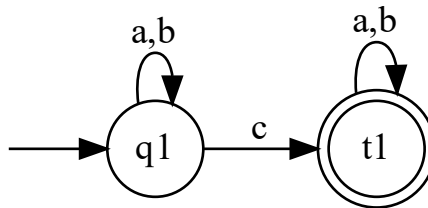


# Домашняя работа по ТМВ №1

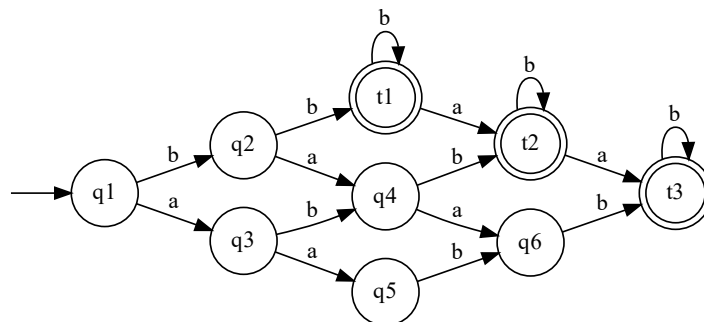
Корнев Илья А-136-19

**Задание 1. Построить конечный автомат, распознающий язык**

1.  $L_1 = \{\omega \in \{a, b, c\}^* \mid |\omega|_c = 1\}$



2.  $L_2 = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_a \leq 2, |\omega|_b \geq 2\}$



3.  $L_3 = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_a \neq |\omega|_b\}$

Докажем, что данный язык не является регулярным:

Рассмотрим дополнение к языку  $\overline{L}_3 = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_a = |\omega|_b\}$

Фиксируем произвольное  $n$

Выберем  $\omega = a^n b^n \in \overline{L}$

Выберем разбиение слова  $\omega$

$x = a^{n-1}$

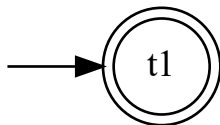
$y = a$

$z = b^n$

$xy^kz \notin \overline{L} \implies \overline{L}$  — не является регулярным  $\implies L$  — не является регулярным, следовательно не существует ДКА, распознающий язык  $L$

4.  $L_4 = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid \omega\omega = \omega\omega\omega\}$

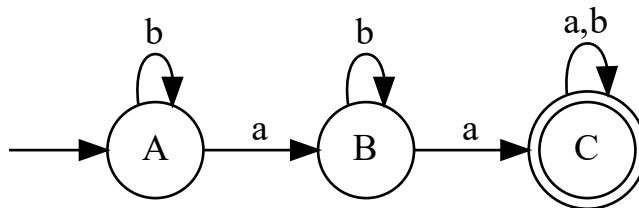
Единственное слово, в языке  $L$  это пустое слово  $\lambda$



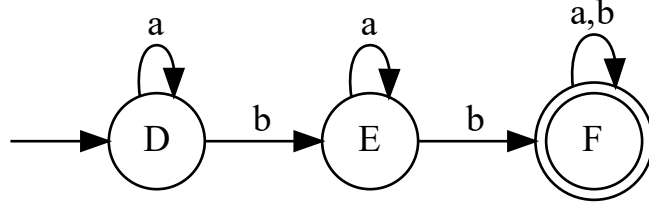
**Задание 2. Построить конечный автомат, используя прямоу произведение**

1.  $L_1 = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_a \geq 2 \wedge |\omega|_b \geq 2\}$

Автомат который распознает язык  $L_{11} = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_a \geq 2\}$ :



Автомат который распознает язык  $L_{12} = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_b \geq 2\}$ :



Построим прямое произведение этих автоматов:

$$\Sigma = \{a, b\};$$

$$Q = \{AD, AE, AF, BD, BE, BF, CD, CE, CF\};$$

$$s = AD;$$

$$T = \{CF\};$$

Функции переходов:

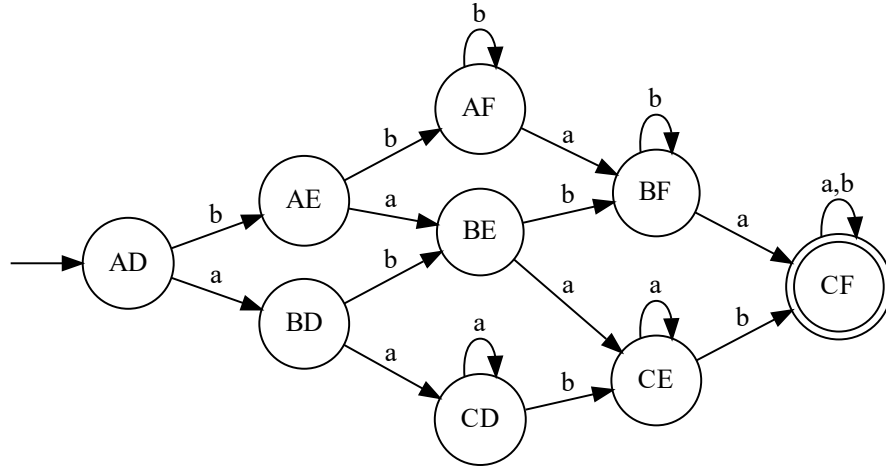
$$\delta(AD, a) = BD; \delta(AD, b) = AE; \delta(AE, a) = BE; \delta(AE, b) = AF;$$

$$\delta(AF, a) = BF; \delta(AF, b) = AF; \delta(BD, a) = CD; \delta(BD, b) = BE;$$

$$\delta(BE, a) = CE; \delta(BE, b) = BF; \delta(BF, a) = CF; \delta(BF, b) = BF;$$

