

# Домашняя работа по дисциплине Теоретические модели вычислений №1

Чуворкин Михаил А-13а-19

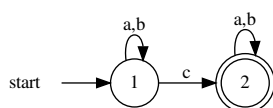
7 апреля 2022 г.

## 1 Задание №1. Построить конечный автомат, распознающий язык.

### 1.1 Язык 1.

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_c = 1\}$$

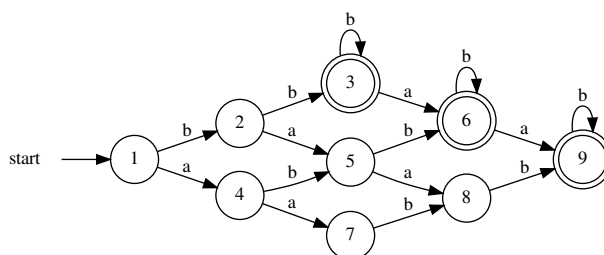
Данный язык включает все слова из букв  $\{a, b, c\}$ , но содержащие только одну букву  $c$ .



### 1.2 Язык 2.

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \leq 2, |w|_b \geq 2\}$$

Представим, что есть решетка. При поглощении  $a$  происходит перемещение вниз по решетке, а при поглощении  $b$  переход вправо по решетке.



### 1.3 Язык 3.

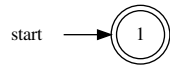
$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \neq |w|_b\}$$

Нельзя построить автомат, так как для распознавания этого языка требуется запоминать количество символов.

### 1.4 Язык 4.

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid ww = www\}$$

В данном случае язык будет состоять только из пустого символа, так как условия справедливы только для  $w = \varepsilon$



## 2 Задание №2. Построить конечный автомат, используя прямое произведение.

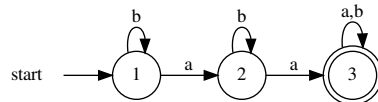
### 2.1 Язык 1.

$$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \geq 2 \wedge |w|_b \geq 2\}$$

Рассмотрим языки, описывающие части условия языка  $L$ :

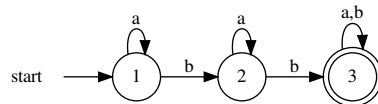
$$A_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \geq 2\}$$

$$\Sigma_A = \{a, b\} \quad Q_A = \{1, 2, 3\} \quad s_A = \{1\} \quad T_A = \{3\}$$



$$B_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_b \geq 2\}$$

$$\Sigma_B = \{a, b\} \quad Q_B = \{1, 2, 3\} \quad s_B = \{1\} \quad T_B = \{3\}$$



Тогда:  $L_1 = A_1 \times B_1$

$$\Sigma = \Sigma_A \cup \Sigma_B = \{a, b\}$$

$$Q = Q_A \times Q_B = \{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\}$$

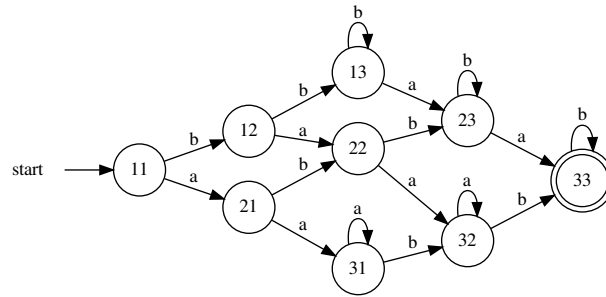
$$s = \langle s_1, s_2 \rangle = \{11\}$$

$$T = T_A \times T_B = \{33\}$$

Таблица состояний:

$A$	$B$	$a$	$b$
1	1	21	12
1	2	22	13
1	3	23	13
2	1	31	22
2	2	32	23
2	3	33	23
3	1	31	32
3	2	32	33
3	3	33	33

Таблица 1: Таблица состояний (Задание 2.1)



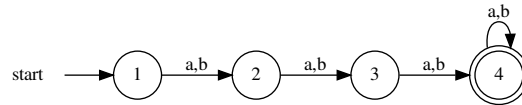
## 2.2 Язык 2.

$$L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \geq 3 \wedge |w| \text{ нечетное}\}$$

