QUELQUES RESULTATS SUR L'IDENTIFICATION DE DOMAINES

JEAN CÉA [1] - ALAIN GIOAN [1] - JEAN MICHEL [1]

RÉSUMÉ - Dans cet article, les auteurs s'intéressent à un problème d'identification (ou de contrôle) où l'objet à identifier (ou à contrôler) est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Ils caractérisent un ouvert «critique» et donnent une méthode numérique ainsi que des résutats numériques.

ABSTRACT - In this paper, the authors study an identification (or control) problem where the object to identify (or to control) is an open set of $\mathbb{R}^n$. They characterize a «critical» open set and they give a numerical method and some numerical results.

Introduction.

Dans de nombreux problèmes, il est question de chercher la frontière Γ d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, cet ouvert étant soumis à certaines contraintes. Naturellement, il est possible d'introduire un repérage de la frontière Γ, ce repérage dépendant d'un certain nombre de paramètres; on est alors ramené à une identification de paramètres. Dans ce qui suit, nous proposons une méthode indépendante du choix du repérage, ce choix intervenant seulement dans la dernière étape de l'identification: celle de la mise en oeuvre de la méthode numérique. Dans le n^0 1, nous avons introduit les notions de différentielle d'une fonctionnelle, la variable étant un domaine, puis celle de point critique, c'est-à-dire d'un point où le gradient est nul. Le n^0 2 est consacré à l'approximation d'un point critique; dans les n^{0s} 3 et 4 nous étudions un exemple et nous donnons des résultats numériques.

1. Position du problème; définitions et notations.

Soit $\square$ un compact de $\mathbb{R}^n$; soit Ω un ouvert de $\square$; à partir de Ω, on définit une fonction coût, éventuellement par l'intermédiaire d'une fonction d'état y_Ω, Ω étant alors le contrôle.

DÉFINITION 1.1: (Accroissement $\delta\Omega$ de Ω).

Pervenuto 25-10-1972.

[1] U. E. R. M. S. T., Parc Valrose, NICE.

Soient deux ouverts $\delta\Omega^+$ et $\delta\Omega^-$ de $\square$ tels que

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \delta\Omega^+ \cap \Omega = \varnothing \\ \delta\Omega^- \subset \Omega \end{cases}$$

On pose

$$\Omega + \delta\Omega = \{x \,|\, ''x \in \delta\Omega^+'' \text{ ou bien } ''x \in \Omega \text{ et } x \notin \delta\Omega^-''\}$$

$$(1.2)\qquad \Omega + \delta\Omega = \delta\Omega^+ \cup (\Omega \cap \complement\, \delta\Omega^-)$$

On emploiera aussi les notations suivantes :

$$\begin{cases} \Omega + \delta\Omega = \Omega + \delta\Omega^+ - \delta\Omega^- \\ |\,\delta\Omega\,| = \delta\Omega^+ \cup \delta\Omega^- \end{cases}$$

Notons que, étant donnés Ω et Δ dans $\square$, on peut toujours définir $\delta\Omega$ tel que

$$\Delta = \Omega + \delta\Omega.$$

Afin de ne pas avoir à préciser si certains morceaux de frontière sont inclus ou non dans certains domaines, nous confondrons Δ avec $\overset{\circ}{\bar{\Delta}}$ pour tout ouvert de $\square$.

Définition 1.2 : On dira que $\Omega + \delta\Omega \to \Omega$ si mes $(|\,\delta\Omega\,|) \to 0$.

Définition 1.3 : L'ensemble des ouverts de $\square$, muni de la notion de continuité précédente, est désigné par $\mathcal{A}$; on peut alors poser le

Problème : Il s'agit du problème

$$\operatorname*{Inf}_{\Omega \in \mathcal{A}} J(\Omega)$$

En vue d'une utilisation des méthodes de descente dans la minimisation de J, il est important d'obtenir un « développement limité » de J.

Sur l'ensemble $\mathcal{A}$, on peut définir des *formes additives continues* très simples : soit $G \in L^\infty(\square)$, à tout $\Delta \in \mathcal{A}$ on associe le nombre $\int_\Delta G(x)\,dx$ et on a :

$$(1.3)\qquad \left|\int_\Delta G(x)\,dx\right| \leq \|\,G\,\|_{L^\infty(\square)} \cdot \text{mes}\,(\Delta)$$

et si $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing$

$$\int_{\Delta_1} G(x)\,dx + \int_{\Delta_2} G(x)\,dx = \int_{\Delta_1 \cup \Delta_2} G(x)\,dx.$$

Nous allons limiter notre étude au cas des fonctionnelles J qui, quels que soient les ouverts Δ, $\Omega \in \mathscr{A}$, vérifient :

$$J(\Delta) = J(\Omega) + S_\Omega(\Delta) - S_\Omega(\Omega) + T_\Omega(\Delta)$$

où $\Delta \longrightarrow S_\Omega(\Delta)$ est une forme additive continue du type précédent, c'est-à-dire qu'il existe $G_\Omega \in L^\infty(\square)$ telle que

$$S_\Omega(\Delta) = \int_\Delta G_\Omega(x)\,dx$$

et où $T_\Omega(\Delta)$ vérifie :

$$\begin{cases} |T_\Omega(\Delta)| \leq C_\Omega \cdot \mathrm{mes}^2(|\delta\Omega|) \\ \Delta = \Omega + \delta\Omega \end{cases}$$

Avec l'accroissement $\delta\Omega$, on peut introduire des notations plus simples :

$$T_1(\Omega, \delta\Omega) = S_\Omega(\Omega + \delta\Omega) - S_\Omega(\Omega) = \int_{\delta\Omega^+} G_\Omega(x)\,dx - \int_{\delta\Omega^-} G_\Omega(x)\,dx$$

ce qui, pour être plus concis, sera noté

$$T_1(\Omega, \delta\Omega) = \int_{\delta\Omega} G_\Omega(x)\,dx$$

puis

$$T_2(\Omega, \delta\Omega) = T_\Omega(\Omega + \delta\Omega).$$

Finalement, on a le « développement limité » suivant :

$$J(\Omega + \delta\Omega) = J(\Omega) + T_1(\Omega, \delta\Omega) + T_2(\Omega, \delta\Omega) \tag{1.4}$$

avec

$$\begin{cases} T_1(\Omega, \delta\Omega) = \displaystyle\int_{\delta\Omega} G_\Omega(x)\,dx, \quad G_\Omega \in L^\infty(\square) \\ |T_1(\Omega, \delta\Omega)| \leq \|G_\Omega\|_{L^\infty(\square)} \cdot \mathrm{mes}(|\delta\Omega|) \\ |T_2(\Omega, \delta\Omega)| \leq C_\Omega \cdot \mathrm{mes}^2(|\delta\Omega|). \end{cases} \tag{1.5}$$

Au sujet de la variation d'une fonctionnelle par rapport à un domaine, cf: BERGMAN, S. and SCHIFFER, M. [1] et HADAMARD, J. [3].

Remarque 1.1 : La forme additive continue $\Delta \longrightarrow \int_\Delta G_\Omega(x)\,dx$ joue le rôle de la différentielle de la fonctionnelle J, calculée en Ω; *la fonction G_Ω représente le gradient de J en Ω.*

Remarque 1.2 : Si $G \in L^1(\square)$, alors $\Delta \longrightarrow \int_\Delta G(x)\,dx$ est encore une forme additive continue, mais on n'a plus une majoration uniforme du type (1.3).

