Теоретические модели вычислений ДЗ №1: Регулярные языки и конечные автоматы

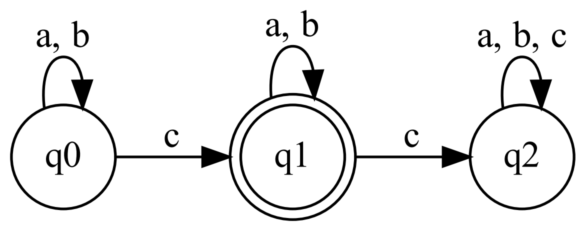
Студент группы А-13а-19 Башлыков М.С.

April 2022

1 Задание №1. Построить конечный автомат, распознающий язык

1. $L = \{\omega \in \{a, b, c\}^* || \omega|_c = 1\}$

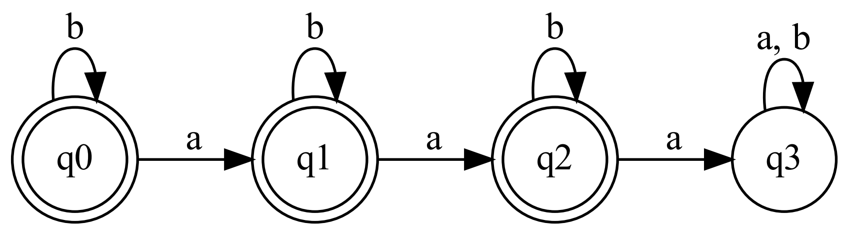
   Так как нам нужен лишь один символ "c", то просто будем ждать прочтения этого символа. Если же нам встретится ещё один символ "c", покинем конечное состояние:



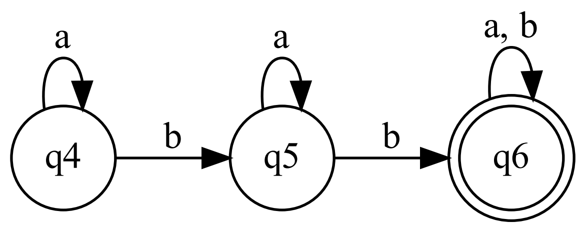
2. $L = \{\omega \in \{a, b\}^* || \omega|_a \leq 2,\ |\omega|_b \geq 2\}$

   Построим отдельно ДКА для $L_1 = \{\omega \in \{a, b\}^* || \omega|_a \leq 2\}$ и для $L_2 = \{\omega \in \{a, b\}^* || \omega|_b \geq 2\}$, а затем получим их прямое произведение:

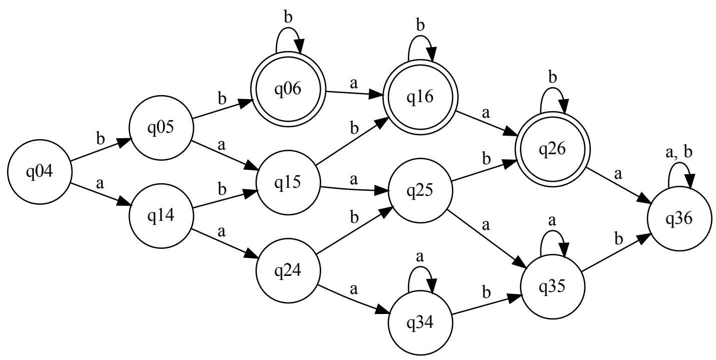
   L_1: Будем менять состояние при чтении a, а при чтении b переходить в то же самое состояние. При этом начальное состояние и состояния при первых двух чтениях a будут конечными, а уже третье считывание приведёт к непринимающему состоянию.



L_2: Будем аналогично менять состояния при считывании символа b и входить в то же самое состояние при считывании a. Однако здесь непринимающими будут состояния до считывания b и после первого считывания символа b, второй же символ b приведёт нас в конечное состояние.



Тогда итоговый ДКА будет являться прямым произведением:



3. $L = \{\omega \in \{a,b\}^* | |\omega|_a \neq |\omega|_b\}$
Это нерегулярный язык, а значит, для него нельзя построить ДКА. Докажем, применив лемму о разрастании:

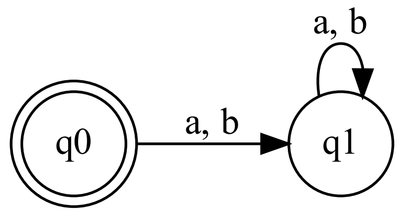
   (a) Рассмотрим дополнение к языку: $\neg L = \{\omega \in \{a,b\}^* | |\omega|_a = |\omega|_b\}$.

   (b) Пусть $\neg L$ – регулярный. Тогда выполняется лемма о разрастании.

   (c) Зафиксируем $n \in N$. Пусть $\omega = a^n b^n$. Тогда $\omega \in \neg L$ и $|\omega| \geq n$.

