Теоретические модели вычислений

ДЗ 1

Косарев А.А.

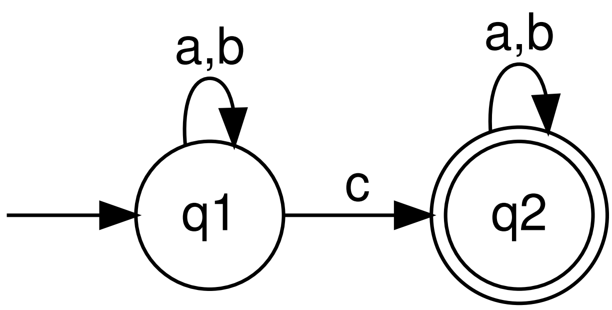
А-05-19

Задача 1 : Построить конечный автомат, распознающий язык. Автомат должен быть детерминированным.

Язык № 1:

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* | |w|_c = 1\}$$

Автомат № 1:

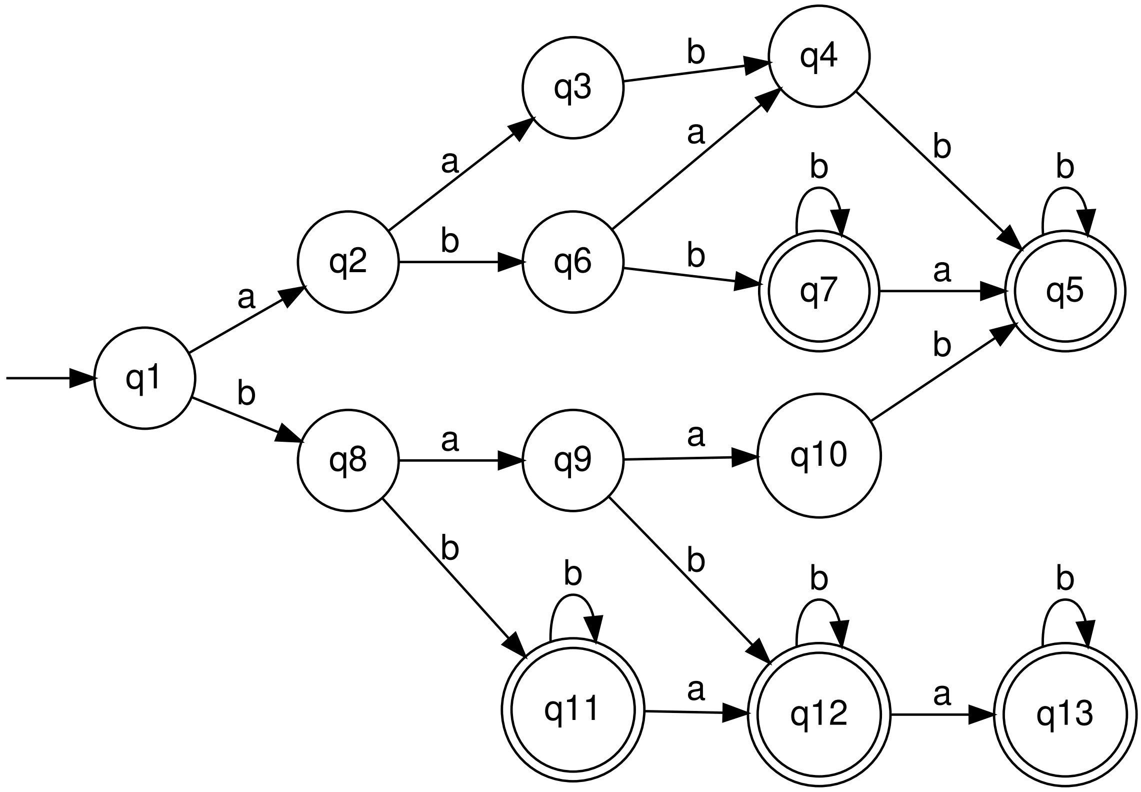


Автомат 1.1. (ответ)

Язык № 2:

$$L = \{w \in \{a, b\}^* | |w|_a \leq 2; |w|_b \geq 2\}$$

Автомат № 2:



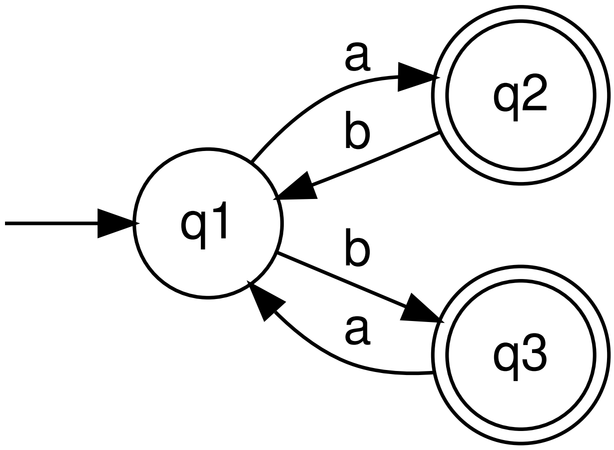
Автомат 1.2. (ответ)

Язык № 3:

$$L = \{w \in \{a, b\}^* | |w|_a \neq |w|_b\}$$

Автомат № 3:

Автомат функционирует только если a и b чередуются. В противном случае, предполагаю, автомат построить невозможно.

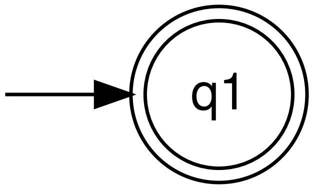


Автомат 1.3. (ответ)

Язык № 4:

$$L = \{w \in \{a, b\}^* | ww = www\}$$

Автомат № 4:



Автомат 1.4. (ответ)

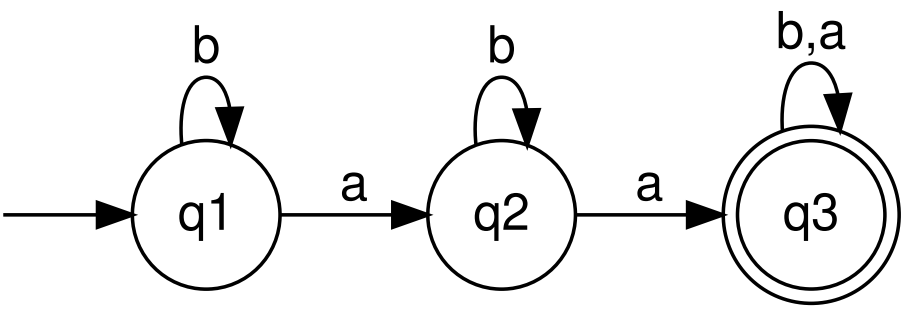
Задача 2 : Построить конечный автомат, используя прямое произведение.

