Выполнил студент группы А-13а-19
Легкий Евгений Андреевич
8 апреля 2022 г.

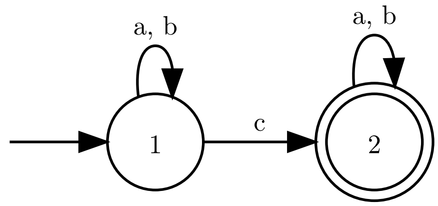
Домашняя работа №1

по Теоретическим моделям вычислений

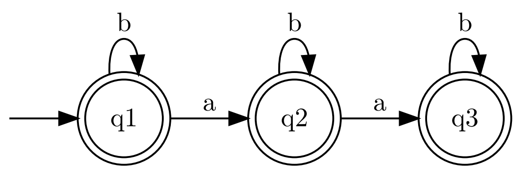
Задание 1

Построить конечные автоматы

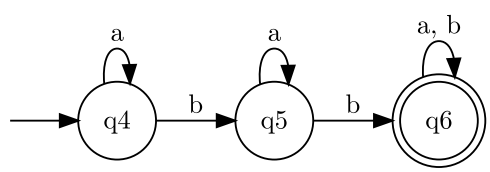
1. $L_1 = \{\omega \in \{a, b, c\}^* : |\omega|_c = 1\}$



2. $L_2 = \{\omega \in \{a, b\}^* : |\omega|_a \leqslant 2, |\omega|_b \geqslant 2\}$
Рассмотрим автоматы $A = \{\omega \in \{a, b\}^* : |\omega|_a \leqslant 2\}$ и $B = \{\omega \in \{a, b\}^* : |\omega|_B \geqslant 2\}$



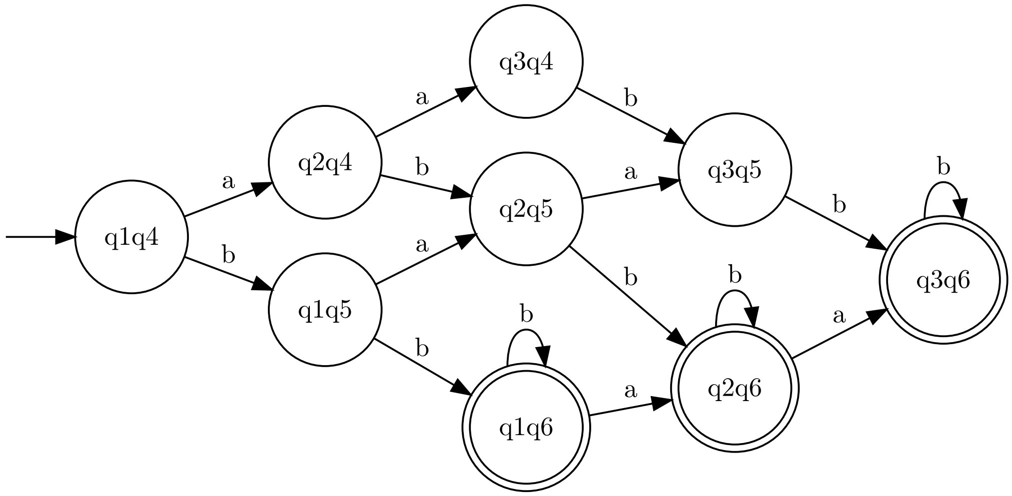
и $B = \{\omega \in \{a, b\}^* : |\omega|_B \geqslant 2\}$



Так как $L_2 = A \cup B = A \times B$

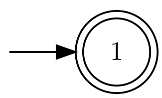
	a	b
(q_1, q_4)	(q_2, q_4)	(q_1, q_5)
(q_1, q_5)	(q_2, q_5)	(q_1, q_6)
(q_1, q_6)	(q_2, q_6)	(q_1, q_6)
(q_2, q_4)	(q_3, q_4)	(q_2, q_5)
(q_2, q_5)	(q_3, q_5)	(q_2, q_6)
(q_2, q_6)	(q_3, q_6)	(q_2, q_6)
(q_3, q_4)	$(\emptyset)$	(q_3, q_5)
(q_3, q_5)	$(\emptyset)$	(q_3, q_6)
(q_3, q_6)	$(\emptyset)$	(q_3, q_6)

И окончательный ответ



3. $L_3 = \{\omega \in \{a, b\}^* : |\omega|_a \neq |\omega|_b\}$
   Для описания языка необходо запоминать количество символов одного типа, что нельзя сделать с помощью ДКА

4. $L_4 = \{\omega \in \{a, b\}^* : \omega\omega = \omega\omega\omega\}$
   Язык описывает только пустые слова

