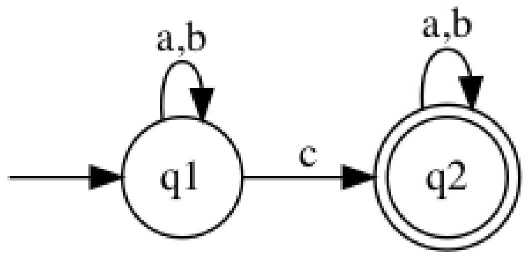
Теоретические модели вычислений ДЗ №1: Регулярные языки и конечные автоматы

А-13б-19 Сергей Тимченко

6 апреля 2022

1 Задание №1. Построить конечный автомат, распознающий язык.

1. $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_c = 1\}$

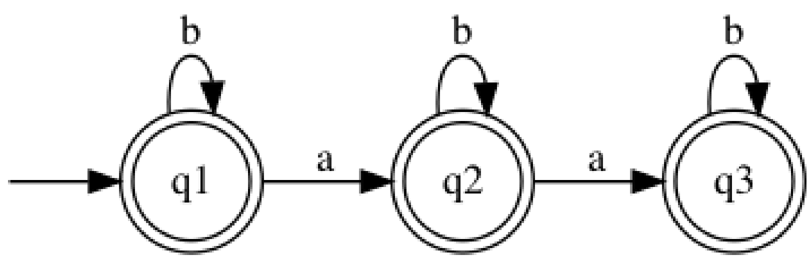


2. $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \leq 2, |w|_b \geq 2\}$

   В данной задаче будем делать через прямое произведение. Для этого построим два отдельных автомата и затем вручную перемножим.

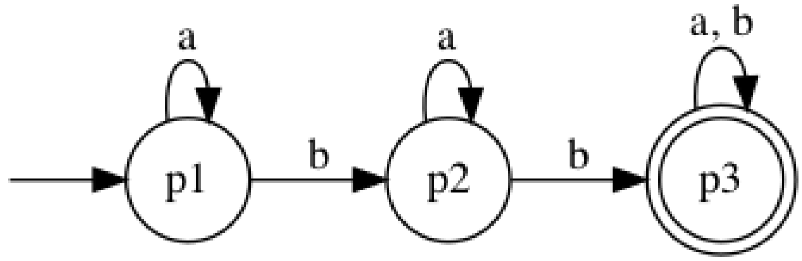
   Первый:

   $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \leq 2\}$



   Второй:

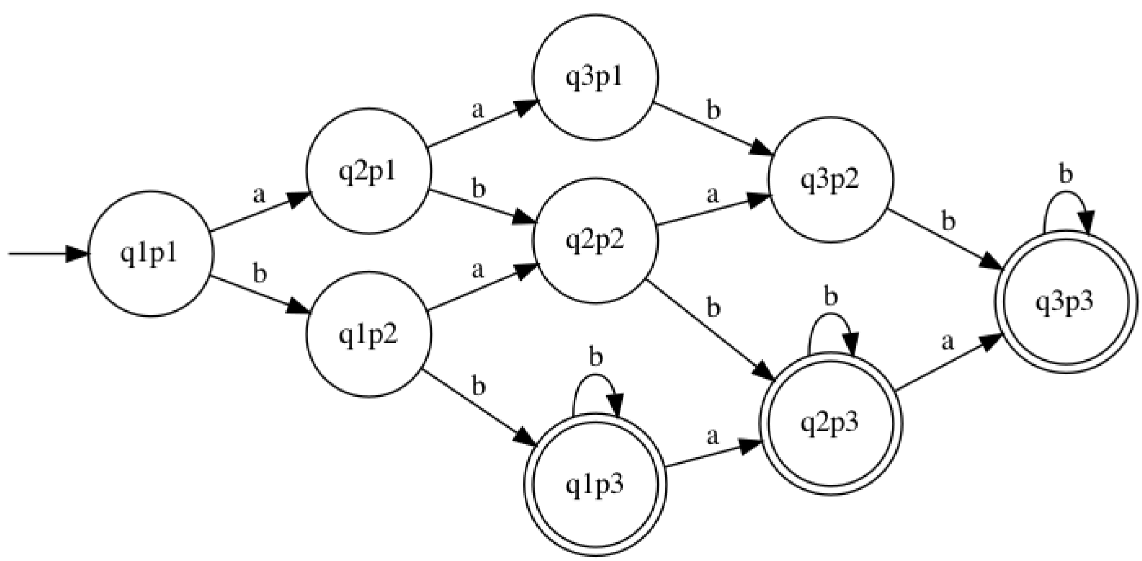
   $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_b \geq 2\}$



