

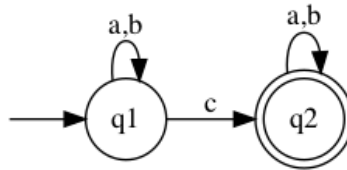
ТМВ Домашнее задание №1

А-136-19 Головин Антон

5 апреля 2022

1 Задание №1. Построить конечный автомат, распознающий язык.

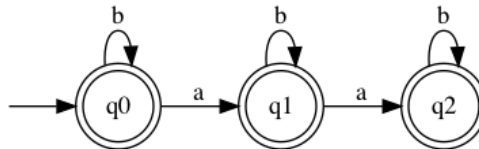
1. $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_c = 1\}$



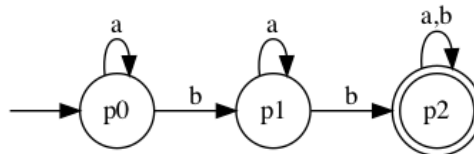
2. $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \leq 2, |w|_b \geq 2\}$

Это задача на прямое произведение.

$L_{11} = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \leq 2\}$



$L_{12} = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_b \geq 2\}$



$$L = L_{11} \times L_{12} \Rightarrow$$

$$A_1 = \langle \sum_1, Q_1, S_1, T_1, \delta_1 \rangle \quad A_2 = \langle \sum_2, Q_2, S_2, T_2, \delta_2 \rangle$$

$$\sum = \{a, b\}$$

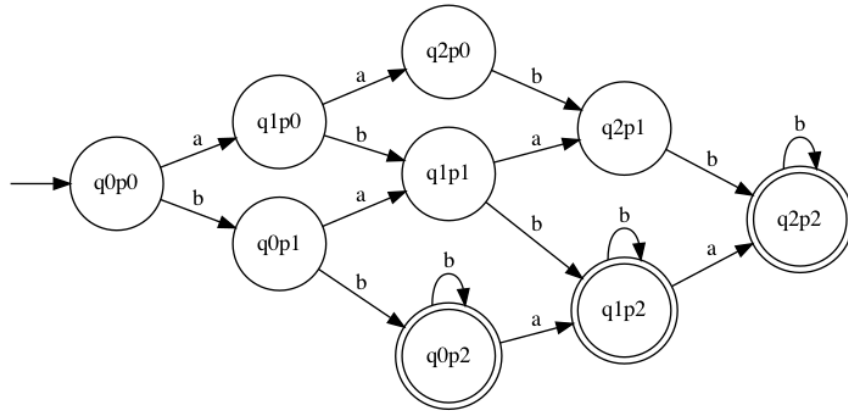
$$Q = Q_1 \times Q_2 = \{q_0p_0, q_0p_1, q_0p_2, q_1p_0, q_1p_1, q_1p_2, q_2p_0, q_2p_1, q_2p_2\}$$

$$S = \langle S_1, S_2 \rangle = \langle q_0, p_0 \rangle$$

$$T = T_1 \times T_2 = \langle q_2p_2, q_1p_2, q_0p_2 \rangle$$

$$\delta(\langle q_1, q_2 \rangle, c) = \langle \delta_1(q_1, c), \delta_2(q_2, c) \rangle$$

	a	b
$\langle q_0, p_0 \rangle$	$\langle q_1, p_0 \rangle$	$\langle q_0, p_1 \rangle$
$\langle q_0, p_1 \rangle$	$\langle q_1, p_1 \rangle$	$\langle q_0, p_2 \rangle$
$\langle q_0, p_2 \rangle$	$\langle q_1, p_2 \rangle$	$\langle q_0, p_2 \rangle$
$\langle q_1, p_0 \rangle$	$\langle q_2, p_0 \rangle$	$\langle q_1, p_0 \rangle$
$\langle q_1, p_1 \rangle$	$\langle q_2, p_1 \rangle$	$\langle q_1, p_2 \rangle$
$\langle q_1, p_2 \rangle$	$\langle q_2, p_2 \rangle$	$\langle q_1, p_2 \rangle$
$\langle q_2, p_0 \rangle$	-	$\langle q_2, p_1 \rangle$
$\langle q_2, p_1 \rangle$	-	$\langle q_2, p_2 \rangle$
$\langle q_2, p_2 \rangle$	-	$\langle q_2, p_2 \rangle$

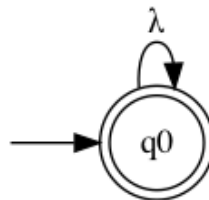


$$3. L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \neq |w|_b\}$$

Конечный автомат нельзя построить, потому что требуется сравнивать количество символов \Rightarrow нерегулярный язык.

$$4. L = \{w \in \{a, b\}^* \mid ww = www\}$$

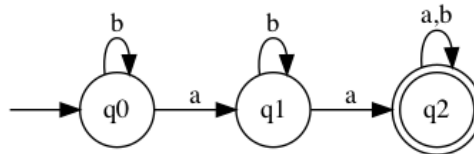
Язык, допускающий пустое слово.