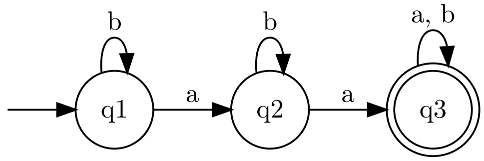


Задание 2

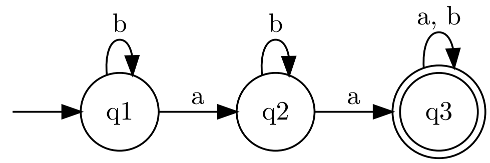
Построить конечные автоматы, распознающие слудеющие языки, используя прямое произведение:

1. $L_1 = \{\omega \in \{a, b\}^* : |\omega|_a \geqslant 2 \wedge |\omega|_b \geqslant 2\}$

   Рассмотрим автоматы $A = \{\omega \in \{a, b\}^* : |\omega|_a \geqslant 2\}$



и $B = \{\omega \in \{a,b\}^* : |\omega|_B \geqslant 2\}$

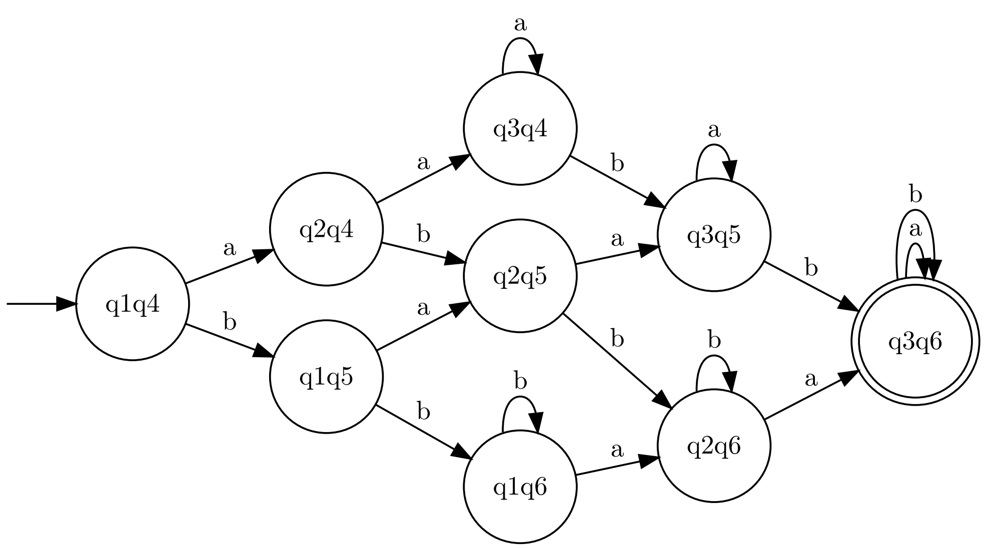


$L_1 = A \cup B = A \times B$

Построим таблицу переходов

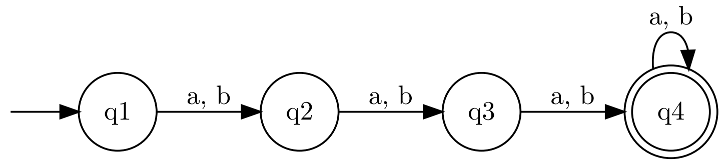
	a	b
(q_1, q_4)	(q_2, q_4)	(q_1, q_5)
(q_1, q_5)	(q_2, q_5)	(q_1, q_6)
(q_1, q_6)	(q_2, q_6)	(q_1, q_6)
(q_2, q_4)	(q_3, q_4)	(q_2, q_5)
(q_2, q_5)	(q_3, q_5)	(q_2, q_6)
(q_2, q_6)	(q_3, q_6)	(q_2, q_6)
(q_3, q_4)	(q_3, q_4)	(q_3, q_5)
(q_3, q_5)	(q_3, q_5)	(q_3, q_6)
(q_3, q_6)	(q_3, q_6)	(q_3, q_6)

Финальный результат

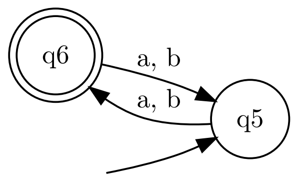


2. $L_2 = \{\omega \in \{a,b\}^* : |\omega| \geqslant 3 \wedge |\omega| \text{ нечётное}\}$

