Bài giảng

GIẢI TÍCH HÀM

$$\|f\|_p$$

Đinh Ngọc Thanh
Bùi Lê Trọng Thanh
Huỳnh Quang Vũ

Bài giảng Giải tích hàm

Đinh Ngọc Thanh, Bùi Lê Trọng Thanh, Huỳnh Quang Vũ

Bản ngày 15 tháng 8 năm 2024

Đây là một tập bài giảng và danh sách bài tập dùng cho môn Giải tích hàm trình độ đại học tại Khoa Toán - Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh. Tài liệu được biên soạn từ năm 2016.

Biên soạn: Đinh Ngọc Thanh, Bùi Lê Trọng Thanh, Huỳnh Quang Vũ (người biên tập, email: hqvu@hcmus.edu.vn).

Địa chỉ: Khoa Toán - Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh.

Bản mới nhất của tài liệu này, cùng mã nguồn, có ở https://sites.google.com/view/hqvu/teaching.

Mục lục

Giới thiệu

Vào các thế kỉ 18, 19, trong Thời đại Khai sáng và Cách mạng công nghiệp, sự phát triển vượt bậc của xã hội thúc đẩy những khảo cứu cả học thuật và thực dụng. Trong đó có các khảo cứu của Bernoulli, Euler, Lagrange, Fourier và nhiều người khác về các hiện tượng vật lý, như sự truyền sóng và sự truyền nhiệt. Trong các khảo sát này này đối tượng cần tìm là các hàm số, chẳng hạn nhiệt độ là một hàm số của vị trí và thời điểm, và các hiện tượng thường được miêu tả bằng các phương trình trên các hàm. Nghiên cứu những phương trình này đưa đến việc các tính chất của các tập hợp hàm dần dần chiếm vị trí trung tâm. Chẳng hạn để biết phương trình có nghiệm hay không dẫn tới những khảo sát các ánh xạ trên các tập hợp hàm, hay việc xấp xỉ nghiệm dẫn tới nhu cầu đưa ra cách đo độ khác biệt giữa các hàm.

Nhiều tập hợp hàm có cấu trúc của không gian tuyến tính vô hạn chiều, ví dụ tập hợp các đa thức hay tập hợp các hàm số liên tục. Từ đó có nhu cầu khảo sát các khái niệm giải tích như hội tụ và liên tục trên các không gian vô hạn chiều. Giải tích hàm có thể được miêu tả sơ lược ngắn gọn là giải tích trên không gian tuyến tính vô hạn chiều .

Từ đầu thế kỉ 20 Giải tích hàm định hình và phát triển nhanh chóng, vừa do sự phát triển nội tại của toán học, vừa do nhu cầu của khoa học và kĩ thuật. Chẳng hạn, trong Cơ học lượng tử mỗi hệ vật lý là một không gian Hilbert trên trường số phức, mỗi trạng thái của hệ là một phần tử của không gian này, và mỗi đại lượng quan sát được là một ánh xạ tuyến tính trên không gian này.

Ngày nay Giải tích hàm đã trở thành một phần cơ bản của toán học và môn Giải tích hàm thường có trong chương trình đào tạo đại học ngành toán.

Trong chương trình đào tạo trình độ đại học tại Khoa Toán - Tin học Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh nhiều năm qua Giải tích hàm là một môn cơ sở ngành. Hiện nay MTH10403 Giải tích hàm là môn cơ sở ngành cho ngành Toán học và ngành Toán ứng dụng. Phần đông sinh viên có thể học môn này từ học kì thứ tư trở đi.

Trong môn Giải tích hàm sinh viên tích lũy hiểu biết đầu tiên về giải tích trên các không gian vô hạn chiều. Hiểu biết này cần cho nhiều lĩnh vực toán cả lý thuyết lẫn ứng dụng. Ở đây khả năng tiếp thu và sử dụng các lý luận toán học trừu tượng và chính xác tiếp tục được rèn luyện và kiểm tra.

Nội dung môn học gồm không gian mêtríc (nhắc lại), không gian định chuẩn, ánh xạ tuyến tính liên tục cùng các định lý cơ bản về chúng, không gian Hilbert.

Tập bài giảng này xét các không gian vectơ trên trường số thực lẫn trường số phức, nhằm phục vụ các ứng dụng sử dụng số phức về sau, tuy nhiên để đơn giản hơn ban đầu người học có thể tập trung cho trường hợp trường số thực.

Dấu ✓ ở một bài tập là để lưu ý người đọc đây là một bài tập đặc biệt có ích hoặc quan trọng (được dùng về sau), nên làm. Những phần có đánh dấu * là tương đối khó hơn hoặc nâng cao hơn so với yêu cầu chung của môn học. Một số bài tập có gợi ý ở phần cuối tài liệu.

Chương 1 Không gian mêtríc

Không gian mêtríc là phát triển tương tự của không gian Euclid, là tập hợp trên đó có khoảng cách.

Ở chương này chúng ta ôn tập một số tính chất của không gian mêtríc có liên quan tới môn giải tích hàm. Những nội dung này đã có trong môn Giải tích 2, người học nên ôn tập, đọc lại các giáo trình như [TTQ11, TTT19] hoặc nhiều tài liệu khác như [DD02], [Lang97]. Trong phần nhắc lại này chúng ta nhấn mạnh việc hiểu ý nghĩa và khả năng liên hệ các phần kiến thức chứ không chỉ kiểm tra tính đúng đắn của mỗi mệnh đề. Một số mệnh đề quan trọng với môn Giải tích hàm không chỉ bởi kết quả mà còn bởi lý luận giải thích chứng minh, người học nên làm lại để củng cố.

1.1 Mêtríc

Mêtríc nghĩa là khoảng cách [1]. Một không gian mêtríc là một tập hợp có khoảng cách giữa các phần tử. Khoảng cách tổng quát cần có những tính chất được tổng kết từ khoảng cách Euclid trong không gian $\mathbb{R}^n$ mà ta đã sử dụng trong các môn học trước.

1.1.1 Định nghĩa. Cho X là một tập hợp không rỗng. Một ánh xạ

$$\begin{aligned} d : X \times X &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) \end{aligned}$$

được gọi là một ***mêtríc*** trên X nếu các tính chất sau thỏa với mọi $x, y, z \in X$:

(a) $d(x, y) \geq 0$, và $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (xác định dương),

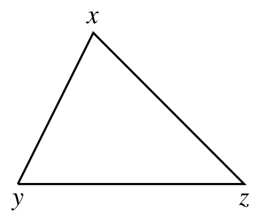
(b) $d(x, y) = d(y, x)$ (đối xứng),

(c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (bất đẳng thức tam giác).

Cặp (X, d) được gọi là một ***không gian mêtríc*** hay một ***không gian có khoảng cách***. Mỗi phần tử của tập X khi đó còn được gọi là một ***điểm***.

Không gian mêtríc (X, d) hay được viết vắn tắt là X khi mêtríc d được ngầm hiểu hoặc không cần được xác định cụ thể.

[1] Trong tiếng Anh từ metric có nghĩa là "cách đo", có họ hàng với từ metre (mét).



Hình 1.1.2: Bất đẳng thức tam giác.

1.1.3 Ví dụ (không gian Euclid $\mathbb{R}^n$). Với $n \in \mathbb{Z}^+$, tập hợp $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$ với ***mêtric Euclid***

$$d((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

được gọi là ***không gian Euclid thực n-chiều***. Đặc biệt khi $n = 1$ không gian mêtríc Euclid $\mathbb{R}$ có mêtríc thông thường cho bởi giá trị tuyệt đối của hiệu hai số thực, $d(x, y) = |x - y|$, chính là khoảng cách giữa hai số thực, vốn đã quen được gọi là ***đường thẳng Euclid***.

Việc khoảng cách Euclid thỏa bất đẳng thức tam giác có thể được kiểm như sau. Xét bất đẳng thức

$$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$$

tức là

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(\sum_{i=1}^{n}(z_i - x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Viết $a_i = (y_i - x_i)$, $b_i = (z_i - y_i)$ thì bất đẳng thức trên trở thành

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1.4}$$

Bình phương hai vế thì bất đẳng thức trên trở thành

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}} &\geq \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i.\end{aligned}$$

Rút gọn thì bất đẳng thức trên trở thành ***Bất đẳng thức Bunyakowsky***, nói rằng với các số thực $a_i, b_i, 1 \leq i \leq n$ bất kì thì

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.} \tag{1.1.5}$$

1.1.6 Ví dụ (không gian Euclid $\mathbb{C}^n$). Về mặt tập hợp thì $\mathbb{C} = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$. Mỗi phần tử $(a,b) \in \mathbb{C}$ được gọi là một số phức và được viết là $a + bi$ với i được gọi là đơn vị ảo. Phép cộng trên $\mathbb{C}$ được định nghĩa là $(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$, tức là $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$, trùng với phép cộng của không gian Euclid $\mathbb{R}^2$. Trên $\mathbb{C}$ còn có một độ lớn, còn được gọi là môđun, cho bởi $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$. Khoảng cách giữa hai số phức $x_1 = a_1 + b_1 i$ và $x_2 = a_2 + b_2 i$ được cho bởi

$$|x_1 - x_2| = |(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i| = \sqrt{(a_1-a_2)^2 + (b_1-b_2)^2},$$

chính bằng khoảng cách giữa (a_1, b_1) và (a_2, b_2) trong không gian Euclid thực $\mathbb{R}^2$. Vì vậy nếu chỉ quan tâm tới khía cạnh không gian mêtríc thì $\mathbb{C}$ trùng với $\mathbb{R}^2$.

Với $n \in \mathbb{Z}^+$ thì tập hợp $\mathbb{C}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in \mathbb{C}, x_2 \in \mathbb{C}, \ldots, x_n \in \mathbb{C}\}$ với mêtric

$$d((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2}$$

được gọi là ***không gian Euclid phức n-chiều***. Nếu ta đồng nhất tập hợp $\mathbb{C}^n$ với tập hợp $\mathbb{R}^{2n}$ thì mêtríc Euclid của $\mathbb{C}^n$ cũng chính là mêtríc Euclid của $\mathbb{R}^{2n}$. Vậy nếu chỉ quan tâm tới khía cạnh không gian mêtríc thì $\mathbb{C}^n$ trùng với $\mathbb{R}^{2n}$.

1.2 Đóng, mở, hội tụ, liên tục

1.2.1 Định nghĩa. Cho không gian mêtríc (X,d), $a \in X$ và số thực $r > 0$. Các tập

$$B(a,r) = \{x \in X \mid d(x,a) < r\}$$

$$B'(a,r) = \{x \in X \mid d(x,a) \le r\}$$

$$S(a,r) = \{x \in X \mid d(x,a) = r\}$$

lần lượt được gọi là ***quả cầu mở***, ***quả cầu đóng***, ***mặt cầu*** tâm a bán kính r.

1.2.2 Định nghĩa. Cho không gian mêtríc (X,d). Tập $A \subset X$ là một ***tập mở*** trong X nếu mỗi điểm thuộc A có một quả cầu của X tâm tại điểm đó chứa trong A. Bằng kí hiệu:

$$\forall x \in A, \exists r > 0, B(x,r) \subset A.$$

Nếu $X \setminus A$ là một tập mở, ta nói A là một ***tập đóng*** trong X.

1.2.3 Ví dụ. Mọi quả cầu mở đều là một tập mở, mọi quả cầu đóng cũng như mặt cầu đều là tập đóng. Ngoài ra, trong không gian mêtríc X, các tập $\emptyset$ và X là các tập vừa đóng vừa mở trong X.

1.2.4 Ghi chú. Khi nói tới “mở”, “đóng” ta phải hiểu rõ là đang nói tới không gian mêtríc nào, vì cùng một tập hợp có thể là tập con của những không gian mêtríc khác nhau và nhận những mêtríc khác nhau, do đó tính mở, đóng cũng khác. Khi đã hiểu rõ thì có thể nói tắt không cần nhắc tới không gian mêtríc chứa.

1.2.5 Mệnh đề. *Cho một không gian mêtríc (X, d) và $(A_i)_{i\in I}$ là một họ các tập con của X. Ta có*

(a) Nếu $\forall i \in I, A_i$ là tập mở thì $\bigcup_{i\in I} A_i$ là một tập mở, và nếu I là tập hữu hạn thì $\bigcap_{i\in I} A_i$ là một tập mở.

(b) Nếu $\forall i \in I$, A_i là tập đóng thì $\bigcap_{i\in I} A_i$ là một tập đóng, và nếu I là tập hữu hạn thì $\bigcup_{i\in I} A_i$ là một tập đóng.

Cho không gian mêtríc (X, d) và A là một tập con của X. Điểm $x \in X$ được gọi là một ***điểm dính*** của A nếu mọi quả cầu tâm x có chứa ít nhất một phần tử của A, nghĩa là

$$\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset.$$

Tập tất cả các điểm dính của A được gọi là ***bao đóng*** của A, ký hiệu là $\bar{A}$ hay $\mathrm{cl}(A)$ (closure).

Điểm $x \in X$ được gọi là một ***điểm trong*** của A nếu tồn tại một quả cầu của X tâm x chứa trong A, nghĩa là

$$\exists r > 0, B(x, r) \subset A.$$

Tập tất cả các điểm trong của A được gọi là ***phần trong*** của A, ký hiệu là $\overset{\circ}{A}$ hay $\mathrm{int}(A)$ (interior).

Điểm $x \in X$ được gọi là một ***điểm biên*** của A nếu mọi quả cầu của X tâm x có chứa ít nhất một phần tử của A, và có chứa ít nhất một phần tử không thuộc A, nghĩa là

$$\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset, B(x, r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset.$$

Tập tất cả các điểm biên của A được gọi là ***phần biên*** của A, ký hiệu là ∂A.

1.2.6 Mệnh đề. *Cho là A một tập con của một không gian mêtríc thì*

(a) $\bar{A}$ là một tập đóng và là tập đóng nhỏ nhất chứa A,

(b) A là một tập đóng nếu và chỉ nếu $A = \bar{A}$,

(c) $\overset{\circ}{A}$ là một tập mở và là tập mở lớn nhất chứa trong A,

(d) A là một tập mở nếu và chỉ nếu $A = \overset{\circ}{A}$.

1.2.7 Định nghĩa. Cho $(x_n)_{n\geq 1}$ là một dãy các phần tử của một không gian mêtríc (X, d). Ta nói $(x_n)_{n\geq 1}$ là ***dãy hội tụ*** trong X nếu tồn tại $x \in X$ sao cho

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{Z}^+, \forall n \in \mathbb{Z}^+, n \geq n_0 \implies d(x_n, x) < \epsilon.$$

Điều này có nghĩa là phần tử của dãy gần x tùy ý miễn chỉ số đủ lớn. Phần tử x, nếu có, là duy nhất và được gọi là ***giới hạn*** của dãy $(x_n)_{n\geq 1}$, ký hiệu $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Ta còn viết $x_n \longrightarrow x$ khi $n \longrightarrow \infty$.

Ta có thể đặc trưng các khái niệm mở, đóng, điểm dính bằng dãy như sau:

1.2.8 Mệnh đề. *Cho là một tập con A trong không gian mêtríc X và $x \in X$. Ta có:*

(a) x là một điểm dính của A nếu và chỉ nếu tồn tại dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ trong A hội tụ về x.

(b) A là một tập đóng trong X nếu và chỉ nếu mọi dãy trong A mà hội tụ trong X thì giới hạn của nó nằm trong A.

1.2.9 Định nghĩa. Cho ánh xạ f từ không gian mêtríc (X, d_X) vào không gian mêtríc (Y, d_Y) và $x_0 \in X$. Ta nói f là ***liên tục*** tại x_0 nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Điều này có nghĩa là $f(x)$ gần $f(x_0)$ tùy ý miễn x đủ gần x_0.

Ta nói f liên tục trên X nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc X.

Ta có đặc trưng của sự liên tục thông qua dãy:

1.2.10 Định lý. *Cho ánh xạ f từ không gian mêtríc (X, d_X) vào không gian mêtríc (Y, d_Y). Điều kiện cần và đủ để f liên tục tại x là với mọi dãy $(x_n)_n$ trong X, nếu $x_n \longrightarrow x$ trong X thì $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ trong Y.*

Dưới đây là một đặc trưng thường dùng của ánh xạ liên tục trên cả không gian.

1.2.11 Định lý. *Ánh xạ f từ không gian mêtríc (X, d_X) vào không gian mêtríc (Y, d_Y) là liên tục trên X nếu và chỉ nếu ảnh ngược qua f của tập mở trong Y là tập mở trong X.*

Mệnh đề vẫn đúng nếu thay tập mở bằng tập đóng.

Giới hạn và sự liên tục của ánh xạ trên không gian mêtríc tổng quát hóa các khái niệm này vốn đã có trên không gian Euclid. Cụ thể hơn trên không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ thì các khái niệm giới hạn và liên tục theo nghĩa không gian mêtríc Euclid chính là các khái niệm mà ta đã học trước đây trong các môn Vi tích phân hàm một biến và hàm nhiều biến. Vì vậy ***ta kế thừa tất cả các kết quả đã có về giới hạn và liên tục trên các không gian Euclid***.

1.2.12 Ví dụ. Các hàm số thực sơ cấp như các hàm lũy thừa x^n, hàm đa thức, hàm mũ e^x, hàm lượng giác sin, cos, …, và các hàm ngược ln, arcsin, arccos, … cùng với các hàm thu được từ chúng bằng các phép toán cộng trừ nhân chia và hàm hợp, đều là các hàm liên tục dưới khoảng cách Euclid.

Cho không gian mêtríc (X, d) và Y là một tập con của X. Ánh xạ $d_Y \equiv d|_{Y\times Y}$, tức $d_Y(x, y) = d(x, y)$ với mọi $x, y \in Y$, là một mêtríc trên Y mà ta gọi là thu hẹp hay hạn chế của mêtríc của X xuống Y. Không gian mêtríc (Y, d_Y) được gọi là một ***không gian mêtríc con*** của không gian mêtríc X.

1.2.13 Ghi chú. Như đã nhắc ở 1.2.4, chú ý rằng với Y là một không gian con của X và A là một tập con của Y ta cần phân biệt việc A đóng hay mở trong X với việc A đóng hay mở trong Y. Tương tự, với một dãy trong Y, ta cần phân biệt việc dãy hội tụ trong X với việc dãy hội tụ trong Y.

1.2.14 Ví dụ. Trên $\mathbb{R}$ với mêtríc Euclid, tập $[0, 2)$ tạo thành một không gian mêtríc con. Tập $[0, 1)$ là mở trong không gian $[0, 2)$ nhưng không mở trong không gian $\mathbb{R}$. Dãy $x_n = 2 - \frac{1}{n}$ trong $[0, 2)$ không hội tụ trong $[0, 2)$ nhưng hội tụ trong $\mathbb{R}$.

Một quả cầu của Y là thu hẹp của một quả cầu của X:

$$B_Y(x, r) = \{y \in Y \mid d(y, x) < r\} = B_X(x, r) \cap Y.$$

Từ đó ta có sự liên hệ giữa tính đóng và mở trong một không gian với tính đóng và mở trong một không gian con của nó:

1.2.15 Mệnh đề. *Cho Y là một không gian con của một không gian mêtríc X và A là một tập con của Y. Ta có:*

(a) A là mở trong Y nếu và chỉ nếu tồn tại tập V mở trong X sao cho $A = V \cap Y$.

(b) A là đóng trong Y nếu và chỉ nếu tồn tại tập F đóng trong X sao cho $A = F \cap Y$.

Dưới đây là một kết quả thường dùng:

1.2.16 Mệnh đề. *Thu hẹp của một ánh xạ liên tục xuống một không gian mêtríc con là một ánh xạ liên tục.*

1.3 Không gian compắc và không gian đầy đủ

Cho dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$, nếu $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ là một dãy tăng ngặt các số nguyên dương thì ta nói dãy $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{Z}^+}$ là một dãy con của dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$.

1.3.1 Định nghĩa. Ta nói không gian mêtríc (X, d) là ***compắc*** [2] khi mọi dãy trong X đều có một dãy con hội tụ trong X.

Ta thường nói ngắn gọn: ***không gian là compắc nếu mọi dãy đều có dãy con hội tụ***.

Dưới đây là một kết quả quan trọng về tính compắc trên đường thẳng Euclid.

[2] Trong tiếng Anh từ compact có nghĩa là chặt, gọn.

1.3.2 Định lý (Định lý Bolzano–Weierstrass). *Mọi đoạn $[a, b]$ đều compắc.*

Mệnh đề cũng thường được phát biểu dưới dạng: Mọi dãy số thực bị chặn đều có một dãy con hội tụ.

Hai lý luận thường dùng để chứng minh Định lý Bolzano–Weierstrass là xây dựng một dãy con hội tụ của dãy đã cho bằng cách lần lượt chia đoạn làm hai phần bằng nhau [Duc06], hoặc xây dựng một dãy con đơn điệu [TTT19]. Để tiện theo dõi ta đưa ra thêm một lý luận nữa dưới đây. Các lý luận này dùng ***tính tồn tại chặn trên nhỏ nhất***, còn gọi là tính liên tục, của tập hợp số thực: mọi tập con không rỗng bị chặn trên của $\mathbb{R}$ đều có chặn trên nhỏ nhất (sup – supremum), và mọi tập con không rỗng bị chặn dưới của $\mathbb{R}$ đều có chặn dưới lớn nhất (inf – infimum).

Chứng minh. Cho $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ là một dãy bất kì trong đoạn $[a, b]$. Xét dãy $(c_m)_{m\in\mathbb{Z}^+}$ với $c_m = \inf\{x_n \mid n \geq m\}$. Dãy $(c_m)_{m\in\mathbb{Z}^+}$ là một dãy số thực tăng nên hội tụ (Bài tập 1.4.4) về một số c (số c chính bằng $\sup\{c_m \mid m \in \mathbb{Z}^+\}$). Ta xây dựng một dãy con $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{Z}^+}$ của dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ như sau. Khởi đầu, với $k = 1$, lấy $m_1 \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $|c_{m_1} - c| < \frac{1}{1}$, và lấy $n_1 = m_1$. Với mỗi $k \in \mathbb{Z}^+$, $k \geq 2$, lấy $m_k \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $m_k > n_{k-1}$ và $|c_{m_k} - c| < \frac{1}{k}$. Mặt khác, do tính chất của inf, tồn tại $n_k \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $n_k \geq m_k$ và $|x_{n_k} - c_{m_k}| < \frac{1}{k}$. Dãy số nguyên $(n_k)_{k\in\mathbb{Z}^+}$ là một dãy tăng ngặt, nên dãy $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{Z}^+}$ là một dãy con của dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$. Ta có

$$|x_{n_k} - c| \leq |x_{n_k} - c_{m_k}| + |c_{m_k} - c| < \frac{2}{k},$$

chứng tỏ dãy $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ về c. □

1.3.3 Định nghĩa. Dãy $(x_n)_{n\geq 1}$ trong X là ***dãy Cauchy*** nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{Z}^+, \forall m, n \in \mathbb{Z}^+, (m, n \geq n_0 \implies d(x_m, x_n) < \epsilon).$$

Vậy dãy Cauchy là dãy mà phần tử gần nhau tùy ý miễn chỉ số đủ lớn.

1.3.4 Mệnh đề. *Mọi dãy hội tụ đều là dãy Cauchy.*

Chứng minh. Giả sử dãy $(x_n)_n$ hội tụ về x. Bất đẳng thức tam giác cho

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x_n, x).$$

Như thế khi cả m và n đủ lớn thì $d(x_m, x_n)$ nhỏ tùy ý. □

Ngược lại không phải dãy Cauchy nào cũng hội tụ.

1.3.5 Ví dụ. Trong $\mathbb{R}$ thì dãy $\frac{1}{n}$ hội tụ về 0 nên là dãy Cauchy. Nhưng nếu xét trong $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thì dãy này không hội tụ.

Dãy các số hữu tỉ $(1 + \frac{1}{n})^n$ hội tụ về số vô tỉ e trong $\mathbb{R}$. Như vậy dãy này là dãy Cauchy trong $\mathbb{Q}$ nhưng không hội tụ trong $\mathbb{Q}$.

1.3.6 Định nghĩa. Không gian mêtríc (X, d) là ***đầy đủ*** nếu mọi dãy Cauchy trong X đều hội tụ trong X.

Ta thường nói ngắn gọn: ***không gian là đầy đủ nếu mọi dãy Cauchy đều hội tụ***.

Một tính chất căn bản và rất quan trọng của tập hợp số thực là tính đầy đủ, cơ sở cho nhiều kết quả chính của môn này:

1.3.7 Định lý (ℝ là đầy đủ). *Tập hợp $\mathbb{R}$ tất cả các số thực với mêtríc Euclid là một không gian mêtríc đầy đủ.*

Chứng minh. Một dãy Cauchy thì phải bị chặn (Bài tập 1.4.6). Một dãy bị chặn các số thực thì có một dãy con hội tụ, theo Định lý Bolzano–Weierstrass 1.3.2. Một dãy Cauchy mà có một dãy con hội tụ thì phải hội tụ (Bài tập 1.4.7). □

Từ tính đầy đủ của $\mathbb{R}$ ta suy ra được:

1.3.8 Mệnh đề. *Không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ là đầy đủ.*

Chứng minh. Ý chính của chứng minh là như sau. Do đặc điểm của khoảng cách Euclid, các dãy tọa độ các phần tử của một dãy Cauchy cũng là các dãy Cauchy, và do đó hội tụ vì các tọa độ này nằm trong một không gian đầy đủ. Cũng do tính chất của khoảng cách Euclid, hội tụ theo tọa độ lại dẫn tới hội tụ của dãy ban đầu. Ý này còn được dùng lại ở các chương sau. Để dễ hiểu hơn người học có thể thử viết trước cho trường hợp $n = 2$.

Giả sử $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}^+}$là một dãy Cauchy trong $\mathbb{R}^n$. Viết $x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n})$. Cho $\epsilon > 0$, tồn tại $N \in \mathbb{Z}^+$ sao cho khi $k > N, l > N$ thì $d(x_k, x_l) < \epsilon$. Với mỗi $1 \le i \le n$ thì với khoảng cách Euclid ta có

$$|x_{k,i} - x_{l,i}| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_{k,i} - x_{l,i}|^2} = d(x_k, x_l) < \epsilon.$$

Như vậy dãy $(x_{k,i})_{k\in\mathbb{Z}^+}$ là một dãy Cauchy các số thực, do đó hội tụ vì tập hợp các số thực là đầy đủ. Đặt $a_i = \lim_{k\to\infty} x_{k,i}$ và đặt $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Với mỗi i có $N_i \in \mathbb{Z}^+$ sao cho khi $k > N_i$ thì $|x_{k,i} - a_i| < \epsilon$, do đó khi $k > N = \max\{N_i \mid 1 \le i \le n\}$ thì

$$d(x_k, a) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_{k,i} - a_i|^2} < \epsilon\sqrt{n}.$$

Điều này dẫn tới kết luận $\lim_{k\to\infty} x_k = a$. Vậy dãy $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ. □

Vì về mặt không gian mêtríc thì $\mathbb{C}^n$ trùng với $\mathbb{R}^{2n}$ (Ví dụ 1.1.6) nên ta có ngay:

1.3.9 Mệnh đề. *Không gian Euclid $\mathbb{C}^n$ là đầy đủ.*

1.3.10 Định nghĩa. Tập $A \subset X$ được gọi là ***bị chặn*** nếu A được chứa trong một quả cầu nào đó của X, tức là

$$\exists a \in X, \exists r > 0, A \subset B(a, r).$$

1.3.11 Mệnh đề (compắc thì đóng và bị chặn). *Cho Y là một tập con của không gian mêtríc X. Nếu Y là compắc thì Y đóng trong X và bị chặn.*

Chứng minh. Giả sử Y là compắc. Giả sử dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ trong Y hội tụ về $x \in X$. Vì Y compắc nên dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ có một dãy con $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ về một giới hạn trong Y. Vì với mỗi dãy hội tụ thì mọi dãy con cũng hội tụ về cùng một giới hạn (1.4.5), nên $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{Z}^+}$ phải hội tụ về x, và x phải thuộc Y. Vậy Y là đóng.

Giả sử Y không bị chặn. Lấy một điểm $a \in X$ bất kì, với mọi số thực r có phần tử $x \in Y$ sao cho $d(a,x) > r$. Có $x_1 \in Y$ sao cho $d(a,x_1) > 1$, có $x_2 \in Y$ sao cho $d(a,x_2) > d(a,x_1) + 1$, …, có $x_{n+1} \in Y$ sao cho $d(a,x_{n+1}) > d(a,x_n) + 1$ với mọi $n \geq 1$. Như vậy ta được một dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ có tính chất với mọi $n \geq 1$, $k \geq 1$, thì

$$\begin{aligned} d(x_{n+k},x_n) &\geq d(x_{n+k},a) - d(x_n,a) \\ &\geq [d(x_{n+k},a) - d(x_{n+k-1},a)] + [d(x_{n+k},a) - d(x_{n+k-1},a)] + \\ &\cdots + [d(x_{n+1},a) - d(x_n,a)] > k. \end{aligned}$$

Một dãy con của dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ không thể nào là dãy Cauchy vì các phần tử của dãy con đó không thể gần lại nhau tùy ý, và như vậy dãy con đó không thể hội tụ (1.3.4), trái giả thiết Y là compắc. □

Từ Định lý Bolzano–Weierstrass ta suy ra đặc trưng quan trọng sau của tập compắc trong không gian Euclid:

1.3.12 Định lý (compắc trong không gian Euclid = đóng + bị chặn). *Một tập con của không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ hay $\mathbb{C}^n$ là compắc nếu và chỉ nếu nó là đóng và bị chặn.*

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ thì một hình hộp bất kì $I = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \cdots \times [a_n,b_n]$ là compắc. Để dễ hiểu hơn người học có thể thử viết trước cho trường hợp $n = 2$.

Xét dãy $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}^+}$ trong I. Viết $x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n})$. Ở tọa độ thứ nhất, vì dãy $(x_{k,1})_{k\in\mathbb{Z}^+}$ nằm trong đoạn $[a_1,b_1]$ nên theo Định lý Bolzano–Weierstrass có dãy con $(k_{j_1})_{j_1\in\mathbb{Z}^+}$ của dãy $(k)_{k\in\mathbb{Z}^+}$ sao cho dãy $(x_{k_{j_1},1})_{j_1\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ về $y_1 \in [a_1,b_1]$. Ở tọa độ thứ hai dãy $(k_{j_1})_{j_1\in\mathbb{Z}^+}$ có dãy con $(k_{j_2})_{j_2\in\mathbb{Z}^+}$ sao cho $(x_{k_{j_2},2})_{j_2\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ về $y_2 \in [a_2,b_2]$. Chú ý do $(x_{k_{j_2},1})_{j_2\in\mathbb{Z}^+}$ là một dãy con của dãy $(x_{k_{j_1},1})_{j_1\in\mathbb{Z}^+}$ nên $(x_{k_{j_2},1})_{j_2\in\mathbb{Z}^+}$ cũng hội tụ về y_1 (1.4.5). Lặp lại tương tự cho các tọa độ tiếp theo, ta được dãy con $(k_{j_n})_{j_n\in\mathbb{Z}^+}$ của dãy $(k)_{k\in\mathbb{Z}^+}$ sao cho với mọi $1 \leq i \leq n$ thì $(x_{k_{j_n},i})_{j_n\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ về y_i.

Như lý luận trong chứng minh của 1.3.8, do đặc điểm của khoảng cách Euclid, dãy $(x_{k_{j_n}})_{j_n\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ về $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in I$. Ta đã chứng minh xong I là compắc.

Bây giờ giả sử $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ đóng và bị chặn. Vì A bị chặn nên ta có thể đặt A vào trong một hình hộp I. Vì I là compắc và A là một tập con đóng nên A cũng compắc (1.3.14).

Vì về không gian mêtríc thì $\mathbb{C}^n$ trùng với $\mathbb{R}^{2n}$ nên ta cũng có kết quả cho $\mathbb{C}^n$. □

Các mệnh đề tiếp theo thể hiện tương quan giữa các tính chất compắc, đóng, và đầy đủ. Đây là những mệnh đề mà về sau được dùng thường xuyên trong các lý luận của môn này và của Giải tích nói chung đến nỗi thường không được chỉ nguồn và không giải thích nữa. Người học nên không những thuộc lòng các mệnh đề này mà còn tự làm được các lý luận đơn giản giải thích chúng, vì vậy chúng được để ở Bài tập 1.4.8.

1.3.13 Mệnh đề (compắc thì đầy đủ). *Cho Y là một tập con của không gian mêtríc X. Nếu Y là compắc thì Y là đầy đủ.*

1.3.14 Mệnh đề (đóng trong compắc thì compắc). *Cho Y là một tập con của không gian mêtríc X. Nếu Y là đóng trong X và X là compắc thì Y là compắc.*

1.3.15 Mệnh đề (đầy đủ thì đóng). *Cho Y là một tập con của không gian mêtríc X. Nếu Y là đầy đủ thì Y là đóng trong X.*

1.3.16 Mệnh đề (đóng trong đầy đủ thì đầy đủ). *Cho Y là một tập con của không gian mêtríc X. Nếu Y là đóng trong X và X là đầy đủ thì Y là đầy đủ.*

Sau đây là ba kết quả quan trọng cho hàm liên tục trên không gian compắc.

1.3.17 Định lý (ảnh liên tục của không gian compắc là compắc). *Cho f là một ánh xạ liên tục giữa hai không gian mêtríc X và Y. Nếu X là compắc thì $f(X)$ cũng là compắc.*

Chứng minh. Giả sử $(y_n)_{n\geq 1}$ là một dãy trong $f(X)$. Có $x_n \in X$ sao cho $f(x_n) = y_n$. Vì X compắc nên dãy $(x_n)_{n\geq 1}$ có một dãy con $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ hội tụ về một phần tử $x \in X$, tức là $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Vì ánh xạ f liên tục nên

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x) \in f(X).$$

Vậy dãy $(y_n)_{n\geq 1}$ có dãy con hội tụ trong $f(X)$. Vậy $f(X)$ compắc. □

1.3.18 Định lý (hàm thực trên không gian compắc thì có cực trị). *Nếu f là một ánh xạ liên tục từ một không gian mêtríc compắc X vào không gian Euclid $\mathbb{R}$ thì f đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên X, nghĩa là tồn tại $a, b \in X$ sao cho $f(a) = \max f(X)$ và $f(b) = \min f(X)$.*

Chứng minh. Vì ảnh liên tục của không gian compắc là compắc nên $f(X)$ compắc trong $\mathbb{R}$. Dẫn tới $f(X)$ bị chặn, do đó có $\sup f(X)$ và $\inf f(X)$. Do tính chất của sup và inf, đó là các điểm dính của tập $f(X)$, và vì tập $f(X)$ là đóng, nên các điểm dính $\sup f(X)$ và $\inf f(X)$ phải thuộc về $f(X)$, do đó chúng là $\max f(X)$ và $\min f(X)$. □

1.3.19 Định lý (liên tục trên không gian compắc thì liên tục đều). *Cho f là một ánh xạ liên tục giữa hai không gian mêtríc X và Y. Nếu X là compắc thì f là **liên tục đều** trên X, nghĩa là*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, \forall y \in X, d_X(x,y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Chứng minh. Giả sử phản chứng, f không liên tục đều trên X, dẫn tới tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$ thì có $x_n \in X, y_n \in X$ thỏa $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ mà $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$ (lấy $\delta = \frac{1}{n}$).