$L = L_1 \times L_2$
$\sum = \{a, b\}$
$Q = \{q1p1, q1p2, q1p3, q2p1, q2p2, q2p3, q3p1, q3p2, q3p3\}$
$s = \langle q1, p1 \rangle$
$T = \{q1p3, q2p3, q3p3\}$

	a	b
$\langle q1, p1 \rangle$	$\langle q2, p1 \rangle$	$\langle q1, p2 \rangle$
$\langle q1, p2 \rangle$	$\langle q2, p2 \rangle$	$\langle q1, p3 \rangle$
$\langle q1, p3 \rangle$	$\langle q2, p3 \rangle$	$\langle q1, p3 \rangle$
$\langle q2, p1 \rangle$	$\langle q3, p1 \rangle$	$\langle q2, p2 \rangle$
$\langle q2, p2 \rangle$	$\langle q3, p2 \rangle$	$\langle q2, p3 \rangle$
$\langle q2, p3 \rangle$	$\langle q3, p3 \rangle$	$\langle q2, p3 \rangle$
$\langle q3, p1 \rangle$	-	$\langle q3, p2 \rangle$
$\langle q3, p2 \rangle$	-	$\langle q3, p3 \rangle$
$\langle q3, p3 \rangle$	-	$\langle q3, p3 \rangle$

Построим ДКА:

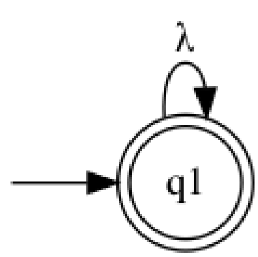


3. $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \neq |w|_b\}$

   Нельзя построить детерминированный конечный автомат. В данном случае для построения автомата необходимо запоминать количество символов a и b. Как мы знаем ДКА не способен на это.

4. $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid ww = www\}$

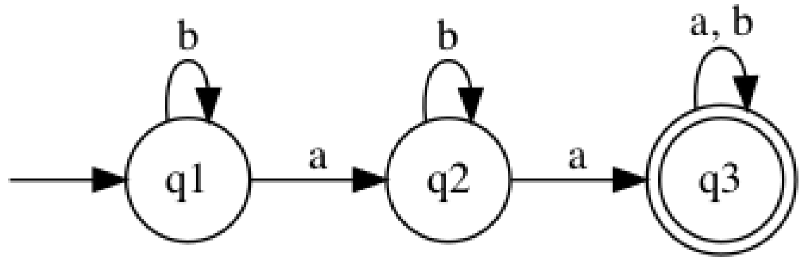
   Язык допускает только распознавание пустого слова:



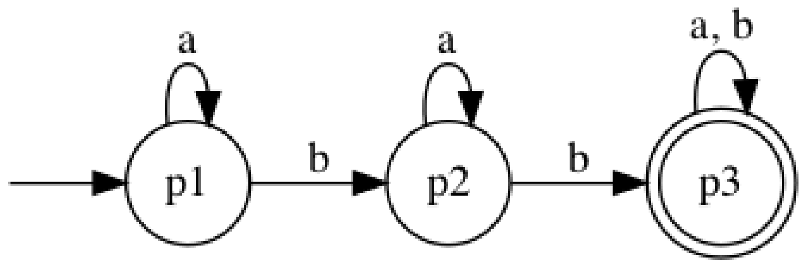
2 Задание №2. Построить конечный автомат, используя прямое произведение.