Définition 1.4 :

i) L'ensemble des fonctions J définies sur $\mathcal{A}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et qui admettent un développement limité du type (1.4), (1.5) est désigné par $\mathcal{J}$.

ii) $J \in \mathcal{J}$ atteint en $\Omega \in \mathcal{A}$ un minimum local si $\exists\, r > 0$ tel que

$$(1.6) \qquad \begin{cases} J(\Omega) \leq J(\Omega + \delta\Omega) \\ \forall\, \delta\Omega \text{ tel que } \Omega + \delta\Omega \in \mathcal{A},\ \text{mes}(|\delta\Omega|) \leq r \end{cases}$$

iii) $\Omega \in \mathcal{A}$ est un point critique de $J \in \mathcal{J}$ s'il existe $r > 0$ tel que

$$(1.7) \qquad \begin{cases} T_1(\Omega, \delta\Omega) \geq 0 \qquad \forall\, \delta\Omega \text{ tel que} \\ \Omega + \delta\Omega \in \mathcal{A},\ \text{mes}(|\delta\Omega|) \leq r. \end{cases}$$

Remarque 1.3 : Dans le cas de la minimisation sans contrainte dans un espace de Hilbert, un point critique est un point où le gradient est nul.

Proposition 1.1 : Une condition nécessaire et suffisante pour que $\Omega \in \mathcal{A}$ soit un point critique de $J \in \mathcal{J}$ est que :

$$(1.8) \qquad \begin{cases} G_\Omega(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in \complement\,\Omega \\ G_\Omega(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in \Omega. \end{cases}$$

Démonstration : On peut écrire (1.7) sous la forme :

$$(1.7)' \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\delta\Omega^+} G_\Omega(x)\,dx - \int_{\delta\Omega^-} G_\Omega(x)\,dx \geq 0 \\ \forall\, \delta\Omega^+ \subset \complement\,\Omega, \quad \forall\, \delta\Omega^- \subset \Omega,\ \text{mes}(\delta\Omega^+) + \text{mes}(\delta\Omega^-) \leq r \end{cases}$$

l'équivalence entre (1.7)′ et (1.8) est alors évidente.

PROPOSITION 1.2 : Si $J \in \mathcal{J}$ et admet un minimum local en $\Omega \in \mathcal{A}$, alors Ω est un point critique de J.

DÉMONSTRATION : En effet, d'après le point ii) de la définition 1.4, il existe $r > 0$ tel que :

$$\begin{cases} J(\Omega + \delta\Omega) = J(\Omega) + T_1(\Omega, \delta\Omega) + T_2(\Omega, \delta\Omega) \geq J(\Omega) \\ \forall \Omega + \delta\Omega \in \mathcal{A}, \text{ mes } (|\delta\Omega|) \leq r \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\delta\Omega^+} G_\Omega(x)\, dx - \int_{\delta\Omega^-} G_\Omega(x)\, dx + T_2(\Omega, \delta\Omega) \geq 0 \\ \forall\, \delta\Omega^+ \subset \complement\, \Omega, \ \forall\, \delta\Omega^- \subset \Omega, \text{ mes } (\delta\Omega^+) + \text{mes } (\delta\Omega^-) \leq r \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \displaystyle -\int_{\delta\Omega^+} G_\Omega(x)\, dx + \int_{\delta\Omega^-} G_\Omega(x)\, dx \leq C_\Omega \cdot \text{mes}^2(|\delta\Omega|) \\ \forall\, \delta\Omega^+ \subset \complement\, \Omega, \ \forall\, \delta\Omega^- \subset \Omega, \text{ mes } (\delta\Omega^+) + \text{mes } (\delta\Omega^-) \leq r. \end{cases} \tag{1.9}$$

A partir de (1.9), on démontre facilement que (1.8) a lieu.

2. Approximation d'un point critique.

A ce stade nous devons préciser la définition de Ω; dans certains problèmes, Ω sera défini par une équation du type $f(x, u) \leq 0$ où le paramètre u est dans un ensemble $\mathcal{U}$; il en est ainsi lorsque par exemple, on cherche à localiser un objet de forme donnée ; cf. par exemple KOENIG, M. et ZOLÉSIO, J. P. [4]; dans les problèmes auxquels nous allons nous intéresser, la présence d'équations aux dérivées partielles nous suggère d'introduire des «éléments finis».

Nous allons supposer que $\square$ a été partagé en éléments finis Δ_i, $i \in I = \{1, 2, \ldots, N\}$

$$\begin{cases} \square = \bigcup_{i \in I} \overline{\Delta}_i \\ \Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing \quad \forall i, j \in I, \quad i \neq j \end{cases}$$

Pour simplifier, nous supposerons que

$$\text{mes } \Delta_i = h \quad \forall\, i \in I.$$

Définition 2.1 :

i) l'ensemble $\mathcal{A}_\Delta$ est défini par : $\Omega \in \mathcal{A}_\Delta$ s'il existe $I_\Omega \subset I$ tel que ·

$$\Omega = \bigcup_{i \in I_\Omega} \Delta_i$$

ii) Ω est dit ε-critique de J dans $\mathcal{A}_\Delta$ si $\Omega \in \mathcal{A}_\Delta$ et si

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\text{mes } \Delta_i} \displaystyle\int_{\Delta_i} G_\Omega(x)\, dx \geq -\varepsilon \quad \forall\ \Delta_i \subset \complement\, \Omega \\ \dfrac{1}{\text{mes } \Delta_i} \displaystyle\int_{\Delta_i} G_\Omega(x)\, dx \leq +\varepsilon \quad \forall\ \Delta_i \subset \Omega \end{array}\right. \tag{2.1}$$

Remarquons qu'au point de vue numérique, si ε est un nombre positif assez petit, un domaine Ω pour lequel (2.1) *a lieu paraît être une bonne approximation d'un domaine pour lequel* (1.8) *a lieu.*

Nous allons présenter maintenant un algorithme (et une variante de cet algorithme) qui permet d'atteindre un point ε-critique, ε étant convenablement choisi ; pour cela à partir d'un domaine Ω_0 nous allons construire une suite Ω_m :

Repérage de Ω_m : Un domaine Ω_m est défini par la donnée d'un sous-ensemble I_m de I :

$$\Omega_m = \bigcup_{i \in I_m} \Delta_i$$

Passage de Ω_m a Ω_{m+1} : Il se fait en sélectionnant deux ensembles I_m^+ et I_m^- qui vérifient en particulier

$$\left\{\begin{array}{l} I_m^+ \subset \complement\, I_m \\ I_m^- \subset I_m \end{array}\right. \tag{2.2}$$

A partir de là on posera :

$$I_{m+1} = \{j \mid "j \in I_m^+" \text{ ou } "j \in I_m, j \notin I_m^-"\} = I_m^+ \cup (I_m \cap \complement\, I_m^-)$$

et alors

$$\begin{cases} \Omega_{m+1} = \Omega_m + \delta\Omega_m \\ \delta\Omega_m^+ = \sum\limits_{i \in I_m^+} \Delta_i \\ \delta\Omega_m^- = \sum\limits_{i \in I_m^-} \Delta_i \end{cases}$$

Avant de présenter les différents choix de I_m^+ et de I_m^-, nous allons faire une hypothèse : la fonctionelle J appartient à $\mathcal{J}$ et de plus on a une majoration uniforme :

$$\text{(2.3)} \qquad \begin{cases} \forall\, \Omega,\ \Omega + \delta\Omega \in \mathcal{A}_\Delta \quad \text{on a :} \\ |\, T_2(\Omega, \delta\Omega) \,| \leq M \cdot \text{mes}^2 (|\, \delta\Omega \,|) \end{cases}$$

Algorithme 1 : En fait il s'agit d'une famille d'algorithmes.