Vì X compắc nên dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ có một dãy con $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ hội tụ về một phần tử $x \in X$. Dãy tương ứng $(y_{n_k})_{k\geq 1}$ có một dãy con $(y_{n_{k_l}})_{l\geq 1}$ hội tụ về một phần tử $y \in X$. Điều này dẫn tới $x = y$, chẳng hạn bằng cách viết

$$d(x,y) \leq d(x, x_{n_{k_l}}) + d(x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}}) + d(y_{n_{k_l}}, y) < d(x, x_{n_{k_l}}) + \frac{1}{n_{k_l}} + d(y_{n_{k_l}}, y)$$

rồi cho $l \to \infty$ thì vế phải tiến về 0, nên $d(x, y) = 0$.

Ta viết

$$d(f(x_{n_{k_l}}), f(y_{n_{k_l}})) \leq d(f(x_{n_{k_l}}), f(x)) + d(f(x), f(y_{n_{k_l}}))$$

rồi cho $l \to \infty$ thì do f liên tục nên vế phải tiến về 0, khiến vế trái cũng tiến về 0, mâu thuẫn với giả thiết $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$. □

1.4 Bài tập

1.4.1. Chứng tỏ trong một không gian mêtríc (X, d), dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ về x khi và chỉ khi dãy $(d(x_n, x))_{n\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ về 0. Ngắn gọn hơn, x_n hội tụ về x khi và chỉ khi khoảng cách từ x_n tới x hội tụ về 0. Bằng kí hiệu thì

$$x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \iff d(x_n, x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

1.4.2. Chứng minh giới hạn của một dãy nếu có thì là duy nhất.

1.4.3. Chứng tỏ một dãy hội tụ thì phải bị chặn.

1.4.4. Chứng tỏ một dãy số thực tăng mà bị chặn trên thì phải hội tụ, một dãy số thực giảm và bị chặn dưới thì phải hội tụ.

1.4.5. Chứng tỏ một dãy hội tụ thì mọi dãy con của dãy đó cũng hội tụ về cùng một giới hạn.

1.4.6. ✓ Chứng minh một dãy Cauchy thì phải bị chặn.

1.4.7. ✓ Chứng minh một dãy Cauchy có dãy con hội tụ thì phải hội tụ.

1.4.8. ✓ Chứng minh các mệnh đề từ 1.3.13 tới 1.3.16.

1.4.9. Giải thích vì sao trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ thì quả cầu đóng $B'(a, r)$ và mặt cầu $S(a, r)$ là compắc.

1.4.10. Cho E là một không gian mêtríc compắc và f là một song ánh liên tục từ E vào một không gian mêtríc F. Chứng minh $f^{-1} : F \to E$ là một ánh xạ liên tục.

1.4.11. Cho E là một không gian mêtríc, $x \in E$, và $M \subset E$. Khoảng cách từ điểm x tới tập M được định nghĩa là

$$d(x, M) = \inf\{d(x, y) \mid y \in M\}.$$

Chứng tỏ $d(x, M) = 0$ khi và chỉ khi x là một điểm dính của M.

1.4.12. Cho $(x_n)_{n\geq 1}$ là một dãy trong một không gian mêtríc X và x trong X. Chứng minh hai điều sau đây tương đương:

(a) Có một dãy con $\left(x_{n_k}\right)_{k\geq 1}$ của (x_n) hội tụ về x trong X.

(b) Tập $\{n \geq 1 \mid x_n \in B(x, r)\}$ là một tập vô hạn với mọi số thực $r > 0$.

1.4.13 (Định lý ánh xạ co). Cho (E, d) là một không gian mêtríc đầy đủ và f là một ánh xạ từ E vào E. Giả sử $\exists \alpha \in (0, 1)$ sao cho $\forall x, y \in E$,

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y).$$

Ta nói f là một ***ánh xạ co*** với hằng số co α trên E. Khi đó:

(a) f liên tục trên E.

(b) Với $a \in E$ bất kì, dãy $(x_n)_{n\geq 1}$ xác định bởi

$$\begin{aligned} x_1 &= a \\ x_{n+1} &= f(x_n),\ n \geq 1, \end{aligned}$$

là một dãy Cauchy trong E.

(c) Dãy $(x_n)_{n\geq 1}$ trên hội tụ về $x \in E$ thỏa $f(x) = x$. Điểm x sao cho $f(x) = x$ là duy nhất và được gọi là ***điểm bất động*** của f.

Tóm tắt, ta có thể phát biểu rằng: ánh xạ co trên không gian đầy đủ thì có điểm bất động. Đây còn được gọi là Định lý điểm bất động Banach.

1.4.14 (đầy đủ hóa). * Dưới đây là kết quả rằng mọi không gian mêtríc đều có một đầy đủ hóa. Hình mẫu điều này là sự đầy đủ hóa của $\mathbb{Q}$ để được $\mathbb{R}$.

Cho X là một không gian mêtríc. Nhắc lại một tập con A của X được gọi là ***dày đặc*** hay ***trù mật*** trong X nếu $\overline{A} = X$.

(a) Xét Y là tập hợp tất cả các dãy Cauchy trong X. Trên Y xét quan hệ $(x_n) \sim (y_n)$ nếu $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$. Đây là một quan hệ tương đương trên Y. Gọi $\overline{X}$ là tập hợp tất cả các lớp tương đương của Y dưới quan hệ này.

(b) Trên $\overline{X}$ đặt $d([(x_n)], [(y_n)]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$. Đây là một định nghĩa tốt [3] và là một mêtríc trên $\overline{X}$.

(c) Với mêtríc trên thì $\overline{X}$ là một không gian mêtríc đầy đủ.

(d) Ánh xạ $x \mapsto (x, x, \ldots, x, \ldots)$ từ X vào $\overline{X}$ là một đơn ánh và ảnh của nó dày đặc trong $\overline{X}$.

Không gian mêtríc $\overline{X}$ trên được gọi là ***không gian đầy đủ hóa*** của X.

[3] Thuật ngữ "định nghĩa tốt" (tiếng Anh là well-defined) ở đây ý nói rằng định nghĩa cần dùng tới một phần tử đại diện của lớp tương đương, nhưng không phụ thuộc cách chọn phần tử đại diện đó, nên định nghĩa áp dụng cho lớp tương đương chứ không chỉ cho phần tử. Nói chung một đối tượng toán học được "định nghĩa tốt" nghĩa là nó được xác định, đây là một cách nói tắt truyền thống trong toán học.

Chương 2 Không gian định chuẩn

Không gian định chuẩn là phát triển tương tự của không gian Euclid, là không gian vectơ có chiều dài vectơ.

2.1 Không gian vectơ

Trong hình học và vật lý hai và ba chiều ta đã gặp các vectơ và các phép toán trên chúng. Vectơ thường được hình dung là các đoạn thẳng có hướng, là một cặp hai điểm gồm điểm đầu và điểm cuối của vectơ. Tuy nhiên khái niệm vectơ tổng quát dùng ở đây không đi kèm khái niệm điểm đầu. Tóm tắt, một không gian vectơ là một tập hợp với phép toán cộng hai phần tử và nhân một phần tử của trường với một phần tử của tập hợp, và hai phép toán này thỏa các tính chất hay dùng.

Dưới đây ta nhắc lại nhanh một một khái niệm thường dùng, chi tiết có trong môn Đại số tuyến tính.

Một ***không gian vectơ***, còn gọi là một ***không gian tuyến tính***, trên trường đại số $\mathbb{F}$ là một tập hợp không rỗng[1] X với ánh xạ

$$\begin{aligned} + : X \times X &\to X \\ (x, y) &\mapsto x + y, \end{aligned}$$

(phép toán + này nói chung không liên quan tới phép toán cộng trên trường số thực, cũng được chỉ bằng cùng kí hiệu), và ánh xạ

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{F} \times X &\to X \\ (\alpha, x) &\mapsto \alpha \cdot x, \end{aligned}$$

(phép toán $\cdot$ này nói chung không liên quan tới phép toán nhân trên trường số thực), thỏa các tính chất:

(a) $(X, +)$ là một nhóm đại số giao hoán. Tức là X có một phần tử thường được chỉ bằng kí hiệu 0 (cùng kí hiệu với số thực 0), thỏa $\forall x \in X, 0 + x = x + 0 = x$; với mỗi $x \in X$ có một phần tử của X, thường được chỉ bởi kí hiệu $-x$, sao cho

[1] Một số tài liệu không loại trừ tập rỗng. Ta dùng yêu cầu này để tránh những phiền toái do tập rỗng gây ra, như trong khái niệm chiều.

$x + (-x) = 0$; phép toán $+$ có tính kết hợp $\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X, (x+y)+z = x+(y+z)$, và tính giao hoán $\forall x \in X, \forall y \in X, x+y = y+x$.

(b) $\forall x \in X, 1 \cdot x = x$; $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall \beta \in \mathbb{F}, \forall x \in X, (\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$.

(c) Phép toán $+$ và $\cdot$ có tính phân phối với nhau: $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall \beta \in \mathbb{F}, \forall x \in X, \forall y \in X, \alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$, $(\alpha+\beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$.

Một phần tử của một không gian vectơ còn được gọi là một ***vectơ***. Kí hiệu $\cdot$ thường được lược bỏ, ta thường viết αx thay vì $\alpha \cdot x$.

Tập $Y \subset X$ được gọi là một ***không gian vectơ con*** của X khi chính Y, với các phép toán thu hẹp từ X, cũng là một không gian vectơ. Nói khác đi, Y là một không gian vectơ con của X khi và chỉ khi với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall x \in Y, \forall y \in Y, \alpha x + \beta y \in Y$, tức là Y kín với các phép toán của không gian vectơ X.

Cho $S \subset X$. Tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của hữu hạn phần tử thuộc S, tức $\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \mid \alpha_i \in \mathbb{F}, x_i \in S, n \in \mathbb{Z}^+\}$, là một không gian vectơ con của X, được gọi là không gian vectơ con sinh bởi S.

Các phần tử của S được gọi là ***độc lập tuyến tính*** nếu không có phần tử khác 0 nào là tổ hợp tuyến tính của hữu hạn các phần tử khác. Nói cách khác $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ với $\alpha_i \in \mathbb{F}, x_i \in S, n \in \mathbb{Z}^+$ thì phải có $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \alpha_i = 0$.

Nếu S sinh ra X và các phần tử của S là độc lập tuyến tính thì S cùng với một thứ tự toàn phần trên S được gọi là một ***cơ sở vectơ***, hay ***cơ sở tuyến tính***, của X.

Ta nói một không gian vectơ là hữu hạn chiều nếu nó có một cơ sở vectơ là một tập hợp hữu hạn. Nếu không thì ta nói đó là một ***không gian vectơ vô hạn chiều***.

Vì tập hợp chỉ có một phần tử $\{0\}$ cũng có cấu trúc hiển nhiên của một không gian vectơ nên ta cũng định nghĩa cho tiện là đây là một không gian vectơ có số chiều bằng 0.

2.1.1 Ví dụ. Tập hợp $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, 1 \le i \le n\}$ có một cấu trúc không gian vectơ trên trường $\mathbb{R}$ là

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) &= (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n), \\ \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n). \end{aligned}$$

Không gian vectơ này có một cơ sở vectơ là tập hợp có thứ tự $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ với $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ với số thực 1 nằm ở tọa độ thứ i. Đây được gọi là cấu trúc không gian vectơ chuẩn tắc của $\mathbb{R}^n$, khi nói tới $\mathbb{R}^n$ mà không nói gì thêm thì ta ngầm sử dụng cấu trúc chuẩn tắc này.

2.1.2 Ví dụ. Trên $\mathbb{C}$ có một phép nhân được định nghĩa bởi

$$(a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i.$$

Một hệ quả của phép nhân này là $i^2 = i \cdot i = -1$. Với $z = a+bi$ thì $\bar{z} = a - bi$ được gọi là số phức liên hợp của số z. Với các phép toán $+$ và $\cdot$ này $\mathbb{C}$ là một trường đại số.

Trên $\mathbb{C}^n$ có cấu trúc không gian vectơ trên trường $\mathbb{C}$ với các phép toán

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),\\ \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).\end{aligned}$$

Không gian vectơ $\mathbb{C}^n$ có một cơ sở vectơ là tập hợp có thứ tự $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ với $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ với số thực 1 nằm ở tọa độ thứ i. Đây được gọi là cấu trúc không gian vectơ chuẩn tắc của $\mathbb{C}^n$, khi nói tới $\mathbb{C}^n$ mà không nói gì thêm thì ta ngầm sử dụng cấu trúc chuẩn tắc này.

Viết chung lại, nếu $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ thì $\mathbb{F}^n$ là một không gian vectơ n-chiều trên trường $\mathbb{F}$.

2.2 Không gian định chuẩn

Ngắn gọn, một không gian định chuẩn là một không gian vectơ trên đó có chiều dài, hay độ lớn, của vectơ. Chính xác, một ***không gian định chuẩn*** (normed space) là một không gian vectơ $(X, +, \cdot)$ trên trường $\mathbb{F}$, với $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, với một hàm

$$\begin{aligned}\|\cdot\| : X &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \|x\|,\end{aligned}$$

được gọi là một ***chuẩn*** (norm) trên X, thỏa $\forall x \in X, \forall y \in X, \forall \alpha \in \mathbb{F}$:

(a) $\|x\| \geq 0$ (không âm),

(b) $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (xác định dương),

(c) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, ở đây kí hiệu $|\alpha|$ chỉ giá trị tuyệt đối của số thực nếu $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ và độ lớn của số phức nếu $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ (tỉ lệ),

(d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (bất đẳng thức tam giác).

Ta có thể lược bớt kí hiệu khi chúng được hiểu ngầm và có thể viết tắt "cho một không gian định chuẩn X" khi các cấu trúc đã được biết hoặc không cần được xác định.

2.2.1 Ví dụ. Với $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ đặt

$$\boxed{\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.}$$

Đây được gọi là ***chuẩn Euclid***. Bất đẳng thức tam giác trong trường hợp này nghĩa là

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

thu được bằng cách dùng bất đẳng thức tam giác trên $\mathbb{F}$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

tiếp theo dùng bất đẳng thức

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

mà ta đã có ở bất đẳng thức (1.1.4) khi kiểm tra bất đẳng thức tam giác cho mêtríc Euclid.

2.2.2 Ví dụ (các chuẩn p trên $\mathbb{F}^n$). Với $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$, $p \in \mathbb{R}$, $p > 1$ thì

$$\boxed{\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}}$$

là một chuẩn trên $\mathbb{F}^n$ do ***Bất đẳng thức Minkowski***:

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}.} \tag{2.2.3}$$

Với $p = 2$ đây là chuẩn Euclid. Đây là một trường hợp riêng của Bất đẳng thức Minkowski tổng quát ở Mệnh đề 2.6.12.

Ngoài ra dưới đây cũng là các chuẩn thường gặp trên $\mathbb{F}^n$ mà người học hãy kiểm tra thỏa yêu cầu của chuẩn:

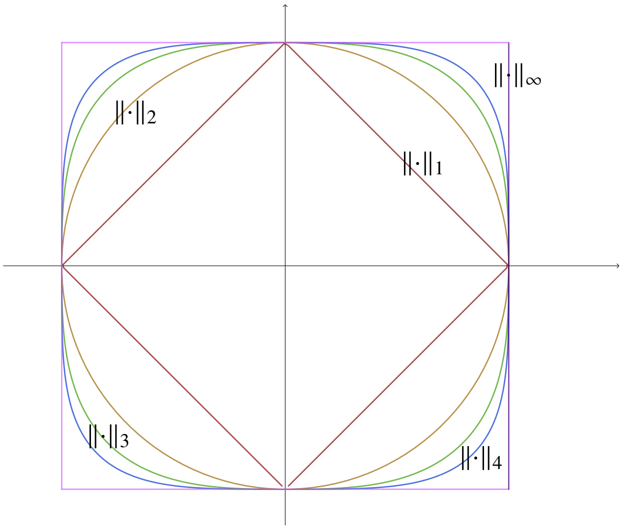
$$\boxed{\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|}$$

$$\boxed{\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|.}$$

Cho X là một không gian định chuẩn, với hàm chuẩn $\|\cdot\|$, và Y là một không gian vectơ con của X. Ánh xạ chuẩn thu hẹp trên Y trở thành một hàm chuẩn trên Y. Không gian định chuẩn Y với hàm chuẩn vừa nêu được gọi là một ***không gian định chuẩn con*** của X.

Trong không gian Euclid thấp chiều ta vốn đã quen với điều là khoảng cách giữa hai điểm đúng bằng chiều dài vectơ nối hai điểm đó. Ta dễ dàng kiểm tra thấy điều này cũng đúng tổng quát:

2.2.5 Mệnh đề (*chuẩn sinh ra mêtríc*). *Trong không gian định chuẩn $(X, \|\cdot\|)$ thì $d(x, y) = \|x - y\|$ là một mêtríc trên X.*



Hình 2.2.4: Trên $\mathbb{R}^2$, các quả cầu đơn vị $B(0,1)$ ứng với các chuẩn $\|\cdot\|_p$ với $p = 1, 2, 3, 4, \infty$.

Do đó, mặc nhiên ***một không gian định chuẩn cũng là một không gian mêtríc***, vì vậy thừa hưởng mọi khái niệm cũng như tính chất của một không gian mêtríc.

2.2.6 Ví dụ. Trong không gian vectơ $\mathbb{F}^n$, rõ ràng chuẩn Euclid sinh ra mêtríc Euclid, với $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ thì

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2} \\ &= \|x - y\|_2. \end{aligned}$$

2.2.7 Định nghĩa. Khi không gian mêtríc với mêtríc sinh bởi chuẩn là đầy đủ thì ta nói không gian định chuẩn là một ***không gian Banach*** [2].

Ngắn gọn ta có thể nói ***không gian Banach là không gian định chuẩn đầy đủ***.

2.2.8 Ví dụ. Trong chương trước ta đã biết không gian Euclid $\mathbb{F}^n$ với mêtríc Euclid là không gian đầy đủ. Bây giờ ta biết mêtríc Euclid được sinh ra bởi chuẩn Euclid. Vậy không gian Euclid với chuẩn Euclid là một không gian định chuẩn đầy đủ, tức là một không gian Banach.

2.2.9 Định nghĩa. Hai chuẩn $\|\cdot\|_1$ và $\|\cdot\|_2$ trên cùng một không gian vectơ X được gọi là hai ***chuẩn tương đương*** nếu có hai số thực $\alpha, \beta > 0$ sao cho

$$\forall x \in X, \alpha \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \beta \|x\|_1 .$$

Ta suy ra ngay

$$\forall x \in X, \frac{1}{\beta} \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \frac{1}{\alpha} \|x\|_2 .$$

[2] Stefan Banach là một nhà toán học sống vào đầu thế kỉ 20, đã đặt nền móng và xây dựng một số kết quả quan trọng cho môn Giải tích hàm.

nên tính tương đương của chuẩn là đối xứng.

2.2.10 Mệnh đề. *Nếu hai chuẩn là tương đương thì sự hội tụ của dãy; sự mở, đóng, compắc của tập con; sự liên tục của ánh xạ; sự đầy đủ của không gian là như nhau.*

Chứng minh. Giả sử dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ về x theo chuẩn $\|\cdot\|_1$. Điều này đồng nghĩa với dãy số thực $(\|x_n - x\|_1)_n$ hội tụ về số thực 0. Từ tính chất $\|x_n - x\|_2 \le \beta \|x_n - x\|_1$ ta suy ra dãy $(\|x_n - x\|_2)_n$ cũng hội tụ về 0, do đó dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ về x theo chuẩn $\|\cdot\|_2$. Vậy khi hai chuẩn là tương đương thì một dãy hội tụ theo chuẩn thứ nhất thì phải hội tụ theo chuẩn thứ hai về cùng giới hạn.

Do các khái niệm đóng, mở, compắc, liên tục đều có thể được định nghĩa chỉ bằng sự hội tụ của dãy, nên người đọc có thể kiểm tra chi tiết ngay là một tập là đóng, mở, compắc theo chuẩn thứ nhất thì cũng tương ứng đóng, mở, compắc theo chuẩn thứ hai, và nếu một ánh xạ liên tục theo chuẩn thứ nhất thì cũng liên tục theo chuẩn thứ hai.

Tính chất $\|x_m - x_n\|_2 \le \beta \|x_m - x_n\|_1$ cũng dẫn tới một dãy là dãy Cauchy theo chuẩn thứ nhất thì phải là dãy Cauchy theo chuẩn thứ hai. Do đó nếu không gian vectơ là đầy đủ theo chuẩn thứ nhất thì cũng đầy đủ theo chuẩn thứ hai. □

Về chiều ngược lại, xem ở 2.8.8.

2.3 Không gian định chuẩn hữu hạn chiều

2.3.1 Định lý. *Các chuẩn trên không gian vectơ $\mathbb{F}^n$ đều tương đương.*

Chứng minh. Cho $\|\cdot\|$ là một chuẩn bất kì trên $\mathbb{F}^n$ và $\|\cdot\|_2$ là chuẩn Euclid.

Dùng Bất đẳng thức Bunyakowsky (1.1.5) ta được

$$\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^n x_i e_i\right\| \le \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\| \le \sum_{i=1}^n |x_i|\, \|e_i\| \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2\right)^{1/2}.$$

Vậy có $\beta > 0$ sao cho $\forall x, \|x\| \le \beta \|x\|_2$. Điều này cũng dẫn tới hàm $\|\cdot\|$ là liên tục trên không gian Euclid. Thu hẹp của hàm này lên mặt cầu đơn vị Euclid S^n, một tập compắc, có giá trị nhỏ nhất $\alpha > 0$. Với mọi $x \neq 0$ thì $\frac{x}{\|x\|_2} \in S^n$, nên $\left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\| \ge \alpha$, tức là $\|x\| \ge \alpha \|x\|_2$. Vậy một chuẩn bất kì trên $\mathbb{F}^n$ là tương đương với chuẩn Euclid. □

2.3.2 Mệnh đề. *Các chuẩn trên cùng một không gian vectơ hữu hạn chiều đều tương đương.*

Chứng minh. Cho $(X, \|\cdot\|)$ là một không gian định chuẩn n-chiều trên trường $\mathbb{F}$. Lấy một cơ sở tuyến tính $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ cho X. Đặt ánh xạ

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow \mathbb{F}^n \\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i &\mapsto y = f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i. \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Đây là ánh xạ tuyến tính mang cơ sở $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ thành cơ sở $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, do đó là một song ánh tuyến tính, tức là một đẳng cấu tuyến tính. Nếu $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ trong cơ sở $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ thì $y = f(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ trong cơ sở $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Đặt $\|y\| = \left\|f^{-1}(y) = x\right\|_X$ thì có thể kiểm tra được rằng $\|\cdot\|$ là một chuẩn trên $\mathbb{F}^n$.

Nếu ta có hai chuẩn $\|\cdot\|_a$ và $\|\cdot\|_b$ trên X thì theo cách xây dựng này ta có tương ứng hai chuẩn $\|\cdot\|_a$ và $\|\cdot\|_b$ trên $\mathbb{F}^n$. Từ 2.3.1, hai chuẩn trên $\mathbb{F}^n$ này là tương đương, nên có hai số thực dương α, β sao cho với mọi $y \in \mathbb{F}^n$:

$$\alpha \|y\|_a \leq \|y\|_b \leq \beta \|y\|_a ,$$

do đó với mọi $x \in X$:

$$\alpha \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq \beta \|x\|_a .$$

□

2.3.4 Mệnh đề. *Một không gian định chuẩn hữu hạn chiều bất kì là một không gian Banach.*

Chứng minh. Ánh xạ f ở 2.3.3 và ánh xạ ngược f^{-1} mang dãy Cauchy thành dãy Cauchy, dãy hội tụ thành dãy hội tụ. Mặt khác $\mathbb{F}^n$ với chuẩn bất kì là không gian Banach. □

2.3.5 Hệ quả. *Không gian định chuẩn con hữu hạn chiều là tập con đóng.*

Chứng minh. Vì không gian định chuẩn con hữu hạn chiều là đầy đủ nên nó phải là một tập đóng, xem 1.3.15. □

* Không gian định chuẩn compắc địa phương

Một không gian định chuẩn được gọi là ***compắc địa phương*** nếu quả cầu đóng đơn vị là compắc. Ý nghĩa của thuật ngữ này được giải thích trong mệnh đề sau:

2.3.6 Mệnh đề. *Trong một không gian định chuẩn những điều sau là tương đương:*

(a) quả cầu đóng đơn vị là compắc,

  (a) mọi quả cầu đóng là compắc,

  (b) mọi tập con đóng và bị chặn là compắc,

(c) mọi dãy bị chặn có một dãy con hội tụ,

(d) mọi lân cận của một điểm bất kì chứa một lân cận compắc.

Nói ngắn gọn, không gian compắc địa phương là không gian định chuẩn mà ở đó tính compắc tương đương với tính đóng và bị chặn.

Để chứng minh kết quả trên ta giới thiệu một khái niệm mới. Một song ánh giữa hai không gian mêtric $T : X \to Y$ được gọi là một ***phép đẳng cấu tôpô*** hay một ***phép đồng phôi*** từ X lên Y nếu cả T và T^{-1} đều là các ánh xạ liên tục, và khi đó ta nói X là ***đẳng cấu tôpô*** hay ***đồng phôi*** với Y. Một ví dụ đáng chú ý là trong một không gian định chuẩn các quả cầu đều đồng phôi với nhau, cụ thể, quả cầu $B(0, 1)$ đồng phôi với quả cầu $B(a, r)$ bất kì qua hợp của một phép co dãn (vị tự) $x \mapsto rx$ và một phép tịnh tiến $x \mapsto x + a$, xem thêm ở 2.8.5.

Chứng minh. Ta kiểm $(a) \implies (b) \implies (c) \implies (d) \implies (a)$. Giả sử quả cầu đóng đơn vị $B'(0, 1)$ là compắc. Vì quả cầu đóng bất kì $B'(a, r)$ là ảnh của một phép đồng phôi từ $B'(0, 1)$, và ảnh liên tục của một tập compắc là compắc, nên $B'(a, r)$ cũng là compắc. Một tập con bị chặn thì chứa trong một quả cầu đóng compắc, cho nên nếu tập con đó cũng đóng nữa thì nó phải compắc. Một dãy bị chặn sẽ được chứa trong một quả cầu đóng bị chặn, do đó chứa trong một tập compắc, do đó có dãy con hội tụ.

Ta kiểm $(a) \iff (e)$. Giả sử điểm x có một lân cận U. Ta phải có một quả cầu $B(x, r) \subset U$. Khi đó $x \in B(x, \frac{r}{2}) \subset \overline{B(x, \frac{r}{2})} = B'(x, \frac{r}{2}) \subset B(x, r) \subset U$. Nếu quả cầu đóng đơn vị là compắc thì $B'(x, \frac{r}{2})$ là compắc. Như vậy $(a) \implies (e)$.

Ngược lại nếu tồn tại $x \in V \subset A \subset U$ trong đó V mở và A compắc thì phải có một quả cầu $B(x, r) \subset V$ và khi đó $B'(x, r) \subset A$ là compắc, và do đó $B'(0, 1)$ là compắc. ◻

2.3.7 Mệnh đề. *Không gian định chuẩn hữu hạn chiều là compắc địa phương.*

Chứng minh. Vì không gian Euclid $\mathbb{F}^n$ là compắc địa phương nên không gian vectơ $\mathbb{F}^n$ là compắc địa phương với chuẩn bất kì. Ánh xạ f ở (2.3.3) mang quả cầu $B'(0, 1)$ trong không gian X thành quả cầu $B'(0, 1)$ trong $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_{\mathbb{F}^n})$, là tập compắc. Vì f là một phép đồng phôi nên bảo toàn tính compắc, do đó $B'(0, 1)$ compắc trong X. ◻

Ngược lại:

2.3.8 Mệnh đề. *Không gian định chuẩn compắc địa phương thì phải là hữu hạn chiều.*

Chứng minh. Giả sử quả cầu đơn vị đóng $B'(0, 1)$ là compắc trong không gian mêtric X. Tồn tại họ hữu hạn $(a_i \in B'(0, 1))_{1 \le i \le m}$ sao cho $\bigcup_{i=1}^{m} B(a_i, 1/2) \supset B'(0, 1)$, vì nếu không sẽ tồn tại dãy $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}^+}$ mà khoảng cách giữa các phần tử lớn hơn $1/2$ do đó không có dãy con hội tụ.

Đặt $M = \langle \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \rangle$, ta chứng minh $B'(0, 1) \subset M$. Với $x \in B'(0, 1)$ bất kì, tồn tại a_i sao cho $\|a_i - x\| < 1/2$, tức $x \in M + \frac{1}{2}B'(0, 1)$. Suy ra $B'(0, 1) \subset$

$M + \frac{1}{2}B'(0,1) \subset M + \frac{1}{2}\left(M + \frac{1}{2}B'(0,1)\right) \subset M + \frac{1}{4}B'(0,1)$. Bằng quy nạp ta được $B'(0,1) \subset M + \frac{1}{2^n}B'(0,1)$, $\forall n \geq 1$. Lấy $x \in B'(0,1)$ thì có dãy $x_n \in M$ và $y_n \in B'(0, \frac{1}{2^n})$ sao cho $x = x_n + y_n$. Lấy giới hạn thì được $x_n \to x$. Vì M hữu hạn chiều nên đóng, do đó $x \in M$. Vậy $B'(0,1) \subset M$. Vì mỗi phần tử của X là một bội của một phần tử của $B'(0,1)$, và M là một không gian vectơ, nên ta suy ra $X \subset M$, do đó $X = M$. Vậy X là hữu hạn chiều. □

Một hệ quả đáng chú ý là:

2.3.9 Hệ quả. *Trên không gian định chuẩn thì compắc = đóng + bị chặn khi và chỉ khi không gian là hữu hạn chiều.*

2.4 Không gian ℓ^p

Phát triển từ $\mathbb{F}^n$, gọi $\mathbb{F}^\infty$ là tập hợp tất cả các dãy phần tử thuộc $\mathbb{F}$ (là $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$). Với mọi $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ và $y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ trong $\mathbb{F}^\infty$ và α trong $\mathbb{F}$, ta đặt

$$x + y = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{Z}^+},$$

$$\alpha x = (\alpha x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}.$$

Với các phép toán này thì $\mathbb{F}^\infty$ là một không gian vectơ trên $\mathbb{F}$.

Đây là một không gian vectơ vô hạn chiều, vì nó chứa các vectơ e_n, $n \in \mathbb{Z}^+$, với $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ mà số thực 1 nằm ở tọa độ thứ n, là một tập hợp vô hạn các vectơ độc lập tuyến tính.

2.4.1 Định nghĩa. Gọi ℓ^∞ là tập con của $\mathbb{F}^\infty$ gồm tất cả các dãy bị chặn, tức là tập hợp tất cả các phần tử $x = (x_n)_{n\geq 1}$ sao cho $\sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{Z}^+\} < \infty$. Với $x \in \ell^\infty$ đặt

$$\boxed{\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{Z}^+\}.}$$

Ta dễ dàng kiểm tra nhanh được đây là một chuẩn trên ℓ^∞.

2.4.2 Định nghĩa. Cho $p \in [1, \infty)$. Gọi ℓ^p là tập con của $\mathbb{F}^\infty$ gồm tất cả các phần tử $x = (x_n)_{n\geq 1}$ sao cho $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty$. Với $x \in \ell^p$ đặt

$$\boxed{\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p\right)^{1/p}.}$$

2.4.3 Mệnh đề. ℓ^p, *$p \in [1, \infty)$, với các cấu trúc trên là một không gian định chuẩn.*

Chứng minh. Ta cần kiểm tra các tính chất của chuẩn được thỏa. Ở đây bất đẳng thức tam giác cho chuẩn có từ Bất đẳng thức Minkowski ở dạng tổng của chuỗi

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{1/p} \tag{2.4.4}$$

có thể thu được bằng cách qua giới hạn Bất đẳng thức Minkowski ở dạng tổng hữu hạn ở (2.2.3). □

2.4.5 Ví dụ. Xét dãy $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$.

Đây là một dãy số bị chặn, nên $x \in \ell^\infty$, với $\|x\|_\infty = 1$.

Ta biết với $0 < p < \infty$ thì chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

hội tụ khi và chỉ khi $p > 1$. Vậy $x \notin \ell^1$ và $x \in \ell^p$ với mọi $1 < p \le \infty$.

Chẳng hạn ta biết (xem 4.5.2)

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$$

và (xem 4.6.44)

$$\|x\|_4 = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{\pi^4}{90}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{\sqrt[4]{90}}.$$

2.4.6 Định lý. *Không gian ℓ^p, $p \in [1,\infty]$, là không gian Banach.*

Chứng minh. Chứng minh này tương tự với chứng minh không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ là không gian Banach ở 1.3.8.

Trường hợp $p = \infty$: Giả sử $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ là một dãy Cauchy trong ℓ^∞ với $x_n = \left(x_{n,k}\right)_{k\in\mathbb{Z}^+}$. Cho $\epsilon > 0$ có N sao cho $m > N, n > N$ thì $\|x_m - x_n\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{Z}^+}|x_{m,k} - x_{n,k}| < \epsilon$. Điều này dẫn tới với mỗi $k \ge 1$ thì

$$|x_{m,k} - x_{n,k}| < \epsilon, \quad (*)$$

do đó dãy $\left(x_{n,k}\right)_{n\ge 1}$ là một dãy Cauchy trong $\mathbb{F}$, do đó hội tụ về một $y_k \in \mathbb{F}$.

Ở $(*)$, cho n tiến ra vô cùng ta được $|x_{m,k} - y_k| \le \epsilon$. Suy ra $\|x_m - y\|_\infty \le \epsilon$ với $y = (y_1, y_2, \dots, y_k, \dots)$. Điều này dẫn tới hai điều: $(x_m - y) \in \ell^\infty$ do đó $y \in \ell^\infty$, và $(x_m)_{m\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ về y trong ℓ^∞.

Trường hợp $p < \infty$ là tương tự, thay sup bởi $\sum$: Giả sử $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ là một dãy Cauchy trong ℓ^p với $x_n = \left(x_{n,k}\right)_{k\in\mathbb{Z}^+}$. Cho $\epsilon > 0$ có N sao cho $m > N, n > N$ thì

$$\|x_m - x_n\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty}|x_{m,k} - x_{n,k}|^p < \epsilon^p. \quad (**)$$

Điều này dẫn tới với mỗi $k \geq 1$ thì $|x_{m,k} - x_{n,k}| < \epsilon$, do đó dãy $\left(x_{n,k}\right)_{n\geq 1}$ là một dãy Cauchy trong $\mathbb{F}$, do đó hội tụ về một $y_k \in \mathbb{F}$.

