

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ "МЭИ"

Отчет
К домашней работе №1
По теоретическим моделям вычислений

Выполнил
Ушаков Н.А.
Студент группы А-05-19

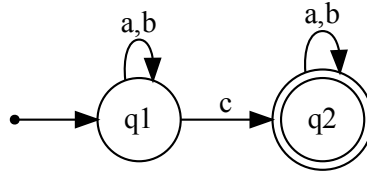
Москва 2022

Задание 1

Построить детерминированный конечный автомат, распознающий язык:

$$1. L_1 = \{\omega \in \{a,b,c\}^* \mid |\omega|_c = 1\}$$

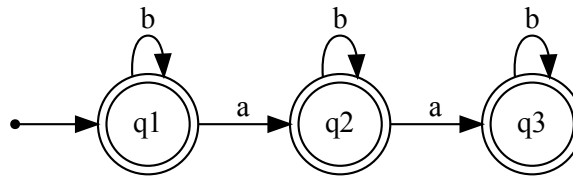
Ответ:



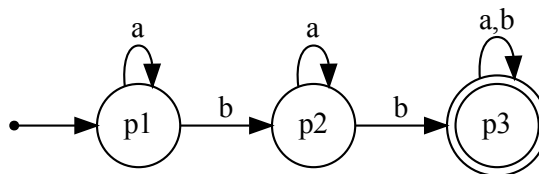
$$2. L_2 = \{\omega \in \{a,b\}^* \mid |\omega|_a \leq 2, |\omega|_b \geq 2\}$$

Рассмотрим отдельно автоматы, распознающие языки:

$$L_{21} = \{\omega \in \{a,b\}^* \mid |\omega|_a \leq 2\}$$



$$L_{22} = \{\omega \in \{a,b\}^* \mid |\omega|_b \geq 2\}$$



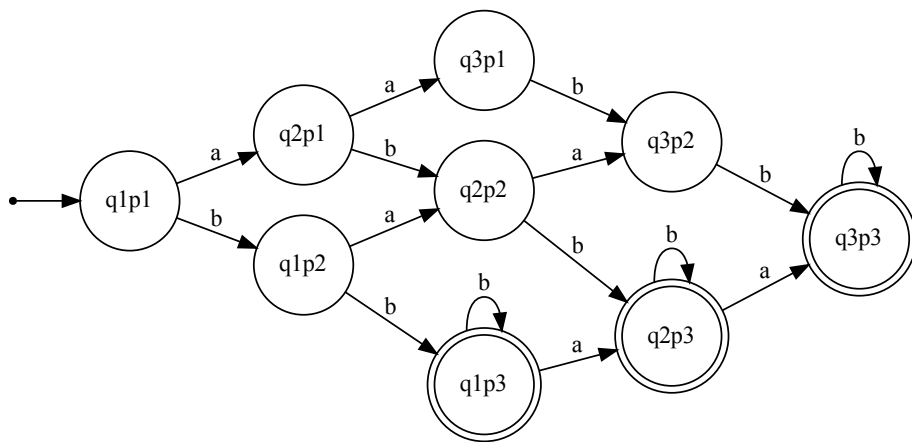
Прямое произведение ДКА:

$$\Sigma_2 = \{a,b\}, \quad s_2 = \{q1p1\}, \quad T_2 = \{q1p3, q2p3, q3p3\}, \quad \delta_2 =$$

Q	a	b
$\langle q1, p1 \rangle$	$\langle q2, p1 \rangle$	$\langle q1, p2 \rangle$
$\langle q1, p2 \rangle$	$\langle q2, p2 \rangle$	$\langle q1, p3 \rangle$
$\langle q1, p3 \rangle$	$\langle q2, p3 \rangle$	$\langle q1, p3 \rangle$
$\langle q2, p1 \rangle$	$\langle q3, p1 \rangle$	$\langle q2, p2 \rangle$
$\langle q2, p2 \rangle$	$\langle q3, p2 \rangle$	$\langle q2, p3 \rangle$
$\langle q2, p3 \rangle$	$\langle q3, p3 \rangle$	$\langle q2, p3 \rangle$
$\langle q3, p1 \rangle$	\emptyset	$\langle q3, p2 \rangle$
$\langle q3, p2 \rangle$	\emptyset	$\langle q3, p3 \rangle$
$\langle q3, p3 \rangle$	\emptyset	$\langle q3, p3 \rangle$

Получаем следующий ДКА.

