
MÉMOIRE D'ANALYSE

SUR

LE MOUVEMENT DE LA CHALEUR DANS LES FLUIDES.

PAR M. FOURIER.

Lu à l'Académie royale des Sciences, le 4 septembre 1820.

ON est parvenu à exprimer par des équations générales à différences partielles les conditions du mouvement des fluides. Cette découverte, qui est un des plus beaux résultats de la géométrie moderne, est due à d'Alembert et à Euler. Le premier a publié ses recherches dans l'ouvrage qui a pour titre : *Essai sur la résistance des fluides*. Euler a traité ce même sujet dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, année 1755. Il y donne ces équations sous une forme simple et distincte qui embrasse tous les cas possibles, et il les démontre avec cette clarté admirable qui est le caractère principal de tous ses écrits.

Les équations générales qui se rapportent au mouvement des liquides sont au nombre de quatre : trois d'entre elles expriment l'action des forces accélératrices ; la quatrième est donnée par la condition de la continuité.

Pour connaître le mouvement du liquide, il faut pouvoir

déterminer à chaque instant la vitesse actuelle d'une molécule quelconque, la direction de son mouvement, et la pression qui s'exerce en ce point de la masse fluide. Ainsi l'on regarde, dans cette analyse, comme grandeurs inconnues, trois quantités qui mesurent les vitesses partielles d'une même molécule dans le sens des trois coordonnées orthogonales, et une quatrième quantité qui mesure la pression. Ces quatre inconnues, et le temps écoulé, sont les seuls éléments du calcul. Dans les fluides élastiques, tels que l'air, la densité est variable, et elle a avec la pression un rapport très-simple que des expériences réitérées ont démontré. Il y a donc toujours un nombre d'équations précisément égal à celui des quantités inconnues. Les conditions physiques de la question se trouvent ainsi déposées dans le calcul et rigoureusement exprimées, ce qui était l'objet spécial de cette recherche.

Après cet exposé nous remarquerons que la température variable des molécules fluides est aussi une cause dynamique, que l'on ne doit point omettre d'introduire dans le calcul. Elle influe toujours sur le mouvement dans les substances aériformes, car il ne peut y avoir de changement de densité ou de pression sans qu'il n'en résulte des changements de température; et cette même cause concourt aussi à déterminer les mouvements des liquides, toutes les fois que la distribution de la chaleur n'est pas uniforme. Nous retrouvons cette action de la chaleur dans les grands phénomènes de la nature. Les mouvements généraux et périodiques des diverses parties de l'atmosphère, et les courants principaux de l'Océan, sont occasionés par l'inégale distribution de la chaleur solaire, dont l'effet se combine avec ceux de la gra-

tivité et de la force centrifuge. Ces considérations, et plusieurs autres du même genre, m'ont porté à rechercher avec beaucoup de soin l'expression analytique des mouvements de la chaleur dans l'intérieur des masses fluides. Il est évident de soi-même que la température de chaque molécule fluide est un élément variable qui modifie tous les mouvements intérieurs; mais il ne suffit point d'introduire dans le calcul de ces mouvements une quantité qui désigne la température; il faut ajouter une équation spéciale qui se rapporte aux variations de la chaleur, en exprimant la distribution instantanée. L'objet précis de notre Mémoire est de découvrir cette nouvelle équation, afin de la joindre à celles qui représentent l'effet des forces accélératrices, et de compléter ainsi l'expression analytique des mouvements des fluides.

Nous avons considéré principalement les fluides qui ont été appelés incompressibles. Les mêmes principes s'appliquent aux fluides aériformes, quoique la forme des équations soit différente; mais nous pensons en ce qui concerne cette dernière espèce de corps que, pour achever entièrement la recherche des équations générales, il faudrait se fonder sur une série d'observations que nous ne possédons point encore.

A la suite des quatre premières équations hydrodynamiques qui sont connues et démontrées depuis long-temps, j'ai écrit celle qui exprime les variations de la température. Les géomètres jugeront de ce nouveau résultat.

α , β , γ désignent les trois vitesses orthogonales d'une molécule dont les coordonnées sont x , y , z ; ϵ est la densité variable de cette molécule; θ est la température; t le temps écoulé.

Cette cinquième équation se forme, comme on peut le voir, d'une première partie qui exprime la distribution de la chaleur dans les masses solides : elle coïncide en cette partie avec l'équation générale que j'ai donnée dans mes premiers Mémoires en 1807, et elle contient de plus les termes qui dépendent du déplacement des molécules.

Dans la première partie de notre démonstration, nous avons rappelé celle des équations qui expriment le mouvement de la chaleur dans l'intérieur des solides et à leur surface. Si l'on examine ces questions avec toute l'attention qu'elles exigent on reconnaîtra, comme nous l'avons dit plusieurs fois, que les principes mathématiques de la théorie de la chaleur ne sont ni moins clairs ni moins rigoureusement démontrés que ceux des théories dynamiques ; qu'ils sont féconds en applications utiles, et que les résultats sont exactement conformes à ceux des expériences ; enfin que ces principes sont indépendants de toute hypothèse physique sur la nature de la chaleur.

