

Домашнее задание
По предмету Теоретические Модели Вычислений
По теме Регулярные языки и конечные автоматы

Выполнила студентка группы А-13а-19
Филиппенко Вероника

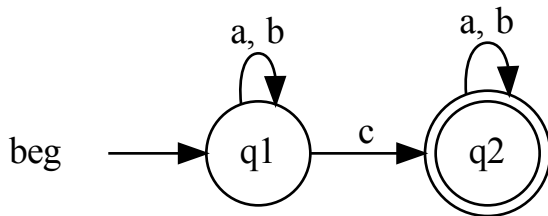
Содержание

1	Построение конечного автомата, распознающего заданный язык.	3
2	Построение конечного автомата, используя прямое произведение.	4
3	Построение минимального ДКА по регулярному выражению.	13
4	Определение, является ли язык регулярным или нет.	17

1 Построение конечного автомата, распознающего заданный язык.

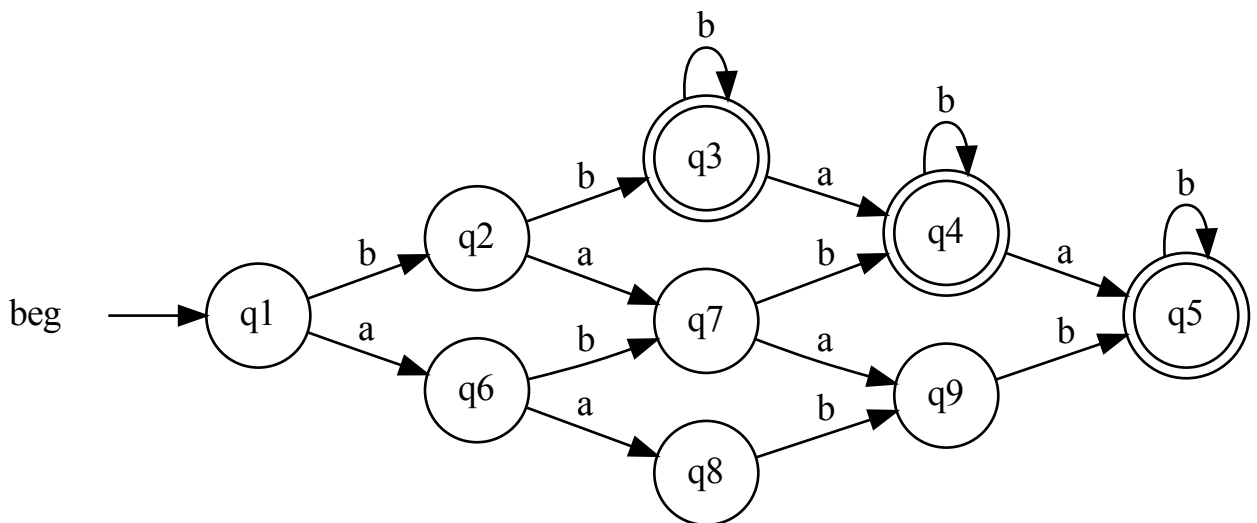
1. $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_c = 1\}$

Язык состоит из всех слов, содержащих буквы $\{a, b, c\}$, причем буква c содержится в единственном экземпляре.



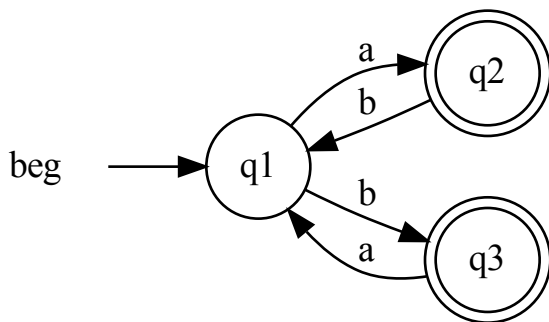
2. $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \leq 2, |w|_b \geq 2\}$

Язык состоит из всех слов, содержащих буквы $\{a, b\}$, причем букв a не более двух, а букв b не менее двух.



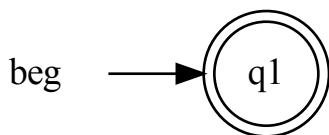
$$3. L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \neq |w|_b\}$$

Язык состоит из всех слов, содержащих буквы $\{a, b\}$, причем буквы a и b содержатся в неравном количестве.



$$4. L = \{w \in \{a, b\}^* \mid ww = www\}$$

Язык состоит из всех слов, содержащих только пустые символы.



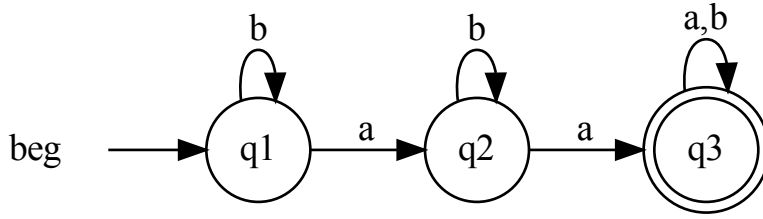
2 Построение конечного автомата, используя прямое произведение.

$$1. L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \geq 2 \wedge |w|_b \geq 2\}$$

Язык состоит из всех слов, содержащих буквы $\{a, b\}$, причем обеих букв более двух.

