

## Домашнее задание №2

Сабитов Сергей А-13а-19

5 мая 2022 г.

### 1 Задание №1

1.1  $L = \{\omega \in \Sigma^* \mid \omega \text{ содержит подстроку } aa\}$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aS \mid bS \mid cS \mid aaT \\ T &\rightarrow aT \mid bT \mid cT \mid \lambda \end{aligned}$$

1.2  $L = \{\omega \in \Sigma^* \mid \omega \text{ не палиндром}\}$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aS(a|b|c) \mid bS(a|b|c) \mid cS(a|b|c) \mid aTb \mid aTc \mid bTa \mid bTc \mid cTa \mid cTb \\ T &\rightarrow aT \mid bT \mid cT \mid a \mid b \mid c \mid \lambda \end{aligned}$$

1.3  $\Sigma = \{\emptyset, N, \{', '\}', \cup\}$

Постройте грамматику для языка  $L = \{\omega \in \Sigma^* \mid \omega \text{ - синтактически корректная строка, обозначающая множество}\}$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow Z \mid Z \cup S \mid \{Z \cup S\} \\ Z &\rightarrow R \mid \{\} \mid \{Z\} \mid \{Z, Z\} \\ R &\rightarrow T, R \mid T \\ T &\rightarrow N, O \mid O, N \mid N \mid O \end{aligned}$$

### 2 Упражнение №2

$$A = \{1^m + 1^n = 1^{m+n} : m, n \in N\}$$

2.1 Докажите, что язык  $A$  регулярный (построением) или нерегулярный (через лемму о накачке)

Будем доказывать, что язык нерегулярный:

1. Фиксируем  $n = m + l + 2$
2. Берем  $w = 1^m + 1^{l+1} = 1^{m+l+1}$
3.  $|w| = 2(m + l) + 2 \geq n$

4. Рассмотрим разбиение:

$$x = \{1^m+\}$$

$$y = \{1^{l+1}\}$$

$$|xy| = m + l + 1 \leq n; |y| = l + 1 \geq 1$$

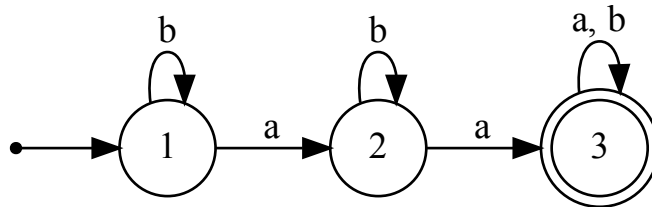
$$z = \{= 1^{m+l+1}\}$$

5.  $\forall k \geq 0 : xy^kz \in L$  - не выполняется, так как при  $k = 0 \ k \geq 2 \Rightarrow 1^m + 1^{k(l+1)} = 1^{m+l} \Rightarrow m + kl + k \neq m + l + 1$ . Следовательно, язык нерегулярный.

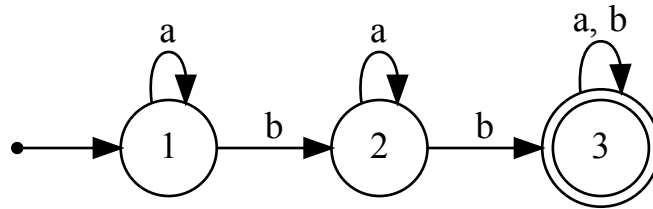
2.2 Постройте КС-грамматику для языка  $A$ , показывающую, что  $A$  - контекстно-свободный

- $S \rightarrow + = \mid 1+ = 1 \mid + 1 = 1 \mid 1S1 \mid 1 + 1T11$
- $T \rightarrow 1T1 \mid =$

$$L_11 = \{\Sigma = \{a, b\}, Q_1 = \{1, 2, 3\}, 1, T_1 = \{3\}, \delta_1\}$$



$$L_12 = \{\Sigma = \{a, b\}, Q_2 = \{1, 2, 3\}, 1, T_2 = \{3\}, \delta_2\}$$



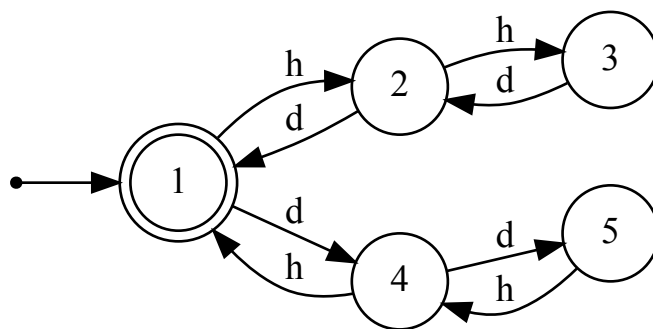
### 3 Упражнение 3

#### 3.1 Прогулка с поводком

Пусть  $D_1 = \{\omega \in \Omega^* \mid \omega \text{ описывает последовательность ваших шагов и шагов вашей собаки на прогулке с поводком}\}$ .

