

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

**Национальный исследовательский университет
«МЭИ»**

Институт ИВТИ

Кафедра ПМИИ

Теоритические модели вычислений

ДЗ №1: Регулярные языки и конечныеавтоматы

Выполнил: студент группы А-13а-19

Тулинов А.В.

Преподаватель: Ивлиев С. А.

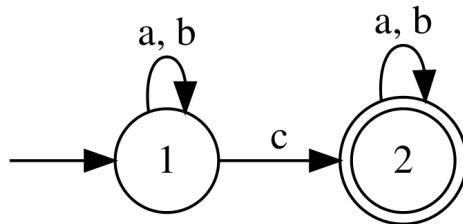
Москва, 2022 г.

Задание №1. Построить конечный автомат, распознающий язык (5 баллов)

Ответом на данное задание является конечный автомат, распознающий описанный язык. Автомат должен быть детерминированным.

1. $L = \{\omega \in \{a, b, c\}^* \mid |\omega|_c = 1\}$ (1 балл)

Построенный автомат распознает язык, в котором обязательно будет присутствовать ровно одна буква c.



2. $L = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_a \leq 2, |\omega|_b \geq 2\}$ (1 балл)

$L_1 = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_a \leq 2\}$

$L_2 = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_b \geq 2\}$

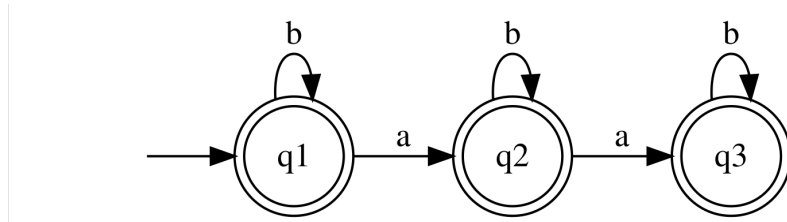


Рис. 1: Автомат распознает язык L_1

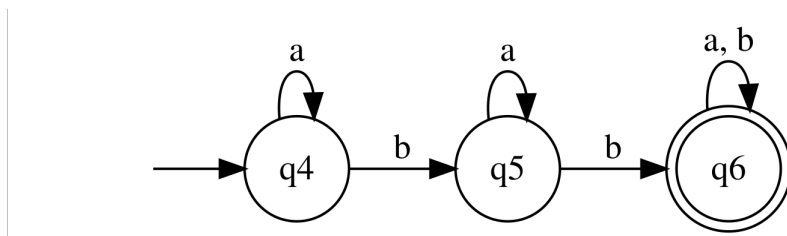


Рис. 2: Автомат распознает язык L_2

Построим прямое произведение двух ДКА:

$$\Sigma = \{a, b\}$$

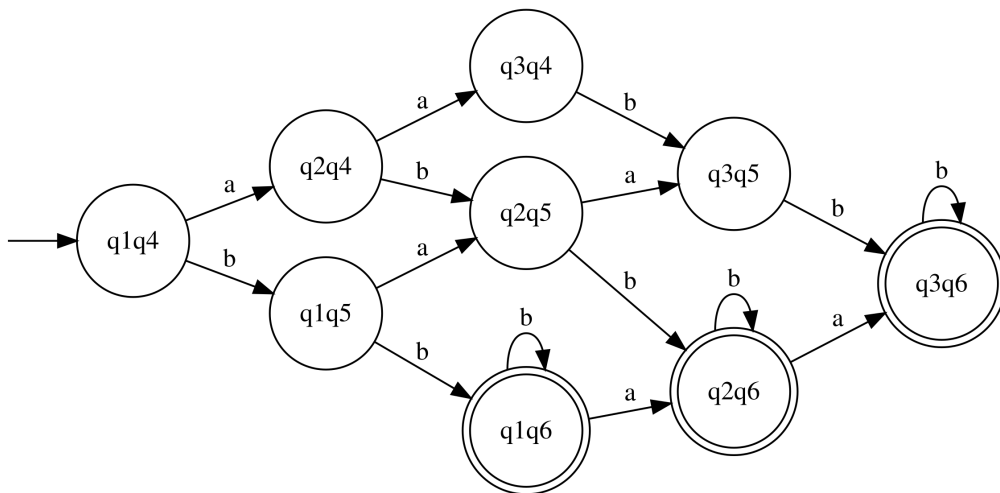
$$Q = \{(q_1, q_4), (q_1, q_5), (q_1, q_6), (q_2, q_4), (q_2, q_5), (q_2, q_6), (q_3, q_4), (q_3, q_5), (q_3, q_6)\}$$

$$S = \{q_1, q_4\}$$

$$T = \{(q_1, q_6), (q_2, q_6), (q_3, q_6)\}$$

Таблица переходов ДКА		
	a	b
q_1, q_4	q_2, q_4	q_1, q_5
q_1, q_5	q_2, q_5	q_1, q_6
q_1, q_6	q_2, q_6	q_1, q_6
q_2, q_4	q_3, q_4	q_2, q_5
q_2, q_5	q_3, q_5	q_2, q_6
q_2, q_6	q_3, q_6	q_2, q_6
q_3, q_4	\emptyset	q_3, q_5
q_3, q_5	\emptyset	q_3, q_6
q_3, q_6	\emptyset	q_3, q_6

Автомат распознающий заданный язык L:

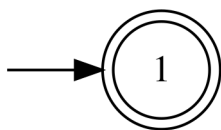


3. $L = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_a \neq |\omega|_b\}^*$ (1 балл)

Нельзя построить автомат, потому что необходимо запоминать количество символов.

4. $L = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid \omega\omega = \omega\omega\omega\}$ (2 балла)

Построенный автомат распознает язык, состоящий из пустого слова.



Задание №2. Построить конечный автомат, используя прямое произведение (5 баллов)

Ответом на данное задание является конечный автомат, распознающий описанный язык. Требуется, чтобы он был построен при помощи прямого произведения ДКА и его свойств.

