

Домашняя работа

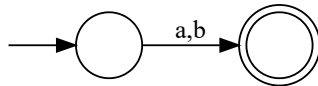
Щучкин Никита А-13а-19

Задание 1

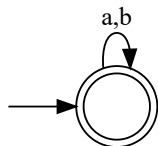
$$1. L = \{w \in \{a, b, c\}^* : |w|_c = 1\}$$

Построим регулярку: $(a + b)^*c(a + b)^*$

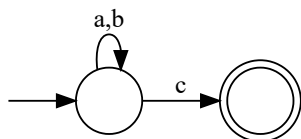
$(a + b) :$



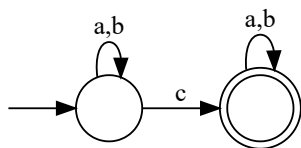
$(a + b)^* :$



$(a + b)^*c :$



Итоговый конечный автомат для $(a + b)^*c(a + b)^* :$



$$2. L = \{w \in \{a, b\}^* : |w|_a \leq 2, |w|_b \geq 2\}$$

Построим через прямое произведение двух ДКА.

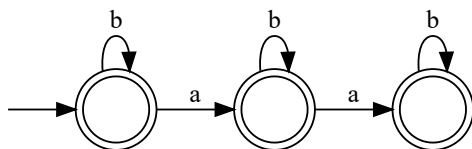
Первый автомат:

$$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* : |w|_a \leq 2\}$$

Регулярка:

$$b^*ab^*ab^* + b^*ab^* + b^*$$

Автомат:



$$\langle \Sigma_1 = \{a, b\}, Q_1 = \{q_1, q_2, q_3\}, S_1 = q_1, T_1 = \{q_1, q_2, q_3\}, \delta_1 \rangle$$

Таблица переходов:

	a	b
q ₁	q ₂	q ₁
q ₂	q ₃	q ₂
q ₃	-	q ₃

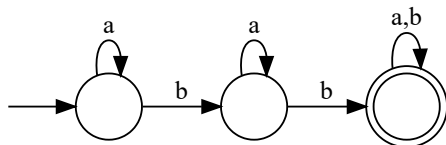
Второй автомат:

$$L_2 = \{w \in \{a, b\}^* : |w|_b \geq 2\}$$

Регулярка:

$$(a + b)^*b(a + b)^*b(a + b)^*$$

Автомат:



$$\langle \Sigma_2 = \{a, b\}, Q_2 = \{q_4, q_5, q_6\}, S_2 = q_4, T_2 = \{q_6\}, \delta_2 \rangle$$

Таблица переходов:

	a	b
q ₄	q ₄	q ₅
q ₅	q ₅	q ₆
q ₆	q ₆	q ₆

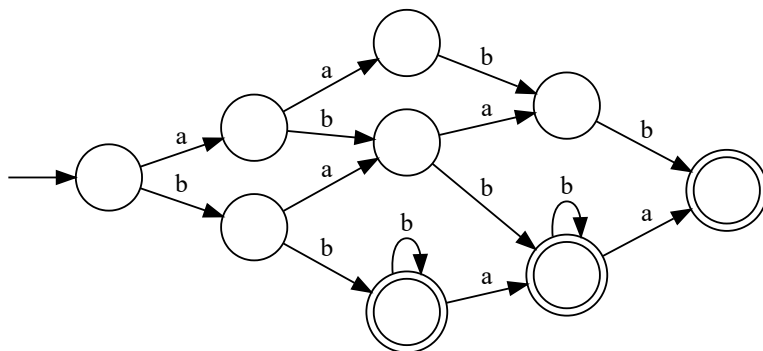
Прямое произведение:

$$\langle \Sigma = \{a, b\}, Q = \{q_1 q_4, q_1 q_5, q_1 q_6, q_2 q_4, q_2 q_5, q_2 q_6, q_3 q_4, q_3 q_5, q_3 q_6\}, S = q_1 q_4, T = \{q_1 q_6, q_2 q_6, q_3 q_6\}, \delta \rangle$$

Таблица переходов для результирующего автомата:

	a	b
q ₁ q ₄	q ₂ q ₄	q ₁ q ₅
q ₁ q ₅	q ₂ q ₅	q ₁ q ₆
q ₁ q ₆	q ₂ q ₆	q ₁ q ₆
q ₂ q ₄	q ₃ q ₄	q ₂ q ₅
q ₂ q ₅	q ₃ q ₅	q ₂ q ₆
q ₂ q ₆	q ₃ q ₆	q ₂ q ₆
q ₃ q ₄	-	q ₃ q ₅
q ₃ q ₅	-	q ₃ q ₆
q ₃ q ₆	-	q ₃ q ₆

Итоговый автомат:



$$3. L = \{w \in \{a, b\}^* : |w|_a \neq |w|_b\}$$

Попытаемся доказать, что он нерегулярный. Рассмотрим \bar{L} :

$$\bar{L} = \{w \in \{a, b\}^* : |w|_a = |w|_b\}$$

Применим лемму о накачке:

Фиксируем n .

Пусть $w = a^n b^n \in \bar{L}; |w| \geq n$

Все возможные разбиения этого слова при $|xy| \leq n$ и $|y| \geq 1$:

$$x = a^k$$

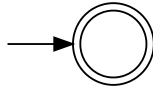
$$y = a^l$$

$$z = a^{n-k-l} b^n$$

Если здесь накачивать y , то букв a в слове станет больше, чем букв b .

