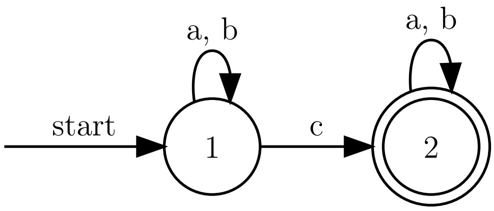
ДЗ №1: Регулярные языки и конечные автоматы

Новичихин И.В.

8 апреля 2022 г.

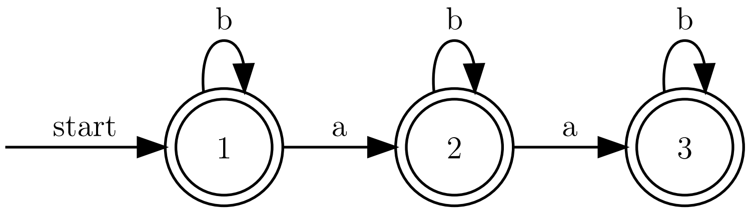
1 Задание №1. Построить конечный автомат, распознающий язык

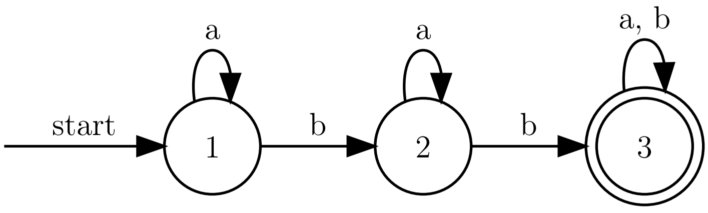
1) $L_1 = \{\omega \in \{a,b,c\}^* : |\omega|_c = 1\}$



2) $L_2 = \{\omega \in \{a,b\}^* : |\omega|_a \leqslant 2, |\omega|_b \geqslant 2\}$

Разделим язык L_2 на два языка $A = \{\omega \in \{a,b\}^* : |\omega|_a \leqslant 2\}$ и $B = \{\omega \in \{a,b\}^* : |\omega|_b \geqslant 2\}$

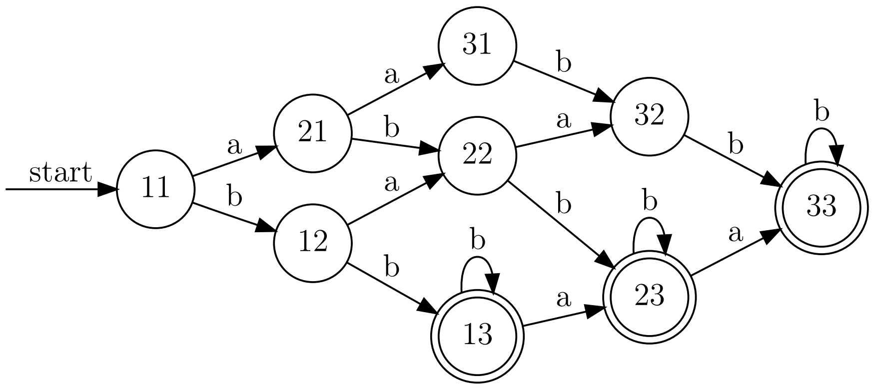




$L_2 = A \times B$
Множество конечных состояний в L_2: 13, 23, 33
Таблица переходов:

A	B	переход по a	переход по b
1	1	21	12
1	2	22	13
1	3	23	13
2	1	31	22
2	2	32	23
2	3	33	23
3	1	-	32
3	2	-	33
3	3	-	33

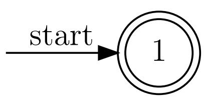
Автомат для L_1:



3) $L_3 = \{\omega \in \{a,b\}^* : |\omega|_a \neq |\omega|_b\}$

Этот язык не получится описать ДКА, потому что автоматы беспамятные <> , то есть не получится запомнить в ДКА разное ли количество символов a и b

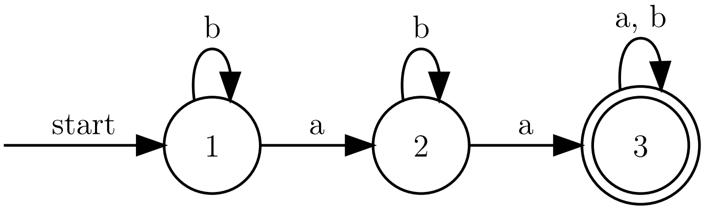
4) $L_4 = \{\omega \in \{a,b\}^* : \omega\omega = \omega\omega\omega\}$

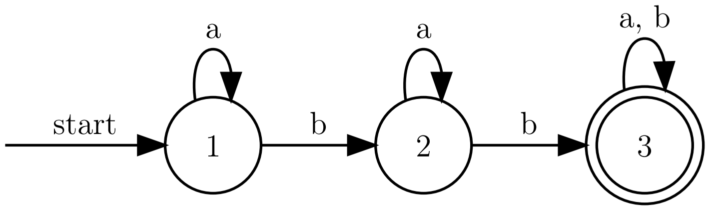


2 Задание №2. Построить конечный автомат, используя прямое произведение

1) $L_1 = \{\omega \in \{a,b\}^* : |\omega|_a \geqslant 2 \land |\omega|_b \geqslant 2\}$

