

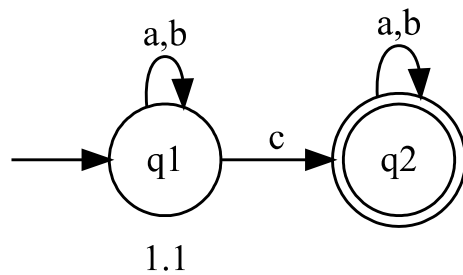
# Домашнее задание

Шевцов А-13а-19

## Задание 1

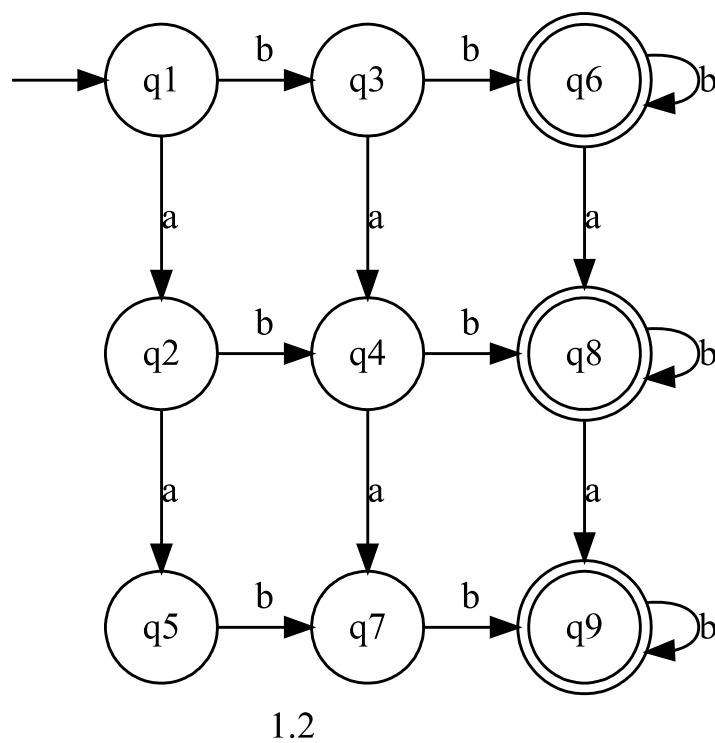
1.  $L = \{w \in \{a, b, c\}^* : |w|_c = 1\}$

Решение:



2.  $L = \{w \in \{a, b\}^* : |w|_a \leq 2, |w|_b \geq 2\}$

Решение:



3.  $L = \{w \in \{a, b\}^* : |w|_a \neq |w|_b\}$

Решение:

$$\overline{L} = \{w \in \{a, b\}^* : |w|_a = |w|_b\}$$

Фиксируем  $\forall n \in \mathbb{N}, w = a^n b^n$

$$x = a^i$$

$$y = a^j$$

$$z = a^{n-i-j} b^n$$

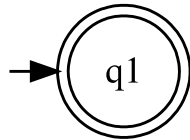
$$i \geq 0, j > 0, i + j \leq n$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists w \in \overline{L} : |w| \geq n, \forall xyz : x, y, z \in \Sigma^*, w = xyz, y \neq \lambda, |xy| \leq n \exists k = 2 : xy^kz \notin \overline{L}$$

Таким образом, по лемме о разрастании  $\overline{L}$  не является регулярным (а следовательно и  $L$ ), а это значит и ДКА не может быть построен.

$$4. L = \{w \in \{a, b\}^* : ww = www\}$$

**Решение:**



1.4

## Задание 2

$$1. L_1 = \{w \in \{a, b\}^* : |w|_a \geq 2 \wedge |w|_b \geq 2\}$$

**Решение:**

**Первый Автомат**

$$L_q = \{w \in \{a, b\}^* : |w|_a \geq 2\}$$

$$Q_q = \{q_1, q_2, q_3\}$$

$$T_q = \{q_3\}$$

$\delta_q$ :

	a	b
$q_1$	$q_2$	$q_1$
$q_2$	$q_3$	$q_2$
$q_3$	$q_3$	$q_3$

**Второй Автомат**

$$L_s = \{w \in \{a, b\}^* : |w|_b \geq 2\}$$

$$S_s = \{s_1, s_2, s_3\}$$

$$T_s = \{s_3\}$$

$\delta_s$ :

