Từ bài toán đẳng chu Dido đến tối ưu miền

Lê Minh Trí & Nguyễn Đăng Khải Hoàn

Tháng 5, 2024

Tóm tắt nội dung. Bài viết giới thiệu về bài toán đẳng chu, một bài toán cổ xưa và cơ bản trong toán học. Từ đó, chúng tôi trình bày các bài toán tối ưu miền hay tối ưu hình dáng, một nhánh toán học hiện đại. Cuối cùng bài viết thảo luận một phương pháp để giải quyết vấn đề này.

Mục lục

1 Bài toán đẳng chu

1.1 Vấn đề của Dido

Nhà thơ La Mã Publius Vergilius Maro (70–19 TCN) kể trong tác phẩm sử thi Aeneid một câu chuyện về nữ hoàng Dido, con gái của vua Phoenician vào thế kỷ 9 TCN. Sau khi chồng bị anh trai bà ám sát, nữ hoàng chạy trốn đến một nơi gần Tunis, thủ đô của Tunisa bây giờ. Ở đó, bà yêu cầu người lãnh đạo địa phương, Yarb, cho một mảnh đất có thể bao quanh bởi da của một con bò. Vì thỏa thuận có vẻ rất khiêm tốn, ông ta đã đồng ý. Dido cắt da bò thành các dải hẹp, buộc chúng lại với nhau và bao quanh một mảnh đất lớn mà sau này hình thành nên thành phố Carthage. Dido đã đối mặt với vấn đề toán học, còn được biết đến là vấn đề đẳng chu: tìm trong tất cả các đường cong có độ dài cho trước đường cong bao quanh diện tích lớn nhất. Dido đã tìm ra bằng trực giác câu trả lời đúng.

Dido Purchases Land for the Foundation of Carthage. Engraving by Matthäus Merian the Elder, in *Historische Chronica*, Frankfurt a.M., 1630. Dido's people cut the hide of an ox into thin strips and try to enclose a maximal domain.

Hình 1: Dido cắt mảnh da bò tạo nên thành Carthage–Nguồn: [7]

Vào thời đó, một công thức cho diện tích A của một hình tròn có chu vi L đã được biết. Người Babylon vào khoảng năm 1800 TCN đã sử dụng công thức $A = \frac{2}{25}L^2$ thay vì $A = \frac{1}{4}\pi L^2$. Sự xấp xỉ của π là 3.125 khá chính xác. Trong tác phẩm ngắn *Về việc đo đạc đường tròn*, Archimedes (285–212 TCN) đã cho ngoại tiếp và nội tiếp hình tròn vào một đa giác 96 cạnh để xác định rằng $3.1408 < \pi < 3.14285$. Người Hy Lạp quan tâm đến vấn đề đẳng chu vi vì lý do thực tiễn. Chúng hữu ích để có một giới hạn trên cho diện tích đất đai, nhằm ngăn chặn các thương gia gian lận khi họ khai báo diện tích của một hòn đảo bằng chu vi của nó. Vào thời đó, rất nhiều người tin rằng chu vi của một hình xác định diện tích của nó. Khoảng năm 150 TCN, Zenodorus đã chứng minh chặt chẽ bằng các lập luận hình học cơ bản rằng:

1. nếu tồn tại một đa giác n cạnh có diện tích lớn nhất trong tất cả các đa giác n cạnh với chu vi cho trước, nó phải là đa giác đều;

2. trong tất cả các đa giác đều có chu vi bằng nhau, đa giác có nhiều cạnh hơn sẽ có diện tích lớn hơn;

3. hình tròn bao quanh một diện tích lớn hơn đa giác đều với cùng chu vi.

Liệu có tồn tại một đa giác tối đại hay không? Các nhà hình học cổ đại không quan tâm đến câu hỏi này. Nó đã được giải quyết nhiều thế kỷ sau đó, chẳng hạn bởi Weierstraß. Không có tiến bộ toán học đáng kể nào được thực hiện trong gần 1.900 năm về vấn đề đẳng chu sau người Hy Lạp. Trong suốt thời gian này, người ta đã tin rằng hình tròn có diện tích lớn nhất trong tất cả các miền phẳng có chu vi cho trước. Tương tự, các nhà thiên văn học tin rằng một tính chất tương tự cũng có giá trị cho các hình dáng trong không gian, cụ thể là quả cầu có thể tích lớn nhất trong tất cả các miền có diện tích bề mặt cho trước.