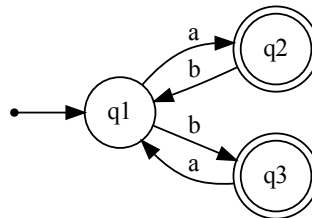
Ответ:



3. $L_3 = \{\omega \in \{a,b\}^* \mid |\omega|_a \neq |\omega|_b\}$

В общем случае, этот язык не описывается с помощью ДКА, поскольку необходимо запоминать количество символов а и b. Однако, если а и b чередуются, то можно построить следующий автомат:

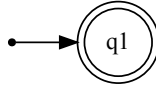
Ответ:



4. $L_4 = \{\omega \in \{a,b\}^* \mid \omega\omega = \omega\omega\omega\}$

Данный язык описывает только пустое слово.

Ответ:



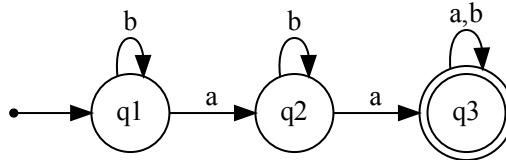
Задание 2

Построить конечный автомат, используя прямое произведение:

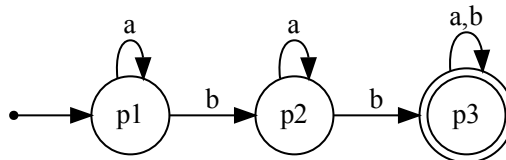
$$1. L_1 = \{\omega \in \{a,b\} \mid |\omega|_a \geq 2 \wedge |\omega|_b \geq 2\}$$

Рассмотрим отдельно автоматы, распознающие языки:

$$L_{11} = \{\omega \in \{a,b\} \mid |\omega|_a \geq 2\}$$



$$L_{12} = \{\omega \in \{a,b\} \mid |\omega|_b \geq 2\}$$



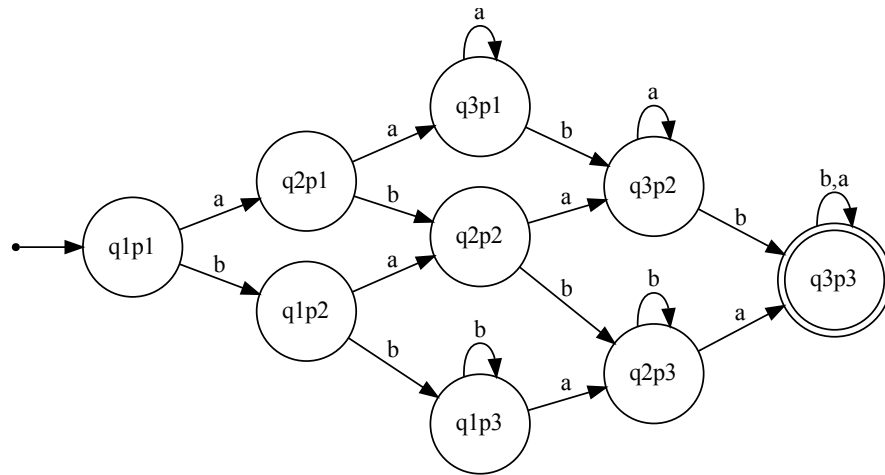
Прямое произведение ДКА:

$$\Sigma_1 = \{a,b\}, \quad s_1 = \{q1p1\}, \quad T_1 = \{q3p3\}, \quad \delta_1 =$$

Q	a	b
<q1,p1>	<q2,p1>	<q1,p2>
<q1,p2>	<q2,p2>	<q1,p3>
<q1,p3>	<q2,p3>	<q1,p3>
<q2,p1>	<q3,p1>	<q2,p2>
<q2,p2>	<q3,p2>	<q2,p3>
<q2,p3>	<q3,p3>	<q2,p3>
<q3,p1>	<q3,p1>	<q3,p2>
<q3,p2>	<q3,p2>	<q3,p3>
<q3,p3>	<q3,p3>	<q3,p3>

Получаем следующий ДКА.

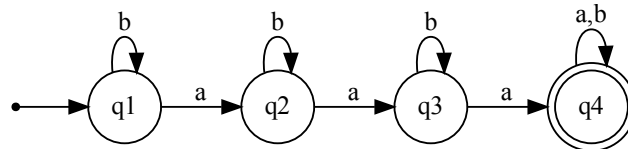
Ответ:



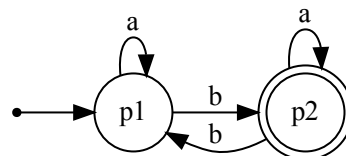
$$2. L_2 = \{\omega \in \{a,b\}^* \mid |\omega|_a \geq 3 \wedge |\omega|_b \text{ нечетное}\}$$