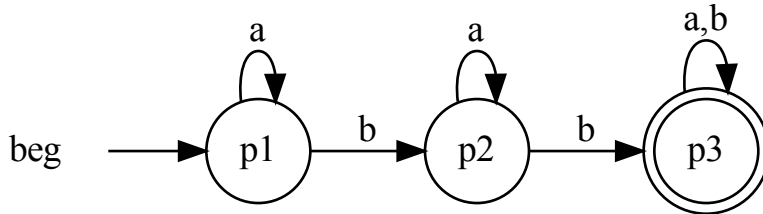
Разбиваем на два автомата:

Автомат №1:



$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \{a, b\} \\ Q_1 &= \{q1, q2, q3\} \\ s_1 &= \{q1\} \\ T_1 &= \{q3\}\end{aligned}$$

Автомат №2:



$$\begin{aligned}\Sigma_2 &= \{a, b\} \\ Q_2 &= \{p1, p2, p3\} \\ s_2 &= \{p1\} \\ T_2 &= \{p3\}\end{aligned}$$

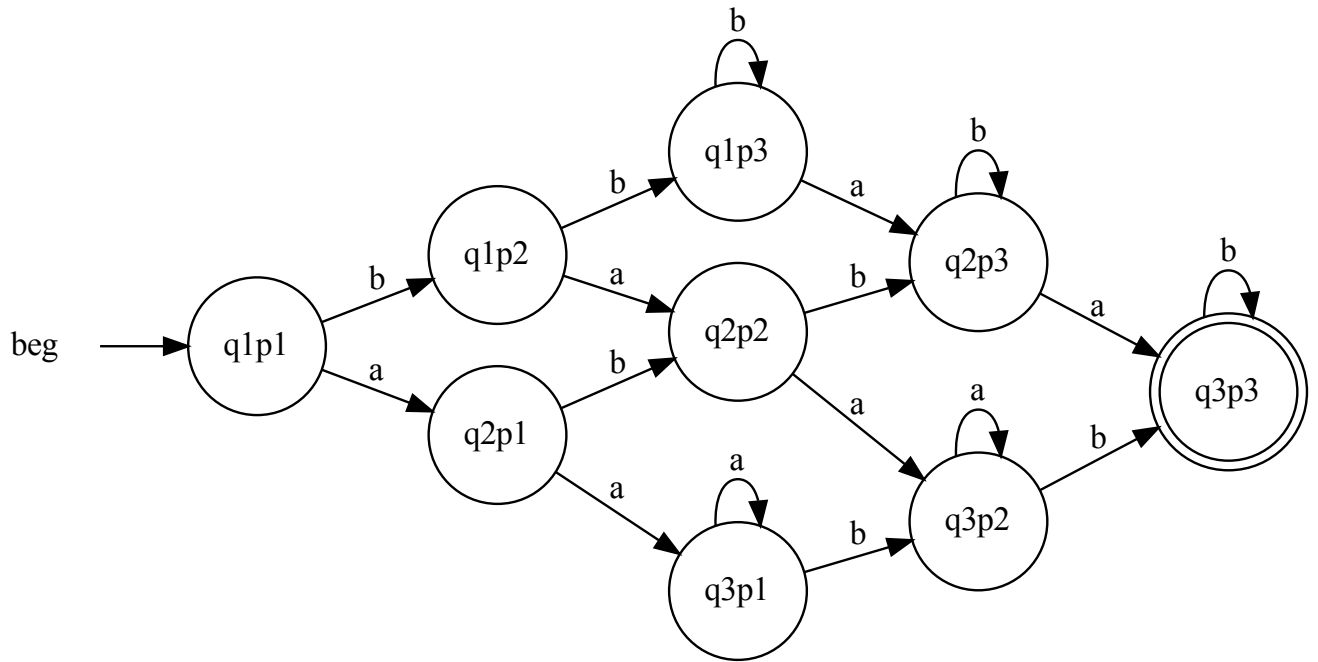
Итог:

$$\begin{aligned}\Sigma &= \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{a, b\} \\ Q &= Q_1 \times Q_2 = \{ \langle q1, p1 \rangle, \langle q1, p2 \rangle, \langle q1, p3 \rangle, \langle q2, p1 \rangle, \langle q2, p2 \rangle, \langle q2, p3 \rangle, \\ &\quad \langle q3, p1 \rangle, \langle q3, p2 \rangle, \langle q3, p3 \rangle \} \\ s &= \langle s_1, s_2 \rangle = \{ \langle q1, p1 \rangle \} \\ T &= T_1 \times T_2 = \{ \langle q3, p3 \rangle \}\end{aligned}$$

Таблица состояний:

—	a	b
$\langle q1,p1 \rangle$	$\langle q2,p1 \rangle$	$\langle q1,p2 \rangle$
$\langle q1,p2 \rangle$	$\langle q2,p2 \rangle$	$\langle q1,p3 \rangle$
$\langle q1,p3 \rangle$	$\langle q2,p3 \rangle$	$\langle q1,p3 \rangle$
$\langle q2,p1 \rangle$	$\langle q3,p1 \rangle$	$\langle q2,p2 \rangle$
$\langle q2,p2 \rangle$	$\langle q3,p2 \rangle$	$\langle q2,p3 \rangle$
$\langle q2,p3 \rangle$	$\langle q3,p3 \rangle$	$\langle q2,p3 \rangle$
$\langle q3,p1 \rangle$	$\langle q3,p1 \rangle$	$\langle q3,p2 \rangle$
$\langle q3,p2 \rangle$	$\langle q3,p2 \rangle$	$\langle q3,p3 \rangle$
$\langle q3,p3 \rangle$	$\langle q3,p3 \rangle$	$\langle q3,p3 \rangle$

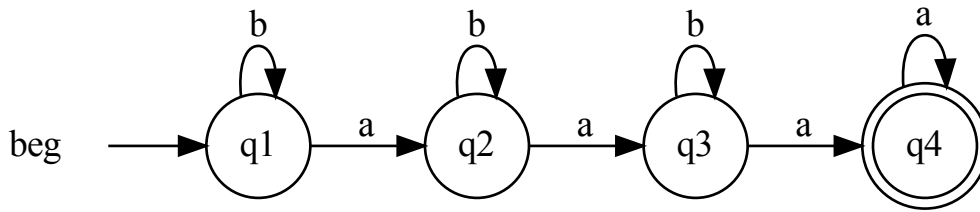
Результирующий автомат:



$$2. L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \geq 3 \wedge |w| \text{ is odd} \}$$