1. Докажите, что язык  $D_1$  регулярный (построением) или нерегулярный (через лемму о накачке)

Построим ДКА, тем самым, покажем, что язык регулярный:



2. Постройте КС-грамматику для языка  $D_1$ , показывающую, что  $D_1$  - контекстно-свободный

- $S \rightarrow hT \mid dR \mid \lambda$
- $T \rightarrow hdT \mid dS$
- $R \rightarrow dhR \mid hS$

### 3.2 Прогулка без поводка

Пусть  $D_2 = \{\omega \in \Omega^* \mid \omega \text{ описывает последовательность ваших шагов и шагов собаки на прогулке без поводка}\}$ .

1. Докажите, что язык  $D_2$  регулярный (построением) или нерегулярный (через лемму о накачке)

С помощью леммы о накачке покажем, что язык нерегулярный:

- (a) Фиксируем  $n$
- (b) Берем  $w = h^n d^n$
- (c)  $|w| = 2n \geq n$
- (d) Рассмотрим разбиение:

$$x = h^i$$

$$y = h^j$$

$$|xy| = i + j = n; j > 0$$

$$z = h^{n-i-j} d^n$$

- (e)  $\forall k \geq 0 : xy^k z \in L$  - не выполняется, так как при  $k \geq 2 \Rightarrow h^{kj+n-j} d^n \rightarrow h^{n+j(k-1)} d^n$  следовательно, человек и собака не будут в одной точке. Значит, язык нерегулярный.

2. Постройте КС-грамматику для языка  $D_2$ , показывающую, что  $D_2$  - контекстно-свободный

- $S \rightarrow dShS \mid hSdS \mid \lambda$

## 4 Задание №5.

- 4.1 Привести алгоритм построения НКА по праволинейной грамматике. Доказать, что с помощью алгоритма мы можем получить только слова из языка грамматики. Проиллюстрировать алгоритм на грамматике:

$$A \rightarrow aB \mid bC$$

$$\begin{aligned} B &\rightarrow aB|\lambda \\ C &\rightarrow aD|A|bC \\ D &\rightarrow aD|bD|\lambda \end{aligned}$$

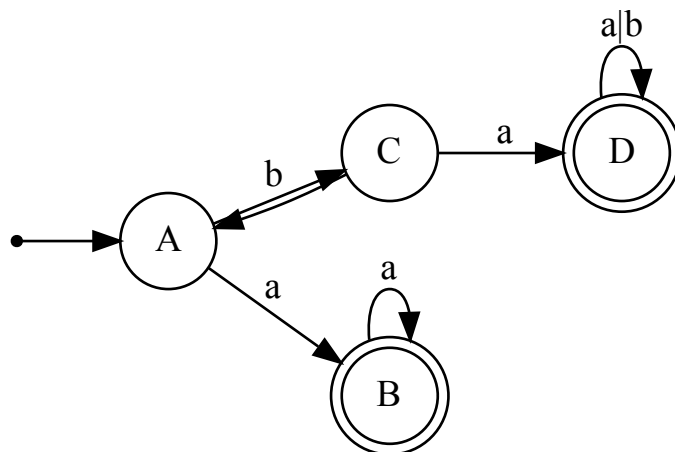
Алгоритм:

- Множество вершин НКА состоит из нетерминалов грамматики и, возможно, еще одной новой вершины  $F$ , которая объявляется заключительной.
- Каждому правилу вида  $A \rightarrow aB$  в автомате соответствует дуга из вершины  $A$  в вершину  $B$ , помеченная символом  $a$ . Каждому правилу вида  $A \rightarrow a$  соответствует дуга из вершины  $A$  в вершину  $F$ , помеченная символом  $a$ . Других дуг нет.
- Начальной вершиной автомата является вершина, соответствующая начальному символу грамматики. Заключительными являются новая вершина  $F$ , если она использовалась на шаге 2, и каждая вершина  $A$ , такая что для нетерминала  $A$  в грамматике есть правило  $A \rightarrow \lambda$

Допустим, что наш алгоритм строит автомат, который допускает слова, которых нет в языке. Тогда существует переход от одной нетерминальной вершины к другой, который не допускает язык.

Если у нас есть переход от одной нетерминальной вершины к другой, который не допускает язык, то должно было быть соответствующее правило, но его нет.

Поэтому алгоритм допускает только слова из языка



4.2 Привести алгоритм построения КС грамматики по НКА. Доказать, что с помощью алгоритма мы можем получить только слова из языка НКА. Проиллюстрировать алгоритм на грамматике:

Алгоритм:

- Нетерминалами грамматики будут вершины автомата, терминалами — пометки дуг
- Для каждой дуги из вершины A в вершину B, помеченная символом a в грамматику добавляется правило  $A \rightarrow aB$ . Для каждой заключительной вершины B в грамматику добавляется правило  $B \rightarrow \lambda$
- Начальным символом будет нетерминал, соответствующий начальной вершине.

Доказательство аналогично

$$\begin{aligned}
 q_0 &\rightarrow aq_0|aq_1|q_3 \\
 q_1 &\rightarrow aq_1|aq_2|q_2|bq_4 \\
 q_2 &\rightarrow aq_2|bq_2|aq_5|\lambda
 \end{aligned}$$

$$q_3 \rightarrow bq_0|\lambda$$

$$q_4 \rightarrow q_5|\lambda$$

$$q_5 \rightarrow aq_5|bq_2$$