Значит \bar{L} - нерегулярный язык, а значит L тоже нерегулярный.

$$4. L = \{w \in \{a, b\}^* : ww = www\}$$



Задание 2

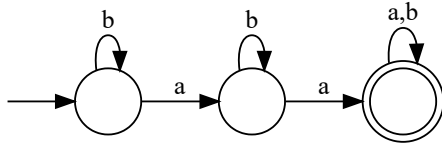
$$1. L_1 = \{w \in \{a, b\}^* : |w|_a \geq 2 \wedge |w|_b \geq 2\}$$

Первый автомат:

$$L_{11} = \{w \in \{a, b\}^* : |w|_a \geq 2\}$$

Регулярка: $(a + b)^* a (a + b)^* a (a + b)^*$

Автомат:



$$\langle \Sigma_1 = \{a, b\}, Q_1 = \{q_1, q_2, q_3\}, S_1 = q_1, T_1 = q_3, \delta_1 \rangle$$

Таблица переходов:

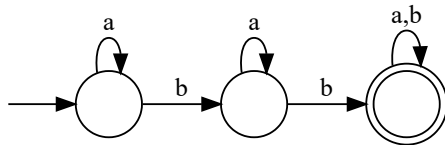
	a	b
q ₁	q ₂	q ₁
q ₂	q ₃	q ₂
q ₃	q ₃	q ₃

Второй автомат:

$$L_{12} = \{w \in \{a, b\}^* : |w|_b \geq 2\}$$

Регулярка: $(a + b)^* b (a + b)^* b (a + b)^*$

Автомат:



$$\langle \Sigma_2 = \{a, b\}, Q_2 = \{q_4, q_5, q_6\}, S_2 = q_4, T_2 = q_6, \delta_2 \rangle$$

Таблица переходов:

	a	b
q ₄	q ₄	q ₅
q ₅	q ₅	q ₆
q ₆	q ₆	q ₆

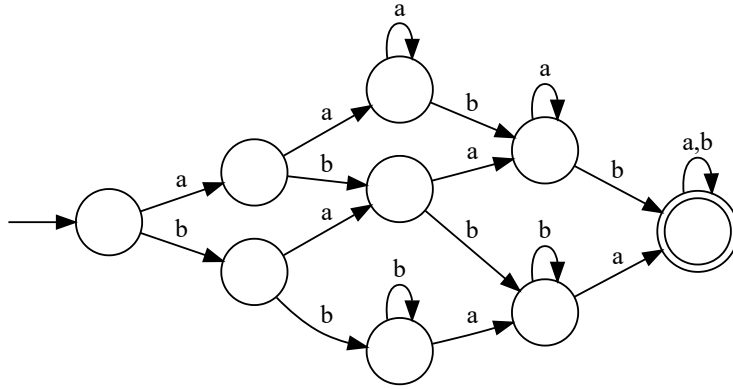
Прямое произведение этих двух ДКА:

$$\langle \Sigma = \{a, b\}, Q = \{q_1 q_4, q_1 q_5, q_1 q_6, q_2 q_4, q_2 q_5, q_2 q_6, q_3 q_4, q_3 q_5, q_3 q_6\}, S = q_1 q_4, T = q_3 q_6, \delta \rangle$$

Таблица переходов результирующего автомата:

	a	b
q ₁ q ₄	q ₂ q ₄	q ₁ q ₅
q ₁ q ₅	q ₂ q ₅	q ₁ q ₆
q ₁ q ₆	q ₂ q ₆	q ₁ q ₆
q ₂ q ₄	q ₃ q ₄	q ₂ q ₅
q ₂ q ₅	q ₃ q ₅	q ₂ q ₆
q ₂ q ₆	q ₃ q ₆	q ₂ q ₆
q ₃ q ₄	q ₃ q ₄	q ₃ q ₅
q ₃ q ₅	q ₃ q ₅	q ₃ q ₆
q ₃ q ₆	q ₃ q ₆	q ₃ q ₆

Результирующий автомат:



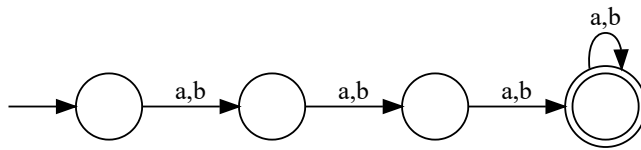
$$2. L_2 = \{w \in \{a, b\}^* : |w| \geq 3 \wedge |w| \text{ нечетное}\}$$

Первый автомат:

$$L_{21} = \{w \in \{a, b\}^* : |w| \geq 3\}$$

Регулярка: $(a + b)(a + b)(a + b)(a + b)^*$

Автомат:



$$\langle \Sigma_1 = \{a, b\}, Q_1 = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}, S_1 = q_1, T_1 = q_4, \delta_1 \rangle$$

Таблица переходов:

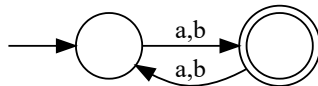
	a	b
q ₁	q ₂	q ₂
q ₂	q ₃	q ₃
q ₃	q ₄	q ₄
q ₄	q ₄	q ₄

Второй автомат:

$$L_{22} = \{w \in \{a, b\}^* : |w| \text{ нечетное}\}$$

Регулярка: $(a + b)((a + b)(a + b))^*$

Автомат:



$$\langle \Sigma_2 = \{a, b\}, Q_2 = \{q_5, q_6\}, S_2 = q_5, T_2 = q_6, \delta_2 \rangle$$

Таблица переходов:

	a	b
q ₅	q ₆	q ₆
q ₆	q ₅	q ₅

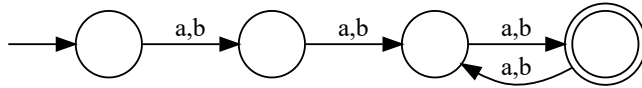
Прямое произведение двух этих ДКА:

$$\langle \Sigma = \{a, b\}, Q = \{q_1 q_5, q_1 q_6, q_2 q_5, q_2 q_6, q_3 q_5, q_3 q_6, q_4 q_5, q_4 q_6\}, S = q_1 q_5, T = q_4 q_6, \delta \rangle$$

