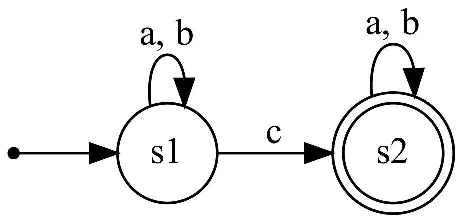
Теоретические модели вычислений ДЗ №1: Регулярные языки и коненые автоматы

А-13а-19 Сабитов Алексей

8 апреля 2022 г.

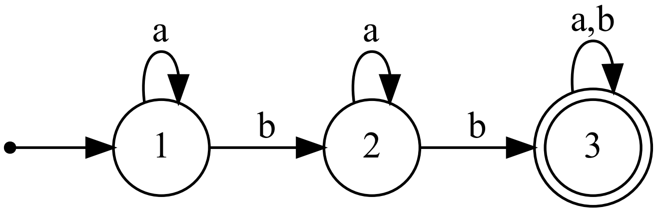
1 Построить конечный автомат, распознающий язык

1.1 $L = \{\omega \in \{a, b, c\}^* || \omega|_c = 1\}$

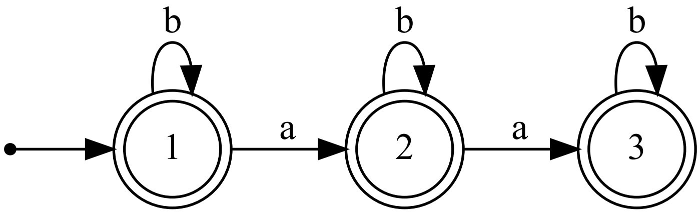


1.2 $L2 = \{\omega \in \{a,b\}^* || w|_a \leq 2, |\omega|_b \geq 2\}$

Имеем 2 автомата: $|w|_a \leq 2$ $L21 = \{\Sigma = \{a,b\}, Q_1 = \{1,2,3\}, S_1 = \{1\}, T_1 = \{3\}, \delta_1\}$



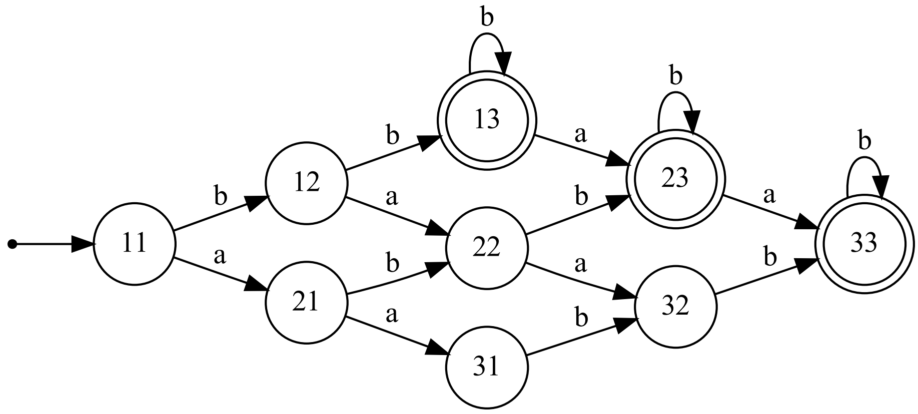
$\omega|_b \geq 2$ $L22 = \{\Sigma = \{a,b\}, Q_2 = \{1,2,3\}, S_2 = \{1\}, T_2 = \{1,2,3\}, \delta_2\}$



Строим прямое произведение

1. $\Sigma = \{a, b\}$
2. $Q = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$
3. $S = \{(1,1)\}$
4. $T = \{(1,3), (2,3), (3,3)\}$
5. δ :

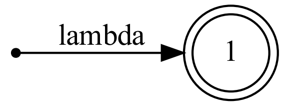
$L21$	$L22$	a	b
1	1	1,2	2,1
1	2	1,3	2,2
1	3		2,3
2	1	2,2	3,1
2	2	2,3	3,2
2	3		3,3
3	1	3,2	3,1
3	2	3,3	3,2
3	3		3,3



1.3 $L = \{\omega \in \{a, b\}^* | \, |\omega|_a \neq |\omega|_b\}$

Данный язык подразумевает запоминание количество элементов, но КА "не умеет"это делать.
Следовательно, невозможно построить КА для данного языка.