Từ $(**)$, với mọi $T \in \mathbb{Z}^+$,

$$\sum_{k=1}^{T} |x_{m,k} - x_{n,k}|^p < \epsilon^p.$$

Cho n tiến ra vô cùng ta được $\sum_{k=1}^{T} |x_{m,k} - y_k|^p \leq \epsilon^p$. Suy ra chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{m,k} - y_k|^p$ hội tụ và $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{m,k} - y_k|^p \leq \epsilon^p$, tức là $\|x_m - y\|_p \leq \epsilon$ với $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots)$. Điều này dẫn tới hai điều: $(x_m - y) \in \ell^p$ do đó $y \in \ell^p$, và $(x_m)_{m\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ về y trong ℓ^p. □

2.5 Không gian các hàm liên tục

Cho S là một tập hợp và X là một không gian định chuẩn trên trường $\mathbb{F}$. Xét tập hợp $M(S,X)$ gồm tất cả các ánh xạ từ S vào X. Trên tập hợp này ta định nghĩa phép cộng ánh xạ và phép nhân vô hướng với ánh xạ theo cách thường gặp: Nếu f và g thuộc $M(S,X)$ và $\alpha \in \mathbb{F}$ thì $f+g$ và αf được cho bởi, với mọi $x \in X$:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (\alpha f)(x) &= \alpha f(x). \end{aligned}$$

Khi đó $M(S,X)$ với các cấu trúc trên là một không gian vectơ. Ở đây phần tử 0 của không gian vectơ chính là ánh xạ mà giá trị luôn bằng phần tử 0 của X.

2.5.1 Ví dụ. Không gian vectơ $\mathbb{F}^n$ chính là $M(S,X)$ với $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ và $X = \mathbb{F}$. Không gian vectơ $\mathbb{F}^\infty$ chính là $M(S,X)$ với $S = \mathbb{Z}^+$ và $X = \mathbb{F}$.

Để có chuẩn ta xét không gian con của $M(S,X)$, tương tự các không gian ℓ^p. Ở đây ta xét tương tự của ℓ^∞, các tương tự của ℓ^p với $p < \infty$ được xét ở phần không gian L^p.

2.5.2 Định nghĩa. Gọi $B(S,X)$ là tập hợp tất cả các ánh xạ ***bị chặn*** từ S vào X. Với $f \in B(S,X)$ thì tập ảnh $f(S)$ là một tập bị chặn trong X, nói cách khác tập $\{\|f(s)\| \mid s \in S\}$ là một tập con bị chặn của $\mathbb{R}$. Vậy ta có thể đặt

$$\boxed{\|f\| = \sup_{s\in S} \|f(s)\| = \sup\{\|f(s)\| \mid s \in S\}.}$$

Đây thường được gọi là ***chuẩn*** sup, là một số đo kích thước của tập giá trị của ánh xạ, là chặn trên nhỏ nhất của độ lớn của ảnh của ánh xạ.

2.5.3 Ví dụ. $B(\mathbb{Z}^+, \mathbb{F})$ chính là ℓ^∞.

2.5.4 Mệnh đề. *$B(S,X)$ là một không gian định chuẩn với chuẩn* sup.

Chứng minh. Ta kiểm các yêu cầu của chuẩn. Cho $f \in B(S, X)$. Giả sử $\|f\| = 0$. Ta có $\forall s \in S$, $f(s) = 0$. Vậy f là hàm 0, là phần tử 0 của $B(S, X)$.

Nếu $\alpha \in \mathbb{F}$ thì

$$\|\alpha f\| = \sup_{s\in S} \|\alpha f(s)\| = \sup_{s\in S} |\alpha| \|f(s)\| = |\alpha| \sup_{s\in S} \|f(s)\| = |\alpha| \|f\| .$$

Nếu $g \in B(S, X)$ thì

$$\begin{aligned}\|f + g\| &= \sup_{s\in S} \|f(s) + g(s)\| \leq \sup_{s\in S}(\|f(s)\| + \|g(s)\|)\\ &\leq (\sup_{s\in S} \|f(s)\|) + (\sup_{s\in S} \|g(s)\|) = \|f\| + \|g\| .\end{aligned}$$

□

2.5.5 Mệnh đề (hội tụ theo chuẩn sup thì hội tụ từng điểm). *Trên không gian $B(S, X)$, nếu dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ về f thì với mỗi $x \in S$ dãy $(f_n(x))_{n\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ về $f(x)$. Ngắn gọn hơn:*

$$(\lim_{n\to\infty} f_n = f) \implies (\forall x, \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)).$$

Điều này tương tự điều ta đã thấy trong $\mathbb{R}^n$ và cũng đã thấy trong ℓ^p: nếu một dãy trong không gian mà hội tụ thì các dãy các tọa độ thành phần cũng phải hội tụ.

Chứng minh. Giả sử $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Điều này đồng nghĩa với $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$. Với mọi $x \in S$ ta có

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \|f_n - f\| = \sup_{x\in S} \|f_n(x) - f(x)\|.$$

Qua giới hạn khi $n \to \infty$, dùng tính chất kẹp, ta được kết quả. □

Sự hội tụ theo chuẩn sup còn được gọi là ***hội tụ đều***, vì dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ về f theo chuẩn sup có nghĩa là với số dương ϵ cho trước bất kì thì với n đủ lớn ta có $\|f_n(x) - f(x)\| \leq \sup_x \|f_n(x) - f(x)\| = \|f_n - f\| \leq \epsilon$ ***với mọi** x*, do đó ta có thể nói $f_n(x)$ gần đều tùy ý tới $f(x)$ chỉ phụ thuộc n mà không phụ thuộc x [3]. Sự hội tụ đều đã được nhắc tới trong môn Giải tích 2. Mệnh đề 2.5.5 có thể được tóm tắt là ***hội tụ đều thì hội tụ từng điểm***.

2.5.6 Mệnh đề. *Nếu X là không gian Banach thì $B(S, X)$ là không gian Banach.*

Chứng minh. Chứng minh này tương tự chứng minh tính đầy đủ của $\mathbb{R}^n$ ở 1.3.8 và ℓ^∞ ở 2.4.6. Trước hết ta dùng giới hạn từng điểm để tìm ra giới hạn của dãy.

Cho $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ là một dãy Cauchy trong $B(S, X)$. Cho $\epsilon > 0$, có $N \in \mathbb{N}$ sao cho $m \geq N, n \geq N$ thì với mọi $x \in S$ ta có $\|f_m(x) - f_n(x)\| \leq \epsilon$. Với mỗi x, dãy $(f_n(x))_{n\in\mathbb{Z}^+}$

[3] Trong tiếng Anh "hội tụ đều" là "uniform convergence".

là một dãy Cauchy trong X, do đó hội tụ về một giới hạn duy nhất mà ta đặt là $f(x)$. Ở đánh giá $\|f_m(x) - f_n(x)\| \le \epsilon$ cố định n và cho $m \to \infty$ ta được với mọi $\epsilon > 0$ có $N \in \mathbb{N}$ sao cho $n \ge N$ thì với mọi $x \in S$ ta có $\|f_n(x) - f(x)\| \le \epsilon$. Suy ra $(f_n - f) \in B(S, X)$ do đó $f = (f - f_n) + f_n \in B(S, X)$. Ta kết luận được $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ trong $B(S, X)$ về f. □

2.5.7 Định nghĩa. Nếu X là một không gian mêtríc và Y là một không gian định chuẩn thì ta gọi $C(X, Y)$ là tập hợp tất cả các ánh xạ liên tục từ X vào Y.

Nếu X là compắc thì một hàm liên tục trên X sẽ bị chặn, do đó $C(X, Y) \subset B(X, Y)$. Hơn nữa một hàm liên tục trên một không gian compắc có giá trị lớn nhất, do đó thực ra $\sup_X \|f(x)\| = \max_X \|f(x)\|$, giá trị lớn nhất của độ lớn các ảnh của ánh xạ.

2.5.8 Ví dụ. Không gian vectơ $C([a, b], \mathbb{R})$, còn được viết tắt là $C([a, b])$, gồm tất cả các hàm số thực liên tục từ đoạn $[a, b]$ vào $\mathbb{R}$, với chuẩn sup.

Chẳng hạn, $\cos \in C([0, \pi])$ và

$$\|\cos\| = \sup_{0\le x\le\pi} |\cos x| = \max_{0\le x\le\pi} |\cos x| = |\cos 0| = |\cos \pi| = 1.$$

Không gian vectơ $C([a, b])$ là vô hạn chiều (Bài tập 2.8.21).

2.5.9 Định lý. *Nếu X là một không gian compắc thì $C(X, Y)$ với chuẩn* sup *là một không gian định chuẩn con đóng của $B(X, Y)$. Do đó nếu X là một không gian compắc và Y là một không gian Banach thì $C(X, Y)$ là một không gian Banach.*

Chứng minh. Giả sử dãy $(f_n)_n$ trong $C(X, Y)$ hội tụ về f trong $B(X, Y)$, ta chứng minh $f \in C(X, Y)$, tức là chứng minh f là liên tục. Cho $x_0 \in X$. Viết

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(x_0)\| &= \|f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)\| \\ &\le \|f - f_n\| + \|f_n(x) - f_n(x_0)\| + \|f - f_n\|. \end{aligned}$$

Cho $\epsilon > 0$, chọn n đủ lớn ta sẽ được $\|f - f_n\| < \epsilon$. Với n đó thì f_n liên tục tại x_0, do đó lấy x đủ gần x_0 ta sẽ có $\|f_n(x) - f_n(x_0)\| < \epsilon$, do đó $\|f(x) - f(x_0)\| < 3\epsilon$, do đó f liên tục tại x_0.

Nếu Y là không gian Banach thì $B(X, Y)$ là không gian Banach theo Mệnh đề 2.5.6, và $C(X, Y)$ là một không gian con đóng của $B(X, Y)$ nên cũng là một không gian Banach, do 1.3.16. □

2.5.10 Ví dụ. Không gian $C([a, b], \mathbb{R})$ là một không gian định chuẩn đầy đủ, tức là một không gian Banach. Một phần của Mệnh đề 2.5.9 được phát biểu trong môn Giải tích 2 dưới dạng: ***dãy hàm liên tục hội tụ đều thì giới hạn cũng liên tục***.

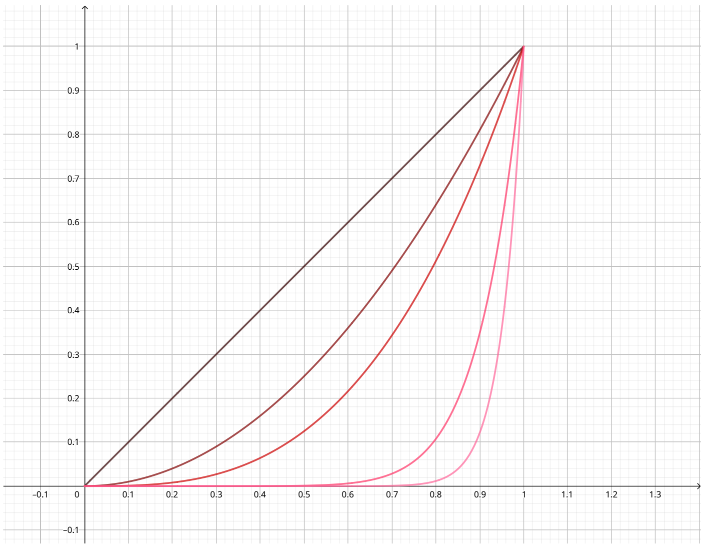
Người đọc có thể viết lại chứng minh của 2.5.6 và 2.5.9 trực tiếp cho $C([a, b], \mathbb{R})$ để dễ theo dõi hơn.

2.5.11 Ví dụ. Trong $C([0,1])$ đặt $f_n(x) = x^n$. Ta xét sự hội tụ của dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$.

Giả sử $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Ta tìm f. Vì hội tụ đều dẫn tới hội tụ từng điểm nên ta phải có với mọi $x \in [0,1]$ thì $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Ta tính

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Nhưng hàm f rõ ràng không liên tục, tức là $f \notin C([0,1])$. Trong hình dưới đây có đồ thị của hàm $y = x^n$ với n tăng dần, cho thấy tính chất trên.



Như thế dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ không hội tụ về f trong $C([0,1])$, mâu thuẫn. Ta kết luận dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ không hội tụ.

2.5.12 Ví dụ. Cho

$$f_n(x) = \frac{\sin(2n\pi x)}{n}, x \in [0,1], n \in \mathbb{Z}^+.$$

Ta xét $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|$, $\lim_{n\to\infty} f_n$.

Vì

$$\left| f_n(x) = \frac{\sin(2n\pi x)}{n} \right| \le \frac{1}{n}, \forall x \in [0,1],$$

nên dùng tính chất kẹp ta có

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Vậy dãy hàm $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$hội tụ điểm về hàm 0.

Tiếp theo

$$\|f_n\| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| \le \frac{1}{n},$$

nên dùng tính chất kẹp ta có

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Ta tìm $\lim_{n\to\infty} f_n$, tức là tìm giới hạn của dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ dưới chuẩn sup. Ta biết giới hạn theo chuẩn sup nếu tồn tại thì phải là hàm giới hạn từng điểm, nên $\lim_{n\to\infty} f_n$ nếu tồn tại phải bằng hàm 0. Ta kiểm tra xem có thực 0 là giới hạn của dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ hay không. Ta viết

$$\|f_n - 0\| = \|f_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Vậy đúng là $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

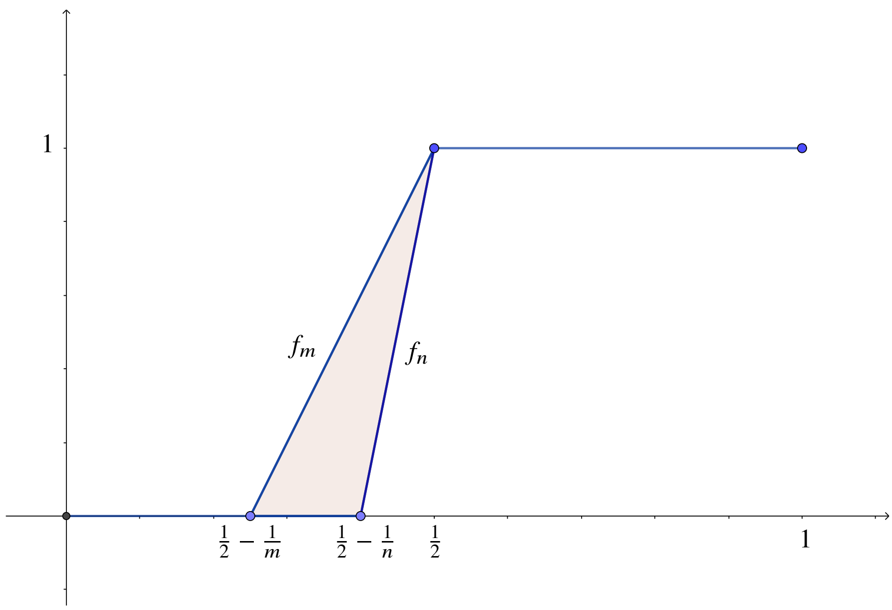
Dưới đây là một ví dụ về không gian định chuẩn không đầy đủ.

2.5.13 Mệnh đề. *Tập hợp tất cả các hàm liên tục từ $[0, 1]$ vào $\mathbb{R}$ với chuẩn $\|f\| = \int_0^1 |f|$ là một không gian định chuẩn không đầy đủ.*

Chứng minh. Có thể kiểm tra đây là một chuẩn, đặc biệt vì f là hàm liên tục nên tích phân Riemann $\int_0^1 |f| = 0$ nếu và chỉ nếu $f = 0$, Bài tập 2.8.28.

Với $n \geq 3$, đặt f_n là hàm tuyến tính từng khúc liên tục bằng 0 trên $[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}]$, bằng 1 trên $[\frac{1}{2}, 1]$, xem Hình 2.5.14. Ta sẽ chứng tỏ dãy $(f_n)_{n\geq 1}$ là một dãy Cauchy nhưng không thể hội tụ, điều có thể thấy trực quan từ hình vẽ.

Trong Hình 2.5.14, $\|f_m - f_n\| = \int_0^1 |f_m(x) - f_n(x)|\, dx$ chính là diện tích giữa đồ thị của f_m và f_n, bằng $\frac{1}{2}\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$, nhỏ tùy ý khi m và n đủ lớn. Vậy dãy $(f_n)_{n\geq 1}$ là một dãy Cauchy.



Hình 2.5.14:

Giả sử $f_n \overset{n\to\infty}{\to} f$ và f là liên tục. Khi đó

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} |f_n - f| = \int_{\frac{1}{2}}^{1} |1 - f| \le \int_0^1 |f_n - f| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

dẫn tới $\int_{\frac{1}{2}}^{1} |1 - f| = 0$. Vì f là liên tục điều này dẫn tới $1 - f = 0$, hay $f = 1$ trên $[\frac{1}{2}, 1]$. Với mọi $\epsilon > 0$, với n đủ lớn, ta có $\frac{1}{2n} < \epsilon$, vì thế

$$\int_0^{\frac{1}{2}-\epsilon} |f_n - f| = \int_0^{\frac{1}{2}-\epsilon} |0 - f| \le \int_0^1 |f_n - f| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Điều này dẫn tới $\int_0^{\frac{1}{2}-\epsilon} |f| = 0$, do đó $f = 0$ trên $[0, \frac{1}{2} - \epsilon)$. Suy ra

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

Nhưng hàm này lại không liên tục, mâu thuẫn. Vậy dãy $(f_n)_{n\ge 1}$ không hội tụ. □

2.6 Không gian L^p

Phần này trình bày sơ lược phần nội dung của lý thuyết độ đo và tích phân cần cho môn học. Để tìm hiểu thêm người học có thể tra cứu trong các tài liệu như [Duc06b, TT15, SS05, RF10, Rud2].

Tóm tắt về độ đo và tích phân

Xét một tập hợp Ω với một họ M các tập con của Ω sao cho M kín dưới phép hội đếm được và phép lấy phần bù (M được gọi là một σ-đại số). Các phần tử của M được gọi là các ***tập đo được***. Một ***độ đo*** là một hàm $\mu : M \to [0, \infty]$ thỏa tính cộng đếm được, nghĩa là với một họ đếm được các tập đo được rời nhau $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ thì

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Bộ (Ω, M, μ) được gọi là một ***không gian đo***.

2.6.1 Ví dụ. Với M tập hợp tất cả các tập con của Ω thì ***độ đo đếm*** μ trên Ω, được cho bởi $\mu(A) = |A|$ là số phần tử của A khi A hữu hạn và $\mu(A) = \infty$ khi A vô hạn.

2.6.2 Ví dụ (không gian đo Lebesgue). Trên không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ có một σ-đại số M đặc biệt chứa tất cả các tập mở và tập đóng. Các phần tử của của M được gọi là các tập đo được Lebesgue. Có một độ đo μ trên M, duy nhất theo một nghĩa nhất định, được gọi là ***độ đo Lebesgue***, có tính chất độ đo của một hình hộp $\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ bằng

$\prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$, có tính cộng đếm được, và bất biến dưới các phép dời hình của không gian Euclid $\mathbb{R}^n$.

Nếu một tập có thể tích Riemann thì nó đo được Lebesgue, và thể tích Riemann của tập đó bằng với độ đo Lebesgue của nó.

Bây giờ ta tóm tắt về tích phân tổng quát. Cho (Ω, M, μ) là một không gian đo. Một hàm $f : \Omega \to \mathbb{R}$ được gọi là một ***hàm đo được*** nếu ảnh ngược của mỗi tập mở (dưới mêtric Euclid của $\mathbb{R}$) là một tập đo được.

2.6.3 Ví dụ. Nếu hàm thực f là đo được thì mỗi tập mức $f^{-1}(c)$ là đo được.

Cho f là một hàm đo được không âm. Trong tích phân Riemann ta xấp xỉ hàm bằng các hàm hằng trên từng hình hộp con. Giờ ta làm tương tự nhưng thay vì chỉ dùng hình hộp ta dùng tập đo được. Ta định nghĩa ***tích phân*** của f là

$$\int_\Omega f\, d\mu = \sup\left\{\sum_{i=1}^k c_i\mu(C_i) \mid k \in \mathbb{Z}^+, C_i \in M, c_i \in \mathbb{R}, c_i \le f|_{C_i}\right\}.$$

Đại ý là tích phân được xây dựng bằng cách xấp xỉ dưới bởi các hình hộp mà đáy là các tập đo được. Chú ý rằng giá trị của tích phân có thể là ∞. Hàm f được gọi là ***khả tích*** nếu $\int_\Omega f\, d\mu < \infty$.

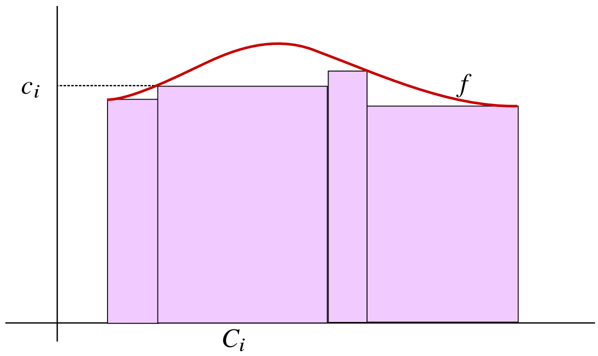
Định nghĩa trên còn có thể được viết hơi khác đi như sau. Gọi S là tập hợp những hàm không âm đo được có hữu hạn giá trị, được gọi là hàm bậc thang, có dạng

$$s = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{C_i}$$

với $C_i = s^{-1}(c_i)$. Định nghĩa $\int_\Omega s\, d\mu = \sum_{i=1}^k c_i\mu(C_i)$. Tích phân của f là

$$\int_\Omega f\, d\mu = \sup\left\{\int_\Omega s\, d\mu \mid s \in S, s \le f\right\}.$$

Có thể diễn đạt là tích phân được xây dựng bằng cách xấp xỉ dưới thông qua hàm bậc thang.



Hình 2.6.4: Xấp xỉ hàm bằng các hàm hằng trên tập đo được.

Cho f là hàm đo được tùy ý, có thể có giá trị âm. Hàm f được gọi là ***khả tích*** nếu $\int_\Omega |f|\, d\mu < \infty$. Đặt $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ và $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ thì đây là những hàm đo được, và $f = f^+ - f^-$. Ta định nghĩa

$$\int_\Omega f\, d\mu = \int_\Omega f^+\, d\mu - \int_\Omega f^-\, d\mu.$$

Tích phân có thể được mở rộng cho hàm có giá trị phức. Nếu $f : \Omega \to \mathbb{C}$ thì ta viết $f = g + ih$ với g và h là hàm giá trị thực, f là đo được khi và chỉ khi g và h đo được, và ta định nghĩa $\int_\Omega f = \int_\Omega g + i \int_\Omega h$.

Tích phân tổng quát có những tích chất như tích phân Riemann, như tính tuyến tính và tính so sánh.

2.6.5 Ví dụ. Tích phân trên không gian đo Lebesgue được gọi là ***tích phân Lebesgue***.

2.6.6 Ví dụ. Một hàm khả tích Riemann thì khả tích Lebesgue và khi đó tích phân Lebesgue có cùng giá trị với tích phân Riemann. Đặc biệt, các hàm liên tục đều khả tích Riemann nên đều khả tích Lebesgue.

2.6.7 Ví dụ. Với μ là độ đo đếm trên Ω, nếu $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ là hàm không âm thì từ định nghĩa của tích phân có thể thấy

$$\int_E \varphi\, d\mu = \sup\left\{\sum_{e\in F} \varphi(e) \mid F \subset E, |F| < \infty\right\}.$$

Đặc biệt, nếu $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ là tập hữu hạn có n phần tử thì $\int_\Omega \varphi\, d\mu = \sum_{i=1}^n \varphi(i)$, chính là tổng của hữu hạn số thực. Nếu $\Omega = \mathbb{Z}^+$ thì có thể thấy $\int_\Omega \varphi\, d\mu = \sum_{i=1}^\infty \varphi(i)$, chính là tổng của chuỗi số thực, nên ***tích phân là tổng quát hóa của tổng***.

Tích phân tổng quát có những tính chất quan trọng liên quan tới việc qua giới hạn mà tích phân Riemann không có, như kết quả sau:

2.6.8 Định lý (Định lý hội tụ bị chặn). *Cho $(f_m)_m$ là một dãy hàm số đo được hội tụ từng điểm về một hàm f. Nếu dãy hàm $(f_m)_m$ bị chặn từng điểm bởi một hàm khả tích, cụ thể là có g khả tích sao cho $\forall x, \forall m, |f_m(x)| \le g(x)$, thì f khả tích và dãy các tích phân của f_m hội tụ về tích phân của f.*

Chi tiết của lý thuyết độ đo và tích phân tổng quát tương đối phức tạp và đồ sộ so với trình độ chung của người học ở các năm đầu đại học, tuy nhiên trong môn học này chúng ta chỉ dùng một số tính chất căn bản trên của tích phân tổng quát, và cũng chỉ thường tính tích phân của các hàm một biến thực liên tục nên vẫn chỉ là tính tích phân Riemann. Vì vậy người học hãy mạnh dạn làm việc với tích phân mà không cần đợi học một cách có hệ thống về tích phân tổng quát.

Định nghĩa các không gian L^p

Cho (Ω, μ) là một không gian đo. Với $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, và $p \in [1, \infty)$, đặt

$$\boxed{L^p(\Omega, \mu) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{F} \mid \int_\Omega |f|^p \, d\mu < \infty \right\}.}$$

Nếu $f \in L^p(\Omega, \mu)$, $p \in [1, \infty)$, đặt

$$\boxed{\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.}$$

Một tính chất được gọi là đúng ***hầu khắp*** (hầu như khắp nơi) nếu tính chất đó đúng trên một tập con nào đó mà phần bù có độ đo không, nói cách khác tập hợp những phần tử ở đó tính chất không đúng chứa trong một tập có độ đo không.

Đặt

$$\boxed{L^\infty(\Omega, \mu) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{F} \text{ đo được} \mid \exists C > 0, |f(x)| \le C \text{ hầu khắp trên } \Omega \right\}.}$$

Nếu $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$ đặt

$$\boxed{\|f\|_\infty = \inf \left\{ C > 0 \mid |f(x)| \le C \text{ hầu khắp trên } \Omega \right\}.}$$

2.6.9 Ví dụ. Nếu $\Omega = [0, 1]$, μ là độ đo Lebesgue, và f là liên tục, thì $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0, 1]\}$, chính là chuẩn sup của hàm liên tục, xem Bài tập 2.8.40.

Ta có hai bất đẳng thức cơ bản sau ([Rud2, tr. 63], [TQTT11, tr. 86]):

2.6.10 Mệnh đề (Bất đẳng thức Hölder). *Cho $f \in L^p(\Omega, \mu)$, $g \in L^q(\Omega, \mu)$, với $1 \le p \le \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ta có $fg \in L^1(\Omega, \mu)$ và*

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q.$$

2.6.11 Ví dụ. Bất đẳng thức Bunyakowsky quen thuộc cho các số thực là một trường trường hợp riêng của Bất đẳng thức Hölder, khi $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$, μ là độ đo đếm, $p = 2$, $q = 2$.

2.6.12 Mệnh đề (Bất đẳng thức Minkowski). *Cho $f, g \in L^p(\Omega, \mu)$, với $1 \le p \le \infty$. Ta có $f + g \in L^p(\Omega, \mu)$ và*

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

2.6.13 Ví dụ. Các bất đẳng thức Minkowski cho các bộ số ở (2.2.3) và (2.4.4) là các trường hợp riêng, khi $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$, hoặc $\Omega = \mathbb{Z}^+$, và μ là độ đo đếm.

Ta thấy bất đẳng thức Minkowski chính là bất đẳng thức tam giác cho chuẩn. Tuy nhiên $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$ hầu khắp, do đó ta chưa thực sự có một chuẩn.

2.6.14 Ví dụ. Ta biết rõ trong tích phân Riemann [VGt3] hàm

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1, x \ne \frac{1}{2}, \\ 1, & x = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

có tích phân Riemann bằng 0, do đó tích phân Lebesgue của hàm này cũng bằng 0, mặc dù hàm này không bằng hàm 0.

Để $\|\cdot\|_p$ trên là một chuẩn cần xét các lớp tương đương các hàm dưới quan hệ

$$f \sim g \iff f = g \text{ hầu khắp.}$$

Có thể kiểm được dưới quan hệ tương đương này thì các cấu trúc trên khiến $L^p(\Omega, \mu)$ trở thành một không gian định chuẩn hẳn hoi. Như vậy ta lưu ý là ***phần tử của không gian định chuẩn L^p là lớp tương đương của hàm chứ không phải hàm***. Mặc dù vậy để đơn giản hơn trong trình bày người ta thường bỏ qua kí hiệu lớp tương đương, chỉ viết vắn tắt như "hàm $f \in L^p \dots$" ngầm ý rằng hàm f đại diện cho một lớp tương đương các hàm mà lớp tương đương đó là một phần tử của L^p.

2.6.15 Ví dụ. Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là một hàm thực liên tục trên đoạn $[a, b]$, tức là $f \in C([a, b])$. Ta biết hàm liên tục trên một đoạn số thực thì khả tích Riemann, nên tích phân Lebesgue của hàm trùng với tích phân Riemann của hàm, do đó $f \in L^p([a, b])$ với mọi $1 \le p < \infty$. Ngoài ra f cũng thuộc $L^\infty([a, b])$ như đã nói ở 2.6.9. Vậy $f \in L^p$ với mọi $1 \le p \le \infty$.

2.6.16 Ví dụ. Chẳng hạn với $f(x) = x, x \in [0, 1]$, thì

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 x^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \le p < \infty$$

$$\|f\|_\infty = \sup\{x \mid x \in [0, 1]\} = 1.$$

Xét hàm

$$g(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1, \\ 2, & x = 1. \end{cases}$$

Hàm g bằng hàm f hầu khắp (chỉ trừ tại $x = 1$), nên $\|g\|_p = \|f\|_p$ với mọi $1 \le p \le \infty$.

2.6.17 Ví dụ ($\ell^p(E)$)**.** Với μ là độ đo đếm trên E thì $L^p(E, \mu)$ thường được kí hiệu là $\ell^p(E)$. Nếu $\varphi : E \to \mathbb{F}$ thì $\varphi \in \ell^p(E)$ khi và chỉ khi

$$\int_E |\varphi|^p \, d\mu = \sup_{F \subset E, |F| < \infty} \sum_{e \in F} |\varphi(e)|^p < \infty.$$

Nếu E là một tập vô hạn đếm được, tức có song ánh với $\mathbb{Z}^+$, thì $\ell^p(E)$ đơn giản là

ℓ^p. Thực vậy cho $1 \leq p < \infty$, nếu $x \in \ell^p(\mathbb{Z}^+)$ thì có thể thấy

$$\|x\|^p = \sup_{F \subset \mathbb{N}, |F| < \infty} \sum_{n \in F} |x(n)|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p.$$

Tương tự $\ell^\infty(\mathbb{Z}^+)$ là không gian các dãy số bị chặn.

Nếu E là tập hữu hạn với n phần tử thì $\ell^p(E)$ chính là $\mathbb{F}^n$ với chuẩn $\|\cdot\|_p$.

2.6.18 Định lý. *Các không gian L^p với $1 \leq p \leq \infty$ là các không gian Banach.*

Chứng minh. Xét trường hợp $p = \infty$. Ta làm tương tự như chứng minh không gian $B(S, \mathbb{F})$ là không gian Banach ở Mệnh đề 2.5.6, chỉ có một điều chỉnh nhỏ do tính hầu khắp.

Cho $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ là một dãy Cauchy trong $L^\infty(\Omega)$. Cho $\epsilon > 0$, có $N \in \mathbb{N}$ sao cho $m \geq N, n \geq N$ thì $\|f_m - f_n\|_\infty < \epsilon$, do đó $|f_m(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$ với mọi $x \in \Omega \setminus C_{m,n}$ với $C_{m,n}$ là một tập có độ đo không. Đặt $C = \bigcup_{m,n} C_{m,n}$ thì C là hội của một họ đếm được các tập có độ đo không, nên cũng là một tập có độ đo không. Với mỗi $x \in \Omega \setminus C$, dãy $(f_n(x))_{n \in \mathbb{Z}^+}$ là một dãy Cauchy trong $\mathbb{F}$, do đó hội tụ về một giới hạn duy nhất mà ta đặt là $f(x)$. Đặt $f = 0$ trên C.

Với $x \in \Omega \setminus C$, cố định n và cho $m \to \infty$ trong bất đẳng thức $|f_m(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$, ta được $|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$. Vậy với mọi $\epsilon > 0$ có $N \in \mathbb{N}$ sao cho $n \geq N$ thì $\|f - f_n\|_\infty \leq \epsilon$. Suy ra $(f_n - f) \in L^\infty(\Omega)$, do đó $f = (f - f_n) + f_n \in L^\infty(\Omega)$. Ta kết luận $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ hội tụ trong $L^\infty(\Omega)$ về f.

Trường hợp $p < \infty$ khó hơn, có ở [Rud2, tr. 67], [Bre11, tr. 93], [TQTT11, tr. 89]. □

Dưới đây là một kết quả về sự dày đặc của hàm liên tục trong không gian L^p. Ta nói một hàm $f : \Omega \to \mathbb{F}$ là ***có giá compắc*** (compact support) nếu bao đóng của tập hợp các điểm tại đó giá trị hàm khác 0, tức là $\mathrm{cl}(\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\})$, chứa trong một tập compắc. Tập hợp tất cả các hàm $f : \Omega \to \mathbb{F}$ có giá compắc được kí hiệu là $C_c(\Omega)$.

2.6.19 Ví dụ. Vì đoạn $[0, 1]$ đã compắc nên bất kì hàm liên tục nào trên $[0, 1]$ cũng có giá compắc, do đó $C_c([0, 1]) = C([0, 1])$.

2.6.20 Ví dụ. $C_c(\mathbb{Z}^+, \mathbb{F})$ chính là tập hợp các dãy số thực bằng 0 từ một số hạng nào đó trở đi, vì mọi ánh xạ từ $\mathbb{Z}^+$ đều liên tục, và tập compắc trên $\mathbb{Z}^+$ là tập bị chặn. Tập này thường được kí hiệu là c_c, xem Bài tập 2.8.18.

2.6.21 Ví dụ. Nếu Ω là một không gian mêtríc thì hàm có giá compắc đồng nghĩa với hàm bằng 0 bên ngoài một tập compắc. Điều này là do tập con compắc của không gian mêtríc thì đóng.

2.6.22 Định lý. *Cho Ω là một tập mở trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ và μ là độ đo Lebesgue trên Ω, thì $C_c(\Omega)$ dày đặc trong $L^p(\Omega, \mu)$ với $1 \leq p < \infty$.*

Chứng minh của định lý trên có ở [Bre11, tr. 109] và [Rud2, tr. 69].