Язык № 1:

$$L = \{w \in \{a,b\}^* | |w|_a \geq 2 \wedge |w|_b \geq 2\}$$

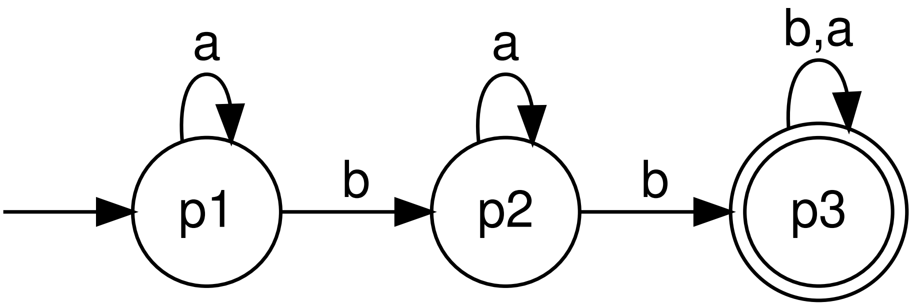
Разобьём на два автомата:

Автомат № 1:



Автомат 2.1.1

Автомат № 2:



Автомат 2.1.2.

$$\Sigma_1 = \{a, b\}$$
$$Q_1 = \{q_1, q_2, q_3\}$$
$$s_1 = \{q_1\}$$
$$T_1 = \{q_3\}$$
$$\delta_1 =$$

-	a	b
q_1	q_2	q_1
q_2	q_3	q_2
q_3	q_3	q_3

$$\Sigma_2 = \{a, b\}$$
$$Q_2 = \{p_1, p_2, p_3\}$$
$$s_2 = \{p_1\}$$
$$T_2 = \{p_3\}$$
$$\delta_2 =$$

-	a	b
p_1	p_1	p_2
p_2	p_2	p_3
p_3	p_3	p_3

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{a, b\}$$

$Q = Q_1 \times Q_2 = \{< q_1, p_1 >, < q_1, p_2 >, < q_1, p_3 >, < q_2, p_1 >, < q_2, p_2 >, < q_2, p_3 >, < q_3, p_1 >, < q_3, p_2 >, < q_3, p_3 >\}$

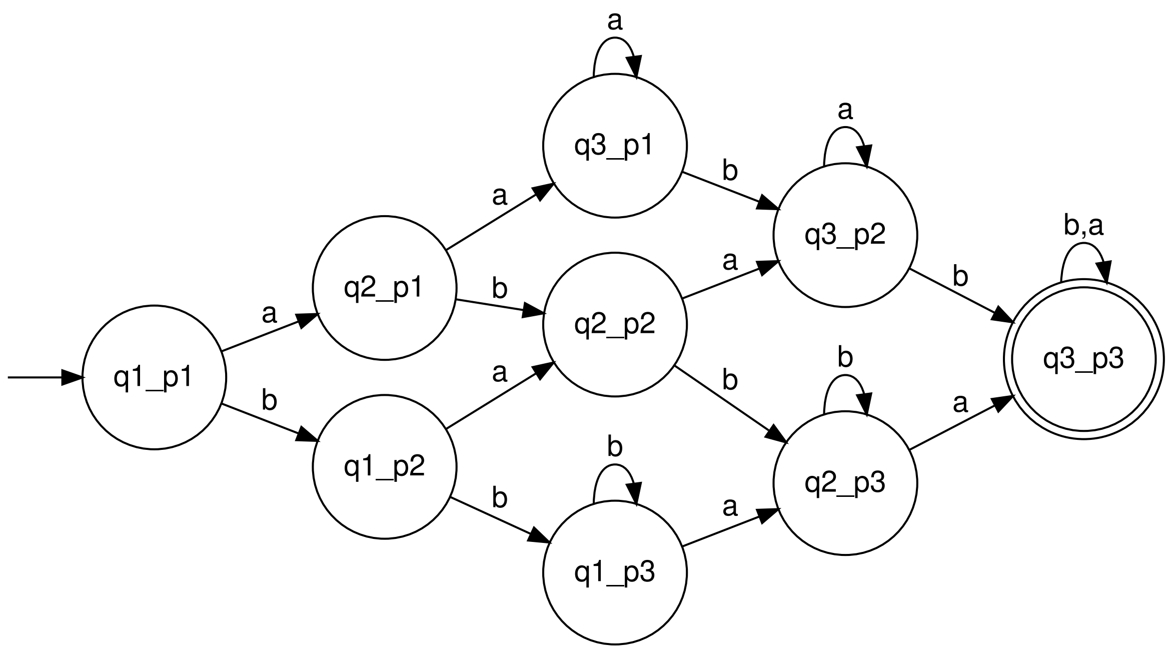
$s =< s_1, s_2 >=< q_1, p_1 >$

$T = T_1 \times T_2 =< q_3, p_3 >$

$\delta =$

-	a	b
<q_1,p_1>	<q_2,p_1>	<q_1,p_2>
<q_1,p_2>	<q_2,p_2>	<q_1,p_3>
<q_1,p_3>	<q_2,p_3>	<q_1,p_3>
<q_2,p_1>	<q_3,p_1>	<q_2,p_2>
<q_2,p_2>	<q_3,p_2>	<q_2,p_3>
<q_2,p_3>	<q_3,p_3>	<q_2,p_3>
<q_3,p_1>	<q_3,p_1>	<q_3,p_2>
<q_3,p_2>	<q_3,p_2>	<q_3,p_3>
<q_3,p_3>	<q_3,p_3>	<q_3,p_3>

Результирующий автомат, полученный прямым произведением вышеизложенных автоматов:



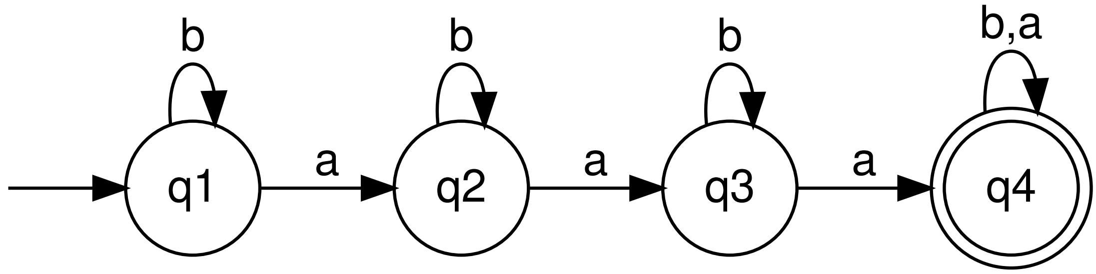
Автомат 2.1. (ответ)

Язык № 2:

$$L = \{w \in \{a, b\}^* | |w|_a \geq 3 \wedge |w|_b \text{ is odd}\}$$

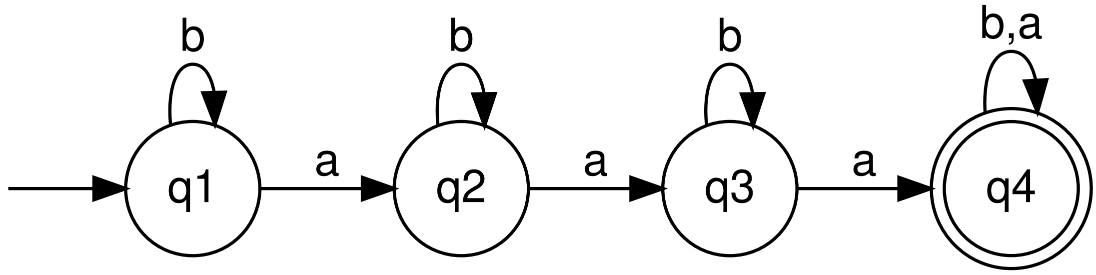
Разобьём на два автомата:

Автомат № 1:



Автомат 2.2.1.

