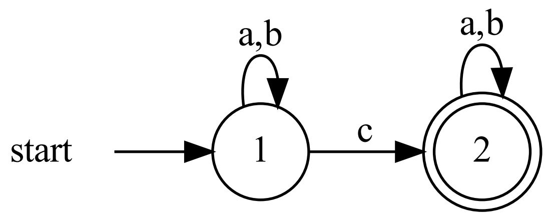
Домашнее задание №1
Регулярные языки и конечные автоматы

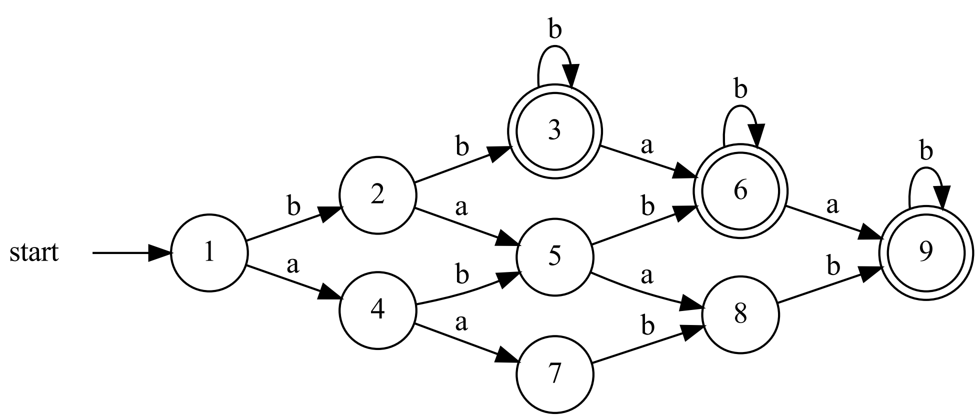
Содержание

1 Задание №1. Построить конечный автомат, распознающий язык.

1. $L = \{w \in \{a, b, c\}* \mid |w|_c = 1\}$
   Данный язык включает все слова из букв $\{a, b, c\}$, но содержащие только одну букву c.

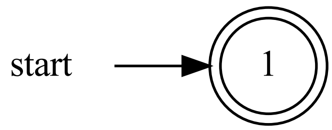


2. $L = \{w \in \{a, b\}* \mid |w|_a \leq 2, |w|_b \geq 2\}$
   В данном случае может быть 1 или 2 буквы a и любое количество букв b, начиная с двух



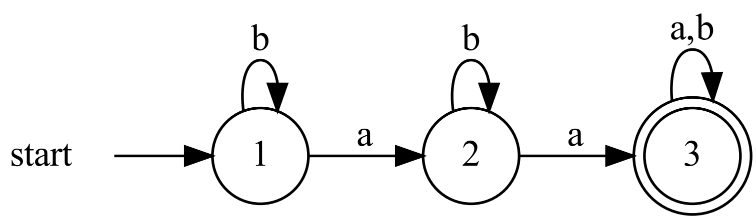
3. $L = \{w \in \{a, b\}* \mid |w|_a \neq |w|_b\}$
   Для данного задания построить автомат нельзя, т.к. для распознавания этого языка требуется запоминать количество символов.

4. $L = \{w \in \{a, b\}* \mid ww = www\}$
   В данном задании язык может состоять только из пустых символов.

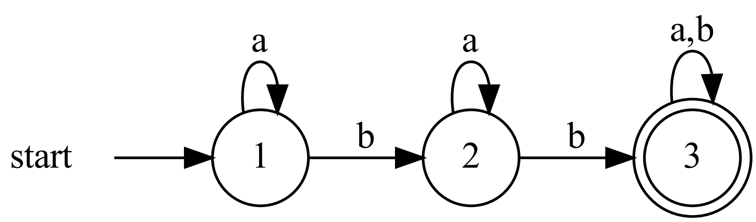


2 Задание №2. Построить конечный автомат, используя прямое произведение.

1. $L_1 = \{w \in \{a, b\} \mid |w|_a \geq 2 \wedge |w|_b \geq 2\}$
   Построим автомат: $L_{11} = \{w \in \{a, b\} \mid |w|_a \geq 2\}$



Построим автомат: $L_{12} = \{w \in \{a, b\} \mid |w|_b \geq 2\}$



Для первого автомата:
$A_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \geq 2\}$ $\Sigma_A = \{a, b\}$ $Q_A = \{1, 2, 3\}$ $s_A = \{1\}$ $T_A = \{3\}$

Для второго автомата:
$B_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_b \geq 2\}$