(a) Paris thời trung cổ

(b) Cologne thời trung cổ

Hình 2: Áp dụng phương pháp của Dido trong xây dựng thành phố cổ–Nguồn: Internet

1.2 Phép tính biến phân

Năm 1744, Euler, được gợi cảm hứng từ bài toán đẳng chu cũng như được hai anh em Johann và Jakob Bernoulli đề xuất, đã đặt nền móng cho phép tính biến phân. Về mặt giải tích, bài toán có thể được phát biểu như sau: tìm đồ thị $y(x)$ với $0 < x < a$ sao cho $y(0) = y(a) = 0$ và diện tích giữa $y(x)$ và trục x, $\int_0^a y(x)dx$, là lớn nhất trong khi chiều dài $L = \int_0^a \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$ được giữ cố định. Ý tưởng của Euler là giảm bài toán này thành một bài toán có số chiều hữu hạn mà có thể được xử lý bằng phương pháp tiêu chuẩn của phép tính vi phân. Ông chia đoạn $(0, a)$ thành n đoạn bằng nhau với độ dài $x_{k+1} - x_k = h$ và tìm kiếm một đa giác $\mathcal{P}(h)$ với các đỉnh $C_k = (x_k, y_k)$ có chu vi cho trước L và diện tích dưới đồ thị của nó là lớn nhất. Ông đã giải quyết bài toán này trong lớp các đa giác với các đỉnh C_k, $k \neq m, m+1$, $(x_m, y_m + \epsilon)$ và $(x_{m+1}, y_{m+1} + \partial)$, trong đó ϵ, ∂ là các tham số tự do. Khi h tiến tới 0, ông đã có thể chứng minh rằng đồ thị tối ưu $y(x)$ thỏa mãn phương trình vi phân Euler-Lagrange $\Phi_y - \frac{d}{dx}\Phi_{y'} = 0$, trong đó $\Phi_y = y + \lambda\sqrt{1 + y'^2}$ và $\lambda \in \mathbb{R}$ là nhân tử Lagrange.

Phương pháp đa giác của Euler vẫn còn được sử dụng cho việc xử lý số học của các phương trình vi phân thường. Mười một năm sau khi xuất bản lý thuyết về phép tính biến phân, Euler nhận được một lá thư từ Lagrange, khi đó mới mười chín tuổi, viết rằng anh ta đã tìm ra một phương pháp tổng quát hơn. Thay vì thực hiện các thay đổi tại từng điểm, anh ta đã làm biến dạng toàn bộ đường cong, cách mà vẫn được sử dụng cho đến ngày nay. Euler rất hài lòng và thừa nhận rằng phương pháp của Lagrange có thể đạt được những kết quả sâu sắc hơn nhiều. Phương pháp nổi tiếng này sau đó được gọi theo tên của hai nhà toán học.

1.3 Cách tiếp cận của Steiner

Nhiều lập luận hình học khéo léo đã được J. Steiner (1796–1863) đề xuất để chứng minh tính chất đẳng chu của hình tròn và quả cầu. Ông luôn chọn một hình không phải là hình tròn hoặc hình cầu và chỉ ra rằng diện tích hoặc thể tích có thể tăng lên trong khi giữ chu vi cố định. Dựa trên một trong những lập luận của Steiner, Edler đã chứng minh rằng bất kỳ miền nào trong mặt phẳng có chu vi bằng chu vi của hình tròn đều có diện tích nhỏ hơn. Điều này đã hoàn thành chứng minh toán học của bài toán đẳng chu trong mặt phẳng. Steiner đã phát minh ra kỹ thuật đối xứng hóa, một công cụ then chốt trong giải tích hình học. Mục đích là biến đổi một tập hợp $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sao cho thể tích (độ đo Lebesgue) không đổi và chu vi giảm.

Đối Xứng Hóa Steiner: Giả sử Ω là một miền trong $\mathbb{R}^d$. Ký hiệu x là một điểm tùy ý trong $\mathbb{R}^{d-1}$ và e_d là vector đơn vị vuông góc với $\mathbb{R}^{d-1}$. Với mỗi $x \in \mathbb{R}^{d-1}$, xét đường thẳng $L_x := \{x + x_n e_d : x_n \in \mathbb{R}\}$. độ đo Lebesgue 1 chiều của phần cắt $L_x \cap \Omega$ sẽ được ký hiệu là $\mathcal{L}_1(x)$ (dễ thấy $\mathcal{L}_1(x) = 0$ nếu $L_x \cap \Omega = \emptyset$). Đối xứng hóa Steiner của Ω đối với *siêu mặt phẳng* $\mathbb{R}^{d-1}$ là miền $\mathrm{St}\Omega$, đối xứng quanh $\mathbb{R}^{d-1}$ và có tính chất rằng mỗi phần cắt $L_x \cap \mathrm{St}\Omega$ là một đoạn thẳng có chiều dài $\mathcal{L}_1(x)$.

Theo nguyên lý Cavalieri, thể tích của Ω bằng thể tích của $\mathrm{St}\Omega$, còn việc giảm chu vi là một vấn đề phức tạp hơn. Có thể hiểu nôm na rằng sau vô số lần đối xứng hóa như thế, một vật thể sẽ biến thành một quả cầu. Lusternik (1935) đã chỉ ra rằng có tồn tại vô số các đối xứng hóa St_k sao cho:

$$\Pi_{k=1}^{n} \mathrm{St}_k(\Omega) \to \Omega^* \quad \text{khi} \quad n \to \infty,$$

với Ω^* là quả cầu có cùng thể tích với Ω. Bằng cách thực hiện vô số lần đối xứng hóa đối với các siêu mặt phẳng chứa trục x_n, ta thu được đối xứng hóa Schwarz.