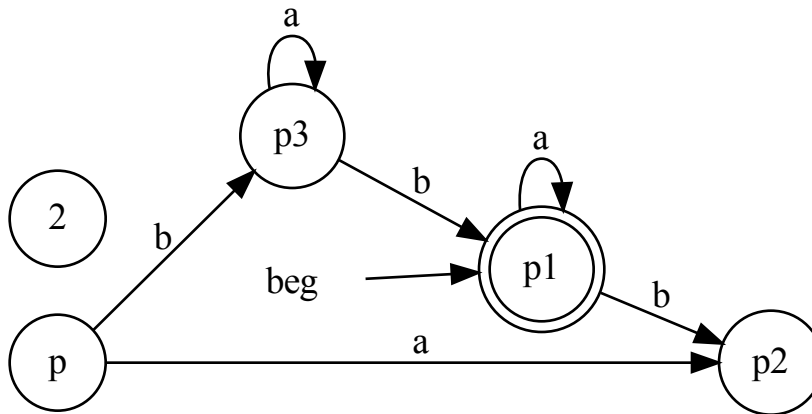
Разбиваем на два автомата:

Автомат №1:



$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \{a, b\} \\ Q_1 &= \{q1, q2, q3, q4\} \\ s_1 &= \{q1\} \\ T_1 &= \{q4\}\end{aligned}$$

АВТОМАТ №2:



$$\begin{aligned}\Sigma_2 &= \{a, b\} \\ Q_2 &= \{p1, p2\} \\ s_2 &= \{p1\} \\ T_2 &= \{p2\}\end{aligned}$$

ИТОГ:

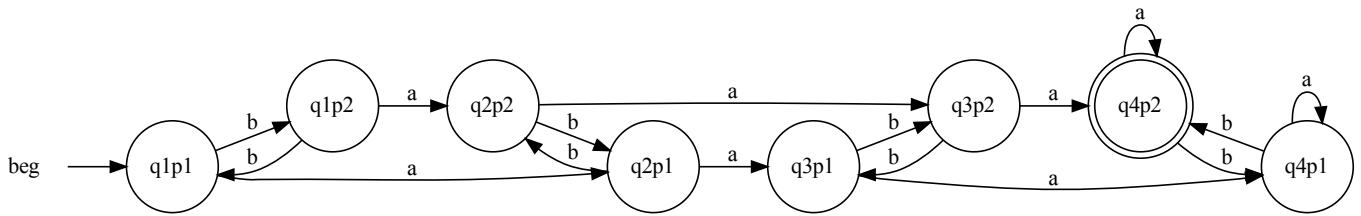
$$\begin{aligned}\Sigma &= \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{a, b\} \\ Q &= Q_1 \times Q_1 = \{ \langle q1, p1 \rangle, \langle q1, p2 \rangle, \langle q2, p1 \rangle, \langle q2, p2 \rangle, \langle q3, p1 \rangle, \langle q3, p2 \rangle, \\ &\quad \langle q4, p1 \rangle, \langle q4, p2 \rangle \} \\ s &= \langle s_1, s_2 \rangle = \{ \langle q1, p1 \rangle \}\end{aligned}$$

$$T = T_1 \times T_2 = \{ \langle q4, p2 \rangle \}$$

Таблица состояний:

—	a	b
$\langle q1, p1 \rangle$	$\langle q2, p1 \rangle$	$\langle q1, p2 \rangle$
$\langle q1, p2 \rangle$	$\langle q2, p2 \rangle$	$\langle q1, p1 \rangle$
$\langle q2, p1 \rangle$	$\langle q3, p1 \rangle$	$\langle q2, p2 \rangle$
$\langle q2, p2 \rangle$	$\langle q3, p2 \rangle$	$\langle q2, p1 \rangle$
$\langle q3, p1 \rangle$	$\langle q4, p1 \rangle$	$\langle q3, p2 \rangle$
$\langle q3, p2 \rangle$	$\langle q4, p2 \rangle$	$\langle q3, p1 \rangle$
$\langle q4, p1 \rangle$	$\langle q4, p1 \rangle$	$\langle q4, p2 \rangle$
$\langle q4, p2 \rangle$	$\langle q4, p2 \rangle$	$\langle q4, p1 \rangle$

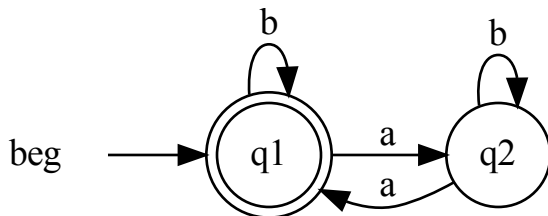
Результирующий автомат:



$$3. L_3 = \{ w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \text{ is even} \wedge |w|_b \text{ multiple of } 3 \}$$

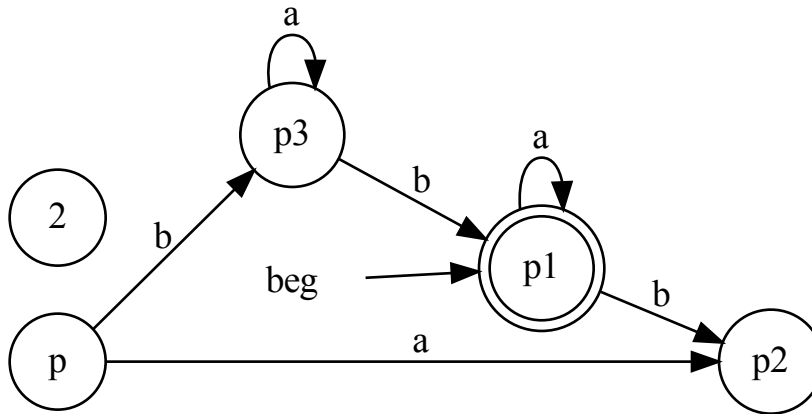
Разбиваем на два автомата:

Автомат №1:



$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \{a, b\} \\ Q_1 &= \{q1, q2\} \\ s_1 &= \{q1\} \\ T_1 &= \{q1\}\end{aligned}$$

