

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
"МЭИ"



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ



Теоретические модели вычисления

ДЗ №1: Регулярные языки и конечные
автоматы

Студент:
Николаев Ю. С.

GitHub:
@nikolaevje

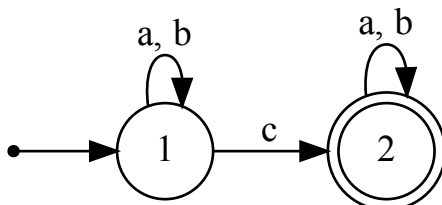
Москва, 2022

Содержание

1	Построить конечный автомат, распознающий язык	2
1.1	$L = \{\omega \in \{a, b, c\}^* \mid \omega _c = 1\}$	2
1.2	$L = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid \omega _a \leq 2, \omega _b \geq 2, \}$	2
1.3	$L = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid \omega _a \neq \omega _b\}$	4
1.4	$L = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid \omega\omega = \omega\omega\omega\}$	4
2	Построить конечный автомат, используя прямое произведение	5
2.1	$L_1 = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid \omega _a \geq 2 \wedge \omega _b \geq 2\}$	5
2.2	$L_2 = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid \omega \geq 3 \wedge \omega \text{ нечетное}\}$	7
2.3	$L_3 = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid \omega _a \text{ четно} \wedge \omega _b \text{ кратно трем}\}$	9
2.4	$L_4 = \overline{L_3}$	11
2.5	$L_5 = L_2 \setminus L_3 = L_2 \wedge \overline{L_3}$ - и тут мне стало лень :(11
3	Построить минимальный ДКА по регулярному выражению	12
3.1	$(ab + aba)^*a$	12
3.2	$a(a(ab)^*b)^*(ab)^*$	13
3.3	$(a + (a + b)(a + b)b)^*$	14
3.4	$(b + c)((ab)^*c + (ba)^*)^*$	15
3.5	$(a + b)^+(aa + bb + abab + baba)(a + b)^+$	16
4	Определить, является ли язык регулярным	17
4.1	$L = \{(aab)^nb(aba)^m \mid n \geq 0, m \geq 0\}$	17
4.2	$L = \{uaav \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, u _b \geq v _a\}$	17
4.3	$L = \{a^mw \mid w \in \{a, b\}^*, 1 \leq w _b \leq m\}$	18
4.4	$L = \{a^kw^ma^n \mid k = n \vee m > 0\}$	18
4.5	$L = \{ucv \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, u \neq v^R\}$	19
	Список литературы	20

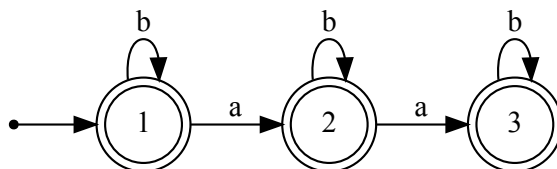
1 Построить конечный автомат, распознающий язык

1.1 $L = \{\omega \in \{a, b, c\}^* \mid |\omega|_c = 1\}$

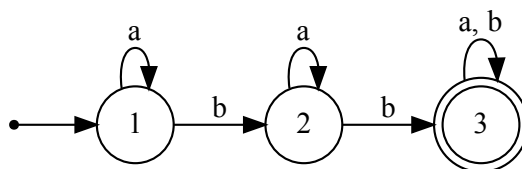


1.2 $L = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_a \leq 2, |\omega|_b \geq 2, \}$

$|\omega|_a \leq 2 \Rightarrow A_1 = \{\Sigma = \{a, b\}, Q_1 = \{1, 2, 3\}, 1, T_1 = \{1, 2, 3\}, \delta_1\}$



$|\omega|_b \geq 2 \Rightarrow A_2 = \{\Sigma = \{a, b\}, Q_2 = \{1, 2, 3\}, 1, T_2 = \{3\}, \delta_2\}$