Đối Xứng Hóa Schwarz: Trong trường hợp này, mỗi phần cắt ngang của Ω ở vị trí $x_n = c$ được thay thế bằng một quả cầu $(d-1)$ chiều có cùng thể tích, được đặt tại trục $x_n = c$. Chẳng hạn, một miền $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ được biến đổi bằng đối xứng hóa Schwarz thành một bề mặt quay quanh trục x_3. Giống như đối xứng hóa Steiner, thể tích không thay đổi và chu vi không tăng. Nhờ đối xứng hóa này cùng với giải tích biến phân, H. A. Schwarz đã đưa ra chứng minh nghiêm ngặt đầu tiên về tính chất đẳng chu của quả cầu trong lớp các miền có biên phân tích từng phần vào năm 1884. Ông cũng là người đầu tiên chỉ ra thiếu sót của định lý tồn tại trong các chứng minh của Steiner. Hóa ra, như chúng ta sẽ thấy sau này, đối xứng hóa đóng vai trò quan trọng trong phân tích hiện đại và trong vật lý toán học.

Bài toán đẳng chu trong các chiều cao hơn là tìm kiếm trong tất cả các miền có chu vi cho trước miền có thể tích lớn nhất. Giải pháp khả dĩ là quả cầu. Chứng minh của nó tinh tế hơn nhiều so với trong mặt phẳng. Một lý do là bao lồi của một vật không nhất thiết có chu vi nhỏ hơn chu vi vật đó. Nó đã được giải quyết một cách thanh lịch bằng bất đẳng thức do H. Brunn (1887) và H. Minkowski (1896) cho các tập lồi và sau đó được tổng quát hóa cho các tập không lồi bởi L. A. Lyusternik (1935).

2 Bài toán tối ưu miền

Giới thiệu một số ký hiệu được dùng trong bài.

$\mathcal{K}^d$	tập hợp các tập con compact K của $\mathbb{R}^d$
$\mathcal{K}^d_{conv}$	tập hợp các vật thể lồi K trong $\mathbb{R}^d$, nghĩa là, K compact, lồi và có phần trong khác rỗng
$C^1(\Omega)$	không gian các hàm khả vi liên tục
$L^1(\Omega)$	không gian Lebesgue
$W^{1,2}(\Omega)$	không gian Sobolev
$W^{1,2}_0(\Omega)$	không gian các hàm $u \in W^{1,2}(\Omega)$ và triệt tiêu trên biên $\partial\Omega$
$\mathrm{Vol}(A)$	độ đo Lebesgue trong $\mathbb{R}^d$ hoặc thể tích $(d = 3)$ hoặc diện tích $(d = 2)$
$\mathrm{Per}(A)$	độ đo Hausdorff $(d-1)$ chiều hoặc diện tích bề mặt $(d = 3)$ hoặc chu vi $(d = 2)$
$B(x,r)$	quả cầu trong $\mathbb{R}^d$, $B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\| < r\}$
$\Delta u(x)$	toán tử Laplace, $\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}$

2.1 Giới thiệu về bài toán tối ưu miền

Tối ưu miền (shape optimization) có thể được hiểu là đưa ra một hình dạng hay cấu hình tối ưu mà nó tối đa hóa hoặc tối thiểu hóa một chi phí cho trước. Về mặt toán học, bài toán tối ưu miền được phát biểu dưới dạng tìm giá trị nhỏ nhất/lớn nhất (GTNN/GTLN) của một phiếm hàm $F : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ như sau

$$\begin{aligned} \text{Tìm GTNN/GTLN } & F(A) \\ \text{sao cho } & A \in \mathcal{A} \end{aligned} \tag{2.1}$$

trong đó

- $\mathcal{A}$ là tập hợp các miền (có thể không liên thông) bất kì, $\mathcal{A}$ không có cấu trúc tuyến tính hoặc lồi. Ta thường thấy $\mathcal{A}$ là một họ các tập con của $U \subset \mathbb{R}^d$;
- $F : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ là hàm chi phí;
- ta gọi $\bar{A} \in \mathcal{A}$ là một điểm cực tiểu (tương ứng, điểm cực đại) của F nếu bài toán (2.1) đạt cực tiểu (tương ứng, cực đại) tại $\bar{A}$, nghĩa là, $F(\bar{A}) = \min_{A \in \mathcal{A}} F(A)$ (tương ứng $F(\bar{A}) = \max_{A \in \mathcal{A}} F(A)$).

Vấn đề được quan tâm ở đây là làm sao chỉ ra được sự tồn tại của điểm cực tiểu/cực đại của bài toán trong trường hợp phiếm hàm F bị chặn dưới/chặn trên. Bài toán Dido có thể được xem như bài toán cổ xưa nhất của giải tích biến phân nói chung và tối ưu miền nói riêng, mà ở đó điểm cực tiểu là hình tròn. Bài toán tối ưu miền còn liên quan mật thiết với một số hướng nghiên cứu khác trong toán học hiện đại như trong một số ví dụ sau.

