

# ДЗ1. Регулярные языки и конечные автоматы

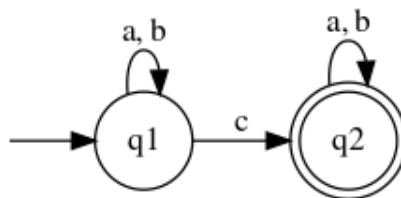
Пермяков Андрей А-136-19

## 1 Построить конечный автомат, распознающий язык

Ответом на данное задание является конечный автомат, распознающий описанный язык. Автомат должен быть детерминированным.

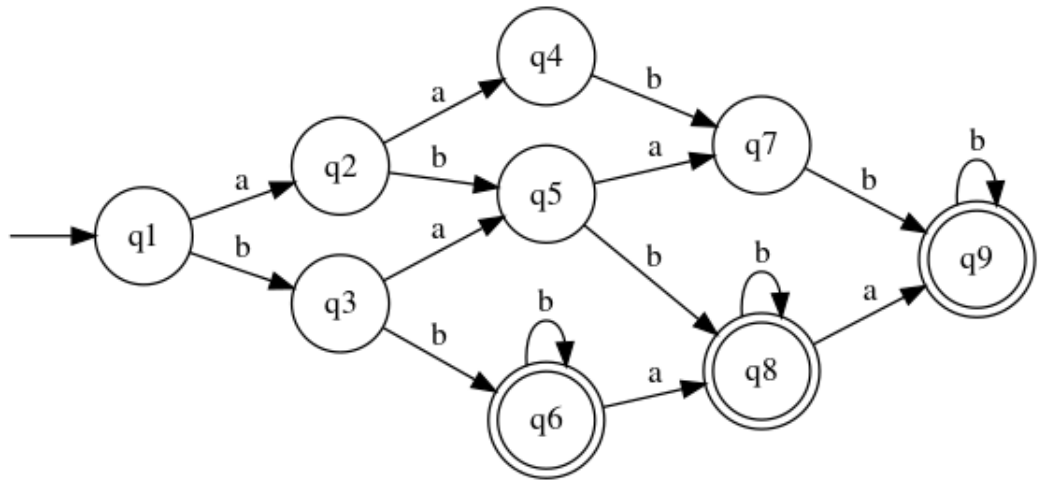
### 1.1

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_c = 1\}$$



### 1.2

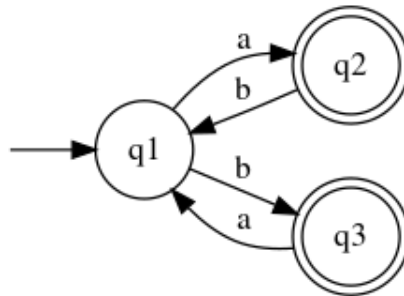
$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \leq 2, |w|_b \geq 2\}$$



### 1.3

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \neq |w|_b\}$$

Для такого языка невозможно построить КА, так как необходимо считать количество символов а и b. Поэтому построим для языка, в котором символы чередуются.



### 1.4

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid ww = www\}$$



## 2 Построить конечный автомат, используя прямое произведение

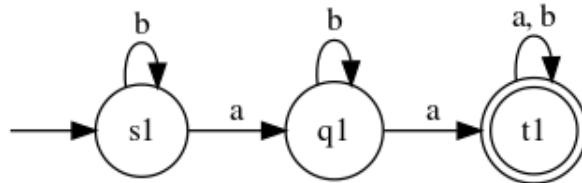
Ответом на данное задание является конечный автомат, распознающий описанный язык. Требуется, чтобы он был построен при помощи прямого произведения ДКА и его свойств.

### 2.1

$$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \geq 2 \wedge |w|_b \geq 2\}$$

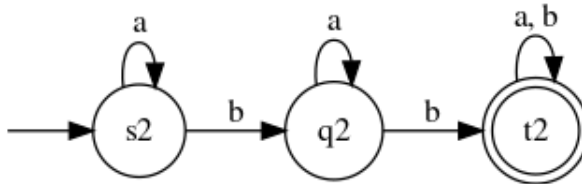
$$L_{11} = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \geq 2\}$$

$$A_{11} = (\Sigma_1 = \{a, b\}, Q_1 = \{s_1, q_1, t_1\}, s_1, T_1 = \{t_1\}, \delta_1)$$



$$L_{12} = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_b \geq 2\}$$

$$A_{12} = (\Sigma_2 = \{a, b\}, Q_2 = \{s_2, q_2, t_2\}, s_2, T_2 = \{t_2\}, \delta_2)$$



Построим прямое произведение  $L_1 = L_{11} \cap L_{12}$ .

$$A_1 = (\Sigma = \{a, b\}, Q = Q_1 \times Q_2, s_1 s_2, T = \{t_1 t_2\}, \delta)$$

$$Q = \{s_1 s_2, s_1 q_2, s_1 t_2, q_1 s_2, q_1 q_2, q_1 t_2, t_1 s_2, t_1 q_2, t_1 t_2\}$$

Зададим функцию перехода  $\delta$

$$\delta(s_1 s_2, a) = \langle \delta_1(s_1, a), \delta_2(s_2, a) \rangle = q_1 s_2 \quad \delta(s_1 s_2, b) = \langle \delta_1(s_1, b), \delta_2(s_2, b) \rangle = s_1 q_2$$

