entscheiden, ob diese Theorie eine physikalische Bedeutung hat oder ob sie nur eine mathematische Fiktion ist.

Unsere Methode besitzt aber nicht nur das oben dargelegte negative Interesse, sondern auch ein nicht geringeres positives Interesse. Es gibt keine andere allgemeine Methode, die hydrodynamischen Differentialgleichungen zu behandeln, als diejenige, welche darin besteht, daß man zunächst die quadratischen Glieder vernachlässigt und nach Lösung der so erhaltenen linearen Gleichungen durch die Methode der sukzessiven Näherungen die anfangs vernachlässigten Glieder berücksichtigt. Auch bei kleinem  $\mu$  ist dies die einzige bis jetzt bekannte mathematisch sichere und zuverlässige Methode, die zu unserer Verfügung steht. Von diesem Gesichtspunkte aus stellt das durch unseren Grenzübergang erhaltene Ergebnis eine erste Näherung der erstrebten, vollständigen Lösung dar. Aus den Widerstandsberechnungen von Zeilon geht nun hervor, daß diese erste Näherung viel mehr ergibt, als man von vornherein erwarten konnte. Die Druckverteilung auf der Vorderseite eines Körpers kommt in den von diesem Forscher behandelten Fällen schon bei dieser ersten Näherung fast genau richtig heraus. Und wenn bei dieser ersten Näherung der Unterdruck auf der Rückseite des Körpers zu groß ausfällt, so kann man, wie Zeilon an dem Beispiel des Kreiszylinders gezeigt hat, durch weiteren Ausbau der Theorie in zweiter Näherung auch in diesem Punkte zu einer fast vollständigen Übereinstimmung mit den Tatsachen gelangen. An dieser Stelle mag schließlich an die schöne Theorie des Magnuseffektes erinnert werden, die Prof. Zeilon in nahem Anschluß an die in diesem Teile entwickelten Gedanken und Methoden gegeben hat. Über die zuletzt erwähnten Arbeiten von Zeilon gibt der Anhang einen Bericht.

## § 23. Ein spezieller Fall. Eine dünne Platte.

### 23.1. Ansatz zur Lösung des Problems im Anschluß an den früheren Ansatz bei dem Ellipsoid.

Wir betrachten in diesem Paragraphen einen speziellen Fall. In einer zähen Flüssigkeit, welche sonst den ganzen Raum einnimmt, bewege sich eine unendlich dünne, ebene Scheibe mit konstanter Geschwindigkeit  $U$  in einer gegen die Scheibe senkrechten Richtung. Wir benutzen ein Bezugssystem, dessen Anfangspunkt auf der Scheibe liegt und sich mit dieser bewegt, und dessen  $x_1$ -Achse mit der Bewegungsrichtung der Scheibe parallel und gleichgerichtet ist. Wir wenden in unserer üblichen Weise für die Geschwindigkeitskomponenten der Flüssigkeit, auf dieses Koordinatensystem bezogen, die Bezeichnungen:  $-U + u_1, u_2, u_3$  an. Zur Bestimmung der Größen  $u_i$  haben wir das System III<sup>b</sup> S. 13:

$$\mu \Delta u_j + \varrho U \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - \frac{\partial q}{\partial x_j} = \varrho u_k \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right), \quad (1)$$

$$q = p + \frac{1}{2} \varrho u^2$$

und die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \quad (2)$$

Wir vernachlässigen die rechten Seiten der Gleichungen (1) und suchen das so erhaltene System:

$$\mu \Delta u_j + \varrho U \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - \frac{\partial q}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3)$$

n dem Grenzfall  $\mu = 0$  zu lösen.

Wir bezeichnen mit  $\xi_1 = 0, \xi_2, \xi_3$  die Koordinaten der Punkte der Scheibe. Wir setzen wie üblich  $\varrho U / 2\mu = \sigma$ . Nach unseren Annahmen ist  $\sigma > 0$ . Wir setzen ferner:

$$r = \sqrt{x_1^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}, \quad s = r + x_1$$

$$\Phi(x - \xi) = \frac{1}{\sigma} \int_0^s \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} da.$$

Die Funktion  $\Phi$  genügt, wie wir Seite 33 gesehen haben, den partiellen Differentialgleichungen:

$$\Delta_x \Phi = \frac{2e^{-\sigma s}}{r}, \quad (4)$$

$$\Delta_x \Phi + 2\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{2}{r}. \quad (5)$$

Wir bezeichnen mit  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  drei Funktionen von  $\xi_2, \xi_3$  und versuchen unser Problem durch den Ansatz (vgl. § 18):

$$\left. \begin{aligned} u_j &= \sigma \left( \delta_{jk} \Delta_x - \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \right) \int_S \varphi_k \Phi(x - \xi) dS_\xi, \\ q &= -\varrho U \int_S \varphi_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r} dS_\xi \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

zu lösen.  $S$  ist hier die Oberfläche der einen Seite, etwa der vorderen Seite der Scheibe.  $dS_\xi = d\xi_1 d\xi_2$  ist ein Element von  $S$ .

## 23 2. Aufstellung von Integro-Differentialgleichungen zur Bestimmung der Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ .

Unser Ansatz (6) genügt wegen (5) den partiellen Differentialgleichungen (3). Die Größen  $u_j$  verschwinden in unendlicher Ferne. Zur Befriedigung der Grenzbedingungen  $u_1 = U, u_2 = u_3 = 0$  an beiden Seiten der Scheibe verfügen wir über die drei Funktionen  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ .

In der ersten Gleichung (6), die wir wegen (4) auch in der Form:

$$u_j = 2\sigma \int_S \varphi_j \frac{e^{-\sigma s}}{r} dS_\xi - \frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \sigma \varphi_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} dS_\xi \quad (7)$$

schreiben können, setzen wir zunächst  $j = 1$ . Wir setzen der Kürze wegen (bemerke hier und im folgenden, daß  $\frac{\partial s}{\partial x_1} = \frac{s}{r}!$ ):

$$\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{1 - e^{-\sigma s}}{r} = P(x_1 - \xi). \quad (8)$$

Wir bemerken, daß, wenn der Punkt  $x_1, x_2, x_3$  sich in der Umgebung des Punktes  $\xi_1 = 0, \xi_2, \xi_3$  befindet, der Ausdruck:

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{\sigma s}{r^2} e^{-\sigma s} - \frac{x_1}{r^3} (1 - e^{-\sigma s})$$

sich wie:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\sigma x_1}{r} = \sigma \left( \frac{1}{r} - \frac{x_1^2}{r^3} \right)$$

verhält, und daß für  $x_1 = 0, r > 0$ :

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{\sigma}{r_0} e^{-\sigma r_0},$$

wo:  $r_0 = [r]_{x_1=0} = \sqrt{(x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$ .

Die Gleichung (7) ergibt unter diesen Umständen, für  $j = 1$ :

$$(u_1)_{x_1=0} = \sigma \int_S \varphi_1 \frac{e^{-\sigma r_0}}{r_0} dS_\xi - \frac{\partial}{\partial x_2} \int_S \varphi_2 P_{x_1=0} dS_\xi - \frac{\partial}{\partial x_3} \int_S \varphi_3 P_{x_1=0} dS_\xi.$$

Zur Bestimmung von  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  erhalten wir so eine erste Gleichung:

$$\sigma \int_S \varphi_1 \frac{e^{-\sigma r_0}}{r_0} dS_\xi - \frac{\partial}{\partial x_2} \int_S \varphi_2 P_{x_1=0} dS_\xi - \frac{\partial}{\partial x_3} \int_S \varphi_3 P_{x_1=0} dS_\xi = U. \quad (9)$$

Sie muß erfüllt sein, wenn der Punkt  $x_1 = 0, x_2, x_3$  im Inneren von  $S$  liegt.

Weitere Gleichungen zur Bestimmung von  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  erhalten wir aus den zwei übrigen Gleichungen (7). Die Grenzbedingungen  $u_2 = u_3 = 0$  an der Scheibe ergeben:

$$\left. \begin{aligned} 2\sigma \int_S \varphi_2(\xi_2, \xi_3) \frac{e^{-\sigma r_0}}{r_0} dS_\xi - \frac{\partial}{\partial x_2} \int_S \sigma \varphi_k \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right]_{x_1=0} dS_\xi = 0, \\ 2\sigma \int_S \varphi_3(\xi_2, \xi_3) \frac{e^{-\sigma r_0}}{r_0} dS_\xi - \frac{\partial}{\partial x_3} \int_S \sigma \varphi_k \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right]_{x_1=0} dS_\xi = 0, \end{aligned} \right\} (10)$$

wenn  $x_1 = 0$  ist und wenn der Punkt  $x_1 = 0, x_2, x_3$  im Inneren der Platte liegt. Wir können die letzten Gleichungen auch in der Form:

$$\left. \begin{aligned} \sigma \int_S \varphi_k(\xi_2, \xi_3) \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right]_{x_1=0} dS_\xi = 4\pi \psi(x_2, x_3), \\ 2\sigma \int_S \varphi_2 \frac{e^{-\sigma r_0}}{r_0} dS_\xi = 4\pi \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad 2\sigma \int_S \varphi_3 \frac{e^{-\sigma r_0}}{r_0} dS_\xi = 4\pi \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \end{aligned} \right\} (11)$$

schreiben.

### 23 3. Vereinfachung der Integro-Differentialgleichungen bei $\mu \rightarrow 0$ .

Die Gleichungen (9), (10) — oder (9), (11) — sind leider zu kompliziert, um eine Lösung in einfacher Form zu gestatten. Zum Glück vereinfachen sie sich wesentlich in eben dem Falle, der für uns das größte Interesse besitzt, dem Grenzfalle  $\mu = 0$ , dies wenigstens dann, wenn wir voraussetzen dürfen, daß beim  $\mu \rightarrow 0$ , also bei  $\sigma \rightarrow \infty$  die Funk-

tionen  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi$  gegen endliche, stetige und differenzierbare Funktionen  $\varphi_1^{(0)}, \varphi_2^{(0)}, \varphi_3^{(0)}, \psi^{(0)}$  konvergieren, und zwar in solcher Weise, daß:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial x_2}, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial x_3}. *$$

Man hat, wenn  $\varphi$  eine stetige Funktion ist und wenn der Punkt  $x_1 = 0, x_2, x_3$  zur Scheibe gehört:

$$\begin{aligned} & \lim_{\mu \rightarrow 0} \sigma \int_S \varphi(\xi_2, \xi_3) \frac{e^{-\sigma r_0}}{r_0} dS_{\xi} = \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \sigma \int_S \int \varphi(x_2 + r_0 \cos \vartheta, x_3 + r_0 \sin \vartheta) e^{-\sigma r_0} dr_0 d\vartheta = \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \sigma \int_{r_0 < \varepsilon} \int \varphi(x_2 + r_0 \cos \vartheta, x_3 + r_0 \sin \vartheta) \varepsilon^{-\sigma r_0} dr_0 d\vartheta = \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \sigma \varphi(x_2, x_3) \int_{r_0 < \varepsilon} \int e^{-\sigma r_0} dr_0 d\vartheta + \\ &+ \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \sigma \int_{r_0 < \varepsilon} \int [\varphi(x_2 + r_0 \cos \vartheta, x_3 + r_0 \sin \vartheta) - \varphi(x_2, x_3)] e^{-\sigma r_0} dr_0 d\vartheta = \\ &= 2\pi \varphi(x_2, x_3). \end{aligned}$$

Dagegen ist:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \sigma \int_S \varphi(\xi_2, \xi_3) \frac{e^{-\sigma r_0}}{r_0} dS_{\xi} = 0,$$

wenn der Punkt  $x_1 = 0, x_2, x_3$  außerhalb von  $S$  liegt. Wir haben ferner:

$$\begin{aligned} & \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_S \varphi(\xi_2, \xi_3) P_{x_1=0} dS_{\xi} = \int \frac{\varphi}{r_0} dS_{\xi} \\ & \lim_{\mu \rightarrow 0} \sigma \int_S \varphi(\xi_2, \xi_3) \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right]_{x_1=0} dS_{\xi} = \int_S \varphi(\xi_2, \xi_3) \frac{x_2 - \xi_2}{r_0^2} dS_{\xi} \end{aligned}$$

usw. Wir bekommen also zur Bestimmung von  $\varphi_1^{(0)}, \varphi_2^{(0)}, \varphi_3^{(0)}, \psi^{(0)}$  die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2^{(0)}(x_2, x_3) &= \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial x_2}, & \varphi_3^{(0)}(x_2, x_3) &= \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial x_3}, \\ 2\pi \varphi_1^{(0)}(x_2, x_3) - \frac{\partial}{\partial x_2} \int_S \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi_2} \frac{dS_{\xi}}{r_0} - \frac{\partial}{\partial x_3} \int_S \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi_3} \frac{dS_{\xi}}{r_0} &= U, \\ 4\pi \psi^{(0)}(x_2, x_3) - \int_S \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi_2} \frac{x_2 - \xi_2}{r_0^2} dS_{\xi} - \int_S \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi_3} \frac{x_3 - \xi_3}{r_0^2} dS_{\xi} - \int_S \varphi_1^{(0)}(\xi_2, \xi_3) \frac{dS_{\xi}}{r_0} &= 0. \end{aligned} \right\} (12)$$

\* Von diesen Voraussetzungen unabhängige Untersuchungen über den Grenzübergang  $\mu \rightarrow 0$  werden in § 26 mitgeteilt.

### 23 4. Vereinfachung der Integro-Differentialgleichungen für die Funktionen $\varphi_1^{(0)}$ und $\psi^{(0)}$ .

Wir wollen annehmen, daß die Funktion  $\psi^{(0)}$  am Rande der Scheibe verschwindet. Wir haben dann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} \int_S \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi_2} dS_{\xi} = - \frac{\partial}{\partial x_2} \int_S \psi^{(0)}(\xi_2, \xi_3) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{1}{r_0} dS_{\xi} = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \int_S \frac{\psi^{(0)}}{r_0} dS_{\xi}, \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \int_S \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi_3} dS_{\xi} = \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \int_S \frac{\psi^{(0)}}{r_0} dS_{\xi}, \\ \int_S \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi_2} \frac{x_2 - \xi_2}{r_0^2} dS_{\xi} + \int_S \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi_3} \frac{x_3 - \xi_3}{r_0^2} dS_{\xi} = \\ = \frac{\partial}{\partial x_2} \int_S \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi_2} \log r_0 dS_{\xi} + \frac{\partial}{\partial x_3} \int_S \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi_3} \log r_0 dS_{\xi} = \\ = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \int_S \psi^{(0)}(\xi_2, \xi_3) \log r_0 dS_{\xi} = 2\pi \psi^{(0)}(x_2, x_3), \end{aligned}$$

wenn der Punkt  $x_2, x_3$  auf  $S$  liegt.

Wir erhalten also zur Bestimmung von  $\varphi_1^{(0)}$  und  $\psi^{(0)}$  die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} 2\pi \varphi_1^{(0)}(x_2, x_3) - \left( \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \int_S \psi^{(0)}(\xi_2, \xi_3) \frac{dS_{\xi}}{r_0} = U, \\ 2\pi \psi^{(0)}(x_2, x_3) - \int_S \varphi_1^{(0)}(\xi_2, \xi_3) \frac{dS_{\xi}}{r_0} = 0. \end{aligned} \right\} (13)$$

Sie müssen erfüllt sein, wenn der Punkt  $x_1 = 0, x_2, x_3$  im Inneren von  $S$  liegt.

### 23 5. Zurückführung der Funktionen $\varphi_1^{(0)}$ und $\psi^{(0)}$ auf eine Potentialfunktion $A$ .

Die Bestimmung der Funktionen  $\varphi_1^{(0)}$  und  $\psi^{(0)}$  aus (13) kann als eine potentialtheoretische Randwertaufgabe aufgefaßt werden. Wir setzen:

$$-\int_S \varphi_1^{(0)}(\xi_2, \xi_3) \frac{dS_{\xi}}{r} + \frac{\partial}{\partial x_1} \int_S \psi^{(0)}(\xi_2, \xi_3) \frac{dS_{\xi}}{r} = A(x_1, x_2, x_3). \quad (14)$$

Die Funktion  $A$  ist eine überall mit Ausnahme der Scheibe reguläre und in unendlicher Ferne verschwindende Lösung der Laplaceschen Gleichung. Ihr Verhalten auf der Scheibe geht aus den Gle-

chungen (13) hervor. Sie zeigen, daß auf derselben\*:

$$\lim_{x_1 = -0} A = \lim_{x_1 = +0} \left\{ - \int_S \frac{x_1}{r^3} \psi^{(0)} dS_\xi - \int_S \varphi_1^{(0)} \frac{dS_\xi}{r} \right\} = \\ = 2\pi \psi^{(0)}(x_2, x_3) - \int_S \varphi_1^{(0)}(\xi_2, \xi_3) \frac{dS_\xi}{r_0} = 0,$$

$$\lim_{x_1 = +0} \frac{\partial A}{\partial x_1} = \lim_{x_1 = +0} \left\{ \int_S \frac{x_1}{r^3} \varphi_1^{(0)} dS_\xi + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \int_S \psi^{(0)} \frac{dS_\xi}{r} \right\} = \\ = 2\pi \varphi_1^{(0)}(x_2, x_3) - \left( \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \int_S \psi^{(0)}(\xi_2, \xi_3) \frac{dS_\xi}{r_0} = U.$$

Wenn wir  $A$  bestimmt haben, so ergeben sich  $\varphi_1^{(0)}$  und  $\psi^{(0)}$  aus den Formeln:

$$\varphi_1^{(0)}(x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi} \left( \left( \frac{\partial A}{\partial x_1} \right)_{x_1=+0} - \left( \frac{\partial A}{\partial x_1} \right)_{x_1=-0} \right) = \\ = \frac{1}{4\pi} \left( U - \left( \frac{\partial A}{\partial x_1} \right)_{x_1=-0} \right) \quad \left. \right| \quad (15)$$

$$\psi^{(0)}(x_2, x_3) = -\frac{1}{4\pi} (A_{x_1=+0} - A_{x_1=-0}) = -\frac{1}{4\pi} A_{x_1=+0}.$$

Die Bestimmung der Funktionen  $\varphi_1^{(0)}$ ,  $\psi^{(0)}$  ist also auf die Bestimmung der Funktion  $A$  zurückgeführt worden.

## 236. Aufstellung einer Greenschen Funktion zur Bestimmung von $A$ .

Wir wollen annehmen, daß wir eine vierwertige Potentialfunktion mit den folgenden Eigenschaften finden können.

1. Ihre Werte werden permutiert, wenn der Punkt  $x$  um die Randkurve der Scheibe eine kleine, geschlossene Kurve beschreibt, welche die Scheibe durchdringt.
2. Sie nimmt auf der Scheibe überall endliche Werte an.
3. Ihre Ableitungen erster Ordnung in bezug auf  $x_1, x_2, x_3$  werden am Rande höchstens derart unendlich, daß sie über eine beliebige Fläche integriert einen endlichen Wert geben.

---

\* Der hier benutzte potentialtheoretische Satz wird selbstverständlich, wenn man bedenkt, daß  $-\frac{x_1}{r^3} dS_\xi$ , bzw.  $+\frac{x_1}{r^3} dS_\xi$  der Raumwinkel ist, unter welchem das Flächenelement  $dS_\xi$  vom Punkte  $x_1, x_2, x_3$  aus gesehen wird. Vgl. übrigens etwa Korn, Potentialtheorie I, S. 74.

4. Sie besitzt einen Zweig, der im Punkte  $y_1, y_2, y_3$  wie:

$$\frac{1}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}}$$

- unendlich wird, während die übrigen Zweige dort regulär bleiben.
5. Sie ist, von diesen Ausnahmen abgesehen, überall regulär und verschwindet in unendlicher Ferne.

$F(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3)$  sei eine Potentialfunktion mit den in 1 bis 5 aufgezählten Eigenschaften.  $F_1, F_2, F_3, F_4$  seien ihre Zweige, wobei wir den Übergang von  $F_j$  zu  $F_{j+1}$  beim Durchgang des Punktes  $x$  durch die Scheibe geschehen lassen.  $F_1$  sei derjenige Zweig, der im Punkte  $y_1, y_2, y_3$  unendlich ist.  $F_{j+1}$  möge endlich aus  $F_j$  dadurch hervorgehen, daß der Punkt  $x_1, x_2, x_3$  eine geschlossene Kurve beschreibt, welche die Scheibe einmal durchdringt und sich ihr dabei von der Seite der negativen  $x_1$ -Achse nähert. Wir haben dann:

$$\left. \begin{aligned} F_j(x_1 = -0, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) &= F_{j+1}(x_1 = +0, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) \\ \lim_{x_1 = -0} \frac{\partial F_j}{\partial x_1} &= \lim_{x_1 = +0} \frac{\partial F_{j+1}}{\partial x_1}. \end{aligned} \right\} (16)$$

Wir betrachten jetzt die Funktion:

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) + F_2(x_1, x_2, x_3; -y_1, y_2, y_3) - \\ &- F_3(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) - F_4(x_1, x_2, x_3; -y_1, y_2, y_3) = \\ &= G(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3). \end{aligned}$$

Wir bemerken, daß wegen der Symmetrie:

$$\left. \begin{aligned} F_1(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) &= F_1(-x_1, x_2, x_3; -y_1, y_2, y_3), \\ F_2(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) &= F_4(-x_1, x_2, x_3; -y_1, y_2, y_3), \\ F_3(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) &= F_3(-x_1, x_2, x_3; -y_1, y_2, y_3). \end{aligned} \right\} (17)$$

Wir haben nach (16) und (17):

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 = -0} F_1(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) &= \lim_{x_1 = -0} F_1(-x_1, x_2, x_3; -y_1, y_2, y_3) = \\ &= \lim_{x_1 = +0} F_1(x_1, x_2, x_3; -y_1, y_2, y_3) = \lim_{x_1 = -0} F_4(x_1, x_2, x_3; -y_1, y_2, y_3). \end{aligned}$$

Ferner:

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 = -0} F_3(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) &= \lim_{x_1 = -0} F_3(-x_1, x_2, x_3; -y_1, y_2, y_3) = \\ &= \lim_{x_1 = +0} F_3(x_1, x_2, x_3; -y_1, y_2, y_3) = \lim_{x_1 = -0} F_2(x_1, x_2, x_3; -y_1, y_2, y_3). \end{aligned}$$

Also:

$$\lim_{x_1 = -0} G = 0.$$

Wir haben ferner nach (16) und (17):

$$\begin{aligned} & \lim_{x_1=+0} \frac{\partial}{\partial x_1} F_2(x_1, x_2, x_3; -y_1, y_2, y_3) = \\ &= \lim_{x_1=-0} \frac{\partial}{\partial x_1} F_1(x_1, x_2, x_3; -y_1, y_2, y_3) = \\ &- \lim_{x_1=+0} \frac{\partial}{\partial x_1} F_1(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3), \\ & \lim_{x_1=+0} \frac{\partial}{\partial x_1} F_4(x_1, x_2, x_3; -y_1, y_2, y_3) = \\ &= \lim_{x_1=-0} \frac{\partial}{\partial x_1} F_3(x_1, x_2, x_3; -y_1, y_2, y_3) = \\ &- \lim_{x_1=+0} \frac{\partial}{\partial x_1} F_3(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3). \end{aligned}$$

Folglich:

$$\lim_{x_1=+0} \frac{\partial G}{\partial x_1} = 0.$$

Wenn wir die Scheibe als undurchdringlich auffassen, so ist  $G$  eine im ganzen Raume eindeutige Lösung der Laplaceschen Gleichung, welche überall mit Ausnahme des Punktes  $y$  regulär ist, während sie dort wie:

$$\frac{1}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}}$$

unendlich wird.  $G$  verschwindet im Unendlichen und genügt an der Scheibe den Bedingungen:

$$G_{x_1=-0} = 0, \quad \left( \frac{\partial G}{\partial x_1} \right)_{x_1=+0} = 0.$$

Wir können unter diesen Umständen  $G$  als Greensche Funktion benutzen, um  $A$  zu bestimmen und wir erhalten:

$$A(x_1, x_2, x_3) = -\frac{U}{4\pi} \int_S G(0, \xi_2, \xi_3; x_1, x_2, x_3) dS_\xi.$$

Man zeigt mit Hilfe des Greenschen Satzes leicht, daß

$$G(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3)$$

in bezug auf die beiden Punkte  $x$  und  $y$  symmetrisch ist. Man hat also auch:

$$A(x_1, x_2, x_3) = -\frac{U}{4\pi} \int_S G(x_1, x_2, x_3; 0, \xi_2, \xi_3) dS_\xi.$$

Da in der Verzweigungskurve  $F_1 = F_2 = F_3 = F_4$  ist, so folgt, daß  $A$  und somit  $\psi^{(0)}$  am Rande verschwinden.

Wir wurden zu der Aufgabe geführt, die Funktion  $F$  zu bestimmen. In einem der interessantesten Fälle ist diese Aufgabe leicht lösbar. Wenn unsere Scheibe kreisförmig ist, kann man die Funktion  $F$  entweder durch ein Sommerfeldsches Integral darstellen oder  $F$  nach Ringfunktionen entwickeln. Man bestätigt leicht, daß  $A$  in diesem Fall auf der Scheibe überall endlich, im Innern derselben beliebig oft differenzierbar ist und am Rande verschwindet. In diesem Falle führt also unsere Methode die Gleichungen (9), (10) — oder (9), (11) — S. 216 bei  $\mu \rightarrow 0$  aufzulösen sicher zum Ziele.

Wir werden später, in § 31 S. 311, einer expliziten Lösung des Problems der kreisförmigen Platte begegnen. Jener Paragraph kann unmittelbar nach diesem gelesen werden. Wir haben ihn nur deswegen an den Schluß gesetzt, um möglichst rasch zu den praktisch wichtigeren Fällen zu kommen.

### 23 7. Untersuchung der Bewegung der Flüssigkeit außerhalb des von der Scheibe durchschrittenen Raumes.

Wir kehren zu den Gleichungen (6) S. 215 zurück. Wir nehmen an, daß es gelungen sei, die Funktionen  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  aus den Gleichungen (9) und (10) zu bestimmen und daß diese Funktionen nebst ihren Ableitungen beim Grenzübergange  $\mu \rightarrow 0$  im Innern der Scheibe gleichmäßig gegen die Funktionen  $\varphi_1^{(0)}, \varphi_2^{(0)}, \varphi_3^{(0)}$  und ihre Ableitungen konvergieren. Wir nehmen überdies an, daß am Rande  $\psi^{(0)} = 0$  ist. Wir wollen unter diesen Voraussetzungen, unter Annahme, daß der Punkt  $x$  sich außerhalb der Scheibe befindet, den Grenzübergang  $\mu \rightarrow 0$  ausführen. Wir haben wegen der Gleichungen (6) S. 215, (12) S. 217 und (14) S. 218:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} q &= -\varrho U \int_S \varphi_k^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r} dS_{\xi} = - \\ &- \varrho U \int_S \left\{ \varphi_1^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} + \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{r} + \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{r} \right\} dS_{\xi} = - \\ &- \varrho U \frac{\partial}{\partial x_1} \int_S \left( \frac{\varphi_1^{(0)}}{r} - \psi^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} \right) dS_{\xi} = \varrho U \frac{\partial A}{\partial x_1}. \end{aligned} \right\} (18)$$

Durch jeden Punkt der Randkurve unserer Scheibe und in einer der Bewegungsrichtung derselben entgegengesetzten Richtung ziehen wir eine Gerade. Wir nehmen zuerst an,

daß der Punkt  $x$  außerhalb des von dieser Geraden erzeugten Zylinders  $Z$  liegt. Wir haben nach (7) S. 215:

$$\left. \begin{aligned} u_j &= 2\sigma \int_S \varphi_j(\xi_2, \xi_3) \frac{e^{-\sigma s}}{r} dS_{\xi} - \\ &- \frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \varphi_k(\xi_2, \xi_3) (1 - e^{-\sigma s}) \frac{\partial \log s}{\partial x_k} dS_{\xi}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Wenn der Punkt  $x$  außerhalb von  $Z$  liegt, so haben wir ferner  $s > 0$  und folglich:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \sigma \int_S \varphi_j(\xi_2, \xi_3) \frac{e^{-\sigma s}}{r} dS_{\xi} = 0, \quad (20)$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \varphi_k(\xi_2, \xi_3) \frac{\partial \log s}{\partial x_k} e^{-\sigma s} dS_{\xi} = 0. \quad (21)$$

Folglich:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} u_j &= - \frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \varphi_k^{(0)}(\xi_2, \xi_3) \frac{\partial \log s}{\partial x_k} dS_{\xi} = \\ &- \frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \frac{\varphi_1^{(0)}}{r} dS_{\xi} - \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_j} \int_S \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi_2} \log s dS_{\xi} - \\ &- \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_j} \int_S \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi_3} \log s dS_{\xi} = \\ &- \frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \frac{\varphi_1^{(0)}}{r} dS_{\xi} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \int_S \psi^{(0)} \log s dS_{\xi}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Dabei wurde unter Berücksichtigung, daß  $\psi^{(0)}$  am Rande verschwindet, partiell integriert.

Die Funktion  $\log s$  ( $s > 0$ ) genügt der Laplaceschen Gleichung  $\Delta_x \log s = 0$ . Wir haben folglich nach (14):

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} u_j &= - \frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \left\{ \frac{\varphi_1^{(0)}}{r} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \log s \cdot \psi^{(0)} \right\} dS_{\xi} = - \\ &- \frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \left\{ \frac{\varphi_1^{(0)}}{r} - \psi^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} \right\} dS_{\xi} = \frac{\partial A}{\partial x_j}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

## 23 8. Untersuchung der Bewegung der Flüssigkeit in dem von der Scheibe durchschrittenen Raume.

Wenn wir zu dem Falle übergehen wollen, daß der Punkt  $x$  innerhalb vom Zylinder  $Z$  liegt, so müssen wir bedenken, daß die Gleichungen (20) und (21) jetzt nicht mehr erfüllt zu sein brauchen,

weil es jetzt im Integrationsbereiche einen Punkt  $\xi_2 = x_2$ ,  $\xi_3 = x_3$  gibt, in welchem  $s$  den Wert Null annimmt. Nur die Umgebung dieses Punktes kann zu den linken Seiten dieser Gleichungen Beiträge geben, die nicht beim Grenzübergange  $\mu \rightarrow 0$  verschwinden. Um den Grenzwert des Integrals:

$$\int_{\substack{\sigma \varphi_j(\xi_2, \xi_3) e^{-\sigma s} \\ (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2 < \varepsilon^2}} dS_{\xi}$$

zu bestimmen, führen wir neue Integrationsvariable ein:

$$\xi_2 = x_2 + \sqrt{\frac{2|x_1|}{\sigma}} a \cos \beta, \quad \xi_3 = x_3 + \sqrt{\frac{2|x_1|}{\sigma}} a \sin \beta.$$

Wenn  $\varepsilon$  genügend klein ist, so können wir mit genügender Annäherung  $r = |x_1|$ ,  $s = \frac{(x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}{2|x_1|} = \frac{a^2}{\sigma}$  setzen.

Wir erhalten so:

$$\int_0^{s\sqrt{\frac{\sigma}{2|x_1|}}} \int_0^{2\pi} \varphi_j \left( x_2 + \sqrt{\frac{2|x_1|}{\sigma}} a \cos \beta, \quad x_3 + \sqrt{\frac{2|x_1|}{\sigma}} a \sin \beta \right) e^{-\alpha s} d\beta.$$

Der Grenzübergang  $\mu \rightarrow 0$ , d. h.  $\sigma \rightarrow \infty$  ergibt:

$$2\pi \varphi_j^{(0)}(x_2, x_3).$$

Um das Integral:

$$\int_S \varphi_k(\xi_2, \xi_3) e^{-\sigma s} \frac{\partial \log s}{\partial x_k} dS_{\xi}$$

bei  $\mu \rightarrow 0$  zu untersuchen, schreiben wir es in der Form:

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \varphi_k(\xi_2, \xi_3) \frac{\partial}{\partial x_k} \int_s^{\infty} \frac{e^{-\sigma a}}{a} da dS_{\xi}.$$

Wir haben:

$$\frac{\partial s}{\partial x_2} = -\frac{\partial s}{\partial \xi_2}, \quad \frac{\partial s}{\partial x_3} = -\frac{\partial s}{\partial \xi_3}.$$

Durch partielle Integrationen können wir deshalb unser Integral so umformen, daß neben Randintegralen, welche über den Kreis  $(\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2 = \varepsilon^2$  zu erstrecken sind und also für  $\sigma \rightarrow \infty$  verschwinden, nur Integrale von den folgenden drei Typen vorkommen:

$$\int_K \tilde{\varphi}(\xi_2, \xi_3) \int_s^{\infty} \frac{e^{-\sigma a}}{a} da dS_{\xi},$$

$$\int_K \tilde{\varphi}(\xi_2, \xi_3) \frac{\partial}{\partial x_1} \int_s^{\infty} \frac{e^{-\sigma s}}{a} da dS_{\xi} = - \int_K \tilde{\varphi}(\xi_2, \xi_3) \frac{e^{-\sigma s}}{r} dS_{\xi},$$

$$\int_K \tilde{\varphi}(\xi_2, \xi_3) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \int_s^{\infty} \frac{e^{-\sigma s}}{a} da dS_{\xi} = - \int_K \tilde{\varphi}(\xi_2, \xi_3) \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{e^{-\sigma s}}{r} dS_{\xi}.$$

$K$  ist hier eine Abkürzung für:  $(\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2 < \varepsilon^2$ . Man zeigt leicht unter Berücksichtigung der Tatsache, daß  $r$  oberhalb einer positiven Grenze liegt, daß alle drei Integrale bei  $\mu \rightarrow 0$  verschwindende Grenzwerte haben. Wenn der Punkt  $x$  innerhalb des Zylinders  $Z$  liegt, so haben wir also:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \sigma \int_S \varphi_j(\xi_2, \xi_3) \frac{e^{-\sigma s}}{r} dS_{\xi} = 2\pi \varphi_j^{(0)}(x_2, x_3), \quad (20')$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \varphi_k(\xi_2, \xi_3) e^{-\sigma s} \frac{\partial \log s}{\partial x_k} dS_{\xi} = 0. \quad (21')$$

Wir haben schließlich unter unserer jetzigen Voraussetzung, daß der Punkt  $x$  innerhalb vom Zylinder  $Z$  liegt, den Grenzwert des Gliedes:

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \varphi_k(\xi_2, \xi_3) \frac{\partial \log s}{\partial x_k} dS_{\xi}$$

rechts in (19) zu bestimmen. Man sieht leicht, daß die Gleichung (22):

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} -\frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \varphi_k(\xi_2, \xi_3) \frac{\partial \log s}{\partial x_k} dS_{\xi} = \\ -\frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \frac{\varphi_1^{(0)}}{r} dS_{\xi} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \int_S \psi^{(0)} \log s dS_{\xi} \end{aligned}$$

immer noch gültig ist. Wir haben folglich:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} -\frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \varphi_k(\xi_2, \xi_3) \frac{\partial \log s}{\partial x_k} dS_{\xi} = \\ -\frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \frac{\varphi_1^{(0)}}{r} dS_{\xi} + \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_1} \int_S \psi^{(0)} \frac{\partial \log s}{\partial x_1} dS_{\xi} - \\ -\frac{\partial}{\partial x_j} A_x \int_S \psi^{(0)}(\xi_2, \xi_3) \log s dS_{\xi} = \\ = \frac{\partial A}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} A_x \int_S \psi^{(0)}(\xi_2, \xi_3) \log s dS_{\xi}. \end{aligned} \right\} (24)$$

Zur Bestimmung des letzten Gliedes in (24) betrachten wir das Integral:

$$J = \int_{-l}^0 d\xi_1 \int_S \frac{\psi^{(0)}(\xi_2, \xi_3) dS_{\xi}}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}}.$$

Wir haben (wenn  $\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2} = \sqrt{(x_k - \xi_k)^2}$  gesetzt wird):

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \log \{ \sqrt{(x_k - \xi_k)^2} + x_1 - \xi_1 \} = - \frac{1}{\sqrt{(x_k - \xi_k)^2}}.$$

Wir haben demzufolge:

$$\begin{aligned} J &= - \int_S \psi^{(0)}(\xi_2, \xi_3) \log s dS_{\xi} + \\ &+ \int_S \psi^{(0)}(\xi_2, \xi_3) \log \{ \sqrt{(x_1 + l)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2} + x_1 + l \} dS_{\xi} = \\ &= - J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Nach unseren Annahmen ist  $x_1$  eine negative Größe. Wir wählen jetzt die positive Größe  $l$  so groß, daß  $l + x_1$  positiv ausfällt. Wir haben dann:

$$\Delta_x J_2 = 0.$$

Folglich:

$$\Delta_x J_1 = - \Delta_x J.$$

Nun läßt sich  $J$  als das Newtonsche Potential von Massen auffassen, welche hinter der Scheibe liegen. Ihre Raumdichte ist  $\psi^0(\xi_2, \xi_3)$ . Wir haben folglich:

$$\Delta_x J = - 4\pi \psi^{(0)}(x_2, x_3)$$

und also:

$$\Delta_x \int_S \psi^{(0)}(\xi_2, \xi_3) \log s dS_{\xi} = \Delta_x J_1 = 4\pi \psi^{(0)}(x_2, x_3). \quad (25)$$

Aus (19), (20'), (21'), (24) und (25) folgt wegen der ersten Gleichungen (12):

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} u_1(x_1, x_2, x_3) &= 4\pi \varphi_1^{(0)}(x_2, x_3) + \frac{\partial A}{\partial x_1}, \\ \lim_{\mu \rightarrow 0} u_2(x_1, x_2, x_3) &= \frac{\partial A}{\partial x_2}, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} u_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial A}{\partial x_3}, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

wenn der Punkt  $x_1, x_2, x_3$  sich in dem von der Scheibe durchschrittenen Bereich befindet. — Wegen der Beziehungen (15) und wegen

$$A = \frac{\partial A}{\partial x_2} = \frac{\partial A}{\partial x_3} = 0 \text{ für } x_1 = -0$$

gilt also für die Geschwindigkeit in dem von der Scheibe durchschrittenen Raum:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} u_1 &= \frac{\partial A}{\partial x_1} - \left( \frac{\partial A}{\partial x_1} \right)_{x_1=-0} + U, & \lim_{\mu \rightarrow 0} u_2 &= \frac{\partial A}{\partial x_2} - \left( \frac{\partial A}{\partial x_2} \right)_{x_1=-0}, \\ \lim_{\mu \rightarrow 0} u_3 &= \frac{\partial A}{\partial x_3} - \left( \frac{\partial A}{\partial x_3} \right)_{x_1=-0}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Diese Formeln zeigen sofort, daß die Flüssigkeit auch bei verschwindender Zähigkeit an der Rückseite der Scheibe haftet.

### 23 9. Zusammenfassung.

Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen:

In einer zähen Flüssigkeit, welche sonst den ganzen Raum erfüllt, bewegt sich eine ebene Scheibe mit konstanter Geschwindigkeit (Komponenten  $U_1, U_2, U_3$ ) in einer gegen die Scheibe senkrechten Richtung. Es wird angenommen, daß die Bewegung der Flüssigkeit stationär ist und den Gleichungen:

$$\mu \Delta u_j + \varrho U_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial q}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

gehorcht. Bei  $\mu \rightarrow 0$  erhalten wir unter diesen Umständen für  $u_j$  und  $q$  die folgenden Ausdrücke:

In dem von der Scheibe nicht durchschrittenen Bereiche:

$$u_j = \frac{\partial A}{\partial x_j}.$$

In dem von der Scheibe durchschrittenen Bereiche:

$$u_j = \frac{\partial A}{\partial x_j} - \left( \frac{\partial A}{\partial x_j} \right)_h + U_j.$$

$\left( \frac{\partial A}{\partial x_j} \right)_h$  bezeichnet hier den Wert, den  $\frac{\partial A}{\partial x_j}$  in demjenigen Punkte der Rückseite der Scheibe annimmt, in welchem diese von einer durch den Punkt  $x_1, x_2, x_3$  gezogenen, mit der Geschwindigkeit ( $U$ ) der Scheibe parallelen Geraden getroffen wird.

$A$  ist eine außerhalb der Scheibe reguläre und in unendlicher Ferne verschwindende Lösung der Laplaceschen Gleichung:

$$\Delta A = 0.$$

An der Scheibe genügt  $A$  den Bedingungen:

an der Vorderseite:

$$\frac{dA}{dn} = U_n,$$

wenn  $n$  die nach außen gezogene Normale der Scheibe ist; auf der Rückseite:

$$A = 0.$$

Qualitativ können wir diese Ergebnisse in dem folgenden Satze zusammenfassen: Bei dem Grenzübergange  $\mu \rightarrow 0$  tritt in der Flüssigkeit eine Diskontinuitätsfläche auf. Diese Fläche ist ein Zylinder, der von der Randkurve der Scheibe ausgeht und sich in der Richtung erstreckt, welche der Bewegungsrichtung der Scheibe entgegengesetzt ist. Außerhalb dieser Fläche gehorcht die Bewegung den Gesetzen für die wirbellose Bewegung einer idealen Flüssigkeit. Innerhalb derselben herrschen andere Gesetze. Über die wirbellose Bewegung ist hier eine Wirbelbewegung überlagert, welche von dem Gliede  $\left(\frac{\partial A}{\partial x_j}\right)_n$  herrührt. Die Flüssigkeit gleitet an der Vorderseite der Scheibe, sie haftet an der Rückseite.