1. $L_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a \geq 2 \wedge |w|_b \geq 2\}$

   $A = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a \geq 2\}$



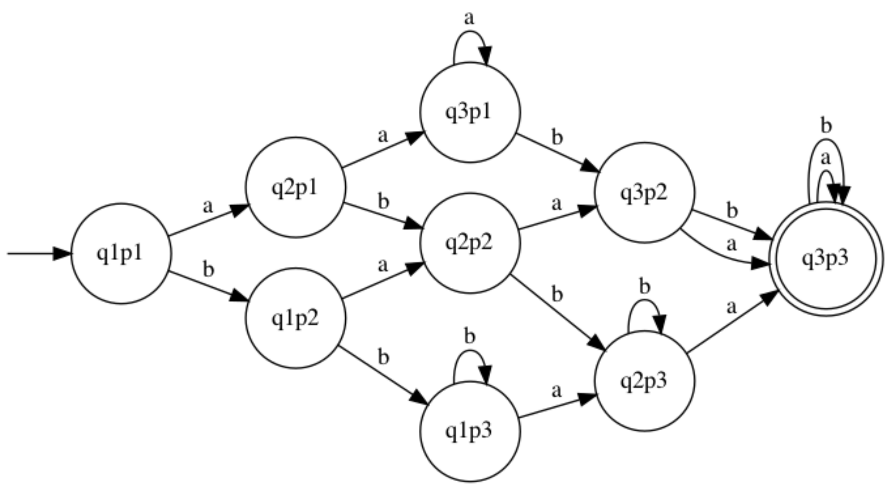
   $B = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_b \geq 2\}$



   $L_1 = A \times B$
   $\sum = \{a, b\}$
   $Q = \{q1p1, q1p2, q1p3, q2p1, q2p2, q2p3, q3p1, q3p2, q3p3\}$
   $s = \langle q1, p1\rangle$
   $T = \{q3p3\}$

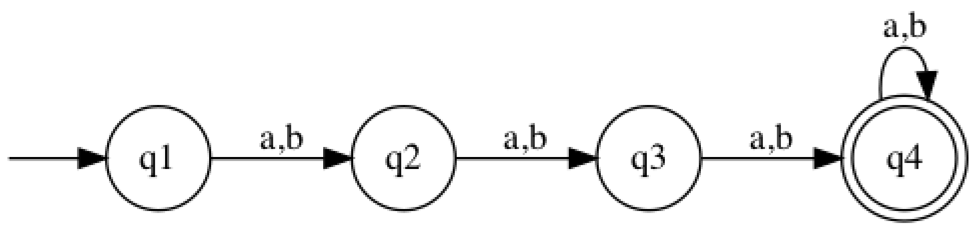
	a	b
$\langle q1, p1\rangle$	$\langle q2, p1\rangle$	$\langle q1, p2\rangle$
$\langle q1, p2\rangle$	$\langle q2, p2\rangle$	$\langle q1, p3\rangle$
$\langle q1, p3\rangle$	$\langle q2, p3\rangle$	$\langle q1, p3\rangle$
$\langle q2, p1\rangle$	$\langle q3, p1\rangle$	$\langle q2, p2\rangle$
$\langle q2, p2\rangle$	$\langle q3, p2\rangle$	$\langle q2, p3\rangle$
$\langle q2, p3\rangle$	$\langle q3, p3\rangle$	$\langle q2, p3\rangle$
$\langle q3, p1\rangle$	$\langle q3, p1\rangle$	$\langle q3, p2\rangle$
$\langle q3, p2\rangle$	$\langle q3, p2\rangle$	$\langle q3, p3\rangle$
$\langle q3, p3\rangle$	$\langle q3, p3\rangle$	$\langle q3, p3\rangle$

   Построим ДКА:

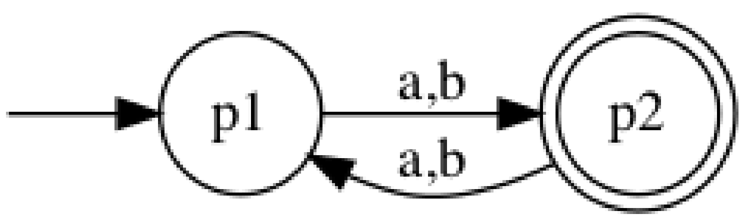


2. $L_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \geq 3 \wedge |w| \text{ нечетное}\}$

