

Дисциплина: "Теоретические модели вычислений"

ИВТИ | А-13а-19 | Рамазанов Никита

ДЗ №1. Регулярные языки и конечные автоматы.

Задачи.

1. Построить конечный автомат, распознающий язык;
2. Построить конечный автомат, используя прямое произведение;
3. Построить минимальный ДКА по регулярному выражению;
4. Определить, является ли язык регулярным;
5. Реализовать алгоритмы.

Задача 1. Построить конечный автомат, распознающий язык.

NB: Автомат должен быть детерминированным.

1. $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_c = 1\}$

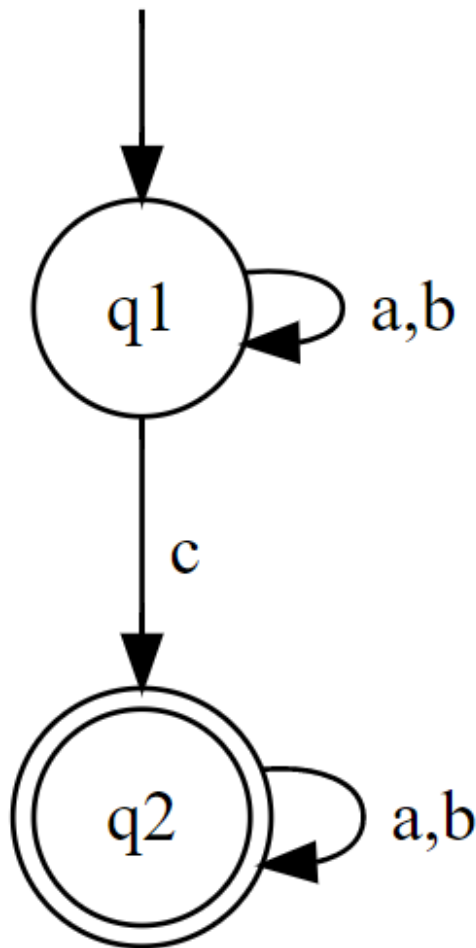


Figure 1: Finite machine to the task 1.1