Рассмотрим отдельно автоматы, распознающие языки:

$$L_{21} = \{\omega \in \{a,b\}^* \mid |\omega|_a \geq 3\}$$



$$L_{22} = \{\omega \in \{a,b\}^* \mid |\omega|_b \text{ нечетное}\}$$



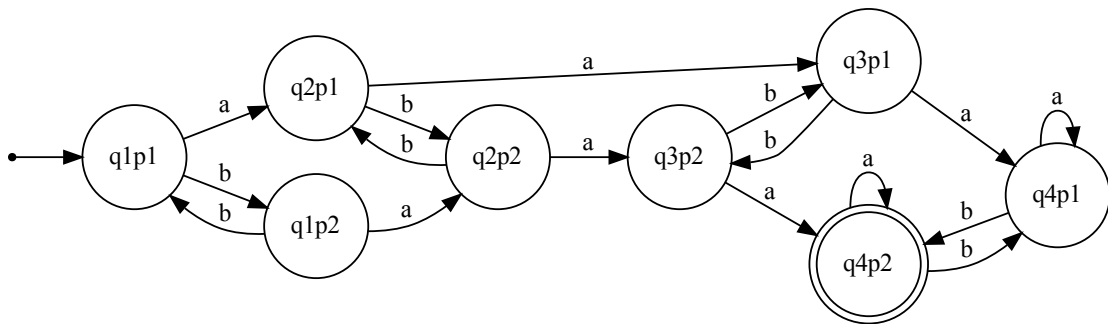
Прямое произведение ДКА:

$$\Sigma_2 = \{a,b\}, \quad s_2 = \{q1p1\}, \quad T_2 = \{q4p2\}, \quad \delta_2 =$$

Q	a	b
$\langle q1, p1 \rangle$	$\langle q2, p1 \rangle$	$\langle q1, p2 \rangle$
$\langle q1, p2 \rangle$	$\langle q2, p2 \rangle$	$\langle q1, p1 \rangle$
$\langle q2, p1 \rangle$	$\langle q3, p1 \rangle$	$\langle q2, p2 \rangle$
$\langle q2, p2 \rangle$	$\langle q3, p2 \rangle$	$\langle q2, p1 \rangle$
$\langle q3, p1 \rangle$	$\langle q4, p1 \rangle$	$\langle q3, p2 \rangle$
$\langle q3, p2 \rangle$	$\langle q4, p2 \rangle$	$\langle q3, p1 \rangle$
$\langle q4, p1 \rangle$	$\langle q4, p1 \rangle$	$\langle q4, p2 \rangle$
$\langle q4, p2 \rangle$	$\langle q4, p2 \rangle$	$\langle q4, p1 \rangle$

Получаем следующий ДКА.

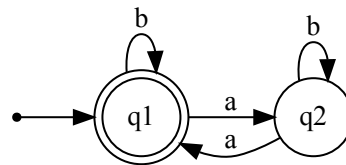
Ответ:



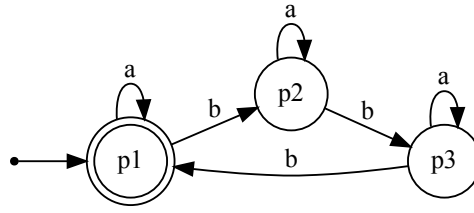
$$3. L_3 = \{\omega \in \{a,b\}^* \mid |\omega|_a \text{ четно} \wedge |\omega|_b \text{ кратно трем}\}$$

Рассмотрим отдельно автоматы, распознающие языки:

$$L_{31} = \{\omega \in \{a,b\}^* \mid |\omega|_a \text{ четно}\}$$



$$L_{32} = \{\omega \in \{a,b\}^* \mid |\omega|_b \text{ кратно трем}\}$$



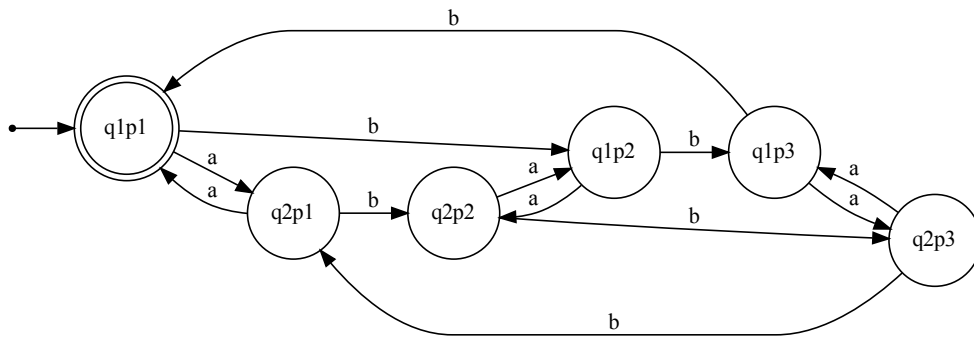
Прямое произведение ДКА:

$\Sigma_3 = \{a, b\}$, $s_3 = \{q1p1\}$, $T_3 = \{q1p1\}$, $\delta_3 =$

Q	a	b
$\langle q1, p1 \rangle$	$\langle q2, p1 \rangle$	$\langle q1, p2 \rangle$
$\langle q1, p2 \rangle$	$\langle q2, p2 \rangle$	$\langle q1, p3 \rangle$
$\langle q1, p3 \rangle$	$\langle q2, p3 \rangle$	$\langle q1, p1 \rangle$
$\langle q2, p1 \rangle$	$\langle q1, p1 \rangle$	$\langle q2, p2 \rangle$
$\langle q2, p2 \rangle$	$\langle q1, p2 \rangle$	$\langle q2, p3 \rangle$
$\langle q2, p3 \rangle$	$\langle q1, p3 \rangle$	$\langle q2, p1 \rangle$

Получаем следующий ДКА.

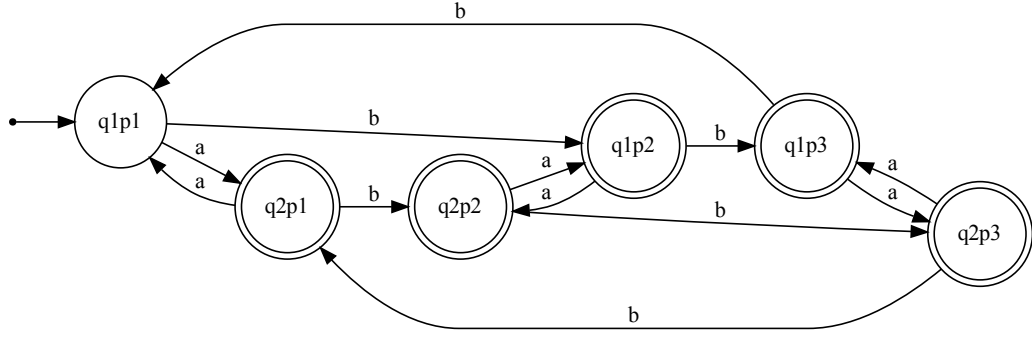
Ответ:



4. $L_4 = \overline{L_3}$

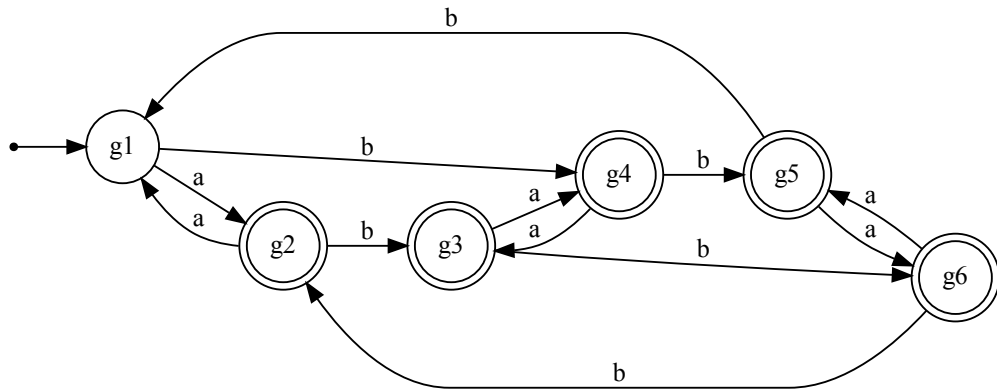
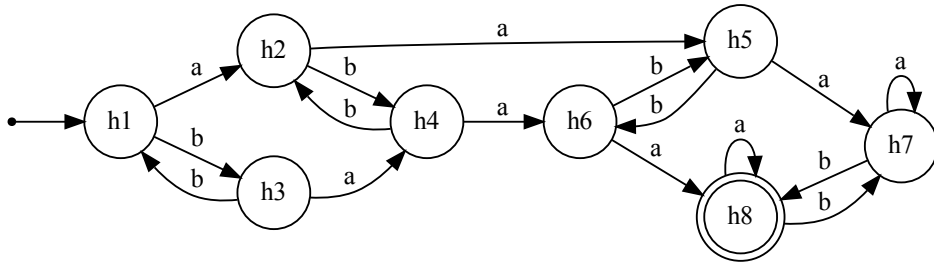
Необходимо заменить соответствующие терминальные состояния на нетерминальные и наоборот. Получаем следующий ДКА.