Ví dụ 2.1. (Bài toán tối ưu biên tự do) Cho trước một tập bị chặn $U \subset \mathbb{R}^d$ và các hàm số $\bar{u}, f : U \to \mathbb{R}$. Ta xét bài toán tối ưu biên tự do như sau

$$\begin{aligned} \text{Tìm GTNN } & \int_U |u_A(x) - \bar{u}(x)|^2 dx \\ \text{sao cho } & A \subset U \text{ và } u_A : U \to \mathbb{R} \text{ thỏa mãn} \\ & \begin{cases} -\Delta u_A = f \text{ trong } A \\ u_A \in W_0^{1,2}(A). \end{cases} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Bài toán trên có thể hiểu một cách đơn giản như sau: Ta được cho trước một nguồn nhiệt f trên miền U. Trong một quá trình truyền nhiệt tĩnh (quá trình nhiệt đạt trạng thái cân bằng độc lập với thời gian), bằng việc tìm điểm cực tiểu cho bài toán tối ưu miền tự do, ta mong muốn tìm một phân bố nhiệt u_A trên A (và hiển nhiên bằng 0 trên $U \setminus A$) sao cho nó gần nhất có thể với phần bố nhiệt $\bar{u}$ cho trước trên U.

Ví dụ 2.2. (Bài toán phổ hay bài toán Rayleigh–Faber–Krahn) Trước hết, chúng ta cần đến khái niệm giá trị riêng của toán tử Laplace. Với A là một miền trong $\mathbb{R}^n$, giá trị riêng thứ nhất của toán tử Laplace được xác định bởi

$$\lambda_1(A) := \inf \left\{ \frac{\int_A \|\nabla u\|^2 dx}{\int_A |u|^2 dx} : u \in W_0^{1,2}(A) \right\} \text{(thương số Rayleigh)}$$

hoặc giá trị nhỏ nhất $\lambda > 0$ sao cho $-\Delta u = \lambda u$ có nghiệm trong $W_0^{1,2}(A)$.

Một phỏng đoán được đặt ra bởi Rayleigh vào năm 1877 [8]: trong tất cả các miền con của $\mathbb{R}^n$ với thể tích cố định cho trước, thì giá trị riêng thứ nhất của toán tử Laplace trên quả cầu là nhỏ nhất. Đầu thế kỷ XX, lời giải của bài toán được đưa ra một cách độc lập bởi Faber [4] và Krahn [6]. Ta có thể thấy vấn đề Rayleigh–Faber–Krahn cũng là một cũng là một bài toán tối ưu miền, được phát biểu như sau

$$\begin{aligned} &\text{Tìm GTNN } \lambda_1(A) \\ &\quad \text{sao cho } A \text{ là tập con mở của } \mathbb{R}^d \text{ với } \mathrm{Vol}(A) = m > 0. \end{aligned}$$

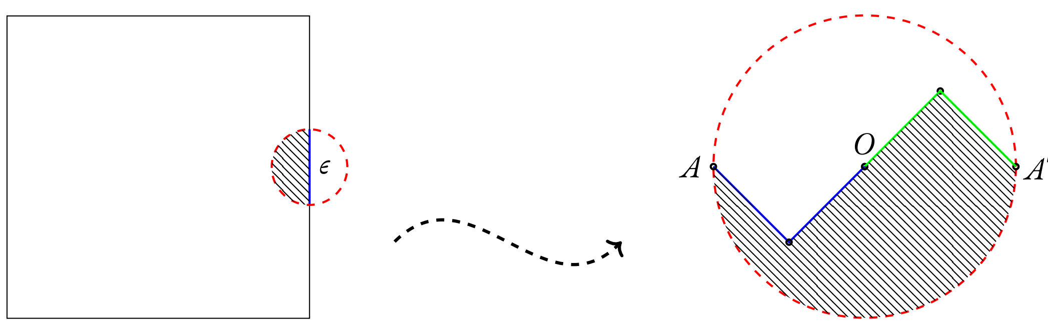
2.2 Khi không có nghiệm!

Dưới đây, ta sẽ xem xét một vài bài toán, mà ở đó không tồn tại điểm cực tiểu/điểm cực đại.

Ví dụ 2.3. Cho $U \subset \mathbb{R}^2$ và $m > 0$, ta xét bài toán

$$\begin{aligned} &\text{Tìm GTLN } \mathrm{Per}(A), \\ &\quad \text{sao cho } A \subset U, \mathrm{Vol}(A) = m > 0. \end{aligned}$$

Bài toán trên không có chặn trên và dĩ nhiên không tồn tại điểm cực đại. Thực vậy, đầu tiên ta cố định một hình chữ nhật có diện tích $m > 0$ và chu vi $\ell > 0$. Quá trình làm tăng chu vi nhưng diện tích cố định được mô tả ở hình 3. Trong hình 3, ta đã thêm bớt một phần diện tích như nhau nên miền mới vẫn có cùng diện tích $m > 0$ nhưng lúc này chu vi là $\ell + \epsilon$. Lặp lại quá trình trên vô hạn lần ta sẽ thấy một cấu trúc hình phân dạng (fractal) với cùng một diện tích nhưng chu vi có thể lớn tùy ý.



