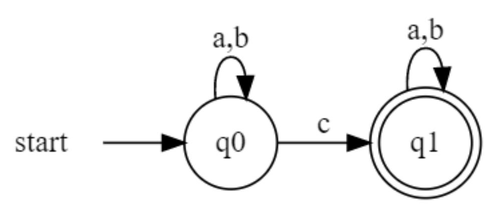
# Теоритические модели вычислений
# ДЗ №1: Регулярные языки и конечные автоматы

Выполнила Савина Анна студентка группы А-13а-19

3 Апреля 2022 года

## 1 Задание №1. Построить конечный автомат, распознающий язык

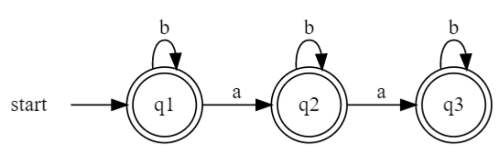
1. $L = \{\omega \in \{a, b, c\}^* \mid |\omega|_c = 1\}$



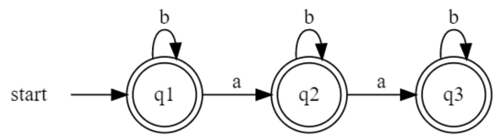

2. $L = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_a \leq 2,\ |\omega|_b \geq 2\}$

   В данном случае удобно разбить данный язык на два:

   $L_1 = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_a \leq 2\}$



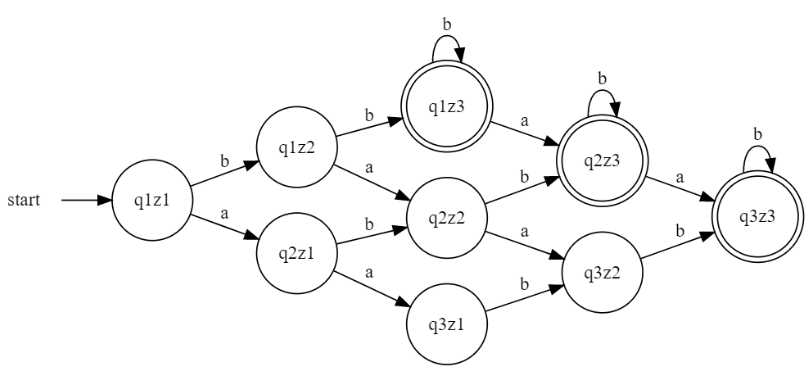
и $L_2 = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_b \geq 2\}$




Дальше построим наш автомат, используя прямое произведение языков $L_1$ и $L_2$:

$L = < \Sigma, Q, s, T, \delta >$
$\Sigma = \{a, b\}$
$Q = \{< q1, z1 >, < q1, z2 >, < q1, z3 >, < q2, z1 >, < q2, z2 >, < q2, z3 >, < q3, z1 >, < q3, z2 >, < q3, z3 >\}$
$s = < q1, z1 >$
$T = \{< q1, z3 >, < q2, z3 >, < q3, z3 >\}$

| $\delta$ | | |
|---|---|---|
| | a | b |
| <q1, z1> | <q2, z1> | <q1, z2> |
| <q1, z2> | <q2, z2> | <q1, z3> |
| <q1, z3> | <q2, z3> | <q1, z3> |
| <q2, z1> | <q3, z1> | <q2, z2> |
| <q2, z2> | <q3, z2> | <q2, z3> |
| <q2, z3> | <q3, z3> | <q2, z3> |
| <q3, z1> | - | <q3, z2> |
| <q3, z2> | - | <q3, z3> |
| <q3, z3> | - | <q3, z3> |

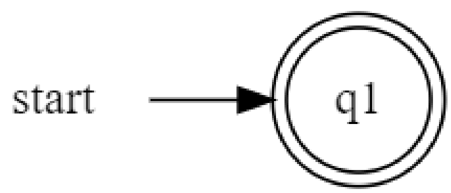


3. $L = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_a \neq |\omega|_b\}$

   Мы не сможем построить ДКА, который будет распозновать такой язык, так как мы не можем подсчитывать и запоминать количество переходов. Язык будет нерегулярный

4. $L = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid \omega\omega = \omega\omega\omega\}$

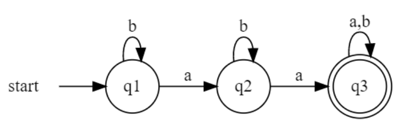
   Такому языку удовлетворяет только пустое слово.

