ДЗ No1: Регулярные языки и конечные автоматы

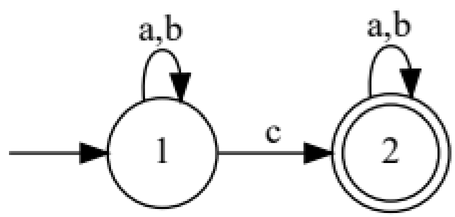
Выполнил: студент группы
А-13б-19 Перепёлкин Дмитрий

Апрель 2022 год

Мы будем часто обращаться к **Лемме о разрастании** :
Для бесконечного автоматного языка L
над алфавитом V существует такое натуральное число n,
что для любого слова
$\alpha \in L$ длины не меньше n найдутся слова $u, v, w \in V^*$ такие, что
$\alpha = uvw, |uv| \leq n, |v| \geq 1$
и для всякого неотрицательного целого $i, uv^i w$ будет являться словом языка L.
$(\exists n \in N) (\forall \alpha \in L : |\alpha| \geq n) (\exists u, v, w \in V^*) :$
$[\alpha = uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \big(\forall i \in NN \cup \{0\}, uv^i w \in L\big)]$

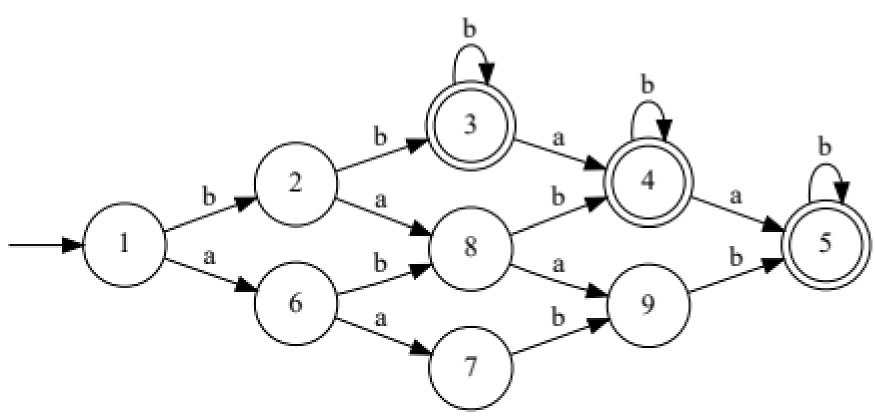
Задание №1. Построить конечный автомат, распознающий язык

Автомат №1
$L = \{\omega \in \{a, b, c\}^* | |\omega|_c = 1\}$



Автомат №2
$L = \{\omega \in \{a, b\}^* | |\omega|_a \leq 2; |\omega|_b \geq 2\}$

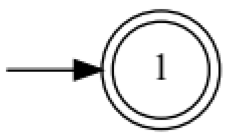
Здесь и далее на вершинах выдаётся число встретившихся "a"и "b"



Автомат №3
$L = \{\omega \in \{a, b\}^* | |\omega|_a \neq |\omega|_b\}$

Проверим является ли данный язык регулярным
Используем лемму о разрастании
$\overline{L} = \omega \in a, b^* || \omega|_a = |\omega|_b$
Доказательство:
$\omega = a^n b^n \in \overline{L}$
$|\omega| = 2n \geq n$
$xy = a^i a^j, \quad i + j \leq n$
$\omega = a^i a^j a^{n-i-j} b^n$
$\omega = a^i a^{jk} a^{n-i-j} b^n \notin \overline{L} \quad , k > 1$
Язык не является регулярным, значит и исходный не является.

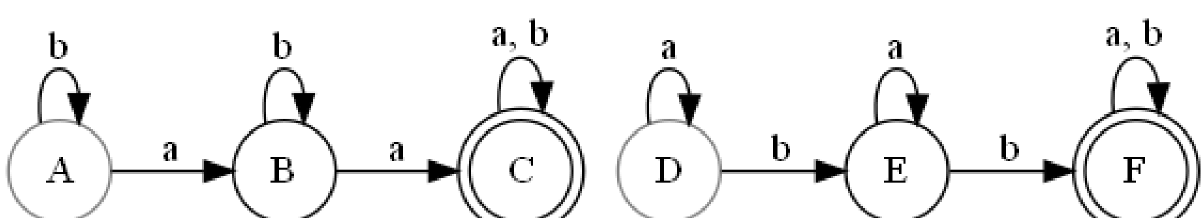
<u>Автомат №4</u>
$L = \{\omega \in \{a, b\}^* | \omega\omega = \omega\omega\omega\}$
Если $|\omega| > 0,$ то $\omega\omega \neq \omega\omega\omega,$ значит язык есть пустое слово.



Задание №2.Построить конечный автомат,используя прямое произведение

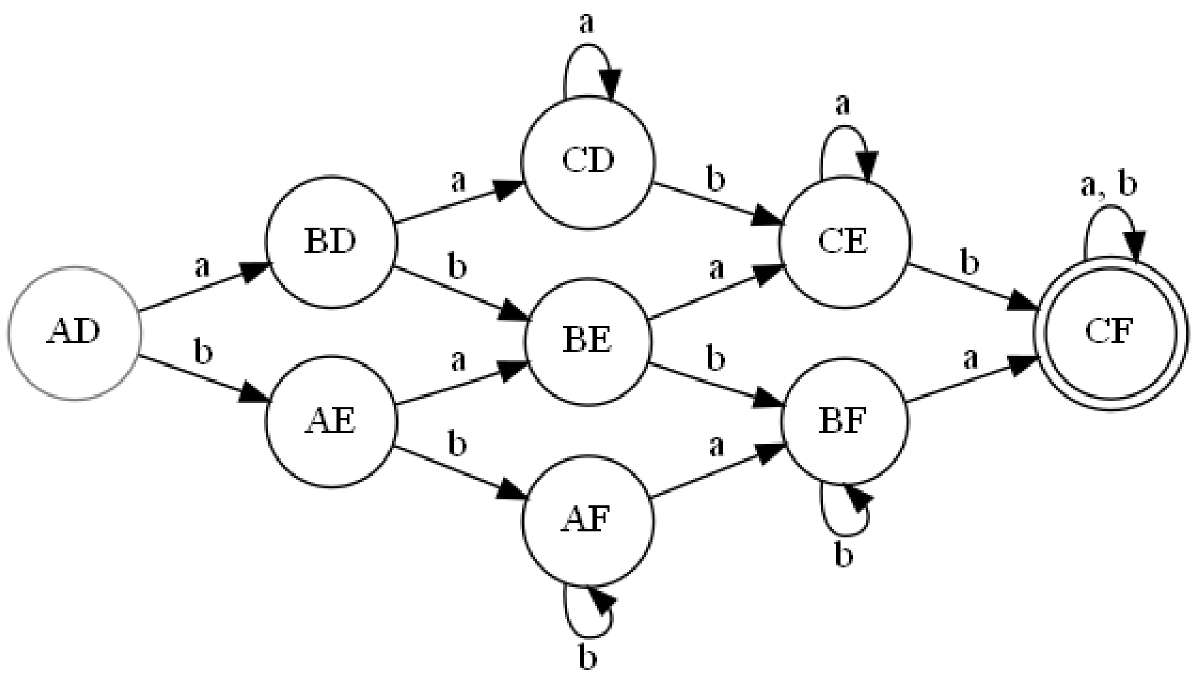
<u>Автомат №1</u>
$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* || w|_a \geq 2 \wedge |w|_b \geq 2\}$