C'est dans les écrits de Newton que l'on trouve les premières vues sur la théorie mathématique de la chaleur. Ensuite l'Académie des sciences de Paris n'a cessé de diriger sur cet objet l'attention des géomètres. Amontons avait fait la première expérience propre à éclairer la question de la propagation de la chaleur. Cette question fut proposée comme sujet d'un prix pour l'année 1788. La collection de nos Mémoires contient, outre la pièce couronnée, dont l'auteur est Euler, deux autres pièces qui furent approuvées et publiées, *comme remplies de vues et de faits très-bien exposés* : ce sont les termes du rapport. L'une est de M^{me} Émilie du Châtelet, l'autre de Voltaire. Je ne citerai point ici les

recherches ultérieures qui ont été faites sur le même sujet : j'ai voulu seulement rappeler que cette branche de la physique mathématique a toujours été spécialement cultivée en France , et qu'elle doit à cette académie ses progrès les plus remarquables.

Il me reste à donner une idée générale du principe que j'ai suivi pour former l'équation du mouvement de la chaleur dans les fluides.

Si l'on suppose qu'un liquide pesant est contenu dans un vase où la masse est actuellement en équilibre , et si l'on conçoit que les molécules viennent tout à coup à recevoir des températures inégales, l'équilibre cessera de subsister. Il s'établira dans toutes les parties du liquide des mouvements infiniment variés, et les conditions de ces mouvements ont des rapports nécessaires avec la distribution de la chaleur initiale. Si, indépendamment de l'inégalité des températures qui suffirait pour occasioner ces déplacements, on suppose que la masse fluide est soumise à des impulsions extérieures qui ne se font point équilibre, les mouvements des molécules seront encore plus composés. Ils mêleront de plus en plus les différentes parties de la masse, et concourront ainsi à faire varier les températures; en sorte qu'il y a une influence réciproque des effets dynamiques proprement dits, et de ceux qui dépendent de la distribution de la chaleur.

Il paraît d'abord singulièrement difficile d'assujettir à un calcul exact toutes ces variations de température, et de les comprendre dans une équation générale. Mais un examen très-attentif de cette question montre qu'elle peut être complètement résolue.

Pour parvenir à cette solution il faut concevoir dans l'in-

térieur de la masse un espace déterminé, par exemple le volume d'un prisme rectangulaire compris entre six plans dont la position est donnée. On examine tous les changements successifs que subit la quantité de chaleur contenue dans l'espace prismatique. Cette quantité varie à chaque instant, et par deux causes très-distinctes. L'une est la propriété que les molécules du fluide ont de communiquer leur chaleur aux molécules assez voisines, lorsque les températures sont inégales. En vertu de cette propriété, dont les liquides ne sont point dépourvus, comme on l'a quelquefois supposé, la chaleur tend à se distribuer d'une manière plus égale, et se dispose insensiblement à l'état d'équilibre : elle pénètre donc à travers les surfaces rectangulaires qui terminent le prisme, et l'effet instantané de cette propriété de la chaleur est celui qui aurait lieu si la masse était solide.

A cette première cause, commune à toute espèce de matière, il s'en joint une autre qui est propre aux fluides. Les molécules elles-mêmes se déplacent, et elles apportent dans cet espace prismatique la chaleur qu'elles contiennent; ou, en sortant de ce même espace, elles emportent cette chaleur qui leur est propre.

La question se réduit donc à faire séparément le calcul de la chaleur acquise par l'espace prismatique en vertu de la communication, et de la chaleur acquise par cet espace en vertu des mouvements des molécules. Nous connaissons l'expression analytique de la chaleur communiquée, et ce premier point de la question est pleinement éclairci. Il reste donc à tenir compte de la quantité de chaleur transportée : elle ne dépend que des vitesses des molécules, et des directions qu'elles suivent dans leurs mouvements.

On calcule donc premièrement combien il entre de chaleur par l'une des faces du prisme, soit par voie de communication, soit à raison de l'écoulement du fluide; secondement, combien il sort de chaleur par la face opposée, à raison de l'une et de l'autre cause. Appliquant ce calcul à chacun des rectangles qui terminent le prisme, on connaît combien il acquiert de chaleur pendant un temps donné; et si l'on distribue cette chaleur acquise entre toutes les molécules, on connaît l'augmentation moyenne de la température pendant ce même temps. En rapportant les expressions précédentes à la durée d'un instant, et à un prisme infinitésimal, on forme l'équation dont nous avons parlé. Elle est à différences partielles, comme celles du mouvement des fluides. Par là on introduit dans l'analyse de ces mouvements une nouvelle variable, la température, et une nouvelle équation qui sert à la déterminer.

