# homeWork2

Kalinina Ksenia A-13a-19

May 2022

# 1 Задание №1. Построение КС-грамматики

1.1

$\sum = \{a, b, c\},\ L = \{w \in \sum^* \ | \ w$ содержит подстроку aa$\}$

S $\rightarrow NaaN$

$N \rightarrow \lambda \mid aN \mid bN \mid cN$

1.2

$\sum = \{a, b, c\},\ L = \{w \in \sum^* \ | \ w$ не палиндром$\}$

S $\rightarrow TST \mid N$

N $\rightarrow aAb \mid aAc \mid bAa \mid bAc \mid cAa \mid cAb$

$A \rightarrow TA \mid \lambda$

T $\rightarrow a \mid b \mid c$

S (Start) - стартовый нетерминал, нарущающий конструкцию палиндромов, попадая в конструкцию (нетерминал) N, но допускающий частичную симметрию букв в слове (TST).

N - терминал гарантирующий отсутствие палиндромов.

A - любая последовательность символов.

T - терминалы.

1.3

$\sum = \{\emptyset, \mathbb{N},' \{',' \}',',' , \cup\},\ L = \{w \in \sum^* \ |$ w - синтаксически корректная строка обозначающая множество$\}$

$S_0 \rightarrow\ S \mid U \mid \{E\} \mid \{\}$

$S \rightarrow \mathbb{N} \mid \emptyset$

$U \rightarrow S_0 \cup S_0$

$E \rightarrow S_0, E \mid S_0$

$S_0$ - это либо базовое множество (S), либо объединение множеств (U), либо перечисление множеств (E) - возможно только в скобках {} (перечисление может состоять и из одного элемента), либо пустое множество {}. Можно записать это короче, но интуитивно менее понятно: $S \rightarrow \mathbb{N} \mid \ \mid S \cup S \mid \{\} \mid \{E\}$

# 2 Задание №2. Унарная арифметика

$\sum = \{1, +, =\}, A = \{1^m + 1^n = 1^{m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

1. Язык A не регулярный, поскольку у регулярных выражений нет механизма позволяющего запоминать количество переходов по символу, что требуется для построения ДКА, распознающего язык A. Воспользуемся леммой о накачке для доказательства этого:

Фиксируем произвольный n, принадлежащий множеству натуральных чисел. Рассмотрим слово $w = 1^n + 1 = 1^{n+1}$, причем w принадлежит A, модуль w равен 2n+4, что больше чем n. Рассмотрим разбиения этого слова $w = xyz$ такие, что $x = 1^{k_1}, y = 1^{k_2}, z = 1^{n-k_1-k_2} + 1 = 1^n$, где $k_1, k_2$ принадлежат множеству натуральных чисел $0 \leq k_1 n, 0 \leq k_2, k_1 + k_2 \leq n$ Для любого из таких разбиений слово, к примеру $xy^2z$ не принадлежит A, так как нарушается унарная арифметика. Следовательно язык A не регулярный.

2. Покажем, что язык А является контекстно-свободным. Самое наименьшее число это 1+1=11, и мы можем дописывать в начало и конец по единице, а также перед и после знака равно.

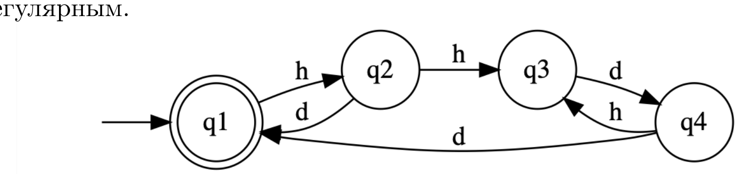
$S \to 1S1 \mid 1 + 1E11$

$E \to 1E1 \mid \ =$

# 3 Задание №3. Прогулка с собакой

Прогулка с собакой состоит из шагов человека и шагов собаки: $\sum = (h, d)$

1. $D_1 = \{w \in \sum^* \mid w$ описывает последовательность шагов человека и шагов собаки на прогулке с поводком длины 2$\}$ Данный язык является регулярным.




Теперь по регулярному выражению получить КС-грамматику. $S \to hdS \mid hhRddS \mid \lambda$

$R \to dhR \mid \lambda$

2. $D_2 = \{w \in \sum^* \mid w$ описывает последовательность шагов человека и шагов собаки на прогулке без поводка$\}$

Данный язык уже не является регулярным, поскольку нет возможности контролировать произвольное расстояние от человека до собаки на каждом этапе прогулки, так как нет этого "поводка", а в предыдущей ситуации эта фиксированность и позволяла нам построить ДКА. Докажем с помощью леммы о накачке нерегулярность языка.

Зафиксируем произвольное n, принадлежащее множеству натуральных чисел. Рассмотрим слово $w = h^n d^n$, так что w принадлежит $D_2$ а модуль w равен 2n, что больше n. Теперь рассмотрим разбиения этого слова w=xyz такие, что модуль y не равен 0, а модуль произведения xy был меньше или равен n: $x = h^{k_1}, y = h^{k_2}, z = h^{n-k_1-k_2}, d^n$, причем $k_1, k_2$ в сумме не больше n, а каждый не меньше нуля. Для такого разбиения слово, например, $xy^2z \notin D_2$, так как собака в конце прогулки не будет в одной точке с человеком. Язык $D_2$ нерегулярный.

КС-грамматика этого языка: $s \to hSdS \mid \lambda$

# 4 Задание №4. Перестановки

Определить, является ли язык Perm(R) регулярным, контекстно-свободным или ни тем, ни другим.

1. $R = (01)^*$

Язык R состоит из одинакового количества нулей и единиц, поэтому $L = Perm(R) = \{w \in \sum^* \mid |w|_0 = |w|_1\}$. Такой язык не является регулярным.

Действительно, возьмем подмножество этого языка $L^{'=\{w \in \sum^* | w = 0^n 1^n, n \in \mathbb{N}\}}$. Язык $L^{'}$, как известно, нерегулярный. А значит, язык L, подмножеством которого является язык $L^{'}$, так же нерегулярный.

Однако, язык L - является контекстно-свободным. Вот его грамматика: $S \to 0S1 \mid 1S0 \mid SS \mid \lambda$

2. $R = 0^* + 1^*$

Язык R - некоторое количество либо нулей, либо единиц. Перестановка символов не поменяет ничего, поэтому Perm(R) = R. Язык R регулярный так как задан регулярным выражением. А так как Perm(R) = R то и Perm(R) регулярный. Поскольку каждый регулярный язык - контекстно-свободный, Perm(R) еще и КС.

3. $R = (012)^*$

Ситуация та же, что и с первым языком, $Perm(R) = \{w \in \sum^* \mid |w|_0 = |w|_1 = |w|_2\}$ и Perm(R) - нерегулярный, с помощью леммы о накачке покажем, что язык не КС.

Пусть $L = Perm(R)$ - КС-язык, и для него выполнена лемма о накачке:

Существует такое n, принадлежащее множеству натуральных чисел: при этом для любого w принадлежащего L, и по модулю большего, чем n существуют такие u,v,x,y,z, что w=uvxyz $|uv| \geq 0, |uwx| \leq n, \forall k \geq 0 uv^k xy^k z \in L$

Рассмотрим слово: $w = 0^n 1^n 2^n$, n - число, для которого лемма выполнена. При любом разбиении uwx не будет содержать символа 1, и при накачке слово уже не будет принадлежать языку, так как число нулей не будет равно числу единиц и двоек. Таким образом, Perm(R) не является ни регулярным, ни кс языком.