$L_1 = \omega \in a, b^* \mid |\omega|_a \geq 2 \cap \omega \in a, b^* \mid |\omega|_b \geq 2$



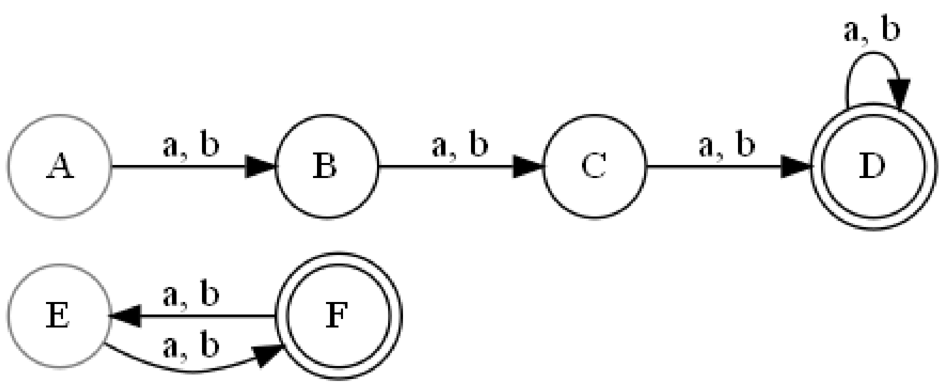
$\Sigma = a, b$
$Q = \{AD, AE, AF, BD, BE, BF, CD, CE, CF\}$
$S = AD$
$T = CF$
$\delta(AD, a) = BD \qquad \delta(BD, a) = CD \qquad \delta(CD, a) = CD$
$\delta(AD, b) = AE \qquad \delta(BD, b) = BE \qquad \delta(CD, b) = CE$
$\delta(AE, a) = BE \qquad \delta(BE, a) = CE \qquad \delta(CE, a) = CE$

$\delta(AE, b) = AF \qquad \delta(BE, b) = BF \qquad \delta(CE, b) = CF$
$\delta(AF, a) = BF \qquad \delta(BF, a) = CF \qquad \delta(CF, a) = CF$
$\delta(AF, b) = AF \qquad \delta(BF, b) = BF \qquad \delta(CF, b) = CF$



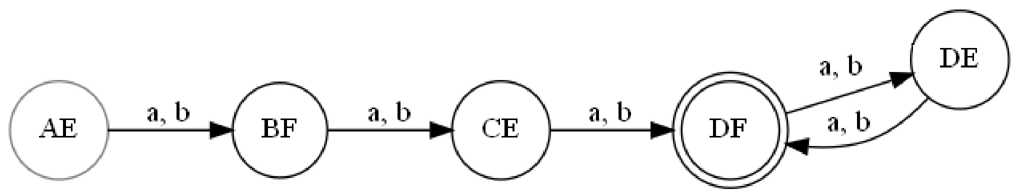
<u>Автомат №2</u>
$L_2 = \{\omega \in \{a, b\}^* || \omega|_a \geq 3 \wedge |\omega|_b \text{нечётное}\}$

$L_2 = \{\omega \in \omega\{a, b\}^* || \omega| \geq 3\} \cap \{\omega \in \{a, b\}^* || \omega| \text{нечетно}\}$



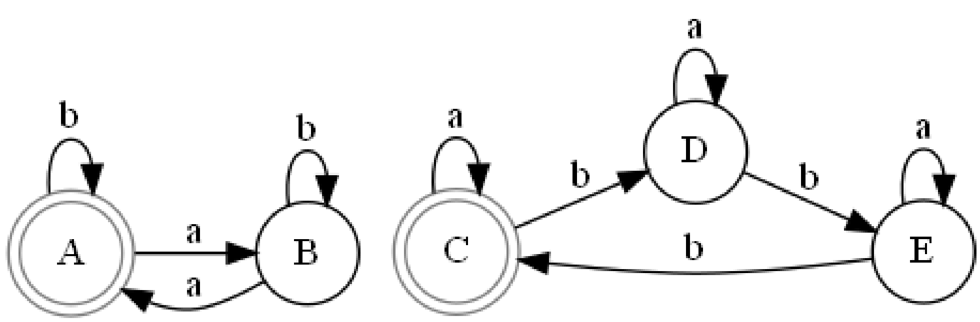
$\Sigma = \{a, b\}$
$Q = \{AE, AF, BE, BF, CE, CF, DE, DF\}$
$S = AE$
$T = DF$
$\delta(AE, a) = BF \qquad \delta(CE, a) = DF$

$\delta(AE, b) = BF \qquad \delta(CE, b) = DF$
$\delta(AF, a) = BE \qquad \delta(CF, a) = DE$
$\delta(AF, b) = BE \qquad \delta(CF, b) = DE$
$\delta(BE, a) = CF \qquad \delta(DE, a) = DF$
$\delta(BE, b) = CF \qquad \delta(DE, b) = DF$
$\delta(BF, a) = CE \qquad \delta(DF, a) = DE$
$\delta(BF, b) = CE \qquad \delta(DF, b) = DE$