Soit θ un nombre donné, $\theta > 0$; nous choisissons I_m^+ et I_m^- (non vides lorsque cela est possible) tels que (2.2) et (2.4) aient lieu :

$$\text{(2.4)} \qquad T_1(\Omega_m, \delta\Omega_m) \leq -(1 + \theta)\, M\, \text{mes}^2 (|\, \delta\Omega_m \,|)$$

Nous allons démontrer le

Théorème 2.1 : Sous les hypothèses $J \in \mathcal{J}$ et (2.3), l'algorithme 1 est convergent au sens suivant : il existe un entier k tel que Ω_k soit un point $(1 + \theta)M \cdot h$ critique de J dans $\mathcal{A}_\Delta$.

Démonstration : A partir de (1.4), (2.3) et (2.4) il vient :

$$J(\Omega_{m+1}) \leq J(\Omega_m) - (1 + \theta)\, M\, \text{mes}^2 (|\, \delta\, \Omega_m \,|) + M\, \text{mes}^2 (|\, \delta\Omega_m \,|)$$

c'est-à-dire :

$$\text{(2.5)} \qquad J(\Omega_{m+1}) + \theta M\, \text{mes}^2 (|\, \delta\Omega_m \,|) \leq J(\Omega_m)$$

si I_m^+ et I_m^- sont non vides, $J(\Omega_{m+1}) < J(\Omega_m)$; l'ensemble $\mathcal{A}_\Delta$ n'ayant qu'un nombre fini d'éléments, nécessairement il existera k fini tel que

$$I_k^+ = I_k^- = \varnothing$$

autrement dit, il n'est plus possible de trouver I_k^+ et I_k^- tels que (2.2) et (2.4) (avec $m = k$) aient lieu : cela signifie que $\forall \delta\Omega$ tel que $\Omega_k + \delta\Omega \in \mathcal{A}_\Delta$ on a :

$$T_1(\Omega_m, \delta\Omega) > -(1+\theta) M \operatorname{mes}^2(|\delta\Omega|)$$

en particulier

$$\text{(2.6)} \qquad \begin{cases} \forall \Delta_i \subset \Omega_k : \\ \displaystyle\int_{\Delta_i} G_k(x)\,dx < (1+\theta) M \operatorname{mes}^2(\Delta_i) \end{cases}$$

$$\text{(2.7)} \qquad \begin{cases} \forall \Delta_i \subset \complement\, \Omega^k : \\ \displaystyle\int_{\Delta_i} G_k(x)\,dx > -(1+\theta) M \operatorname{mes}^2(\Delta_i) \end{cases}$$

où $G_k = G_{\Omega_k}$

Les relations (2.6) et (2.7) signifient que Ω_k est un point $(1+\theta) M h$-critique de J dans $\mathcal{A}_\Delta$.

Mise en oeuvre de l'algorithme : Posons :

$$\begin{cases} s_m^i = \dfrac{\theta_m^i}{(1+\theta) M h^2} \displaystyle\int_{\Delta_i} G_m(x)\,dx \\ \theta_m^i = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad i \in I_m \\ -1 & \text{si} \quad i \in \complement\, I_m \end{cases} \\ I_m^\pm = I_m^+ \cup I_m^- \end{cases}$$

Alors la relations (2.4) s'écrit :

$$\text{(2.4)}' \qquad \sum_{i \in I_m^\pm} s_m^i \geq (\operatorname{card} I_m^\pm)^2$$

et (2.5) devient

$$\text{(2.5)}' \qquad J(\Omega_{m+1}) + \theta M\, h^2 (\operatorname{card} I_m^\pm)^2 \leq J(\Omega_m).$$

Classons les s_m^i par ordre décroissant :

$$s_m^{j_1} \geq s_m^{j_2} \geq \dots \geq s_m^{j_N} \tag{2.9}$$

Nous allons donner maintenant *les choix de I_m^+ et de I_m^-* : soit q un nombre entier tel que :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{q} s_m^{j_i} \geq q^2 \\ q = \text{nombre entier} \geq 1 \end{cases} \tag{2.10}$$

Alors *I_m^+ et I_m^- sont définis par* :

$$\begin{cases} I_m^+ = \complement I_m \cap \{j_1, \dots, j_q\} \\ I_m^- = I \quad \cap \{j_1, \dots, j_q\} \end{cases} \tag{2.11}$$

les 2 ensembles I_m^+ et I_m^- vérifient bien les relations (2.2) et (2.4) [voir (2.11) et (2.10) qui est une autre façon d'écrire (2.4)'].

Remarque 2.1 : s'il n'existe pas $q \geq 1$ vérifiant (2.10) alors Ω_m est le point cherché dans $\mathscr{A}_\Delta$.

Remarque 2.2 : D'après (2.5)' il semble qu'on doive choisir q le plus grand nombre entier pour lequel (2.10) a lieu.

Remarque 2.3 : Si après avoir classé un certain nombre de s_m^i, on peut trouver un entier q pour lequel (2.10) a lieu, on peut alors définir I_m^+ et I_m^- par (2.11).

Remarque 2.4 : Grâce au classement des s_m^i on a :

$$\begin{cases} T_1(\Omega_m, \delta\Omega_m) \leq T_1(\Omega_m, \delta\Omega) \\ \forall\, \delta\Omega \text{ tel que mes } (|\delta\Omega|) = \text{mes } (|\delta\Omega_m|) > 0. \end{cases}$$

Si J était une fonctionnelle définie sur un espace de Hilbert V, de produit scalaire noté $(\cdot,\cdot)_V$, la relation :

$$\begin{cases} (G_m, \delta u_m) \leq (G_m, \delta v) \\ \forall\, \delta v \text{ tel que } \|\delta v\|_V = \|\delta u_m\|_V > 0 \end{cases}$$

entraînerait :

$$\begin{cases} \delta u_m = - \varrho_m \cdot G_m \\ \varrho_m = \dfrac{\| \delta u_m \|}{\| G_m \|} \end{cases}$$

Ainsi l'accroissement $u_{m+1} - u_m = \delta u_m$ serait proportionnel au gradient ; le choix de ϱ_m fixe la norme de l'accroissement ; l'algorithme 1 est donc l'adaptation de la méthode classique du gradient au problème traité.

REMARQUE 2.5 : On pourrait facilement tenir compte des contraintes du type

$$\widetilde{\Omega} \subset \Omega \subset \widehat{\Omega}$$

où $\widetilde{\Omega}$ et $\widehat{\Omega}$ sont deux ouverts donnés.

