

Упражнение 1

1. В алфавите $\Sigma = \{a, b, c\}$ постройте грамматику для языка $L = \{\omega \in \Sigma^* \mid \omega \text{ содержит подстроку } aa\}$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow cS \mid bS \mid aaS_1 \mid aS \\ S_1 &\rightarrow aS_1 \mid bS_1 \mid cS_1 \mid \lambda \end{aligned}$$

2. В алфавите $\Sigma = \{a, b, c\}$ постройте грамматику для языка $L = \{\omega \in \Sigma^* \mid \omega \text{ не полиндром}\}$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aS_1 \mid bS_2 \mid cS_3 \\ S_1 &\rightarrow S_4b \mid S_4c \mid Sa \\ S_2 &\rightarrow S_4a \mid S_4c \mid Sb \\ S_3 &\rightarrow S_4a \mid S_4b \mid Sc \\ S_4 &\rightarrow aS_1 \mid bS_2 \mid cS_3 \mid \lambda \end{aligned}$$

3. В алфавите $\Sigma = \{\emptyset, \mathbb{N}, '\{', '\}', ', ', \cup\}$ постройте грамматику для языка $L = \{\omega \in \Sigma^* \mid \omega \text{ — синтаксически корректная строка обозначающая множество}\}$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \emptyset \mid \mathbb{N} \mid \{S_1\} \mid \cup \\ S_1 &\rightarrow S, S_2 \mid S \mid \lambda \\ S_2 &\rightarrow S, S_2 \mid S \end{aligned}$$

Упражнение 2

В алфавите $\Sigma = \{1, +, =\}$ Рассмотрим язык $A = \{1^m + 1^n = 1^{n+m} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

1. Докажите что язык A регулярный (построением) или не регулярный (через лемму о накачке)

Фиксируем $\forall n = N$ возьмём слово $\alpha = 1^N + 1^N = 1^{2N}$, $\alpha \in A$, $|\omega| = 4N+2 > N$, так как в лемме $|xy| \leq N$, как бы мы не взяли xy , $y = 1^i \implies xy^kz$ выходит за пределы языка при $\forall k \neq 1$, так как тогда в выражении перестаёт выполняться тождество \implies язык A не регулярный

2. Постройте КС-грамматику для языка A , показывающую, что A — контекстно-свободный

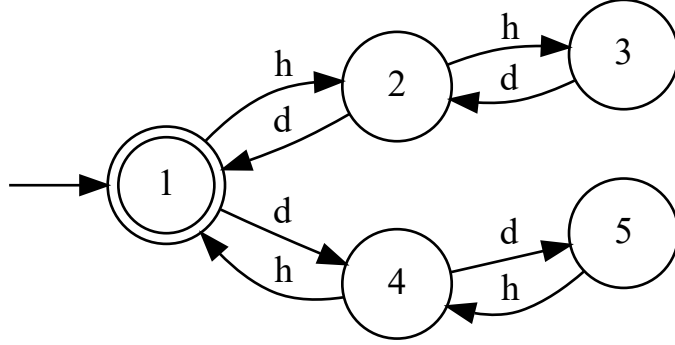
$$\begin{aligned} S &\rightarrow 1S1 \mid +S_1 \\ S_1 &\rightarrow 1S_11 \mid = \end{aligned}$$

Упражнение 3

1. Вы пошли гулять с собакой, ваша собака на поводке длины 2. Это значит что она не может отойти от вас более чем на 2 шага. Пусть $\Sigma = \{h, d\}$, где h — ваше перемещение на один шаг вперёд, а d — шаг собаки. Прогулка может быть завершена, если собака и человек оказались в одной точке.

Пусть $D_1 = \{\omega \in \Sigma^* \mid \omega \text{ описывает последовательность ваших шагов и шагов вашей собаки на прогулке с поводком}\}$

- (а) Докажите, что язык D_1 регулярный(построением) или не регулярный (через лемму о накачке)



- (b) Постройте КС-грамматику для языка D_1 , показывающую, что D_1 — контекстно-свободный

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow hS_1 \mid dS_2 \mid \lambda \\
 S_1 &\rightarrow hdS_1 \mid dS \\
 S_2 &\rightarrow dhS_2 \mid hS
 \end{aligned}$$

2. Допустим теперь, что вы также пошли на прогулку с собакой. но не взяли с собой поводок. Это значит, что вы можете отдалиться от собаки на любое расстояние.