1. $L_1 = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_a \geq 2 \wedge |\omega|_b \geq 2\}$ (1 балл)

$$L'_1 = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_a \geq 2\}$$

$$L'_2 = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_b \geq 2\}$$

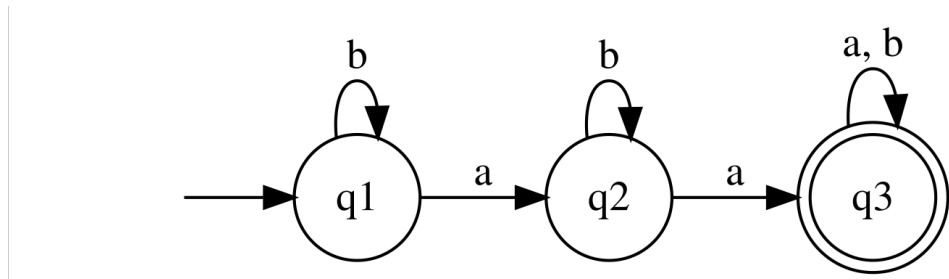


Рис. 3: Автомат распознает язык L'_1

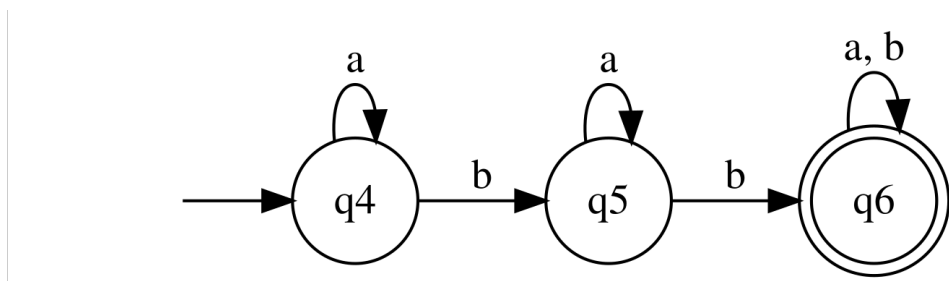


Рис. 4: Автомат распознает язык L'_2

Построим прямое произведение двух ДКА:

$$\Sigma = \{a, b\}$$

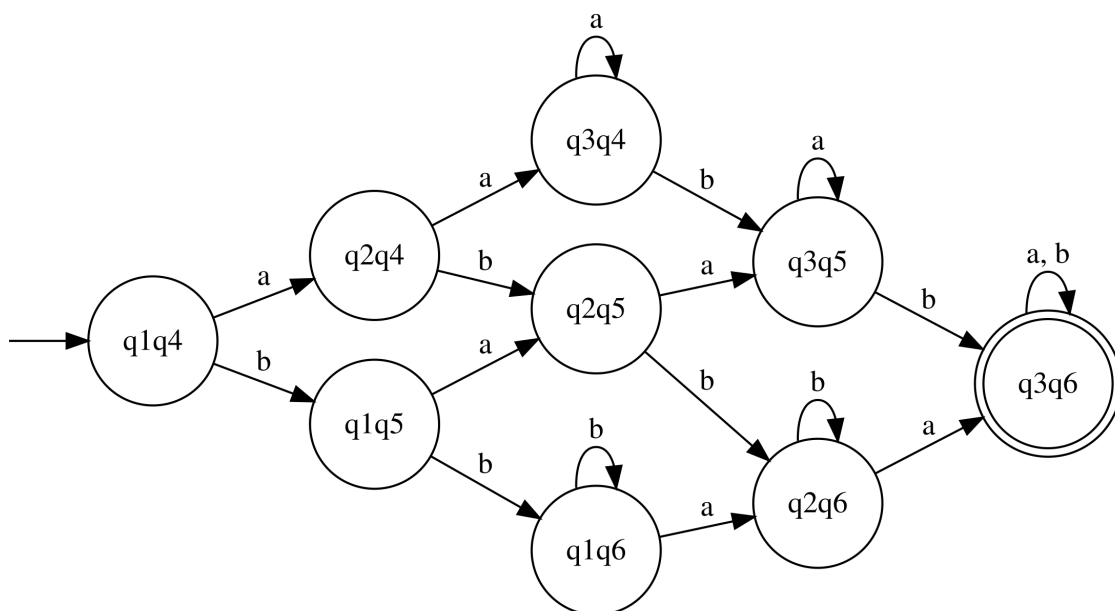
$$Q = \{(q_1, q_4), (q_1, q_5), (q_1, q_6), (q_2, q_4), (q_2, q_5), (q_2, q_6), (q_3, q_4), (q_3, q_5), (q_3, q_6)\}$$

$$S = \{q_1, q_4\}$$

$$T = \{q_3, q_6\}$$

Таблица переходов ДКА		
	a	b
q_1, q_4	q_2, q_4	q_1, q_5
q_1, q_5	q_2, q_5	q_1, q_6
q_1, q_6	q_2, q_6	q_1, q_6
q_2, q_4	q_3, q_4	q_2, q_5
q_2, q_5	q_3, q_5	q_2, q_6
q_2, q_6	q_3, q_6	q_2, q_6
q_3, q_4	q_3, q_4	q_3, q_5
q_3, q_5	q_3, q_5	q_3, q_6
q_3, q_6	q_3, q_6	q_3, q_6

Автомат распознающий заданный язык L_1 :



2. $L_2 = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega| \geq 3 \wedge |\omega| \text{ нечётное}\}$ (1 балл)

$$L'_1 = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega| \geq 3\}$$

$$L'_2 = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega| \text{ нечётное}\}$$

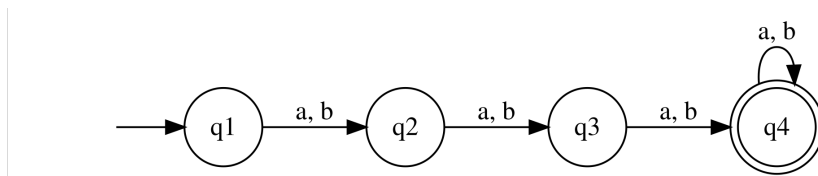


Рис. 5: Автомат распознает язык L'_1

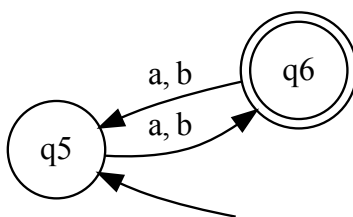


Рис. 6: Автомат распознает язык L'_2

Построим прямое произведение двух ДКА:

$$\Sigma = \{a, b\}$$

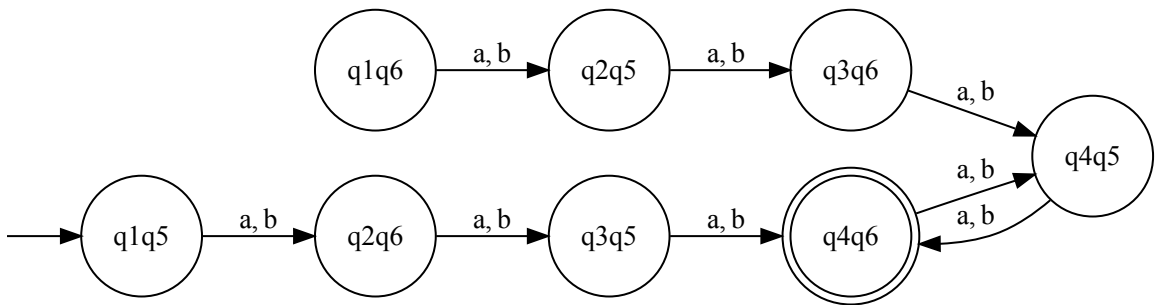
$$Q = \{(q_1, q_5), (q_1, q_6), (q_2, q_5), (q_2, q_6), (q_3, q_5), (q_3, q_6), (q_4, q_5), (q_4, q_6)\}$$

$$S = \{q_1, q_5\}$$

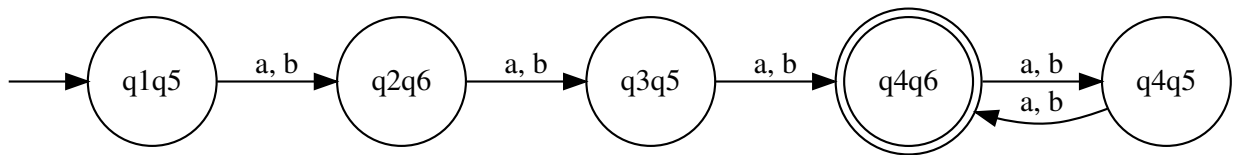
$$T = \{q_4, q_6\}$$

Таблица переходов ДКА		
	a	b
q_1, q_5	q_2, q_6	q_2, q_6
q_1, q_6	q_2, q_5	q_2, q_5
q_2, q_5	q_3, q_6	q_3, q_6
q_2, q_6	q_3, q_5	q_3, q_5
q_3, q_5	q_4, q_6	q_4, q_6
q_3, q_6	q_4, q_5	q_4, q_5
q_4, q_5	q_4, q_6	q_4, q_6
q_4, q_6	q_4, q_5	q_4, q_5

Автомат распознающий заданный язык L_2 :



Полученный результат можно упростить:



3. $L_3 = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_a \text{ чётно} \wedge |\omega|_b \text{ кратно трём}\}$ (1 балл)

$$L'_1 = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_a \text{ чётно}\}$$

$$L'_2 = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_b \text{ кратно трём}\}$$

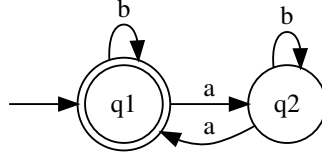


Рис. 7: Автомат распознает язык L'_1

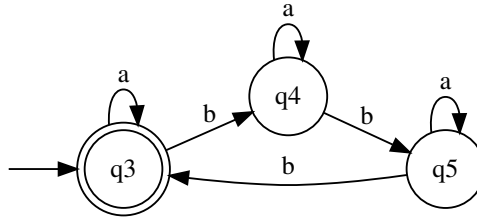


Рис. 8: Автомат распознает язык L'_2

Построим прямое произведение двух ДКА:

$$\Sigma = \{a, b\}$$

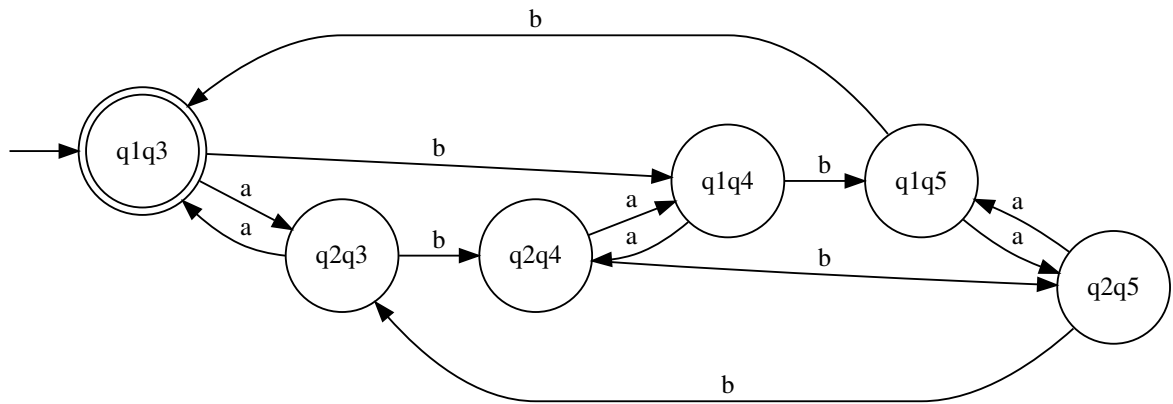
$$Q = \{(q_1, q_3), (q_1, q_4), (q_1, q_5), (q_2, q_3), (q_2, q_4), (q_2, q_5)\}$$

$$S = \{q_1, q_3\}$$

$$T = \{q_1, q_3\}$$

Таблица переходов ДКА		
	a	b
q_1, q_3	q_2, q_3	q_1, q_4
q_1, q_4	q_2, q_4	q_1, q_5
q_1, q_5	q_2, q_5	q_1, q_3
q_2, q_3	q_1, q_3	q_2, q_4
q_2, q_4	q_1, q_4	q_2, q_5
q_2, q_5	q_1, q_5	q_2, q_3