Рассмотрим автоматы $A = \{\omega \in \{a, b\}^* : |\omega| \geqslant 3\}$

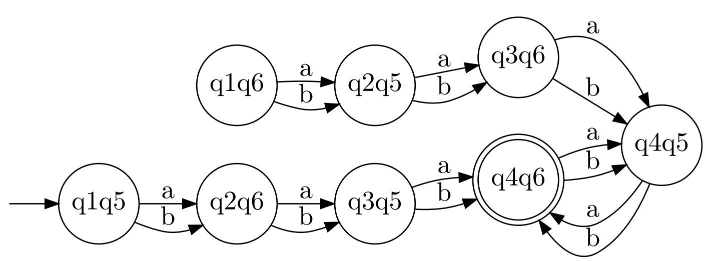


и $B = \{\omega \in \{a, b\}^* : |\omega|$ нечётное$\}$

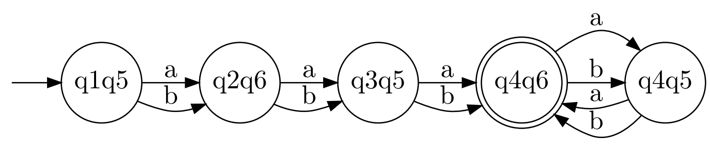


$L_2 = A \cup B = A \times B$
Построим таблицу переходов

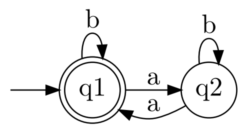
	a	b
(q_1, q_5)	(q_2, q_6)	(q_2, q_6)
(q_1, q_6)	(q_2, q_5)	(q_1, q_5)
(q_2, q_5)	(q_3, q_6)	(q_3, q_6)
(q_2, q_6)	(q_3, q_5)	(q_3, q_5)
(q_3, q_5)	(q_4, q_6)	(q_4, q_6)
(q_3, q_6)	(q_4, q_5)	(q_4, q_5)
(q_4, q_5)	(q_4, q_6)	(q_4, q_6)
(q_4, q_6)	(q_4, q_5)	(q_4, q_5)



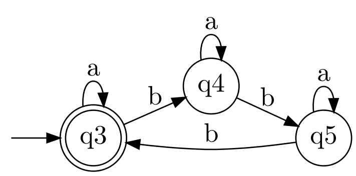
Так как узлы (q_1, q_6), (q_2, q_5) и (q_3, q_6) недостижимы, то их можно убрать



3. $L_3 = \{\omega \in \{a, b\}^* : |\omega|_a$ чётно $\wedge\ |\omega|_b$ кратно $3\}$
Рассмотрим автоматы $A = \{\omega \in \{a, b\}^* : |\omega|_a$ чётно$\}$



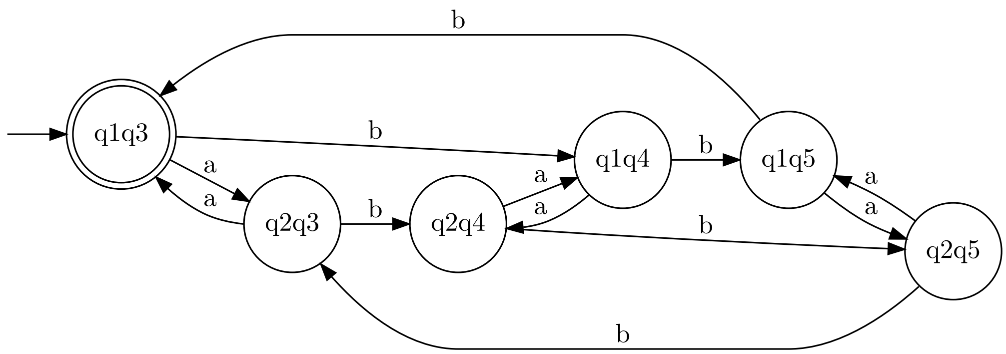
и $B = \{\omega \in \{a, b\}^* : |\omega|_B$ кратно $3\}$



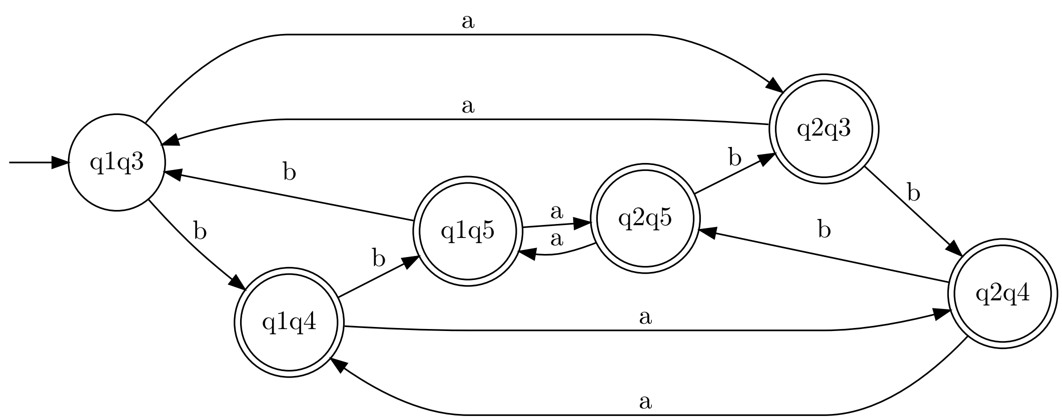
$L_3 = A \cup B = A \times B$

	a	b
(q_1, q_3)	(q_2, q_3)	(q_1, q_4)
(q_1, q_4)	$(\emptyset)$	(q_1, q_5)
(q_1, q_5)	$(\emptyset)$	(q_1, q_6)
(q_1, q_6)	(q_2, q_3)	$(\emptyset)$
(q_2, q_3)	(q_1, q_3)	(q_2, q_4)
(q_2, q_4)	$(\emptyset)$	(q_2, q_5)
(q_2, q_5)	$(\emptyset)$	(q_2, q_6)
(q_2, q_6)	(q_1, q_3)	$(\emptyset)$