$$\delta(s_1 q_2, a) = q_1 q_2$$

$$\delta(s_1 q_2, b) = s_1 t_2$$

$$\delta(s_1 t_2, a) = q_1 t_2$$

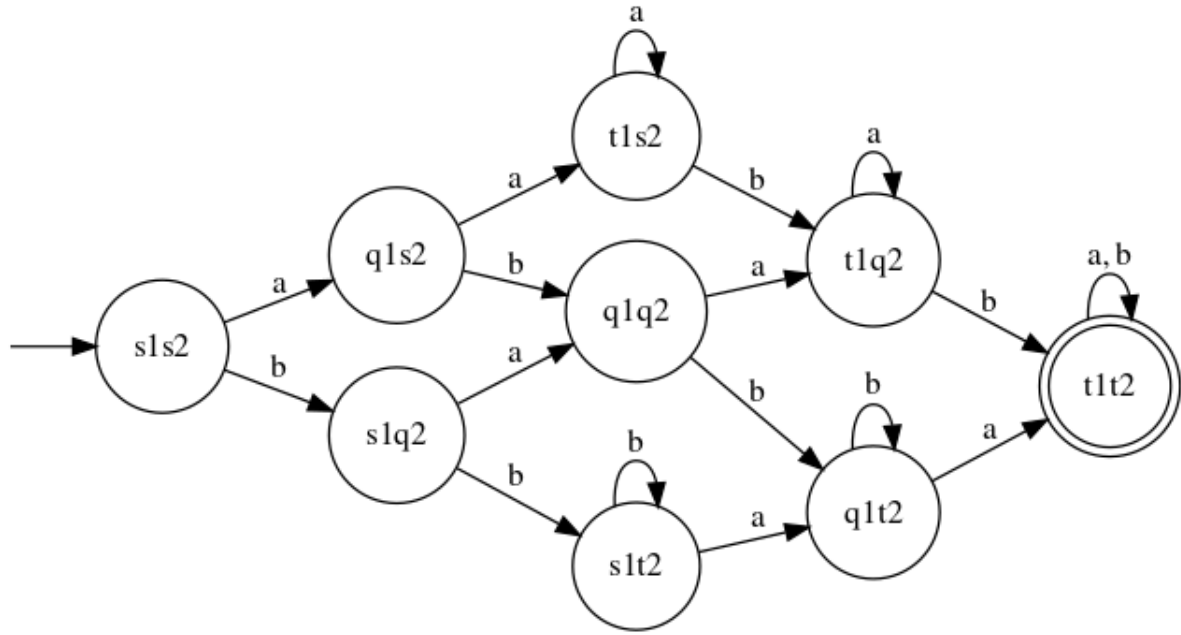
$$\delta(s_1 t_2, b) = s_1 t_2$$

$$\delta(q_1 s_2, a) = t_1 s_2$$

$$\delta(q_1 s_2, b) = q_1 q_2$$

$$\begin{aligned}
\delta(q_1q_2, a) &= t_1q_2 \\
\delta(q_1t_2, a) &= t_1t_2 \\
\delta(t_1s_2, a) &= t_1s_2 \\
\delta(t_1q_2, a) &= t_1q_2 \\
\delta(t_1t_2, a) &= t_1t_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta(q_1q_2, b) &= q_1t_2 \\
\delta(q_1t_2, b) &= q_1t_2 \\
\delta(t_1s_2, b) &= t_1q_2 \\
\delta(t_1q_2, b) &= t_1t_2 \\
\delta(t_1t_2, b) &= t_1t_2
\end{aligned}$$

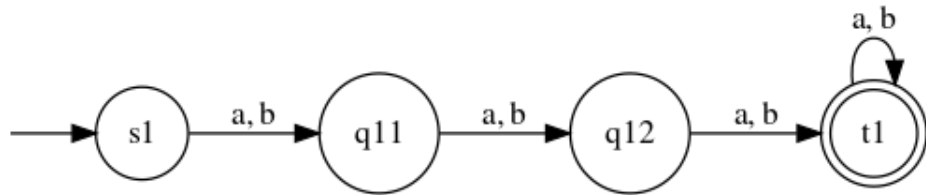


## 2.2

$$L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \geq 3 \wedge |w| \text{ нечетное}\}$$

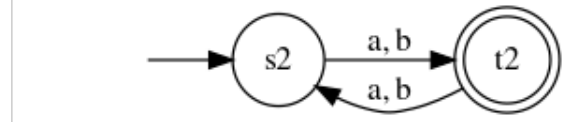
$$L_{21} = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \geq 3\}$$

$$A_{21} = (\Sigma_1 = \{a, b\}, Q_1 = \{s_1, q_{11}, q_{12}, t_1\}, s_1, T_1 = \{t_1\}, \delta_1)$$



$$L_{22} = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \text{ нечетное}\}$$

$$A_{22} = (\Sigma_2 = \{a, b\}, Q_2 = \{s_2, t_2\}, s_2, T_2 = \{t_2\}, \delta_2)$$



Построим прямое произведение  $L_2 = L_{21} \cap L_{22}$ .

$$A_2 = (\Sigma = \{a, b\}, Q = Q_1 \times Q_2, s_1 s_2, T = \{t_1 t_2\}, \delta)$$

$$Q = \{s_1 s_2, s_1 t_2, q_{11} s_2, q_{11} t_2, q_{12} s_2, q_{12} t_2, t_1 s_2, t_1 t_2\}$$

Зададим функцию перехода  $\delta$

$$\delta(s_1 s_2, a) = \langle \delta_1(s_1, a), \delta_2(s_2, a) \rangle = q_{11} t_2 \quad \delta(s_1 s_2, b) = \langle \delta_1(s_1, b), \delta_2(s_2, b) \rangle = q_{11} t_2$$