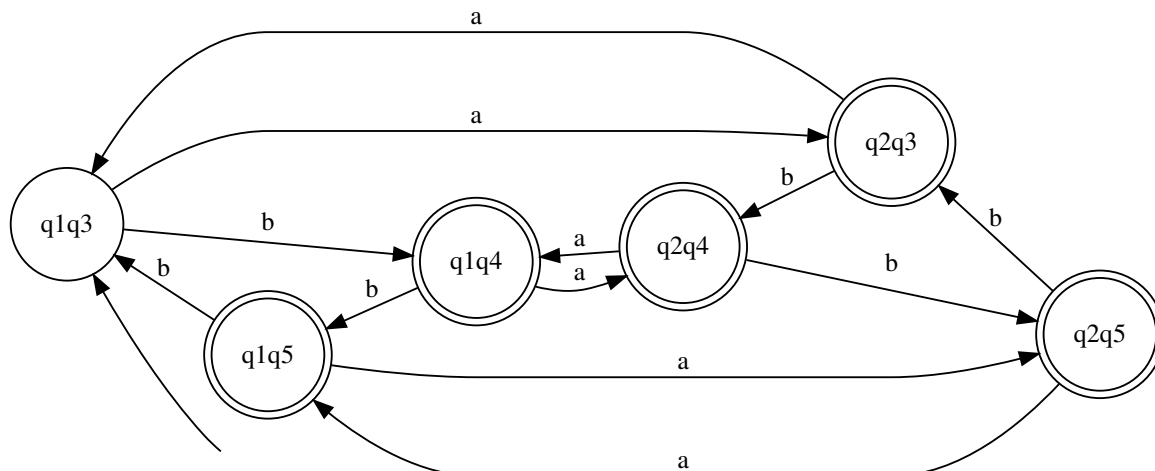
Автомат распознающий заданный язык L_3 :



4. $L_4 = \bar{L}_3$ (1 балл)

Для того чтобы получить отрицание, нужно инвертировать все терминальные и нетерминальные вершины у автомата, распознающего язык L_3 .

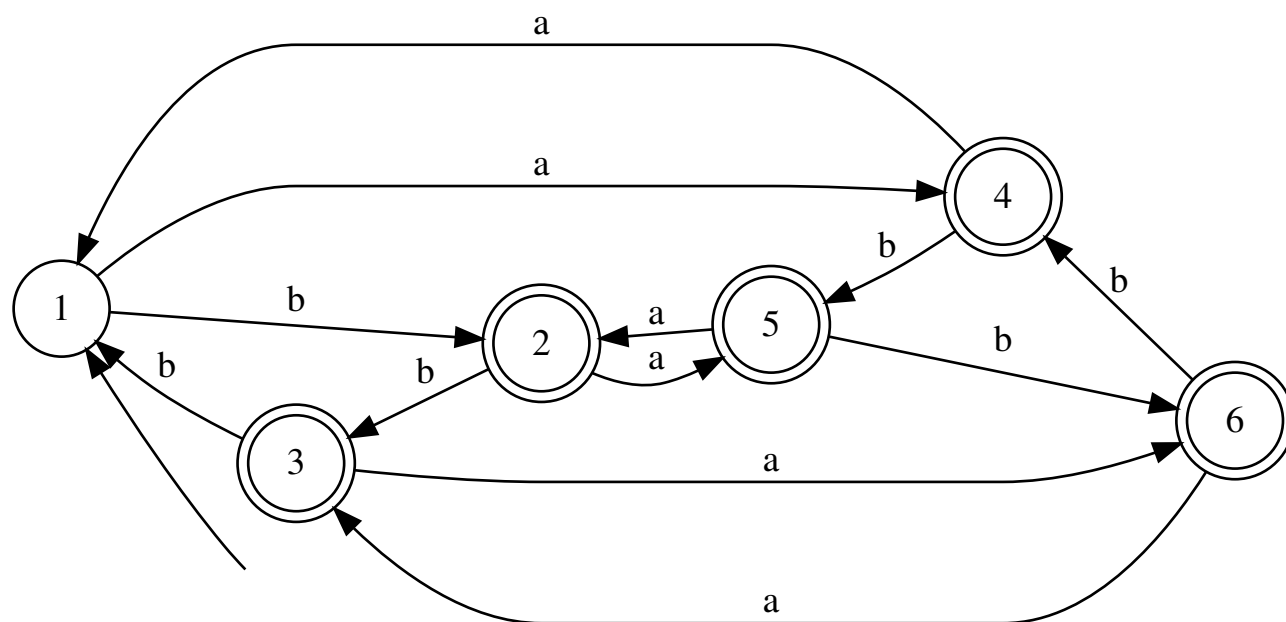
Автомат распознающий заданный язык L_4 :



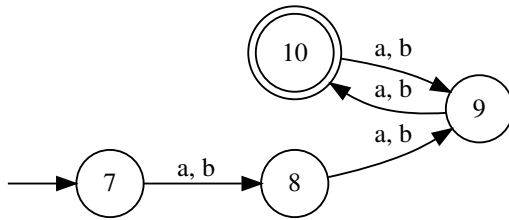
5. $L_5 = L_2 \setminus L_3$ (1 балл)

$$L_5 = L_2 \setminus L_3 = L_2 \cap \bar{L}_3 = L_2 \cap L_4$$

Поменяем нуммерацию для L_4 :



Поменяем нуммерацию для L_2 :



Построим прямое произведение двух ДКА:

$$\Sigma = \{a, b\}$$

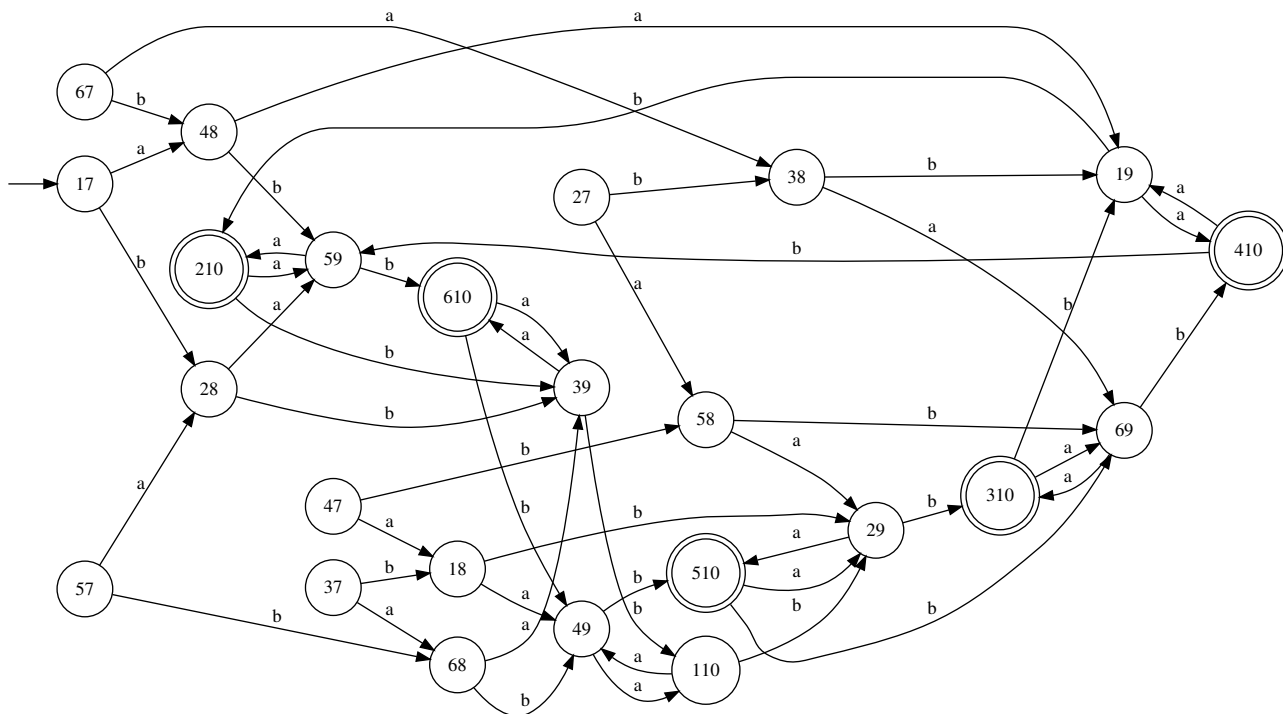
$$Q = \{(1, 7), (1, 8), (1, 9), (1, 10), \\ (2, 7), (2, 8), (2, 9), (2, 10), \\ (3, 7), (3, 8), (3, 9), (3, 10), \\ (4, 7), (4, 8), (4, 9), (4, 10), \\ (5, 7), (5, 8), (5, 9), (5, 10), \\ (6, 7), (6, 8), (6, 9), (6, 10)\}$$

$$S = \{1, 7\}$$

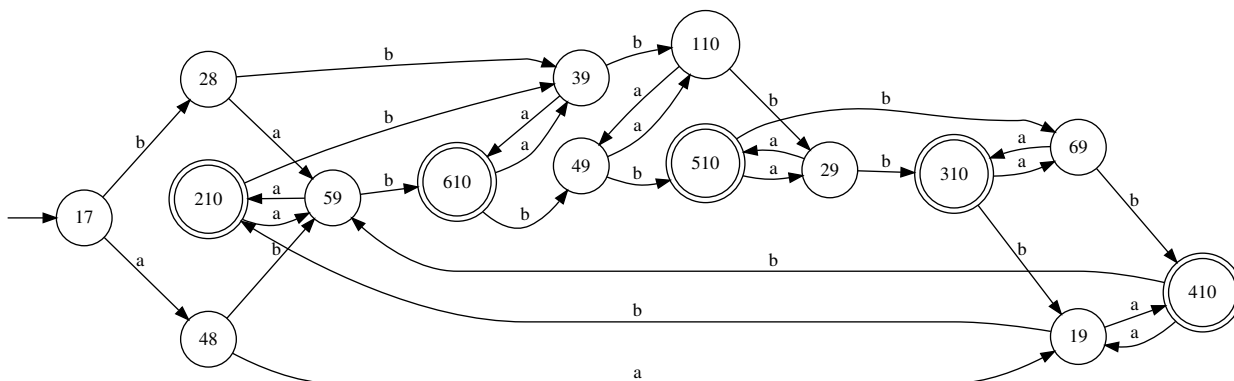
$$T = \{(2, 10), (3, 10), (4, 10), (5, 10), (6, 10)\}$$

Таблица переходов ДКА		
	a	b
(1,7)	(4,8)	(2,8)
(1,8)	(4,9)	(2,9)
(1,9)	(4,10)	(2,10)
(1,10)	(4,9)	(2,9)
(2,7)	(5,8)	(3,8)
(2,8)	(5,9)	(3,9)
(2,9)	(5,10)	(3,10)
(2,10)	(5,9)	(3,9)
(3,7)	(6,8)	(1,8)
(3,8)	(6,9)	(1,9)
(3,9)	(6,10)	(1,10)
(3,10)	(6,9)	(1,9)
(4,7)	(1,8)	(5,8)
(4,8)	(1,9)	(5,9)
(4,9)	(1,10)	(5,10)
(4,10)	(1,9)	(5,9)
(5,7)	(2,8)	(6,8)
(5,8)	(2,9)	(6,9)
(5,9)	(2,10)	(6,10)
(5,10)	(2,9)	(6,9)
(6,7)	(3,8)	(4,8)
(6,8)	(3,9)	(4,9)
(6,9)	(3,10)	(4,10)
(6,10)	(3,9)	(4,9)

Автомат распознающий заданный язык L_5 :



Полученный результат можно упростить:

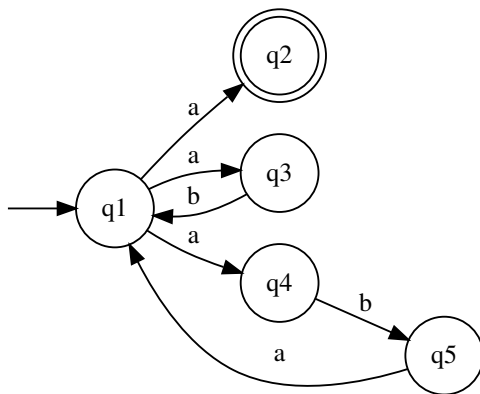


Задание №3. Построить минимальный ДКА, по регулярному выражению (5 баллов)

Ответом на данное задание является минимальный ДКА, который допускает тот же язык, что описывается регулярным выражением.