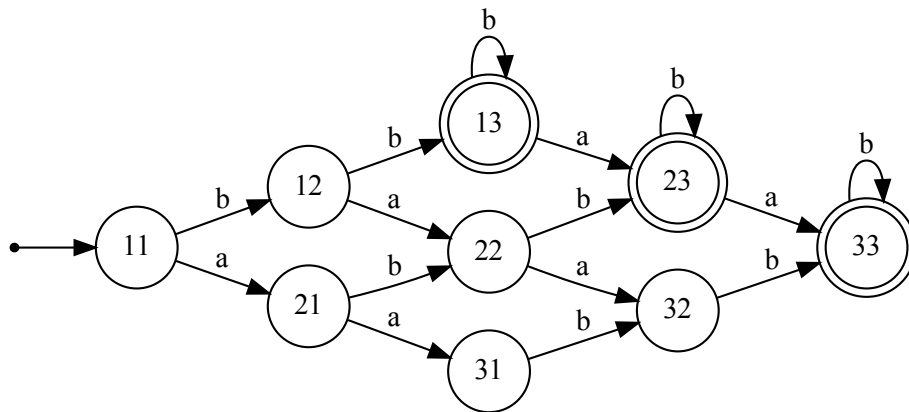


Построим прямое произведение:

1. $\Sigma = \{a, b\}$
2. $Q = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$
3. $S = \{(1, 1)\}$
4. $T = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$

5. $\delta :$

A_1	A_2	a	b
1	1	21	12
1	2	22	13
1	3	23	13
2	1	31	22
2	2	32	23
2	3	33	23
3	1	-	32
3	2	-	33
3	3	-	33

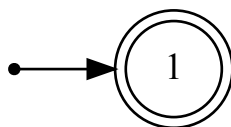


$$1.3 \quad L = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_a \neq |\omega|_b\}$$

Как мы помним из лекции, конечные автоматы - беспмятные y^{***} ки.
 Собственно, этот пример требует запоминать количество символов.
 Невозможно построить автомат.

$$1.4 \quad L = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid \omega\omega = \omega\omega\omega\}$$

Существует единственное такое слово - пустое.

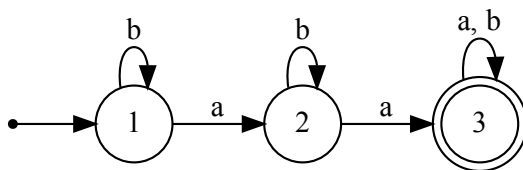


2 Построить конечный автомат, используя прямое произведение

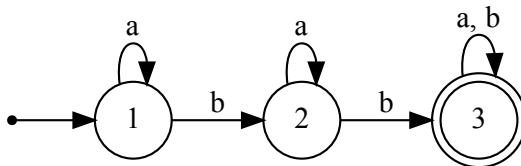
2.1 $L_1 = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_a \geq 2 \wedge |\omega|_b \geq 2\}$

Есть два автомата:

$$|\omega|_a \geq 2 \Rightarrow A_1 = \{\Sigma = \{a, b\}, Q_1 = \{1, 2, 3\}, 1, T_1 = \{3\}, \delta_1\}$$



$$|\omega|_b \geq 2 \Rightarrow A_2 = \{\Sigma = \{a, b\}, Q_2 = \{1, 2, 3\}, 1, T_2 = \{3\}, \delta_2\}$$

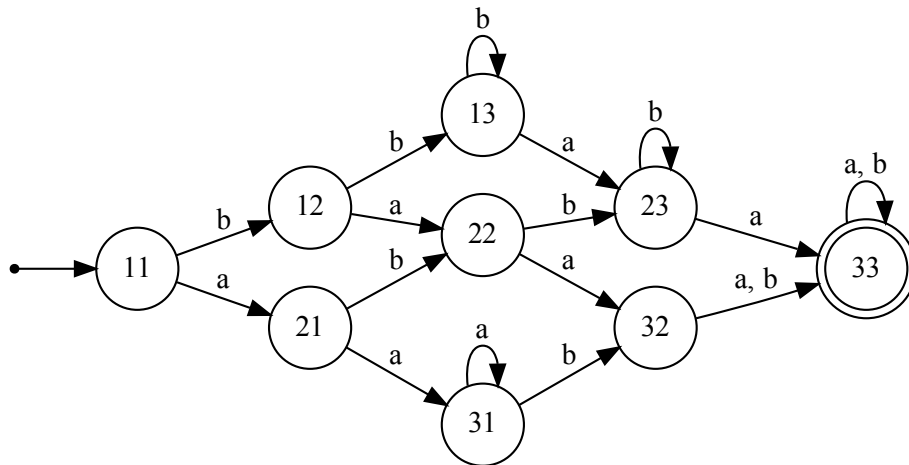


Прямое произведение:

1. $\Sigma = \{a, b\}$
2. $Q = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$
3. $S = \{(1, 1)\}$
4. $T = \{(3, 3)\}$

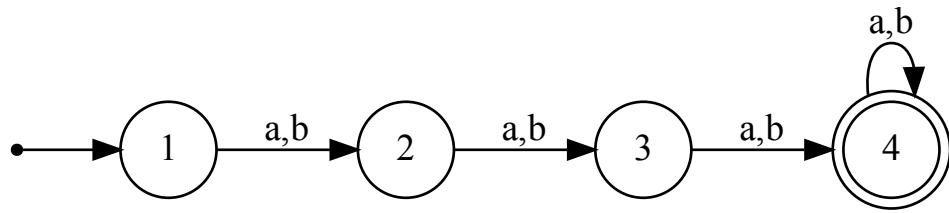
5. $\delta :$

A_1	A_2	a	b
1	1	21	12
1	2	22	13
1	3	23	13
2	1	31	22
2	2	32	23
2	3	33	23
3	1	31	32
3	2	32	33
3	3	33	33

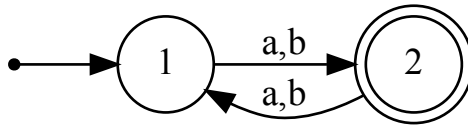


$$2.2 \quad L_2 = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega| \geq 3 \wedge |\omega| \text{ нечетное}\}$$

$$|\omega| \geq 3 \Rightarrow A_1 = \{\Sigma = \{a, b\}, Q_1 = \{1, 2, 3, 4\}, S_1 = \{1\}, T_1 = \{4\}, \delta_1\}$$



$$|\omega| \text{ нечетное} \Rightarrow A_2 = \{\Sigma = \{a, b\}, Q_2 = \{1, 2\}, S_2 = \{1\}, T_2 = \{2\}, \delta_2\}$$

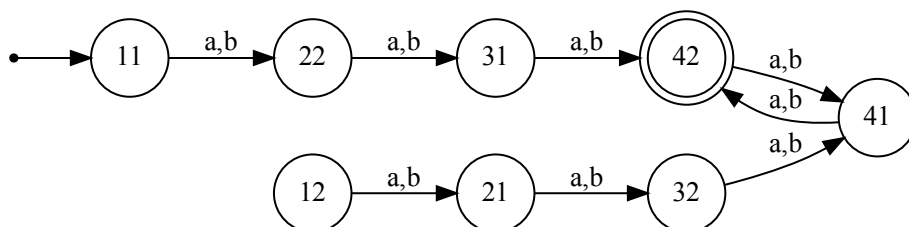


Прямое произведение:

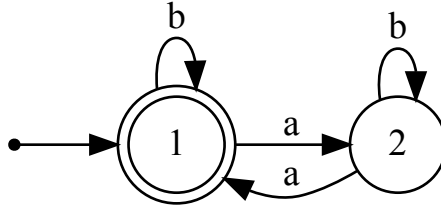
1. $\Sigma = \{a, b\}$
2. $Q = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\}$
3. $S = \{(1, 1)\}$
4. $T = \{(4, 2)\}$

5. $\delta :$

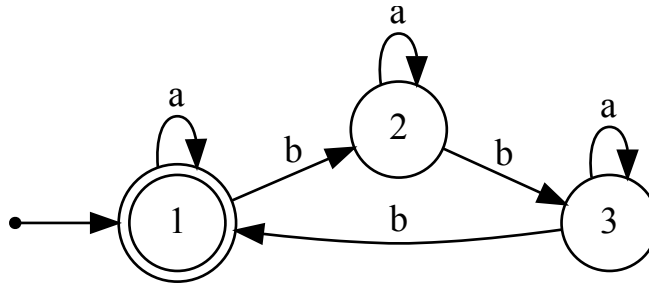
A_1	A_2	a	b
1	1	22	22
1	2	21	21
2	1	32	32
2	2	31	31
3	1	42	42
3	2	41	41
4	1	42	42
4	2	41	41