2.6.23 Ví dụ. $C([0,1])$ dày đặc trong $L^p([0,1])$ với $1 \leq p < \infty$.

2.6.24 Ví dụ. Ở Bài tập 2.8.18 ta kiểm trường hợp riêng c_c dày đặc trong ℓ^p với $1 \leq p < \infty$.

2.7 * Các đề tài khác

Toán tử tích phân

2.7.1 Mệnh đề. *Cho A là một tập con compắc trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ và g là một ánh xạ liên tục từ $A \times \mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$. Đặt $E = C(A, \mathbb{R})$ – không gian các ánh xạ liên tục từ A vào $\mathbb{R}$ với chuẩn $\|x\| = \sup_{t \in A} |x(t)|$. Cho a là một phần tử trong E. Với $(t, x) \in A \times E$, đặt*

$$f(x)(t) = a(t) + \int_A g(t, x(s))\, ds.$$

Ở đây tích phân cần được hiểu là tích phân Lebesgue (nếu thay A bằng một hình hộp thì có thể dùng tích phân Riemann). Ta có f là một ánh xạ liên tục từ E vào E.

Chứng minh. Trước hết ta cần kiểm f được định nghĩa tốt, cụ thể là kiểm $f(x)(t)$ là một số thực, và $f(x)$ liên tục theo t tức $f(x) \in E$.

Hàm liên tục trên tập compắc trong $\mathbb{R}^n$ thì khả tích Lebesgue (nhưng không nhất thiết khả tích Riemann), do đó $f(x)(t)$ là một số thực.

Để kiểm tra tính liên tục của $f(x)$ có thể dùng sự liên tục đều. Vì x liên tục trên A nên tập $x(A) \subset \mathbb{R}$ là compắc, do đó tập $B = A \times x(A) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ là compắc. Vì g liên tục đều trên B nên cho $\epsilon > 0$, có $\delta > 0$ sao cho $\forall u \in B, \forall u' \in B, \|u - u'\| < \delta$ thì $|g(u) - g(u')| < \epsilon$. Như vậy nếu $\|t - t'\| < \delta$ thì $\|(t, x(s)) - (t', x(s))\| = \|t - t'\| < \delta$, do đó $|g(t, x(s)) - g(t', x(s))| < \epsilon$. Suy ra

$$\begin{aligned}
|f(x)(t) - f(x)(t')| &= \left| \int_A (g(t, x(s)) - g(t', x(s))\, ds \right| \\
&\leq \int_A |g(t, x(s)) - g(t', x(s)|\, ds \leq \epsilon |A|.
\end{aligned}$$

(Vì A bị chặn nên độ đo Lebesgue của A là một số thực, không phải là ∞). Vậy $f(x)$ liên tục theo t.

Để kiểm tra tính liên tục của $f(x)$ cũng có thể dùng định lý hội tụ bị chặn Lebesgue như sau. Giả sử t_n hội tụ về t. Hàm g liên tục trên tập compắc $A \times x(A)$ nên bị chặn, do đó có số thực M sao cho $\forall t \in A, \forall s \in A, |g(t, x(s)| \leq M$. Đặt $g_n(s) = g(t_n, x(s))$ thì $\lim_{n\to\infty} g_n(s) = g(t, x(s))$ và $\forall s \in A, |g_n(s)| \leq M$. Áp dụng định lý hội tụ bị chặn Lebesgue cho dãy $(g_n)_n$, ta được

$$\lim_{n\to\infty} \int_A g_n(s)\, ds = \int_A \lim_{n\to\infty} g_n(s)\, ds = \int_A g(t, x(s))\, ds.$$

Vậy
$$\lim_{n\to\infty}\int_A g(t_n,x(s))\,ds = \int_A g(t,x(s))\,ds.$$
Do đó $f(x)$ liên tục theo t.

Giờ ta chứng tỏ f liên tục tại $x\in E$ bất kì. Lý luận này dùng tính liên tục đều, rất giống ở trên nhưng cần có một điều chỉnh. Vì g liên tục đều trên $B = A\times[-\|x\|-1,\|x\|+1]$ nên cho $\epsilon>0$, có $1>\delta>0$ sao cho $\forall u\in B, \forall u'\in B, \|u-u'\|<\delta$ thì $|g(u)-g(u')|<\epsilon$. Như vậy nếu $\|x-x'\|<\delta$ thì $\forall s\in A, \|(x(s)-x'(s)\|<\delta$, do đó $\|(t,x(s))-(t,x'(s))\|<\delta$, và do $(t,x'(s))\in B$ nên dẫn tới $|g(t,x(s))-g(t,x'(s))|<\epsilon$. Suy ra
$$|f(x)(t)-f(x')(t)|\le\int_A |g(t,x(s))-g(t,x'(s))|\;ds\le\epsilon|A|.$$
Điều này dẫn tới $\|f(x)-f(x')\|\le\epsilon|A|$. Vậy f liên tục tại x. □

Tính compắc trong không gian các hàm thực liên tục

Định lý Ascoli, còn được gọi là Định lý Ascoli–Arzela, cho một tiêu chuẩn cho sự compắc trong không gian trong không gian các hàm thực liên tục:

2.7.2 Định lý (Định lý Ascoli). *Cho $A\subset C(X,\mathbb{R})$ với X là một không gian mêtríc compắc. Khi đó $\bar{A}$ là compắc khi và chỉ khi có cả hai điều sau đây:*

(a) A bị chặn từng điểm: $\forall x\in X, \{f(x)\mid f\in A\}$ bị chặn.

 (a) A đồng liên tục (equicontinuous) : $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall f\in A,\forall x\in X,\forall y\in X, \|x-y\|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\epsilon$.

Chứng minh. * Chứng minh này dùng tính tiền compắc và tính compắc qua phủ mở, có chẳng hạn ở [KF75, TQTT11]. Chứng minh với cách viết hơi khác có trong [Ang97, tr. 71], [TQTT11, tr. 79]. Một không gian mêtríc X là tiền compắc (còn được gọi là hoàn toàn bị chặn - totally bounded), khi và chỉ khi với mọi $\epsilon>0$ nó được phủ bởi hữu hạn quả cầu bán kính ϵ, tức là tồn tại $x_i\in X$, $1\le i\le n$, sao cho $\bigcup_{i=1}^n B(x_i,\epsilon)\supset X$. Ta có kết quả: Một không gian mêtríc là compắc khi và chỉ khi nó là tiền compắc và đầy đủ; và một không gian mêtríc là compắc khi và chỉ khi mọi phủ mở có một phủ con hữu hạn.

($\Rightarrow$) Vì A bị chặn nên bị chặn từng điểm.

Ta xét tính đồng liên tục. Vì $\bar{A}$ compắc nên là tiền compắc, dẫn tới $\forall\epsilon>0$ có $f_i\in C_i(X,\mathbb{R})$, $1\le i\le n$ sao cho $\bigcup_{i=1}^n B(f_i,\epsilon)\supset A$. Suy ra với mọi $f\in A$ có i sao cho $\|f-f_i\|<\epsilon$. Vì X compắc nên với mỗi i hàm f_i là liên tục đều, do đó $\exists\delta_i>0, \|x-y\|<\delta_i\Rightarrow|f_i(x)-f_i(y)|<\epsilon$. Lấy $\delta=\min\{\delta_i\mid 1\le i\le n\}$. Khi đó nếu $\|x-y\|<\delta$ thì
$$|f(x)-f(y)|\le|f(x)-f_i(x)|+|f_i(x)-f_i(y)|+|f_i(y)-f(y)|<3\epsilon.$$

Vậy A là đồng liên tục.

($\Leftarrow$) Vì $\bar{A}$ đóng trong $C(X, \mathbb{R}, \|\|_\infty)$ nên $\bar{A}$ là đầy đủ. Do đó chỉ cần chứng minh $\bar{A}$ là tiền compắc.

Cho $\epsilon > 0$. Vì A là đồng liên tục nên $\exists\delta > 0, \forall f \in A, \|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$. Họ các quả cầu $B(x, \delta)$ phủ X, do đó có phủ con hữu hạn $\{B(x_i, \delta) \mid 1 \leq i \leq m\}$. Tập $Y = \bigcup_{i=1}^m \{f(x_i) \mid f \in A\}$ bị chặn do tính bị chặn từng điểm của A, nên tồn tại một họ hữu hạn các khoảng mở $B(a_j, \epsilon), a_j \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq n$ phủ Y. Cho $f \in A$, với mỗi i, vì $f(x_i) \in Y$ nên tồn tại j sao cho $f(x_i) \in B(a_j, \epsilon)$. Gọi S là tập hợp tất cả các ánh xạ từ tập $\{1, 2, \ldots, m\}$ vào tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ thì họ hữu hạn gồm các tập $\Phi_\sigma = \{f \in A \mid f(x_i) \in B(a_{\sigma(i)}, \epsilon), 1 \leq i \leq m\}, \sigma \in S$ phủ A.

Nếu $f, g \in \Phi_\sigma$ thì với mỗi $x \in X$ có i sao cho $x \in B(x_i, \delta)$, nên

$$|f(x)-g(x)| \leq |f(x)-f(x_i)|+|f(x_i)-a_{\sigma(i)}|+|a_{\sigma(i)}-g(x_i)|+|g(x_i)-g(x)| < 4\epsilon.$$

Vậy Φ_σ chứa trong một quả cầu tâm thuộc A với bán kính 4ϵ. Họ các quả cầu này phủ A. Vậy A là tiền compắc. Điều này dẫn tới $\bar{A}$ là tiền compắc. □

Định lý Stone–Weierstrass

Tập $A \subset C(K, \mathbb{R})$ được gọi là một đại số con (của $C(K, \mathbb{R})$) khi $f + g, fg, \alpha f \in A$, với mọi $f, g \in A$, $\alpha \in \mathbb{R}$, và được gọi là tách các điểm của K khi với mọi $x, y \in K$, nếu $x \neq y$ thì tồn tại $f \in A$ sao cho $f(x) \neq f(y)$.

2.7.3 Định lý (Định lý Stone–Weierstrass). *Cho K là một không gian mêtríc compắc và $A \subset C(K, \mathbb{R})$ là một đại số con. Nếu A tách các điểm của K và chứa các hàm hằng thì A dày đặc trong $C(K, \mathbb{R})$.*

Chứng minh có trong [TQTT11].

Do tập hợp tất cả các đa thức theo n biến là một đại số con, chứa các hàm hằng và tách mọi điểm của $\mathbb{R}^n$, ta được:

2.7.4 Hệ quả. *Một hàm số liên tục xác định trên tập con compắc của $\mathbb{R}^n$ bất kì được xấp xỉ đều bằng các đa thức n biến.*

2.8 Bài tập

2.8.1. Trong một không gian định chuẩn chứng minh rằng $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\|$.

2.8.2. ✓ Cho (x_n) và (y_n) là hai dãy lần lượt hội tụ về x và y trong một không gian định chuẩn $(E, \|\cdot\|)$, và cho α thuộc $\mathbb{F}$. Chứng minh:

(a) Dãy (x_n) chỉ có một giới hạn.

(b) Dãy $(x_n + y_n)$ hội tụ về $x + y$.

(c) Dãy (αx_n) hội tụ về αx.

2.8.3. Chứng tỏ bao đóng của một không gian vectơ con của một không gian định chuẩn vẫn là một không gian vectơ con. Cụ thể hơn, nếu M là một không gian vectơ con của không gian định chuẩn E thì bao đóng $\overline{M}$ cũng là một không gian vectơ con của E.

2.8.4. ✓ Cho $(E, \|\cdot\|)$ là một không gian định chuẩn. Chứng minh rằng ánh xạ $h(x) = \|x\|$ liên tục trên E.

2.8.5. ✓ Với $a \in X$ xét toán tử tịnh tiến $x \mapsto x + a$, và với $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ xét toán tử co dãn (vị tự) $x \mapsto \alpha x$. Chứng minh phép tịnh tiến và phép vị tự là các phép đồng phôi từ một không gian định chuẩn lên chính nó.

2.8.6. Cho $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Đặt $\|(x, y)\| = \sqrt{2x^2 + 3y^2}$. Đây có là một chuẩn trên $\mathbb{R}^2$ không?

2.8.7. Cho $\|\cdot\|_1$ là một chuẩn trên không gian vectơ X. Chứng tỏ với mọi số thực dương α thì $\|x\|_2 = \alpha\|x\|_1$ cũng là một chuẩn trên X. Chứng tỏ hai chuẩn này tương đương nhau.

2.8.8. * Chứng minh rằng hai chuẩn trên một không gian vectơ là tương đương khi và chỉ khi một tập là mở trong chuẩn này thì mở trong chuẩn kia.

2.8.9 (mêtric và chuẩn). Cho không gian vectơ X trên trường $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

(a) Giả sử X có một chuẩn kí hiệu là $\|\cdot\|$. Chứng tỏ nếu ta đặt $d(x, y) = \|x - y\|$ thì đây là một mêtríc trên X. Vậy chuẩn sinh ra mêtríc. Chứng tỏ mêtríc d này thỏa, với mọi x, y, z thuộc X, với mọi $\alpha \in \mathbb{F}$:

$$\begin{cases} d(x+z, y+z) & = & d(x, y) \\ d(\alpha x, \alpha y) & = & |\alpha| d(x, y). \end{cases} \tag{2.8.10}$$

(b) Ngược lại, giả sử X có mêtríc d thỏa (2.8.10). Chứng tỏ nếu ta đặt $\|x\| = d(x, 0)$ thì đây là một chuẩn trên X. Vậy mêtríc thỏa (2.8.10) sinh ra chuẩn. Chứng tỏ ta lại có $d(x, y) = \|x - y\|$.

2.8.11. (a) Kiểm ánh xạ f ở 2.3.3 là một phép đồng phôi từ $(X, \|\cdot\|)$ sang $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_{\mathbb{F}^n})$.

(b) Chứng tỏ hai không gian định chuẩn ứng với hai chuẩn trên cùng không gian vectơ $\mathbb{F}^n$ là đồng phôi với nhau qua ánh xạ đồng nhất.

(c) Kết luận các không gian định chuẩn hữu hạn chiều trên cùng một trường mà có cùng số chiều thì đẳng cấu tôpô với nhau.

2.8.12. Chứng tỏ trên một không gian Banach chuỗi hội tụ tuyệt đối thì hội tụ. Cụ thể hơn, cho $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ là dãy trong một không gian Banach, chứng tỏ nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ hội tụ.

2.8.13. Cho dãy $x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right)$. Tính $\|x\|_1$, $\|x\|_2$, $\|x\|_\infty$, và $\|x\|_p$ với $1 \le p < \infty$.

2.8.14. Trong không gian ℓ^2:

(a) Cho $x_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, 0, \dots)$. Kiểm $x_n \in \ell^2$. Tính $\|x_n\|$.

(b) Cho $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$. Kiểm $x \in \ell^2$. Tính $\|x\|$.

(c) Tính $\|x_n - x\|$.

(d) Hãy chứng tỏ dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ về x trong ℓ^2.

2.8.15. Chứng tỏ $\ell^1 \subsetneq \ell^2 \subsetneq \ell^\infty$.

2.8.16. Cho $1 \le p < q \le \infty$. Chứng tỏ $\ell^p \subsetneq \ell^q$.

2.8.17. Cho $1 \le p < q \le \infty$. Cho $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+} \in \ell^p$, $x \neq 0$.

(a) Đặt $y = \frac{x}{\|x\|_p}$. Chứng tỏ $|y_n| \le 1$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(b) Suy ra $\|y\|_q \le \|y\|_p$.

(c) Chứng tỏ với mọi $x \in \ell^p$ thì $x \in \ell^q$ và $\|x\|_q \le \|x\|_p$.

2.8.18. ✓ Đặt c_c là tập hợp tất cả các dãy $x = (x_n)$ trong $\mathbb{F}$ sao cho có một số nguyên $N(x)$ để cho $x_n = 0$ với mọi $n \ge N(x)$, xem Ví dụ 2.6.20.

(a) Chứng minh $(c_c, \|\cdot\|_i)$ là các không gian con vô hạn chiều của ℓ^p với $1 \le p \le \infty$.

(b) Từ đó suy ra ℓ^p với $1 \le p \le \infty$ là không gian vectơ vô hạn chiều.

(c) Chứng minh tập c_c là dày đặc (trù mật) trong ℓ^p với $1 \le p < \infty$.

(d) Tập c_c có dày đặc trong ℓ^∞ hay không?

2.8.19. Trong ℓ^∞ xét $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, trong đó số 1 nằm ở vị trí thứ n. Chứng tỏ dãy $(e_n)_{n\ge1}$ không có dãy con hội tụ. Suy ra quả cầu $B'(0,1)$ không compắc.

Không gian các hàm liên tục

2.8.20. Kiểm các hàm sau có thuộc không gian $C([0,1],\mathbb{R})$, không gian định chuẩn các hàm liên tục từ $[0,1]$ vào $\mathbb{R}$ với chuẩn $\|f\| = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$, hay không. Nếu có hãy tính chuẩn của chúng.

(a) $f(x) = x$.

(b) $f(x) = e^x$.

(c) $f(x) = \ln x$.

(d) $f(x) = \sin x$.

(e) $f(x) = \arccos x$.

(f) $f(x) = x^2 - x - 1$.

2.8.21. Trong không gian $C([0,1],\mathbb{R})$ hãy kiểm họ các hàm $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots\}$ là độc lập tuyến tính. Từ đó hãy rút ra tập hợp các đa thức một biến tạo thành một không gian tuyến tính vô hạn chiều, và không gian tuyến tính $C([0,1],\mathbb{R})$ cũng vô hạn chiều.

2.8.22. Xét $X = C([0,1],\mathbb{R})$, không gian định chuẩn các hàm liên tục từ $[0,1]$ vào $\mathbb{R}$ với chuẩn $\|f\| = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$. Đặt $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$. Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ có hội tụ từng điểm hay không? Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ có hội tụ trong X hay không?

2.8.23. Xét không gian định chuẩn $C([-1,1],\mathbb{R})$ với chuẩn sup. Với $n \in \mathbb{Z}^+$ và $x \in [-1,1]$, cho

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + n^2x^2}.$$

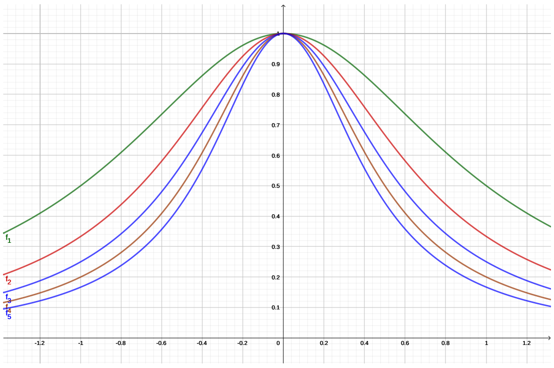
Trong hình dưới đây có đồ thị của f_n với $1 \le n \le 5$.

(a) Hãy kiểm $f_n \in C([-1,1],\mathbb{R})$.

(b) Hãy tính $\|f_n\|$.

(c) Tìm giới hạn từng điểm của dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$, tức là tìm hàm f sao cho với $x \in [-1,1]$, thì $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

(d) $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ có hội tụ trong $C([-1,1],\mathbb{R})$ hay không?



2.8.24. Tìm giới hạn từng điểm và giới hạn của các dãy hàm $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ sau trong không gian $C([a,b])$.

(a) $f_n(x) = x^n, 0 \le x \le \frac{1}{2}$.

(b) $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}, -2 \le x \le 2$.

(c) $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}, 0 \le x \le 1$.

(d) $f_n(x) = \frac{nx}{e^{nx}}, 1 \le x \le 2$.

2.8.25. Cho $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, 0 \le x \le 1$.

(a) Tìm giới hạn từng điểm của dãy hàm $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$.

(b) Hãy tính $\lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{1}{n}\right)$.

(c) Hãy giải thích vì sao dãy hàm $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ không hội tụ trong không gian $C([0,1])$.

2.8.26. Cho $f_n(x) = \frac{\sqrt{n}x}{1+nx+n^2x^3}, 0 \le x \le 1$.

(a) Tìm giới hạn từng điểm của dãy hàm $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$.

(b) Hãy tính $\lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

(c) Hãy giải thích vì sao dãy hàm $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ không hội tụ trong không gian $C([0,1])$.

2.8.27. Cho $f_n(x) = \frac{nx}{e^{nx}}, 0 \le x \le 1$.

(a) Tìm giới hạn từng điểm của dãy hàm $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$.

(b) Hãy tính $\lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{1}{n}\right)$.

(c) Hãy giải thích vì sao dãy hàm $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ không hội tụ trong không gian $C([0,1])$.

2.8.28. ✓ Kiểm tập hợp tất cả các hàm liên tục từ $[0,1]$ vào $\mathbb{R}$ với với $\|f\| = \int_0^1 |f|$ là một không gian định chuẩn.

2.8.29. ✓ Xét $X = C([0,1],\mathbb{R})$, không gian các hàm liên tục từ $[0,1]$ vào $\mathbb{R}$ với chuẩn $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$. Đặt $M = \{f \in X \mid f(0) = 0\}$.

(a) Chứng tỏ M là một không gian vectơ con của X.

(b) Cho ví dụ hai phần tử độc lập tuyến tính của M.

(c) Chứng tỏ M là một tập con đóng của X.

(d) Chứng tỏ với chuẩn thừa hưởng từ X thì M là một không gian Banach.

(e) Với chuẩn $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$ thì M có là một không gian Banach không?

(f) M là không gian vectơ hữu hạn chiều hay vô hạn chiều?

2.8.30. ✓ Xét X là không gian vectơ các hàm liên tục từ $[0,1]$ vào $\mathbb{R}$. Xét chuẩn $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ và $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$.

(a) Chứng minh rằng với mọi $f \in X$ thì $\|f\|_1 \le \|f\|_\infty$.

(b) Suy ra mọi dãy hội tụ theo chuẩn $\|\cdot\|_\infty$ thì cũng hội tụ theo chuẩn $\|\cdot\|_1$, mọi dãy Cauchy theo chuẩn $\|\cdot\|_\infty$ cũng là dãy Cauchy theo chuẩn $\|\cdot\|_1$.

(c) Giải thích tại sao hai chuẩn $\|\cdot\|_1$ và $\|\cdot\|_\infty$ không tương đương với nhau.

2.8.31. Xét X là không gian vectơ các hàm liên tục từ $[0,1]$ vào $\mathbb{R}$. Xét chuẩn $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$, $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$, và $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$. Với $n \in \mathbb{Z}^+$, $x \in [0,1]$, đặt $f_n(x) = x^n$.

(a) Vẽ đồ thị của f_n. Đồ thị thay đổi như thế nào khi n thay đổi?

(b) Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ có hội tụ theo chuẩn $\|\cdot\|_\infty$ hay không?

(c) Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ có hội tụ theo chuẩn $\|\cdot\|_1$ hay không?

(d) Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ có hội tụ theo chuẩn $\|\cdot\|_2$ hay không?

(e) Sự hội tụ theo chuẩn $\|\cdot\|_1$ hay chuẩn $\|\cdot\|_2$ có dẫn tới sự hội tụ từng điểm hay không?

2.8.32. Cho X là không gian vectơ các hàm số liên tục trên $[0,1]$. Trên X xét chuẩn

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$$

và chuẩn

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Với $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$, cho

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{nx}}}.$$

(a) Chứng tỏ $f_n \in X$. Vẽ phác họa đồ thị của f_n với $n = 0, 1, 2$.

(b) Tính $\|f_n\|_\infty$.

(c) Tìm giới hạn từng điểm của dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tức là với $x \in [0,1]$, hãy tìm $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Hàm f có thuộc X hay không?

(d) Chứng tỏ nếu dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ trong $(X, \|\cdot\|_\infty)$ về $g \in X$ (hội tụ đều) thì phải hội tụ từng điểm về g, tức là $\forall x \in [0,1]$ thì $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$.

(e) Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ có hội tụ trong $(X, \|\cdot\|_\infty)$ hay không?

(f) Tính $\|f_n\|_2$.

(g) Tính $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2$.

(h) Chứng tỏ dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ trong $(X, \|\cdot\|_2)$ về 0.

(i) Chứng minh rằng một dãy bất kỳ $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ về h trong $(X, \|\cdot\|_\infty)$ thì cũng hội tụ về h trong $(X, \|\cdot\|_2)$.

(j) Giải thích vì sao hai chuẩn $\|\cdot\|_\infty$ và $\|\cdot\|_2$ không tương đương trên X.

2.8.33. Câu hỏi như trong Bài tập 2.8.32 cho hàm

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx}.$$

2.8.34. Cho X là không gian vectơ các hàm số liên tục trên $[0,1]$. Trên X xét chuẩn

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$$

và chuẩn

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Với $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$, cho

$$f_n(x) = \frac{1}{1+e^{-nx}}.$$

(a) Vẽ phác họa đồ thị của f_n với $n = 0, 1, 2$.

(b) Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ có hội tụ trong $(X, \|\cdot\|_\infty)$ hay không?

(c) Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ có hội tụ trong $(X, \|\cdot\|_2)$ hay không?

2.8.35. Xét $C([0,1],\mathbb{R})$, không gian định chuẩn các hàm liên tục từ $[0,1]$ vào $\mathbb{R}$ với chuẩn $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$. Xét $C^1([0,1],\mathbb{R})$ là tập hợp các hàm từ $[0,1]$ vào $\mathbb{R}$ khả vi liên tục. Ở đây đạo hàm tại 0 và 1 được hiểu là đạo hàm một phía.

(a) Hãy kiểm $C^1([0,1],\mathbb{R})$ là một không gian định chuẩn con của $C([0,1],\mathbb{R})$.

(b) Chứng tỏ nếu một dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ trong $C^1([0,1],\mathbb{R})$ hội tụ về $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ thì với mỗi $x \in [0,1]$ dãy $(f_n(x))_{n\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ về $f(x)$.

(c) Với $n \in \mathbb{Z}^+$, đặt

$$f_n(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|^{\frac{n+1}{n}}.$$

Hãy kiểm $f_n \in C^1([0,1],\mathbb{R})$.

(d) Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ trên có hội tụ trong $C([0,1],\mathbb{R})$ hay không?

(e) Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ trên có hội tụ trong $C^1([0,1],\mathbb{R})$ hay không?

(f) $C^1([0,1],\mathbb{R})$ có phải là một tập con đóng của $C([0,1],\mathbb{R})$ hay không?

(g) $C^1([0,1],\mathbb{R})$ có phải là một không gian Banach không?

(h) $C^1([0,1],\mathbb{R})$ là không gian vectơ hữu hạn chiều hay vô hạn chiều?

(i) Với chuẩn $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$ thì $C^1([0,1],\mathbb{R})$ có là một không gian Banach không?

2.8.36. Xét $C^1([0,1],\mathbb{R})$ là tập hợp các hàm từ $[0,1]$ vào $\mathbb{R}$ khả vi liên tục. Ở đây đạo hàm tại 0 và 1 được hiểu là đạo hàm một phía. Với $f \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ đặt

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty .$$

(a) Hãy kiểm đây là một chuẩn trên $C^1([0,1],\mathbb{R})$. Trong phần còn lại của bài toán ta xét $C^1([0,1],\mathbb{R})$ với chuẩn này.

(b) Giả sử $(x_n)_n$ là một dãy Cauchy trong không gian định chuẩn $C^1([0,1],\mathbb{R})$. Chứng tỏ tồn tại $x \in C([0,1],\mathbb{R})$ và $y \in C([0,1],\mathbb{R})$ sao cho $x_n \to x$ và $x'_n \to y$ trong $C([0,1],\mathbb{R})$.

(c) Dùng Định lý cơ bản của Vi tích phân,

$$x_n(t) = x_n(0) + \int_0^t x'_n(s)\, ds,$$

hãy chứng tỏ là $y = x'$.

(d) Hãy chứng tỏ là dãy $(x_n)_n$ hội tụ trong $C^1([0,1],\mathbb{R})$. Vậy $C^1([0,1],\mathbb{R})$ là một không gian Banach.

2.8.37. * Giả sử với $n \in \mathbb{Z}^+$ ta có $f_n \in C([0,1])$, $f_{n+1} \le f_n$, và $\forall x \in [0,1], \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Chứng tỏ $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$. Nói cách khác một dãy hàm thực liên tục trên một đoạn hội tụ giảm từng điểm về 0 thì hội tụ về 0.

Không gian L^p

2.8.38. Cho

$$f_n(x) = n^{\frac{1}{p}} e^{-nx}, n \in \mathbb{Z}^+, p \ge 1, 0 \le x \le 1.$$

(a) Kiểm $f_n(x) \overset{n\to\infty}{\to} 0$ hầu khắp.

(b) Chứng tỏ f_n không hội tụ về 0 trong $L^p([0,1])$.

2.8.39. Cho $f \in L^\infty(\Omega,\mu)$, ta chứng minh

$$|f(x)| \le \|f\|_\infty \text{ hầu khắp.}$$

(a) Đặt $D = \{C > 0 \mid |f(x)| \le C \text{ hầu khắp trên } \Omega\}$. Lấy dãy $C_n \in D$, $n \in \mathbb{Z}^+$, hội tụ về $\inf D$. Đặt $E_n = \{x \in \Omega \mid |f(x)| > C_n\}$ và $E = \{x \in \Omega \mid |f(x)| > \inf D\}$. Chứng tỏ $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$.

(b) Suy ra $\mu(E) = 0$, và suy ra đánh giá trên.

(c) Chứng tỏ $\inf D \in D$, tức là

$$\|f\|_\infty = \min\left\{C > 0 \mid |f(x)| \le C \text{ hầu khắp trên } \Omega\right\},$$

Vậy $\|f\|_\infty$ chính là chặn trên hầu khắp nhỏ nhất của $|f|$.

2.8.40. Ta kiểm 2.6.9. Cho $\Omega = [0,1]$, μ là độ đo Lebesgue, và f là liên tục, ta chứng minh

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}.$$

(a) Chứng tỏ $|f(x)| \leq C$ xảy ra hầu khắp khi và chỉ khi điều đó xảy ra với mọi x.

(b) Đặt $A = \{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$ và D là tập hợp các chặn trên của A. Chứng tỏ $\|f\|_\infty = \min D = \sup A$.

(c) Có thể mở rộng kết quả này cho các không gian đo Ω nào khác?

2.8.41. Giả sử $\mu(\Omega) < \infty$. Chứng tỏ $L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$.

2.8.42. * Giả sử $\mu(\Omega) < \infty$. Cho $1 \leq p < q \leq \infty$.

(a) Dùng bất đẳng thức Hölder, chứng tỏ

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q \, \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

(b) Chứng tỏ $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.

Tính compắc trong không gian các hàm thực liên tục

2.8.43. Cho X là một tập compắc trong một không gian định chuẩn $(E, \|\cdot\|)$ và $A = \{f_1, \cdots, f_n\}$ là một tập con hữu hạn của $C(X, \mathbb{R})$. Chứng minh A là đồng liên tục.

2.8.44. Cho M là một tập con bị chặn của không gian $C([0,1], \mathbb{R})$ với chuẩn sup. Xét tập hợp A các nguyên hàm của các phần tử của M có dạng $y(t) = \int_0^t x(s)\, ds$, $x \in M$. Chứng tỏ A có bao đóng compắc trong $C([0,1], \mathbb{R})$.

2.8.45. Cho A là một tập con của tập $C^1([0,1], \mathbb{R})$ trong không gian $C([0,1], \mathbb{R})$ với chuẩn sup thỏa $\forall f \in A, \|f'\|_\infty \leq M$. Chứng tỏ A có bao đóng compắc trong $C([0,1], \mathbb{R})$.

2.8.46. Cho M là một tập con bị chặn của không gian $C([0,1], \mathbb{R})$ với chuẩn sup. Chứng tỏ tập các hàm $y(t) = \int_0^1 e^{tx(s)}\, ds$, $x \in M$, có bao đóng compắc trong $C([0,1], \mathbb{R})$.

2.8.47. Cho X là một không gian mêtríc compắc, cho A là một tập con bị chặn của không gian $C(X, \mathbb{R})$ với chuẩn sup. Giả sử A là đồng Lipschitz, nghĩa là $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in X, \forall y \in X, \forall f \in A, |f(x) - f(y)| \leq M\|x - y\|$. Chứng tỏ mọi dãy trong A có dãy con hội tụ (về một giới hạn không nhất thiết ở trong A).

Các bài toán khác

2.8.48. Gọi $B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ là quả cầu đơn vị trong không gian định chuẩn X.

(a) Chứng tỏ $B(0,1)$ là một tập lồi, nghĩa là với hai điểm x và y bất kì trong $B(0,1)$ thì đoạn thẳng nối x và y là tập $[x, y] = \{(1-\alpha)x + \alpha y \mid \alpha \in [0,1]\}$ nằm trong $B(0,1)$.

(b) Trên $\mathbb{R}^n$, với số thực p, xét

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

Khi $n = 2$, $p = \frac{1}{2}$, hãy vẽ (có thể bằng máy tính) tập $B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_p < 1\}$. Tham khảo Hình 2.2.4.

(c) Trên $\mathbb{R}^n$, chứng tỏ tập $B(0,1)$ là lồi khi và chỉ khi $p \geq 1$.

(d) Trên $\mathbb{R}^n$, giải thích vì sao $\|\cdot\|_p$ *với $p < 1$ không phải là chuẩn*.

2.8.49 (phương pháp điểm bất động cho phương trình vi phân). * Xét phương trình vi phân

$$\begin{cases} y'(t) = \sin y(t), \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{2.8.50}$$

Ở đây y là một hàm số thực trên $\mathbb{R}$.

(a) Chứng tỏ phương trình vi phân trên tương đương với phương trình tích phân sau:

$$y(t) = 1 + \int_0^t \sin y(s)\, ds.$$

(b) Với mỗi hàm số thực liên tục y trên $\mathbb{R}$, đặt $f(y)$ là hàm số thực cho bởi

$$f(y)(t) = 1 + \int_0^t \sin y(s)\, ds.$$

Chứng tỏ f là một ánh xạ được định nghĩa tốt từ tập $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vào chính nó.

(c) Chứng tỏ với $T > 0$ đủ nhỏ thì trên không gian định chuẩn $X = C([0, T], \mathbb{R})$ với chuẩn $\|x\| = \sup_{t\in[0,T]} |x(t)|$ ánh xạ f trở thành một ánh xạ co. Xem Bài tập 1.4.13.

(d) Dùng Định lý ánh xạ co 1.4.13, rút ra f có điểm bất động trên X.

(e) Suy ra phương trình (2.8.50) có nghiệm trên $[0, T]$.

2.8.51. Chứng minh 2.7.4.

Chương 3 Ánh xạ tuyến tính liên tục

Trong môn Đại số tuyến tính ta đã khảo sát ánh xạ tuyến tính trên không gian tuyến tính hữu hạn chiều. Giờ ta khảo sát ánh xạ tuyến tính trên những không gian tuyến tính có thể vô hạn chiều, tập trung vào tính liên tục của các ánh xạ đó.

3.1 Chuẩn của ánh xạ tuyến tính liên tục

Cho E và F là hai không gian vectơ trên cùng một trường $\mathbb{F}$ là $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$. Ánh xạ $T : E \to F$ là một ánh xạ tuyến tính nếu với mọi $x, y \in E$, $\alpha \in \mathbb{F}$,

$$T(x + y) = T(x) + T(y),$$
$$T(\alpha x) = \alpha T(x).$$

Với ánh xạ tuyến tính người ta có thói quen viết $T(x)$ là Tx.

Một hệ quả của tính tuyến tính là luôn có $T0 = 0$.

Ánh xạ tuyến tính là đề tài của môn Đại số tuyến tính. Trong môn Giải tích hàm ta xét sự kết hợp giữa tính tuyến tính và tính liên tục, do sự có mặt của chuẩn. Từ đây ta xét các ánh xạ tuyến tính giữa các không gian định chuẩn.