2. $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \leq 2; |w|_b \geq 2\}$

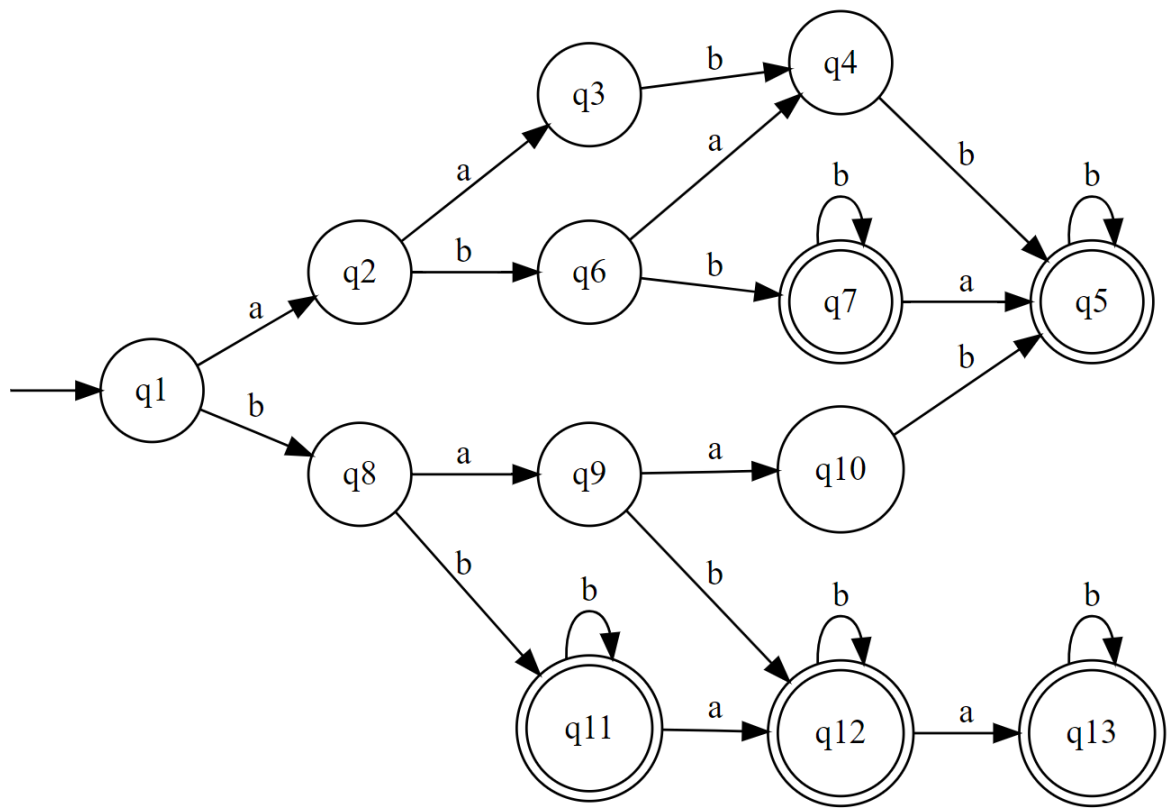


Figure 2: Finite machine to the task 1.2

$$_3.L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \neq |w|_b\}$$

Условие, при котором автомат работает корректно - а и b чередуются, в противном случае построить ДКА нельзя.

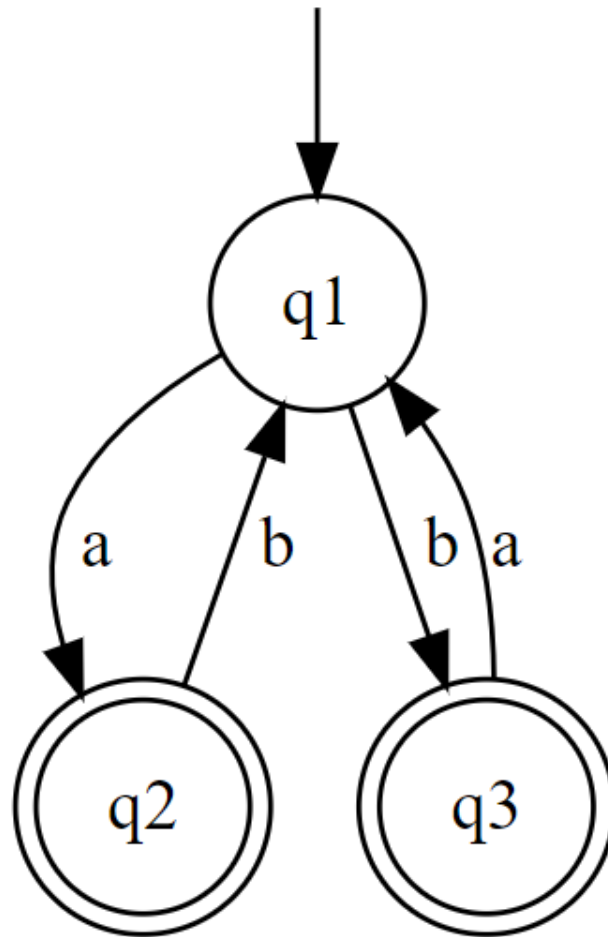


Figure 3: Finite machine to the task 1.3

$${}_4.L = \{w \in \{a, b\}^* | ww = www\}$$

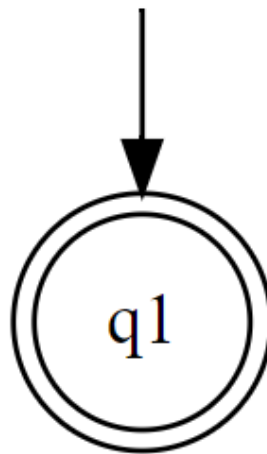


Figure 4: Finite machine to the task 1.4

Задача 2. Построить конечный автомат, используя прямое произведение.