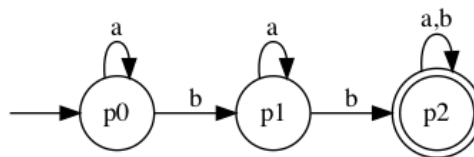
2 Задание №2. Построить конечный автомат, используя прямое произведение.

1. $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \geq 2 \wedge |w|_b \geq 2\}$

$$L_{11} = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \geq 2\}$$



$$L_{12} = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_b \geq 2\}$$



$$L_1 = L_{11} \times L_{12} \Rightarrow$$

$$A_1 = \langle \sum_1, Q_1, S_1, T_1, \delta_1 \rangle \quad A_2 = \langle \sum_2, Q_2, S_2, T_2, \delta_2 \rangle$$

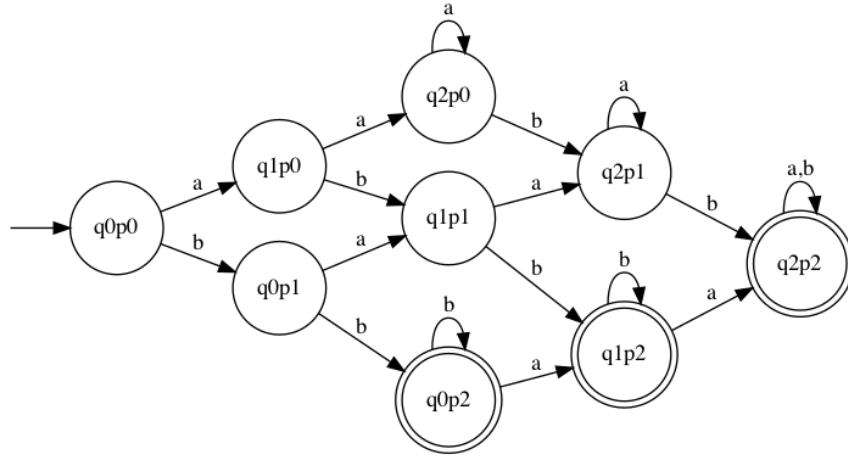
$$\sum = \{a, b\}$$

$$Q = Q_1 \times Q_2 = \{q_0p_0, q_0p_1, q_0p_2, q_1p_0, q_1p_1, q_1p_2, q_2p_0, q_2p_1, q_2p_2\}$$

$$S = \langle S_1, S_2 \rangle = \langle q_0, p_0 \rangle$$

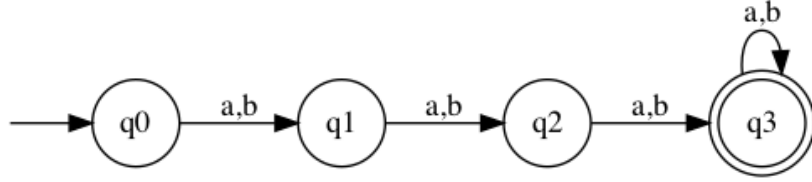
$$T = T_1 \times T_2 = \langle q_2p_2, q_1p_2, q_0p_2 \rangle$$

	a	b
$\langle q_0, p_0 \rangle$	$\langle q_1, p_0 \rangle$	$\langle q_0, p_1 \rangle$
$\langle q_0, p_1 \rangle$	$\langle q_1, p_1 \rangle$	$\langle q_0, p_2 \rangle$
$\langle q_0, p_2 \rangle$	$\langle q_1, p_2 \rangle$	$\langle q_0, p_2 \rangle$
$\langle q_1, p_0 \rangle$	$\langle q_2, p_0 \rangle$	$\langle q_1, p_1 \rangle$
$\langle q_1, p_1 \rangle$	$\langle q_2, p_1 \rangle$	$\langle q_1, p_2 \rangle$
$\langle q_1, p_2 \rangle$	$\langle q_2, p_2 \rangle$	$\langle q_1, p_2 \rangle$
$\langle q_2, p_0 \rangle$	$\langle q_2, p_0 \rangle$	$\langle q_2, p_1 \rangle$
$\langle q_2, p_1 \rangle$	$\langle q_2, p_1 \rangle$	$\langle q_2, p_2 \rangle$
$\langle q_2, p_2 \rangle$	$\langle q_2, p_2 \rangle$	$\langle q_2, p_2 \rangle$