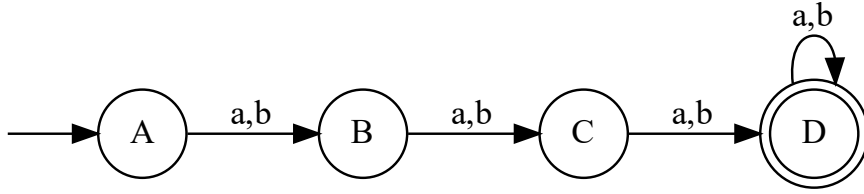
$$\delta(CD, a) = CD; \delta(CD, b) = CE; \delta(CE, a) = CE; \delta(CE, b) = CF;$$

$$\delta(CF, a) = CF; \delta(CF, b) = CF;$$

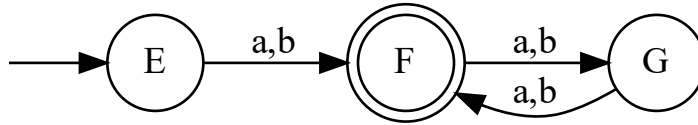


2.  $L_2 = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega| \geq 3 \wedge |\omega| \text{ нечётное}\}$

Автомат который распознает язык  $L_{21} = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega| \geq 3\}$ :



Автомат который распознает язык  $L_{22} = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega| \text{ нечётное}\}$ :



Построим прямое произведение этих автоматов:

$$\Sigma = \{a, b\};$$

$$Q = \{AE, AF, AG, BE, BF, BG, CE, CF, CG, DE, DF, DG\}$$

$$s = AE$$

$$T = \{DF\}$$

Функции переходов:

$$\delta(AE, a) = BF; \delta(AE, b) = BF; \delta(AF, a) = BG; \delta(AF, b) = BG;$$

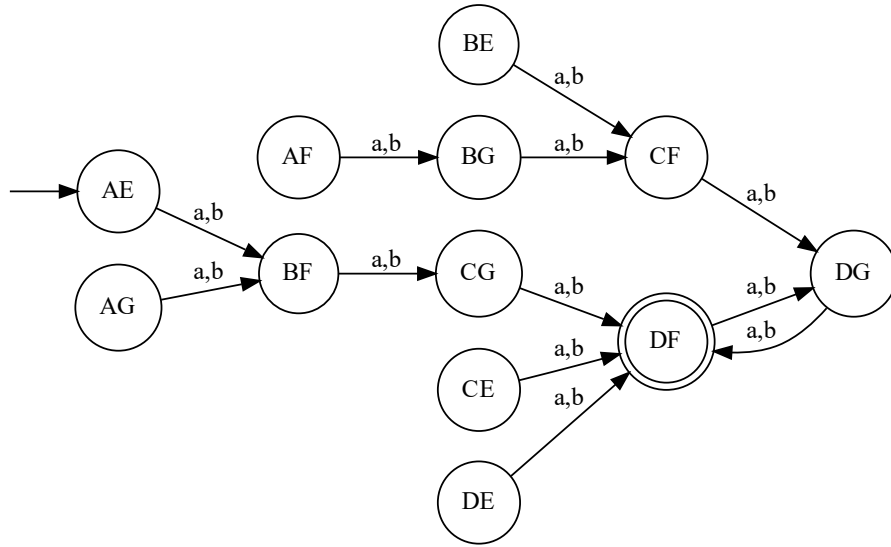
$$\delta(AG, a) = BF; \delta(AG, b) = BF; \delta(BE, a) = CF; \delta(BE, b) = CF;$$

$$\delta(BF, a) = CG; \delta(BF, b) = CG; \delta(BG, a) = CF; \delta(BG, b) = CF;$$

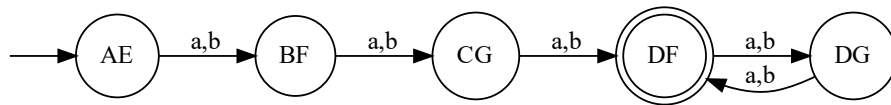
$$\delta(CE, a) = DF; \delta(CE, b) = DF; \delta(CF, a) = DG; \delta(CF, b) = DG;$$

$$\delta(CG, a) = DF; \delta(CG, b) = DF; \delta(DE, a) = DF; \delta(DE, b) = DF;$$

$$\delta(DF, a) = DG; \delta(DF, b) = DG; \delta(DG, a) = DF; \delta(DG, b) = DF;$$

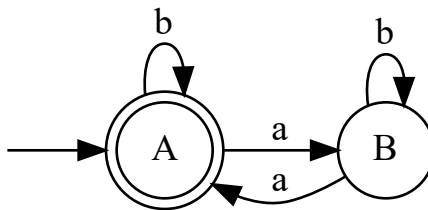


Уберем лишние вершины:

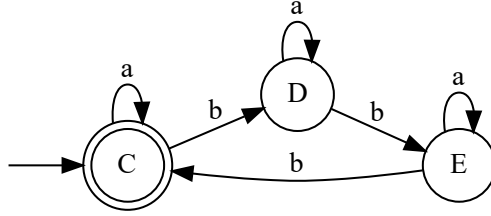


3.  $L_3 = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_a \text{ чётно} \wedge |\omega|_b \text{ кратно трём}\}$

Автомат который распознает язык  $L_{31} = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_a \text{ чётно}\}$ :



Автомат который распознает язык  $L_{32} = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_b \text{ кратно трём}\}$ :