Nous allons maintenant présenter l'

ALGORITHME 2 : Il est basé sur la propriété caractéristique (1.8) d'un point critique ; si $\Omega \in \mathscr{A}_\Delta$ est un point critique de J, alors d'après (1.8) on a :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Delta_i} G_\Omega(x)\,dx \geq 0 & \forall\ \Delta_i \subset \complement\,\Omega \\ \displaystyle\int_{\Delta_i} G_\Omega(x)\,dx \leq 0 & \forall\ \Delta_i \subset \Omega. \end{cases}$$

Cela nous permet d'introduire le nouvel algorithme :

PASSAGE DE Ω_m A Ω_{m+1} : On pose

$$t_m^i = \int_{\Delta_i} G_m(x)\,dx$$

et on définit $\widetilde{I}_{m+1}$ et $\widetilde{\Omega}_{m+1}$ par :

$$\begin{cases} i \in \widetilde{I}_{m+1} \Longleftrightarrow t_m^i \leq 0 \\ \widetilde{\Omega}_{m+1} = \bigcup\limits_{i \in \widetilde{I}_{m+1}} \Delta_i \end{cases}$$

a) si $J(\widetilde{\Omega}_{m+1}) < J(\Omega_m)$ alors on pose

$$I_{m+1} = \widetilde{I}_{m+1}$$

$$\Omega_{m+1} = \widetilde{\Omega}_{m+1}$$

b) sinon on fait une itération selon l'algorithme 1.

On démontre facilement un théorème analogue au précédent.

REMARQUE 2.6 : Dans cet algorithme il n'est plus nécessaire de classer les s_m^i ; par contre il faudra calculer $J(\widetilde{\Omega}_{m+1})$ ce qui peut être long.

3. Un exemple.

Dans le compact $\square$ de $\mathbb{R}^n$, on donne deux ouverts non vides $\widetilde{\Omega}$ et $\widehat{\Omega}$ tels que $\overline{\widetilde{\Omega}} \subset \widehat{\Omega}$ et $\overline{\widehat{\Omega}} \subset \square$; tous les ouverts Ω considérés dans la suite vérifieront les contraintes

$$\widetilde{\Omega} \subset \Omega \subset \widehat{\Omega}.$$

Pour tout ouvert Ω, on considère la forme bilinéaire

$$a(\Omega; y, \varphi) = \alpha(y, \varphi)_V + \int_\Omega \nabla y(x) \cdot \nabla \varphi(x)\, dx + \beta \int_{\Omega'} \nabla y(x) \cdot \nabla \varphi(x)\, dx + \int_\square y(x)\, \varphi(x)\, dx$$

- où V est l'espace de Sobolev $H^m(\square)$, m étant assez grand pour que $H^m(\square) \subset \mathcal{C}^1(\square)$. cf. par exemple LIONS J, L. et MAGENES E. [5].
- $\nabla y(x)$ est le gradient de y calculé en x
- α et β sont des constantes strictement positives données
- $\Omega' = \complement_\square \Omega$.

On considère aussi la forme linéaire

$$L(\varphi) = \int_\square f(x)\, \varphi(x)\, dx$$

où f est donnée dans $L^2(\square)$.

On définit alors y_Ω par

$$(3.1)\qquad \begin{cases} y_\Omega \in V \\ a(\Omega, y_\Omega, \varphi) = L(\varphi) \\ \forall\, \varphi \in V \end{cases}$$

Soit maintenant y_d donné dans $L^2(\square)$, on pose :

$$J(\Omega) = \frac{1}{2} \| y_\Omega - y_d \|^2_{L^2(\square)} .$$

On s'intéresse au

Problème

$$\operatorname*{Inf}_{\Omega} J(\Omega).$$

Ce problème, sous forme un peu différente, nous a été communiqué par MM. Gastinel et Sabonadiere que nous remercions vivement ; il s'agissait de trouver *la forme « optimale » d'un isolant* ; dans le problème traité ici, Ω et Ω' représentent deux diélectriques de constantes 1 et β ; le terme $\alpha\,(y, \varphi)_V$ a été introduit pour des questions de régularité, α étant « assez petit » ; le terme $\int_\square y(x)\,\varphi(x)\,dx$ pourrait être supprimé.

Nous allons montrer que ce problème entre dans le cadre des n^{os} 1 *et* 2 : *il s'agira essentiellement de vérifier que* (1.4), (1.5) *et* (2.3) *ont lieu.*

Soient Ω et $\Omega + \delta\Omega \in \mathcal{A}$: définissons y et z par

$$(3.2)\qquad \begin{cases} y \in V \\ a(\Omega, y, \varphi) = L(\varphi) \quad \forall \varphi \in V \end{cases}$$

$$(3.3)\qquad \begin{cases} z \in V \\ a(\Omega + \delta\Omega, z, \varphi) = L(\varphi) \quad \forall \varphi \in V \end{cases}$$

(notons que $y = y_\Omega$, $z = y_{\Omega + \delta\Omega}$)

On obtient alors les relations suivantes:

$$(3.4)\quad \begin{cases} a(\Omega, z-y, \varphi) = (\beta-1)\left(\displaystyle\int_{\delta\Omega^+} \nabla z(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx - \int_{\delta\Omega^-} \nabla z(x)\cdot\ \ \varphi(x)\,dx\right) \\[2ex] \qquad = (\beta-1)\left(\displaystyle\int_{\delta\Omega^+} \nabla y(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx - \int_{\delta\Omega^-} \nabla y(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx\right) \\[2ex] \qquad + (\beta-1)\left(\displaystyle\int_{\delta\Omega^+} \nabla(z-y)(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx - \int_{\delta\Omega^-} \nabla(z-y)(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx\right) \end{cases}$$

et

$$(3.5)\quad J(\Omega+\delta\Omega) = J(\Omega) + (y-y_d, z-y)_{L^2(\square)} + \frac{1}{2}\|z-y\|^2_{L^2(\square)}\,.$$

Définissons alors un *état adjoint* p par

$$(3.6)\quad \begin{cases} p \in V \\ a(\Omega, \varphi, p) = (y - y_d, \varphi) \quad \forall\varphi\in V. \end{cases}$$

En faisant $\varphi = z - y$ dans (3.6) et $\varphi = p$ dans (3.4), on obtient

$$(3.7)\quad \begin{cases} J(\Omega+\delta\Omega) = J(\Omega) + T_1(\Omega,\delta\Omega) + T_2(\Omega,\delta\Omega) \\[1ex] T_1(\Omega,\delta\Omega) = \displaystyle\int_{\delta\Omega} G(x)\,dx \\[1ex] G(x) = (\beta-1)\nabla y(x)\cdot\nabla p(x) \\[1ex] T_2(\Omega,\delta\Omega) = \displaystyle\int_{\delta\Omega} (\beta-1)\nabla(z-y)(x)\cdot\nabla p(x)\,dx + \frac{1}{2}\|z-y\|^2_{L^2(\square)}\,. \end{cases}$$

On a le:

THÉORÈME 3.1: Sous les données et hypothèses précédentes, la fonctionnelle J vérifie (3.7); de plus $\forall\ \Omega,\ \Omega+\delta\Omega \in \mathcal{A}$ on a:

$$(3.8)\quad G \in L^\infty(\square)$$

$$(3.9)\quad |T_2(\Omega,\delta\Omega)| \leq M\cdot \mathrm{mes}^2(|\delta\Omega|)$$

où M est une constante qui ne dépend que des données du problème.

DÉMONSTRATION : Remarquons tout d'abord que (3.7), (3.8), (3.9) montrent que (1.4), (1.5), et (2.3) ont lieu et qu'on peut alors appliquer les résultats des n^{0s} précédents.