Équations générales du mouvement et de la température des fluides incompressibles.

x, y, z coordonnées d'un point de l'espace occupé par une molécule;

t . . temps écoulé.

α β γ $\left. \begin{array}{l} \text{vitesse partielle de la molécule pour augmen-} \\ \text{ter la coordonnée} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}$

p pression qui s'exerce contre la molécule.

ϵ densité variable de la molécule.

θ température variable de cette molécule.

Les coefficients $\begin{cases} K \\ C \\ h \end{cases}$ mesurent $\begin{cases} \text{la conducibilité propre de la} \\ \text{masse.} \\ \text{la chaleur spécifique.} \\ \text{la dilatabilité.} \end{cases}$

$\alpha, \beta, \gamma, p, \epsilon, \theta$ sont des fonctions de x, y, z, t .

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{dp}{dx} + \frac{d\alpha}{dt} + \alpha \frac{d\alpha}{dx} + \beta \frac{d\alpha}{dy} + \gamma \frac{d\alpha}{dz} - X = 0$$

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{dp}{dy} + \frac{d\beta}{dt} + \alpha \frac{d\beta}{dx} + \beta \frac{d\beta}{dy} + \gamma \frac{d\beta}{dz} - Y = 0$$

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{dp}{dz} + \frac{d\gamma}{dt} + \alpha \frac{d\gamma}{dx} + \beta \frac{d\gamma}{dy} + \gamma \frac{d\gamma}{dz} - Z = 0$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} + \frac{d}{dx}(\alpha\epsilon) + \frac{d}{dy}(\beta\epsilon) + \frac{d}{dz}(\gamma\epsilon) = 0. \quad \epsilon = e(1 + h\theta)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{K}{C} \left(\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d^2\theta}{dy^2} + \frac{d^2\theta}{dz^2} \right) - \left[\frac{d}{dx}(\alpha\theta) + \frac{d}{dy}(\beta\theta) + \frac{d}{dz}(\gamma\theta) \right].$$

On désigne par X, Y, Z les trois résultantes orthogonales des forces qui agissent sur une molécule quelconque, dont les coordonnées sont x, y, z ; e est la densité qui répond à la température zéro, assez éloignée du changement d'état.

Les quatre premières équations sont connues et démontrées depuis long-temps.

La cinquième exprime le mouvement de la chaleur dans les fluides incompressibles.

Paris, 1^{er} septembre 1820.

Signé J^h FOURIER.

EXTRAIT

DES NOTES MANUSCRITES CONSERVÉES PAR L'AUTEUR.

On se propose d'étendre la recherche des lois du mouvement de la chaleur à une question qui paraît d'abord très-composée, savoir celle de la distribution de la chaleur dans les fluides. Nous ne considérerons ici que les fluides qui ont été désignés sous le nom d'incompressibles. On concevra donc une masse liquide dont toutes les molécules, inégalement échauffées, sont soumises à l'action de forces accélératrices, et dans laquelle la situation et la température de chaque molécule varient à chaque instant. Il s'agit de déterminer toutes les quantités qui font connaître la vitesse actuelle des molécules, la direction de leur mouvement, et leur température.

Nous désignons par α la vitesse avec laquelle une molécule dont les coordonnées sont x, y, z , s'avance parallèlement à l'axe des x . ϵ est la vitesse de la même molécule dans le sens suivant lequel les ordonnées y augmentent; et γ est la vitesse parallèle à l'axe des z . Il s'agit de déterminer α, ϵ, γ en fonction des coordonnées x, y, z et du temps écoulé t . Nous désignons par θ la température que cette même molécule a acquise à la fin du temps t . Il est évident que si les trois vitesses orthogonales α, ϵ, γ , et la température θ , étaient ainsi exprimées en fonction des coordonnées x, y, z et du temps t , il ne resterait plus rien d'inconnu

dans l'état variable de la masse fluide, en sorte que l'on pourrait déterminer cet état pour chaque instant. p est la pression qui s'exerce à la fin du temps t sur la molécule fluide dont x, y, z sont les coordonnées. ε est la densité actuelle de cette molécule. Cela posé, nous admettons comme démontrées les quatre équations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \frac{dp}{dx} + \frac{d\alpha}{dt} + \alpha \frac{d\alpha}{dx} + \varepsilon \frac{d\alpha}{dy} + \gamma \frac{d\alpha}{dz} - X &= 0, \\ \frac{1}{\varepsilon} \frac{dp}{dy} + \frac{d\beta}{dt} + \alpha \frac{d\beta}{dx} + \varepsilon \frac{d\beta}{dy} + \gamma \frac{d\beta}{dz} - Y &= 0, \\ \frac{1}{\varepsilon} \frac{dp}{dz} + \frac{d\gamma}{dt} + \alpha \frac{d\gamma}{dx} + \varepsilon \frac{d\gamma}{dy} + \gamma \frac{d\gamma}{dz} - Z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{d.\varepsilon\alpha}{dx} + \frac{d.\varepsilon\beta}{dy} + \frac{d.\varepsilon\gamma}{dz} = 0. \quad (2)$$