	a	b
$s_1$	$s_1$	$s_2$
$s_2$	$s_2$	$s_3$
$s_3$	$s_3$	$s_3$

**Прямое произведение**

$$L = \{w \in \{a, b\}^* : |w|_a \geq 2 \wedge |w|_b \geq 2\}$$

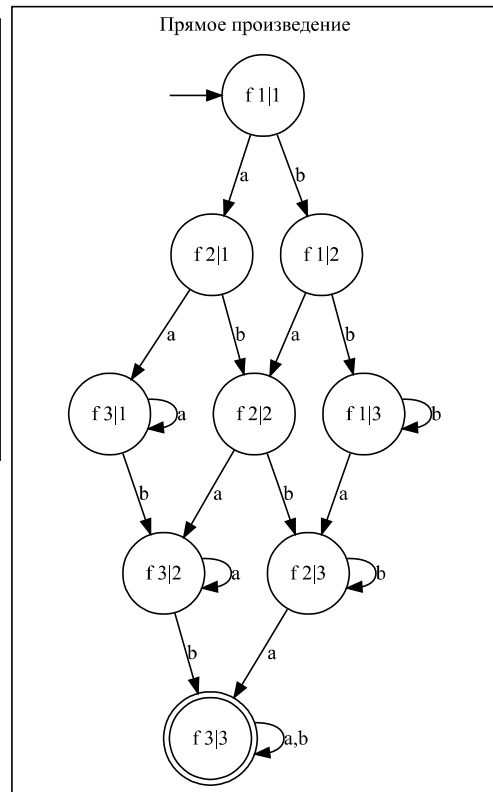
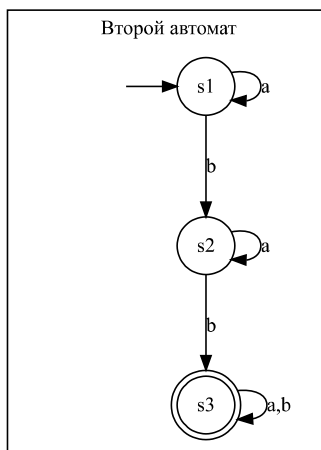
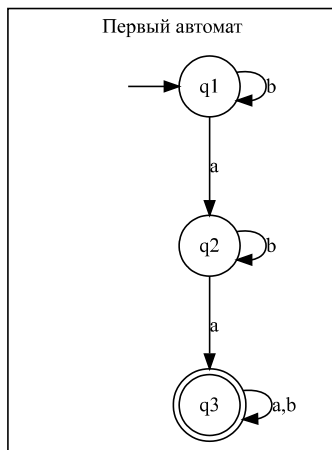
$$\text{Пусть } f_{i|j} = \{q_i, s_j\}$$

$$Q = \{f_{1|1}, f_{1|2}, f_{1|3}, f_{2|1}, f_{2|2}, f_{2|3}, f_{3|1}, f_{3|2}, f_{3|3}\}$$

$$T = \{f_{3|3}\}$$

$\delta$ :

	a	b
$f_{1 1}$	$f_{2 1}$	$f_{1 2}$
$f_{1 2}$	$f_{2 2}$	$f_{1 3}$
$f_{1 3}$	$f_{2 3}$	$f_{1 3}$
$f_{2 1}$	$f_{3 1}$	$f_{2 2}$
$f_{2 2}$	$f_{3 2}$	$f_{2 3}$
$f_{2 3}$	$f_{3 3}$	$f_{2 3}$
$f_{3 1}$	$f_{3 1}$	$f_{3 2}$
$f_{3 2}$	$f_{3 2}$	$f_{3 3}$
$f_{3 3}$	$f_{3 3}$	$f_{3 3}$



2.1

$$2. L_2 = \{w \in \{a, b, c\}^* : |w| \geq 3 \wedge |w| \text{ нечётное}\}$$

**Решение:**

**Первый Автомат**

$$L_q = \{w \in \{a, b\}^* : |w| \geq 3\}$$

$$Q_q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$$

$$T_q = \{q_4\}$$

$\delta_q$ :

	a	b
$q_1$	$q_2$	$q_2$
$q_2$	$q_3$	$q_3$
$q_3$	$q_4$	$q_4$
$q_4$	$q_4$	$q_4$

**Второй Автомат**

$L_s = \{w \in \{a,b\}^* : |w| \text{ нечётное}\}$

$S_s = \{s_1, s_2\}$

$T_s = \{s_2\}$

$\delta_s$ :