En faisant $\varphi = y$ dans (3.2), on obtient facilement :

$$\left\{\begin{aligned} &\| y \|_V \leq \frac{1}{\alpha_1} \| f \|_{L^2(\square)} \\ &\alpha_1 = \min\{\alpha, 1, \beta\}. \end{aligned}\right. \tag{3.10}$$

De même avec (3.3) et (3.6) il viendrait :

$$\| z \|_V \leq \frac{1}{\alpha_1} \| f \|_{L^2(\square)} \tag{3.11}$$

et

$$\| p \|_V \leq \frac{1}{\alpha_1} \| y - y_d \|_{L^2(\square)} . \tag{3.12}$$

Dans la suite nous allons introduire des constantes α_i et k_i : ces constantes ne dépendront que des données du problème.

Puisque m est tel que $H^m(\square) \subset \mathcal{C}^1(\square)$, $\forall u \in H^m(\square)$ on a :

$$\| u \|_{\mathcal{C}^1(\square)} \leq \alpha_2 \| u \|_V \tag{3.13}$$

les inégalités (3.10), (3.11) et (3.12) entraînent alors :

$$\left\{\begin{aligned} &\| y \|_{\mathcal{C}^1(\square)} \leq k_0 \\ &\| z \|_{\mathcal{C}^1(\square)} \leq k_0 \\ &\| p \|_{\mathcal{C}^1(\square)} \leq k_0 \end{aligned}\right. \tag{3.14}$$

La relation (3.8) est alors évidente ; démontrons (3.9) :

En choisissant $\varphi = z - y$ dans (3.4) on obtient facilement :

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha \| y - z \|_V^2 \leq |\beta - 1| \left(\int_{|\delta\Omega|} |\nabla z(x)|^2 dx \cdot \int_{|\delta\Omega|} |\nabla (z - y)(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &(|\delta\Omega| = \delta\Omega^+ \cup \delta\Omega^-) \end{aligned}\right. \tag{3.15}$$

mais si $\Delta \subset \square$ et $u \in \mathcal{C}^1(\square)$, on a :

$$\int_{\Delta} |\nabla u(x)|^2 \, dx \leq \alpha_3 \, \| u \|^2_{\mathcal{C}^1(\square)} \cdot \text{mes}(\Delta) \tag{3.16}$$

alors

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{|\delta\Omega|} |\nabla z(x)|^2 \, dx \leq \alpha_3 \| z \|^2_{\mathcal{C}^1(\square)} \cdot \text{mes}(|\delta\Omega|) \leq \alpha_2^2 \, \alpha_3 \| z \|^2_V \, \text{mes}(|\delta\Omega|) \\ \displaystyle\int_{|\delta\Omega|} |\nabla(z-y)(x)|^2 \, dx \leq \alpha_3 \| z - y \|^2_{\mathcal{C}^1(\square)} \cdot \text{mes}(|\delta\Omega|) \leq \alpha_2^2 \alpha_3 \| z - y \|^2_V \, \text{mes}(|\delta\Omega|) \end{cases}$$

ce qui avec (3.15) et (3.11) entraîne :

$$\| y - z \|_V \leq k_1 \, \text{mes}(|\delta\Omega|) \tag{3.17}$$

En appliquant (3.16) à p il viendrait :

$$\int_{|\delta\Omega|} |\nabla p(x)|^2 \, dx \leq k_2 \, \text{mes}(|\delta\Omega|) \tag{3.18}$$

A partir de (3.17), de (3.18) et de la définition de $T_2(\Omega, \delta\Omega)$, on obtient (3.9).

4. Résultats numériques.

On a testé les algorithmes 1 et 2 dans le cas du problème exposé dans le n^0 3. Ces algorithmes nous ont toujours permis d'obtenir le domaine critique ; cependant, il s'est révélé que le 2ème algorithme était plus rapide que le 1er, aussi nous allons exposer les résultats obtenus avec cet algorithme ; notons que dans le passage de Ω_m à Ω_{m+1} nous n'avons jamais eu à utiliser le point *b*.

On s'est fixé, pour tous les exemples :

$$\square = [0, 1] \times [0, 1]$$

On a utilisé une méthode à 5 points avec formation progressive des équations, pour la discrétisation variationnelle du problème (cf. CÉA J. [2]).

L'état direct et l'état adjoint sont calculés avec la même matrice, par la méthode de relaxation avec paramètre optimal (cf. VARGA R. S. [6]).

Le coût d'une itération est donc :

La résolution de 2 systèmes linéaires,
et le calcul des t_m^i .

On a d'abord testé la méthode sur un exemple dont on connaissait à priori la solution, puis sur d'autres exemples choisis arbitrairement.

EXEMPLE 1. On a modifié la forme linéaire L de la façon suivante :

$$L(\Omega, \varphi) = \int_\Omega f(x)\, \varphi(x)\, dx + \int_{\Omega'} g(x)\, \varphi(x)\, dx$$

où f et g sont données dans $L^\infty(\square)$.

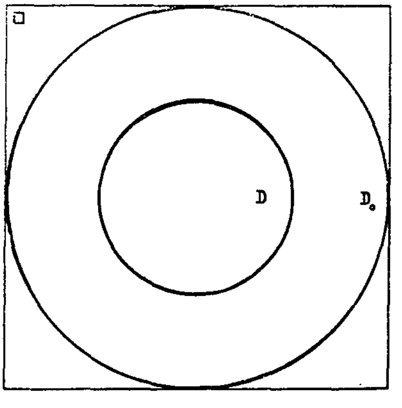
La fonction G définie en (3.7) devient :

$$G(x) = (\beta - 1)\, \nabla y(x) \cdot \nabla p(x) + (f(x) - g(x))\, p(x)$$

Les résultats du n° 3 restent valables dans ce cas.
On désigne par :

D_0 le disque de centre $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$

D le disque de centre $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{4}$



On choisit la constante $\beta = 5$, et on définit les fonctions f, g, y_d, de la façon suivante : on pose

$$R^2(x, y) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2$$

puis

$$y_1(x, y) = -480\left(\frac{1}{4} - R^2\right)^2 + 240\left(\frac{1}{4} - R^2\right) - 27$$

et

$$y_2(x, y) = 32\left(\frac{1}{4} - R^2\right)^2$$

et on considère :

$$f(x, y) = \begin{cases} y_1 - 3840\left(\frac{1}{4} - 2R^2\right) + 960 & \text{sur } D \\ -350 & \text{sur } \square \setminus D \end{cases}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} -30 & \text{sur } D \\ y_2 + 1280\left(\frac{1}{4} - 2R^2\right) & \text{sur } D_0 \setminus D \\ 0 & \text{sur } \square \setminus D \end{cases}$$

$$y_d(x, y) = \begin{cases} 2y_1 - 3840\left(\frac{1}{4} - 2R^2\right) + 1060 & \text{sur } D \\ 2y_2 + 1280\left(\frac{1}{4} - 2R^2\right) + 100 & \text{sur } D_0 \setminus D \\ 100 & \text{sur } \square \setminus D_0 \end{cases}$$

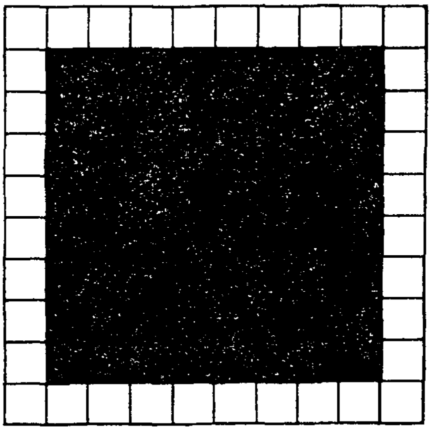
Cet exemple a été construit de telle manière que la condition (1.8) soit vérifiée par le disque D.