Таблица переходов результирующего автомата:

	a	b
q ₁ q ₅	q ₂ q ₆	q ₂ q ₆
q ₁ q ₆	q ₂ q ₅	q ₂ q ₅
q ₂ q ₅	q ₃ q ₆	q ₃ q ₆
q ₂ q ₆	q ₃ q ₅	q ₃ q ₅
q ₃ q ₅	q ₄ q ₆	q ₄ q ₆
q ₃ q ₆	q ₄ q ₅	q ₄ q ₅
q ₄ q ₅	q ₄ q ₆	q ₄ q ₆
q ₄ q ₆	q ₄ q ₅	q ₄ q ₅

Результирующий автомат:



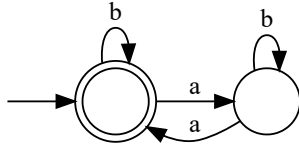
$$3. L_3 = \{w \in \{a, b\}^* : |w|_a \text{ четно} \wedge |w|_b \text{ кратно трем}\}$$

Первый автомат:

$$L_{31} = \{w \in \{a, b\}^* : |w|_a \text{ четно}\}$$

Регулярка: $(b^*ab^*ab^* + b)^*$

Автомат:



$$\langle \Sigma_1 = \{a, b\}, Q_1 = \{q_1, q_2\}, S_1 = q_1, T_1 = q_1, \delta_1 \rangle$$

Таблица переходов:

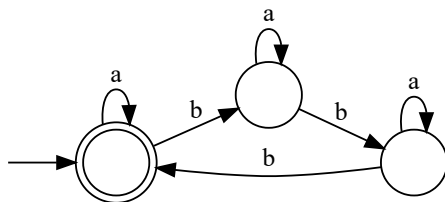
	a	b
q ₁	q ₂	q ₁
q ₂	q ₁	q ₂

Второй автомат:

$$L_{32} = \{w \in \{a, b\}^* : |w|_b \text{ кратно трем}\}$$

Регулярка: $(a * ba * ba * ba)^*$

Автомат:



$$\langle \Sigma_2 = \{a, b\}, Q_2 = \{q_3, q_4, q_5\}, S_2 = q_3, T_2 = q_3, \delta_2 \rangle$$

Таблица переходов:

	a	b
q ₃	q ₃	q ₄
q ₄	q ₄	q ₅
q ₅	q ₅	q ₃

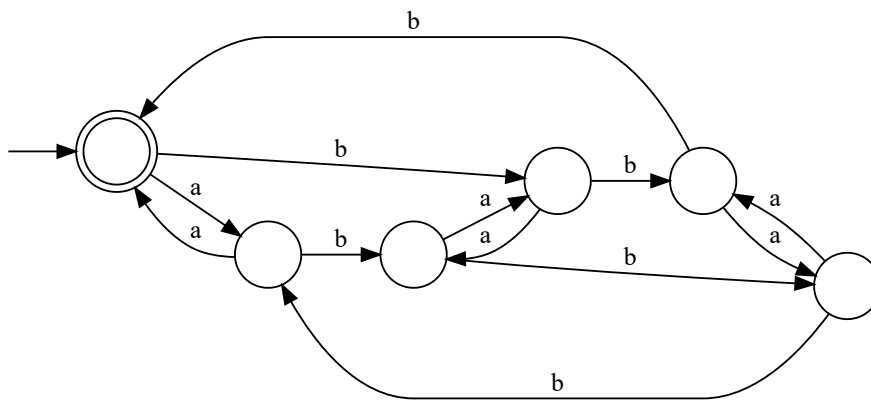
Прямое произведение двух этих ДКА:

$$\langle \Sigma = \{a, b\}, Q = \{q_1q_3, q_1q_4, q_1q_5, q_2q_3, q_2q_4, q_2q_5\}, S = q_1q_3, T = q_1q_3, \delta \rangle$$

Таблица переходов результирующего автомата:

	a	b
q ₁ q ₃	q ₂ q ₃	q ₁ q ₄
q ₁ q ₄	q ₂ q ₄	q ₁ q ₅
q ₁ q ₅	q ₂ q ₅	q ₁ q ₃
q ₂ q ₃	q ₁ q ₃	q ₂ q ₄
q ₂ q ₄	q ₁ q ₄	q ₂ q ₅
q ₂ q ₅	q ₁ q ₅	q ₂ q ₃

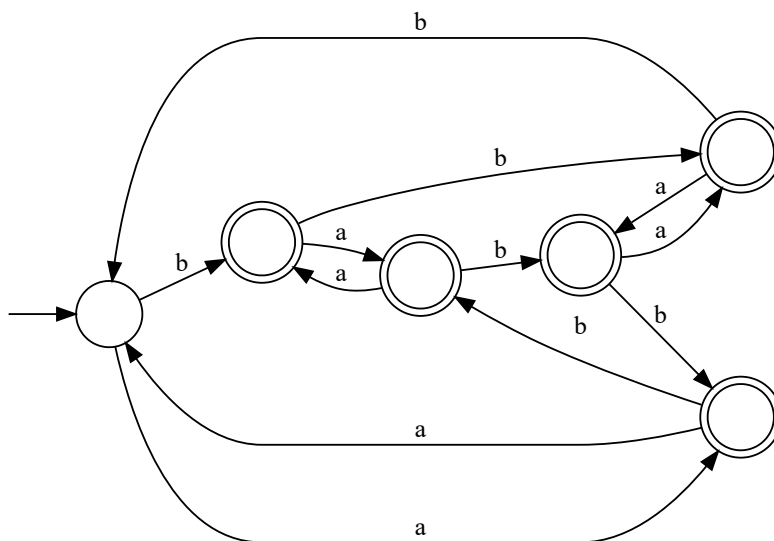
Результирующий автомат:



$$4. L_4 = \overline{L_3}$$

$$\overline{L_3} = \langle \Sigma, Q, S, Q \setminus T, \delta \rangle$$

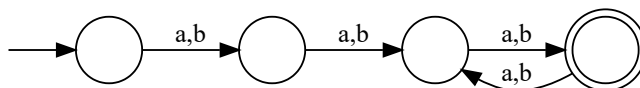
То есть, автомат для L_4 - это автомат, похожий на L_3 , в котором терминальные и нетерминальные состояния инвертированы:



$$5. L_4 = L_2 \setminus L_3$$

$$L_4 = L_2 \setminus L_3 = L_2 \cap \overline{L_3}$$

Первый автомат:

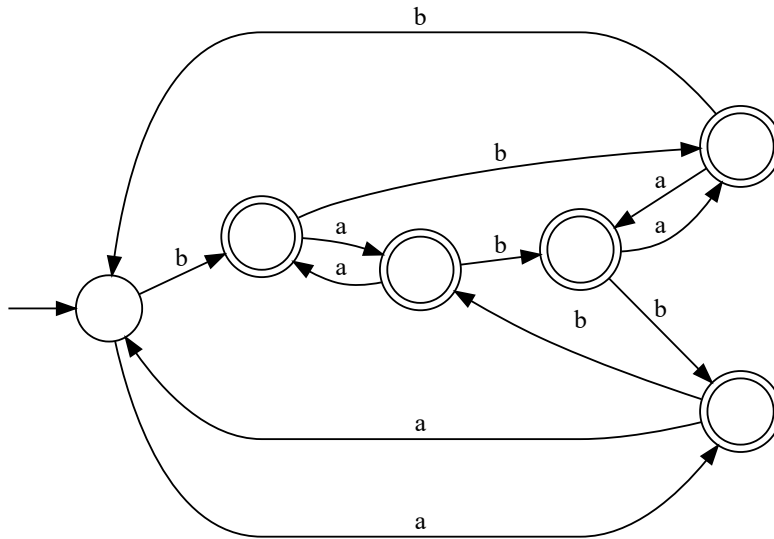


$$L_2 = \langle \Sigma = \{a, b\}, Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}, S = q_1, T = q_4, \delta \rangle$$

Таблица переходов первого автомата:

	a	b
q1	q2	q2
q2	q3	q3
q3	q4	q4
q4	q3	q3

Второй автомат:



$$\overline{L_3} = \langle \Sigma = \{a, b\}, Q = \{q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}, S = q_5, T = \{q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}, \delta \rangle$$

Таблица переходов второго автомата:

	a	b
q_5	q_6	q_7
q_6	q_5	q_8
q_7	q_8	q_9
q_8	q_7	q_{10}
q_9	q_{10}	q_5
q_{10}	q_9	q_6

Прямое произведение двух этих ДКА:

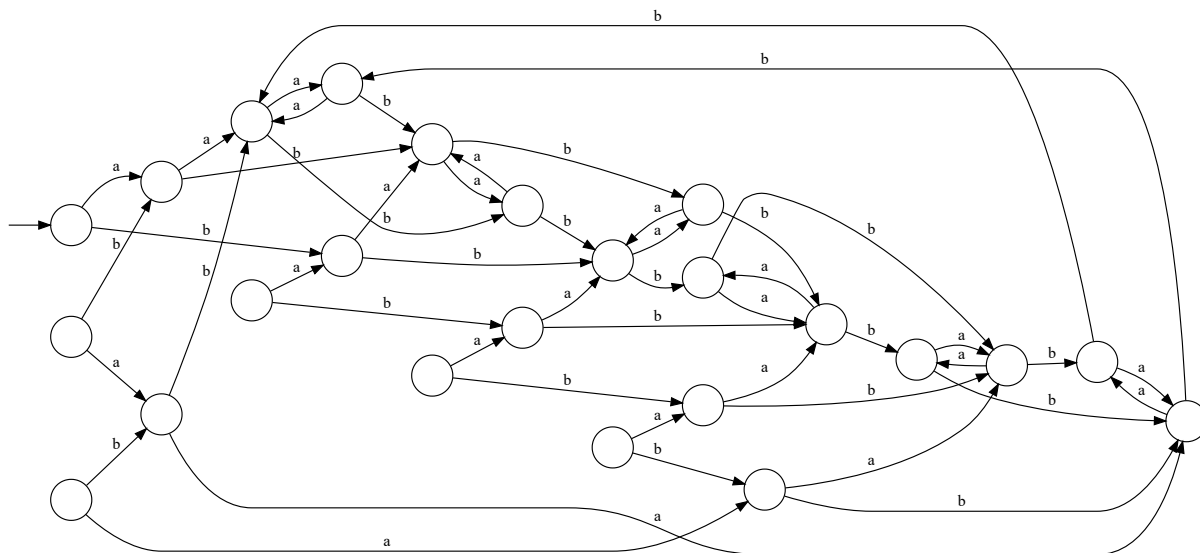
$$\langle \Sigma = \{a, b\}, Q = \{q_1 q_5, q_1 q_6, q_1 q_7, q_1 q_8, q_1 q_9, q_1 q_{10}, q_2 q_5, q_2 q_6, q_2 q_7, q_2 q_8, q_2 q_9, q_2 q_{10}, q_3 q_5, q_3 q_6, q_3 q_7, q_3 q_8, q_3 q_9, q_3 q_{10}, q_4 q_5, q_4 q_6, q_4 q_7, q_4 q_8, q_4 q_9, q_4 q_{10}\} S = q_1 q_5, T = q_4 q_6, q_4 q_7, q_4 q_8, q_4 q_9, q_4 q_{10}, \delta \rangle$$