Mit der Theorie der idealen Flüssigkeiten stehen unsere Ergebnisse in schroffem Widerspruch. Dagegen stimmen sie, wenigstens qualitativ, gut mit den Tatsachen überein. Wir schließen hieraus, daß die paradoxen Resultate der Theorie der idealen Flüssigkeiten auf der unrichtigen Durchführung des Grenzüberganges zu verschwindender Zähigkeit beruhen.

## § 24. Allgemeinere Untersuchungen.

### 24.1. Aufgabestellung. Ansatz zur Lösung auf Grund des § 5.

Im vorigen Paragraphen haben wir uns mit einem sehr speziellen Falle beschäftigt. In diesem Paragraphen wenden wir uns allgemeineren Betrachtungen zu. Wir nehmen an, daß ein Körper sich in irgendeiner Weise in einer Flüssigkeit bewegt. Wir brauchen nicht vorauszusetzen, daß der Körper starr ist. Was wir voraussetzen, ist nur, daß eine Flüssigkeit, die sonst den ganzen Raum erfüllt, nach innen von einer, im allgemeinen von der Zeit abhängigen Fläche  $S(t)$  begrenzt wird, auf welcher die Geschwindigkeitskomponenten  $u_j$  vorgeschriebene Werte annehmen sollen. Wir nehmen an, daß das ganze System für  $t < t_0$  ruht. Bei  $t = t_0$  fängt die Bewegung an. Wir stellen uns die Aufgabe, die Bewegung der Flüssigkeit für  $t > t_0$  unter Vernachlässigung der quadratischen Glieder und im Grenzfalle  $\mu \rightarrow 0$  zu

berechnen. Wir müssen dabei, wegen der Unzusammendrückbarkeit der Flüssigkeit, mit der Möglichkeit rechnen, daß die ganze Flüssigkeit bei  $t = t_0$  sich auf einmal zu bewegen anfängt. Wir setzen voraus, daß eine derartige, momentan einsetzende Bewegung wirbellos ist. Wir stellen uns also die Aufgabe, für  $t \geq t_0$  und für  $\mu \rightarrow 0$  das System:

$$\varrho \frac{\partial u_j}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial x_j} + \mu \Delta u_j, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

mit den Nebenbedingungen: auf  $S(t) : u_j = v_j(S, t)$ ; in unendlicher Ferne:  $u_j = 0$ ; für  $t = t_0$ :  $\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = 0$ , ( $j, k = 1, 2, 3$ ) zu lösen.

Der Behandlung unseres Problems legen wir einige Annahmen betrifft der Fläche  $S(t)$  und der Funktionen  $v_j(S, t)$  zugrunde. Wir nehmen zunächst an, daß  $S(t)$  stetige Tangentenebenen besitzt. Wir betrachten jetzt einen beliebigen Punkt  $Q$  von  $S(t)$ . Wir beziehen die Fläche in der Umgebung von  $Q$  auf ein Bezugssystem  $x'_1, x'_2, x'_3$ , dessen Anfangspunkt der Punkt  $Q$  ist, dessen  $x'_3$ -Achse längs der nach außen gezogenen Normale der Fläche im Punkte  $Q$  fällt und dessen  $x'_1$ - und  $x'_2$ -Achsen zwei gegeneinander senkrechte Tangenten von  $S(t)$  in  $Q$  sind. Wir schreiben die Gleichung der Fläche  $S(t)$  in der Form:

$$x'_3 = F(x'_1, x'_2, t)$$

und wir nehmen an, daß die Funktion  $F$  in der Umgebung des Punktes  $Q$  stetige Ableitungen der drei ersten Ordnungen in bezug auf  $x'_1, x'_2, t$  besitzt. Wir nehmen ferner an, daß die Funktionen  $v_j(S, t)$  sich in der Umgebung von  $Q$  als zweimal stetig differenzierbare Funktionen von  $x'_1, x'_2, t$  darstellen lassen.

Um unsere Aufgabe zu lösen, gehen wir von den in § 5 gewonnenen Ergebnissen aus. Sie zeigen, daß wir durch den folgenden Ansatz eine außerhalb von  $S(t)$  und für  $t \geq t_0$  gültige Lösung des Systems (1) erhalten:

$$\left. \begin{aligned} u_j(P, t) &= \int_0^t d\tau \int_{S(\tau)} h_k(Q, \tau) u_{jk}(P, Q; t - \tau) dS_Q + \frac{\partial \psi}{\partial x_j}, \\ q(P, t) &= -\sqrt{\mu \varrho \pi} \int_{S(t)} h_k(Q, t) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r} dS_Q - \varrho \frac{\partial \psi}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$x_1, x_2, x_3$  sind hier die Koordinaten des Punktes  $P$  in einem festen, rechtwinkligen Bezugssysteme. Die Koordinaten des Punktes  $Q$  im selben System werden wir mit  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  bezeichnen. Wir haben ferner:

$$\left. \begin{aligned} u_{jk}(P, Q; t - \tau) &= -\delta_{jk} \Delta \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k}, \\ \Phi &= \frac{1}{r} \int_0^r E(a, t - \tau) da, \\ r^2 &= (x_j - \xi_j)^2, \quad r \geq 0; \quad E(a, t - \tau) = \frac{e^{-\frac{\rho a^2}{4\mu(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$\psi$  ist eine Lösung der Laplaceschen Gleichung:

$$\Delta \psi = 0.$$

Unsere Aufgabe ist, die Funktion  $h_k(Q, \tau)$  und die Potentialfunktion  $\psi$  so zu bestimmen, daß bei verschwindendem  $\mu$  die Grenzbedingungen erfüllt werden. Wir werden dabei annehmen, daß die Funktionen  $h_k$  in bezug auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit dieselben Eigenschaften haben, welche wir oben für die Funktionen  $v_j(S, t)$  angenommen haben.

## 24 2. Vorläufige Zerlegung des Flächenintegrals in zwei Summanden $\mathcal{J}_{j\sigma}^{(1)}$ und $\mathcal{J}_{j\sigma}^{(2)*}$ .

Wir betrachten jetzt ein beliebiges Element  $\sigma(\tau)$  der Fläche  $S(\tau)$  und bilden das Integral:

$$\begin{aligned} J_{j\sigma} &= \int_{\sigma(\tau)} h_k(Q, \tau) u_{jk}(P, Q, t - \tau) dS_Q = \\ &= \int_{\sigma(\tau)} h_j(Q, \tau) \Delta \Phi dS_Q + \int_{\sigma(\tau)} h_k \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k} dS_Q = \mathcal{J}_{j\sigma}^{(1)} + \mathcal{J}_{j\sigma}^{(2)}. \end{aligned}$$

Wir haben, da  $\Phi$  nur von  $r$  und  $t - \tau$  abhängt:

$$\mathcal{J}_{j\sigma}^{(2)} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\sigma(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \Phi dS_Q.$$

Wir betrachten einen bestimmten Punkt  $\bar{Q}$  des Flächenelementes  $\sigma(\tau)$ .  $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3$  seien die Koordinaten desselben im festen Bezugssysteme. Dem Punkte  $\bar{Q}$  entspricht in der oben dargelegten Weise ein Bezugssystem  $x'_1, x'_2, x'_3$  — und  $\bar{\xi}'_1, \bar{\xi}'_2, \bar{\xi}'_3$  — dessen  $x'_3$ - (oder  $\xi'_3$ -) Achse mit der im Punkte  $Q$  nach außen gezogenen Normal der Fläche  $S(\tau)$  zusammenfällt. Die Beziehungen zwischen den Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$

---

\* Die Abteilungen 242—246 behandeln das Verhalten der Flächenintegrale in (2) bei  $\mu \rightarrow 0$ .

und den Koordinaten  $x_1', x_2', x_3'$  desselben Punktes mögen durch die Gleichungen:

$$x'_j = a_{jk} (x_k - \xi_k), \quad a_{jk} a_{jl} = \delta_{kl}$$

ausgedrückt sein. Wir haben dann ebenso:

$$\xi'_j = a_{jk} (\xi_k - \bar{\xi}_k).$$

Wir haben ferner, wenn wir mit  $h'_j$  die Komponente des Vektors  $h_1, h_2, h_3$  längs der  $x'_j$ -Achse bezeichnen:

$$h'_j = a_{jk} h_k, \quad h_j \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_j} = h'_j \frac{\partial \Phi}{\partial \xi'_j},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_k} = - a_{kj} \frac{\partial}{\partial \xi'_k}.$$

Also:

$$\mathcal{J}_{j\sigma}^{(2)} = \int_{\sigma(\tau)} h'_k a_{lj} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi'_k \partial \xi'_l} dS_Q.$$

### 243. Definitive Zerlegung des Flächenintegrals in zwei Summanden $J_{j\sigma}^{(1)}$ und $J_{j\sigma}^{(2)}$ .

Wir zerlegen  $\mathcal{J}_{j\sigma}^{(2)}$  in zwei Teile. Einen Teil:

$$\int_{\sigma(\tau)} h'_3 a_{3j} \Delta \Phi dS_Q = \int_{\sigma(\tau)} h_n \cos(n x_j) \Delta \Phi dS_Q$$

führen wir mit  $\mathcal{J}_{j\sigma}^{(1)}$  zusammen und bilden aus diesen beiden Ausdrücken ein Glied:

$$\mathcal{J}_{j\sigma}^{(1)} = - \int_{\sigma(\tau)} [h_j - h_n \cos(n x_j)] \Delta \Phi dS_Q. \quad (4)$$

Den übrigen Teil von  $\mathcal{J}_{j\sigma}^{(2)}$  nennen wir  $J_{j\sigma}^{(2)}$  und haben dann:

$$\left. \begin{aligned} J_{j\sigma}^{(2)} &= \int_{\sigma(\tau)} \left\{ h'_k a_{lj} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi'_k \partial \xi'_l} - h'_3 a_{3j} \Delta \Phi \right\} dS_Q = \\ &= \int_{\sigma(\tau)} \left\{ h'_1 a_{lj} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi'_1 \partial \xi'_l} + h'_2 a_{lj} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi'_2 \partial \xi'_l} + \right. \\ &\quad \left. + h'_3 \left[ a_{1j} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi'_1 \partial \xi'_3} + a_{2j} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi'_2 \partial \xi'_3} - a_{3j} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi'_1{}^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi'_2{}^2} \right) \right] \right\} dS_Q. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

#### 24.4. Das Verhalten des Integrales $J_{j\sigma}^{(1)}$ bei kleinem $\mu$ .

Wir betrachten zuerst das Integral  $J_{j\sigma}^{(1)}$ . Wir haben:

$$\Delta \Phi = -\frac{\varrho}{2\mu} \frac{e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}}.$$

Also:

$$J_{j\sigma}^{(1)} = \int_{\sigma(\tau)} (h_j - h_n \cos(nx_j)) \frac{\varrho}{2\mu} \frac{e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}} dS_Q.$$

Die Funktion:

$$|\Delta \Phi| = \frac{\varrho}{2\mu} \frac{e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}}$$

konvergiert beim Grenzübergange  $\mu \rightarrow 0$ , wenn  $r > \delta > 0$  ist, gleichmäßig gegen Null. Auch die Funktion:

$$\mu^{-p} |\Delta \Phi|,$$

wo  $p$  irgendeine positive Zahl ist, konvergiert, wenn  $r > \delta > 0$  ist, bei  $\mu \rightarrow 0$  gegen Null. Wenn beim Grenzübergange  $\mu \rightarrow 0$  die Funktionen  $h_j$  selbst oder die Produkte dieser Funktionen mit irgendeiner positiven Potenz von  $\mu$  endlich bleiben, so konvergiert also das Integral  $J_{j\sigma}^{(1)}$  bei diesem Grenzübergange gegen Null, sofern nicht das Flächenelement  $\sigma(\tau)$  den Punkt  $P$  enthält.

Wir betrachten jetzt den Fall, daß  $P$  in der Nähe von  $\sigma(\tau)$  liegt. Wir nehmen an, daß eine Normale von  $P$  auf  $\sigma(\tau)$  dieses Flächenstück in  $P^{(0)}$  trifft und daß  $PP^{(0)}$  die kürzeste Entfernung von  $P$  nach  $\sigma(\tau)$  ist. Wir setzen die Entfernung  $PP^{(0)} = d$ , wobei also  $d$  eine positive Größe ist. Wir benutzen das Bezugssystem, welches nach der oben dargelegten Regel dem Punkte  $P^{(0)}$  entspricht. Die Koordinaten des Punktes  $P$  in diesem Bezugssystem sind:  $x_1' = 0, x_2' = 0, x_3' = d$  und wir haben folglich:

$$r^2 = (x_j - \xi_j)^2 = (x'_j - \xi'_j)^2 = \xi_1'^2 + \xi_2'^2 + (d - \xi_3')^2$$

Wenn wir speziell zu  $x_1'$ - und  $x_2'$ -Achsen die Tangenten der Krümmungslinien der Fläche  $S(\tau)$  im Punkte  $P^{(0)}$  wählen, so haben wir:

$$\begin{aligned} \xi_3' &= \frac{\xi_1'^2}{2R_1} + \frac{\xi_2'^2}{2R_2} + \frac{1}{6} \sum_{jkl} F_{jkl}(\Theta \xi_1', \Theta \xi_2') \xi'_j \xi'_k \xi'_l, \\ 0 \leq \Theta &\leq 1, j, k, l = 1 \text{ oder } 2, \quad F_{jkl} = \frac{\partial^3 F}{\partial \xi'_j \partial \xi'_k \partial \xi'_l}. \end{aligned}$$

$|R_1|$  und  $|R_2|$  sind die Hauptkrümmungsradien der Fläche  $S(\tau)$  im Punkte  $P^{(0)}$ . Wir nehmen an, daß  $d < |R_1|, d < |R_2|$  ist. Wir führen

in unserem Ausdruck für  $r^2$  den obigen Wert von  $\xi_3'$  ein und bekommen:

$$r^2 = \left(1 - \frac{d}{R_1}\right) \xi_1'^2 + \left(1 - \frac{d}{R_2}\right) \xi_2'^2 + d^2 + \xi_3'^2 - \frac{1}{3} d F_{jkl} \xi_j' \xi_k' \xi_l'.$$

Wir betrachten jetzt die Funktion:

$$\frac{\varrho}{2\mu} \frac{e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}} = \frac{\varrho}{2\mu} \frac{E(r, t-\tau)}{t-\tau}$$

und bemerken, daß diese Funktion für  $\mu(t-\tau) \rightarrow 0$  für alle  $r$  wie eine Exponentialfunktion verschwindet mit Ausnahme von denjenigen, welche von der Größenordnung  $\sqrt{\mu(t-\tau)}$  sind, d. h. genauer ausgedrückt in der ganzen  $\xi_1' \xi_2'$ -Ebene mit Ausnahme von demjenigen Teile, in dem  $\xi_1'$  und  $\xi_2'$  von der Größenordnung

$$\sqrt{\frac{4\mu(t-\tau)}{\varrho}}$$

sind.

Wir führen den soeben gefundenen Wert von  $r^2$  ein und erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{\varrho}{2\mu} \frac{E(r, t-\tau)}{t-\tau} &= \frac{\varrho}{2\mu(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{\varrho}{4\mu(t-\tau)} \left\{ \left(1 - \frac{d}{R_1}\right) \xi_1'^2 + \left(1 - \frac{d}{R_2}\right) \xi_2'^2 + d^2 \right\}} \cdot \\ &\quad \cdot \left\{ 1 - \frac{\varrho}{4\mu(t-\tau)} \left( \xi_3'^2 - \frac{1}{3} d \sum_{\substack{j, k, l \\ = 1 \text{ oder } 2}} F_{jkl} \xi_j' \xi_k' \xi_l' \right) + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Wir haben ferner:

$$[h_j - h_n \cos(n x_j)]_Q = [h_j - h_n \cos(n x_j)]_{P(\vartheta)} + \sum_{k=1,2} h_j^{(k)} \xi_k',$$

$$dS_Q = \frac{d\xi_1' d\xi_2'}{\cos(n_Q x_3')} = d\xi_1' d\xi_2' \left( 1 + \sum_{\substack{j, k \\ = 1 \text{ oder } 2}} g_{jk} \xi_j' \xi_k' \right).$$

$F_{jkl}, h_j^{(k)}, g_{jk}$  sind Funktionen von  $\xi_1', \xi_2'$  und von  $\tau$ . Wenn wir  $\sigma(\tau)$  genügend klein wählen, so gibt es für die absoluten Beträge aller dieser Funktionen endliche Grenzwerte, welche nicht überschritten werden, so lange der Punkt  $P$  innerhalb von  $\sigma(\tau)$  bleibt.

Wir kehren zu unserem Integral  $J_{j\sigma}^{(1)}$  zurück. Die gefundenen Ausdrücke der in  $J_{j\sigma}^{(1)}$  eingehenden Größen zeigen, daß das Hauptglied (wenn  $\mu$  und  $d$  klein sind) dieses Integrales in der Form:

$$[h_j - h_n \cos(nx_j)]_{P(0)} \frac{e^{-\frac{\varrho d^2}{4\mu(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} \cdot \\ \int \int \frac{\varrho}{2\mu(t-\tau)} e^{-\frac{\varrho}{4\mu(t-\tau)} \left\{ \left(1 - \frac{d}{R_1}\right) \xi_1'^2 + \left(1 - \frac{d}{R_2}\right) \xi_2'^2 \right\}} d\xi_1' d\xi_2'$$

geschrieben werden kann. Wenn wir in dem hier auftretenden Integral die Integration über die ganze  $\xi_1' \xi_2'$ -Ebene ausdehnen, so begehen wir einen Fehler, der um so kleiner ist, je kleiner  $\mu$  ist, und der bei  $\mu \rightarrow 0$  verschwindet. Wir können also, wenn wir einen bei  $\mu \rightarrow 0$  verschwindenden Fehler vernachlässigen:

$$\int \int \frac{\varrho}{2\mu(t-\tau)} e^{-\frac{\varrho}{4\mu(t-\tau)} \left\{ \left(1 - \frac{d}{R_1}\right) \xi_1'^2 + \left(1 - \frac{d}{R_2}\right) \xi_2'^2 \right\}} d\xi_1' d\xi_2' = \\ = \frac{2\pi}{\left(1 - \frac{d}{R_1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{d}{R_2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

setzen. Für das Hauptglied von  $J_{j\sigma}^{(1)}$  erhalten wir so den Ausdruck:

$$2\pi [h_j - h_n \cos(nx_j)]_{P(0)} \frac{(1 + \varepsilon(\mu)) e^{-\frac{\varrho d^2}{4\mu(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{d}{R_1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{d}{R_2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Dabei ist:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \varepsilon(\mu) = 0.$$

Wir betrachten jetzt die übrigen Glieder in  $J_{j\sigma}^{(1)}$ . Sie enthalten alle den Faktor  $E(d, t-\tau)$ . Dieser Faktor ist mit einem Integral vom Typus:

$$\int \int \frac{\varrho G}{2\mu(t-\tau)} e^{-\frac{\varrho}{4\mu(t-\tau)} \left\{ \left(1 - \frac{d}{R_1}\right) \xi_1'^2 + \left(1 - \frac{d}{R_2}\right) \xi_2'^2 \right\}} d\xi_1' d\xi_2'$$

multipliziert. Hier ist  $G$  eine Funktion von  $\xi_1'$ ,  $\xi_2'$  und  $\tau$ , welche als Faktor eine der Größen:

$$\xi_1', \xi_2', \frac{\varrho d \xi_1'^3}{4\mu(t-\tau)}, \dots, \frac{\varrho \xi_1'^4}{4\mu(t-\tau)}, \dots$$

enthält. Da nun für kleine  $\mu$ - und  $d$ -Werte nur die unmittelbare Umgebung des Punktes  $P(0)$ , d. h. des Punktes  $\xi_1' = 0, \xi_2' = 0$  einen merklichen Beitrag zum obigen Integrale gibt, so folgt, wenn wir annehmen dürfen, daß die übrigen Faktoren von  $G$  von derselben Größenordnung wie  $[h_j - h_n \cos(nx_j)]_{P(0)}$  sind, daß diejenigen Beiträge zu dem Wert von  $J_{j\sigma}^{(1)}$ , welche wir aus diesen übrigen Gliedern erhalten, neben dem

Hauptgliede klein sind und daß der Fehler, den wir durch Vernachlässigung dieser Glieder begehen, bei  $\mu \rightarrow 0$  verschwindet. Für kleine  $d$ -Werte können wir ferner  $d/R_1$  und  $d/R_2$  neben 1 vernachlässigen. Wir erhalten so, für kleine  $\mu$ - und  $d$ -Werte, annähernd:

$$J_{j\sigma}^{(1)} = 2\pi[h_j - h_n \cos(nx_j)]E(d, t - \tau). \quad (6)$$

Wenn  $d > 0$  ist, so können wir bei  $\mu \rightarrow 0$  stets  $J_{j\sigma}^{(1)} = 0$  setzen.

**245. Beweis, daß  $\lim_{\mu \rightarrow 0} J_{j\sigma}^{(2)} = 0$ , wenn bei  $\mu \rightarrow 0$  die Funktionen  $h_j$  endlich bleiben.**

Wir gehen zu  $J_{j\sigma}^{(2)}$  über. Wir setzen wieder:

$$dS_Q = \frac{d\xi'_1 d\xi'_2}{\cos(n_Q x'_3)}$$

und formen unseren Ausdruck (5) durch partielle Integrationen in bezug auf  $\xi'_1$  und  $\xi'_2$  um. Wir erhalten so eine Summe von einem doppelten und einem über die Randkurve des Integrationsbereiches erstreckten einfachen Integral. Die Integranden dieser Integrale bestehen aus Gliedern, die entweder  $\Phi$  oder eine Ableitung erster Ordnung von  $\Phi$  enthalten. Insbesondere enthalten die Glieder des Doppelintegrals entweder  $\Phi$  oder  $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi'_3}$ . Nun haben wir:

$$\Phi = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}} \int_0^{\frac{r\sqrt{\varrho}}{\sqrt[2]{\mu(t-\tau)}}} e^{-a^2} da.$$

Für kleine  $\mu$ -Werte haben wir also annähernd:

$$\Phi = \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \cdot \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_j} = \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \frac{e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} \frac{\partial r}{\partial \xi_j}.$$

Wenn  $Q$  ein Punkt des Randes ist und  $P$  außerhalb von  $\sigma(\tau)$  liegt oder ein innerer Punkt von  $\sigma(\tau)$  ist, so gibt es ein solches  $\delta$ , daß  $r > \delta > 0$  ist. Die Funktion  $\Phi$  und ihre Ableitungen erster Ordnung konvergieren also bei  $\mu \rightarrow 0$  auf der Randkurve gleichmäßig gegen Null. Aber auch das Doppelintegral hat den Grenzwert Null, wie man sofort sieht, wenn man bedenkt, daß für  $r = 0$ :

$$\frac{d}{d\xi'_3} \frac{1}{r} = \frac{d}{dn_P} \frac{1}{r}, \quad \frac{dr}{d\xi'_3} = \cos(n_P r) = 0.$$

Wir schließen hieraus, daß, wenn beim Grenzübergange  $\mu \rightarrow 0$  die Funktionen  $h_j$  endlich bleiben, stets:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} J_{j\sigma}^{(2)} = 0, \quad (7)$$

sei es, daß der Punkt  $P$  außerhalb von  $\sigma(\tau)$  oder auf  $\sigma(\tau)$  liegt.

#### 246. Untersuchung des Verhaltens von $J_{j\sigma}^{(2)}$ , wenn bei $\mu \rightarrow 0$ die Funktionen $\sqrt{\mu} h_j$ endlich bleiben.

Es ist für das folgende notwendig zu wissen, wie sich  $J_{j\sigma}^{(2)}$  beim Grenzübergange verhält, wenn dabei nicht die Funktionen  $h_j$  selbst, wohl aber die Produkte  $\sqrt{\mu} h_j$  endlich bleiben. Es genügt diese Frage für den Fall zu beantworten, daß der Punkt  $P$  nicht auf dem Flächen-element  $\sigma$  liegt. Um diese Frage zu beantworten bemerken wir, daß das Glied:

$$g_2 = \frac{1}{r} \frac{e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} \frac{\partial r}{\partial \xi_j'}$$

bei  $\mu \rightarrow 0$  neben dem Gliede:

$$g_1 = \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \frac{\partial}{\partial \xi_j'} \frac{1}{r}$$

zu vernachlässigen ist. Wir haben in der Tat:

$$\left| \frac{g_2}{g_1} \right| = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x e^{-x^2}, \quad x = r \sqrt{\frac{\varrho}{4\mu(t-\tau)}}.$$

$g_2/g_1$  hat also für  $\mu > 0, r = 0$  den Wert Null und für  $r > 0$  den Grenzwert 0, wenn  $\mu \rightarrow 0$ . Wir können also überall  $g_2$  neben  $g_1$  vernachlässigen. Wenn wir das tun, und wenn wir dann durch neue partielle Integrationen die früher vorgenommene Umformung von  $J_{j\sigma}^{(2)}$  rückgängig machen, was stets erlaubt ist, wenn der Punkt  $P$  außerhalb von  $\sigma(\tau)$  liegt, so erhalten wir annähernd:

$$\left. \begin{aligned} J_{j\sigma}^{(2)} &= \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \int_{\sigma(\tau)} h_k' a_{lj} \frac{\partial^2}{\partial \xi_k' \partial \xi_l'} \frac{1}{r} dS_Q = \\ &= \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \int_{\sigma(\tau)} h_k \frac{\partial^2}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q = - \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\sigma(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q. \end{aligned} \right\} (8)$$

Dieser Ausdruck ist also annähernd gültig, wenn  $P$  außerhalb von  $\sigma(\tau)$  liegt.

## 24.7. Die Randbedingungen. Ruhendes Flächenelement.

Wir kehren zu unserem Ansatz (2) zurück. Wir setzen:

$$\sum_{\sigma} J_{j\sigma}^{(1)} = J_{jS}^{(1)}, \quad \sum_{\sigma} J_{j\sigma}^{(2)} = J_{jS}^{(2)},$$

wobei wir links über alle Elemente der Fläche  $S$  summieren. Wir haben dann:

$$u_j(P, t) = \int_{t_0}^t (J_{jS}^{(1)} + J_{jS}^{(2)}) d\tau + \frac{\partial \psi}{\partial x_j}. \quad (9)$$

Die Bedingung:

$$u_j = v_j(S, t)$$

auf  $S$  ergibt:

$$\int_{t_0}^t (J_{jS}^{(1)} + J_{jS}^{(2)}) d\tau + \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = v_j(S, t), \quad (9a)$$

wenn  $P$  auf  $S(t)$  liegt. Wir wollen in dieser Gleichung den Grenzübergang  $\mu \rightarrow 0$  ausführen und müssen dabei zwei Hauptfälle unterscheiden. Wir nehmen zuerst an, daß das Flächenelement  $\sigma_P(t)$ , zu welcher  $P$  gehört, während der Zeit von  $t_0$  bis  $t$  geruht hat. Für dieses Flächenelement haben wir dann in Formel (6)  $d = 0$  zu setzen und wir haben folglich:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} J_{j\sigma_P}^{(1)} = 2\pi [h_j - h_n \cos(n x_j)] \frac{1}{\sqrt{t - \tau}}.$$

Für alle übrigen Flächenelemente  $\sigma$  haben wir  $d > 0$  und folglich  $\lim_{\mu \rightarrow 0} J_{j\sigma}^{(1)} = 0$ . Wir haben ferner nach (7) für alle Flächenelemente  $\sigma$ , auch  $\sigma_P$ ,  $\lim_{\mu \rightarrow 0} J_{j\sigma}^{(2)} = 0$ . Wir erhalten folglich:

$$2\pi \int_{t_0}^t [h_j - h_n \cos(n x_j)] \frac{d\tau}{\sqrt{t - \tau}} = v_j - \frac{\partial \psi}{\partial x_j}. \quad (10)$$

$$(j = 1, 2, 3).$$

Diese Gleichungen müssen zur Bestimmung der drei Funktionen  $h_j$  im Punkte  $P$  dienen. Multiplikation von (10) mit  $\cos(n x_j)$  und Summierung in bezug auf  $j$  ergibt:

$$\left( v_i - \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \cos(n x_i) = 0$$

oder:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = v_u \quad (11)$$

in  $P$ . Dies ist eine Bedingung, welche  $\psi$  im Punkte  $P$  erfüllen muß.

Wenn sie erfüllt ist, so ist eine der Gleichungen (10) eine Folge der übrigen. Wir können dann den Funktionen  $h_j$  im Punkte  $P$  noch eine Bedingung, etwa  $h_n = 0$  auferlegen. Wir erhalten dann:

$$\int_{t^{(0)}}^t \frac{h_j(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \frac{1}{2\pi} \left( v_j - \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right). \quad (12)$$

Um diese Integralgleichung aufzulösen, multiplizieren wir nach dem Vorgange von Abel die beiden Seiten derselben mit  $(T-t)^{-\frac{1}{2}}$  und integrieren in bezug auf  $t$  zwischen den Grenzen  $t^{(0)}$  und  $T$ . Links kehren wir die Ordnung der beiden Integrationen um. Wir erhalten so:

$$\int_{t^{(0)}}^T h_j(\tau) d\tau \int_{\tau}^T \frac{dt}{\sqrt{(T-t)(t-\tau)}} = \frac{1}{2\pi} \int_{t^{(0)}}^T \left( v_j(t) - \frac{\partial \psi(t)}{\partial x_j} \right) \frac{dt}{\sqrt{T-\tau}}.$$

Die Substitution:

$$t = \tau + \frac{1}{2}(T-\tau)(1+\sin \vartheta)$$

führt das Integral:

$$\int_{\tau}^T \frac{dt}{\sqrt{(T-t)(t-\tau)}}$$

in

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\vartheta$$

über. Sein Wert ist also  $\pi$ . Wir haben folglich:

$$\int_{t^{(0)}}^T h_j(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi^2} \int_{t^{(0)}}^T \left( v_j(t) - \frac{\partial \psi(t)}{\partial x_j} \right) \frac{dt}{\sqrt{T-t}}$$

und also schließlich:

$$h_j(t) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{d}{dt} \int_{t^{(0)}}^t \left[ v_j(S, \tau) - \frac{\partial \psi(\tau)}{\partial x_j} \right] \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \quad (13)$$

Wir sehen aus dieser Formel, daß die Größen  $h_j$  tatsächlich beim Grenzübergange  $\mu \rightarrow 0$  gegen endliche und stetige Grenzwerte konvergieren.

Wir wollen für einen Augenblick annehmen, daß nicht nur das Flächenelement  $\sigma_P$ , sondern die ganze Fläche  $S$  in der Zeit von  $t_0$  bis  $t$  ruht. Wir lassen unter dieser Voraussetzung  $P$  einen Punkt im

Inneren der Flüssigkeit bedeuten und führen in den Formeln (9) den Grenzübergang  $\mu \rightarrow 0$  aus. Wir erhalten wegen (6) und (7):

$$u_j = \frac{\partial \psi}{\partial x_j}.$$

Diese Gleichungen nebst der Laplaceschen Gleichung  $\Delta \psi = 0$  und der Gleichung (11) bestimmen die Bewegung der Flüssigkeit. Wenn wir verlangen, daß bei  $\mu > 0$  die Flüssigkeit an der Fläche  $S$  haften soll, müssen wir in dem jetzt behandelten Falle  $v_j(S, t) = 0$  setzen. Die Gleichung (11) ergibt dann:

$$\frac{d\psi}{dn} = 0$$

an  $S$ . Dieses Ergebnis steht in voller Übereinstimmung mit der Eulerschen Hydrodynamik. Wenn es in einer Flüssigkeit nur ruhende Körper gibt, so erhält man bei  $\mu \rightarrow 0$  aus den Gleichungen (1) eine Potentialbewegung der Flüssigkeit, welche durch die Bedingung festgelegt ist, daß die Flüssigkeit an der Oberfläche der Körper gleiten muß.

## 248. Bewegtes Flächenelement. Grundlegende Voraussetzungen.

Wir gehen zu dem anderen Hauptfalle über. Wir nehmen an, daß ein beliebiger Punkt im Raum,  $x_1, x_2, x_3$ , während der Zeit  $t_0 \leq \tau \leq t$  höchstens in einzelnen Momenten  $\tau = t_1, \tau = t_2 \dots \tau = t_m (t_0 \leq t_1 < t_2 \dots < t_m \leq t)$  auf der Fläche  $S(\tau)$  liegt. Wir nehmen an, daß man jedem Werte  $k (k = 1, 2 \dots m)$  zwei positive Größen  $U_k$  und  $a_k$  in solcher Weise zuordnen kann, daß für genügend kleine Werte von  $|\tau - t_k|$  mit genügender Annäherung  $d = U_k |\tau - t_k|^{a_k}$  gesetzt werden kann. Wenn  $a_k = 1$  ist, so ist  $U_k$  die Geschwindigkeit, mit welcher die Fläche sich im Momente  $\tau = t_k$  dem Punkte  $x$  nähert oder sich von ihm entfernt. Wenn  $a_k < 1$  wäre, so würde jene Geschwindigkeit unendlich groß sein. Diesen Fall schließen wir aus und können also im folgenden stets  $a_k \geq 1$  voraussetzen.

## 249. Untersuchung des Integrales $\int_{t_0}^t J_{j\sigma}^{(1)} d\tau$ ,

wenn der betrachtete Punkt im betrachteten Zeitmoment auf dem Flächenelement liegt.

Wir haben nach (6), wenn  $t_m = t$  und  $t_1 > t_0$  ist und wenn wir nur die Hauptglieder von  $J_{j\sigma}^{(1)}$  berücksichtigen:

$$\int_{t_0}^t J_{jS}^{(1)} d\tau = 2\pi \int_{t-\varepsilon}^t [h_j - h_n \cos(n_{(m)} x_j)] x_{(m)}^{(0)} E(d_{(m)}, t-\tau) d\tau + \\ + 2\pi \sum_{k=1}^{m-1} \int_{t_k-\varepsilon}^{t_k+\varepsilon} [h_j - h_n \cos(n_{(k)} x_j)] x_{(k)}^{(0)} E(d_{(k)}, t-\tau) d\tau.$$

Wir haben hier mit  $x_k^{(0)}$  den Punkt bezeichnet, in welchem während des Intervall  $t_k - \varepsilon \leq \tau \leq t_k + \varepsilon$  bzw. für  $k = m$ , während  $t - \varepsilon \leq \tau \leq t$  die kürzeste vom Punkte  $P$  (mit den Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$ ) nach der Fläche  $S$  gezogene Gerade diese Fläche trifft.  $\varepsilon$  ist eine Größe, die wir, wenn  $\mu$  genügend klein ist, sehr klein annehmen können. Wir benutzen diesen Umstand, um unseren Ausdruck zu vereinfachen und können, wenn  $\varepsilon$  genügend klein ist, für  $x_{(k)}^{(0)}$  den Punkt  $P$  selbst einsetzen. Wir können ferner in:

$$[h_j - h_n \cos(n_k, x_j)]_{x, \tau}$$

$\tau = t_k$  setzen. Indem wir ferner für  $d_{(k)}$  den Wert:

$$U_k |\tau - t_k|^{a_k}$$

einsetzen, erhalten wir bei kleinem  $\mu$  annähernd:

$$\int_{t_0}^t J_{jS}^{(1)} d\tau = 2\pi [h_j - h_n \cos(n_{(m)} x_j)]_{x, t} \int_{t-\varepsilon}^t \frac{e^{-\frac{\varrho U_m^2}{4\mu} |\tau-t|^2 a_m-1}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + \\ + 2\pi \sum_{k=1}^{m-1} [h_j - h_n \cos(n_{(k)} x_j)]_{x, t_k} \int_{t_k-\varepsilon}^{t_k+\varepsilon} \frac{e^{-\frac{\varrho U_k^2 |\tau-t_k|^2 a_k}{4\mu(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

Noch eine Vereinfachung ist bei unserer angenäherten Berechnung der Integrale in der Summe erlaubt.  $t - \tau$ , das im Nenner des Integranden und im Nenner des Exponenten vorkommt, weicht wenig von  $t - t_k$  ab und wir können dafür  $t - t_k$  schreiben. Wir setzen dann im ersten Integral:

$$\tau = t - \left( \frac{4\mu}{\varrho U_m^2} \right)^{\frac{1}{2a_m-1}} \cdot \xi$$

und in den Integralen der Summe:

$$\tau = t_k + \left( \frac{4\mu(t-t_k)}{\varrho U_k^2} \right)^{\frac{1}{2a_k}} \cdot \xi.$$

Wir erhalten so annähernd:

$$\int_{t_0}^t J_{jS}^{(1)} d\tau = 2\pi \left( \frac{4\mu}{\varrho U_m^2} \right)^{\frac{1}{2(2\alpha_m - 1)}} [h_j - h_n \cos(n_{(m)} x_j)]_{x,t} \int_0^{\varepsilon(m)} \frac{e^{-\xi^2 \alpha_m - 1}}{\sqrt{\xi}} d\xi + \\ + 2\pi \sum_1^{m-1} \left( \frac{4\mu(t-t_k)}{\varrho U_k^2} \right)^{\frac{1}{2\alpha_k}} [h_j - h_n \cos(n_{(k)} x_j)]_{x,t_k} \frac{1}{\sqrt{t-t_k}} \int_{-\varepsilon(k)}^{+\varepsilon(k)} e^{-|\xi|^2 \alpha_k} d\xi, \\ \varepsilon(m) = \varepsilon \cdot \left( \frac{\varrho U_m^2}{4\mu} \right)^{\frac{1}{2\alpha_m - 1}}, \quad \varepsilon(k) = \varepsilon \cdot \left( \frac{\varrho U_k^2}{4\mu(t-t_k)} \right)^{\frac{1}{2\alpha_k}}.$$

Wir gehen in den Integralen der letzten Formel zur Grenze  $\mu \rightarrow 0$  über und setzen:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\xi^2 \alpha_m - 1}}{\sqrt{\xi}} d\xi = C_m, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\xi|^2 \alpha_k} d\xi = D_k.$$

Wir erhalten bei kleinen  $\mu$ -Werten annähernd:

$$\left. \begin{aligned} \int_{t_0}^t J_{jS}^{(1)} d\tau &= 2\pi C_m \left( \frac{4\mu}{\varrho U_m^2} \right)^{\frac{1}{2(2\alpha_m - 1)}} [h_j - h_n \cos(n_{(m)} x_j)]_{x,t} + \\ &+ 2\pi \sum_1^{m-1} \frac{D_k}{\sqrt{t-t_k}} \left( \frac{4\mu(t-t_k)}{\varrho U_k^2} \right)^{\frac{1}{2\alpha_k}} [h_j - h_n \cos(n_{(k)} x_j)]_{x,t_k}. \end{aligned} \right\} (14)$$

## 2410. Entsprechende Resultate in den anderen Fällen.

Wir haben oben  $t_m = t$ ,  $t_1 > t_0$  angenommen. Wir betrachten jetzt den Fall  $t_m < t$ ,  $t_1 > t_0$ . Wir erhalten:

$$\int_{t_0}^t J_{jS}^{(1)} d\tau = 2\pi \sum_1^{m-1} \frac{D_k}{\sqrt{t-t_k}} \left( \frac{4\mu(t-t_k)}{\varrho U_k^2} \right)^{\frac{1}{2\alpha_k}} [h_j - h_n \cos(n_{(k)} x_j)]_{x,t_k}. \quad (15)$$

Der Fall  $t_1 = t_0$  kann in derselben Weise behandelt werden wie der Fall  $t_m = t$  ist. Wir brauchen uns deshalb nicht bei diesem Falle aufzuhalten.

