Упражнение 1

1. В алфавите $\sum = \{a, b, c\}$ постройте грамматику для языка $L = \{\omega \in \sum^* | \omega$ содержит подстроку $aa\}$

   $S \to cS \mid bS \mid aaS_1 \mid aS$
   $S_1 \to aS_1 \mid bS_1 \mid cS_1 \mid \lambda$

2. В алфавите $\sum = \{a, b, c\}$ постройте грамматику для языка $L = \{\omega \in \sum^* | \omega$ не полиндром$\}$

   $S \to aS_1 \mid bS_2 \mid cS_3$
   $S_1 \to S_4b \mid S_4c \mid Sa$
   $S_2 \to S_4a \mid S_4c \mid Sb$
   $S_3 \to S_4a \mid S_4b \mid Sc$
   $S_4 \to aS_1 \mid bS_2 \mid cS_3 \mid \lambda$

3. В алфавите $\sum = \{\emptyset, \mathbb{N}, '\{' , '\}' , ',' , \cup\}$ постройте грамматику для языка $L = \{\omega \in \sum^* | \omega -$ синтаксически
   корректная строка обозначающая множество$\}$

   $S \to \emptyset \mid \mathbb{N} \mid \{S_1\} \mid \cup$
   $S_1 \to S, S_2 \mid S \mid \lambda$
   $S_2 \to S, S_2 \mid S$

Упражнение 2

В алфавите $\sum = \{1, +, =\}$ Рассмотрим язык $A = \{1^m + 1^n = 1^{n+m} | m, n \in \mathbb{N}\}$

1. Докажите что язык A регулярный (построением) или не регулярный (через лемму о накачке)

   Фиксируем $\forall n = N$ возьмём слово $\alpha = 1^N + 1^N = 1^{2N},\ \alpha \in A,\ |\omega| = 4N{+}2 > N,$ так как в лемме $|xy| \leq N,$ как бы мы не взяли $xy,\ y = 1^i \implies xy^kz$ выходит за пределы языка при $\forall k \neq 1,$ так как тогда в выражении перестаёт выполнятся тождество $\implies$ язык A не регулярный

2. Постройте КС-грамматику для языка A, показывающую, что A – контекстно-свободный

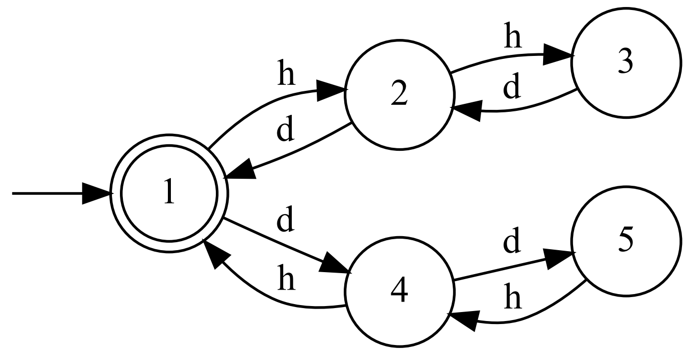
   $S \to 1S1 \mid +S_1$
   $S_1 \to 1S_11 \mid =$

Упражнение 3

1. Вы пошли гулять с собакой, ваша собака на поводке длины 2. Это значит что она не может отойти от вас более чем на 2 шага. Пусть $\sum = \{h, d\}$, где h – ваше перемещение на один шаг вперёд, а d – шаг собаки. Прогулка может быть завершена, если собака и человек оказались в одной точке.

   Пусть $D_1 = \{\omega \in \sum^* |\omega$ описывает последовательность ваших шагов и шагов вашей собаки на прогулке с поводком$\}$

   (a) Докажите, что язык D_1 регулярный(построением) или не регулярный (через лемму о накачке)



(b) Постройте КС-грамматику для языка D_1, показывающую, что D_1 – контекстно-свободный

$S \to hS_1 \mid dS_2 \mid \lambda$
$S_1 \to hdS_1 \mid dS$
$S_2 \to dhS_2 \mid hS$

2. Допустим теперь, что вы также пошли на прогулку с собакой. но не взяли с собой поводок. Это значит, что вы можете отдалится от собаки на любое расстояние.