Le terme X exprime en fonction de x, y, z et t la résultante des forces accélératrices qui agissent parallèlement à l'axe des x sur la molécule dont x, y, z sont les coordonnées. Y est la résultante de ces forces parallèle à l'axe des y , et Z est leur résultante agissant dans le sens de l'axe des z . Ces forces tendent respectivement à augmenter les coordonnées x, y, z .

Il serait inutile de rappeler les démonstrations si connues de ces équations. Nous supposons que l'on se représente les éléments de cette question, tels qu'ils sont exposés dans les ouvrages d'Euler (Mémoires de l'Académie de Berlin, pour l'année 1755).

Concevons maintenant que, par un point m de la masse fluide, on trace un plan perpendiculaire à l'axe des z , et cherchons quelle quantité de chaleur passe, pendant un in-

stant dt , de la partie de l'espace qui est au-dessous de ce plan dans la partie de l'espace qui lui est supérieure. Soit ω l'aire infiniment petite d'un disque dont le centre est en m , et qui est perpendiculaire à l'axe des z . Si toutes les molécules étaient immobiles, et que les changements de température dussent résulter seulement de la communication de la chaleur, qui tend toujours à se distribuer uniformément, il a été démontré (*) que la quantité de chaleur, qui s'élèverait au-dessus du plan à travers le disque ω pendant le temps infiniment petit dt , aurait pour expression $-K \frac{d\theta}{dz} \omega dt$. C'est la mesure exacte de la chaleur communiquée, qui, abandonnant certaines molécules, passe dans celles qui leur sont contiguës. Le coefficient K est celui que nous avons défini. Il se rapporte à la substance liquide elle-même, et exprime la facilité avec laquelle la chaleur s'y propage comme dans un milieu solide.

Indépendamment de cette chaleur qui passe d'une molécule à une autre, il faut considérer celle qui est transportée par les molécules elles-mêmes à travers le disque ω . Nous avons désigné par C la quantité de chaleur qui, étant ajoutée à l'unité de volume du liquide, porterait la masse occupant ce volume de la température 0 à la température 1 de l'ébullition de l'eau. D'après cela, si pendant l'instant dt il s'écoulait à travers le disque ω , de bas en haut, une masse liquide d'un volume μ et d'une température exprimée par θ , cette masse apporterait dans l'espace supérieur au plan une quantité de chaleur égale à $C.\mu\theta$. On regarde ici comme

(*) Théorie analytique de la chaleur, chapitre I^{er}, art. 98.

une constante la quantité de chaleur que la masse contient lorsqu'elle est à la température zéro de la glace fondante, et l'on ne calcule que les différences, ou positives, ou négatives, qui sont ajoutées à cette constante commune, ou qui en sont retranchées. Or le prisme fluide qui traverse le disque pendant l'instant dt a pour base l'aire ω , et cette section ω , qui au commencement de l'instant dt coïncidait avec le disque, s'en est éloignée pendant la durée de cet instant, en sorte qu'à la fin de cette durée sa distance au disque, mesurée perpendiculairement au plan de ce disque, est γdt . La quantité de chaleur transportée par l'effet de ce mouvement au-dessus du plan est donc $C.\omega\gamma dt.\theta$.

Elle s'ajoute à la chaleur qui s'est communiquée dans le même temps en passant d'une molécule à une autre, comme cela aurait lieu dans un corps solide. Ainsi la quantité totale de chaleur, qui pendant le temps dt , s'élève à travers le disque au-dessus de son plan, soit en vertu du déplacement des molécules, soit en vertu de la communication, a pour expression

$$\omega dt \left(-K \frac{d\theta}{dt} + C.\gamma\theta \right),$$

Si le mouvement du fluide était supposé connu, c'est-à-dire si les quantités α , β , γ étaient données en fonction de x , y , z et t ; et si de plus on connaissait la valeur de θ en fonction de ces mêmes variables, on déterminerait donc facilement la quantité de chaleur qui pendant un temps donné T s'écoule à travers une portion déterminée d'un plan perpendiculaire à l'axe des z . Car désignant par o et a , o et b les limites de l'aire rectangulaire tracée sur ce plan, on écrirait $dx dy$ au lieu de l'aire infiniment petite ω , et l'on prendrait

la valeur de l'intégrale définie

$$\int_t^{t+T} dt \int_0^a dx \int_0^b dy \left(-K \frac{d\theta}{dx} + C \cdot \gamma \theta \right).$$

γ et θ étant des fonctions supposées connues de x , y , z , t ; K et C des nombres constants, et a , b , c , t , T des nombres donnés, on trouverait la valeur numérique de l'intégrale, ou de la quantité de chaleur qui dans le temps donné, et toute compensation faite des grandeurs positives et négatives, a passé à travers le rectangle au-dessus du plan.