   $A = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \geq 3\}$



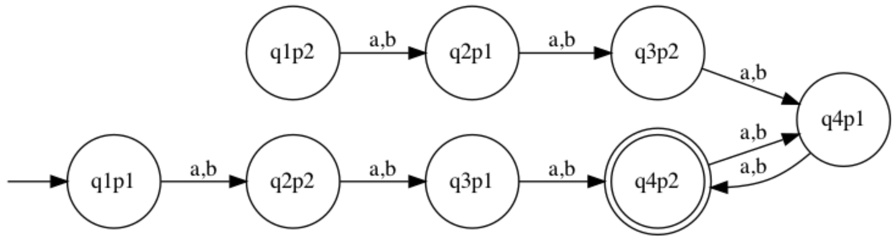
   $B = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ нечетно}\}$



   $L_2 = A \times B$
   $\sum = \{a, b\}$
   $Q = \{q1p1, q1p2, q2p1, q2p2, q3p1, q3p2, q4p1, q4p2\}$
   $s = \langle q1, p1\rangle$
   $T = \{q4p2\}$

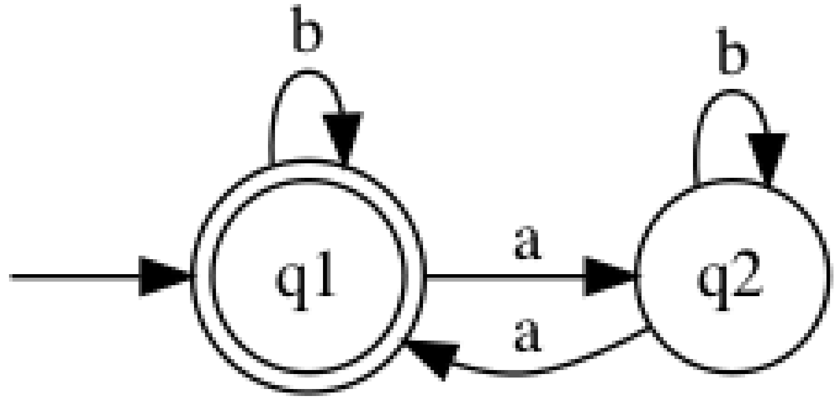
	a	b
$\langle q1, p1\rangle$	$\langle q2, p2\rangle$	$\langle q2, p2\rangle$
$\langle q1, p2\rangle$	$\langle q2, p1\rangle$	$\langle q2, p1\rangle$
$\langle q2, p1\rangle$	$\langle q3, p2\rangle$	$\langle q3, p2\rangle$
$\langle q2, p2\rangle$	$\langle q3, p1\rangle$	$\langle q3, p1\rangle$
$\langle q3, p1\rangle$	$\langle q4, p2\rangle$	$\langle q4, p2\rangle$
$\langle q3, p2\rangle$	$\langle q4, p1\rangle$	$\langle q4, p1\rangle$
$\langle q4, p1\rangle$	$\langle q4, p2\rangle$	$\langle q4, p2\rangle$
$\langle q4, p2\rangle$	$\langle q4, p1\rangle$	$\langle q4, p1\rangle$

   Построим ДКА:

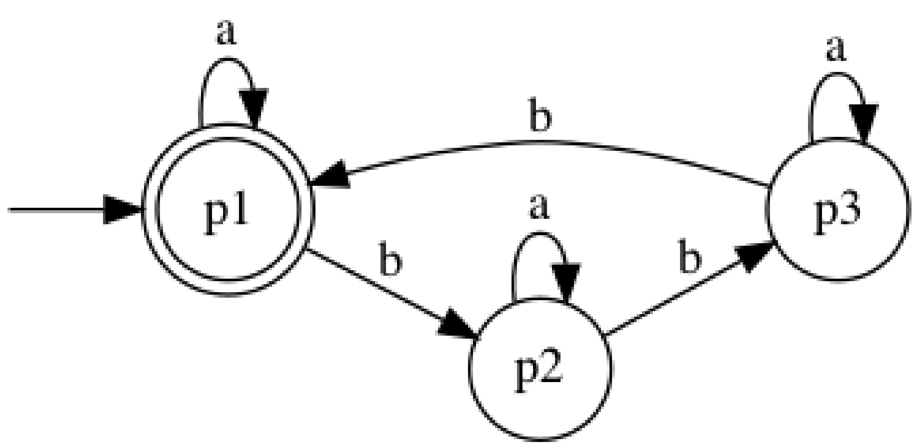


3. $L_3 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a \text{ четно} \wedge |w|_b \text{ кратно трем}\}$