Рассмотрим языки, описывающие части условия языка  $L$ :

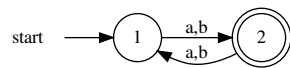
$$A_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \geq 3\}$$

$$\Sigma_A = \{a, b\} \quad Q_A = \{1, 2, 3, 4\} \quad s_A = \{1\} \quad T_A = \{4\}$$



$$B_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \text{ нечетное}\}$$

$$\Sigma_B = \{a, b\} \quad Q_B = \{1, 2\} \quad s_B = \{1\} \quad T_B = \{2\}$$

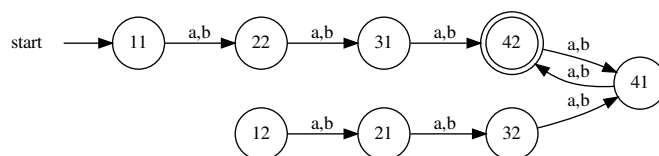


Тогда:  $L_2 = A_2 \times B_2$

$\Sigma = \{a, b\}$   
 $Q = \{11, 12, 21, 22, 31, 32, 41, 42\}$   
 $s = \{11\}$   
 $T = \{42\}$

$A$	$B$	$a$	$b$
1	1	22	22
1	2	21	21
2	1	32	32
2	2	31	31
3	1	42	42
3	2	41	41
4	1	42	42
4	2	41	41

Таблица 2: Таблица состояний (Задание 2.2)



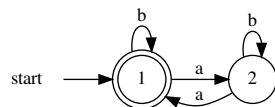
### 2.3 Язык 3.

$$L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \text{ четное} \wedge |w|_b \text{ кратно трем}\}$$

Рассмотрим языки, описывающие части условия языка  $L$ :

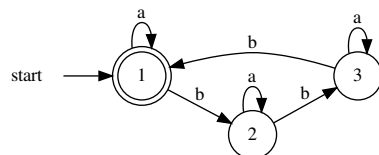
$$A_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \text{ четное}\}$$

$$\Sigma_A = \{a, b\} \quad Q_A = \{1, 2\} \quad s_A = \{1\} \quad T_A = \{1\}$$



$$B_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_b \text{ кратно трем}\}$$

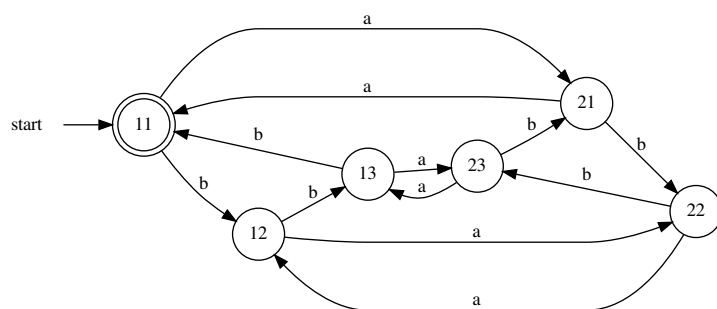
$$\Sigma_B = \{a, b\} \quad Q_B = \{1, 2, 3\} \quad s_B = \{1\} \quad T_B = \{1\}$$



Тогда:  $L_3 = A_3 \times B_3$   
 $\Sigma_3 = \{a, b\}$   
 $Q_3 = \{11, 12, 13, 21, 22, 23\}$   
 $s_3 = \{11\}$   
 $T_3 = \{11\}$

$A$	$B$	$a$	$b$
1	1	21	12
1	2	22	13
1	3	23	11
2	1	11	22
2	2	12	23
2	3	13	21

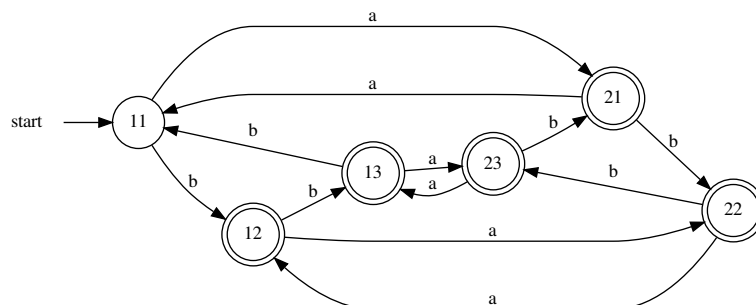
Таблица 3: Таблица состояний (Задание 2.3)



