Выполнил студент группы А-05-19
Трофимов Илья Сергеевич
5 апреля 2022 г.

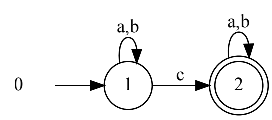
Домашняя работа №1

по Теоретическим моделям вычислений

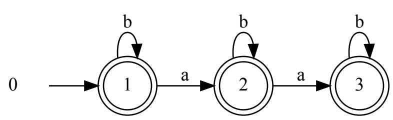
Задание 1

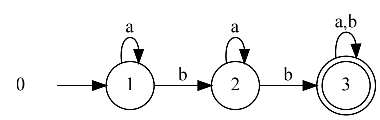
Построить конечные автоматы[1], распознающие следующие языки:

1. $L_1 = \{\omega \in \{a, b, c\}^* : |\omega|_c = 1\}$



2. $L_2 = \{\omega \in \{a, b\}^* : |\omega|_a \leqslant 2, |\omega|_b \geqslant 2\}$
Рассмотрим автоматы $A = \{\omega \in \{a, b\}^* : |\omega|_a \leqslant 2\}$ и $B = \{\omega \in \{a, b\}^* : |\omega|_B \geqslant 2\}$, распознающиие каждое условие по отдельности:



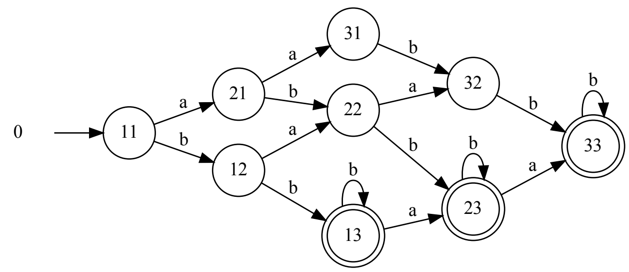


Тогда $L_2 = A \times B$. Терминальными состояниями в L_2 будут вершины 13, 23 и 33. Теперь выпишем переходы для произведения автоматов в виде таблицы:

A	B	переход по a	переход по b
1	1	21	12
2	2	32	23
3	3	-	33
1	2	22	13
2	3	33	23
3	1	-	32
1	3	23	13
2	1	31	22
3	2	-	33

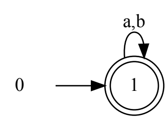
После прямого произведения двух автоматов получим окончательный ответ:

[1]Так как библиотека graphviz для LaTeXпо неизвестной мне причине, не может использовать строки в кавыках в качестве имён узлов и не может распознавать имена, состоящие из расположенных слитно цифр и букв, то названия узлов в некоторых приведённых здесь графах будут иметь длинные числовые наименования.



3. $L_3 = \{\omega \in \{a, b\}^* : |\omega|_a \neq |\omega|_b\}$
Этот язык нельзя описать с помощью ДКА, т.к. для описания языка необходимо запоминать количество символов одного типа, что ДКА сделать не может.

4. $L_4 = \{\omega \in \{a, b\}^* : \omega\omega = \omega\omega\omega\}$
Очевидно, что такой язык описывает только пустые слова:

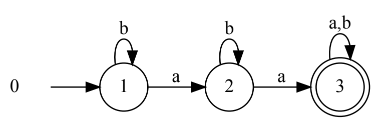


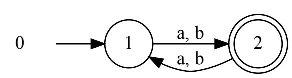
Строить граф для данного ДКА нецелесообразно, т.к. он будет слишком большим.

Задание 2

Построить конечные автоматы, распознающие слудеющие языки, используя прямое произведение:

1. $L_1 = \{\omega \in \{a, b\}^* : |\omega|_a \geqslant 2 \wedge |\omega|_b \geqslant 2\}$
Рассмотрим автоматы $A = \{\omega \in \{a, b\}^* : |\omega|_a \geqslant 2\}$ и $B = \{\omega \in \{a, b\}^* : |\omega|_b \geqslant 2\}$, распознающие каждое условие по отдельности:

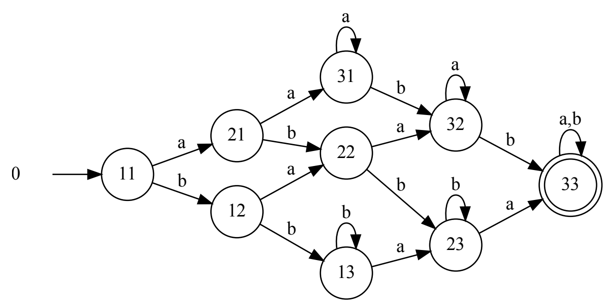




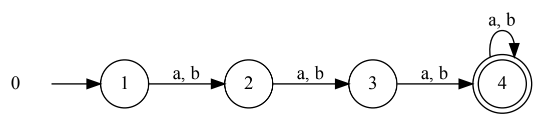
Тогда $L_1 = A \times B$, имеем $\Sigma = \{a, b\}$, $s = 11$ и $T = \{33\}$. Теперь выпишем переходы для произведения автоматов в виде таблицы:

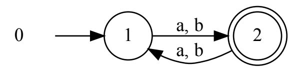
A	B	переход по a	переход по b
1	1	21	12
2	2	32	23
3	3	33	33
1	2	22	13
2	3	33	23
3	1	31	32
1	3	23	13
2	1	31	22
3	2	32	33

После прямого произведения двух автоматов получим окончательный ответ:



2. $L_2 = \{\omega \in \{a,b\}^* : |\omega| \geqslant 3 \wedge |\omega| \text{ нечётное}\}$
Рассмотрим автоматы $A = \{\omega \in \{a,b\}^* : |\omega| \geqslant 3\}$ и $B = \{\omega \in \{a,b\}^* : |\omega| \text{ нечётное}\}$:

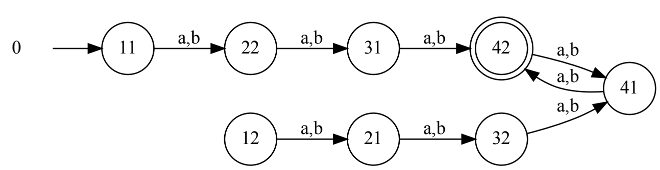




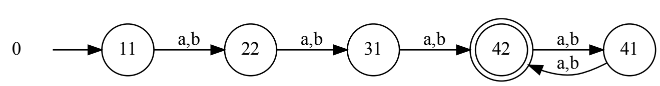
Тогда $L_2 = A \times B$, имеем $\Sigma = \{a,b\}$, $s = 11$ и $T = \{33\}$. Переходы для произведения автоматов:

A	B	переход по a или b
1	1	22
2	1	32
3	1	42
4	1	42
1	2	21
2	2	31
3	2	41
4	2	41

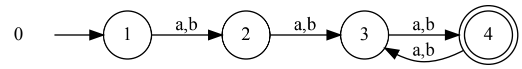
После прямого произведения двух автоматов получим окончательный ответ:



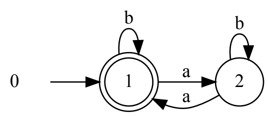
ДКА можно упростить, т.к. невозможно попасть в узлы 12, 21 и 32:

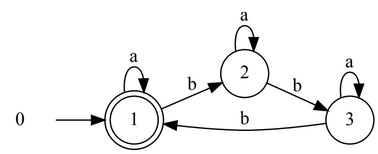


С другой стороны, описать данный язык можно с помощью более компактного автомата, созданного "вручную":



3. $L_3 = \{\omega \in \{a,b\}^* : |\omega|_a$ чётно $\wedge |\omega|_b$ кратно $3\}$
Рассмотрим автоматы $A = \{\omega \in \{a,b\}^* : |\omega|_a$ чётно$\}$ и $B = \{\omega \in \{a,b\}^* : |\omega|_b$ кратно $3\}$:

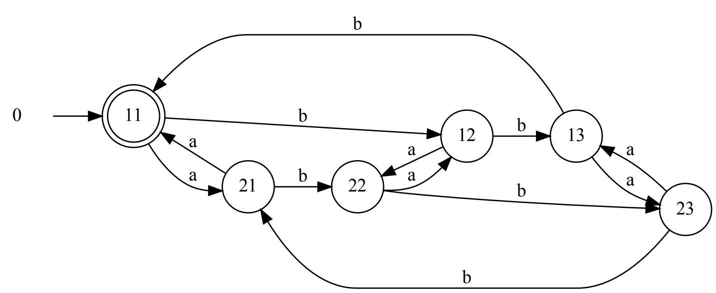




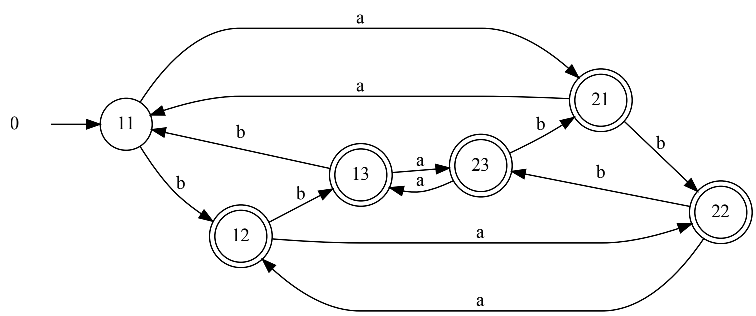
Тогда $L_3 = A \times B$, имеем $\Sigma = \{a,b\}$, $s = 11$ и $T = \{11\}$. Переходы для произведения автоматов:

A	B	переход по a	переход по b
1	1	21	12
2	2	12	23
1	2	22	13
2	3	13	21
1	3	23	11
2	1	11	22

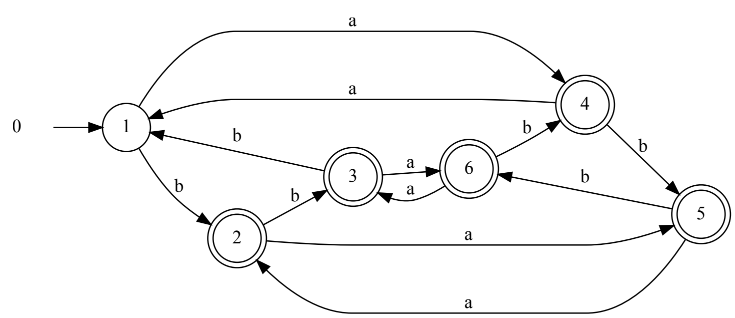
После прямого произведения двух автоматов получим окончательный ответ:



4. $L_4 = \neg L_3$
Имеем, $T_4 = Q_3 \setminus T_3 = \{12, 13, 21, 22, 23\}$, тогда можно легко построить ДКА:



5. $L_5 = L_2 \setminus L_3$
Для построения этого автомата используем упрощённую версию автомата L_2, которая была получена в пункте 2 этого задания. Для удобства дальнейших преобразований, перенумеруем названия узлов графа $\neg L_3$:

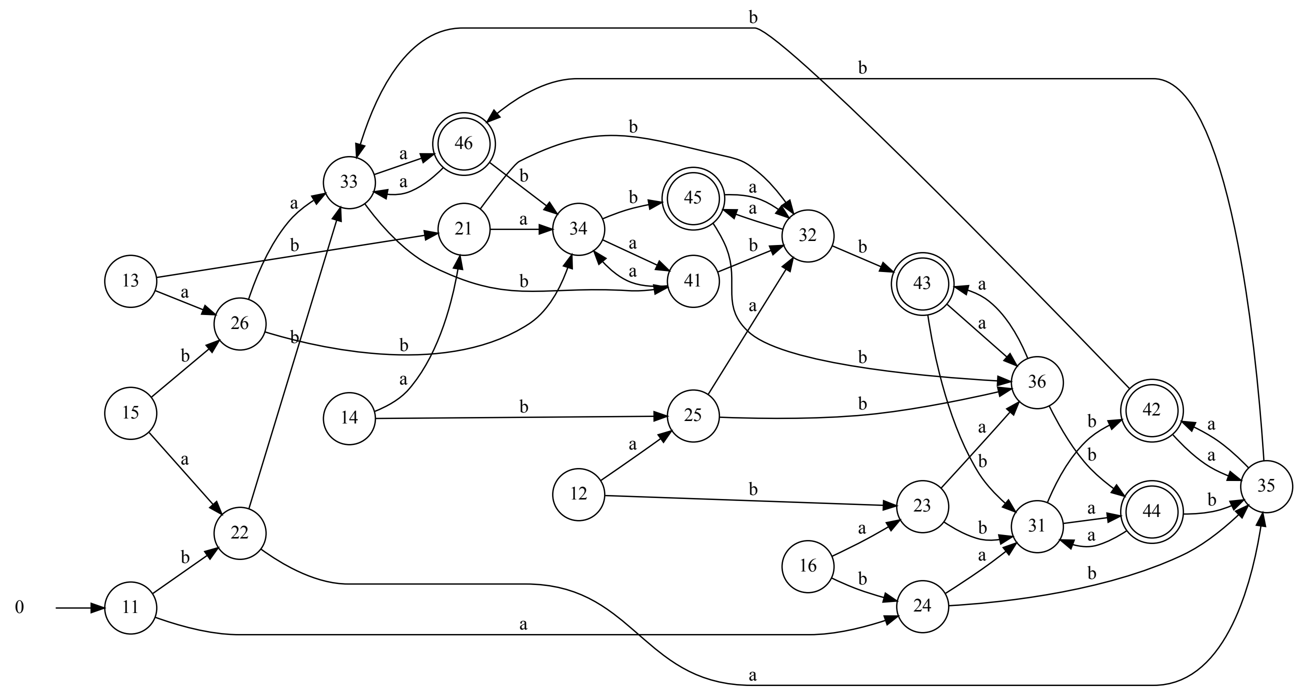


Так как $L_5 = L_2 \setminus L_3 = L_2 \cap \neg L_3 = \neg L_3 \times L_2$, тогда имеем:
$\Sigma = \{a, b\}$, $s = \langle 11, 11 \rangle$ и $T = \{42, 43, 44, 45, 46\}$. Выпишем переходы для L_5:

L_2	$\neg L_3$	переход по a	переход по b
1	1	24	22
1	2	25	23
1	3	26	21
1	4	21	25
1	5	22	26
1	6	23	24
2	1	34	32
2	2	35	33
2	3	36	31
2	4	31	35
2	5	32	36
2	6	33	34

L_2	$\neg L_3$	переход по a	переход по b
3	1	44	32
3	2	45	33
3	3	46	31
3	4	41	35
3	5	42	36
3	6	43	34
4	1	34	32
4	2	35	33
4	3	36	31
4	4	31	35
4	5	32	36
4	6	33	34

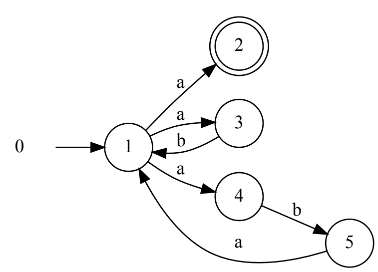
Построим автомат:



Задание 3

Построить минимальные ДКА по регулярным выражениям:

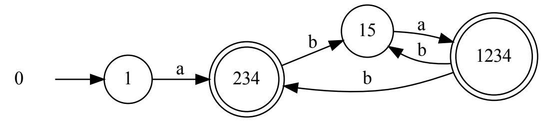
1. $(ab + aba)^*a$
   Составим недетерминированный автомат, чтобы затем преобразовать его в детерминированный:



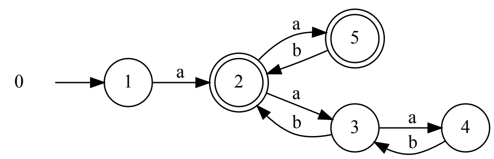
Построим эквивалентный ДКА по алгоритму Томпсона:

Q	a	b
1	234	-
234	-	15
15	1234	-
1234	234	15

Получили минимальный и детерминированный автомат:



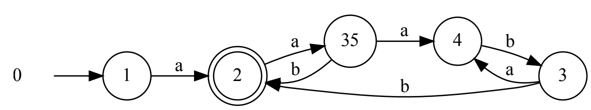
2. $a(a(ab)^*b)^*(ab)^*$
   Построим НКА:



Построим эквивалентный ДКА по алгоритму Томпсона:

Q	a	b
1	2	-
2	35	-
35	4	2
4	-	3
3	4	2

Получили следующий детерминированный автомат, он минимальный:

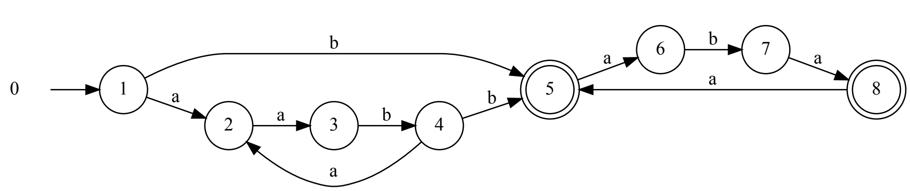


3.