Построим прямое произведение этих автоматов:

$$\Sigma = \{a, b\};$$

$$Q = \{AC, AD, AE, BC, BD, BE\}$$

$$s = AC$$

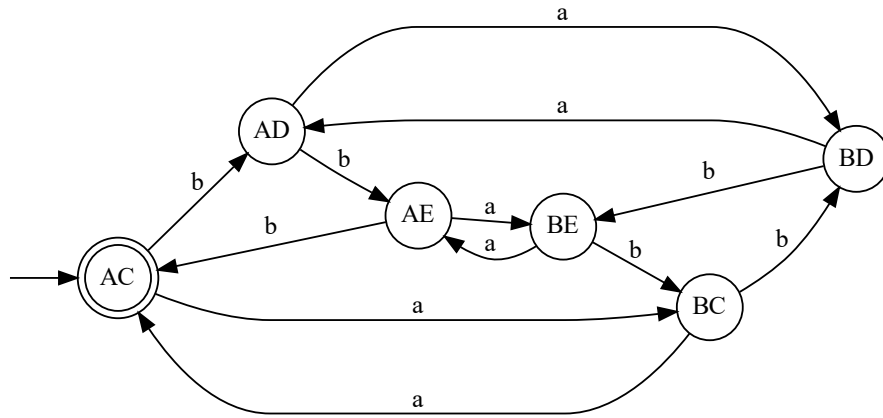
$$T = \{AC\}$$

Функции переходов:

$$\delta(AC, a) = BC; \delta(AC, b) = AD; \delta(AD, a) = BD; \delta(AD, b) = AE;$$

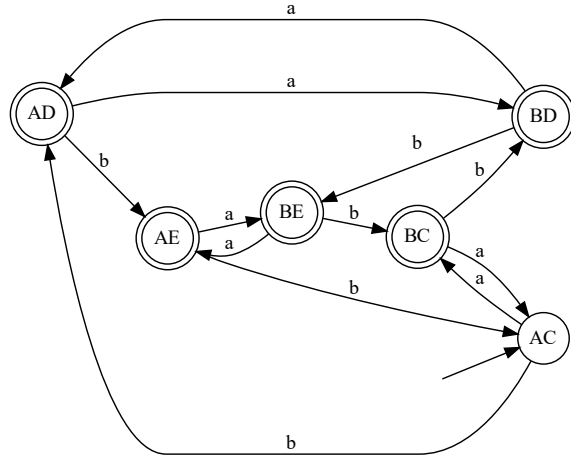
$$\delta(AE, a) = BE; \delta(AE, b) = AC; \delta(BC, a) = AC; \delta(BC, b) = BD;$$

$$\delta(BD, a) = AD; \delta(BD, b) = BE; \delta(BE, a) = AE; \delta(BE, b) = BC;$$

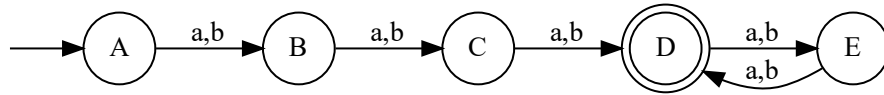


$$4. L_4 = \overline{L_3}$$

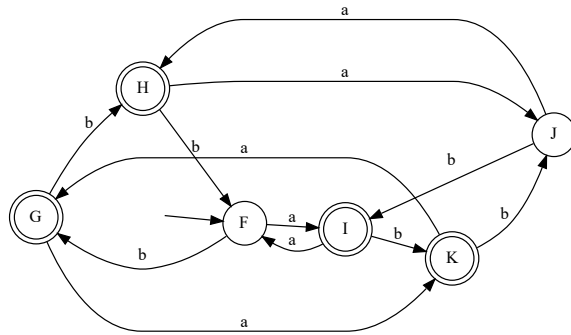
$$\overline{L_3} = \{\Sigma_{L_3}, Q_{L_3}, s_{L_3}, Q_{L_3} \setminus T_{L_3}, \delta_{L_3}\}$$



5.  $L_5 = L_2 \setminus L_3$   
 $L_2 \setminus L_3 = L_2 \overline{L_3}$   
 Первый автомат:



Второй автомат:



Построим прямое произведение этих автоматов:

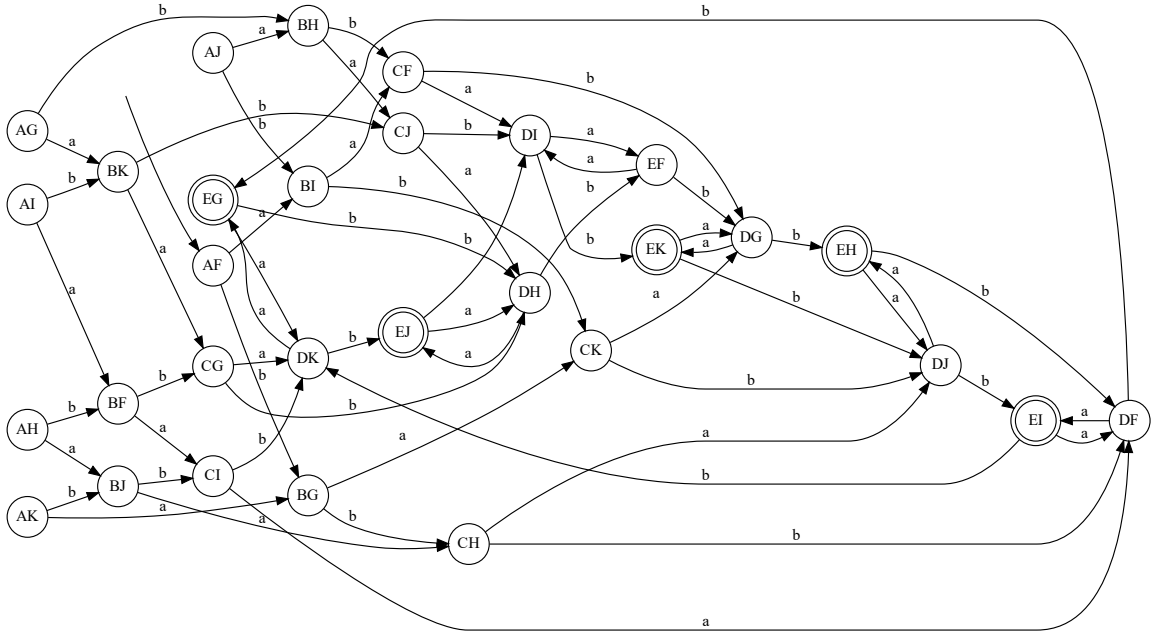
$\Sigma = \{a, b\};$   
 $Q = \{AF, AG, AH, AI, AK, AJ, BF, BG, BH, BI, BK, BJ,$   
 $CF, CG, CH, CI, CK, CJ, DF, DG, DH, DI, DK, DJ, EF, EG, EH, EI, EK, EJ\}$