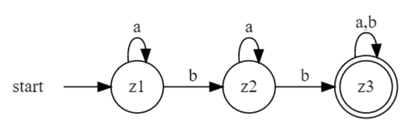



# 2 Задание №2. Построить конечный автомат, используя прямое произведение

1. $L_1 = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_a \geq 2 \wedge |\omega|_b \geq 2\}$

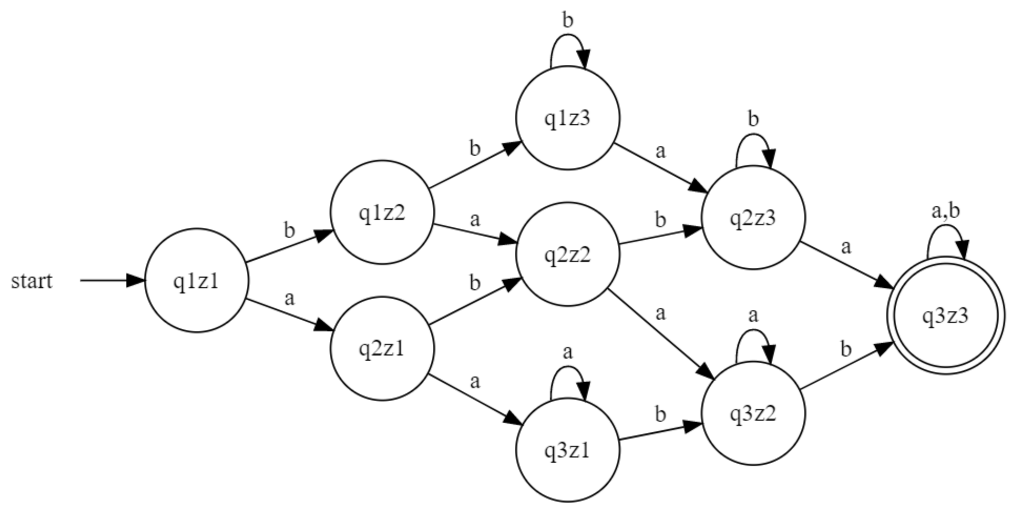
   $L_{11} = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_a \geq 2\}$, $\qquad L_{12} = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_b \geq 2\}$



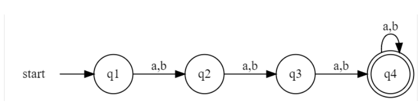



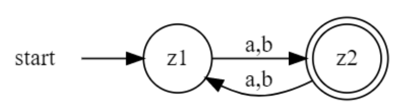

$L_1 = L_{11} \cap L_{12} =< \Sigma, Q, s, T, \delta >$
$\Sigma = \{a, b\}$
$Q = \{< q1, z1 >, < q1, z2 >, < q1, z3 >, < q2, z1 >, < q2, z2 >, <$
$q2, z3 >, < q3, z1 >, < q3, 2 >, < q3, z3 >\}$
$s =< q1, z1 >$
$T = \{< q3, z3 >\}$

| δ | | |
|---|---|---|
| | a | b |
| <q1, z1> | <q2, z1> | <q1, z2> |
| <q1, z2> | <q2, z2> | <q1, z3> |
| <q1, z3> | <q2, z3> | <q1, z3> |
| <q2, z1> | <q3, z1> | <q2, z2> |
| <q2, z2> | <q3, z2> | <q2, z3> |
| <q2, z3> | <q3, z3> | <q2, z3> |
| <q3, z1> | <q3, z1> | <q3, z2> |
| <q3, z2> | <q3, z2> | <q3, z3> |
| <q3, z3> | <q3, z3> | <q3, z3> |




2. $L_2 = \{\omega \in \{a,b\}^* \mid |\omega| \geq 3 \wedge |\omega| \text{ нечетное}\}$
   $L_{21} = \{\omega \in \{a,b\}^* \mid |\omega| \geq 3\}, \qquad L_{22} = \{\omega \in \{a,b\}^* \mid |\omega| \text{ нечетное}\}$