La même conséquence s'applique à toutes les positions que l'on pourrait donner à l'aire infiniment petite ω qui passe par le point m . Si cet élément était situé sur un plan perpendiculaire à l'axe des y , la quantité de chaleur qui, traversant l'élément, passe pendant l'instant dt de l'espace antérieur au disque dans l'espace opposé serait,

$$\omega dt \left(-K \frac{d\theta}{dy} + C \cdot \epsilon \theta \right);$$

et si le plan de l'élément ω était perpendiculaire aux x , la quantité de chaleur qui le traverse pendant la durée dt serait

$$\omega dt \left(-K \frac{d\theta}{dx} + C \cdot \alpha \theta \right).$$

En général on appliquerait cette conséquence à toutes les positions du plan ω . Il suffirait de remplacer α et $\frac{d\theta}{dx}$ par les quantités qui mesurent la vitesse de la molécule m perpendiculairement au plan, et le flux de la chaleur communiquée suivant cette direction. C'est ainsi que l'on déterminerait dans une masse fluide dont le mouvement et la température va-

riables seraient connus, le flux total de chaleur, soit transportée, soit communiquée, à travers un diaphragme dont la figure et la position seraient données.

Considérons maintenant une capacité prismatique comprise entre six plans rectangulaires infiniment voisins, dont trois passent par le point m . On déterminera, au moyen de la proposition précédente, la quantité de chaleur qui entre pendant la durée dt dans cet espace prismatique à travers le rectangle $dx dy$, et l'on en retranchera la chaleur qui pendant le même temps sort de cet espace à travers la face opposée. On connaîtra ainsi la chaleur que l'espace prismatique acquiert en vertu du transport, ou de la communication qui s'opère dans le sens des ordonnées z . On trouvera un résultat semblable par rapport à l'axe des y , et un troisième résultat pour l'axe des x . En ajoutant ces trois quantités, on connaîtra combien l'espace infinitésimal que l'on considère acquiert de chaleur pendant un instant, soit par voie de communication de molécule à molécule, soit par le transport de ces molécules. Soit Δ cette quantité totale de chaleur acquise par le volume rectangulaire dont les dimensions sont dx, dy, dz . On considérera qu'une quantité de chaleur égale à $C. dx dy dz$ élèverait une masse de liquide occupant ce volume de la température 0 à la température 1. Par conséquent $\frac{\Delta}{C. dx dy dz}$ sera l'augmentation de température due à la chaleur acquise Δ . Il ne reste plus qu'à établir le calcul.....

$dy dz \left(-K \frac{d\theta}{dx} + C. \alpha \theta \right) dt$ est la quantité de chaleur qui pendant la durée dt traverse l'aire $dy dz$, et entre dans le prisme. Pour connaître la chaleur qui sort à travers la face opposée, il suffit d'ajouter à l'expression précédente sa dif-

férentielle prise par rapport à x seulement, et l'on a pour l'expression de cette chaleur $dydz\left(-K\frac{d\theta}{dx}+C.\alpha\theta\right)dt + dydz\left(-K\frac{d}{dx}\left(\frac{d\theta}{dx}\right)+C\frac{d.\alpha\theta}{dx}\right)dxdt$. Retranchant cette quantité de la précédente, on trouve

$$dxdydz\left(K\frac{d^2\theta}{dx^2}-C\frac{d.\alpha\theta}{dx}\right)dt$$

pour l'expression de la quantité de chaleur acquise par l'effet de la communication ou du déplacement qui s'opère dans le sens des x .

On trouvera donc aussi

$$dxdydz\left(K\frac{d^2\theta}{dy^2}-C\frac{d.\epsilon\theta}{dy}\right)dt$$

pour exprimer la chaleur que la molécule prismatique dont la température était θ acquiert durant l'instant dt , en vertu de la communication et du transport selon l'axe des y . Enfin l'expression

$$dxdydz\left(K\frac{d^2\theta}{dz^2}-C\frac{d.\gamma\theta}{dz}\right)dt$$

mesure la chaleur acquise par la même molécule en vertu de la communication et du transport selon le sens des z .