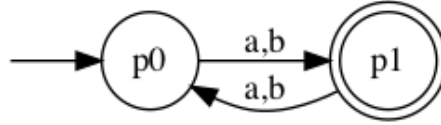


$$2. L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \geq 3 \wedge |w| \text{ нечётное}\}$$

$$L_{21} = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \geq 3\}$$



$$L_{22} = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \text{ нечётное}\}$$



$$L_2 = L_{21} \times L_{22} \Rightarrow$$

$$A_1 = \langle \sum_1, Q_1, S_1, T_1, \delta_1 \rangle \quad A_2 = \langle \sum_2, Q_2, S_2, T_2, \delta_2 \rangle$$

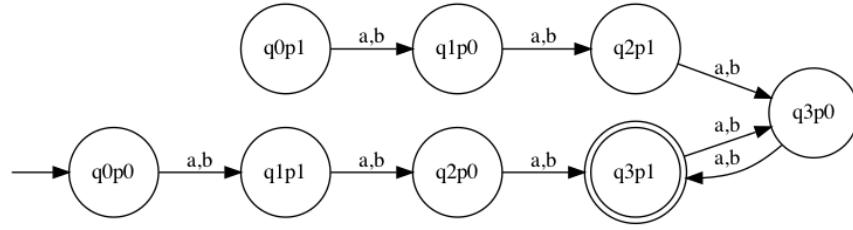
$$\sum = \{a, b\}$$

$$Q = \{q_0p_0, q_0p_1, q_1p_0, q_1p_1, q_2p_0, q_2p_1, q_3p_0, q_3p_1\}$$

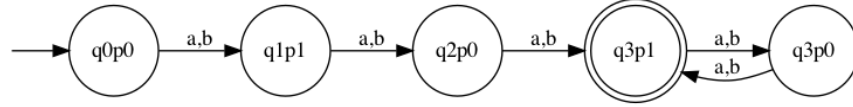
$$S = \langle q_0, p_0 \rangle$$

$$T = \langle q_3, p_1 \rangle$$

	a	b
$\langle q_0, p_0 \rangle$	$\langle q_1, p_1 \rangle$	$\langle q_1, p_1 \rangle$
$\langle q_0, p_1 \rangle$	$\langle q_1, p_0 \rangle$	$\langle q_1, p_0 \rangle$
$\langle q_1, p_0 \rangle$	$\langle q_2, p_1 \rangle$	$\langle q_2, p_1 \rangle$
$\langle q_1, p_1 \rangle$	$\langle q_2, p_0 \rangle$	$\langle q_2, p_0 \rangle$
$\langle q_2, p_0 \rangle$	$\langle q_3, p_1 \rangle$	$\langle q_3, p_1 \rangle$
$\langle q_2, p_1 \rangle$	$\langle q_3, p_0 \rangle$	$\langle q_3, p_0 \rangle$
$\langle q_3, p_0 \rangle$	$\langle q_3, p_1 \rangle$	$\langle q_3, p_1 \rangle$
$\langle q_3, p_1 \rangle$	$\langle q_3, p_0 \rangle$	$\langle q_3, p_0 \rangle$

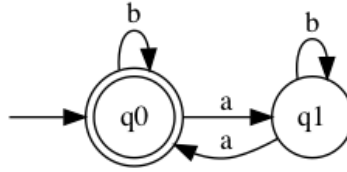


Упрощаем (для 2.5):

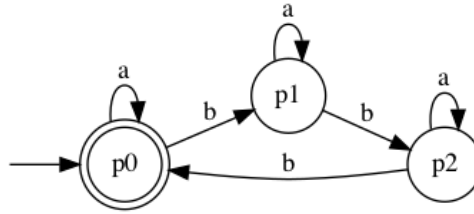


$$3. L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \text{ чётно} \wedge |w|_b \text{ кратно трём}\}$$

$$L_{31} = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \text{ чётно}\}$$



$$L_{32} = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_b \text{ кратно трём}\}$$



$$L_3 = L_{31} \times L_{32} \Rightarrow$$

$$A_1 = \langle \sum_1, Q_1, S_1, T_1, \delta_1 \rangle \quad A_2 = \langle \sum_2, Q_2, S_2, T_2, \delta_2 \rangle$$