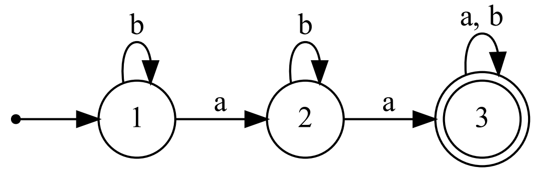
1.4 $L = \{\omega \in \{a, b\}^* | \, \omega\omega = \omega\omega\omega\}$



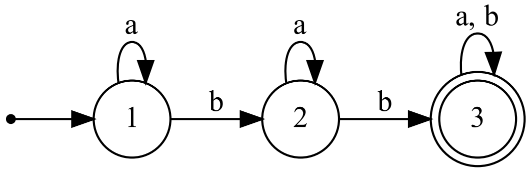
2 Построить конечный автомат,используя прямое произведение

2.1 $L1 = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_a \geq 2 \wedge |\omega|_b \geq 2\}$

Имеем два автомата:
$|\omega|_a \geq 2$
$L11 = \{\Sigma = \{a, b\}, Q_1 = \{1, 2, 3\}, 1, T_1 = \{3\}, \delta_1\}$

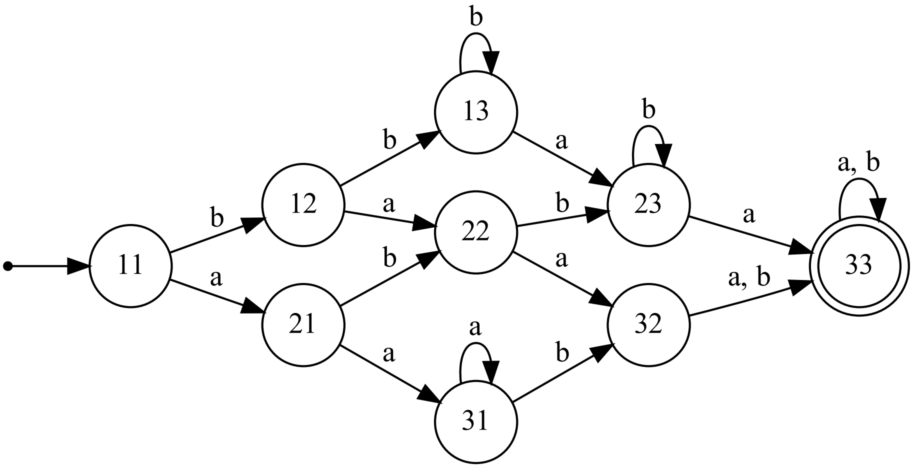


$|\omega|_b \geq 2$
$L12 = \{\Sigma = \{a, b\}, Q_2 = \{1, 2, 3\}, 1, T_2 = \{3\}, \delta_2\}$



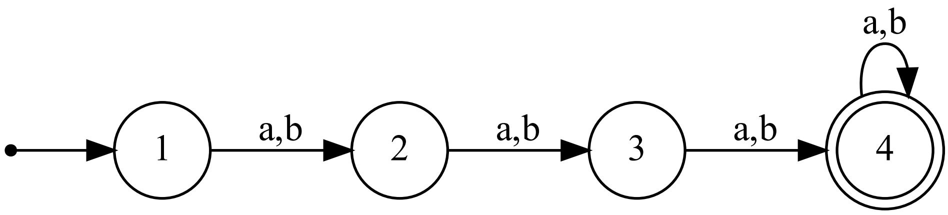
1. $\Sigma = \{a, b\}$
2. $Q = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$
3. $S = \{(1,1)\}$
4. $T = \{(3,3)\}$
5. $\delta :$

L11	L12	a	b
1	1	21	12
1	2	22	13
1	3	23	13
2	1	31	22
2	2	32	23
2	3	33	23
3	1	31	32
3	2	32	33
3	3	33	33

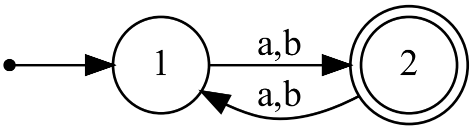


2.2 $L2 = \{\omega \in \{a, b\} \mid |\omega| \geq 3 \wedge |\omega| \text{ нечетное}\}$