Автомат №2:



$$\begin{aligned}\Sigma_2 &= \{a, b\} \\ Q_2 &= \{p1, p2, p3\} \\ s_2 &= \{p1\} \\ T_2 &= \{p1\}\end{aligned}$$

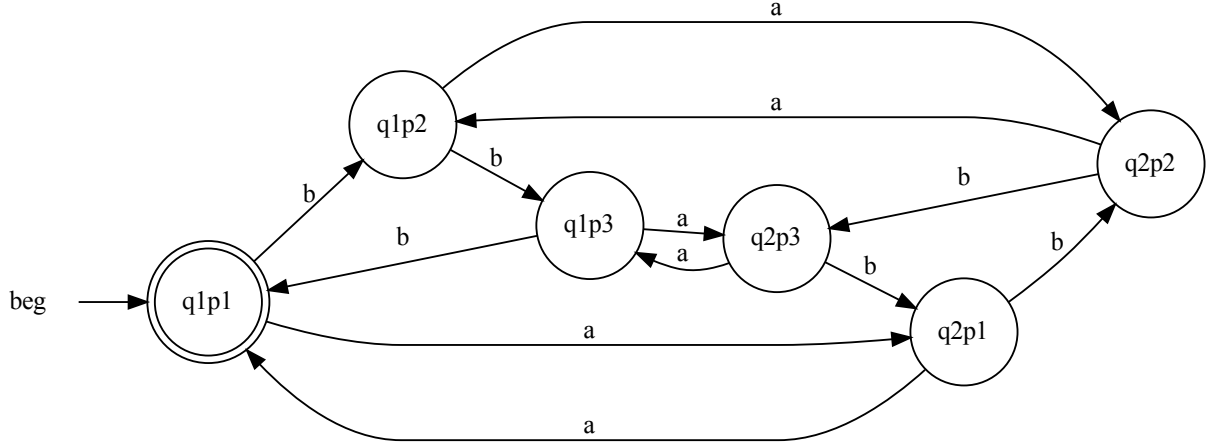
Итог:

$$\begin{aligned}\Sigma &= \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{a, b\} \\ Q &= Q_1 \times Q_2 = \{ \langle q1, p1 \rangle, \langle q1, p2 \rangle, \langle q1, p3 \rangle, \langle q2, p1 \rangle, \langle q2, p2 \rangle, \langle q2, p3 \rangle \} \\ s &= \langle s_1, s_2 \rangle = \{ \langle q1, p1 \rangle \} \\ T &= T_1 \times T_2 = \{ \langle q1, p1 \rangle \}\end{aligned}$$

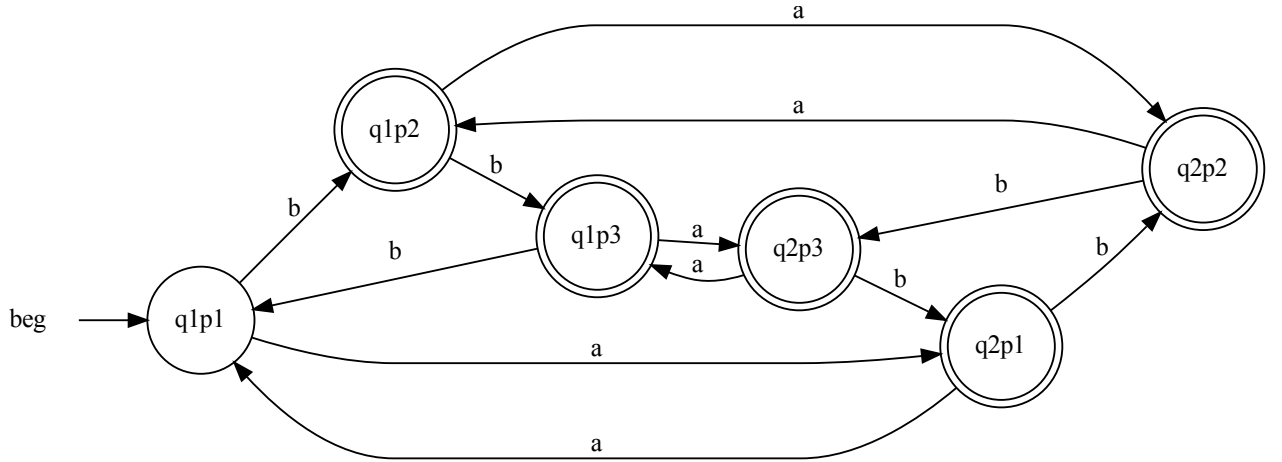
Таблица состояний:

Результирующий автомат:

—	a	b
$\langle q1, p1 \rangle$	$\langle q2, p1 \rangle$	$\langle q1, p2 \rangle$
$\langle q1, p2 \rangle$	$\langle q2, p2 \rangle$	$\langle q1, p3 \rangle$
$\langle q1, p3 \rangle$	$\langle q2, p3 \rangle$	$\langle q1, p1 \rangle$
$\langle q2, p1 \rangle$	$\langle q1, p1 \rangle$	$\langle q2, p2 \rangle$
$\langle q2, p2 \rangle$	$\langle q1, p2 \rangle$	$\langle q2, p3 \rangle$
$\langle q2, p3 \rangle$	$\langle q1, p3 \rangle$	$\langle q2, p1 \rangle$