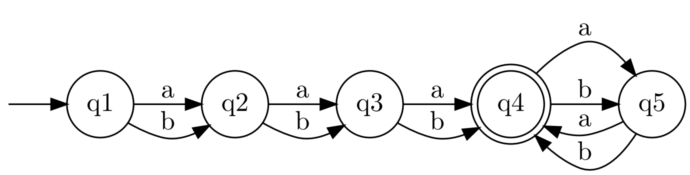
Финальный результат

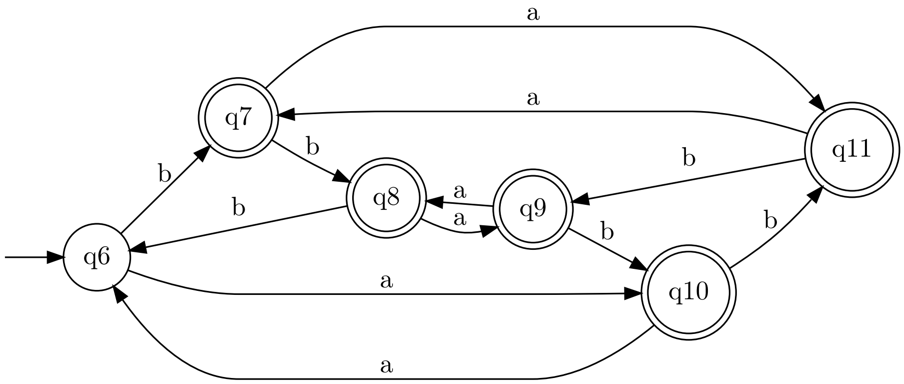


4. $L_4 = \neg L_3$
   Так как $T_4 = Q_3 \setminus T_3$
   $T_4 = (q_1, q_3), (q_1, q_4), (q_2, q_3), (q_1, q_5), (q_2, q_4), (q_2, q_5)$