3.1.1 Mệnh đề. *Ánh xạ tuyến tính liên tục tại một điểm thì liên tục tại mọi điểm.*

Chứng minh. Cho T là tuyến tính liên tục tại x_0. Theo định nghĩa ta có

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|Tx - Tx_0\| < \epsilon.$$

Điều này có thể được viết lại một cách tương đương là

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, \|(x - x_0) - 0\| < \delta \Rightarrow \|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0) - T0\| < \epsilon.$$

Đặt $y = x - x_0$ thì ta được mệnh đề tương đương

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in E, \|y - 0\| < \delta \Rightarrow \|Ty - T0\| < \epsilon.$$

Tức là T là liên tục tại 0. Như vậy liên tục tại một điểm nào đó thì liên tục tại 0, còn liên tục tại 0 dẫn tới liên tục tại một điểm bất kì.

Một cách trình bày khác là dùng dãy. Ánh xạ T liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $(x_n \to x_0) \Rightarrow (Tx_n \to Tx_0)$. Điều này tương đương với $(x_n - x_0 \to 0) \Rightarrow (T(x_n - x_0) \to 0)$. Đặt $y_n = x_n - x_0$ thì điều này tương đương với $(y_n \to 0) \Rightarrow (Ty_n \to T0)$, tức là T là liên tục tại 0. □

Giả sử T là tuyến tính liên tục, do đó liên tục tại 0. Theo định nghĩa ta có

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, \|x - 0\| < \delta \Rightarrow \|Tx - T0\| < \epsilon.$$

Ta viết lại

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, \|x\| < \delta \Rightarrow \|Tx\| < \epsilon.$$

Do đó với $\epsilon > 0$ cho trước và $\delta > 0$ thích hợp thì

$$\forall x \in E, \left\|\frac{x}{\delta}\right\| < 1 \Rightarrow \left\|T\left(\frac{x}{\delta}\right)\right\| < \frac{\epsilon}{\delta}.$$

Đặt $y = x/\delta$ thì ta được

$$\forall y \in E, \|y\| < 1 \Rightarrow \|Ty\| < \frac{\epsilon}{\delta}.$$

Như vậy một ánh xạ tuyến tính liên tục thì bị chặn trên quả cầu đơn vị (mặc dù không bị chặn trên toàn không gian trừ khi đó là ánh xạ 0). Vì vậy một số tài liệu cũng gọi ánh xạ tuyến tính liên tục là ***ánh xạ tuyến tính bị chặn***. Nối tiếp tinh thần của không gian các hàm bị chặn $B(S, X)$ (2.5.4) ta đo một ánh xạ tuyến tính liên tục bằng cách đo độ lớn của tập ảnh của quả cầu đơn vị.

3.1.2 Định nghĩa. Gọi $L(E, F)$ là tập hợp tất cả các ánh xạ tuyến tính liên tục từ E vào F. Với $T \in L(E, F)$ ta đặt

$$\boxed{\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid x \in B(0, 1)\}.}$$

3.1.3 Ghi chú. Ta có thể chọn một quả cầu có bán kính khác 1, nhưng chỉ được một chuẩn tương đương mà thôi, xem 3.8.3.

3.1.4 Bổ đề. *Với $T \in L(E, F)$ thì*

$$\boxed{\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid x \in B'(0, 1)\}.}$$

Chứng minh. Rõ ràng $\|T\| = \sup_{\|x\|<1} \|Tx\| \le \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\|$.

Giả sử $\|x\| = 1$. Có dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ trong $B(0, 1)$ hội tụ về x, chẳng hạn $x_n = \frac{n}{n+1}x$. Suy ra Tx_n hội tụ về Tx, và $\|Tx_n\|$ hội tụ về $\|Tx\|$. Vì $\|Tx_n\| \le \|T\|$ nên qua giới hạn ta được $\|Tx\| \le \|T\|$. Vậy $\sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\| \le \|T\|$. □

Liên quan tới kết quả vừa rồi, chú ý rằng nếu $x \neq 0$ thì

$$Tx = \|x\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \tag{3.1.5}$$

với $\frac{x}{\|x\|}$ là một vectơ có chiều dài bằng 1, do đó ***một ánh xạ tuyến tính được xác định bởi giá trị của nó trên mặt cầu đơn vị***.

3.1.6 Mệnh đề. *Với* $\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid x \in B(0,1)\}$ *thì đây là một chuẩn trên* $L(E,F)$.

Chứng minh. Ta kiểm tra các yêu cầu của chuẩn. Giả sử $\|T\| = 0$. Điều này do Bổ đề 3.1.4 đồng nghĩa với việc giá trị của T bằng 0 trên mặt cầu đơn vị, do đó theo công thức (3.1.5) thì T bằng 0 tại mọi điểm, tức là $T = 0$.

Các tính chất khác đã được kiểm khi ta xét không gian $B(S,X)$ ở 2.5.4. □

3.1.7 Mệnh đề. *Với* $T \in L(E,F)$ *thì*

$$\boxed{\forall x \in E, \|Tx\| \leq \|T\| \|x\|.}$$

Chứng minh. Cho $x \neq 0$. Ta có $\left\|\frac{1}{\|x\|}x\right\| = 1$ nên theo Bổ đề 3.1.4 $\left\|T\left(\frac{1}{\|x\|}x\right)\right\| \leq \|T\|$, do đó $\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$. □

Một hệ quả đơn giản thường được dùng:

3.1.8 Mệnh đề. *Ánh xạ tuyến tính* $T : E \to F$ *là liên tục khi và chỉ khi có* $M \in \mathbb{R}$ *sao cho*

$$\forall x \in E, \|Tx\| \leq M \|x\|.$$

Chứng minh. Nếu $T \in L(E,F)$ thì $\forall x \in E, \|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$. Ngược lại $\forall x \in E, \|Tx\| \leq M\|x\|$ dẫn tới $\lim_{x\to 0} Tx = 0$, do đó T liên tục tại 0, do đó liên tục tại mọi điểm. □

3.2 Tính chuẩn

3.2.1 Mệnh đề. *Giả sử* $E \neq \{0\}$. *Với* $T \in L(E,F)$ *thì:*

$$\boxed{\|T\| = \sup_{\|x\|<1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.} \tag{3.2.2}$$

Chứng minh. Ta đã có hai công thức đầu. Vì $T0 = 0$ nên ta chỉ xét $x \neq 0$. Nếu $0 \neq \|x\| < 1$ thì dùng (3.1.5) ta được

$$\|Tx\| = \left\|\|x\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| < \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|.$$

Vì $\left\|\frac{1}{\|x\|}x\right\| = 1$ nên bất đẳng thức trên dẫn tới $\sup_{\|x\|\le 1}\|Tx\| \le \sup_{\|x\|=1}\|Tx\|$ và do đó $\sup_{\|x\|\le 1}\|Tx\| = \sup_{\|x\|=1}\|Tx\|$. Đẳng thức

$$\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

dẫn tới $\sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1}\|Tx\|$. □

Giả sử ta có được một đánh giá với mọi x thì $\|Tx\| \le M\|x\|$, và tìm được một $x \neq 0$ để đẳng thức xảy ra trong bất đẳng thức này. Khi đó

$$\sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \max_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \frac{M\|x\|}{\|x\|} = M,$$

nên từ công thức (3.2.2) ta có $\|T\| = M$. Đây là một trường hợp tính chuẩn thường gặp trong môn này mà ta tóm tắt lại dưới đây.

Cách tìm chuẩn trong trường hợp đơn giản:

Bước 1: Tìm một đánh giá $\|Tx\| \le M\|x\|$ thật sát.

Bước 2: Tìm một $x \neq 0$ để đẳng thức xảy ra trong bất đẳng thức trên.

Bước 3: Kết luận $\|T\| = M$.

3.2.3 Ví dụ. Cho $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$T(x, y) = 3x - 4y.$$

Với chuẩn $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$ thì

$$|T(x, y)| = |3x - 4y| \le |3x| + |4y| \le 4(|x| + |y|) = 4\|(x, y)\|_1 .$$

Nếu lấy $(x, y) = (0, 1)$ thì dấu bằng xảy ra. Vậy $\|T\| = 4$.

Với chuẩn $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ thì

$$|T(x, y)| = |3x - 4y| \le \sqrt{3^2 + 4^2}\cdot\sqrt{x^2 + y^2} = 5\|(x, y)\|_2 .$$

Nếu lấy $(x, y) = (3, -4)$ thì dấu bằng xảy ra. Vậy $\|T\| = 5$.

Với chuẩn $\|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$ thì

$$|T(x, y)| = |3x - 4y| \le |3x| + |4y| \le 7\max\{|x|, |y|\} = 7\|(x, y)\|_\infty .$$

Nếu lấy $(x, y) = (1, -1)$ thì dấu bằng xảy ra. Vậy $\|T\| = 7$.

3.2.4 Ví dụ. Cho $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$T(x, y) = (a, b) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax + by.$$

Với chuẩn $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ thì

$$|T(x, y)| = |ax + by| \le \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = \|(a, b)\|_2 \, \|(x, y)\|_2 \,.$$

Nếu lấy $(x, y) = (a, b)$ thì dấu bằng xảy ra. Vậy $\|T\| = \|(a, b)\|_2$.

3.2.5 Ví dụ. Giả sử $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tuyến tính. Với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $Tx = T(x \cdot 1) = xT(1)$. Ta có

$$\|Tx\| = |x| \, \|T(1)\| \,,$$

do đó $\|T\| = \|T(1)\|$.

3.2.6 Ví dụ. Xét ánh xạ

$$T : \ell^2 \to \mathbb{R}$$
$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mapsto Tx = 3x_1 - 4x_2.$$

Ta dễ dàng kiểm T là một ánh xạ tuyến tính. Ta có

$$|Tx| = |3x_1 - 4x_2| \le \sqrt{3^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \le 5\|x\|_2.$$

Vậy T tuyến tính liên tục và $\|T\| \le 5$. Dấu bằng xảy ra được trong đánh giá trên nếu ta lấy $x = (3, -4, 0, 0 \dots, 0, \dots)$. Vậy $\|T\| = 5$.

3.2.7 Ví dụ. Xét ánh xạ

$$\begin{aligned} T : \ell^1 &\to \ell^1 \\ (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) &\mapsto (x_2, x_3, \dots, x_n, \dots). \end{aligned}$$

Như vậy ánh xạ T bỏ đi phần tử đầu tiên của mỗi dãy.

Trước hết ta kiểm T được xác định. Thật vậy

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \implies \sum_{n=2}^{\infty} |x_n| < \infty,$$

nên giá trị của T quả thực thuộc ℓ^1. Tính tuyến tính của T cũng rất đơn giản. Xét tính liên tục của T. Ta có

$$\|Tx\| = \sum_{n=2}^{\infty} |x_n| \le \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|x\|$$

nên T là tuyến tính liên tục và $\|T\| \le 1$. Ở bất đẳng thức trên nếu ta lấy $x = (0, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$

thì đẳng thức xảy ra. Vậy $\|T\| = 1$.

3.2.8 Ví dụ. Cho ánh xạ

$$\begin{aligned} T : C([0,1],\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto f(0). \end{aligned}$$

Ta dễ dàng kiểm T là toán tử tuyến tính. Ta xét tính liên tục và tính chuẩn.

$$|Tf| = |f(0)| \le \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \|f\|.$$

Dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi f là một hàm hằng khác 0. Vậy $\|T\| = 1$.

3.2.9 Ví dụ. Cho ánh xạ

$$\begin{aligned} T : C([0,1],\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto 3f(0) - 4f(1). \end{aligned}$$

Ta dễ dàng kiểm T là toán tử tuyến tính. Ta xét tính liên tục và tính chuẩn.

$$|Tf| = |3f(0) - 4f(1)| \le 3|f(0)| + 4|f(1)| \le 7 \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = 7\|f\|.$$

Dấu bằng xảy ra được nếu f là một hàm liên tục sao cho $f(0) = -\|f\|$ và $f(1) = \|f\|$. Ta có thể lấy f là một hàm tuyến tính cho bởi $f(0) = -1$, $f(1) = 1$, như $f(x) = 2x-1$, thì những điều đó thỏa với $\|f\| = 1$. Vậy $\|T\| = 7$.

Các trường hợp cần dùng phương pháp phức tạp hơn có trong các bài tập như 3.8.8, 3.5.1, 3.8.18.

3.3 Ánh xạ tuyến tính trên không gian hữu hạn chiều

Ta xét chung các ánh xạ tuyến tính trên không gian hữu hạn chiều.

Trước hết ta nhắc lại khái niệm ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính từ môn Đại số tuyến tính (người đọc có thể bỏ qua nếu đã biết, hoặc có thể đọc lại sau khi cần).

Nếu không gian tuyến tính E có cơ sở tuyến tính $(e_i)_{1\le i\le m}$ và không gian tuyến tính F có cơ sở tuyến tính $(f_j)_{1\le j\le n}$ thì mỗi ánh xạ tuyến tính từ E vào F có thể được biểu diễn bởi một ma trận. Cụ thể như sau. Mỗi vectơ được viết như một cột gồm các tọa độ của nó trong cơ sở, chẳng hạn nếu $x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i$ thì ta viết

$$[x] = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Viết

$$[Te_i] = \begin{pmatrix} T_{1,i} \\ T_{2,i} \\ \vdots \\ T_{n,i} \end{pmatrix}$$

$$[T] = \left(T_{i,j}\right)_{1\le i\le n, 1\le j\le m}$$

thì $[T]$ là ma trận biểu diễn của T, có các cột là tọa độ của ảnh qua T của các vectơ trong cơ sở của E, và

$$Tx = [T]\cdot[x].$$

Như vậy tác động của T được biểu diễn bởi một phép nhân ma trận, ta thường nói toán tử tuyến tính được cho bởi ma trận biểu diễn.

Chi tiết hơn như sau.

$$\begin{aligned} Tx &= T\left(\sum_{i=1}^{m} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{m} x_i T e_i = \sum_{i=1}^{m} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} T_{j,i} f_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} T_{j,i} x_i\right) f_j \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} T_{i,j} x_j\right) f_i. \end{aligned}$$

Chú ý ở bước cuối ta đã hoán đổi tên của hai chỉ số i và j. Như vậy

$$[Tx] = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} T_{1,j}x_j \\ \sum_{j=1}^{m} T_{2,j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} T_{n,j}x_j \end{pmatrix} = [T]\cdot[x].$$

3.3.1 Ví dụ. Một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ phải có dạng $x \mapsto ax$ trong đó $a \in \mathbb{R}$.

3.3.2 Ghi chú. Chú ý khi $b \neq 0$ hàm $x \mapsto f(x) = ax + b$, vốn thường được gọi là hàm tuyến tính ở trung học và ở môn Vi tích phân, không phải là hàm tuyến tính theo nghĩa của Đại số tuyến tính bậc đại học, vì theo yêu cầu của Đại số tuyến tính thì ánh xạ tuyến tính phải thỏa $f(0) = 0$.

3.3.3 Định lý. *Mọi ánh xạ tuyến tính trên không gian định chuẩn hữu hạn chiều đều liên tục.*

Chứng minh. Giả sử $(E, \|\cdot\|)$ là một không gian định chuẩn hữu hạn chiều với một cơ sở tuyến tính $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Mỗi phần tử $x \in E$ đều có biểu diễn $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, với $x_i \in \mathbb{F}$. Xét $T : E \to F$ tuyến tính. Ta có

$$\begin{aligned} \|Tx\| = \left\| T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)\right\| &= \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i T e_i\right\| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|Te_i\| \\ &\le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|Te_i\|^2}. \end{aligned}$$

Đặt $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$ thì đây là một chuẩn trên E. Vì E là hữu hạn chiều nên hai chuẩn bất kì trên đó là tương đương, do đó có $\beta > 0$ sao cho $\|x\|_2 \le \beta \|x\|$. Từ bất đẳng thức trên ta được

$$\|Tx\| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|Te_i\|^2} \, \|x\|_2 \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|Te_i\|^2 \beta} \, \|x\| .$$

Vậy T liên tục trên $(E, \|\|)$. □

3.3.4 Ví dụ ($\mathbb{R}^{n*}$). Xét $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$. Đặt $\mathbb{R}^{n*} = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, không gian các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathbb{R}^n$. Theo phần thảo luận tổng quát ở trên thì mỗi phần tử f của $\mathbb{R}^{n*}$ tương ứng với một phần tử $[f] = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \mathbb{R}^n$ với $f_i = f(e_i)$. Với $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ thì $f(x) = [f] \cdot x = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i$. Ta tìm $\|f\|$. Theo Bất đẳng thức Bunyakowsky thì

$$|f(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right| \le \|[f]\|_2 \, \|x\|_2 .$$

Dấu bằng xảy ra khi lấy $x = [f]$. Vậy $\|f\| = \|[f]\|_2$.

Tiếp tục, ta nhận thấy ánh xạ

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^{n*} &\to \mathbb{R}^n \\ f &\mapsto [f] \end{aligned}$$

là một song ánh tuyến tính và có $\|Tf\|_2 = \|f\|$, tức là bảo toàn chuẩn. Ta nói T là một ***phép đẳng cấu metric***, còn gọi là một ***phép đẳng cự*** (isometry) từ $\mathbb{R}^{n*}$ lên $\mathbb{R}^n$. Do điều này người ta có thể nói ngắn gọn rằng đối ngẫu của $\mathbb{R}^n$ là chính nó.

3.4 Không gian các ánh xạ tuyến tính liên tục

3.4.1 Định lý. *Nếu F là một không gian Banach thì $L(E, F)$ là một không gian Banach.*

Chứng minh. Chứng minh này tương tự chứng minh của Mệnh đề 2.5.6. Giả sử $(T_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ là một dãy Cauchy trong $L(E,F)$. Cho $\epsilon > 0$, có $N \in \mathbb{Z}^+$ sao cho với $m,n \geq N$ thì $\|T_m - T_n\| < \epsilon$. Với mỗi $x \in E$, vì

$$\|T_m x - T_n x\| \leq \|T_m - T_n\| \, \|x\| < \epsilon \, \|x\| , \tag{3.4.2}$$

nên $(T_n x)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ là một dãy Cauchy trong F, do đó hội tụ về một phần tử của F gọi là Tx. Nói cách khác dãy hàm $(T_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ từng điểm về hàm T. Dễ dàng kiểm tra rằng T là tuyến tính.

Lấy giới hạn hai vế của (3.4.2) khi m tiến ra vô cùng ta được với $n \geq N$ thì

$$\|T_n x - Tx\| \leq \epsilon \, \|x\| ,$$

suy ra $(T_n - T) \in L(E,F)$, do đó $T \in L(E,F)$, và $\|T_n - T\| \leq \epsilon$. Vậy $(T_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ về T trong $L(E,F)$. □

Khi $F = \mathbb{F}$ thì $L(E,\mathbb{F})$ còn được kí hiệu là E^* và mỗi phần tử của E^* còn được gọi là một ***phiếm hàm*** tuyến tính liên tục. Không gian E^* được gọi là ***không gian đối ngẫu*** [1] của E. Vì $\mathbb{F}$ là một không gian Banach nên E^* là một không gian Banach.

3.5 Một số ánh xạ tuyến tính liên tục đặc biệt

Toán tử tích phân

3.5.1 Ví dụ. Xét ánh xạ

$$\begin{aligned} T : C[0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^1 x(t)\, dt. \end{aligned}$$

Ta dễ dàng kiểm T là một ánh xạ tuyến tính. Ta xét tính liên tục của T.

$$\begin{aligned} |Tx| = \left| \int_0^1 x(t)\, dt \right| &\leq \int_0^1 |x(t)|\, dt \\ &\leq \int_0^1 \|x\|\, dt = \|x\|. \end{aligned}$$

Vậy T là tuyến tính liên tục. Trong bất đẳng thức trên, lấy x là hàm hằng bằng 1 chẳng hạn thì đẳng thức xảy ra, vậy $\|T\| = 1$.

Ví dụ trên là một trường hợp riêng của kết quả sau.

[1] tiếng Anh là "dual", nghĩa là cặp, đôi, ….

3.5.2 Mệnh đề. *Cho $A \subset \mathbb{R}^n$ compắc và $K : A \times A \to \mathbb{R}$ liên tục. Đặt*

$$\begin{aligned} T : C(A,\mathbb{R}) &\to C(A,\mathbb{R}) \\ x &\mapsto Tx : A \to \mathbb{R},\ Tx(t) = \int_A K(s,t)x(s)\, ds, \end{aligned}$$

thì T là một ánh xạ tuyến tính liên tục.

Ở đây ta đang dùng tích phân Lebesgue (nếu thay A bằng một tập có thể tích Riemann thì có thể dùng tích phân Riemann). Hàm K thường được gọi là ***nhân của toán tử tích phân*** này. Tính liên tục của T có thể coi là một hệ quả của Mệnh đề 2.7.1, tuy nhiên sử dụng tính tuyến tính ta có thể giải thích tính liên tục một cách dễ dàng hơn như sau. Ta có

$$\begin{aligned} |Tx(t)| &= \left| \int_A K(s,t)x(s)\, ds \right| \le \int_A |K(s,t)x(s)|\, ds \\ &\le \int_A |K(s,t)| \|x\|\, ds \le \|x\| \int_A |K(s,t)|\, ds. \end{aligned}$$

Vì K liên tục trên $A \times A$ nên bị chặn, có $M \in \mathbb{R}$ sao cho $\forall (s,t) \in A \times A$, $|K(s,t)| \le M$. Suy ra $|Tx(t)| \le M|A|\|x\|$, do đó $\|Tx\| \le M|A|\|x\|$, và $\|T\| \le M|A|$, với $|A|$ chỉ độ đo của tập A.

Xem ví dụ ở Bài tập 3.8.14.

Phiếm hàm tuyến tính liên tục trên L^p

Cho $p, q \in [1, \infty]$ thỏa

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Với $g \in L^q(\Omega)$, xét ánh xạ

$$\begin{aligned} S(g) : L^p(\Omega) &\to \mathbb{F} \\ f &\mapsto \int_\Omega f\bar{g}. \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Hölder:

$$|S(g)(f)| = \left| \int_\Omega f\bar{g} \right| \le \int_\Omega |f\bar{g}| \le \|f\|_p \|g\|_q, \tag{3.5.3}$$

nên $S(g)$ là một phiếm hàm tuyến tính liên tục và $\|S(g)\| \le \|g\|_q$.

Nhằm tính chuẩn của $S(g)$, để xảy ra đẳng thức trong Bất đẳng thức Hölder ta tìm f sao cho $|f|^p = |g|^q$. Nếu $2 \le q < \infty$ thì có thể lấy $f = |g|^{q-2}g$ và kiểm tra trực tiếp được rằng đẳng thức xảy ra ở (3.5.3), vậy $\|S(g)\| = \|g\|_q$ trong trường hợp này. Thực ra $\|S(g)\| = \|g\|_q$ với mọi $1 < q < \infty$, nhưng chứng minh khó hơn.

Ví dụ 3.3.4 cùng các bài tập 3.8.8 và 3.5.1 là các trường hợp riêng.

3.6 Định lý Hahn–Banach

Định lý Hahn–Banach là một trong những kết quả quan trọng của Giải tích hàm. Ngắn gọn, nó nói rằng ***một phiếm hàm tuyến tính liên tục luôn có thể mở rộng bảo toàn chuẩn***.

3.6.1 Định lý (Định lý Hahn–Banach). *Cho M là một không gian con của không gian định chuẩn E trên trường $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Mọi phiếm hàm tuyến tính liên tục T trên M đều mở rộng được thành một phiếm hàm tuyến tính liên tục $\tilde{T}$ trên E sao cho $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.*

Như bài tập 3.8.4 cho thấy, khi mở rộng ánh xạ tuyến tính liên tục thì chuẩn không thể giảm. Vì vậy giữ nguyên được chuẩn là một phần đáng kể của Định lý Hahn–Banach.

Chứng minh của Định lý Hahn–Banach có giá trị giáo dục cao, cần được nghiên cứu kỹ trong môn học này.

Chứng minh dưới đây của Định lý Hahn–Banach sử dụng Bổ đề Zorn để làm bước quy nạp vô hạn bất kì. Nội dung của Bổ đề Zorn như sau.

Một thứ tự trên tập S là một tập khác rỗng các cặp (a, b) với $a, b \in S$, mà ta thường viết là $a \le b$ và nói là a nhỏ hơn hay bằng b, thỏa tính chất là với mọi $a, b, c \in S$, $a \le a$, nếu $a \le b$ và $b \le a$ thì $a = b$, nếu $a \le b$ và $b \le c$ thì $a \le c$. Quan hệ thứ tự là toàn phần nếu hai phần tử bất kì trong tập đó so sánh được với nhau. Một phần tử ***cực đại*** (hay tối đại, maximal) là một phần tử không nhỏ hơn phần tử nào, hay nói cách khác, không có phần tử nào lớn hơn. Một chặn trên của tập $A \subset S$ là một phần tử của S lớn hơn hay bằng mọi phần tử của A.

3.6.2 Mệnh đề (Bổ đề Zorn). *Nếu một tập hợp S có một thứ tự và mọi tập con của S mà trong đó hai phần tử bất kì so sánh được với nhau đều bị chặn trên thì S có một phần tử cực đại.*

Bổ đề Zorn thường được dùng trong trường hợp vô hạn bất kì một cách tương tự như phép quy nạp toán học quen thuộc – vốn chỉ áp dụng được trong trường hợp vô hạn đếm được, vì vậy có khi được gọi là "quy nạp siêu hạng". Bổ đề Zorn tương đương với ***Tiên đề chọn***, được thừa nhận là một tiên đề trong môn Giải tích hàm.

Chứng minh. ***Xét trường hợp $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.***

Dàn ý của chứng minh là trước hết chứng tỏ luôn có thể mở rộng thêm 1 chiều trong Bước 1, sau đó dùng "quy nạp siêu hạng" để mở rộng bất kì trong Bước 2.

Bước 1: Giả sử $M \neq E$ và $E = M + N$ với N là một không gian con một chiều của E sinh bởi x_0. Như vậy $E = \{x + tx_0 \mid x \in M, t \in \mathbb{R}\}$. Một mở rộng tuyến tính của T thành $\tilde{T} : E \to \mathbb{F}$ sẽ được xác định bởi giá trị của nó tại x_0, vì $\tilde{T}(x + tx_0) = \tilde{T}x + t\tilde{T}x_0 = Tx + t\tilde{T}x_0$. Ta chứng tỏ tồn tại giá trị $\tilde{T}(x_0)$ để $\tilde{T}$ là liên tục và $\|\tilde{T}\| = \|T\|$. Điều kiện là

$$|\tilde{T}(x+tx_0)| \le \|T\| \, \|x+tx_0\| \, , \ \forall x \in M, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Vì $\tilde{T}$ mở rộng T nên $\left\|\tilde{T}\right\| \ge \|T\|$, do đó điều kiện trên sẽ đảm bảo $\left\|\tilde{T}\right\| = \|T\|$. Thay x bởi tx điều kiện trên tương đương với

$$|\tilde{T}(x+x_0)| \le \|T\| \, \|x+x_0\| \, , \ \forall x \in M.$$

Đây là một kĩ thuật rất có ích, giúp loại bỏ được biến t. Trên trường số thực điều kiện trên tương đương với

$$-\|T\| \, \|x+x_0\| - Tx \le \tilde{T}(x_0) \le \|T\| \, \|x+x_0\| - Tx, \ \forall x \in M.$$

Sự tồn tại của một số thực cố định $\tilde{T}(x_0)$ như vậy tương đương với tính chất sau, dựa trên sự đầy đủ của tập số thực:

$$\sup\{-\|T\| \, \|x+x_0\| - Tx \mid x \in M\} \le \inf\{\|T\| \, \|x+x_0\| - Tx \mid x \in M\},$$

đồng nghĩa với việc với mọi $x_1 \in M, x_2 \in M$ thì

$$-\|T\| \, \|x_1+x_0\| - Tx_1 \le \|T\| \, \|x_2+x_0\| - Tx_2,$$

tức là

$$T(x_2-x_1) \le \|T\| \, (\|x_2+x_0\| + \|x_1+x_0\|).$$

Điều này thì có được do bất đẳng thức tam giác:

$$\begin{aligned} T(x_2-x_1) &\le \|T\| \, \|x_2-x_1\| \le \|T\| \, \|(x_2+x_0)-(x_1+x_0)\| \\ &\le \|T\| \, (\|x_2+x_0\| + \|x_1+x_0\|). \end{aligned}$$

Vậy Bước 1 đã xong.

Bước 2: Ta dùng Bổ đề Zorn (3.6.2) để chứng tỏ có một mở rộng cực đại của T, và do bước 1 nên mở rộng cực đại đó đạt được khi nó được xác định trên E. Xét tập C tất cả các cặp (A,S) trong đó A là một không gian con của E chứa M, và S là một mở rộng bảo toàn chuẩn của T lên A. Chẳng hạn $(M,T) \in C$. Trên tập hợp C này xét quan hệ thứ tự $(A,S) \le (A',S')$ nếu $A \subset A'$ và $S'|_A = S$. Giả sử F là một tập con của C có thứ tự toàn phần, nghĩa là hai phần tử bất kì trong F so sánh được với nhau. Đặt $B = \bigcup_{(A,S)\in F} A$. Do thứ tự trên F là toàn phần mà ta kiểm được B là một không gian vectơ. Đặt $g : B \to \mathbb{R}$ bởi $g(x) = S(x)$ nếu $(A,S) \in F$ và $x \in A$, thì cũng nhờ F có thứ tự toàn phần mà ánh xạ này được định nghĩa tốt. Khi đó g là tuyến tính, và

$$|g(x)| = |S(x)| \le \|S\| \, \|x\| = \|T\| \, \|x\|$$

nên g là liên tục. Đẳng thức trên cũng chứng tỏ ngay $\|g\| = \|T\|$. Vậy cặp (B,g) là một chặn trên của họ F.

Theo Bổ đề Zorn, tập C có một phần tử cực đại (A, S).

Ở Bước 1 ta thấy luôn mở rộng được S lên một chiều cao hơn trừ khi A bằng E. Vì S là cực đại, nên bắt buộc $A = E$. Vậy S chính là mở rộng bảo toàn chuẩn $\tilde{T}$ của T lên E.

Xét trường hợp $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Trước hết ta chú ý điều sau về ánh xạ tuyến tính phức. Giả sử $T : E \to \mathbb{C}$ tuyến tính trên trường $\mathbb{C}$. Viết $T = u + iv$ trong đó u và v là hàm giá trị thực. Khi đó u và v tuyến tính trên trường $\mathbb{R}$, và

$$\begin{aligned} T(ix) &= u(ix) + iv(ix) \\ &= iT(x) = -v(x) + iu(x), \end{aligned}$$

do đó $v(x) = -u(ix)$, suy ra $T(x) = u(x) - iu(ix)$. Ngược lại nếu u tuyến tính trên trường $\mathbb{R}$ và $T(x) = u(x) - iu(ix)$ thì T là tuyến tính trên $\mathbb{C}$, vì $T(ix) = iT(x)$.

Xét chuẩn của T. Lấy $\alpha = \overline{Tx}/|Tx|$ thì $|\alpha| = 1$ và $\alpha Tx = |Tx| \in \mathbb{R}$. Từ đó

$$|Tx| = \alpha Tx = T(\alpha x) = u(\alpha x) \leq \|u\| \, |\alpha| \, \|x\| = \|u\| \, \|x\| \, .$$

Từ đây suy ra ngay $\|T\| = \|u\|$. Tóm lại phần thực quyết định ánh xạ tuyến tính liên tục phức.

Như vậy ta chỉ cần áp dụng dạng thực của định lý Hahn–Banach cho phần thực của T thì sẽ được ngay dạng phức. □

3.6.3 Ví dụ. Cho x_0 là một vectơ khác không trong một không gian định chuẩn E. Chứng minh có $f \in E^*$ sao cho $\|f\| = 1$ và $f(x_0) = \|x_0\|$.

Ta đặt một phiếm hàm tuyến tính trên không gian tuyến tính con một chiều của E sinh bởi vectơ x_0 và mở rộng phiếm hàm đó lên E bằng Định lý Hahn–Banach. Cụ thể ta đặt phiếm hàm g để g là tuyến tính trên $\langle x_0 \rangle$ và $g(x_0) = \|x_0\|$:

$$\begin{aligned} g : \langle x_0 \rangle &\to \mathbb{R} \\ tx_0 &\mapsto g(tx_0) = t\|x_0\|, \; t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ta xét $\|g\|$, viết

$$|g(tx_0)| = |t\|x_0\|| = \|tx_0\|$$

ta thấy $\|g\| = 1$. Áp dụng Định lý Hahn–Banach, có $f \in E^*$ sao cho $\|f\| = \|g\| = 1$ và f mở rộng g, do đó $f(x_0) = g(x_0) = \|x_0\|$.

3.7 * Các đề tài khác

Dạng hình học của Định lý Hahn–Banach

Nếu f là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên không gian định chuẩn X trên trường số thực, không triệt tiêu tại mọi điểm, và α là một số thực, thì tập $f^{-1}(\{\alpha\}) = \{x \in X \mid f(x) = \alpha\}$ được gọi là một siêu phẳng. Đây là khái niệm tương ứng với khái niệm đường thẳng trong $\mathbb{R}^2$ và mặt phẳng trong $\mathbb{R}^3$.

Dưới đây là một dạng hình học của Định lý Hahn–Banach về việc tách tập con bằng siêu phẳng [TQTT11, tr. 132], [Bre11, tr. 7]:

3.7.1 Định lý. *Cho A, B là hai tập lồi không rỗng rời nhau trong không gian định chuẩn X trên trường số thực, ít nhất một trong hai tập là mở. Khi đó tồn tại $f \in X^*$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) \leq \alpha \leq f(y)$ với mọi $x \in A$, $y \in B$. Nói cách khác, tồn tại siêu phẳng đóng $f^{-1}(\{\alpha\})$ tách A và B.*

Xem một ví dụ ở Bài tập 3.8.28.

Định lý ánh xạ mở

Dưới đây là một định lý nổi tiếng về ánh xạ tuyến tính liên tục [TQTT11, tr. 139], [Bre11, tr. 35]:

3.7.2 Định lý (Định lý ánh xạ mở). *Một toàn ánh tuyến tính liên tục giữa hai không gian Banach thì mang tập mở thành tập mở.*

Dưới đây là một hệ quả đáng chú ý không khó để rút ra từ Định lý ánh xạ mở (Bài tập 3.8.35):

3.7.3 Hệ quả. *Nếu một ánh xạ là song ánh tuyến tính liên tục giữa hai không gian Banach thì ánh xạ ngược cũng tuyến tính liên tục.*

Nguyên lý bị chặn đều

Nguyên lý bị chặn đều còn được gọi là Định lý Banach–Steinhaus [TQTT11, tr. 139], [Bre11, tr. 32], [Con90, tr. 95]:

3.7.4 Định lý (Định lý Banach–Steinhaus). *Cho E là một không gian Banach và F là một không gian định chuẩn. Cho $B \subset L(E, F)$ là một họ các ánh xạ tuyến tính liên tục từ E vào F. Nếu B bị chặn từ điểm, nghĩa là*

$$\forall x \in E, \sup_{T \in B} \|Tx\| < \infty,$$

thì B bị chặn đều, nghĩa là

$$\sup_{T \in B} \|T\| < \infty.$$

Không khó để rút ra một hệ quả đáng chú ý (Bài tập 3.8.36):

3.7.5 Hệ quả. *Cho E là một không gian Banach và F là một không gian định chuẩn. Nếu dãy $(T_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ các ánh xạ tuyến tính liên tục từ E vào F hội tụ từng điểm về T, thì T cũng tuyến tính liên tục.*

Tính chất này đặc biệt vì với ánh xạ liên tục nói chung thì qua nhiều ví dụ ta đã thấy giới hạn từng điểm của một dãy hàm liên tục không nhất thiết liên tục.