(a) Vol $= m$ và Per $= \ell$

Phóng to

(b) Biến đổi trên một quả cầu bán kính nhỏ sao cho $AO = OA' = \epsilon$

Hình 3: Mô tả cách xây dựng các miền bảo toàn diện tích nhưng chu vi tăng dần

Ví dụ 2.4. Xét họ các quả cầu $Q = \bigcup_{n \geq 1} B((2n, 0), 1 - 1/n) \subset \mathbb{R}^2$. Ta xét bài toán tối ưu miền sau

$$\begin{aligned} &\text{Tìm GTNN } \mathrm{Per}(A) \\ &\quad \text{sao cho } \mathrm{Vol}(A) = \pi, \ A \subset Q. \end{aligned} \tag{P1}$$

Ý tưởng của việc chứng minh bài toán này không tồn tại nghiệm là không có quả cầu nào có bán kính 1 nằm trong Q. Nói rõ hơn, trong không gian Euclid d–chiều, ta có bất đẳng thức đẳng chu được phát biểu cụ thể như sau.

Định lý 2.5. (Bất đẳng thức đẳng chu) *Cho $S \subset \mathbb{R}^d$ là một tập con bị chặn, khi đó ta có*

$$Per(S) \geq d\, Vol^{\frac{d-1}{d}}(S)\, Vol(B(0,1))^{\frac{1}{d}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi S là quả cầu trong $\mathbb{R}^d$.

Từ bất đẳng thức trên, ta có thể suy ra bài toán (P1) có chặn dưới lớn nhất là 2π. Tuy nhiên, bài toán không bao giờ đạt được điểm cực tiểu do tập Q không chứa bất cứ quả cầu nào có bán kính là 1.

2.3 Phương pháp trực tiếp và ứng dụng

Để giải quyết các bài toán tìm điểm cực tiểu của một hàm f trên miền X, người ta thường xem xét xây dựng một tô-pô τ trên X và thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Lấy một dãy xấp xỉ chặn dưới lớn nhất (bất kỳ) $\{x_n\} \subset X$ và chứng minh rằng tồn tại một dãy con $\{x_{n_j}\}$ hội tụ đến $\bar{x} \in X$ trong tô-pô τ.

Bước 2: Chỉ ra rằng f là hàm nửa liên tục dưới với tô-pô τ và sau đó ta thu được

$$f(\bar{x}) \leq \tau - \liminf_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = \inf_X f(x).$$

Như vậy, ta kết luận $\bar{x}$ là một điểm cực tiểu của hàm f trên X hay f đạt giá trị nhỏ nhất trên X.

Cách làm như trên được gọi là *phương pháp trực tiếp* (direct method) để tìm điểm cực tiểu cho một bài toán tối ưu. Lưu ý rằng, ta cũng có thể sử dụng phương pháp trực tiếp để tìm điểm cực đại cho một hàm g trên X; lúc bấy giờ, ta sẽ cần phải chỉ ra là g là hàm nửa liên tục trên theo tô-pô τ. Ta sẽ xem xét một số ví dụ sau để thấy rõ tính ứng dụng của phương pháp trực tiếp.

Khi sử dụng phương pháp trực tiếp, ta thấy rằng hàm số f đạt được cực tiểu khi có ít nhất một tập mức dưới là compact. Ở đây ta không đòi hỏi tính compact trên không gian đang xét.

Mệnh đề 2.6. *Cố định $X = (X, d)$ là một không gian metric và $\tau = \tau(d)$ là tô-pô sinh ra bởi metric d. Cho $f : X \to \mathbb{R}$ là hàm số nửa liên tục dưới theo τ, bị chặn dưới và inf–compact, tức là, tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho*

$$[f \leq \lambda] := \{x : f(x) \leq \lambda\} \text{ là tập compact khác rỗng trong } \tau.$$

Khi đó, f tồn tại điểm cực tiểu $\bar{x} \in X$.

Ta xét một trường hợp cụ thể $X = \mathbb{R}^d$, $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ là hàm nửa liên tục dưới thõa mãn $f(x) \geq C_1|x|^\gamma - C_2$ với $C_1, C_2, \gamma > 0$ là các hằng số cho trước, thì hàm f tồn tại điểm cực tiểu trên $\mathbb{R}^d$. Thật vậy, từ tính chất của hàm f, nếu ta cố định $\bar{\lambda} > 0$, thì ta có

$$[f \leq \bar{\lambda}] \subset \overline{B(0,r)}, \text{ với } r = \left(\frac{\bar{\lambda} + C_2}{C_1}\right)^{1/\gamma}.$$

Kết hợp tính nửa liên tục dưới của f và quả cầu đóng $\overline{B(0,r)} := \{y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\| \leq r\}$ là tập compact trong $\mathbb{R}^d$, ta suy ra $[f \leq \bar{\lambda}]$ là một tập compact. Sử dụng Mệnh đề 2.6, ta thấy rằng hàm f tồn tại điểm cực tiểu trên $\mathbb{R}^d$.