Ответ:



5. $L_5 = L_2/L_3 = L_2 \cap \overline{L_3} = L_2 \cap L_4$

Для удобства поместим оба ДКА рядом и переименуем все состояния используя единичные литеры.



Прямое произведение ДКА:

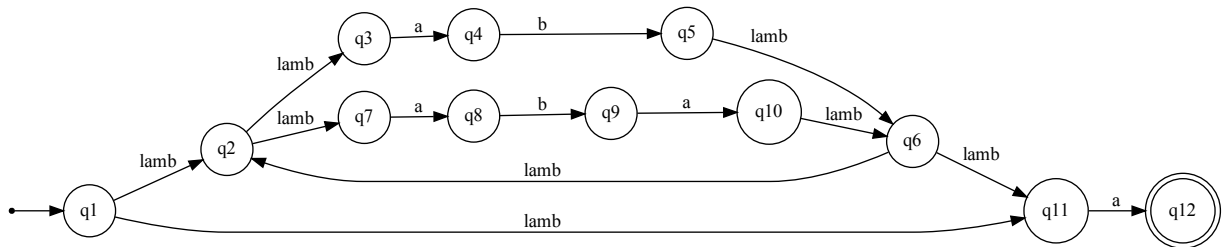
$\Sigma_5 = \{a, b\}$, $s_5 = \{h1g1\}$, $T_5 = \{h8g2, h8g3, h8g4, h8g5, h8g6\}$, δ_5

Задача 3

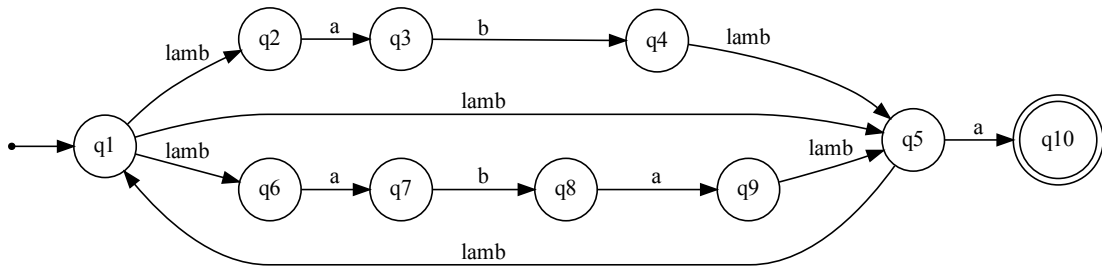
Построить минимальный ДКА по регулярному выражению.

1. $(ab + aba)^*a$

Построим НКА для заданного выражения:

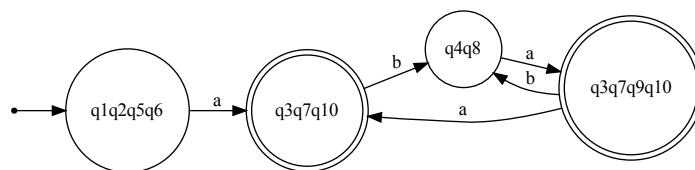


Минимизируем λ -переходы в НКА:



Получаем ДКА по алгоритму Томпсона.

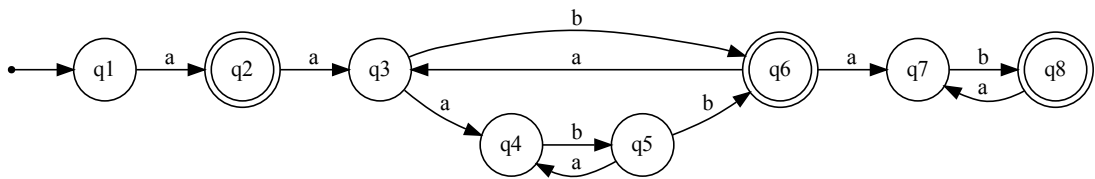
Ответ:



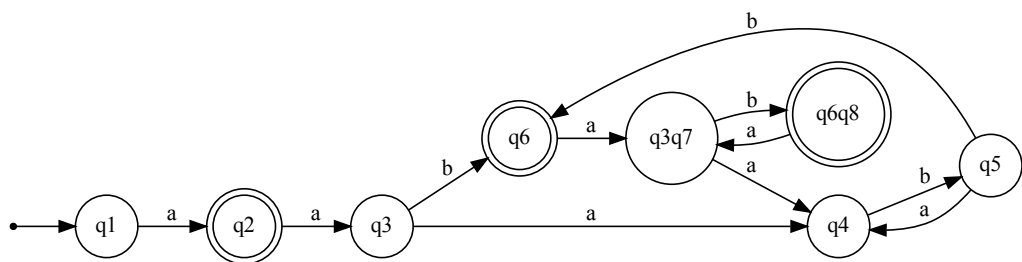
Данный ДКА является минимальным.

