Домашняя работа по ТМВ №2

Корнев Илья А-13б-19

Упражнение 1.

Построим КС-грамматику для следующих языков:

1. $\boldsymbol{L = \{\omega \in \{a, b, c\}^* | \omega}$ **содержит подстроку** $\boldsymbol{aa\}}$

$$S \ := \ AaaA$$

$$A \ := \ aA \mid bA \mid cA \mid \lambda$$

2. $\boldsymbol{L = \{\omega \in \{a, b, c\}^* | \omega \neq \omega^R\}}$

$$S \ \rightarrow \ aSa \mid bSb \mid cSc$$

$$S \ \rightarrow \ aAb \mid aAc \mid bAa \mid bAc \mid cAa \mid cAb$$
$$A \ \rightarrow \ aA \mid bA \mid cA \mid \lambda$$

3. $\boldsymbol{L = \{\omega \in \{\emptyset, \mathbb{N}, '\{', '\}', \cup, ','\}^* \omega}$ **корректное множество**$\boldsymbol{\}}$

$$S \ \rightarrow \ A \ \cup \ S \mid A$$

$$A \ \rightarrow \ \emptyset \mid \mathbb{N}, \{B\}$$
$$B \ \rightarrow \ SC \mid \lambda$$
$$C \ \rightarrow \ , S \mid \lambda$$

Упражнение 2.

Рассмотрим язык $\boldsymbol{A = \{1^m + 1^n = 1^{m+n} | m, n \in \mathbb{N}\}}$:
а). Докажем, что язык А не регулярный используя лемму о накачке:
Фиксируем произвольное n:

$$\omega = 1^n + 1^n = 1^{2n}$$
$$x = 1^{n-1}$$
$$y = 1$$
$$z = +1^n = 1^{2n}$$

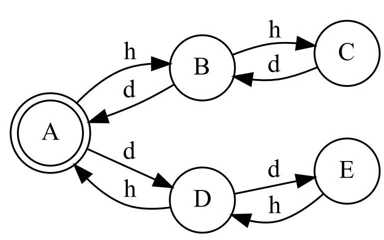
$xy^k z \notin A k \geq 2 \implies$ язык А не регулярный.

б). Построим КСГ для языка А:

$$S \ \rightarrow \ A \mid \ +B$$
$$A \ \rightarrow \ 1A1 \mid \ +B$$
$$B \ \rightarrow \ 1B1 \mid \ =$$

Упражнение 3.

h – движение хозяина на 1 шаг вперед.
d – движение собаки на 1 шаг вперед.
Прогулка может считаться оконченной когда собака и хозяин оказываются в одном месте.
Поводок ограничивает движение на 2 шага от друг друга.
1. $\boldsymbol{D_1 = \{\omega \in \{h, d\}^* | \omega}$ **описывает последовательность ваших шагов и шагов вашей собаки с поводком$\boldsymbol{\}}$**
а). Покажем, что язык D_1 регулярный построив ДКА, распознающий его:



б). Построим КСГ для языка D_1:

$$S \rightarrow dA \mid hB$$
$$A \rightarrow d \mid dC$$
$$B \rightarrow d \mid hD$$
$$C \rightarrow hA$$
$$D \rightarrow dB$$

2. $D_2 = \{\omega \in \{h, d\}^*|\omega$ описывает последовательность ваших шагов и шагов вашей собаки без поводка$\}$

$$D_2 = \{\omega \in \{h, d\}^*||\omega|_h = |\omega|_d\}$$

а). Докажем что язык D_2 не регулярный, используя лемму о накачке:
Фиксируем произвольное n:

$$\omega = h^n d^n$$
$$x = h^{n-1}$$
$$y = h$$
$$z = d^n$$

$xy^k z \notin Ak \geq 2 \implies$ язык D_2 не регулярный.

б). Построим КСГ для языка D_2:

$$S \rightarrow SS \mid hSd \mid dSh \mid \lambda$$

Упражнение 4.