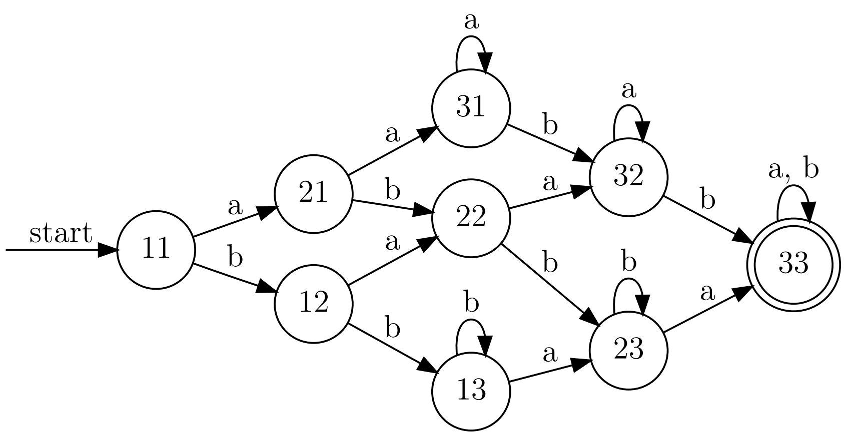
$A = \{\omega \in \{a,b\}^* : |\omega|_a \geqslant 2\}$
$B = \{\omega \in \{a,b\}^* : |\omega|_b \geqslant 2\}$



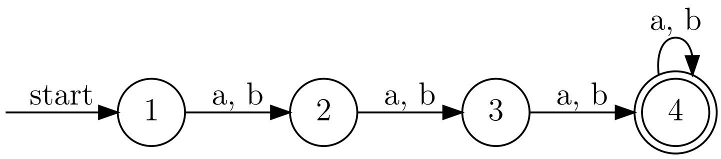


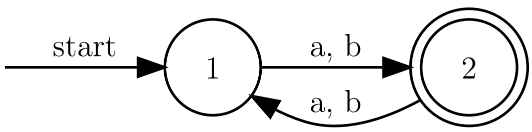
$L_1 = A \times B$,
$\Sigma = \{a,b\}$,
$s = \{11\}$,
$T = \{33\}$.
переходы:

A	B	переход по a	переход по b
1	1	21	12
1	2	22	13
1	3	23	13
2	1	31	22
2	2	32	23
2	3	33	23
3	1	31	32
3	2	32	33
3	3	33	33



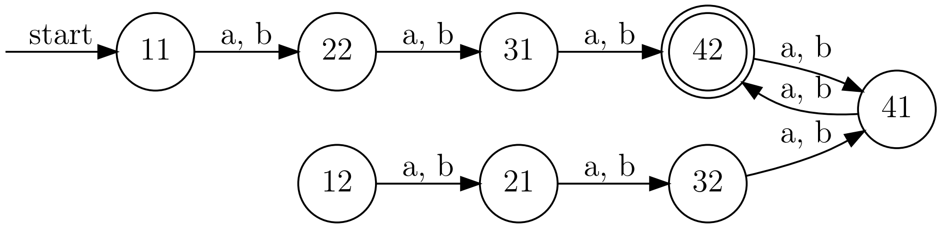
2) $L_2 = \{\omega \in \{a,b\}^* : |\omega| \geqslant 3 \wedge |\omega|$ нечётное$\}$
$A = \{\omega \in \{a,b\}^* : |\omega| \geqslant 3\}$
$B = \{\omega \in \{a,b\}^* : |\omega|$ нечётное$\}$



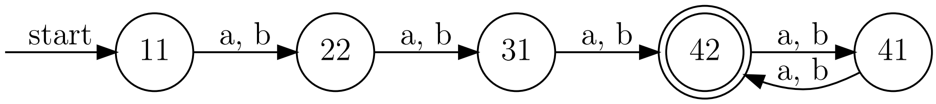


$L_2 = A \times B$
$\Sigma = \{a,b\}$,
$s = 11$,
$T = \{33\}$.
переходы:

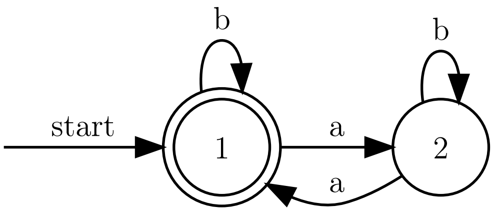
A	B	переход по a или b
1	1	22
1	2	21
2	1	32
2	2	31
3	1	42
3	2	41
4	1	42
4	2	41

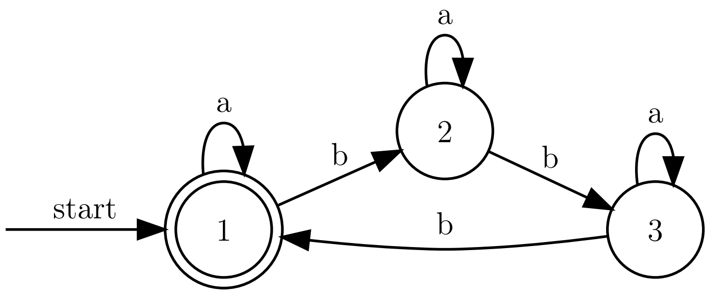


ДКА можно упростить до следующего вида:



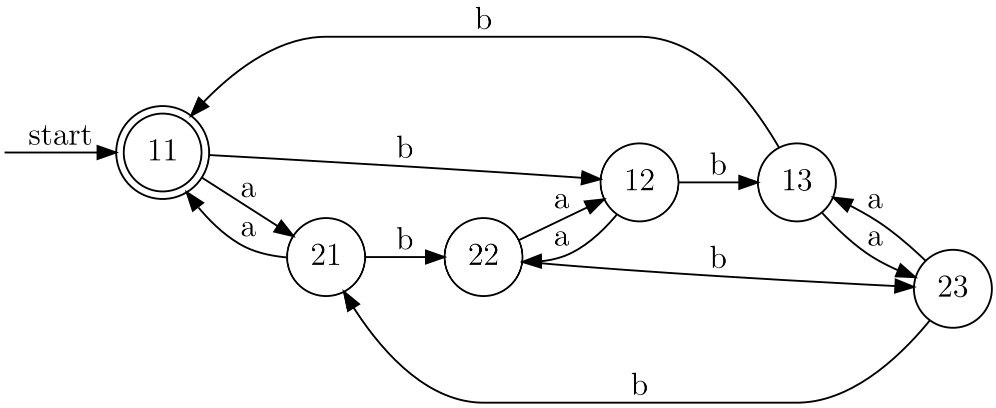
3) $L_3 = \{\omega \in \{a,b\}^* : |\omega|_a$ чётно $\wedge\ |\omega|_b$ кратно $3\}$
$A = \{\omega \in \{a,b\}^* : |\omega|_a$ чётно$\}$
$B = \{\omega \in \{a,b\}^* : |\omega|_b$ кратно $3\}$:





$L_3 = A \times B$,
$\Sigma = \{a,b\}$,
$s = 11$,
$T = \{11\}$.
переходы:

A	B	переход по a	переход по b
1	1	21	12
1	2	22	13
1	3	23	11
2	1	11	22
2	2	12	23
2	3	13	21

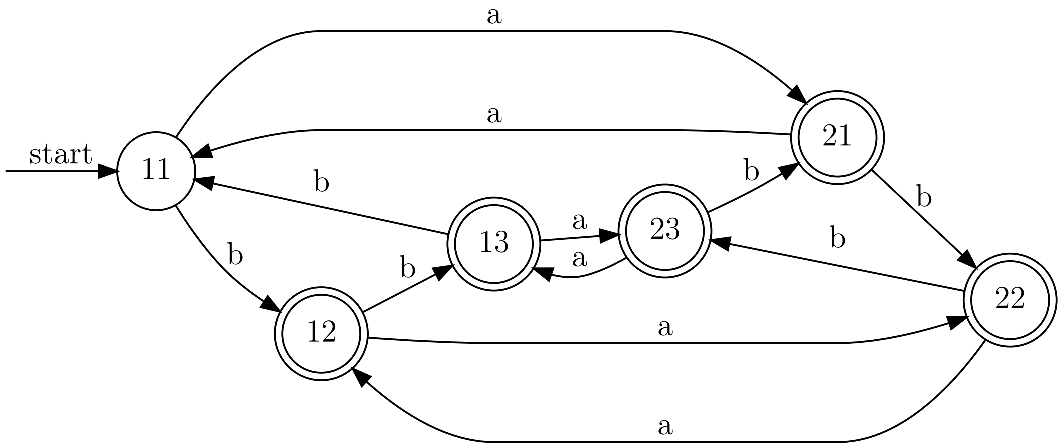


4) $L_4 = \neg L_3$

$T_4 = Q_3 \setminus T_3 = \{12, 13, 21, 22, 23\}$
всё остальное такое же как в L_3

$\Sigma = \{a,b\}$,
$s = 11$,
переходы:

A	B	переход по a	переход по b
1	1	21	12
1	2	22	13
1	3	23	11
2	1	11	22
2	2	12	23
2	3	13	21