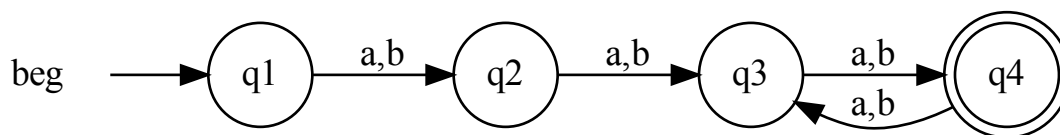
4. $L_4 = \overline{L_3}$



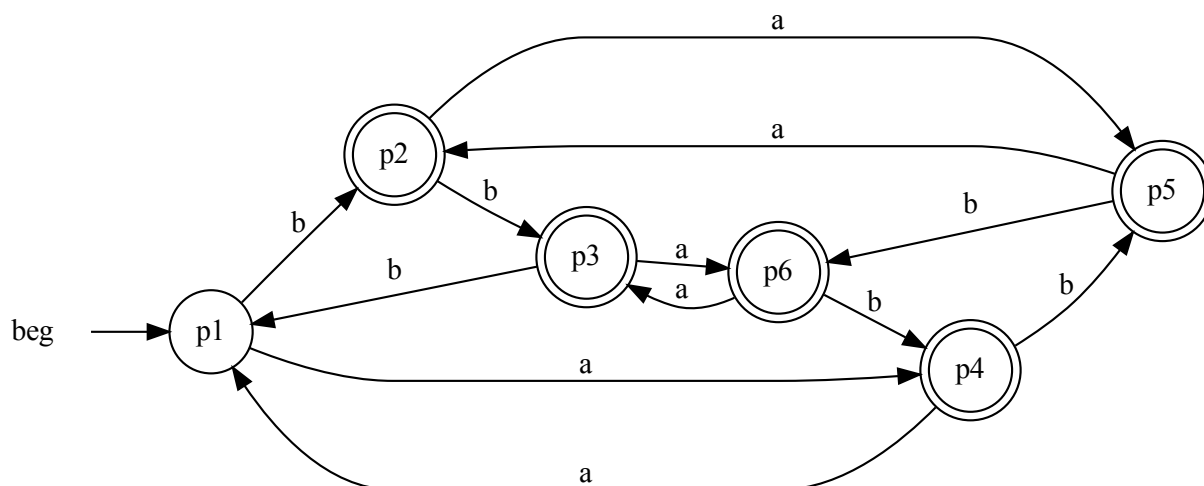
5. $L_5 = L_2 \setminus L_3$

$$L_5 = L_2 \cap \overline{L_3}$$

АВТОМАТ L_2 :



АВТОМАТ $\overline{L_3}$:



Результирующий автомат:

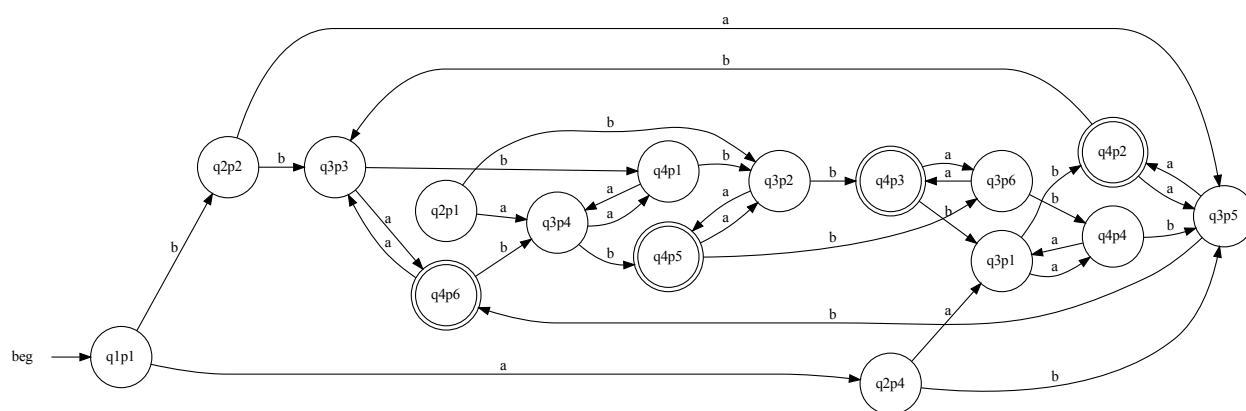


Таблица состояний:

—	a	b
$\langle q1,p1 \rangle$	$\langle q2,p4 \rangle$	$\langle q2,p2 \rangle$
$\langle q1,p2 \rangle$	$\langle q2,p5 \rangle$	$\langle q2,p3 \rangle$
$\langle q1,p3 \rangle$	$\langle q2,p6 \rangle$	$\langle q2,p1 \rangle$
$\langle q1,p4 \rangle$	$\langle q2,p1 \rangle$	$\langle q2,p5 \rangle$
$\langle q1,p5 \rangle$	$\langle q2,p2 \rangle$	$\langle q2,p6 \rangle$
$\langle q1,p6 \rangle$	$\langle q2,p3 \rangle$	$\langle q2,p4 \rangle$
$\langle q2,p1 \rangle$	$\langle q3,p4 \rangle$	$\langle q3,p2 \rangle$
$\langle q2,p2 \rangle$	$\langle q3,p5 \rangle$	$\langle q3,p3 \rangle$
$\langle q2,p3 \rangle$	$\langle q3,p6 \rangle$	$\langle q3,p1 \rangle$
$\langle q2,p4 \rangle$	$\langle q3,p1 \rangle$	$\langle q3,p5 \rangle$
$\langle q2,p5 \rangle$	$\langle q3,p2 \rangle$	$\langle q3,p6 \rangle$
$\langle q2,p6 \rangle$	$\langle q3,p3 \rangle$	$\langle q3,p4 \rangle$
$\langle q3,p1 \rangle$	$\langle q4,p4 \rangle$	$\langle q4,p2 \rangle$
$\langle q3,p2 \rangle$	$\langle q4,p5 \rangle$	$\langle q4,p3 \rangle$
$\langle q3,p3 \rangle$	$\langle q4,p6 \rangle$	$\langle q4,p1 \rangle$
$\langle q3,p4 \rangle$	$\langle q4,p1 \rangle$	$\langle q4,p5 \rangle$
$\langle q3,p5 \rangle$	$\langle q4,p2 \rangle$	$\langle q4,p6 \rangle$
$\langle q3,p6 \rangle$	$\langle q4,p3 \rangle$	$\langle q4,p4 \rangle$
$\langle q4,p1 \rangle$	$\langle q3,p4 \rangle$	$\langle q3,p2 \rangle$
$\langle q4,p2 \rangle$	$\langle q3,p5 \rangle$	$\langle q3,p3 \rangle$
$\langle q4,p3 \rangle$	$\langle q3,p6 \rangle$	$\langle q3,p1 \rangle$
$\langle q4,p4 \rangle$	$\langle q3,p1 \rangle$	$\langle q3,p5 \rangle$
$\langle q4,p5 \rangle$	$\langle q3,p2 \rangle$	$\langle q3,p6 \rangle$
$\langle q4,p6 \rangle$	$\langle q3,p3 \rangle$	$\langle q3,p4 \rangle$

3 Построение минимального ДКА по регулярному выражению.