$Perm(\omega)$ – множество всех пурметаций строки ω.
$Perm(L)$ – объединение $Perm(\omega)$ для всех $\omega \in L$
Рассмотрим следующие языки охарактеризованными регулярными выражениями:

1. $R_1 = \{01\}^*$
$Perm(R_1) = \{\omega \in \{0, 1\}||\omega|_0 = |\omega|_1\}$

Докажем что язык $Perm(R_1)$ не регулярный, используя лемму о накачке:
Фиксируем произвольное n:

$$\omega = 0^n 1^n$$

$$x = 0^{n-1}$$

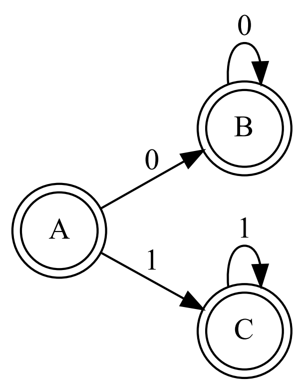
$$y = 0$$

$$z = 1^n$$

$xy^k z \notin A k \geq 2 \implies$ язык $Perm(R_1)$ не регулярный.
Построим КСГ для языка $Perm(R_1)$ и покажем, что он контекстно-свободный:

$$S \ \rightarrow \ SS \mid 0S1 \mid 1S0 \mid \lambda$$

2. $\boldsymbol{R_2 = \{0^* + 1^*\} = \{0^n | n \geq 0\} \cup \{1^n | n \geq 0\}}$
$\boldsymbol{Perm(R_2) = R_2}$
Покажем, что язык $Perm(R_2)$ регулярный построив ДКА, распознающий его:



Из этого следует, что язык $Perm(R_2)$ также является контекстно-свободным.

3. $\boldsymbol{R_3 = 012^*}$
$\boldsymbol{Perm(R_3) = \{\omega \in \{0,1,2\} || \omega|_0 = |\omega|_1 = |\omega|_2\}}$
Покажем, что язык $Perm(R_3)$ не является контекстно-свободным, используя лемму о накачке для контектсно-свободных языков:
Фиксируем произвольное n:

$$\omega = a^n b^n c^n = uvwxy, \ |vx| \geq 1, \ |vwx| \leq n$$

$$u = a^{n-1}$$
$$v = a$$
$$w = b^{n-1}$$
$$x = b$$
$$y = c^n$$

$uv^kwx^ky \notin Perm(R_3)k \geq 2 \implies$ язык $Perm(R_3)$ не контекстно-свободный, а значит тем более не регулярный.

1 Упражнение 5.

При условии, что все правила КС-грамматики имеют форму:

$$A \ \to \ \lambda$$
$$A \ \to \ B$$
$$A \ \to \ aB$$

Возможно построить эквивалентный ей НКА, следующим образом.
1). Пусть мы имеем КС-грамматику $G = (V, \Sigma_G, R, S)$
V – множество нетерминальных символов
Σ_G – множество терминальных символов
$R = \{(v, \omega) \mid v \in V,\ \omega \in (\{\lambda\} \cup \Sigma_G \cup (\Sigma_G \cdot V))\}$ – множество правил праволинейной КС-грамматикиб где $\Sigma_G \cdot V = \{cv \mid c \in \Sigma_G,\ v \in V\}$ – конкатенация множеств
S – аксиома
Построим НКА $N = (\Sigma_N, Q, s, T, \delta)$, такой что:

$$\Sigma_N = \Sigma_G$$
$$Q = V$$
$$s = S$$
$$T = \{v \mid \exists (v, \lambda) \in R\}$$

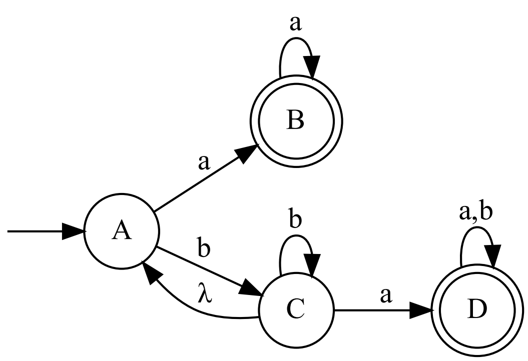
Функции переходов определяются следующим образом:

$$\delta(q, c) = \{v \mid \exists (v, cq) \in R,\ q \in V\}$$

Продемонстрируем работу алгоритма:
Имеем КС-грамматику:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow aB \mid bC \\ B &\rightarrow aB \mid \lambda \\ C &\rightarrow aD \mid A \mid bC \\ D &\rightarrow aD \mid bD \mid \lambda \end{aligned}$$

По нашему алгоритму получаем следующий автомат:



Докажем от противного, что автомат N может получить только слова из языка грамматики G.