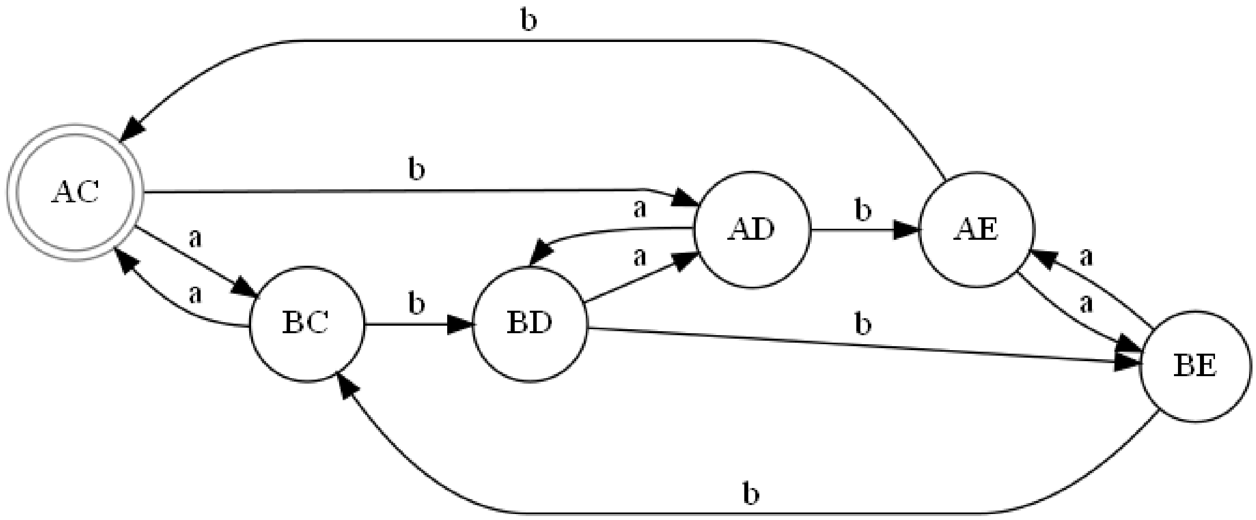
<u>Автомат №3</u>
$L_3 = \{\omega \in \{a, b\}^* || \omega|_a \text{чётно} \wedge |\omega|_b \text{кратно } 3\}$

$L_3 = \{\omega \in \{a, b\}^* || \omega|_a \text{четно} \cap \{\omega \in \{a, b\}^* || \omega|_b \text{кратно } 3\}$

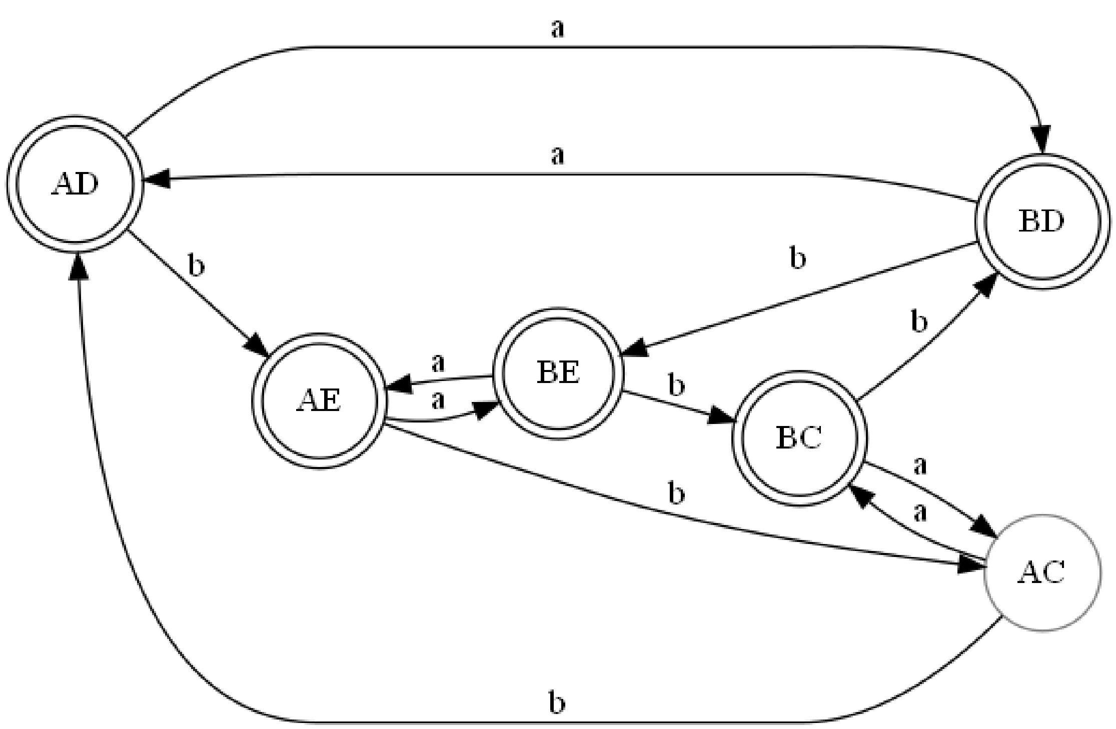


$\Sigma = \{a, b\}$
$Q = \{C, AD, AE, BC, BD, BE\}$
$S = AC$
$T = AC$
$\delta(AC, a) = BC \qquad \delta(BC, a) = AC$
$\delta(AC, b) = AD \qquad \delta(BC, b) = BD$
$\delta(AD, a) = BD \qquad \delta(BD, a) = AD$
$\delta(AD, b) = AE \qquad \delta(BD, b) = BE$

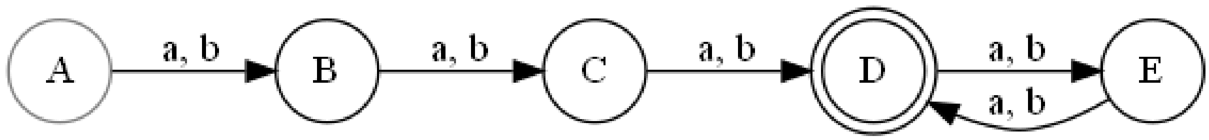
$\delta(AE, a) = BE \qquad \delta(BE, a) = AE$
$\delta(AE, b) = AC \qquad \delta(BE, b) = BC$