Пусть $D_2 = \{\omega \in \sum^* | \omega$ описывает последовательность ваших шагов и шагов вашей собаки на прогулке без поводка$\}$

(a) Докажите, что язык D_2 регулярный(построением) или не регулярный (через лемму о накачке)

Фиксируем $\forall n = N$ возьмём слово $\alpha = h^N d^N, \ \alpha \in D_2, \ |\omega| = 2N > N,$ так как в лемме $|xy| \leq N,$ как бы мы не взяли $xy, \ y = h^i \implies xy^k z$ выходит за пределы языка при $\forall k \neq 1,$ так как тогда в конце прогулки вы и собака окажитесь в разных местах $\implies$ язык D_2 не регулярный

(b) Постройте КС-грамматику для языка D_2, показывающую, что D_2 – контекстно-свободный

$S \to dShS \mid hSdS \mid \lambda$

Упражнение 4

Пусть $Perm(\omega)$– это множество всех пермутаций строки ω, то есть, множество всех уникальных строк, состоящих из тех же букв и в том же количестве, что и в ω. Если L – регулярный язык, то $Perm(L)$ – это объединение $Perm(\omega)$ для всех ω в L. Если L регулярный, то $Perm(L)$ иногда тоже регулярный, иногда контекстно-свободный, но не регулярный, а иногда даже не контекстно-свободный. Рассмотрите следующие регулярные выражения R и установите, является ли $Perm(R)$ регулярным, контекстно-свободным или ни тем и ни другим:

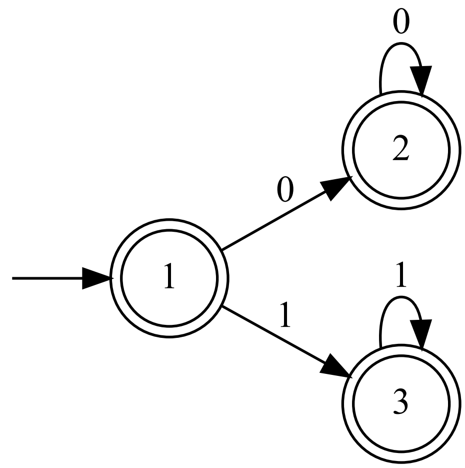
1. $(01)^*$

   (a) Фиксируем $\forall n = N$ возьмём слово $\alpha = 0^N 1^N$, $\alpha \in Perm(R)$, $|\alpha| = 2N > N$, так как в лемме $|xy| \leq N$, как бы мы не взяли xy, $y = 0^i \implies xy^k z$ выходит за пределы языка при $\forall k \neq 1$, так как тогдаколичество нулей $\neq$ количество единиц $\implies$ α уже не является перестановкой символов в слове состоящем из пар нулей и единиц $\implies$ язык $Perm(R)$ не регулярный

   (b) $S \to 0S1S \mid 1S0S \mid \lambda$

2. $0^* + 1^*$

   (a) Построим автомат



(b) $S \to 0S_1 \mid 1S_2 \mid \lambda$
$S_1 \to 0S_1 \mid\lambda$
$S_2 \to 1S_2 \mid\lambda$

3. $(012)^*$

(a) Фиксируем $\forall n = N$ возьмём слово $\alpha = 0^N1^N2^N,\ \alpha \in Perm(R),\ |\alpha| = 3N > N,$ так как в лемме $|xy| \le N,$ как бы мы не взяли $xy,\ y = 0^i \implies xy^kz$ выходит за пределы языка при $\forall k \neq 1,$ так как тогдаколичество нулей $\neq$ количество единиц и двоек $\implies$ α уже не является перестановкой символов в слове состоящем из троек нулей, единиц и двоек $\implies$ язык $Perm(R)$ не регулярный

(b) Фиксируем $\forall p = N$ возьмём слово $\alpha = 0^N1^N2^N,\ \alpha \in Perm(R),\ |\alpha| = 3N > N,$ так как в лемме $|v\omega x| \le N,$ как бы мы не взяли $v\omega x$, оно никогда не сможет включать в себя и единицы и двойки и нули, а значит если начать что то наращивать в этом слове, тех цифр что в нем не присутствуют станет меньше чем других $\implies uv^k\omega x^ky$ выходит за пределы языка при $\forall k \neq 1, \implies$ язык $Perm(R)$ не контекстно-свободный

Упражнение 5

1. Пусть грамматика $G-$ праволинейная. Опишите алгоритм построения НКА N, такого что $(N) = (G)$. Коротко докажите(от противного),что ваш алгоритм может получить только слова из языка грамматики. Проиллюстрируйте алгоритм на грамматике:

   $A \to aB \mid bC$
   $B \to aB \mid \lambda$
   $C \to aD \mid A \mid bC$
   $B \to aD \mid bD \mid \lambda$