$$\delta(s_1 t_2, a) = q_{11} s_2$$

$$\delta(s_1 t_2, b) = q_{11} s_2$$

$$\delta(q_{11} s_2, a) = q_{12} t_2$$

$$\delta(q_{11} s_2, b) = q_{12} t_2$$

$$\delta(q_{11} t_2, a) = q_{12} s_2$$

$$\delta(q_{11} t_2, b) = q_{12} s_2$$

$$\delta(q_{12} s_2, a) = t_1 t_2$$

$$\delta(q_{12} s_2, b) = t_1 t_2$$

$$\delta(q_{12} t_2, a) = t_1 s_2$$

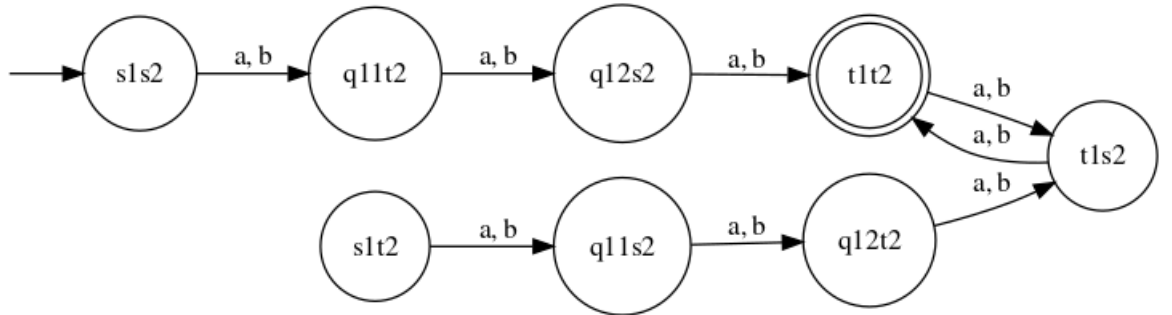
$$\delta(q_{12} t_2, b) = t_1 s_2$$

$$\delta(t_1 s_2, a) = t_1 t_2$$

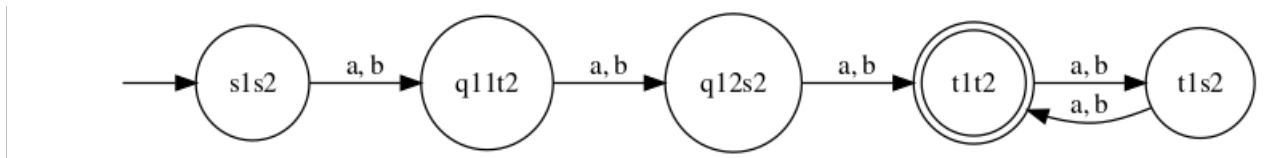
$$\delta(t_1 s_2, b) = t_1 t_2$$

$$\delta(t_1 t_2, a) = t_1 s_2$$

$$\delta(t_1 t_2, b) = t_1 s_2$$



Мы не можем попасть в вершину  $s_1 t_2$ , поэтому убираем нижнюю цепь.

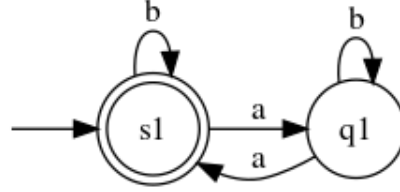


## 2.3

$$L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \text{ четно} \wedge |w|_b \text{ кратно трем}\}$$

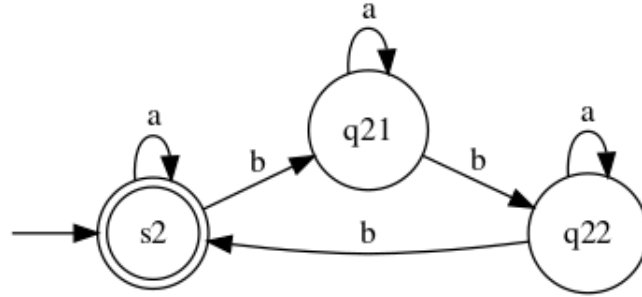
$$L_{31} = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \text{ четно}\}$$

$$A_{31} = (\Sigma_1 = \{a, b\}, Q_1 = \{s_1, q_1\}, s_1, T_1 = \{s_1\}, \delta_1)$$



$$L_{32} = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_b \text{ кратно трем}\}$$

$$A_{32} = (\Sigma_2 = \{a, b\}, Q_2 = \{s_2, q_{21}, q_{22}\}, s_2, T_2 = \{s_2\}, \delta_2)$$



Построим прямое произведение  $L_3 = L_{31} \cap L_{32}$ .

$$A_3 = (\Sigma = \{a, b\}, Q = Q_1 \times Q_2, s_1 s_2, T = \{s_1 s_2\}, \delta)$$

$$Q = \{s_1 s_2, s_1 q_{21}, s_1 q_{22}, q_1 s_2, q_1 q_{21}, q_1 q_{22}\}$$

Зададим функцию перехода  $\delta$

$$\delta(s_1 s_2, a) = \langle \delta_1(s_1, a), \delta_2(s_2, a) \rangle = q_1 s_2 \quad \delta(s_1 s_2, b) = \langle \delta_1(s_1, b), \delta_2(s_2, b) \rangle = s_1 q_{21}$$

$$\delta(s_1 q_{21}, a) = q_1 q_{21}$$

$$\delta(s_1 q_{21}, b) = s_1 q_{22}$$

$$\delta(s_1 q_{22}, a) = q_1 q_{22}$$

$$\delta(s_1 q_{22}, b) = s_1 s_2$$

$$\delta(q_1 s_2, a) = s_1 s_2$$

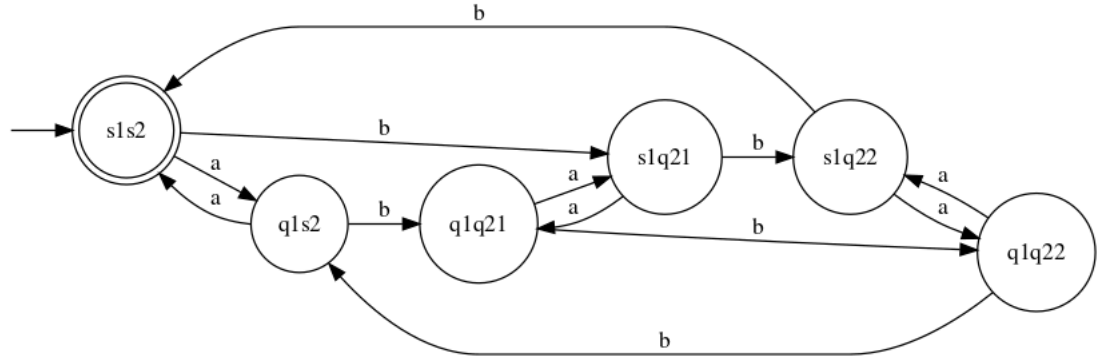
$$\delta(q_1 s_2, b) = q_1 q_{21}$$

$$\delta(q_1 q_{21}, a) = s_1 q_{21}$$

$$\delta(q_1 q_{21}, b) = q_1 q_{22}$$

$$\delta(q_1 q_{22}, a) = s_1 q_{22}$$

$$\delta(q_1 q_{22}, b) = q_1 s_2$$



## 2.4

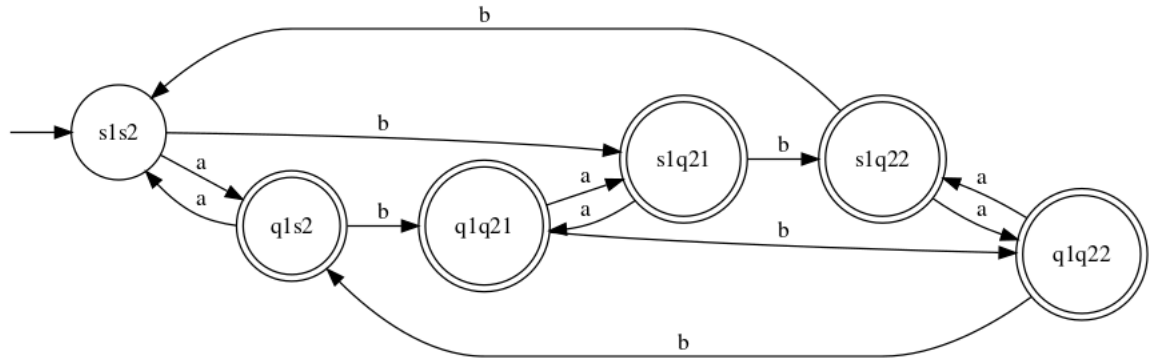
$$L_4 = \overline{L_3}$$

Автомат остается тем же, изменяются только конечные вершины.