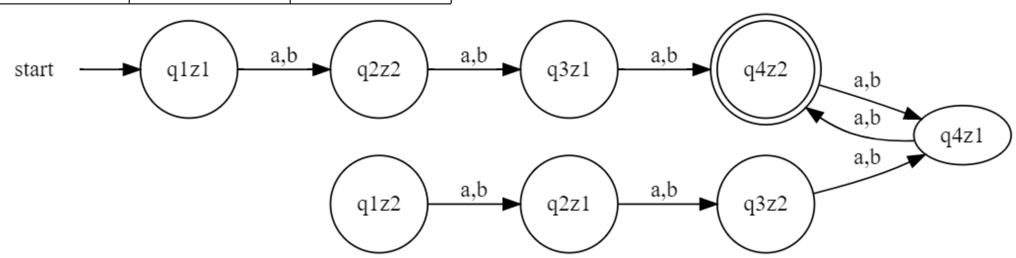


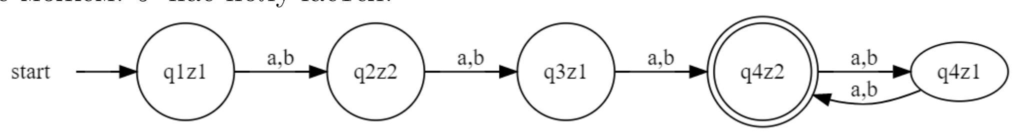

$L_2 = L_{21} \cap L_{22} =< \Sigma, Q, s, T, \delta >$
$\Sigma = \{a, b\}$
$Q = \{< q1, z1 >, < q1, z2 >, < q2, z1 >, < q2, z2 >, < q3, z1 >, < q3, z2 >, < q4, z1 >, < q4, z1 >, < q4, z2 >\}$
$s =< q1, z1 >$

$T = \{< q4, z2 >\}$

| $\delta$ | | |
|---|---|---|
| | a | b |
| <q1, 1> | <q2, z2> | <q2, z2> |
| <q1, 2> | <q2, z1> | <q2, z1> |
| <q2, 1> | <q3, z2> | <q3, z2> |
| <q2, 2> | <q3, z1> | <q3, z1> |
| <q3, 1> | <q4, z2> | <q4, z2> |
| <q3, 2> | <q4, z1> | <q4, z1> |
| <q4, 1> | <q4, z2> | <q4, z2> |
| <q4, 2> | <q4, z1> | <q4, z1> |

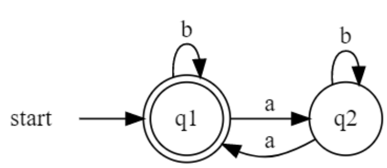


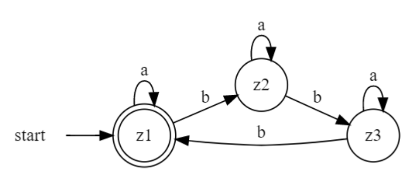

Данный ДКА можно упростить, т.к. попасть в q1z2, q2z1, q3z2 мы не можем. У нас получается:




3. $L_3 = \{\omega \in \{a,b\}^* \mid |\omega|_a$ четно $\wedge$ $|\omega|_b$ кратно трем$\}$

   $L_{31} = \{\omega \in \{a,b\}^* \mid |\omega|_a$ четно$\}$, $\quad L_{32} = \{\omega \in \{a,b\}^* \mid |\omega|_b$ кратно трем$\}$