$\Sigma_B = \{a, b\}$ $Q_B = \{1, 2, 3\}$ $s_B = \{1\}$ $T_B = \{3\}$

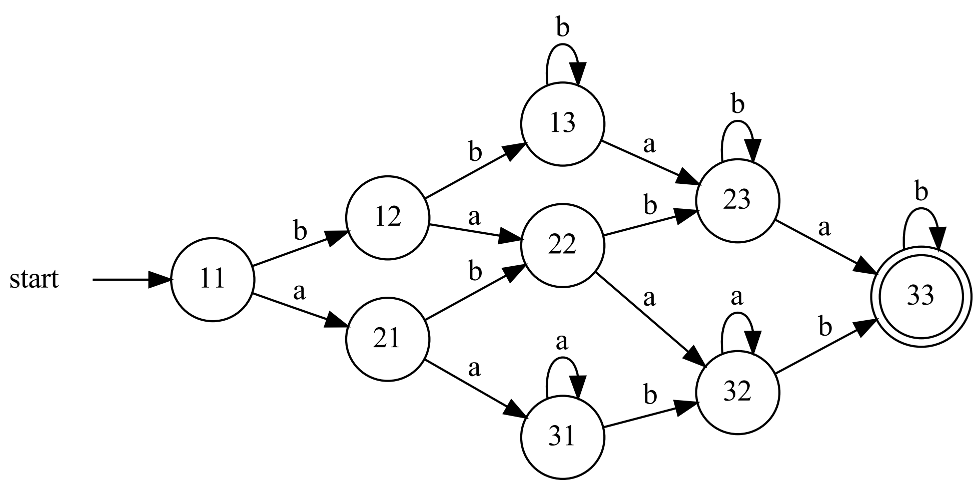
Имеем:

$L_1 = A_1 \times B_1$
$\Sigma = \Sigma_A \cup \Sigma_B = \{a, b\}$
$Q = Q_A \times Q_B = \{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\}$
$s =< s_1, s_2 >= \{11\}$
$T = T_A \times T_B = \{33\}$

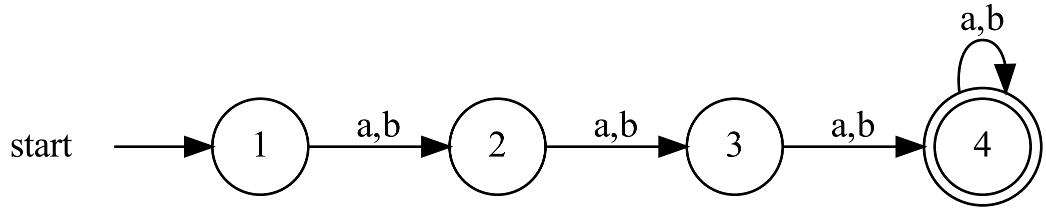
Построим таблицу состояний:

A	B	a	b
1	1	21	12
1	2	22	13
1	3	23	13
2	1	31	22
2	2	32	23
2	3	33	23
3	1	31	32
3	2	32	33
3	3	33	33

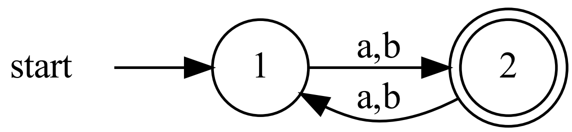
Тогда имеем автомат:



2. $L_2 = \{w \in \{a, b\}* \mid |w| \geq 3 \wedge |w|$ нечётное $\}$
Построим автомат:



Построим автомат:



Для первого автомата:
$A_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \geq 3\}$
$\Sigma_A = \{a, b\}$
$Q_A = \{1, 2, 3, 4\}$
$s_A = \{1\}$
$T_A = \{4\}$

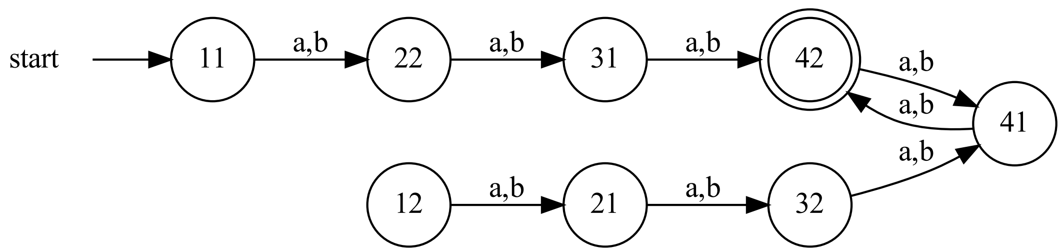
Для второго автомата:
$B_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \text{ нечетное}\}$
$\Sigma_B = \{a, b\}$
$Q_B = \{1, 2\}$
$s_B = \{1\}$
$T_B = \{2\}$

Тогда имеем:
$L_2 = A_2 \times B_2$
$\Sigma = \{a, b\}$
$Q = \{11, 12, 21, 22, 31, 32, 41, 42\}$
$s = \{11\}$
$T = \{42\}$

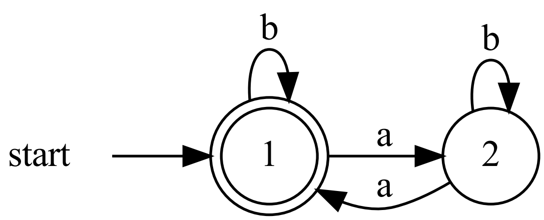
Построим таблицу состояний:

A	B	a	b
1	1	22	22
1	2	21	21
2	1	32	32
2	2	31	31
3	1	42	42
3	2	41	41
4	1	42	42
4	2	41	41

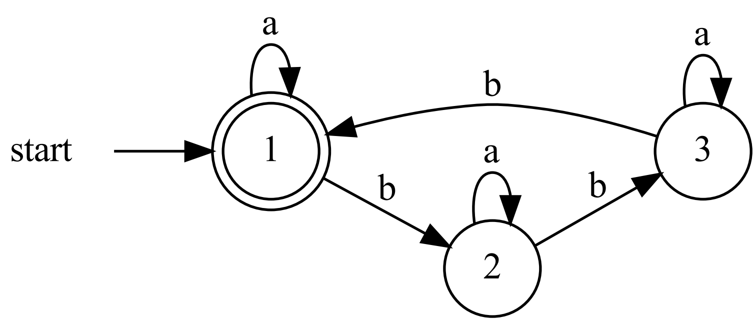
Тогда имеем автомат:



3. $L_3 = \{\ w \in \{\text{a,b}\}^*|\ |\text{w}|_a$ чётно $\wedge\ |w|_b$ кратно трём $\}$
Построим автомат:



Построим автомат:



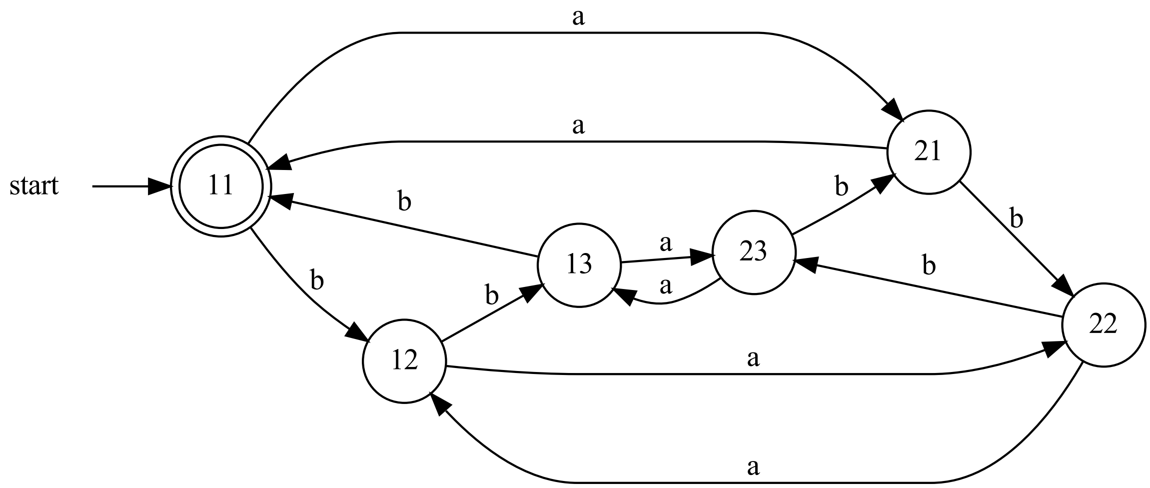
Для первого автомата:
$A_3 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a \text{ четное}\}$
$\Sigma_A = \{a,b\}$
$Q_A = \{1,2\}$
$s_A = \{1\}$
$T_A = \{1\}$

Для второго автомата:
$B_3 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_b \text{ кратно трем}\}$
$\Sigma_B = \{a,b\}$
$Q_B = \{1,2,3\}$
$s_B = \{1\}$
$T_B = \{1\}$
Имеем:
$L_3 = A_3 \times B_3$
$\Sigma_3 = \{a,b\}$
$Q_3 = \{11,12,13,21,22,23\}$
$s_3 = \{11\}$
$T_3 = \{11\}$

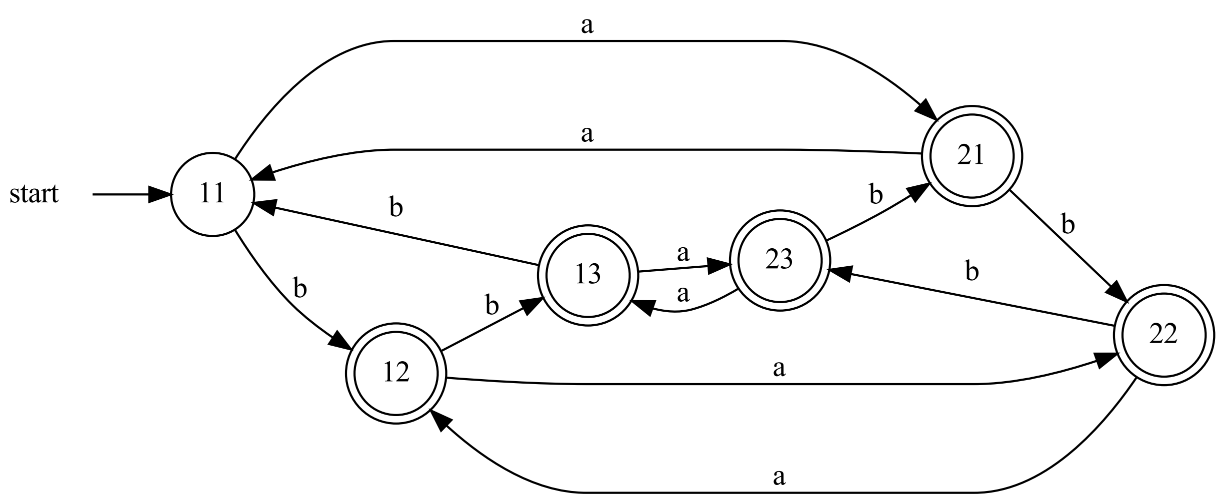
Построим таблицу состояний:

A	B	a	b
1	1	21	12
1	2	22	13
1	3	23	11
2	1	11	22
2	2	12	23
2	3	13	21

Тогда имеем автомат:

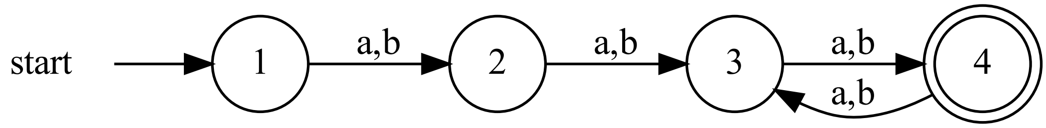


4. $L_4 = \overline{L_3}$
   Данный язык будет распознаяаться автоматом:

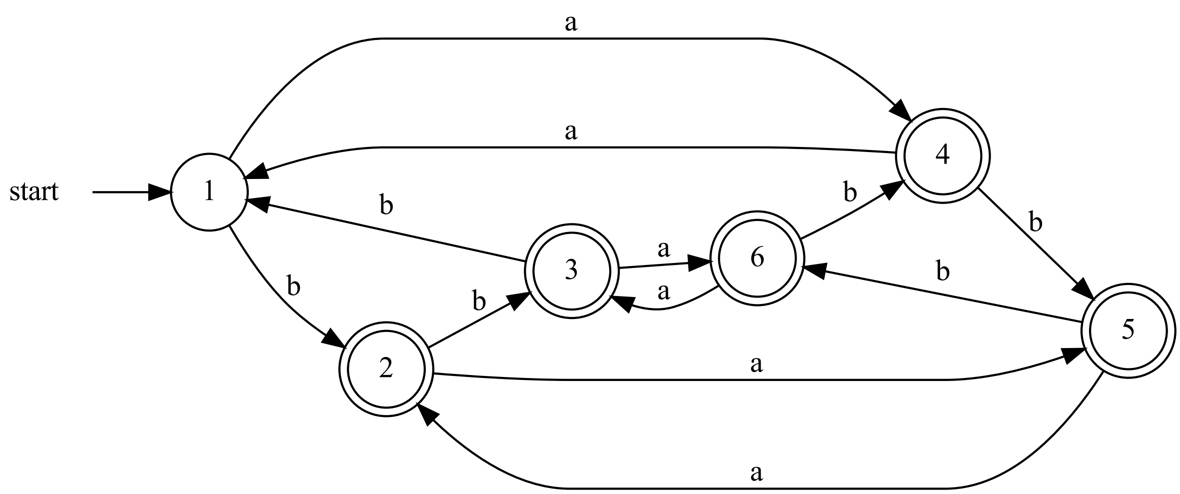


$\bar{L_3} = \{\Sigma_3, Q_3, s_3, Q_3 \backslash T_3, \delta_3\}$
$T_4 = Q_3 \backslash T_3 = \{12, 13, 21, 22, 23\}$

5. $L_5 = L_2 \setminus L_3$
   $L_5 = L_2 \backslash L_3 = L_2 \cap \bar{L_3} = L_2 \times \bar{L_3}$
   Автомат L_2 можно успростить:



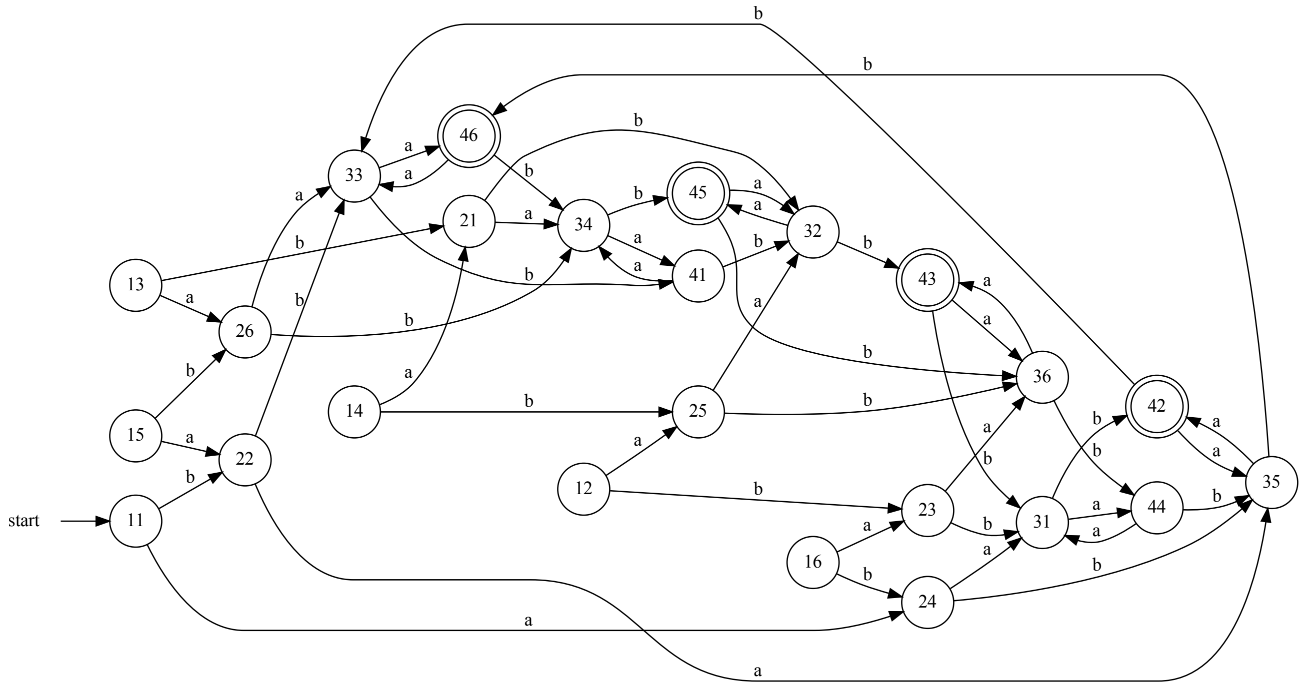
Введем для автомата $\bar{L}_3$ новую нумерацию состояний:



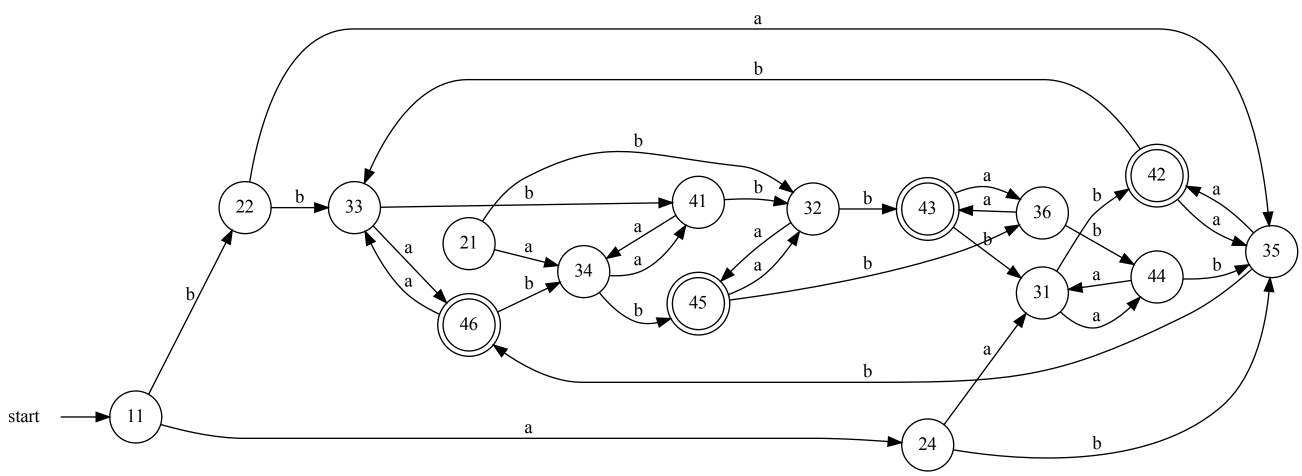
Построим таблицу состояний:

L_2	$\bar{L}_3$	a	b
1	1	24	22
1	2	25	23
1	3	26	21
1	4	21	25
1	5	22	26
1	6	23	24
2	1	34	32
2	2	35	33
2	3	36	31
2	4	31	35
2	5	32	36
2	6	33	34
3	1	44	42
3	2	45	43
3	3	46	41
3	4	41	45
3	5	42	46
3	6	43	44
4	1	34	32
4	2	35	33
4	3	36	31
4	4	31	35
4	5	32	36
4	6	33	34

Получим автомат:

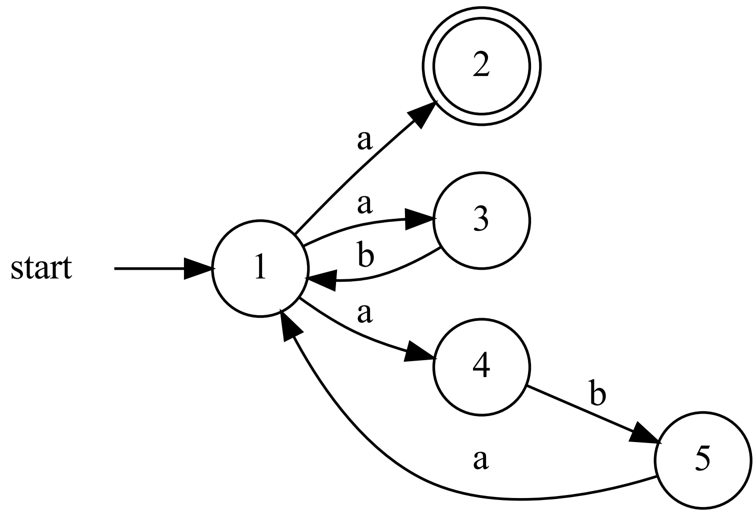


После упрощения получим:



3 Задание №3. Построить минимальный ДКА по регулярному выражению.