$$s = AF$$

$$T = \{EG, EH, EI, EK, EJ\}$$

Функции переходов:

$$\begin{aligned} &\delta(AF, a) = BI; \delta(AF, b) = BG; \delta(AG, a) = BK; \delta(AG, b) = BH; \\ &\delta(AH, a) = BJ; \delta(AH, b) = BF; \delta(AI, a) = BF; \delta(AI, b) = BK; \\ &\delta(AK, a) = BG; \delta(AK, b) = BJ; \delta(AJ, a) = BH; \delta(AJ, b) = BI; \\ &\delta(BF, a) = CI; \delta(BF, b) = CG; \delta(BG, a) = CK; \delta(BG, b) = CH; \\ &\delta(BH, a) = CJ; \delta(BH, b) = CF; \delta(BI, a) = CF; \delta(BI, b) = CK; \\ &\delta(BK, a) = CG; \delta(BK, b) = CJ; \delta(BJ, a) = CH; \delta(BJ, b) = CI; \\ &\delta(CF, a) = DI; \delta(CF, b) = DG; \delta(CG, a) = DK; \delta(CG, b) = DH; \\ &\delta(CH, a) = DJ; \delta(CH, b) = DF; \delta(CI, a) = DF; \delta(CI, b) = DK; \\ &\delta(CK, a) = DG; \delta(CK, b) = DJ; \delta(CJ, a) = DH; \delta(CJ, b) = DI; \\ &\delta(DF, a) = EI; \delta(DF, b) = EG; \delta(DG, a) = EK; \delta(DG, b) = EH; \\ &\delta(DH, a) = EJ; \delta(DH, b) = EF; \delta(DI, a) = EF; \delta(DI, b) = EK; \\ &\delta(DK, a) = EG; \delta(DK, b) = EJ; \delta(DJ, a) = EH; \delta(DJ, b) = EI; \\ &\delta(EF, a) = DI; \delta(EF, b) = DG; \delta(EG, a) = DK; \delta(EG, b) = DH; \\ &\delta(EH, a) = DJ; \delta(EH, b) = DF; \delta(EI, a) = DF; \delta(EI, b) = DK; \\ &\delta(EK, a) = DG; \delta(EK, b) = DJ; \delta(EJ, a) = DH; \delta(EJ, b) = DI; \end{aligned}$$

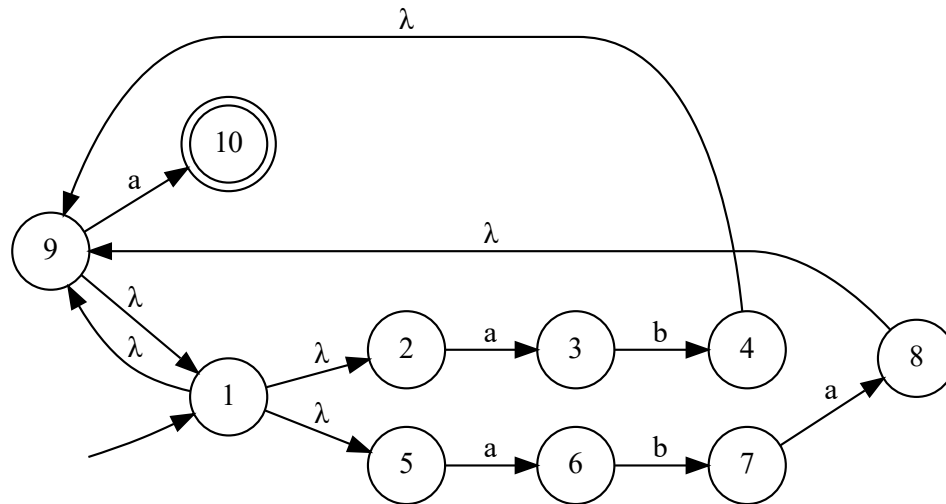




### Задание 3. Построить минимальный ДКА по регулярному выражению

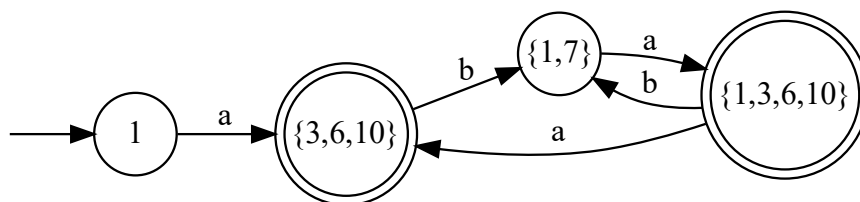
1.  $(ab + aba)^*a$

Построим НКА по регулярному выражению:



Построим эквивалентный ему ДКА:

	$a$	$b$
1	$\{3, 6, 10\}$	$\emptyset$
$\{3, 6, 10\}$	$\emptyset$	$\{1, 7\}$
$\{1, 7\}$	$\{1, 3, 6, 10\}$	$\emptyset$
$\{1, 3, 6, 10\}$	$\{3, 6, 10\}$	$\{1, 7\}$



Минимизируем ДКА:

0 эквивалентность:  $\{1, \{1, 7\}\} \{\{3, 6, 10\}, \{1, 3, 6, 10\}\}$

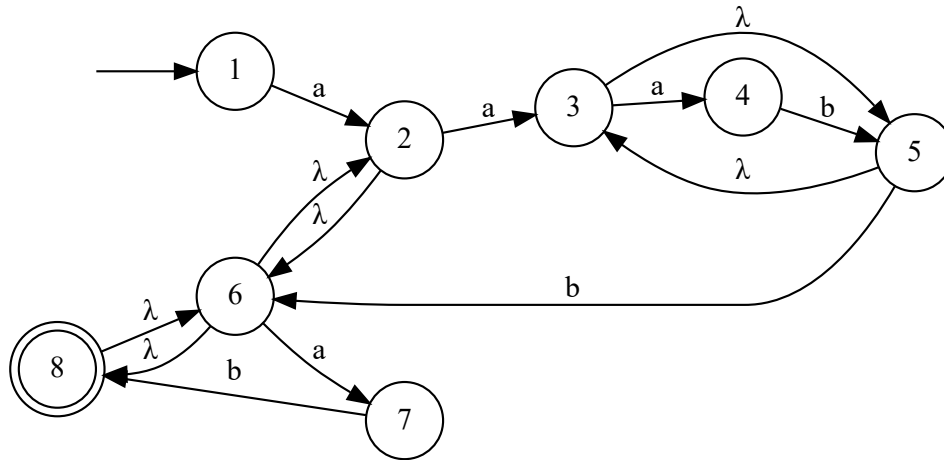
1 эквивалентность:  $\{1, \{1, 7\}\} \{\{3, 6, 10\}\} \{\{1, 3, 6, 10\}\}$

2 эквивалентность:  $\{1\}\{\{1, 7\}\} \{\{3, 6, 10\}\} \{\{1, 3, 6, 10\}\}$

Исходный автомат являлся минимальным.

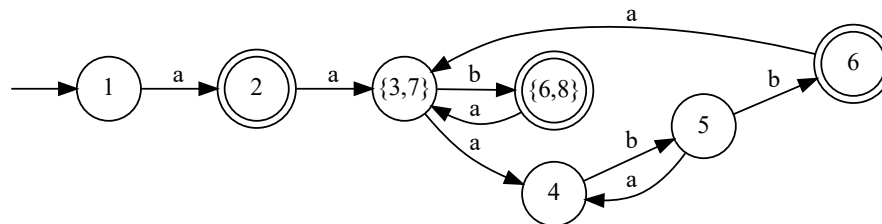
## 2. $a(a(ab)^*b)^*(ab)^*$

Построим НКА по регулярному выражению:



Построим эквивалентный ему ДКА:

	$a$	$b$
1	2	$\emptyset$
2	$\{3, 7\}$	$\emptyset$
$\{3, 7\}$	4	$\{6, 8\}$
4	$\emptyset$	5
6	$\{3, 7\}$	$\emptyset$
5	4	6
$\{6, 8\}$	$\{3, 7\}$	$\emptyset$



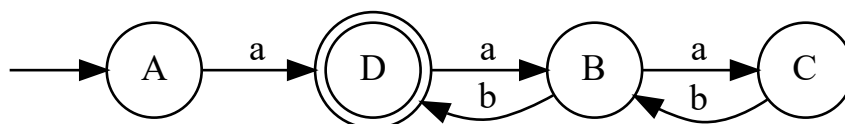
Минимизируем ДКА:

0 эквивалентность:  $\{1, \{3, 7\}, 4, 5\} \{2, 6, \{6, 8\}\}$

1 эквивалентность:  $\{1\} \{\{3, 7\}, 5\} \{4\} \{2, 6, \{6, 8\}\}$

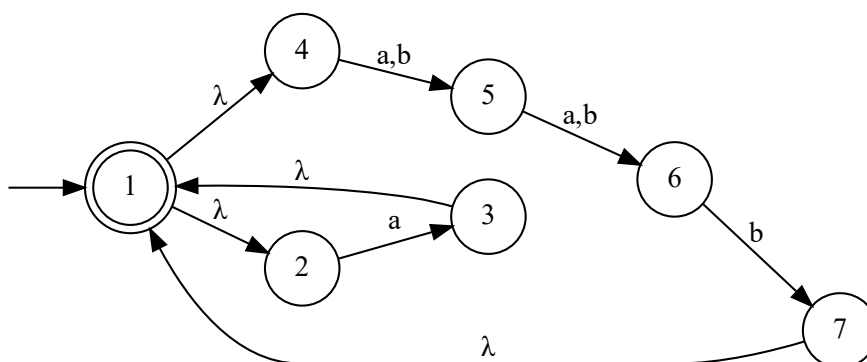
2 эквивалентность:  $\{1\} \{\{3, 7\}, 5\} \{4\} \{2, 6, \{6, 8\}\}$