$$A_4 = (\Sigma = \{a, b\}, Q = Q_1 \times Q_2, s_1s_2, T = Q_{prev} \setminus T_{prev}, \delta)$$

$$Q = \{s_1s_2, s_1q_{21}, s_1q_{22}, q_1s_2, q_1q_{21}, q_1q_{22}\}$$

$$T = \{s_1q_{21}, s_1q_{22}, q_1s_2, q_1q_{21}, q_1q_{22}\}$$



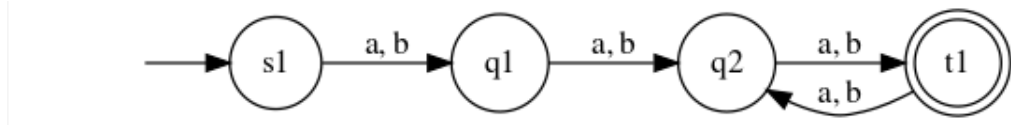
## 2.5

$$L_5 = L_2 \setminus L_3$$

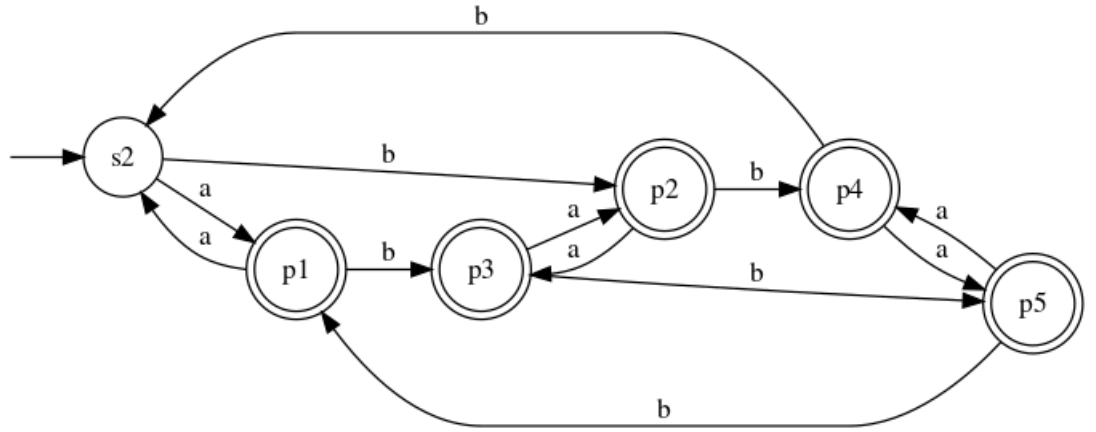
$$L_5 = L_2 \cap \overline{L_3} = L_2 \cap L_4$$

Упростим ДКА и введем новую нумерацию.

$$A_{51} = (\Sigma_1 = \{a, b\}, Q_1 = \{s_1, q_1, q_2, t_1\}, s_1, T_1 = \{t_1\}, \delta_1)$$



$$A_{52} = (\Sigma_2 = \{a, b\}, Q_2 = \{s_2, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}, s_2, T_2 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}, \delta_2)$$



$$A_5 = (\Sigma = \{a, b\}, Q = Q_1 \times Q_2, s_1 s_2, T = T_1 \times T_2, \delta)$$

$$Q = \{s_1 s_2, s_1 p_1, s_1 p_2, s_1 p_3, s_1 p_4, s_1 p_5,$$

$$q_1 s_2, q_1 p_1, q_1 p_2, q_1 p_3, q_1 p_4, q_1 p_5,$$

$$q_2 s_2, q_2 p_1, q_2 p_2, q_2 p_3, q_2 p_4, q_2 p_5,$$

$$t_1 s_2, t_1 p_1, t_1 p_2, t_1 p_3, t_1 p_4, t_1 p_5\}$$

$$T = \{t_1 s_2, t_1 p_1, t_1 p_2, t_1 p_3, t_1 p_4, t_1 p_5\}$$

Зададим функцию перехода  $\delta$

$$\delta(s_1 s_2, a) = \langle \delta_1(s_1, a), \delta_2(s_2, a) \rangle = q_1 p_1 \quad \delta(s_1 s_2, b) = \langle \delta_1(s_1, b), \delta_2(s_2, b) \rangle = q_1 p_2$$