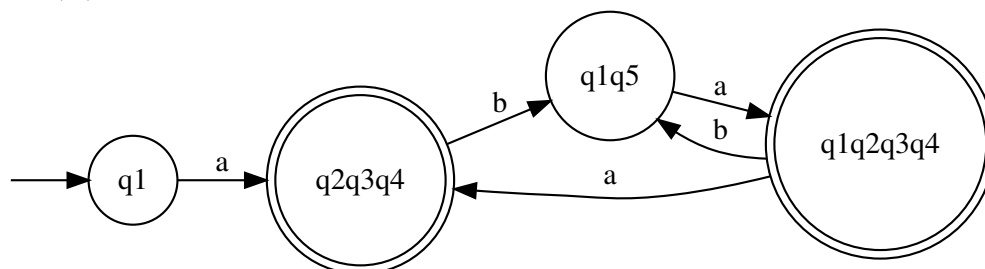
1. $(ab + aba)^*a$ (1 балл)

Построим НКА

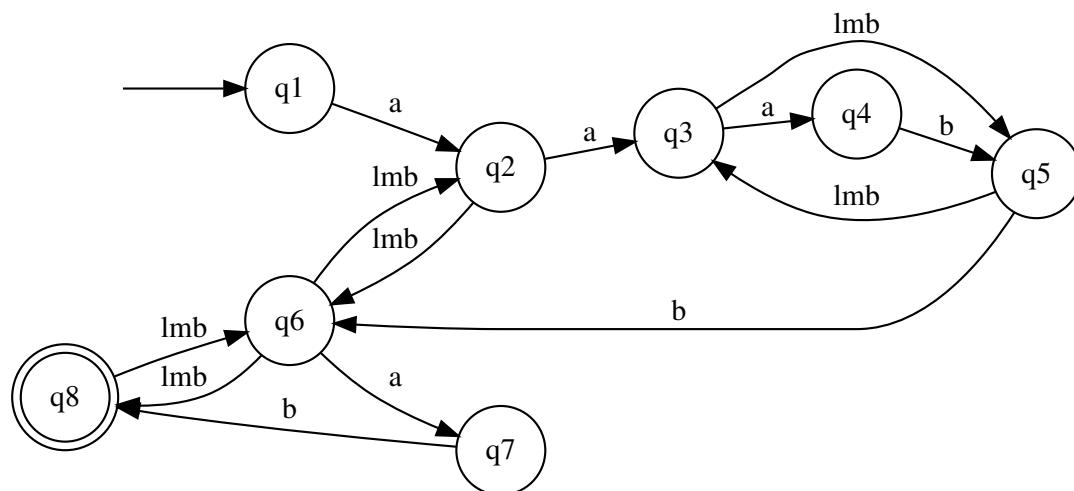


	a	b
q_1	$q_2q_3q_4$	
$q_2q_3q_4$		q_1q_5
q_1q_5	$q_1q_2q_3q_4$	
$q_1q_2q_3q_4$	$q_2q_3q_4$	q_1q_5

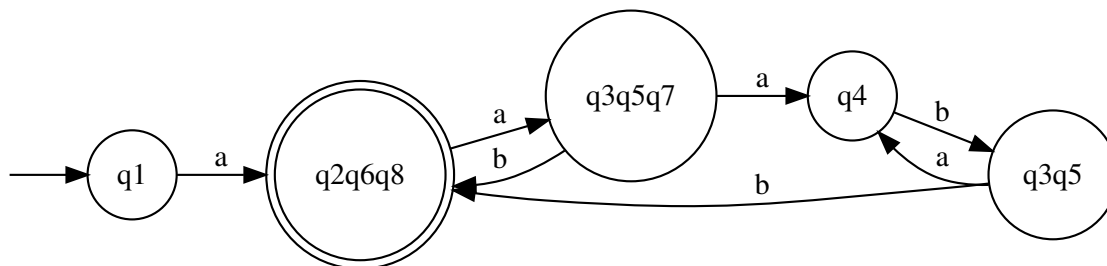
Построим ДКА



2. $a(a(ab)^*b)^*(ab)^*$ (1 балл)

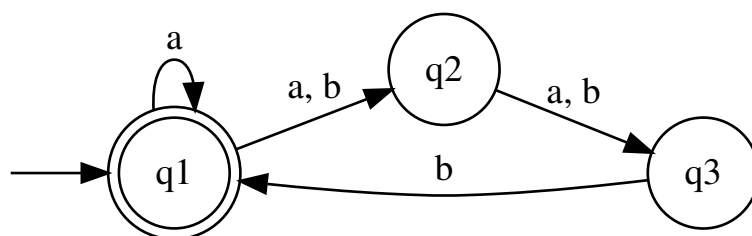


Преобразуем:



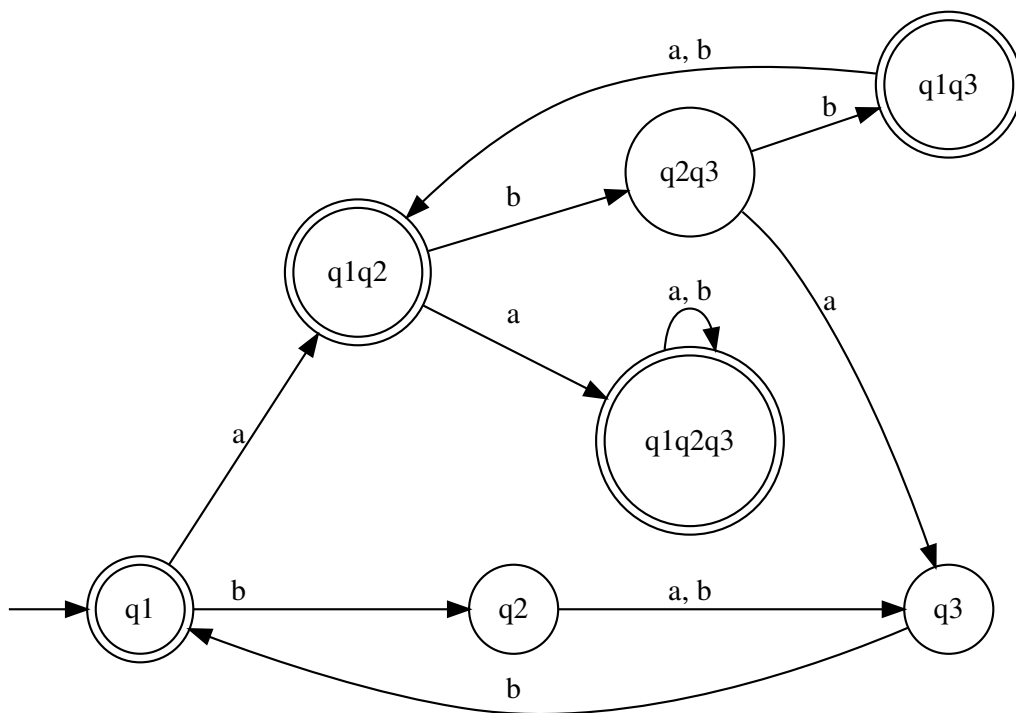
3. $(a + (a + b)(a + b)b)^*$ (1 балл)