Имеем следующие автоматы:
$|\omega| \geq 3$ $L21 = \{\Sigma = \{a, b\}, Q_1 = \{1, 2, 3, 4\}, S_1 = \{1\}, T_1 = \{4\}, \delta_1\}$



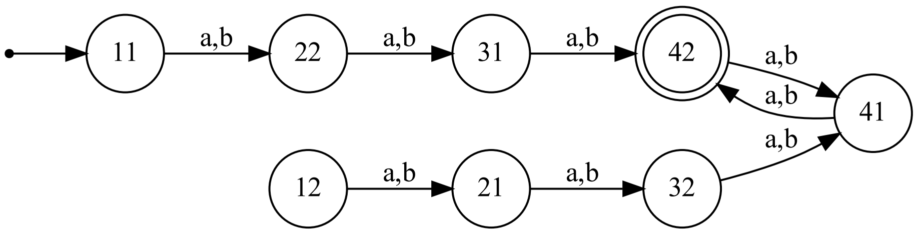
$|\omega|$ нечетное $L22 = \{\Sigma = \{a, b\}, Q_1 = \{1, 2\}, S_1 = \{1\}, T_1 = \{2\}, \delta_2\}$



Строим прямое произведение

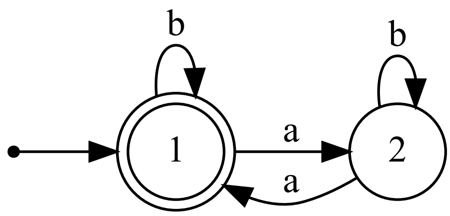
1. $\Sigma = \{a, b\}$
2. $Q = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), \}$
3. $S = \{(1,1)\}$
4. $T = \{(4,2)\}$
5. δ :

$L21$	$L22$	a	b
1	1	2,2	2,2
1	2	2,1	2,1
2	1	3,2	3,2
2	2	3,1	3,1
3	1	4,2	4,2
3	2	4,1	4,1
4	1	4,2	4,2
4	2	4,1	4,1

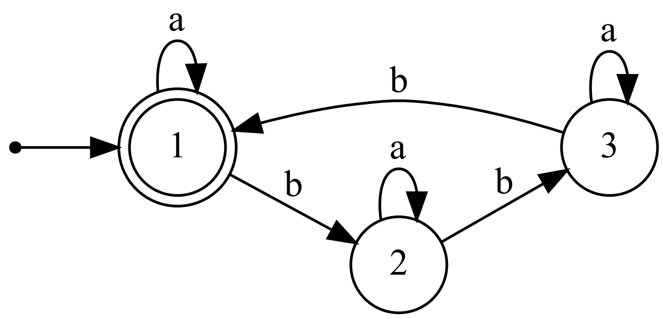


2.3 $L3 = \{\omega \in (a,b) | |\omega|_a \text{четно} \wedge |\omega| \text{ кратно трем}\}$

$|\omega|_a$ четно
$L31 = \{\Sigma = \{a,b\}, Q_1 = \{1,2\}, S_1 = \{1\}, T_1 = \{1\}, \delta_1\}$

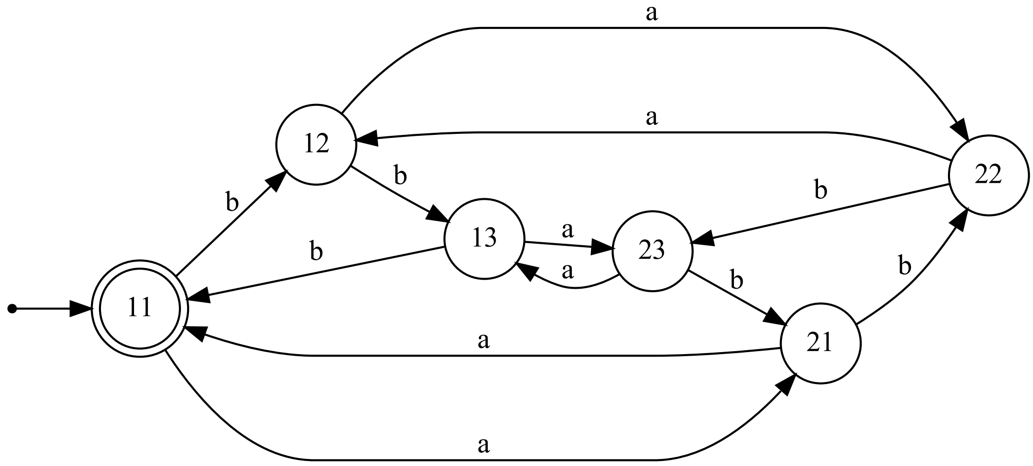


$|\omega|$ кратно трем $L32 = \{\Sigma = \{a,b\}, Q_1 = \{1,2,3\}, S_2 = \{1\}, T_1 = \{1\}, \delta_1\}$