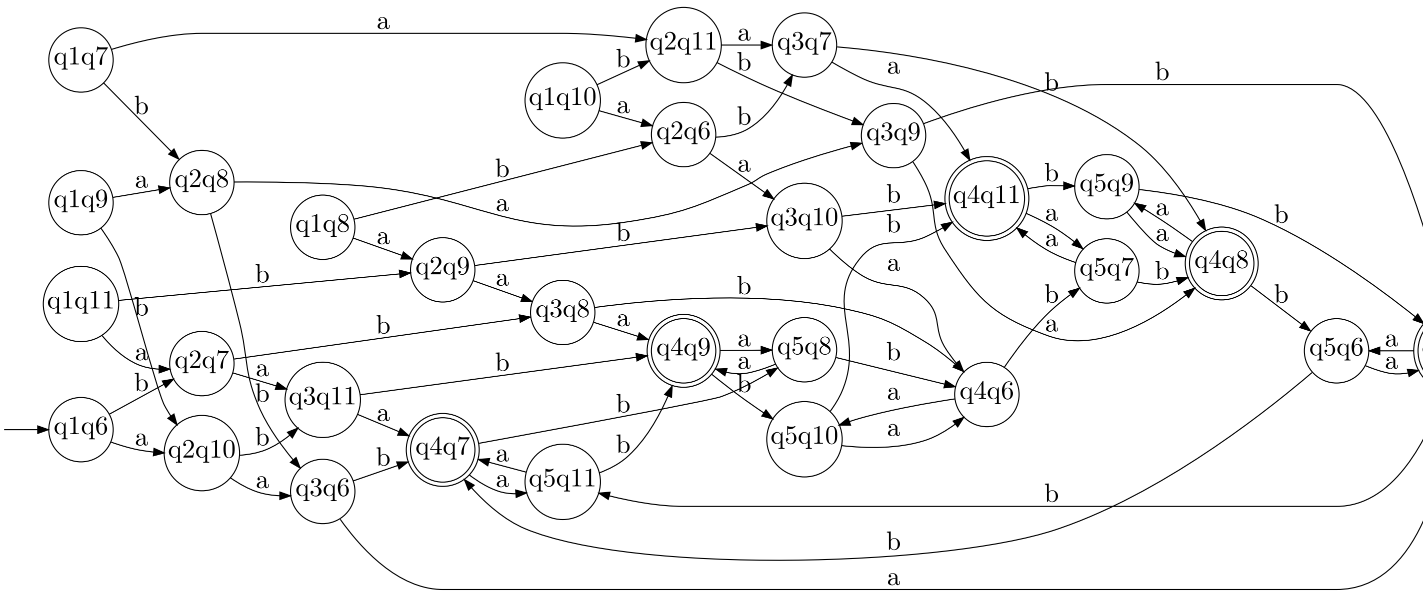


5. $L_5 = L_2 \setminus L_3$
   $L_5 = L_2 \cup \neg L_3 = L_2 \times \neg L_3 = L_2 \times \neg L_3 = L_2 \times L_4$





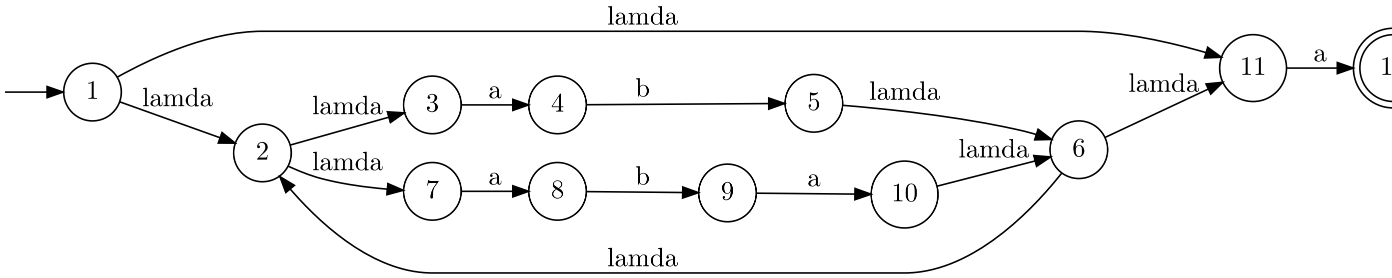
Финальный результат



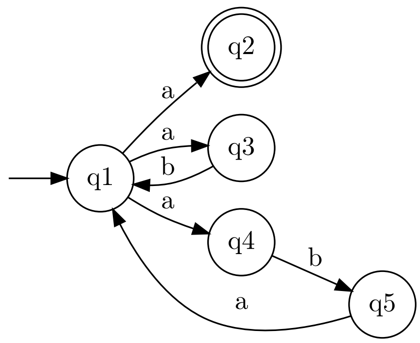
Задание 3

Построить минимальные ДКА по регулярным выражениям:

1. $(ab + aba)^*a$
   Строим НКА по регулярному выражению



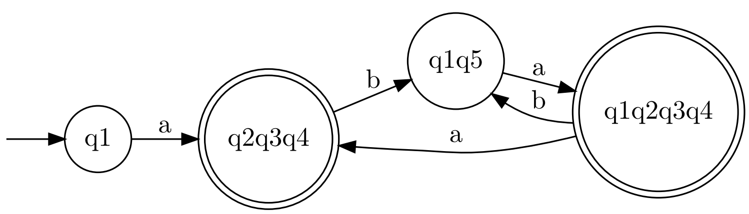
Преобразуем в ДКА



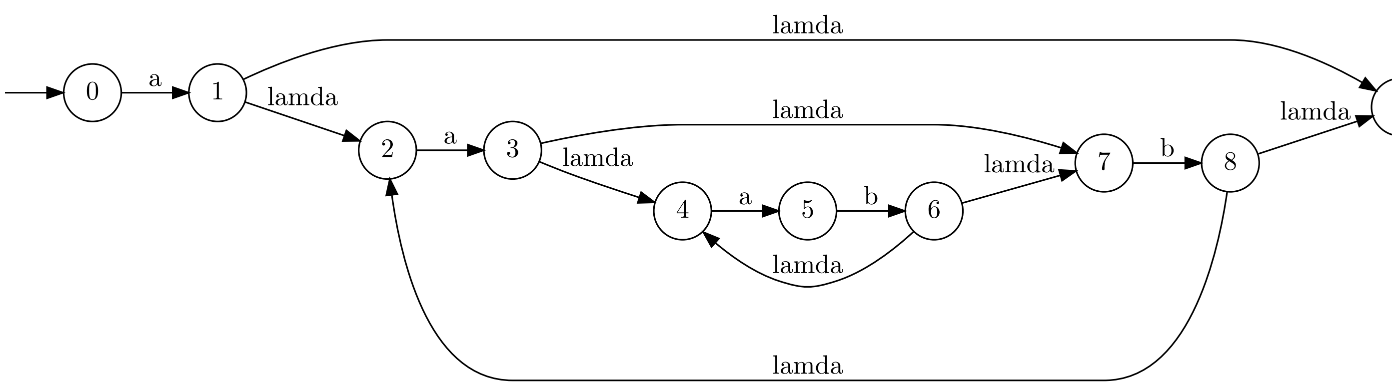
Построим минимальный ДКА по алгоритму Томсона