	a	b
$s_1$	$s_2$	$s_2$
$s_2$	$s_1$	$s_1$

**Прямое произведение**

$L = \{w \in \{a,b,c\}^* : |w| \geq 3 \wedge |w| \text{ нечётное}\}$

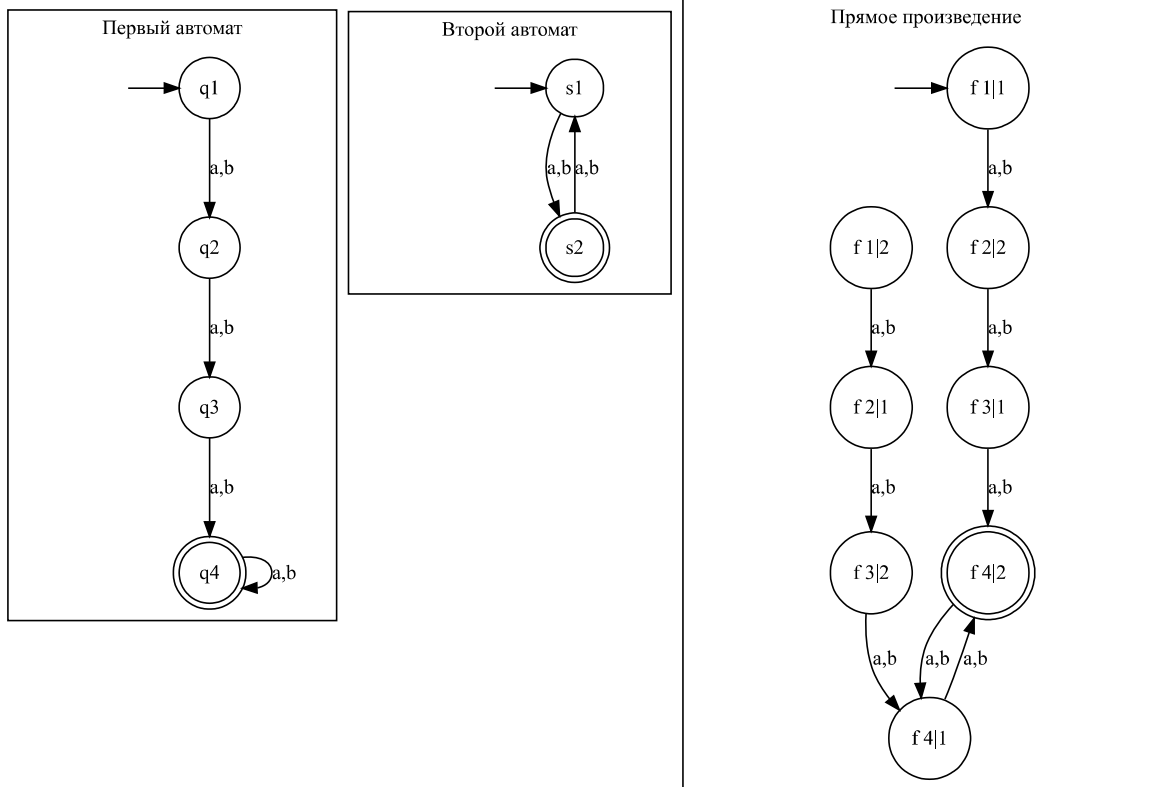
Пусть  $f_{i|j} = \{q_i, s_j\}$

$Q = \{f_{1|1}, f_{1|2}, f_{2|1}, f_{2|2}, f_{3|1}, f_{3|2}, f_{4|1}, f_{4|2}\}$

$T = \{f_{4|2}\}$

$\delta$ :

	a	b
$f_{1 1}$	$f_{2 2}$	$f_{2 2}$
$f_{1 2}$	$f_{2 1}$	$f_{2 1}$
$f_{2 1}$	$f_{3 2}$	$f_{3 2}$
$f_{2 2}$	$f_{3 1}$	$f_{3 1}$
$f_{3 1}$	$f_{4 2}$	$f_{4 2}$
$f_{3 2}$	$f_{4 1}$	$f_{4 1}$
$f_{4 1}$	$f_{4 2}$	$f_{4 2}$
$f_{4 2}$	$f_{4 1}$	$f_{4 1}$



2.2

3.  $L_3 = \{w \in \{a, b\}^* : |w|_a \text{ чётно} \wedge |w|_b \text{ кратно трём}\}$

**Решение:**

**Первый Автомат**

$L_q = \{w \in \{a, b\}^* : |w|_a \text{ чётно}\}$

$Q_q = \{q_1, q_2\}$

$T_q = \{q_1\}$

$\delta_q$ :

	a	b
$q_1$	$q_2$	$q_1$
$q_2$	$q_1$	$q_2$

**Второй Автомат**

$L_s = \{w \in \{a, b\}^* : |w|_b \text{ кратно трём}\}$

$S_s = \{s_1, s_2, s_3\}$

$T_s = \{s_1\}$

$\delta_s$ :

	a	b
$s_1$	$s_1$	$s_2$
$s_2$	$s_2$	$s_3$
$s_3$	$s_3$	$s_1$

### Прямое произведение

$$L = \{w \in \{a, b\}^* : |w|_a \text{ чётно} \wedge |w|_b \text{ кратно трём}\}$$

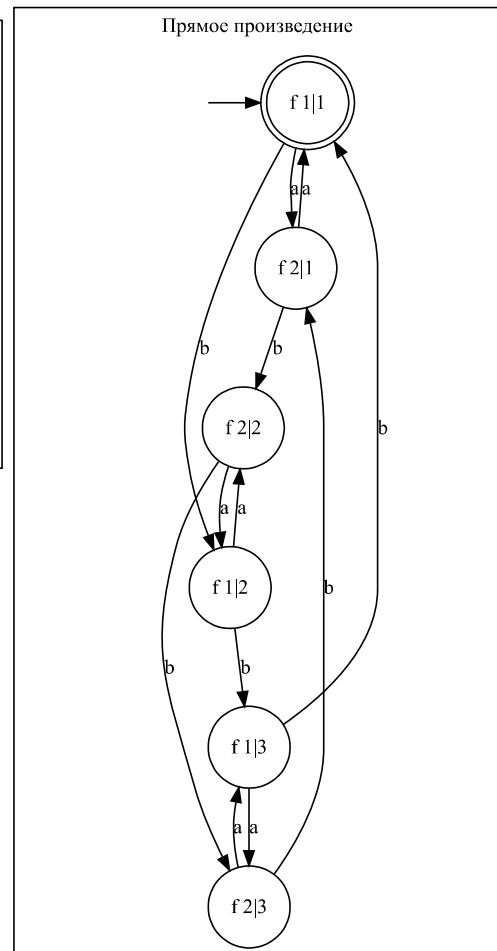
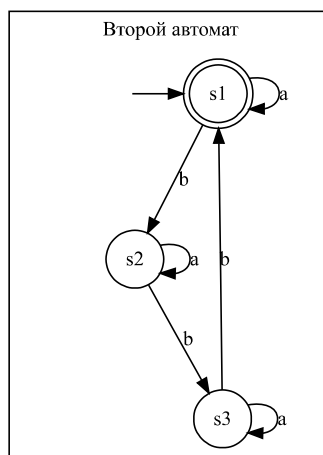
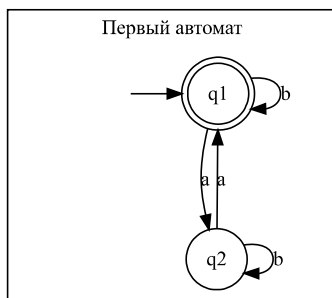
$$\text{Пусть } f_{i|j} = \{q_i, s_j\}$$