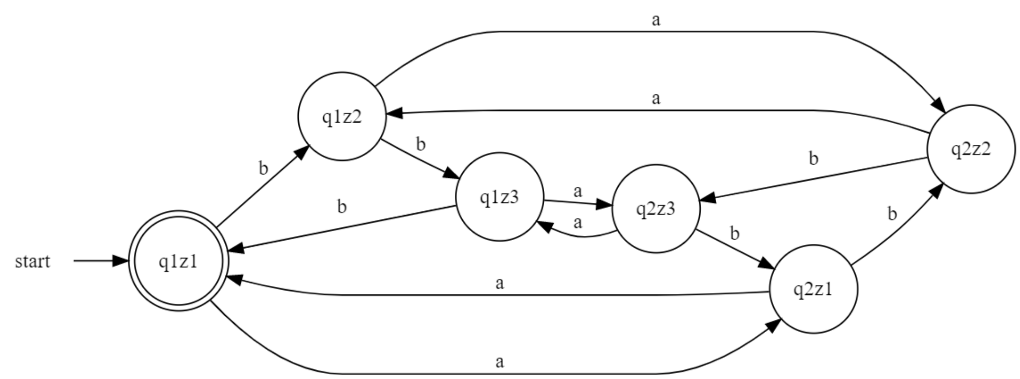


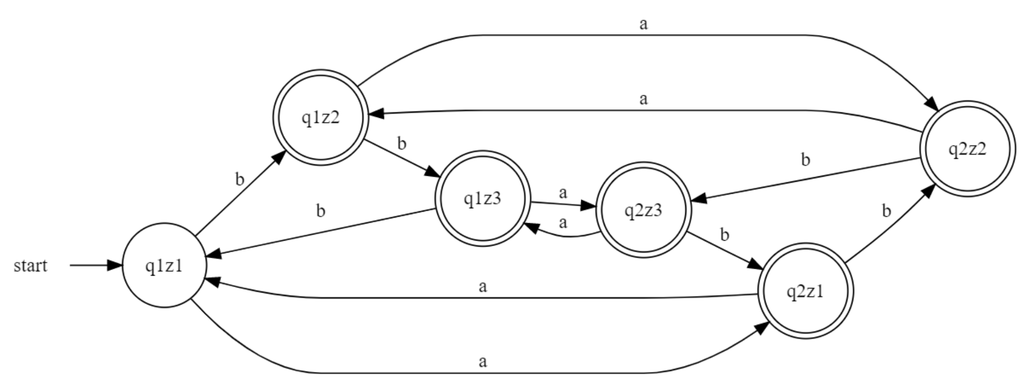

$L_3 = L_{31} \cap L_{32} =< \Sigma, Q, s, T, \delta >$
$\Sigma = \{a, b\}$
$Q = \{< q1, z1 >, < q1, z2 >, < q1, z3 >, < q2, z1 >, < q2, z2 >, < q2, z3 >\}$

$s =< q1, q1 >$
$T = \{< q1, q1 >\}$

| $\delta$ | | |
|---|---|---|
| | a | b |
| <q1, z1> | <q2, z1> | <q1, z2> |
| <q1, z2> | <q2, z2> | <q1, z3> |
| <q1, z3> | <q2, z3> | <q1, z1> |
| <q2, z1> | <q1, z1> | <q2, z2> |
| <q2, z2> | <q1, z2> | <q2, z3> |
| <q2, z3> | <q1, z3> | <q2, z1> |



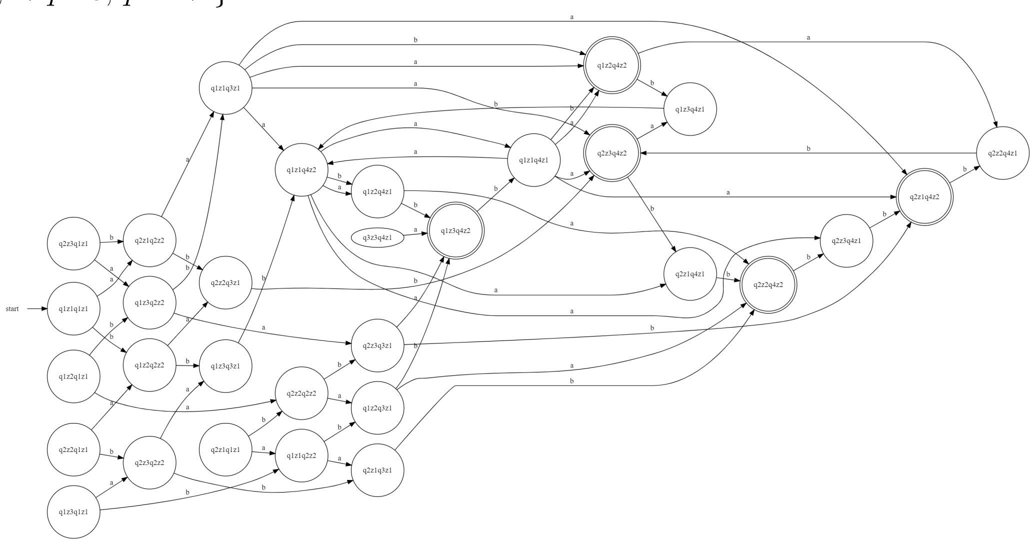

4. $L_4 = \neg L_3$




5. $L_5 = L_2 \setminus L_3$

$L_5 = L_2 \cap \neg L_3$, то есть автомат, распознающий язык $L_5$, строится как прямое произведение автоматов, распознающих языки $L_2$ и $L_4$

