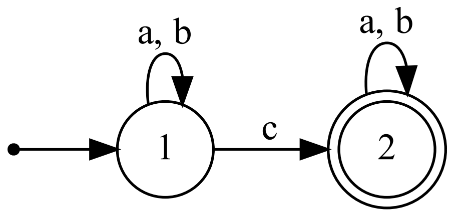
Домашнее задание №1

Сабитов Сергей А-13а-19

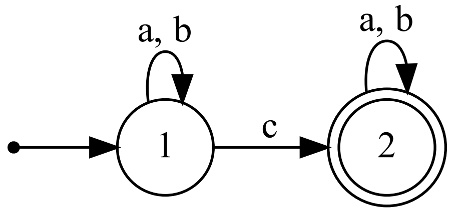
8 апреля 2022 г.

1 Задание №1

1.1 $\{\omega \in (a, b, c)^* | |\omega|_c = 1\}$



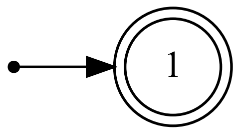
1.2 $\{\omega \in a, b^* | |\omega|_a \leq 2, |\omega|_b \geq 2\}$



1.3 $\{\omega \in (a,b)^* || \omega|_a \neq |\omega|_b\}$

Конечный автомат не имеет паямяти, поэтому мы не можем поставить условие равенства или не равенства.

1.4 $\{\omega \in a, b^* | \omega\omega = \omega\omega\omega\}$

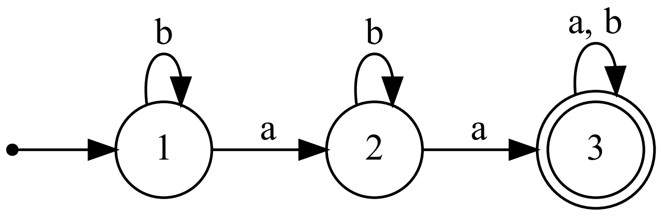


Язык состоит из пустого слова, так как только для $\omega = \lambda$ условие выполняется

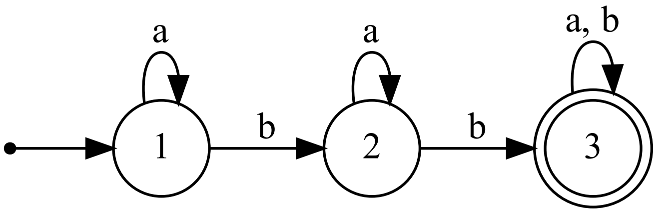
2 Задание №2. Построить конечный автомат, используя прямое произведение