$\{1\} = A; \{\{3, 7\}, 5\} = B; \{4\} = C; \{2, 6, \{6, 8\}\} = D;$



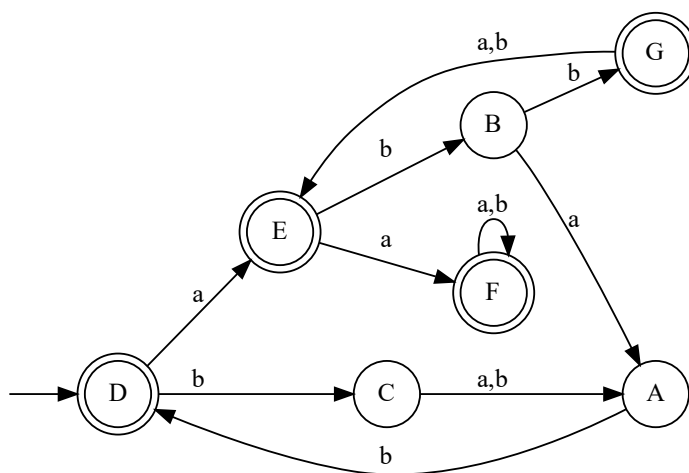
3.  $(a + (a + b)(a + b)b)^*$

Построим НКА по регулярному выражению:



Построим эквивалентный ему ДКА:

	$a$	$b$
1	$\{1, 5\}$	5
$\{1, 5\}$	$\{1, 5, 6\}$	$\{5, 6\}$
5	6	6
$\{1, 5, 6\}$	$\{1, 5, 6\}$	$\{1, 5, 6\}$
$\{5, 6\}$	6	$\{1, 6\}$
$\{1, 6\}$	$\{1, 5\}$	$\{1, 5\}$



Минимизируем ДКА:

0 эквивалентность:  $\{5, 6, \{5, 6\}\} \{1, \{1, 5\}, \{1, 5, 6\}, \{1, 6\}\}$

1 эквивалентность:  $\{6, \{5, 6\}\} \{5\} \{1\} \{\{1, 5\}\} \{\{1, 5, 6\}, \{1, 6\}\}$

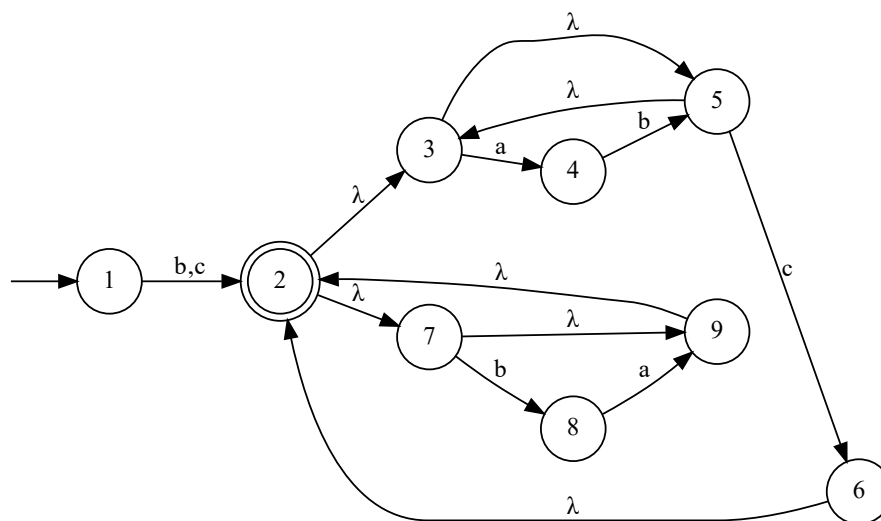
2 эквивалентность:  $\{6\} \{\{5, 6\}\} \{5\} \{1\} \{\{1, 5\}\} \{\{1, 5, 6\}\} \{\{1, 6\}\}$

$\{6\} = A$ ;  $\{\{5, 6\}\} = B$ ;  $\{5\} = C$ ;  $\{1\} = D$ ;  $\{\{1, 5\}\} = E$ ;  $\{\{1, 5, 6\}\} = F$ ;  $\{\{1, 6\}\} = G$ ;

Исходный автомат являлся минимальным.

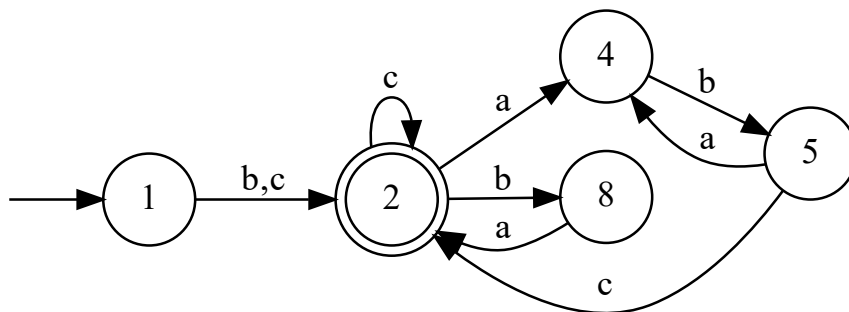
#### 4. $(b + c)((ab)^*c + (ba)^*)^*$

Построим НКА по регулярному выражению:



Построим эквивалентный ему ДКА:

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
1	$\emptyset$	2	2
2	4	8	2
4	$\emptyset$	5	$\emptyset$
8	2	$\emptyset$	$\emptyset$
5	4	$\emptyset$	2



Минимизируем ДКА:

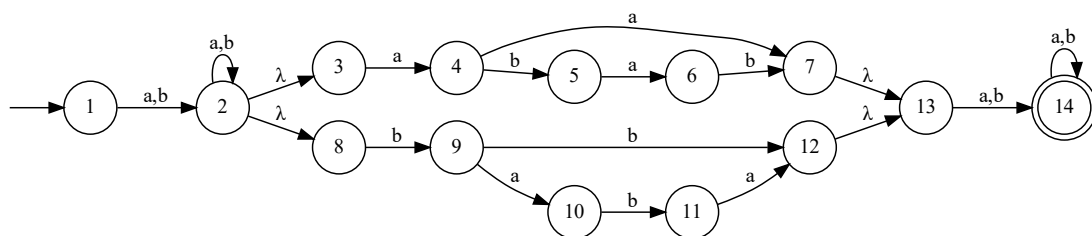
0 эквивалентность:  $\{1, 4, 5, 8\} \{2\}$

1 эквивалентность:  $\{1\} \{4\} \{8\} \{5\} \{2\}$

Исходный автомат являлся минимальным.