Q	a	b
q1	q2q3q4	-
q2q3q4	-	q1q5
q1q5	q1q2q3q4	-
q1q2q3q4	q2q3q4	q1q5

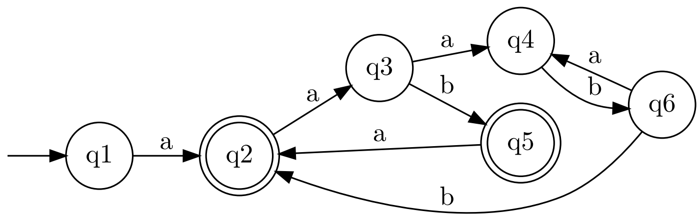
Ответ



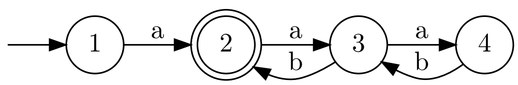
2. $a(a(ab)^*b)^*(ab)^*$
   Строим НКА по регулярному выражению



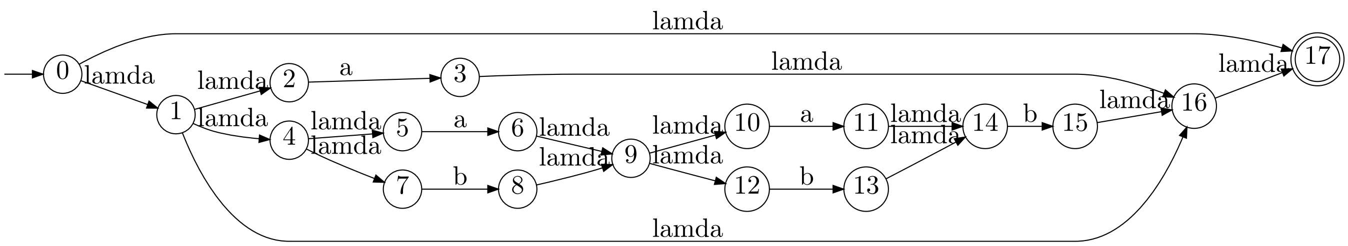
Преобразуем в ДКА



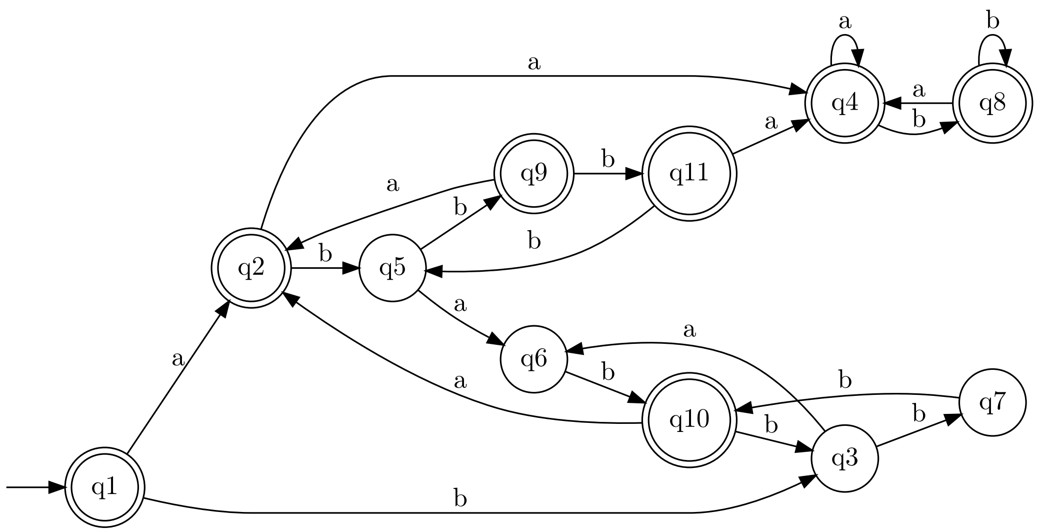
А теперь минимализируем



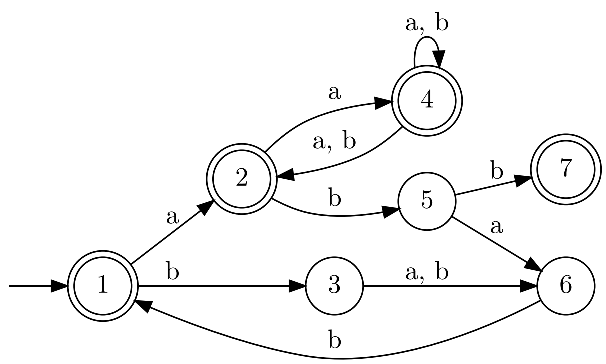
3. $(a + (a + b)(a + b)b)^*$
Строим НКА по регулярному выражению