2.1 $L_1 = \{\omega \in (a,b) || \omega|_a \geq 2 \wedge |\omega|_b \geq 2\}$

$$L_1 1 = \{\Sigma = \{a, b\}, Q_1 = \{1, 2, 3\}, 1, T_1 = \{3\}, \delta_1\}$$

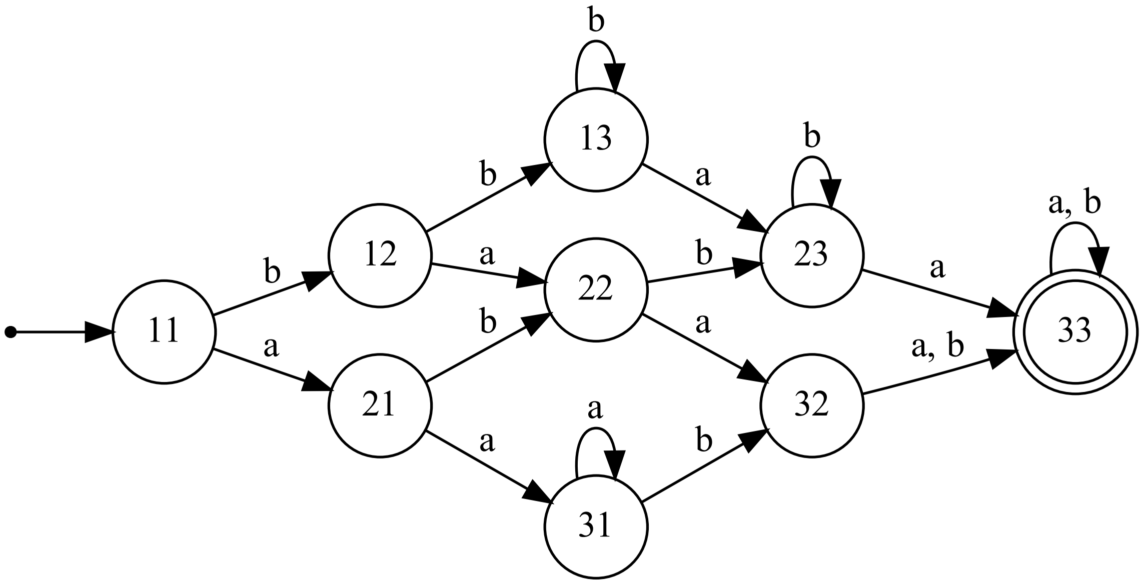


$$L_1 2 = \{\Sigma = \{a, b\}, Q_2 = \{1, 2, 3\}, 1, T_2 = \{3\}, \delta_2\}$$



1. $\Sigma = \{a, b\}$
2. $Q = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$
3. $S = \{(1,1)\}$
4. $T = \{(3,3)\}$
5. δ :

A1	A2	a	b
1	1	21	12
1	2	22	13
1	3	23	13
2	1	31	22
2	2	32	23
2	3	33	23
3	1	31	32
3	2	32	33
3	3	33	33

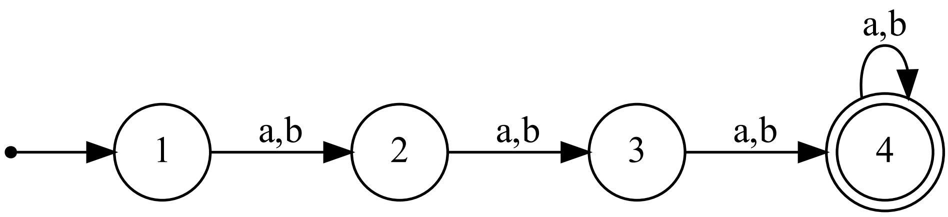


2.2 $L_2 = \{\omega \in (a, b)^* || \omega| \geq 3 \wedge |\omega| \text{нечетное}\}$

Имеем следующие автоматы:

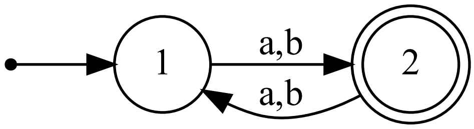
$|\omega| \geq 3$

$L21 = \{\Sigma = \{a, b\}, Q_1 = \{1, 2, 3, 4\}, S_1 = \{1\}, T_1 = \{4\}, \delta_1\}$



$|\omega|$ нечетное

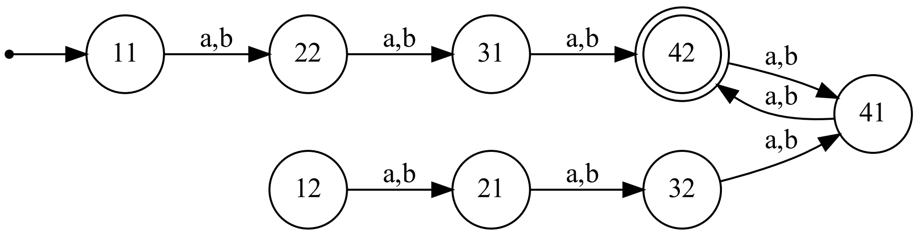
$L22 = \{\Sigma = \{a, b\}, Q_1 = \{1, 2\}, S_1 = \{1\}, T_1 = \{2\}, \delta_2\}$



Строим прямое произведение

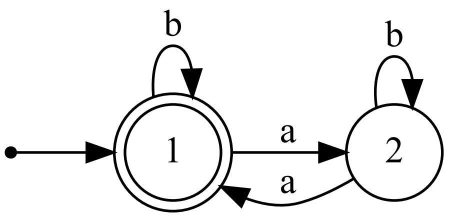
1. $\Sigma = \{a, b\}$
2. $Q = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), \}$
3. $S = \{(1,1)\}$
4. $T = \{(4,2)\}$
5. δ :

$L21$	$L22$	a	b
1	1	2,2	2,2
1	2	2,1	2,1
2	1	3,2	3,2
2	2	3,1	3,1
3	1	4,2	4,2
3	2	4,1	4,1
4	1	4,2	4,2
4	2	4,1	4,1