2. $a(a(ab)^*b)^*(ab)^*$

НКА для регулярного выражения:

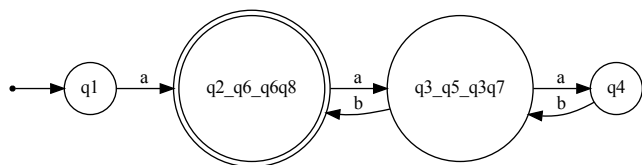


Эквивалентный ДКА:



Минимизируем ДКА.

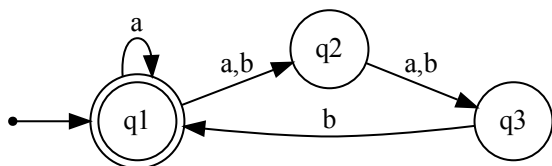
Ответ:



Данный ДКА является минимальным.

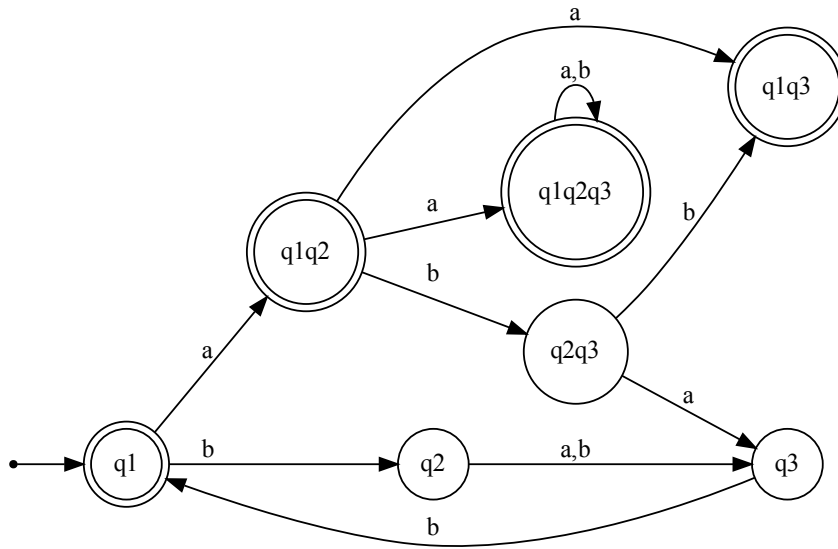
3. $(a + (a + b)(a + b)b)^*$

Построим НКА для заданного выражения:



Эквивалентный ДКА.

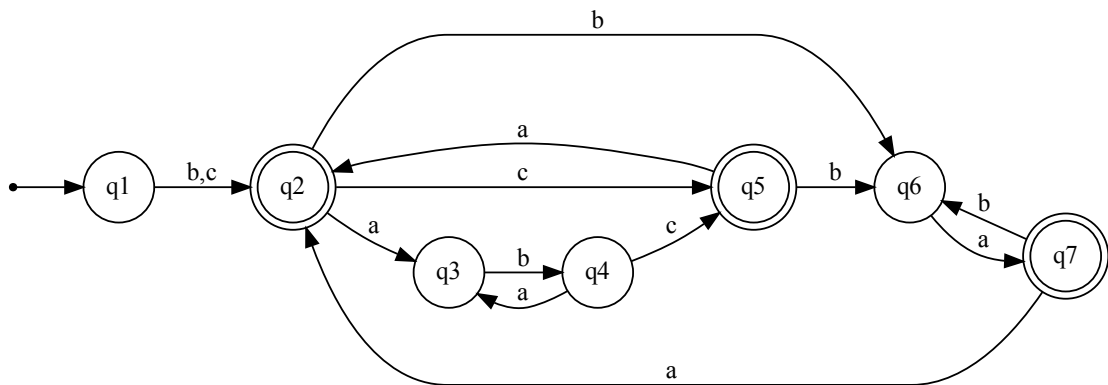
Ответ:



Данный ДКА является минимальным.