$$\delta(s_1 p_1, a) = q_1 s_2$$

$$\delta(s_1 p_1, b) = q_1 p_3$$

$$\delta(s_1 p_2, a) = q_1 p_3$$

$$\delta(s_1 p_2, b) = q_1 p_4$$

$$\delta(s_1 p_3, a) = q_1 p_2$$

$$\delta(s_1 p_3, b) = q_1 p_5$$

$$\delta(s_1 p_4, a) = q_1 p_5$$

$$\delta(s_1 p_4, b) = q_1 s_2$$

$$\delta(s_1 p_5, a) = q_1 p_4$$

$$\delta(s_1 p_5, b) = q_1 p_1$$

$$\delta(q_1 s_2, a) = q_2 p_1$$

$$\delta(q_1 s_2, b) = q_2 p_2$$

$$\delta(q_1 p_1, a) = q_2 s_2$$

$$\delta(q_1 p_1, b) = q_2 p_3$$

$$\delta(q_1 p_2, a) = q_2 p_3$$

$$\delta(q_1 p_2, b) = q_2 p_4$$

$$\delta(q_1 p_3, a) = q_2 p_2$$

$$\delta(q_1 p_3, b) = q_2 p_5$$

$$\delta(q_1 p_4, a) = q_2 p_5$$

$$\delta(q_1 p_4, b) = q_2 s_2$$

$$\delta(q_1 p_5, a) = q_2 p_4$$

$$\delta(q_1 p_5, b) = q_2 p_1$$

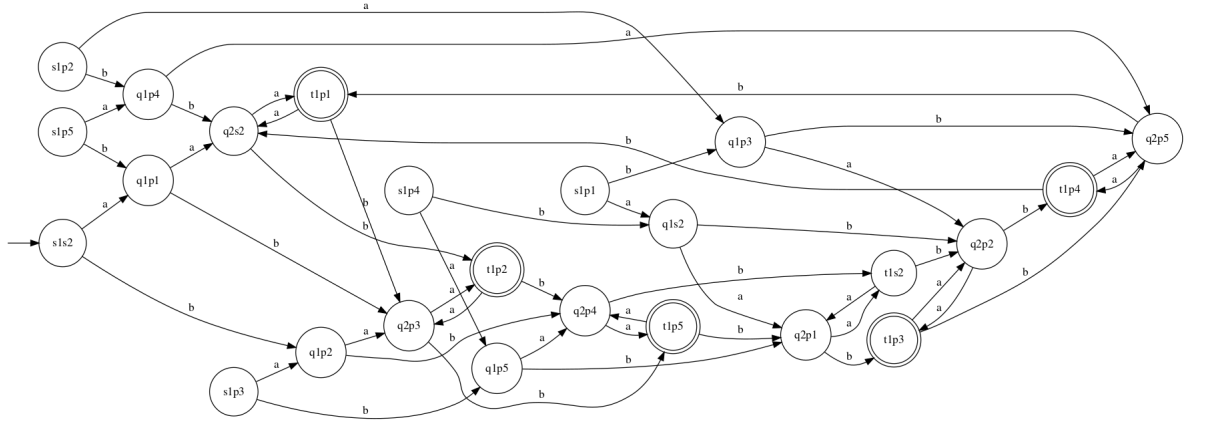
$$\delta(q_2 s_2, a) = t_1 p_1$$

$$\delta(q_2 s_2, b) = t_1 p_2$$



$$\begin{aligned}
\delta(q_2p_1, a) &= t_1s_2 \\
\delta(q_2p_2, a) &= t_1p_3 \\
\delta(q_2p_3, a) &= t_1p_2 \\
\delta(q_2p_4, a) &= t_1p_5 \\
\delta(q_2p_5, a) &= t_1p_4 \\
\delta(t_1s_2, a) &= q_2p_1 \\
\delta(t_1p_1, a) &= q_2s_2 \\
\delta(t_1p_2, a) &= q_2p_3 \\
\delta(t_1p_3, a) &= q_2p_2 \\
\delta(t_1p_4, a) &= q_2p_5 \\
\delta(t_1p_5, a) &= q_2p_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta(q_2p_1, b) &= t_1p_3 \\
\delta(q_2p_2, b) &= t_1p_4 \\
\delta(q_2p_3, b) &= t_1p_5 \\
\delta(q_2p_4, b) &= t_1s_2 \\
\delta(q_2p_5, b) &= t_1p_1 \\
\delta(t_1s_2, b) &= q_2p_2 \\
\delta(t_1p_1, b) &= q_2p_3 \\
\delta(t_1p_2, b) &= q_2p_4 \\
\delta(t_1p_3, b) &= q_2p_5 \\
\delta(t_1p_4, b) &= q_2s_2 \\
\delta(t_1p_5, b) &= q_2p_1
\end{aligned}$$



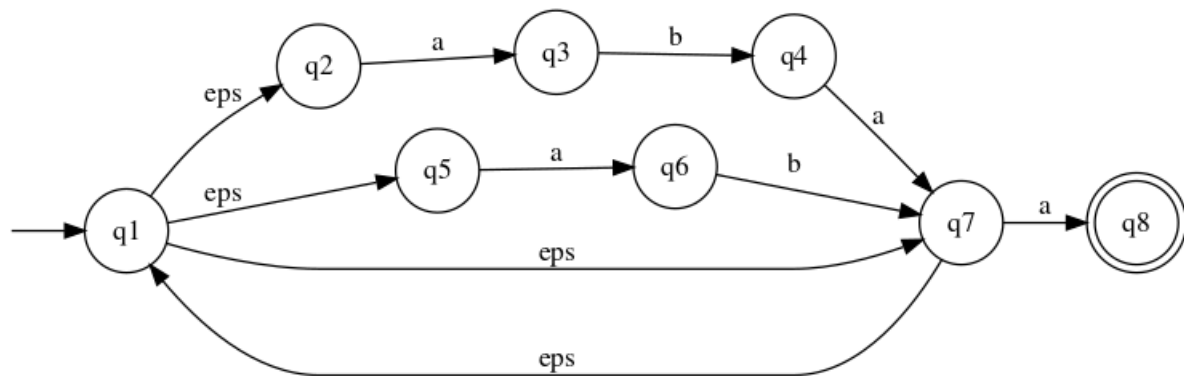
### 3 Построить минимальный ДКА по регулярному выражению

Ответом на данное задание является минимальный ДКА, который допускает тот же язык, что описывается регулярным выражением.

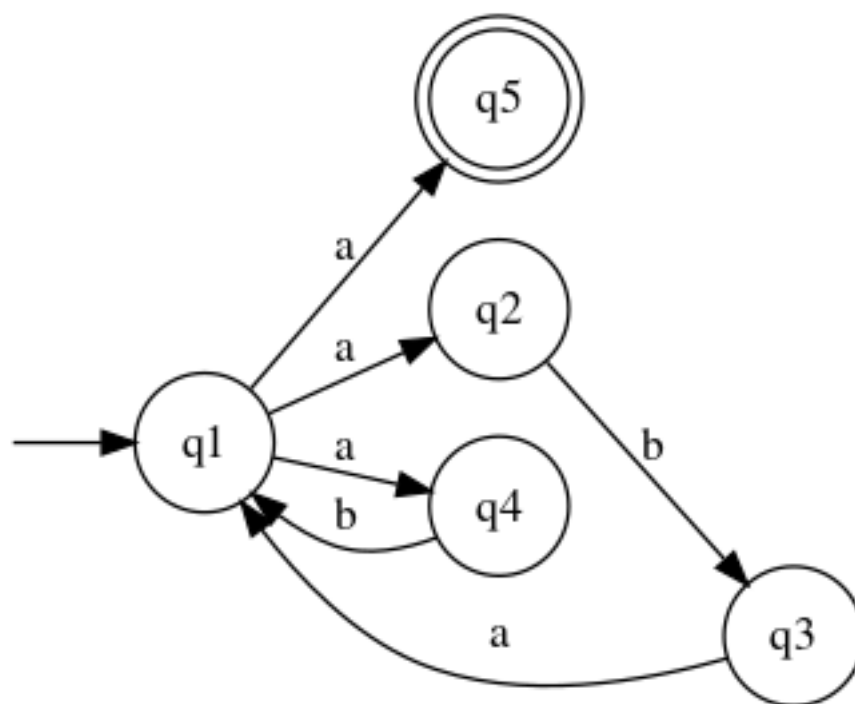
#### 3.1

$$(ab + aba)^*a$$

Построим НКА с  $\lambda$ -переходами.