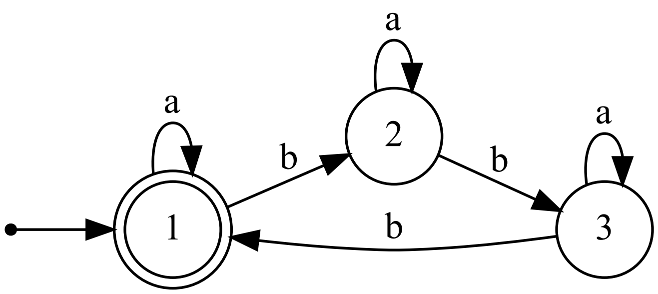


2.3 $L_3 = \{\omega \in (a,b) | |\omega|_a \text{четно} \wedge |\omega| \text{кратно трем}\}$

$L_{31} = \{\omega \in (a,b) | |\omega|_a \text{четно}\} = \{\Sigma = \{a,b\}, Q_1 = \{1,2\}, 1, T_1 = \{1\}, \delta_1\}$

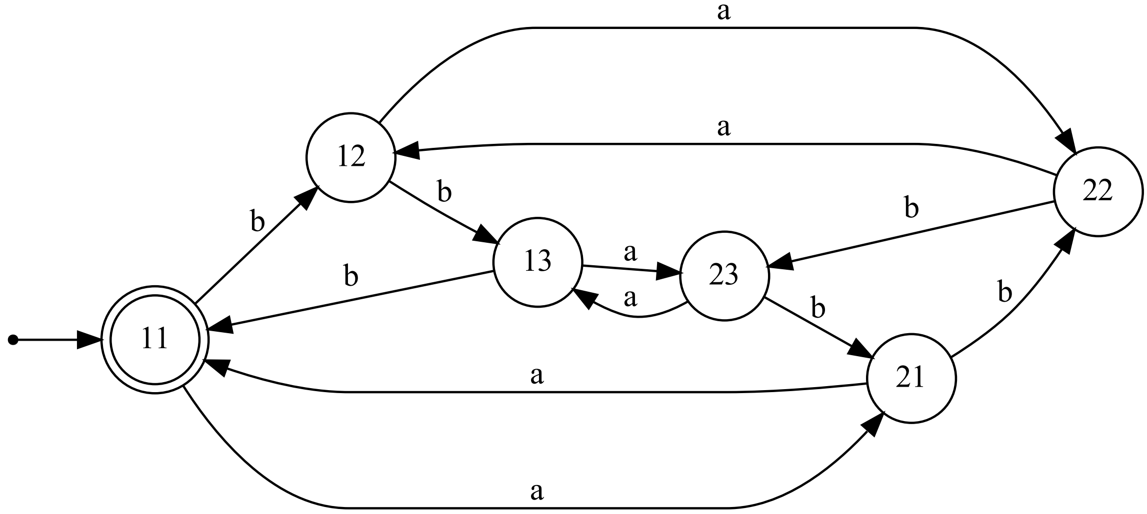


$L_{32} = \{\omega \in (a,b) | |\omega|_b \text{кратно } 3\} = \{\Sigma = \{a,b\}, Q_1 = \{1,2,3\}, 1, T_1 = \{1\}, \delta_1\}$



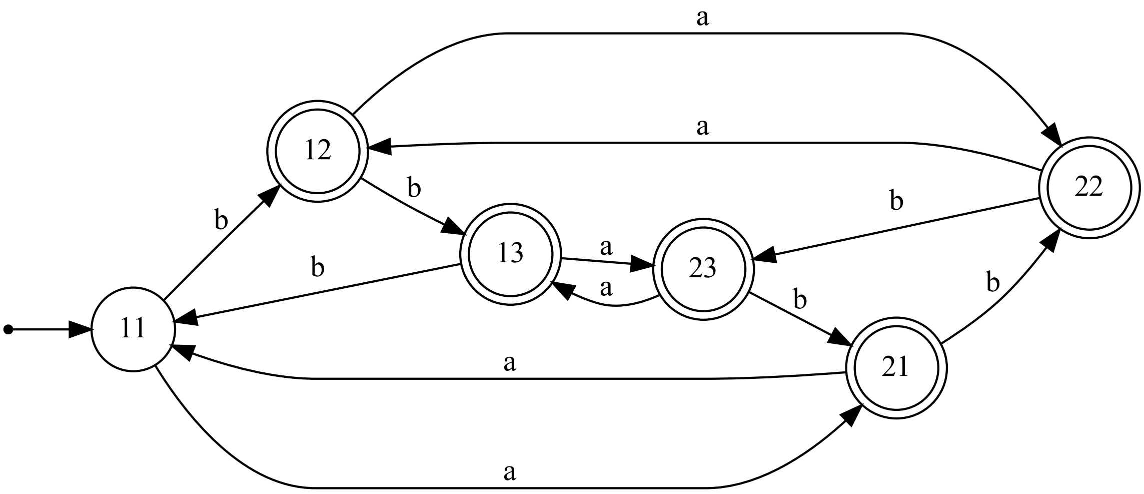
1. $\Sigma = \{a,b\}$
2. $Q = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$
3. $S = \{(1,1)\}$
4. $T = \{(1,1)\}$
5. $\delta :$