Задание 4

Определить, является ли следующие языки регулярными или нет:

1. $L = \{(aab)^n b(aba)^m : n \geqslant 0, m \geqslant 0\}$
   Язык регулярный, так как по нему возможно составить ДКА:



2. $L = \{uaav : u \in \{a,b\}^*,\ v \in \{a,b\}^*, |u|_b \geqslant |v|_a\}$
Применим лемму о разрастании. Зафиксируем $\forall n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим слово $\omega = b^n aaa^n,\ |\omega| = 2n+2 \geq n$. Теперь рассмотрим все разбиения этого слова $\omega = xyz$ такие, что $|y| \neq 0,\ |xy| \leq n$:

$$x = b^k,\ y = b^l,\ z = b^{n-k-l} aaa^n,$$

$$\text{где } 1 \leq k+l \leq n\ \wedge\ l > 0$$

Дргуих разбиенний, удовлетворяющих данным условиям, нет. Для любого из таких разбиений слово $xy^0z \notin L$. Лемма не выполняется, значит, L не регулярный язык.

3. $L = \{a^m w : w \in \{a,b\}^*,\ 1 \geqslant |w|_b \geqslant m\}$
Применим лемму о разрастании. Зафиксируем $\forall n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим слово $\omega = a^n b^n,\ |\omega| = 2n \geqslant n$. Теперь рассмотрим все разбиения этого слова $\omega = xyz$ такие, что $|y| \neq 0,\ |xy| \leq n$:

$$x = a^l,\ y = a^m,\ z = a^{n-l-m} b^n,$$

$$\text{где } l + k \leqslant n\ \wedge\ m \neq 0$$

Дргуих разбиенний, удовлетворяющих данным условиям, нет. Теперь выполним накачку:

$$xy^iz = a^l (a^m)^i a^{n-l-m} b^n = a^{n-mi} b^n \notin L,\ i \geqslant 0 \in \mathbb{N}$$

Лемма не выполняется, значит, L не регулярный язык.

4. $L = \{a^k b^m a^n : k = n \vee m > 0\}$
Применим лемму о разрастании. Зафиксируем $\forall n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим слово $\omega = a^n b a^n,\ |\omega| = 2n+1 \geqslant n$. Теперь рассмотрим все разбиения этого слова $\omega = xyz$ такие, что $|y| \neq 0,\ |xy| \leq n$:

$$x = a^k,\ y = a^m,\ z = a^{n-k-m} b a^n,$$

$$\text{где } k + m \leqslant n\ \wedge\ m \neq 0$$

Дргуих разбиенний, удовлетворяющих данным условиям, нет. Теперь выполним накачку:

$$xy^iz = a^k (a^m)^i a^{n-k-m} b a^n = a^{n+m(i-1)} b a^n \notin L,\ i \geqslant 2 \in \mathbb{N}$$

Получили противоречие, лемма не выполняется, значит, L не регулярный язык.

5. $L = \{ucv : u \in \{a,b\}^*,\ v \in \{a,b\}^*, u \neq v^R\}$
Применим лемму о разрастании. Зафиксируем $\forall n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим слово $\omega = (ab)^n c (ab)^n = \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_{4n+1},\ |\omega| = 4n+1 \geqslant n$. Теперь рассмотрим все разбиения этого слова $\omega = xyz$ такие, что $|y| \neq 0,\ |xy| \leq n$:

$$x = \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k,\ y = \alpha_{k+1} ... \alpha_{k+m},\ z = \alpha_{k+m+1} ... \alpha_{4n+1} c (ab)^n,$$

$$\text{где } k + m \leqslant n\ \wedge\ m \neq 0$$

Дргуих разбиенний, удовлетворяющих данным условиям, нет. Теперь выполним накачку:

$$xy^iz = (\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k)(\alpha_{k+1} ... \alpha_{k+m})^i (\alpha_{k+m+1} ... \alpha_{4n+1} c (ab)^n)$$

При $i = 2$ имеем:

$$xy^2z = (\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k)(\alpha_{k+1} ... \alpha_{k+m})^2 (\alpha_{k+m+1} ... \alpha_{4n+1} c (ab)^n) \notin L$$

Лемма не выполняется, значит, L не регулярный язык.