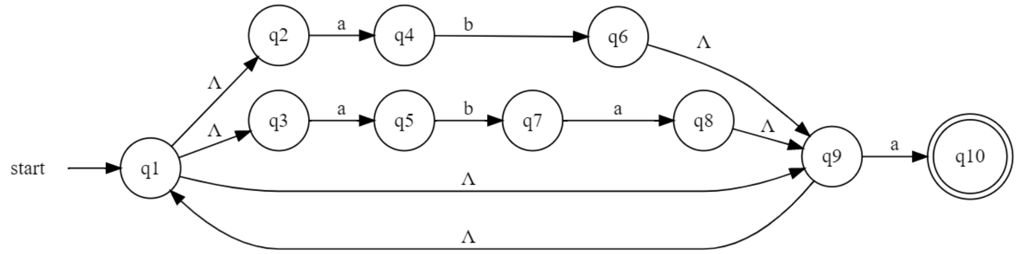
$L_3 = L_{31} \cap L_{32} =< \Sigma, Q, s, T, \delta >$
$\Sigma = \{a, b\}$
$Q = \{< q1z1, q1z1 >, < q1z1, q2z2 >, < q1z1, q3z1 >, < q1z1, q4z2 >$
$, < q1z1, q4z1 >, < q1z2, q1z1 >, < q1z2, q2z2 >, < q1z2, q3z1 >, <$
$q1z2, q4z2 >, < q1z2, q4z1, < q1z3, q1z1 >, < q1z3, q2z2 >, <$
$q1z3, q3z1 >, < q1z3, q4z2 >, < q1z3, q4z1 >, < q2z1, q2z1 >, <$
$q2z1, q2z2 >, < q2z1, q3z1 >, < q2z1, q4z2 >, < q2z1, q4z1 >, <$
$q2z2, q1z1 >, < q2z2, q2z2 >, < q2z2, q3z1 >, < q2z2, q4z2 >, <$
$q2z2, q4z1 >, < q3z3, q1z1 >, < q1z3, q2z2 >, < q3z3, q3z1 >, <$
$q3z3, q4z2 >, < q3z3, q4z1 >\}$
$s =< q1z1, q1z1 >$
$T = \{< q1z2, q4z2 >, < q1z3, q4z2 >, < q2z1, q4z2 >, < q2z2, q4z2 >$
$, < q2z3, q4z2 >\}$



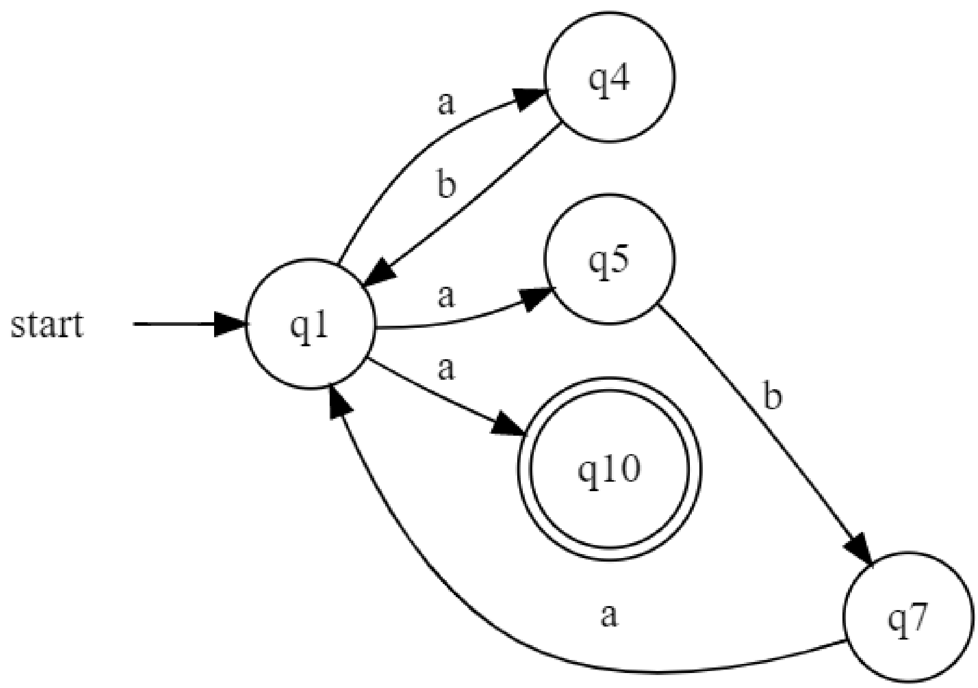
# 3 Задание №3. Построить минимальный ДКА по регулярному выражению