$$Q = \{f_{1|1}, f_{1|2}, f_{1|3}, f_{2|1}, f_{2|2}, f_{2|3}\}$$

$$T = \{f_{1|1}\}$$

$\delta$ :

	a	b
$f_{1 1}$	$f_{2 1}$	$f_{1 2}$
$f_{1 2}$	$f_{2 2}$	$f_{1 3}$
$f_{1 3}$	$f_{2 3}$	$f_{1 1}$
$f_{2 1}$	$f_{1 1}$	$f_{2 2}$
$f_{2 2}$	$f_{1 2}$	$f_{2 3}$
$f_{2 3}$	$f_{1 3}$	$f_{2 1}$



2.3

4.  $L_4 = \overline{L_3}$

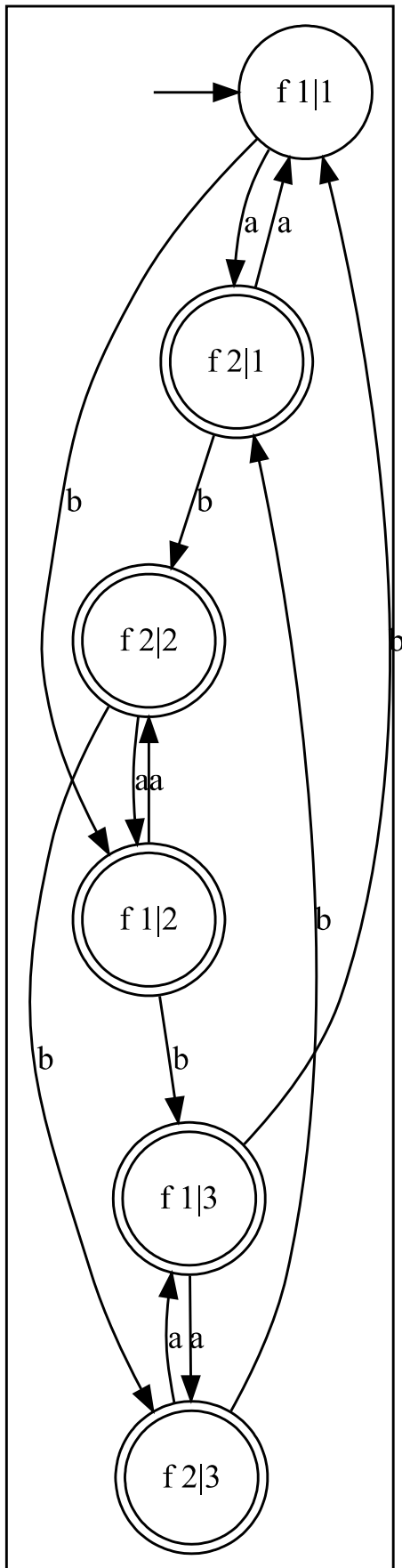
**Решение:**

Возьмём автомат  $L_3$ , построенный по произведению и по определению дополнения перестроим его:  $L_3 = \{\Sigma, Q, S, T, \delta\}$ , а  $\overline{L_3} = \{\Sigma, Q, S, T_1 = Q \setminus T, \delta\}$

$$Q = \{f_{1|1}, f_{1|2}, f_{1|3}, f_{2|1}, f_{2|2}, f_{2|3}\}$$

$$T = \{f_{1|1}\}$$

$$T_1 = \{f_{1|2}, f_{1|3}, f_{2|1}, f_{2|2}, f_{2|3}\}$$



$$5. L_4 = L_2 \setminus L_3$$

**Решение:**

По определению разности:  $L_4 = L_2 \cap \overline{L_3}$

**Первый Автомат**

$$L_q = \{w \in \{a, b, c\}^* : |w| \geq 3 \wedge |w| \text{ нечётное}\}$$

$$Q_q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8\}$$

$$T_q = \{q_8\}$$

$\delta_q$ :

	a	b
$q_1$	$q_4$	$q_4$
$q_2$	$q_3$	$q_3$
$q_3$	$q_6$	$q_6$
$q_4$	$q_5$	$q_5$
$q_5$	$q_8$	$q_8$
$q_6$	$q_7$	$q_7$
$q_7$	$q_8$	$q_8$
$q_8$	$q_7$	$q_7$