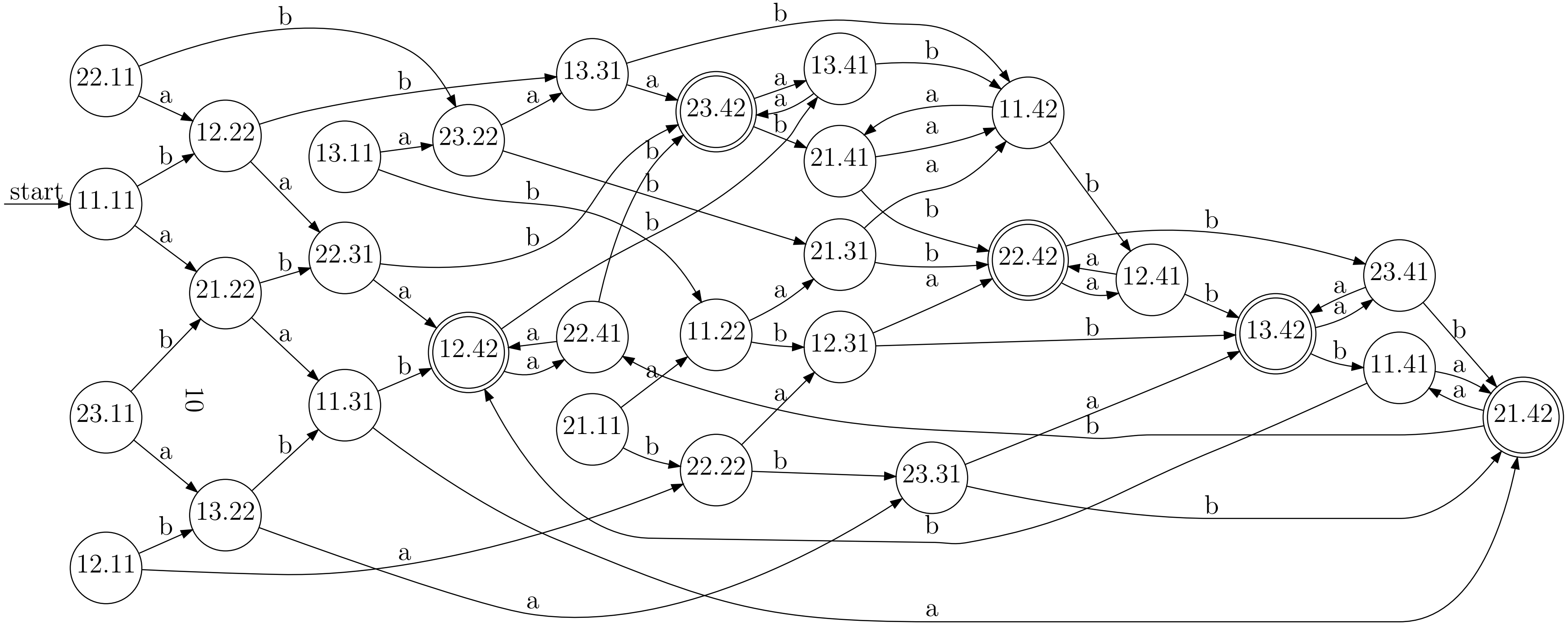
5) $L_5 = L_2 \setminus L_3$

$L_5 = L_2 \setminus L_3 = L_2 \cap \neg L_3 = \neg L_3 \times L_2$,

$\Sigma = \{a,b\}$,
$s = \langle 11{,}11 \rangle$,
$T = \{\langle 12{,}42 \rangle, \langle 13{,}42 \rangle, \langle 21{,}42 \rangle, \langle 22{,}42 \rangle, \langle 23{,}42 \rangle\}$

переходы для L_5:

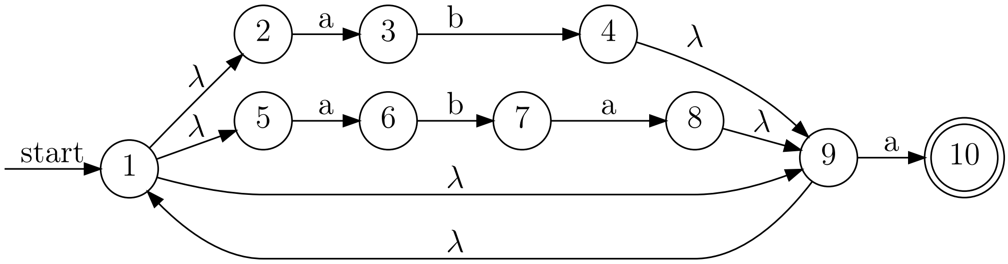
$\neg L_3$	L_2	переход по a	переход по b
11	11	21, 22	12, 22
11	22	21, 31	12, 31
11	31	21, 42	12, 42
11	42	21, 41	12, 41
11	41	21, 42	12, 42
12	11	22, 22	13, 22
12	22	22, 31	13, 31
12	31	22, 42	13, 42
12	42	22, 41	13, 41
12	41	22, 42	13, 42
13	11	23, 22	11, 22
13	22	23, 31	11, 31
13	31	23, 42	11, 42
13	42	23, 41	11, 41
13	41	23, 42	11, 42
21	11	11, 22	22, 22
21	22	11, 31	22, 31
21	31	11, 42	22, 42
21	42	11, 41	22, 41
21	41	11, 42	22, 42
22	11	12, 22	23, 22
22	22	12, 31	23, 31
22	31	12, 42	23, 42
22	42	12, 41	23, 41
22	41	12, 42	23, 42
23	11	13, 22	21, 22
23	22	13, 31	21, 31
23	31	13, 42	21, 42
23	42	13, 41	21, 41
23	41	13, 42	21, 42


start
22.11
11.11
23.11
12.11
12.22
21.22
13.22
13.11
23.22
22.31
11.31
13.31
12.42
23.42
22.41
21.11
11.22
22.22
13.41
21.41
21.31
12.31
23.31
11.42
22.42
12.41
13.42
23.41
11.41
21.42

3 Задание №3. Построить минимальный ДКА по регулярному выражению

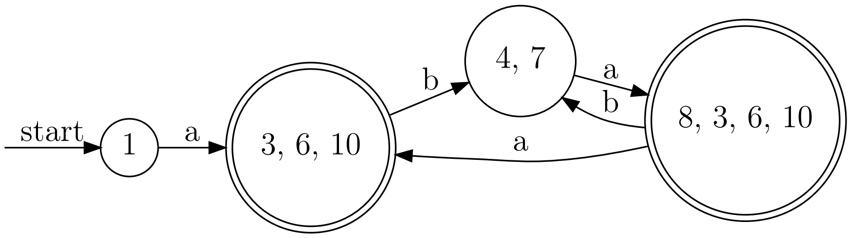
1) $(ab + aba)^*a$

Сначала составим недетерминированный конечный автомат, а потом детерминированный



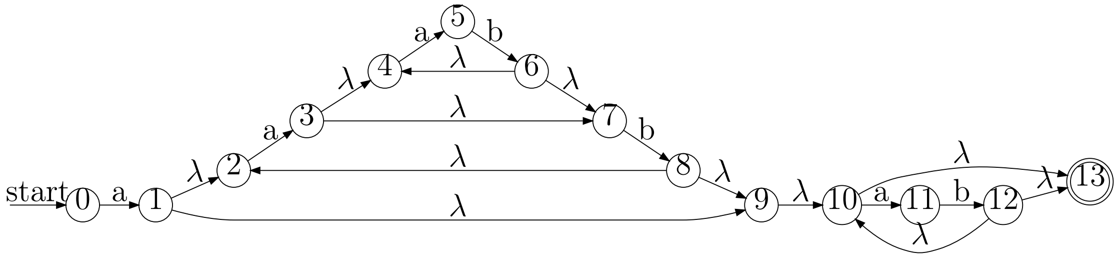
	a	b
1	3, 6, 10	
3, 6, 10		4, 7
4, 7	3, 6, 8, 10	
3, 6, 8, 10	3, 6, 10	4, 7