   $A = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a \text{ четно}\}$



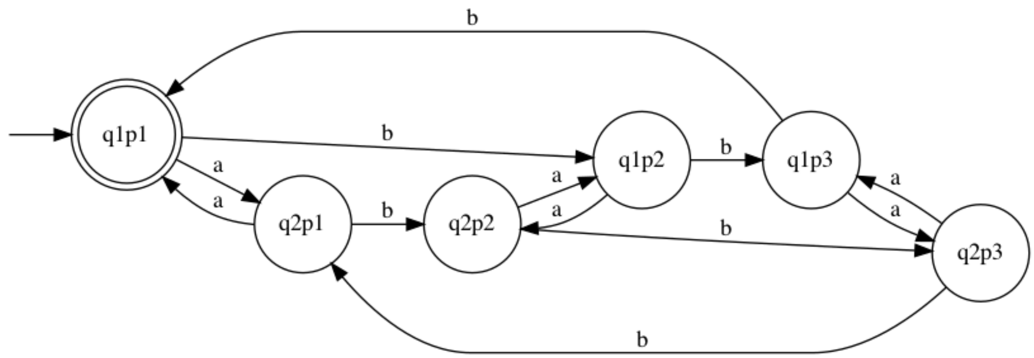
   $B = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_b \text{ кратно трем}\}$



   $L_3 = A \times B$
   $\sum = \{a, b\}$
   $Q = \{q1p1, q1p2, q1p3, q2p1, q2p2, q2p3\}$
   $s = \langle q1, p1 \rangle$
   $T = \{q1p1\}$

	a	b
$\langle q1, p1 \rangle$	$\langle q2, p1 \rangle$	$\langle q1, p2 \rangle$
$\langle q1, p2 \rangle$	$\langle q2, p2 \rangle$	$\langle q1, p3 \rangle$
$\langle q1, p3 \rangle$	$\langle q2, p3 \rangle$	$\langle q1, p1 \rangle$
$\langle q2, p1 \rangle$	$\langle q1, p1 \rangle$	$\langle q2, p2 \rangle$
$\langle q2, p2 \rangle$	$\langle q1, p2 \rangle$	$\langle q2, p3 \rangle$
$\langle q2, p3 \rangle$	$\langle q1, p3 \rangle$	$\langle q2, p1 \rangle$

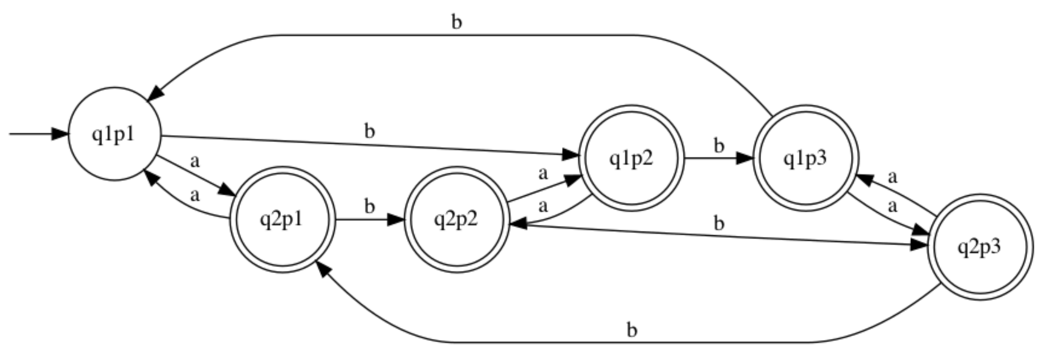
Построим ДКА:



4. $L_4 = \overline{L_3}$

Для построения данного автомата воспользуемся уже построенным. Задача сводится к тому, чтобы определить новые конечные вершины.