**Второй Автомат**

$$L_s = \overline{L_3}$$

$$L_3 = \{w \in \{a, b\}^* : |w|_a \text{ чётно} \wedge |w|_b \text{ кратно трём}\}$$

$$Q_s = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$$

$$T_s = \{s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$$

$\delta_s$ :

	a	b
$s_1$	$s_4$	$s_2$
$s_2$	$s_5$	$s_3$
$s_3$	$s_6$	$s_1$
$s_4$	$s_1$	$s_5$
$s_5$	$s_2$	$s_6$
$s_6$	$s_3$	$s_4$

**Прямое произведение**

$$L = L_2 \cap \overline{L_3}$$

Пусть  $f_{i|j} = \{q_i, s_j\}$

$$Q = \{f_{1|1}, f_{1|2}, f_{1|3}, f_{1|4}, f_{1|5}, f_{1|6}, f_{2|1}, f_{2|2}, f_{2|3}, f_{2|4}, f_{2|5}, f_{2|6}, f_{3|1}, f_{3|2}, f_{3|3}, f_{3|4}, f_{3|5}, f_{3|6}, f_{4|1}, f_{4|2}, f_{4|3}, f_{4|4}, f_{4|5}, f_{4|6}, f_{5|1}, f_{5|2}, f_{5|3}, f_{5|4}, f_{5|5}, f_{5|6}, f_{6|1}, f_{6|2}, f_{6|3}, f_{6|4}, f_{6|5}, f_{6|6}, f_{7|1}, f_{7|2}, f_{7|3}, f_{7|4}, f_{7|5}, f_{7|6}, f_{8|1}, f_{8|2}, f_{8|3}, f_{8|4}, f_{8|5}, f_{8|6}\}$$