## 2.4 Язык 4.

$$L_4 = \bar{L}_3$$

Данный язык будет распознаваться автоматом  $\bar{L}_3 = \{\Sigma_3, Q_3, s_3, Q_3 \setminus T_3, \delta_3\}$   
 $T_4 = Q_3 \setminus T_3 = \{12, 13, 21, 22, 23\}$

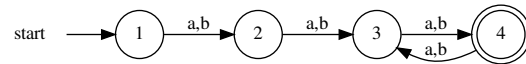


## 2.5 Язык 5.

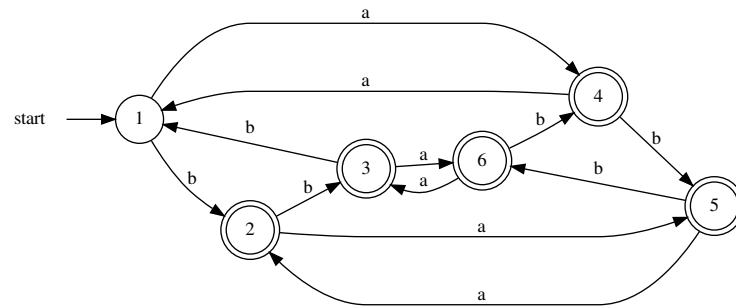
$$L_5 = L_2 \setminus L_3$$

$$L_5 = L_2 \setminus L_3 = L_2 \cap \bar{L}_3 = L_2 \times \bar{L}_3$$

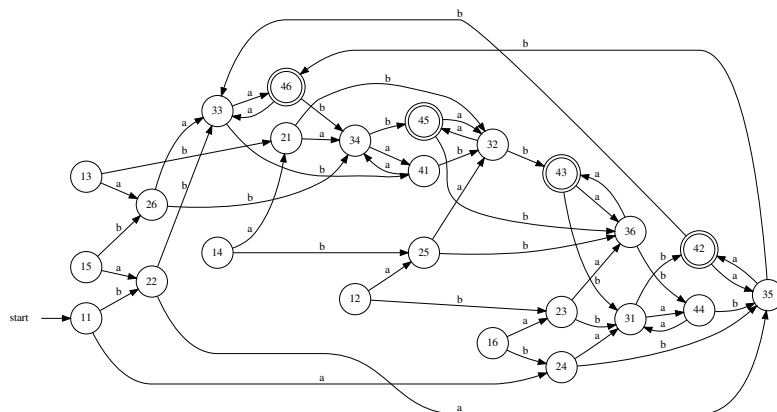
Заметим, что автомат для  $L_2$  можно упростить:



Для автомата  $\bar{L}_3$  введем новую нумерацию состояний:



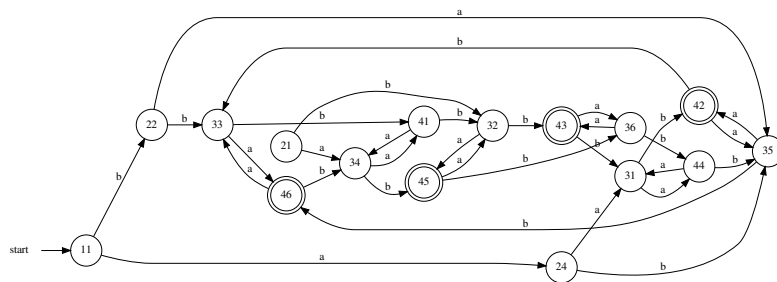
Получился такой автомат:



Упростим его:

$L_2$	$L_3$	$a$	$b$
1	1	24	22
1	2	25	23
1	3	26	21
1	4	21	25
1	5	22	26
1	6	23	24
2	1	34	32
2	2	35	33
2	3	36	31
2	4	31	35
2	5	32	36
2	6	33	34
3	1	44	42
3	2	45	43
3	3	46	41
3	4	41	45
3	5	42	46
3	6	43	44
4	1	34	32
4	2	35	33
4	3	36	31
4	4	31	35
4	5	32	36
4	6	33	34