On a fait plusieurs essais avec des pas de discrétisation différents, et en prenant comme domaine initial $\widehat{\Omega}$ ou $\widetilde{\Omega}$.

1⁰ *essai*

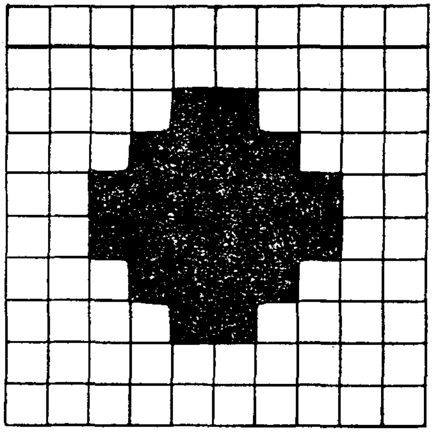
pas : $\frac{1}{10}$

domaine initial



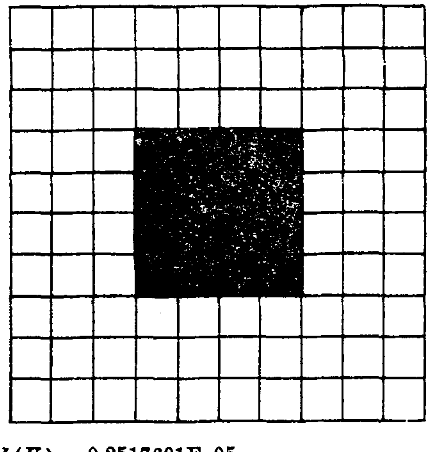
$J(U) = 0.4388817\text{E } 05$

itération 1



$J(U) = 0.2541852\text{E } 05$

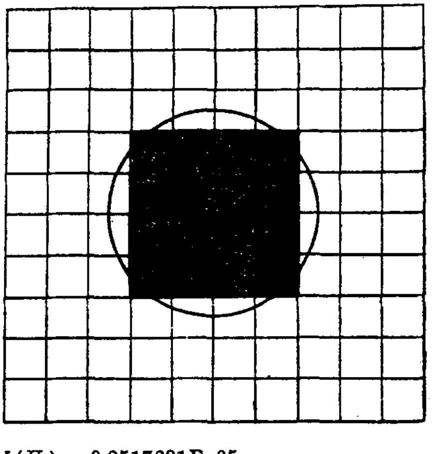
itération 2



$J(U) = 0.2517691\text{E } 05$

itération 3

domaine final

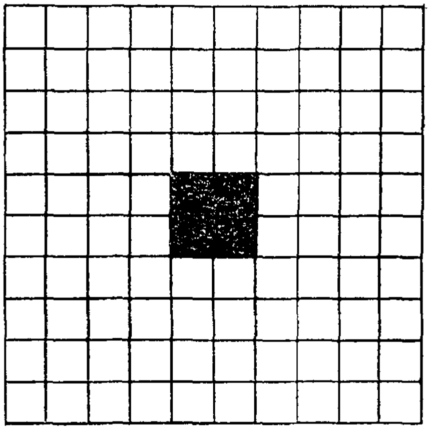


$J(U) = 0.2517691\text{E } 05$

2º *essai*

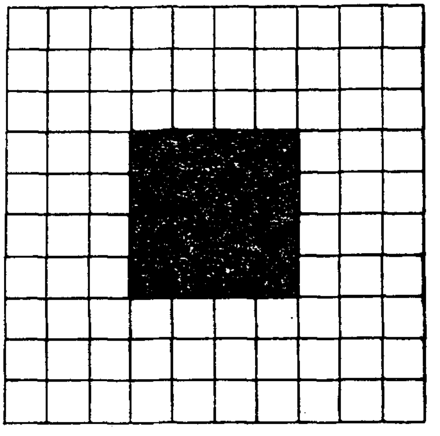
pas : $\frac{1}{10}$

domaine initial



$J(U) = 0.2897452\text{E } 05$

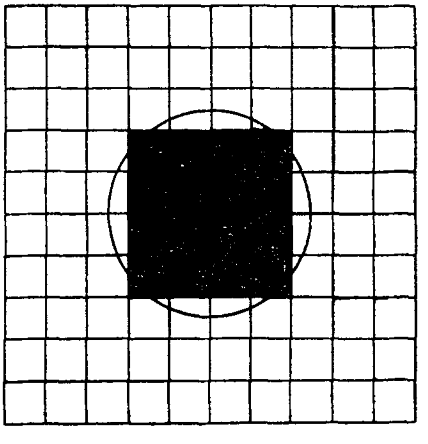
itération 1



$J(U) = 0.2517691\text{E } 05$

itération 2

domaine final

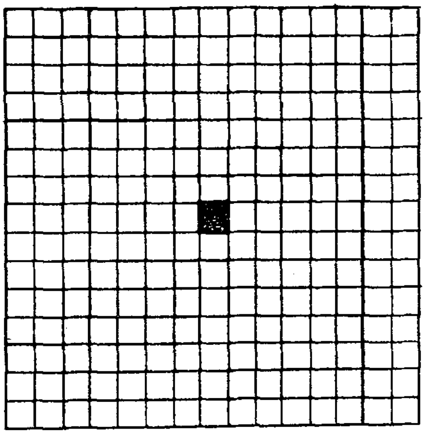


$J(U) = 0.2517691\text{E } 05$

3° *essai*

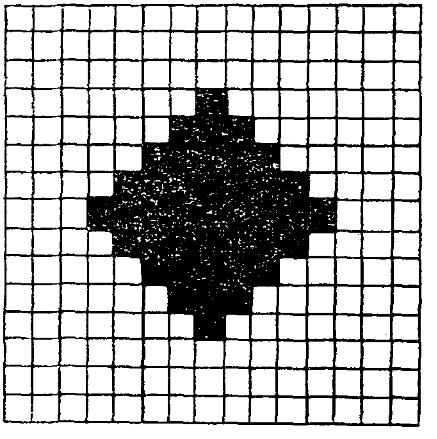
pas : $\frac{1}{15}$

domaine initial



$J(U) = 0.2582189E\ 05$

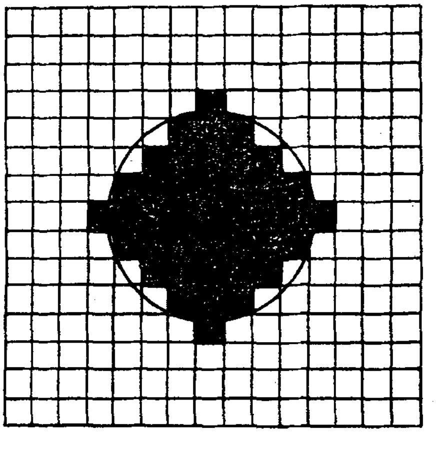
itération 1



$J(U) = 0.2164358E\ 05$

itération 2

domaine final

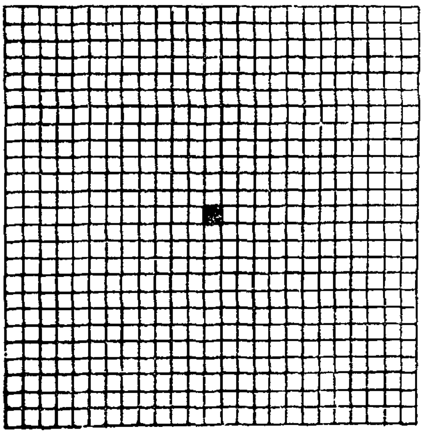