ДКА



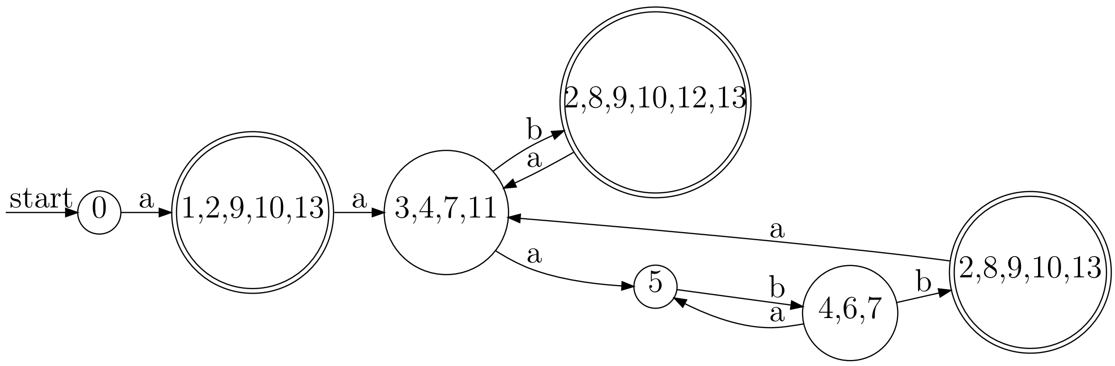
2) $a(a(ab)^*b)^*(ab)^*$

НКА



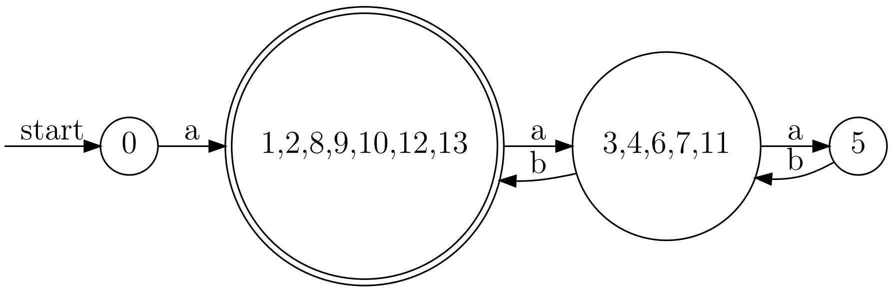
Построим эквивалентный ДКА

Q	a	b
0	1,2,9,10,13	-
1,2,9,10,13	3,4,7,11	-
3,4,7,11	5	2,8,9,10,12,13
5	-	4,6,7
2,8,9,10,12,13	3,4,7,11	-
4,6,7	5	2,8,9,10,13
2,8,9,10,13	3,4,7,11	-