Автомат №4
$L_4 = \overline{L_3}$

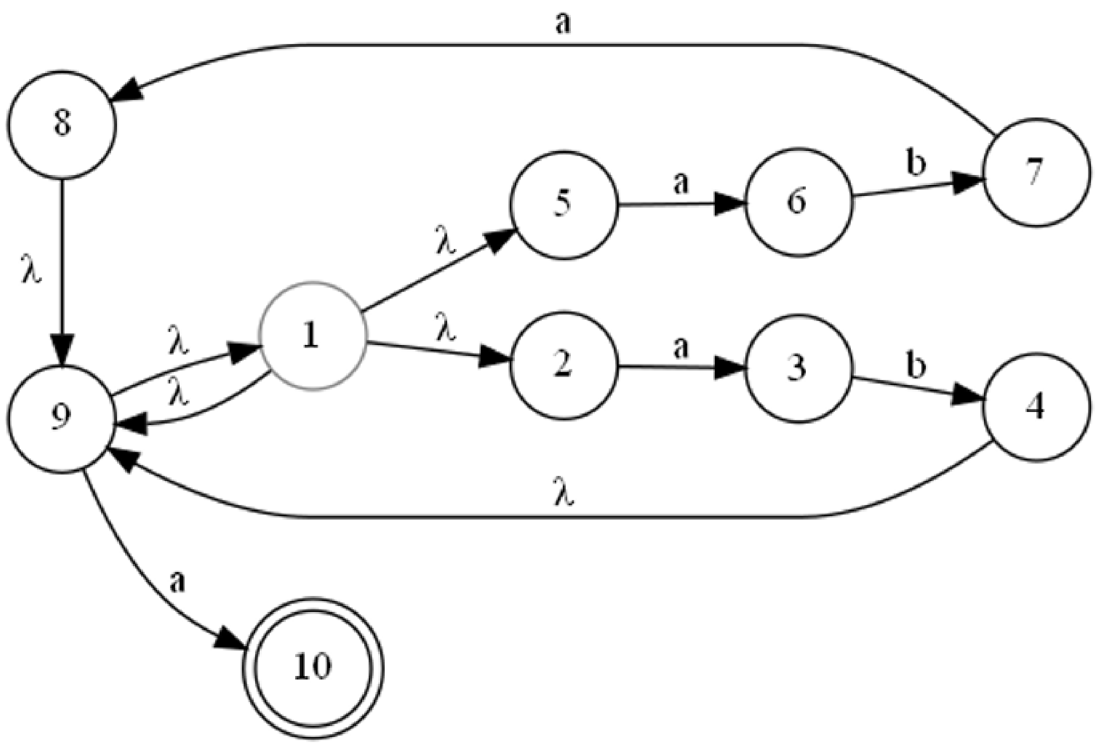


Автомат №5
$L_5 = L_2 / L_3$
$L_5 = L_2 \cap L_4$



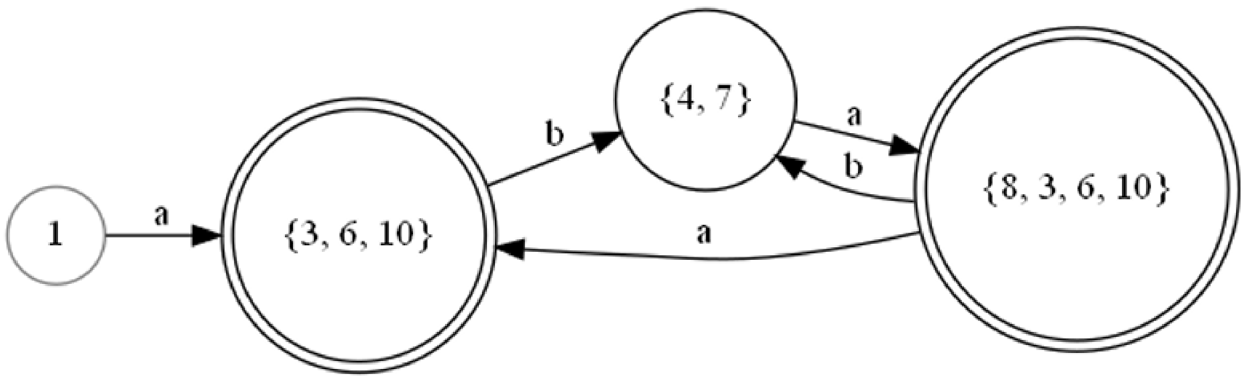
Задание №3. Построить минимальный ДКА по регулярному выражению