## 2411. Entsprechende Untersuchung für das Integral $\int_{t_0}^t J_{jS}^{(2)} d\tau$ .

Wir gehen zum Integrale:

$$\int_{t_0}^t J_{jS}^{(2)} d\tau$$

über. Wir sehen aus Formel (8), daß, wenn  $\mu$  klein ist, annähernd:

$$J_{jS}^{(2)} = -\sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q, \quad (16)$$

vorausgesetzt, daß der Punkt  $P$  nicht auf  $S(\tau)$  liegt. Wenn dies der Fall ist, ist Formel (16) nicht gültig. Wir wissen aber, daß auch in diesem Falle  $J_{jS}^{(2)}$  einen endlichen Wert hat, dessen Hauptglied mit  $\sqrt{\mu}$  proportional ist. Dies reicht für unsere jetzigen Zwecke aus und wir sehen, daß annähernd:

$$\int_{t_0}^t J_{jS}^{(2)} d\tau = -\sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \int_{t_0}^t d\tau \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q. \quad (17)$$

#### 24 12. Aufstellung von Integrodifferentialgleichungen für die Größen $h_j$ bei kleinem $\mu$ .

Wir sind jetzt imstande, die Gleichungen aufzustellen, welche zur Bestimmung der Funktionen  $h_j$  und der Potentialfunktion  $\psi$  dienen können. Wir bezeichnen mit  $P_s$  einen beliebigen Punkt der Grenzfläche  $S$  und erhalten dann aus (9a) wegen (14) und (17):

$$v_j(P_s, t) = 2\pi C_m \left( \frac{4\mu}{\varrho U_m^2} \right)^{\frac{1}{2(2\alpha_m - 1)}} [h_i - h_n \cos(nx_j)]_{P_s, t} + \left. \begin{aligned} &+ 2\pi \sum_1^{m-1} {}_{(k)} \frac{D_k}{\sqrt{t - t_k}} \left( \frac{4\mu(t - t_k)}{\varrho U_k^2} \right)^{\frac{1}{2\alpha_k}} [h_j - h_n \cos(nx_j)]_{P_s, t_k} - \\ &- \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \int_{t_0}^t d\tau \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q + \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right)_{P_s, t}. \end{aligned} \right] \quad (18)$$

#### 24 13. Nachweis, daß in dem von der Fläche nicht durchschrittenen Bereiche die Bewegung eine Potentialbewegung ist.

Wenn es gelungen ist, aus den Bedingungen (18) und aus der außerhalb von  $S$  gültigen Gleichung  $\Delta\psi = 0$ , die  $h_j$  und  $\psi$  zu berechnen, so kann man die Geschwindigkeitskomponenten und den Druck in einem beliebigen Punkte  $P$  der Flüssigkeit berechnen. Wenn  $P$  in demjenigen Bereich — wir wollen ihn  $B_v$  nennen — der zwischen  $t_0$  und  $t$  nicht von  $S(t)$  durchschrittenen worden ist, liegt, haben wir, da jetzt  $d > 0$  ist, wegen (9), (15), (17):

$$u_j(P, t) = \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right)_{P, t} - \sqrt{\frac{\mu \pi}{\varrho}} \int_{t_0}^t d\tau \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q. \quad (19)$$

Im letzten Gliede rechts in (19) hat nach unserer Voraussetzung  $r$  überall einen positiven, von Null verschiedenen Wert. Wir haben folglich:

$$\int_{t_0}^t d\tau \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{t_0}^t d\tau \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q$$

und also:

$$u_j(P, t) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \psi(x, t) - \sqrt{\frac{\mu \pi}{\varrho}} \int_{t_0}^t d\tau \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q \right\}. \quad (20)$$

Die Bewegung ist also in diesem Teile der Flüssigkeit eine Potentialbewegung.

#### 2414. Nachweis, daß die Flüssigkeit an der Vorderseite der Fläche gleitet.

Über das Verhalten der Flüssigkeit an demjenigen Teile von  $S(t)$ , der an  $B_v$  grenzt — wir nennen ihn  $S_v$  — gibt Formel (18) Aufschluß. Wenn wir jene Formel auf einen Punkt  $P_S$  anwenden, der zum ersten Male auf  $S$  liegt, fällt das zweite Glied rechts, also die Summe, weg und wir haben:

$$u_j(P_{S_v}, t) = 2\pi C_m \left( \frac{4\mu}{\varrho U_m^2} \right)^{\frac{1}{2(2\alpha_m - 1)}} [h_j - h_n \cos(n x_j)]_{PS_v, t} - \\ - \sqrt{\frac{\mu \pi}{\varrho}} \int_{t_0}^t d\tau \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q + \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right)_{PS_v, t}.$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit  $\cos(n x_j)$  und summieren in bezug auf  $j$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Das Ergebnis können wir in der Form:

$$\left( \frac{d\psi}{dn} \right)_{PS_v, t} - \sqrt{\frac{\mu \pi}{\varrho}} \int_{t_0}^t d\tau \frac{d}{dn} \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q = [v_n]_{PS_v, t} \quad (21)$$

schreiben. Das in (21) links vorkommende Integral kann auch in der Form:

$$\sqrt{\frac{\mu \pi}{\varrho}} \int_{t_0}^t d\tau \frac{d}{dn} \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{S(\tau)} \frac{h_k(\xi)}{r} dS_Q$$

geschrieben werden. Wenn der Punkt  $P$  im Innern des Bereiches  $B_v$  läge, so würden wir dafür auch:

$$\frac{d}{dn} \frac{\partial}{\partial x_k} \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \int_{t_0}^t d\tau \int_{S(\tau)} \frac{h_k(\xi)}{r} dS_Q \quad \left( \frac{d}{dn} = \cos(n x_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

schreiben können. Das Integral, zu welchem wir so geführt worden sind, kann als das Potential gewisse Massen gedeutet werden, welche in dem von  $S$  in der Zeit  $t_0$  bis  $t$  durchschrittenen Bereiche — wir nennen ihn  $B_h$  — ausgebreitet sind. Aus der Potentialtheorie ist nun bekannt, daß die Ableitungen zweiter Ordnung räumlicher Potentialfunktionen einen Sprung erleiden, wenn der Aufpunkt eine Unstetigkeit der Dichte durchschreitet. Insbesondere kann man einem Punkte  $P$  der Oberfläche des Körpers, von welchem das Potential herröhrt, im allgemeinen drei verschiedene Werte einer solchen Ableitung zweiter Ordnung zuordnen. Ein Wert ist der Wert der in  $P$  selbst gebildeten Ableitung. Ein anderer ist der Grenzwert, gegen welchen die Ableitung konvergiert, wenn der Aufpunkt von Innen sich  $P$  nähert. Der dritte endlich ist der Grenzwert der Ableitung, wenn der Aufpunkt sich von außen  $P$  nähert. Wir behaupten nun, daß, wenn  $x_1, x_2, x_3$  die Koordinaten des Punktes  $P_S$  sind:

$$\frac{d}{dn} \frac{\partial}{\partial x_k} \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \int_{t_0}^t d\tau \int_{S(\tau)} \frac{h_k(\xi)}{r} dS_Q = - \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \int_{t_0}^t d\tau \frac{d}{dn} \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q,$$

vorausgesetzt, daß wir der linken Seite die letzte (dritte) der oben erwähnten Bedeutungen geben. Zum Beweise genügt es, zu bemerken, daß:

$$\begin{aligned} & - \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \int_{t_0}^t d\tau \frac{d}{dn} \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q = \\ & = \lim_{\delta \rightarrow 0} - \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \int_{t_0}^{t-\delta} d\tau \frac{d}{dn} \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q. \end{aligned}$$

Wir können infolgedessen die Gleichung (21) auch in der folgenden Form schreiben:

$$\left. \begin{aligned} & \lim_{P \text{ durch } B_v \rightarrow P_S} \cos(n_{P_S} x_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \psi - \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \int_{t_0}^t d\tau \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q \right\} = \\ & = (v_n)_{P_S, t}. \end{aligned} \right\} (22)$$

Wenn wir die  $v_j$  als die Komponenten der Geschwindigkeit der Fläche  $S$  auffassen, so ist wegen (20) die Formel (22) die Bedingung dafür, daß die Flüssigkeit längs der Vorderseite  $S_v$  der Fläche  $S$  gleiten soll, d. h. die Bedingung dafür, daß Flüssigkeit und Fläche gleiche Normalgeschwindigkeit haben.

### 2415. Untersuchung der Bewegung in dem von der Fläche durchschrittenen Teilbereiche.

Wir betrachten jetzt einen Punkt  $P$  in dem Bereich  $B_h$ , der in der Zeit von  $t_0$  bis  $t$  von der Fläche  $S$  durchschritten worden ist. Wenn  $P$  eine allgemeine Lage hat, so wird man  $a_k = 1$  ( $k = 1, 2 \dots m$ ) haben. Man hat dann entsprechend S. 241  $C_m = D_k = \sqrt{\pi}$  und folglich wegen (9), (15), (17):

$$\left. \begin{aligned} u_j(P, t) &= 2\pi \sum_1^m {}_{(k)} \left( \frac{4\pi\mu}{\varrho U_k^2} \right)^{\frac{1}{2}} [h_j - h_n \cos(nx_j)]_{P, t_k} - \\ &- \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q + \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \end{aligned} \right\} (23)$$

$t_1, t_2 \dots t_m$  ( $t_0 \leqq t_1 < t_2 \dots < t_m \leqq t$ ) sind die Momente, in welchen  $P$  auf  $S$  gelegen hat. Wir nehmen zunächst an, daß  $t > t_m$  ist. Wir lassen dann bei festgehaltenem  $P$   $t$  gegen  $t_m$  abnehmen und erhalten in dieser Weise aus (23):

$$\begin{aligned} u_j(P, t_m) &= v_j(P_{S_h}, t_m) = 2\pi \sum_1^m {}_{(k)} \left( \frac{4\pi\mu}{\varrho U_k^2} \right)^{\frac{1}{2}} [h_j - h_n \cos(nx_j)]_{P, t_k} - \\ &- \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \int_{t_0}^{t_m} d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q + \frac{\partial}{\partial x_j} \psi(x, t_m). \end{aligned}$$

Wir ziehen diese Gleichung von (23) ab und erhalten:

$$\left. \begin{aligned} u_j(P, t) &= v_j(P_{S_h}, t_m) - \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \int_{t_m}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \psi(x, t) - \psi(x, t_m) \right\}. \end{aligned} \right\} (24)$$

Wenn wir jetzt bei festgehaltenem  $t$  den Punkt  $P$  sich der Grenzfläche  $S_n$  nähern lassen und wenn dabei  $t_m$  gegen  $t$  konvergiert, was immer an der Rückseite des Körpers der Fall sein wird, so haben wir:

$$\lim_{P \text{ durch } B_h \rightarrow P_{S_h}} u_j(P, t) = v_j(P_{S_h}, t) . \quad (25)$$

Wenn wir wieder die  $v_j$  als Geschwindigkeitskomponenten der Fläche  $S$  auffassen, so sagt diese Gleichung aus, daß die Flüssigkeit, wenn ihre Bewegung dem System (1) gehorcht und wenn sie bei  $\mu > 0$  an  $S$  haftet, auch bei verschwindender Zähigkeit  $\mu$  an der Rückseite des Körpers haften muß. Den Fall, daß die Fläche eine Geschwindigkeit hat, die in das Gebiet der schon durchwirbelten Flüssigkeit, das sie hinter sich gelassen hat, hinein gerichtet ist, haben wir hier nicht untersucht.

## 24 16. Zusammenfassung.

Es sei die Aufgabe vorgelegt, bei kleinem positivem  $\mu$  außerhalb einer geschlossenen, im allgemeinen von der Zeit  $t$  abhängigen Fläche  $S(t)$  eine Lösung des Systems:

$$\varrho \frac{\partial u_j}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial x_j} + \mu \Delta u_j, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (j = 1, 2, 3)$$

zu finden, welche den folgenden Nebenbedingungen genügt: auf  $S(t)$ :  $u_j =$  vorgeschriebenen Funktionen  $v_j(S, t)$ ; in unendlicher Ferne:  $u_j = 0$ . Um diese Aufgabe zu lösen, suche man auf der Oberfläche  $S(t)$  drei Funktionen  $h_1, h_2, h_3$  und im Raum außerhalb von  $S(t)$  eine reguläre und in unendlicher Ferne verschwindende Potentialfunktion zu bestimmen, welche in den Punkten  $P_S (= x_1, x_2, x_3)$  den Bedingungen:

$$\begin{aligned} & 2\pi C_m \left( \frac{4\mu}{\varrho U_m^2} \right)^{\frac{1}{2(2\alpha_m-1)}} [h_j - h_n \cos(n x_j)]_{P_S, t} + \\ & + 2\pi \sum_1^{m-1} (k) \frac{D_k}{\sqrt{t-t_k}} \left( \frac{4\mu(t-t_k)}{\varrho U_k^2} \right)^{\frac{1}{2\alpha_k}} [h_j - h_n \cos(n x_j)]_{P_S, t_k} - \\ & - \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q + \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right)_{P_S, t} = u_j(P_S, t) \end{aligned}$$

genügt.  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  sind hier die Koordinaten eines Punktes  $Q$  auf der Fläche  $S(\tau)$ ;  $r$  ist die Entfernung zwischen den Punkten  $P_S$  und  $Q$ .  $t_1, t_2 \dots t_{m-1}, t_m$  ( $t_1 < t_2 < \dots < t_{m-1} < t_m$ ) sind die Zeitpunkte, in welchen  $P_S$  auf der Fläche  $S$  gelegen hat. In der obigen Gleichung ist also  $t_m = t$ . Es wird angenommen, daß die kleinste Entfernung  $d$ , des Punktes  $P_S$  von der Fläche  $S(t)$ , wenn  $|t - t_k|$  klein ist, in der Form:

$$d = U_k |t - t_k|^{\alpha_k}$$

dargestellt werden kann und es ist:

$$C_m = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi^2 a_m - 1}}{\sqrt{\xi}} d\xi, \quad D_k = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\xi|^2 a_k} d\xi.$$

Wenn es gelungen ist, die Funktionen  $h_1, h_2, h_3, \psi$  zu bestimmen, so hat man in demjenigen Bereiche, der nicht von der Fläche  $S(t)$  durchschritten worden ist:

$$u_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \psi(x, t) - \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \int_{t_m}^t d\tau \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q \right\}.$$

Dagegen hat man in dem von  $S(t)$  durchschrittenen Bereiche:

$$u_j(P, t) = v_j(P_{S_h}, t_m) - \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \int_{t_m}^t d\tau \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q + \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \psi(x, t) - \psi(x, t_m) \right\}.$$

Hier ist  $t_m$  der Zeitpunkt, in welchem der Punkt  $P$  zuletzt auf  $S$  lag.  $P_{S_h}$  ist der Punkt auf der Rückseite von  $S(t_m)$ , der geometrisch mit  $P$  zusammenfällt.

Wenn die Größen  $v_j(S, t)$  die Komponenten der Geschwindigkeit sind, welche der betreffende Punkt von  $S(t)$  bei der Bewegung dieser Fläche hat, so lassen sich die erhaltenen Formeln so deuten, daß die Bewegung der Flüssigkeit in dem von  $S$  nicht durchschrittenen Raum eine Potentialbewegung ist, bei welcher die Flüssigkeit längs der Vorderseite von  $S$  gleitet; dagegen die Bewegung in dem von  $S(t)$  durchschrittenen Raum eine Wirbelbewegung, bei welcher die Flüssigkeit an der Rückseite — vgl. hierzu S. 227 — an  $S(t)$  haftet.

## § 25. Translatorische Bewegung.

### 251. Vereinfachungen durch die Annahme, daß der Körper sich stets in derselben Richtung bewegt.

Wir wenden die im vorigen Paragraphen gefundenen Ergebnisse auf den Fall an, daß sich ein starrer Körper in einer bestimmten, von der Zeit unabhängigen Richtung in einer Flüssigkeit bewegt, die sonst den ganzen Raum erfüllt.  $U(t)$  sei die Geschwindigkeit des Körpers,  $S(t)$  die Oberfläche desselben,  $K(t)$  der vom Körper

erfüllte Bereich des Raumes,  $B(t)$  der übrige Teil des Raumes. Der Einfachheit wegen nehmen wir zunächst an, daß eine mit der Bewegungsrichtung des Körpers parallele Gerade  $S(t)$  höchstens in zwei Punkten schneidet.  $S(t)$  zerfällt dann in zwei Teile, einen vorderen Teil  $S_v(t)$  und einen hinteren Teil  $S_h(t)$ .  $B(t)$  zerfällt ebenfalls in zwei Teile, einen  $B_h(t)$ , der vom Körper oder von einem Teile des Körpers durchschritten worden ist, und einen  $B_v(t)$  und  $K(t)$  umgebenden Teil  $B_v(t)$ . Wir bezeichnen wie gewöhnlich mit  $U_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) die Komponenten des Vektors  $\mathbf{U}$ , mit  $n$  eine nach außen gezogene Normale der Fläche  $S(t)$  von der Länge 1. Wir setzen:

$$|U_j(t) \cos(n x_j)| = |U_j(t) n_j| = U_n(t).$$

Das Flächenelement  $dS$  durchschreitet dann während der Zeit  $t$  bis  $t + dt$  einen Raumbereich  $U_n(t)dSdt$ .

Ein beliebiger Punkt,  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , in  $B_h(t)$  ist vor der Zeit  $t$  entweder von der Fläche  $S_h$  allein oder sowohl von  $S_v$  wie von  $S_h$  überstrichen worden. Wir bezeichnen mit  $t_v$  und  $t_h$  die Zeiten, zu denen  $S_v$  bzw.  $S_h$  den Punkt  $\xi$  enthielt. Mit  $\mathbf{U}^{(v)}$ ,  $\mathbf{U}^{(h)}$ ,  $U_n^{(v)}$ ,  $U_n^{(h)}$  bezeichnen wir die den Zeiten  $t_v$  und  $t_h$  und dem Punkte  $\xi$  entsprechenden Werte von  $\mathbf{U}$  und  $U_n$ .  $U^{(v)}$  und  $U^{(v)}n$  sind im Bereich  $B_h(t)$  mit Ausnahme von  $K(t_0)$  definiert,  $\mathbf{U}^{(h)}$  und  $U_n^{(h)}$  im ganzen Bereich  $B_h(t)$ . Wir nehmen an, daß  $U_j(t_v)$  und  $U_j(t_h)$  stetige und stetig differenzierbare Funktionen der Koordinaten  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  sind.

Unsere Aufgabe ist, das System:

$$\varrho \frac{\partial u_j}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x_j} + \mu \Delta u_j, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

mit den Nebenbedingungen: in unendlicher Ferne  $u_j = 0$ ;  
an  $S(t)$ :

$$u_j = U_j(t), \quad \text{für } t = t_0 : \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = 0 \quad (j, k = 1, 2, 3)$$

im Grenzfalle  $\mu = 0$  zu lösen.

Wir machen wieder (vgl. S. 229) den Ansatz:

$$\left. \begin{aligned} u_j(P, t) &= \int_{t_0}^t d\tau \int_{S(\tau)} h_k(Q, \tau) u_{jk}(P, Q, t - \tau) dS_Q + \frac{\partial \psi}{\partial x_j}, \\ q(P, t) &= -\sqrt{\mu \varrho \pi} \int_{S(t)} h_k(Q, t) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r} dS_Q - \varrho \frac{\partial \psi}{\partial t}, \\ \Delta \psi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Wir stellen jetzt die Grenzbedingungen auf und benutzen dabei die im vorigen Paragraphen gefundenen, bei kleinem  $\mu$  angenähert

richtigen Ausdrücke für die in unserem Ansätze vorkommenden Integrale. Wir haben jetzt  $\alpha = 1$  zu setzen. Wie man sofort sieht, tritt unter diesen Umständen in unseren angenäherten Ausdrücken  $h_j$  stets

mit dem Faktor  $\sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}}$  multipliziert auf. Wir setzen deshalb:

$$\sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} h_j = k_j.$$

Der Umstand, daß wir für  $k_j$  endliche Werte finden, zeigt, daß die  $h_j$ , den absoluten Beträgen nach, beim Grenzübergange  $\mu \rightarrow 0$  wie  $\mu^{-\frac{1}{2}}$  unendlich werden. Wir bezeichnen mit  $k_j^{(v)}(t)$  die Werte der  $k_j$  an der Vorderseite von  $S(t)$ ,  $S_v(t)$ , und in derselben Weise mit  $k_j^{(h)}(t)$  die Werte von  $k_j$  an der Rückseite,  $S_h(t)$ , von  $S(t)$ . Die Grenzbedingungen können dann bei kleinem  $\mu$  in der folgenden Form geschrieben werden:

auf  $S_v(t)$ :

$$\left. \begin{aligned} U_j(t) &= \frac{4\pi}{U_n^{(v)}} [k_j^{(v)} - k_n^{(v)} \cos(n x_j)]_{P,t} - \\ &- \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_v(\tau)} k_k^{(v)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q - \\ &- \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_h(\tau)} k_k^{(h)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q + \frac{\partial \psi}{\partial x_j}, \end{aligned} \right\} (3)$$

auf  $S_h(t)$ :

$$\left. \begin{aligned} U_j(t) &= 4\pi \left\{ \frac{1}{U_n^{(h)}} [k_j^{(h)} - k_n^{(h)} \cos(n x_j)]_{P,t} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{U_n^{(v)}} [k_j^{(v)} - k_n^{(v)} \cos(n x_j)]_{P,t_v} \right\} - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_v(\tau)} k_k^{(v)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q - \\ &- \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_h(\tau)} k_k^{(h)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q + \frac{\partial \psi}{\partial x_j}. \end{aligned} \right\} (4)$$

## 252. Beginn der Umformung der Gleichung (3). Verwandlung der Zeit-Oberflächenintegrale in Ableitungen von Potentialfunktionen.

In § 23 gelang es uns, die Bestimmung der Funktionen  $\varphi_j^{(0)}$ , welchen hier die Funktionen  $k_j$  entsprechen, auf die Auflösung einer potentialtheoretischen Randwertaufgabe zurückzuführen. Wir suchen

hier ein ähnliches Ziel zu erreichen. Es ist zu diesem Zweck notwendig, die in den Gleichungen (3) und (4) vorkommenden Integrale einer näheren Untersuchung zu unterwerfen. Wir betrachten zunächst die Gleichung (3). Wir nehmen also an, daß der Punkt  $P$  auf  $S_v(t)$  liegt. Wir nehmen überdies an, daß  $P$  ein innerer Punkt von  $S_v(t)$  ist und also nicht auf der Grenzkurve zwischen  $S_v(t)$  und  $S_h(t)$  liegt. Wir haben dann:

$$\int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_h(\tau)} k_k^{(h)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{t_0}^t d\tau \int_{S_h(\tau)} k_k^{(h)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q.$$

$U_n^{(h)} d\tau dS_Q$  ist das Volumenelement  $d\omega_Q (= d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3)$ , das während der Zeit  $d\tau$  vom Flächenelemente  $dS_Q$  von  $S_h(t)$  durchschritten wird. Unser Integral kann deshalb in der Form:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{B_h(t)} U_n^{(h)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\omega_Q$$

geschrieben werden, wo  $B_h(t)$  die in 25 1 S. 248 angegebene Bedeutung hat. Um das Integral:

$$\int_{t_0}^t dt \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_v(\tau)} k_k^{(v)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q$$

in ähnlicher Weise umzuformen, führen wir eine Annahme ein, deren Zulässigkeit wir später nachprüfen werden, die Annahme, daß an  $S_v(t)$ :

$$k_n^{(v)} = k_k^{(v)} \cos(n x_k) = 0. \quad (5)$$

Wir haben, wenn wir innerhalb von  $K(t_0)$   $k_k^{(v)} = 0$  setzen:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_v(\tau)} k_k^{(v)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t-\varepsilon} d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_v(\tau)} k_k^{(v)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t-\varepsilon} d\tau \int_{S_v(\tau)} k_k^{(v)} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_h(t-\varepsilon)+K(t-\varepsilon)} \frac{k_k^{(v)}}{U_n^{(v)}} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \xi_k} \frac{1}{r} d\omega_Q = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{S(B_h(t-\varepsilon)+K(t-\varepsilon))} \frac{k_k^{(v)}}{U_n^{(v)}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} dS_Q - \int_{B_h(t-\varepsilon)+K(t-\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left( \frac{k_k^{(v)}}{U_n^{(v)}} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} d\omega_Q \right\}. \end{aligned}$$

Da  $k_n^{(v)} = 0$  an  $S_v$ , brauchen wir das Flächenintegral im letzten Ausdrucke nur über die zylindrische Mantelfläche von  $B_h(t-\varepsilon)$  und über

$S_h(t_o)$  zu erstrecken. Wir können deshalb unmittelbar den Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  ausführen und bekommen:

$$\begin{aligned} & \int_{S(B_h(t) + K(t))} \frac{k_n^{(v)}}{U_n^{(v)}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} dS_Q - \int_{B_h(t) + K(t)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left( \frac{k_n^{(v)}}{U_n^{(v)}} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} d\omega_Q = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \int_{S(B_h(t) + K(t))} \frac{k_n^{(v)}}{U_n^{(v)}} \frac{dS_Q}{r} - \int_{B_h(t) + K(t)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left( \frac{k_n^{(v)}}{U_n^{(v)}} \right) \frac{d\omega_Q}{r} \right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{B_h(t) + K(t)} \frac{k_n^{(v)}}{U_n^{(v)}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\omega_Q. \end{aligned}$$

### 253. Durchführung der Umformung der Gleichung (3). Darstellung der Größen $k_j^{(v)}$ durch eine Potentialfunktion $\varphi$ .

Um unter Benutzung der eben gewonnenen Resultate die rechte Seite der Gleichung (3) in einfacherer Weise schreiben zu können, setzen wir:

$$\frac{k_j^{(v)}}{U_n^{(v)}} + \frac{k_j^{(h)}}{U_n^{(h)}} = L_j. \quad (\text{A})$$

Wir setzen ferner:

$$\psi - \int_{B_h(t)} L_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\omega_Q - \int_{K(t)} \frac{k_k^{(v)}}{U_n^{(v)}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\omega_Q = \varphi. \quad (\text{B})$$

Da die Funktion  $\varphi$  offenbar in  $B_v(t)$  ganz andere Eigenschaften als in  $B_h(t)$  hat, so wollen wir statt  $\varphi$ , wenn der Aufpunkt in  $B_v(t)$  liegt,  $\varphi_v$  und, wenn der Aufpunkt in  $B_h(t)$  liegt,  $\varphi_h$  schreiben. Unsere Gleichung (3) ergibt jetzt wegen (5):

an  $S_v(t)$ :

$$U_j(t) = 4\pi \frac{k_j^{(v)}}{U_n^{(v)}} + \left( \frac{\partial \varphi_v}{\partial x_j} \right)_{S_v(t)}. \quad (6)$$

Das letzte Glied rechts in (6) kann als der Wert aufgefaßt werden, gegen welchen  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$  konvergiert, wenn der Aufpunkt von außen, also durch  $B_v(t)$ , sich der Grenzfläche  $S_v(t)$  nähert. Wegen (5) müssen wir  $\varphi$  die Bedingung:

$$\frac{\partial \varphi_v}{\partial n} = U_n^{(v)} \quad (\text{C})$$

auferlegen. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so haben wir:

$$k_j^{(v)}(t) = \frac{U_n^{(v)}(t)}{4\pi} \left( U_j(t) - \frac{\partial \varphi_v}{\partial x_j} \right). \quad (\text{D})$$

#### 254. Beginn der entsprechenden Umformung der Gleichung (4). Zurückführung der Zeitflächenintegrale auf Potentialfunktionen nebst einem Zusatzgliede.

Wir gehen zur Formel (4) über. Wir haben, da im Momente  $t_v$  die Vorderseite  $S_v$  durch den Punkt  $x$  geht, der erst zur Zeit  $t$  auf der Rückseite liegt:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_v(\tau)} k_k^{(v)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{t_0}^{t_v - \varepsilon} d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_v(\tau)} k_k^{(v)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q + \int_{t_v + \varepsilon}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_v(\tau)} k_k^{(v)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q \right\}. \end{aligned}$$

Wegen der Beziehung (5) können wir die Glieder rechts nach derselben Methode behandeln, welche wir bei der Formel (3) benutzt haben. Wir erhalten so:

$$\int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_v(\tau)} k_k^{(v)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{B_h(t) + K(t)} \frac{k_k^{(v)}}{U_n^{(v)}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\omega_Q. \quad (7)$$

Mehr Mühe macht uns das letzte Integral in (4). Wir haben:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_h(\tau)} k_k^{(h)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t - \varepsilon} d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_h(\tau)} k_k^{(h)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_h(t - \varepsilon)} \frac{k_k^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \xi_k} \frac{1}{r} d\omega_Q^* = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{S(B_h(t - \varepsilon))} \frac{k_n^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} dS_Q - \int_{B_h(t - \varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{k_n^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} d\omega_Q \right\}. \end{aligned}$$

Dabei ist  $S(B)$  die Grenzfläche des Bereiches  $B$ .

---

\* Wir setzen hier voraus, was durch das Ergebnis unserer Untersuchung bestätigt werden wird, daß die Quotienten  $\frac{k_n^{(h)}}{U_n^{(h)}}$  überall endliche Werte haben.

Die Grenzfläche  $S(B_h(t - \varepsilon))$  des Bereiches  $B_h(t - \varepsilon)$  enthält unter anderem die Fläche  $S_h(t - \varepsilon)$ . Beim Grenzübergange  $\varepsilon \rightarrow 0$  wird ein Element dieser Fläche sich dem Aufpunkte  $x$  unbegrenzt nähern. Um den Grenzwert des Teiles des im letzten Ausdrucke vorkommenden Flächenintegrals, das von diesem Flächenelemente,  $\sigma$ , herrührt, zu bestimmen, führen wir in derselben Weise wie im vorigen Paragraphen ein mit  $\sigma$  verbundenes Bezugssystem ein, dessen  $\xi_1'$ - und  $\xi_2'$ -Achsen  $\sigma$  in dem Anfangspunkte tangieren und dessen  $\xi_3'$ -Achse also gegen  $\sigma$  normal ist. Wir haben dann:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma(t-\varepsilon)} \frac{k_n^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} dS_Q &= - \int_{\sigma(t-\varepsilon)} \frac{k_n^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q = \\ &= - \int_{\sigma(t-\varepsilon)} \frac{k_n^{(h)}}{U_n^{(h)}} \cos(\xi_k' x_j) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q. \end{aligned}$$

Unser letztes Flächenintegral zerfällt, entsprechend den Werten  $k = 1, 2, 3$ , in drei. Zwei von diesen Integralen, diejenigen, in denen  $k = 1$  oder  $2$  ist, können durch partielle Integration in bezug auf  $\xi_1'$  oder  $\xi_2'$  umgeformt werden. Man sieht leicht, daß die Grenzwerte dieser beiden Integrale bei  $\varepsilon \rightarrow 0$  erstens endlich sind und zweitens gegen Null konvergieren, wenn man den Flächeninhalt des Elementes  $\sigma$  gegen Null konvergieren läßt. Der Grenzwert des dritten Integrals:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \cos(nx_j) \int_{\sigma(t-\varepsilon)} \frac{k_n^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{d}{dn_x} \frac{1}{r} dS_Q$$

behält dagegen einen endlichen Wert:

$$- 2\pi \frac{k_n^{(h)}}{U_n^{(h)}} \cos(nx_j),$$

selbst wenn der Flächeninhalt des Elementes  $\sigma$  gegen Null konvergiert. Wir erhalten infolgedessen:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_h(\tau)} k_k^{(h)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q &= - 2\pi \frac{k_n^{(h)}}{U_n^{(h)}} \cos(nx_j) + \\ &+ \int_{S(B_h(t))} \frac{k_n^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} dS_Q - \int_{B_h(t)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{k_k^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} d\omega_Q. \end{aligned}$$

Für das Flächenintegral der rechten Seite soll hier der Wert genommen werden, den man erhält, wenn man zuerst den singulären

Punkt  $\xi_j = x_j$  durch eine um ihn gezogene geschlossene Kurve auf der Integrationsfläche ausschließt und dann diese Kurve sich von allen Seiten um den singulären Punkt zusammenziehen lässt.

### 25 5. Weitere Umformung vermittelst der Sätze der Potentialtheorie.

Um weiter zu kommen, müssen wir einen Satz aus der Potentialtheorie heranziehen. Das Flächenintegral:

$$\int \frac{F(\xi)}{r} dS_Q \quad (r^2 = (x_j - \xi_j)^2, r \geq 0),$$

wo  $F(\xi)$  auf der Integrationsfläche eine stetig differenzierbare Funktion ist, besitzt partielle Ableitungen erster Ordnung in bezug auf  $x_1, x_2, x_3$ , dies auch dann, wenn der Punkt  $P$ , dessen Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  sind, auf der Integrationsfläche liegt. Man erhält diese Ableitungen dadurch, daß man unter dem Integralzeichen deriviert, aber bei der Berechnung des so entstehenden Integrales zuerst den singulären Punkt  $P$  ausschließt und dann den ausgeschlossenen Bereich sich um  $P$  zusammenziehen lässt.

Aus diesem Satze folgt:

$$\begin{aligned} & \int_{S(B_h(t))} \frac{k_n^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} dS_Q - \int_{B_h(t)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{k_k^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} d\omega_Q = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \int_{S(B_h(t))} \frac{k_n^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{dS_Q}{r} - \int_{B_h(t)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{k_k^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{d\omega_Q}{r} \right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{B_h(t)} \frac{k_k^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\omega_Q. \end{aligned}$$

Wir haben also:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_h(\tau)} k_k^{(h)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q = -2\pi \frac{k_n^{(h)}}{U_n^{(h)}} \cos(nx_j) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{B_h(t)} \frac{k_k^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\omega_Q. \end{aligned}$$

Wir können dieses Ergebnis auch in einer anderen Form schreiben. Die rechte Seite ist, wie aus den obigen Rechnungen unmittelbar hervorgeht, der Grenzwert des Ausdrückes:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{B_h(t)}^t \frac{k_k^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\omega_Q,$$

wenn der Punkt  $P$  (mit den Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$ ) von außen, also durch den Bereich  $K(t)$ , sich der Grenzfläche  $S_h(t)$  des Integrationsbereiches nähert. Wir wollen unter:

$$\frac{\partial}{\partial x_j^{(h)}}$$

den Grenzwert einer Ableitung in bezug auf  $x_j$  verstehen, den sie annimmt, wenn der Aufpunkt  $P$  (mit den Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$ ) sich durch die Flüssigkeit, also durch den Bereich  $B(t)$ , der Grenzfläche  $S(t)$  nähert. Die Berechnung von:

$$\frac{\partial}{\partial x_j^{(h)}} \int_{B_h(t)}^t \frac{k_k^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\omega_Q$$

können wir nach denselben Methoden ausführen, die wir oben benutzt haben. Man hat nur zu beachten, daß der Punkt  $P$  jetzt innerhalb der Grenzfläche  $S(B_h(t))$  des Integrationsbereiches liegt. Man findet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j^{(h)}} \int_{B_h(t)}^t \frac{k_k^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\omega_Q = & + 2\pi \frac{k_n^{(h)}}{U_n^{(h)}} \cos(n x_j) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{B_h(t)}^t \frac{k_k^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\omega_Q. \end{aligned}$$

Wir haben also schließlich auch:

$$\left. \begin{aligned} \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_h(\tau)} k_k^{(h)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q = & - 4\pi \frac{k_n^{(h)}}{U_n^{(h)}} \cos(n x_j) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j^{(h)}} \int_{B_h(t)}^t \frac{k_k^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\omega_Q. \end{aligned} \right\} (8)$$

Wir bemerken, daß wir offenbar unsere Formel (7) auch in der Form:

$$\left. \begin{aligned} \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_v(\tau)} k_k^{(v)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q &= \frac{\partial}{\partial x_j^{(h)}} \int_{B_h(t)} \frac{k_k^{(v)}}{U_n^{(v)}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\omega_Q + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j^{(h)}} \int_{K(t)} \frac{k_k^{(v)}}{U_n^{(v)}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\omega_Q \end{aligned} \right\} (9)$$

schreiben können.

### 25 6. Durchführung der Umformung. Darstellung der Größen $L_j$ durch die Potentialfunktion $\varphi$ .

Wir führen jetzt in (4) die in (8) und (9) gefundenen Werte der dort vorkommenden Integrale ein. Die Glieder, welche  $k_n^{(h)}$  enthalten, heben sich auf.  $k_n^{(v)}$  hat nach (5) den Wert Null. Wir erhalten folglich:

$$U_j(t) = 4\pi L_j(t) + \left( \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j} \right)_{S_h(t)}. \quad (10)$$

Wir haben also:

$$L_j(t) = \frac{k_j^{(v)}}{U_n^{(v)}} + \frac{k_j^{(h)}}{U_n^{(h)}} = \frac{1}{4\pi} \left\{ U_j(t) - \left( \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j} \right)_{S_h(t)} \right\}. \quad (11)$$

### 25 7. Vorläufige Formulierung der Bedingungen für die Potentialfunktion $\varphi$ .

Mit Hilfe der Gleichung D S. 252 können wir  $k_j^{(v)}$  in bekannten Größen und in  $\varphi$  ausdrücken. Die Gleichung (11) gibt uns dann  $k_j^{(h)}$  in denselben Größen ausgedrückt. Wir sehen, daß das ganze Problem auf die Bestimmung von  $\varphi$  zurückgeführt worden ist.

Wenn wir in die Definitionsgleichung B für  $\varphi$  die in D und (11) gegebenen Werte von  $k_j^{(v)}$  und  $L_j$  einsetzen, geht sie in ein System von zwei Integro-Differentialgleichungen für  $\varphi_v$  und  $\varphi_h$  über. Dazu kommt die Grenzbedingung C.

### 25 8. Darstellung der Bewegung im Inneren der Flüssigkeit vermittelt der Funktion $\varphi$ .

Wenn es gelungen ist  $\varphi$  zu bestimmen, so ist damit die Bewegung für  $\mu = 0$  bekannt. Die Umformungen unseres ursprünglichen Ansatzes für die Geschwindigkeitskomponenten, die wir oben gemacht haben, können natürlich auch dann gemacht werden, wenn der Aufpunkt P nicht auf der Oberfläche des Körpers  $S(t)$  liegt. Wir gehen wieder vom

Ansätze (2) aus und verfahren genau wie in 251. Wir erhalten, wenn der Punkt  $P$  in dem von  $S(t)$  nicht durchschrittenen Bereiche liegt:

$$\begin{aligned} u_j(P, t) &= - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_v(\tau)} k_k^{(v)} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q - \\ &\quad - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_h(\tau)} k_k^{(h)} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q + \frac{\partial \psi}{\partial x_j}, \\ q(P, t) &= - \varrho \int_{S(t)} k_k(Q, t) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r} dS_Q - \varrho \frac{\partial \psi}{\partial t}. \end{aligned}$$

Wir formen die Integrale rechts in der ersten dieser Gleichungen mit Hilfe der in 252 und 253 dargelegten Methoden um und erhalten:

$$u_j = \frac{\partial \varphi_v}{\partial x_j}. \quad (12)$$

Differentiation der Gleichung  $B$  in bezug auf  $t$  gibt ferner:

$$q = - \varrho \frac{\partial \varphi_v}{\partial t}. \quad (13)$$

Wenn dagegen der Punkt  $P$  in dem von  $S(t)$  durchschrittenen Bereiche liegt, so erhalten wir aus (2) zunächst:

$$\begin{aligned} u_j(P, t) &= 4\pi \left\{ \left( \frac{1}{U_n^{(h)}} [k_j^{(h)} - k_n^{(h)} \cos(n x_j)] \right)_{P, t_h} + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{U_n^{(v)}} [k_j^{(v)} - k_n^{(v)} \cos(n x_j)] \right)_{P, t_v} \right\} - \\ &\quad - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_v(\tau)} k_k^{(v)} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_h(\tau)} k_k^{(h)} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q + \frac{\partial \psi}{\partial x_j}, \\ q(P, t) &= - \varrho \int_{S(t)} k_k(Q, t) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q - \varrho \frac{\partial \psi}{\partial t}. \end{aligned}$$

$t_h$  und  $t_v$  sind hier die Zeitpunkte, in welchen der Punkt  $P$  auf  $S_h$  bzw.  $S_v$  lag.

Die Umformung ergibt jetzt:

$$u_j = 4\pi L_j(t_h) + \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j}, \quad q = - \varrho \frac{\partial \varphi_h}{\partial t}.$$

Nach Gleichung (11) können wir dieses Ergebnis auch in der Form:

$$u_j = U_j(t_h) + \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j} - \left( \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j} \right)_{S_h(t_h)}, \quad q = - \varrho \frac{\partial \varphi_h}{\partial t} \quad (14)$$

schreiben.

Die Bedingung  $C$  für  $\varphi$  zeigt, daß die Flüssigkeit längs der Vorderseite des Körpers gleitet. Die Gleichungen (14) zeigen dagegen, daß die Flüssigkeit an  $S_h$  haftet.