Автомат № 2:



Автомат 2.2.1.

$\Sigma_1 = \{a, b\}$
$Q_1 = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$
$s_1 = \{q_1\}$
$T_1 = \{q_4\}$
$\delta_1 =$

-	a	b
q_1	q_2	q_1
q_2	q_3	q_2
q_3	q_4	q_3
q_4	q_4	q_4

$\Sigma_2 = \{a, b\}$
$Q_2 = \{p_1, p_2\}$
$s_2 = \{p_1\}$
$T_2 = \{p_2\}$
$\delta_2 =$

-	a	b
p_1	p_1	p_2
p_2	p_2	p_1

$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{a, b\}$

$Q = Q_1 \times Q_2 = \{< q_1, p_1 >, < q_1, p_2 >, < q_2, p_1 >, < q_2, p_2 >, < q_3, p_1 >, < q_3, p_2 >, < q_4, p_1 >, < q_4, p_2 >\}$

$s =< s_1, s_2 >=< q_1, p_1 >$

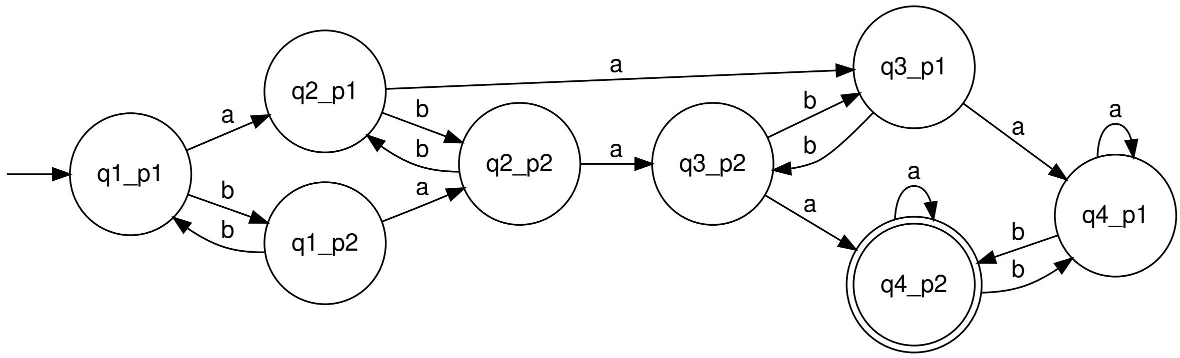
$T = T_1 \times T_2 =< q_4, p_2 >$

$\delta =$

-	a	b

<q_1,p_1> <q_2,p_1> <q_1,p_2>
<q_1,p_2> <q_2,p_2> <q_1,p_1>
<q_2,p_1> <q_3,p_1> <q_2,p_2>
<q_2,p_2> <q_3,p_2> <q_2,p_1>
<q_3,p_1> <q_4,p_1> <q_3,p_2>
<q_3,p_2> <q_4,p_2> <q_3,p_1>
<q_4,p_1> <q_4,p_1> <q_4,p_2>
<q_4,p_2> <q_4,p_2> <q_4,p_1>

Результирующий автомат, полученный прямым произведением вышеизложенных автоматов:



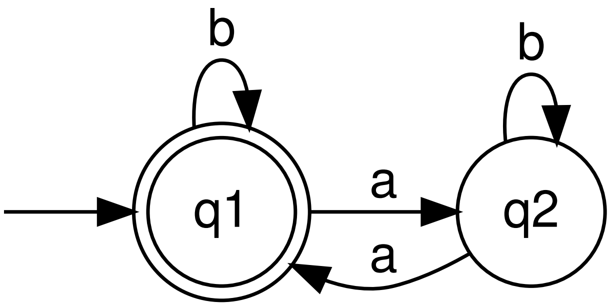
Автомат 2.2. (ответ)

Язык № 3:

$$L = \{w \in \{a, b\}^* ||w|_a \text{ is even} \land |w|_b \text{ multiple of } 3\}$$

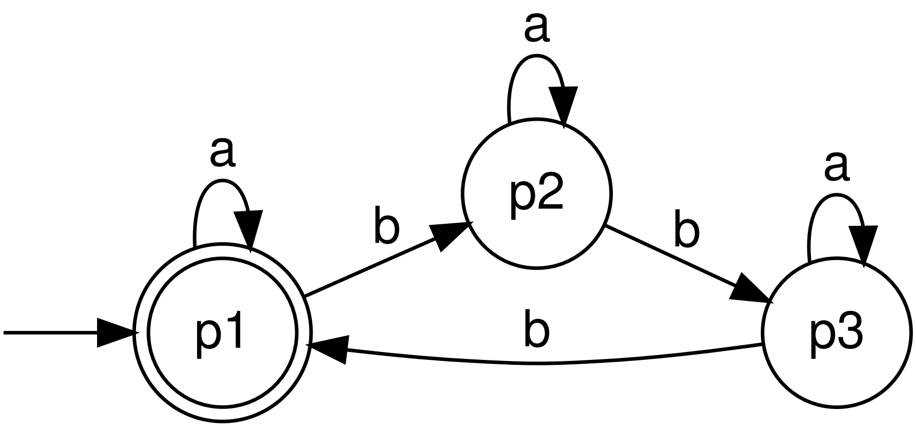
Разобьём на два автомата:

Автомат № 1:



Автомат 2.3.1.

Автомат № 2:



Автомат 2.3.2.

$$\Sigma_1 = \{a, b\}$$
$Q_1 = \{q_1, q_2\}$
$s_1 = \{q_1\}$
$T_1 = \{q_1\}$
$\delta_1 =$

-	a	b
q_1	q_2	q_1
q_2	q_1	q_2

$$\Sigma_2 = \{a, b\}$$
$Q_2 = \{p_1, p_2, p_3\}$
$s_2 = \{p_1\}$
$T_2 = \{p_1\}$
$\delta_2 =$

-	a	b
p_1	p_1	p_2
p_2	p_2	p_3
p_3	p_3	p_1

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{a, b\}$$

$Q = Q_1 \times Q_2 = \{< q_1, p_1 >, < q_1, p_2 >, < q_1, p_3 >, < q_2, p_1 >, < q_2, p_2 >, < q_2, p_3 >\}$