Построим НКА



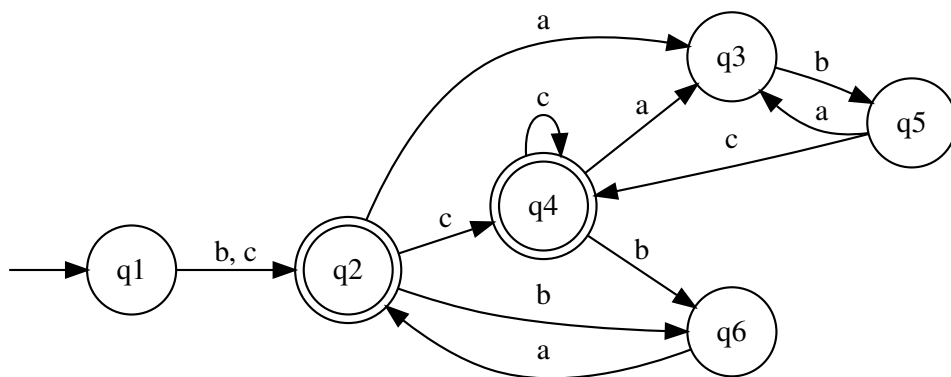
	a	b
q_1	q_1q_2	q_2
q_1q_2	$q_1q_2q_3$	q_2q_3
q_2	q_3	q_3
$q_1q_2q_3$	$q_1q_2q_3$	$q_1q_2q_3$
q_2q_3	q_3	q_1q_3
q_3		q_1
q_1q_3	q_1q_2	q_1q_2

Построим ДКА



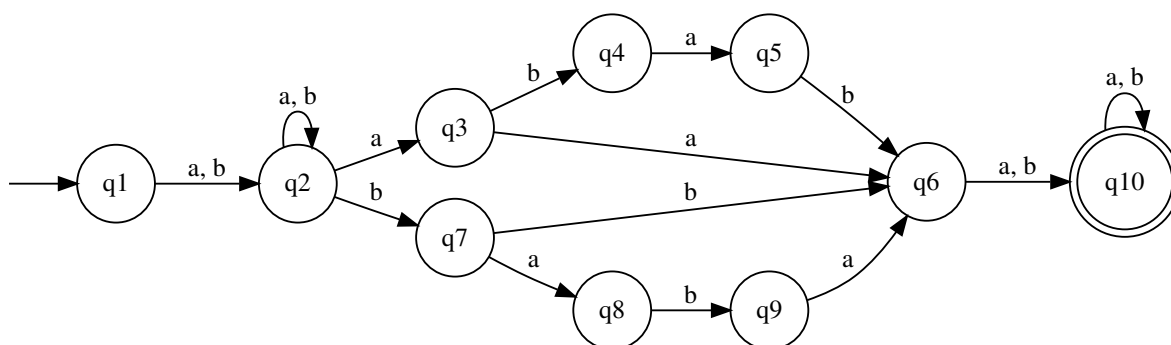
4. $(b + c)((ab)^*c + (ba)^*)^*$ (1 балл)

Построим ДКА



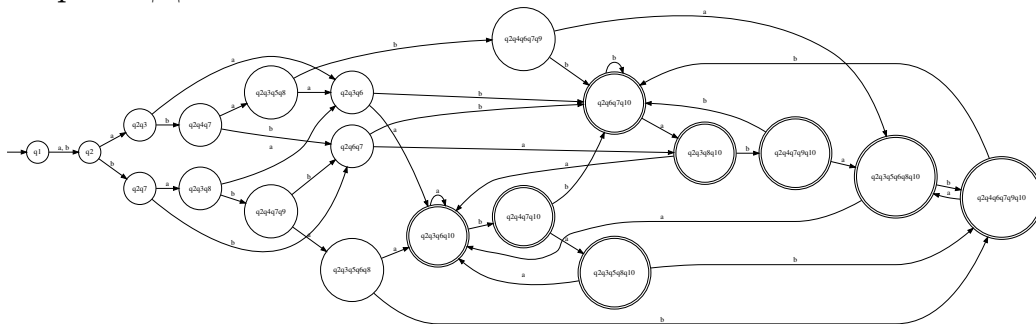
5. $(a + b)^+(aa + bb + abab + baba)(a + b)^+$ (1 балл)

Построим НКА



	a	b
q_1	q_2	q_2
q_2	q_2q_3	q_2q_7
q_2q_3	$q_2q_3q_6$	$q_2q_4q_7$
q_2q_7	$q_2q_3q_8$	$q_2q_6q_7$
$q_2q_3q_6$	$q_2q_3q_6q_{10}$	$q_2q_6q_7q_{10}$
$q_2q_4q_7$	$q_2q_3q_5q_8$	$q_2q_6q_7$
$q_2q_3q_8$	$q_2q_3q_6$	$q_2q_4q_7q_9$
$q_2q_6q_7$	$q_2q_3q_8q_{10}$	$q_2q_6q_7q_{10}$
$q_2q_3q_6q_{10}$	$q_2q_3q_6q_{10}$	$q_2q_4q_7q_{10}$
$q_2q_6q_7q_{10}$	$q_2q_3q_8q_{10}$	$q_2q_6q_7q_{10}$
$q_2q_3q_5q_8$	$q_2q_3q_6$	$q_2q_4q_6q_7q_9$
$q_2q_4q_7q_9$	$q_2q_3q_5q_6q_8$	$q_2q_6q_7$
$q_2q_3q_8q_{10}$	$q_2q_3q_6q_{10}$	$q_2q_4q_7q_9q_{10}$
$q_2q_4q_7q_{10}$	$q_2q_3q_5q_8q_{10}$	$q_2q_6q_7q_{10}$
$q_2q_3q_5q_8q_{10}$	$q_2q_3q_6q_{10}$	$q_2q_4q_6q_7q_9q_{10}$
$q_2q_4q_6q_7q_9$	$q_2q_3q_5q_6q_8q_{10}$	$q_2q_6q_7q_{10}$
$q_2q_3q_5q_6q_8$	$q_2q_3q_6q_{10}$	$q_2q_4q_6q_7q_9q_{10}$
$q_2q_4q_7q_9q_{10}$	$q_2q_3q_5q_6q_8q_{10}$	$q_2q_6q_7q_{10}$
$q_2q_4q_6q_7q_9q_{10}$	$q_2q_3q_5q_6q_8q_{10}$	$q_2q_6q_7q_{10}$
$q_2q_3q_5q_6q_8q_{10}$	$q_2q_3q_6q_{10}$	$q_2q_4q_6q_7q_9q_{10}$