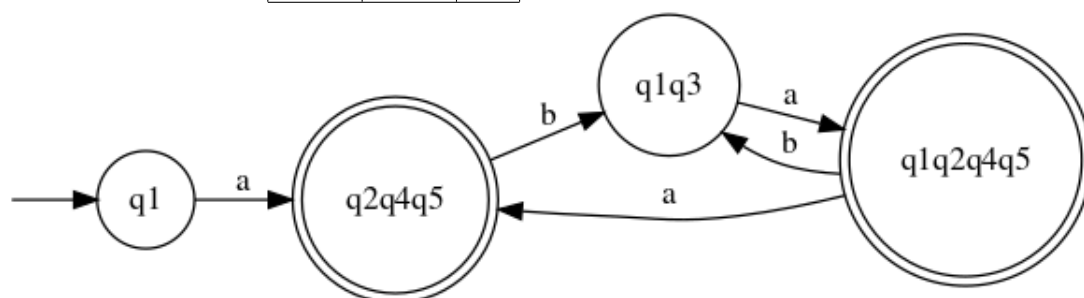


Убираем  $\lambda$ -переходы.



Строим ДКА.

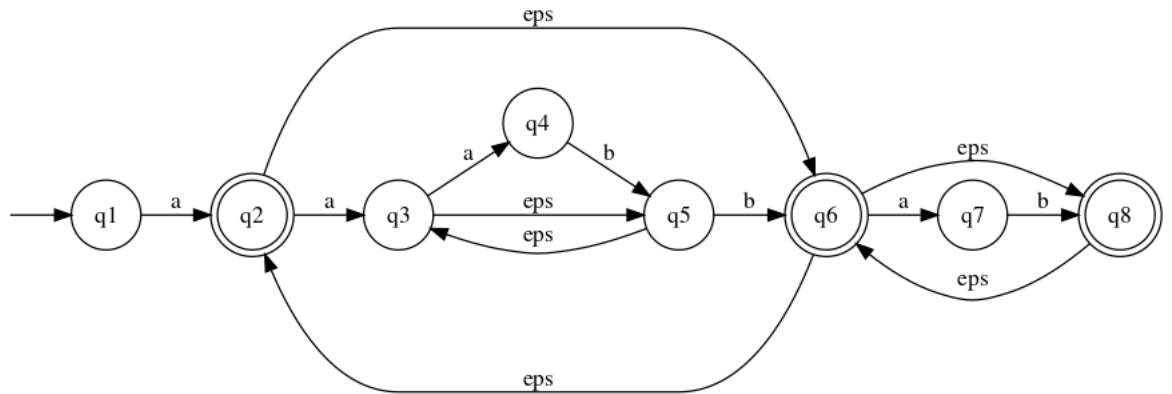
	a	b
1	245	-
245	-	13
13	1245	-
1245	245	13



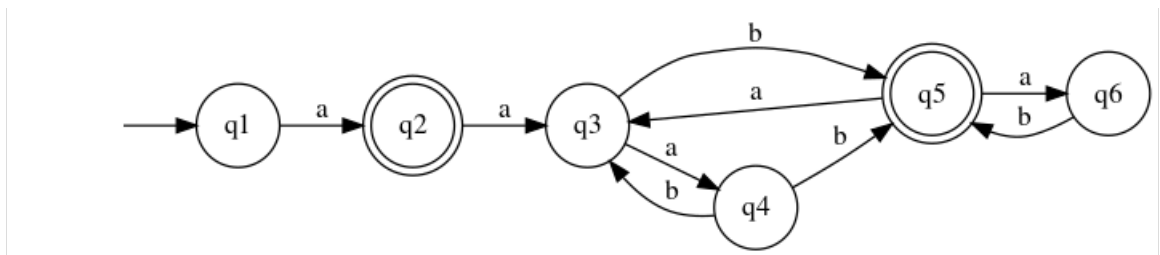
### 3.2

$$a(a(ab)^*b)^*(ab)^*$$

Построим НКА с  $\lambda$ -переходами.

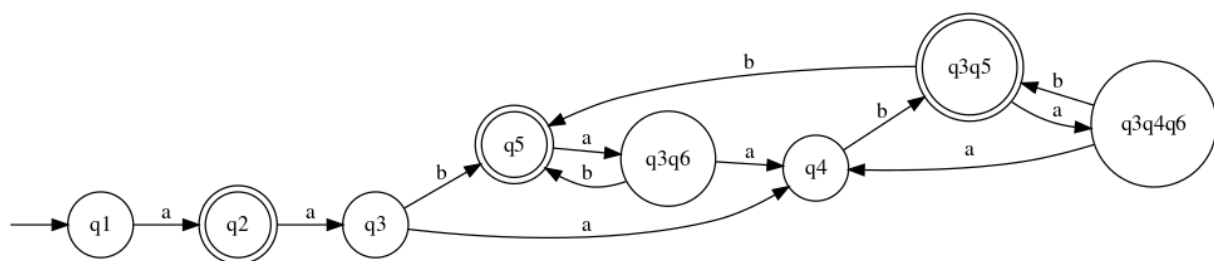


Убираем  $\lambda$ -переходы.



Строим ДКА.

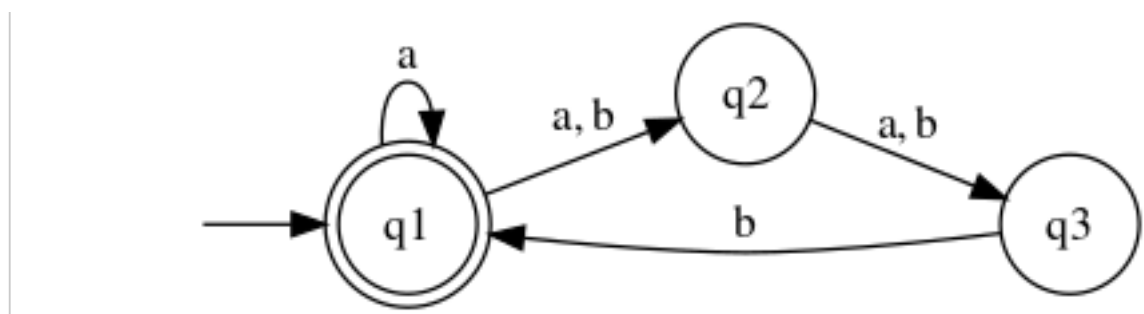
	a	b
1	2	-
2	3	-
3	4	5
4	-	35
5	36	-
35	346	5
36	4	5
346	4	35