Язык грамматики G: $L(G) = \{\omega \in \Sigma_G \mid S \Rightarrow^* \omega\}$

Язык автомата N: $L(N) = \{\omega \mid \delta^*(s, \omega) \in T\}$ – множество слов, которые допускает автомат N, где $\delta^*(q, \omega)$ рекурсивно определен следующим образом:

$$\delta^*(q, \lambda) = q$$

$$\delta^*(q, \omega c) = v \in \delta(\delta^*(q, \omega), c)$$

Пусть $\exists \omega \in L(N) \mid \omega \notin L(G)$
В этом случае, в какойто момент при при продолжительных переходах мы можем прийти к состоянию, когда:

$$\delta^n(s, \omega c) = v_1, \text{ но } S \Rightarrow^n \omega c v_2$$

$$v_1 \in \delta(\delta^{n-1}(s,\omega),c),\ v_2 \notin \delta(\delta^{n-1}(s,\omega),c)$$

Однако $\forall q \in V = Q\ \delta(q,c) = \{v \mid \exists(v,cq) \in R\}$ – противоречие

2). Теперь пусть мы имеем НКА $N = (\Sigma_N, Q, s, T, \delta)$
Возможно построить эквивалентную КС-грамматику $G = (V, \Sigma_G, R, S)$ следующим образом:

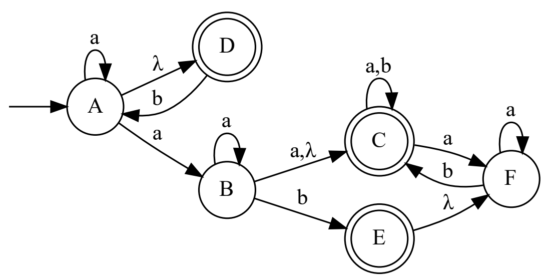
$$V = Q$$

$$\Sigma_G = \Sigma_N$$

$$S = s$$

$$R = \{(v,\omega) \mid v \in Q,\ \omega = cq,\ q \in \delta(v,c) \neq \emptyset\} \cup \{(v,\lambda) \mid v \in T\}$$

Продемонстрируем работу алгоритма:
Имеем НКА:



По нашему алгоритму получаем следующую КС-грамматику:

$$A \ \rightarrow\ aA \mid aB \mid D$$

$$B \ \rightarrow\ aB \mid bE \mid aC \mid C$$

$$C \ \rightarrow\ aC \mid bC \mid aF \mid \lambda$$

$$D \ \rightarrow\ bA \mid \lambda$$

$$E \rightarrow\ F \mid \lambda$$

$$F \ \rightarrow\ aF \mid bC$$

Докажем от противного, что КС-грамматика G может получить только слова из языка НКА N.

Язык грамматики G: $L(G) = \{\omega \in \Sigma_G \mid S \Rightarrow^* \omega\}$

Язык автомата N: $L(N) = \{\omega \mid \delta^*(s, \omega) \in T\}$ – множество слов, которые допускает автомат N, где $\delta^*(q, \omega)$ рекурсивно определен следующим образом:

$$\delta^*(q, \lambda) = q$$

$$\delta^*(q, \omega c) = v \in \delta(\delta^*(q, \omega), c)$$

Пусть $\exists \omega \in L(G) \mid \omega \notin L(N)$
В этом случае, в какойто момент при при продолжительных приложениях правил G мы можем прийти к состоянию, когда:

$$S \Rightarrow^n \omega c v_1, \text{ но } \delta^n(s, \omega c) = \delta(\delta^{n-1}(s, \omega), c) = v_2$$

$$(v_1, c) \in R, \text{ но } (v_2, c) \notin R$$

Однако $\forall q \in \delta(v, c)\ (v, cq) \in R$ – противоречие.