(a) $(ab + aba)^* a$

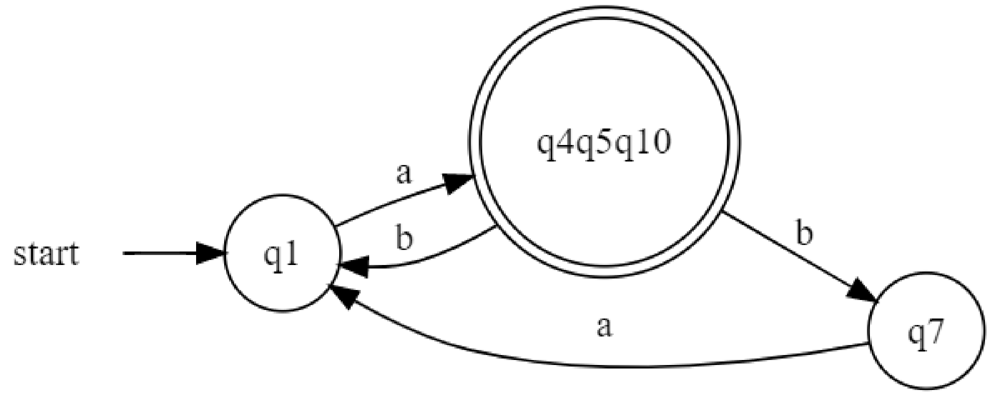
Построим распознающий этот язык НКА:



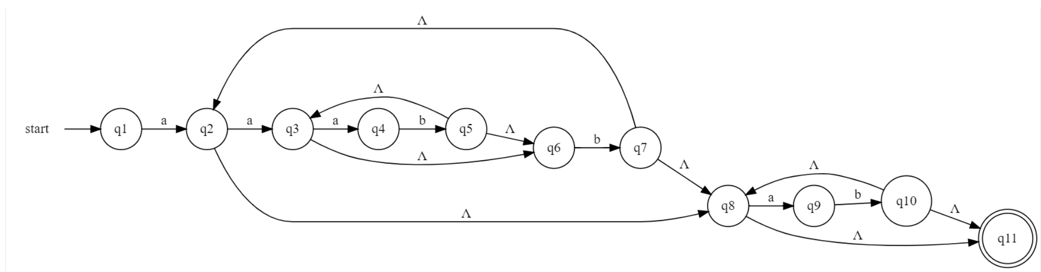

Дальше удалим все лямбда-переходы в данном НКА:



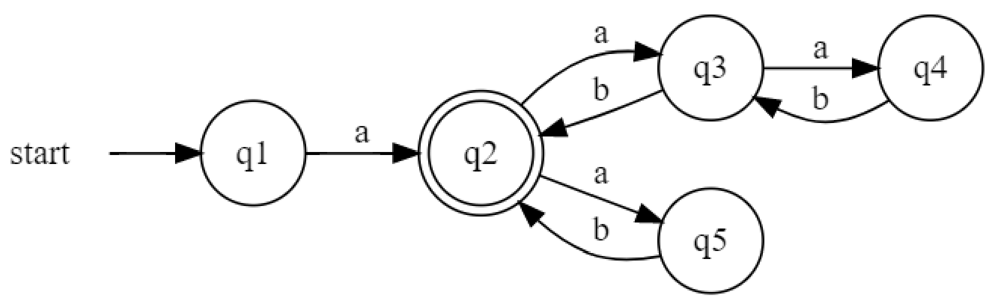

Дальше преобразуем нам НКА в ДКА. И получим минимальный ДКА в данном выражении:



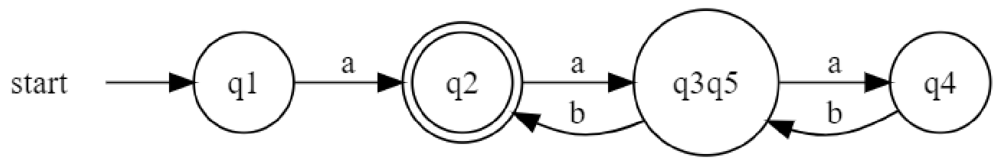

(b) $a(a(ab)^*b)^*(ab)^*$
Построим распознающий этот язык НКА с лямбда=переходами