Đối ngẫu của L^p

Cho $p, q \in [1, \infty]$ thỏa $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Với $g \in L^q(\Omega)$, xét ánh xạ

$$\begin{aligned} S(g) : L^p(\Omega) &\to \mathbb{F} \\ f &\mapsto \int_\Omega f\bar{g}. \end{aligned}$$

Ta đã biết ở mục 3.5 rằng $S(g)$ là một phiếm hàm tuyến tính liên tục và $\|S(g)\| = \|g\|_q$.

Như vậy khi $1 < p < \infty$ thì ánh xạ

$$\begin{aligned} S : L^q(\Omega) &\to (L^p(\Omega))^* \\ g &\mapsto S(g) \end{aligned}$$

là tuyến tính liên tục, hơn nữa còn bảo toàn chuẩn, do đó là một đơn ánh. Việc ánh xạ này là toàn ánh là nội dung của một kết quả sâu của lí thuyết độ đo gọi là định lý biểu diễn Riesz. Như vậy ánh xạ S trên là một phép đẳng cấu metric từ $L^q(\Omega)$ lên $(L^p(\Omega))^*$. Người ta nói ngắn gọn rằng với $1 < p < \infty$ thì ***đối ngẫu của L^p là L^q***. Trường hợp $p = q = 2$ là đặc biệt, được xét ở phần không gian Hilbert (4.3.2). Về đề tài này có thể đọc thêm ở [Bre11, tr. 95], [Rud2, tr. 127].

3.8 Bài tập

3.8.1. Chứng tỏ nếu $\forall x, \|Tx\| \le M\|x\|$ thì $\|T\| \le M$.

3.8.2. Giả sử $E \neq \{0\}$. Với $T \in L(E, F)$ thì $\|T\| = \min\{M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in E, \|Tx\| \le M\|x\|\}$.

3.8.3. Giả sử $T : E \to F$ là tuyến tính liên tục. Chứng tỏ rằng nếu đặt

$$\|T\|_1 = \sup\{\|Tx\| \mid x \in B(0,1)\}$$

và

$$\|T\|_2 = \sup\{\|Tx\| \mid x \in B(0,r)\}$$

thì $\|T\|_2 = r\|T\|_1$. Do đó trong định nghĩa chuẩn của ánh xạ tuyến tính liên tục, nếu chọn một quả cầu khác quả cầu đơn vị thì chỉ được một chuẩn tương đương mà thôi.

3.8.4. Chứng tỏ nếu F là không gian định chuẩn con của E và T là một ánh xạ tuyến tính liên tục trên E thì thu hẹp $T|_F$ của T xuống F cũng tuyến tính liên tục và $\|T|_F\| \le \|T\|$.

3.8.5. Xét $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Tính $\|A\|$ trong $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

3.8.6. ✓ Trên trường số thực, xét ánh xạ

$$\begin{aligned} T : \ell^\infty &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}. \end{aligned}$$

Chứng tỏ T là một ánh xạ tuyến tính liên tục từ ℓ^∞ vào $\mathbb{R}$. Tính $\|T\|$.

3.8.7. Kiểm ánh xạ sau là ánh xạ tuyến tính liên tục và tính chuẩn của ánh xạ.

$$\begin{aligned} T : \ell^2 &\to \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) &\mapsto Tx = -2x_1. \end{aligned}$$

3.8.8. ✓ Trên trường số thực, xét ánh xạ

$$\begin{aligned} T : \ell^2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}. \end{aligned}$$

Đây có là một ánh xạ tuyến tính liên tục hay không? Nếu có hãy tính $\|T\|$.

3.8.9. Tiếp tục Bài tập 2.8.16 và 2.8.17. Cho $1 \le p < q \le \infty$. Xét ánh xạ chứa trong

$$\begin{aligned} i : \ell^p &\to \ell^q \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

(a) Hãy kiểm i là một ánh xạ tuyến tính.

(b) Chứng tỏ i là một ánh xạ tuyến tính liên tục.

(c) Hãy tính chuẩn của i.

3.8.10. Kiểm ánh xạ sau là ánh xạ tuyến tính liên tục và tính chuẩn của ánh xạ.

$$\begin{aligned} T : C([0,1], \mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto Tx = -3x\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

3.8.11. Với $x \in C([0,1], \mathbb{R})$ đặt Tx là hàm cho bởi

$$T(x)(t) = x(1-t), \quad 0 \le t \le 1.$$

Chứng tỏ T là ánh xạ tuyến tính liên tục từ $C([0,1], \mathbb{R})$ với chuẩn $\|x\| = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$ vào chính nó. Tính $\|T\|$.

3.8.12. Với $x \in C([0,1],\mathbb{R})$ đặt Tx là hàm cho bởi

$$T(x)(t) = x(t^2), \quad 0 \le t \le 1.$$

Chứng tỏ T là ánh xạ tuyến tính liên tục từ $C([0,1],\mathbb{R})$ với chuẩn $\|x\| = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$ vào chính nó. Tính $\|T\|$.

3.8.13. Kiểm ánh xạ sau là ánh xạ tuyến tính liên tục và tính chuẩn của ánh xạ.

$$\begin{aligned} T : C([0,1],\mathbb{R}) &\to C([0,1],\mathbb{R}) \\ x &\mapsto Tx, \end{aligned}$$

với

$$\begin{aligned} Tx : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto (Tx)(t) = \int_0^1 sx(s)\, ds. \end{aligned}$$

3.8.14. ✓ Với $x \in C([0,1],\mathbb{R})$ đặt Tx là hàm cho bởi

$$T(x)(t) = \int_0^1 x(s)\sin(st)\, ds, \quad 0 \le t \le 1.$$

(a) Chứng tỏ T là ánh xạ tuyến tính liên tục từ $C([0,1],\mathbb{R})$ với chuẩn $\|x\| = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$ vào chính nó.

(b) Ước lượng $\|T\|$.

(c) Hãy tính chính xác $\|T\|$.

3.8.15. Xét $E = C([0,1],\mathbb{R})$. Đặt

$$\begin{aligned} T : E &\to E \\ f &\mapsto Tf \end{aligned}$$

với

$$\begin{aligned} Tf : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \int_0^t f(s)\, ds. \end{aligned}$$

Như vậy T mang mỗi hàm thành nguyên hàm của nó.

(a) Hãy kiểm T được định nghĩa tốt, tức Tf là hàm liên tục.

(b) Hãy kiểm T là ánh xạ tuyến tính.

(c) Chứng tỏ T là ánh xạ tuyến tính liên tục.

(d) Hãy ước lượng $\|T\|$.

(e) Hãy tính chính xác $\|T\|$.

(f) Chứng tỏ T là song ánh lên tập giá trị của nó nhưng ánh xạ ngược không liên tục.

(g) * Chứng tỏ T là một ***toán tử compắc***, nghĩa là mang tập bị chặn vào trong một tập compắc.

3.8.16. Xét $C^1([0,1])$ là tập hợp các hàm số thực khả vi liên tục trên đoạn $[0,1]$. Với $f \in C^1([0,1])$ xét

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Hãy kiểm đây là một chuẩn trên $C^1([0,1])$ (xem 2.8.36).

Xét ánh xạ

$$\begin{aligned} T : C^1([0,1]) &\to C([0,1]) \\ f &\mapsto f'. \end{aligned}$$

Chứng tỏ đây là một ánh xạ tuyến tính liên tục.

3.8.17. Tổng quát hơn cách tìm chuẩn thông thường, hãy chứng tỏ:

$$\|T\| = M \iff \begin{cases} \forall x, \|Tx\| \le M\|x\| \\ \exists x_n, \|x_n\| = 1, \|Tx_n\| \to M. \end{cases}$$

3.8.18. Xét $E = \{f \in C([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$ với chuẩn sup. Với $f \in E$ đặt

$$Tf = \int_0^1 f.$$

(a) Chứng tỏ T là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên E.

(b) Đặt

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

Hãy vẽ đồ thị của f_n. Chứng tỏ $f_n \in E$. Tính $\|f_n\|$ và Tf_n.

(c) Đặt

$$g_n(x) = \sqrt[n]{x}.$$

Hãy vẽ đồ thị của g_n. Chứng tỏ $g_n \in E$. Tính $\|g_n\|$ và Tg_n.

(d) Tính $\|T\|$.

3.8.19. Xét $E = C([0,1],\mathbb{R})$ với chuẩn sup. Với $f \in E$ đặt

$$Tf = \int_0^{1/2} f - \int_{1/2}^1 f.$$

(a) Chứng tỏ T là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên E.

(b) Đặt

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ -n\left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) + 1, & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ -1, & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

Hãy vẽ đồ thị của f_n. Chứng tỏ $f_n \in E$. Tính $\|f_n\|$ và Tf_n.

(c) Tính $\|T\|$.

3.8.20. Xét $E = C([-1,1],\mathbb{R})$ với chuẩn sup. Với $f \in E$ đặt

$$Tf = -f(0) + \int_{-1}^{1} f(t)\,dt.$$

(a) Chứng tỏ T là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên E.

(b) Đặt f_n là hàm tuyến tính từng khúc, liên tục, bằng 1 trên $[-1,-\frac{1}{n}]$ và $[\frac{1}{n},1]$, và bằng -1 tại 0. Hãy vẽ đồ thị của f_n. Tính $\|f_n\|$ và Tf_n.

(c) Tính $\|T\|$.

3.8.21. Trên trường số thực, cho $g \in L^2(\Omega)$. Xét ánh xạ

$$\begin{aligned} T : L^2(\Omega) &\to L^1(\Omega) \\ f &\mapsto fg. \end{aligned}$$

Chứng tỏ T là một ánh xạ tuyến tính liên tục và $\|T\| = \|g\|_2$.

3.8.22. ✓ Cho E là một không gian định chuẩn. Cho S và T là ánh xạ tuyến tính liên tục từ E vào E.

(a) Hãy kiểm $S \circ T$ là ánh xạ tuyến tính liên tục.

(b) Chứng tỏ $\|S \circ T\| \le \|S\|\,\|T\|$.

(c) Viết $S^0 = \mathrm{Id}_E$, và với $n \in \mathbb{Z}^+$ thì đặt $S^n = S^{n-1} \circ S$. Hãy chứng tỏ $\|S^n\| \le \|S\|^n$.

3.8.23. Cho E là một không gian Banach và S trong $L(E,E)$. Giả sử $c = \|S\| < 1$.

(a) Chứng tỏ $\left\|I + S + S^2 + \cdots + S^n\right\| \le \frac{1}{1-c}$ với mọi $n \ge 1$. Ở đây I chỉ ánh xạ đồng nhất.

(b) Chứng tỏ chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} S^n$ hội tụ trong $L(E,E)$.

(c) Chứng tỏ ánh xạ $(I - S)$ khả nghịch và $(I - S)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} S^n$.

3.8.24. ✓ Cho E là một không gian định chuẩn và $T \in L(E,E)$.

(a) Nhắc lại rằng với mọi số thực x ta có

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x.$$

Đặt

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{\|T\|^i}{i!}.$$

Chứng tỏ rằng dãy $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$.

(b) Đặt

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{T^i}{i!}.$$

Chứng tỏ rằng dãy $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy trong $L(E,E)$.

(c) Giả sử thêm E là một không gian Banach. Chứng tỏ dãy $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ về một giới hạn trong $L(E,E)$. Giới hạn này thường được kí hiệu là e^T, vậy

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{T^i}{i!} = e^T.$$

Đây là hàm mũ của ánh xạ tuyến tính liên tục.

3.8.25. Cho T là một song ánh tuyến tính từ một không gian định chuẩn $(E, \|\cdot\|_E)$ vào một không gian định chuẩn $(F, \|\cdot\|_F)$. Đặt $S = T^{-1}$. Chứng minh

(a) S là một ánh xạ tuyến tính từ F vào E.

(b) Nếu S, T liên tục thì $\|S\| \geq \|T\|^{-1}$.

3.8.26. Cho M là một không gian vectơ con dày đặc trong một không gian định chuẩn E và T trong $L(M,F)$. Chứng minh có duy nhất một S trong $L(E,F)$ sao cho $S(x) = T(x)$ với mọi x thuộc M.

Định lý Hahn–Banach

3.8.27. Cho Λ là một phiếm hàm tuyến tính trên X. Giả sử $\Lambda \not\equiv 0$, nghĩa là tồn tại $x \in X$ sao cho $\Lambda x \neq 0$. Đặt $\ker(\Lambda) = \{x \in X \mid \Lambda x = 0\}$ là ***nhân*** của Λ.

(a) Với $y \in E$ bất kì, chứng tỏ $y - \frac{\Lambda y}{\Lambda x} x \in \ker(\Lambda)$.

(b) Suy ra $X = \ker(\Lambda) + \langle x \rangle$. Như vậy $\ker(\Lambda)$ chỉ kém X đúng 1 chiều.

3.8.28. ✓ Cho x và y là hai vectơ khác nhau trong một không gian định chuẩn E. Chứng minh có $f \in E^*$ sao cho $f(x) \neq f(y)$.

Trong trường hợp trường số thực, giả sử $f(x) < f(y)$, lấy $f(x) < \alpha < f(y)$ thì tập $\{x \in E \mid f(x) = \alpha\}$ là một siêu phẳng tách x và y. Vậy ta có thể tách hai điểm khác nhau bằng một siêu phẳng đóng.

3.8.29. Cho x là một phần tử khác không trong một không gian định chuẩn E. Chứng minh có $f \in E^*$ sao cho $\|f\| = \|x\|$ và $f(x) = \|x\|^2$.

3.8.30. Cho x là một phần tử trong một không gian định chuẩn E. Chứng minh $x = 0$ khi và chỉ khi với mọi $f \in E^*$ thì $f(x) = 0$.

3.8.31. Cho $x_1, \ldots, x_n$ là n vectơ độc lập tuyến tính trong một không gian định chuẩn E. Chứng minh có $f_1, \ldots, f_n$ trong E^* sao cho $f_i(x_j) = \delta_i^j$, ở đây δ_i^j là số Kronecker:

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

3.8.32. * Cho M là một không gian vectơ con đóng của một không gian định chuẩn X và $x_0 \in X$. Chứng tỏ nếu $x_0 \notin M$ thì tồn tại $f \in X^*$ sao cho $f(x) = 0$ với mọi $x \in M$ nhưng $f(x_0) \neq 0$.

3.8.33. * Cho Λ là một phiếm hàm tuyến tính trên X. Giả sử $\Lambda \not\equiv 0$. Chứng tỏ các mệnh đề sau là tương đương:

(a) Λ liên tục.

(b) $\ker(\Lambda) = \{x \in X \mid \Lambda x = 0\}$ là không gian con đóng của X.

3.8.34. Cho không gian định chuẩn X. Nhắc lại rằng với mọi $\Lambda \in X^*$:

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|x\|_X \le 1} |\Lambda x| .$$

Chứng tỏ với mọi $x \in X$:

$$\|x\| = \sup_{\|\Lambda\|_{X^*} \le 1} |\Lambda x| .$$

Các bài toán khác

3.8.35. Chứng minh 3.7.3.

3.8.36. Chứng minh 3.7.5.

3.8.37. Dãy $(x_n)_{n\ge1}$ trong không gian định chuẩn X được gọi là ***hội tụ yếu*** về x nếu với mọi phiếm hàm tuyến tính liên tục f trên X thì dãy số $(f(x_n))_{n\ge1}$ hội tụ về $f(x)$. Chứng tỏ một dãy hội tụ thì hội tụ yếu về cùng giới hạn.

Chương 4 Không gian Hilbert

Không gian Hilbert là phát triển tương tự của không gian Euclid, là không gian vectơ có tích vô hướng.

4.1 Không gian tích trong

Phần này lặp lại và phát triển phần không gian tích trong và không gian Euclid, với các khái niệm như tích trong, chuẩn từ tích trong, phép chiếu vuông góc, phân tích trực giao, trực giao hóa, … đã học trong môn Đại số tuyến tính 2 (Đại số A2), nhưng không còn hạn chế ở không gian hữu hạn chiều nữa. Người học nên ôn lại và đối chiếu với tài liệu đã học để dễ học phần này hơn.

Cho H là một không gian vectơ trên trường thực $\mathbb{R}$. Một ***tích trong*** (tích vô hướng) trên H là một phiếm hàm song tuyến tính, đối xứng, xác định dương trên H, tức là một ánh xạ

$$\begin{array}{rccc} \langle \cdot, \cdot \rangle & : & H \times H & \to & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & \langle x, y \rangle \end{array}$$

thỏa:

(a) $\langle \alpha x + \beta x', y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x', y \rangle$, với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, x', y \in H$ (tuyến tính theo biến thứ nhất),

(b) $\langle x, \alpha y + \beta y' \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, y' \rangle$, với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y, y' \in H$ (tuyến tính theo biến thứ hai),

(c) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, với mọi $x, y \in H$(đối xứng),

(d) $\langle x, x \rangle \geq 0$, với mọi $x \in H$ và $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ (xác định dương).

Tích trong còn được kí hiệu bằng

$$x \cdot y = \langle x, y \rangle .$$

4.1.1 Ví dụ (không gian Euclid $\mathbb{R}^n$). Trên $\mathbb{R}^n$ có tích trong quen thuộc: nếu $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ và $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ thì

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Tích trong này sinh ra chuẩn

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2},$$

chính là chuẩn Euclid.

Nếu H là một không gian vectơ trên trường số phức $\mathbb{C}$ thì tích trong là một ánh xạ

$$\begin{array}{cccc} \langle\cdot,\cdot\rangle & : & H\times H & \to & \mathbb{C} \\ & & (x,y) & \mapsto & \langle x,y\rangle \end{array}$$

thỏa:

(a) $\langle \alpha x + \beta x', y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle x', y\rangle$, với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $x, x', y \in H$ (tuyến tính theo biến thứ nhất),

(b) $\langle x, \alpha y + \beta y'\rangle = \bar{\alpha}\langle x, y\rangle + \bar{\beta}\langle x, y'\rangle$, với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $x, y, y' \in H$ (cộng tính, nhưng ***không*** tuyến tính theo biến thứ hai),

(c) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, với mọi $x, y \in H$,

(d) $\langle x, x\rangle \geq 0$, với mọi $x \in H$ và $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$.

4.1.2 Ví dụ (không gian $\mathbb{C}^n$). Trên $\mathbb{C}^n$ có tích trong sau: nếu $x = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ và $y = (y_i)_{1\leq i\leq n}$ thì

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}.$$

Tích trong này sinh ra chuẩn

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2},$$

chính là chuẩn Euclid.

Cho không gian tích trong H, với $x \in H$, ta đặt

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}.$$

4.1.3 Ví dụ (không gian ℓ^2). Không gian ℓ^2 trong trường hợp trường thực có tích trong

$$\boxed{\left\langle (x_n)_n, (y_n)_n \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n}$$

và trong trường hợp trường phức có tích trong

$$\boxed{\left\langle (x_n)_n, (y_n)_n \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}.}$$

Việc các tích trong này được xác định là do Bất đẳng thức Bunyakowsky

$$\sum_{n=1}^{m} |x_n \overline{y_n}| \le \left(\sum_{n=1}^{m} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{m} |y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \|x\|_{\ell^2} \|y\|_{\ell^2} < \infty,$$

dẫn tới chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ hội tụ tuyệt đối, do đó hội tụ.

Tích trong này sinh ra chuẩn đã biết của ℓ^2, trên trường thực thì

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}\| = \langle x, x\rangle^{1/2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2}$$

trên trường phức thì

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}\| = \langle x, x\rangle^{1/2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2}.$$

4.1.4 Ví dụ (không gian L^2). Trên không gian $L^2(\Omega)$ trên trường thực có tích trong

$$\boxed{\langle f, g\rangle = \int_\Omega fg}$$

và trên trường phức có tích trong

$$\boxed{\langle f, g\rangle = \int_\Omega f\bar{g}.}$$

Việc tích trong này được xác định có được từ Bất đẳng thức Hölder ở 2.6.10.

Tích trong này sinh ra chuẩn đã biết của $L^2(\Omega)$, trên trường thực thì

$$\|f\|_2 = \left(\int_\Omega f^2\right)^{1/2}$$

trên trường phức thì

$$\|f\|_2 = \left(\int_\Omega |f|^2\right)^{1/2}.$$

Không gian Euclid và không gian ℓ^2 là các trường hợp riêng của không gian L^2, xem Ví dụ 2.6.17.

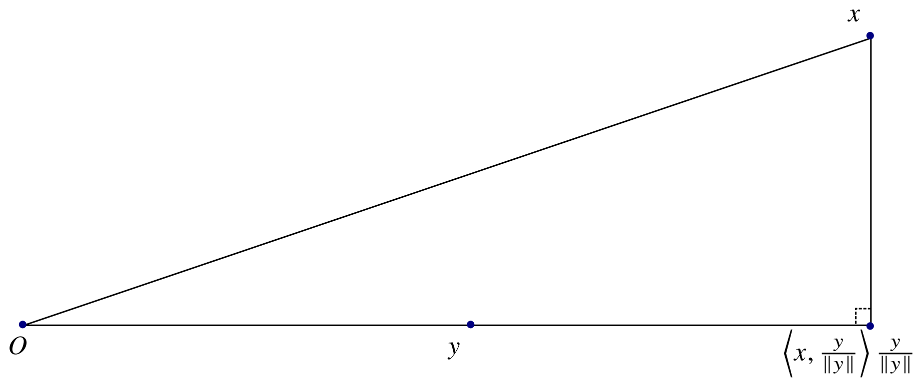
4.1.5 Định lý (Bất đẳng thức Bunyakowsky–Cauchy–Schwarz – BCS [1]).

$$\boxed{\langle x, y\rangle\,| \le \|x\|\,\|y\|\,.}$$

Đẳng thức xảy ra trong bất đẳng thức BCS khi và chỉ khi hai vectơ là phụ thuộc tuyến

[1] Tên viết theo thứ tự chữ cái. Nhiều tài liệu gọi đây là Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz.

tính.



Hình 4.1.6: Bất đẳng thức BCS tương đương với $\left|\left\langle x, \frac{y}{\|y\|}\right\rangle\right| \leq \|x\|$. Trong trường hợp mặt phẳng Euclid điều này nói rằng chiều dài hình chiếu vuông góc của x xuống y nhỏ hơn hay bằng chiều dài của x, tức là cạnh góc vuông ngắn hơn cạnh huyền.

Chứng minh. Từ trường hợp mặt phẳng ở Hình 4.1.6 ta có thể dự đoán rằng bất đẳng thức BCS liên quan tới việc vectơ $x - \left\langle x, \frac{y}{\|y\|}\right\rangle \frac{y}{\|y\|} = x - \frac{x\cdot y}{\|y\|^2} y$ có chiều dài lớn hơn hay bằng 0, vì điều này dẫn tới chiều dài cạnh góc vuông còn lại ngắn hơn chiều dài cạnh huyền, do công thức Pythagore. Ta xét

$$\left(x - \frac{x\cdot y}{\|y\|^2} y\right) \cdot \left(x - \frac{x\cdot y}{\|y\|^2} y\right) \geq 0.$$

Khai triển trong trường hợp trường thực thì $x \cdot y = y \cdot x$, ta được

$$x\cdot x - 2\frac{x\cdot y}{\|y\|^2} x\cdot y + \left(\frac{x\cdot y}{\|y\|^2}\right)^2 y\cdot y \geq 0,$$

tức là

$$\|x\|^2 - \frac{(x\cdot y)^2}{\|y\|^2} \geq 0,$$

chính là bất đẳng thức BCS.

Khai triển trong trường hợp trường phức thì $x \cdot y = \overline{y \cdot x}$, ta được

$$x\cdot x - \frac{\overline{x\cdot y}}{\|y\|^2} x\cdot y - \frac{x\cdot y}{\|y\|^2} y\cdot x + \frac{x\cdot y}{\|y\|^2}\frac{\overline{x\cdot y}}{\|y\|^2} y\cdot y \geq 0,$$

tức là

$$\|x\|^2 - \frac{(x\cdot y)(y\cdot x)}{\|y\|^2} = \|x\|^2 - \frac{|x\cdot y|^2}{\|y\|^2} \geq 0,$$

chính là bất đẳng thức BCS. □

4.1.7 Ví dụ. Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ thì Bất đẳng thức BCS chính là Bất đẳng thức Bunyakowsky cho các số thực. Trong không gian L^2 thì Bất đẳng thức BCS chính là Bất đẳng thức Hölder.

4.1.8 Hệ quả (Bất đẳng thức tam giác). *Với mọi $x, y \in H$,*

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|.$$

Chứng minh. Trong trường hợp trường thực ta viết nhanh được, dùng Bất đẳng thức BCS:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = (x+y)\cdot(x+y) = x\cdot x + x\cdot y + y\cdot x + y\cdot y &= \|x\|^2 + 2x\cdot y + \|y\|^2\\ &\le \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \le (\|x\|+\|y\|)^2.\end{aligned}$$

Trong trường hợp trường phức thì (viết $\mathrm{Re}(z)$ để chỉ phần thực của số phức z):

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = (x+y)\cdot(x+y) = x\cdot x + x\cdot y + y\cdot x + y\cdot y &= \|x\|^2 + (x\cdot y + y\cdot x) + \|y\|^2\\ &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(x\cdot y) + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2|x\cdot y| + \|y\|^2\\ &\le \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \le (\|x\|+\|y\|)^2.\end{aligned}$$

□

Nhờ bất đẳng thức tam giác này ta có:

4.1.9 Mệnh đề. *Cho không gian tích trong H, với $x \in H$ đặt $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ thì đây là một chuẩn trên H.*

Như vậy ***tích trong sinh ra chuẩn***. Từ đây trở đi khi nói tới chuẩn trên không gian tích trong thì ta hiểu là chuẩn sinh bởi tích trong như trên.

Trong trường hợp trường thực, Bất đẳng thức BCS có nghĩa là cho hai vectơ x, y khác 0 thì

$$-1 \le \frac{x\cdot y}{\|x\|\,\|y\|} \le 1.$$

Như trong trường hợp không gian Euclid $\mathbb{R}^n$, số thực $\frac{x\cdot y}{\|x\|\|y\|}$ có thể đại diện cho "góc" giữa hai vectơ x và y, cụ thể góc đó là số thực $\alpha \in [0, \pi]$ sao cho $\cos\alpha = \frac{x\cdot y}{\|x\|\|y\|}$. Đặc biệt ta có thể đưa ra khái niệm "vuông góc", đó là khi $\alpha = \frac{\pi}{2}$, tức là khi $x\cdot y = 0$:

4.1.10 Định nghĩa. Cho $x, y \in H$, nếu $\langle x, y\rangle = 0$ thì ta nói x ***vuông góc*** với y, kí hiệu $x \perp y$.

Do $\langle x, y\rangle = 0$ kéo theo $\langle y, x\rangle = 0$ nên quan hệ vuông góc có tính đối xứng.

4.1.11 Mệnh đề (Công thức Pythagore). *Với mọi $x, y \in H$,*

$$\boxed{x \perp y \implies \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.}$$

Tổng quát hơn, nếu x_i, $1 \le i \le n$ vuông góc đôi một thì

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 .$$

Chứng minh. Khai triển vế trái, do giả thiết $x \cdot y = 0$, ta được

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (x+y)\cdot(x+y) = x\cdot x + x\cdot y + y\cdot x + y\cdot y \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 . \end{aligned}$$

Trường hợp nhiều vectơ hơn có thể làm tương tự hoặc dùng quy nạp. □

4.1.12 Ghi chú. Ta có thể chứng minh Bất đẳng thức BCS một cách ngắn gọn và trực quan hơn, dựa trên công thức Pythagore và Hình 4.1.6, như sau. Với định nghĩa $x \perp y \iff x \cdot y = 0$, ta kiểm được ngay $\left(x - \left(x \cdot \frac{y}{\|y\|}\right)\frac{y}{\|y\|}\right) \perp y$. Công thức Pythagore cho

$$\left\| x - \left(x \cdot \frac{y}{\|y\|}\right)\frac{y}{\|y\|} \right\|^2 + \left\| \left(x \cdot \frac{y}{\|y\|}\right)\frac{y}{\|y\|} \right\|^2 = \|x\|^2$$

do đó

$$\left\| \left(x \cdot \frac{y}{\|y\|}\right)\frac{y}{\|y\|} \right\| \le \|x\|$$

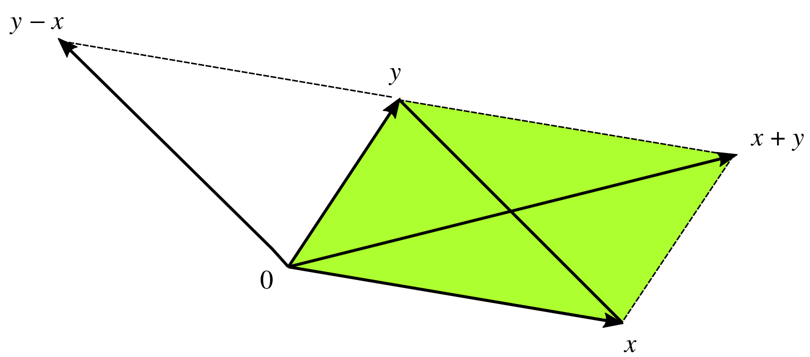
(cạnh góc vuông ngắn hơn cạnh huyền), tức là

$$|x \cdot y| \le \|x\|\|y\|.$$

4.1.13 Mệnh đề (đẳng thức hình bình hành). *Với chuẩn sinh bởi tích trong thì*

$$\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 .$$

Đây là một đặc trưng của chuẩn sinh bởi tích trong.



Hình 4.1.14: Đẳng thức hình bình hành nói rằng trong một hình bình hành thì tổng bình phương chiều dài hai đường chéo bằng tổng bình phương chiều dài các cạnh.

Chứng minh. Khai triển vế trái ta được

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2+\|x+y\|^2 &= (x-y)\cdot(x-y)+(x+y)\cdot(x+y)\\ &= x\cdot x-y\cdot x-x\cdot y+y\cdot y+x\cdot x+y\cdot x+x\cdot y+y\cdot y\\ &= 2\|x\|^2+2\|y\|^2.\end{aligned}$$

□

4.1.15 Ví dụ. Xét $\mathbb{R}^2$ với chuẩn $\|(x_1,x_2)\|_1 = |x_1|+|x_2|$. Với $e_1=(1,0)$ và $e_2=(0,1)$ thì $\|e_1\|_1=1$, $\|e_2\|_1=1$, $\|e_1+e_2\|_1=2$, $\|e_1-e_2\|_1=2$. Đẳng thức hình bình hành không thỏa với hai vectơ e_1 và e_2. Vậy $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ không phải là một không gian tích trong, nói cách khác không có tích trong nào trên $\mathbb{R}^2$ có thể sinh ra chuẩn $\|\cdot\|_1$. Như thế ***không phải không gian định chuẩn nào cũng là không gian tích trong***.

Tương tự, trong không gian ℓ^1 xét $e_1=(1,0,0,\dots)$ và $e_2=(0,1,0,\dots)$ thì $\|e_1\|_1=1$, $\|e_2\|_1=1$, $\|e_1+e_2\|_1=2$, $\|e_1-e_2\|_1=2$. Vậy ℓ^1 không phải là một không gian tích trong.

Không gian ℓ^p chỉ là không gian tích trong với $p=2$, xem Bài tập 4.6.10.

4.1.16 Mệnh đề (tích trong liên tục theo từng biến). *Cho không gian tích trong H trên trường $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{F}=\mathbb{C}$.*

(a) Ánh xạ $x\mapsto\langle x,y\rangle$ là tuyến tính liên tục, có chuẩn bằng $\|y\|$.

  (a) Trên trường số thực thì ánh xạ $y\mapsto\langle x,y\rangle$ là tuyến tính liên tục, có chuẩn bằng $\|x\|$. Trên trường số phức thì ánh xạ này không tuyến tính nhưng vẫn liên tục.

Chứng minh. Do Bất đẳng thức BCS, $|\langle x,y\rangle|\le\|x\|\|y\|$, từ đó suy ra cả hai ánh xạ trên đều liên tục. □

4.1.17 Ví dụ. Ta xem lại Bài tập 3.8.8. Trên trường số thực, xét ánh xạ

$$\begin{aligned} T:\ell^2 &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto Tx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n}.\end{aligned}$$

Giờ ta nhận ra với tích trong của ℓ^2 thì

$$Tx=(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)\cdot\left(1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{n},\dots\right)=x\cdot y$$

với

$$y=\left(1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{n},\dots\right)\in\ell^2.$$

Vậy từ kết quả chung của phiếm hàm tuyến tính cho bởi tích trong ta kết luận ngay T là một ánh xạ tuyến tính liên tục có chuẩn bằng (xem 4.5.2)

$$\|T\| = \|y\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}.$$

4.1.18 Định nghĩa. Một không gian tích trong mà là một không gian định chuẩn đầy đủ với chuẩn sinh bởi tích trong thì được gọi là một ***không gian Hilbert.*** [2]

Ngắn gọn hơn, ***không gian Hilbert là không gian tích trong đầy đủ***, hay ***không gian Hilbert là không gian Banach với chuẩn cho bởi tích trong***.

4.1.19 Ví dụ (không gian Euclid $\mathbb{R}^n$). Như ta đã biết ở Mệnh đề 1.3.8, không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ là đầy đủ, do đó là một không gian Hilbert.

4.1.20 Ví dụ (không gian Euclid $\mathbb{C}^n$). Như ta đã biết ở Mệnh đề 1.3.9, không gian Euclid $\mathbb{C}^n$ là đầy đủ, do đó là một không gian Hilbert.

4.1.21 Ví dụ (không gian ℓ^2). Như ta đã biết ở Định lý 2.4.6, không gian ℓ^2 là đầy đủ, do đó là một không gian Hilbert.

4.1.22 Ví dụ (không gian L^2). Như ta đã biết ở Định lý 2.6.18, không gian $L^2(\Omega)$ là đầy đủ, do đó là một không gian Hilbert.

4.2 Phép chiếu vuông góc

Nếu $y \neq 0$ thì chiếu vuông góc của x xuống y chính là chiếu x xuống không gian tuyến tính sinh bởi y. Từ trường hợp mặt phẳng, xem Hình 4.1.6, công thức của phép chiếu này là:

$$\boxed{P_{\langle y \rangle} x = \left\langle x, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \frac{y}{\|y\|}.} \tag{4.2.1}$$

Ta kiểm tra trực tiếp được ngay là $x - \left\langle x, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \frac{y}{\|y\|}$ vuông góc với y. Khi y là vectơ đơn vị thì công thức đơn giản hơn:

$$\boxed{\|y\| = 1 \implies P_{\langle y \rangle} x = (x \cdot y) y.} \tag{4.2.2}$$

[2] David Hilbert là một nhà toán học sống vào cuối thế kỉ 19 và đầu thế kỉ 20, đã có những đóng góp lớn vào nhiều lĩnh vực trong đó có nền tảng toán học, hình học, giải tích, toán lý, đại số. Tên Hilbert có thể đọc theo tiếng Đức tựa “Hin-bợt”.