L31	L32	a	b
1	1	21	12
1	2	22	13
1	3	23	11
2	1	11	22
2	2	12	23
2	3	13	21



2.4 $L_4 = \overline{L_3}$

$\overline{L_3} = \{\Sigma_3, Q_3, s_3, Q_3 \backslash T_3, \delta_3\}$ $Q_3 \backslash T_3 = 12, 13, 21, 22, 23$

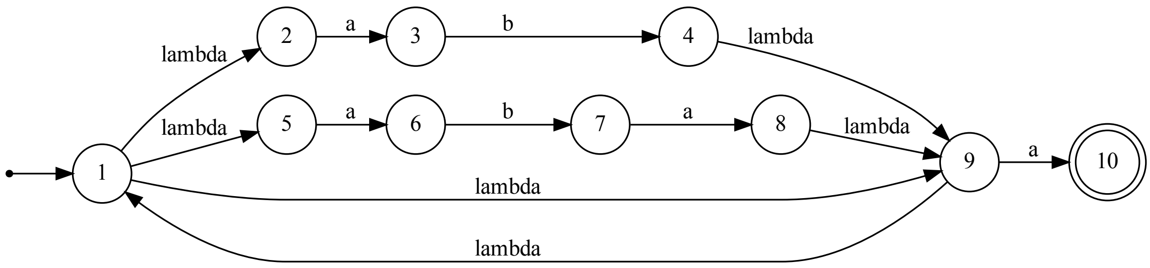


2.5 $L_4 = L_2 - L_3$

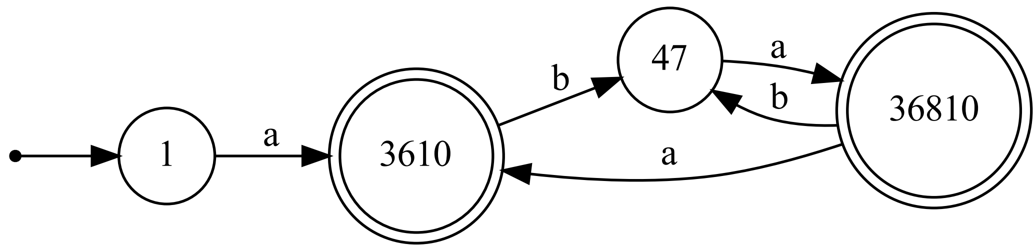
3 Задание №3

3.1 $\{ab + aba\}^* a$

Автомат с лямбда переходами:

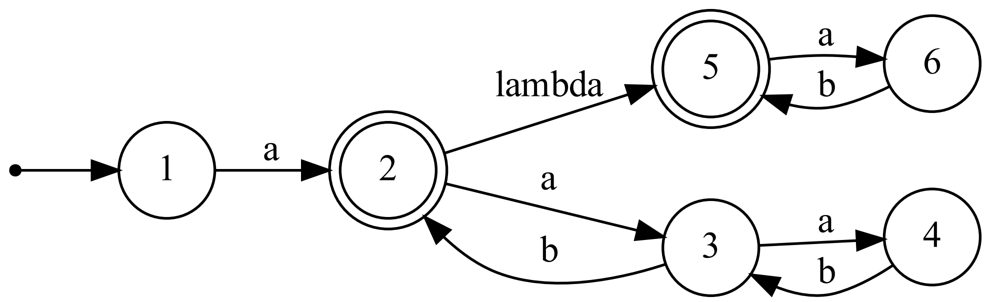


Удаляя лямбда переходы и применяя алгоритм Томпсона получаем ДКА:

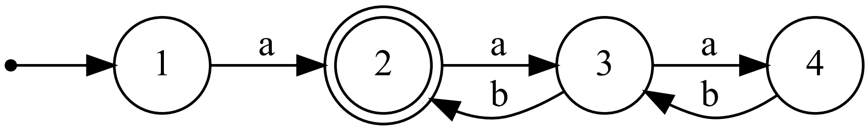


3.2 $a(a(ab)^*b)^*(ab)^*$

НКА:

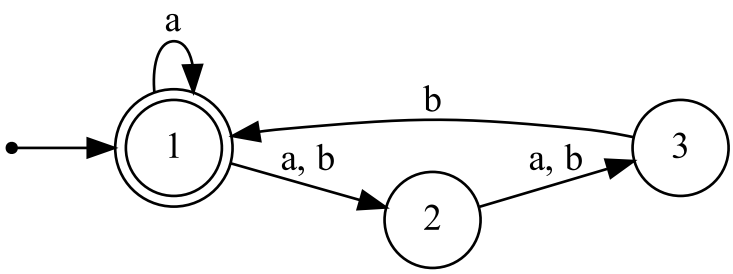


ДКА:

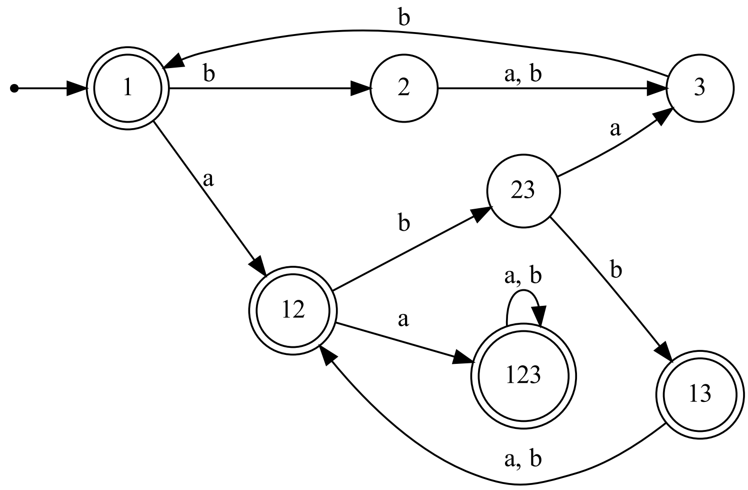


3.3 $(a + (a + b)(a + b)b)^*$

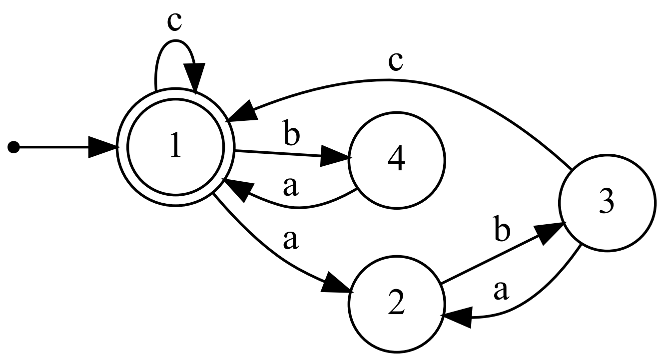
1. Строим НКА:



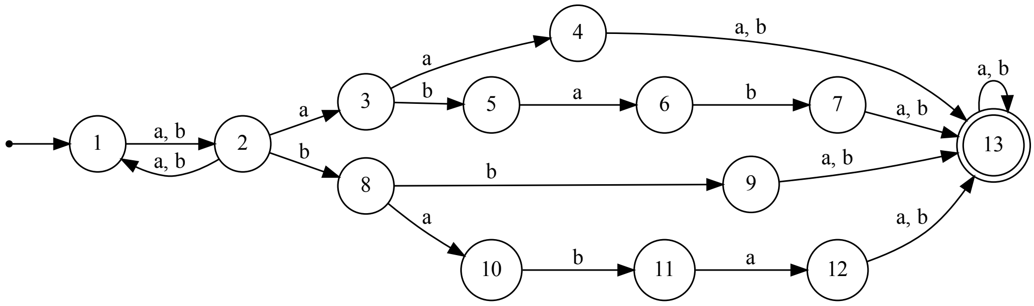
2. По НКА строим эквивалентный ДКА (алгоритм Томпсона):