$J(U) = 0.2164358E\ 05$

4° *essai*

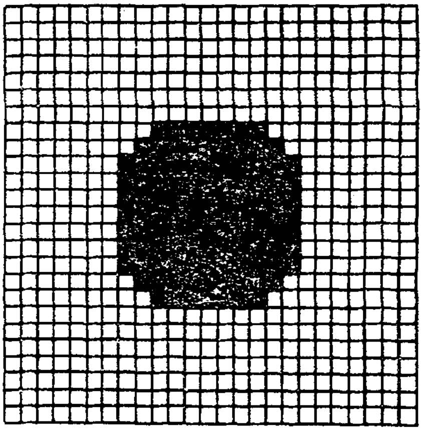
pas : $\frac{1}{25}$

domaine initial



$J(U) = 0.2376851\mathrm{E}\ 05$

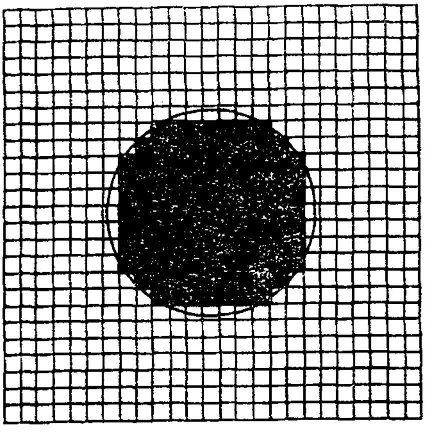
itération 1



$J(U) = 0.2020818\mathrm{E}\ 05$

itération 2

domaine final



$J(U) = 0.2020848\mathrm{E}\ 05$

EXEMPLE 2. On a encore choisi $\beta = 5$.

Les fonctions f et y_d sont :

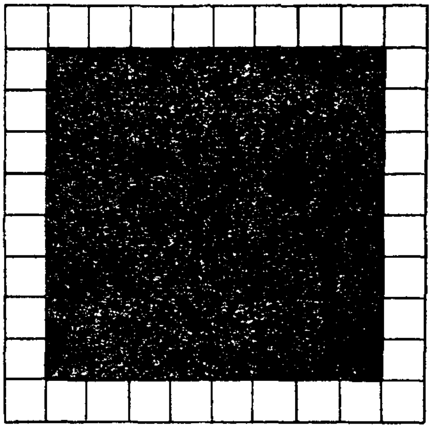
$$f(x, y) = \sin(2\pi x)$$

$$y_d(x, y) = \cos(2\pi x)$$

On a fait deux essais, en partant des domaines $\widehat{\Omega}$ et $\widetilde{\Omega}$, avec le pas $\frac{1}{10}$.

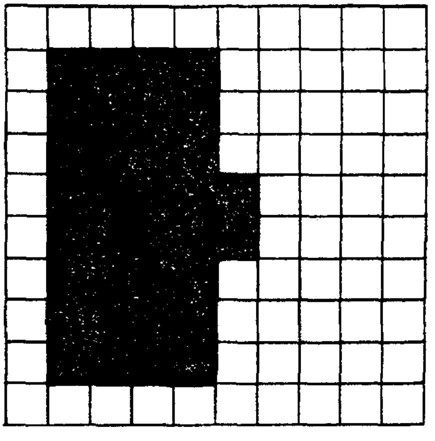
1^0 *essai*

domaine initial



$J(U) = 0.2743605\text{E } 00$

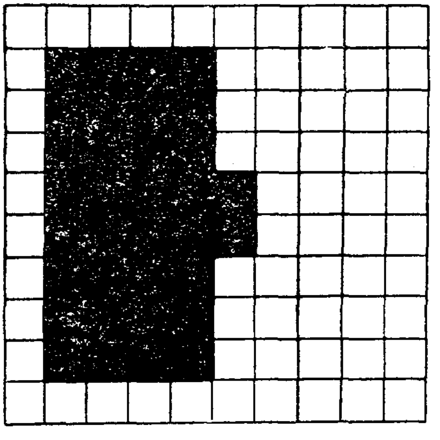
itération 1



$J(U) = 0.2705618\text{E } 00$

itération 2

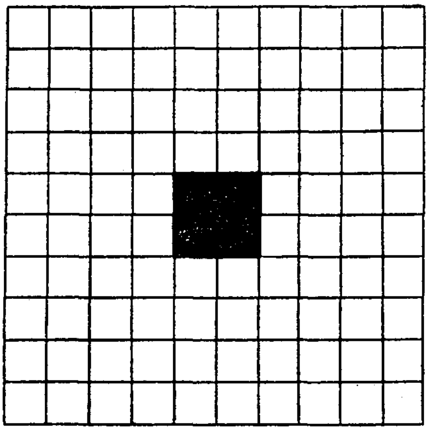
domaine final



$J(U) = 0.2705618\text{E } 00$

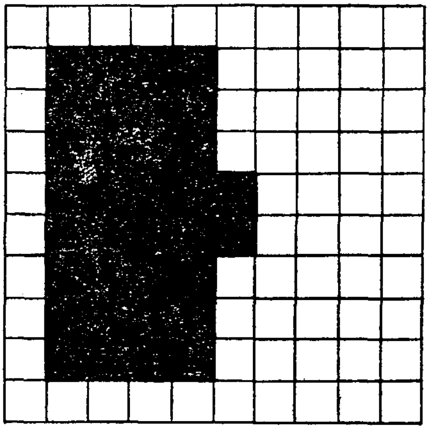
2⁰ *essai*

domaine initial



$J(U) = 0.2720636\text{E } 00$

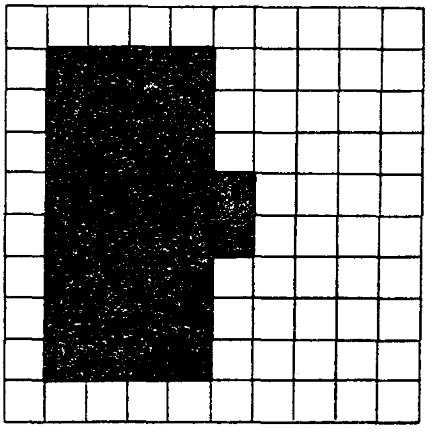
itération 1



$J(U) = 0.2705618\text{E } 00$

itération 2

domaine final



$J(U) = 0.2705618\text{E } 00$

EXEMPLE 3.