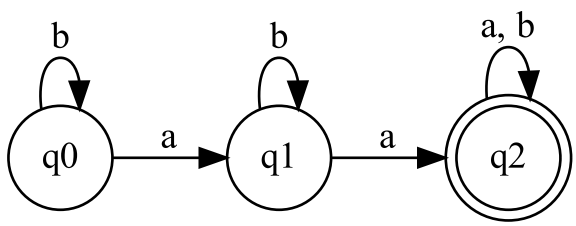
   (d) Рассмотрим всевозможные разбиения слова $\omega = xyz$ такие, что $|xy| \leq n$ и $y \neq \lambda$:
   $x = a^l, 0 \leq l \leq n-1$
   $y = a^m, 1 \leq m \leq n-l$
   $z = a^{n-l-m} b^n$
   Тогда при $k = 2$ $xy^k z \notin \neg L$, т.к. тогда $xy^k z = xy^2 z = a^{l+2m+n-l-m} b^n = a^{n+m} b^n$ и $n + m \neq m$, т.е. для слова $xy^k z$ не выполяется условие $|\omega|_a = |\omega|_b$. Следовательно, лемма о разрастании не выполняется. Т.к. для дополнения языка не выполняется лемма о разрастании, то оно не является регулярным, следовательно, и изначальный язык не является регулярным.

4. $L = \{\omega \in \{a,b\}^* | \omega\omega = \omega\omega\omega\}$
Исходя из определения этого языка, если $|\omega| = x$, то получается, что $2x = |\omega\omega| = |\omega\omega\omega| = 3x$, следовательно, $x = 0$, т.е. ДКА должен допускать лишь пустые слова:

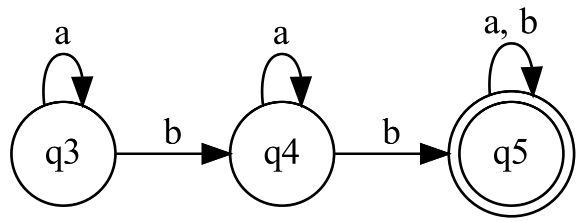


2 Задание №2. Построить конечный автомат, используя прямое произведение

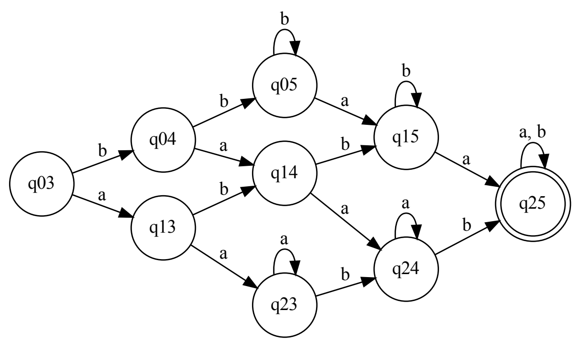
1. $L_1 = \{\omega \in \{a,b\}^* | |\omega|_a \geq 2 \wedge |\omega|_b \geq 2\}$
   Построим ДКА отдельно для каждого условия, а затем возьмём их прямое произведение.
   $L_{11} = \{\omega \in \{a,b\}^* | |\omega|_a \geq 2\}$:



$L_{12} = \{\omega \in \{a,b\}^* | |\omega|_b \geq 2\}$:



Прямое произведение:



2. $L_2 = \{\omega \in \{a,b\}^* | |\omega|_a \geq 3 \wedge |\omega|_b\}$

3. $L_3 = \{\omega \in \{a,b\}^* | |\omega|_a \wedge |\omega|_b\}$

4. $L_4 = \neg L_3$
   ДКА может быть получен аналогично п. 1.3, но затем нужно инвертировать состояния:

5. $L_5 = L_2 \setminus L_3$
Т.к. $A \setminus B = A \cap \neg B$, а $L_4 = \neg L_3$, то нам остаётся построить прямое произведение ДКА для L_2 и L_4

3 Задание №3. Построить минимальный ДКА по регулярному выражению

1. $(ab + aba)^* a$

2. $a(a(ab)^* b)^* (ab)^*$

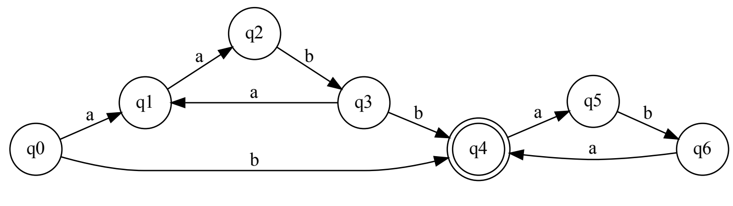
3. $(a + (a + b)(a + b)b)^*$

4. $(b + c)((ab)^* c + (ba)^*)^*$

5. $(a + b)^+ (aa + abab + bb + baba)(a + b)^+$

4 Задание №4. Определить, является ли язык регулярным или нет

1. $L = \{(aab)^n b(aba)^m | n \geq 0,\ m \geq 0\}$
Язык является регулярным, т.к. можно построить ДКА, распознающий его:



2. $L = \{uaav | u \in \{a,b\}^*,\ v \in \{a,b\}^*,\ |u|_b \geq |v|_a\}$
   Язык не является регулярным. Докажем, применив лемму о разрастании:

   (a) Рассмотрим дополнение к языку: $\neg L$.