3.4 $(b + c)((ab)^*c + (ba)^*)^*$



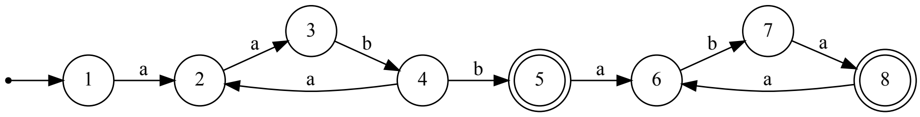
3.5 Построим НКА



4 Задание №4

4.1 $\{(\mathrm{aab})^* b(aba)^m | n \geq 0, m \geq 0\}$

Язык является регулярным, построим автомат:



4.2 $\{uaav | u \in (a,b)^*, v \in (a,b)^*, |u|_b \geq |u|_a\}$

Рассмотрим отрицание языка L: $\overline{L} = \{uaav | u \in (a,b)^*, v \in (a,b)^*, |u|_b < |u|_a\}$
Фиксируем произвольное $n \in N$. Возьмем слово $w = b^n aaa^n$.

Длина слова не меньше n: $|w| = 2 * n + 2 \geq n$.

Рассмотрим следующее разбиение слова:

$$x = b^k \quad y = b^{n-k}$$

$$z = aaa^n$$

$$y \neq \lambda \quad |xy| \leq n$$

$$k \neq 0 \quad n - k \geq 0$$

Других разбиений нет. Если язык регулярный, то $\forall i \geq 0 : xy^i z \in \overline{L}$

$$b^k b^{(n-k)*i} aaa^n$$

Видно, что $\forall i > 1 : xy^i z \notin \overline{L}$

Так как $\overline{L}$ нерегулярный, то и L - нерегулярный язык.

4.3 $L = \{a^m \omega | \omega \in \{a,b\}^*, 1 \leq |\omega|_b \leq m\}$

Рассмотрим отрицание языка L: $\overline{L} = \{a^m \omega | \omega \in \{a,b\}^*, |\omega|_b \geq m\}$
Фиксируем произвольное $n \in N$. Возьмем слово $w = a^n b^n$.

Длина слова не меньше n: $|w| = 2 * n \geq n$.
Рассмотрим следующее разбиение слова:

$$x = a^{k_1} \quad y = a^{k_2}$$
$$z = a^{n-k_1-k_2}b^n$$

$$y \neq \lambda \quad |xy| \leq n$$

$$k_1 \neq 0 \quad k_1 + k_2 \leq n$$

Других разбиений нет. Если язык регулярный, то $\forall i \geq 0 : xy^i z \in \overline{L}$

$$a^{k_1}a^{k_2*i}a^{n-k_1-k_2}b^n = a^{n+k_1*(i-1)}b^n$$

Видно, что $\exists i : xy^i z \notin \overline{L}$
Так как $\overline{L}$ нерегулярный, то и L - нерегулярный язык.

4.4 $L = \{a^k b^m a^n | k = n \vee m > 0\}$

Фиксируем произвольное $n \in N$.
Берем слово

$$w = a^{n-1}ba^n \in L$$

Очевидно, длина слова не меньше n: $|w| = 2n \geq n$.
Рассмотрим следующее разбиение слова:

$$a^{n-1-l}a^l ba^n$$

где $x = a^{n-1-l}$; $y = a^l b$; $z = a^n$ и $l \geq 0$; $l \leq n-1$;
Других разбиений нет.
При $i = 0$ слово $xy^i z = a^{n-1-l}(a^l b)^i a^n = a^{n-1-l}a^n$ не будет пренадлежать языку L, следовательно, язык нерегулярный.

4.5 $L = \{ucv|\ u \in \{a,b\}^*\ v \in \{a,b\}^* u \neq v^R\}$

Фиксируем произвольное $n \in N$.

Берем слово

$$w = a^n c a^{2n} \in L$$

Длина слова не меньше n: $|w| = 3n + 1 \geq n$.

Рассмотрим следующее разбиение слова:

$$a^{n-l} a^l c a^{2n}$$

где $x = a^{n-l}; y = a^l;\ z = ca^{2n}$ и $l > 0;\ l \leq n$;

Других разбиений нет.

При $i = 2$ слово принимает такой вид: $xy^iz = a^{n-l}(a^l)^i ca^{2n} = a^{n-l+il}ca^n = a^{n+l}ca^{2n}$;

Таким образом, при $l = n$:

$$a^{2n} c a^{2n}$$

То есть, $u = v^R$, следовательно, слово не будет пренадлежать языку L, следовательно, язык L - нерегулярный.