On conserve $\beta = 5$,
et on définit :

$$f(x, y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$$

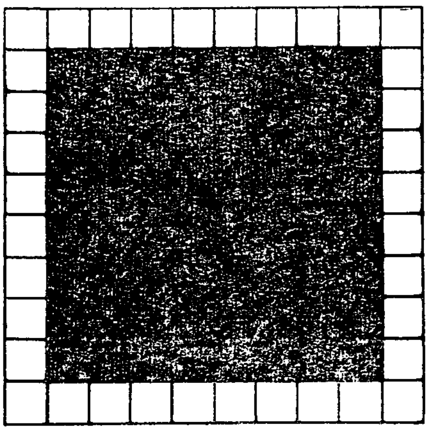
$$y_d(x, y) = \cos(2\pi x)\cos(2\pi y)$$

le pas étant toujours égal à $\frac{1}{10}$;

comme à l'exemple 2, on a fait deux essais en partant des domaines $\widehat{\Omega}$ et $\widetilde{\Omega}$.

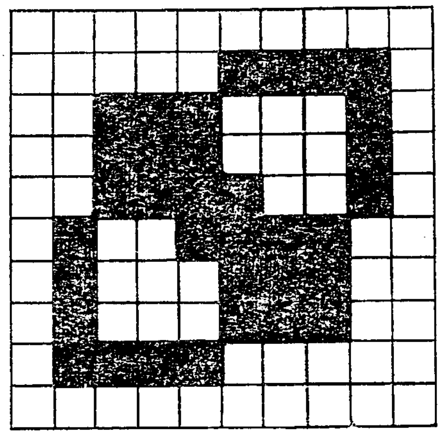
1[0] *essai*

domaine initial



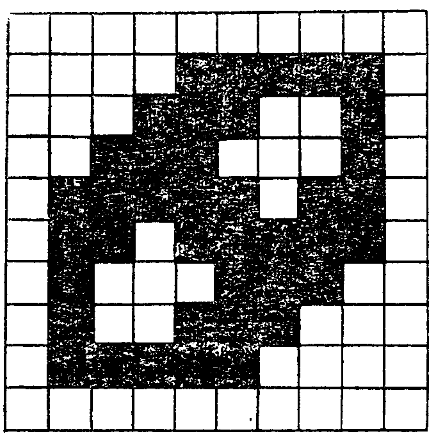
$J(U) = 0.1288227\text{E } 00$

itération 1



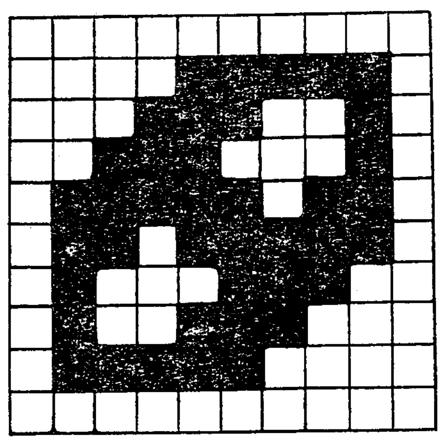
$J(U) = 0.1285715\text{E } 00$

itération 2



$J(U) = 0.1284204\text{E } 00$

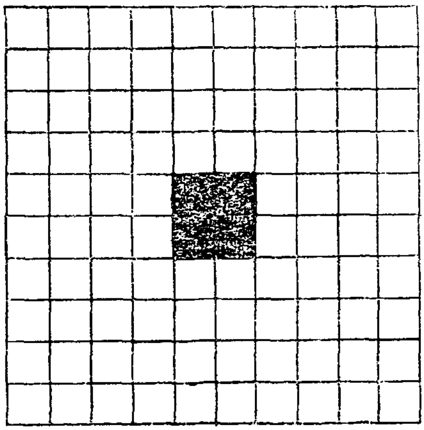
itération 3
domaine final



$J(U) = 0.1284204\text{E } 00$

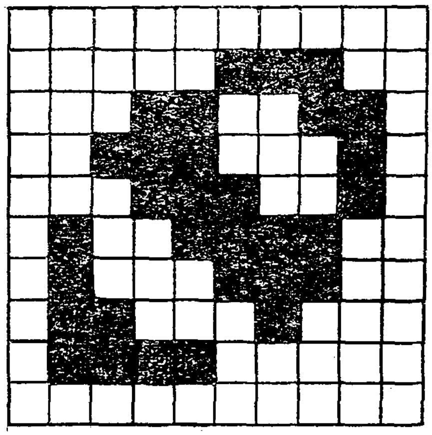
2⁰ *essai*

domaine initial



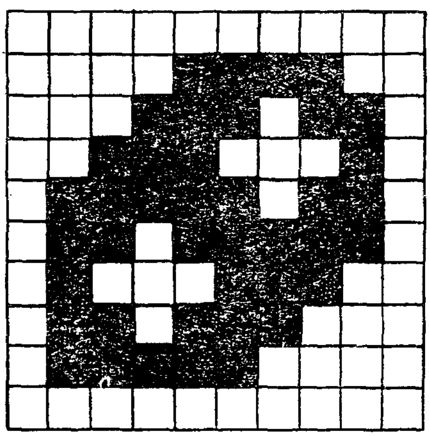
$J(U) = 0.1289851\text{E } 00$

itération 1



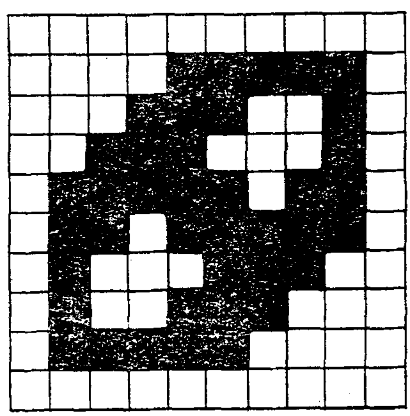
$J(U) = 0.1286011\text{E } 00$

itération 2



$J(U) = 0.1284343\text{E } 00$

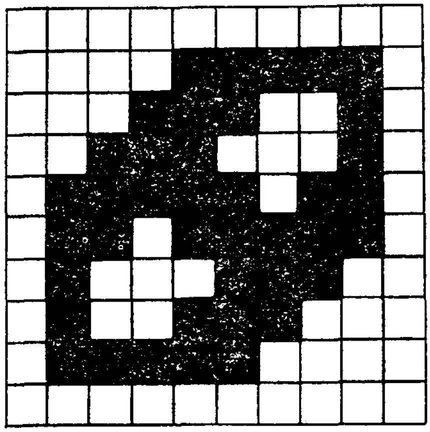
itération 3



$J(U) = 0.1284204\text{E } 00$

itération 4

domaine final



$J(U) = 0.1284204\text{E } 00$

On a fait de nombreux essais sur d'autres exemples à une ou deux variables ; les résultats sont toujours du type précédent.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bergman, S., Schiffer, M., *Kernel functions and elliptic differential Equations in mathematical physics,* Academic Press, New-York, 1953.

[2] Céa, J., *Approximation variationnelle des problèmes aux limites,* Ann. Inst. Fourier 14, 2, 1964.

[3] Hadamard, J., *Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées,* oeuvres de Jacques Hadamard, C. N. R. S., Paris, 1968.

[4] Koenig, M., Zolésio, J. P., *Localisation d'un objet de forme convexe donnée,* C. R. Acad, Sci. Paris, 274, 850-852, 1972.

[5] Lions J. L, Magenes, E., *Problèmes aux limites non homogènes et applications,* Dunod, Paris 1968, et traduction anglaise, Springer Verlag, Berlin 1972.

[6] Varga, R. S., *Matrix iterative analysis,* Prentice-Hall, New-Jersey, 1960.