### 25 9. Definitive Formulierung der Bedingungen für $\varphi$ . Verifikation der Kontinuitätsbedingung.

Wir haben oben in 25 7 die Integro-Differentialgleichung erwähnt, welcher die Funktion  $\varphi$  genügen muß. Wir wollen jetzt den Inhalt jener Integro-Differentialgleichung in anderer Form darstellen. Vorab bemerken wir folgendes: die Größen  $L_j$  sind durch die Gleichungen (11) als Funktionen von  $t$  und den Punkten der Fläche  $S_h$  definiert. Wir können sie aber auch als (von der Zeit unabhängige) Funktionen der Punkte des Bereiches  $B_h$  auffassen. Wir können mit anderen Worten jedem Punkte  $P$  in  $B_h$  einen und zwar nur einen, von der Zeit unabhängigen Vektor  $L$  zuordnen. Zu diesem Zwecke haben wir nur den Zeitmoment  $t_h$  zu bestimmen, in welchem  $P$  auf  $S_h$  lag. Wir ordnen  $P$  den Vektor  $L$  zu, der im Momente  $t_h$  demjenigen Punkte von  $S_h$  zugehört, der zu eben dieser Zeit mit  $P$  zusammenfällt. Wir betrachten im folgenden die Größen  $L_j$  als Funktionen von  $x_1, x_2, x_3$ . Die Größen  $U_j$ , die wegen der vorausgesetzten Starrheit des Körpers auf der ganzen Fläche  $S_h$  die selben Werte haben, können wir ebenso als Funktionen von  $x_1, x_2, x_3$  auffassen. Aus den Gleichungen  $B, C, D$  schließen wir, daß  $\varphi$  jetzt den folgenden Bedingungen genügen muß:

1. Im Bereich  $B_v(t)$  muß  $\varphi = \varphi_v$  der Laplaceschen Gleichung:

$$\Delta \varphi_v = 0$$

genügen.  $\varphi_v$  muß in  $B_v$  regulär sein und im Unendlichen verschwinden.

2. Auf  $S_v(t)$  muß:

$$\frac{d\varphi_v}{dn} = U_n^{(v)}$$

sein.

3. Im Bereich  $B_h(t)$  muß  $\varphi = \varphi_h$  der Poissonschen Gleichung:

$$\Delta \varphi_h = -4\pi \frac{\partial L_j}{\partial x_j}$$

genügen.

4. Auf der Grenzfläche  $Z$ , zwischen  $B_v$  und  $B_h$ , muß:

$$\varphi_v = \varphi_h$$

sein.

5. Auf  $Z$  muß ferner:

$$\frac{d\varphi_v}{dn_Z} = \frac{d\varphi_h}{dn_Z} + 4\pi L_{n_Z}$$

sein.

6. In jedem Punkte  $P$  von  $B_h$  muß, wenn  $t_h$  der Zeitmoment ist, in welchem  $P$  auf  $S_h$  lag:

$$L_j(P) = \frac{1}{4\pi} \left\{ U_j(P) - \left( \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j} \right)_{P, t_h} \right\}.$$

Diese sechs Bedingungen enthalten alles, was wir von der Funktion  $\varphi$  wissen. Sie bilden also einen vollständigen Ersatz für die früher erwähnte Integro-Differentialgleichung.

Die Frage erhebt sich jetzt, ob die Bedingungen 1–6 die Funktion  $\varphi$  und den Vektor  $\mathbf{L}$  eindeutig bestimmen. Es ist leicht zu sehen, daß dies nicht der Fall ist. Wir betrachten die Bewegung eines starren Körpers während einer bestimmten Zeit, etwa  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Für jedes  $t$ , welches in dieses Intervall fällt, sind dann die Größen  $U_j$  in  $B_h(t)$  bekannte Funktionen von  $x_1, x_2, x_3$ . Wir nehmen an, daß es gelungen ist, eine diesen Werten von  $U_j$  entsprechende Lösung  $\varphi$ ,  $L_j$  der Bedingungen 1–6 zu finden. Wir konstruieren dann in folgender Weise eine neue Lösung derselben Bedingungen. Wir bezeichnen mit  $\tilde{\varphi}$  irgendeine von  $t$  unabhängige, im Inneren des Bereiches  $B_h(t_1)$  stetige und zweimal stetig differenzierbare Funktion von  $x_1, x_2, x_3$ , welche auf der Grenzfläche  $S(B_h(t_1))$  von  $B_h(t_1)$  verschwindet. Wir setzen dann:

in  $B_v(t)$ :

$$\varphi^* = \varphi_v^* = \varphi_v,$$

in  $B_h(t)$ :

$$\varphi^* = \varphi_h^* = \varphi_h + \tilde{\varphi},$$

$$L_j^* = L_j - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_j}.$$

Man sieht sofort, daß  $\varphi^*, L_j^*$  eine neue Lösung der Bedingungen 1–6 ist. Und ein Blick auf die Gleichungen (12), (13), (14) zeigt, daß die durch diese Formeln beschriebene Bewegung der Flüssigkeit in keiner Weise verändert wird, wenn wir  $\varphi$  mit  $\varphi^*$  vertauschen.

Wir können die Unbestimmtheit der Funktion  $\varphi$  und der Größen  $L_j$  benutzen, um die Bedingungen 1–6 zu vereinfachen. Wir erreichen dieses Ziel, indem wir die Funktion  $\tilde{\varphi}$  so wählen, daß in  $B_h$ :

$$\frac{\partial L_j^*}{\partial x_j} = 0$$

ausfällt.

Wir brauchen dazu nur für  $\tilde{\varphi}$  eine Lösung der Gleichung:

$$\Delta \tilde{\varphi} - 4\pi \frac{\partial L_j}{\partial x_j} = 0$$

wählen, welche in  $B_h(t_1)$  regulär ist und auf der Grenzfläche dieses Bereiches verschwindet.

Es folgt aus dem oben Gesagten, daß wir vom Anfang an hätten voraussetzen können, daß in  $B_h$

$$\frac{\partial L_j}{\partial x_j} = 0 \quad (15)$$

ist. Wir führen jetzt diese Voraussetzung ein und wollen die Folgerungen daraus ziehen.

Wir kehren zu der Bedingung (6), S.259, zurück. Sie ergibt wegen(15):

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j} \right)_{P, t_h} = \frac{\partial U_j}{\partial x_j} = \frac{\partial U_j}{\partial t_h} \frac{\partial t_h}{\partial x_j}.$$

Diese Gleichung enthält, wie unmittelbar ersichtlich ist, eine Bedingung, welche die Funktion  $\varphi_h$  an  $S_h$  erfüllen muß. In den Fällen, welche für die Anwendungen Interesse haben, kann man diese Bedingung in viel einfacherer Weise schreiben. Es ist wohl bekannt, daß die Potentialfunktionen, mit welchen man sich in der mathematischen Physik beschäftigt, bei den einfach geformten Körpern, mit denen man am meisten zu tun hat, nicht nur außerhalb dieser Körper existieren, sondern vielmehr ein Stückchen ins Innere der Körper fortgesetzt werden können. Wenn wir annehmen, daß dies auch für unser Problem gilt, so können wir unsere Gleichung in der Form:

$$\Delta \varphi_h + \frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial x_j \partial t_h} \frac{\partial t_h}{\partial x_j} = \frac{\partial U_j}{\partial t_h} \frac{\partial t_h}{\partial x_j}$$

schreiben. Da:

$$\Delta \varphi_h = -4\pi \frac{\partial L_j}{\partial x_j} = 0$$

ist, und da an  $S_h$   $t_h$  konstant ist und folglich:

$$\frac{\partial t_h}{\partial x_1} : \cos(n x_1) = \frac{\partial t_h}{\partial x_2} : \cos(n x_2) = \frac{\partial t_h}{\partial x_3} : \cos(n x_3)$$

ist, so folgt:

$$\frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial x_j \partial t_h} \cos(n_h x_j) = \frac{\partial U_j}{\partial t_h} \cos(n_h x_j)$$

oder:

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial \varphi_h}{\partial t} = \frac{\partial U_n}{\partial t}$$

an  $S_h$ .

Wir fassen zusammen, was wir unter unseren jetzigen Voraussetzungen über die Funktion  $\varphi$  aussagen können.

I. Im Bereiche  $B_v(t)$  ist  $\varphi = \varphi_v$  eine reguläre und im Unendlichen verschwindende Lösung der Laplaceschen Gleichung:

II. Auf  $S_v(t)$  gilt:

$$\frac{\partial \varphi_v}{\partial n} = U_n^{(v)}.$$

III. Im Bereiche  $B_h(t)$  genügt  $\varphi = \varphi_h$  ebenfalls der Laplaceschen Gleichung:

$$\Delta \varphi_h = 0.$$

IV. Auf  $S_h(t)$  gilt:

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial \varphi_h}{\partial t} = \frac{\partial U_n}{\partial t}.$$

V. Auf der Grenzfläche  $Z$  zwischen  $B_v$  und  $B_h$  gilt:

$$\varphi_v = \varphi_h.$$

VI. Auf  $Z$  gilt ferner:

$$\frac{\partial \varphi_v}{\partial n_Z} = \frac{\partial \varphi_h}{\partial n_Z} - \left( \frac{\partial \varphi_h}{\partial n_Z} \right)_{P, t_h} + U_{nZ}(P).$$

Wenn es gelungen ist, eine Funktion  $\varphi$  zu bestimmen, welche diesen Bedingungen genügt, so ist die Bewegung der Flüssigkeit durch die einfachen Formeln:

in  $B_v$ :

$$u_j = \frac{\partial \varphi_v}{\partial x_j}, \quad q = -\varrho \frac{\partial \varphi_v}{\partial t}.$$

in  $B_h$ :

$$u_j = U_j(t_h) + \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j} - \left( \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j} \right)_{P, t_h}, \quad p = -\varrho \frac{\partial \varphi_h}{\partial t}$$

bestimmt.

In den folgenden Paragraphen 27—31 werden wir uns mit speziellen Problemen beschäftigen, in denen es gelungen ist, die Funktion  $\varphi$  explizit zu bestimmen.

## 25 10. Befreiung von einschränkenden Voraussetzungen.

Wir haben unserer Analyse des Systemes (3), (4) die Annahme (5):  $k_n^{(v)} = 0$  an  $S_v(t)$ , zugrunde gelegt. Man sieht leicht, daß diese Annahme zulässig, aber nicht notwendig ist. Aus dem in § 24 14 bewiesenen Satze folgt, daß auch ohne diese Annahme  $\varphi_v$  an  $S_v(t)$  der Bedingung C genügen muß. Und man sieht leicht, daß auch die übrige Analyse ohne diese Annahme ausgeführt werden kann. Unsere Ergebnisse sind also davon unabhängig, ob man die Annahme (5) macht oder nicht.

Wir haben ferner zur Vereinfachung unseres Problemes angenommen, daß eine mit der Bewegungsrichtung des Körpers parallele Gerade die Oberfläche desselben höchstens in zwei Punkten schneidet. Auch von dieser Annahme können wir uns leicht frei machen. Wenn man sie aufgibt, kann es eintreten, daß die Oberfläche des Körpers einen zylindrischen Teil hat, dessen Erzeugenden mit der Bewegungsrichtung parallel sind. Man zeigt leicht, daß ein solcher Teil der Oberfläche zur Vorderseite zu zählen ist. Es kann ferner eintreten, daß gewisse Teilbereiche von  $B_h(t)$  von mehreren Flächen  $S_v$  und mehreren Flächen  $S_h$  durchschritten worden sind. In diesen Fällen gibt es mehrere mit der Bewegungsrichtung parallele, zylindrische Flächen, welche den Körper  $K(t)$  umhüllen. Die hinter dem Körper gelegenen Teile dieser Flächen zerlegen den Bereich  $B_h(t)$  in Teilbereiche. In jedem Teilbereiche gelten die oben gefundenen Gesetze I—VI. Die verschiedenen Potentialfunktionen  $\varphi_h$  gehen auf den Grenzflächen ihrer Existenzbereiche stetig ineinander oder in  $\varphi_v$  über.

### 25 11. Stationärer Fall.

Wenn die Geschwindigkeit des Körpers konstant und die Bewegung der Flüssigkeit stationär ist, kann  $\varphi$  nur von den Variablen  $x_j - U_j t$  ( $j = 1, 2, 3$ ) abhängen. Wir haben in diesem Falle:

$$\frac{\partial \varphi_h}{\partial t} = -U_j \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial U_j}{\partial t} = 0.$$

Die Bedingung IV, S. 261, ergibt unter diesen Umständen:

$$\frac{d}{dn} \left( U_j \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j} \right) = 0 \quad \text{auf } S_h. \quad (16)$$

Wenn wir die  $x_1$ -Achse in die Richtung der Bewegung des Körpers legen, können wir diese Bedingung einfacher:

$$\frac{d}{dn} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0 \quad \text{auf } S_h \quad (17)$$

schreiben.

Wir haben also den Satz: Bei stationärer Bewegung genügt  $\varphi$  an der Vorderseite der Bedingung:

$$\frac{d\varphi}{dn} = U_n$$

und an der Rückseite der Bedingung:

$$\frac{d}{dn} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0.$$

## 25 12. Ausführungen über den Begriff der hydrodynamischen Rückseite.

Wir sind schon mehrmals dem Satze begegnet: bei verschwindender Zähigkeit gleitet eine Flüssigkeit längs der Vorderseite eines Körpers, aber haftet an der Rückseite desselben. Wir wollen noch einen Augenblick bei diesem Satze stehen bleiben. Wir sind bei der Ableitung desselben von den vereinfachten hydrodynamischen Differentialgleichungen (1) ausgegangen. Wenn unser Satz eine physikalische Bedeutung haben soll, so muß er auch für die vollständigen hydrodynamischen Differentialgleichungen gelten. Was ist aber, wenn man von diesen vollständigen Differentialgleichungen ausgeht, unter „Vorderseite“ und „Rückseite“ eines Körpers zu verstehen? Daß hier nicht die geometrischen Verhältnisse, sondern die relative Bewegung des Körpers und der angrenzenden Flüssigkeitsschicht entscheidend sind, liegt im Wesen der Sache. Etwas definitives darüber zu sagen wird erst dann möglich sein, wenn es gelungen ist, bei den vollständigen hydrodynamischen Differentialgleichungen den Grenzübergang  $\mu \rightarrow 0$  auszuführen. Es gibt aber eine Vermutung, die einen so hohen Grad von innerer Wahrscheinlichkeit hat, daß wir sie hier aussprechen wollen. Als Maß der relativen Bewegung des Körpers und der angrenzenden Flüssigkeitsschicht in einem bestimmten Punkte der Oberfläche des Körpers wählen wir die Größe:

$$\frac{du_n}{dn} = \cos(n x_i) \cos(n x_k) \frac{\partial u_j}{\partial x_k}.$$

Wir bemerken, daß an einem Teile der Oberfläche eines stationär bewegten Körpers, wo die Flüssigkeit am Körper haftet, wegen der Kontinuitätsbedingung notwendig:

$$\frac{du_n}{dn} = 0$$

ist, und wir stellen das (hypothetische) Gesetz auf: Bei verschwindender Zähigkeit darf an der Oberfläche eines stationär bewegten starren Körpers die Größe:

$$\frac{du_n}{dn}$$

nirgends einen positiven Wert annehmen.

Werfen wir von dem hier eingenommenen Standpunkte aus einen Blick auf die Theorie der idealen Flüssigkeiten! Betrachten wir etwa die Bewegung einer starren Kugel in einer solchen Flüssigkeit!  $U$  sei ihre Geschwindigkeit in einem gewissen Momente. Wir legen den Anfangspunkt in den Mittelpunkt der Kugel in diesem Momente und die

$x_1$ -Achse in die Bewegungsrichtung derselben. Die Bewegung der Flüssigkeit in diesem Momente ist dann durch die Formel:

$$u_j = -\frac{1}{2} U a^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_1}{R^3}$$

gegeben, wo  $a$  der Radius der Kugel und  $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  ist. Wir berechnen  $\frac{du_n}{dn}$  an der Oberfläche der Kugel und finden:

$$\frac{du_n}{dn} = -\frac{3x_1 U}{a^2}.$$

Nach unseren Annahmen ist  $U > 0$ . Wir haben dann:

$$\frac{du_n}{dn} \leq 0,$$

je nachdem  $x_1 \gtrless 0$ . Der Fehler der Theorie der idealen Flüssigkeiten ist nach unserem jetzigen Standpunkte der, daß nach ihr an der Rückseite des Körpers, d. h. für  $x_1 < 0$ , die nicht zulässige Ungleichung  $\frac{du_n}{dn} > 0$  bestehen soll.

## § 26. Neue Methode zur Behandlung des stationären Falles.

### A. Zweidimensionaler Fall.

#### 261. Der Grenzübergang bei geradliniger Begrenzung.

Die am meisten befriedigende Methode den Grenzübergang zu verschwindender Zähigkeit auszuführen, würde darin bestehen, zuerst das Randwertproblem bei endlichem, nicht verschwindendem  $\mu$  zu lösen und dann den Grenzübergang  $\mu \rightarrow 0$  zu vollziehen. Dieser Weg ist in dem allgemeinen Falle noch nicht gangbar. Dagegen kann man für einen Bereich mit einer geradlinigen — bzw. im dreidimensionalen Falle, ebenen — Begrenzung die Gleichungen:

$$-\varrho U_1 \frac{\partial u_j}{\partial x_1} = -\frac{\partial q}{\partial x_j} + \mu \Delta u_j, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

mit vorgeschriebenen Werten der  $u_j$  an der Grenze, auch wenn  $\mu > 0$  ist, exakt lösen und dann den Grenzübergang  $\mu \rightarrow 0$  in dieser Lösung ausführen. Die Resultate, welche man in dieser Weise erhält, stimmen mit den oben abgeleiteten vollständig überein. Sie gestatten uns aber, wie wir später sehen werden, einen Schritt weiter zu gehen, als unsere bis jetzt erhaltenen Ergebnisse erlauben. Wir wollen deshalb diese Resultate hier mitteilen.

Wir betrachten zuerst den zweidimensionalen Fall und wählen die gerade Grenzlinie zu unserer  $x_2$ -Achse. Wir müssen dann die Bewegungsgleichungen der Flüssigkeit in der allgemeinen Form:

$$-\varrho U_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial q}{\partial x_j} + \mu \Delta u_j, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (1)$$

schreiben. Wir suchen eine für  $x_1 > 0$  gültige Lösung dieses Systemes. Die Nebenbedingungen seien für  $\mu > 0$ : für  $x_1 = 0$ :  $u_j = V_j(x_2)$ ; in unendlicher Ferne:  $u_j = 0$ .

Die Lösung dieser Aufgabe und der Grenzübergang  $\mu \rightarrow 0$  ergibt:  
wenn  $U_1 > 0$  ist:

$$\left. \begin{aligned} u_j &= \frac{\partial \varphi_v}{\partial x_j}, & q &= \varrho U_k \frac{\partial \varphi_v}{\partial x_k}, \\ \varphi_v &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V_1(\xi) \log r d\xi, \\ r^2 &= x_1^2 + (x_2 - \xi)^2, & r &\geq 0; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

wenn  $U_1 < 0$  ist:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\pi(U_1^2 + U_2^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} [V_1(\xi) U_2 - V_2(\xi) U_1] \left\{ \frac{x_1 U_2 + (x_2 - \xi) U_1}{r^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{U_1}{x_2 - \xi - \frac{U_2}{U_1} x_1} \right\} d\xi + \\ &\quad + \frac{U_1}{U_1^2 + U_2^2} \left[ U_1 V_1 \left( x_2 - \frac{U_2}{U_1} x_1 \right) + U_2 V_2 \left( x_2 - \frac{U_2}{U_1} x_1 \right) \right], \\ u_2 &= \frac{1}{\pi(U_1^2 + U_2^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} [V_1(\xi) U_2 - V_2(\xi) U_1] \left\{ \frac{(x_2 - \xi) U_2 - x_1 U_1}{r^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{U_2}{x_2 - \xi - \frac{U_2}{U_1} x_1} \right\} d\xi + \\ &\quad + \frac{U_2}{U_1^2 + U_2^2} \left[ U_1 V_1 \left( x_2 - \frac{U_2}{U_1} x_1 \right) + U_2 V_2 \left( x_2 - \frac{U_2}{U_1} x_1 \right) \right], \\ q &= \frac{\varrho}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [V_1(\xi) U_2 - V_2(\xi) U_1] \frac{x_2 - \xi}{r^2} d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Wenn wir mit einem Strich über einer Funktion von  $x_1, x_2$  andeuten, daß darin  $x_j$  mit  $x_j - \frac{U_j}{U_1} x_1$  vertauscht werden soll, können wir die Gleichungen (3) auch in der Form:

$$u_j = \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j} - \overline{\frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j}} + \bar{V}_j$$

$$q = \varrho U_k \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_k},$$

$$\varphi_h = \frac{1}{\pi(U_1^2 + U_2^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} [V_1(\xi) U_2 - V_2(\xi) U_1] \left| \begin{array}{l} U_2 \log r - \\ - U_1 \operatorname{arctg} \frac{x_2 - \xi}{x_1} \end{array} \right\} d\xi$$

schreiben.

(3bis)

## 26 2. Ansatz zur Lösung des allgemeinen Problems.

Die Formeln (2), (3) geben die Lösung der allgemeinen Randwertaufgabe des Systemes (1) bei  $\mu = 0$  für den Fall, daß die Grenzkurve  $S$  des „Körpers“ eine gerade Linie ist. Wir sehen aus diesen Formeln, daß in diesem Falle die  $u_j$  aus Elementen zusammengesetzt sind, welche je von einem Elementen der geradlinigen Grenzkurve abhängen. Es liegt nahe, anzunehmen, daß auch im allgemeinen Falle, d. h. wenn die Grenzkurve nicht geradlinig ist, die  $u_j$  sich durch Ausdrücke darstellen lassen, welche aus Elementen zusammengesetzt sind, welche in derselben Weise von je einem Elementen der Grenzkurve  $S$  abhängen. Die Verfolgung dieses Gedankens führt zu dem folgenden Ansatz zur Lösung des Problemes:

in  $B_v$ :

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{S_v} \lambda(\xi) \frac{x_1 - \xi_1}{r^2} ds_{\xi} + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{S_h} \mu(\xi) [(x_1 - \xi_1)n_2(\xi) - (x_2 - \xi_2)n_1(\xi)] \frac{ds_{\xi}}{r^2}, \\ u_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{S_v} \lambda(\xi) \frac{x_2 - \xi_2}{r^2} ds_{\xi} + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{S_h} \mu(\xi) [(x_1 - \xi_1)n_1(\xi) + (x_2 - \xi_2)n_2(\xi)] \frac{ds_{\xi}}{r^2}; \end{aligned} \right\} (4)$$

in  $B_h$ :

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{S_v} \lambda(\xi) \frac{x_1 - \xi_1}{r^2} ds_{\xi} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{S_h} \mu(\xi) \frac{x_1 - \xi_1}{x_2 - \xi_2} [(x_1 - \xi_1)n_1(\xi) + (x_2 - \xi_2)n_2(\xi)] \frac{ds_{\xi}}{r^2} + \\ &+ \nu(x_2), \\ u_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{S_v} \lambda(\xi) \frac{x_2 - \xi_2}{r^2} ds_{\xi} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{S_h} \mu(\xi) [(x_1 - \xi_1)n_1(\xi) + (x_2 - \xi_2)n_2(\xi)] \frac{ds_{\xi}}{r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$\xi_1, \xi_2$  sind hier die Koordinaten eines Punktes auf dem Elemente  $ds_{\xi}$  von  $S$ .  $n(\xi)$  ist die im Punkte  $\xi_1, \xi_2$  nach außen gezogene Normale der Kurve  $S$  von der Länge 1.  $B_v, B_h, S_v, S_h$  haben dieselbe Bedeutung wie im vorigen Paragraphen.  $\lambda(\xi), \mu(\xi), \nu(\xi)$  sind Funktionen von  $\xi_1, \xi_2$ , welche aus den Randbedingungen:  $u_n = U_1 n_1$  an  $S_v$ ;  $u_1 = U_1, u_2 = 0$  an  $S_h$  bestimmt werden müssen.  $r$  hat die Bedeutung  $\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}$ .

### 263. Zurückführung der Randbedingungen auf eine Fredholmsche Integralgleichung.

Die Randbedingungen:

$$u_n = U_1 n_1 \text{ an } S_v, \quad u_2 = 0 \text{ an } S_h$$

ergeben unter Benutzung bekannter Eigenschaften des logarithmischen Potentiales, wenn der Punkt  $P'$  mit den Koordinaten  $x'_1, x'_2$  auf  $S$  liegt: wenn  $P'$  auf  $S_v$  liegt:

$$\left. \begin{aligned} \lambda(x') + \frac{1}{\pi} \int_{S_v} \lambda(\xi) [(x'_1 - \xi_1)n_1(x') + (x'_2 - \xi_2)n_2(x')] \frac{ds_{\xi}}{r'^2} + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{S_h} \mu(\xi) [(x'_1 - \xi_1)[n_1(x')n_2(\xi) + n_2(x')n_1(\xi)] - \\ - (x'_2 - \xi_2)[n_1(x')n_1(\xi) - n_2(x')n_2(\xi)]] \frac{ds_{\xi}}{r'^2} = U_1 n_1, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

wenn  $P'$  auf  $S_h$  liegt:

$$\left. \begin{aligned} \mu(x') + \frac{1}{\pi} \int_{S_v} \lambda(\xi) \frac{x_2' - \xi_2}{r'^2} ds_\xi + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{S_h} \mu(\xi) [(x_1' - \xi_1) n_1(\xi) + (x_2' - \xi_2) n_2(\xi)] \frac{ds_\xi}{r'^2} = 0 \\ r' = \sqrt{(x_1' - \xi_1)^2 + (x_2' - \xi_2)^2}. \end{aligned} \right\} (7)$$

Die Gleichungen (6), (7) lassen sich als eine Fredholmsche Integralgleichung auffassen. Der Kern derselben ist überall endlich, wenn die Randkurve eine überall stetige Tangente und eine überall endliche Krümmung hat. Er ist als Funktion der beiden Punkte  $x_1'$ ,  $x_2'$  und  $\xi_1'$ ,  $\xi_2'$  stetig, so lange diese beiden Punkte nicht die Grenzpunkte der beiden Bereiche  $S_v$  und  $S_h$  überschreiten. Dagegen macht der Kern im allgemeinen einen endlichen Sprung, wenn einer der beiden Punkte durch einen der beiden Grenzpunkte zwischen  $S_v$  und  $S_h$  passiert. Das System (6), (7) kann unter diesen Umständen offenbar mittels der Fredholmschen Methode behandelt werden.

Nachdem  $\lambda(\xi)$  und  $\mu(\xi)$  bestimmt sind, erhält man  $v(x_2)$  aus der Bedingung  $u_1 = U_1$  an  $S_h$ . Sie ergibt:

$$\left. \begin{aligned} v(x_2') = U_1 - \frac{1}{\pi} \int_{S_v} \lambda(\xi) \frac{x_1' - \xi_1}{r'^2} ds_\xi - \\ - \frac{1}{\pi} \int_{S_h} \mu(\xi) \frac{x_1' - \xi_1}{x_2' - \xi_2} [(x_1' - \xi_1) n_1(\xi) + (x_2' - \xi_2) n_2(\xi)] \frac{ds_\xi}{r'^2}. \end{aligned} \right\} (8)$$

Man hat hier rechts  $x_1'$  als Funktion von  $x_2'$  aufzufassen. Die Beziehung zwischen ihnen wird durch die Gleichung des Kurvenstückes  $S_h$  gegeben. Man erhält so  $v$  in seiner Abhängigkeit von  $x_2'$  oder allgemeiner von  $x_2$ .

#### 26 4. Nachweis, daß die erhaltene Lösung dieselbe Gestalt hat wie die in den Paragraphen 23 und 25 gewonnene Lösung.

Wir haben im § 23 S. 227 und 228 die Lösung eines speziellen Falles des hier behandelten Problems in der Form:

in  $B_v$ :

$$u_j = \frac{\partial A}{\partial x_j}, \quad q = \varrho U_1 \frac{\partial A}{\partial x_1},$$

in  $B_h$ :

$$u_j = \frac{\partial A}{\partial x_j} - \left( \frac{\partial A}{\partial x_j} \right)_h + U_j, \quad q = \varrho U_1 \frac{\partial A}{\partial x_1},$$

$$\Delta A = 0$$

gefunden. In § 25 (12), (13) und (14) haben wir die Lösung eines allgemeineren Problemes, das unsere jetzige Aufgabe als speziellen Fall enthält, in einer ähnlichen Form dargestellt. Es ist unter diesen Umständen von Interesse zu sehen, ob die jetzt gefundene Lösung auch in dieser Form dargestellt werden kann. Man sieht nun leicht, daß dies in der Tat der Fall ist. Wir definieren durch die Formel:

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{1}{\pi} \int_{S_v} \lambda(\xi) \log r dS_\xi + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{S_h} \mu(\xi) \left\{ n_2(\xi) \log r + n_1(\xi) \operatorname{arctg} \frac{x_2 - \xi_2}{x_1 - \xi_1} \right\} dS_\xi \end{aligned} \quad (9)$$

eine Funktion von  $x_1, x_2$ . Sie ist eine außerhalb der Kurve  $S$  überall reguläre Lösung der Laplaceschen Gleichung:

$$\Delta \varphi = 0.$$

Sie ist nicht eindeutig. Vielmehr wächst der Betrag von  $\varphi$  um:

$$2 \int_{S_h} \mu(\xi) n_1(\xi) dS_\xi,$$

wenn der Punkt  $x_1, x_2$  in positiver Richtung die Kurve  $S$  umkreist.  $\varphi$  verschwindet in unendlicher Ferne nicht, sondern nimmt im allgemeinen dort einen dem absoluten Betrage nach unendlich großen Wert an. Dagegen sind die Ableitungen  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$  außerhalb der Kurve  $S$  überall endliche, eindeutige und stetige Lösungen der Laplaceschen Gleichung. Auch verschwinden sie in unendlicher Ferne.

Wir wollen zeigen, daß man die durch (4) und (5) gegebene Lösung unseres Problemes durch die Funktion  $\varphi$  ausdrücken kann. Mit Hilfe der Beziehungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \log r &= \frac{\partial}{\partial x_2} \operatorname{arctg} \frac{x_2 - \xi_2}{x_1 - \xi_1} = \frac{x_1 - \xi_1}{r^2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \log r &= -\frac{\partial}{\partial x_1} \operatorname{arctg} \frac{x_2 - \xi_2}{x_1 - \xi_1} = \frac{x_2 - \xi_2}{r^2}, \end{aligned}$$

sieht man in der Tat sofort, daß die Formeln (4) sich in der Form:

in  $B_v$ :

$$u_j = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

schreiben lassen. Der zugehörige Wert von  $q$  ist:

$$q = \varrho U_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}.$$

In die erste Gleichung (5) führen wir den Wert (8) von  $\nu(x_2)$  ein. Wir erhalten so:

in  $B_h$ :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{S_v} \lambda(\xi) \left\{ \frac{x_1 - \xi_1}{r^2} - \frac{x_1' - \xi_1}{r'^2} \right\} ds_\xi + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{S_h} \mu(\xi) \left\{ \frac{x_1 - \xi_1}{x_2 - \xi_2} [(x_1 - \xi_1)n_1(\xi) + (x_2 - \xi_2)n_2(\xi)] \frac{1}{r^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{x_1' - \xi_1}{x_2' - \xi_2} [(x_1' - \xi_1)n_1(\xi) + (x_2' - \xi_2)n_2(\xi)] \frac{1}{r'^2} \right\} ds_\xi + U_1. \end{aligned}$$

Hier ist  $x_2' = x_2$ .  $x_1'$ ,  $x_2'$  ist der Punkt der Rückseite,  $S_h$ , in welcher diese von einer mit der  $x_1$ -Achse parallelen, durch den Punkt  $x_1$ ,  $x_2$  gezogenen Geraden getroffen wird. Unser Ausdruck für  $u_1$  lässt sich unter diesen Umständen auch in der folgenden Form schreiben:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{S_v} \lambda(\xi) \left\{ \frac{x_1 - \xi_1}{r^2} - \frac{x_1' - \xi_1}{r'^2} \right\} ds_\xi + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{S_h} \mu(\xi) \left\{ [(x_1 - \xi_1)n_2(\xi) - (x_2 - \xi_2)n_1(\xi)] \frac{1}{r^2} - \right. \\ &\quad \left. - [(x_1' - \xi_1)n_2(\xi) - (x_2' - \xi_2)n_1(\xi)] \frac{1}{r'^2} \right\} ds_\xi + U_1. \end{aligned}$$

Wir sehen hieraus, daß in  $B_h$ :

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)_h + U_1.$$

Ein Blick auf die zweite Gleichung (5) zeigt, daß in  $B_h$  auch:

$$u_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}.$$

Für  $q$  erhält man wieder den Wert:

$$q = \varrho U_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}.$$

Wir haben also, zusammenfassend:

in  $B_v$ :

$$u_j = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, \quad q = \varrho U_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad (10)$$

in  $B_h$ :

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)_h + U_1, \quad u_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad q = \varrho U_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}.$$

Die Randbedingungen, welchen die Funktion  $\varphi$  genügt, sind durch (6) und (7) S. 267 u. 268 gegeben. Die erste Gleichung drückt aus, daß auf  $S_v$ :

$$\frac{d\varphi}{dn} = U_n. \quad (11)$$

Die Gleichung (7) drückt aus, daß auf  $S_h$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0 \quad (11^{\text{bis}})$$

ist. Diese Gleichung können wir aber in einer anderen Form schreiben.

Wir können die Gleichung (11<sup>bis</sup>) als die Gleichung der Kurve  $S_h$  auffassen. Für die Normale dieser Kurve folgt dann:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \cos nx_2 - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \cos nx_1 = 0.$$

Wenn nun, wie wir vorausgesetzt haben, auf  $S_h$ :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 0$$

ist, so folgt:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \cos nx_1 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \cos nx_2 = 0$$

auf  $S_h$ . Also:

$$\frac{d}{dn} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0 \quad (12)$$

auf  $S_h$ .

Die Gleichungen (10), (11), (12) zeigen, daß die in diesem Paragraphen gefundenen Ergebnisse vollständig mit den in den Paragraphen 23 und 25 gefundenen übereinstimmen. Aber offenbar gehen die hier gefundenen Resultate über die früher gefundenen hinaus. Wir sehen aus der Definitionsgleichung (9) von  $\varphi$  und aus den Gleichungen (10), daß die Unterscheidung zwischen  $\varphi_v$  und  $\varphi_h$ , welche wir im

Paragraph 25 machen mußten, im zweidimensionalen Falle überflüssig ist. Die Definitionsgleichung von  $\varphi$  zeigt ferner, wie sich diese Funktion in unendlicher Ferne verhält. Auch geht die Vieldeutigkeit der Funktion  $\varphi$  unmittelbar aus dieser Gleichung hervor. Diese Vieldeutigkeit hat einen sehr einfachen Sinn. Sie zeigt, daß die Flüssigkeit um den Körper zirkulieren muß. Unsere Formeln bestätigen mit anderen Worten die zuerst von Lanchester aufgestellte Hypothese, daß, wenn ein Körper sich in einer reibungslosen Flüssigkeit bewegt, diese im allgemeinen um den Körper zirkulieren muß. Und schließlich sind wir ja durch die Fredholmsche Theorie imstande, die Funktion  $\varphi$  explizit zu berechnen und also das ganze Problem definitiv zu lösen.

## B. Dreidimensionaler Fall.

### 26 5. Der Grenzübergang bei ebener Begrenzung.

Im dreidimensionalen Falle legen wir zunächst die  $x_2x_3$ -Ebene in die Grenzebene. Die Flüssigkeit möge den Halbraum  $x_1 > 0$  erfüllen. Unsere Aufgabe ist, das System:

$$-\varrho U_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\mu \Delta u_j, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (13)$$

mit den Nebenbedingungen: für  $x_1 = 0$ :  $u_j = V_j(x_2, x_3)$ , in unendlicher Ferne:  $u_j = 0$  zu lösen und dann den Grenzübergang  $\mu \rightarrow 0$  auszuführen. Auch hier müssen wir uns damit begnügen, das Ergebnis dieser Untersuchung mitzuteilen. Wir setzen, um es in einigermaßen einfacher Form schreiben zu können:

$U_j^2 = U^2$ , ( $U \geqq 0$ );  $U_j = a_j U$ ;  $a_3 V_1 - a_1 V_3 = W_2$ ,  
 $a_1 V_2 - a_2 V_1 = W_3$ ;  $r^2 = x_1^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2 = (x_j - \xi_j)^2$ ,  
 $(\xi_1 = 0)$ . Ein Strich über einer Funktion von  $x_1, x_2, x_3$  soll bedeuten,  
daß  $x_j$  darin mit  $x_j - \frac{U_j}{U_1} x_1$  vertauscht werden soll. Wir haben dann:

für  $U_1 > 0$ :

$$\left. \begin{aligned} u_j &= \frac{\partial \varphi_v}{\partial x_j}, & q &= \varrho U_k \frac{\partial \varphi_v}{\partial x_k}, \\ \varphi_v &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} V_1(\xi_2, \xi_3) \frac{d\xi_2 d\xi_3}{r}; \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

für  $U_1 < 0$ :

$$\left. \begin{aligned} u_j &= \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j} - \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j} + V_j \left( x_2 - \frac{a_2}{a_1} x_1, \quad x_3 - \frac{a_3}{a_1} x_1 \right), \\ q &= \varrho U_k \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_k}, \\ \varphi_h &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ W_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - W_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \right] \log \{r + a_j(x_j - \xi_j)\} d\xi_2 d\xi_3 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \left( \frac{\partial W_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial W_2}{\partial \xi_3} \right) \log \{r + a_j(x_j - \xi_j)\} d\xi_2 d\xi_3. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Man kann aus den Formeln (14), (15) folgendes ablesen. Wenn  $U_1 > 0$  ist, so ist die Bewegung eine reine Potentialbewegung. Von den Grenzbedingungen  $u_j = V_j$  an der Ebene  $x_1 = 0$  ist nur eine,  $u_1 = V_1$ , erfüllt. Wenn dagegen  $U_1 < 0$  ist, so ist die Bewegung aus einer Potentialbewegung und einer den Gleichungen:

$$U_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0$$

genügenden Wirbelbewegung zusammengesetzt. Die Grenzbedingungen  $u_j = V_j$  an der Ebene  $x_1 = 0$  sind alle erfüllt. Unser Satz, daß eine Flüssigkeit bei verschwindender Zähigkeit an der Vorderseite eines Körpers gleitet und an der Rückseite desselben haftet, findet auch in diesen Ergebnissen eine Bestätigung.

## 26 6. Ansatz zur Lösung des allgemeinen Problems.

Wir legen die  $x_1$ -Achse zur Geschwindigkeit des Körpers parallel. Unser System von Differentialgleichungen hat dann die Form:

$$-\varrho U_1 \frac{\partial u_j}{\partial x_1} = -\frac{\partial q}{\partial x_j} + \mu \Delta u_j, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (16)$$

Wir stellen uns die Aufgabe, dieses System an der Grenze  $\mu = 0$  für den Fall zu lösen, daß  $u_1, u_2, u_3$  auf einer geschlossenen Fläche  $S$  die Werte  $U_1, U_2 = 0, U_3 = 0$  annehmen und, so lange  $\mu > 0$  ist, in unendlicher Ferne verschwinden. Die Formeln (14), (15) legen es nahe, die Lösung dieser Aufgabe durch den Ansatz:

in  $B_v$ :

$$u_j = \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}, \quad q = \varrho U_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1},$$

in  $B_h$ :

$$\left. \begin{aligned} u_j &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right)_h + U_j, \quad q = \varrho U_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \\ \Phi &= \frac{1}{2\pi} \int_{S_v} \frac{P(\xi) dS_\xi}{r} + \frac{1}{2\pi} \int_{S_h} N(\xi) \log(r + x_1 - \xi_1) dS_\xi, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

zu versuchen. Die Funktionen  $P$  und  $N$  sind dabei aus den Randbedingungen zu bestimmen.

### 26 7. Nachweis, daß der Ansatz sich auf die aus § 23 und § 25 bekannte Form zurückführen läßt.

Die Funktion:

$$\log(r + x_1 - \xi_1)$$

genügt in dem Bereich, wo  $r + x_1 - \xi_1 > 0$  ist, der Laplaceschen Gleichung:

$$\Delta \log(r + x_1 - \xi_1) = 0.$$

Die Funktion  $\Phi$  in (17) ist infolgedessen in  $B_v$  eine Lösung der Laplaceschen Gleichung. Dagegen genügt  $\Phi$  in  $B_h$ , wie wir aus der Formel (25) S. 226 ersehen können, der Gleichung:

$$\Delta \Phi = 2 \left( \frac{N(x)}{|\cos(nx_1)|} \right)_h. \quad (18)$$

Die Gleichung (18) zeigt, daß der Ansatz (17) nicht die Form hat, welche wir nach den in § 23, Formeln (27) S. 227 und im § 25, Formeln (12), (13), (14) S. 257 gewonnenen Ergebnissen für die Lösung unseres Problems zu erwarten haben. Sie zeigt aber auch, daß wir unseren Ansatz (17) leicht auf jene Form bringen können. Die rechte Seite von (18) hängt nur von  $x_2, x_3$  ab. Wir können infolgedessen eine nur von  $x_2, x_3$  abhängige Funktion,  $\psi(x_2, x_3)$ , bilden, die in  $B_h$  der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} = \Delta \Phi \quad (19)$$

genügt. Wenn wir dann:

in  $B_v$ :

$$\Phi = \varphi_v,$$

in  $B_h$ :

$$\Phi - \psi = \varphi_h$$

setzen, so genügen  $\varphi_v$  und  $\varphi_h$  der Laplaceschen Gleichung, und wir haben:

in  $B_v$ :

$$u_j = \frac{\partial \varphi_v}{\partial x_j}, \quad q = \varrho U_1 \frac{\partial \varphi_v}{\partial x_1},$$

in  $B_h$ :

$$u_j = \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j} - \left( \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j} \right)_h + U_j, \quad q = \varrho U_1 \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_1}.$$

(20)

Die Funktion  $\psi$  ist durch die Gleichung (20) noch nicht bestimmt. Wir können noch vorschreiben, daß der Wert von  $\psi$  am Rande des Existenzbereiches, d. h. auf der zylindrischen Grenzfläche  $Z$ , zwischen  $B_v$  und  $B_h$  eine beliebige stetige Funktion von  $x_2, x_3$  sein soll. Wenn wir insbesondere vorschreiben, daß am Rande  $\psi = 0$  sein soll, so werden  $\varphi_v$  und  $\varphi_h$  auf  $Z$  stetig ineinander übergehen. Dagegen wird im allgemeinen auf  $Z$  die Beziehung:

$$\frac{d\varphi_v}{dn_z} = \frac{d\varphi_h}{dn_z}$$

nicht bestehen. Diese Ergebnisse stimmen mit den in § 25 gefundenen vollständig überein.