<u>Автомат №1</u>
$(ab + aba)^*a$



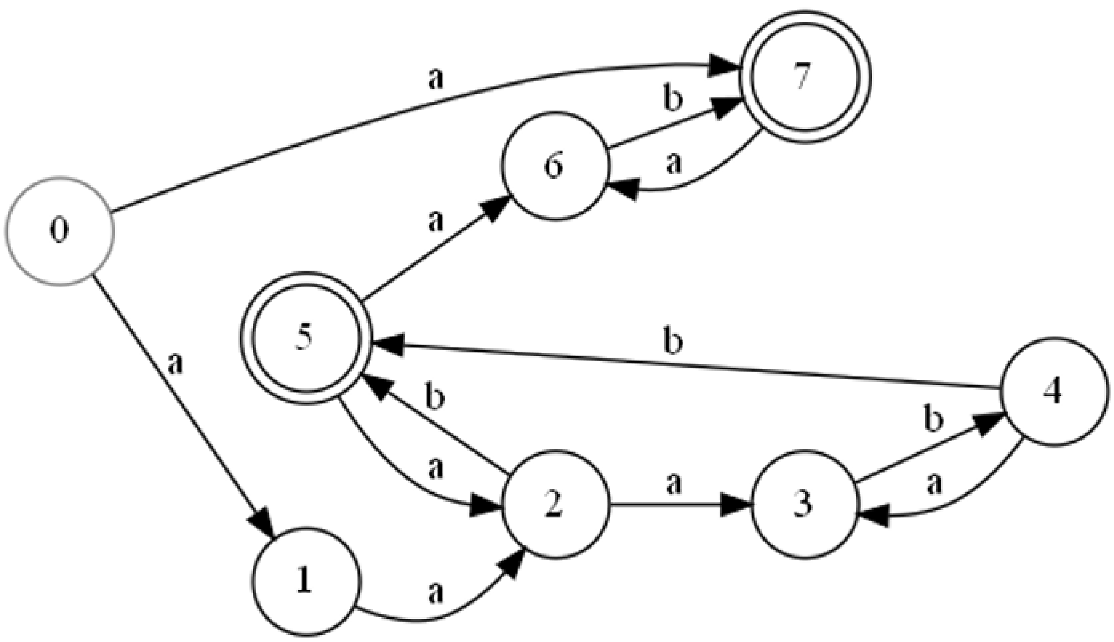
Построим минимальный НКА по ДКА

	a	b
1	$3, 6, 10$	$\emptyset$
$3, 6, 10$	$\emptyset$	$4, 7$
$4, 7$	$8, 3, 6, 10$	$\emptyset$
$8, 3, 610$	$3, 6, 10$	47



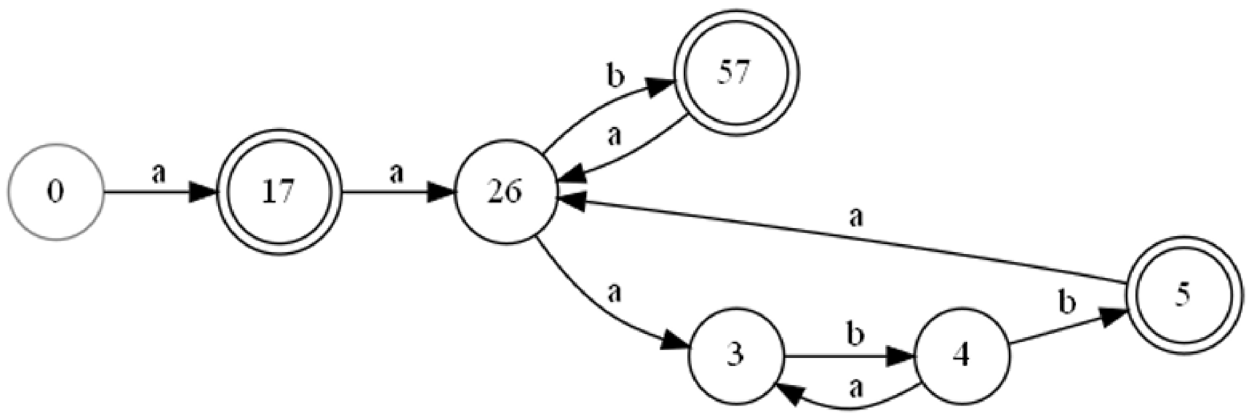
<u>Автомат №2</u>
$a(a(ab)^*b)^*(ab)^*$

Построим НКА:

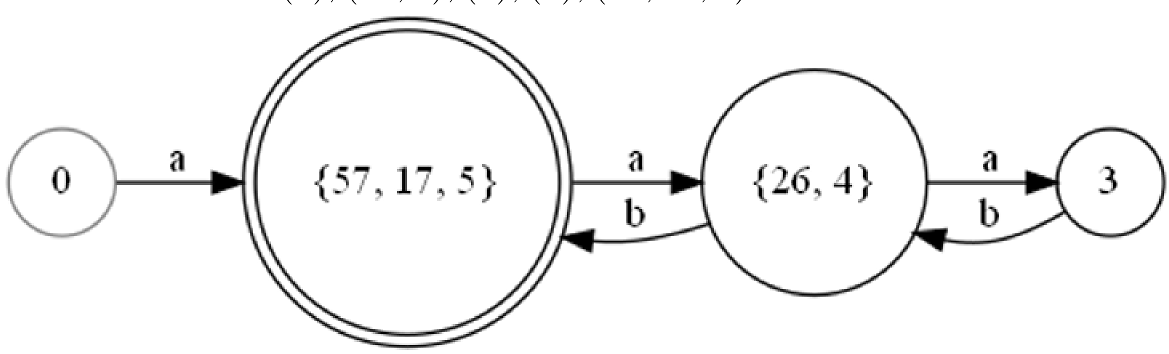


По нему строим ДКА:

	a	b
0	17	$\emptyset$
17	26	$\emptyset$
26	3	57
3	$\emptyset$	4
57	26	$\emptyset$
4	3	5
5	26	$\emptyset$

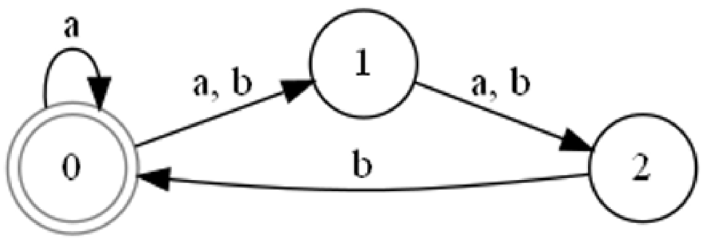


Минимизируем автомат:
1 эквивалентность: $(0, 26, 3, 4, \emptyset), (57, 17, 5)$
2 эквивалентность: $(0), (26, 4), (3, \emptyset), (57, 17, 5)$
3 эквивалентность: $(0), (26, 4), (3), (\emptyset), (57, 17, 5)$