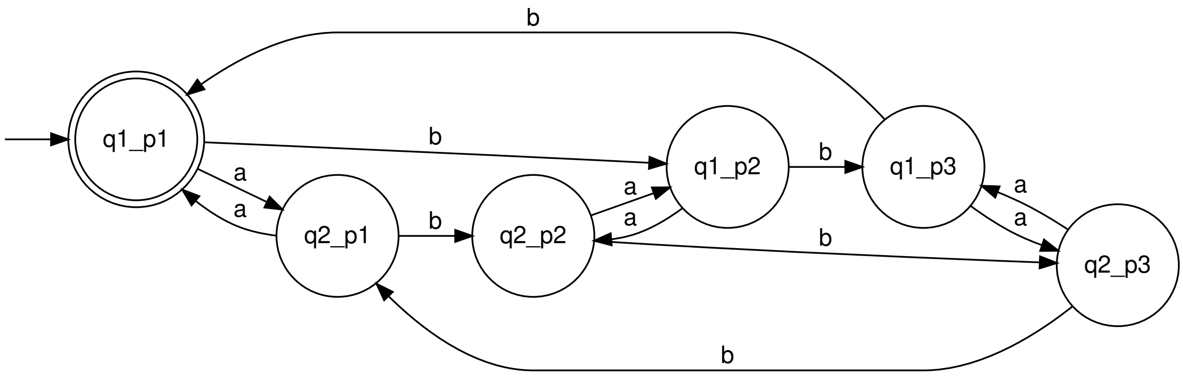
$s =< s_1, s_2 >=< q_1, p_1 >$

$T = T_1 \times T_2 =< q_1, p_1 >$

$\delta =$

-	a	b
<q_1,p_1>	<q_2,p_1>	<q_1,p_2>
<q_1,p_2>	<q_2,p_2>	<q_1,p_3>
<q_1,p_3>	<q_2,p_3>	<q_1,p_1>
<q_2,p_1>	<q_1,p_1>	<q_2,p_2>
<q_2,p_2>	<q_1,p_2>	<q_2,p_3>
<q_2,p_3>	<q_1,p_3>	<q_2,p_1>

Результирующий автомат, полученный прямым произведением вышеизложенных автоматов:

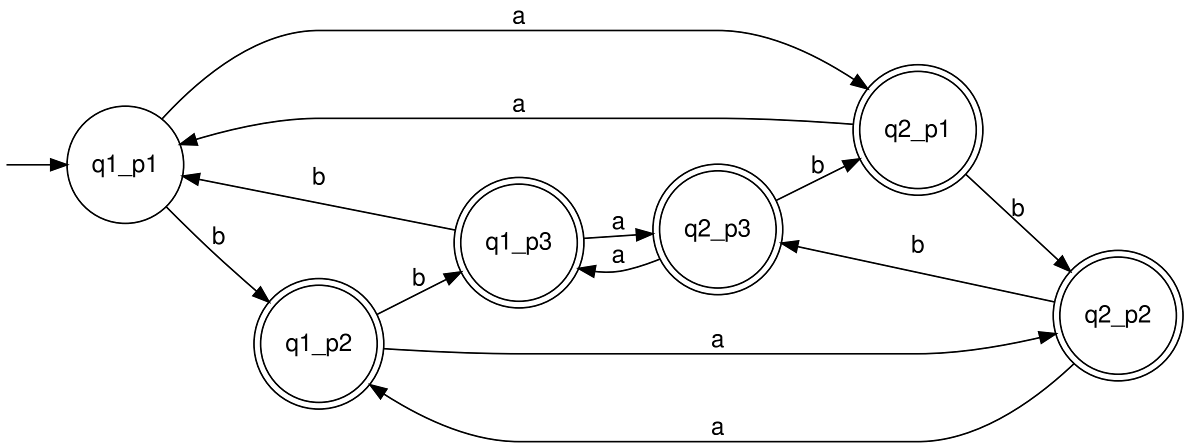


Автомат 2.3. (ответ)

Язык № 4:

$$L = \overline{L_3}$$

Заменим терминальные состояния на терминальные и наоборот и получим требуемый автомат:



Автомат 2.4. (ответ)

Язык № 5:

$$L = L_2 / L_3$$

Раскроем разность через пересечение:

$$L = L_2 \cap \overline{L_3}$$

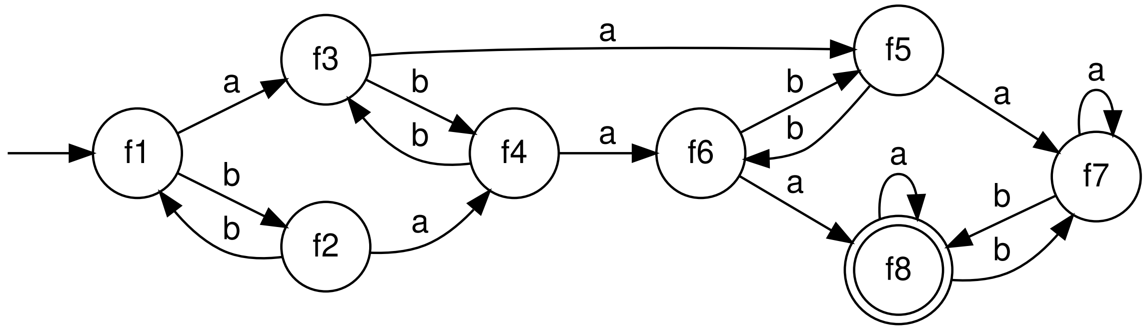
Найдем прямое произведение

Автомат № 1:

$$\Sigma_1 = \{a, b\}$$
$$Q_1 = \{< q_1, p_1 >, < q_1, p_2 >, < q_2, p_1 >, < q_2, p_2 >, < q_3, p_1 >, < q_3, p_2 >, < q_4, p_1 >, < q_4, p_2 >\}$$
$$s_1 = \{< q_1, p_1 >\}$$
$$T_1 = \{< q_4, p_2 >\}$$
$$\delta_1 =$$

(в функции перехода сразу переименуем состояния, чтобы в последующем не писать по 4 буквы)

-	a	b
f_1	f_3	f_2
f_2	f_4	f_1
f_3	f_5	f_4
f_4	f_6	f_3
f_5	f_7	f_6
f_6	f_8	f_5
f_7	f_7	f_8
f_8	f_8	f_7



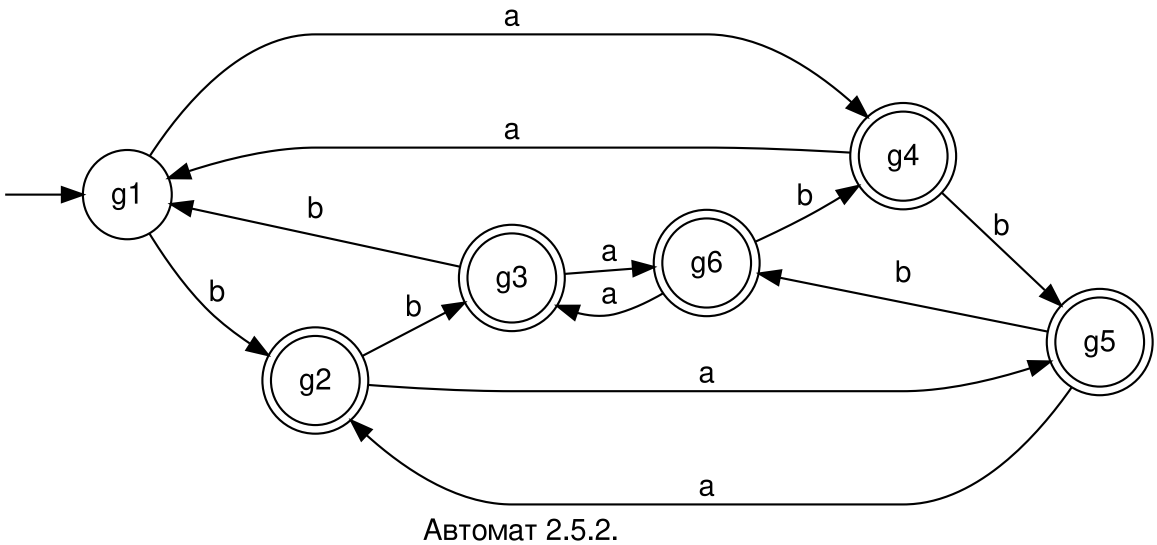
Автомат 2.5.1.