Преобразуем в ДКА

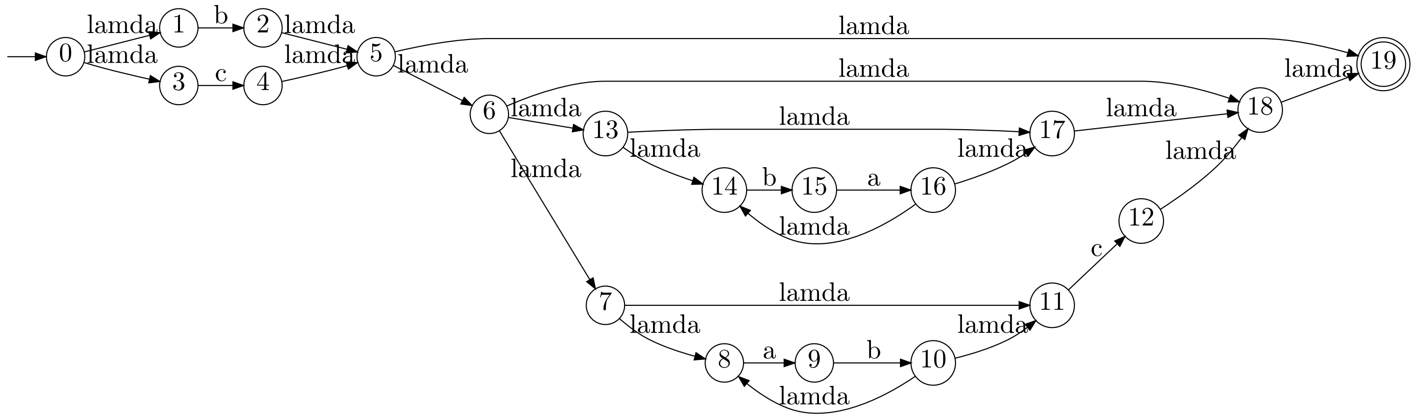


А теперь минимализируем

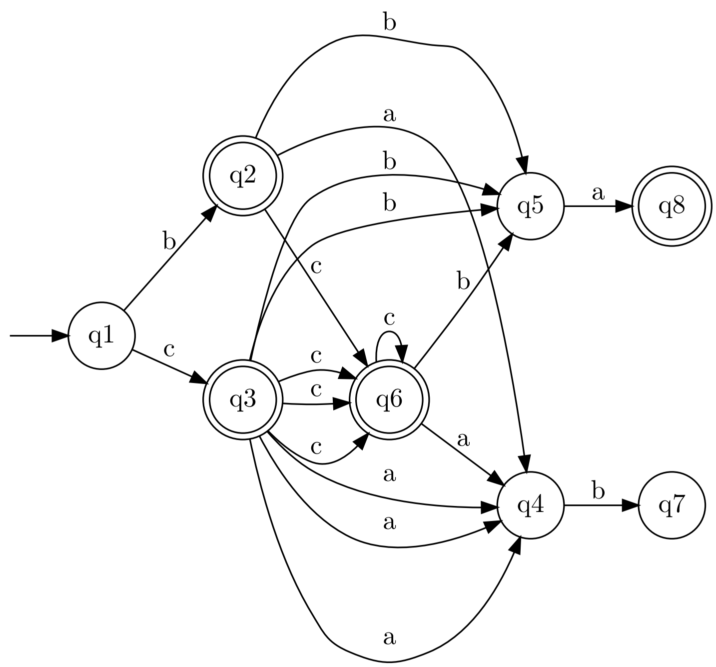


4. $(b+c)((ab)^*c+(ba)^*)^*$

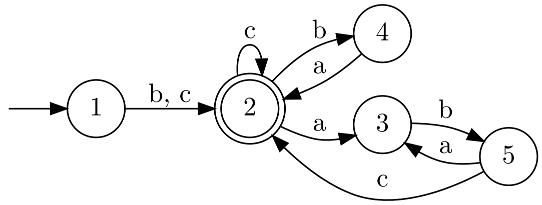
Строим НКА по регулярному выражению



Преобразуем в ДКА



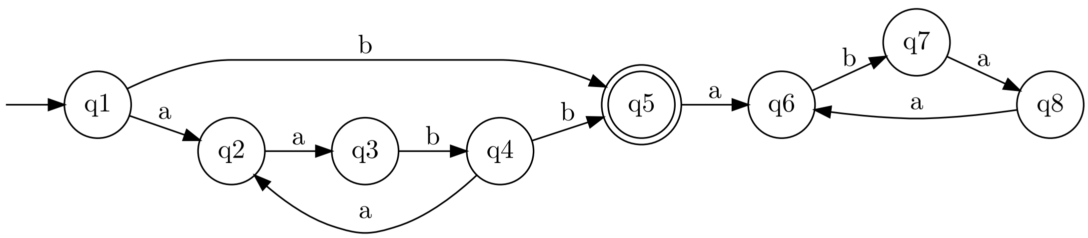
А теперь минимализируем



Задание 4

Определить является ли язык регулярным или нет:

1. $L_1 = \{(aab)^n b(aba)^m \mid n \geq 0, m \geq 0\}$



Он регулярный, так как можно построить ДКА //

2. $L = \{uaav : u \in \{a,b\}^*,\ v \in \{a,b\}^*, |u|_b \geqslant |v|_a\}$
Применим лемму о разрастании. Зафиксируем $\forall n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим слово $\omega = b^n aaa^n,\ |\omega| = 2n+2 \geq n$. Теперь рассмотрим все разбиения этого слова $\omega = xyz$ такие, что $|y| \neq 0,\ |xy| \leq n$:

$$x = b^k,\ y = b^l,\ z = b^{n-k-l}aaa^n,$$

$$\text{где } 1 \leq k + l \leq n\ \wedge\ l > 0$$

Дргуих разбиенний, удовлетворяющих данным условиям, нет. Для любого из таких разбиений слово $xy^0z \notin L$. Лемма не выполняется, значит, L не регулярный язык.

3. $L = \{a^m w : w \in \{a,b\}^*,\ 1 \geqslant |w|_b \geqslant m\}$
Применим лемму о разрастании. Зафиксируем $\forall n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим слово $\omega = a^n b^n,\ |\omega| = 2n \geqslant n$. Теперь рассмотрим все разбиения этого слова $\omega = xyz$ такие, что $|y| \neq 0,\ |xy| \leq n$:

$$x = a^l,\ y = a^m,\ z = a^{n-l-m}b^n,$$

$$\text{где } l + k \leqslant n\ \wedge\ m \neq 0$$

Дргуих разбиенний, удовлетворяющих данным условиям, нет. Теперь выполним накачку:

$$xy^iz = a^l(a^m)^i a^{n-l-m}b^n = a^{n-mi}b^n \notin L,\ i \geqslant 0 \in \mathbb{N}$$

Лемма не выполняется, значит, L не регулярный язык.

4. $L = \{a^k b^m a^n : k = n \vee m > 0\}$
Применим лемму о разрастании. Зафиксируем $\forall n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим слово $\omega = a^n b a^n,\ |\omega| = 2n+1 \geqslant n$. Теперь рассмотрим все разбиения этого слова $\omega = xyz$ такие, что $|y| \neq 0,\ |xy| \leq n$:

$$x = a^k,\ y = a^m,\ z = a^{n-k-m} b a^n,$$

$$\text{где } k+m \leqslant n\ \wedge\ m \neq 0$$

Другуих разбиенний, удовлетворяющих данным условиям, нет. Теперь выполним накачку:

$$xy^i z = a^k (a^m)^i a^{n-k-m} b a^n = a^{n+m(i-1)} b a^n \notin L,\ i \geqslant 2 \in \mathbb{N}$$

Получили противоречие, лемма не выполняется, значит, L не регулярный язык.

5. $L = \{ucv : u \in \{a,b\}^*,\ v \in \{a,b\}^*, u \neq v^R\}$
Применим лемму о разрастании. Зафиксируем $\forall n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим слово $\omega = (ab)^n c (ab)^n = \alpha_1\alpha_2...\alpha_{4n+1},\ |\omega| = 4n+1 \geqslant n$. Теперь рассмотрим все разбиения этого слова $\omega = xyz$ такие, что $|y| \neq 0,\ |xy| \leq n$:

$$x = \alpha_1\alpha_2...\alpha_k,\ y = \alpha_{k+1}...\alpha_{k+m},\ z = \alpha_{k+m+1}...\alpha_{4n+1} c (ab)^n,$$

$$\text{где } k+m \leqslant n\ \wedge\ m \neq 0$$

Дргуих разбиенний, удовлетворяющих данным условиям, нет. Теперь выполним накачку:

$$xy^i z = (\alpha_1\alpha_2...\alpha_k)(\alpha_{k+1}...\alpha_{k+m})^i(\alpha_{k+m+1}...\alpha_{4n+1} c (ab)^n)$$

При $i = 2$ имеем:

$$xy^2 z = (\alpha_1\alpha_2...\alpha_k)(\alpha_{k+1}...\alpha_{k+m})^2(\alpha_{k+m+1}...\alpha_{4n+1} c (ab)^n) \notin L$$

Лемма не выполняется, значит, L не регулярный язык.