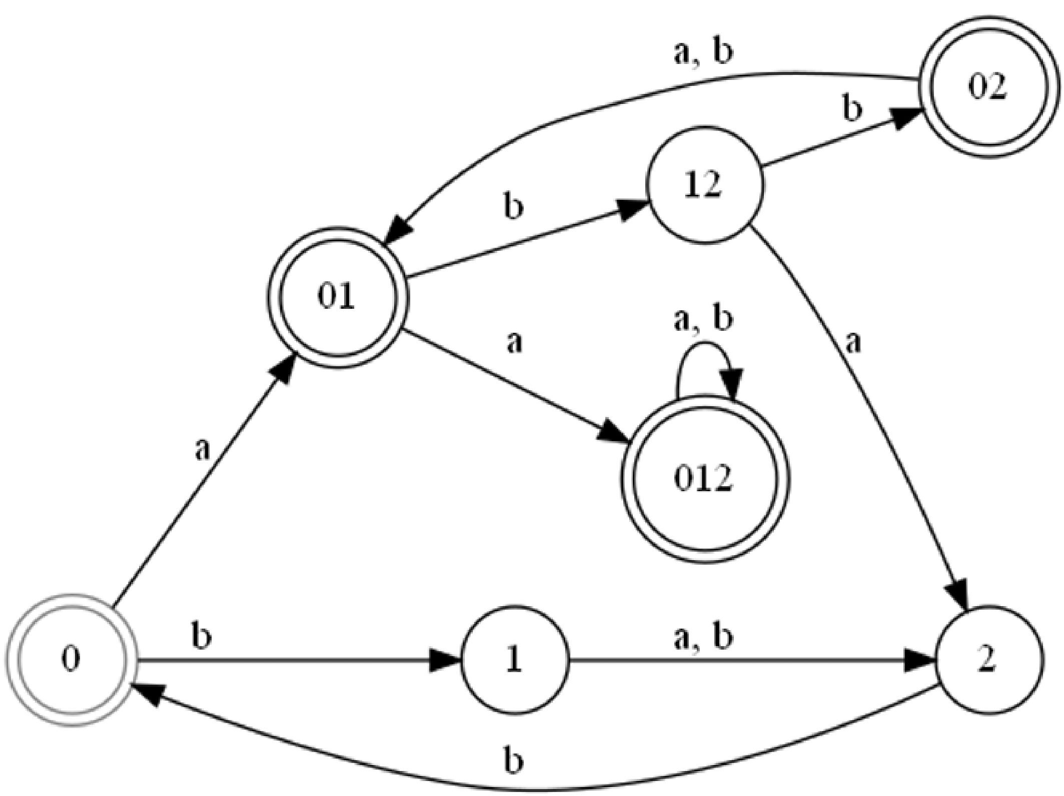
Автомат №3
$(a + (a + b)(a + b)b)^*$

Строим НКА:



Строим ДКА:

	a	b
0	01	1
01	012	12
1	2	2
012	012	012
12	2	02
2	$\emptyset$	0
02	01	01

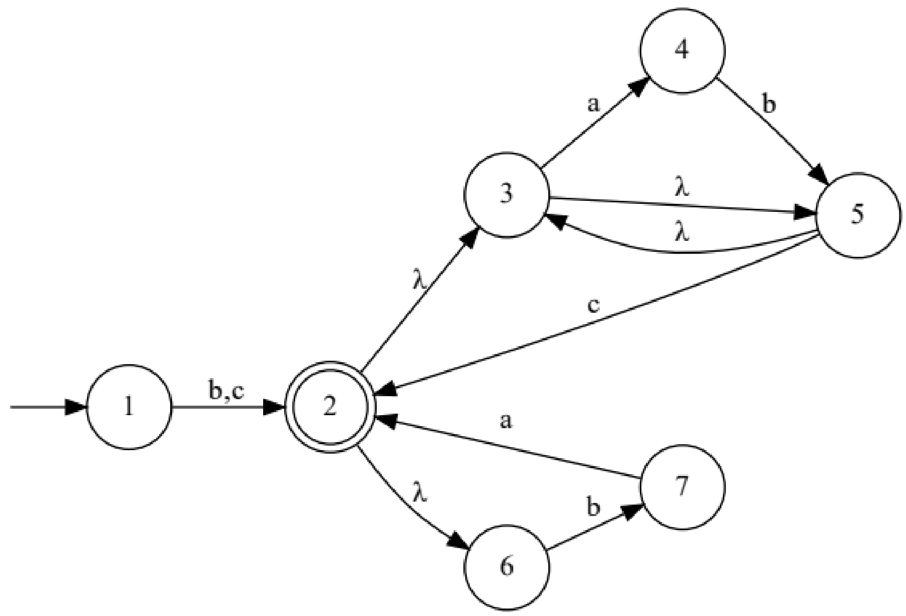


Данный автомат будет минимальным

Автомат №4

$(b + c)((ab)^*c + (ba)^*)^*$

Построим ДКА:



Минимизируем:

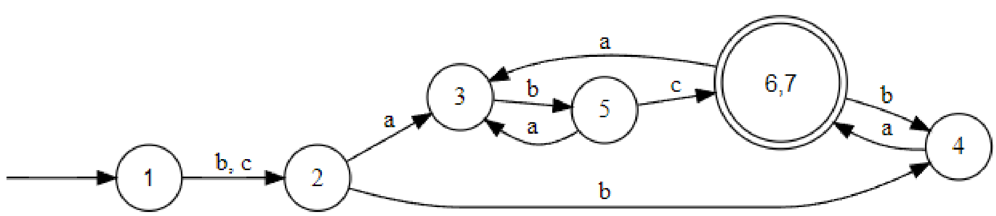
1 эквивалентность:$(1, 2, 3, 4, 5, \emptyset), (6, 7)$

2 эквивалентность:$(1, 2, 3, \emptyset), (4), (5), (6, 7)$

3 эквивалентность:$(1, 2, 3, \emptyset), (4), (5), (6, 7)$

4 эквивалентность:$(1, \emptyset), (2), (3), (4), (5), (6, 7)$

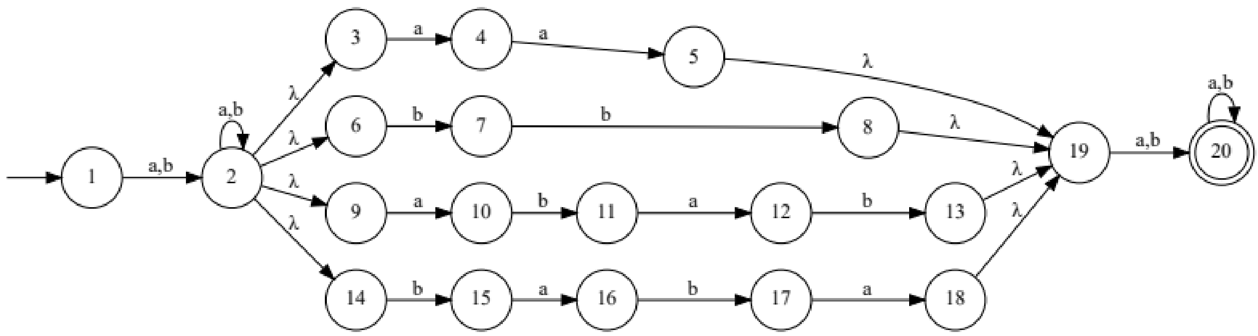
5 эквивалентность:$(1), (\emptyset), (2), (3), (4), (5), (6, 7)$