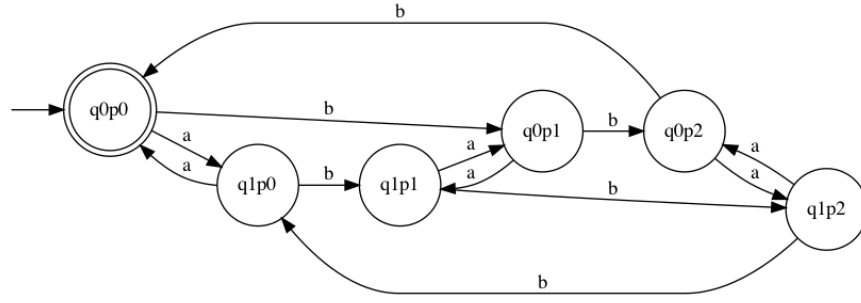
$$\sum = \{a, b\}$$

$$Q = \{q0p0, q0p1, q0p2, q1p0, q1p1, q1p2\}$$

$$S = \langle q0, p0 \rangle$$

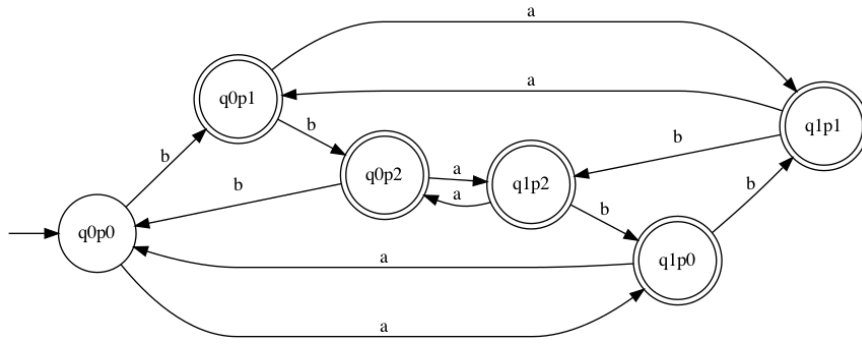
$$T = \langle q0, p0 \rangle$$

	a	b
$\langle q0, p0 \rangle$	$\langle q1, p0 \rangle$	$\langle q0, p1 \rangle$
$\langle q0, p1 \rangle$	$\langle q1, p1 \rangle$	$\langle q0, p2 \rangle$
$\langle q0, p2 \rangle$	$\langle q1, p2 \rangle$	$\langle q0, p0 \rangle$
$\langle q1, p0 \rangle$	$\langle q0, p0 \rangle$	$\langle q1, p1 \rangle$
$\langle q1, p1 \rangle$	$\langle q0, p1 \rangle$	$\langle q1, p2 \rangle$
$\langle q1, p2 \rangle$	$\langle q0, p2 \rangle$	$\langle q1, p0 \rangle$