Автомат № 2:

$$\Sigma_2 = \{a, b\}$$
$$Q_2 = \{< z_1, r_1 >, < z_1, r_2 >, < z_1, r_3 >, < z_2, r_1 >, < z_2, r_2 >, < z_2, r_3 >\}$$
$$s_2 = \{< z_1, r_1 >\}$$
$$T_2 = \{< z_1, r_2 >, < z_1, r_3 >, < z_2, r_1 >, < z_2, r_2 >, < z_2, r_3 >\}$$
$$\delta_2 =$$

(в функции перехода сразу переименуем состояния, чтобы в последующем не писать по 4 буквы)

-	a	b
g_1	g_4	g_2
g_2	g_5	g_3
g_3	g_6	g_1
g_4	g_1	g_5
g_5	g_2	g_6
g_6	g_3	g_4



Автомат 2.5.2.

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{a, b\}$$

$$Q = Q_1 \times Q_2 = \{< f_1, g_1 >, < f_1, g_2 >, < f_1, g_3 >, < f_1, g_4 >, < f_1, g_5 >, < f_1, g_6 >, < f_2, g_1 >, < f_2, g_2 >, < f_2, g_3 >, < f_2, g_4 >, < f_2, g_5 >, < f_2, g_6 >, < f_3, g_1 >, < f_3, g_2 >, < f_3, g_3 >, < f_3, g_4 >, < f_3, g_5 >, < f_3, g_6 >, < f_4, g_1 >, < f_4, g_2 >, < f_4, g_3 >, < f_4, g_4 >, < f_4, g_5 >, < f_4, g_6 >, < f_5, g_1 >, < f_5, g_2 >, < f_5, g_3 >, < f_5, g_4 >, < f_5, g_5 >, < f_5, g_6 >, < f_6, g_1 >, < f_6, g_2 >, < f_6, g_3 >, < f_6, g_4 >, < f_6, g_5 >, < f_6, g_6 >, < f_7, g_1 >, < f_7, g_2 >, < f_7, g_3 >, < f_7, g_4 >, < f_7, g_5 >, < f_7, g_6 >, < f_8, g_1 >, < f_8, g_2 >, < f_8, g_3 >, < f_8, g_4 >, < f_8, g_5 >, < f_8, g_6 >\}$$

$$s =< s_1, s_2 >=< f_1, g_1 >$$

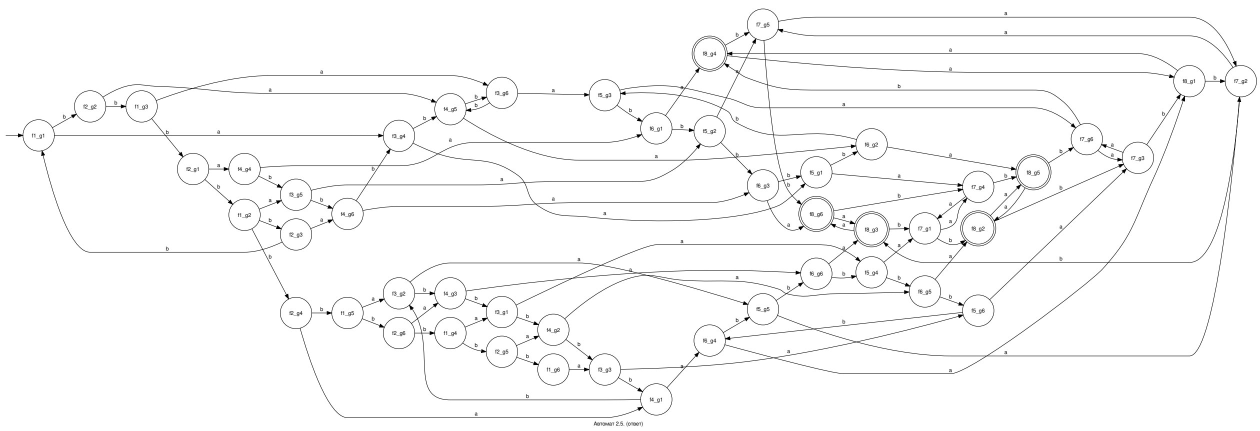
$$T = T_1 \times T_2 = \{< f_8, g_2 >, < f_8, g_3 >, < f_8, g_4 >, < f_8, g_5 >, < f_8, g_6 >\}$$

$$\delta =$$

-	a	b
<f_1,g_1>	<f_3,g_4>	<f_2,g_2>
<f_1,g_2>	<f_3,g_5>	<f_2,g_3>
<f_1,g_3>	<f_3,g_6>	<f_2,g_1>
<f_1,g_4>	<f_3,g_1>	<f_2,g_5>
<f_1,g_5>	<f_3,g_2>	<f_2,g_6>
<f_1,g_6>	<f_3,g_3>	<f_2,g_4>
<f_2,g_1>	<f_4,g_4>	<f_1,g_2>
<f_2,g_2>	<f_4,g_5>	<f_1,g_3>
<f_2,g_3>	<f_4,g_6>	<f_1,g_1>
<f_2,g_4>	<f_4,g_1>	<f_1,g_5>
<f_2,g_5>	<f_4,g_2>	<f_1,g_6>
<f_2,g_6>	<f_4,g_3>	<f_1,g_4>
<f_3,g_1>	<f_5,g_4>	<f_4,g_2>
<f_3,g_2>	<f_5,g_5>	<f_4,g_3>
<f_3,g_3>	<f_5,g_6>	<f_4,g_1>
<f_3,g_4>	<f_5,g_1>	<f_4,g_5>
<f_3,g_5>	<f_5,g_2>	<f_4,g_6>
<f_3,g_6>	<f_5,g_3>	<f_4,g_5>
<f_4,g_1>	<f_6,g_4>	<f_3,g_2>
<f_4,g_2>	<f_6,g_5>	<f_3,g_3>
<f_4,g_3>	<f_6,g_6>	<f_3,g_1>
<f_4,g_4>	<f_6,g_1>	<f_3,g_5>
<f_4,g_5>	<f_6,g_2>	<f_3,g_6>
<f_4,g_6>	<f_6,g_3>	<f_3,g_4>
<f_5,g_1>	<f_7,g_4>	<f_6,g_2>
<f_5,g_2>	<f_7,g_5>	<f_6,g_3>