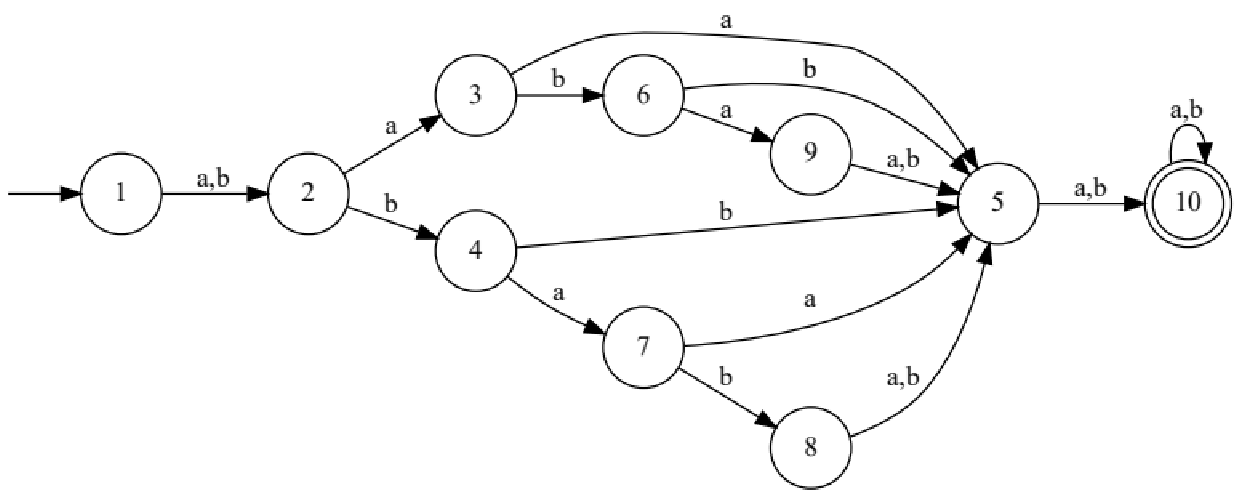
Автомат №5

$(a + b)^+(aa + bb + abab + baba)(a + b)^+$

Строим НКА:

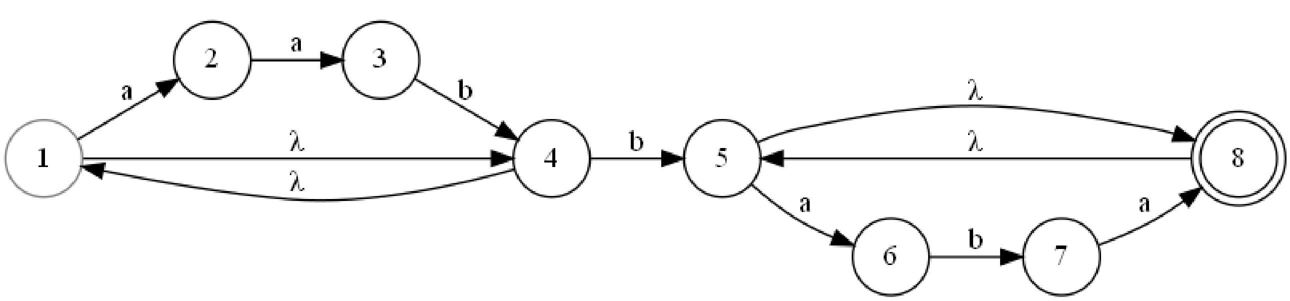


Преобразуем в минимальный ДКА:



Задание №4. Определить является ли язык регулярным или нет

<u>Автомат №1</u>
$L = \{(aab)^n b(aba)^m \mid n \geq 0, m \geq 0\}$



Автомат №2

$L = \{uaav | u \in \{a,b\}^*, v \in \{a,b\}^*, |u|_b \geq |v|_a\}$

$\omega = b^n aaa^n, |\omega| \geq n$
$\omega = xyz$
$x = b^i \qquad y = b^j \qquad i + j \leq n \qquad j > 0$
$z = b^{n-i-j} aaa^n$
$|xy| \leq n \qquad |y| > 0$
$xy^0z = b^i b^{n-i-j} aaa^n = b^{n-j} aaa^n \notin L$

Язык не является регулярным

Автомат №3

$L = \{a^m w \mid w \in \{a,b\}^*, 1 \leq |w|_b \leq m\}$

$\omega = a^n b^n, |\omega| \geq n$
$\omega = xyz$
$x = a^i \qquad y = a^j \qquad i + j \leq n \qquad j > 0$
$z = a^{n-i-j} b^n$
$|xy| \leq n \qquad |y| > 0$
$xy^0z = a^i a^{n-i-j} b^n = a^{n-j} b^n \notin L$

Язык не является регулярным

Автомат №4

$L = \{a^k b^m a^n \mid k = n \vee m > 0\}$

$\omega = a^n b a^n, |\omega| \geq n$
$\omega = xyz$
$x = a^i \qquad y = a^j \qquad i + j \leq n \qquad j > 0$
$z = a^{n-i-j} b a^n$
$|xy| \leq n \qquad |y| > 0$
$xy^kz = a^i a^{jk} a^{n-i-j} b a^n = a^{n-j(k-1)} b a^n \notin L \quad \forall k > 1$

Язык не является регулярным

Автомат №5

$L = \{ucv \mid u \in \{a,b\}^*, v \in \{a,b\}^*, u \neq v^R\}$

$\overline{L} = \{ucv \mid u \in \{a,b\}^*, v \in \{a,b\}^*, u = v^R\}$
Используем лемму о разрастании
$\omega = b^n c b^n, \omega \in \overline{L}, |\omega| = 2n+1$
Для всех $x, y \qquad y = b^i$
$xy^k zk > 1$
Язык $\overline{L}$ не регулярный
Значит и язык L не регулярный.