NB: Автомат должен быть построен с помощью прямого произведения ДКА и его свойств.

$${}_1.L_1 = \{w \in \{a, b\}^* | |w|_a \geq 2 \wedge |w|_b \geq 2\}$$

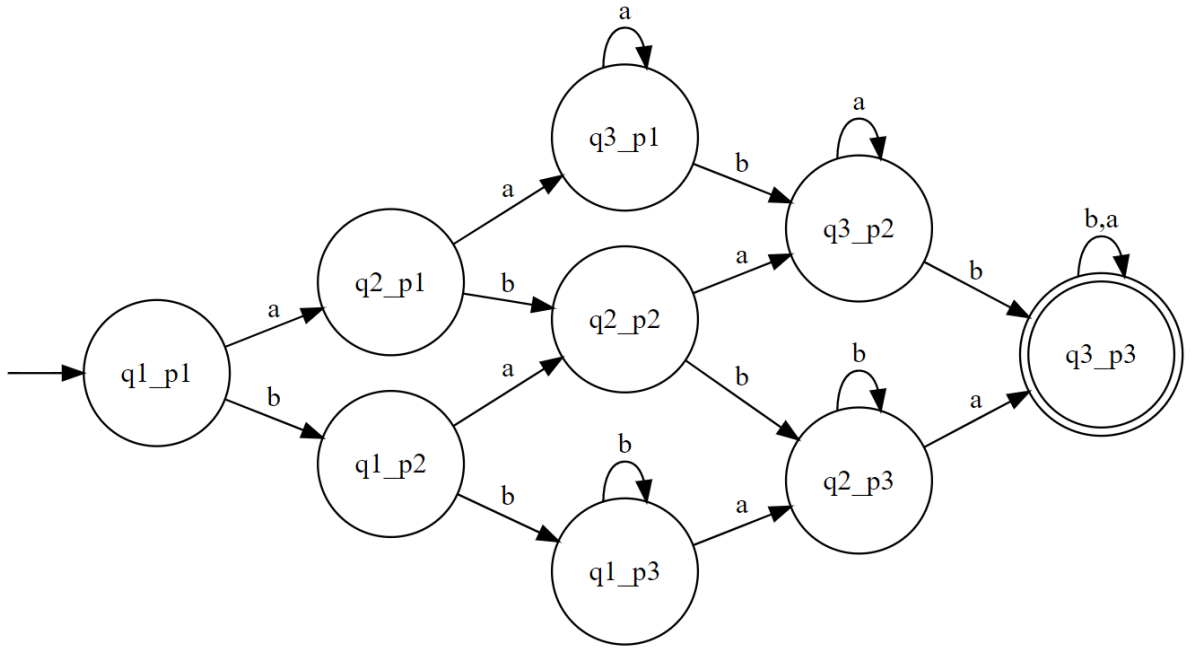


Figure 1: Finite machine to the task 2.1 (direct product of 1.1 and 1.2)

$$2.L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \geq 3 \wedge |w|_b \text{ is odd}\}$$

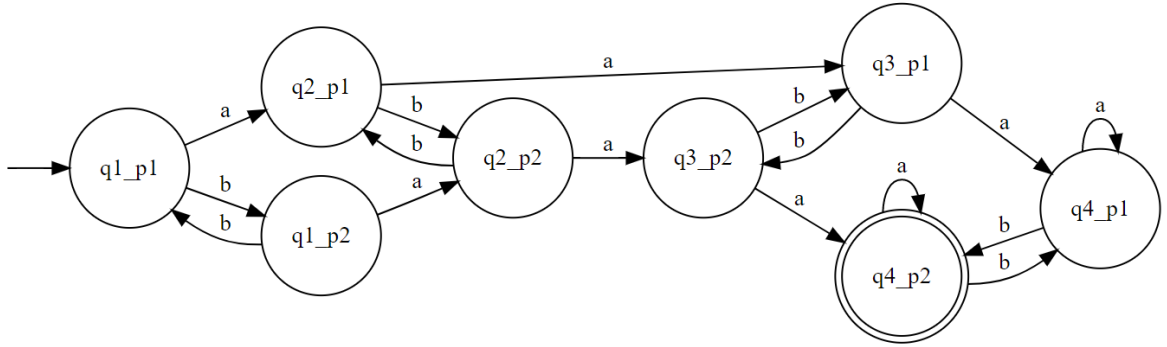


Figure 2: Finite machine to the task 2.2 (direct product of 2.1 and 2.2)

$$3.L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \text{ is even} \wedge |w|_b \text{ multiple of } 3\}$$