<f_5,g_3> <f_7,g_6> <f_6,g_1>
<f_5,g_4> <f_7,g_1> <f_6,g_5>
<f_5,g_5> <f_7,g_2> <f_6,g_6>
<f_5,g_6> <f_7,g_3> <f_6,g_4>
<f_6,g_1> <f_8,g_4> <f_5,g_2>
<f_6,g_2> <f_8,g_5> <f_5,g_3>
<f_6,g_3> <f_8,g_6> <f_5,g_1>
<f_6,g_4> <f_8,g_1> <f_5,g_5>
<f_6,g_5> <f_8,g_2> <f_5,g_6>
<f_6,g_6> <f_8,g_3> <f_5,g_4>
<f_7,g_1> <f_7,g_4> <f_8,g_2>
<f_7,g_2> <f_7,g_5> <f_8,g_3>
<f_7,g_3> <f_7,g_6> <f_8,g_1>
<f_7,g_4> <f_7,g_1> <f_8,g_5>
<f_7,g_5> <f_7,g_2> <f_8,g_6>
<f_7,g_6> <f_7,g_3> <f_8,g_4>
<f_8,g_1> <f_8,g_4> <f_7,g_2>
<f_8,g_2> <f_8,g_5> <f_7,g_3>
<f_8,g_3> <f_8,g_6> <f_7,g_1>
<f_8,g_4> <f_8,g_1> <f_7,g_5>
<f_8,g_5> <f_8,g_2> <f_7,g_6>
<f_8,g_6> <f_8,g_3> <f_7,g_4>

Результирующий автомат, полученный прямым произведением вышеизложенных автоматов:



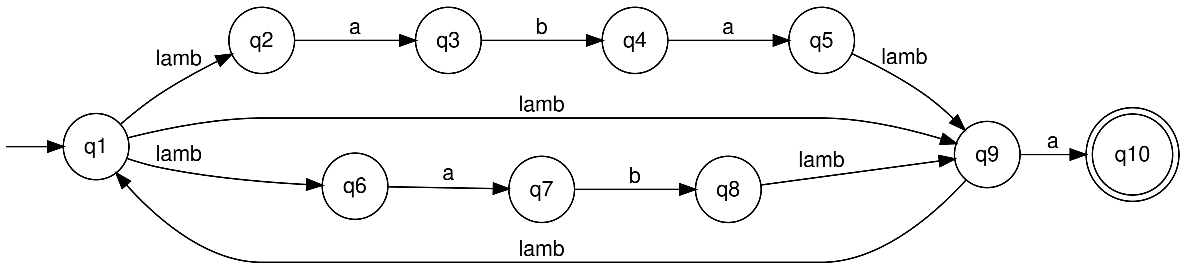
Задача 3 : Построить минимальный ДКА по регулярному выражению.

Регулярное выражение № 1:

$$(ab + aba)^*a$$

Сперва построим недетерминированный конечный автомат, а затем преобразуем его в детерминированный.

НКА:

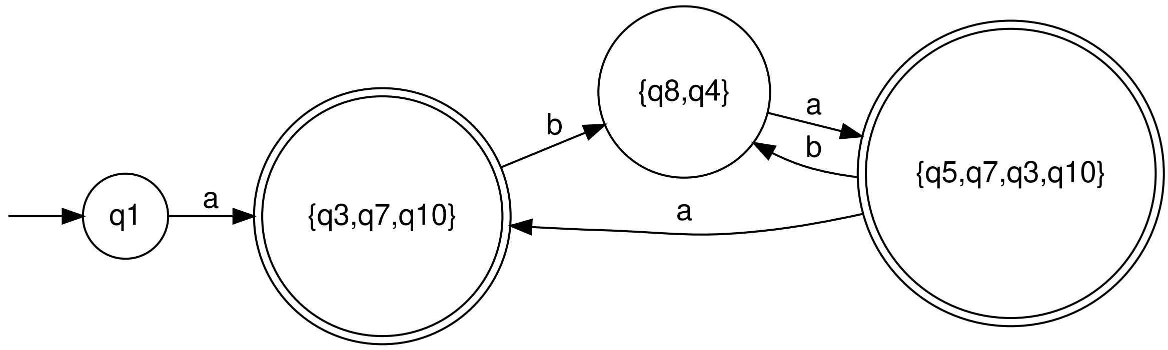


Автомат 3.1.1.

Теперь составим таблицу для преобразования НКА в ДКА:

	a	**b**
q1	q3,q7,q10	-
q3,q7,q10	-	q4,q8
q4,q8	q3,q5,q10,q7	-
q3,q5,q10,q7	q3,q7,q10	q4,q8

Получаем ДКА:



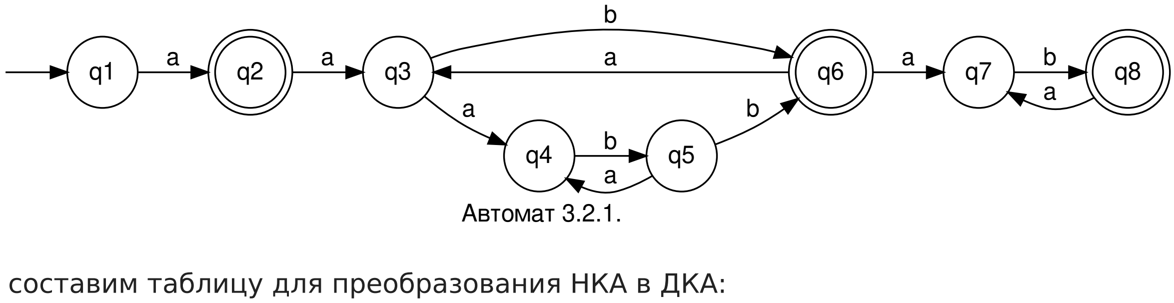
Автомат 3.1. (ответ)

Регулярное выражение № 2:

`![](https://latex.codecogs.com/svg.image?a(a(ab)%5E*b)%5E*(ab)%5E*)`

Сперва построим недетерминированный конечный автомат, а затем преобразуем его в детерминированный.

НКА:



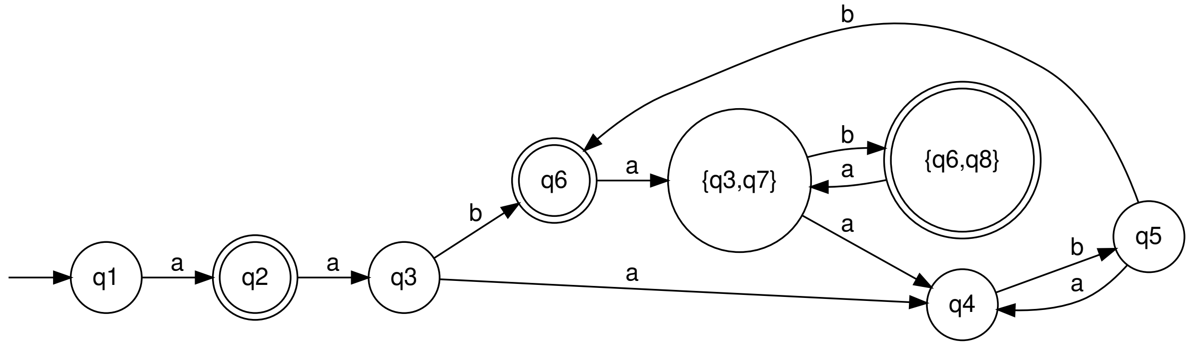
Автомат 3.2.1.