2.3 $L_3 = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid |\omega|_a \text{ четно} \wedge |\omega|_b \text{ кратно трем}\}$
 $|\omega|_a \text{ четно} \Rightarrow A_1 = \{\Sigma = \{a, b\}, Q_1 = \{1, 2\}, 1, T_1 = \{1\}, \delta_1\}$



$|\omega|_b \text{ кратно } 3 \Rightarrow A_2 = \{\Sigma = \{a, b\}, Q_2 = \{1, 2, 3\}, 1, T_2 = \{1\}, \delta_2\}$

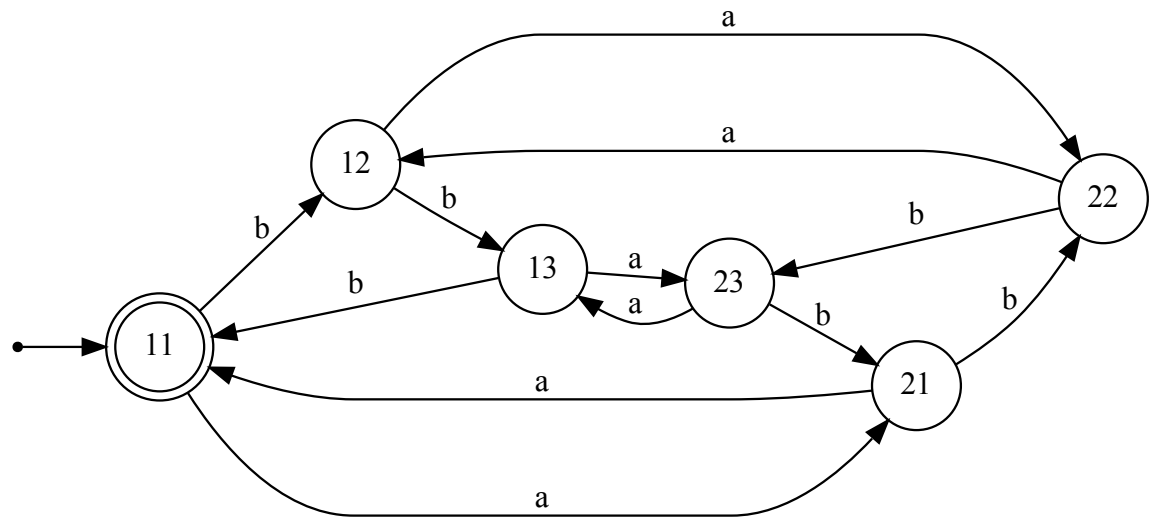


Прямое произведение:

1. $\Sigma = \{a, b\}$
2. $Q = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$
3. $S = \{(1, 1)\}$
4. $T = \{(1, 1)\}$