On ajoutera donc ces trois quantités de chaleur acquises; et divisant la somme par $C.dxdydz$, on connaîtra l'augmentation $\frac{d\theta}{dt}dt$ de la température pendant la durée dt de l'instant. On forme ainsi l'équation

$$C\frac{d\theta}{dt}=K\left(\frac{d^2\theta}{dx^2}+\frac{d^2\theta}{dy^2}+\frac{d^2\theta}{dz^2}\right)-C\left(\frac{d.\alpha\theta}{dx}+\frac{d.\epsilon\theta}{dy}+\frac{d.\gamma\theta}{dz}\right). \quad (3)$$

C'est cette équation qui doit être jointe aux quatre précédentes.

dentes (1) et (2), afin que le mouvement et les températures variables de toutes les parties de la masse fluide soient généralement exprimés.

On a considéré les variations de température dans un élément prismatique rectangulaire, et la matière qui occupe ce volume infiniment petit subit pendant la durée dt des changements dans sa densité, sa vitesse et la direction de son mouvement. Si de là il restait quelques doutes sur l'exactitude rigoureuse de la démonstration, on pourrait parvenir au même résultat par une voie différente.

En effet si les quantités α , ϵ , γ et θ étaient connues en fonction de x , y , z , t , on pourrait déterminer la quantité de chaleur qui, pendant la durée du temps Δt , s'ajoute à celle que contenait déjà un volume prismatique fini, compris entre des faces rectangulaires données. Il suffirait de calculer, au moyen de la proposition démontrée dans l'article précédent, combien, pendant le temps donné Δt , il entre de chaleur à travers une des faces, et combien il en sort à travers la face opposée. En faisant un calcul semblable pour chacune des six faces, on connaîtrait la nouvelle quantité de chaleur que l'espace prismatique acquiert pendant le temps donné.

Or on pourrait aussi déterminer par un autre calcul cette même quantité de chaleur. Il faudrait pour cela chercher combien une partie infiniment petite de ce prisme reçoit, pendant un instant dt , d'augmentation de température, et, multipliant cette augmentation par le coefficient C qui mesure la capacité spécifique, on connaîtrait combien l'élément infiniment petit acquiert de chaleur pendant un instant. On intégrerait ensuite par rapport aux variables x , y , z entre les limites données, par exemple depuis $x=x$, $y=y$, $z=z$,

jusqu'à $x = x + \Delta x$, $y = y + \Delta y$, $z = z + \Delta z$; et l'on intégrerait aussi, par rapport au temps t , depuis $t = t$ jusqu'à $t = t + \Delta t$. Le résultat de cette intégration serait la quantité de chaleur acquise par l'espace prismatique; et il serait précisément égal au résultat que l'on aurait trouvé précédemment, en ayant égard aux quantités de chaleur qui pénètrent chaque face, soit pour entrer, soit pour sortir.

On voit par là que si les quantités α , β , γ , θ étaient trouvées en fonction de x , y , z , t , ces fonctions satisferaient à la condition que l'on vient d'énoncer. Il faut donc exprimer cette identité des deux résultats, et l'on formera ainsi une équation qui doit subsister entre les fonctions inconnues.

La quantité de chaleur qui, pendant le temps Δt , pénètre dans le prisme à travers une première face perpendiculaire à l'axe des x , est

$$\int_t^{t+\Delta t} dt \int_y^{y+\Delta y} dy \int_z^{z+\Delta z} dz \left(-K \frac{d\theta}{dx} + C.\alpha\theta \right).$$

On doit écrire après les intégrations $x + \Delta x$ à la place de x , et retrancher le second résultat du premier, puisque l'on a vu que le premier résultat mesure la chaleur entrée par l'une des faces, et le second la chaleur sortie par la face opposée. En désignant, pour abréger, par P la fonction placée sous les signes d'intégration, on aura donc

$$-\int_t^{t+\Delta t} dt \int_y^{y+\Delta y} dy \int_z^{z+\Delta z} dz . \Delta P$$

pour exprimer la quantité de chaleur acquise par le prisme en vertu du transport dans le sens des x . Maintenant on

doit remarquer que l'on peut écrire $\int dt \int dx \int dy \int dz \Delta \frac{dP}{dx}$ au lieu de $\int dt \int dy \int dz \cdot \Delta P$; et surtout que si l'on prend l'intégrale par rapport à x entre les limites x et $x + \Delta x$, on effectue par cela même la différentiation finie indiquée par le signe Δ . En effet, soit ϕx une fonction quelconque de x : on écrira au lieu de ϕx , $\int dx \cdot \frac{d \cdot \phi x}{dx}$ ou $\int dx \cdot \phi' x$, et si l'on prend cette intégrale depuis $x = x$ jusqu'à $x = x + \Delta x$, on a $\phi(x + \Delta x) - \phi x$, c'est-à-dire $\Delta \cdot \phi x$. Il suit de là que la quantité $-\int_t^{t+\Delta t} dt \int_y^{y+\Delta y} dy \int_z^{z+\Delta z} dz \cdot \Delta P$, ou l'expression de la **chaleur acquise** par la communication et le mouvement dans le sens des x , peut être mise sous cette forme

$$-\int_t^{t+\Delta t} dt \int_x^{x+\Delta x} dx \int_y^{y+\Delta y} dy \int_z^{z+\Delta z} dz \cdot \frac{dP}{dx},$$

ou

$$\int dt \int dx \int dy \int dz \left[\frac{d}{dx} \left(K \frac{d\theta}{dx} \right) - C \frac{d \cdot \alpha \theta}{dx} \right].$$