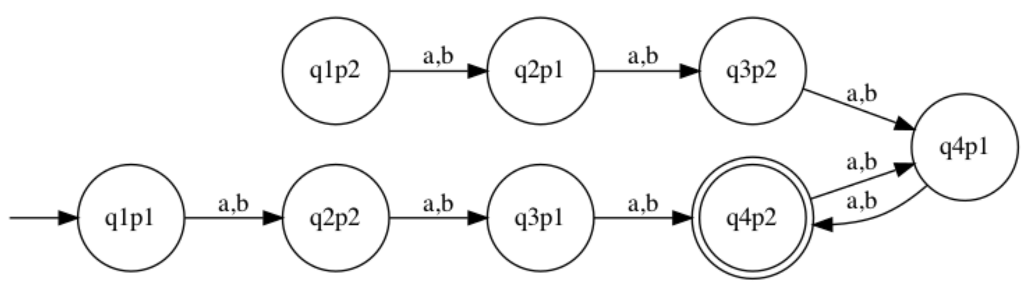
$T = \{q1p2, q1p3, q2p1, q2p2, q2p3\}$



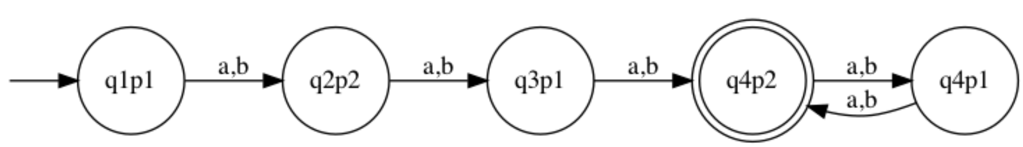
5. $L_5 = L_2 \setminus L_3$
Знаем, что

$$L_5 = L_2 \setminus L_3 = L_2 \times \overline{L}_3$$

Для начала разберемся с L_2:

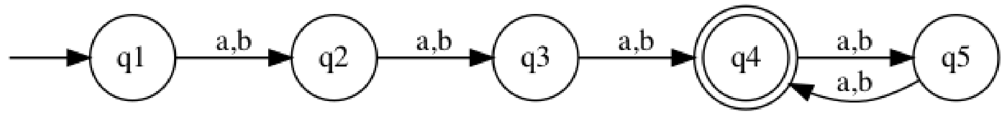


Заметим, что $q1p2, q2p1, q3p2$ не будут достигнуты никогда. Поэтому от них можно избавиться в ДКА:

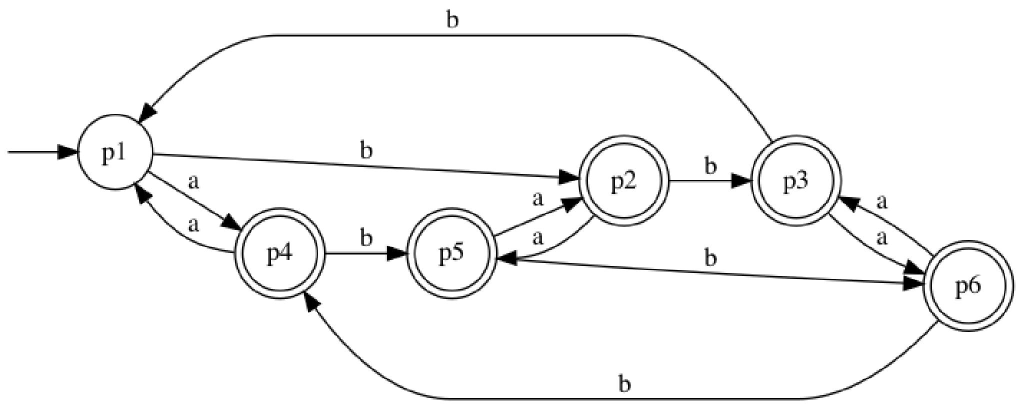


Для удобства переименуем вершины обоих автоматов:

L_2 :



$\overline{L}_3$:



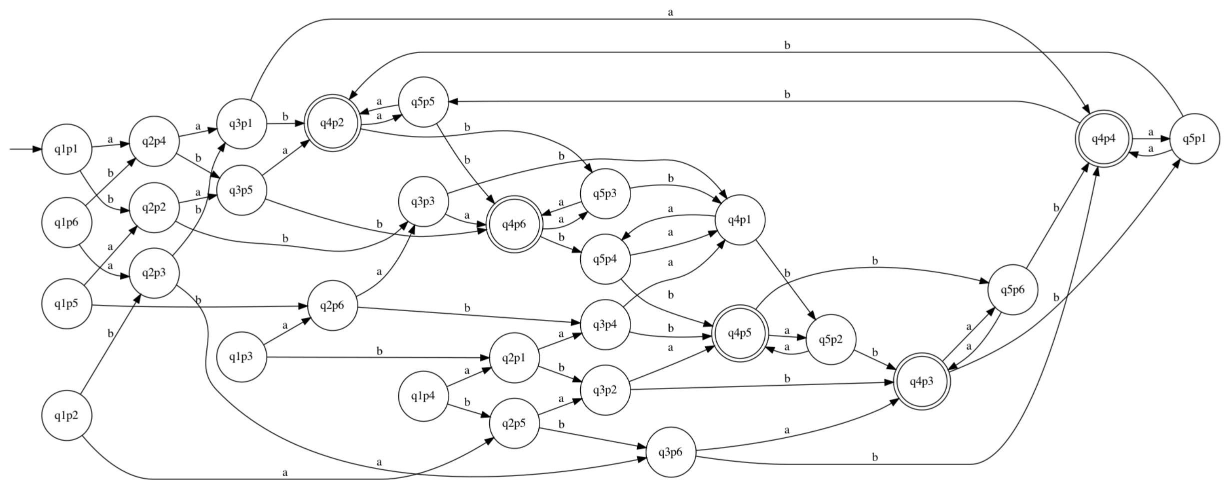
Разбираемся с произведением: $L_5 = L_2 \times \overline{L}_3$
$\sum = \{a, b\}$
$Q = \{q1p1, q1p2, q1p3, q1p4, q1p5, q1p6, q2p1, q2p2, q2p3, q2p4, q2p5, q2p6, q3p1, q3p2, q3p3, q3p4, q3p5, q3p6, q4p1, q4p2, q4p3, q4p4, q4p5, q4p6, q5p1, q5p2, q5p3, q5p4, q5p5, q5p6, \}$
$s = \langle q1, p1\rangle$
$T = \{q4p2, q4p3, q4p4, q4p5, q4p6\}$

Для удобства сделаем три таблицы:

	a	b
$\langle q1, p1\rangle$	$\langle q2, p4\rangle$	$\langle q2, p2\rangle$
$\langle q1, p2\rangle$	$\langle q2, p5\rangle$	$\langle q2, p3\rangle$
$\langle q1, p3\rangle$	$\langle q2, p6\rangle$	$\langle q2, p1\rangle$
$\langle q1, p4\rangle$	$\langle q2, p1\rangle$	$\langle q2, p5\rangle$
$\langle q1, p5\rangle$	$\langle q2, p2\rangle$	$\langle q2, p6\rangle$
$\langle q1, p6\rangle$	$\langle q2, p3\rangle$	$\langle q2, p5\rangle$
$\langle q2, p1\rangle$	$\langle q3, p4\rangle$	$\langle q3, p2\rangle$
$\langle q2, p2\rangle$	$\langle q3, p5\rangle$	$\langle q3, p3\rangle$
$\langle q2, p3\rangle$	$\langle q3, p6\rangle$	$\langle q3, p1\rangle$
$\langle q2, p4\rangle$	$\langle q3, p1\rangle$	$\langle q3, p5\rangle$
$\langle q2, p5\rangle$	$\langle q3, p2\rangle$	$\langle q3, p6\rangle$
$\langle q2, p6\rangle$	$\langle q3, p3\rangle$	$\langle q3, p5\rangle$