Теперь составим таблицу для преобразования НКА в ДКА:

	a	**b**
q1	q2	-

q2	q3	-
q3	q4	q6
q4	-	q5
q6	q3,q7	-
q5	q4	q6
q3,q7	q4	q6,q8
q6,q8	q3,q7	-

Получаем ДКА:



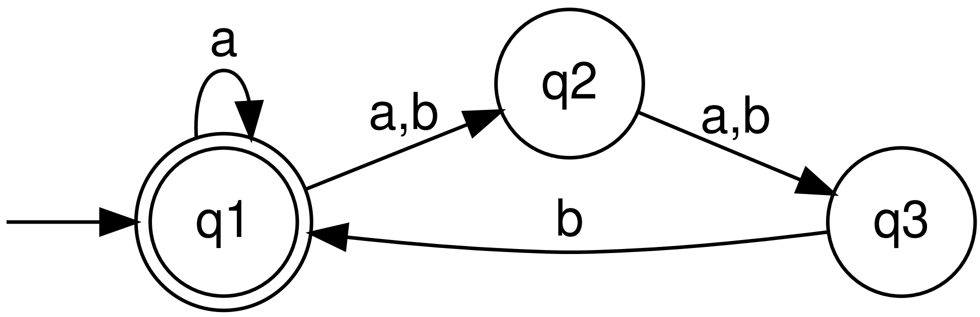
Автомат 3.2. (ответ)

Регулярное выражение № 3:

`![](https://latex.codecogs.com/svg.image?(a+(a+b)(a+b)b)%5E*)`

Сперва построим недетерминированный конечный автомат, а затем преобразуем его в детерминированный.

НКА:



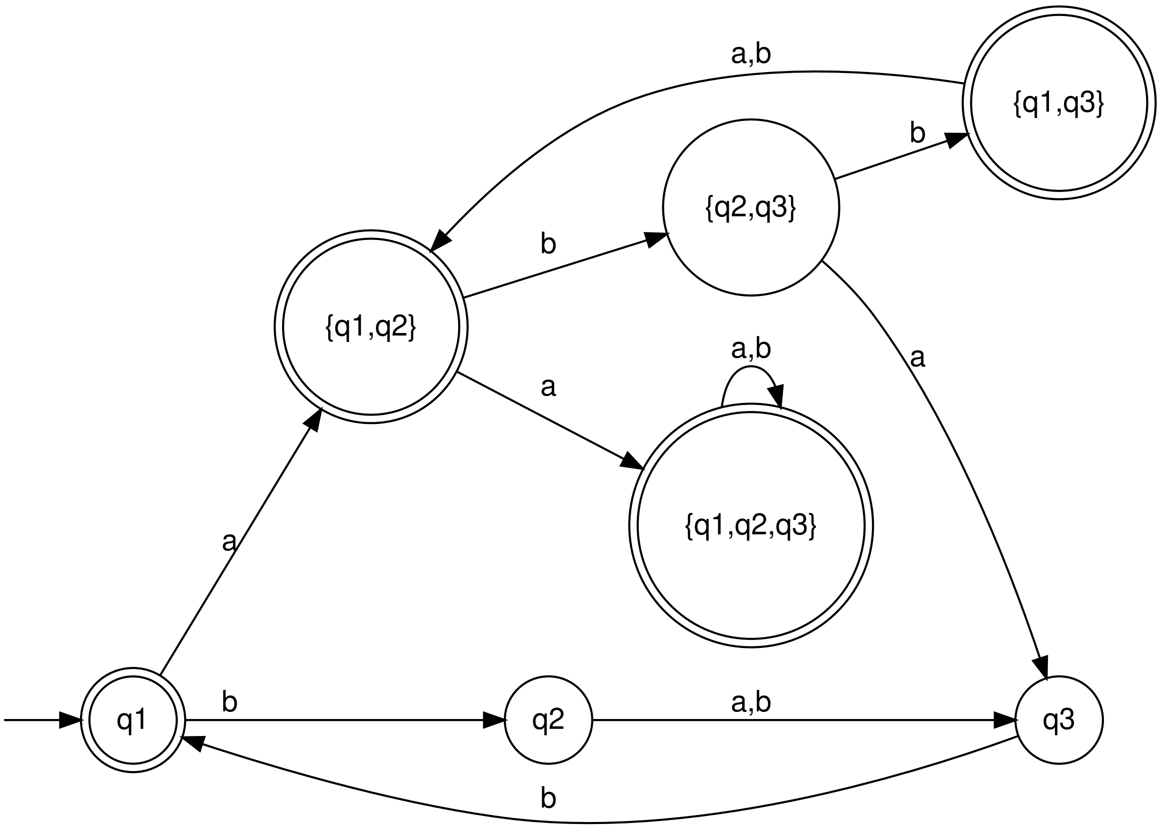
Автомат 3.3.1.

Теперь составим таблицу для преобразования НКА в ДКА:

	a	**b**
q1	q1,q2	q2
q1,q2	q1,q2,q3	q2,q3
q2	q3	q3
q1,q2,q3	q1,q2,q3	q1,q2,q3
q2,q3	q3	q1,q3
q3	-	q1

q1,q3   q1,q2   q1,q2

Получаем ДКА:

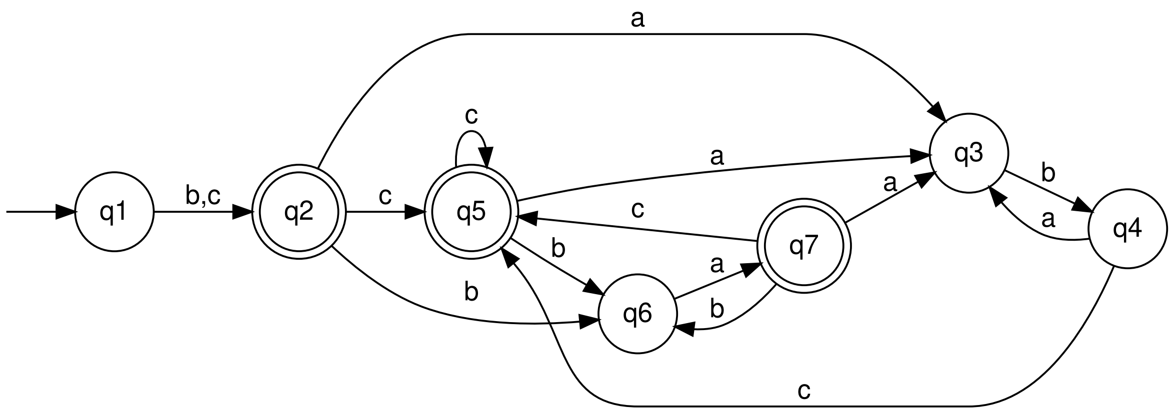


Автомат 3.3. (ответ)

Регулярное выражение № 4:

`![](https://latex.codecogs.com/svg.image?(b+c)((ab)%5E*c+(ba)%5E*)%5E*)`

Можем сразу построить ДКА:

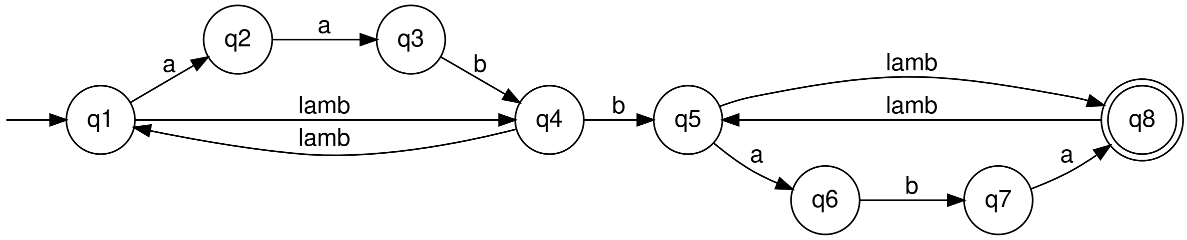


Автомат 3.4. (ответ)

Задача 4 : Определить является ли язык регулярным или нет

Язык № 1:

$$L = \{(aab)^n b(aba)^m \mid n \geq 0, m \geq 0\}$$



Автомат 4.1. (ответ)

Язык является регулярным.