1. $(ab + aba)^*a$

Недетерминированный автомат:

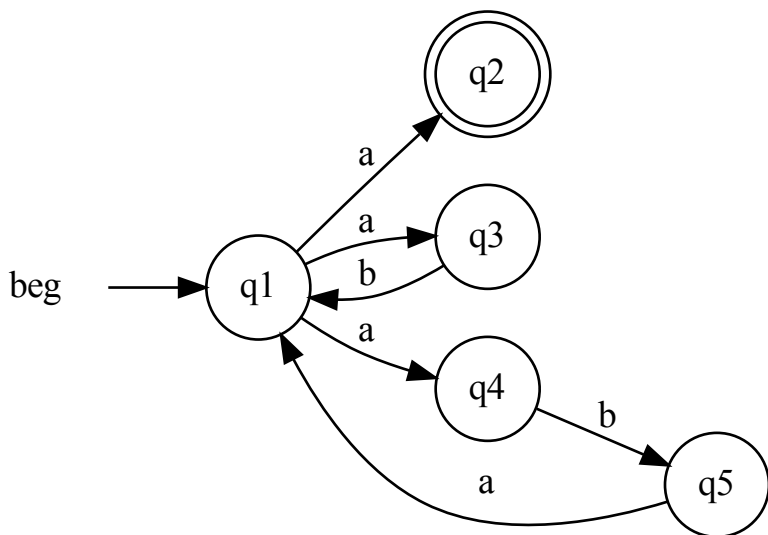
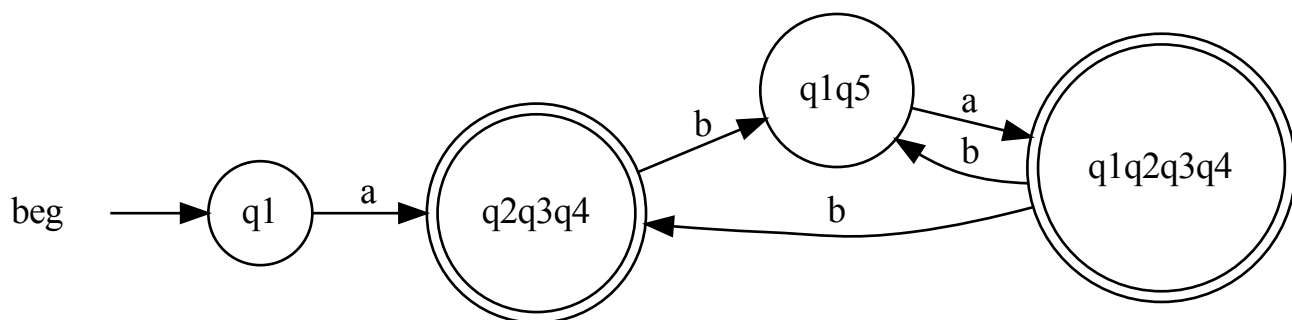


Таблица преобразования НКА в ДКА:

—	a	b
q1	q2,q3,q4	-
q2,q3,q4	-	q1,q5
q1,q5	q1,q2,q3,q4	-
q1,q2,q3,q4	q2,q3,q4	q1,q5

Детерминированный автомат:



2. $a(a(ab)^*b)^*(ab)^*$

Недетерминированный автомат:

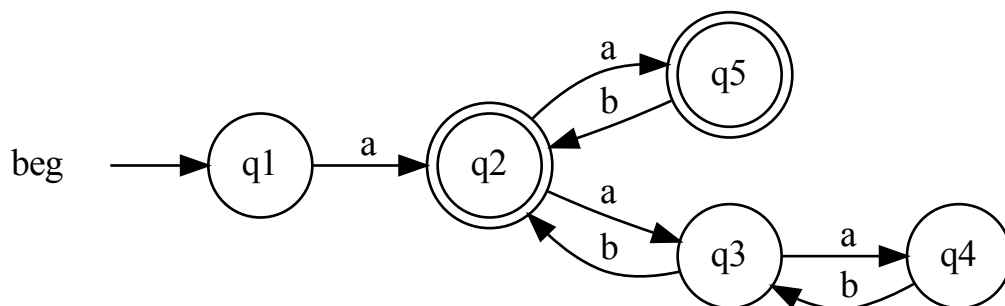
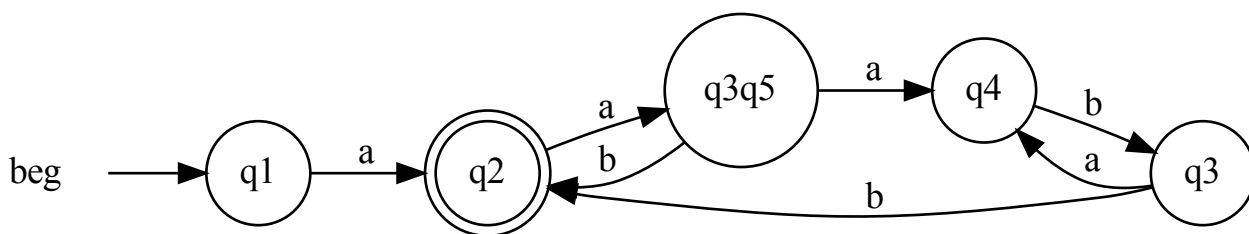