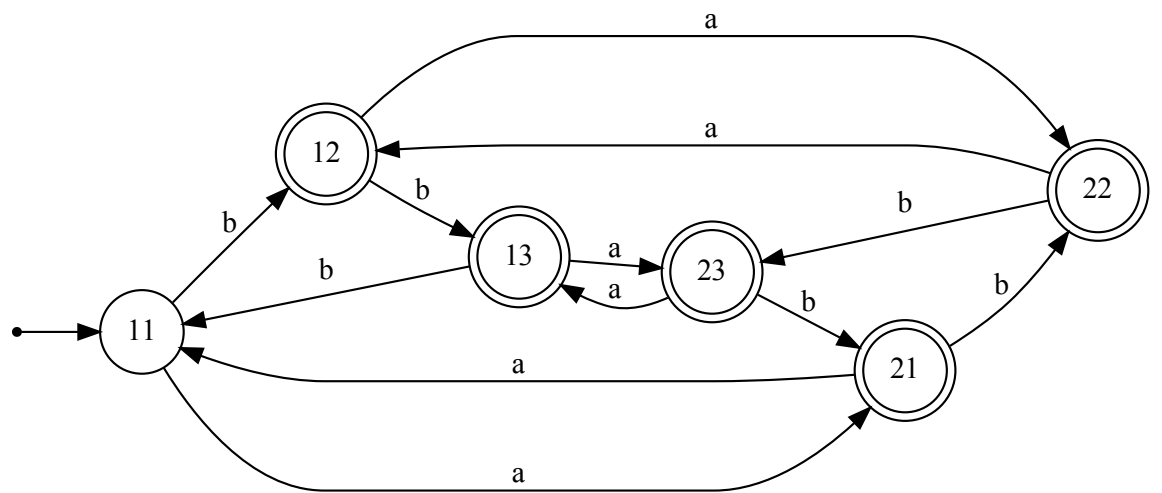
5. $\delta :$

A_1	A_2	a	b
1	1	21	12
1	2	22	13
1	3	23	11
2	1	11	22
2	2	12	23
2	3	13	21



2.4 $L_4 = \overline{L_3}$

$\overline{L_3} = \{\Sigma_3, Q_3, S_3, Q_3 \setminus T_3, \delta_3\}$ $Q_3 \setminus T_3 = 12, 13, 21, 22, 23$

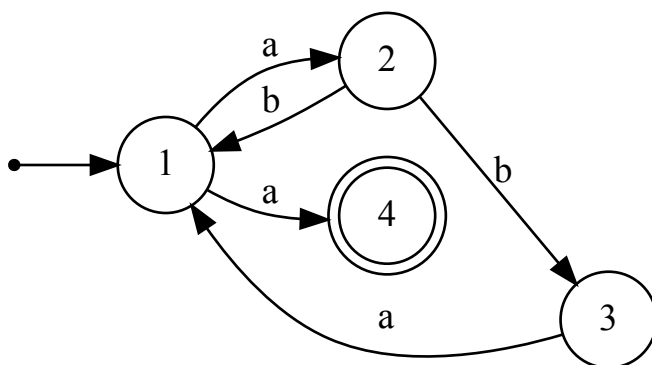


2.5 $L_5 = L_2 \setminus L_3 = L_2 \wedge \overline{L_3}$ - и тут мне стало лень :(

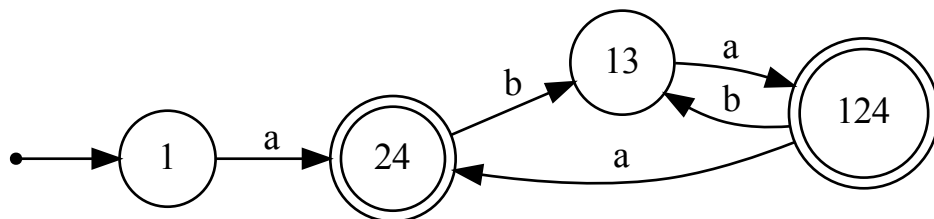
3 Построить минимальный ДКА по регулярному выражению

3.1 $(ab + aba)^*a$

1. Строим НКА:

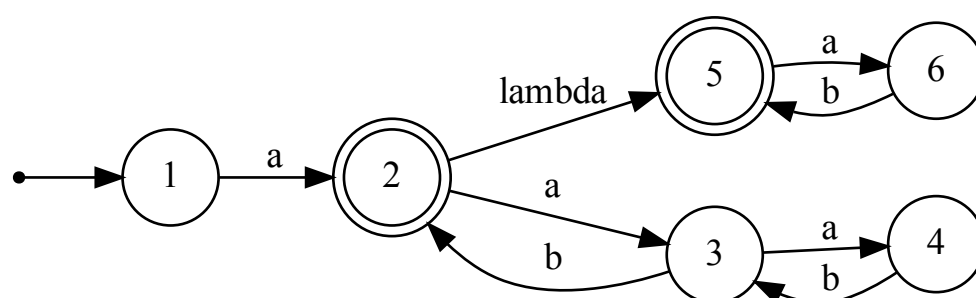


2. По НКА строим эквивалентный ДКА (алгоритм Томпсона):

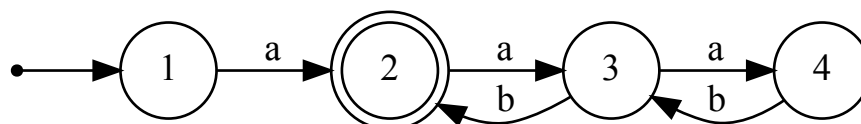


3.2 $a(a(ab)^*b)^*(ab)^*$

1. Строим НКА:

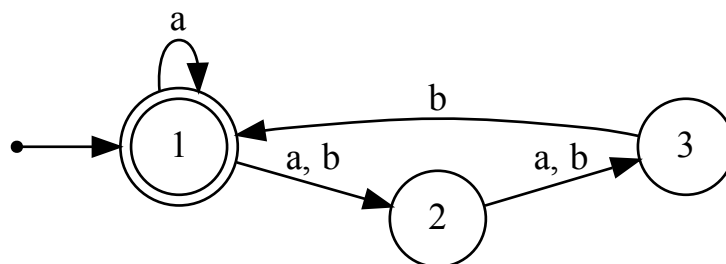


Получаем требуемый автомат по регулярному выражению $a(a(ab)^*b)^*$:

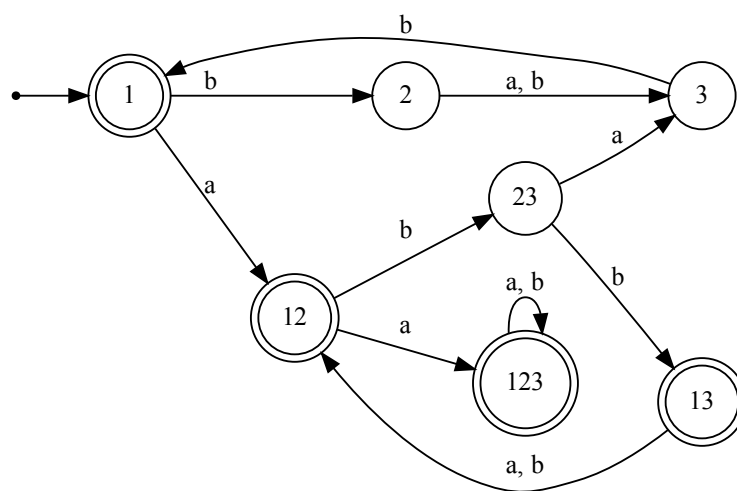


3.3 $(a + (a + b)(a + b)b)^*$

1. Строим НКА:

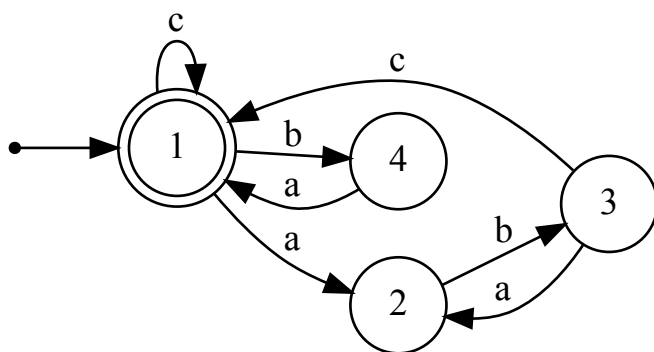


2. По НКА строим эквивалентный ДКА (на самом деле тут сразу видно, как построить ДКА):



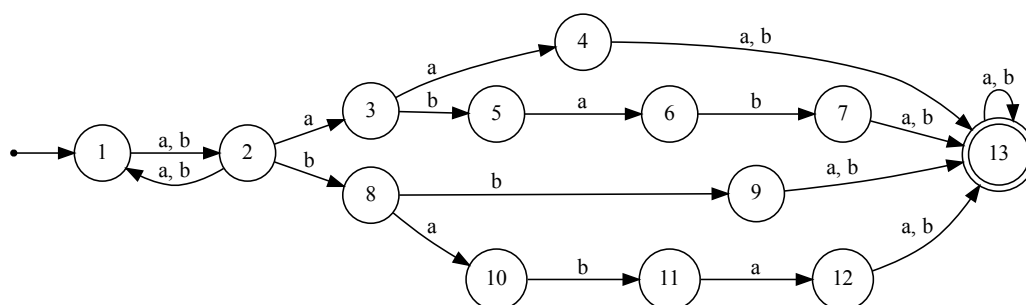
3.4 $(b + c)((ab)^*c + (ba)^*)^*$

Вроде как получилось сразу ДКА сделать:



3.5 $(a + b)^+(aa + bb + abab + baba)(a + b)^+$

Построим НКА:



Сириус дай полбалла плиз! А я тебе мем с котиками :)

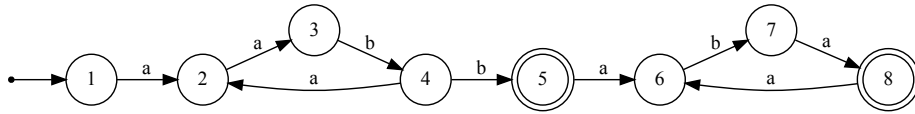


4 Определить, является ли язык регулярным

4.1 $L = \{(aab)^n b(aba)^m \mid n \geq 0, m \geq 0\}$

Мы беспамятные уб...