### 268. Die Randbedingungen.

Wir können jetzt die Gleichungen aufstellen, die zur Bestimmung von  $P$  und  $N$  in (17) dienen müssen. Die Bedingung, daß die Flüssigkeit in der Grenze  $\mu = 0$  längs der Vorderseite  $S_v$  gleiten soll, ergibt:

auf  $S_v$ :

$$\frac{d\Phi}{dn} = U_n = U_1 \cos n x_1,$$

also:

$$\begin{aligned} P(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{S_v} P(\xi) \frac{d}{dn_x} \frac{1}{r} dS_\xi + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{S_h} N(\xi) \frac{d}{dn_x} \log(r + x_1 - \xi_1) dS_\xi = U_n. \end{aligned} \quad (21)$$

Die Kontinuitätsbedingung:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

auf den Bereich  $B_h$  angewandt, ergibt andererseits, wie wir aus § 25 S. 262 sehen können:

auf  $S_h$ :

$$\frac{d}{dn} \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_1} = \frac{d}{dn} \frac{d\Phi}{dx_1} = 0,$$

also:

$$\left. \begin{aligned} N(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{S_v} P(\xi) \frac{d}{dn_x} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} dS_\xi + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{S_h} N(\xi) \frac{d}{dn_x} \frac{1}{r} dS_\xi = 0. \end{aligned} \right\} (22)$$

Die Gleichungen (21) und (22) können als eine lineare Integralgleichung aufgefaßt werden. Singulär ist diese Integralgleichung nicht nur wegen des Verhaltens der Kerne im Punkte  $x_j = \xi_j$ , sondern auch besonders dadurch, daß, wenn der Punkt  $x_1, x_2, x_3$  zu der Randkurve  $s_h$  gehört, welche die Grenze zwischen  $S_v$  und  $S_h$  ist, das Integral:

$$\int_{S_v} P(\xi) \frac{d}{dn_x} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} dS_\xi$$

keinen Sinn hat, wenn über  $P(\xi)$  nichts als Stetigkeit vorausgesetzt wird. Doch läßt sich die Integralgleichung durch Iteration auf eine reguläre Form bringen.

### 269. Nachweis, daß die Potentialfunktion $\varphi$ im rotationsymmetrischen Falle außerhalb des Körpers regulär ist.

Wir kehren zu den Gleichungen (17) zurück und wenden die Kontinuitätsbedingung:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

auf den Bereich  $B_h$  an. Wir erhalten:

$$\Delta \Phi = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)_h + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)_h.$$

Wir integrieren diese Gleichung über einen gegen die  $x_1$ -Achse senkrechten, die Fläche  $S$  nicht schneidenden Querschnitt  $Q$  des Bereiches  $B_h$ . Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \iint_Q \Delta \Phi dx_2 dx_3 &= \int_Q \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)_h + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)_h \right] dx_2 dx_3 = \\ &= \int_s \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)_h \cos(n_z x_2) + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)_h \cos(n_z x_3) \right] ds = \int_s \left( \frac{d\Phi}{dn_z} \right)_h ds. \end{aligned}$$

$s$  ist hier die Randkurve von  $Q$ .  $n_z$  ist die Normale des Zylinders  $Z$ .

Nun ist offenbar:

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial n_Z} \right)_h$$

der Grenzwert, welchem sich die normale Ableitung von  $\Phi$  auf  $S_h$  nähert, wenn der Aufpunkt sich der Grenzkurve  $s_h$  nähert. Andererseits folgt aus dem Ausdruck (17) von  $\Phi$ , daß die normale Ableitung von  $\Phi$  auf  $S$  stetig ist. Daraus folgt, daß:

$$\left( \frac{d\Phi}{d n_Z} \right)_h$$

den Wert:

$$\left( \frac{d\Phi}{d n} \right)_{s_n} = (U_1 \cos(n x_1))_{s_n} = 0$$

haben muß. Folglich:

$$\int \int_Q \Delta \Phi dx_2 dx_3 = 0 \quad (23)$$

Die Beziehung (23) ist die Bedingung dafür, daß die Gleichung (19) eine Lösung besitzt, welche am Rande, d. h. auf der zylindrischen Grenzfläche  $Z$  zwischen  $B_v$  und  $B_h$  der Bedingung:

$$\frac{d\psi}{d n_Z} = 0 \quad (24)$$

genügt. Statt der Bedingung  $\psi = 0$  an  $Z$  können wir also der Funktion  $\psi$  die Bedingung (24) an  $Z$  vorschreiben. Da  $\psi$  durch diese Bedingung nur bis auf eine Konstante bestimmt ist, so können wir außerdem vorschreiben, daß  $\psi$  in einem bestimmten Punkte von  $Z$  verschwindet.

Wir betrachten jetzt den Fall, daß der Körper Rotationssymmetrie um eine mit der Bewegungsrichtung parallele Gerade hat. Wir setzen überdies voraus, daß die Fläche  $Z$  aus einer einzigen, zylindrischen Fläche besteht. Wir bestimmen unsere Lösung  $\psi$  der Gleichung (19) durch die Bedingung (24) und die Forderung, daß  $\psi$  in einem gewissen Punkte von  $Z$  verschwindet soll. Aus der Symmetrie des Problems folgt, daß  $\psi$  nur von der Entfernung des Aufpunktes von der Symmetriechse des Körpers abhängen kann. Wenn  $\psi$  in einem Punkte von  $Z$  verschwindet, muß dann überall auf  $Z$ :

$$\psi = 0$$

sein. In diesem Falle besteht auf  $Z$  sowohl die Beziehung:

$$\varphi_v = \varphi_h$$

wie die Beziehung:

$$\frac{d\varphi_v}{dn_z} = \frac{d\varphi_h}{dn_z}.$$

Nach einem bekannten Satze der Potentialtheorie folgt aus diesen Beziehungen, daß alle Ableitungen von  $\varphi_v$  an der Grenzfläche  $Z$  dieselben Werte annehmen, wie die entsprechenden Ableitungen von  $\varphi_h$ .  $\varphi_h$  kann als die Fortsetzung der innerhalb von  $B_v$  definierten Funktion  $\varphi_v$  in  $B_h$  aufgefaßt werden.  $\varphi_v$  und  $\varphi_h$  bilden eine einzige Funktion.

Daß es im zweidimensionalen Falle ebenfalls überflüssig ist, zwischen den Funktionen  $\varphi_v$  und  $\varphi_h$  zu unterscheiden, haben wir oben gesehen.

### 26 10. Vereinfachung der Randbedingungen im rotations-symmetrischen Falle.

Die Verwandtschaft zwischen dem zweidimensionalen und dem rotationssymmetrischen dreidimensionalen Falle tritt auch in anderer Weise zutage. Wir haben oben gesehen, daß die allgemeine Bedingung auf  $S_h$ :

$$\frac{d}{dn} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0$$

im zweidimensionalen Falle in der einfachen Form:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0$$

geschrieben werden kann. Prof. Zeilon hat gezeigt, daß, wenn  $\sqrt{x_2^2 + x_3^2} = \bar{R}$  gesetzt wird, im rotationssymmetrischen dreidimensionalen Falle dieselbe Bedingung in der Form:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{R}} = 0$$

geschrieben werden kann. Um diesen Satz zu beweisen, gehen wir von den Formeln (20) aus. Sie zeigen sofort, daß die Kontinuitätsbedingung im Bereich  $B_h$  in der Form:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right)_h + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right)_h = 0$$

geschrieben werden kann. Nun kann aber  $\varphi$  nur von  $x_1$  und  $\bar{R}$  abhängen. Wir haben infolgedessen, wenn auf  $S_h$   $x_1 = \sigma(\bar{R})$  ist:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right)_h + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right)_h = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right)_{x_1=\sigma(\bar{R})} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right)_{x_2=\sigma(\bar{R})} = \\
 &= \frac{1}{\bar{R}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{R}} \left[ \bar{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{R}} \right] \right\}_{x_1=\sigma(\bar{R})} + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial \bar{R}} \right)_{x_1=\sigma(\bar{R})} \frac{d\sigma(\bar{R})}{d\bar{R}} = \\
 &= \frac{1}{\bar{R}} \frac{d}{d\bar{R}} \left[ \bar{R} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{R}} \right)_{x_1=\sigma(\bar{R})} \right].
 \end{aligned}$$

Folglich:

$$\frac{d}{d\bar{R}} \left[ \bar{R} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{R}} \right)_{x_1=\sigma(\bar{R})} \right] = 0$$

und also:

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{R}} \right)_h = \frac{C}{\bar{R}}, \quad (25)$$

wo  $C$  eine Konstante ist. Nach unseren Annahmen muß  $\varphi$  auf  $S_h$  eine stetige und stetig differenzierbare Funktion sein. Auf der Kurve, welche  $S_h$  von  $S_v$  scheidet, muß nach unseren obigen Ergebnissen (vgl. Nr. 9 oben):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{R}} = 0$$

sein. Es folgt hieraus und aus (25) daß überall auf  $S_h$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{R}} = 0$$

sein muß.

## 26 11. Zusammenfassung.

In diesem Paragraphen sind für den stationären Fall die früher erhaltenen Ergebnisse mittels einer neuen Methode wiedergefunden worden. Dabei hat es sich gezeigt, daß für das ebene Problem und für das rotationssymmetrische dreidimensionale Problem die Potentialfunktion  $\varphi$ , auf deren Bestimmung die Lösung des Problems zurückgeführt werden kann, überall außerhalb des Körpers regulär ist, so daß die Unterscheidung zwischen den Funktionen  $\varphi_v$  und  $\varphi_h$  überflüssig wird. Die Randbedingungen, welche  $\varphi$  zu erfüllen hat, sind, wenn die Bewegung des Körpers in der Richtung der  $x_1$ -Achse geschieht, im zweidimensionalen Falle:

an  $S_v$ :

$$\frac{d\varphi}{dn} = U_n,$$

an  $S_h$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0;$$

im rotationssymmetrischen, dreidimensionalen Falle, wenn die  $x_1$ -Achse die Symmetriearchse ist und wenn  $\sqrt{x_2^2 + x_3^2} = \bar{R}$  gesetzt wird:

an  $S_v$ :

$$\frac{d\varphi}{dn} = U_n,$$

an  $S_h$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{R}} = 0.$$

Die Bestimmung von  $\varphi$  ist im zweidimensionalen Falle auf eine reguläre Fredholmsche Integralgleichung zurückgeführt worden. Auch im allgemeinen dreidimensionalen Falle ist das Problem auf eine Fredholmsche Integralgleichung reduziert worden. Sie ist singulär, kann aber durch Iterationen in eine reguläre Fredholmsche Integralgleichung übergeführt werden.

## § 27. Lösung der potentialtheoretischen Randwertaufgabe, zu welcher die stationäre Bewegung in der Ebene Anlaß gibt.

### 271. Lösung eines potentialtheoretischen Problems nach Hilbert.

Nach den Ergebnissen des § 26 können wir die potentialtheoretische Randwertaufgabe, zu welcher die stationäre Bewegung im zweidimensionalen Falle Anlaß gibt, mit Hilfe der Fredholmschen Determinanten lösen. Die Lösung, welche wir in dieser Weise erhalten, hat aber eine so komplizierte Form, daß sie keine Aussagen über die Dinge erlaubt, die uns am meisten interessieren, den Widerstand und die Druckverteilung auf den Körper. Wir müssen uns deshalb nach einer einfacheren Methode zur Lösung unseres Problems umsehen. Zum Glück gibt es eine solche.

In seinen Grundzügen einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen löst Hilbert\* u. a. das folgende Problem: Eine innerhalb einer geschlossenen Kurve  $C$  mit stetig sich ändernder Tangente und von der Gesamtbogenlänge  $l$  reguläre analytische Funktion der komplexen Veränderlichen  $z = x + iy$ :

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

---

\* D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Kap. X, S. 82. Leipzig 1912.

zu finden, deren Real- und Imaginärteil  $u(s)$  bzw.  $v(s)$  auf  $C$  der linearen Relation:

$$a(s)u(s) + b(s)v(s) + c(s) = 0$$

genügen; dabei sind  $a(s)$ ,  $b(s)$ ,  $c(s)$  als stetig differenzierbare Funktionen der Bogenlänge  $s$  mit der Periode  $l$  — die ersteren beiden  $a(s)$ ,  $b(s)$  ohne gemeinsame Nullstelle — gegeben.

Hilbert löst dieses Problem in der folgenden Weise. Er bezeichnet mit  $2n\pi$  die Änderung, die  $\log(a(s) + ib(s))$  beim positiven Umlauf längs der geschlossenen Kurve  $C$  erfährt. Durch den Imaginärteil von  $\log(a(s) + ib(s))$ , d. h. durch den Ausdruck:

$$\operatorname{arctg} \frac{b(s)}{a(s)}$$

wird dann eine reelle Funktion auf  $C$  dargestellt, die von  $s$  stetig abhängt mit Ausnahme eines Punktes, etwa des Punktes  $s = 0$ , wo ein Sprung ihrer Werte um  $2n\pi$  stattfindet. Mittels der bekannten Randwertaufgabe in der Theorie des logarithmischen Potentials kann man nun eine analytische Funktion  $F(z)$  bestimmen, die sich innerhalb der Kurve  $C$  wie eine ganze Funktion verhält und deren Imaginärteil die Randwerte  $\operatorname{arctg} \frac{b(s)}{a(s)}$  besitzt. Wird dann:

$$G(z) = e^{F(z)} = U(x, y) + iV(x, y)$$

gesetzt, während:

$$U(s) + iV(s)$$

die Randwerte dieser Funktion  $G(z)$  bezeichnen, so erkennen wir auf der Kurve  $C$  die Übereinstimmung der Imaginärteile von:

$$\log(U(s) + iV(s)) \quad \text{und} \quad \log(a(s) + ib(s)),$$

d. h. es ist auf der Kurve  $C$ :

$$a(s)V(s) - b(s)U(s) = 0.$$

Endlich konstruieren wir eine analytische Funktion  $f^*(z)$ , die innerhalb  $C$  den Charakter einer ganzen Funktion hat und deren Realteil auf  $C$  die Randwerte:

$$-\frac{c(s)U(s)}{a(s)(U(s)^2 + V(s)^2)} = -\frac{c(s)V(s)}{b(s)(U(s)^2 + V(s)^2)}$$

besitzt; dann ist:

$$f(z) = G(z)f^*(z)$$

eine analytische Funktion, die das vorgelegte Problem löst.

Die gefundene Funktion  $f(z)$  hat innerhalb  $C$  den Charakter einer ganzen Funktion; sie besitzt jedoch, wenn  $n$  negativ ausfällt, auf  $C$  im Punkte  $s = 0$  einen Pol —  $2n$ -ter Ordnung.

## 27 2. Unterschied unserer hydrodynamischen Randwertaufgabe von der Hilbertschen.

Unser Problem ist nicht mit dem von Hilbert behandelten identisch, es ist aber damit eng verwandt. Um dies einzusehen, bezeichnen wir mit  $\Phi(z)$  eine analytische Funktion der komplexen Veränderlichen  $x_1 + ix_2 = z$ , deren Realteil die durch die Gleichung (26, 9) S. 269 definierte Funktion  $\varphi$  ist. Wir setzen:

$$v_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad v_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$$

und haben dann:

$$v_1 - iv_2 = \frac{d\Phi(z)}{dz}.$$

$v_1$  und  $-v_2$  sind also Real- und Imaginärteil einer außerhalb der Kurve  $S$  regulären und im unendlich fernen Punkte verschwindenden analytischen Funktion der komplexen Veränderlichen  $z = x_1 + ix_2$ . Wenn wir die Werte von  $v_1$  und  $v_2$  auf der Kurve  $S$  mit  $v_1(s)$  und  $v_2(s)$  bezeichnen, so genügen sie nach S. 271 (11) und (11<sup>bis</sup>) den Bedingungen:

auf  $S_v$ :  $v_1(s) \cos(nx_1) + v_2(s) \cos(nx_2) = U_1 \cos(nx_1);$

auf  $S_h$ :  $v_2 = 0.$

Diese Bedingungen können in der Form:

$$a(s)v_1(s) + b(s)v_2(s) = c_2(s)$$

geschrieben werden. Dabei ist:

auf  $S_v$ :

$$a(s) = \cos(nx_1), \quad b(s) = \cos(nx_2), \quad c(s) = U_1 \cos(nx_1);$$

auf  $S_h$ :

$$a(s) = 0, \quad b(s) = 1, \quad c(s) = 0.$$

Der Unterschied von dem Hilbertschen Probleme besteht einmal darin, daß die Funktion  $b(s)$  nicht wie bei Hilbert durchweg stetig ist. Mindestens in einem der Grenzpunkte zwischen  $S_v$  und  $S_h$  macht  $b(s)$  einen endlichen Sprung, von  $-1$  nach  $+1$ . Andererseits verlangen wir von der gesuchten analytischen Funktion  $v_1 - iv_2$  mehr als Hilbert, indem in unserem Probleme diese Funktion im unendlich

fernen Punkte verschwinden muß. Wir werden unten sehen, daß die Unstetigkeit von  $b(s)$  die Anwendung der Hilbertschen Methode nicht hindert und daß die Bedingung  $v_1 - iv_2 = 0$  im unendlich fernen Punkte aus den unendlich vielen Lösungen des Hilbertschen Problems eine auswählt, welche allein für die Hydrodynamik Bedeutung hat.

### 273. Konforme Abbildung des Bereiches auf das Äußere eines Kreises.

Durch eine konforme Abbildung können wir den Bereich  $B_v + B_h$ , das heißt die ganze  $x_1 x_2$ -Ebene mit Ausnahme des von der Kurve  $S$  eingeschlossenen Teiles auf den Bereich  $|z| > 1$  abbilden. Der Kurve  $S$  wird dann der Kreis  $|z| = 1$  entsprechen. Wenn  $S$  eine einzige zusammenhängende Vorderseite  $S_v$  besitzt, können wir es so einrichten, daß die beiden Grenzpunkte zwischen  $S_v$  und  $S_h$  auf die beiden Punkte  $z = \pm i$  abgebildet werden. Durch diese Transformation wird unsere Aufgabe in die folgende übergeführt. Man soll eine außerhalb des Kreises  $|z| = 1$  reguläre analytische Funktion  $W = v_1 - iv_2$  bestimmen, welche in einem Punkte  $z_0 (|z_0|^2 > 1)$  verschwindet und welche auf dem Kreise  $|z| = 1$  den Bedingungen genügt:

für:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2}, \quad \left( \theta = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1} \right);$$

$$a(\theta)v_1(\theta) + b(\theta)v_2(\theta) = c(\theta),$$

$$\left( \lim_{\theta = \frac{\pi}{2}} \frac{b(\theta)}{a(\theta)} = +\infty, \quad \lim_{\theta = -\frac{\pi}{2}} \frac{b(\theta)}{a(\theta)} = -\infty \right);$$

für:

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2};$$

$$v_2(\theta) = 0.$$

Wir erreichen eine kleine Vereinfachung unserer Formel, wenn wir statt  $W(z)$  die Funktion:  $W^{(1)}(z) = iW(z)$  betrachten. Wir setzen:  $W^{(1)}(z) = v_1^{(1)}(x_1, x_2) + iv_2^{(1)}(x_1, x_2)$  und erhalten für die Werte von  $v_1^{(1)}$  und  $v_2^{(1)}$  auf dem Kreise  $|z| = 1$ :  $v_1^{(1)}(\theta), v_2^{(1)}(\theta)$  die Bedingung:

$$a_1(\theta)v_1^{(1)}(\theta) - b_1(\theta)v_2^{(1)}(\theta) = c(\theta). \quad (1)$$

Dabei ist:  $a_1(\theta) = b(\theta)$ ,  $b_1(\theta) = -a(\theta)$  und also, wenn  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ :

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 0, \quad c = 0. \quad (2)$$

## 274. Ansatz zur Lösung der Randwertaufgabe für den Kreis mit Hilfe des Poissonschen Integrals.

Wir betrachten jetzt die auf dem Kreise  $|z|=1$ , kurz dem Kreise  $C$ , erklärte, rein imaginäre Funktion:

$$-\frac{1}{2} \log \frac{a_1(\theta) + i b_1(\theta)}{a_1(\theta) - i b_1(\theta)}. \quad (3)$$

Wir wollen eine außerhalb des Kreises reguläre analytische Funktion konstruieren, deren imaginärer Teil dieselben Werte wie jene Funktion annimmt. Wir bestimmen zu diesem Zwecke zunächst eine außerhalb des Kreises reguläre Potentialfunktion, welche auf der Kreisperipherie die Werte (3) annimmt. Eine solche Funktion erhält man bekanntlich durch das Poissonsche Integral\* in der Form:

$$-\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{a_1(\theta') + i b_1(\theta')}{a_1(\theta') - i b_1(\theta')} \frac{(r^2 - 1)d\theta'}{r^2 - 2r \cos(\theta - \theta') + 1},$$

wobei

$$z = x_1 + ix_2 = re^{i\theta} \text{ also } x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta$$

gesetzt worden ist. Nun ist, wenn  $e^{i\theta'} = z'$  gesetzt wird:

$$\frac{1}{2} \frac{1 - r^2}{r^2 - 2r \cos(\theta - \theta') + 1}$$

der reelle Teil von:

$$e^{i\theta'} \left( \frac{1}{z' - z} - \frac{1}{2z'} \right).$$

Also ist, wenn die Integration in positiver Richtung längs des Kreises  $C$  geführt wird:

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \log \frac{a_1(\theta') + i b_1(\theta')}{a_1(\theta') - i b_1(\theta')} \left( \frac{1}{z' - z} - \frac{1}{2z'} \right) dz' \quad (4)$$

eine außerhalb dieses Kreises reguläre analytische Funktion, deren imaginärer Teil auf dem Kreise die Werte (3) annimmt.

Der reelle Teil von  $w(z)$  nimmt auf dem Kreise  $C$  den Wert:

$$w(\theta) = \frac{1}{4\pi i} \int_0^{2\pi} \log \frac{a_1(\theta') + i b_1(\theta')}{a_1(\theta') - i b_1(\theta')} \cot \frac{1}{2}(\theta' - \theta) d\theta' \quad (5)$$

an. Man hat dabei rechts den Cauchyschen Hauptwert zu nehmen.

---

\* Man vergleiche betreffend das Poissonsche Integral etwa Picard, *Traité d'Analyse* T. II oder Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, II C 3 Lichtenstein S. 220 ff.

### 275. Herstellung einer Lösung der Randwertaufgabe im Falle $c = 0$ auf dem ganzen Kreise.

Wir bilden jetzt die Funktion:

$$G(z) = e^{w(z)}. \quad (6)$$

Sie ist außerhalb des Kreises  $C$  regulär und nimmt auf dem Kreise die Werte:

$$\sqrt{\frac{a_1(\theta) - i b_1(\theta)}{a_1(\theta) + i b_1(\theta)}} e^{w(\theta)} = \frac{a_1(\theta) - i b_1(\theta)}{\sqrt{a_1(\theta)^2 + b_1(\theta)^2}} e^{w(\theta)}$$

an. Die Wurzel rechts wird hier positiv genommen. Die Exponentialfunktion ist reell und positiv. Wenn wir jetzt:

$$iG(z) = v_1^{(0)}(x_1, x_2) + i v_2^{(0)}(x_1, x_2)$$

setzen, so haben wir auf dem Kreise  $C$ :

$$v_1^{(0)}(\theta) = \frac{b_1(\theta)}{\sqrt{a_1(\theta)^2 + b_1(\theta)^2}} e^{w(\theta)}, \quad v_2^{(0)}(\theta) = \frac{a_1(\theta)}{\sqrt{a_1(\theta)^2 + b_1(\theta)^2}} e^{w(\theta)}.$$

Folglich:

$$a_1(\theta)v_1^{(0)}(\theta) - b_1(\theta)v_2^{(0)}(\theta) = 0. \quad (7)$$

Wir können diese Tatsache so ausdrücken, daß die Funktion  $iG(z)$  eine Nulllösung unseres Problems ist.

### 276. Herstellung einer Lösung der Randwertaufgabe im Falle $c = U_1 a$ .

In den Anwendungen, mit welchen wir uns später beschäftigen werden, tritt insofern eine Vereinfachung auf, als stets  $c(\theta) = U_1 a(\theta)$  ist. In diesem Falle erfüllt, wie man sofort verifizieren kann, die analytische und im Unendlichen reguläre Funktion  $W^{(1)} = iU_1$  die Randbedingung (1) S. 283. Ehe wir nun weiter gehen, empfiehlt es sich des allgemeinen Interesses wegen in der folgenden Nummer eine spezielle Lösung für den allgemeinen Fall herzustellen.

### 277. Herstellung einer Lösung der allgemeinen Randwertaufgabe.

Wir bilden dazu die analytische Funktion  $f^*(z)$ , welche außerhalb des Kreises  $C$  regulär ist und deren Realteil auf  $C$  die Werte:

$$\frac{c(\theta)v_1^{(0)}(\theta)}{b_1(\theta)(v_1^{(0)}(\theta)^2 + v_2^{(0)}(\theta)^2)}$$

annimmt. Wir haben:

$$\left. \begin{aligned} f^*(z) = & -\frac{1}{\pi i} \oint_C \frac{c(\theta') v_1^{(0)}(\theta')}{b_1(\theta')(v_1^{(0)}(\theta')^2 + v_2^{(0)}(\theta')^2)} \left( \frac{1}{z' - z} - \frac{1}{2z'} \right) dz' = - \\ & -\frac{1}{\pi i} \oint_C \frac{c(\theta')}{\sqrt{a_1(\theta')^2 + b_1(\theta')^2}} e^{-w(\theta')} \left( \frac{1}{z' - z} - \frac{1}{2z'} \right) dz'. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Wir setzen jetzt:

$$\bar{W}^{(1)} = f^*(z) G(z) = -\frac{1}{\pi i} e^{w(z)} \int_C \frac{c(\theta') e^{-w(\theta')}}{\sqrt{a_1(\theta')^2 + b_1(\theta')^2}} \left( \frac{1}{z' - z} - \frac{1}{2z'} \right) dz'. \quad (9)$$

Auf dem Kreise  $C$  haben wir dann:

$$\begin{aligned} \bar{W}^{(1)} = & \bar{v}_1^{(1)}(\theta) + i \bar{v}_2^{(1)}(\theta) = \\ & \frac{a_1(\theta) - i b_1(\theta)}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} e^{w(\theta)} \left( \frac{c(\theta) e^{-w(\theta)}}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} + iP \right), \end{aligned}$$

wo  $P$  der Cauchysche Hauptwert von:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{c(\theta') e^{-w(\theta')}}{\sqrt{a_1(\theta')^2 + b_1(\theta')^2}} \cot \frac{1}{2}(\theta' - \theta) d\theta'$$

und also eine positive Größe ist. Wir haben also:

$$\begin{aligned} \bar{v}_1^{(1)}(\theta) &= \frac{a_1(\theta) c(\theta)}{a_1^2 + b_1^2} + \frac{b_1(\theta) P}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} e^{w(\theta)}, \\ \bar{v}_2^{(1)}(\theta) &= -\frac{b_1(\theta) c(\theta)}{a_1^2 + b_1^2} + \frac{a_1(\theta) P}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} e^{w(\theta)}. \end{aligned}$$

Folglich:

$$a_1(\theta) \bar{v}_1^{(1)}(\theta) - b_1(\theta) \bar{v}_2^{(1)}(\theta) = c(\theta). \quad (10)$$

Die Funktion  $\bar{W}^{(1)}$  ist also bis auf die Bedingung  $\bar{W}^{(1)}(z_0) = 0$ , die im allgemeinen nicht erfüllt ist, eine Lösung unseres Problems.

## 27 8. Herstellung der allgemeinen Nulllösung. Untersuchung der singulären Stellen auf dem Kreise $C$ .

Um eine Lösung unseres Problems zu erhalten, haben wir zu  $\bar{W}^{(1)}$  eine zweckmäßig gewählte Nulllösung, d. h. eine der Annahme  $c(\theta) = 0$  entsprechende, aber nicht die Bedingung  $\bar{W}^{(1)}(z_0) = 0$  erfüllende Lösung unseres Problemes hinzuzufügen. Nun haben wir oben gesehen, daß:

$$iG(z) = ie^{w(z)}$$

eine solche Nulllösung ist. Eine neue Nulllösung kann man offenbar in

der Weise bilden, daß man  $iG(z)$  mit einer beliebigen, für  $|z| > 1$  regulären, analytischen Funktion von  $z$  multipliziert, die auf dem Kreise  $C$  reelle Werte annimmt. Die Größe:

$$\zeta = i \frac{z - i}{z + i}$$

nimmt auf dem Kreise  $C$  reelle Werte an. Dem Bereichen  $|z| > 1$  entspricht in der  $\zeta_1 \zeta_2$ -Ebene ( $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$ ) die Halbebene  $\zeta_2 > 0$ , dem Kreise  $|z| = 1$  die reelle  $\zeta_1$ -Achse. Für unseren Zweck ist also eine beliebige, in der Halbebene  $\zeta_2 > 0$  reguläre, analytische Funktion von  $\zeta$  verwendbar, die auf der reellen  $\zeta_1$ -Achse reelle Werte annimmt. Eine solche Funktion ist aber nach einem bekannten Satze der Funktionentheorie auch in der Halbebene  $\zeta_2 < 0$  regulär. Sie kann also nur auf der reellen  $\zeta_1$ -Achse Singularitäten haben. Nun müssen wir aber von unserer Funktion  $g(z)$  verlangen, daß:

$$g(z) e^{w(z)}$$

auf dem Kreise  $C$  regulär ist. Die entsprechende Funktion von  $\zeta$  darf also nur in einem solchen Punkte auf der  $\zeta_1$ -Achse singulär sein, dem ein Punkt  $z$  auf dem Kreise  $C$  entspricht, wo  $e^{w(z)} = 0$  ist. Wir werden so zu der Frage geführt, wie sich die Funktion  $e^{w(z)}$  am Kreise  $C$  verhält.

Wir hatten nach (5) S. 284:

$$w(\theta) = \frac{1}{4\pi i} \int_0^{2\pi} \log \frac{a_1(\theta') + ib_1(\theta')}{a_1(\theta') - ib_1(\theta')} \cot \frac{\theta' - \theta}{2} d\theta'.$$

Da nach (2) S. 283  $b_1(\theta') = 0$ , wenn  $\frac{\pi}{2} \leq \theta' \leq \frac{3\pi}{2}$  ist, so können wir diese Formel auch in der Form:

$$w(\theta) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \log \frac{a_1(\theta') + ib_1(\theta')}{a_1(\theta') - ib_1(\theta')} \cot \frac{\theta' - \theta}{2} d\theta' \quad (11)$$

schreiben. Wir hatten:

$$a_1(\theta) = b(\theta), \quad b_1(\theta) = -a(\theta).$$

Wir haben folglich:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \log \frac{a_1(\theta') + ib_1(\theta')}{a_1(\theta') - ib_1(\theta')} &= \frac{1}{2} \log \frac{a(\theta') + ib(\theta')}{a(\theta') - ib(\theta')} + \frac{1}{2} \log (-1) = \\ &= i \operatorname{arctg} \frac{b(\theta')}{a(\theta')} \pm \frac{i\pi}{2} (1 + 2n), \end{aligned} \right\} (12)$$

wo  $\operatorname{arctg} \frac{b(\theta')}{a(\theta')}$  zwischen  $-\frac{\pi}{2}$  und  $+\frac{\pi}{2}$  genommen wird und wo  $n$  irgendeine nicht-negative, ganze Zahl ist.

Aus (12) folgt:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a_1(\theta') - ib_1(\theta')}{a_1(\theta') + ib_1(\theta')}} &= e^{-i \operatorname{arctg} \frac{b(\theta') - i\pi}{a(\theta')} + \frac{i\pi}{2}(1+2n)} \\ &= \frac{a(\theta') - ib(\theta')}{\sqrt{a(\theta')^2 + b(\theta')^2}} e^{\mp \frac{i\pi}{2}(1+2n)} \\ &= -i \frac{a_1(\theta') - ib_1(\theta')}{\sqrt{a_1^2(\theta') + b_1^2(\theta')}} e^{\mp \frac{i\pi}{2}(1+2n)}. \end{aligned}$$

Nun haben wir aber oben:

$$\sqrt{\frac{a_1(\theta') - ib_1(\theta')}{a_1(\theta') + ib_1(\theta')}} = \frac{a_1(\theta') - ib_1(\theta')}{\sqrt{a_1(\theta')^2 + b_1(\theta')^2}}$$

gesetzt. Wenn wir die Quadratwurzeln gleicher Größen überall mit denselben Vorzeichen nehmen wollen, so folgt, daß wir der ganzen Zahl  $n$  die Bedingung:

$$-ie^{\mp \frac{i\pi}{2}(1+2n)} = 1$$

auf erlegen müssen. Sie ist erfüllt, wenn wir links das untere Vorzeichen wählen und  $n$  eine gerade Zahl ist oder wenn wir das obere Vorzeichen wählen und dabei  $n$  eine ungerade Zahl ist. Wir wählen das untere Vorzeichen und setzen  $n = 0$ . Wir setzen also:

$$\frac{1}{2} \log \frac{a_1(\theta') + ib_1(\theta')}{a_1(\theta') - ib_1(\theta')} = i \operatorname{arctg} \frac{b(\theta')}{a(\theta')} - \frac{i\pi}{2} \quad (12^{\text{bis}})$$

und haben also:

$$\begin{aligned} w(\theta) &= \left( \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{b(\theta)}{a(\theta)} - \frac{1}{4} \right) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cot \frac{\theta' - \theta}{2} d\theta' + \\ &\quad + \text{stetige Funktion von } \theta. \end{aligned}$$

Wir haben:

$$\cot \frac{\theta' - \theta}{2} = \frac{d}{d\theta'} \left( 2 \log \left| \sin \frac{\theta' - \theta}{2} \right| \right).$$

Folglich:

$$w(\theta) = \left( \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{b(\theta)}{a(\theta)} - \frac{1}{2} \right) \log \left| \cot \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + \text{stet. Funktion}$$

und also:

$$e^{w(\theta)} = \left| \cot \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|^{\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{b(\theta)}{a(\theta)} - \frac{1}{2}} \cdot \text{stet. Funktion.}$$

Der letzte Faktor hat überall auf dem Kreise  $C$  einen von Null verschiedenen Wert.

Unser Ausdruck für  $e^{w(\theta)}$  zeigt sofort, daß diese Funktion für  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\operatorname{arctg} \frac{b(\theta)}{a(\theta)} = \frac{\pi}{2}$  einen endlichen, von Null verschiedenen Wert hat und daß sie für  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\operatorname{arctg} \frac{b(\theta)}{a(\theta)} = -\frac{\pi}{2}$  in derselben Weise wie  $\theta + \frac{\pi}{2}$  oder  $z + i$  verschwindet.

### 279. Lösung des Problems.

Wir kehren zur Funktion  $g(z)$  zurück. Wir sahen, daß diese Funktion nur in solchen Punkten des Kreises  $C$  singulär sein darf, wo  $e^{w(\theta)}$  verschwindet. Wir wissen jetzt, daß es nur einen solchen Punkt gibt, den Punkt  $z = -i$  oder  $\zeta = \infty$ . In diesem Punkt darf  $g(z)$ , als Funktion von  $\zeta$  aufgefaßt, von erster Ordnung unendlich werden. Wir schließen hieraus, daß  $g(z)$  notwendig die Form:

$$k_1 + ik_2 \frac{z-i}{z+i}$$

haben muß, wo  $k_1$  und  $k_2$  reelle Konstanten sind. Diese Konstanten müssen so bestimmt werden, daß:

$$W^{(1)}(z) = \overline{W^{(1)}(z)} + ie^{w(z)} \left( k_1 + ik_2 \frac{z-i}{z+i} \right)$$

im Punkte  $z_0$  verschwindet. Da  $z_0$  außerhalb des Kreises  $C$  liegt und nur für Punkte dieses Kreises die Determinante des aus dieser Beziehung hervorgehenden Gleichungssystems für  $k_1$  und  $k_2$  verschwindet, so sehen wir, daß  $k_1$  und  $k_2$  durch diese Bedingung eindeutig bestimmt sind. Es gibt eine und nur eine Lösung für unser hydrodynamisches Problem.

Gehen wir wieder zur ursprünglichen  $z$ -Ebene zurück, so folgt aus unserer Formel für  $W_{(z)}^{(1)}$ , daß diese Funktion sich für große  $z$ -Werte wie

$$iU_1 \frac{A - iB}{z}$$

verhält, wo  $A$  und  $B$  reelle, im allgemeinen nicht verschwindende Größen sind. Die Funktion  $W = v_1(x_1, x_2) - iv_2(x_1, x_2)$  verhält sich also für große Werte von  $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = r$  wie:

$$U_1 \frac{A - iB}{z} = U_1 \frac{Ax_1 - Bx_2 - i(Ax_2 + Bx_1)}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Wenn wir  $v_1$  und  $v_2$  als die Geschwindigkeitskomponenten einer Strömung auffassen, so besteht diese Strömung aus einem radialen Ausfluß vom Körper mit der Geschwindigkeit:

$$\frac{A U_1}{r}$$

und einer Zirkulation in positiver Richtung um den Körper mit der Geschwindigkeit:

$$\frac{B U_1}{r}.$$

### 27 10. Zusammenfassung.

Das Problem, zu welchem die stationäre Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit im zweidimensionalen Falle in erster Näherung und bei  $\mu \rightarrow 0$  führt, wurde im vorigen Paragraphen auf die Bestimmung einer Potentialfunktion,  $\varphi$ , zurückgeführt. Wenn man statt  $\varphi$  die Ableitungen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = v_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = v_2$$

betrachtet, so kann man das Problem in folgender Weise formulieren. Man soll zwei außerhalb der Grenzkurve  $S$  des Körpers zweimal stetig differenzierbare und im Unendlichen verschwindende Funktionen  $v_1$  und  $v_2$ , von  $x_1$  und  $x_2$  bestimmen, welche außerhalb von  $S$  den Gleichungen:

$$\Delta v_1 = 0, \quad \Delta v_2 = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = 0$$

und auf  $S$  folgenden Bedingungen genügen:

auf der Vorderseite von  $S$ , d. h. auf  $S_v$ :

$$\cos n x_1 \cdot v_1 + \cos n x_2 \cdot v_2 = \cos n x_1 \cdot U_1;$$

auf der Rückseite von  $S$ , d. h. auf  $S_h$ :

$$v_2 = 0.$$

Um dieses Problem zu lösen, kann man folgendermaßen verfahren. Man setzt  $x_1 + ix_2 = z$  und bildet durch die Transformation  $z = f(z')$  ( $z' = x'_1 + ix'_2$ ) das Äußere der Kurve  $S$  auf das Äußere des Kreises  $|z'| = 1$  konform ab.  $v_1$  und  $v_2$  befriedigen als Funktionen von  $x'_1$ ,  $x'_2$  die Gleichungen:

$$\Delta v_1 = 0, \quad \Delta v_2 = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x'_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x'_1} = 0,$$

und man kann es so einrichten, daß die Randbedingungen, welche sich auf den Kreis  $|z'| = 1$  beziehen, die Form:

$$av_1 + bv_2 = c = U_1 a$$

annehmen. Dabei soll für  $-\frac{\pi}{2} < \theta' < \frac{\pi}{2}$  ( $z' = r' e^{i\theta'}$ ,  $r' = 1$ ):  $a = \cos nx_1$ ,

$b = \cos nx_2$  sein. Dagegen soll für  $\frac{\pi}{2} < \theta' < \frac{3\pi}{2}$ :  $a = 0$ ,  $b = 1$  sein. Die Funktionen  $v_1$  und  $v_2$  müssen überdies in dem Punkte  $z_0'$  verschwinden, der dem Punkt  $z = \infty$  entspricht.