**5.  $(a + b)^+(aa + bb + abab + baba)(a + b)^+$**

Построим НКА по регулярному выражению:



Построим эквивалентный ему ДКА:

	$a$	$b$
1	2	2
2	$\{2, 4\}$	$\{2, 9\}$
$\{2, 4\}$	$\{2, 4, 7\}$	$\{2, 5, 9\}$
$\{2, 9\}$	$\{2, 4, 10\}$	$\{2, 9, 12\}$
$\{2, 4, 7\}$	$\{2, 4, 7, 14\}$	$\{2, 5, 9, 14\}$
$\{2, 5, 9\}$	$\{2, 4, 6, 10\}$	$\{2, 9, 12\}$
$\{2, 4, 10\}$	$\{2, 4, 7\}$	$\{2, 5, 9, 11\}$
$\{2, 9, 12\}$	$\{2, 4, 10, 14\}$	$\{2, 9, 12, 14\}$
$\{2, 4, 7, 14\}$	$\{2, 4, 7, 14\}$	$\{2, 5, 9, 14\}$
$\{2, 5, 9, 14\}$	$\{2, 4, 6, 10, 14\}$	$\{2, 9, 12, 14\}$
$\{2, 4, 10, 14\}$	$\{2, 4, 7, 14\}$	$\{2, 5, 9, 11, 14\}$
$\{2, 9, 12, 14\}$	$\{2, 4, 10, 14\}$	$\{2, 9, 12, 14\}$
$\{2, 4, 6, 10\}$	$\{2, 4, 7\}$	$\{2, 5, 7, 9, 11\}$
$\{2, 5, 9, 11\}$	$\{2, 4, 6, 10, 12\}$	$\{2, 9, 12\}$
$\{2, 4, 6, 10, 14\}$	$\{2, 4, 7, 14\}$	$\{2, 5, 7, 9, 11, 14\}$
$\{2, 5, 9, 11, 14\}$	$\{2, 4, 6, 10, 12, 14\}$	$\{2, 9, 12, 14\}$
$\{2, 5, 7, 9, 11\}$	$\{2, 4, 6, 10, 12, 14\}$	$\{2, 9, 12, 14\}$
$\{2, 4, 6, 10, 12\}$	$\{2, 4, 7, 14\}$	$\{2, 5, 7, 9, 11, 14\}$
$\{2, 5, 7, 9, 11, 14\}$	$\{2, 4, 6, 10, 12, 14\}$	$\{2, 9, 12, 14\}$
$\{2, 4, 6, 10, 12, 14\}$	$\{2, 4, 7, 14\}$	$\{2, 5, 7, 9, 11, 14\}$

Минимизируем ДКА:

0 эквивалентность:

$\{1, 2, \{2, 4\}, \{2, 9\}, \{2, 4, 7\}, \{2, 5, 9\}, \{2, 4, 10\}, \{2, 9, 12\}, \{2, 4, 6, 10\}, \{2, 5, 9, 11\}, \{2, 5, 7, 9, 11\}, \{2, 4, 6, 10, 12\}\}$   
 $\{\{2, 4, 7, 14\}, \{2, 5, 9, 14\}, \{2, 4, 10, 14\}, \{2, 9, 12, 14\}, \{2, 4, 6, 10, 14\}, \{2, 5, 9, 11, 14\}, \{2, 5, 7, 9, 11, 14\}, \{2, 4, 6, 10, 12, 14\}\}$

1 эквивалентность:

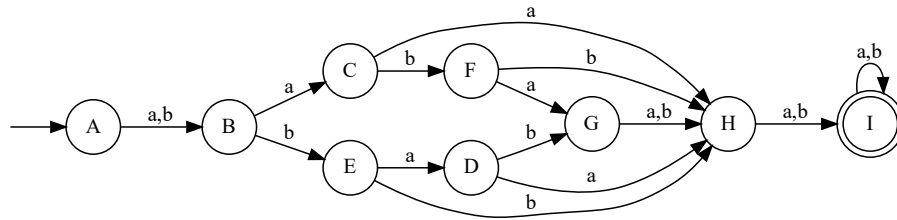
$\{1, 2, \{2, 4\}, \{2, 9\}, \{2, 5, 9\}, \{2, 4, 10\}, \{2, 4, 6, 10\}, \{2, 5, 9, 11\}\}$   
 $\{\{2, 4, 7\}, \{2, 9, 12\}, \{2, 5, 7, 9, 11\}, \{2, 4, 6, 10, 12\}\}$   
 $\{\{2, 4, 7, 14\}, \{2, 5, 9, 14\}, \{2, 4, 10, 14\}, \{2, 9, 12, 14\}, \{2, 4, 6, 10, 14\}, \{2, 5, 9, 11, 14\}, \{2, 5, 7, 9, 11, 14\}, \{2, 4, 6, 10, 12, 14\}\}$

2 эквивалентность:

$\{1, 2\}$   $\{\{2, 4\}, \{2, 4, 10\}\}$   $\{\{2, 9\}, \{2, 5, 9\}\}$   
 $\{\{2, 4, 6, 10\}, \{2, 5, 9, 11\}\}$   
 $\{\{2, 4, 7\}, \{2, 9, 12\}, \{2, 5, 7, 9, 11\}, \{2, 4, 6, 10, 12\}\}$   
 $\{\{2, 4, 7, 14\}, \{2, 5, 9, 14\}, \{2, 4, 10, 14\}, \{2, 9, 12, 14\}, \{2, 4, 6, 10, 14\}, \{2, 5, 9, 11, 14\},$   
 $\{2, 5, 7, 9, 11, 14\}, \{2, 4, 6, 10, 12, 14\}\}$