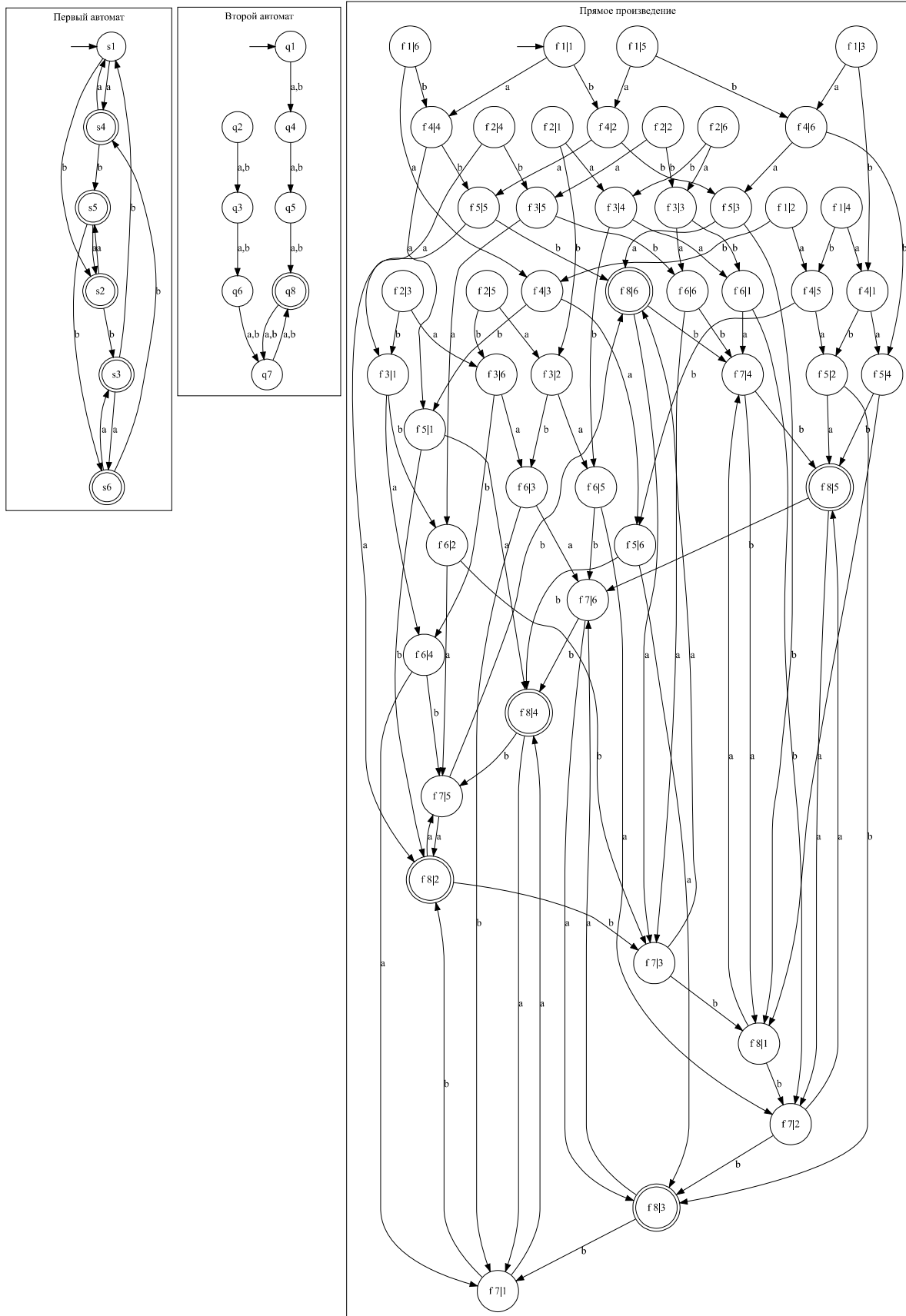


$$T = \{f_{8|2}, f_{8|3}, f_{8|4}, f_{8|5}, f_{8|6}\}$$

$\delta$ :

	<b>a</b>	<b>b</b>
$f_{1  1}$	$f_{4  4}$	$f_{4  2}$
$f_{1  2}$	$f_{4  5}$	$f_{4  3}$
$f_{1  3}$	$f_{4  6}$	$f_{4  1}$
$f_{1  4}$	$f_{4  1}$	$f_{4  5}$
$f_{1  5}$	$f_{4  2}$	$f_{4  6}$
$f_{1  6}$	$f_{4  3}$	$f_{4  4}$
$f_{2  1}$	$f_{3  4}$	$f_{3  2}$
$f_{2  2}$	$f_{3  5}$	$f_{3  3}$
$f_{2  3}$	$f_{3  6}$	$f_{3  1}$
$f_{2  4}$	$f_{3  1}$	$f_{3  5}$
$f_{2  5}$	$f_{3  2}$	$f_{3  6}$
$f_{2  6}$	$f_{3  3}$	$f_{3  4}$
$f_{3  1}$	$f_{6  4}$	$f_{6  2}$
$f_{3  2}$	$f_{6  5}$	$f_{6  3}$
$f_{3  3}$	$f_{6  6}$	$f_{6  1}$
$f_{3  4}$	$f_{6  1}$	$f_{6  5}$
$f_{3  5}$	$f_{6  2}$	$f_{6  6}$
$f_{3  6}$	$f_{6  3}$	$f_{6  4}$
$f_{4  1}$	$f_{5  4}$	$f_{5  2}$
$f_{4  2}$	$f_{5  5}$	$f_{5  3}$
$f_{4  3}$	$f_{5  6}$	$f_{5  1}$
$f_{4  4}$	$f_{5  1}$	$f_{5  5}$
$f_{4  5}$	$f_{5  2}$	$f_{5  6}$
$f_{4  6}$	$f_{5  3}$	$f_{5  4}$
$f_{5  1}$	$f_{8  4}$	$f_{8  2}$
$f_{5  2}$	$f_{8  5}$	$f_{8  3}$
$f_{5  3}$	$f_{8  6}$	$f_{8  1}$
$f_{5  4}$	$f_{8  1}$	$f_{8  5}$

	<b>a</b>	<b>b</b>
$f_{5  5}$	$f_{8  2}$	$f_{8  6}$
$f_{5  6}$	$f_{8  3}$	$f_{8  4}$
$f_{6  1}$	$f_{7  4}$	$f_{7  2}$
$f_{6  2}$	$f_{7  5}$	$f_{7  3}$
$f_{6  3}$	$f_{7  6}$	$f_{7  1}$
$f_{6  4}$	$f_{7  1}$	$f_{7  5}$
$f_{6  5}$	$f_{7  2}$	$f_{7  6}$
$f_{6  6}$	$f_{7  3}$	$f_{7  4}$
$f_{7  1}$	$f_{8  4}$	$f_{8  2}$
$f_{7  2}$	$f_{8  5}$	$f_{8  3}$
$f_{7  3}$	$f_{8  6}$	$f_{8  1}$
$f_{7  4}$	$f_{8  1}$	$f_{8  5}$
$f_{7  5}$	$f_{8  2}$	$f_{8  6}$
$f_{7  6}$	$f_{8  3}$	$f_{8  4}$
$f_{8  1}$	$f_{7  4}$	$f_{7  2}$
$f_{8  2}$	$f_{7  5}$	$f_{7  3}$
$f_{8  3}$	$f_{7  6}$	$f_{7  1}$
$f_{8  4}$	$f_{7  1}$	$f_{7  5}$
$f_{8  5}$	$f_{7  2}$	$f_{7  6}$
$f_{8  6}$	$f_{7  3}$	$f_{7  4}$