Пусть $D_2 = \{\omega \in \Sigma^* \mid \omega \text{ описывает последовательность ваших шагов и шагов вашей собаки на прогулке без поводка}\}$

- (a) Докажите, что язык D_2 регулярный(построением) или не регулярный (через лемму о накачке)

Фиксируем $\forall n = N$ возьмём слово $\alpha = h^N d^N$, $\alpha \in D_2$, $|\omega| = 2N > N$, так как в лемме $|xy| \leq N$, как бы мы не взяли xy , $y = h^i \implies xy^k z$ выходит за пределы языка при $\forall k \neq 1$, так как тогда в конце прогулки вы и собака окажитесь в разных местах \implies язык D_2 не регулярный

- (b) Постройте КС-грамматику для языка D_2 , показывающую, что D_2 — контекстно-свободный

$$S \rightarrow dShS \mid hSdS \mid \lambda$$

Упражнение 4

Пусть $Perm(\omega)$ — это множество всех пермутаций строки ω , то есть, множество всех уникальных строк, состоящих из тех же букв и в том же количестве, что и в ω . Если L — регулярный язык, то $Perm(L)$ — это объединение $Perm(\omega)$ для всех ω в L . Если L регулярный, то $Perm(L)$ иногда тоже регулярный, иногда контекстно-свободный, но не регулярный, а иногда даже не контекстно-свободный. Рассмотрите следующие регулярные выражения R и установите, является ли $Perm(R)$ регулярным, контекстно-свободным или ни тем и ни другим:

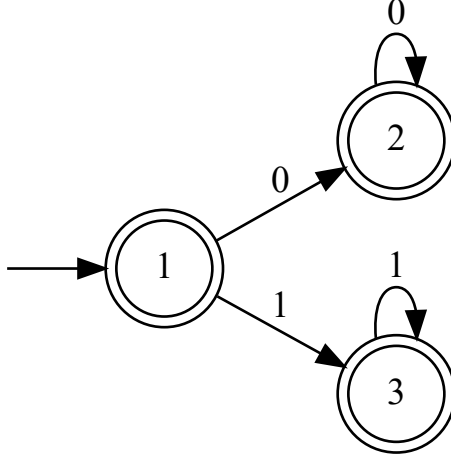
1. $(01)^*$

- (a) Фиксируем $\forall n = N$ возьмём слово $\alpha = 0^N 1^N$, $\alpha \in Perm(R)$, $|\omega| = 2N > N$, так как в лемме $|xy| \leq N$, как бы мы не взяли xy , $y = 0^i \implies xy^k z$ выходит за пределы языка при $\forall k \neq 1$, так как тогда количество нулей \neq количество единиц $\implies \alpha$ уже не является перестановкой символов в слове состоящем из пар нулей и единиц \implies язык $Perm(R)$ не регулярный

(b) $S \rightarrow 0S1S \mid 1S0S \mid \lambda$

2. $0^* + 1^*$

- (a) Построим автомат



$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad & S \rightarrow 0S_1 \mid 1S_2 \mid \lambda \\
 & S_1 \rightarrow 0S_1 \mid \lambda \\
 & S_2 \rightarrow 1S_2 \mid \lambda
 \end{aligned}$$

3. $(012)^*$

(a) Фиксируем $\forall n = N$ возьмём слово $\alpha = 0^N 1^N 2^N$, $\alpha \in \text{Perm}(R)$, $|\omega| = 2N > N$, так как в лемме $|xy| \leq N$, как бы мы не взяли xy , $y = 0^i \implies xy^k z$ выходит за пределы языка при $\forall k \neq 1$, так как тогда количество нулей \neq количество единиц и двоек $\implies \alpha$ уже не является перестановкой символов в слове состоящем из троек нулей, единиц и двоек \implies язык $\text{Perm}(R)$ не регулярен

$$\text{(b)} \quad S \rightarrow 0S1S2S \mid 1S0S2S \mid 1S2S0S \mid 0S2S1S \mid 2S1S0S \mid 2S0S1S \mid \lambda$$

Упражнение 5

1. Пусть грамматика G — праволинейная. Опишите алгоритм построения НКА N , такого что $(N) = (G)$.