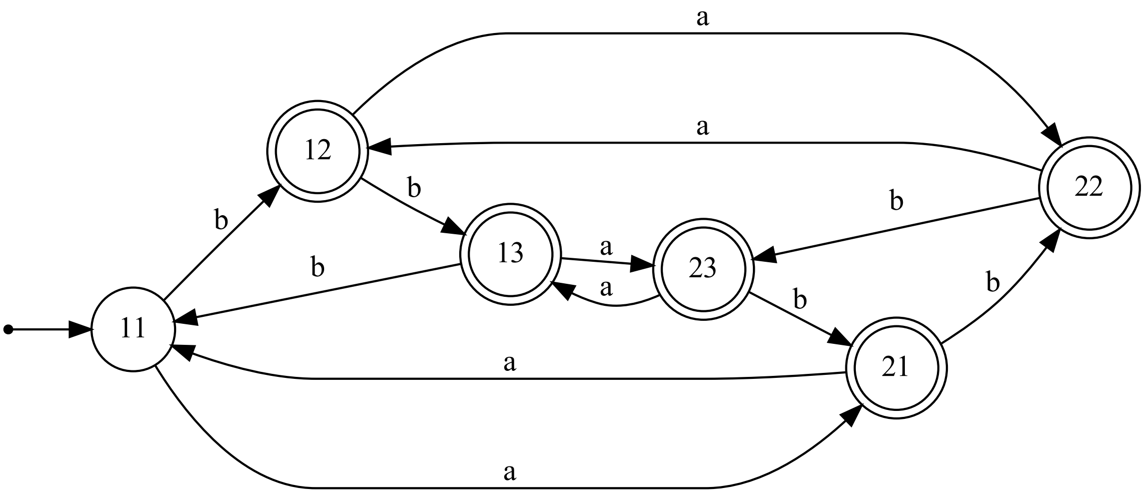
1. $\Sigma = \{a,b\}$
2. $Q = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$
3. $S = \{(1,1)\}$
4. $T = \{(1,1)\}$
5. $\delta :$

L31	L32	a	b
1	1	21	12
1	2	22	13
1	3	23	11
2	1	11	22
2	2	12	23
2	3	13	21



2.4 $L4 = \overline{L3}$

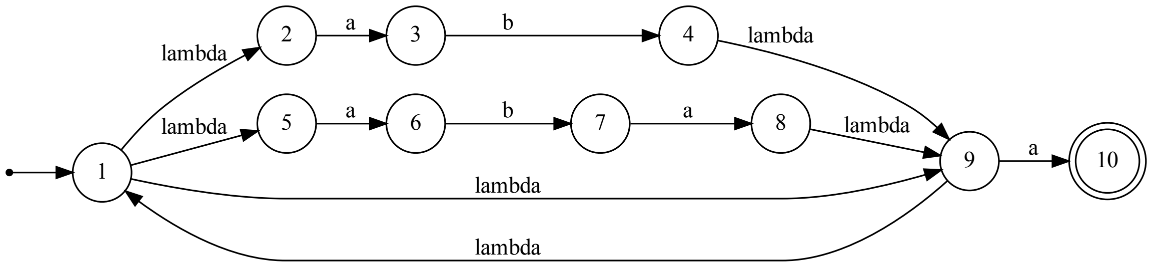
$\overline{L3} = \{\Sigma_3, Q_3, s_3, Q_3 \backslash T_3, \delta_3\}$ $Q_3 \backslash T_3 = 12, 13, 21, 22, 23$