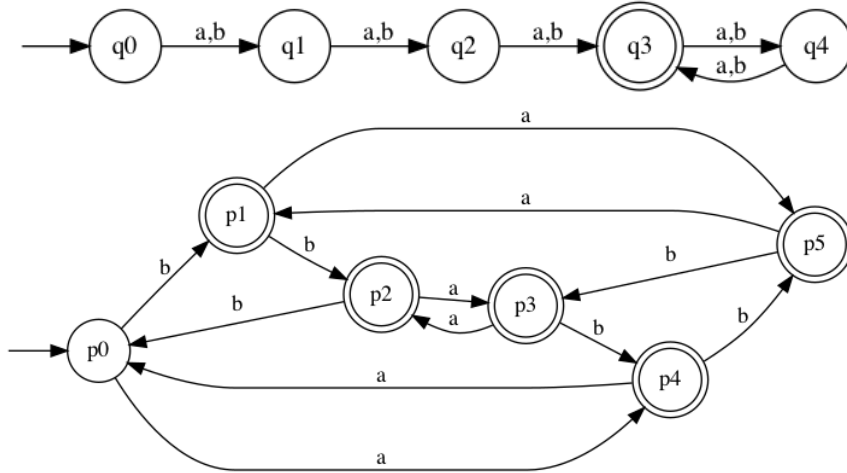


4. $L_4 = \overline{L_3}$

Конечные вершины \longleftrightarrow начальные вершины



5. $L_5 = L_2 \setminus L_3 = L_2 \times L_4$

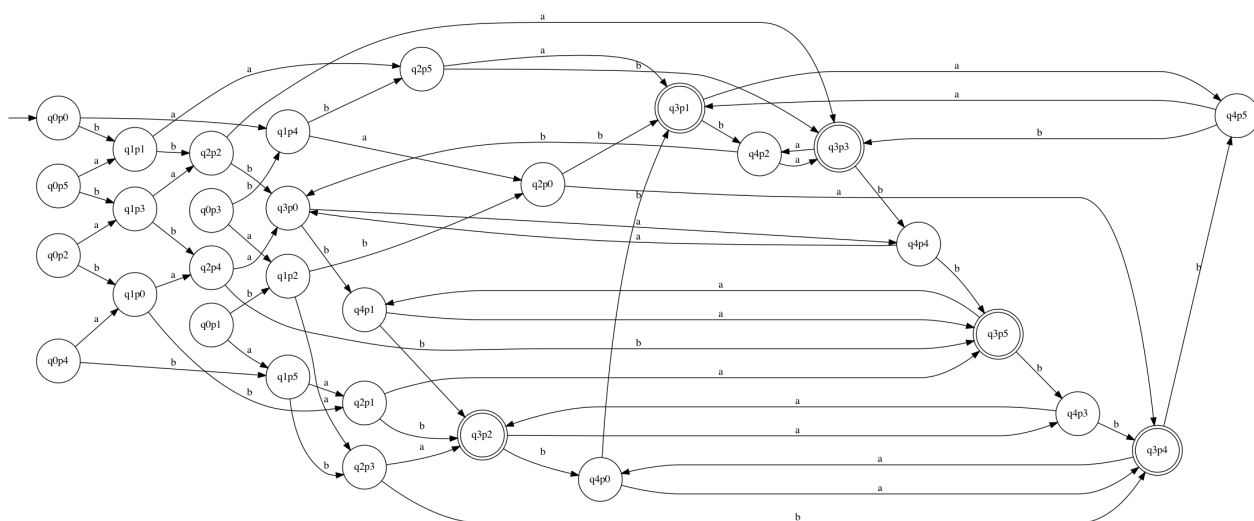


$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$S = \langle q_0, p_0 \rangle$$

$$T = \{q_3p_1, q_3p_2, q_3p_3, q_3p_4, q_3p_5\}$$

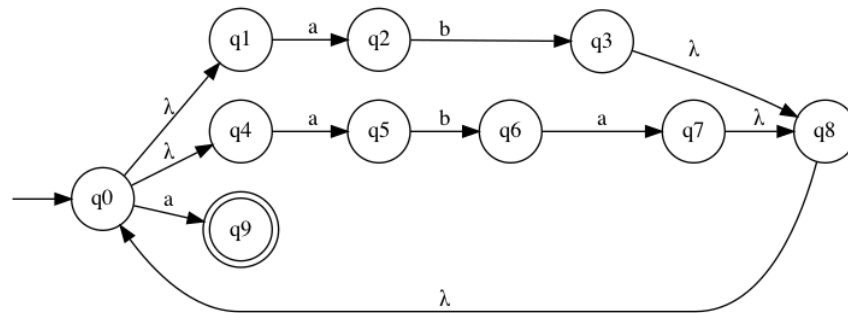
qp	a	b
00	14	11
01	15	12
02	13	10
03	12	14
04	10	15
05	11	13
10	24	21
11	25	22
12	23	20
13	22	24
14	20	25
15	21	23
20	34	31
21	35	32
22	33	30
23	32	34
24	30	35
25	31	33
30	44	41
31	45	42
32	43	40
33	42	44
34	30	45
35	41	43
40	34	51
41	35	32
42	33	30
43	32	34
44	30	35
45	31	33



3 Задание №3. Построить минимальный ДКА по регулярно-му выражению.

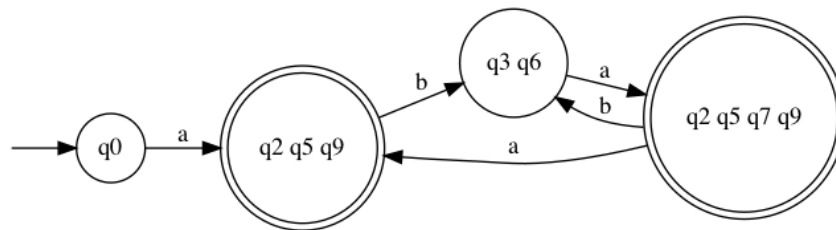
1. $(ab + aba)^*a$

НКА с λ -переходами:



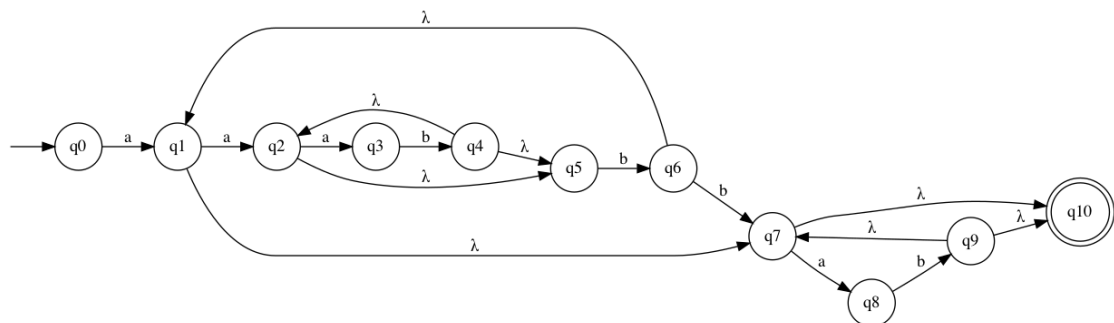
Q	a	b
q_0	$q_2 \ q_5 \ q_9$	-
$q_2 \ q_5 \ q_9$	-	$q_3 \ q_6$
$q_3 \ q_6$	$q_2 \ q_5 \ q_7 \ q_9$	-
$q_2 \ q_5 \ q_7 \ q_9$	$q_2 \ q_5 \ q_9$	$q_3 \ q_6$

МДКА:

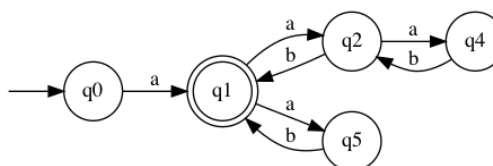


2. $a(a(ab)^*b)^*(ab)^*$

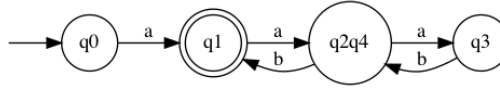
НКА с λ -переходами:



ДКА без λ -переходов:

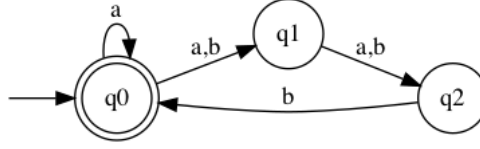


МДКА:



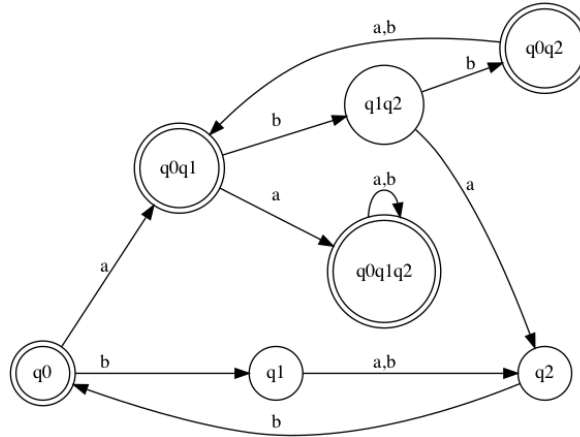
3. $(a + (a + b)(a + b)b)^*$

НКА без λ -переходов:



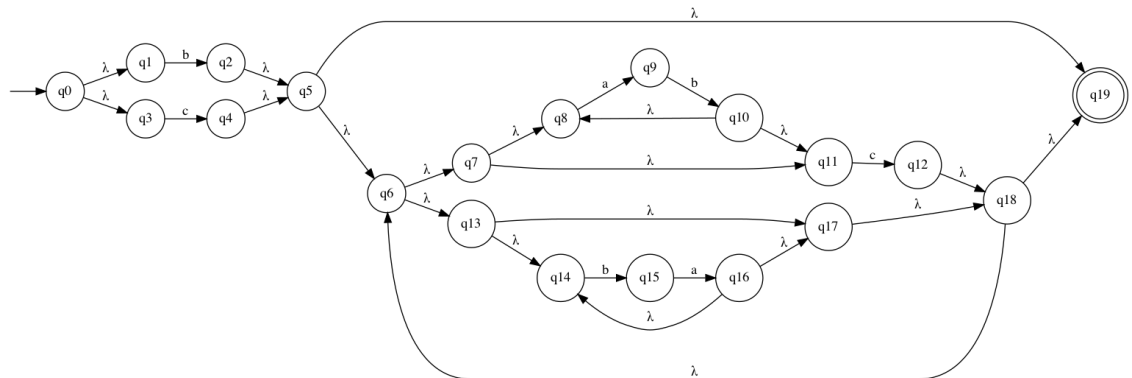
Q	a	b
q0	q0 q1	q1
q0 q1	q0 q1 q2	q1 q2
q0 q1 q2	q0 q1 q2	q0 q1 q2
q1	q2	q2
q1 q2	q2	q0 q2
q2	-	q0
q0 q2	q0 q1	q0 q1