Таблица переходов результирующего автомата:

	a	b
$q_1 q_5$	$q_2 q_6$	$q_2 q_7$
$q_1 q_6$	$q_2 q_5$	$q_2 q_8$
$q_1 q_7$	$q_2 q_8$	$q_2 q_9$
$q_1 q_8$	$q_2 q_7$	$q_2 q_{10}$
$q_1 q_9$	$q_2 q_{10}$	$q_2 q_5$
$q_1 q_{10}$	$q_2 q_9$	$q_2 q_6$
$q_2 q_5$	$q_3 q_6$	$q_3 q_7$
$q_2 q_6$	$q_3 q_5$	$q_3 q_8$
$q_2 q_7$	$q_3 q_8$	$q_3 q_9$
$q_2 q_8$	$q_3 q_7$	$q_3 q_{10}$
$q_2 q_9$	$q_3 q_{10}$	$q_3 q_5$
$q_2 q_{10}$	$q_3 q_9$	$q_3 q_6$
$q_3 q_5$	$q_4 q_6$	$q_4 q_7$
$q_3 q_6$	$q_4 q_5$	$q_4 q_8$
$q_3 q_7$	$q_4 q_8$	$q_4 q_9$
$q_3 q_8$	$q_4 q_7$	$q_4 q_{10}$
$q_3 q_9$	$q_4 q_{10}$	$q_4 q_5$
$q_3 q_{10}$	$q_4 q_9$	$q_4 q_6$
$q_4 q_5$	$q_3 q_6$	$q_3 q_7$

	a	b
$q_4 q_6$	$q_3 q_5$	$q_3 q_8$
$q_4 q_7$	$q_3 q_8$	$q_3 q_9$
$q_4 q_8$	$q_3 q_7$	$q_3 q_{10}$
$q_4 q_9$	$q_3 q_{10}$	$q_3 q_5$
$q_4 q_{10}$	$q_3 q_9$	$q_3 q_6$

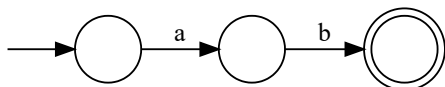
Результирующий автомат:



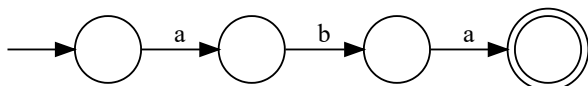
Задание 3

1. $(ab + aba)^*$

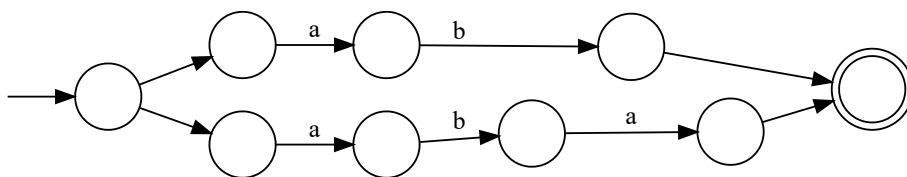
ab :



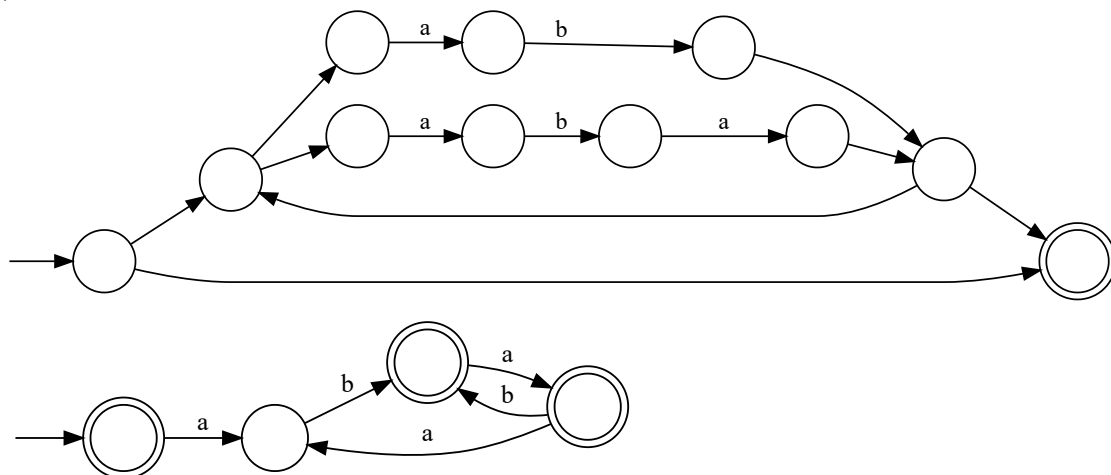
aba :



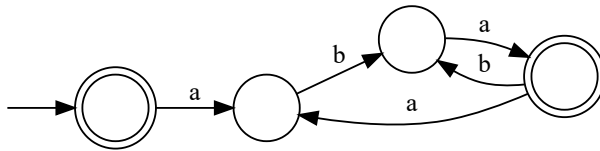
$ab + aba$:



$(ab + aba)^*$:

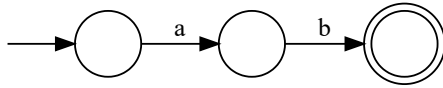


$(ab + aba)^*a$:

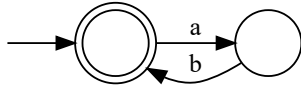


2. $a(ab^*b)^*(ab)^*$

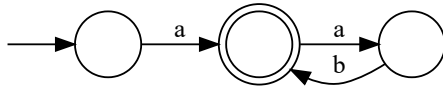
ab :



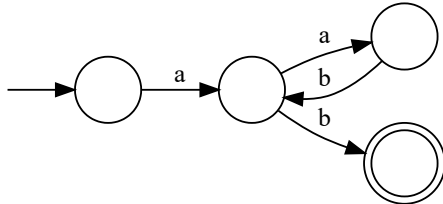
$(ab)^*$:



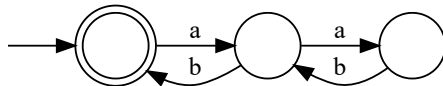
$a(ab)^*$:



$a(ab)^*b$:



$(a(ab)^*b)^*$:



$a(a(ab)^*b)^*$:

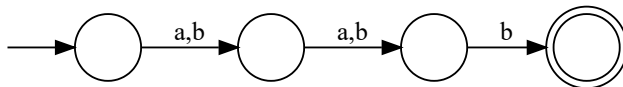


$a(a(ab)^*b)^*(ab)^*$:

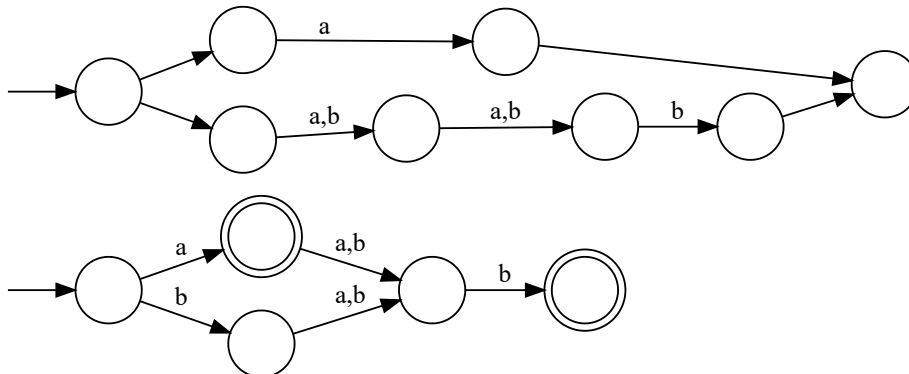


3. $(a + (a + b)(a + b)b)^*$

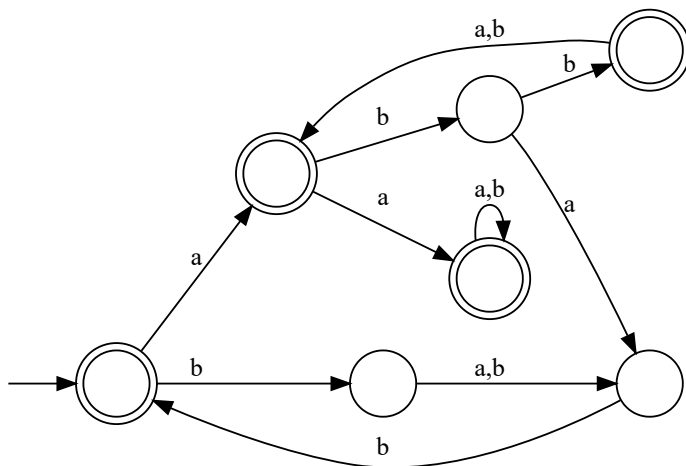
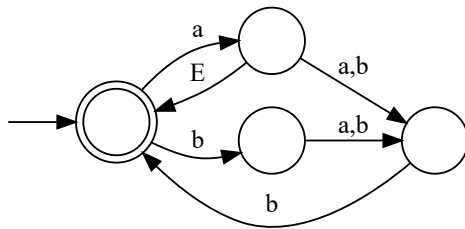
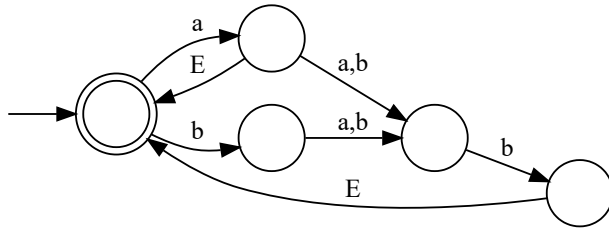
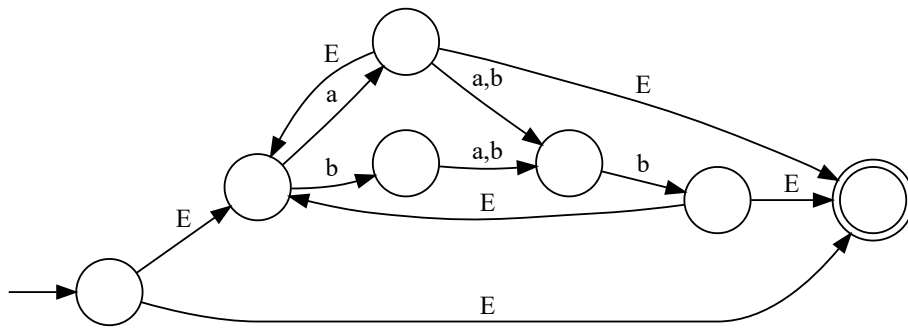
$(a + b)(a + b)b$:



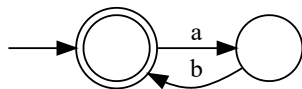
$(a + (a + b)(a + b)b)b$:



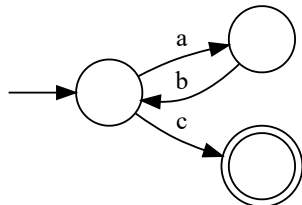
$(a + (a + b)(a + b)b)^*b$:



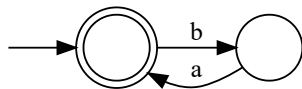
4. $(b + c)((ab)^*c + (ba)^*)^*$
 $(ab)^*$:



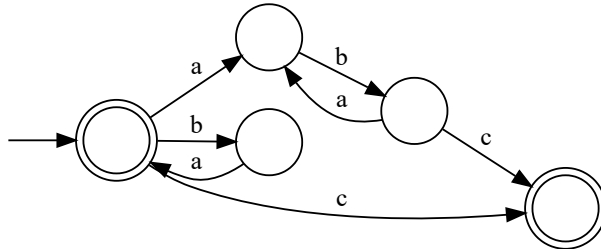
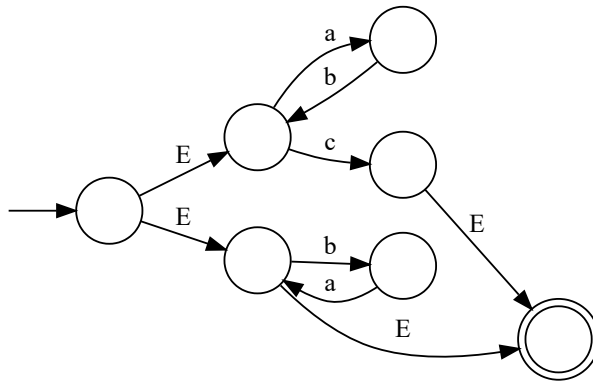
$(ab)^*c$:



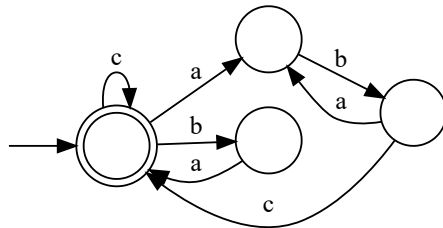
$(ba)^*$:



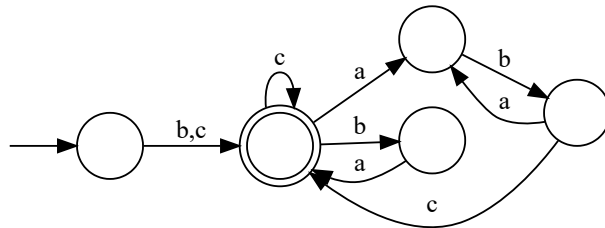
$(ab)^*c + (ba)^*$:



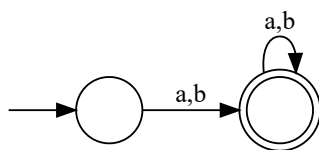
$((ab)^*c + (ba)^*)^*$:



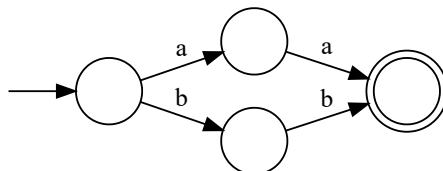
$(b+c)((ab)^*c + (ba)^*)^*$:



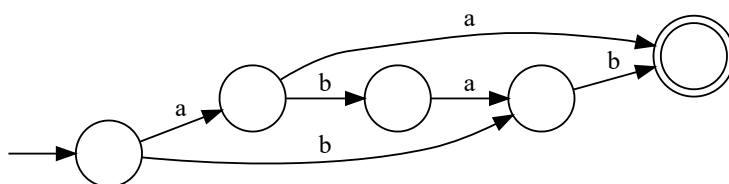
5. $(a+b)^+(aa+bb+abab+baba)(a+b)^+$
 $(a+b)^+$:



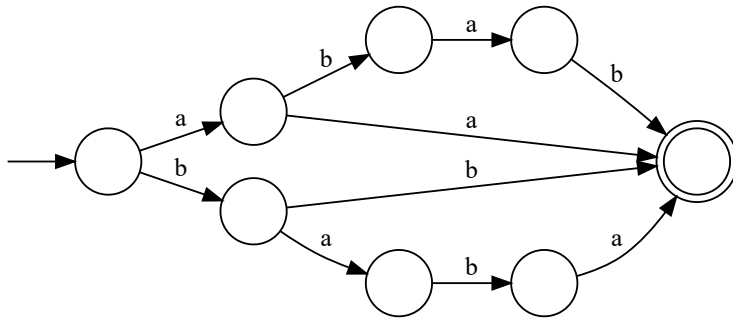
$aa+bb$



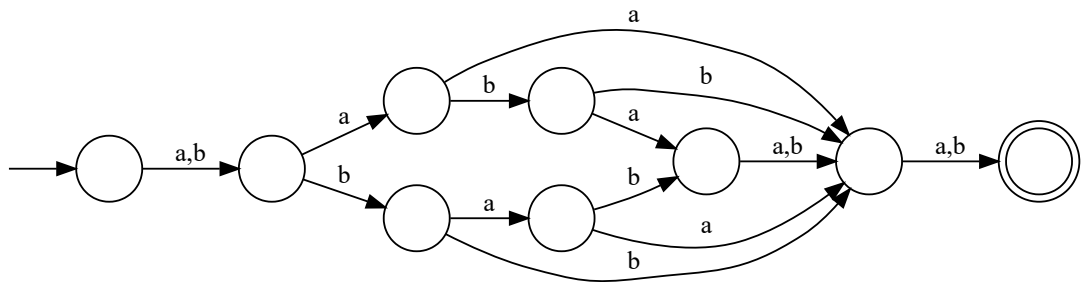
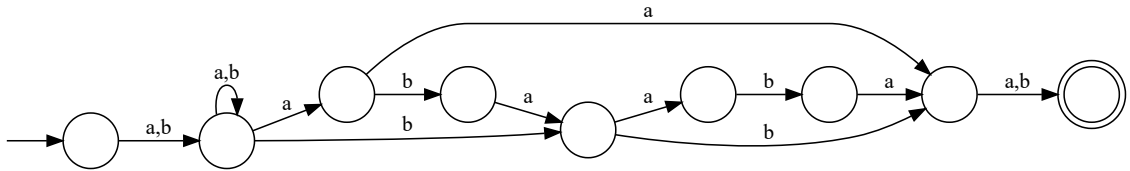
$aa+bb+abab$:



$aa+bb+abab+baba$:



$(a + b)^+(aa + bb + abab + baba)(a + b)^+:$

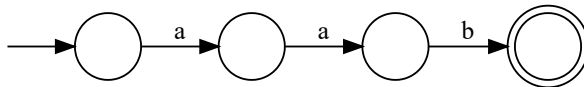


Задание 4

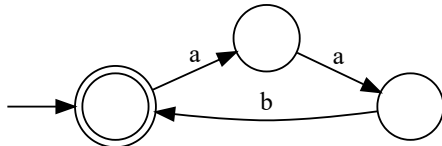
1. $L = \{(aab)^n b(aba)^m : n \geq 0, m \geq 0\}$

Регулярка: $(aab)^* b(aba)^*$

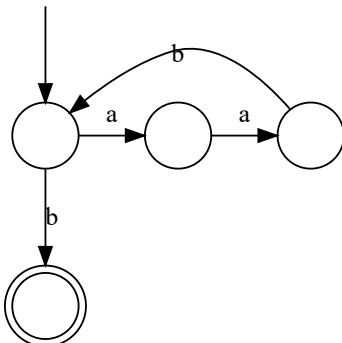
aab :



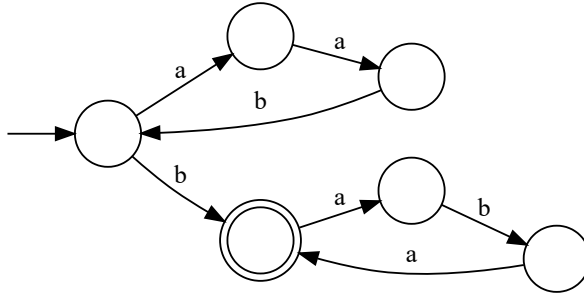
$(aab)^*$:



$(aab)^* b$:



Итоговый автомат для $(aab)^*b(aba)^*$:



$$2. L = \{uaav : u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, |u|_b \geq |v|_a\}$$

Рассмотрим \bar{L} :

$$\bar{L} = \{uaav : u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, |v|_a > |u|_b\}$$

Применим к нему лемму о накачке:

Фиксируем n .

$$\text{Пусть } w = b^n a a a^{n+1} \in \bar{L}; |w| \geq n.$$

Все возможные разбиения при $|xy| \leq n$ и $|y| \geq 1$:

$$x = b^l$$

$$y = b^k$$

$$z = b^{n-l-k} a a a^{n+1}$$

Если здесь накачивать y , то число букв b станет больше, чем букв a и слово уже не будет принадлежать \bar{L} . Значит язык \bar{L} - нерегулярный. Следовательно язык L тоже нерегулярный.

$$3. L = \{a^m w : w \in \{a, b\}^*, 1 \leq |w|_b \leq m\}$$

Рассмотрим \bar{L} :

$$\bar{L} = \{a^m w : w \in \{a, b\}^*, |w|_b > m \vee |w|_b = 0\}$$

Применим к нему лемму о накачке:

Фиксируем n .

$$\text{Пусть } w = a^n b^{n+1} \in \bar{L}; |w| \geq n$$

Все возможные разбиения при $|xy| \leq n$ и $|y| \geq 1$:

$$x = a^l$$

$$y = a^k$$

$$z = a^{n-l-k} b^{n+1}$$

Если здесь накачивать y , то букв a станет больше, чем букв b , и перестанет выполняться условие $|w|_b > m$. Значит язык \bar{L} - нерегулярный. Следовательно L тоже нерегулярный.

$$4. L = \{a^k b^m a^n : k = n \vee m > 0\}$$

Применим к нему лемму о накачке:

Фиксируем n .

$$\text{Пусть } w = a^n b a^n \in L; |w| \geq n$$

Все возможные разбиения:

$$x = a^l$$

$$y = a^k$$

$$z = a^{n-l-k} b a^n$$

Если здесь накачивать y , то равенство $k = n$ перестанет выполняться. Значит L - нерегулярный язык.

$$5. L = \{ucv : u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, u \neq v^R\}$$

Рассмотрим \bar{L} :

$$\bar{L} = \{ucv : u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, u = v^R\}$$

Применим к нему лемму о накачке:

Фиксируем n .

$$\text{Пусть } w = a^n c a^n \in \bar{L}; |w| \geq n$$

Все возможные разбиения при $|xy| \leq n$ и $|y| \geq 1$:

$$x = a^l$$

$$y = a^k$$

$$z = a^{n-l-k} c a^n$$

Если здесь накачивать y , то число букв a в начале будет увеличиваться, и условие $u = v^R$ перестанет выполняться. Значит \bar{L} - нерегулярный язык. Следовательно L тоже нерегулярный.

Задание 5