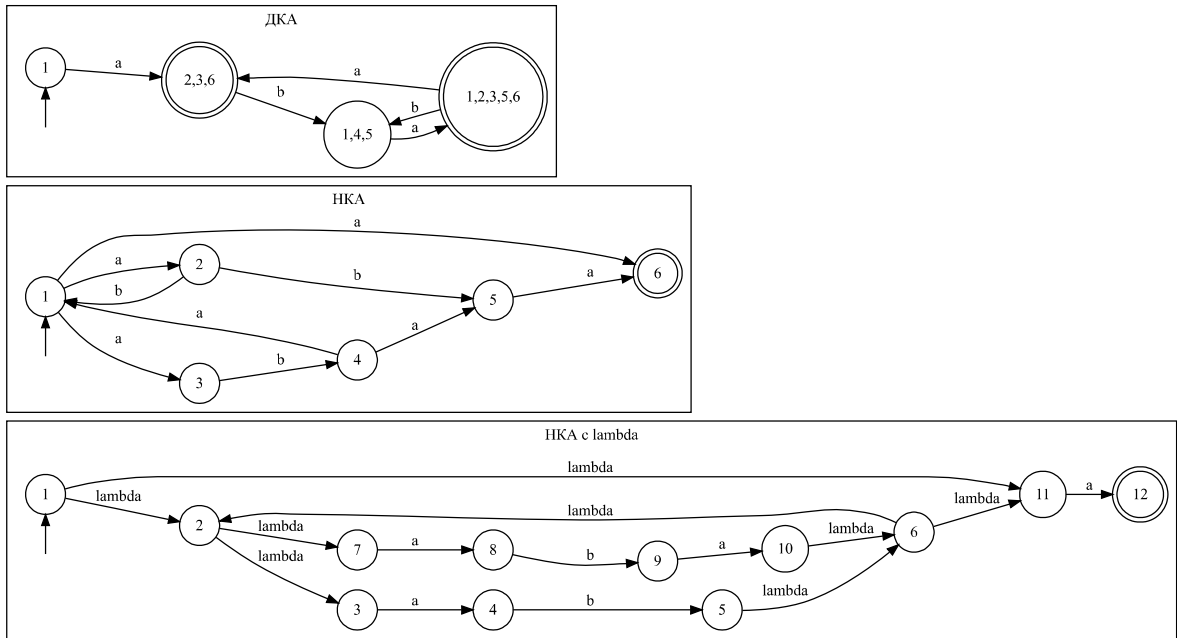


## Задание 3

1.  $(ab + aba)^*a$

**Решение:**

Построим НКА с  $\lambda$  по регулярному выражению, удалим  $\lambda$ , получив НКА, детерминируем его. Получили ДКА, уже является минимальным.

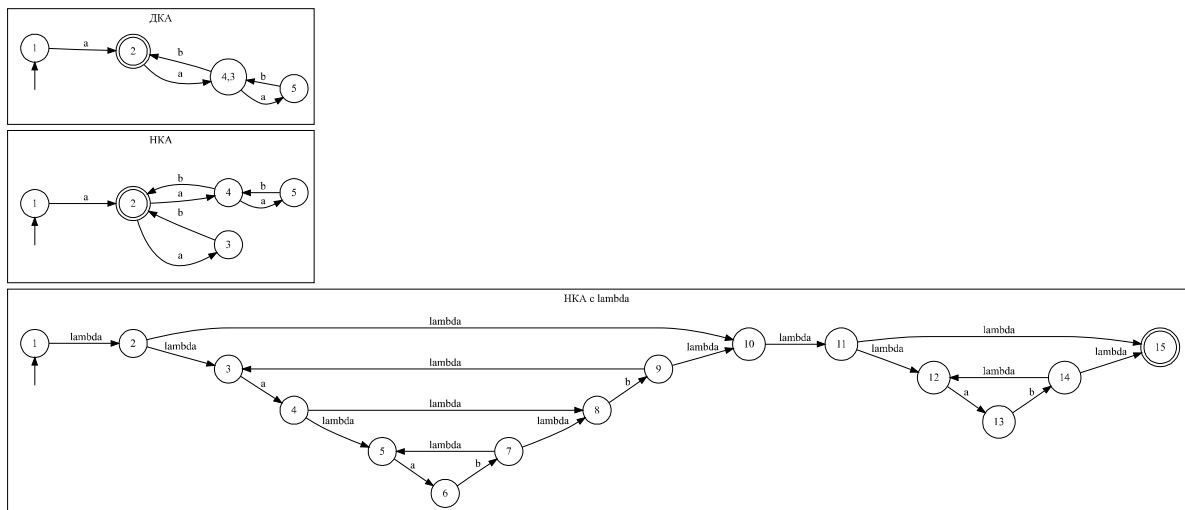


3.1

2.  $a(a(ab)^*b)^*(ab)^*$

**Решение:**

Построим НКА с  $\lambda$  по регулярному выражению, удалим  $\lambda$ , получив НКА, детерминируем его. Получили ДКА, уже является минимальным.