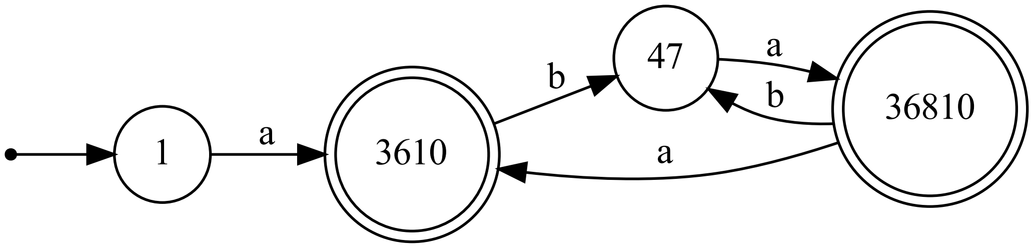
3 Построить минимальный ДКА по регулярному выражению

3.1 $(ab + aba)^*a$

Автомат с лямбда переходами:



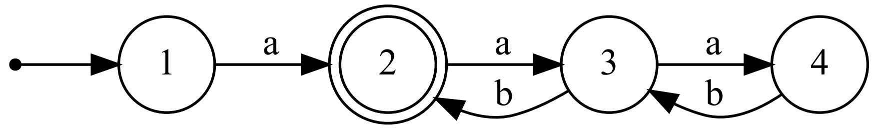
Удаляем Лямда переходы и используем алгоритм Томсона для получения ДКА:



3.2 $a(a(ab)^*b)^*(ab)^*$

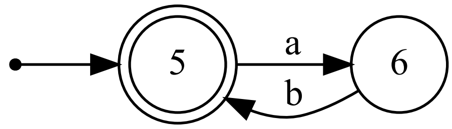
Сначала построим части автомата:

$a(a(ab)^*b)^*$

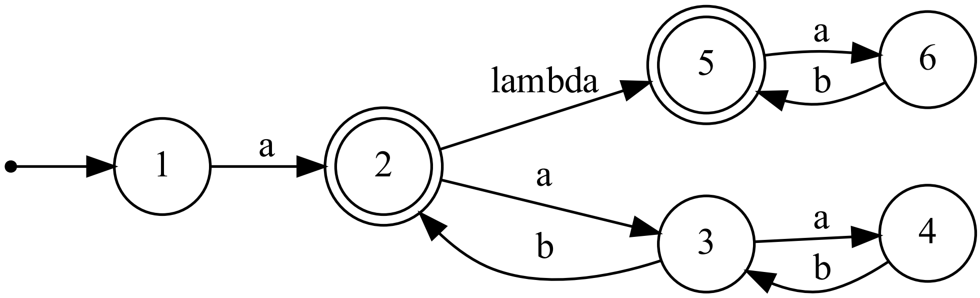


2 - ая часть автомата

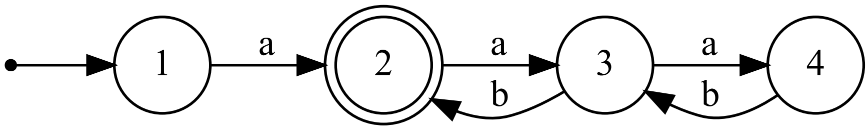
$(ab)^*$



Соединяем (с помощью лямбда-перехода):

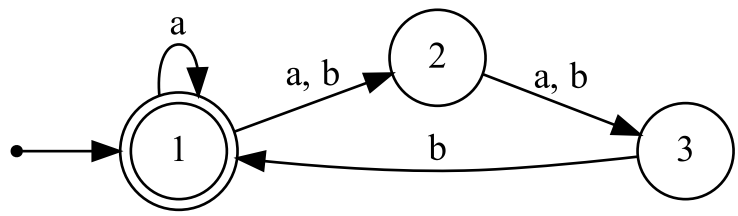


Удаляем лямбда-переходы - получаем ДКА:

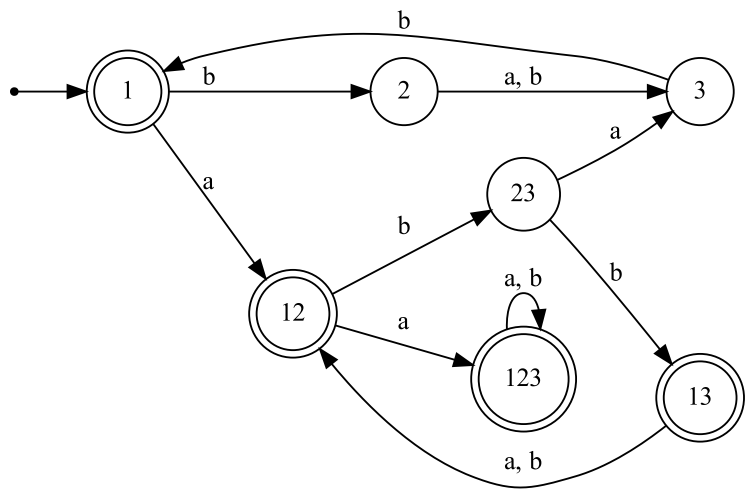


3.3 $(a + (a + b)(a + b)b)^*$

Сначала строим НКА:

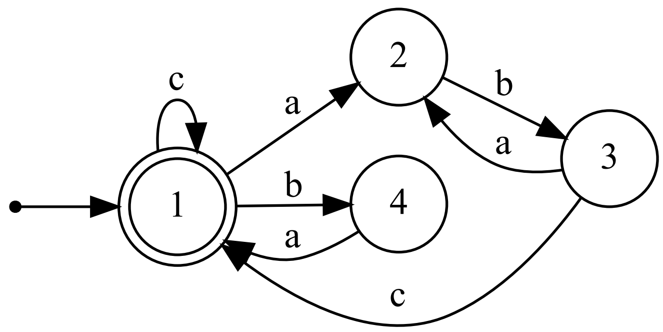


По НКА с помощью алгоритма Томсона строим ДКА:



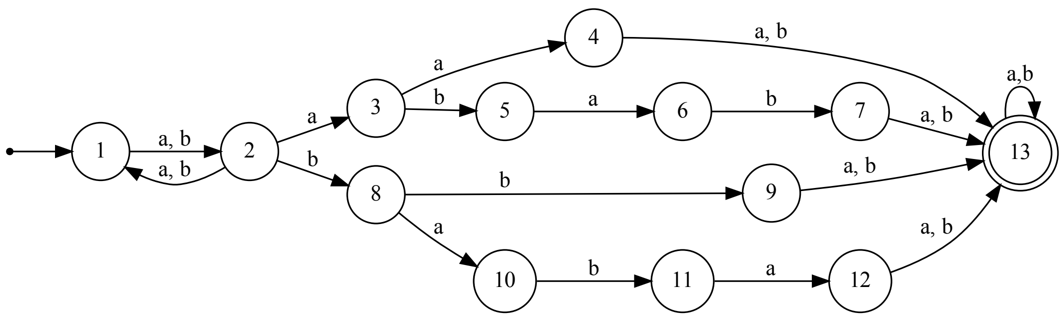
3.4 $(b + c)((ab)^*c + (ba)^*)^*$

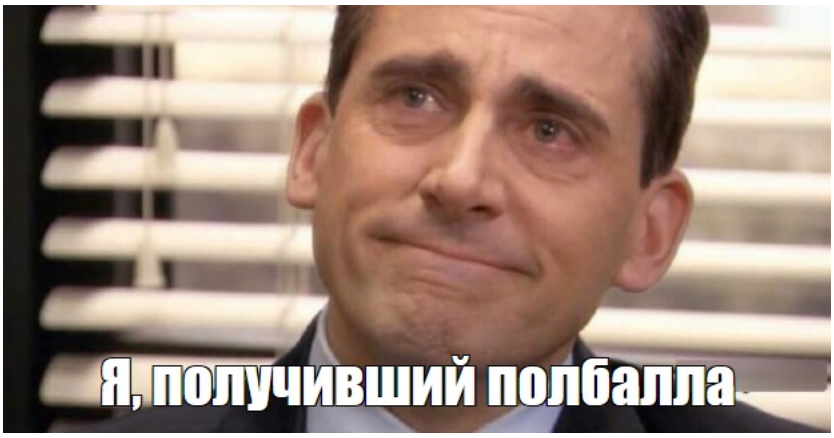
Используя алгоритм Томсона, строим ДКА:



3.5 $(a + b)^*(aa + bb + abab + baba)(a + b)^*$

Построим НКА:

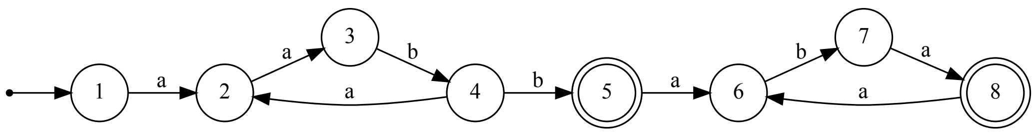




4 Определить является ли язык регулярным или нет

4.1 $L = \{(aab)^n b(aba)^m \,|n \geq 0,\ m \geq 0\}$

Этот язык является регулярным, строим автомат:



4.2 $L = \{uaav \mid u \in \{a, b\}, v \in \{a, b\}, |u|_b \geq |v|_a\}$

Нужно разбить язык, как $uxyzv$, причем $|xy| \leq n$, $|y| \geq 1$.
И слово uxy^izv при $\forall i \geq 1$ пренадлежит языку L.
Берем отрицание языка L:

$$\overline{L} = \{uaav \mid u \in \{a, b\}, v \in \{a, b\}, |u|_b < |v|_a\}$$

Фиксируем произвольное $n \in N$.

Берем слово:

$$b^n aaa^n$$

Очевидно, длина слова не меньше n: $|w| = 2n + 2 \geq n$.
Разобьем язык следующим образом:

$$b^{n-l} b^l a^2 a^n$$

где $x = b^{n-l}$; $y = b^l$; $z = a^{n+2}$; и $l \geq 1$; $l \leq n$;
При достаточном большом i (накачиваем y) слово $xy^iz = b^{n-l}(b^l)^i a^2 a^n$ не будет пренадлежать языку $\overline{L}$, следовтельно, язык $\overline{L}$ - нерегулярный, а, значит, язык L тоже не регулярный.
ч.т.д.

4.3 $L = \{a^m \omega | \omega \in \{a, b\}^*, 1 \leq |\omega|_b \leq m\}$

Рассмотрим отрицание языка L:

$$\overline{L} = \{a^m \omega | \omega \in \{a, b\}^*, |\omega|_b \geq m\}$$

Фиксируем произвольное $n \in N$.
Берем слово:

$$w = a^n b^n$$

.
Очевидно, длина слова не меньше n: $|w| = 2n \geq n$.
Разобьем язык следующим образом:

$$a^{l_1} a^{l_2} a^{n-l_1-l_2}$$

где $x = a^{l_1}$; $y = a^{l_2}$; $z = a^{n-l_1-l_2} b^n$ и $l_2 \geq 1$; $l_1 + l_2 \leq n$;
При достаточном большом i (накачиваем y) слово $xy^iz = a^{l_1}(a^{l_2})^i a^{n-l_1-l_2} b^n$ не будет пренадлежать языку $\overline{L}$, следовательно, язык $\overline{L}$ - нерегулярный, а, значит, язык L тоже не регулярный.
ч.т.д.

4.4 $L = \{a^k b^m a^n | k = n \vee m > 0\}$

Фиксируем произвольное $n \in N$.
Берем слово

$$w = a^{n-1}ba^n \in L$$

Очевидно, длина слова не меньше n: $|w| = 2n \geq n$.
Рассмотрим следующее разбиение слова:

$$a^{n-1-l}a^l ba^n$$

где $x = a^{n-1-l}$; $y = a^l b$; $z = a^n$ и $l \geq 0$; $l \leq n-1$;
Других разбиений нет.
При $i = 0$ слово $xy^i z = a^{n-1-l}(a^l b)^i a^n = a^{n-1-l}a^n$ не будет пренадлежать языку L, следовательно, язык L - нерегулярный.
ч.т.д.

4.5 $L = \{ucv|\ u \in \{a,b\}^*\ v \in \{a,b\}^* u \neq v^R\}$

Фиксируем произвольное $n \in N$.
Берем слово

$$w = a^n ca^{2n} \in L$$

Очевидно, длина слова не меньше n: $|w| = 3n + 1 \geq n$.
Рассмотрим следующее разбиение слова:

$$a^{n-l}a^l ca^{2n}$$

где $x = a^{n-l}$; $y = a^l$; $z = ca^{2n}$ и $l > 0$; $l \leq n$;
Других разбиений нет.
При $i = 2$ слово принимает такой вид: $xy^i z = a^{n-l}(a^l)^i ca^{2n} = a^{n-l+il}ca^n = a^{n+l}ca^{2n}$;
Таким образом, при $l = n$:

$$a^{2n}ca^{2n}$$

То есть, $u = v^R$, следовательно, слово не будет пренадлежать языку L, следовательно, язык L - нерегулярный.
ч.т.д.