   (b) Пусть $\neg L$ – регулярный. Тогда выполняется лемма о разрастании.

   (c) Зафиксируем $n \in N$. Пусть $\omega = b^{2n}aaa^{2n+1}$. Тогда $\omega \in \neg L$ и $|\omega| \geq n$.

   (d) Рассмотрим всевозможные разбиения слова $\omega = xyz$ такие, что $|xy| \leq n$ и $y \neq \lambda$:
   $x = b^l, 0 \leq l \leq n-1$
   $y = b^m, 1 \leq m \leq n-l$
   $z = b^{2n-l-m}aaa^{2n+1}$
   Тогда при $k = 2$ $xy^kz \notin \neg L$, т.к. тогда $xy^kz = xy^2z = b^{l+2m+2n-l-m}aaa^{2n+1} = b^{2n+m}aaa^{2n+1}$ и $2n+m \geq 2n+1$, т.е. для слова xy^kz выполяется условие $|u|_b \geq |v|_a\}$ и $xy^kz \in L$. Следовательно, лемма о разрастании не выполняется.
   Т.к. для дополнения языка не выполняется лемма о разрастании, то оно не является регулярным, следовательно, и изначальный язык не является регулярным.

3. $L = \{a^m w | w \in \{a,b\}^*,\ 1 \leq |w|_b \leq m\}$
   Язык не является регулярным. Докажем, применив лемму о разрастании:

   (a) Рассмотрим дополнение к языку: $\neg L$.

   (b) Пусть $\neg L$ – регулярный. Тогда выполняется лемма о разрастании.

   (c) Зафиксируем $n \in N$. Пусть $\omega' = a^n b^{n+1}$. Тогда $\omega' \in \neg L$ и $|\omega'| \geq n$.

   (d) Рассмотрим всевозможные разбиения слова $\omega' = xyz$ такие, что $|xy| \leq n$ и $y \neq \lambda$:
   $x = a^l, 0 \leq l \leq n-1$
   $y = a^m, 1 \leq m \leq n-l$
   $z = a^{n-l-m}b^{n+1}$
   Тогда при $k = 2$ $xy^kz \notin \neg L$, т.к. тогда $xy^kz = xy^2z = a^{l+2m+n-l-m}b^{n+1} =$

$a^{n+m}b^{n+1}$ и $n+m \geq n+1$, т.е. для слова xy^kz выполяется условие: $\omega' = a^{n+m}b^{n+1} = a^{n+m}\omega$ и $1 \leq |\omega|_b \leq n+m$, т.е. $\omega' \in L$. Следовательно, лемма о разрастании не выполняется.
Т.к. для дополнения языка не выполняется лемма о разрастании, то оно не является регулярным, следовательно, и изначальный язык не является регулярным.

4. $L = \{a^kb^ma^n | k = n \vee m > 0\}$
   Язык не является регулярным. Докажем, применив лемму о разрастании:

5. $L = \{ucv | u \in \{a,b\}^*,\ v \in \{a,b\}^*,\ u \neq v^R\}$
   Язык не является регулярным. Докажем, применив лемму о разрастании:

   (a) Рассмотрим дополнение к языку: $\neg L$.

   (b) Пусть $\neg L$ – регулярный. Тогда выполняется лемма о разрастании.

   (c) Зафиксируем $n \in N$. Пусть $\omega = a^{2n+2}ca^{n+1}$. Тогда $\omega \in L$ и $|\omega| \geq n$.

   (d) Рассмотрим всевозможные разбиения слова $\omega = xyz$ такие, что $|xy| \leq n$ и $y \neq \lambda$:
   $x = a^l, 0 \leq l \leq n-1$
   $y = a^m, 1 \leq m \leq n-l$
   $z = a^{2n+2-l-m}ca^{n+1}$
   Тогда при $k = 2$ $xy^kz \notin \neg L$, т.к. тогда $xy^kz = xy^2z = a^{l+2m+2n+2-l-m}ca^{n+1} = a^{2n+2+m}ca^{n+1}$ и $1 \leq m \leq n$, т.е. $1 \leq (2n+2+m)mod(n+1) \leq n$. Следовательно, для слова xy^kz выполяется условие: $\omega = ucv | u \in \{a,b\}^*,\ v \in \{a,b\}^*,\ u \neq v^R\}$, т.е. $\omega' \in L$. Следовательно, лемма о разрастании не выполняется.
   Т.к. для дополнения языка не выполняется лемма о разрастании, то оно не является регулярным, следовательно, и изначальный язык не является регулярным.