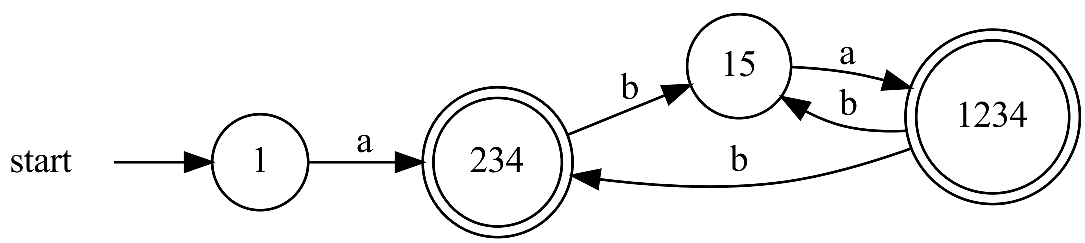
1. $(ab + aba)^*a$
   Сначала составим недетерминированный автомат:



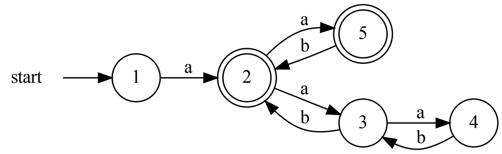
Теперь его необходимо преобразовать в детерминированный. Будем использтвать алгоритм Томпсона для построения эквивалентного ДКА:

Q	a	b
1	234	-
234	-	15
15	1234	-
1234	234	15

Тогда имеем детерминированный (и минимальный) автомат:

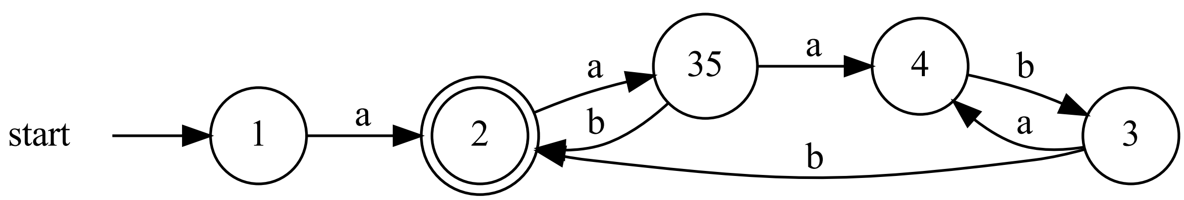


2. $a(a(ab)^*b)^*(ab)^*$
НКА:



Используем алгоритм Томпсона для построения эквивалентного ДКА:

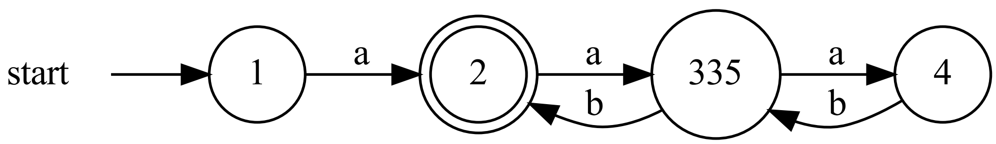
Q	a	b
1	2	-
2	35	-
35	4	2
4	-	3
3	4	2



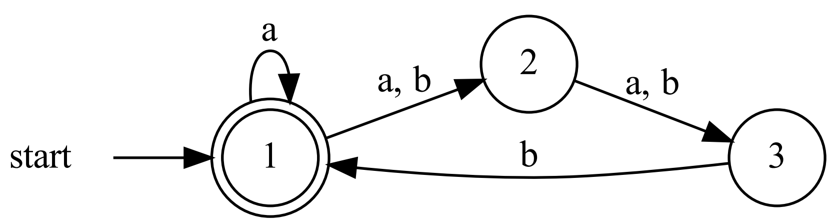
Минимизируем автомат, определив пары различимых состояний:

	1	2	3	35	4
1		+	+	+	+
2	+		+	+	+
3	+	+			+
35	+	+			+
4	+	+	+	+	

Различимые состояния: $\{1, 2, 3, 335, 4\}$
Перестроим автомат, теперь он будет минимальным:

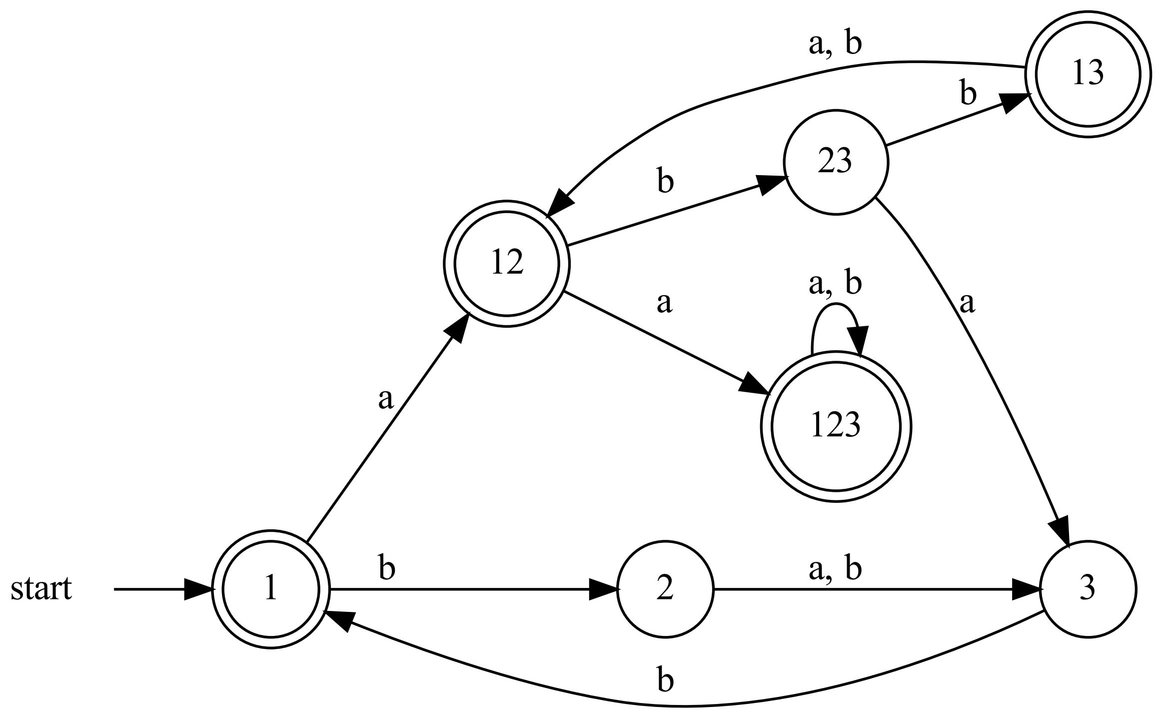


3. $(a + (a + b)(a + b)b)^*$
НКА:



Используем алгоритм Томпсона для построения эквивалентного ДКА:

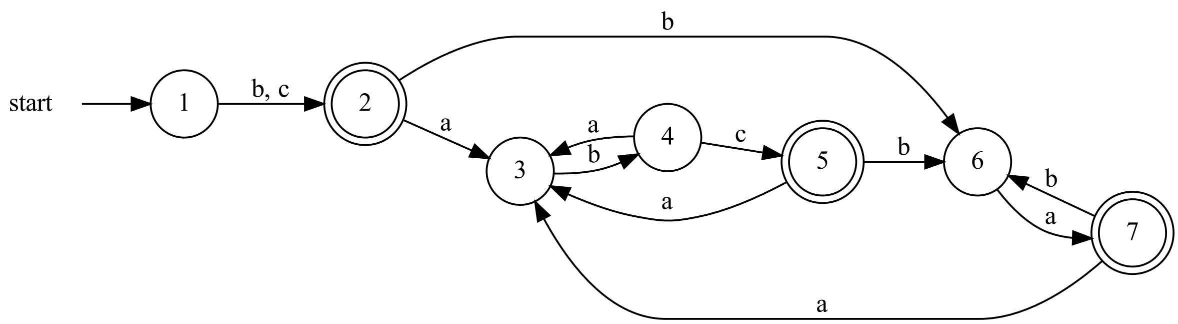
Q	a	b
1	12	2
12	123	23
2	3	3
123	123	123
23	3	13
3	-	1
13	12	12



Минимизируем автомат, определив пары различимых состояний:

4. $(b+c)((ab)^*c+(ba)^*)^*$
   ДКА:

	1	12	13	123	2	23	3
1					+	+	+
12					+	+	+
13					+	+	+
123					+	+	+
2	+	+	+	+			+
23	+	+	+	+			+
3	+	+	+	+	+	+	

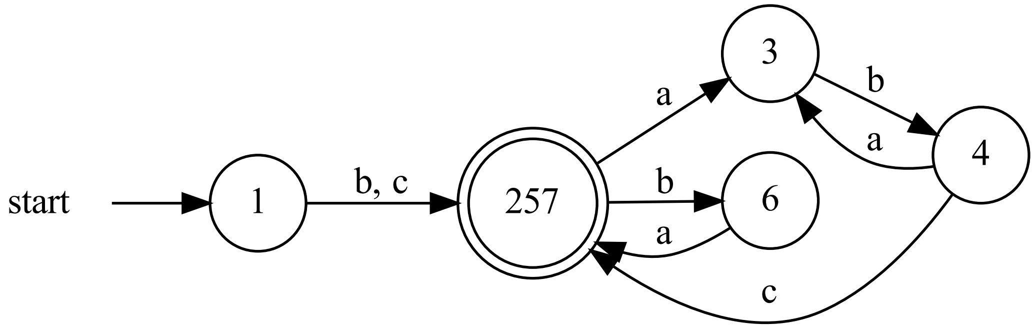


Минимизируем автомат, определив пары различимых состояний:

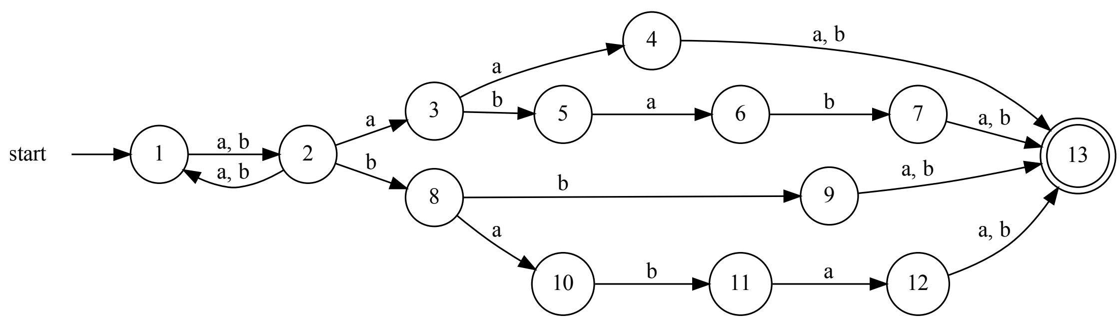
	1	2	3	4	5	6	7
1		+	+	+	+	+	+
2	+		+	+		+	
3	+	+		+	+	+	+
4	+	+	+		+	+	+
5	+		+	+		+	
6	+	+	+	+	+		+
7	+		+	+		+	