4. $(b + c)((ab)^*c + (ba)^*)^*$

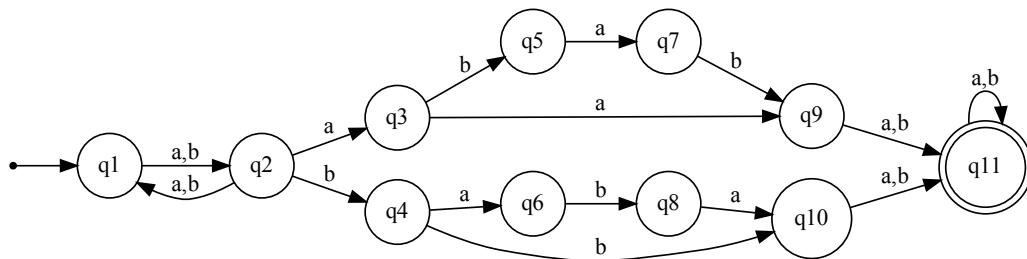
В данном случае можно сразу построить ДКА:



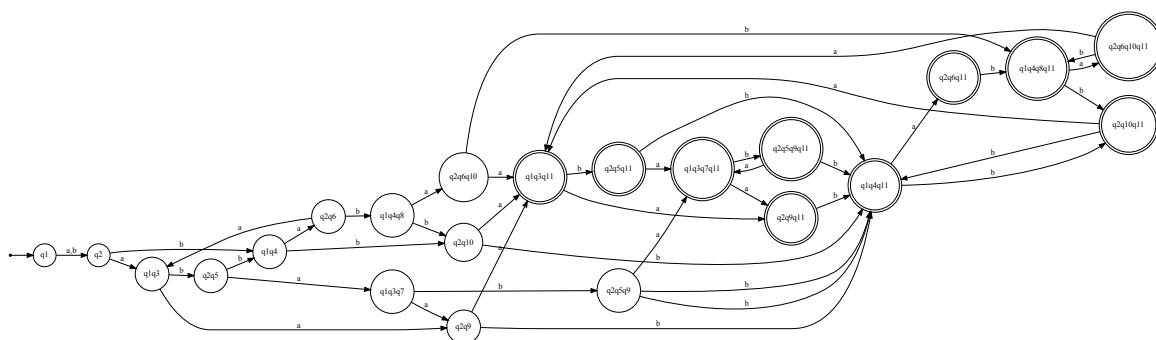
Минимизируем ДКА.

5. $(a + b)^+(aa + bb + abab + baba)(a + b)^+$

НКА для регулярного выражения:



Эквивалентный ДКА:



Минимизируем ДКА и переобозначим эквивалентные состояния:

$$q1 \longrightarrow h1$$

$$q2 \longrightarrow h2$$

$$q1q3 \longrightarrow h3$$

$$q1q4 \longrightarrow h4$$

$$q2q5 \longrightarrow h5$$

$$q2q6 \longrightarrow h6$$

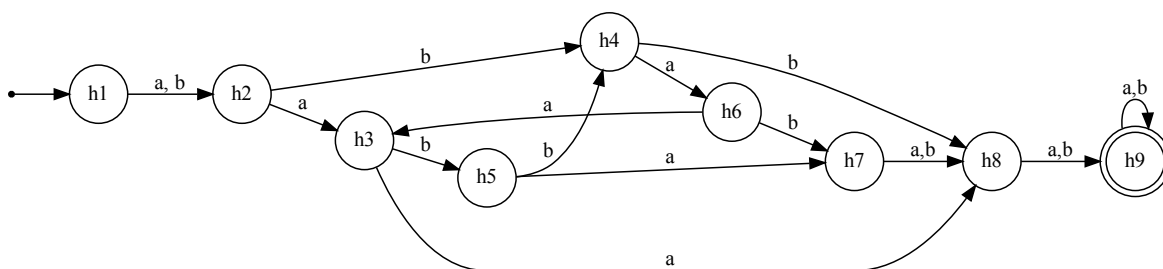
$$q1q3q7, q1q4q8 \longrightarrow h7$$

$$q2q9, q2q6q10, q2q5q9, q2q10 \longrightarrow h8$$

$$q2q5q11, q1q3q11, q2q6q1011, q2q6q11, q1q4q8q11 \longrightarrow h9$$

$$q1q4q11, q2q10q11, q1q3q7q11, q2q9q11, q2q5q9q11 \longrightarrow h9$$

Ответ:



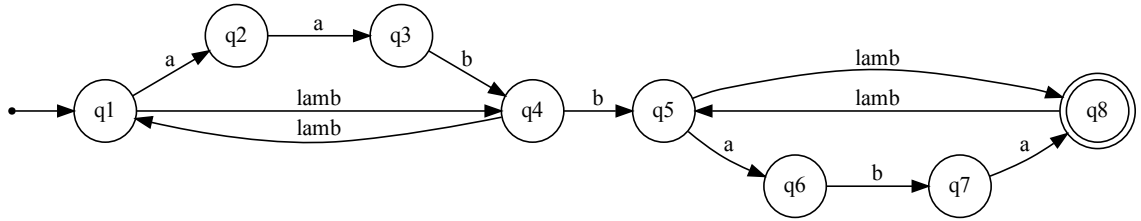
Данный ДКА является минимальным.