On aura un résultat semblable si l'on calcule la différence de la chaleur entrée par une face perpendiculaire à l'axe des y à la chaleur sortie par la face opposée. Ce résultat est

$$\int dt \int dx \int dy \int dz \left[\frac{d}{dy} \left(K \frac{d\theta}{dy} \right) - C \frac{d \cdot \epsilon \theta}{dy} \right].$$

L'expression qui se rapporte au plan perpendiculaire à l'axe des z est

$$\int dt \int dx \int dy \int dz \left[\frac{d}{dz} \left(K \frac{d\theta}{dz} \right) - C \frac{d \cdot \gamma \theta}{dz} \right].$$

On omet d'écrire les limites des intégrales, qui sont les

mêmes dans ces trois expressions. Leur somme sera la quantité totale de la chaleur acquise par le prisme pendant le temps Δt .

D'un autre côté la chaleur totale qui, dans l'étendue du prisme, a déterminé les augmentations de température, est exprimée, d'après ce qui a été dit plus haut, par l'intégrale

$$\int dt \int dx \int dy \int dz. C \frac{d\theta}{dt},$$

et les limites des intégrations sont les mêmes que celles des intégrations précédentes. On doit donc évaluer les deux résultats; et en différenciant par rapport à t, x, y, z , on aura la même équation que celle qui a été trouvée précédemment.

Les coefficients C et K ont été regardés comme constants, quoiqu'ils subissent en effet quelques variations à raison des changements de densité. Il serait nécessaire d'y avoir égard si l'on considérait le mouvement des milieux aériformes, ou si les différences de température étaient extrêmement grandes. Mais dans les questions qui se rapportent aux liquides, on doit faire abstraction de ces variations presque insensibles des coefficients. Au reste, il serait très-facile d'introduire les variations dont il s'agit dans le calcul, en suivant les principes que nous venons d'exposer.

Nous reprendrons maintenant les équations (1) et (2), et nous remarquerons que la densité ϵ a une relation nécessaire et connue avec la température θ . Désignant par e la densité qui répond à une température donnée b , on aura généralement

$$\epsilon = e [1 + h(\theta - b)];$$

car les températures étant comprises dans des limites assez peu éloignées, les accroissement de densité, à partir d'un certain terme, demeurent sensiblement proportionnels aux accroissements de température. On pourrait aussi ne point regarder ce rapport comme constant, et avoir égard à ces variations. Il suffirait de modifier l'expression précédente de la relation entre ε et θ . Le coefficient h exprime, comme on le voit, la dilatabilité de la masse fluide : on le suppose connu par les observations.

On pourra substituer la valeur précédente de ε dans les équations (1) et (2), et ajouter à ces équations celle que nous avons démontrée. Les cinq équations contiendront, comme grandeurs inconnues, les vitesses orthogonales α , β , γ , la pression p et la température θ . L'équation (2) deviendra

$$h \frac{d\theta}{dt} + \left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} \right) + h \left(\frac{d.\alpha\theta}{dx} + \frac{d.\beta\theta}{dy} + \frac{d.\gamma\theta}{dz} \right) = 0.$$

Il nous paraît préférable de conserver les équations (1) et (2), qui se rapportent au mouvement du fluide et contiennent la densité ε , en y ajoutant la cinquième équation (3) qui détermine les variations des températures. Il suffira de remarquer qu'il existe entre ε et θ une relation donnée par l'expérience, et que l'on peut en général représenter comme il suit : $\varepsilon = e [1 + h (\theta - b)]$.

Les mouvements et les températures variables des diverses parties d'un fluide incompressible sont donc exprimés par les équations (1), (2) et (3). La dernière est celle qui exprime les températures : elle montre que le changement instantané que ces températures subissent résulte de deux causes. L'une correspond à la première partie du second

membre. Elle consiste dans la communication de molécule à molécule. L'autre partie du second membre se rapporte à la seconde cause, qui est le déplacement des molécules inégalement échauffées.

Indépendamment des conditions générales exprimées par ces équations, chaque question particulière présente des conditions spéciales qui se rapportent à l'état de la surface. Cette remarque s'applique aussi aux températures; et les principes que nous avons posés serviront dans tous les cas à former les équations propres à la surface. On ne les considère point ici, parce qu'on a seulement en vue d'exprimer les conditions les plus générales, communes et applicables à toutes les questions, et qui déterminent les mouvements des molécules ou la distribution de la chaleur.