А, тут все ок. Тогда просто построим ДКА:



4.2 $L = \{uaav \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, |u|_b \geq |v|_a\}$

1. Рассмотрим отрицание языка $\Rightarrow \bar{L} = \{uaav \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, |u|_b < |v|_a\}$
2. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$.
3. Берем $w = b^n a a a^n$
4. $|w| = 2(n+1) > n$
5. Рассмотрим разбиение:

$$x = b^{n-l}$$

$$y = b^l$$

$$|xy| = n; 0 < l < n \Rightarrow |y| \geq 1$$

$$z = a a a^n$$
6. $\forall i \geq 0 : xy^i z \in \bar{L}$ - не выполняется, так как уже при $i \geq 2 \Rightarrow |b^{n-l} b^{2l}| = n + l > n$.
7. Делаем вывод, что язык нерегулярный, так как его отрицание не является регулярным.

4.3 $L = \{a^m w \mid w \in \{a, b\}^*, 1 \leq |w|_b \leq m\}$

1. Рассмотрим отрицание языка $\Rightarrow \bar{L} = \{a^m w \mid w \in \{a, b\}^*, |w|_b > m\}$

2. Фиксируем $n \in N$.

3. Берем $w = a^n b^n$

4. $|w| = 2n \geq n$

5. Рассмотрим разбиение:

$$x = a^l$$

$$y = a^k$$

$$|xy| = l + k \leq n; |y| \geq 1$$

$$z = a^{n-l-k} b^n$$

6. $\forall i \geq 0 : xy^i z \in \bar{L}$ - не выполняется, так как уже при $i \geq 2 \Rightarrow |a^l a^{ik} a^{n-l-k} b^n| = a^{n+k(i-1)} b^n \Rightarrow |b^n| = |w|_b = n < m = (n + k)$.

7. Делаем вывод, что язык нерегулярный, так как его отрицание не является регулярным.

4.4 $L = \{a^k w^m a^n \mid k = n \vee m > 0\}$

1. Фиксируем $n \in N$.

2. Берем $w = a^{n-1} b a^n$

3. $|w| = 2n \geq n$

4. Рассмотрим разбиение:

$$x = a^{n-1-l}$$

$$y = a^j b$$

$$|xy| = l + j + 1 \leq n; |y| = j + 1 \geq 1$$

$$z = a^n$$

5. $\forall i \geq 0 : xy^i z \in L$ - не выполняется, так как при $i \geq 2 \Rightarrow |a^{n-1-l} (a^j b)^2 a^n| = |a^{n-1-l+2j} b^2 a^n| \Rightarrow n - 1 - l + 2j = k \neq n$. При $i = 0 \Rightarrow m = 0$

6. То есть $k \neq n$ и $m = 0$, делаем вывод, что язык нерегулярный.

$$4.5 \quad L = \{ucv \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, u \neq v^R\}$$

1. Фиксируем $n \in N$.

2. Берем $w = a^n c a^{2n}$

3. $|w| = 3n + 1 \geq n$

4. Рассмотрим разбиение:

$$x = a^{n-l}$$

$$y = a^l$$

$$|xy| = n - l + l = n \leq n; |y| = l \geq 1$$

$$z = c a^{2n}$$

5. $\forall i \geq 0 : xy^i z \in L$ - не выполняется, так как при $i = 2$ и $l = n \Rightarrow a^{n-l} a^{2l} = a^{n+l} = a^{2n} \Rightarrow u = v^R$.

6. Делаем вывод, что язык нерегулярный.

Список литературы

- [1] Документация Graphviz [Электронный ресурс]. URL: <https://graphviz.org/documentation/>
- [2] Вики-конспекты ИТМО [Электронный ресурс]. URL: <https://neerc.ifmo.ru/wiki/>