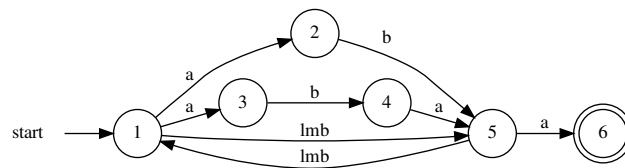
Таблица 4: Таблица состояний (Задание 2.3)



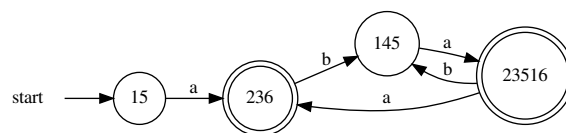
### 3 Задание №3. Построить минимальный ДКА по регулярному выражению.

#### 3.1 Регулярное выражение 1.

$$(ab + aba)^*a$$



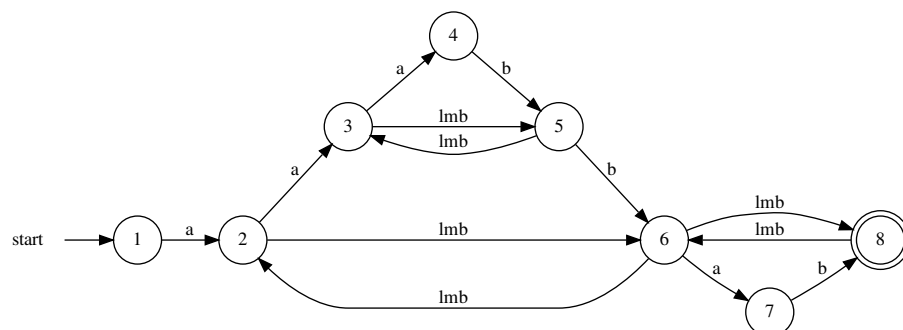
Детерминируем этот автомат:



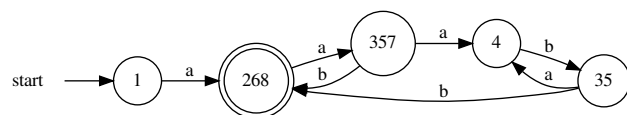
#### 3.2 Регулярное выражение 2.

$$a(a(ab)^*b)^*(ab)^*$$



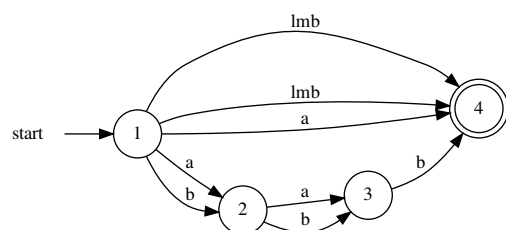


Детерминируем этот автомат:

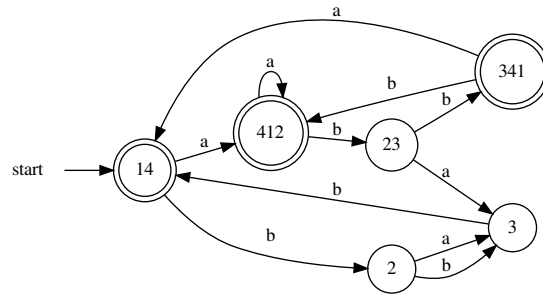


### 3.3 Регулярное выражение 3.

$$(a + (a + b)(a + b)b)^*$$

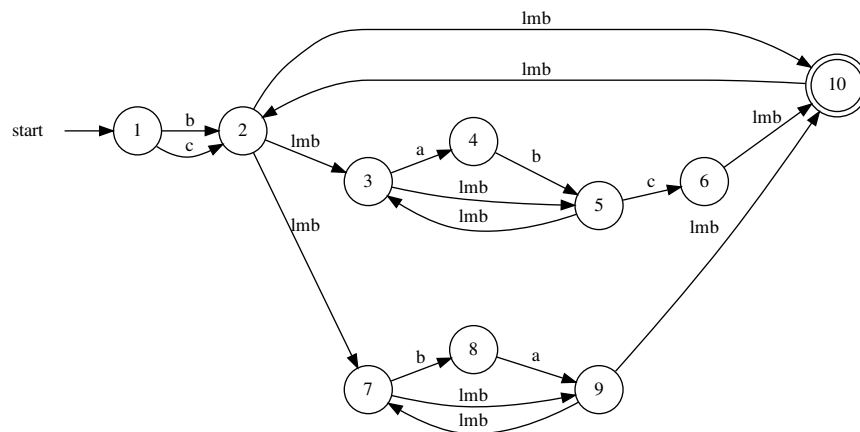


Детерминируем этот автомат:

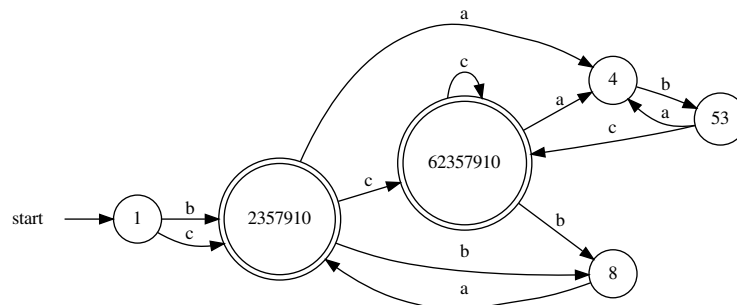


### 3.4 Регулярное выражение 4.

$$(b + c)((ab)^*c + (ba)^*)^*$$

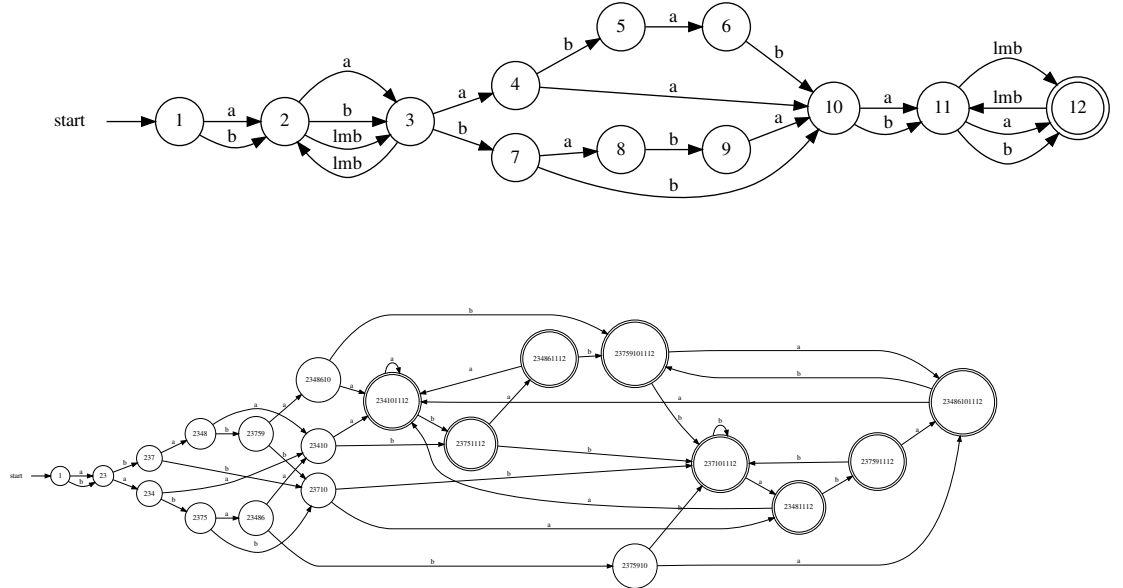


Детерминируем этот автомат:



### 3.5 Регулярное выражение 5.

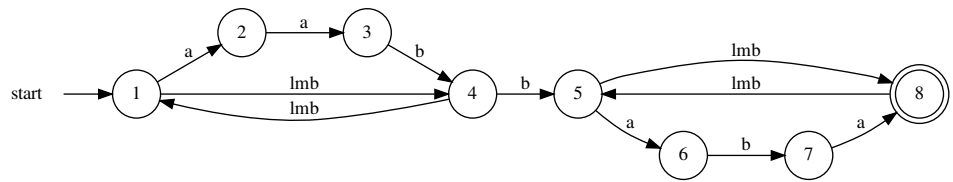
$$(a + b)^+(aa + bb + abab + baba)(a + b)^+$$