Chứng minh Mệnh đề 2.6. Từ giả thiết về hàm f nửa liên tục dưới, ta cần chỉ ra mỗi dãy xấp xỉ chặn dưới lớn nhất đều tồn tại một dãy con hội tụ. Thật vậy, ta gọi $\{x_k\}$ là một dãy xấp xỉ chặn dưới lớn nhất, nghĩa là $f(x_k) \to \inf_X f$ khi $k \to \infty$. Nếu $k \geq \bar{k}$ đủ lớn, ta có

$$f(x_k) \leq \lambda \text{ hay ta có } \{x_k\}_{k\geq\bar{k}} \subset [f \leq \lambda].$$

Từ giả thiết $[f \leq \lambda]$ là tập compact, ta suy ra $\{x_k\}$ có ít nhất một dãy con hội tụ. □

Ví dụ 2.7. (Bài toán chướng ngại vật) Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ là một miền với biên đủ trơn và các hàm số f, φ cho trước. Xem xét bài toán sau

$$\begin{aligned} &\text{Tìm GTNN } J(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \qquad \text{(OP)} \\ &\text{sao cho } u \in \mathcal{M} := \{w \in W^{1,2}(\Omega) : w = f \text{ trên } \partial\Omega \text{ và } w \geq \varphi \text{ trong } \Omega\}. \end{aligned}$$

Sự tồn tại nghiệm của bài toán (OP) được chứng minh thông qua phương pháp trực tiếp với tô-pô yếu trên không gian $W^{1,2}(\Omega)$ (tham khảo [5, Mệnh đề 2.1]).

Mệnh đề 2.8. *Cố định Ω là miền bị chặn C^1. Cho trước các hàm số $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ và $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện*

- $f \in C^1(\partial\Omega)$, $\varphi \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$;
- $f \geq \varphi$ *trên* $\partial\Omega$.

Khi đó, bài toán (OP) *tồn tại duy nhất điểm cực tiểu* $\bar{u} \in W^{1,2}(\Omega)$.

Chứng minh. Trước hết, ta có một số quan sát đơn giản sau:

- $\mathcal{M}$ là tập lồi và đóng yếu trong $W^{1,2}(\Omega)$,
- $J(u)$ là hàm số nửa liên tục dưới yếu (sử dụng định lý Hahn–Banach).

Ta sẽ chỉ ra mỗi dãy xấp xỉ chặn dưới lớn nhất của J có một dãy con hội tụ yếu. Ta cố định $\{u_k\}$ là một dãy hàm trong $W^{1,2}(\Omega)$ sao cho $J(u_k) \to \inf_{\mathcal{M}} J$ khi $k \to \infty$. Khi $n \geq \bar{n}$ đủ lớn, ta có $\|\nabla u_k\|_{L^2} \leq \text{const}$. Cố định $V \in \mathcal{M}$, ví dụ, ta có thể chọn $V = \max\{\varphi, \tilde{f}\}$ trong đó $\tilde{f}$ là một thác triển C^1 của f lên toàn miền Ω. Sử dụng bất đẳng thức Poincaré, ta có

$$\|u_k - V\|_{L^2} \leq C_\Omega \|\nabla u_k - \nabla V\|_{L^2} \leq \text{const}.$$

Điều này suy ra

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{L^2} &\leq \|u_k - V\|_{L^2} + \|V\|_{L^2} \\ &\leq C_\Omega \|\nabla u_k - \nabla V\|_{L^2} + \|V\|_{L^2} \leq \text{const}, \end{aligned}$$

và vì vậy $\{u_k\}$ bị chặn trong $W^{1,2}(\Omega)$. Sau đó ta có thể sử dụng định lý Kakutani để kết luận sự tồn tại điểm cực tiểu.
Ta sẽ tiếp tục chứng minh bài toán có nghiệm duy nhất. Bằng phản chứng, ta giả sử bài toán có hai

điểm cực tiểu khác nhau $u_1, u_2 \in \mathcal{M}$. Từ định nghĩa tồn tại một tập $A \subset \Omega$ có độ đo dương sao cho $\nabla u_1 \neq \nabla u_2$ trên A. Kết hợp điều này với tính lồi ngặt của hàm $t \mapsto t^2$, ta suy ra

$$\int_\Omega \left| \frac{\nabla u_1(x) + \nabla u_2(x)}{2} \right|^2 dx < \frac{1}{2} \left(\int_\Omega |\nabla u_1(x)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_2(x)|^2 dx \right) = 2\alpha,$$

với $\alpha \geq 0$ là chặn dưới nhỏ nhất của bài toán. Điều này dẫn đến $w := (u_1 + u_2)/2 \in \mathcal{M}$ thỏa mãn $J(w) < \alpha$, vô lý.
Mệnh đề 2.8 được chứng minh. □

Tiếp theo, chúng ta sẽ bàn về tính ứng dụng của phương pháp trực tiếp trong bài toán tối ưu miền. Một cách đơn sơ, ta có thể xem xét một họ các tập con của một tập U cho trước như là một không gian metric và giải quyết bài toán trên đó. Tuy nhiên, điều này sẽ dẫn đến một số điểm bất lợi, chẳng hạn các phiếm hàm Vol và Per không nửa liên tục dưới. Xa hơn nữa, ta có thể sử dụng một công cụ hiện đại hơn, không gian $BV(\Omega)$, để đi đến những kết quả tổng quát hơn (ví dụ như Định lý 2.11).

Cho $V, W \subset \mathbb{R}^d$ là các tập compact. Khoảng cách Hausdorff giữa V và W được xác định bởi công thức

$$\begin{aligned} d_H(V, W) &:= \max\left\{ \sup_{b \in W} d(b, V),\ \sup_{a \in V} d(a, W) \right\} \\ &= \inf\{\epsilon > 0 : V \subset W + \epsilon B(0,1) \text{ và } W \subset V + \epsilon B(0,1)\}. \end{aligned}$$

Khi đó, họ các tập compact trong $\mathbb{R}^d$ với khoảng cách Hausdorff d_H là một không gian metric. Hơn nữa, ta có kết quả sau liên quan đến tính compact của không gian này.