4.2.3 Ví dụ. Trong $L^2([0, \frac{\pi}{2}])$ xét $f = \cos$, $g = \sin$, thì

$$\|f\| = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin(2x))\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$\|g\| = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin(2x))\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin(2x)\, dx$$
$$= \frac{1}{2}(-\cos(2x))\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = 1.$$

$$P_g f = \langle f, g\rangle \frac{1}{\|g\|^2} g = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin.$$

4.2.4 Mệnh đề (sự tồn tại của phép chiếu vuông góc). *Cho M là một không gian vectơ con đóng của không gian Hilbert H thì với mọi $x \in H$ có duy nhất $y \in M$ sao cho $(x - y) \perp M$.*

Ta gọi y là ***chiếu*** *(vuông góc) của x xuống M, kí hiệu $proj_M x$ hay $P_M x$* [3].

Như vậy nếu M là một không gian vectơ con đóng của một không gian Hilbert thì

$$y = P_M x \iff \begin{cases} y \in M \\ (x - y) \perp M. \end{cases}$$

Nói cách khác $P_M x$ được định trưng bởi tính chất $P_M x \in M$ và $(x - P_M x) \perp M$. Ảnh

[3] projection trong tiếng Anh nghĩa là chiếu

xạ P_M được gọi là ***phép chiếu*** (vuông góc) xuống M.

Chứng minh mệnh đề 4.2.4. Đặt $d(x, M) = \inf\{\|x-y\| \mid y \in M\}$, đây là khoảng cách từ x tới M. Có dãy $(y_n)_{n\geq 1}$, $y_n \in M$ sao cho $\lim_{n\to\infty} \|x-y_n\| = d(x, M)$. Áp dụng đẳng thức hình bình hành cho hai vectơ $x - y_m$ và $x - y_n$, ta có

$$\begin{aligned}
\|y_m - y_n\|^2 &= 2\|x-y_m\|^2 + 2\|x-y_n\|^2 - \|2x-(y_m+y_n)\|^2 \\
&= 2\|x-y_m\|^2 + 2\|x-y_n\|^2 - 4\left\|x - \frac{y_m+y_n}{2}\right\|^2 \\
&\leq 2\|x-y_m\|^2 + 2\|x-y_n\|^2 - 4d(x,M)^2.
\end{aligned}$$

Từ đây ta suy ra được $(y_n)_{n\geq 1}$ là một dãy Cauchy vì vế phải nhỏ tùy ý khi m và n đủ lớn. Vì M là một không gian con đóng của không gian đầy đủ H nên M là đầy đủ, do đó dãy $(y_n)_{n\geq 1}$ có giới hạn y trong M. Suy ra $\lim_{n\to\infty} \|x-y_n\| = \|x-y\| = d(x, M)$.

Bây giờ ta chứng minh $(x-y) \perp M$. Trên trường thực, với mọi $t \in \mathbb{R}$, với mọi $w \in M$ thì

$$\begin{aligned}
\|x-y\|^2 \leq \|x-y+tw\|^2 &= \langle x-y+tw, x-y+tw\rangle \\
&= \|x-y\|^2 + 2t\langle x-y, w\rangle + t^2\|w\|^2. \qquad (4.2.5)
\end{aligned}$$

Điều này dẫn tới $\|w\|^2 t^2 + 2t(x-y)\cdot w \geq 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Khảo sát hàm số bậc hai theo biến t ta thấy điều này buộc $(x-y)\cdot w = 0$.

Trên trường phức thì bất đẳng thức (4.2.5) chỉ dẫn tới phần thực $\mathrm{Re}((x-y)\cdot w) = 0$. Ở (4.2.5) thay t bởi it thì được phần ảo $\mathrm{Im}((x-y)\cdot w) = 0$, vậy $(x-y)\cdot w = 0$.

Tính duy nhất của y được để ở Bài tập 4.6.22. □

Chú ý tính đầy đủ của không gian đã được dùng trong chứng minh sự tồn tại của phép chiếu.

Với S là một tập con của không gian tích trong H và x là một vectơ trong H, ta nói x vuông góc với S, kí hiệu $x \perp S$, nếu x vuông góc với mọi vectơ trong S, tức là $\forall y \in S, x \perp y$. Gọi ***tập vuông góc*** hay ***tập trực giao*** của S là tập hợp tất cả các vectơ trong H vuông góc với S, kí hiệu là $S^\perp = \{x \in H \mid x \perp S\}$.

Tổng kết các tính chất của phép chiếu:

4.2.6 Mệnh đề. *Cho M là một không gian vectơ con đóng của không gian Hilbert H. Với mọi $x \in H$:*

(a) Nếu $x \in M$ thì $P_M x = x$.

(b) Hình chiếu của x lên M là điểm trên M gần x nhất:

$$\|x - P_M x\| = \inf_{y\in M} \|x-y\| = d(x, M).$$

*(c) Có **phân tích trực giao***

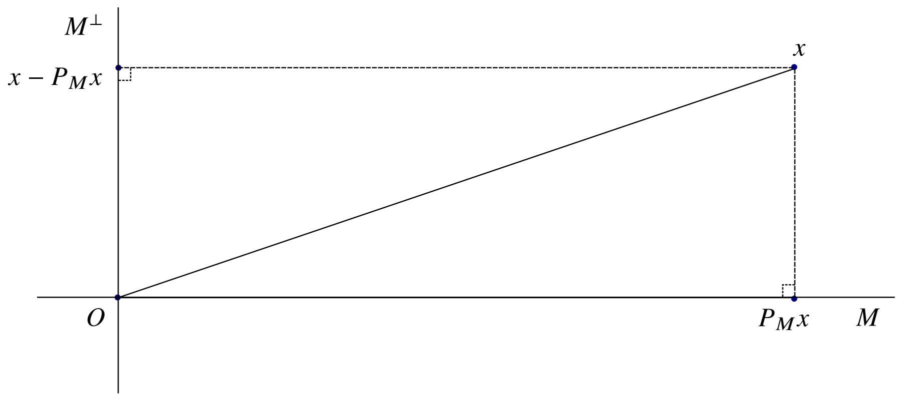
$$\boxed{x = P_M x + P_{M^\perp} x.} \qquad (4.2.7)$$

Phân tích này là duy nhất, theo nghĩa nếu $x = y + z$ với $y \in M$ và $z \in M^\perp$ thì $y = P_M x$ và $z = P_{M^\perp} x$.

(d) *Không gian được phân tích thành tổng của hai không gian con trực giao: $H = M + M^\perp$, với $M \cap M^\perp = \{0\}$.*

(e)
$$\|x\|^2 = \|P_M x\|^2 + \|P_{M^\perp} x\|^2,$$
do đó $\|P_M x\| \le \|x\|$.

(f) *P_M là ánh xạ tuyến tính liên tục.*



Hình 4.2.8: Minh họa phân tích trực giao.

Chứng minh. Ta kiểm sơ lược các tính chất này. Chi tiết hơn được để ở Bài tập 4.6.23.

(a) Tính chất có từ định nghĩa của ảnh chiếu.

(b) Tính chất này được chứa trong chứng minh của Mệnh đề 4.2.4.

(c) $M^\perp$ là một không gian vectơ con đóng (Bài tập 4.6.15). Tính chất có từ định nghĩa của ảnh chiếu.

(d) Hệ quả của (c).

(e) Công thức Pythagore.

(f) Ta kiểm tính tuyến tính. Với $x, y \in H$ thì $(x + y) - (P_M x + P_M y) = (x - P_M x) + (y - P_M y) \in M^\perp$, nên $P_M(x + y) = P_M x + P_M y$. Với $\alpha \in \mathbb{F}$ thì $(\alpha x) - \alpha P_M x = \alpha(x - P_M x) \in M^\perp$, nên $P_M(\alpha x) = \alpha P_M x$.

□

4.3 Phiếm hàm tuyến tính liên tục

Theo Mệnh đề 4.1.16, ánh xạ $x \mapsto \langle x, y\rangle$ là tuyến tính liên tục, như vậy mỗi vectơ cho một phiếm hàm tuyến tính liên tục bằng cách lấy tích trong [4]. Chiều ngược lại là nội dung của phần này.

4.3.1 Ví dụ. Nhắc lại (xem 3.3.4) là mọi phiếm hàm tuyến tính trên không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ đều được cho bởi tích trong với một vectơ, tức là có dạng $x \mapsto \langle a, x\rangle = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ với $a = (a_i)_{1\le i\le n} \in \mathbb{R}^n$.

Trường hợp không gian vô hạn chiều được cho trong định lý sau.

4.3.2 Định lý (Định lý biểu diễn Riesz). *Cho không gian Hilbert H trên trường $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Với phiếm hàm tuyến tính liên tục $f : H \to \mathbb{F}$ bất kì tồn tại duy nhất $y \in H$ sao cho $f(x) = \langle x, y\rangle$ với mọi $x \in H$.*

Nói ngắn gọn, ***mọi phiếm hàm tuyến tính liên tục trên không gian Hilbert đều cho được bởi tích trong với một vectơ***.

Chứng minh. Nếu $f = 0$ thì ta có ngay $y = 0$. Từ đây ta xét $f \neq 0$.

Ý của chứng minh đơn giản như sau. Giá trị của f được xác định bởi giá trị của f trên $(\ker f)^\perp$. Vì $\ker f$ chỉ kém H một chiều (xem 3.8.27, vốn từ đại số tuyến tính) nên $(\ker f)^\perp$ là một không gian tuyến tính một chiều, do đó giá trị của f trên $(\ker f)^\perp$ được cho bởi tích trong với một phần tử y của $(\ker f)^\perp$.

Có thể tìm y như sau. Lấy v là một vectơ đơn vị bất kì thuộc $(\ker f)^\perp$. Vì y phải là một bội của v, nên $y = \alpha v$ với $\alpha \in \mathbb{F}$. Ta phải có

$$f(v) = \langle v, y\rangle = \langle v, \alpha v\rangle = \bar{\alpha}\langle v, v\rangle = \bar{\alpha},$$

suy ra $\alpha = \overline{f(v)}$, và $y = \overline{f(v)}v$.

Lý luận trên có thể được trình bày lại chi tiết hơn dưới đây.

Vì f tuyến tính liên tục nên $\ker f = f^{-1}(\{0\})$ là không gian vectơ con đóng của không gian Hilbert H, do đó ta có phân tích trực giao $H = \ker f + (\ker f)^\perp$. Vì $f \neq 0$ nên $\ker f \neq H$ và $(\ker f)^\perp \neq 0$.

Ta kiểm lại $(\ker f)^\perp$ là một không gian vectơ một chiều. Lấy v là một vectơ đơn vị bất kì thuộc $(\ker f)^\perp$. Vì $v \neq 0$ nên $v \notin \ker f$, nên $f(v) \neq 0$. Với mọi $x \in H$ thì $f\left(x - \frac{f(x)}{f(v)}v\right) = f(x) - \frac{f(x)}{f(v)}f(v) = 0$, nên $x - \frac{f(x)}{f(v)}v \in \ker f$, từ đó ta có phân tích tương ứng với phân tích trực giao $H = \ker f + (\ker f)^\perp$:

$$x = \left(x - \frac{f(x)}{f(v)}v\right) + \frac{f(x)}{f(v)}v.$$

Đặc biệt nếu $x \in (\ker f)^\perp$ thì do tính duy nhất của phân tích trên ta phải có $x = \frac{f(x)}{f(v)}v$. Vậy thực sự $(\ker f)^\perp = \langle v\rangle$.

[4] Nhắc lại "phiếm hàm tuyến tính", tiếng Anh là "linear functional", là thuật ngữ thường gặp chỉ ánh xạ tuyến tính vào $\mathbb{R}$ hay $\mathbb{C}$.

Bây giờ ta xác định vectơ y. Với mọi $x \in H$ thì $P_{(\ker f)^\perp}x = P_v x = (x \cdot v)v$, do đó

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(P_{\ker f}x + P_{(\ker f)^\perp}x\right) = f\left(P_{(\ker f)^\perp}x\right) \\ &= f((x \cdot v)v) = (x \cdot v)f(v) = x \cdot (\overline{f(v)}v). \end{aligned}$$

Vậy $y = \overline{f(v)}v$.

Tính duy nhất của y rất đơn giản, có ở Bài tập 4.6.9. □

4.3.3 Ví dụ. Mọi phiếm hàm tuyến tính liên tục $f : \ell^2 \to \mathbb{R}$ (trên trường số thực) đều có dạng $x \mapsto \langle a, x\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ với $a = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}^+} \in \ell^2$. Hơn nữa $\|f\| = \|a\|_{\ell^2}$. Xem lại Ví dụ 3.2.6 và 4.1.17.

4.3.4 Ví dụ. Mọi phiếm hàm tuyến tính liên tục $S_g : L^2(\Omega) \to \mathbb{F}$ đều có dạng $f \mapsto \langle f, g\rangle = \int_\Omega f\bar{g}$ với $g \in L^2(\Omega)$. Hơn nữa $\|S_g\| = \|g\|_{L^2(\Omega)}$. Một chiều của kết quả này đã có ở mục 3.5.

Trong Định lý biểu diễn Riesz chú ý rằng $\|f\| = \|y\|$ (Mệnh đề 4.1.16). Như vậy tương ứng

$$\begin{array}{ccl} H & \to & H^* \\ y & \mapsto & f,\ f(x) = \langle x, y\rangle \end{array}$$

là một song ánh tuyến tính bảo toàn chuẩn, tức là một đẳng cấu của không gian định chuẩn. Nói ngắn gọn, một không gian Hilbert thì đẳng cấu với không gian đối ngẫu của nó.

4.4 Họ trực chuẩn

Một họ E các phần tử $\neq 0$ của một không gian Hilbert được gọi là một ***họ trực giao*** nếu $\langle u, v\rangle = 0$ với mọi $u, v \in E$, $u \neq v$. Hơn nữa nếu $\|u\| = 1$ với mọi $u \in E$ thì họ E được gọi là một ***họ trực chuẩn***. Nói khác đi, E là trực chuẩn khi với mọi $u, v \in E$ thì

$$\langle u, v\rangle = \begin{cases} 1 & \text{khi} \quad u = v, \\ 0 & \text{khi} \quad u \neq v. \end{cases}$$

4.4.1 Ví dụ. Không gian $\mathbb{R}^n$ có cơ sở trực chuẩn $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Cơ sở này có tính chất đặc biệt, là nếu với mỗi x đặt $x_i = \langle x, e_i\rangle$ thì $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ và $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$.

Cho E là một họ trực chuẩn. Ứng với mỗi $x \in H$, với mỗi $e \in E$, ta đặt $x_e = \langle x, e\rangle \in \mathbb{F}$. Các x_e được có vai trò tương tự các tọa độ của x trong trường hợp không gian Euclid với cơ sở chuẩn tắc.

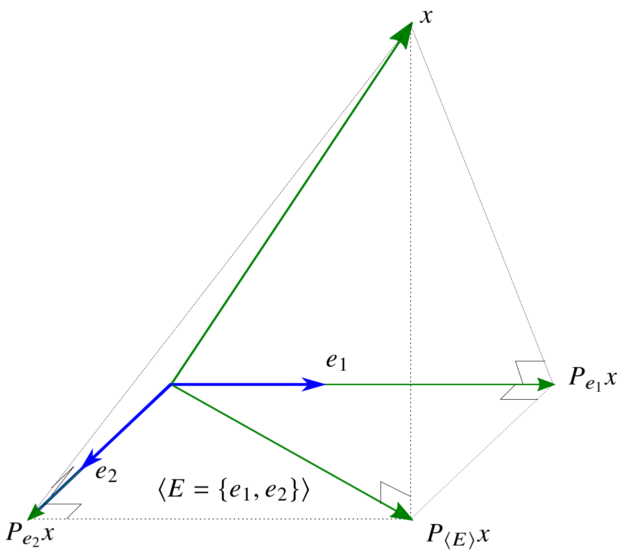
Họ trực chuẩn giúp chúng ta có được một số biểu diễn tường minh quan trọng.

4.4.2 Mệnh đề. *Cho E là một họ trực chuẩn hữu hạn trong một không gian tích trong H. Công thức tường minh cho ánh xạ chiếu như sau: với $x \in H$ thì*

$$\boxed{P_{\langle E\rangle}x = \sum_{e\in E} P_e x = \sum_{e\in E} \langle x, e\rangle\, e.} \tag{4.4.3}$$

Một hệ quả là ***bất đẳng thức Bessel***:

$$\sum_{e\in E} |\langle x, e\rangle|^2 \le \|x\|^2 . \tag{4.4.4}$$



Hình 4.4.5: Minh họa công thức của ánh xạ chiếu.

Chứng minh. Ta kiểm được ngay $(x - \sum_{e\in E}\langle x, e\rangle e) \perp e$ với mọi $e \in E$ bằng cách lấy tích trong. Như vậy $\sum_{e\in E}\langle x, e\rangle e = P_{\langle E\rangle}x$. Hơn nữa, từ 4.6.35 và 4.2.6:

$$\sum_{e\in E} |\langle x, e\rangle|^2 = \left\|P_{\langle E\rangle}x\right\|^2 \le \|x\|^2 .$$

□

4.4.6 Ví dụ. Trong không gian ℓ^2 xét không gian con E sinh bởi các vectơ $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ với số 1 ở vị trí thứ i, $1 \le i \le n$. Cho $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$. Ta có

$$P_E x = \sum_{i=1}^{n} (x \cdot e_i)\, e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots).$$

4.4.7 Mệnh đề (trực chuẩn hóa Gram–Schmidt). *Mỗi không gian tích trong hữu hạn chiều đều có một cơ sở tuyến tính trực chuẩn.*

Chứng minh. Ý tưởng của cách xây dựng đơn giản là phân tích trực giao, xem Hình 4.2.8. Lấy một cơ sở tuyến tính gồm các vectơ $(v_1, \dots, v_n)$ là của không gian đã cho.

Đặt

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1, \\
w_2 &= v_2 - P_{\langle v_1 \rangle} v_2, \\
w_3 &= v_3 - P_{\langle \{v_1, v_2\} \rangle} v_3, \\
&\vdots \\
w_i &= v_i - P_{\langle \{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\} \rangle} v_i, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ở mỗi bước mới thì vectơ w_i là thành phần của vectơ v_i vuông góc với không gian vectơ con sinh bởi các vectơ có trước. Không gian vectơ sinh bởi họ $(w_1, \ldots, w_n)$ cũng là không gian vectơ sinh bởi họ $(v_1, \ldots, v_n)$, và họ $(w_1, \ldots, w_n)$ là một họ trực giao các vectơ khác 0 (có thể viết bằng quy nạp). Đặt $w_i' = \frac{w_i}{\|w_i\|}$ ta thu được một cơ sở trực chuẩn $(w_1', \ldots, w_n')$. □

Để có công thức tường minh đơn giản ta viết công thức phép chiếu dùng cơ sở trực chuẩn (4.4.3):

$$\begin{aligned}
P_{\langle \{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\} \rangle} v_i &= P_{\langle \{w_1', w_2', \ldots, w_{i-1}'\} \rangle} v_i \\
&= \langle v_i, w_1' \rangle w_1' + \langle v_i, w_2' \rangle w_2' + \cdots + \langle v_i, w_{i-1}' \rangle w_{i-1}'.
\end{aligned}$$

Vậy thuật toán là:

Thuật toán trực chuẩn hóa Gram–Schmidt:
Với một họ độc lập tuyến tính $(v_1, \ldots, v_n)$, đặt

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1, \\
w_1' &= \frac{w_1}{\|w_1\|}, \\
w_2 &= v_2 - \langle v_2, w_1' \rangle w_1', \\
w_2' &= \frac{w_2}{\|w_2\|}, \\
&\vdots \\
w_n &= v_n - \langle v_n, w_1' \rangle w_1' - \langle v_n, w_2' \rangle w_2' - \cdots - \langle v_n, w_{n-1}' \rangle w_{n-1}', \\
w_n' &= \frac{w_n}{\|w_n\|}.
\end{aligned}$$

Họ $(w_1', \ldots, w_n')$ là trực chuẩn và sinh ra cùng một không gian vectơ với họ $(v_1, \ldots, v_n)$.

4.4.8 Ví dụ. Trong không gian $L^2([0,1])$, xét hàm $f_1(x) = 1$ và $f_2(x) = x$. Gọi $E = \langle\{f_1, f_2\}\rangle$ là không gian tuyến tính sinh bởi f_1 và f_2, ta tìm một cơ sở trực chuẩn cho E. Ta dùng thuật toán Gram–Schmidt để trực chuẩn hóa cơ sở (f_1, f_2) của E.

Đặt

$$\begin{aligned} g_1 &= f_1, \\ g_1' &= \frac{g_1}{\|g_1\|}. \end{aligned}$$

Ta tính

$$\|f_1\| = \left(\int_0^1 f_1(x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 1\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Do đó

$$g_1'(x) = g_1(x) = f_1(x) = 1.$$

Tiếp theo

$$\begin{aligned} g_2 &= f_2 - \left\langle f_2, g_1'\right\rangle g_1' \\ g_2' &= \frac{g_2}{\|g_2\|}. \end{aligned}$$

Ta tính

$$\left\langle f_2, g_1'\right\rangle = \int_0^1 f_2(x) g_1'(x)\,dx = \int_0^1 x\cdot 1\,dx = \frac{1}{2},$$

nên

$$g_2(x) = x - \frac{1}{2}\cdot 1 = x - \frac{1}{2},$$

và

$$\|g_2\| = \left(\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

vậy

$$g_2'(x) = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Bộ (g_1', g_2') là một cơ sở trực chuẩn của E.

Việc tìm một cơ sở trực chuẩn cho không gian vô hạn chiều là mục tiêu của phần tiếp theo.

4.4.9 Ví dụ. Trong ℓ^2 xét họ E các vectơ $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Đây là một họ trực chuẩn. Nếu $x \in \ell^2$ thì $x \perp e_i \iff x_i = x\cdot e_i = 0$, do đó $x \perp E \iff x = 0$. Vậy E là một họ trực chuẩn cực đại, nghĩa là không thể làm lớn hơn. Tuy nhiên rõ ràng một không thể viết một phần tử tùy ý của ℓ^2 như một tổ hợp tuyến tính của ***hữu hạn*** các vectơ e_n. Nói cách khác không gian vectơ $\langle E\rangle$ sinh bởi E không thể bằng ℓ^2, mà thực ra $\langle E\rangle = c_c$ như đã thấy ở Bài tập 2.8.18. Ở đó ta cũng có c_c dày đặc trong ℓ^2, do đó từ $\langle E\rangle$ chỉ cần qua giới hạn ta sẽ được ℓ^2. Dưới đây ta sẽ chứng tỏ đây là tính chất chung của không gian Hilbert.

Khi H là một không gian tích trong khác 0 thì tồn tại $x \in H$ sao cho $\|x\| = 1$ và do đó tồn tại một họ trực chuẩn trong H. Một ***họ trực chuẩn cực đại*** (hay tối đại) của H là một họ trực chuẩn của H mà ta không thể thêm bất cứ phần tử nào của H vào mà vẫn còn nhận được một họ trực chuẩn, nói cách khác dưới dưới quan hệ chứa trong của tập hợp thì đó là một phần tử cực đại.

4.4.10 Mệnh đề. *Trong một không gian tích trong khác* 0 *bất kì tồn tại một họ trực chuẩn cực đại.*

Chứng minh. Ta dùng Bổ đề Zorn 3.6.2. Nếu H là một không gian tích trong khác 0 thì có một phần tử $x \neq 0$. Khi đó $\{\frac{x}{\|x\|}\}$ là một họ trực chuẩn trong H. Gọi G là tập hợp tất cả các họ trực chuẩn trong H. Trên G xét quan hệ thứ tự là quan hệ chứa trong của tập hợp. Giả sử $K \subset G$ và trên K quan hệ thứ tự là toàn phần. Đặt $E = \bigcup_{F\in K} F$. Như vậy E là hội của tất cả các họ trực chuẩn mà là phần tử của K. Ta kiểm $E \in G$ và E là một chặn trên của K. Mỗi phần tử $e \in E$ là một phần tử của một họ trực chuẩn, nên e là vectơ đơn vị. Nếu $e_1, e_2 \in E$ và $e_1 \neq e_2$ thì tồn tại $F_1, F_2 \in K$ sao cho $e_1 \in F_1$, $e_2 \in F_2$. Ta có $F_1 \subset F_2$ hoặc $F_2 \subset F_1$, do quan hệ thứ tự trên K là toàn phần. Chẳng hạn nếu $F_1 \subset F_2$ thì ta có $e_1, e_2 \in F_2$, và do đó $e_1 \perp e_2$. Vậy E là một họ trực chuẩn. Vì E chứa mọi họ trực chuẩn thuộc K nên E là một chặn trên của K. Bây giờ Bổ đề Zorn khẳng định G có một phần tử cực đại. □

Kết quả sau đây nói lên ý nghĩa của họ trực chuẩn cực đại: một họ trực chuẩn cực đại sinh ra được không gian Hilbert bằng cách lấy tổ hợp tuyến tính và qua giới hạn.

4.4.11 Định lý. *Cho họ trực chuẩn E trong không gian Hilbert H. Các mệnh đề sau là tương đương:*

(a) E là cực đại.

(b) Không gian con sinh bởi E là dày đặc trong H.

Vậy một họ trực chuẩn cực đại sinh ra cả không gian Hilbert bằng tổ hợp tuyến tính và qua giới hạn.

Chứng minh. Giả sử E là cực đại. Lấy $x \in H$. Gọi $y = P_{\overline{\langle E\rangle}}x$. Ta có $(x - y) \perp \overline{\langle E\rangle}$, do đó $(x - y) \perp e, \forall e \in E$. Do E là cực đại nên phải có $x - y = 0$. Vậy $x = y \in \overline{\langle E\rangle}$. Do đó $H = \overline{\langle E\rangle}$.

Ngược lại, giả sử $H = \overline{\langle E\rangle}$. Nếu $x \perp E$ thì $x \perp \langle E\rangle$, nên $x \perp \overline{\langle E\rangle} = H$ (xem 4.6.8, 4.6.18), suy ra $x = 0$. Vậy E là cực đại. □

Không gian Hilbert tách được

Nếu không gian Hilbert H có một họ trực chuẩn cực đại đếm được (điều này được biết là tương đương với việc H là một không gian mêtríc tách được , nghĩa là có một tập con đếm được dày đặc) ta gọi H là một ***không gian Hilbert tách được***.

4.4.12 Ví dụ. Không gian Euclid $\mathbb{F}^n$ dĩ nhiên là tách được. Ở 4.4.9 ta đã thấy ℓ^2 là một không gian Hilbert tách được. Ở 4.5.1 ta thấy $L^2([0,2\pi],\mathbb{R})$ là một không gian Hilbert tách được.

4.4.13 Định lý. *Giả sử không gian Hilbert H có một họ trực chuẩn cực đại vô hạn đếm được E. Giả sử E được đánh chỉ số là $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}^+}$. Với mọi $x \in H$, đặt $x_i = \langle x, e_i\rangle$, thì:*

$$\boxed{x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i} \tag{4.4.14}$$

$$\boxed{\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i} \tag{4.4.15}$$

*và có **Đẳng thức Parseval:***

$$\boxed{\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2.} \tag{4.4.16}$$

Rõ ràng các biểu diễn trên cũng đúng trong trường hợp E là hữu hạn, chỉ thay tổng vô hạn bằng tổng hữu hạn. Như vậy trong không gian Hilbert tách được ta có các công thức biểu diễn vectơ, tích trong, và chuẩn thông qua tọa độ giống như trong không gian Euclid.

Chứng minh. Ta chứng tỏ dãy $\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right)_{n\geq 1}$ là một dãy Cauchy. Do Bất đẳng thức Bessel (Mệnh đề 4.4.2) chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$ hội tụ về một số thực, do đó dãy $\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)_{n\geq 1}$ là một dãy Cauchy. Từ công thức Pythagore ta có

$$\left\|\sum_{i=m+1}^{n} x_i e_i\right\|^2 = \sum_{i=m+1}^{n} |x_i|^2.$$

Điều này cho thấy dãy $\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right)_{n\geq 1}$ là một dãy Cauchy, do đó hội tụ trong H. Vậy tồn tại phần tử $\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$. (Xem thêm 4.6.37.) Ta kiểm tra được ngay $(x - \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i) \perp e_i$, $\forall i \geq 1$ nhờ tính liên tục theo một biến của tích trong. Do đó $x - \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i = 0$. Vậy $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$.

Hai tính chất còn lại là hệ quả đơn giản của tính chất này. Do tính liên tục theo từng biến của tích trong:

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i, y\right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x_i e_i, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \langle e_i, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i.$$

Lấy $y = x$ ta được tính chất thứ ba. □

4.4.17 Ví dụ. Trong ℓ^2 xét họ trực chuẩn cực đại gồm các vectơ $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Với $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell^2$ thì $x_n = x \cdot e_n$, và các công thức ở Định lý 4.4.13 vốn là các định nghĩa:

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2,$$

với $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in \ell^2$ thì

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n.$$

Riêng công thức

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$$

ta có thể kiểm tra trực tiếp hơn như sau. Ta có

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$$

do đó

$$x - \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = (0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$$

dẫn tới

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\|_2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 - \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2.$$

Theo định nghĩa giới hạn của chuỗi thì

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2,$$

nên

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\|_2 = 0,$$

tức là

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n.$$

* Không gian Hilbert bất kì

4.4.18 Bổ đề. *Cho E là một họ trực chuẩn. Khi đó, với mọi $x \in H$, tập $\{e \in E \mid x_e = \langle x, e \rangle \neq 0\}$ là đếm được.*

Chứng minh. Đặt $A_n = \{e \in E \mid |\langle x, e\rangle| \geq 1/n\}$ thì do bất đẳng thức Bessel, A_n là hữu hạn. Suy ra tập

$$\{e \in E \mid \langle x, e\rangle \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

là hội của một họ đếm được các tập hữu hạn nên là đếm được (một kết quả của lý thuyết tập hợp, xem chẳng hạn [KF75],[VTop]). □

Do bổ đề này nên ta có thể phát biểu kết quả tương tự 4.4.13 cho không gian Hilbert bất kì:

4.4.19 Định lý. *Cho họ trực chuẩn cực đại E của không gian Hilbert H. Với mọi $x \in H$, đặt $x_e = \langle x, e\rangle$, thì:*

$$x = \sum_{e \in E} x_e e.$$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{e \in E} x_e \bar{y}_e.$$

$$\|x\|^2 = \sum_{e \in E} |x_e|^2.$$

Ở đây chẳng hạn ta viết $x = \sum_{e \in E} x_e e$ có nghĩa là với một cách đánh chỉ số $(e_i)_{i \in \mathbb{Z}^+}$ bất kì cho tập (đếm được) $\{e \in E \mid x_e \neq 0\}$ thì $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i$.

Chứng minh. Đánh chỉ số $(e_i)_{i \in \mathbb{Z}^+}$ cho tập đếm được $\{e \in E \mid x_e \neq 0\}$. Như trong chứng minh cho trường hợp E là đếm được, chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$ là hội tụ. Ta kiểm tra được ngay $(x - \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i) \perp e, \forall e \in E$, do đó $x - \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i = 0$. Vậy $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$. □

Hai không gian tích trong (trên cùng một trường) H_1 và H_2 được gọi là ***đẳng cấu tích trong*** với nhau nếu tồn tại song ánh tuyến tính Λ từ H_1 lên H_2 bảo toàn tích vô hướng, tức là $\langle \Lambda x, \Lambda y\rangle = \langle x, y\rangle$, với mọi $x, y \in H$. Khi đó, ta còn nói Λ là một ***phép đẳng cấu tích trong*** từ H_1 lên H_2.

Dễ thấy ngay một phép đẳng cấu tích trong thì bảo toàn chuẩn, nghĩa là $\|\Lambda x\| = \|x\|$. Ngược lại do các đẳng thức ở 4.6.1 nên một song ánh tuyến tính mà bảo toàn chuẩn thì cũng bảo toàn tích trong.

4.4.20 Định lý. *Cho E là một họ trực chuẩn tối đại trong không gian Hilbert H. Với $x \in H$, đặt $\hat{x}$ là ánh xạ*

$$\begin{aligned} \hat{x} : E &\to \mathbb{F} \\ e &\mapsto \hat{x}(e) = x_e = \langle x, e\rangle. \end{aligned}$$

Khi đó ánh xạ $x \mapsto \hat{x}$ là một phép đẳng cấu tích trong từ H lên $\ell^2(E)$.

Vậy mỗi không gian Hilbert đều đẳng cấu với một không gian $\ell^2(E)$ nào đó.

Chứng minh. Đặt

$$\begin{aligned} f : H &\to \ell^2(E) \\ x &\mapsto \hat{x}. \end{aligned}$$

Ta kiểm tra f được xác định, tức là chứng tỏ $\hat{x} \in \ell^2(E)$. Với một cách đánh chỉ số $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ bất kì cho tập đếm được $\{e \in E \mid \hat{x}(e) = x_e \neq 0\}$ thì từ 4.4.19 ta có thể thấy

$$\|\hat{x}\|^2_{\ell^2(E)} = \sup_{F\subset E, |F|<\infty} \sum_{e\in F} |\hat{x}(e)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \|x\|^2 < \infty.$$

Như vậy f bảo toàn chuẩn. Dễ kiểm f là tuyến tính. Suy ra f là đơn ánh.

Ta kiểm tra rằng f là toàn ánh. Cho $y \in \ell^2(E)$, ta có

$$\|y\|^2_{\ell^2(E)} = \sup_{F\subset E, |F|<\infty} \sum_{e\in F} |y(e)|^2.$$

Dùng lí luận như ở 4.4.18 ta thấy tập $I = \{e \in E \mid y(e) \neq 0\}$ là đếm được. Đánh chỉ số $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}^+}$ cho tập I này. Đặt

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} y(e_i)e_i.$$

Như trong phần 4.4.13, ta có $x \in H$ tồn tại. Nếu $e_i \in I$ thì $\langle x, e_i\rangle = y(e_i)$. Nếu $e \in E \setminus I$ thì $\langle x, e\rangle = 0 = y(e)$. Suy ra $\hat{x} = y$. Vậy f là toàn ánh.

Từ việc chuẩn xác định tích trong ở 4.6.1 ta suy ra được f bảo toàn tích vô hướng. □

4.5 * Khai triển Fourier

Ở phần này chúng ta chỉ làm việc trên trường thực. Trên $L^2([0, 2\pi])$, với $n \in \mathbb{Z}^+$, đặt

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt),$$

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt).$$

Ta kiểm trực tiếp được rằng họ $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, e_n, f_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\right\}$ là một họ trực chuẩn trong $L^2([0, 2\pi])$, xem Bài tập 4.6.33.