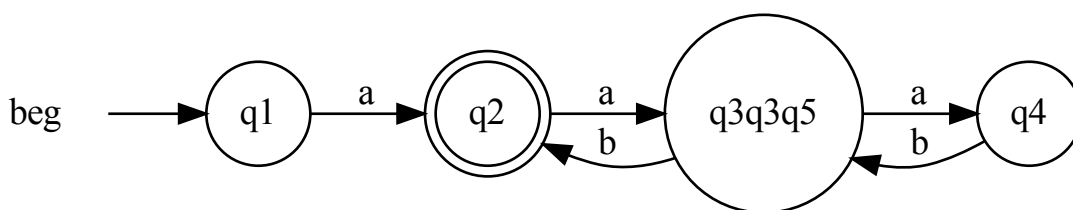
Таблица преобразования НКА в ДКА:

—	a	b
q1	q2	-
q1,q2	q3,q5	-
q3,q5	q4	q2
q4	-	q3
q3	q4	q2

Детерминированный автомат:



Минимизированный детерминированный автомат:



3. $(a + (a + b)(a + b)b)^*$

Недетерминированный автомат:

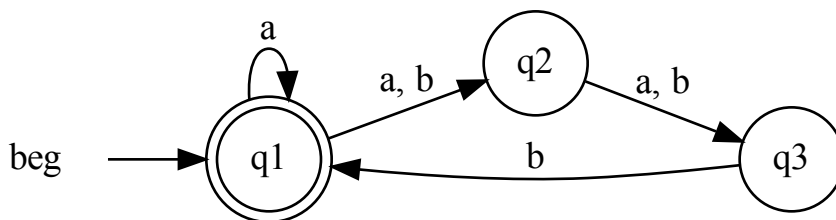
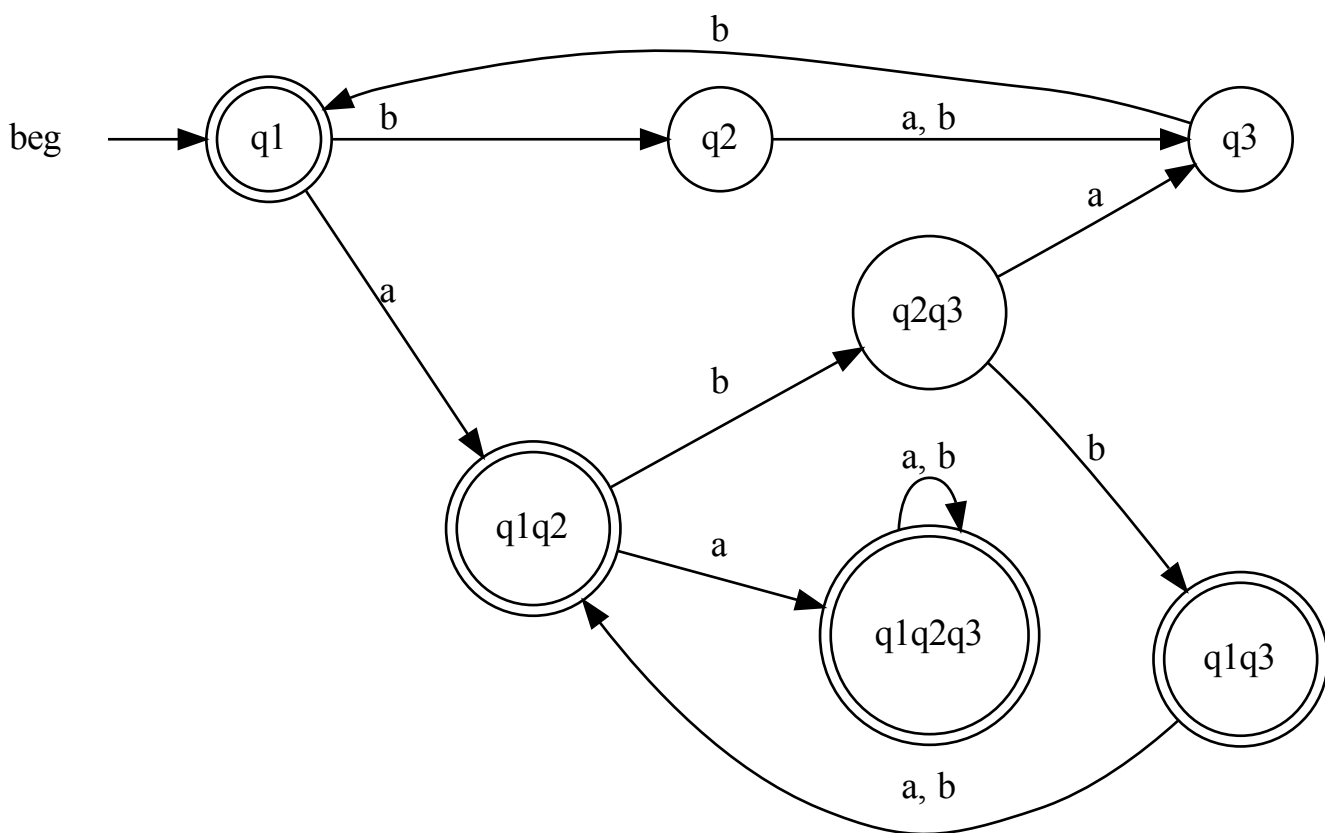


Таблица преобразования НКА в ДКА:

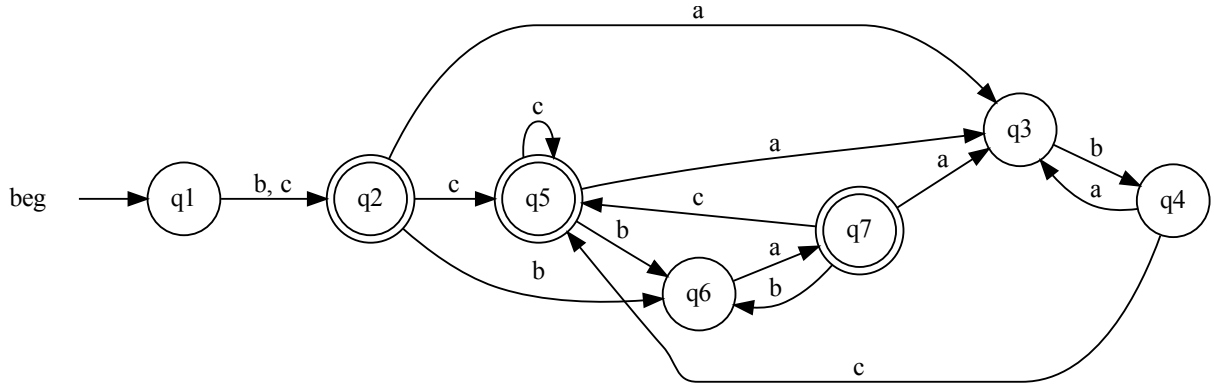
Детерминированный автомат:

—	a	b
q1	q1,q2	q2
q1,q2	q1,q2,q3	q2,q3
q2	q3	q3
q1,q2,q3	q1,q2,q3	q1,q2,q3
q2,q3	q3	q1,q2
q3	-	q1
q1,q3	q1,q2	q1,q2



4. $(b + c)((ab)^*c + (ba)^*)^*$

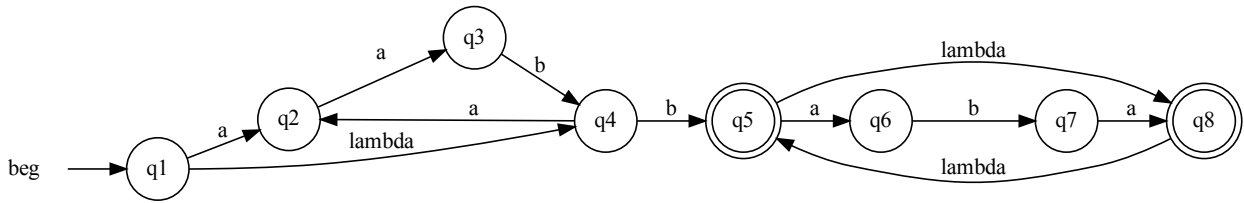
Детерминированный автомат:



4 Определение, является ли язык регулярным или нет.

$$1. L = \{(aab)^n b(aba)^m : n \geq 0, m \geq 0\}$$

Т.к. по этому языку можно составить ДКА, он является регулярным:



$$2. L = \{uaav \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, |u|_b |v|_a\}$$

Применяется лемма о разрастании. Фиксируется $\forall n \in \mathbb{N}$, затем, разбирается слово $\omega = b^n a a a^n$, $|\omega| = 2n + 2 \geq n$. После - все разбиения данного слова $\omega = xyz$ такие, что $|y| \neq 0$, $|xy| \leq n$:

$$x = b^k, y = b^l, z = b^{n-k-l} a a a^n, \text{ где } 1 \leq k + l \leq n \wedge l > 0$$

Других допустимых разбиений - нет.

Для любых подобных разбиений $xy^0z \notin L$. \Rightarrow лемма не выполняется $\Rightarrow L$ не является регулярным языком.

$$3. L = \{a^m w : w \in \{a, b\}^*, 1|w|_b m\}$$

Применяется лемма о разрастании. Фиксируется $\forall n \in N$, затем разбирается слово $\omega = a^n b^n$, $|\omega| = 2n$. После - все разбиения данного слова $\omega = xyz$ такие, что $|y| \neq 0$, $|xy| \leq n$:

$$x = a^l, y = a^m, z = a^{n-l-m} b^n, \text{ где } l + m \wedge m \neq 0$$

Других допустимых разбиений - нет.

Выполняется накачка:

$$xy^i z = a^l (a^m)^i a^{n-l-m} b^n = a^{n-mi} b^n \notin L, i \neq 0 \in N$$

Лемма не выполняется $\Rightarrow L$ не является регулярным языком.

$$4. L = \{a^k b^m a^n : k = n \vee m > 0\}$$

Применяется лемма о разрастании. Фиксируется $\forall n \in N$, затем, разбирается слово $\omega = a^n b a^n$, $|\omega| = 2n + 1$. После - все разбиения данного слова $\omega = xyz$ такие, что $|y| \neq 0$, $|xy| \leq n$:

$$x = a^k, y = a^m, z = a^{n-k-m} b a^n, \text{ где } k + m \wedge m \neq 0$$

Других допустимых разбиений - нет.

Выполняется накачка:

$$xy^i z = a^k (a^m)^i a^{n-k-m} b a^n = a^{n+m(i-1)} b a^n \notin L, i \neq 1 \in N$$

Противоречие \Rightarrow лемма не выполняется $\Rightarrow L$ не является регулярным языком.

$$5. L = \{u c v : u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, u \neq v^R\}$$

Применяется лемма о разрастании. Фиксируется $\forall n \in N$, затем, разбирается слово $\omega = (ab)^n c (ab)^n = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{4n+1}$, $|\omega| = 4n + 1$. Следом, разбираются все разбиения слова $\omega = xyz$, с условием $|y| \neq 0$, $|xy| \leq n$:

$$x = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k, y = \alpha_{k+1} \dots \alpha_{k+m}, z = \alpha_{k+m+1} \dots \alpha_{4n+1} c (ab)^n, \text{ где } k + m \wedge m \neq 0$$

Других допустимых разбиений - нет.

Выполняется накачка:

$$xy^iz = (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k)(\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+m})^i(\alpha_{k+m+1}\ldots\alpha_{4n+1}c(ab)^n)$$

При $i = 2$:

$$xy^2z = (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k)(\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+m})^2(\alpha_{k+m+1}\ldots\alpha_{4n+1}c(ab)^n) \notin L$$

Лемма не выполняется $\Rightarrow L$ не является регулярным языком.