МДКА:



4. $(b + c)((ab)^*c + (ba)^*)^*$

НКА с λ -переходами:



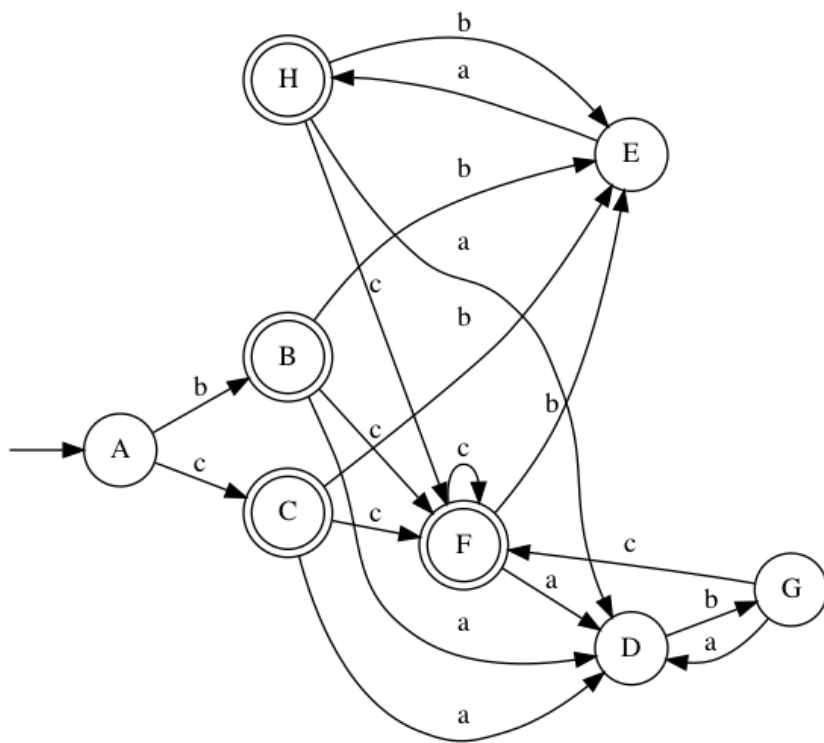
ДКА без λ -переходов:

Q	a	b	c
0,1,3	-	2,5,6,7,8,11,13,14,17,18,19	4,5,6,7,8,11,13,14,17,18,19
2,5,6,7,8,11,13,14,17,18,19	9	15	6,7,8,11,12,13,14,17,18,19
4,5,6,7,8,11,13,14,17,18,19	9	15	6,7,8,11,12,13,14,17,18,19
9	-	8,10,11	-
15	6,7,8,11,12,13,14,17,18,19	-	-
6,7,8,11,12,13,14,17,18,19	9	15	6,7,8,11,12,13,14,17,18,19
8,10,11	9	-	6,7,8,11,12,13,14,17,18,19
6,7,8,11,12,13,14,17,18,19	9	15	6,7,8,11,12,13,14,17,18,19

Введём обозначения для простоты восприятия

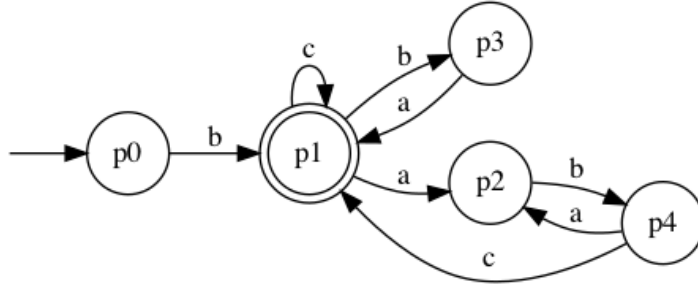
A	B	C	D
{0,1,3}	{2,5,6,7,8,11,13,14,17,18,19}	{4,5,6,7,8,11,13,14,17,18,19}	{9}

E	F	G	H
{15}	{6,7,8,11,12,13,14,17,18,19}	{8,10,11}	{6,7,8,11,12,13,14,17,18,19}



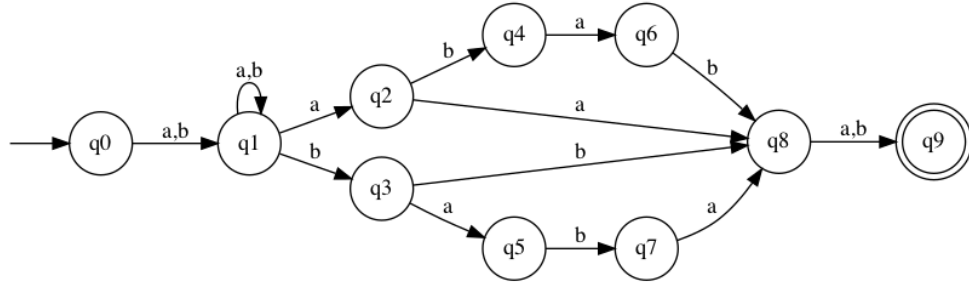
p0	p1	p2	p3	p4
{A}	{B,C,F,H}	{D}	{E}	{G}