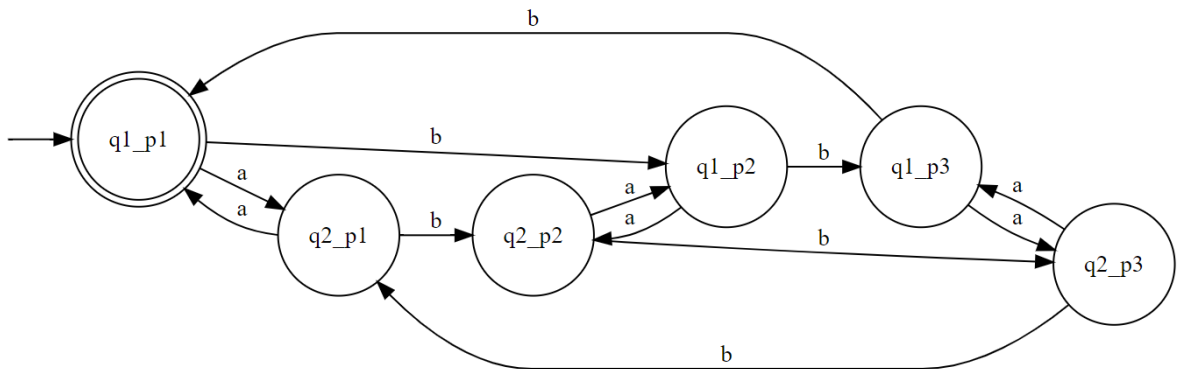


Figure 3: Finite machine to the task 2.3 (direct product of 3.1 and 3.2)

$$4.L_4 = \overline{L_3}$$

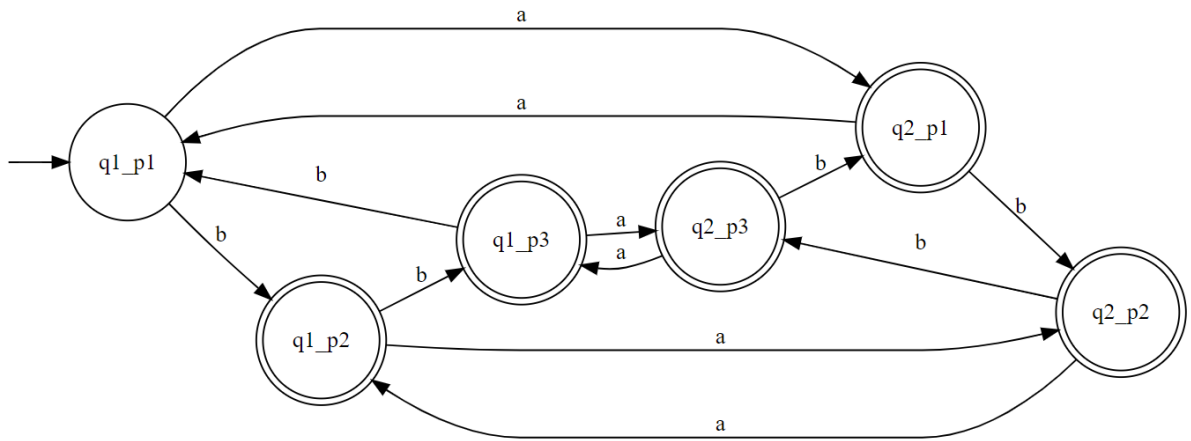


Figure 4: Finite machine to the task 2.4 (inverse of 2.3)

Задача 3. Построить минимальный ДКА по регулярному выражению.