4.5.1 Mệnh đề. *Họ* $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, e_n, f_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\right\}$ *là một họ trực chuẩn cực đại của* $L^2([0, 2\pi])$.

Chứng minh. Ta chỉ miêu tả sơ lược ý cho một chứng minh (có ở chẳng hạn [Con90, tr. 21], hoặc các tài liệu về Giải tích thực). Ta lý luận rằng không gian vectơ sinh bởi họ đã cho, tập hợp các đa thức lượng giác

$$A = \left\langle \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, e_n, f_n \mid n \in \mathbb{Z}^+ \right\} \right\rangle = \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \mid N \in \mathbb{Z}^+ \right\},$$

là dày đặc trong $L^2([0,2\pi])$. Ý cơ bản là các đa thức lượng giác thì dày đặc trong không gian các hàm liên tục, còn các hàm liên tục lại dày đặc trong không gian các hàm bình phương khả tích.

Đặt $B = \{f \in C([0,2\pi]) \mid f(0) = f(2\pi)\}$ là tập hợp các hàm liên tục tuần hoàn trên $[0,2\pi]$. Ta có $A \subset B$. Vì đoạn $[0,2\pi]$ với 0 và 2π được đồng nhất tương ứng với đường tròn đơn vị S^1 trong $\mathbb{R}^2$, nên ta lấy phép tham số hóa thường dùng

$$\begin{aligned} \varphi : [0,2\pi] &\to S^1 \\ t &\mapsto (\cos t, \sin t) \end{aligned}$$

để biến các hàm tuần hoàn trên thành các hàm trên đường tròn. Ánh xạ φ cảm sinh một song ánh bảo toàn chuẩn φ_* giữa B và $C(S^1)$. Tập $\varphi_*(A)$ là một đại số con của $C(S^1)$, và việc ta xét miền xác định là đường tròn giúp $\varphi_*(A)$ tách điểm, do đó $\varphi_*(A)$ dày đặc trong $C(S^1)$ theo Định lý Stone–Weierstrass. Mặt khác người ta biết $C(S^1)$ dày đặc trong $L^2(S^1)$ (so sánh 2.6.22), từ đó có thể suy ra được $\varphi_*(A)$ dày đặc trong $L^2(S^1)$. Như thế A là dày đặc trong $\{f \in L^2([0,2\pi]) \mid f(0) = f(2\pi)\}$, nhưng đây cũng chỉ là $L^2([0,2\pi])$. □

Như vậy theo 4.4.13 mỗi hàm $h \in L^2([0,2\pi])$ đều có phân tích trong không gian $L^2([0,2\pi])$:

$$h = \left\langle h, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\langle h, e_n \rangle e_n + \langle h, f_n \rangle f_n \right).$$

Vậy bất kì hàm bình phương khả tích nào cũng xấp xỉ được bằng tổng của các hàm lượng giác theo chuẩn L^2 (không phải xấp xỉ từng điểm).

Tóm tắt lại, với $a_0 = \left\langle h, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$, $a_n = \langle h, e_n \rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $b_n = \langle h, f_n \rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}}$,

Công thức khai triển Fourier:

$$h = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

với

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(t) \cos(nt)\, dt, \ n \geq 0, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(t) \sin(nt)\, dt, \ n \geq 1. \end{aligned}$$

4.5.2 Ví dụ. Cho $f(x) = x$, $x \in [0, 2\pi]$. Dùng tích phân từng phần, ta tính được

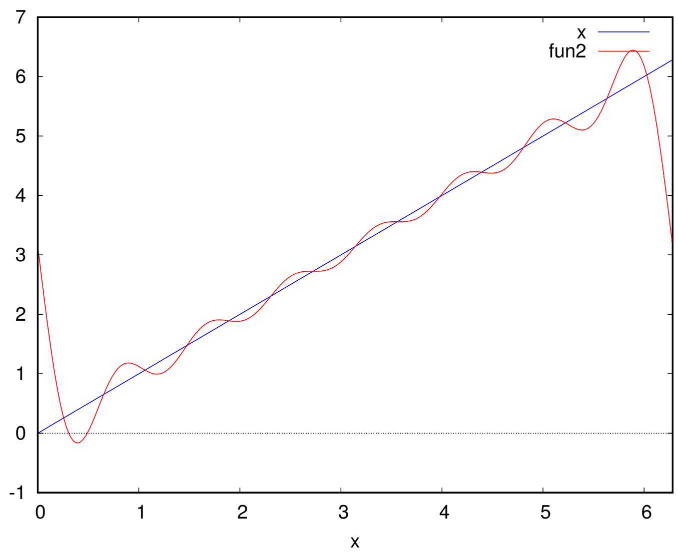
$$\left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \int_0^{2\pi} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dx = \sqrt{2\pi^3},$$

$$\begin{aligned}\langle f, e_n \rangle &= \int_0^{2\pi} x \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx)\, dx = x \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{n} \sin(nx)\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{n} \sin(nx)\, dx \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle f, f_n \rangle &= \int_0^{2\pi} x \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)\, dx = x \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{-1}{n} \cos(nx)\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{-1}{n} \sin(nx)\, dx \\ &= \frac{-2\sqrt{\pi}}{n}.\end{aligned}$$

Ta được $a_0 = 2\pi$, với $n \geq 1$ thì $a_n = 0$, $b_n = \frac{-2}{n}$. Vậy khai triển Fourier của f là

$$\pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin nx.$$



Hình 4.5.3: Hàm $f(x) = x$, $x \in [0, 2\pi]$, và tổng 8 phần tử đầu của chuỗi Fourier của hàm này.

Ngoài ra, áp dụng Đẳng thức Parseval (4.4.16) cho khai triển Fourier của f ta thu được

$$\|f\|^2_{L^2([0,2\pi])} = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle^2 = \left(\sqrt{2\pi^3}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2\sqrt{\pi}}{n}\right)^2.$$

Tính
$$\|f\|^2_{L^2([0,2\pi])} = \int_0^{2\pi} x^2\, dx = \frac{8\pi^3}{3},$$
ta rút ra một công thức đặc biệt về tổng của chuỗi số:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Chuỗi Fourier có nhiều ứng dụng như vào việc tìm và xấp xỉ nghiệm của phương trình (có thể đọc ở [SS02]), từ đó có ứng dụng vào kĩ thuật, như trong xử lí tín hiệu.

4.6 Bài tập

Không gian tích trong

4.6.1. ✓ Tích trong tính được từ chuẩn sinh bởi tích trong đó:

(a) Trên trường thực thì
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

(b) Trên trường phức thì
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) + \frac{1}{4}\left(i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2\right).$$

4.6.2. Chứng tỏ trên trường thực thì $x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. Điều này có đúng trên trường phức?

4.6.3. Cho H là một không gian tích trong và $x, y \in H$. Chứng minh rằng nếu $x \perp y$ thì $\|x+y\| = \|x-y\|$. Hãy giải thích ý nghĩa hình học của đẳng thức này.

4.6.4. Trong một không gian tích trong trên trường thực, chứng tỏ nếu $\|x\| = \|y\|$ thì $(x+y)\perp(x-y)$. Hãy tìm ý nghĩa hình học của điều này.

4.6.5. Cho không gian tích trong H trên trường $\mathbb{R}$. Chứng tỏ với mọi $a, b \in H$ thì
$$\|a+b\|\,\|a-b\| \le \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

4.6.6. Trong một không gian tích trong, chứng tỏ nếu $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ và $y_n \xrightarrow{n\to\infty} y$ thì $\langle x_n, y_n\rangle \xrightarrow{n\to\infty} \langle x, y\rangle$.

4.6.7. Trong một không gian tích trong, giả sử $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ và $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ là hai dãy trong quả cầu đơn vị và $\lim_{n\to\infty}\langle x_n, y_n\rangle = 1$. Chứng tỏ $\lim_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = 0$.

4.6.8. Trong một không gian tích trong E, cho $x \in E$ và $A \subset E$. Chứng tỏ nếu $x \perp A$ thì $x \perp \overline{A}$.

4.6.9. Trong một không gian tích trong E, cho $y_1, y_2 \in E$. Giả sử $\forall x \in E, \langle x, y_1\rangle = \langle x, y_2\rangle$. Chứng tỏ $y_1 = y_2$.

4.6.10. Trong không gian ℓ^p với $1 \le p \le \infty$, xét $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$ và $e_2 = (0, 1, 0, \dots)$. Chứng tỏ đẳng thức hình bình hành được thỏa với e_1 và e_2 khi và chỉ khi $p = 2$. Suy ra ℓ^p với $1 \le p \le \infty$, $p \ne 2$, không phải là một không gian tích trong. Vậy ***ℓ^p là không gian Hilbert khi và chỉ khi $p = 2$***.

4.6.11. Trong không gian $L^p(\mathbb{R})$ với $1 \le p \le \infty$, xét $f_1 = \chi_{[0,1)}$ và $f_2 = \chi_{[1,2)}$, tức là

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1), \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1) \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1, 2), \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [1, 2). \end{cases}$$

Chứng tỏ đẳng thức hình bình hành được thỏa với f_1 và f_2 khi và chỉ khi $p = 2$. Vậy ***$L^p(\mathbb{R})$ là không gian Hilbert khi và chỉ khi $p = 2$***.

4.6.12. Cho ánh xạ

$$\begin{aligned} T : \ell^2 &\to \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) &\mapsto Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2}. \end{aligned}$$

(a) Kiểm rằng ánh xạ T được định nghĩa tốt, tức là Tx được xác định.

(b) Tìm $y \in \ell^2$ sao cho với mọi $x \in \ell^2$ thì $Tx = \langle x, y \rangle_{\ell^2}$.

(c) Dùng câu (b), chứng tỏ T là ánh xạ tuyến tính liên tục và tính chuẩn của T.

4.6.13. Kiểm đây là một phiếm hàm tuyến tính liên tục và tìm chuẩn, dùng phương pháp tích trong:

$$\begin{aligned} T : L^2((0, 1)) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_0^1 f(x) x \, dx. \end{aligned}$$

Phép chiếu vuông góc

4.6.14. Cho H là một không gian Hilbert và cho M là một không gian vectơ con của H. Chứng tỏ bao đóng $\overline{M}$ của M là một không gian Hilbert.

4.6.15. Cho H là một không gian tích trong và $M \subset H$. Chứng tỏ $M^\perp$ là một không gian vectơ con đóng của H.

4.6.16. Cho M là một không gian con đóng của không gian Hilbert H và $M \ne H$. Chứng tỏ $M^\perp \ne \{0\}$.

4.6.17. ✓ Cho H là một không gian tích trong và $x \in H$.

(a) Chứng tỏ rằng $x^\perp$ chính là nhân của phiếm hàm $y \mapsto T(y) = \langle y, x \rangle$, tức là $x^\perp = \ker T = T^{-1}(\{0\})$.

(b) Chứng tỏ rằng $x^{\perp}$ là một không gian vectơ con đóng của H.

(c) Cho $M \subset H$. Chứng tỏ

$$M^{\perp} = \bigcap_{x \in M} x^{\perp}.$$

(d) Suy ra $M^{\perp}$ là một không gian vectơ con đóng của H.

(e) Chứng tỏ $M^{\perp} = \left(\overline{M}\right)^{\perp}$.

4.6.18. ✓ Cho H là một không gian Hilbert. Cho $\emptyset \neq M, N \subset H$. Điều nào sau đây là đúng?

(a) $M^{\perp} \neq \emptyset$.

(b) $M \subset N \implies M^{\perp} \subset N^{\perp}$.

(c) $M \subset N \implies N^{\perp} \subset M^{\perp}$.

(d) $M \subsetneq N \implies N^{\perp} \subsetneq M^{\perp}$.

(e) $M^{\perp} = \overline{M}^{\perp}$.

(f) $M^{\perp} = \langle M \rangle^{\perp}$.

4.6.19. Cho M là một không gian vectơ con đóng của không gian Hilbert H. Chứng tỏ $x \perp M$ khi và chỉ khi $\|x\| = d(x, M)$. Kết quả này còn đúng không nếu bỏ giả thiết M là đóng?

4.6.20. Cho M là một không gian vectơ con đóng của không gian Hilbert H. Chứng tỏ $M = (M^{\perp})^{\perp}$. Kết quả này còn đúng không nếu bỏ giả thiết M là đóng?

4.6.21. Trong không gian Hilbert H cho $a \neq 0$. Chứng tỏ

$$d(x, a^{\perp}) = \frac{|\langle x, a \rangle|}{\|a\|}.$$

Ứng dụng, trong không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ hãy tìm lại công thức cho khoảng cách từ một điểm $p = (x, y, z)$ tới một mặt phẳng $ax + by + cz = 0$.

4.6.22. Cho M là một không gian con đóng của không gian Hilbert H. Cho $x \in H$. Chứng tỏ chiếu của x xuống M là duy nhất. Cụ thể hãy chứng tỏ nếu y_1 và y_2 thuộc M thỏa $(x - y_1) \perp M$ và $(x - y_2) \perp M$ thì $y_1 = y_2$, theo các bước sau:

(a) Chứng tỏ $(y_1 - y_2) \perp M$.

(b) Chứng tỏ $(y_1 - y_2) \perp (y_1 - y_2)$.

(c) Chứng tỏ $y_1 - y_2 = 0$.

4.6.23. Chứng minh Mệnh đề 4.2.6.

4.6.24. ✓ Với $n \in \mathbb{Z}^+$ cố định gọi M là tập tất cả các dãy số thực bằng 0 từ phần tử thứ $(n+1)$ trở đi, tức $M = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$.

(a) Hãy kiểm M là một không gian vectơ con của ℓ^2, do đó là một không gian định chuẩn con của ℓ^2. Hãy xác định số chiều của M.

(b) Chứng minh M là một tập con đóng của ℓ^2. Hỏi M có là một không gian Hilbert không?

(c) Xét ánh xạ

$$\begin{aligned} P_M : \ell^2 &\to M \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) &\mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots). \end{aligned}$$

Như vậy ánh xạ P_M chỉ giữ lại n tọa độ đầu tiên của x, các tọa độ còn lại được gán thành 0. Hãy kiểm P_M là một ánh xạ tuyến tính.

(d) Hãy kiểm rằng với mọi $x \in \ell^2$ thì $(x - P_M x) \perp M$. Vậy P_M chính là phép chiếu từ ℓ^2 xuống M.

(e) Chứng tỏ $\|P_M x\| \leq \|x\|$.

(f) Chứng tỏ P_M là một ánh xạ tuyến tính liên tục.

(g) Hãy tìm không gian trực giao của M, tức $M^\perp$.

(h) Hãy tìm $\mathrm{Im} P_M$ và $\ker P_M$, tức tập ảnh và tập nhân của P_M.

4.6.25. Xét không gian Hilbert $L^2([0,1], \mathbb{R})$ trên trường thực. Cho $f(x) = x$ và $g(x) = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

(a) Tính $\|f\|_{L^2}$ và $\|g\|_{L^2}$.

(b) Tính $\langle f, g \rangle_{L^2}$.

(c) Tính $P_g f$.

(d) Tìm $h \in L^2([0,1], \mathbb{R})$ sao cho $h \neq 0$ và $h \perp g$.

4.6.26. Xét không gian Hilbert $H = L^2([0,1], \mathbb{R})$. Gọi M là tập hợp tất cả các hàm hằng trên $[0,1]$.

(a) Chứng tỏ M là một không gian vectơ con của H.

(b) Chứng tỏ $\{1\}$ là một cơ sở trực chuẩn của M.

(c) Vì sao M là không gian vectơ con đóng của H?

(d) Cho hàm $f(x) = x$. Tìm $P_M f$.

4.6.27. Trong không gian Hilbert $L^2([0,1], \mathbb{R})$ cho $f(t) = t^2$.

(a) Đặt $M = \{x \in L^2([0,1]) \mid \int_0^1 x(t)\, dt = 0\}$. Chứng tỏ $M = \langle 1 \rangle^\perp$.

(b) Tìm hình chiếu của f và khoảng cách từ f tới M.

4.6.28. ✓ Trong không gian Hilbert $L^2([0,1], \mathbb{R})$ hãy tìm một cơ sở trực chuẩn cho không gian vectơ con sinh bởi các hàm $1, t, t^2$.

4.6.29. ✓ Trong không gian Hilbert $L^2([0,1], \mathbb{R})$ cho $f(t) = t^2$. Tìm hình chiếu của f và khoảng cách từ f tới các không gian vectơ con M với M là tập hợp các đa thức có bậc nhỏ hơn hay bằng 1.

Họ trực chuẩn

4.6.30. Trong ℓ^2 xét họ $E = (e_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ các vectơ $e_n = (0,\dots,0,1,0,\dots)$, $n \in \mathbb{Z}^+$, với số 1 ở tọa độ thứ n của e_n. Cho $x = (1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots)$.

(a) Kiểm E là một họ trực chuẩn của ℓ^2.

(b) Kiểm $x \in \ell^2$.

(c) Kiểm $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$.

(d) Giải thích vì sao x không phải là một tổ hợp tuyến tính của hữu hạn phần tử trong E, nhưng là giới hạn của một dãy các phần tử là tổ hợp tuyến tính của hữu hạn phần tử trong E.

4.6.31. Trong không gian Hilbert $L^2([0,1],\mathbb{R})$:

(a) Chứng minh rằng họ $E = \{1, \sin 2\pi x, \cos 4\pi x\}$ là một họ trực giao.

(b) Gọi M là không gian tuyến tính sinh bởi họ E trên, hãy tìm hình chiếu $P_M f$ với $f(x) = x$.

4.6.32. Trong không gian Hilbert $L^2([0,2\pi],\mathbb{R})$, hãy trực chuẩn hóa họ $(\cos, \sin)$.

4.6.33. ✓ Trên $L^2([0,2\pi],\mathbb{R})$, với $n \in \mathbb{Z}^+$, đặt

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt),$$

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt).$$

Hãy kiểm bằng tính toán trực tiếp rằng họ $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, e_n, f_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\right\}$ là một họ trực chuẩn trong $L^2([0,2\pi],\mathbb{R})$.

4.6.34. Cho $(a_1,\cdots,a_n)$ là một cơ sở tuyến tính của $\mathbb{R}^n$ và $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ là n số thực dương. Với mọi $x = \sum_{i=1}^n x_i a_i$ và $y = \sum_{i=1}^n y_i a_i$ trong $\mathbb{R}^n$ ta đặt

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i y_i.$$

Chứng minh f là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^n$, với tích vô hướng này thì $\mathbb{R}^n$ là một không gian Hilbert, $(a_1,\cdots,a_n)$ là một họ trực giao, và $(\alpha_1^{-1/2}a_1,\cdots,\alpha_n^{-1/2}a_n)$ là một họ trực chuẩn.

4.6.35. Cho $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ là một họ trực chuẩn trong một không gian tích trong H và một họ $(c_i)_{i=1,\dots,n}$ trong $\mathbb{F}$. Chứng minh $\left\|\sum_{i=1}^n c_i e_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^n |c_i|^2$.

4.6.36. Chứng tỏ trong một không gian tích trong thì một họ trực giao bất kì là một họ độc lập tuyến tính.

4.6.37. Cho $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ là một họ trực chuẩn trong một không gian Hilbert H và $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}^+} \in \ell^2$. Chứng minh:

(a) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ hội tụ trong H.

(b) $\left\|\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$.

4.6.38. Cho $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ là một họ trực chuẩn trong một không gian Hilbert H. Chứng tỏ với mọi $x \in H$:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

(b) $\lim_{n\to\infty} \langle x, e_n\rangle = 0$.

4.6.39. Giả sử E là một họ trực chuẩn cực đại trong không gian Hilbert H, và $x, y \in H$. Chứng tỏ nếu $\forall e \in E$, $\langle x, e\rangle = \langle y, e\rangle$ thì $x = y$.

4.6.40. Trong không gian định chuẩn ℓ^2 gọi $e_1 = (1, 0, \dots)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots)$. Chứng tỏ tồn tại một phiếm hàm tuyến tính liên tục f trên ℓ^2 sao cho $f(e_1) = 1$ và $f(e_2) = 0$, bằng một trong hai cách sau:

(a) Dùng Định lý Hahn–Banach.

(b) Xét phiếm hàm tuyến tính trong không gian tích trong đại diện bởi e_1.

4.6.41. Cho H là một không gian Hilbert và $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ là một dãy trực chuẩn trên H. Đặt $M = \langle((e_n)_{n\in\mathbb{Z}^+})\rangle$ là bao tuyến tính của tập $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$, tức là không gian vectơ con của H gồm tất cả các tổ hợp tuyến tính của các phần tử của tập $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$.

(a) Chứng minh rằng với mọi $x \in H$, thì $x \in \overline{M}$ khi và chỉ khi

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k.$$

(b) Cho $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ là một dãy trực chuẩn trên H và đặt $N = \langle((f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+})\rangle$ là bao tuyến tính của tập $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$, Chứng minh rằng $\overline{M} = \overline{N}$ khi và chỉ khi với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$ thì

$$e_n = \sum_{k=1}^{\infty}\langle e_n, f_k\rangle f_k$$

và

$$f_n = \sum_{k=1}^{\infty}\langle f_n, e_k\rangle e_k.$$

Kết quả này tương tự kết quả ta đã biết trong Đại số tuyến tính trên không gian hữu hạn chiều: Hai bộ vectơ sinh ra cùng một không gian vectơ con khi và chỉ khi mỗi vectơ trong cơ sở này là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ trong cơ sở kia.

Khai triển Fourier

4.6.42. Tìm khai triển Fourier của hàm:

(a) $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}, \\ 0, & \frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}, \\ x - 2\pi, & \frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi. \end{cases}$

4.6.43. Cho $f \in L^2([0, 2\pi])$ và $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$ là khai triển Fourier của f. Áp dụng Đẳng thức Parseval, chứng tỏ

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 \, dx.$$

4.6.44. Tìm khai triển Fourier của hàm

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le \pi, \\ (x - 2\pi)^2, & \pi \le x \le 2\pi. \end{cases}$$

Áp dụng đẳng thức Parseval, chứng tỏ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Các bài toán khác

4.6.45. * Trong không gian định chuẩn ℓ^2 gọi $e_1 = (1, 0, \dots)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots)$, $e_3 = (0, 0, 1, \dots)$…. Chứng tỏ dãy $(e_n)_{n \ge 1}$ hội tụ yếu (xem 3.8.37) nhưng không hội tụ.

4.6.46. * Cho H và K là hai không gian Hilbert trên cùng một trường $\mathbb{F}$. Giả sử $T : H \to K$ là một ánh xạ tuyến tính liên tục. Với $y \in K$, đặt với mỗi $x \in H$:

$$f(x) = \langle Tx, y \rangle .$$

(a) Chứng tỏ f là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên H.

(b) Áp dụng định lý biểu diễn Riesz, chứng tỏ tồn tại duy nhất một phần tử của K, đặt là $T^* y$, thỏa
$$\forall x \in H, f(x) = \langle x, T^* y \rangle .$$

(c) Chứng tỏ T^* là một ánh xạ tuyến tính liên tục từ K vào H. Toán tử T^*, được xác định bởi tính chất
$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle , \forall x \in H, \forall y \in K,$$
được gọi là ***toán tử liên hợp*** của T.

4.6.47. * Đây là một kết quả về tính toán chuẩn của ánh xạ tuyến tính trên $\mathbb{R}^n$. Cho $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tuyến tính. Gọi T^* là toán tử liên hợp của T, được định nghĩa bởi

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$$

với tích vô hướng Euclid.

(a) Chứng tỏ ma trận biểu diễn $[T^*]$ là ma trận liên hợp của ma trận $[T]$.

(b) Chứng tỏ ánh xạ tuyến tính $T^* T$ có n giá trị riêng thực không âm.

(c) Chứng tỏ tồn tại một cơ sở trực chuẩn $\{e_i \mid 1 \le i \le n\}$ gồm các vectơ riêng e_i ứng với trị riêng λ_i của T^*T. Hãy kiểm rằng với chuẩn Euclid $\|\cdot\|_2$ thì

$$\begin{aligned}\|Tx\|_2^2 &= \langle T^*Tx, x\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i(T^*T)(e_i), \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \le \max_i \lambda_i \, \|x\|_2^2 .\end{aligned}$$

(d) Hãy kiểm rằng $\|T\| = \sqrt{\max_{1\le i\le n} \lambda_i}$ trong đó λ_i là các giá trị riêng của T^*T.

4.6.48. Trở lại Ví dụ 4.1.17. Với $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+} \in \ell^2$, đặt

$$T(x) = \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots\right).$$

Như trong Đại số tuyến tính, ta nói $\lambda \in \mathbb{C}$ là một ***trị riêng*** (eigenvalue) và $x \in \ell^2$ là một ***vectơ riêng*** (eigenvector) của T ứng với λ nếu $x \neq 0$ và $T(x) = \lambda x$.

(a) Số thực 0 có phải là một trị riêng của T hay không?

(b) Chứng tỏ với mỗi số nguyên dương n thì $\frac{1}{n}$ là một trị riêng của T. Hãy tìm một vectơ riêng tương ứng với trị riêng này.

(c) Chứng tỏ ℓ^2 có một cơ sở trực chuẩn tối đại (cơ sở của không gian Hilbert) gồm các vectơ riêng của T.

(d) Đặt

$$T_n(x) = \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots, \frac{x_n}{n}, 0, 0, \dots\right).$$

Tìm các trị riêng và vectơ riêng của T_n.

(e) Chứng tỏ dãy $(T_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ trong $L(\ell^2, \ell^2)$ về T. Có nhận xét gì từ kết quả này?

Gợi ý học tiếp

Có những nghiên cứu sâu hơn về các đề tài đã xuất hiện trong môn học này, và những nghiên cứu về những đề tài chưa xuất hiện ở đây như tôpô yếu, không gian đối ngẫu, trị riêng của toán tử tuyến tính, các toán tử đặc biệt, đại số toán tử, … và các ứng dụng. Có thể đọc những tài liệu nâng cao hơn như [Duc05], [Kre78], [RY08], [Bre11], [Con90], [Lax02].

Dưới đây là danh sách gợi ý một số môn học trong chương trình đào tạo trình độ đại học sử dụng và phát triển các nội dung của môn Giải tích hàm, mà sinh viên có thể học tiếp theo:

- Giải tích phi tuyến: nghiên cứu sâu hơn về một số đề tài của môn Giải tích hàm như phương pháp điểm bất động, phương pháp biến phân, ….
- Giải tích thực: nghiên cứu sâu hơn về không gian L^p, không gian Sobolev, khai triển và biến đổi Fourier, ….
- Phương trình đạo hàm riêng: Các phương trình đạo hàm riêng được sử dụng rộng rãi để mô hình hóa các hiện tượng tự nhiên và xã hội. Lý thuyết phương trình đạo hàm riêng sử dụng nhiều công cụ Giải tích hàm, như các không gian Banach và Hilbert.
- Giải tích số: lý thuyết xấp xỉ, phương pháp Garlekin, phương pháp phần tử hữu hạn, … để giải xấp xỉ nghiệm của phương trình đạo hàm riêng.
- Quy hoạch phi tuyến trong Tối ưu.
- Xử lý tín hiệu số trong Tin học.
- Giải tích hàm trong Thống kê.

Gợi ý cho một số bài tập

1.4.13 Nhận xét $d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^{n-1} d(x_2, x_1)$. Suy ra với $n > m$ thì $d(x_n, x_m) \leq \left(\sum_{i=m}^{n} \alpha^{i-1}\right) d(x_2, x_1)$. Với $\alpha < 1$ chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha^{i-1}$ hội tụ.

2.8.12 Dùng tính chất dãy Cauchy của dãy tổng riêng phần của chuỗi.

2.8.15 Chuỗi hội tụ thì phần tử với chỉ số đủ lớn phải nhỏ hơn 1.

2.8.28 Có thể xem lại tính chất này của tích phân Riemann ở [VGt3].

2.8.32 Đổi biến $u = 1 + e^{nx}$ và viết $\frac{1}{(u-1)u} = \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}$.

2.8.37 Vì hàm f_n liên tục trên$[0, 1]$ nên nó có giá trị lớn nhất tại một điểm x_n nào đó, và $\|f_n\| = f_n(x_n)$. Dãy $(x_n)_n$ có một dãy con $(x_{n_k})_k$ hội tụ về một điểm x nào đó. Lấy l đủ lớn sao cho $f_{n_l}(x) < \epsilon$. Lấy $k > l$ đủ lớn sao cho $f_{n_l}(x_{n_k}) - f_{n_l}(x) < \epsilon$. Khi đó $f_{n_k}(x_{n_k}) \leq f_{n_l}(x_{n_k}) < 2\epsilon$.

2.8.39 Dùng tính cộng đếm được của độ đo.

2.8.41 Dùng Bất đẳng thức Cauchy.

2.8.48 Xét tính lồi với e_1 và e_2.

2.8.49 Có thể dùng tính chất $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$, do Định lý giá trị trung bình.

3.8.15 Dùng Định lý Ascoli.

3.8.19 Dùng 3.8.17

3.8.21 Tham khảo mục 3.5.

3.8.28 Áp dụng định lý Hahn–Banach cho không gian sinh bởi vectơ $y - x$ và phiếm hàm tuyến tính f định nghĩa trên đó sao cho $f(y - x) \neq 0$.

3.8.29 Áp dụng Định lý Hahn–Banach cho không gian sinh bởi vectơ x và phiếm hàm tuyến tính f định nghĩa trên đó sao cho $f(x) = \|x\|^2$. Tương tự (hoặc dùng) Ví dụ 3.6.3.

3.8.32 Áp dụng Định lý Hahn–Banach cho không gian sinh bởi M và x và phiếm hàm tuyến tính f định nghĩa trên đó sao cho $f(M) = \{0\}$, $f(x) \neq 0$. Để thấy tính liên tục của f, làm giống phần đầu của chứng minh của Định lý Hahn–Banach. Vấn đề liên tục của f tương đương với việc tồn tại số thực $\alpha > 0$ sao cho $\forall y \in M, \|x - y\| > \alpha$, tức là đồng nghĩa với x không phải là một điểm dính của M.

3.8.33 Cách 1: Để thấy tính liên tục của Λ, viết phần tử bất kì của H ở dạng tx_0+y với $y \in \ker f$ dùng bài 3.8.27, rồi làm giống như trong chứng minh của Định lý Hahn–Banach, tham khảo bài 3.8.32. Cách 2: Lấy $x \notin \ker \Lambda$. Tồn tại quả cầu $B(x,r)$ sao cho $B(x,r) \cap \ker \Lambda = \emptyset$. Giả sử $\Lambda x > 0$, dùng tính tuyến tính chứng tỏ $\Lambda(B(x,r)) > 0$, dẫn tới $\Lambda(B(0,r)) > -\Lambda x$, dẫn tới Λ bị chặn trên $B(0,r)$. Cách 3: Giả sử f không liên tục tại 0, khi đó có $\epsilon > 0$, có dãy (x_n) với $\|x_n\| < \frac{1}{n}$ mà $|\Lambda(x_n)| \geq \epsilon$. Lấy $x \notin \ker \Lambda$, đặt $y_n = x - \frac{\Lambda x}{\Lambda x_n} x_n$ thì $y_n \in \ker \Lambda$ và $y_n \to x$, mâu thuẫn.

3.8.34 Dùng 3.6.3.

4.6.10 Dùng đẳng thức hình bình hành, xem Ví dụ 4.1.15.

4.6.13 Phiếm hàm cho bởi tích trong.

4.6.14 Xem 2.8.3.

4.6.19 Dùng 4.2.6, hoặc dùng ý trong chứng minh của 4.2.4.

4.6.34 Các chuẩn trên $\mathbb{R}^n$ đều tương đương.

4.6.41 Xem bài 4.6.14.

4.6.42 (a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k+1} \cos(2k+1)x$.

Tài liệu tham khảo

[Ang97] Đặng Đình Áng, *Nhập môn Giải tích*, NXB Giáo dục, 1997.

[Bre11] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, 2011. Giáo trình cho trình độ sau đại học.

[Con90] John B. Conway, *A course in functional analysis*, Springer-Verlag, 1990.

[DD02] Kenneth R. Davidson and Allan P. Donsig, *Real Analysis with Real Applications*, Prentice Hall, 2002. Giáo trình giải tích cho trình độ đại học.

[Duc06] Dương Minh Đức, *Giáo trình Toán Giải Tích 1 (Toán vi tích phân A1)*, NXB Thống kê, Tp. Hồ Chí Minh, 2006.

[Duc05] Dương Minh Đức, *Giải tích hàm*, NXB Đại Học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh, 2005.

[Duc06b] Dương Minh Đức, *Lý thuyết độ đo và tích phân*, NXB Đại Học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh, 2006.

[KF75] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Introductory real analysis*, Dover, 1975. Giáo trình giải tích cho trình độ đại học. Trước đây có bản dịch tiếng Việt.

[Kre78] Erwin Kreyszig, *Introductory functional analysis and applications*, John Wiley and sons, 1978. Tương đối dễ hiểu cho trình độ đại học.

[Lang97] Serge Lang, *Undergraduate analysis*, 2nd ed., Springer, 1997. Kiến thức giải tích viết cho trình độ đại học.

[Lax02] Peter D. Lax, *Functional analysis*, Wiley-Interscience, 2002. Sách tham khảo cho trình độ sau đại học.

[RF10] H. L. Royden, P. M. Fitzpatrick, *Real Analysis*, 4th edition, Pearson, 2010. Giáo trình giải tích thực viết cho trình độ đại học.

[Rud2] W. Rudin, *Real and complex analysis*, 3rd edition, McGraw-Hill, New York, 1986.

[RY08] Bryan P. Rynne and Martin A. Youngson, *Linear Functional Analysis*, 2nd edition, Springer-Verlag, 2008. Giáo trình viết cho trình độ đại học, phần sau có những nội dung nâng cao hơn.

[SS05] Elias M. Stein, Rami Shakarchi, *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilber spaces*, Princeton University Press, 2005. Giáo trình viết cho trình độ đại học.

[SS02] Elias M. Stein, Rami Shakarchi, *Fourier analysis, an introduction*, Princeton University Press, 2002.

[TT15] Đinh Ngọc Thanh, Đặng Đức Trọng, *Lý thuyết độ đo và xác suất*, NXB Đại Học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh, 2015.

[TQTT11] Đặng Đức Trọng, Phạm Hoàng Quân, Đặng Hoàng Tâm, Đinh Ngọc Thanh, *Giải tích hàm*, NXB Đại Học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh, 2011.

[TTQ11] Đặng Đức Trọng, Đinh Ngọc Thanh, Phạm Hoàng Quân, *Giáo trình Giải tích 2*, NXB Đại Học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh, 2011.

[TTT19] Đặng Đức Trọng, Đinh Ngọc Thanh, Nguyễn Huy Tuấn, *Giải tích 2*, NXB Đại học Quốc gia Tp. Hồ Chí Minh, 2019.

[Tuy05] Hoàng Tụy, *Hàm thực & Giải tích hàm*, NXB Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2005.

[VGt3] Huỳnh Quang Vũ, *Bài giảng tích phân bội và Giải tích vectơ*, `https://sites.google.com/view/hqvu/teaching`.

[VTop] Huỳnh Quang Vũ, *Lecture notes on Topology*, `https://sites.google.com/view/hqvu/teaching`.

Chỉ mục