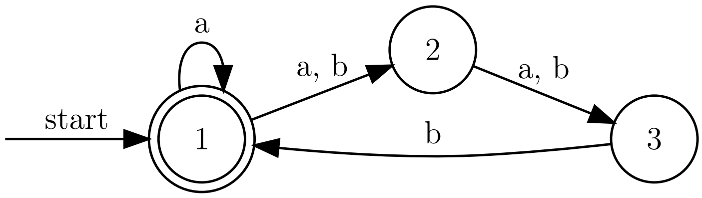


{1,2,9,10,13}, {2,8,9,10,12,13}, {2,8,9,10,13} эквивалентны

{3,4,7,11}, {4,6,7} эквивалентны

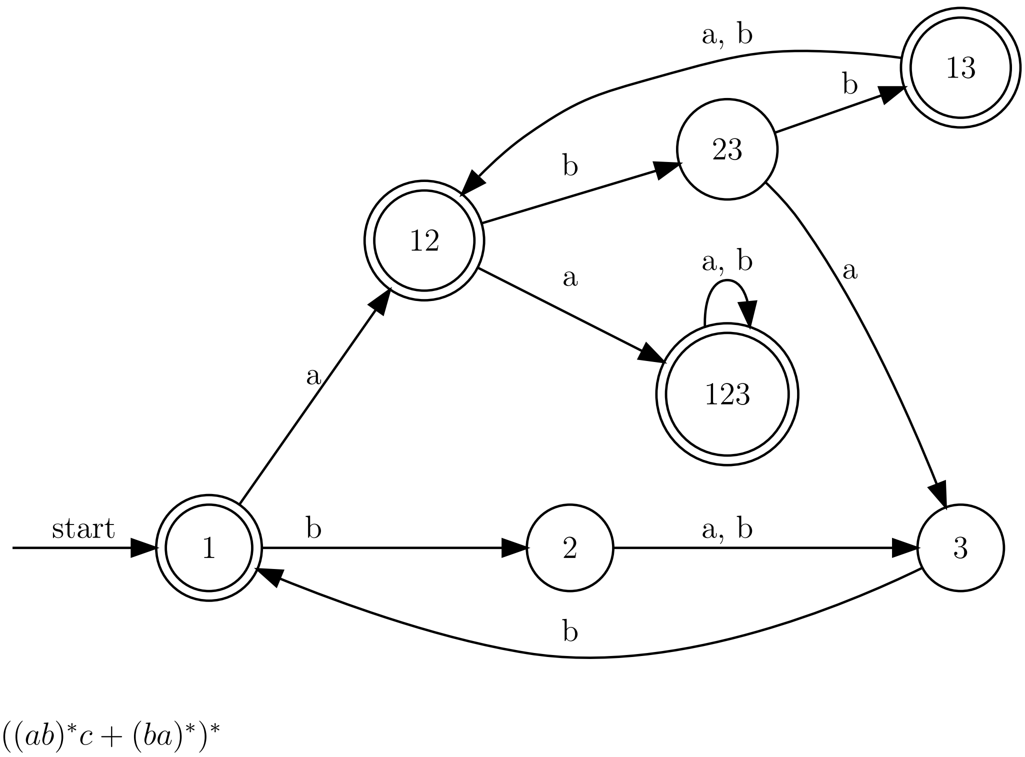


3) $(a + (a + b)(a + b)b)^*$
НКА

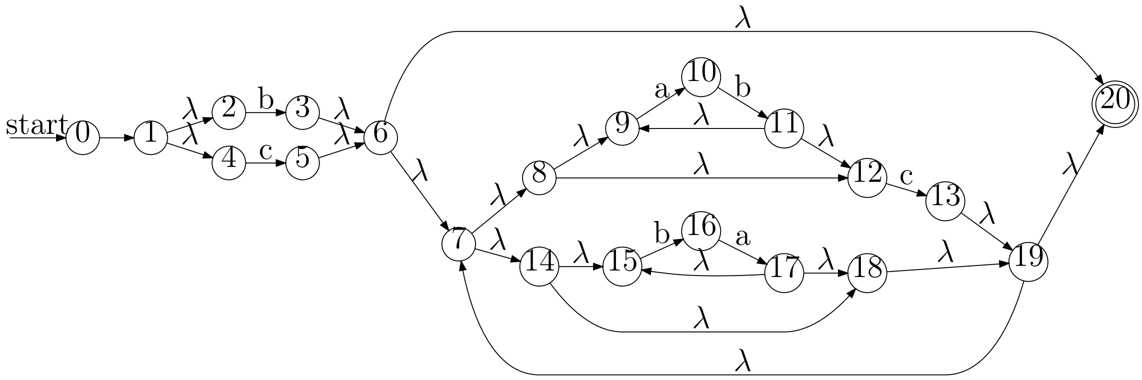


Построим эквивалентный ДКА

Q	a	b
1	12	2
12	123	23
2	3	3
123	123	123
23	3	13
3	-	1
13	12	12

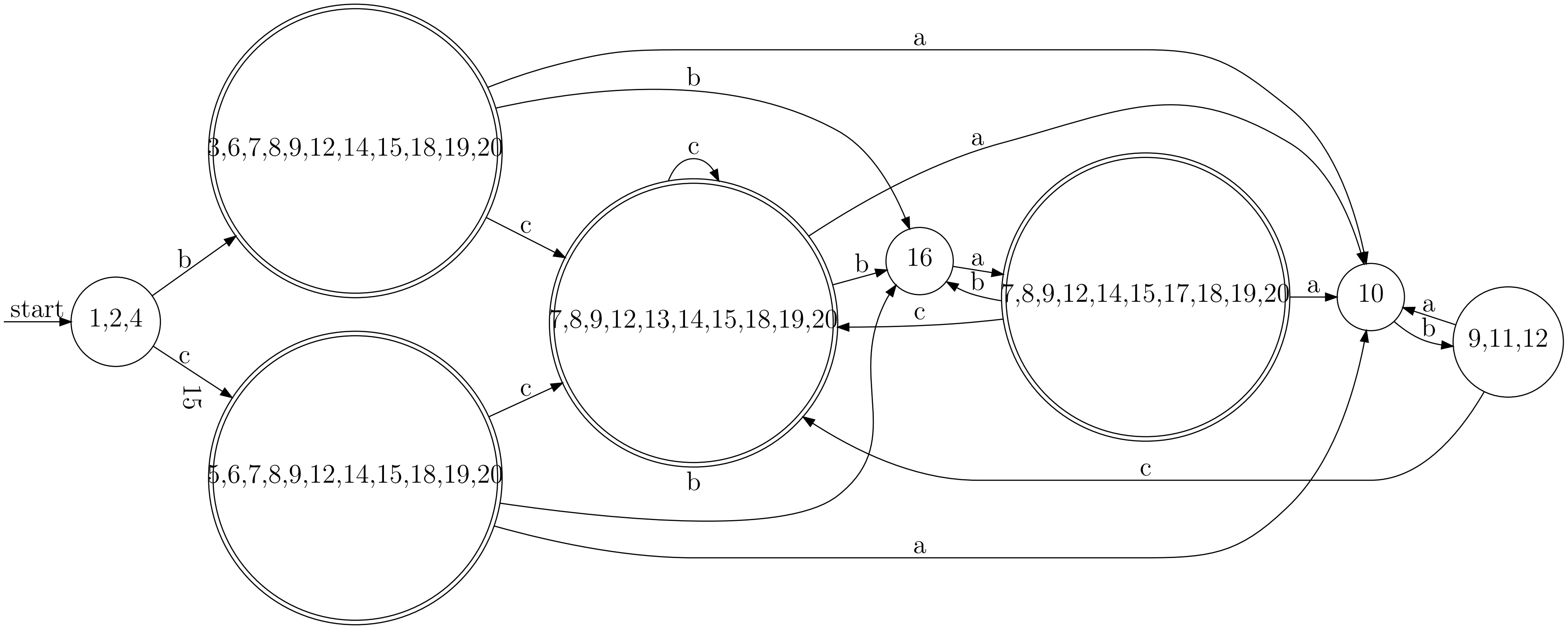


4) $(b+c)((ab)^*c+(ba)^*)^*$
НКА

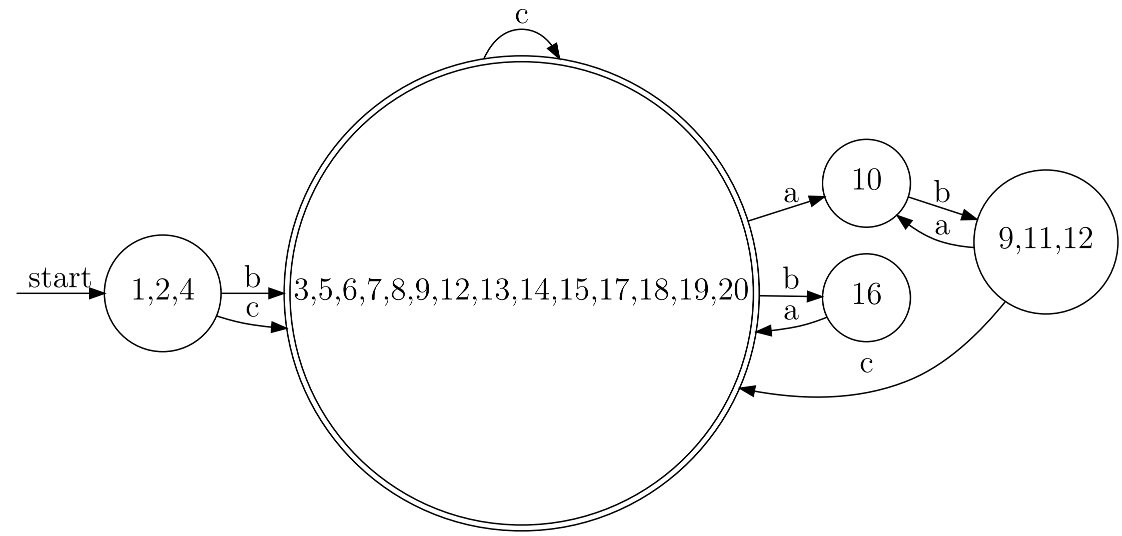


Построим эквивалентный ДКА

Q	a	b	c
1,2,4	-	3,6,7,8,9,12,14,15,18,19,20	5,6,7,8,9,12,14,15,18,19,20