### 3.3

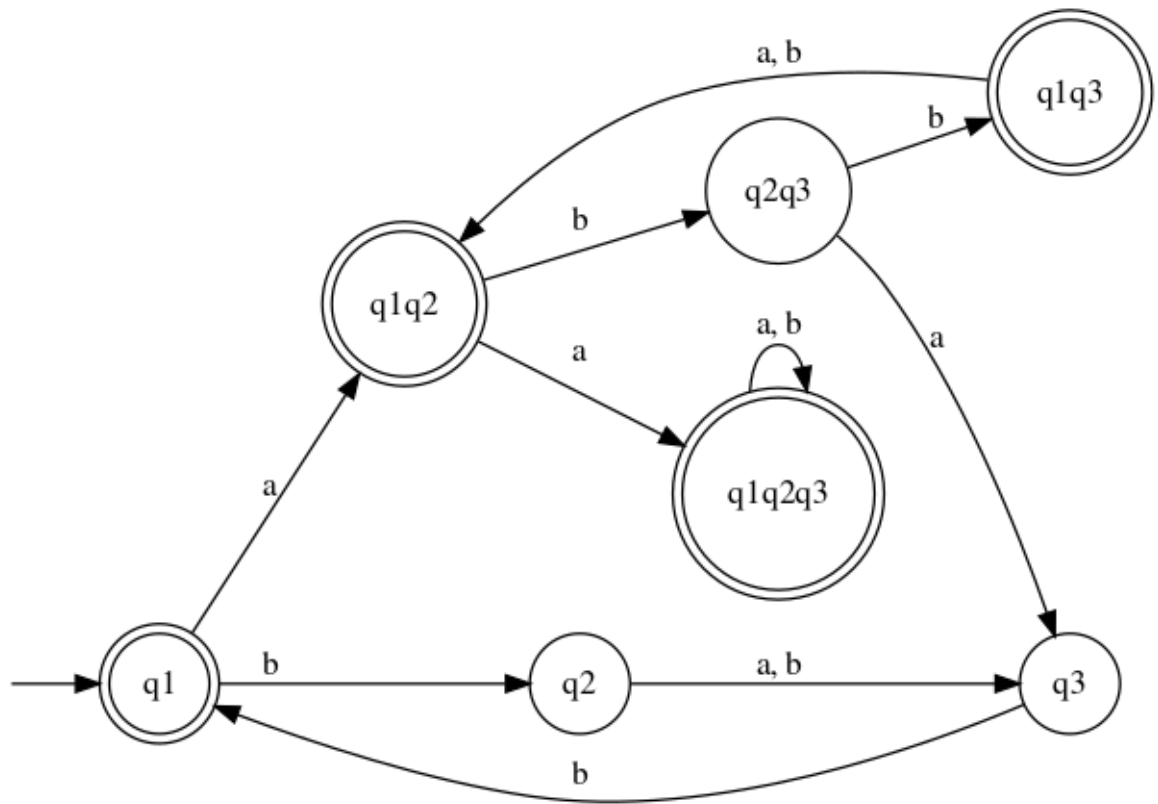
$$(a + (a + b)(a + b)b)^*$$

Построим НКА.



Строим ДКА.

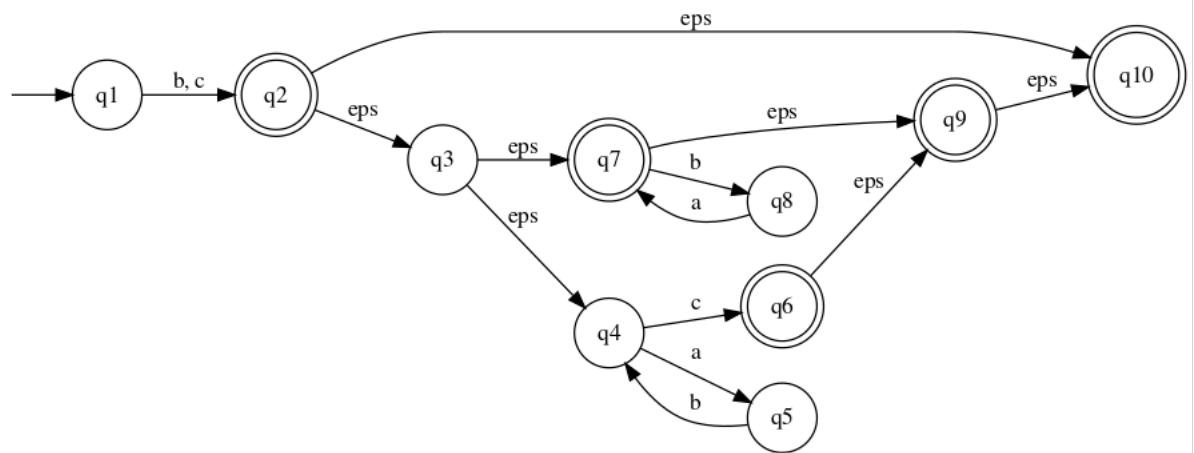
	a	b
1	12	2
12	123	23
2	3	3
123	123	123
23	3	13
3	-	1
13	12	12



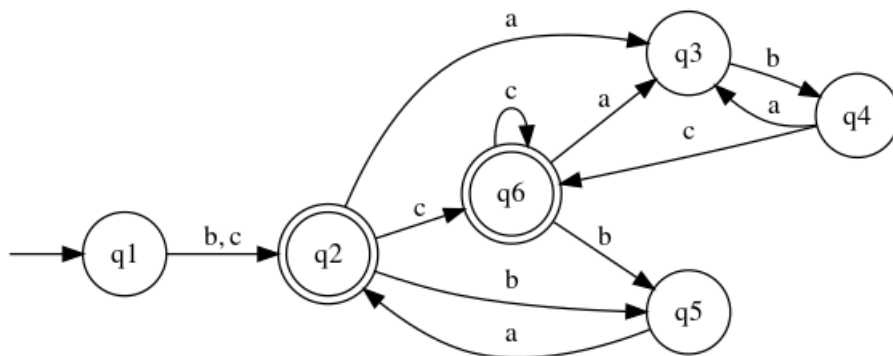
### 3.4

$$(b + c)((ab)^*c + (ba)^*)^*$$

Построим НКА с  $\lambda$ -переходами.