Коротко докажите(от противного), что ваш алгоритм может получить только слова из языка грамматики. Проиллюстрируйте алгоритм на грамматике:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow aB \mid bC \\ B &\rightarrow aB \mid \lambda \\ C &\rightarrow aD \mid A \mid bC \\ B &\rightarrow aD \mid bD \mid \lambda \end{aligned}$$

Имеем $G = \langle V, \Sigma, R, S \rangle$, где
 V — множество нетерминальных символов
 Σ — множество терминальных символов
 R — правила вида $\begin{cases} 1. A \rightarrow \lambda \\ 2. A \rightarrow B \\ 3. A \rightarrow aB \end{cases}$
 S — стартовый нетерминал

Тогда НКА $N = \langle M, Q, y, T, \sigma \rangle$ будет таким:

Мн-во терминальных символов: $M = \Sigma$

Мн-во вершин: $Q = V$

Стартовая вершина: $y = s$

Мн-во конечных вершин.: $T = \{t : t \in V, \exists \omega \in R : t \rightarrow \lambda \in \omega\}$

Мн-во переходов σ сформируем по принципу (относительно номеров из R): $\begin{cases} 1. \text{ничего} \\ 2. \lambda - \text{переход из } A \text{ в } B \\ 3. \text{переход по } a \text{ из } A \text{ в } B \end{cases}$

Докажем $(N) = (G)$

Пусть x не выводится из G , но выводится из N

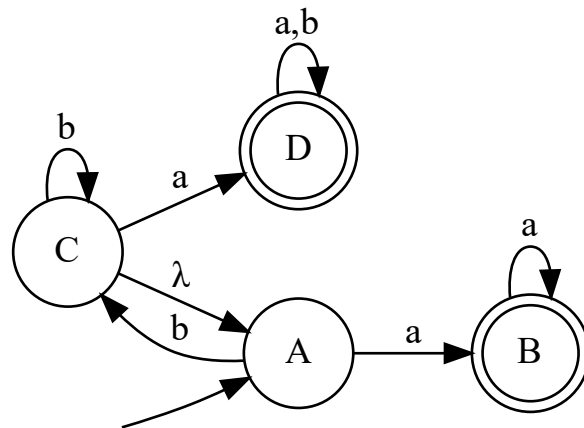
Пусть $x = a_1 a_2 \dots a_n$ ($a_i \in \Sigma, \forall i$)

При разборе слова автоматом, для каждой буквы a_i , мы должны пройти по λ -переходам из текущей вершины S в вершину S_1 из которой есть переход по букве a_i , когда буквы закончатся мы аналогично должны дойти до какой то конечной вершины по λ -переходам. Так как в N каждой вершине мы можем поставить в соответствие правило из G (т.к. $Q = V$) а λ -переходы между вершинами A и B мы ставили тогда когда в R было правило $A \rightarrow B$ то выходит везде где по λ -переходам мы добираемся из вершины S в вершину S_1 , в G $S \Rightarrow^* S_1$, далее так как в N мы ставили переход из A в B по a тогда когда в R было правило $A \rightarrow aB$, значит если в автомате есть переход из S_1 в S_2 по a_i , то в G $S_1 \Rightarrow^* a_i S_2$, и наконец так как мы в N обозначали вершину A конечной если в R есть правило $A \rightarrow \lambda$, то если в автомате мы смогли добраться по λ -переходам из S_m в вершину S_k которая является конечной, значит в G $S_m \Rightarrow^* S_k$, $S_k \Rightarrow^* \lambda \implies S_m \Rightarrow^* \lambda \implies G \Rightarrow^* x$ — противоречие.

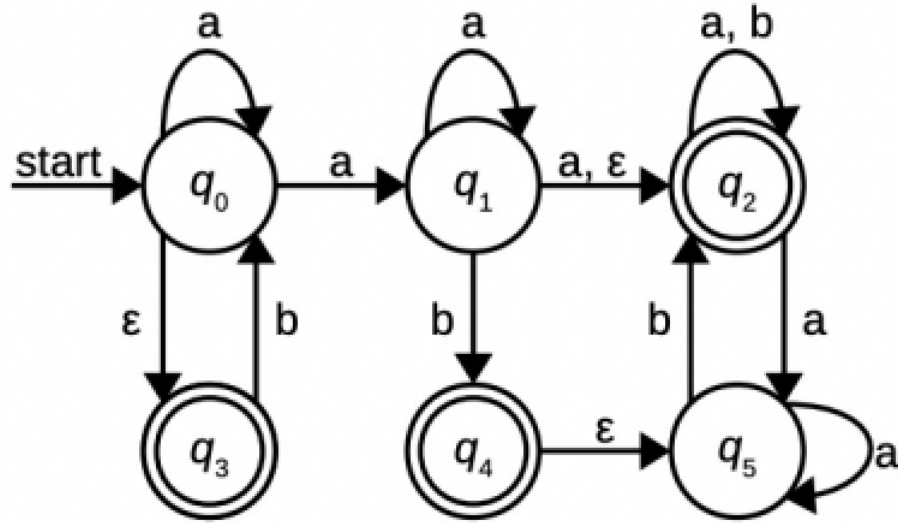
Пусть теперь x выводится из G , но не выводится из N
Пусть $x = a_1 a_2 \dots a_n$ ($a_i \in \Sigma, \forall i$)