3,6,7,8,9,12,14,15,18,19,20	10	16	7,8,9,12,13,14,15,18,19,20
5,6,7,8,9,12,14,15,18,19,20	10	16	7,8,9,12,13,14,15,18,19,20
10	-	9,11,12	-
16	7,8,9,12,14,15,17,18,19,20	-	-
7,8,9,12,13,14,15,18,19,20	10	16	7,8,9,12,13,14,15,18,19,20
9,11,12	10	-	7,8,9,12,13,14,15,18,19,20
7,8,9,12,14,15,17,18,19,20	10	16	7,8,9,12,13,14,15,18,19,20

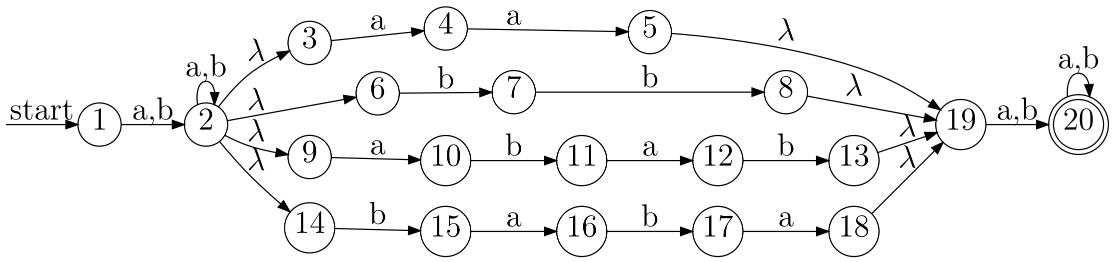

start
1,2,4
3,6,7,8,9,12,14,15,18,19,20
5,6,7,8,9,12,14,15,18,19,20
7,8,9,12,13,14,15,18,19,20
16
7,8,9,12,14,15,17,18,19,20
10
9,11,12
a
b
c

уберем эквивалентные вершины:

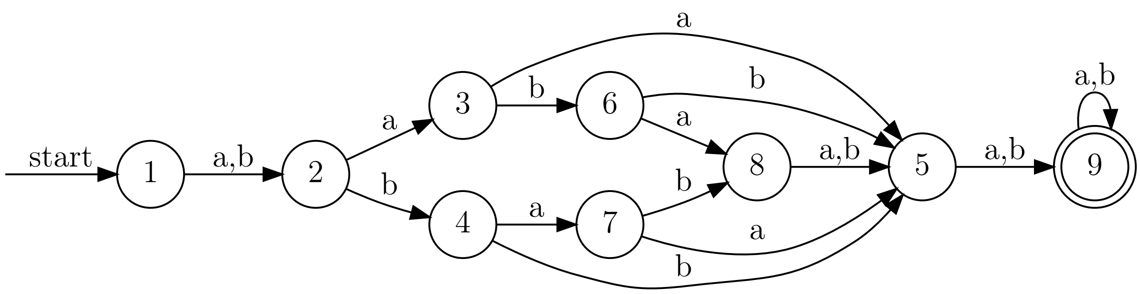


5) $(a+b)^{+}(aa+bb+abab+baba)(a+b)^{+}$

НКА



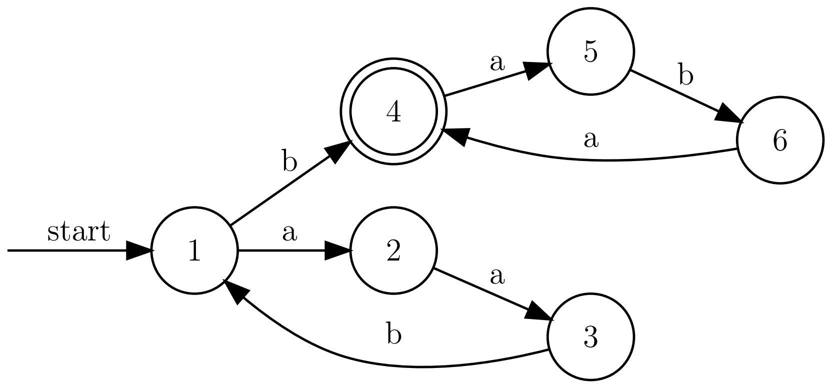
минимальный ДКА



4 Задание №4. Определить является ли язык регулярным или нет

1) $L = \{(aab)^n b(aba)^m : n \geqslant 0, m \geqslant 0\}$

Язык является регулярным, построим ДКА



2) $L = \{uaav : u \in \{a,b\}^*,\ v \in \{a,b\}^*, |u|_b \geqslant |v|_a\}$

Применим лемму о разрастании. Зафиксируем $\forall n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим слово $\omega = b^n aaa^n,\ |\omega| = 2n+2 \geq n$. Теперь рассмотрим все разбиения этого слова $\omega = xyz$ такие, что $|y| \neq 0,\ |xy| \leq n$:

$x = b^k,\ y = b^l,\ z = b^{n-k-l}aaa^n$,

где $1 \leq k + l \leq n\ \wedge\ l > 0$

Других разбиенний, удовлетворяющих данным условиям, нет. Для любого из таких разбиений слово $xy^0z \notin L$. Лемма не выполняется, значит, L не регулярный язык.

3) $L = \{a^m w : w \in \{a,b\}^*,\ 1 \geqslant |w|_b \geqslant m\}$

Применим лемму о разрастании. Зафиксируем $\forall n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим слово $\omega = a^n b^n,\ |\omega| = 2n \geqslant n$. Теперь рассмотрим все разбиения этого слова $\omega = xyz$ такие, что $|y| \neq 0,\ |xy| \leq n$:

$x = a^l,\ y = a^m,\ z = a^{n-l-m}b^n$,

где $l + k \leqslant n\ \wedge\ m \neq 0$

Других разбиенний, удовлетворяющих данным условиям, нет. Накачка:

$xy^0z = a^l(a^m)^0 a^{n-l-m}b^n = a^{n-m}b^n \notin L,\ i \geqslant 0 \in \mathbb{N}$

Лемма не выполняется, значит, L не регулярный язык.

4) $L = \{a^k b^m a^n : k = n \vee m > 0\}$

Применим лемму о разрастании. Зафиксируем $\forall n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим слово $\omega = a^n b a^n,\ |\omega| = 2n + 1 \geqslant n$. Теперь рассмотрим все разбиения этого слова $\omega = xyz$ такие, что $|y| \neq 0,\ |xy| \leq n$:

$x = a^i,\ y = a^j,\ z = a^{n-i-j} b a^n$,

где $i + j \leqslant n$

Других разбиенний, удовлетворяющих данным условиям, нет. Накачка: $xy^k z = a^i (a^j)^k a^{n-i-j} b a^n = a^{n+j(k-1)} b a^n \notin L,\ k \geqslant 2 \in \mathbb{N}$ Получили противоречие, значит лемма не выполняется, следовательно, L не регулярный язык.

5) $L = \{ucv : u \in \{a, b\}^*,\ v \in \{a, b\}^*, u \neq v^R\}$

Рассмотрим отрицание языка L

$\overline{L} = \{ucv \mid u \in \{a,b\}^*, v \in \{a,b\}^*, u = v^R\}$

Применим лемму о разрастании. Зафиксируем $\forall n > 0$. Возьмем слово $w = a^n c a^n, |w| = n + 1 + n \geq n$.

Пусть $0 < i < n$. Тогда составим разбиение:

$x = a^{n-i}$

$y = a^i$

$z = ca^n$

$\forall k \geq 0,\ xy^k z \in L$.

$xy^k z = a^{n-i} a^{ik} c a^n = a^{n-i+ik} c a^n = a^{n+i(k-1)} c a^n$

При $k > 1$ условие $u = v^R$ не выполняется. Значит язык $\overline{L}$ не регулярный

Следовательно и язык L не регулярный.