   Имеем $G = \langle V, \sum, R, S \rangle$, где
   V – множество нетерминальных символов
   $\sum$ – множество терминальных символов
   R – правила вида $\begin{cases} 1.\ A \to \lambda \\ 2.\ A \to B \\ 3.\ A \to aB \end{cases}$
   S – стартовый нетерминал

   Тогда НКА $N = \langle M, Q, y, T, \sigma \rangle$ будет таким:
   Мн-во терминальных символов: $M = \sum$
   Мн-во вершин: $Q = V$
   Стартовая вершина: $y = s$
   Мн-во конечных вершин.: $T = \{t : t \in V,\ \exists \omega \in R : t \to \lambda \in$

$\omega\}$

Мн-во переходов σ формируем по принципу (относительно номеров из R): $\begin{cases} 1.\text{ничего} \\ 2.\lambda - \text{переход из } A \text{ в } B \\ 3.\text{переход по } a \text{ из } A \text{ в } B \end{cases}$

Докажем $(N) = (G)$

Пусть x не выводится из G , но выводится из N

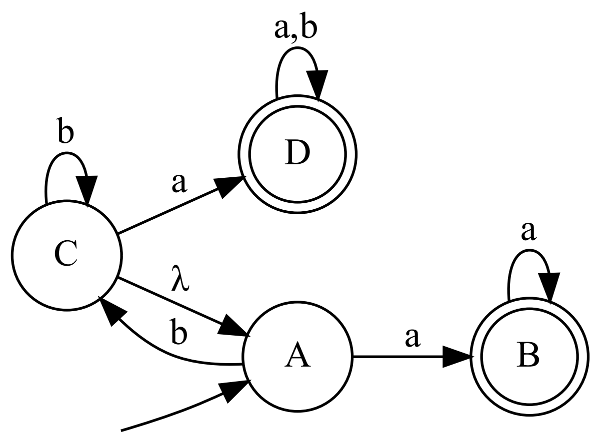
Пусть $x = a_1 a_2 ... a_n$ $(a_i \in \sum, \forall i)$

При разборе слова автоматом, для каждой буквы a_i, мы должны пройти по $\lambda-$переходам из текущей вершины S в вершину S_1 из которой есть переход по букве a_i, когда буквы закончатся мы аналогично должны дойти до какой то конечной вершины по $\lambda-$переходам. Так как в N каждой вершине мы можем поставить в соответствие правило из G (т.к. $Q = V$) а $\lambda-$переходы между вершинами A и B мы ставили тогда когда в R было правило $A \to B$ то выходит везде где по $\lambda-$переходам мы добираемся из вершины S в вершину S_1, в G $S \Rightarrow^* S_1$, далее так как в N мы ставили переход из A в B по a тогда когда в R было правило $A \to aB$, значит если в автомате есть переход из S_1 в S_2 по a_i, то в G $S_1 \Rightarrow^* a_i S_2$, и наконец так как мы в N обозначали вершину A конечной если в R есть правило $A \to \lambda$, то если в автомате мы смогли добратся по $\lambda-$переходам из S_m в вершину S_k которая является конечной, значит в G $S_m \Rightarrow^* S_k,\ S_k \Rightarrow^* \lambda \implies S_m \Rightarrow^* \lambda \implies G \Rightarrow^* x -$ противоречие.

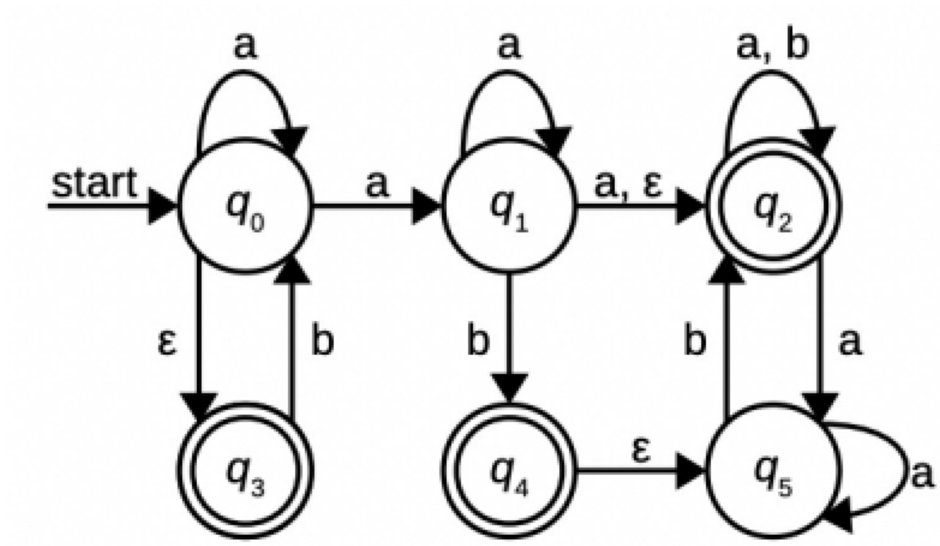
Пусть теперь x выводится из G , но не выводится из N