Доказывать будем аналогично. Чтобы $y \Rightarrow^* a_1 S_1$ нужно пройти по переходам вида $A \rightarrow B$ из y в S : есть переход $S \rightarrow a_1 S_1$, в N можно сделать тоже-самое перейдя по λ -переходам из y в S , а далее из S в S_1 по a_1 , из за принципа построения N . Аналогично происходит до конца слова, когда закончатся буквы, допустим на S_n , далее $S_n \Rightarrow^* \lambda$, по тем же соображениям мы и в N можем сделать так-же и прийти из S_n в конечную вершину, выходит что если слово

выводится из G оно выводится и из N .



2. Пусть N — НКА. Опишите алгоритм построения КС-грамматики G , такой что $(G) = (N)$. Коротко докажите (от противного), что ваш алгоритм может получить только слова из языка НКА. Проиллюстрируйте алгоритм на автомате:



Имеем $N = \langle M, Q, y, T, \sigma \rangle$, где
 M – множество терминальных символов
 Q – множество вершин
 y – стартовая вершина
 T – множество конечных вершин
 σ – множество переходов

Тогда грамматика $G = \langle V, \Sigma, R, S \rangle$ будет такой:

Мн-во нетерминальных символов: $V = Q$

Мн-во терминальных символов: $\Sigma = M$

Стартовый нетерминал: $S = y$

Мн-во правил вывода R формируем

по принципу:
$$\begin{cases} A \rightarrow B \text{ (есть } \lambda \text{ – переход из } A \text{ в } B) \\ A \rightarrow aB \text{ (есть переход по } a \text{ из } A \text{ в } B) \\ A \rightarrow \lambda \text{ (} A \text{ – терминальная вершина)} \end{cases}$$

Докажем $(N) = (G)$

Пусть x не выводится из G , но выводится из N

Пусть $x = a_1 a_2 \dots a_n$ ($a_i \in \Sigma, \forall i$)

При разборе слова автоматом, для каждой буквы a_i , мы должны пройти по λ -переходам из текущей вершины S в

вершину S_1 из которой есть переход по букве a_i , когда буквы закончатся мы аналогично должны дойти до какой то конечной вершины по λ -переходам. Так как в N каждой вершине мы можем поставить в соответствие правило из G (т.к. $V = M$) и так как мы создавали правила вида $A \rightarrow B$ когда есть λ -переход из A в B , $S \Rightarrow^* S_1$, так как мы создавали правила вида $A \rightarrow aB$ когда из вершины A есть переход в B по a , то $S_1 \Rightarrow^* a_i S_2$, аналогично со всеми переходами, теперь если мы можем из вершины S_n перейти в конечную вершину значит $S_n \Rightarrow^* \lambda$, значит x выводится из G – противоречие.

Пусть теперь x выводится из G , но не выводится из N
Пусть $x = a_1 a_2 \dots a_n$ ($a_i \in \Sigma, \forall i$)

Доказывать будем аналогично. Чтобы $y \Rightarrow^* a_1 S_1$ нужно пройти по переходам вида $A \rightarrow B$ из y в S : есть переход $S \rightarrow a_1 S_1$, в N можно сделать тоже-самое, так как для каждого подобного правила есть λ -переход, перейдя по λ -переходам из y в S , а далее из S в S_1 по a_1 , из за принципа построения N . Аналогично происходит до конца слова, когда закончатся буквы, допустим на S_n , далее $S_n \Rightarrow^* \lambda$, по тем же соображениям мы и в N можем сделать так-же и прийти из S_n в конечную вершину, выходит что если слово выводится из G оно выводится и из N .

$$\begin{aligned}
q_0 &\rightarrow aq_0 \mid aq_1 \mid q_3 \\
q_1 &\rightarrow aq_1 \mid bq_4 \mid aq_2 \mid q_2 \\
q_2 &\rightarrow aq_2 \mid bq_2 \mid aq_5 \\
q_3 &\rightarrow bq_0 \mid \lambda \\
q_4 &\rightarrow q_5 \mid \lambda \\
q_5 &\rightarrow aq_5 \mid bq_2
\end{aligned}$$