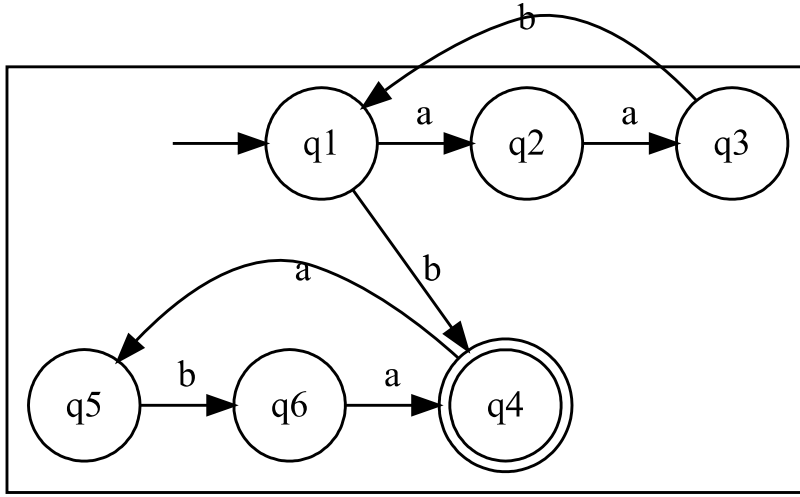


3.1

## Задание 4

1.  $L = \{(aab)^n b(aba)^m : n \geq 0, m \geq 0\}$

Регулярный. Автомат:



4.1

2.  $L = \{uaav : u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, |u|_b \geq |v|_a\}$

**Решение:**

$\overline{L} = \{uaav : u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, |u|_b < |v|_a\}$

Фиксируем  $\forall n \in \mathbb{N}, w = b^n a a a^{n+1}$

$x = b^i$

$y = b^j$

$z = b^{n-i-j} a a b^{n+1}$

$i \geq 0, j > 0, i + j \leq n$

$\forall n \in \mathbb{N} \exists w \in \overline{L} : |w| \geq n, \forall xyz : x, y, z \in \Sigma^*, w = xyz, y \neq \lambda, |xy| \leq n \exists k = 2 :$

$xy^k z \notin \overline{L}$

Таким образом, по лемме о разрастании  $\overline{L}$  не является регулярным (а следовательно и  $L$ ).

3.  $L = \{a^m w : w \in \{a, b\}^*, 1 \leq |w|_b \leq m\}$

**Решение:**

Фиксируем  $\forall n \in \mathbb{N}, w = a^n b^n$

$x = a^i$

$y = a^j$

$z = a^{n-i-j} b^n$

$i \geq 0, j > 0, i + j \leq n$

$\forall n \in \mathbb{N} \exists w \in L : |w| \geq n, \forall xyz : x, y, z \in \Sigma^*, w = xyz, y \neq \lambda, |xy| \leq n \exists k = 0 :$

$xy^k z \notin L$

Таким образом, по лемме о разрастании  $L$  не является регулярным.

4.  $L = \{a^k b^m a^n : k = n \vee m > 0\}$

**Решение:**

Фиксируем  $\forall n \in \mathbb{N}, w = a^n b a^n$

$x = a^i$

$y = a^j$

$z = a^{n-i-j} b a^n$

$i \geq 0, j > 0, i + j \leq n$

$\forall n \in \mathbb{N} \exists w \in L : |w| \geq n, \forall xyz : x, y, z \in \Sigma^*, w = xyz, y \neq \lambda, |xy| \leq n \exists k = 2 : xy^kz \notin L$

Таким образом, по лемме о разрастании  $L$  не является регулярным.

5.  $L = \{ucv : u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, u \neq v^R\}$

**Решение:**

$\overline{L} = \{ucv : u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, u = v^R\}$

Фиксируем  $\forall n \in \mathbb{N}, w = a^n c a^n$

$x = a^i$

$y = a^j$

$z = a^{n-i-j} c a^n$

$i \geq 0, j > 0, i + j \leq n$

$\forall n \in \mathbb{N} \exists w \in \overline{L} : |w| \geq n, \forall xyz : x, y, z \in \Sigma^*, w = xyz, y \neq \lambda, |xy| \leq n \exists k = 2 : xy^kz \notin \overline{L}$

Таким образом, по лемме о разрастании  $\overline{L}$  не является регулярным (а следовательно и  $L$ ).

## Задание 5

2. Прямое произведение языков, с возможностью построить пересечение, объединение и разность

**Решение:**

Программа на **C++** с использованием **Graphviz**, лежит в `./5/regular_langs/` (проект для **Visual Studio**)

Скомпилированная программа лежит в папке `./5/regular_langs/compiled_program/`.

`program.exe` - консольное приложение, при запуске 1,2 аргументы - пути к файлам с входными языками в виде дка, 3 - имя выходного файла (markdown), 4,5 - необязательные, задают разность (-d) и объединение (-i)

Результат работы программы - файл с изображениями автоматов на markdown, сами изображения - в папке `output_data`.

`start.bat` - пакетный файл, запускающий программу с аргументами `1.txt 2.txt out.md -d -i` (для примера работы программы)

### Формат входных файлов

На 1 строке - символы алфавита

Далее, до пустой строки - имя вершины, по которой идёт переход по  $i$ му символу алфавита или пусто, если нет перехода). Обозначим через  $\delta(q_i, \Sigma_i)$

$q_0 \mid \delta(q_0, \Sigma_1) \mid \delta(q_0, \Sigma_2) \dots$

...

$q_n \mid \delta(q_n, \Sigma_1) \mid \delta(q_n, \Sigma_2) \dots$

Далее - терминальные вершины, по 1 в строке, до пустой строки

$q_{t_1}$

..

$q_{t_k}$

Последняя строка - начальная вершина

$q_s$