3 эквивалентность:

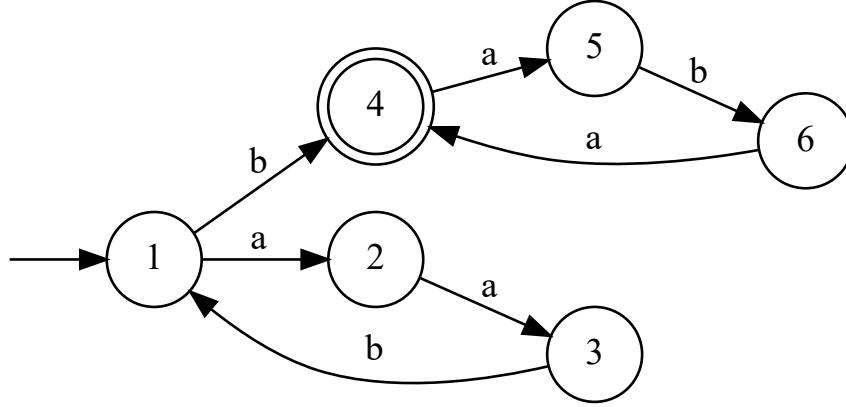
$\{1\} = A$   
 $\{2\} = B$   
 $\{\{2, 4\}\} = C$   
 $\{\{2, 4, 10\}\} = D$   
 $\{\{2, 9\}\} = E$   
 $\{\{2, 5, 9\}\} = F$   
 $\{\{2, 4, 6, 10\}, \{2, 5, 9, 11\}\} = G$   
 $\{\{2, 4, 7\}, \{2, 9, 12\}, \{2, 5, 7, 9, 11\}, \{2, 4, 6, 10, 12\}\} = H$   
 $\{\{2, 4, 7, 14\}, \{2, 5, 9, 14\}, \{2, 4, 10, 14\}, \{2, 9, 12, 14\}, \{2, 4, 6, 10, 14\}, \{2, 5, 9, 11, 14\},$   
 $\{2, 5, 7, 9, 11, 14\}, \{2, 4, 6, 10, 12, 14\}\} = I$



**Задание 4. Определить является ли язык регулярным или нет**

1.  $L = \{(aab)^n b (aba)^m \mid n \geq 0, m \geq 0\}$

Существует ДКА, распознающий данный язык, следовательно язык является регулярным.



**2.  $L = \{uaav|u \in \{a,b\}^*, v \in \{a,b\}^*, |u|_b \geq |v|_a\}$**

Фиксируем произвольное  $n$ .

$$\omega = b^{n-2}aaa^{n-2} \in L$$

$$x = b^{n-2}$$

$$y = aa$$

$$z = a^n - 2$$

$xy^kz \notin L, k \geq 2 \implies$  язык  $L$  не является регулярным.

**3.  $L = \{a^m\omega|\omega \in \{a,b\}^*, 1 \leq |\omega|_b \leq m\}$**

Рассмотрим дополнение к языку:

$$\bar{L} = \{a^m\omega|\omega \in \{a,b\}^*, |\omega|_b > m\}$$

Фиксируем произвольное  $n$ .

$$\omega = a^n b^{n+1}$$

$$x = a^{n-1}$$

$$y = a$$

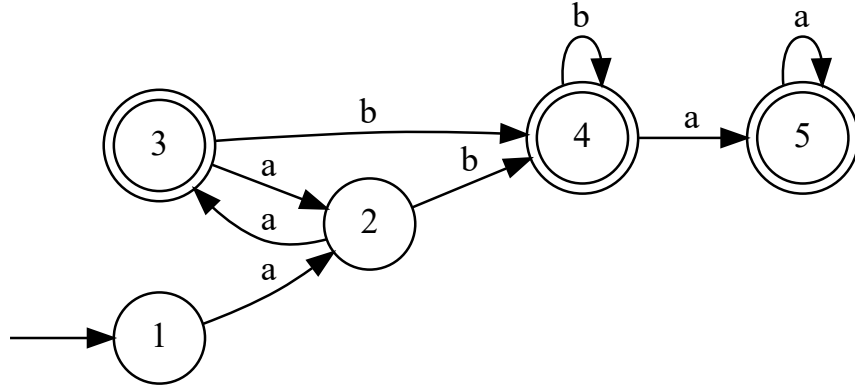
$$z = b^{n+1}$$

$xy^kz \notin \bar{L}, k \geq 2 \implies \bar{L}$  не является регулярным  $\implies L$  не является регулярным.

**4.  $L = \{a^k b^m a^n | k = n \vee m > 0\}$**

Существует ДКА, распознающий данный язык, следовательно язык является регулярным.





5.  $L = \{ucv | u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, u \neq v^R\}$

Рассмотрим дополнение к языку:

$$\bar{L} = \{ucv | u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, u = v^R\}$$

Фиксируем произвольное  $n$ .

$$\omega = a^{\frac{n}{2}} b a^{\frac{n}{2}-1} c a^{\frac{n}{2}-1} b a^{\frac{n}{2}}$$

$$x = a^{\frac{n}{2}} b a^{\frac{n}{2}-2}$$

$$y = a$$

$$z = c a^{\frac{n}{2}-1} b a^{\frac{n}{2}}$$

$xy^kz \notin \bar{L}, k \geq 2 \implies \bar{L}$  не является регулярным  $\implies L$  не является регулярным.