Пусть $x = a_1 a_2 ... a_n$ $(a_i \in \sum, \forall i)$

Доказывать будем аналогично. Чтобы $y \implies {}^*a_1S_1$ нужно пройти по переходам вида $A \to B$ из y в S: есть переход $S \to a_1S_1$, в N можно сделать тоже-самое перейдя по $\lambda-$переходам из y в S, а далее из S в S_1 по a_1, из за принципа построения N. Аналогично происходит до конца слова, когда закончатся буквы, допустим на S_n, далее $S_n \Rightarrow^* \lambda$, по тем же соображениям мы и в N можем сделать так-же и прийти из S_n в конечную вершину, выходит что если слово выводится из G оно выводится и из N.



2. Пусть N – НКА. Опишите алгоритм построения КС-грамматики G, такой что $(G) = (N)$. Коротко докажите (от противного), что ваш алгоритм может получить только слова из языка НКА. Проиллюстрируйте алгоритм на автомате:



Имеем $N = \langle M, Q, y, T, \sigma \rangle$, где
M – множество терминальных символов
Q – множество вершин
y – стартовая вершина
T – множество конечных вершин
σ – множество переходов

Тогда грамматика $G = \langle V, \sum, R, S \rangle$ будет такой:
Мн-во нетерминальных символов: $V = Q$
Мн-во терминальных символов: $\sum = M$
Стартовый нетерминал: $S = y$
Мн-во правил вывода R формируем
по принципу: $\begin{cases} A \to B \text{ (есть } \lambda - \text{переход из } A \text{ в } B) \\ A \to aB \text{ (есть переход по } a \text{ из } A \text{ в } B) \\ A \to \lambda \ (A - \text{ терминальная вершина}) \end{cases}$
Докажем $(N) = (G)$
Пусть x не выводится из G, но выводится из N
Пусть $x = a_1 a_2 ... a_n$ $(a_i \in \sum, \forall i)$

При разборе слова автоматом, для каждой буквы a_i, мы должны пройти по $\lambda-$переходам из текущей вершины S в вершину S_1 из которой есть переход по букве a_i, когда буквы закончатся мы аналогично должны дойти до какой то конечной вершины по $\lambda-$переходам. Так как в N каждой вершине мы можем поставить в соответствие правило из G (т.к. $V = M$) и так как мы создавали правила вида $A \to B$ когда есть $\lambda-$переход из A в B, $S \Rightarrow^* S_1$, так как мы создавали правила вида $A \to aB$ когда из вершины A есть переход в B по a, то $S_1 \Rightarrow^* a_i S_2$, аналогично со всеми переходами, теперь если мы можем из вершины S_n перейти в конечную вершину значит $S_n \Rightarrow^* \lambda$, значит x выводится из G $-$ противоречие.

Пусть теперь x выводится из G , но не выводится из N
Пусть $x = a_1 a_2 ... a_n$ $(a_i \in \sum, \forall i)$

Доказывать будем аналогично. Чтобы $y \Rightarrow^* a_1 S_1$ нужно пройти по переходам вида $A \to B$ из y в S: есть переход $S \to a_1 S_1$, в N можно сделать тоже-самое ,так как для каждого подобного правила есть $\lambda-$переход, перейдя по $\lambda-$переходам из y в S, а далее из S в S_1 по a_1, из за принципа построения N. Аналогично происходит до конца слова, когда закончатся буквы, допустим на S_n, далее $S_n \Rightarrow^* \lambda$, по тем же соображениям мы и в N можем сделать так-же и прийти из S_n в конечную вершину, выходит что если слово выводится из G оно выводится и из N.

$q_0 \to\ aq_0 \mid aq_1 \mid q_3$
$q_1 \to\ aq_1 \mid bq_4 \mid aq_2 \mid q_2$
$q_2 \to\ aq_2 \mid bq_2 \mid aq_5 \mid \lambda$
$q_3 \to\ bq_0 \mid \lambda$
$q_4 \to\ q_5 \mid \lambda$
$q_5 \to\ aq_5 \mid bq_2$