Định lý 2.9. (tham khảo [9])

(i) Cho $A \subset \mathbb{R}^d$ là compact và $\mathcal{K}(A) := \{K \subset A : K \in \mathcal{K}^d\}$. Khi đó, $(\mathcal{K}(A), d_H)$ là một không gian metric compact.

(ii) (Định lý Blaschke về sự chọn lọc) Mọi dãy bị chặn trong $(\mathcal{K}^d_{conv}, d_H)$ tồn tại một dãy con hội tụ.

Để bàn đến tính khả thi của việc sử dụng tô-pô sinh bởi khoảng cách Hausdorff, trước hết, ta có thể xét một ví dụ đơn giản sau về tính không liên tục của phiếm hàm Vol trên $(\mathcal{K}^d, d_H)$. Xét $A = [0,1]$ và ta biết rằng $\mathbb{Q} \cap A := \{q_1, q_2, \cdots, q_n, \cdots\}$ là một tập đếm được. Đặt $A_m = \{q_1, \cdots, q_m\}$ với $m \in \mathbb{N}$. Ta thấy rằng $d_H(A_m, A) \to 0$ khi $m \to \infty$; tuy nhiên, $\mathrm{Vol}(A_m) = 0$ trong khi $\mathrm{Vol}(A) = 1$. Như vậy, $\mathrm{Vol}(A) \geq \lim_{m\to\infty} \mathrm{Vol}(A_m)$ và điều này chỉ ra rằng Vol không nửa liên tục dưới theo tô-pô sinh bởi d_H. Từ đây,liên quan đến phiếm hàm Vol, ta thấy xét bài toán tìm GTNN bằng phương pháp trực tiếp với tô-pô sinh bởi d_H chưa phải là một ý hay.

Mặt khác, nếu ta hạn chế họ tập hợp là các vật thể lồi thì khoảng cách Hausdorff vẫn khả dụng. Dưới đây, ta liệt kê một vài tính chất của các phiếm hàm đơn giản trong bài toán tối ưu miền đối với khoảng cách Hausdorff.

Mệnh đề 2.10. (tham khảo [9])

(i) $Vol : (\mathcal{K}^d_{conv}, d_H) \to [0, +\infty)$ là liên tục, nhưng $Vol : (\mathcal{K}^d, d_H) \to [0, +\infty)$ không liên tục.

(ii) $Per : (\mathcal{K}^d_{conv}, d_H) \to [0, +\infty)$ *là liên tục, nhưng không nửa liên tục trên/dưới trên không gian* $(\mathcal{K}^d, d_H)$.

Cho U là một tập compact trong $\mathbb{R}^d$ và $f \in L^1(U)$. Sử dụng Mệnh đề 2.10, Định lý 2.9 và tô-pô sinh bởi khoảng cách Hausdorff, từ phương pháp trực tiếp, ta có thể giải một số bài toán cực trị sau

$$\begin{aligned}&\text{Tìm GTNN } \operatorname{Per}(A)\\ &\qquad \text{sao cho } A \subset U,\ A \in \mathcal{K}^d_{conv} \text{ và } \int_A f(x)dx = m > 0;\end{aligned} \qquad \begin{aligned}&\text{Tìm GTLN } \operatorname{Vol}(A)\\ &\qquad \text{sao cho } A \in \mathcal{K}^d_{conv},\ A \subset U.\end{aligned}$$

Tính chất của các vật thể lồi đóng vai trò quan trọng trong chứng minh tính liên tục/nửa liên tục dưới của nhiều phiếm hàm trong các bài toán tối ưu miền. Bài toán sẽ trở nên phức tạp hơn khi ta xét một họ các tập con khác. Và để kết thúc, chúng tôi sẽ nêu một kết quả tồn tại tổng quát hơn sử dụng phương pháp trực tiếp mà ở đó ta phải dùng đến một tô-pô khác với tô-pô sinh bởi khoảng cách Hausdorff.

Định lý 2.11. *Giả sử ta có*

- $U \subset \mathbb{R}^d$ *là một tập mở bị chặn,* $f \in L^1(U)$, $c \in \mathbb{R}$,
- $\mathcal{A} := \left\{A \subset U : A \text{ là một tập đo được và } \int_A f(x)dx = c\right\} \neq \emptyset.$

Khi đó, bài toán $\min_{A \in \mathcal{A}} Per(A)$ *có ít nhất một nghiệm.*

Ở đây, chúng tôi sẽ không trình bày cụ thể tất cả các kết quả liên quan trong chứng minh của định lý trên (xem chi tiết [3, Định lý 1.2.2] và [1, Chương 16]). Tuy nhiên, ý tưởng chính vẫn là sử dụng phương pháp trực tiếp bằng cách chọn tô-pô yếu* trên không gian $BV(U)$ (bounded variation). Cách xây dựng tô-pô này và các tiêu chuẩn cần thiết để áp dụng phương pháp trực tiếp được mô tả dưới đây.