Задание №5. Реализовать алгоритмы

1.Построение ДКА по НКА с λ-переходами

Алгоритм Томпсона строит по НКА эквивалентный ДКА следующим образом:
Начало.
Шаг 1. Помещаем в очередь Q множество, состоящее только из стартовой вершины.
Шаг 2. Затем, пока очередь не пуста выполняем следующие действия:
Достаем из очереди множество, назовем его q
Для всех $c \in \Sigma$ посмотрим, в какое состояние ведет переход по символу c из каждого состояния в q.
Полученное множество состояний положим в очередь Q только если оно не лежало там раньше.
Каждое такое множество в итоговом ДКА будет отдельной вершиной, в которую будут вести переходы по соответствующим символам.
Если в множестве q хотя бы одна из вершин была терминальной в НКА, то соответствующая данному множеству вершина в ДКА также будет терминальной.
Конец.

Пусть дан произвольный НКА:
$\left\langle \Sigma, Q, s \in Q, T \subset Q, \delta : Q * \Sigma \to 2^Q \right\rangle$

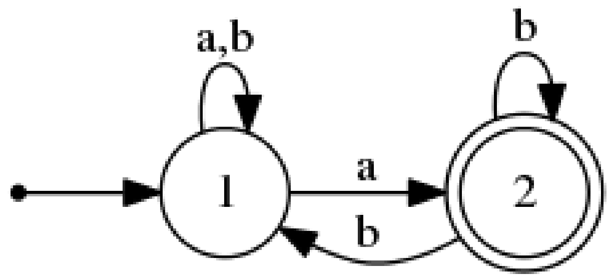
Построим по нему следующий ДКА:
$\langle \Sigma, Q_d, s_d \in Q_d, T_d \subset Q_d, \delta_d : Q_d * \Sigma \to Q_d \rangle$

1.$Q_d = \{q_d | q_d \subset 2^Q$
2.$s_d = \{s\}$
3.$T_d = \{q \in Q_d | \exists p \in T : p \in q\}$

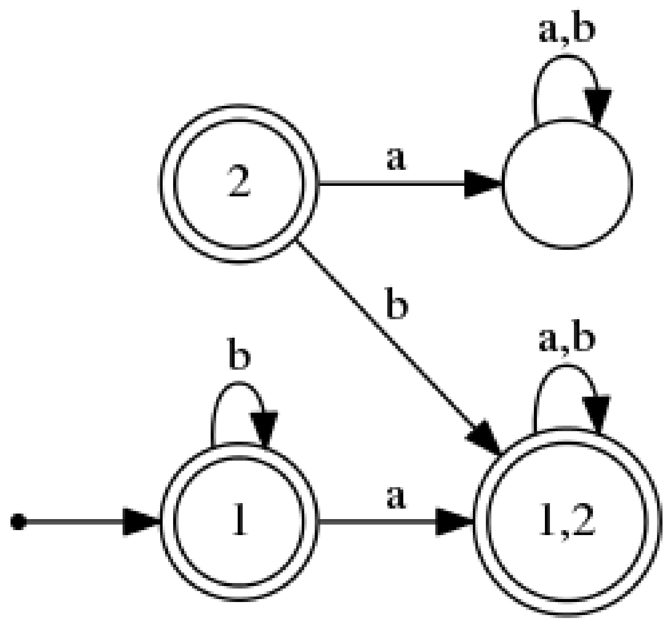
$4.\delta_d\left(q,c\right)=\left\{\delta\left(a,c\right)|a\in q\right\}$

Теорема:
Построенный ДКА эквивалентен данному НКА.
(Без доказательства)

Пример:
Пусть нам дан НКА:



По нашему заданию эквивалентного ДКА мы получаем:



2. Прямое произведение языков, с возможностью построить пересечение, объединение и разность

Прямым произведением двух ДКА:
$A1=\langle\Sigma1,Q1,s1,T1,\delta1\rangle$и $A2=\langle\Sigma2,Q2,s2,T2,\delta2\rangle$
Называется ДКА $A=\langle\Sigma,Q,s,T,\delta\rangle$, где:

$\Sigma = \Sigma 1 \cup \Sigma 2$
$Q = Q1 * Q2$
$s = \langle s1, s2 \rangle$
$T = T1 * T2$
$\delta\left(\langle q1, q2 \rangle, c2\right) = \langle \delta 1\left(q1, c\right), \delta 2\left(q2, c\right) \rangle$

Изменив конструкцию, получаем автомат, дающий возможность построить разность или объединение двух языков.

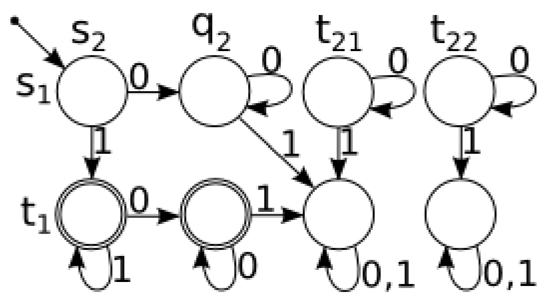


Рис. 1: Разность ДКА

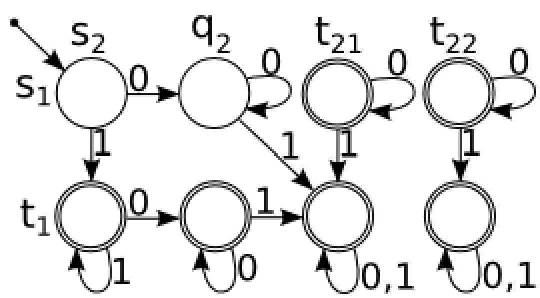


Рис. 2: Объединение ДКА

Необходимо разрешать любую цепочку,
удовлетворяющую первому или второму автомату.
Делаем терминальными вершины $T = (T1 * Q2) \cup (Q1 * T2)$.
Полученный автомат удовлетворяет нашим требованиям,
так как попав в состояние $T1$ или $T2$, цепочка будет удовлетворять
первому или второму автомату соответственно.