Man bildet nun die Funktion:

$$w(z') = \frac{1}{\pi} \oint \left( \operatorname{arctg} \frac{b(\theta^*)}{a(\theta^*)} - \frac{\pi}{2} \right) \left( \frac{1}{z^* - z'} - \frac{1}{2z^*} \right) dz^*, \quad (13)$$

wo die Integration in positiver Richtung längs des Kreises  $|z^*| = 1$  geführt werden soll und wo  $\operatorname{arctg} \frac{b}{a}$  zwischen  $-\frac{\pi}{2}$  und  $+\frac{\pi}{2}$  genommen wird. Man bildet ferner die Funktion:

$$W(z') = U_1 + e^{w(z')} \left( k_1 + ik_2 \frac{z' - i}{z' + i} \right).$$

Man bestimmt  $k_1$  und  $k_2$  so, daß  $W(z_0') = 0$  ausfällt. Man kehrt dann zu den ursprünglichen Veränderlichen zurück und drückt also  $W$  als Funktion von  $z$  aus. Wenn man dann  $z = x_1 + ix_2$  setzt und  $W$  in der Form:

$$W = v_1(x_1, x_2) - iv_2(x_1, x_2)$$

darstellt, wo  $v_1$  und  $v_2$  reelle Größen sind, so geben diese Funktionen  $v_1, v_2$  die Lösung des Problems.

## § 28. Die Druckverteilung und der Widerstand bei zweidimensionalen hydrodynamischen Problemen.

### 281. Einleitung. Ist der Druck bei $\mu \rightarrow 0$ überall stetig?

Wir haben nach den Formeln (10) im § 26:

in  $B_v$ :

$$u_j = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, \quad q = \varrho U_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \quad (j = 1, 2)$$

in  $B_h$ :

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)_h + U_1, \quad u_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \\ q = \varrho U_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}.$$

Unter  $q$  haben wir die Größe:

$$p + \frac{1}{2} \varrho u^2$$

verstanden. Wir haben also:

$$p = \varrho U_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \varrho (u_1^2 + u_2^2).$$

Da  $u_1$  beim Passieren der zylindrischen Grenzfläche zwischen  $B_v$  und  $B_h$  einen endlichen Sprung macht, so muß ebenfalls  $p$  beim Passieren dieser Fläche eine Unstetigkeit aufweisen. Dies Ergebnis kann befremdend erscheinen. Man darf aber nicht vergessen, daß die in der Theorie der idealen Flüssigkeiten übliche Annahme, daß der Druck in einer bewegten Flüssigkeit eine stetige Funktion der Raumkoordinaten ist, auf der stillschweigend gemachten Annahme beruht, daß die Größen  $\mu \Delta u_j$  beim Grenzübergange  $\mu \rightarrow 0$  überall in der Flüssigkeit, also auch in den Diskontinuitätsflächen, gegen Null konvergieren. Daß es im mathematischen Sinne nicht selbstverständlich ist, daß  $p$  bei  $\mu \rightarrow 0$  überall stetig ausfallen wird, zeigt das System:

$$\varrho \left( \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \Delta u_j,$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0,$$

das sich nur durch Vertauschen der Indizes  $j$  und  $k$  an einer Stelle von dem System der hydrodynamischen Gleichungen unterscheidet. Dies ist ja gerade das System, für welches wir den Grenzübergang ausgeführt haben und bei welchem wir bei  $\mu \rightarrow 0$  den Druck unstetig gefunden haben. Es zeigt, daß bei Differentialgleichungen von demselben Typus wie die hydrodynamischen Differentialgleichungen bei dem Grenzübergang zu verschwindendem  $\mu$  im allgemeinen der Druck unstetig ausfällt und daß also, wenn sich die hydrodynamischen Differentialgleichungen anders verhalten, es sich dabei, mathematisch gesprochen, um eine Ausnahme handeln muß.

Übrigens darf natürlich nicht vergessen werden, daß unsere Lösung nur eine erste Näherung darstellt\*.

## 28 2. Zerlegung des Druckes in zwei Teile.

Wir setzen:

$$\varrho U_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \varrho v^2 = \varrho U_1 v_1 - \frac{1}{2} \varrho (v_1^2 + v_2^2) = p'.$$

Dabei soll, wie im vorigen Paragraphen:

$$v_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad v_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$$

---

\* Auch durch die Ausführungen von Prof. Zeilon, welche im Anhange mitgeteilt werden, wird die Frage von der Stetigkeit des Druckes bei  $\mu = 0$  nicht in abstrakt mathematischem Sinne entschieden.

sein. Wir haben dann an  $S_v$ :  $p = p'$  und an  $S_h$ , weil dort  $u_1^2 = U_1^2$  ist:

$$p = \varrho U_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \varrho U_1^2 = p' + p'',$$

wo:

$$p'' = -\frac{1}{2} \varrho (U_1^2 - v_1^2 - v_2^2).$$

### 283. Berechnung des Widerstandes.

Um die Resultierende der auf den Körper ausgeübten Druckkräfte zu berechnen, betrachten wir zunächst:

$$-\int_S p' \cos(nx_1) ds = -\oint_S p' dx_2,$$

wo die Integration im letzten Integral in positiver Richtung um  $S$  herum geführt werden soll. Um das Integral auszuwerten, addieren wir:

$$-J = -\varrho \oint_S v_1(v_1 dx_2 - v_2 dx_1).$$

Wir erhalten:

$$-\oint_S p' dx_2 - J = -\varrho \oint_S U_1 v_1 dx_2 - \frac{1}{2} \varrho \oint_S [(v_1^2 - v_2^2) dx_2 - 2v_1 v_2 dx_1].$$

Das letzte Glied ist der reelle Teil von:

$$\frac{i}{2} \varrho \oint_S W^2 dz,$$

wo  $W = v_1 - iv_2$  eine außerhalb von  $S$  reguläre analytische Funktion von  $z = x_1 + ix_2$  ist, welche in unendlicher Ferne von derselben Ordnung klein wie  $1/z$  ist. Wir sehen hieraus, daß:

$$\frac{1}{2} \varrho \oint_S W^2 dz = 0.$$

Folglich:

$$-\oint_S p' dx_2 = -\varrho U_1 \oint_S v_1 dx_2 + J.$$

Nun ist, wenn wir:

$$dx_2 = ds \cos(nx_1), \quad dx_1 = -ds \cos(nx_2), \quad (ds > 0)$$

setzen:

$$J = \varrho \int_S v_1(v_1 \cos(nx_1) + v_2 \cos(nx_2)) ds = \varrho \int_S v_1 \frac{d\varphi}{dn} ds.$$

An der Vorderseite  $S_v$  haben wir:  $\frac{d\varphi}{dn} = U_1 \cos(nx_1)$  und an der Rückseite  $S_h$ :  $v_2 = 0$ . Also:

$$-\oint_S p' dx_2 = -\varrho U_1 \int_{S_h} v_1 dx_2 + \varrho \int_{S_h} v_1^2 dx_2.$$

Wir haben andererseits:

$$-\int_{S_h} p'' dx_2 = \frac{1}{2} \varrho \int_{S_h} (U_1^2 - v_1^2 - v_2^2) dx_2 = \frac{1}{2} \varrho \int_{S_h} (U_1^2 - v_1^2) dx_2.$$

Folglich:

$$-\oint_S p dx_2 = -\oint_S p' dx_2 - \int_{S_h} p'' dx_2 = \frac{1}{2} \varrho \int_{S_h} (U_1 - v_1)^2 dx_2.$$

Auf  $S_h$  hat  $dx_2 = ds \cos(n x_1)$  einen negativen Wert. Die Komponente der Resultierenden der Druckkräfte in der Richtung der Bewegung des Körpers ist also stets negativ. Der Körper hat daher stets einen Widerstand zu überwinden. Wir setzen diesen Widerstand  $= \varrho U_1^2 R_1$ , wo  $R_1$  der Widerstandskoeffizient ist, und haben dann:

$$\text{Widerstand} = \varrho U_1^2 R_1 = -\frac{1}{2} \varrho \int_{S_h} (U_1 - v_1)^2 dx_2. \quad (1)$$

Wir können dieser Formel eine anschauliche Deutung geben. Wir haben in  $B_h$ :

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)_h + U_1.$$

Nun verschwindet  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$  in unendlicher Entfernung vom Körper. Wir haben also in weit entfernten Punkten von  $B_h$ :

$$U_1 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)_h = u_1,$$

wo  $\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)_h$  wie früher den Wert von  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$  auf der Rückseite des Körpers bedeutet. Wir können unsere Formel deshalb auch in der Form:

$$\varrho U_1^2 R_1 = \frac{1}{2} \varrho \int u_1^2 dx_2$$

schreiben, wo die Integration jetzt über einen weit entfernten Querschnitt des Wirbelschwanzes geführt werden soll und dabei  $dx_2 > 0$  angenommen werden soll. Diese Formel sagt aus:

Der Widerstand in der Richtung der Bewegung ist gleich der kinetischen Energie, welche der Wirbelschwanz pro Längeneinheit transportiert.

### 284. Berechnung des Druckes senkrecht zur Bewegungsrichtung.

Wir berechnen jetzt die zur Bewegungsrichtung senkrechte  $x_2$ -Komponente der Resultierenden der Druckkräfte.

Wir setzen:

$$\varrho \oint_S v_2(v_2 dx_1 - v_1 dx_2) = J_1$$

und haben dann:

$$\begin{aligned} -\int_S p' \cos(nx_2) ds + J_1 &= \oint_S p' dx_1 + J_1 = \\ &= \varrho U_1 \oint_S v_1 dx_1 - \frac{1}{2} \varrho \oint_S [(v_1^2 - v_2^2) dx_1 + 2v_1 v_2 dx_2] = \\ &= \varrho U_1 \oint_S v_1 dx_1 - \frac{1}{2} \varrho \text{ Realteil von } \oint S W^2 dz = \varrho U_1 \oint_S v_1 dx_1. \end{aligned}$$

Wir haben:

$$J_1 = -\varrho \int_S v_2 \frac{d\varphi}{dn} ds$$

und, weil an  $S_v$ :  $\frac{d\varphi}{dn} = U_1 \cos(nx_1)$ , an  $S_h$ :  $v_2 = 0$ :

$$J_1 = -\varrho U_1 \oint_S v_2 dx_2.$$

Folglich:

$$-\int_S p' \cos(nx_2) ds = \varrho U_1 \oint_S (v_1 dx_1 + v_2 dx_2) = \varrho U_1 \oint_S d\varphi.$$

Statt der Kurve  $S$  können wir, wie die letzte Formel zeigt, eine beliebige,  $S$  einmal umlaufende, geschlossene Kurve zum Integrationsweg benutzen. Wir wählen dazu einen Kreis um den Anfangspunkt mit sehr großem Radius. Nun kann man, wie wir am Schluß des letzten Paragraphen gesehen haben, für großes  $r (= \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) v_1$  und  $v_2$  durch Ausdrücke von der Form:

$$v_1 = U_1 \frac{Ax_1 - Bx_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad v_2 = U_1 \frac{Ax_2 + Bx_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

darstellen. Wir erhalten demnach:

$$-\int_S p' \cos(nx_2) ds = 2\pi B \varrho U_1^2.$$

Setzt man also den Druck senkrecht zur Bewegung, d. h. die Tragkraft  $= \varrho U_1^2 R_2$ , so erhält man also schließlich:

$$\left. \begin{aligned} \varrho U_1^2 R_2 &= - \int_S p \cos(nx_2) ds = - \int_S p' \cos(nx_2) ds - \int_{S_h} p'' \cos(nx_2) ds = \\ &= 2\pi B \varrho U_1^2 - \frac{1}{2} \varrho \int_{S_h} (U_1^2 - v_1^2) dx_1. \end{aligned} \right\} (2)$$

Das erste Glied unseres Ausdruckes für  $\varrho U_1^2 R_2$  hängt nur von der Zirkulation der Flüssigkeit um den Körper bei der Strömung  $v_1, v_2$  ab. Es kann als ein Zirkulationsglied bezeichnet werden. Das zweite Glied hängt von dem Unterdruck in der Flüssigkeit hinter dem Körper ab und kann als eine Saugwirkung des Wirbelschwanzes auf den Körper gedeutet werden.

### 285. Zusammenfassung.

Nachdem man mittels der in § 27 dargelegten Methode die Funktionen  $v_1$  und  $v_2$  berechnet hat, erhält man aus den Formeln:

$$\varrho U_1^2 R_1 = - \frac{1}{2} \varrho \int_{S_h} (U_1 - v_1)^2 dx_2,$$

$$\varrho U_1^2 R_2 = 2\pi B \varrho U_1^2 - \frac{1}{2} \varrho \int_{S_h} (U_1^2 - v_1^2) dx_1$$

den Widerstand  $\varrho U_1^2 R_1$  und die Tragkraft  $\varrho U_1^2 R_2$ . In diesen Formeln soll die Integration in positiver Richtung um den Körper geführt werden. Im ersten Integral ist also  $dx_2$  stets  $< 0$ .  $B$  hat die angegebene Bedeutung.  $B$  ist also ein Maß der Zirkulation um den Körper.

## § 29. Das Problem des Kreiszylinders.

### 291. Bericht über die Methode von Prof. Burgers.

Prof. Burgers in Delft hat im Jahre 1921 den aus unserer Theorie hervorgehenden Widerstand gegen einen Zylinder mit kreisförmigem Querschnitt berechnet, der sich mit konstanter, sehr großer Geschwindigkeit in einer reibungsfreien Flüssigkeit bewegt. Die Methode von Prof. Burgers bestand darin, daß er für die Potentialfunktion den Ansatz:

$$\varphi = A_0 \log r - \sum_1^N \frac{A_n \cos n\theta}{nr^n}$$

$$(x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta)$$

machte und mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate die endlich vielen Koeffizienten  $A_0, A_1, \dots, A_N$  so bestimmte, daß die Randbedingungen:

$$\frac{d\varphi}{dn} = U_n \quad \text{an } S_v,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0 \quad \text{an } S_h$$

möglichst genau erfüllt wurden. Obwohl diese Methode ein sehr großes Interesse besitzt, wollen wir doch, nachdem durch Prof. Zeilon eine exakte Lösung des Problems gewonnen ist, von einem genaueren Bericht über die Untersuchung von Prof. Burgers absehen und statt dessen die in den zwei vorhergehenden Paragraphen dargelegte Methode benutzen.

## 292. Berechnung der Funktion $w(z)$ .

Wir betrachten einen Kreiszylinder, dessen Radius den Wert  $R$  haben möge. Um die in § 27 (vgl. besonders die Zusammenfassung S. 290!) entwickelte Methode benutzen zu können, setzen wir:

$$z' = \frac{z}{R}, \quad \text{also: } r' = \frac{r}{R}, \quad \theta' = \theta.$$

Wir haben auf  $S_v$ :  $a = \cos \theta$ ,  $b = \sin \theta \left( -\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2} \right)$ . Folglich:

$$w(z') = w\left(\frac{z}{R}\right) = \frac{1}{\pi} \int_{\theta^* = -\frac{\pi}{2}}^{\theta^* = +\frac{\pi}{2}} \left( \theta^* - \frac{\pi}{2} \right) \left( \frac{1}{z^* - \frac{z}{R}} - \frac{1}{2z^*} \right) dz^*. \quad (1)$$

Wir berechnen den reellen und den imaginären Teil der Funktion  $w$  auf dem Kreise  $C$ , d. h. für  $r' = 1$ ,  $r = R$ . Der reelle Teil hat den Wert:

$$\left. \begin{aligned} w(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left( \theta^* - \frac{\pi}{2} \right) \cot \frac{1}{2}(\theta^* - \theta) d\theta^* = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\theta}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cot \frac{1}{2}(\theta^* - \theta) d\theta^* + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (\theta^* - \theta) \cot \frac{1}{2}(\theta^* - \theta) d\theta^* = \\ &= \left( \frac{\theta}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \log \left| \cot \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$f$  ist hier die durch die Gleichung:

$$f(\xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\xi \xi \cot \xi d\xi \quad (3)$$

definierte Funktion.

Der imaginäre Teil von  $w(z')$  nimmt nach der Definition von  $w(z)$  (§ 274 S. 284) auf dem Kreise  $C$  den Wert:

$$-\frac{1}{2} \log \frac{a_1(\theta) + i b_1(\theta)}{a_1(\theta) - i b_1(\theta)} = -i \left( \operatorname{arctg} \frac{b(\theta)}{a(\theta)} - \frac{\pi}{2} \right)$$

an. Wir haben also auf dem Kreise  $C$ , wenn:  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ :

$$\text{imaginärer Teil von } w(z') = -i \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right); \quad (4)$$

wenn:  $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ :

$$\text{imaginärer Teil von } w(z') = 0. \quad (5)$$

Betreffend die Funktion  $e^{w(\theta)}$  können wir hieraus schließen, daß sie auf dem Kreise  $C(|z'| = 1, |z| = R)$  die folgenden Werte annimmt, wenn:  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ :

$$ie^{-i\theta} e^{w(\theta)}; \quad (6)$$

wenn:  $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ :

$$e^{w(\theta)}. \quad (7)$$

### 293. Lösung des Problems.

Um unser Problem zu lösen, d. h. um die beiden Funktionen:

$$v_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad v_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$$

zu bestimmen, haben wir nach § 27, Zusammenfassung (S. 290), in dem Ausdruck:

$$W(z') = W\left(\frac{z}{R}\right) = U_1 + e^{w(z')}\left(k_1 + ik_2 \frac{z' - i}{z' + i}\right)$$

die beiden reellen Konstanten  $k_1$  und  $k_2$  so zu bestimmen, daß in dem Punkte  $z'_0$ , der dem Punkte  $z = \infty$  entspricht,  $W(z') = 0$  ausfällt. Nun ist offenbar in diesem Falle  $z'_0 = \infty$ . Wir haben:

$$w(\infty) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\theta^* = -\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left( \theta^* - \frac{\pi}{2} \right) \frac{dz^*}{z^*} = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left( \theta^* - \frac{\pi}{2} \right) d\theta^* = \frac{i\pi}{4}.$$

Zur Bestimmung von  $k_1$  und  $k_2$  erhalten wir also die Gleichung:

$$U_1 + e^{\frac{i\pi}{4}}(k_1 + ik_2) = 0.$$

Sie ergibt:

$$k_1 + ik_2 = -U_1 e^{-\frac{i\pi}{4}}$$

d. h.:

$$k_1 = -\frac{U_1}{\sqrt{2}}, \quad k_2 = +\frac{U_1}{\sqrt{2}}.$$

Wir haben also:

$$W\left(\frac{z}{R}\right) = W(z') = U_1 \left\{ 1 - \frac{e^{w(z')}}{\sqrt{2}} \left( 1 - i \frac{z' - i}{z' + i} \right) \right\} \quad (8)$$

Um  $v_1$  und  $v_2$  zu erhalten, genügt es,  $W(z')$  in einen reellen und einen rein imaginären Teil zu zerlegen und dann  $x_1'$  mit  $\frac{x_1}{R}$ ,  $x_2'$  mit  $\frac{x_2}{R}$  zu vertauschen. Wir haben mit anderen Worten:

$$v_1(x_1, x_2) - iv_2(x_1, x_2) = W(z').$$

#### 294. Verhalten der Lösung in unendlicher Ferne.

Besonderes Interesse hat, wie wir oben gesehen haben, das Verhalten der Funktion  $W$  in unendlicher Ferne. Wir wollen deshalb dieses Verhalten untersuchen. Wir erhalten aus (1) für große  $|z|$ -Werte:

$$\begin{aligned} w(z') &= w\left(\frac{z}{R}\right) = \frac{i\pi}{4} - \frac{iR}{\pi z} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left( \theta^* - \frac{\pi}{2} \right) (\cos \theta^* + i \sin \theta^*) d\theta^* = \\ &= \frac{i\pi}{4} + \frac{2R}{\pi z} + \frac{iR}{z}. \end{aligned}$$

Die Formel (8) ergibt unter diesen Umständen für großes  $|z|$ :

$$W(z) \rightarrow \frac{(\pi - 2)RU_1}{\pi z}. \quad (9)$$

Wir sehen aus (9), daß beim Kreiszylinder die S. 289 definierte Größe  $B = 0$  ist und also keine Zirkulation um den Zylinder stattfindet. Wegen der Symmetrie war dies von vornherein zu erwarten. Wir sehen ferner, daß:

$$AU_1 = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) RU_1$$

und also, daß der radiale Ausfluß, der nach S. 291 den Wert  $2\pi AU_1$  hat,

$$= 2(\pi - 2)R U_1 = 2,283 R U_1$$

ist. Prof. Burgers fand bei seiner angenäherten Lösung des Problems für diese Größe den Wert  $2,30 R U_1$ .

### 295. Werte von $v_1$ und $v_2$ auf der Oberfläche des Zylinders.

Auf der Oberfläche des Zylinders haben wir nach (8) und (6), wenn  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ :

$$\begin{aligned} W\left(\frac{z}{R}\right) &= U_1 \left\{ 1 - \frac{i}{\sqrt{2}} e^{w(\theta)-i\theta} \left( 1 - i \frac{\cos \theta + i \sin \theta - i}{\cos \theta + i \sin \theta + i} \right) \right\} = \\ &= U_1 \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \theta + i \cos \theta) e^{w(\theta)} \left( 1 + \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Wir haben also auf der Oberfläche des Zylinders, wenn

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}:$$

$$\begin{aligned} v_1(\theta) &= U_1 \left\{ 1 - \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} e^{w(\theta)} \left( 1 - \cot\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right) \right\}, \\ v_2(\theta) &= \frac{U_1}{\sqrt{2}} \cos \theta e^{w(\theta)} \left( 1 - \cot\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right). \end{aligned}$$

Wir haben dagegen, wenn  $r = R$ ,  $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$  ist:

$$W\left(\frac{z}{R}\right) = U_1 \left\{ 1 - \frac{e^{w(\theta)}}{\sqrt{2}} \left( 1 - \cot\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right) \right\},$$

also:

$$\begin{aligned} v_1(\theta) &= W\left(\frac{z}{R}\right) = U_1 \left\{ 1 - \frac{e^{w(\theta)}}{\sqrt{2}} \left( 1 - \cot\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right) \right\}, \\ v_2(\theta) &= 0. \end{aligned}$$

### 296. Numerische Ergebnisse. Vergleich mit der Erfahrung.

Wir geben eine von Prof. Zeilon berechnete Tabelle für die zwei Funktionen wieder:

$$f(\theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\theta \theta^* \cot \theta^* d\theta^*$$

und:

$$\left| \cot\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| e^{w(\theta)} = \left| \cot\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right|^{\frac{\theta}{\pi} + \frac{1}{2}} \cdot e^{f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}.$$

Tabelle I

$\Theta$	$f(\Theta)$ $= -f(-\Theta)$	$\left  \cot\left(\frac{\Theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right  e^{w(\theta)}$	$\Theta$	$f(\Theta)$	$\left  \cot\left(\frac{\Theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right  e^{w(\theta)}$
-180°	—	0,79	+9	0,099	2,31
-162	—	0,92	18	0,198	2,07
-144	—	1,05	27	0,292	1,79
-126	—	1,24	36	0,383	1,52
-117	—	1,35	45	0,465	1,23
-108	—	1,49	54	0,537	0,948
-99	—	1,68	63	0,599	0,673
-90	—	2,00	72	0,648	0,416
-81	—	2,37	81	0,682	0,187
-72	—	2,62	90	0,693	0,000
-63	—	2,80	99	0,679	0,132
-54	—	2,91	108	0,634	0,236
-45	—	2,96	117	0,551	0,325
-36	—	2,98	126	0,423	0,403
-27	—	2,92	135	0,229	0,477
-18	-0,198	2,85	144	—	0,538
-9	-0,099	2,71	162	—	0,667
0	0,000	2,53	180	—	0,790

Mit Hilfe der Tabelle I kann man die Werte von  $v_1$  und  $v_2$  auf dem Umkreise des Zylinders berechnen. Man erhält dann  $p$ . Man hat

auf  $S_v$ :

$$p = \varrho U_1 v_1 - \frac{1}{2} \varrho (v_1^2 + v_2^2) = -\frac{\varrho}{2} \frac{(v_1 - U_1)^2}{\sin^2 \theta} + \frac{\varrho}{2} U_1^2,$$

auf  $S_h$ :

$$p = \varrho U_1 v_1 - \frac{1}{2} \varrho U_1^2.$$

Die Tabelle II ist ebenfalls von Prof. Zeilon berechnet worden. Sie bringt in der zweiten und dritten Kolumne die theoretisch berechneten Werte von  $v_1/U_1$  und  $p/\varrho U_1^2$  auf der Oberfläche des Zylinders. Die in der vierten und fünften Kolumne gegebenen Werte wurden bei Experimenten gefunden, in denen ein Zylinder mit einem Durchmesser von 7,5 cm einem Luftstrom ausgesetzt wurde, dessen Geschwindigkeit in einem Experiment 25, in einem anderen 18 Meter/Sekunde war.\* Die Werte sind hier auf absolute Einheiten reduziert. Man sieht, daß der theoretisch berechnete Druck an der Vorderseite des Zylinders ganz denselben allgemeinen Verlauf wie der experimentell bestimmte Druck hat und daß sogar die theoretischen

\* Die experimentellen Werte sind aus Jacob, La Résistance de l'Air et l'Expérience, tome 2, Paris 1921, entnommen.

Tabelle II

$\Theta$	$v_1/U_1$	$p/\rho U_1^2$	$p/\rho U_1^2$ Exp. $U = 25$	$p/\rho U_1^2$ Exp. $U = 18$
0°	1,000	+ 0,500	+ 0,500	+ 0,500
9	0,954	0,457	0,45	0,44
18	0,836	0,360	0,32	0,42
27	0,635	0,179	0,24	0,28
31,5	0,512	+ 0,060	0,06	0,06
36	0,387	- 0,043	- 0,17	- 0,14
45	0,127	- 0,139	- 0,37	- 0,29
54	- 0,130	- 0,474	- 0,47	- 0,36
63	- 0,344	- 0,635	- 0,59	- 0,40
72	- 0,493	- 0,725	- 0,59	- 0,39
81	- 0,531	- 0,695	- 0,57	- 0,37
90	- 0,416	- 0,503	- 0,53	- 0,36
99	- 0,275	—	- 0,47	- 0,31
108	- 0,216	—	- 0,40	- 0,27
117	- 0,181	—	- 0,33	- 0,26
126	- 0,159	—	—	—
135	- 0,144	—	- 0,27	- 0,24
144	- 0,131	—	—	—
153	- 0,126	—	- 0,24	- 0,23
162	- 0,120	—	—	—
180	- 0,117	—	- 0,22	- 0,19

Werte numerisch in überraschend guter Übereinstimmung mit den experimentellen Werten sind. Man sieht auch, daß die theoretischen Werte am besten mit denjenigen experimentellen Werten übereinstimmen, welche der größeren Geschwindigkeit entsprechen. Auch dies war theoretisch zu erwarten.

In Figur 1 stellt die untere, voll ausgezogene Kurve die theoretische Druckverteilung an der Vorderseite des Zylinders dar. Die gestrichelten Kurven entsprechen den beiden in Tabelle II aufgenommenen experimentellen Messungsreihen. Offenbar schließt sich die untere der beiden gestrichelten Kurven, welche der Geschwindigkeit  $U = 25$  m pro Sekunde entspricht, gut an die theoretische Kurve an. Man bekommt aus der Figur den Eindruck, daß die beiden experimentellen Kurven Glieder einer unendlichen Schar von Kurven sind, welche sich bei wachsender Geschwindigkeit immer näher an die theoretische Kurve anschließen.

Die obere voll ausgezogene Kurve stellt graphisch  $v_1/U_1$  dar.

Mit Hilfe der Tabelle I können wir auch den Widerstandskoeffizient  $R_1$  berechnen. Das Ergebnis ist:

$$R_1 = 1,314.$$

Für einen Zylinder mit dem Querschnitt 1 ergibt dies:

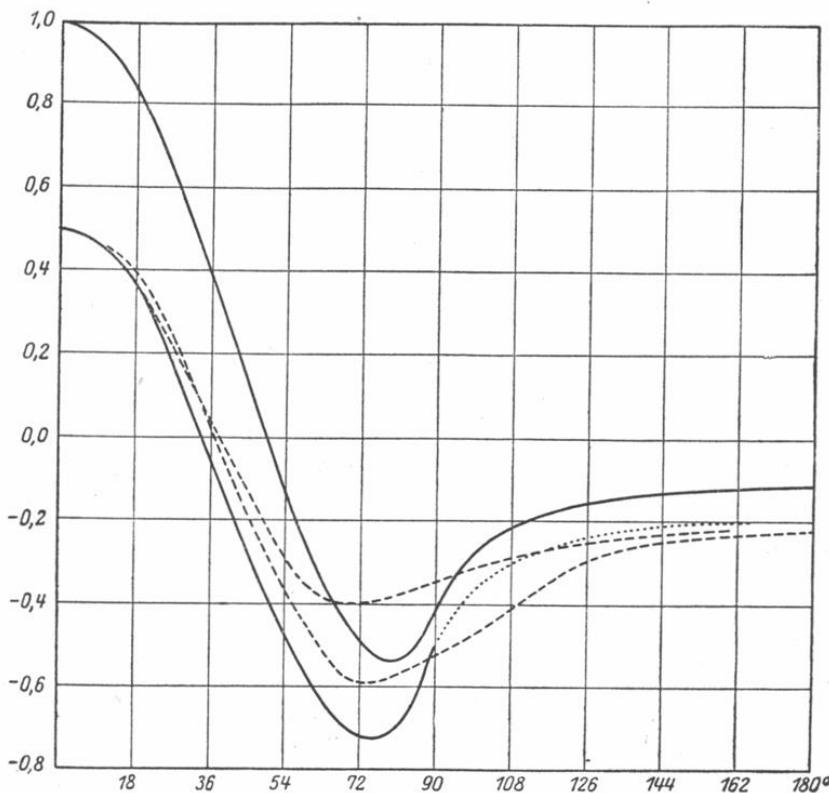
$$R_1 = 0,657.$$

Dieser Widerstandskoeffizient ist zu groß. Die experimentellen Bestimmungen ergeben etwa:

$$R_1 = 0,38.$$

Da der theoretische Druck an der Vorderseite des Zylinders nahe mit dem experimentellen übereinstimmt, so müssen wir schließen, daß die theoretische Druckerniedrigung in dem Wirbelschwanze zu groß ausfällt. Eine nähere Untersuchung bestätigt dies. Hier ist offenbar der Punkt, wo der weitere Ausbau der Theorie einzusetzen hat. Dies ist auch theoretisch verständlich. Im Wirbelschwanze und nur dort befriedigt unsere in erster Näherung erhaltene Lösung nicht die vollständigen Bewegungsgleichungen einer reibungslosen Flüssigkeit.

Wie Professor Zeilon durch weitere Ausführung der Theorie beim Kreiszylinder eine fast vollständige Übereinstimmung mit den Tatsachen erreicht hat, wird im Anhange gezeigt.



Figur 1

## § 30. Das Problem einer dünnen Platte.

### 30 1. Einleitung. Konforme Abbildung.

Wir wählen die Maßeinheiten so, daß die Breite der Platte den Wert 2 hat. Der Neigungswinkel derselben gegen die Bewegungsrichtung sei  $\alpha$ . Eine mit der Bewegungsrichtung parallele, gegen die Platte senkrechte  $z$ -Ebene ( $z = x_1 + ix_2$ ) schneide die Platte längs der geraden Verbindungslinie zwischen den beiden Punkten  $\pm e^{i\alpha}$ . Um unsere allgemeine Methode zur Lösung dieses speziellen Problems anzuwenden, haben wir die längs  $L$  zerschnittene  $z$ -Ebene konform auf denjenigen Teil einer  $z'$ -Ebene abzubilden, der außerhalb des Kreises  $C$ , d. h. des Kreises  $|z'| = 1$  liegt. Wenn wir die in § 27, Zusammenfassung, S. 290 entwickelten Formeln anwenden wollen, müssen dabei die Punkte  $z = \pm e^{i\alpha}$  den Punkten  $z' = \pm i$  entsprechen. Diese Abbildung wird durch die Formel:

$$z = \frac{e^{i\alpha}}{2i} \left( z' - \frac{1}{z'} \right) \quad (1)$$

bewirkt.

### 30 2. Formulierung der Aufgabe.

#### Berechnung der Funktion $w(z')$ .

Unsere Aufgabe ist, eine in der zerschnittenen  $z$ -Ebene reguläre und eindeutige, in unendlicher Ferne verschwindende Funktion  $W(z) = v_1(x_1, x_2) - iv_2(x_1, x_2)$  zu finden, welche an der Vorderseite der Platte der Bedingung:

$$v_1 \sin \alpha - v_2 \cos \alpha = U_1 \sin \alpha$$

und an der Rückseite der Bedingung:

$$v_2 = 0$$

genügt. Die entsprechende Aufgabe in der  $z'$ -Ebene ist eine außerhalb des Kreises  $C$  reguläre und eindeutige, in unendlicher Ferne verschwindende Funktion:

$$W(z') = v_1(x'_1, x'_2) - iv_2(x'_1, x'_2)$$

zu finden, welche für:

$$r' = 1, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad (x'_1 = r' \cos \theta, x'_2 = r' \sin \theta),$$

der Bedingung:

$$v_1 \sin \alpha - v_2 \cos \alpha = U_1 \sin \alpha,$$

$$\text{für: } r' = 1, \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$$

der Bedingung:

$$v^2 = 0$$

genügt. Wir sehen hieraus, daß beim Problem der Platte:

$$a(\theta) = \sin a, \quad b(\theta) = -\cos a; \quad a_1(\theta) = -\cos a, \quad b_1(\theta) = -\sin a.$$

Die Formel (27, 13) S. 291 ergibt unter diesen Umständen:

$$w(z') = \frac{a-\pi}{\pi} \int_{\Theta^*}^{+\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{z^* - z'} - \frac{1}{2z^*} \right) dz^* = \frac{(a-\pi)}{\pi} \log \frac{z' - i}{z' + i} - \frac{i(a-\pi)}{2}.$$

$$\Theta^* = -\frac{\pi}{2}$$

Folglich:

$$G(z') = e^{w(z')} = i e^{-\frac{ia}{2}} \left( \frac{z' + i}{z' - i} \right)^{1 - \frac{a}{\pi}}. \quad (2)$$

Wir haben in § 27 S. 287 eine komplexe Größe  $\zeta$  eingeführt. Wenn wir sie auch jetzt benutzen wollen, müssen wir sie durch die Gleichung:

$$\zeta = i \frac{z' - i}{z' + i} \quad (3)$$

definieren. Mit Hilfe dieser Größe  $\zeta$  können wir unser Ergebnis (2) in der einfachen Form:

$$G(z') = -e^{-ia} \zeta^{\frac{a}{\pi} - 1} \quad (4)$$

schreiben.

### 303. Berechnung der Funktion $W(z)$ . Eigenschaften.

Die Lösung unseres Problems wird nach § 27, Zusammenfassung S. 290 durch die Funktion:

$$W(z') = U_1 + e^{w(z')} \left( k_1 + ik_2 \frac{z' - i}{z' + i} \right)$$

gegeben.  $k_1$  und  $k_2$  müssen so bestimmt werden, daß in dem Punkte  $z'_0$ , der dem Punkt  $z = \infty$  entspricht,  $W(z') = 0$  ausfällt. Jener Punkt  $z'_0$  ist offenbar  $z' = \infty$ . Für  $z' = \infty$  haben wir:

$$\zeta = i, \quad e^{w(z')} = -e^{-ia} \cdot e^{\frac{ia}{2} - \frac{i\pi}{2}} = ie^{-\frac{ia}{2}}.$$

Zur Bestimmung der beiden reellen Größen  $k_1$  und  $k_2$  erhalten wir also die Gleichung:

$$k_1 + ik_2 = iU_1 e^{\frac{ia}{2}}.$$

Sie ergibt:

$$k_1 = -U_1 \sin \frac{a}{2}, \quad k_2 = U_1 \cos \frac{a}{2}.$$

Wir haben also:

$$\begin{aligned} W(z') &= U_1 \left\{ 1 - \left( \sin \frac{\alpha}{2} - i \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{z' - i}{z' + i} \right) e^{w(z')} \right\} = \\ &= U_1 \left\{ 1 - e^{-i\alpha} \left( \cos \frac{\alpha}{2} \zeta^{\frac{\alpha}{\pi}} - \sin \frac{\alpha}{2} \zeta^{\frac{\alpha}{\pi}-1} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Wir haben jetzt  $W(z')$  als Funktion von  $z$  auszudrücken. Zwischen  $\zeta$  und  $z$  besteht die Beziehung:

$$z = e^{i\alpha} \frac{1 - \zeta^2}{1 + \zeta^2}.$$

Sie ergibt:

$$\zeta = \sqrt{\frac{e^{i\alpha} - z}{e^{i\alpha} + z}}.$$

Wir haben folglich:

$$\begin{aligned} W(z) &= v_1 - iv_2 = \\ &= U_1 \left\{ 1 - e^{-i\alpha} \left[ \cos \frac{\alpha}{2} \left( \frac{e^{i\alpha} - z}{e^{i\alpha} + z} \right)^{\frac{\alpha}{2\pi}} - \sin \frac{\alpha}{2} \left( \frac{e^{i\alpha} - z}{e^{i\alpha} + z} \right)^{\frac{\alpha}{2\pi}-\frac{1}{2}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Wir benutzen den Ausdruck (6), um das Verhalten der Funktion  $W(z)$  bei  $z \rightarrow \infty$  zu untersuchen. Man findet:

$$W(z) \rightarrow U_1 \frac{A - iB}{z},$$

wo:

$$A = \frac{\alpha}{\pi} \cos \alpha + \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\pi} \right) \cos \alpha, \quad (7)$$

$$B = \left( \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\pi} \right) \sin \alpha. \quad (8)$$

Für  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  haben wir nach diesen Formeln  $A = \frac{1}{2}$ ,  $B = 0$ . Für kleine  $\alpha$ -Werte werden sowohl  $A$  wie  $B$  klein. Die Zirkulation hat für kleines  $\alpha$  den Wert  $\pi \sin \alpha$ . Dies ist die Hälfte des Wertes, den Kutta aus seiner Theorie abgeleitet hat.