Trước hết, ta định nghĩa không gian $BV(U)$ gồm các hàm số $f \in L^1(U)$ sao cho gradient $\nabla f \in C_0(U, \mathbb{R}^d)'$ (đạo hàm được hiểu theo nghĩa phân bố). Ở đây $C_0(U) := C_0(U, \mathbb{R})$là không gian các hàm số liên tục trên U triệt tiêu ở vô cùng, nghĩa là, $u \in C_0(U)$ khi với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại một tập compact $K_\varepsilon \subset U$ sao cho $|u(x)| < \varepsilon$ với mọi $x \in U \setminus K_\varepsilon$. Không gian $C_0(U)$ là Banach khi được trang bị chuẩn $\|v\| = \sup_{x \in U} |v(x)|$ và ta ký hiệu $C_0(U)'$ là đối ngẫu của $C_0(U)$. Lúc bấy giờ ta có thể định nghĩa *hội tụ yếu** trên $BV(U)$ như sau: ta nói $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ khi

$$\begin{cases} u_n \to u \text{ trong } L^1(U), \\ \nabla u_n \overset{*}{\rightharpoonup} \nabla u \text{ trong } C_0(U, \mathbb{R}^d)'. \end{cases}$$

Lưu ý, ở đây ta có thể đồng nhất phần tử trên $C_0(U)'$ như là một độ đo có dấu trên U và tính hội tụ yếu* của một dãy các phiếm hàm tuyến tính liên tục sẽ tương đương với tính hội tụ yếu của một dãy các độ đo xác định bởi các phiếm hàm đó (xem [1, Trang 393]).

Ta định nghĩa phép nhúng $j : \mathcal{A} \to BV(U)$ bởi $j(A) = \mathbf{1}_A$, trong đó

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Lúc bấy giờ ta có thể xem $\operatorname{Per} : j(\mathcal{A}) \subset BV(U) \to [0, +\infty]$ như là một phiếm hàm trên $j(\mathcal{A})$. Từ [1, Mệnh đề 4.2.2] và [1, Định lý 10.1.4], ta có một tiêu chuẩn về tính compact yếu* trên $BV(U)$: mỗi dãy bị chặn trong $BV(U)$ thì tồn tại một dãy con hội tụ yếu*. Hơn nữa, từ [1, Mệnh đề 10.1.1], phiếm hàm Per nửa liên tục dưới theo tô-pô yếu*. Từ đây, ta có thể kết luận về sự tồn tại điểm cực tiểu cho bài toán trong Định lý 2.11 bằng phương pháp trực tiếp với tô-pô yếu* trên không gian $BV(U)$.

Thay cho lời kết, chúng tôi sẽ liệt kê một số vấn đề thú vị khác vẫn chưa được thảo luận trong bài viết này

* tính duy nhất và ổn định của bài toán tối ưu miền;
* khảo sát các tính chất hình học của điểm cực tiểu, ví dụ như tính đối xứng, khối Wulff, đối xứng hóa Schwarz, đối xứng hóa Steiner cho các phiếm hàm tổng quát; cũng như ứng dụng vào chứng minh các bất đẳng thức hàm, ví dụ lý thuyết Brunn–Minkowski, bất đẳng thức Brascamp–Lieb;
* phương pháp xấp xỉ số cho nghiệm tối ưu, ví dụ phương pháp phần tử biên (boundary element method), các khái niệm đạo hàm miền (shape derivative) kết hợp các phương pháp gradient;
* xem xét họ tập hợp với các tính chất đại số, ví dụ, các tập nửa đại số, tập hợp o-tối tiểu.

Tài liệu

[1] H. Attouch, G. Buttazzo and G. Michaille, *Variational analysis in Sobolev and BV spaces. Applications to PDEs and optimization*, MOS-SIAM Series on Optimization 17. Philadelphia, 2014.

[2] C. Bandle, Dido's problem and its impact on modern mathematics, *Notices Am. Math. Soc.* **64** (2017), 980–984.

[3] D. Bucur & G. Buttazzo, *Variational methods in shape optimization problems, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl*. **65**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2005.

[4] G. Faber, Beweis, dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt, *Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. München, Math.-Phys. Kl.* (1923), 169–-172.

[5] A. Figalli, Free boundary regularity in obstacle problems, *Journées équations aux dérivées partielles* (2018), 24pp.

[6] E. Krahn, Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises, *Math. Ann.* **94** (1925), 97–100.

[7] H. J. Pesch, The princess and infinite-dimensional optimization, *Doc. Math., Extra vol.: Optimization stories* (2012), 345–356.

[8] J. W. S. Rayleigh, *The Theory of Sound, 2nd Edition*, Dover Publications, New York, 1945.

[9] R. Schneider, *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory. Second expanded edition*, Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

Lê Minh Trí

Institut für Stochastik und Wirtschaftsmathematik, VADOR E105-04
TU Wien, Wiedner Hauptstraße 8, A-1040 Wien

E-mail: `minh.le@tuwien.ac.at`
`https://sites.google.com/view/tri-minh-le`

Nguyễn Đăng Khải Hoàn

Dipartimento di Matematica ”Tullio Levi-Civita”
Via Trieste, 63, Padova

E-mail: `khaihoann@gmail.com`
`https:khaihoanmath.org`