On a supposé que le vase qui contient le fluide est imperméable à la chaleur. La déperdition qui s'opère au contact des parois ou à la superficie exposée à l'air, produit dans les températures des changements qui seraient exprimés par les équations à la surface.

Il est nécessaire de remarquer que l'on ne considère point dans ces recherches le cas de l'équilibre non stable, c'est-à-dire de celui qui satisfait aux conditions mathématiques de l'équilibre absolu, mais qu'une impulsion extérieure pourrait détruire aussitôt. Les changements de température contribueraient à l'impossibilité physique d'un pareil état, et la distribution de la chaleur qui aurait lieu dans le changement d'état est l'objet d'une question spéciale que nous ne traitons point ici.

Le coefficient h , qui mesure la dilatabilité, a une valeur assez petite, que l'on peut omettre dans plusieurs cas.

Alors les quatre premières équations (1) et (2) sont celles qui expriment le mouvement des fluides incompressibles. L'équation (2) devient

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\epsilon}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0,$$

en sorte que la cinquième équation (3) prend dans ce cas la forme suivante :

$$C \frac{d\theta}{dt} = K \left(\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d^2\theta}{dy^2} + \frac{d^2\theta}{dz^2} \right) - C \left(\alpha \frac{d\theta}{dx} + \epsilon \frac{d\theta}{dy} + \gamma \frac{d\theta}{dz} \right).$$

On y retrouve encore les deux parties du second membre qui correspondent à deux effets distincts.

Le coefficient K , qui mesure la conducibilité propre de la masse, n'a point une valeur entièrement nulle, mais ce coefficient est très-petit. On a fort peu d'expériences à ce sujet. Celles que nous avons entreprises, il y a quelques années, nous ont montré que les liquides ne sont point dépourvus de la propriété de transmettre la chaleur, et que les diverses substances présentent cette propriété à des degrés assez différents. Mais il nous a toujours paru que la valeur du coefficient est fort petite, en sorte que les changements de température sont presque entièrement déterminés dans les liquides par les mouvements intérieurs. L'effet de la communication n'est point nul, ou presque insensible, comme le supposait le comte de Rumford; mais il est certain qu'il n'influe que très-lentement sur la distribution de la chaleur.

Si dans l'équation (3) on omet le coefficient très-petit K , les changements de température sont exprimés par l'équation du premier ordre

$$\frac{d\theta}{dt} + \alpha \frac{d\theta}{dx} + \beta \frac{d\theta}{dy} + \gamma \frac{d\theta}{dz} = 0.$$

Si la masse fluide demeurerait en repos ou en équilibre, en sorte que les vitesses α , β , γ eussent des valeurs nulles, il est évident que les changements de température ne résulteraient que de la conductibilité propre; et, dans ce cas, la cinquième équation (3) coïncide entièrement avec celle que nous avons donnée autrefois pour exprimer les mouvements de la chaleur dans l'intérieur des masses solides.

On pourrait également, en suivant les mêmes principes, former l'équation générale qui exprime les températures variables dans les fluides élastiques en mouvement. Mais il serait nécessaire d'y introduire des éléments que des observations précises pourraient seules fournir. On connaît exactement les relations qui subsistent entre la pression, la densité et la température : on peut regarder ces résultats comme fondés sur des observations constantes. Il faudrait connaître aussi, avec le même degré de certitude, les rapports de la densité des substances aériformes avec leur capacité spécifique, et la propriété de recevoir la chaleur rayonnante. Cette branche de la physique expérimentale n'est point encore assez perfectionnée pour que l'on puisse en déduire exactement l'équation générale qui exprime les changements de température. Il faut remarquer que, dans les fluides élastiques, les communications immédiates de la chaleur ne sont point bornées à des distances très-petites, comme dans l'intérieur des masses solides ou liquides. Les rayons de chaleur traversent les rayons aériformes, et se portent directement jusqu'aux plus grandes distances. Il en résulte que l'équa-

tion différentielle prend une forme très-différente de celle que nous avons trouvée pour les substances solides. Elle est d'un ordre indéfini, ou plutôt elle se rapporte à cette classe d'équations qui comprennent à la fois des différences finies et des différentielles. Nous pensons que cette recherche ne pourrait être aujourd'hui entièrement achevée, et qu'elle nécessite une série complète d'observations que nous ne possédons point encore.

Il n'en est pas de même des équations propres aux fluides incompressibles. Celle qui exprime les changements de température est aussi rigoureusement démontrée que celles qui se rapportent au mouvement du fluide. C'est cette démonstration qui est l'objet de notre Mémoire. Elle ajoute à l'expression analytique des mouvements des fluides celle des températures variables de leurs molécules, et en même temps elle donne une nouvelle extension à la théorie mathématique de la propagation de la chaleur.