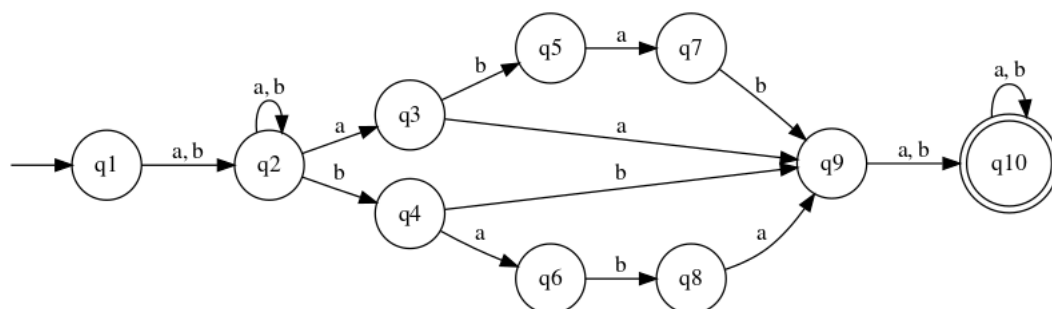
Убираем  $\lambda$ -переходы и строим ДКА.



### 3.5

$$(a + b)^+(aa + bb + abab + baba)(a + b)^+$$

Построим НКА.



Строим ДКА.

graph3\_5.png

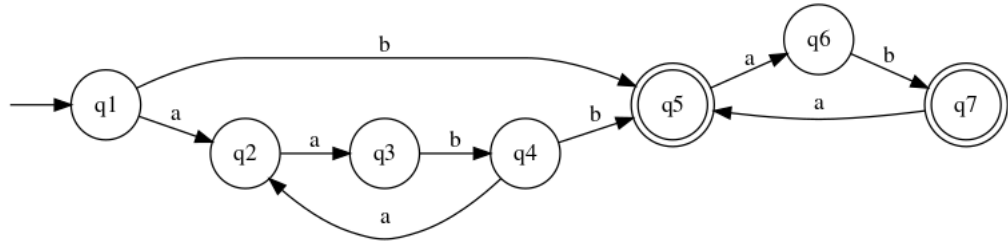
## 4 Определить является ли язык регулярным или нет

Ответом на данное задание является конечный автомат, если язык регулярен, либо доказательство нерегулярности языка при помощи леммы о разрастании.

### 4.1

$$L = \{(aab)^n b (aba)^m | n \geq 0, m \geq 0\}$$

Можем построить ДКА  $\Rightarrow$  язык является регулярным



### 4.2

$$L = \{uaav | u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, |u|_b \geq |v|_a\}$$

Фиксируем  $n \geq 0$

Рассмотрим слово  $w = b^n a a a^n$

$$w = xyz, y \neq \lambda, |xy| \leq n, \forall k \geq 0 xy^k z \in L$$

$$x = b^p, y = b^q, z = b^{n-p-q} a a a^n, p + q \leq n, q > 0$$

$$w = xy^k z = b^p (b^q)^k b^{n-p-q} a a a^n, u = b^{n+l(k-1)}, v = a^n$$

При  $k = 0$ :  $|u|_b = n + l(0 - 1) = n - l < n = |v|_a$ , т.е.  $xy^k z \notin L$ . Следовательно, лемма о накачке не выполняется, значит, язык  $L$  не является регулярным.

### 4.3

$$L = \{a^m w | w \in \{a, b\}^*, 1 \leq |w|_b \leq m\}$$



Фиксируем  $m \geq 0$

Рассмотрим слово  $w = a^m b^m$

$$w = xyz, y \neq \lambda, |xy| \leq m, \forall k \geq 0 xy^k z \in L$$

$$x = a^p, y = a^q, z = a^{m-p-q} b^m, p+q \leq m, q > 0$$

$$w = xy^k z = a^p (a^q)^k a^{m-p-q} b^m$$

При  $k = 0$ :  $w = a^{m-q} b^m \Rightarrow w \notin L$ , так как  $q > 0$ . Следовательно, лемма о накачке не выполняется, значит, язык  $L$  не является регулярным.

#### 4.4

$$L = \{a^k b^m a^n | k = n \vee m > 0\}$$

Фиксируем  $n \geq 0$

Рассмотрим слово  $w = a^n b^m a^n$

$$w = xyz, y \neq \lambda, |xy| \leq n, \forall k \geq 0 xy^k z \in L$$

$$x = a^p, y = a^q, z = a^{n-p-q} b^m a^n, p+q \leq n, q > 0$$

$$w = xy^k z = a^p (a^q)^k a^{n-p-q} b^m a^n = a^{n+q(k-1)} b^m a^n$$

При  $k = 0$ :  $w = a^{n-q} b^m a^n \Rightarrow n - q \neq n \Rightarrow w \notin L$ , так как  $q > 0$ . Следовательно, лемма о накачке не выполняется, значит, язык  $L$  не является регулярным.

#### 4.5

$$L = \{ucv | u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, u \neq v^R\}$$

$$\bar{L} = \{ucv | u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, u = v^R\}$$

Фиксируем  $n \geq 0$

Рассмотрим слово  $w = (ab)^n c (ba)^n = d_1 d_2 \dots d_{2n} c d_{2n+2} \dots d_{4n+1}$

$$w = xyz, y \neq \lambda, |xy| \leq n, \forall k \geq 0 xy^k z \in \bar{L}$$

$$x = d_1 \dots d_p, y = d_{p+1} \dots d_{p+q}, z = d_{p+q+1} \dots d_{2n} c d_{2n+2} \dots d_{4n+1}, p+q \leq n, q > 0$$

$$w = xy^k z = d_1 \dots d_p (d_{p+1} \dots d_{p+q})^k d_{p+q+1} \dots d_{2n} c d_{2n+2} \dots d_{4n+1}$$

При  $k = 2$ :  $u = d_1 \dots d_p (d_{p+1} \dots d_{p+q})^2 d_{p+q+1} \dots d_{2n}$ ,  $v = d_{2n+2} \dots d_{4n+1}$ .  
 $|u| = 2n + q, |v| = 2n, q > 0 \Rightarrow |u| \neq |v| \Rightarrow u \neq v^R \Rightarrow w \notin \bar{L}$ . Следовательно, лемма о накачке не выполняется для дополнения языка  $L$ , значит, язык  $L$  не является регулярным.

## 5 Реализовать алгоритмы

Ответом на данное задание является работающая программа на выбранном языке программирования, покрытая юнит-тестами.

В рамках своего выполнения программа должна генерировать текстовый документ с картинками, показывающий процесс построения автомата (к примеру, Markdown с графиками на Graphviz).

1. Построение ДКА по НКА с  $\lambda$ -переходами
2. Прямое произведение языков, с возможностью построить пересечение, объединение и разность.