## 4 Задание №4. Определить является ли язык регулярным или нет.

### 4.1 Язык 1.

$$L = \{(aab)^n b(aba)^m \mid n \geq 0, m \geq 0\}$$



### 4.2 Язык 2.

$$L = \{uaav \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, |u|_b \geq |v|_a\}$$

Пусть  $\bar{L} = \{uaav \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, |u|_b < |v|_a\}$

Фиксируем  $n$

Пусть  $w = b^n a a a^{n+1}$ ;  $|w| \geq n$  (Взяли такое разбиение, так как количество букв  $a$  в  $u$  и количество букв  $b$  в  $v$  не важны)

$$x = b^l$$

$$y = b^p$$

$$z = b^{n-l-p} a a a^{n+1}$$

$xy^k z = b^{n+p(k-1)} a a a^{n+1}$  (при  $k \geq 2$   $w \notin \bar{L}$ )  $\Rightarrow \bar{L}$  - нерегулярный язык, следовательно,  $L$  также не является регулярным.

### 4.3 Язык 3.

$$L = \{a^m w \mid w \in \{a, b\}^*, 1 \leq |w|_b \leq m\}$$

Пусть  $\bar{L} = \{a^m w \mid w \in \{a, b\}^*, |w|_b > m\}$

$w_1 = a^m b^n$ ,  $|w_1| \geq n$  - выполнено.

$$x = a^p$$

$$y = a^l$$

$$z = a^{m-l-p} b^n$$

$p + l < n$  - выполнено, так как, по условию языка  $\bar{L}$   $m < n$

$w'_1 = xy^k z = a^{m+l(k-1)} b^n \Rightarrow$  при  $k \geq 2$   $w'_1 \notin \bar{L} \Rightarrow \bar{L}$  нерегулярный язык  
 $\Rightarrow L$  - нерегулярный язык.

### 4.4 Язык 4.

$$L = \{a^k b^n a^n \mid k = n \vee m > 0\}$$

$$1) k = n \Rightarrow L_1 = \{a^n b^m a^n\}$$

$$w_1 = a^n b^m a^n \quad |w_1| \geq n$$

$$x = a^l$$

$$y = a^p$$

$$z = a^{n-l-p} b^m a^n$$

$$l + p \leq n$$

$$p \geq 1$$

$$w'_1 = xy^t z = a^{n+p(t-1)} b^m a^n \Rightarrow w'_1 \notin L_1 \text{ при } t \geq 2$$

$$2) k = m \Rightarrow L_2 = \{a^m b^m a^n\}$$

$$w_2 = a^m b^m a^n \quad |w_2| \geq m$$

$$x = a^l$$

$$y = a^p$$

$$z = a^{m-l-p} b^m a^n$$

$$l + p \leq m$$

$$p \geq 1$$

$$w'_2 = xy^t z = a^{m+p(t-1)} b^m a^n \Rightarrow w'_2 \notin L_2 \text{ при } t \geq 2$$

Из 1), 2)  $\Rightarrow$  язык  $L$  - нерегулярный.

#### 4.5 Язык 5.

$$L = \{ucv \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, u \neq v^R\}$$

Пусть  $\bar{L} = \{ucv \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, u = v^R\}$

Фиксируем  $n$ :  $|u| \leq n$

При разделении  $u$  на  $x$  и  $y$  и накачке перестанет выполняться равенство  $u = v^R$ , поэтому язык  $\bar{L}$  нерегулярный  $\Rightarrow$  язык  $L$  также не является регулярным.

### 5 Задание №5. Реализовать алгоритмы.

В рамках своего выполнения программа должна генерировать текстовый документ с картинками, показывающий процесс построения автомата (к примеру, Markdown с графиками на Graphviz).

1. Построение ДКА по НКА с  $\lambda$ -переходами.
2. Прямое произведение языков, с возможностью построить пересечение, объединение и разность.