1. $(ab + aba)^*a$

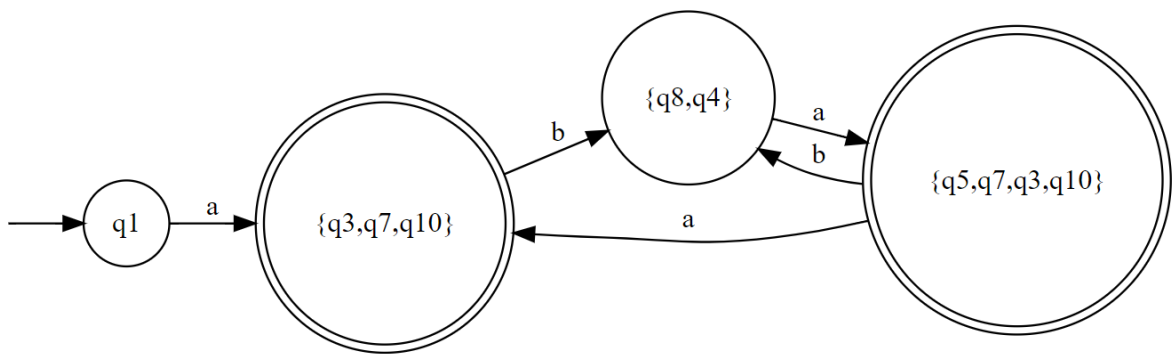


Figure 1: Minimal deterministic finite machine to the task 3.1

2. $a(a(ab)^*b)^*(ab)^*$

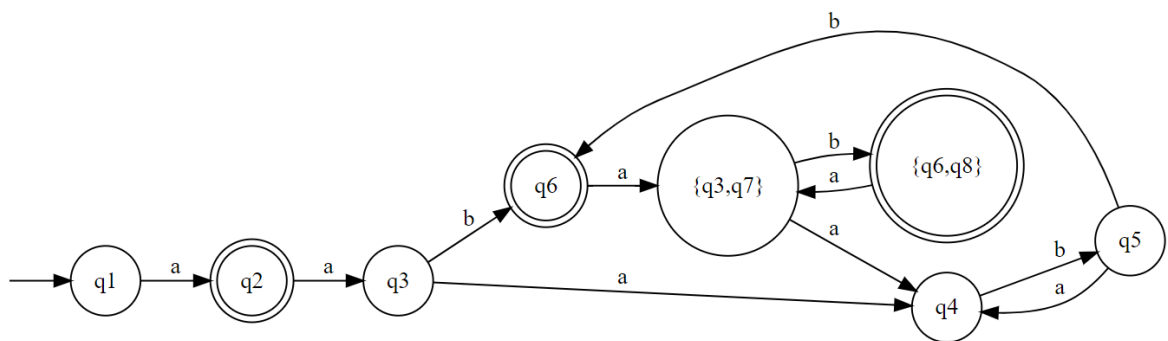


Figure 2: Minimal deterministic finite machine to the task 3.2

3. $(a + (a + b)(a + b)b)^*$

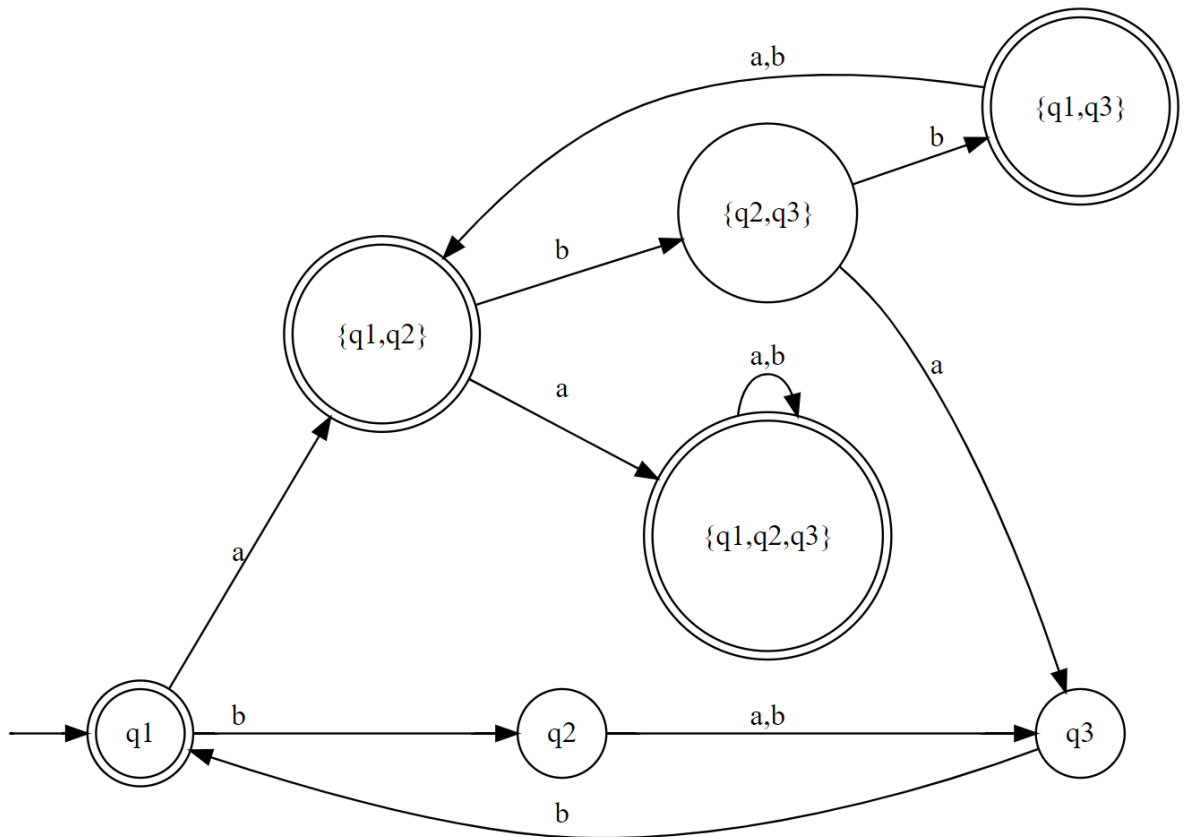


Figure 3: Minimal deterministic finite machine to the task 3.3

$$4. (b + c)((ab)^*c + (ba)^*)^*$$

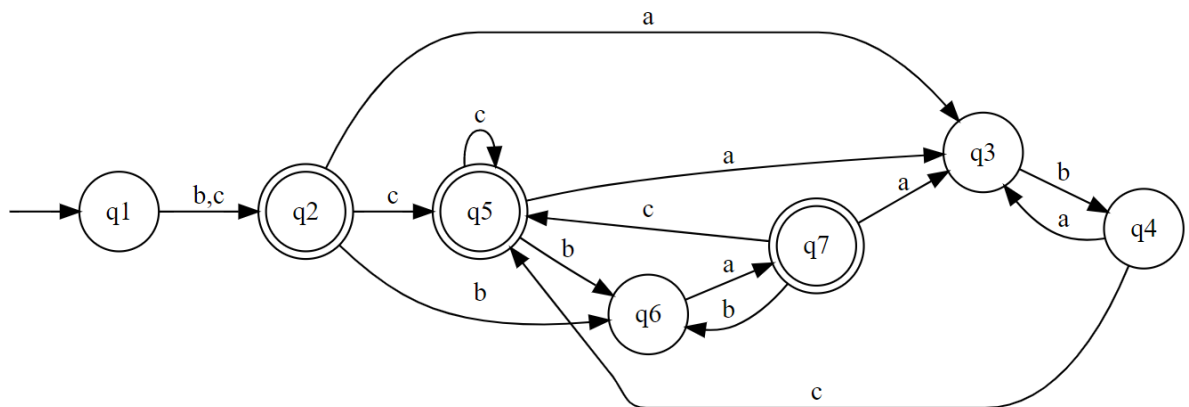


Figure 4: Minimal deterministic finite machine to the task 3.4

Задача 4. Определить, является ли язык регулярным.

Лемма о накачке:

$$L - \text{regular} \Rightarrow \exists n \quad \forall \omega \in L, \quad |\omega| \geq n \quad \exists x, y, z \quad \omega = xyz \quad |xy| \leq n \\ y \neq \varepsilon \quad \forall i \geq 0 \quad xy^iz \in L$$

$$\forall n \quad \exists \omega \in L, \quad |\omega| \geq n \quad \forall x, y, z \quad \omega = xyz \quad |xy| \leq n$$

Ее отрицание: $y \neq \varepsilon \quad \exists i \geq 0 \quad xy^iz \notin L$

1.

Язык является регулярным.