Задание №4

Определить является ли язык регулярным или нет.

1. $L_1 = \{(aab)^n b (aba)^m \mid n \geq 0, m \geq 0\}$

КА, распознающий данный язык:



Соответственно, язык L_1 является регулярным.

2. $L_2 = \{uaav \mid u \in \{a,b\}^*, v \in \{a,b\}^*, |u|_b \geq |v|_a\}$

Лемма о разрастании:

$$L - \text{регулярный над } \Sigma \Rightarrow \exists n \forall \omega \in L, |\omega| \geq n \\ \exists x, y, z \omega = xyz \quad |xy| \leq n \quad y \neq \lambda \quad \forall k \geq 0 \quad xy^kz \in L$$

Фиксируем $\forall n \in \mathbb{N}$. Положим $\omega = b^n a a a^n, |\omega| = 2n + 2 \geq n$.

$$\omega = xyz, |y| \neq 0, |xy| \leq n : \quad x = b^m, y = b^l, z = b^{n-m-l} a a a^n$$

$$m + l \leq n, l \neq 0 \quad \omega = xy^k z = b^m b^{kl} b^{n-m-l} a a a^n$$

$$\text{Положим: } k = 0, \text{ тогда: } \omega = b^{n-l} a a a^n \notin L_2, l \neq 0$$

Лемма не выполняется, следовательно, язык L_2 не является регулярным.

3. $L_3 = \{a^m \omega \mid \omega \in \{a,b\}^*, 1 \leq |\omega|_b \leq m\}$

Лемма о разрастании. Фиксируем $\forall n \in \mathbb{N}$. Положим $\omega = a^n b^n, |\omega| = 2n \geq n$.

$$\omega = xyz, |y| \neq 0, |xy| \leq n : \quad x = a^m, y = a^l, z = a^{n-m-l} b^n$$

$$m + l \leq n, l \neq 0 \quad \omega = xy^k z = a^m a^{kl} a^{n-m-l} b^n$$

$$\text{Положим: } k = 0, \text{ тогда: } \omega = a^{n-l} b^n \notin L_3, l \neq 0$$

Лемма не выполняется, следовательно, язык L_3 не является регулярным.

4. $L_4 = \{a^k b^m a^n \mid k = n \vee m > 0\}$

Лемма о разрастании. Фиксируем $\forall n \in \mathbb{N}$. Положим $\omega = a^n b a^n, |\omega| = 2n + 1 \geq n$.

$$\omega = xyz, |y| \neq 0, |xy| \leq n : x = a^m, y = a^l, z = a^{n-m-l} b a^n$$

$$m + l \leq n, l \neq 0 \quad \omega = xy^k z = a^m a^{kl} a^{n-m-l} b a^n$$

$$\text{Положим: } k = 2, \text{ тогда: } \omega = a^{n+l} b a^n \notin L_4, l \neq 0$$

Лемма не выполняется, следовательно, язык L_4 не является регулярным.

5. $L_5 = \{ucv \mid u \in \{a,b\}^*, v \in \{a,b\}^*, u \neq v^R\}$

Лемма о разрастании. Фиксируем $\forall n \in \mathbb{N}$.

Положим $\omega = (ab)^n c (ab)^n = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{4n+1}, |\omega| = 4n + 1 \geq n$.

$$\omega = xyz, |y| \neq 0, |xy| \leq n :$$

$$x = \alpha_1 \dots \alpha_m, y = \alpha_{m+1} \dots \alpha_{m+l}, z = \alpha_{m+l+1} \dots \alpha_{4n+1} c (ab)^n$$

$$m + l \leq n, l \neq 0$$

$$\omega = xy^k z = (\alpha_1 \dots \alpha_m)(\alpha_{m+1} \dots \alpha_{m+l})^k, (\alpha_{m+l+1} \dots \alpha_{4n+1} c (ab)^n)$$

Положим: $k = 2$, тогда:

$$\omega = (\alpha_1 \dots \alpha_m)(\alpha_{m+1} \dots \alpha_{m+l})^2, (\alpha_{m+l+1} \dots \alpha_{4n+1} c (ab)^n) \notin L_5, l \neq 0$$

Лемма не выполняется, следовательно, язык L_5 не является регулярным.