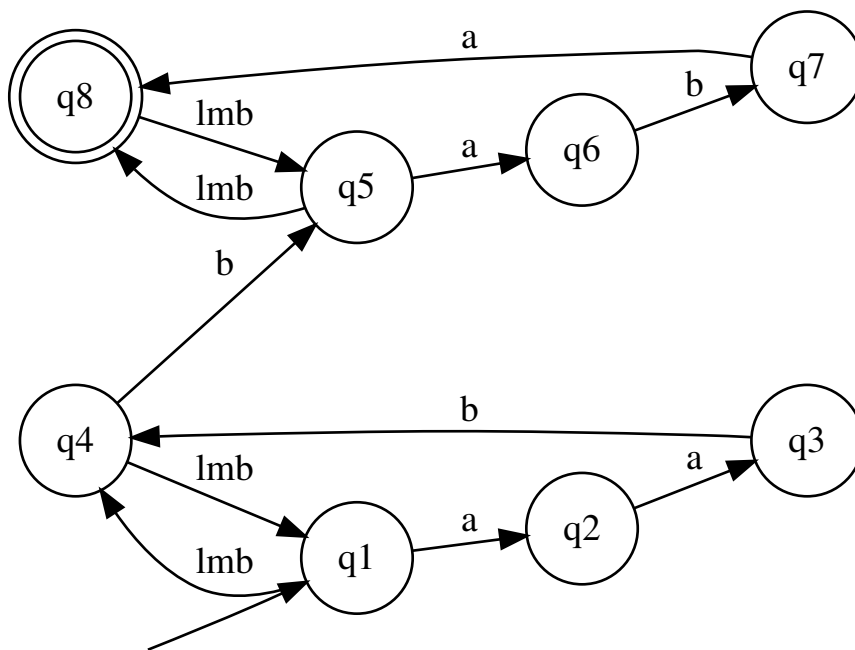
Построим ДКА



Задание №4. Определить является ли язык регулярным или нет (5 баллов)

Ответом на данное задание является конечный автомат, если язык регулярен, либо доказательство нерегулярности языка при помощи леммы о разрастании.

1. $L = \{(aab)^n b(aba)^m \mid n \geq 0, m \geq 0\}$ (1 балл)



2. $L = \{uaav \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, |u|_b \geq |v|_a\}$ (1 балл)

Язык не является регулярным.

Пусть $\bar{L} = \{uaav \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, |u|_b < |v|_a\}$

Зафиксируем n .

Пусть $w = b^n a a a^{n+1} \in \bar{L}; |w| \geq n$. (Разбиения при $|xy| \leq n, |y| \geq 1$)

$w = xyz$

$x = b^l$

$$y = b^k$$

$$z = b^{n-l-k} a a^{n+1}$$

При накачке y , количество символов b превысит количество символов a
 $\Rightarrow w \notin \bar{L} \Rightarrow \bar{L}$ – нерегулярный $\Rightarrow L$ – нерегулярный.

$$3. L = \{a^m \omega \mid \omega \in \{a, b\}^*, 1 \leq |\omega|_b \leq m\} \text{ (1 балл)}$$

Язык не является регулярным.

$$\text{Пусть } \bar{L} = \{a^m \omega \mid \omega \in \{a, b\}^*, |\omega|_b > m \vee |\omega|_b = 0\}$$

Зафиксируем n .

$$\text{Пусть } w = a^n b^{n+1} \in \bar{L}; |w| \geq n. \text{ (Разбиения при } |xy| \leq n, |y| \geq 1)$$

$$w = xyz$$

$$x = a^l$$

$$y = a^k$$

$$z = a^{n-l-k} b^{n+1}$$

При накачке y , количество символов a превысит количество символов b
 $\Rightarrow w \notin \bar{L} \Rightarrow \bar{L}$ – нерегулярный $\Rightarrow L$ – нерегулярный.

$$4. L = \{a^k b^m a^n \mid k = n \vee m > 0\} \text{ (1 балл)}$$

Язык не является регулярным.

Зафиксируем n .

$$\text{Пусть } w = a^n b a^n; |w| \geq n.$$

$$w = xyz$$

$$x = a^l$$

$$y = a^k$$

$$z = a^{n-l-k} b a^n$$

При накачке y , условие $k = n$ - не выполняется $\Rightarrow w \notin L \Rightarrow L$ – нерегулярный.

5. $L = \{ucv \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, u \neq v^R\}$ (1 балл)

Язык не является регулярным.

Пусть $\bar{L} = \{ucv \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, u = v^R\}$

Зафиксируем n .

Пусть $w = a^n c a^n \in \bar{L}; |w| \geq n$. (Разбиения при $|xy| \leq n, |y| \geq 1$)

$w = xyz$

$x = a^l$

$y = a^k$

$z = a^{n-l-k} c a^n$

Очевидно, что при накачке $u = v^R$ — не выполняется $\Rightarrow w \notin \bar{L} \Rightarrow \bar{L}$ — нерегулярный $\Rightarrow L$ — нерегулярный.

Задание №5. Реализовать алгоритмы (10 баллов)

Ответом на данное задание является работающая программа на выбранном языке программирования, покрытая юнит-тестами.

В рамках своего выполнения программа должна генерировать текстовый документ с картинками, показывающий процесс построения автомата (к примеру Markdown с графиками на Graphviz).

1. Построение ДКА по НКА с λ -переходами (5 баллов)
2. Прямое произведение языков, с возможностью построить пересечение, объединение и разность (5 баллов)