#### 30.4. Berechnung des Widerstandes und der Tragkraft.

Um den Widerstand und die Tragkraft zu berechnen, haben wir nach den Formeln (28, 1 S. 294) und (28, 2 S. 296) die beiden Integrale:

$$-\int_{S_h} (U_1 - v_1)^2 dx_2, \quad \int_{S_h} (U_1^2 - v_1^2) dx_1$$

auszuwerten. Nun haben wir auf  $S_h$  nach (5), weil dort  $v_2 = 0$  ist:

$$(U_1 - v_1)^2 = (U_1 - W)^2 = \\ = U_1^2 e^{-2ia} \left\{ \cos^2 \frac{\alpha}{2} \zeta^{\frac{2\alpha}{\pi}} - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \zeta^{\frac{2\alpha}{\pi}-1} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \zeta^{\frac{2\alpha}{\pi}-2} \right\}.$$

Wir haben auf  $S_h$  ferner:

$$dx_2 = \sin \alpha e^{-ia} dz = -\sin \alpha \frac{4\zeta d\zeta}{(1+\zeta^2)^2}.$$

Wir bemerken, daß  $z^*$  auf  $S_h$  im Punkte  $z = -e^{ia}$  den Wert  $-i$  und  $\zeta$  den Wert  $-\infty$  annimmt. — Wir haben folglich:

$$-\int_{S_h} (U_1 - v_1)^2 dx_2 = \int_{-\sin \alpha}^{\sin \alpha} (U_1 - v_1)^2 dx_2 = U_1^2 (J_1 + J_2 + J_3),$$

wo:

$$J_1 = -\sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} e^{-2ia} \int_{-\infty}^0 \frac{4\zeta^{\frac{2\alpha}{\pi}+1}}{(\zeta^2+1)^2} d\zeta,$$

$$J_2 = 2 \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} e^{-2ia} \int_{-\infty}^0 \frac{4\zeta^{\frac{2\alpha}{\pi}}}{(\zeta^2+1)^2} d\zeta,$$

$$J_3 = -\sin \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2} e^{-2ia} \int_{-\infty}^0 \frac{4\zeta^{\frac{2\alpha}{\pi}-1}}{(\zeta^2+1)^2} d\zeta.$$

Um  $J_1, J_2, J_3$  zu berechnen, betrachten wir das Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4\zeta^{1+\frac{\beta}{\pi}}}{(\zeta^2+1)^2} d\zeta, \quad (9)$$

in dem der Integrationsweg in der Umgebung des singulären Punktes  $\zeta = 0$  in der komplexen  $\zeta$ -Ebene oberhalb des singulären Punktes gehen soll. Wenn wir zwei Punkte  $\zeta, -\zeta (\zeta > 0)$  des Integrationsweges miteinander vergleichen, haben wir dann:

$$\zeta = (-\zeta) e^{-\pi i}, \quad \zeta^{1+\frac{\beta}{\pi}} = -e^{-i\beta} (-\zeta)^{1+\frac{\beta}{\pi}}.$$

Wir können deshalb unser Integral (9) in der Form:

$$(1 - e^{-i\beta}) \int_{-\infty}^0 \frac{4\zeta^{1+\frac{\beta}{\pi}}}{(\zeta^2+1)^2} d\zeta$$

schreiben. Wir können andererseits den Wert des Integrales (9) in der Weise berechnen, daß wir den Integrationsweg unbegrenzt nach

oben verschieben. Dabei wird der singuläre Punkt  $\zeta = +i$  überschritten. Wir erhalten deshalb:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4\zeta^{1+\frac{\beta}{\pi}}}{(\zeta^2 + 1)^2} d\zeta = -2\beta i e^{\frac{1}{2}i\beta}.$$

Also:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{4\zeta^{1+\frac{\beta}{\pi}}}{(\zeta^2 + 1)^2} d\zeta = -\frac{\beta e^{i\beta}}{\sin \frac{\beta}{2}}. \quad (10)$$

Mit Hilfe der Formel (10) erhalten wir:

$$J_1 = 2a \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \quad J_2 = (\pi - 2a) \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}, \quad J_3 = 2(\pi - a) \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Folglich:

$$-\int_{S_h} (U_1 - v_1)^2 dx_2 = \left[ \pi - (\pi - 2a) \frac{\cos 2a}{\cos \alpha} \right] U_1^2.$$

Wir erhalten in ähnlicher Weise:

$$\begin{aligned} \int_{S_h} (U_1^2 - v_1^2) dx_2 &= 2U_1 \int_{S_h} (U_1 - v_1) dx_2 - \int_{S_h} (U_1 - v_1)^2 dx_2 = \\ &- 4\pi A U_1^2 - \int_{S_h} (U_1 - v_1)^2 dx_2 = -\left( \pi - \frac{\pi - 2a}{\cos \alpha} \right) U_1^2. \end{aligned}$$

Nun haben wir an  $S_h$ :  $dx_1 = \cot \alpha dx_2$ . Folglich:

$$-\int_{S_h} (U_1^2 - v_1^2) dx_1 = \left( \pi \cot \alpha - \frac{\pi - 2a}{\sin \alpha} \right) U_1^2.$$

Die Formeln (28,1 S. 294), (28,2 S. 296) ergeben jetzt:

$$\left. \begin{aligned} \varrho U_1^2 R_1 &= \frac{1}{2} \varrho U_1^2 \left( \pi - (\pi - 2a) \frac{\cos 2a}{\cos \alpha} \right), \\ \varrho U_1^2 R_2 &= \frac{1}{2} \varrho U_1^2 \left( \pi \cot \alpha - (\pi - 2a) \frac{\cos 2a}{\sin \alpha} \right). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Die Beziehung:

$$R_2 = R_1 \cot \alpha$$

drückt die Tatsache aus, daß die Kraft  $\varrho U_1^2 R_1$ ,  $\varrho U_1^2 R_2$  die Resultierende eines überall gegen die Platte senkrechten Druckes ist. Dabei ist zu bemerken, daß  $\varrho U_1^2 R_1$  die Komponente dieser Resultierenden in der Richtung der negativen  $x_1$ -Achse ist, dagegen  $\varrho U_1^2 R_2$  die Komponente in der Richtung der positiven  $x_2$ -Achse.

### 305. Vergleich mit der Erfahrung.

Die nachfolgende Tabelle enthält in den vier ersten Kolumnen einige numerische Ergebnisse, die aus den Formeln (11) erhalten worden sind.  $R$  hat die Bedeutung:

$$\sqrt{R_1^2 + R_2^2}.$$

Alle Resultate sind auf die Plattenbreite 1 reduziert, also die direkt aus (11) hervorgehenden Werte nachträglich mit 2 dividiert. Die Kolumne  $R$  exp. enthält experimentelle Werte. Sie sind den von Eiffel für eine rechteckige Platte gefundenen Werte proportional, wobei:

$$\text{Länge : Breite} = 9$$

war. Die Werte von Eiffel sind aber mit einem gemeinsamen Faktor multipliziert, der so gewählt ist, daß  $R$  für  $\alpha = 90^\circ$  den Wert 0,78 bekommt, der nach Jacob\* für eine unendlich lange, zur Bewegungsrichtung senkrechte Platte der wahrscheinlich richtige Wert ist.

Tabelle I

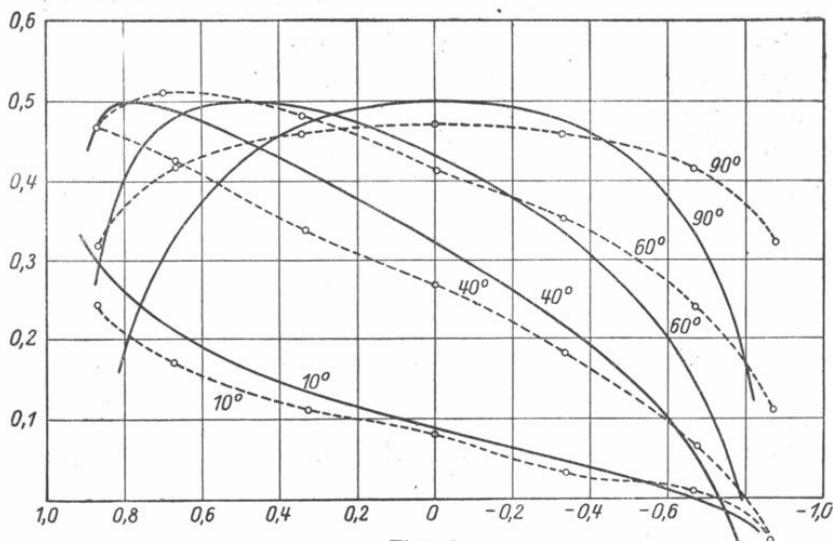
$\alpha$	$R_1$	$R_2$	$R$	$R$ exp.	$R/R$ exp.	$R/R_{90^\circ}$	$(R/R_{90^\circ})$ exp.
$0^\circ$	0,000	0,500	0,500	(0,00)	( $\infty$ )	—	—
$6^\circ$	0,064	0,610	0,614	0,35	1,73	0,47	0,46
$10^\circ$	0,121	0,673	0,697	0,46	1,52	0,54	0,60
$20^\circ$	0,288	0,788	0,845	0,56	1,52	0,66	0,60—0,73
$30^\circ$	0,483	0,837	0,966	0,61	1,59	0,75	0,73—0,80
$40^\circ$	0,692	0,824	1,078	—	—	0,84	0,82
$45^\circ$	0,785	0,785	1,112	—	—	—	—
$60^\circ$	1,047	0,607	1,212	0,73	1,65	0,94	0,94
$70^\circ$	1,177	0,172	1,252	—	—	—	—
$90^\circ$	1,285	0,000	1,285	0,78	1,65	1,00	1,00

Wir sehen aus dieser Tabelle, daß die theoretischen  $R$ -Werte durchweg größer als die experimentellen Werte sind. Wir sehen aber, daß im Intervalle  $6^\circ < \alpha < 90^\circ$  das Verhältnis zwischen dem theoretischen und dem experimentellen  $R$ -Wert annähernd konstant ist. Dies tritt besonders deutlich in den zwei letzten Kolumnen der Tabelle zutage. Besonders hervorzuheben ist die geringe Abhängigkeit vom Neigungswinkel, welche sowohl der theoretische wie der experimentelle  $R$ -Wert im Intervalle  $60^\circ < \alpha < 90^\circ$  aufweist.

Bei kleinen Neigungswinkeln ( $\alpha < 6^\circ$ ) steht die Theorie in schrofrem Widerspruch mit den Tatsachen. Es ist nicht schwer, den inneren Grund hierfür zu finden. Im Grenzfalle  $\alpha = 0$  würden nach den Ergeb-

\* Jacob, La Résistance de l'Air et l'Expérience. T. I, S. 106 u. 110, T. II, Tab. 1.

nissen, welche wir beim Grenzübergange  $\mu \rightarrow 0$  gefunden haben, beide Seiten der Platte zur Vorderseite  $S_v$  gehören. Die Flüssigkeit würde also an beiden Seiten der Platte gleiten und die Platte würde unter diesen Umständen gar keine Bewegung in der Flüssigkeit hervorrufen. Wir würden also notwendig  $R = 0$  haben. Hier aber, wo wir zuerst bei  $a > 0$  den Grenzübergang  $\mu \rightarrow 0$  und dann den Grenzübergang  $a \rightarrow 0$  ausgeführt haben, bekommen wir eine Bewegung, bei welcher die Flüssigkeit immer noch an der einen Seite der Scheibe



Figur 2

haftet, während sie an der anderen Seite gleitet. Daß wir unter solchen Umständen Ergebnisse erhalten, die nicht mit den Tatsachen übereinstimmen, kann nicht Wunder nehmen. Immerhin stellen diese Ergebnisse die Theorie vor neue und interessante Aufgaben.

Dr. Zeilon, dem wir die Theorie der Platte verdanken, hat auch das Moment der Druckkräfte auf die Platte in bezug auf die Mittellinie derselben berechnet. Er hat aus seiner Formel die in der nachfolgenden Tabelle enthaltenen theoretischen Werte berechnet. Die experimentellen Werte sind Messungen von Eiffel entnommen. Sie sind auf die Breite 2 reduziert. Bei diesen Messungen war Länge : Breite = 6.

Dr. Zeilon hat auch die Druckverteilung auf beiden Seiten der Platte untersucht. Die Ergebnisse für die Vorderseite der Platte sind in Fig. 2 dargestellt.

Tabelle II

$\alpha =$	$10^0$	$25^0$	$40^0$	$60^0$	$90^0$
$\left[ \oint p s ds \right] \text{theor.}$	0,117	0,192	0,188	0,156	0
$\left[ \oint p s ds \right] \text{exp.}$	0,250	0,204	0,192	0,150	0

Die voll ausgezogenen Kurven geben bei verschiedenen Neigungswinkeln  $\alpha$  die theoretische Druckverteilung. Die gestrichelten Kurven beziehen sich auf die bekannten Messungen von Eiffel. Wenn man bedenkt, daß die Theorie ja nur eine erste Näherung darstellt und daß die Messungen von Eiffel sich auf Platten von endlicher Länge beziehen, darf man wohl die Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung als überraschend gut bezeichnen.

Auf der Rückseite ist der Druck in Übereinstimmung mit den Tatsachen annähernd konstant. Dagegen fällt der Unterdruck dort zu groß aus. Auf diesem Umstand beruht es, daß die theoretischen  $R$ -Werte zu groß ausfallen.

## § 31. Die kreisförmige Platte und verwandte Probleme.

### 311. Formulierung des Problems.

Das Problem der kreisförmigen Platte erheischt, wie wir schon in § 23 gesehen haben, die Bestimmung einer außerhalb von der Platte regulären und in unendlicher Ferne verschwindenden Potentialfunktion,  $A$ , welche an der Vorderseite der Platte, etwa für  $x_1 = +0$ ,  $\bar{R} = \sqrt{x_2^2 + x_3^2} < a$  der Bedingung:

$$\frac{\partial A}{\partial x_1} = U_1,$$

an der Rückseite derselben, d. h. für  $x_1 = -0$ ,  $\bar{R} < a$ , der Bedingung  $A = 0$  genügt. Wenn wir diese Funktion  $A$  bestimmt haben, so haben wir:

in  $B_v$ :

$$u_j = \frac{\partial A}{\partial x_j}, \quad (j = 1, 2, 3)$$

in  $B_h$ :

$$u_1 = \frac{\partial A}{\partial x_1} - \left( \frac{\partial A}{\partial x_1} \right)_{x_1 = -0} + U_1, \quad u_2 = \frac{\partial A}{\partial x_2}, \quad u_3 = \frac{\partial A}{\partial x_3}.$$

Wir können die mathematische Aufgabe, von deren Erledigung die Lösung des Problems der kreisförmigen Platte abhängt, auch in etwas anderer Weise formulieren. Wir haben am Schlusse des ersten Paragraphen bei der Ableitung der Gleichungen III S. 12, die Geschwindigkeitskomponenten der Flüssigkeit, auf ein Koordinatensystem, in welchem der Körper ruht, bezogen, mit  $\bar{u}_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) bezeichnet und wir haben:  $\bar{u}_1 = u_1 - U_1$ ,  $\bar{u}_2 = u_2$ ,  $\bar{u}_3 = u_3$  gesetzt. Wenn wir jetzt:

$$-U_1 x_1 + A = \Phi$$

setzen, so ist  $\Phi$  eine außerhalb der Platte reguläre Potentialfunktion und wir haben:

in  $B_v$ :

$$\bar{u}_j = \frac{\partial \Phi}{\partial x_j},$$

in  $B_h$ :

$$\bar{u}_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)_{x_1=-0}, \quad \bar{u}_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \quad \bar{u}_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}.$$

(1)

Die Potentialfunktion  $\Phi$  muß sich in unendlicher Ferne wie:

$$-U_1 x_1 + \text{Konst.} + \frac{C}{R} + \dots$$

$$(R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2})$$

verhalten. Auf der Platte muß  $\Phi$  den Bedingungen:

auf  $S_v$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0, \quad (2)$$

auf  $S_h$ :

$$\Phi = 0 \quad (3)$$

genügen. Wenn es also gelingt, eine Potentialfunktion  $\Phi$  mit diesen Eigenschaften zu bestimmen, so ist das Problem der kreisförmigen Platte gelöst. Daß dieses Problem lösbar ist, haben wir übrigens schon in § 23 gesehen. Wir haben dort auch das Hilfsmittel kennengelernt, das zur Lösung des Problems führt: die vierwertigen Potentialfunktionen, deren Werte bei Umkreisung der Randkurve der Platte permutiert werden. Es handelt sich jetzt um die explizite Ausführung des in § 23 angedeuteten Gedankens.

### 31 2. Einführung von dipolaren Koordinaten.

Wir setzen:

$$x_1 = \frac{a \sin v}{\coshyp u + \cos v}, \quad \bar{R} = \sqrt{x_2^2 + x_3^2} = \frac{a \sinh \text{hyp } u}{\coshyp u + \cos v}. \quad (4)$$

Wir bemerken, daß ein Punkt  $x_1, \bar{R}$ , für welchen  $\bar{R} < a$ ,  $x_1 = +0$

ist, auf der Vorderseite  $S_v$  der Platte liegt, ein Punkt für welchen  $\bar{R} < a$ ,  $x_1 = -0$  ist, dagegen auf der Rückseite der Platte. — Wir betrachten jetzt die reziproke Entfernung der Punkte  $x_1, x_2, x_3$  und  $a \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha, 0, 0$ . Es ist:

$$\frac{1}{(x_1 - a \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha)^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{1}{a} \left| \cos \frac{1}{2} \alpha \right| \frac{\sqrt{\cosh u + \cos v}}{\sqrt{\cosh u - \cos(v - \alpha)}} \quad (5)$$

vorausgesetzt, daß die Wurzeln rechts mit solchen Vorzeichen genommen werden, daß sie für reelle Werte von  $x_1, x_2, x_3, \alpha$ , d. h. für  $0 \leq u < \infty, 0 \leq v \leq 2\pi, -\infty < a < +\infty$ , positiv ausfallen. Wir schließen aus (5), daß die Funktion:

$$\frac{\sqrt{\cosh u + \cos v}}{\sqrt{\cosh u - \cos(v - \alpha)}}$$

für alle  $a$ , als Funktion von  $x_1, x_2, x_3$  aufgefaßt, der Laplaceschen Gleichung genügt.

### 313. Einführung einer aus vierwertigen Funktionen aufgebauten Potentialfunktion mit Hilfe der Sommerfeldschen Methode. Eigenschaften derselben.

Wir betrachten jetzt die Funktion:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x_1, \bar{R}) &= \frac{\sqrt{\cosh u + \cos v}}{8\pi i} \left\{ \int_{(W_1)} \frac{1}{\sqrt{\cosh u - \cos(v - \alpha)}} \frac{da}{\sin \frac{a - v_0}{4}} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{(W_2)} \frac{1}{\sqrt{\cosh u - \cos(v + \alpha)}} \frac{da}{\sin \frac{a - v_0}{4}} \right\} = \\ &= \frac{\sqrt{\cosh u + \cos v}}{8\pi i} \int_{(W)} \frac{1}{\sqrt{\cosh u - \cos \alpha}} \left( \frac{1}{\sin \frac{a - v_0 + v}{4}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sin \frac{a - v_0 - v}{4}} \right) da. \end{aligned} \quad (6)$$

Wir wählen den Integrationsweg ( $W$ ) des letzten Integrals in der folgenden Weise. Ein Zweig geht etwa vom Punkte  $a = iu + \varepsilon + i\infty$  ( $\varepsilon > 0$ ) aus, umkreist in negativer Richtung den Punkt  $a = iu$  und kehrt ins Unendliche zurück, etwa nach dem Punkte  $a = iu - \varepsilon + i\infty$ . Ein anderer Zweig des Integrationsweges ( $W$ ) ist das Spiegelbild des

ersten in bezug auf den Punkt  $a = 0$ . Wie die Integrationswege  $(W_1)$  und  $(W_2)$  zu wählen sind, damit die Beziehung (6) besteht, ist leicht ersichtlich und hat hier keine Bedeutung\*.

Wir setzen  $v_0 = \pi$  und wollen unter dieser Voraussetzung die Eigenschaften der Funktion  $\Phi_1$  untersuchen. Wir nehmen an, daß  $0 \leq v \leq 2\pi$  ist. In dem Bereiche des  $x_1 x_2 x_3$ -Raumes, wo  $u > 0$  ist, ist dann offenbar  $\Phi_1$  eine reguläre Lösung der Laplaceschen Gleichung, welche auf  $S_v$ , also für  $v = 0$ , der Bedingung:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial v} = 0,$$

und auf  $S_h$ , also für  $v = 2\pi$ , der Bedingung:

$$\Phi_1 = 0$$

genügt. Um zu untersuchen, wie sich  $\Phi_1$  verhält, wenn  $u$  sich dem Werte Null nähert, bemerken wir, daß, wenn  $|\pi - v| > \varepsilon > 0$  ist,  $\Phi_1$  auch in der folgenden Weise dargestellt werden kann:

$$\Phi_1(x_1, \bar{R}) = \frac{1}{8\pi i} \sqrt{\cosh u + \cos v} \left\{ \int_{-\varepsilon-i\infty}^{-\varepsilon+i\infty} F(a) da + \int_{+\varepsilon+i\infty}^{+\varepsilon-i\infty} F(a) da \right\}. \quad (7)$$

Wir haben hier zur Abkürzung:

$$\frac{1}{\sqrt{\cosh u - \cos a}} \left( \frac{1}{\sin \frac{a-v_0+v}{4}} + \frac{1}{\sin \frac{a-v_0-v}{4}} \right) = F(a)$$

gesetzt. Die Integrationswege in (7) sollen zwei mit der imaginären  $a$ -Achse parallele Geraden sein. Wir sehen aus dieser Darstellung, daß  $\Phi_1(x_1, \bar{R})$  in dem Bereich des  $x$ -Raumes, wo  $|\pi - v| > \varepsilon$  ist, endlich und regulär bleibt, wenn  $u$  gegen Null konvergiert. Um schließlich festzustellen, wie sich  $\Phi_1$  verhält, wenn  $u$  gegen Null und gleichzeitig  $v$  gegen  $\pi$  konvergiert, das heißt, wenn der Punkt  $x_1, x_2, x_3$  sich ins Unendliche entfernt, bemerken wir, daß, wenn  $|\pi - v| < \varepsilon$  ist, rechts in (7) noch ein Glied hinzukommen muß. Dieses Glied röhrt von dem singulären Punkte  $a = \pi - v$  her, der, wenn  $v$  den Wert  $\pi \pm \varepsilon$  passiert, den Integrationsweg eines der beiden Integrale in (7) durchdringt. Das Glied hat den Wert +1. Wir haben also, wenn  $|\pi - v| < \varepsilon$  ist:

---

\* Die Vierwertigkeit der einzelnen Integrale in (6) röhrt vom Nenner  $\sin \frac{a-v_0}{4}$  bzw.  $\sin \frac{a-v_0+v}{4}, \sin \frac{a-v_0-v}{4}$  her.

$$\Phi_1(x_1, \bar{R}) = \frac{\sqrt{\cosh u + \cos v}}{8\pi i} \left\{ \int_{-\varepsilon-i\infty}^{-\varepsilon+i\infty} F(a) da + \int_{+\varepsilon+i\infty}^{+\varepsilon-i\infty} F(a) da \right\} + 1. \quad (8)$$

Wir sehen hieraus, daß:

$$\Phi_1(x_1, \bar{R}) \rightarrow 1,$$

wenn:

$$R = \sqrt{x_1^2 + \bar{R}^2} \rightarrow \infty.$$

Man beweist in ähnlicher Weise, daß bei  $R \rightarrow \infty$ , d. h. bei  $v \rightarrow \pi$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial v_0} \right)_{v_0=\pi} &\rightarrow \sqrt{\cosh u + \cos v} \left( \frac{\partial}{\partial v_0} \frac{1}{\sqrt{\cosh u - \cos(v_0-v)}} \right)_{v_0=\pi} = \\ &= -\frac{\sin v}{2(\cosh u + \cos v)} = -\frac{x_1}{2a}. \end{aligned}$$

### 314. Lösung des Problems.

Wir schließen aus diesen Ergebnissen, daß der Ausdruck:

$$\left[ \left( 2a U_1 \frac{\partial}{\partial v_0} + \lambda \right) \Phi_1 \right]_{v_0=\pi} = \Phi,$$

wo  $\lambda$  eine beliebige Konstante ist, eine Potentialfunktion definiert, welche außerhalb der Platte regulär ist, sich in unendlicher Ferne von einer belanglosen Konstante abgesehen wie:

$$-U_1 x_1 + \frac{C}{R} + \dots$$

verhält und auf der Platte den Bedingungen:

auf  $S_v$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0,$$

auf  $S_h$ :

$$\Phi = 0$$

genügt.

### 315. Das Verhalten der Lösung am Rande der Scheibe.

Wir haben bis jetzt die besonderen Verhältnisse am Rande der Platte außer acht gelassen. Um die Konstante  $\lambda$  zu bestimmen, ist es notwendig, auf sie Rücksicht zu nehmen.  $\lambda$  so zu bestimmen, daß die Geschwindigkeitskomponenten, also die Größen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}$$

am Rande endlich bleiben, ist unmöglich. Dies ist aber auch nicht

nötig. Was wir verlangen müssen, ist nur, daß die Resultierende der Druckkräfte auf die Platte einen endlichen Beitrag hat. Dafür ist notwendig und, wie wir unten zeigen werden, auch hinreichend, daß:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$$

auf der Rückseite der Platte quadratisch integrierbar ist. Was wir verlangen müssen, ist also, daß:

$$\int \int \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^2 dx_2 dx_3 |_{S_h}$$

einen endlichen Wert hat. Es läßt sich zeigen, daß durch diese Bedingung  $\lambda$  eindeutig bestimmt ist und daß  $\lambda$  den Wert  $\frac{1}{4}$  haben muß. Man kann ferner zeigen, daß, wenn  $\lambda$  diesen Wert hat,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$$

in der Nähe des Randes wie  $(a - R)^{-\frac{1}{4}}$  unendlich wird und also tatsächlich auf  $S_h$  quadratisch integrierbar ist. Auf den Beweis dieser Sätze gehen wir nicht ein.

### 31 6. Berechnung des Widerstandes.

#### Vergleich mit der Erfahrung. Verwandte Probleme.

Um den Widerstand der Flüssigkeit gegen die kreisförmige Platte zu berechnen, wenden wir den Impulssatz an. Um die Platte mit der Geschwindigkeit  $U_1$  vorwärts zu treiben, muß auf sie eine Kraft wirken, welche dem pro Sekunde gewonnenen Zuwachs des Impulses der ganzen Flüssigkeit gleich ist. Der Zuwachs, den der Impuls der Flüssigkeit während der Bewegung erfährt, besteht darin, daß der Wirbelschwanz sich verlängert hat. Offenbar ist der Impuls mit der Bewegungsrichtung der Platte parallel. Der Zuwachs desselben während einer Sekunde ist deshalb:

$$\varrho \int \int u_1^2 dx_2 dx_3,$$

wo wir mit  $Q$  einen Querschnitt des Wirbelschwanzes in großer Entfernung hinter der Platte bezeichnen. Wir haben deshalb auf  $Q$ :

$$u_1 = - \left( \frac{\partial A}{\partial x_1} \right)_h + U_1 = - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)_h .$$

Wenn wir mit  $\pi a^2 \varrho U_1^2 R_1$  den Widerstand der Flüssigkeit gegen die Platte bezeichnen, so haben wir folglich:

$$\pi a^2 \varrho U_1^2 R_1 = \varrho \int_{S_h} \int \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)_h^2 dx_2 dx_3.$$

Das Integral, durch welches wir  $\Phi_1$  dargestellt haben, ist offenbar ein elliptisches Integral. Auch:

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)_h$$

lässt sich durch elliptische Integrale und zwar durch zwei (im Legendreschen Sinne) „vollständige“ elliptische Integrale dritter Art ausdrücken. Wenn wir nämlich zur Abkürzung:

$$\coshyp u + 1 = \frac{2a^2}{a^2 - R^2} = \frac{2}{K^2}$$

setzen und wenn wir durch die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{u(Ku+1)(1-u^2)}} &= H_1, \\ \int_0^1 \frac{u^3 du}{\sqrt{u(Ku+1)(1-u^2)}} &= H_2 \end{aligned}$$

zwei Funktionen von  $K$  definieren, so haben wir auf  $S_h$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{2}{\pi a} \left( \frac{3}{4} K^{-\frac{1}{2}} H_1 + K^{\frac{1}{2}} H_2 \right).$$

$H_1$  und  $H_2$  sind vollständige elliptische Integrale dritter Art und können deshalb durch die Legendreschen Integrale  $E$  und  $F$  ausgedrückt und mit Hilfe der Tabellen über  $E$  und  $F$  auch numerisch berechnet werden. Dr. Zeilon hat indessen vorgezogen  $H_1$  und  $H_2$  neu zu berechnen. Aus der so erhaltenen Tabelle der Werte von

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$$

auf  $S_h$  hat Dr. Zeilon schließlich den Widerstand berechnet. Er findet

$$\pi a^2 \varrho U_1^2 R_1 = 1,179 \pi a^2 \varrho U_1^2,$$

also:

$$R_1 = 1,179.$$

Die Methoden, welche wir in diesem Paragraphen benutzt haben, lassen sich auch in einigen anderen Fällen anwenden. So hat Dr. Zeilon

nach diesen Methoden die Bewegung einer Halbkugel in einer Flüssigkeit untersucht. Für den Widerstand fand er:

wenn die krumme Fläche vorangeht:

$$0,611 \pi a^2 \varrho U_1^2$$

wenn die ebene Fläche vorangeht:

$$0,622 \pi a^2 \varrho U_1^2.$$

Die hier angegebenen Widerstände sind, mit den experimentellen Werten verglichen, etwa in demselben Maße zu groß wie die Widerstände, welche wir bei den zweidimensionalen Problemen gefunden haben. Auch bei den Raumproblemen fällt also die Druckerniedrigung im Wirbelschwanz zu groß aus. Wenn dieser Umstand nachdrücklich daran erinnert, daß unsere Lösung des hydrodynamischen Problems nur eine erste Näherung darstellt, so bleibt es andererseits sehr bemerkenswert, daß schon die Berücksichtigung der linearen Glieder der Bewegungsgleichungen ein sowohl bei den kleinsten wie bei den größten Geschwindigkeiten qualitativ richtiges Bild der Bewegung gibt und daß die daraus berechneten Widerstände in dem weiten Bereich von den kleinsten zu den größten Geschwindigkeiten hinsichtlich der Größenordnung richtig sind.

**Anhang.**

**Zwei Vorträge von Prof. N. Zeilon,  
gehalten vor dem zweiten internationalen Kongreß  
für technische Mechanik Zürich 1926.**



# I.

## Ein allgemeines hydrodynamisches Potentialproblem.

1. Die folgende Fragestellung schließt sich als natürliche Weiterführung der hydrodynamischen Theorie Oseens an. Die von einem eingetauchten Körper in einer reibungsfreien Flüssigkeit hervorgerufenen Bewegungszustände werden durch Lösung der in geeigneter Weise linearisierten Differentialgleichungen bei nachfolgendem Grenzübergang  $\mu \rightarrow 0$  beschrieben. Unter Beschränkung, der Einfachheit wegen, auf zweidimensionale Bewegung, läßt sich der Grundgedanke der Oseenschen Theorie folgendermaßen in verallgemeinerter Fassung aussprechen. Man geht aus von den bekannten Gleichungen der stationären Bewegung und nimmt an, daß durch:

$$u = u_0 + u', \quad v = v_0 + v'$$

die gesamte Geschwindigkeit in eine bekannte „eingeprägte“ Strömung  $u_0, v_0$  und eine noch zu bestimmende „Störungsströmung“ aufgeteilt sei. Es wird angenommen, daß die quadratischen Störungsglieder:

$$u' \bar{w}, v' \bar{w} \quad \left( \bar{w} = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right)$$

gegenüber den halbquadratischen:

$$u_0 \bar{w}, v_0 \bar{w}$$

vernachlässigt werden dürfen.

2. Wir beschränken uns hier auf den einfachsten Fall, wo als Primärströmung eine laminare Bewegung eingeführt worden ist. Setzen wir also:

$$u_0 = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = +\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \Delta \psi = 0,$$

so erhalten wir zunächst aus den Grundgleichungen nach Elimination von:

$$q = p + \frac{\varrho}{2}(u^2 + v^2)$$

die Gleichung:

$$\varrho \left( u_0 \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) = \mu \Delta \bar{w}, \quad \bar{w} = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}, \quad (1)$$

die, wenn  $\mu = 0$  gesetzt wird, sofort

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x}, & \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}, & \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \end{vmatrix} = 0, \text{ oder } \bar{w} = f(\psi)$$

ergibt. Wir schließen somit, daß die asymptotische Lösung des linearisierten Gleichungssystems außer einer laminaren Strömung noch eine turbulente Strömung enthalten kann, derart, daß der Wirbel auf gewissen Stromlinien der eingeprägten Strömung mit konstanter Intensität verteilt ist.

Die Bestimmung dieser Wirbelverteilung wird dadurch erleichtert, daß die asymptotische Behandlung der Gleichung (1) sich auf eine schon bekannte Diskussion zurückführen läßt. Setzen wir nämlich

$$\psi = \text{Imaginärteil von } (\varphi + i\psi),$$

so erscheint es natürlich, auf die Koordinaten  $\varphi, \psi$  zu transformieren. Setzen wir, um die Kontinuitätsgleichung zu befriedigen:

$$u' = -\frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad v' = +\frac{\partial \theta}{\partial x},$$

so läßt sich, nach einer leichten Rechnung, die Gleichung (1) so schreiben:

$$\left( \varrho \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mu \Delta_{\varphi, \psi} \right) \Delta_{x, y} \theta = \left( \varrho \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mu \Delta_{\varphi, \psi} \right) \bar{w} = 0. \quad * \quad (2)$$

3. Die obige Gleichung für  $\bar{w}$  ist, von der Koordinatenwahl abgesehen, mit derjenigen Gleichung identisch, deren asymptotisches Verhalten in Oseens Theorie Wirbelbildung und Kielwasser bestimmt. An der Grenze für  $\mu = 0$  kommt betreffs der Randbedingungen prinzipiell dasselbe Resultat heraus. Die Randkurve wird in zwei Bereiche geteilt, einer „hydrodynamischen Vorder-“ bzw. „Rückseite“ entsprechend. An der Vorderseite ( $S_v$ ) gleitet die Flüssigkeit einfach

---

\* Man vergleiche hierzu: J. Boussinesq, Journ. de Lionville (6) 1 S. 285, 1905; ferner J. M. Burgers, K. Ak. v. Wet. te Amsterdam, Verslag d. Wis- en Natuurk. Afdeel. D. XXIX S. 952, 1921.

in reiner Potentialströmung vorbei, während an der Rückseite ( $S_h$ ) die Wirbelverteilung so zu bestimmen ist, daß, wenn möglich, die Flüssigkeit daselbst am Körper haftet.

Die Herleitung dieses Resultates ist aus den Eigenschaften der Grundlösung von (2) leicht verständlich. Wenn  $(\varphi_0, \psi_0)$  einen willkürlichen Punkt der Randkurve bezeichnet, so wird die gesuchte Lösung  $\bar{w}$  mit Hilfe der Funktion:

$$\begin{aligned} F(\varphi, \psi, \varphi_0, \psi_0) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(a(\varphi - \varphi_0) + \beta(\psi - \psi_0))}}{\mu(a^2 + \beta^2) - i\varrho a} da d\beta = \\ &= e^{-\frac{\varrho}{2\mu}(\varphi - \varphi_0)} K_0\left(\varrho \frac{R}{2\mu}\right); R = \sqrt{(\varphi - \varphi_0)^2 + (\psi - \psi_0)^2}, \end{aligned}$$

wo  $K_0$  eine Hankelsche Funktion von imaginärem Argument bedeutet, in gewöhnlicher Weise durch die Greensche Formel dargestellt\*. Für  $\mu \rightarrow 0$  findet man, daß  $F$  überall gegen Null konvergiert außer auf der durch:

$$\psi = \psi_0, \varphi - \varphi_0 < 0$$

definierten singulären Kurve, wo  $F$  derart unendlich wird, daß das Greensche Randintegral einen entsprechenden endlichen Betrag liefert.

Durch jeden Punkt  $\varphi_0, \psi_0$  hat man also die betreffende Stromlinie  $\psi = \psi_0$  zu ziehen; die Gesamtheit aller Punkte der Flüssigkeit, für welche  $\varphi < \varphi_0$  ist, bestimmt die Form und Ausdehnung des der hydrodynamischen Rückseite angeschlossenen Wirbelbereiches.

Die Art des neuen potentialtheoretischen Problems ist damit auch festgelegt. Nach dem Gesetz:

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Delta_{x,y} \theta}{\partial \varphi} = 0; \Delta_{x,y} \theta = f(\psi),$$

soll auf den genannten singulären Kurven eine Wirbelbelegung mit zugehöriger Strömung, d. h. die unbekannte Funktion  $\bar{w}$  und die damit verbundene Strömungsfunktion  $\theta$ , so bestimmt werden, daß:

$$\begin{aligned} (u_0 + u') \cos(n, x) + (v_0 + v') \cos(n, y) &= 0 && \text{an } S_v; \\ u_0 + u' = v_0 + v' &= 0 && \text{an } S_h; \\ u' = v' &= 0 && \text{im Unendlichen.} \end{aligned}$$

4. Nachdem das so formulierte Potentialproblem durch eine konforme Abbildung zuerst auf den Fall des Kreiszylinders zurück-

\* Vgl. hierzu S. 38.

geführt worden ist, machen wir für die Lösung folgenden Ansatz. Der Wirbelbereich wird mit Wirbelfäden von der unbekannten Stärke:

$$\frac{d^2 \Gamma(\psi)}{d \psi^2} dx dy = \frac{d^2 \Gamma(\psi)}{d \psi^2} \frac{d\varphi d\psi}{\varkappa(z) \bar{\varkappa}(\bar{z})}$$

belegt, wo

$$\frac{d(\varphi + i\psi)}{d(x + iy)} = \frac{d(\varphi + i\psi)}{dz} = \varkappa(z) = u_0 - iv_0; \bar{\varkappa}(\bar{z}) = u_0 + iv_0.$$

Dabei setzen wir, was keine wesentliche Beschränkung bedingt, voraus, daß im Wirbelbereich das Produkt  $\varkappa(z) \bar{\varkappa}(\bar{z})$  nicht verschwindet oder jedenfalls zu keiner gefährlichen Singularität Anlaß gibt.

Im Unendlichen sei ferner:

$$w \rightarrow z.$$

Wir betrachten zunächst die Stromfunktion:

$$\theta_1 = \Gamma(\psi) + \frac{1}{2\pi} \iint \left( \frac{1}{\varkappa_0 \bar{\varkappa}_0} - 1 \right) \frac{d^2 \Gamma}{d\psi_0^2} \log R d\varphi_0 d\psi_0,$$

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

die der Bedingung:

$$\bar{w} = \Delta_{x,y} \theta_1 = (u_0^2 + v_0^2) \Delta_{\varphi,\psi} \theta_1 = \frac{d^2 \Gamma}{d\psi^2}$$

genügt. Der Funktion  $\theta_1$  entspricht eine Geschwindigkeit, die aus Wirbelementen:

$$-\frac{i}{2\pi} \frac{1}{z - z_0}$$

aufgebaut ist. Wird ferner eine laminare Bewegung superponiert, indem die gespiegelte Winkelfunktion:

$$\frac{z\varkappa(z)}{\bar{\varkappa}\left(\frac{1}{z}\right)} \frac{1}{1 - \bar{z}_0 z}$$

über dem Wirbelgebiet mit der Verteilung:

$$d\varphi_0 d\psi_0 \left( \frac{1}{\varkappa(z_0) \bar{\varkappa}(\bar{z}_0)} - 1 \right) \frac{d^2 \Gamma}{d\psi_0^2} = \left( \frac{1}{\varkappa_0 \bar{\varkappa}_0} - 1 \right) df(\psi_0) d\varphi_0$$

integriert wird, so sieht man sogleich, daß die gesamte Bewegung eine am Kreise  $|z| = 1$  verschwindende  $\psi$ -Komponente der Geschwindigkeit ergibt.

Wird jetzt am Kreise noch die  $\varphi$ -Komponente  $U^\varphi$  berechnet, so läßt sich die Schwierigkeit des für  $z = z_0$  unendlichen Kernes durch

Isolieren des singulären Bestandteiles beseitigen. Eine Diskussion, die ich hier übergehe, zeigt, daß  $U_\varphi$  so geschrieben werden kann:

$$\left(\frac{1}{\pi \bar{\pi}}\right)_{|z|=1} f(\psi) + \int K(\psi, \psi_0) f(\psi_0) d\psi_0 = U_\varphi,$$

wo  $f(\psi)$  außerhalb des Wirbelgebietes (insbesondere an  $S_a$ ) verschwindet und  $K$  einen für  $\psi = \psi_0$  höchstens logarithmisch unendlichen Kern bedeutet.

Ferner läßt sich ein „gemischtes“ Potential superponieren derart, daß:

an  $S_v$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} + u_0 \cos(n, x) + v_0 \cos(n, y) = -U_\varphi \cos(n, \varphi)$$

an  $S_h$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \psi} = 0.$$

Das Potential  $\Phi$ , das durch die noch hinzukommende Bedingung betreffs der Geschwindigkeitsverhältnisse im Unendlichen eindeutig festgelegt ist, wird an der Rückseite des Kreises eine  $\varphi$ -Geschwindigkeit ergeben, die ihrerseits das unbekannte  $U_\varphi$  mit einem regulären Kerne längs jener Rückseite integriert enthält.

Die schließlich übriggebliebene Bedingung, daß die gesamte  $\varphi$ -Geschwindigkeit an der Rückseite verschwinden soll, führt somit die Bestimmung der unbekannten Funktion  $f$  auf eine Fredholmsche Integralgleichung zurück, deren Kern sowohl in  $\psi$  wie  $\psi_0$  quadratisch integrierbar ist.

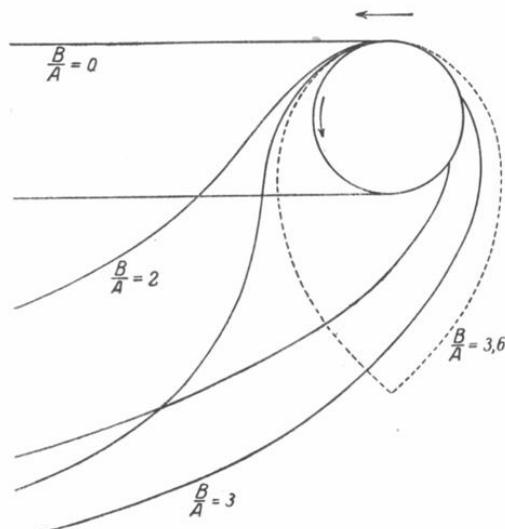
Das hier gefundene Resultat läßt sich, wie unmittelbar ersichtlich sein dürfte, noch auf den Fall übertragen, daß die Geschwindigkeit an der Rückseite vorgeschriebene Werte annehmen soll.