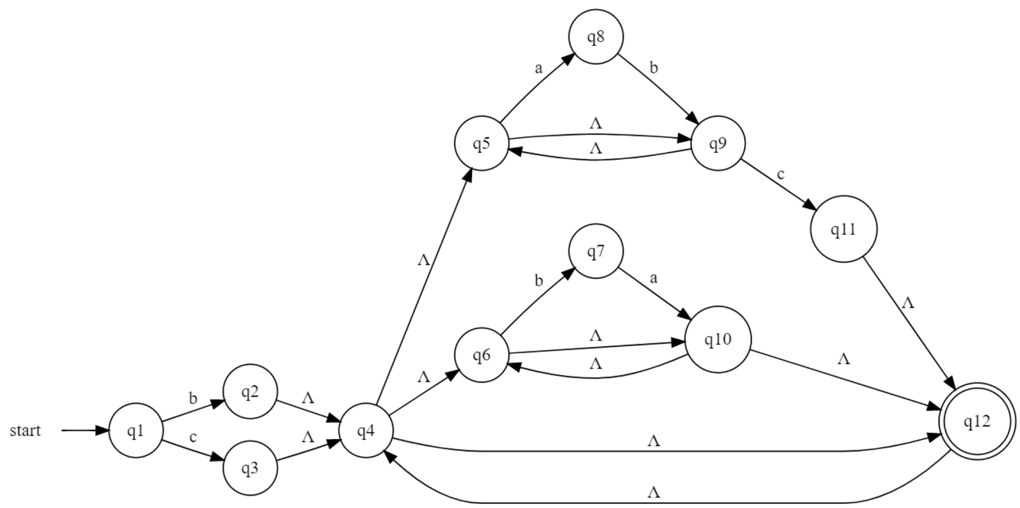

Дальше удалим все лямбда-переходы:



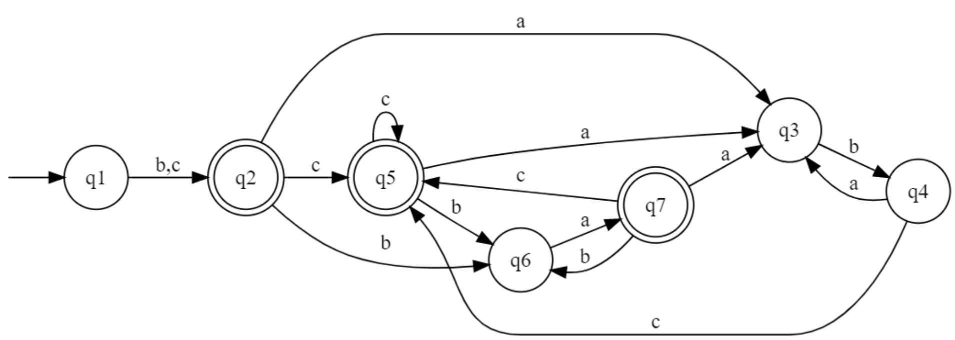

Соответствующий ему минимальный ДКА:



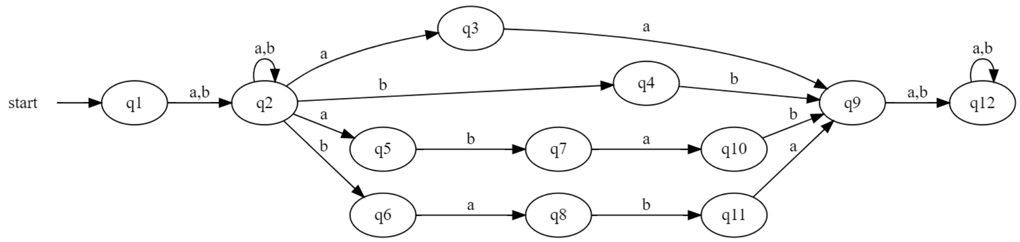

(c) $(a+(a+b)(a+b)b)^*$ Построим распознающий этот язык НКА с лямбда=переходами



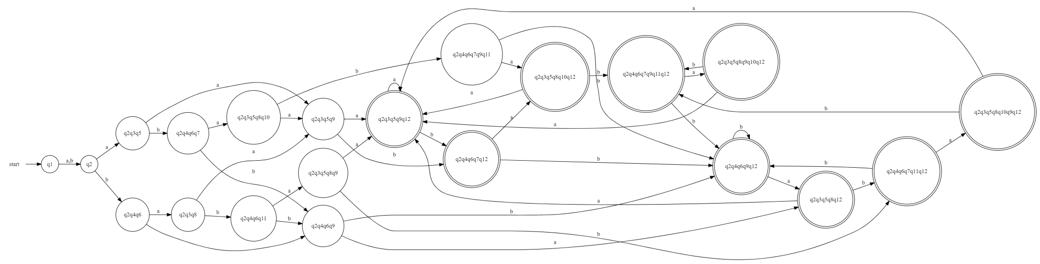

Соответствующий ему минимальный ДКА:




(d) $(a+b)^+(aa+bb+abab+baba)(a+b)^+$ Построим распознающий этот язык НКА:



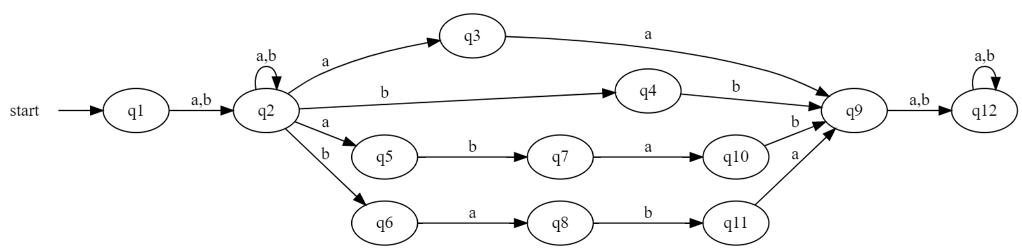

Соответствующий ему минимальный ДКА:



# 4 Задание №4. Определить, является ли язык регулярным или нет

1. $L = \{(aab)^n b(aba)^m \mid n \geq 0,\ m \geq 0\}$

   Данный язык является регулярным




2. $L = \{uaav \mid u \in \{a,b\}^*,\ v \in \{a,b\}^*,\ |u|_b \geq |v|_a\}$ Докажем, что язык не регулярный используя лемму о возрастаннии
   Зафиксируем $\forall n \in N$. Рассмотрим слово $\omega = b^n aaa^n,\ |\omega| = 2n+2 \geq$

$n$. Теперь рассмотрим все разбиения этого слова $\omega = xyz$ такие, что $|y| \neq 0,\ |xy| \leq n$:

$$x = b^{k_1},\ y = b^{k_2},\ z = b^{n-k_1-k_2}aaa^n; \quad (1 \leq k_1 + k_2 \leq n,\ k_2 > 0)$$

Для любого из таких разбиений слово $xy^0z \notin L$. Следовательно, использовав отрицание леммы о возрастаннии, доказали нерегулярность языка $L$.

3. $L = \{a^m\omega \mid \omega \in \{a,b\}^*,\ 1 \leq |\omega|_b \leq m$
Докажем нерегулярность языка используя лемму о возрастании.
Зафиксируем $\forall n \in N$.
Пусть $w = b^naaa^{n+1} \in \overline{L};\ |w| \geq n$.
Все возможные разбиения при $|xy| \leq n$ и $|y| \geq 1$:
$x = b^l$
$y = b^k$
$z = b^{n-l-k}aaa^{n+1}$
При накачивании $y$, будет увеличиваться количество букв $b$ и в какой-то момент их будет больше, чем букв $a$ и слово уже не будет принадлежать $\overline{L}$. Следовательно, язык $\overline{L}$ - нерегулярный. Следовательно, язык $L$ тоже нерегулярный.

4. $L = a^mw : w \in a, b`\ 1 \leq |w|_b \leq m$
Докажем нерегулярность языка используя лемму о возрастании.
Пусть $\overline{L}$: $\overline{L} = a^mw : w \in a, b`\ |w|_b > m\ \vee\ |w|_b = 0$
Зафиксируем $\forall n \in N$.
Пусть $w = a^nb^{n+1} \in \overline{L};\ |w| \geq n$
Все возможные разбиения при $|xy| \leq n$ и $|y| \geq 1$:
$x = a^l$
$y = a^k$
$z = a^{n-l-k}b^{n+1}$
При накачивании $y$ букв $a$ будет больше, чем букв $b$, и условие $|w|_b > m$ не будет выполняться. Из этого следует, что язык $\overline{L}$ - нерегулярный. Следовательно $L$ тоже нерегулярный.

5. $L = a^kb^ma^n : k = n\ \vee\ m > 0$
Докажем нерегулярность языка используя лемму о возрастании.
Зафиксируем $\forall n \in N$.

Пусть $w = a^n b a^n \in L;\ |w| \geq n$
Все возможные разбиения:
$x = a^l$
$y = a^k$
$z = a^{n-l-k} b a^n$
При накачивании $y$ равенство $k = n$ перестанет выполняться. Следовательно, $L$ - нерегулярный язык.