Различимые состояния: $\{1, 257, 3, 4, 5, 6\}$

Перестроим автомат, теперь он будет минимальным:

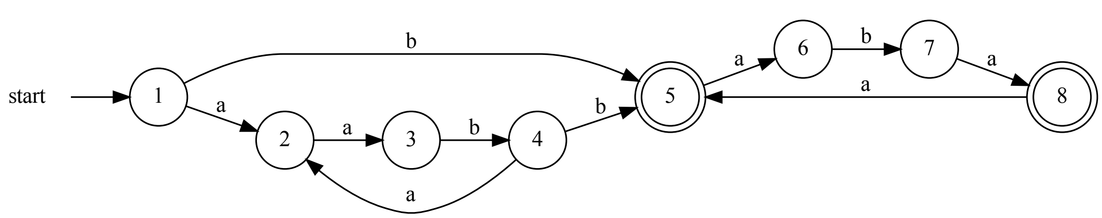


5. $(a+b)^{+}(aa+abab+bb+baba)(a+b)^{+}$
   НКА:



4 Задание №4. Определить является ли язык регулярным или нет.

1. $L = \{(aab)^n b(aba)^m : n0, m0\}$
   Т.к. по этому языку можно составить ДКА, он является регулярным:



2. $L = \{uaav : u \in \{a,b\}^*,\ v \in \{a,b\}^*, |u|_b|v|_a\}$
Используем лемму о разрастании. Фиксируем $\forall n \in N$, далее рассмотрим слово $\omega = b^n aaa^n,\ |\omega| = 2n+2 \geq n$. Теперь рассмотрим все разбиения этого слова $\omega = xyz$ такие, что $|y| \neq 0,\ |xy| \leq n$:

$$x = b^k,\ y = b^l,\ z = b^{n-k-l}aaa^n,$$

$$\text{где } 1 \leq k + l \leq n\ \wedge\ l > 0$$

Иных удовлетворяющих данным условиям разбиений нет.
Для любого из таких разбиений слово $xy^0z \notin L$. => лемма не выполняется, а значит, L не является регулярным языком.

3. $L = \{a^m w : w \in \{a,b\}^*,\ 1|w|_b m\}$
Используем лемму о разрастании. Фиксируем $\forall n \in N$, далее рассмотрим слово $\omega = a^n b^n,\ |\omega| = 2nn$. Теперь рассмотрим все разбиения этого слова $\omega = xyz$ такие, что $|y| \neq 0,\ |xy| \leq n$:

$$x = a^l,\ y = a^m,\ z = a^{n-l-m}b^n,$$

$$\text{где } l + kn\ \wedge\ m \neq 0$$

Иных удовлетворяющих данным условиям разбиенний нет.
Выполним накачку:

$$xy^iz = a^l(a^m)^i a^{n-l-m}b^n = a^{n-mi}b^n \notin L,\ i0 \in N$$

Видим, что лемма не выполняется, а значит, L не является регулярным языком.

4. $L = \{a^k b^m a^n : k = n \vee m > 0\}$
Используем лемму о разрастании. Фиксируем $\forall n \in N$, далее рассмотрим слово $\omega = a^n ba^n,\ |\omega| = 2n + 1n$. Теперь рассмотрим все разбиения этого слова $\omega = xyz$ такие, что $|y| \neq 0,\ |xy| \leq n$:

$$x = a^k,\ y = a^m,\ z = a^{n-k-m}ba^n,$$

$$\text{где } k + mn\ \wedge\ m \neq 0$$

Иных удовлетворяющих данным условиям разбиений нет.
Выполним накачку:

$$xy^iz = a^k(a^m)^ia^{n-k-m}ba^n = a^{n+m(i-1)}ba^n \notin L,\ i2 \in N$$

Получили противоречие => лемма не выполняется, а значит, L не является регулярным языком.

5. $L = \{ucv : u \in \{a,b\}^*,\ v \in \{a,b\}^*, u \neq v^R\}$
Используем лемму о разрастании. Фиксируем $\forall n \in N$, далее рассмотрим слово $\omega = (ab)^nc(ab)^n = \alpha_1\alpha_2...\alpha_{4n+1},\ \ |\omega| = 4n + 1n$. Теперь рассмотрим все разбиения этого слова $\omega = xyz$ такие, что $|y| \neq 0,\ |xy| \leq n$:

$$x = \alpha_1\alpha_2...\alpha_k,\ y = \alpha_{k+1}...\alpha_{k+m},\ z = \alpha_{k+m+1}...\alpha_{4n+1}c(ab)^n,$$

$$\text{где } k + mn\ \wedge\ m \neq 0$$

Иных удовлетворяющих данным условиям разбиений нет.
Выполним накачку:

$$xy^iz = (\alpha_1\alpha_2...\alpha_k)(\alpha_{k+1}...\alpha_{k+m})^i(\alpha_{k+m+1}...\alpha_{4n+1}c(ab)^n)$$

При $i = 2$ имеем:

$$xy^2z = (\alpha_1\alpha_2...\alpha_k)(\alpha_{k+1}...\alpha_{k+m})^2(\alpha_{k+m+1}...\alpha_{4n+1}c(ab)^n) \notin L$$

Видим, что лемма не выполняется, а значит, L не является регулярным языком.