Язык № 2:

$$L = \{uaav \mid u \in \{a,b\}^*, v \in \{a,b\}^*, |u|_b \geqslant |v|_a\}$$

Лемма о накачке:

$$L - \text{regular} \Rightarrow \exists n \quad \forall \omega \in L, \quad |\omega| \geqslant n \quad \exists x,y,z \quad \omega = xyz \quad |xy| \leqslant n$$
$$y \neq \varepsilon \quad \forall i \geqslant 0 \quad xy^i z \in L$$

Отрицание:

$$\forall n \quad \exists \omega \in L, \quad |\omega| \geqslant n \quad \forall x,y,z \quad \omega = xyz \quad |xy| \leqslant n$$
$$y \neq \varepsilon \quad \exists i \geqslant 0 \quad xy^i z \notin L$$

Возьмём слово

$$\omega = b^n aaa^n, \forall n$$
$$|\omega| = 2n + 2 \geqslant n$$

Тогда

$$xy = b^k b^m, \;\; k + m \leq n, \;\; m \neq 0$$
$$\omega = b^k b^m b^{n-k-m} aaa^n$$

"Накачка" y:

$$\omega = b^k (b^m)^i b^{n-k-m} aaa^n$$
$$i = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = b^{n-m} aaa^n$$
$$m \neq 0 \quad \Rightarrow \omega_0 \notin L$$

Следовательно, язык не является регулярным.

Язык № 3:

$$L = \{a^m w \mid w \in \{a,b\}^*, 1 \leqslant |w|_b \leqslant m\}$$

Лемма о накачке:

$$L-\text{regular} \Rightarrow \exists n \quad \forall \omega \in L, \;\; |\omega| \geqslant n \quad \exists x,y,z \quad \omega = xyz \quad |xy| \leqslant n$$
$$y \neq \varepsilon \quad \forall i \geqslant 0 \quad xy^iz \in L$$

Отрицание:

$$\forall n \quad \exists \omega \in L, \;\; |\omega| \geqslant n \quad \forall x,y,z \quad \omega = xyz \quad |xy| \leqslant n$$
$$y \neq \varepsilon \quad \exists i \geqslant 0 \quad xy^iz \notin L$$

Возьмём слово

$$\omega = a^n b^n, \forall n$$
$$|\omega| \geqslant n$$

Тогда

$$xy = a^k a^m, \;\; k+m \leq n, \;\; m \neq 0$$
$$\omega = a^k a^m a^{n-k-m} b^n$$

"Накачка" y:

$$\omega = a^k (a^m)^i a^{n-k-m} b^n$$
$$i = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = a^{n-m} b^n$$
$$m \neq 0 \quad \Rightarrow \omega_0 \notin L$$

Следовательно, язык не является регулярным.

Язык № 4:

$$L = \{a^k b^m a^n \mid k = n \vee m > 0\}$$

Лемма о накачке:

$$L-\text{regular} \Rightarrow \exists n \quad \forall \omega \in L, \;\; |\omega| \geqslant n \quad \exists x,y,z \quad \omega = xyz \quad |xy| \leqslant n$$
$$y \neq \varepsilon \quad \forall i \geqslant 0 \quad xy^iz \in L$$

Отрицание:

$$\forall n \quad \exists \omega \in L, \;\; |\omega| \geqslant n \quad \forall x,y,z \quad \omega = xyz \quad |xy| \leqslant n$$
$$y \neq \varepsilon \quad \exists i \geqslant 0 \quad xy^iz \notin L$$

Возьмём слово

$$\omega = a^n b a^n, \forall n$$
$$|\omega| \geqslant n$$

Тогда

$$xy = a^k a^m, \;\; k+m \leq n, \;\; m \neq 0$$
$$\omega = a^k a^m a^{n-k-m} b a^n$$

"Накачка" y:

$$\omega = a^k(a^m)^i a^{n-k-m} b a^n$$
$$i = 2 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = a^{n+m} b a^n$$
$$m \neq 0 \quad \Rightarrow \omega_2 \notin L$$

Следовательно, язык не является регулярным.

Язык № 5:

$$L = \{ucv \mid u \in \{a,b\}^*, v \in \{a,b\}^*, u \neq v^R\}$$

Лемма о накачке:

$$L - \text{regular} \Rightarrow \exists n \quad \forall \omega \in L, \quad |\omega| \geqslant n \quad \exists x, y, z \quad \omega = xyz \quad |xy| \leqslant n$$
$$y \neq \varepsilon \quad \forall i \geqslant 0 \quad xy^i z \in L$$

Отрицание:

$$\forall n \quad \exists \omega \in L, \quad |\omega| \geqslant n \quad \forall x, y, z \quad \omega = xyz \quad |xy| \leqslant n$$
$$y \neq \varepsilon \quad \exists i \geqslant 0 \quad xy^i z \notin L$$

Возьмём слово

$$\omega = (ab)^n c (ab)^n = s_1 s_2 ... s_n ... s_{2n} ... s_{4n} s_{4n+1}, \forall n$$
$$|\omega| \geqslant n$$

Тогда

```
![](https://latex.codecogs.com/svg.image?xy=(s_1s_2...s_k)
(s_%7Bk+1%7Ds_%7Bk+2%7D...s_%7Bk+m%7D),%20%5C:%5C:k+m%5Cleq%20n,%20%5C:%
(s_1s_2...s_k)(s_%7Bk+1%7Ds_%7Bk+2%7D...s_%7Bk+m%7D)
(s_%7Bk+m+1%7Ds_%7Bk+m+2%7D...s_%7B2n%7Dc(ab)%5En))
```

"Накачка" y:

```
![](https://latex.codecogs.com/svg.image?%5Comega%20=(s_1s_2...s_k)
(s_%7Bk+1%7Ds_%7Bk+2%7D...s_%7Bk+m%7D)%5Ei(s_%7Bk+m+1%7Ds_%7Bk+m+2%7D...
(s_1s_2...s_k)
(s_%7Bk+1%7Ds_%7Bk+2%7D...s_%7Bk+m%7D)%5E2(s_%7Bk+m+1%7Ds_%7Bk+m+2%7D..
```

Следовательно, язык не является регулярным.