5. Beispiel. Der Magnuseffekt. Es ist klar, daß die Wahl der eingeprägten Strömung  $\psi$  gewissermaßen willkürlich ist und selbstverständlich den natürlichen Voraussetzungen des bezüglichen Problems gemäß getroffen werden muß. Im Falle des in einem gleichmäßigen Strome stillstehenden Zylinders führt die einfachste natürliche Annahme:

$$u_0 = \text{Konst.}, \quad v_0 = 0$$

auf die Theorie Oseens. Als ebenso natürlichen Ansatz nimmt man für den rotierenden Zylinder am einfachsten:

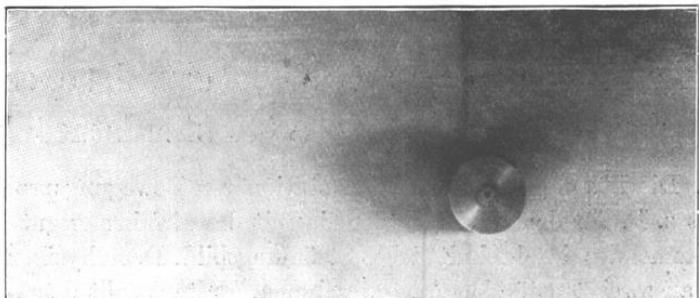
$$\varphi + i\psi = A(x + iy) + iB \log(x + iy).$$



Figur 1

Die Aufgabe, die Gesamtheit der Kurven  $\psi$  mit  $\varphi - \varphi_0 < 0$  anzugeben, ist eine rein elementare, deren Ergebnis die beigegebene Fig. 1 (für  $\frac{B}{A} = 0; 2; 3$ ) illustriert. Man sieht, wie der Wirbelbereich, der in der Oseenschen Theorie des stillstehenden Zylinders der Strömungsrichtung parallel verläuft und geradlinig begrenzt ist, jetzt durch die Rotation deformiert und abgelenkt erscheint.

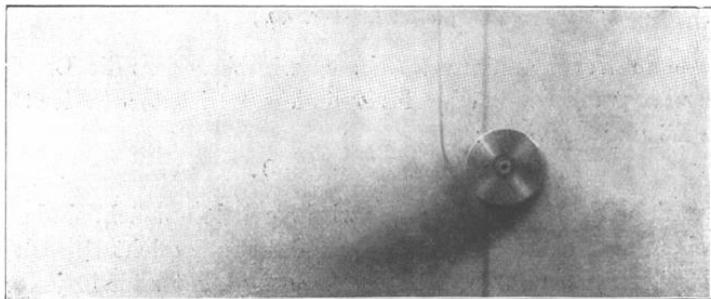
Insbesondere bemerkt man, daß für große Werte von  $\frac{B}{A} (> 1)$  die untere Begrenzung des Wirbelschwanzes durch jene  $\psi$ -Kurve gebildet wird, die durch den Doppelpunkt der Primärströmung,  $x = 0$ ,  $y = -B$ , hindurch geht. Die Folge davon ist, daß mit zunehmender Rotationsgeschwindigkeit der Wirbelschwanz sich immer höher an der der Translationsströmung zugewandten Vorderseite des Zylinders hinaufsaugt, und daß er gleichzeitig hinter dem Körper immer schmäler wird. Schließlich (bei  $\frac{B}{A} = \text{etwa } 3,6$ ) trifft der in der Figur gestrichelte Grenzfall ein; der ganze Wirbelschwanz ist zu einer Art von Korona, die den Zylinder umhüllt, zusammengeschrumpft.



Figur 2



Figur 3



Figur 4

Die nach zunehmender Rotationsgeschwindigkeit geordneten Aufnahmen, Fig. 2—4, zeigen, daß der theoretische Ansatz jedenfalls qualitativ sich der Erfahrung sehr gut anpaßt. Es ist wohl kaum nötig, hervorzuheben, daß die ausgeführte Berechnung nicht nur einen Auftrieb, sondern gleichzeitig auch einen Widerstand ergeben würde.

## II.

## Zur Berechnung des Kielwasserdruckes in der asymptotischen Widerstandstheorie.

1. Die Lösung des Oseenschen stationären Bewegungsproblems ergibt z. B. für den Kreiszylinder ein mit der Erfahrung gut übereinstimmendes durchschnittliches Strömungsbild. Der Physiker wird aber an zwei Umständen Anstoß nehmen. Erstens fällt der Widerstand viel zu groß aus, zweitens wird beim Passieren des Wirbelschwanzes der Druck unstetig.

Setzen wir, wie gewöhnlich:

$$u = u_0 + u', \quad v = v',$$

wo  $u_0$  die konstante Strömungsgeschwindigkeit bedeutet, so folgt aus den Grundgleichungen bei Vernachlässigung der quadratischen Glieder, für  $\mu \rightarrow 0$ , sofort:

$$q = -\varrho u_0 \int \bar{w} dy,$$

während exakt:

$$q = \varrho \int \bar{w} (v' dx - (u' + u_0) dy)$$

sein sollte. Die Druckbestimmung wird also fehlerhaft sein, sobald der Ausdruck:

$$\int \bar{w} (v' dx - u' dy)$$

bedeutende Werte annimmt. Nehmen wir besonders die Druckverteilung längs der Oberfläche des Zylinders, so ist dort in der Oseen-schen Lösung entweder:

$$\bar{w} \quad \text{oder} \quad v' = 0.$$

Eine unrichtige Druckberechnung wird somit hauptsächlich dadurch entstehen, daß das quadratische Produkt  $u' \bar{w}$  nicht überall vernachlässigt werden kann. Dieses Produkt nimmt aber in jener Lösung nahe der Grenze des Wirbelgebietes große Werte an; insbesondere wird beim Eintritt in das Wirbelgebiet  $\bar{w}$  derart unendlich, daß  $q$  mit einem endlichen Betrag diskontinuierlich bis zu jenem übertriebenen Saugdruck herabfällt, der für den zu großen Widerstands-koeffizienten verantwortlich ist. Das fehlerhafte Schlußresultat ist eben die natürliche Folge davon, daß in einem kritischen Bereich die Differentialgleichungen in allzu grober Weise verletzt worden sind.

2. Ein charakteristisches Ergebnis der Oseenschen Theorie ist die Einteilung des Körpers in eine „hydrodynamische Vorder-“ und „Rückseite“. Vieles (z. B. die experimentelle Tatsache des an der Rückseite eines Körpers nahezu konstanten Druckes) deutet darauf hin, daß die damit zusammenhängenden verschiedenenartigen Grenzbedingungen (Gleiten der Flüssigkeit an der Vorderseite, Haf-ten an der Rückseite) der Erfahrung gut entsprechen. Daß überhaupt eine „reibunglose“ Flüssigkeit einen Widerstand aufweisen kann, röhrt davon her, daß an der Körperoberfläche die Reibungs-kräfte noch bei verschwindender Viskosität eine endliche Arbeit aus-führen, die zum Losreißen und Transportieren von Wirbeln von der Hinterseite nach rückwärts verbraucht wird. Da aber hinter dem Körper die Geschwindigkeit überall Null sein sollte, wird der eigent-liche Wirbeltransport nur in den „kritischen“ Übergangspunkten zwischen Vorder- und Rückseite stattfinden. Von diesem Gesichts-punkte aus erscheint es natürlich, die Druckdiskontinuität dadurch „aufzulockern“, daß man jene Punkte als den Grenzfall von sehr kleinen Gleitungsintervallen betrachtet. Eine derartige Vorstellung wird im folgenden zu einer eindeutigen Festlegung des Kielwasser-druckes benutzt.

3. Nehmen wir nun die Lösung des Oseenschen Problemes als erste Näherung des Widerstandsproblems an, so erscheint zunächst der Druck (oder die Funktion  $q$ ) als bei der gewählten Vereinfachung der Bewegungsgleichungen eindeutig bestimmt. In der Tat ist aber diese Eindeutigkeit gewissermaßen nur scheinbar.

Denn schreiben wir:

$$u = u_1(y) + u', \quad v = v',$$

wo  $u_1$  außerhalb des Oseenschen Wirbelschwanzes gleich  $u_0$  ist und innerhalb dieses Bereiches in irgendeiner Weise von  $y$  stetig abhängt, so können wir statt  $u_0$  ebensogut  $u_1(y)$  als eine modifizierte Primär-strömung mit überlagerter Störungsströmung  $u'$ ,  $v'$  einführen. Wenn aber jetzt  $u' \bar{w}$ ,  $v' \bar{w}$  als quadratische Glieder vernachlässigt werden, so kommt durch Elimination von  $q$  aus:

$$0 = -\frac{\partial q}{\partial x_i} + \mu \Delta u$$

$$\varrho u_1(y) \bar{w} = -\frac{\partial q}{\partial y} + \mu \Delta v,$$

die Gleichung

$$\varrho u_1(y) \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = \mu \Delta \bar{w} \quad (1)$$

heraus, die für  $\mu \rightarrow 0$  voraussichtlich auf die fundamentale Gleichung der Oseenschen Theorie:

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

führen wird. Dementsprechend wird man jetzt die in der Flüssigkeit gültige Beziehung:

$$q \rightarrow -\varrho \int u_1(y) \bar{w} dy, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

finden. Damit hat man aber innerhalb des Wirbelgebietes eine ganz verschiedene Druckbestimmung eingeführt, obschon das Strömungsbild immer durch die Gleichung (2) bestimmt wird und folglich auf den Oseenschen Typus zurückkommt.

4. Nach der obigen Auseinandersetzung wird man, von der Oseenischen Strömung ausgehend, nur dadurch zu einer bestimmten Druckberechnung gelangen, daß man durch irgendeine ergänzende Hypothese einen geeigneten Anteil der geradlinigen turbulenten Geschwindigkeit als „Primärströmung“ absondert. Mit Rücksicht auf die vollständigen Differentialgleichungen erscheint es für das Widerstandsproblem natürlich, die Auswahl so zu treffen, daß in der Nähe des Körpers diese vollständigen Gleichungen so gut wie möglich befriedigt werden, d. h., wir sollten:

$$u_1(y) = u_{s_h}(y)$$

setzen, wo  $u_{s_h}$  die totale Geschwindigkeit an der Körperoberfläche bedeutet.

Da aber, bei vollständigem Haften an der Rückseite,

$$u_{s_h} = 0$$

ist, so würde folgen:

$$dq = 0, \quad q = \text{Konst.}$$

Der absolute Wert des Kielwasserdruckes würde aber immer noch unbestimmt bleiben, weil in den kritischen Punkten als einzigm Sitz der Wirbelablösung  $\bar{w} = \infty$  und  $u_{s_p}$  diskontinuierlich ist. Um bestimmte Druckwerte zu erzielen, muß man die Annahme von den oben erwähnten, den kritischen Punkten zugeordneten Gleitungsintervallen zu Hilfe nehmen. Dabei wird die Oseenische Strömung durch eine gewisse naheliegende Strömung ersetzt, bei der der Druckübergang in bestimmter stetiger Weise durch die Gleitungsintervalle hindurch erfolgt. Läßt man nachher die Ausdehnung des Gleitungsintervales nach Null konvergieren, so wird es möglich, auf eine der Oseenströmung entsprechende Druckbestimmung zu schließen.

5. Gehen wir umgekehrt davon aus, es handle sich darum, eine möglichst genaue Lösung der vollständigen Gleichungen in der Nähe des Körpers zu erhalten, so würden wir immer, bei Annahme von sehr kleinen Gleitintervallen und vollständigem Haften an der übrigen Rückseite, entweder  $v'$  sehr klein oder  $= 0$  haben. Die vollständige Gleichung:

$$\varrho \left( u \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) = \mu \Delta \bar{w}$$

würde somit, in der unmittelbaren Nähe von  $S_h$  mit guter Näherung in die Gleichung

$$\varrho u_{S_h}(y) \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = \mu \Delta \bar{w} \quad (3)$$

übergehen. Aus (3) folgert man aber unter allgemeinen Voraussetzungen, daß die längs der Körperoberfläche exakt gültige Beziehung:

$$q = -\mu \int (\Delta u dx + \Delta v dy)$$

wirklich, für  $\mu \rightarrow 0$ , die Formel:

$$q = -\varrho \int u_{S_h}(y) \bar{w} dy$$

ergibt.

6. Die explizite Durchführung des oben geschilderten Vorganges kann in wenigen Worten abgefertigt werden. Die besondere Art, Gleitintervalle einzuführen ist mehr oder weniger gleichgültig. Das unten angeführte Resultat bezieht sich auf folgende Anordnung. Der Zylinderumfang wird vom vorderen Staupunkte aus in Bogenmaß von 0 bis  $2\pi$  gerechnet. Es wird angenommen, daß die Flüssigkeit zwischen  $2\pi - \alpha$  und  $\alpha$  vorbei gleitet, so daß die Gleitintervalle die Winkel zwischen  $2\pi - \alpha$  bis  $\frac{3\pi}{2}$  und zwischen  $\frac{\pi}{2}$  und  $\alpha$  einnehmen. Um zu erzielen, daß die Gleitung der Flüssigkeit gegen die Rückseite hin stetig gegen Null retardiert wird, führen wir vom Anfang an in die Streifen:

$$\begin{aligned} 1 > y > \sin \alpha, \\ -1 < y < -\sin \alpha, \end{aligned} \quad x < 0,$$

eine geeignete Wirbelverteilung an. Es sei z. B. eine geradlinige Strömung  $u^0(y)$  vorhanden derart, daß:

$$u^0 = \text{Konst.} = -U$$

außerhalb des Oseenschen Wirbelstreifens, und daß am Zylinder:

$$u^0(\sin \vartheta) = u_{S_p}^0 = U \left( -1 + \frac{\cos \vartheta}{\cos \alpha} \right), \quad \begin{aligned} \frac{\pi}{2} < \vartheta < \alpha \\ 2\pi - \alpha < \vartheta < \frac{3\pi}{2}; \end{aligned}$$

$$u^0(\sin \vartheta) = u_{S_h}^0 = 0, \quad \alpha < \vartheta < 2\pi - \alpha.$$

Wir lösen jetzt das folgende Potentialproblem. Eine Geschwindigkeitsfunktion  $u' - iv'$  wird so bestimmt, daß:

$$\begin{aligned} u' \cos \vartheta + v' \sin \vartheta + u_{S_p}^0 \cos \vartheta &= 0, & -\alpha < \vartheta < \alpha \\ v' &= 0 & , & \alpha < \vartheta < 2\pi - \alpha; \\ u' = v' &= 0 & , & \text{im Unendlichen.} \end{aligned}$$

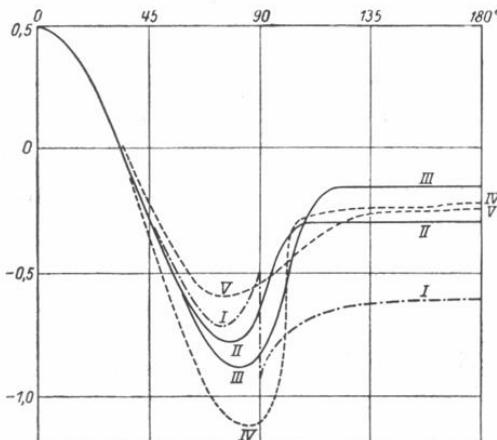
Um zwischen  $\alpha$  und  $2\pi - \alpha$  Haftung zu erzielen, wird nachher eine geradlinige turbulente Strömung nach dem Schema Oseens überlagert.

Die Funktion  $u' - iv'$  läßt sich nach bekannten Prinzipien konstruieren und ohne Schwierigkeit berechnen. Die so erhaltene Strömung liegt für  $\alpha$  nahe  $\frac{\pi}{2}$  der Oseenschen Strömung sehr nahe, hat aber überall endlichen Wirbel und ist mit einem stetigen Geschwindigkeits- und Druckverlauf hinter dem Zylinder verbunden.

Die beigelegte Figur zeigt das Resultat der durch Integration über den Gleitungsintervallen mit  $u_{S_h} = u_{S_h}^0 + u'$  erzielten Druckberechnung.

Die Kurven haben folgende Bedeutung:

I. Druckverteilung am Zylinderumfang bei direkter Lösung des Oseenschen Problemes;



Figur 5

- II. Druckverteilung mit Gleitung,  $\alpha = 108^\circ$ ;
- III. " " " ",  $\alpha = 126^\circ$ ;
- IV. Experimentelle Druckwerte, nach Eisner\*, für hohe Reynolds-sche Zahl;
- V. Experimentelle Werte, nach Lafay\*\*.

Der Vergleich der Kurve I mit den Kurven II und III zeigt, daß die lästige Druckdiskontinuität nunmehr verschwunden ist, und daß ferner der große Unterdruck der Kurve I durch einen mäßigeren, im Haftungsbereich konstanten und mit zunehmender Ausdehnung der Gleitintervalle abnehmenden Saugdruck ersetzt wird.

Die Kurven II und III schließen sich, sowohl ihrem allgemeinen Typus nach wie auch quantitativ, den experimentellen Kurven ersichtlich gut an. Durch Integration der Kurven erhält man sofort den Widerstandskoeffizienten. Sowohl die theoretischen wie die experimentellen Kurven zeigen einen sehr kleinen resultierenden Überdruck an der Vorderseite des Zylinders; der Widerstand hängt (im Gegensatz zur Helmholtz-Dirichletschen Diskontinuitätsflächen-theorie) fast ausschließlich von dem hinteren Saugdruck ab.

Der experimentell gefundene Widerstand ist sowohl nach Eisner wie nach Lafay zwischen den theoretischen Widerständen nach II und III enthalten.

Die Verringerung des Widerstandes mit erhöhter Gleitung deutet auf die Möglichkeit einer zwanglosen Erklärung des mit steigender Reynoldsscher Zahl abnehmenden Widerstandskoeffizienten. Es mag in diesem Zusammenhang bemerkt werden, daß der Widerstandskoeffizient der reinen Oseenschen Bewegung, mit Haftung an der ganzen Rückseite, nach den obigen Prinzipien als Grenzfall berechnet, sich auf ungefähr 0,5 (in absolutem Maße) erhebt. Dieser Wert deckt sich etwa mit dem experimentell gefundenen Koeffizienten unmittelbar vor dem bei einer Reynoldsschen Zahl von der Größenordnung  $10^5$  eintretenden Widerstandsabfall.

---

\* Druckmessungen an umströmten Zylindern. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 5, 1925.

\*\* Jacob, La Résistance de l'Air et l'Expérience. Tome II, Tafel XII, bis. Encycl. Scientif. Octave Doin, Paris 1921.

# Literaturverzeichnis.

## Zu § 1.

- Navier, C. L. M. H. Mémoire sur les Lois du Mouvement des Fluides. Mém. de l'Acad. des Sciences. T. VI, 1822.
- Poisson, S. D. Mémoire sur les Equations générales de l'Equilibre et des Mouvements des Corps solides élastiques et des Fluides. Journal de l'Ecole Polytechn. T. XIII, 1829.
- Stokes, G. G. On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion. Cambr. Trans. T. VIII, 1845; abgedruckt in Math. and Phys. Papers T. I.

## Zu § 2.

- Frank — v. Mises. Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik.

## Zu § 3.

- Lorentz, H. A. Ein allgemeiner Satz, die Bewegung einer reibenden Flüssigkeit betreffend, nebst einigen Anwendungen desselben. Amsterdam, Zittingsverlag Akad. v. Wet. 5, 1896. Neue Bearbeitung in: Abhandlungen über theoretische Physik I. 1907.

## Zu § 4.

- Oseen, C. W. Über die Stokessche Formel und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik. Arkiv för matematik, astr. och fysik. Bd. 6, 1910.

## Zu § 5.

- Oseen, C. W. Zur Theorie der Bewegung einer reibenden Flüssigkeit. Arkiv för matematik, astr. och fysik. Bd. 3, 1907.
- Sur les formules de Green généralisées qui se présentent dans l'hydrodynamique et sur quelques-unes de leurs applications. Acta mathematica T. 34.
- Palomby, A. Sull'idrodinamica dei fluidi viscosi, Giorn. di matematiche. 50, 1912.
- Crudeli, U. Formule del Green e metodi del Betti nella teoria del moto lento dei liquidi viscosi. Rendiconti d. R. Acc. dei Lincei. 21, 1912.

## Zu § 6.

- Oseen, C. W. Über die Bedeutung der Integralgleichungen in der Theorie der Bewegung einer reibenden, unzusammendrückbaren Flüssigkeit. Arkiv för matematik, astr. och fysik. Bd. 6, 1910.

## Zu § 7.

- Oseen, C. W. Sur les formules de Green généralisées etc. Acta mathematica T. 34.
- Ein Satz über die Singularitäten, welche in der Bewegung einer reibenden und unzusammendrückbaren Flüssigkeit auftreten können. Arkiv för matematik, astr. och fysik. Bd. 6, 1910.

*Sur la représentation analytique de la vitesse dans certains problèmes d'hydro-dynamique.* Nova acta reg. soc. scient. Upsaliensis Ser. IV. Vol. 4, 1917.

Zu § 8.

Oseen, C. W. Über Wirbelbewegung in einer reibenden Flüssigkeit. Arkiv för matematik, astr. och fysik. Bd. 7, 1911.

Zu § 9.

Stokes, G. G. On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums. Cambr. Trans. T. IX. 1851; Math. and Phys. Papers T. III.

Lorentz, H. A. Ein allgemeiner Satz, die Bewegung einer reibenden Flüssigkeit betreffend, nebst einigen Anwendungen desselben. Amsterdam, Zittingsverlag Akad. v. Wet. 5, 1896; Abhandlungen über theoretische Physik I, S. 23.

Faxén, H. Einwirkung der Gefäßwände auf den Widerstand gegen die Bewegung einer kleinen Kugel in einer zähen Flüssigkeit. Diss. Upsala 1921.

Oseen, C. W. Über ein Randwertproblem in der Hydrodynamik. Arkiv för matematik, astr. och fysik. Bd. 18, 1924.

Faxén, H. Der Widerstand gegen die Bewegung einer starren Kugel in einer zähen Flüssigkeit, die zwischen zwei parallelen ebenen Wänden eingeschlossen ist. Arkiv för matematik, astr. och fysik. Bd. 18, 1924.

Zu § 10.

Boussinesq, J. Théorie analytique de la chaleur T. II. Paris 1903. S. 224.

Oseen, C. W. Zur Hydrodynamik der Kugel. Arkiv för matematik, astr. och fysik. Bd. 6, 1909.

Lösung eines hydrodynamischen Problems. Arkiv för matematik, astr. och fysik. Bd. 14, 1919.

Zu § 11.

Oberbeck, A. Über stationäre Flüssigkeitsbewegungen mit Berücksichtigung der inneren Reibung. Crelles Journal, T. LXXXI. 1876.

Zu § 12.

Lorentz, H. A. Ein allgemeiner Satz, die Bewegung einer reibenden Flüssigkeit betreffend, nebst einigen Anwendungen desselben. Amsterdam, Zittingsverlag Akad. v. Wet. 5 (1896). Abhandlungen über theoretische Physik I.

Stock, J. Über die Bewegung einer Kugel in einem zähen Medium längs einer ebenen Wand. Bulletin international de l'Académie des Sciences de Cracovie No. 1 A. 1911.

Zu § 13.

Faxén, H. Der Widerstand gegen die Bewegung einer starren Kugel in einer zähen Flüssigkeit, die zwischen zwei parallelen ebenen Wänden eingeschlossen ist. Ann. der Physik Bd. 68, 1922.

Der Widerstand gegen die Bewegung einer starren Kugel in einer Flüssigkeit, die zwischen zwei parallelen ebenen Wänden eingeschlossen ist. Arkiv för mat., astr. och fysik Bd. 18, 1924. — Zweite Mitteilung Arkiv för mat., astr. och fysik. Bd. 19 A, 1925.

Harrison, W. J. On the Motion of Spheres, Circular and Elliptic Cylinders through viscous Liquid. Trans. of the Cambridge Phil. Trans. Vol. XXIII, 1924.

## Zu § 14.

- Smoluchowski, M. Über die Wechselwirkung von Kugeln, die sich in einer zähen Flüssigkeit bewegen. Bulletin international de l'Académie des Sciences de Cracovie. No. 1 A, 1911.
- Faxén, H. Gegenseitige Einwirkung zweier Kugeln, die in einer zähen Flüssigkeit fallen. Mit einem Nachtrag von H. Dahl. Arkiv för mat., astr. och fysik. Bd. 19 A, 1925.
- Stimson, M., and Jeffery, G. B. The Motion of Two Spheres in a Viscous Fluid. Proc. of the Royal Soc. of London. Ser. A. Vol. III, 1926.
- Faxén, H. Die Geschwindigkeit zweier Kugeln, die unter Einwirkung der Schwere in einer zähen Flüssigkeit fallen. Zeitschrift für angew. Math. und Mechanik. Bd. 7, 1927.

## Zu § 15.

- Stokes, G. G. On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums. Cambr. Trans. IX. 1851; Math. and Phys. Papers III.
- Whitehead, A. N. Second Approximation to Viscous Fluid Motion. Quarterly Journal of Mathematics 1888.

## Zu § 16.

- Oseen, C. W. Über die Stokessche Formel und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik. Arkiv för matematik, astr. och fysik, Bd. 6, 1910; Bd. 7, 1911.
- Lamb, H. On the Uniform Motion of a Sphere through a Viscous Fluid. Phil. Mag. 21, 1911.
- Noether, F. Über den Gültigkeitsbereich der Stokesschen Widerstandsformel. Zeitschrift für Mathematik und Physik. Bd. 62, 1912.
- Oseen, C. W. Über den Gültigkeitsbereich der Stokesschen Widerstandsformel. Arkiv för matematik, astr. och fysik. Bd. 9, 1913.
- Burgess, R. W. The Uniform Motion of a Sphere through a Viscous Liquid. American Journal of Mathematics 1916.
- Liebster, H. Über den Widerstand von Kugeln. Annalen der Physik. Bd. 82, 1927.

## Zu § 17.

- Lamb, H. On the Uniform Motion of a Sphere through a Viscous Fluid. Phil. Mag. 21, 1911.
- Bairstow, L. Cave, B. M., and Lang, E. D. The Resistance of a Cylinder in a Viscous Fluid. Phil. Trans. of the Royal Soc. of London, Ser. A. Vol. 223, 1923.
- Filon, L. N. G. The Forces on a Cylinder in a Stream of Viscous Fluid. Proc. of the Royal Soc. of London, Ser. A. Vol. 113, 1926.
- Faxén, H. Exakte Lösung der Oseenschen Differentialgleichungen einer zähen Flüssigkeit für den Fall der Translationsbewegung eines Zylinders. Nova Acta R. Soc. Scient. Ups. Volumen extra ordinem editum, 1927.
- Faxén, H. Vereinfachte Darstellung der verallgemeinerten Greenschen Gleichungen für die konstante Translationsbewegung eines starren Körpers in einer zähen Flüssigkeit. Arkiv för matematik, astr. och fysik, Bd. 20, 1927.

## Zu § 18.

- Oseen, C. W. Über den Widerstand gegen die gleichmäßige Translation eines Ellipsoids in einer reibenden Flüssigkeit. Archiv der Mathematik und Physik. Bd. 24, 1915.

Dhirendra Kumar Sen. On the application of Burgess's method for determining the uniform motion of an ellipsoid of revolution through a viscous liquid along its axis of revolution. Proceedings of the Benares Mathematical Society Vol. II, 1920.

Harrison, W. J. On the Motion of Spheres, Circular and Elliptic Cylinders through Viscous Liquid. Trans. of the Cambridge Phil. Society. Vol. XXIII, 1924.

## Zu § 19.

Faxén, H. Einwirkung der Gefäßwände auf den Widerstand gegen die Bewegung einer kleinen Kugel in einer zähen Flüssigkeit. Dissertation. Upsala 1921.

## Zu § 20.

Ladenburg, R. Über die innere Reibung zäher Flüssigkeiten und ihre Abhängigkeit vom Druck. Dissertation. München 1906, Auszug in Ann. der Physik 22, 1906.

Über den Einfluß von Wänden auf die Bewegung einer Kugel in einer reibenden Flüssigkeit. Ann. der Physik 23, 1907.

Faxén, H. Dissertation, s. oben!

Die Bewegung einer starren Kugel längs der Achse eines mit zäher Flüssigkeit gefüllten Rohres. Arkiv för matematik, astr. och fysik. Bd. 17, 1923.

## Zu § 21.

Oseen, C. W. Über einen hydrodynamischen Satz von Herrn M. Smoluchowski. Arkiv för matematik, astr. och fysik. Bd. 7, 1912.

## Zu § 23.

Oseen, C. W. Zur Theorie des Flüssigkeitswiderstandes. Nova Acta R. Soc. Scient. Ups. Ser. IV. Vol. 4, 1914.

## Zu §§ 24, 25.

Oseen, C. W. Beiträge zur Hydrodynamik. Annalen der Physik. Bd. 46, 1915.

## Zu § 26.

Oseen, C. W. Über ein hydrodynamisches Problem. 1. Arkiv för matematik, astr. och fysik. Bd. 17, 1922; 2. ibidem Bd. 19, 1926; 3. ibidem Bd. 20, 1927.

Über eine potentialtheoretische Randwertaufgabe aus der Hydrodynamik. Nova Acta R. Soc. Scient. Ups. Volumen extra ordinem editum 1927.

## Zu §§ 27—31.

Zeilon, N. On Potential Problems in the Theory of Fluid Resistance. K. Sv. Vetenskaps-akademiens Handlingar. Ser. 3. Bd. 1, 1923.

Potentialprobleme in der Hydrodynamik. Verhandlungen des 6. skand. Mathematikerkongresses zu Kopenhagen 1925.

Gustafson, T. Eine Anwendung der Oseenschen Theorie auf der Tragfläche von Joukowski. Arkiv för matematik, astronomi och fysik, Bd. 20, 1927.

Villat, H. Sur une extension de la méthode d'Oseen. Comptes Rendus, 1927.

## Zu § 29 auch:

Burgers, J. M. Stationaire stroomingen door en lichaam in een vloeistof met wrijving tewegegebracht. Kon. Ak. v. Wetenschappen te Amsterdam. Verslag. 1921, Deel XXIX.

Eisner, F. Druckmessungen an umströmten Zylindern. Zeitschr. f. angew. Mathematik und Mechanik. Bd. 5, 1925.

# Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H., Leipzig

Die folgenden Bände erscheinen in unserem Verlage.

**Weierstraß, Karl: Mathematische Werke.** Herausgegeb. unter Mitwirkung einer von der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Kommission. 1894—1915. Nur kompl. geb. I—VI. M. 225.—

1. Band: Abhandlungen I. 355 S. Geh.
2. Band: Abhandlungen II. 362 S. Geh.
3. Band: Abhandlungen III. Mit dem Bildnis des Verfassers. 360 S. Geh.
4. Band: Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transzendenten. Bearbeitet von G. Hettner und J. Knoblauch. 631 S. Geh.
5. Band: Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Funktionen. Bearbeitet von J. Knoblauch. 327 S. Geh.
6. Band: Vorlesungen über Anwendungen der elliptischen Funktionen. Bearbeitet von Rudolf Rothe. Mit einem Bildnis von Weierstraß. 354 S. Geh.
7. Band: Variationsrechnung. Bearbeitet von Rudolf Rothe. (Erscheint Ende 1927)

**Fuchs, L.: Gesammelte mathematische Werke.** Herausgegeb. von Richard Fuchs und Ludwig Schlesinger. 1904—1905.

I. Band: Abhandlungen (1858—1875). Redigiert von L. Schlesinger. Mit einem Bildnis des Verfassers. 476 S. Geh.	M. 40.—
II. Band: Abhandlungen (1875—1887). Redigiert von L. Schlesinger. 407 S. Geh.	M. 40.—
III. Band: Abhandlungen (1888—1902) u. Reden, Redigiert v. Richard Fuchs. 468 S. Geh.	M. 38.—

**Hecke, E.: Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen.** (VIII, 266 S.) geb. . . . . M. 11.—

## Aus den Besprechungen:

Es ist ganz unglaublich, wie viel der Verfasser in dem kleinen Buch bringt, ohne besondere Vorkenntnisse vorzusetzen und ohne irgendwo in seiner Darstellung unverständlich knapp zu werden. Es kann nur auf das lebhafteste gewünscht werden, daß diese meisterhafte Darstellung möglichst vielen Mathematikern einen Einblick in die so reizvollen Probleme der Theorie der algebraischen Zahlen verschaffen möge.

Tonio Rella, Monatshefte für Mathematik und Physik. Bd. XXXIV, 1927

... so stellt alles in allem das Buch einen ganz vortrefflichen, von einheitlicher Methode beherrschten, übersichtlichen und verständlichen und die mannigfachsten Zusammenhänge klar herausarbeitenden Leitfaden dar, der jeden, der in die algebraische Zahlentheorie eindringen will, aufs wärmste empfohlen sein mag.

Helmut Hasse, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 34, 1.—4. Heft

# Monatshefte für Mathematik und Physik Bd. XXXIV

Herausgegeben von  
**H. HAHN und W. WIRTINGER**  
Wien

## Aus dem Inhaltsverzeichnis:

Brauner, K., Über einige spezielle Schiefflächen	69
Burstin, C., und Mayer, W., Das Formenproblem der $t$ -dimensionalen Hyperflächen in $n$ -dimensionalen Räumen konstanter Krümmung	89
Hayashi, T., On the Equitangential Curves	163
Koschmieder, L., Über die Jacobische Bedingung bei einigen Sonderaufgaben der Variationsrechnung	41
Landau, E., Die Bedeutungslosigkeit der Pfefferschen Methode für die analytische Zahlentheorie	1
Menger, K., Über die Dimension von Punktmenzen II	137
Radaković, Th., Über die sphärische Abbildung der Kurven extremen Dralls der ausschneidend Normalenflächen	67
Schreier, O., Über die Erweiterung von Gruppen I	105
Schrutka, L., Über eine besondere Anwendung der linearen Integralgleichungen	63
Wirtinger, W., Bemerkungen zum Studyschen projektiven Bogenelement	37
— Zur Theorie der Systeme totaler Differentialgleichungen	81



**Ostwalds  
Klassiker der exakten Wissenschaften**  
Begründet von Wilhelm Ostwald, fortgeführt von Arthur von Oettingen  
Neu herausgegeben von  
**WOLFGANG OSTWALD**

Nr. 201. <b>Archimedes</b> , Über Spiralen. Übersetzt und mit Anmerkungen und einem Anhang versehen von A. Czwalina. Mit 41 Figuren im Text. (71 Seiten.) . . . . .	M. 2.50
Nr. 202. — Kugel und Zylinder. Übersetzt und mit Anmerkungen versehen von A. Czwalina. Mit 56 Figuren im Text. (80 Seiten.) . . . . .	M. 3.—
Nr. 203. — Die Quadratur der Parabel und Über das Gleichgewicht ebener Flächen oder Über den Schwerpunkt ebener Flächen. Übersetzt und mit Anmerkungen versehen von A. Czwalina. Mit 21 Figuren im Text. (64 Seiten.) . . . . .	M. 2.50
Nr. 210. — Über Paraboloiden, Hyperboloiden und Ellipsoide. Übersetzt und mit Anmerkungen versehen v. A. Czwalina. Mit 33 Fig. im Text. (74 S.) . . . . .	M. 3.—
Nr. 213. Über schwimmende Körper. Die Sandzahl. Übersetzt u. mit Anm. vers. von Dr. Arthur Czwalina. Mit 33 Figuren im Text. (82 S.) . . . . .	M. 3.80
Nr. 194. — Die erste Integralrechnung. Eine Auswahl aus Johann <b>Bernoullis</b> mathematischen Vorlesungen über die Methode der Integrale und anderes. Aus dem Lateinischen übersetzt und herausgegeben von Gerhard Kowalewski. Mit 119 Textfig. (187 S.) . . . . .	M. 6.80
Nr. 185. <b>Bois-Reymond</b> , Paul du, Zwei Abhandlungen über unendliche (1871) u. trigonometr. Reihen (1874). Herausgegeben von Philip E. B. Jourdain. I. u. II. Abhandlung. (115 S.) . . . . .	M. 4.20
Nr. 186. — Abhandlung über die Darstellung der Funktion durch trigonometr. Reihen (1876). Herausgegeben von Philip E. B. Jourdain. III. Abhandl. Mit 4 Abbild. im Text. (140 S.) . . . . .	M. 5.—
Nr. 108. <b>Bernoulli</b> , Jakob, Wahrscheinlichkeitsrechnung ( <i>Ars conjectandi</i> ). (1713.) III. u. IV. Teil mit dem Anhange: Brief an einen Freund über das Ballspiel ( <i>Jeu de Paume</i> ). Übersetzt und herausgegeben von R. Haubner. Mit 3 Textfig. (172 S.) . . . . .	M. 5.—
Nr. 171. — Über unendliche Reihen. (1689–1704.) Aus dem Lateinischen übersetzt und herausgeg. von G. Kowalewski. Mit 12 Fig. im Text. (141 S.) . . . . .	M. 5.—
Nr. 211. <b>Bernoulli</b> , Johann. Die Differentialrechnung (aus d. J. 1691/92). Übersetzt und herausgeg. von Paul Schafheitlin. Mit 33. Fig. (56 S.) . . . . .	M. 2.80
Nr. 112. <b>Cauchy</b> , Augustin-Louis, Abhandlung über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen. (1825.) Herausgegeben von P. Stäckel. (80 S.) . . . . .	M. 2.70
Nr. 189. <b>Clairaut</b> , Theorie der Erdgestalt nach Gesetzen der Hydrostatik. (1743.) Herausgegeben von Ph. E. B. Jourdain und A. v. Oettingen. Mit 54 Textfig. und 1 Bildnis. (160 S.) . . . . .	M. 5.70
Nr. 197. <b>Desargues</b> , G., Erster Entwurf eines Versuchs über die Ergebnisse des Zusammentreffens eines Kegels mit einer Ebene. (Paris 1639.) Aus dem Französischen übersetzt und herausgegeben von M. Zacharias. Mit 20 Figuren im Text. (87 S.) . . . . .	M. 2.80
Nr. 73. <b>Euler</b> , Leonhard. Zwei Abhandlungen über sphärische Trigonometrie. Aus dem Französischen und Lateinischen übersetzt und herausgegeben von E. Hammer. Mit 6 Figuren im Text . . . . .	M. 2.70
Nr. 93. — Drei Abhandlungen über Kartenprojektion. (1777.) Mit 9 Textfig. Herausgegeben von A. Wangerin. (78 S.) . . . . .	M. 3.—
Nr. 208. <b>Fermat</b> , P. de, Einführung in die ebenen und körperlichen Örter. (Um 1636.) Aus dem Lateinischen übersetzt und mit Einleitung und Anmerkungen herausgeg. v. H. Wieleitner. Mit 11 Fig. im Text. (22 S.) . . . . .	M. 1.50
Nr. 143. <b>Sturm</b> , C., Abhandlung über die Auflösung der numerischen Gleichungen. (1835.) Aus dem Französischen übersetzt und herausgegeben von Alfred Loewy. (66 S.) . . . . .	M. 3.—

# Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H., Leipzig

---

**Acta Mathematica**, herausgegeben von G. Mittag-Leffler. Bd. 1—45

Bd. 1—37 . . . . .	je schw. Kr. 30.—
Bd. 38 u. 39 . . . . .	je schw. Kr. 50.—
Bd. 40—45 . . . . .	je schw. Kr. 30.—

---

**Arndt, Kurt: Grundbegriffe der höheren Mathematik für Chemiker.** Mit 11 Figuren im Text. 2. Aufl. 1914. 63 S. Kart. . M. 2.40

---

**Descartes, René: Die Geometrie.** Deutsch herausgegeben von Ludwig Schlesinger. Mit zwei Figurentafeln. 2. Aufl. 1923. 116 S. M. 3.60

---

**Feuerbach, Karl Wilhelm: Eigenschaften einiger merkwürdiger Punkte des geradlinigen Dreiecks** und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren. Eine analytisch-trigonometrische Abhandlung. Mit einer Vorrede von Karl Buzengeiger. 2., nicht geänderte Ausgabe. 1908. 73 S. u. VI S. Geh. . . . . M. 3.40

---

**Fields, John Charles: Theory of the algebraic functions of a complex variable.** 1906. 186 S. Geh. . . . . M. 18.—

---

**Kantor, S.: Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene.** 1895. 110 S. Geh. M. 7.50

---

**Karagiannides, A.: Die nichteuklidische Geometrie vom Altertum bis zur Gegenwart.** Eine historisch-kritische Studie. 1893. 44 S. Geh. . . . . M. 2.40

---

**Prang, C.: Determinanten.** I. Hauptsätze über Determinanten. II. Einleitung in die analytische Geometrie des Raumes unter Anwendung der Determinanten. 2. Aufl. 1908. 65 S. Geh. . . . . M. 3.—

---

**Schering, Ernst: Gesammelte mathematische Werke.** Herausgegeben von Robert Haussner und Karl Schering. Mit Ernst Scherings Bildnis. 2 Bände. 1902—09. Geh. . . . . je M. 37.50

---

**Tschebyscheff, P. L.: Theorie der Congruenzen** (Elemente der Zahlentheorie). Deutsch mit Autorisation des Verfassers herausgegeben von Hermann Schapira. 1889. 313 S. u. 31 S. Tabellen. M. 6.—  
1. Ausgabe. (2. Ausgabe erschien unter dem Titel „Elemente der Zahlentheorie“.)