МДКА:



5. $(a + b)^+(aa + bb + abab + baba)(a + b)^+$

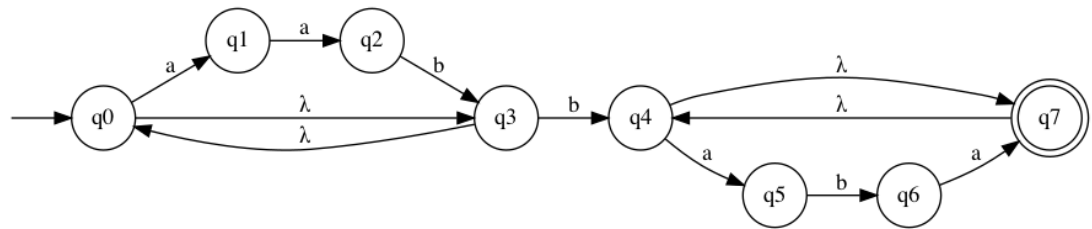
НКА без λ -переходов:



Не осилил такой большой граф

4 Задание №4. Определить является ли язык регулярным или нет.

1. $L = \{(aab)^n b(aba)^m \mid n \geq 0, m \geq 0\}$



Язык регулярный, построен конечный автомат.

2. $L = \{uaav \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, |u|_b \geq |v|_a\}$

Для доказательства нерегулярности удобно использовать отрицание леммы о накачке.

Возьмём (зафиксируем) n .

Рассмотрим слово $w = b^n a a a^n$, $|w| = 2n + 2 \geq n$.

Представим слово w в виде разбиения $w = xyz$, так что $|xy| \leq n$, $|y| > 0$.

$x = b^i$, $y = b^j$, $i + j \leq n$, $j > 0$, $z = b^{n-i-j} a a a^n$

Тогда слово $xy^0 z = b^i (b^j)^0 b^{n-i-j} a a a^n = b^{n-i} a a a^n \notin L$

Язык не является регулярным.

3. $L = \{a^m w \mid w \in \{a, b\}^*, 1 \leq |w|_b \leq m\}$

$$\begin{aligned} w &= a^n b^n, |w| \geq n \\ w &= xyz, |xy| \leq n, |y| > 0 \\ x &= a^i, \quad y = a^j, \quad i + j \leq n, \quad j > 0, \quad z = a^{n-i-j} b^n \\ \text{Тогда слово} \quad xy^0 z &= a^i (a^j)^0 a^{n-i-j} b^n = a^{n-i} b^n \notin L \end{aligned}$$

Язык не является регулярным.

4. $L = \{a^k b^m a^n \mid k = n \vee m > 0\}$

$$\begin{aligned} w &= a^n b a^n, w \geq n \\ w &= xyz, \quad |xy| \leq n, \quad |y| > 0 \\ x &= a^i, \quad y = a^j, \quad i + j \leq n, \quad j > 0, \quad z = a^{n-i-j} b a^n \\ \text{Тогда слово} \quad xy^k z &= a^i a^{jk} a^{n-i-j} b a^n = a^{n-j(k-1)} b a^n \notin L \quad \forall k > 1 \end{aligned}$$

Язык не является регулярным.

5. $L = \{ucv \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, u \neq v^R\}$

$$\begin{aligned} w &= (ab)^n c (ba)^n, w \geq n \\ w &= xyz, \quad |xy| \leq n, \quad |y| > 0 \\ x &= \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i, \quad y = \alpha_{i+1} \alpha_{i+2} \dots \alpha_{i+j}, \quad i + j \leq n, \quad j > 0, \quad z = \alpha_{i+j+1} \alpha_{i+j+2} \dots \alpha_{2n} c (ba)^n \\ \text{Тогда слово} \quad xy^k z &= \alpha_1 \dots \alpha_i (\alpha_{i+1} \dots \alpha_{i+j})^k \alpha_{i+j+1} \dots \alpha_{2n} c (ba)^n \notin L \quad \forall k > 0 \end{aligned}$$

Язык не является регулярным.