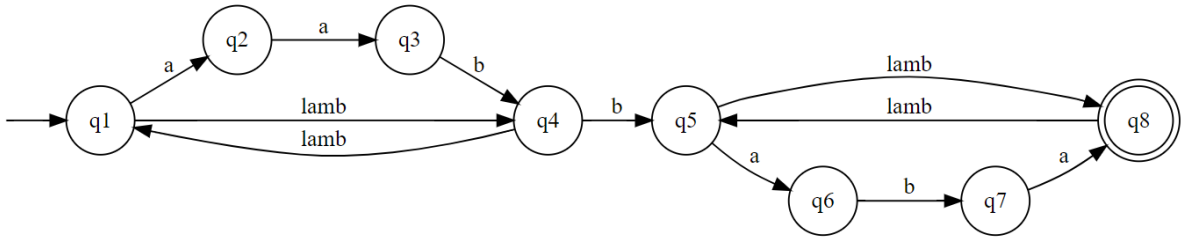


Figure 1: Finite machine to the task 4.1

$$2.L = \{uaav \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, |u|_b \geq |v|_a\}$$

$$\omega = b^n a a a^n, \forall n$$

Возьмем слово: $|\omega| = 2n + 2 \geq n$

$$xy = b^k b^m, \quad k + m \leq n, \quad m \neq 0$$

$$\text{Тогда: } \omega = b^k b^m b^{n-k-m} a a a^n$$

$$\omega = b^k (b^m)^i b^{n-k-m} a a a^n$$

$$i = 0 \Rightarrow \omega_0 = b^{n-m} a a a^n$$

Накачиваем y : $m \neq 0 \Rightarrow \omega_0 \notin L$

Язык не является регулярным

$$3.L = \{a^m w \mid w \in \{a, b\}^*, 1 \leq |w|_b \leq m\}$$

$$\omega = a^n b^n, \forall n$$

Возьмем слово: $|\omega| \geq n$

$$xy = a^k a^m, \quad k + m \leq n, \quad m \neq 0$$

$$\text{Тогда: } \omega = a^k a^m a^{n-k-m} b^n$$

$$\omega = a^k (a^m)^i a^{n-k-m} b^n$$

$$i = 0 \Rightarrow \omega_0 = a^{n-m} b^n$$

Накачиваем y : $m \neq 0 \Rightarrow \omega_0 \notin L$

Язык не является регулярным

$$4.L = \{a^k b^m a^n \mid k = n \vee m > 0\}$$

$$\omega = a^n b a^n, \forall n$$

Возьмем слово: $|\omega| \geq n$

$$xy = a^k a^m, \quad k + m \leq n, \quad m \neq 0$$

$$\text{Тогда: } \omega = a^k a^m a^{n-k-m} b a^n$$

$$\omega = a^k (a^m)^i a^{n-k-m} b a^n$$

$$i = 2 \Rightarrow \omega_2 = a^{n+m} b a^n$$

Накачиваем y : $m \neq 0 \Rightarrow \omega_2 \notin L$

Язык не является регулярным

$$5.L = \{ucv \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, u \neq v^R\}$$

$$\omega = (ab)^n c (ab)^n = s_1 s_2 \dots s_n \dots s_{2n} \dots s_{4n} s_{4n+1}, \forall n$$

Возьмем слово: $|\omega| \geq n$

$$xy = (s_1 s_2 \dots s_k)(s_{k+1} s_{k+2} \dots s_{k+m}), \quad k + m \leq n, \quad m \neq 0$$

$$\text{Тогда: } \omega = (s_1 s_2 \dots s_k)(s_{k+1} s_{k+2} \dots s_{k+m})(s_{k+m+1} s_{k+m+2} \dots s_{2n} c(ab)^n)$$

Накачиваем у:

$$\omega = (s_1 s_2 \dots s_k)(s_{k+1} s_{k+2} \dots s_{k+m})^i (s_{k+m+1} s_{k+m+2} \dots s_{2n} c(ab)^n)$$

$$i = 2 \Rightarrow \omega_2 = (s_1 s_2 \dots s_k)(s_{k+1} s_{k+2} \dots s_{k+m})^2 (s_{k+m+1} s_{k+m+2} \dots s_{2n} c(ab)^n)$$

$$m \neq 0 \Rightarrow \omega_2 \notin L$$

Язык не является регулярным