	a	b
$\langle q3, p1\rangle$	$\langle q4, p4\rangle$	$\langle q4, p2\rangle$
$\langle q3, p2\rangle$	$\langle q4, p5\rangle$	$\langle q4, p3\rangle$
$\langle q3, p3\rangle$	$\langle q4, p6\rangle$	$\langle q4, p1\rangle$
$\langle q3, p4\rangle$	$\langle q4, p1\rangle$	$\langle q4, p5\rangle$
$\langle q3, p5\rangle$	$\langle q4, p2\rangle$	$\langle q4, p6\rangle$
$\langle q3, p6\rangle$	$\langle q4, p3\rangle$	$\langle q4, p5\rangle$
$\langle q4, p1\rangle$	$\langle q5, p4\rangle$	$\langle q5, p2\rangle$
$\langle q4, p2\rangle$	$\langle q5, p5\rangle$	$\langle q5, p3\rangle$
$\langle q4, p3\rangle$	$\langle q5, p6\rangle$	$\langle q5, p1\rangle$
$\langle q4, p4\rangle$	$\langle q5, p1\rangle$	$\langle q5, p5\rangle$
$\langle q4, p5\rangle$	$\langle q5, p2\rangle$	$\langle q5, p6\rangle$
$\langle q4, p6\rangle$	$\langle q5, p3\rangle$	$\langle q5, p5\rangle$

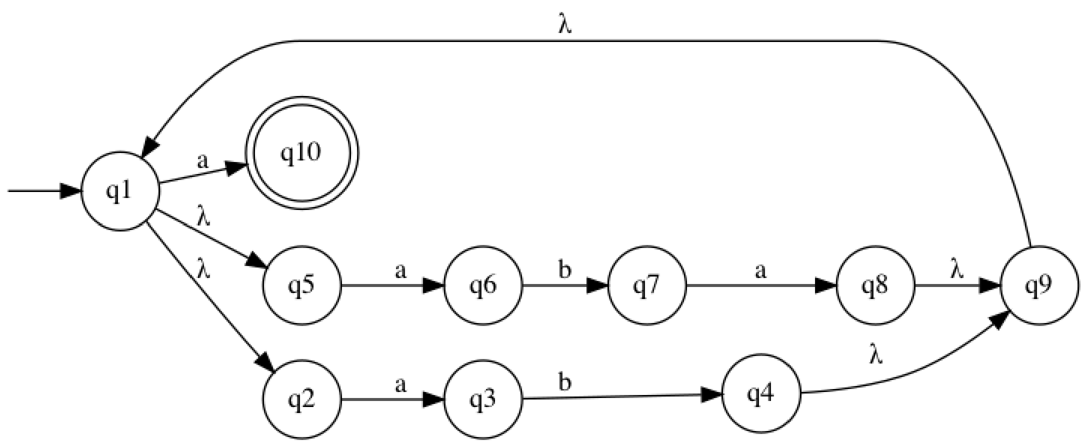
	a	b
$\langle q5, p1\rangle$	$\langle q4, p4\rangle$	$\langle q4, p2\rangle$
$\langle q5, p2\rangle$	$\langle q4, p5\rangle$	$\langle q4, p3\rangle$
$\langle q5, p3\rangle$	$\langle q4, p6\rangle$	$\langle q4, p1\rangle$
$\langle q5, p4\rangle$	$\langle q4, p1\rangle$	$\langle q4, p5\rangle$
$\langle q5, p5\rangle$	$\langle q4, p2\rangle$	$\langle q4, p6\rangle$
$\langle q5, p6\rangle$	$\langle q4, p3\rangle$	$\langle q4, p5\rangle$



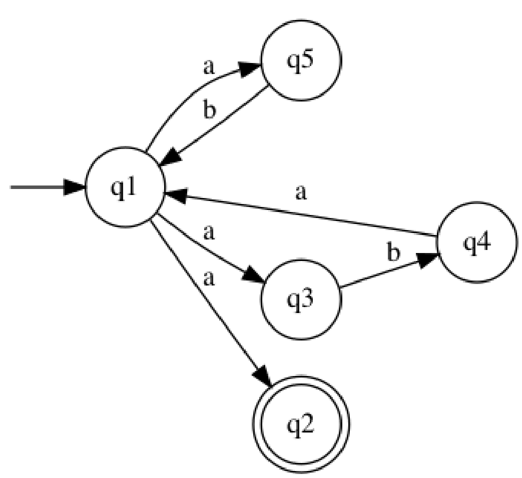
3 Задание №3. Построить минимальный ДКА по регулярному выражению.

1. $(ab + aba)^*a$

   Построим НКА:

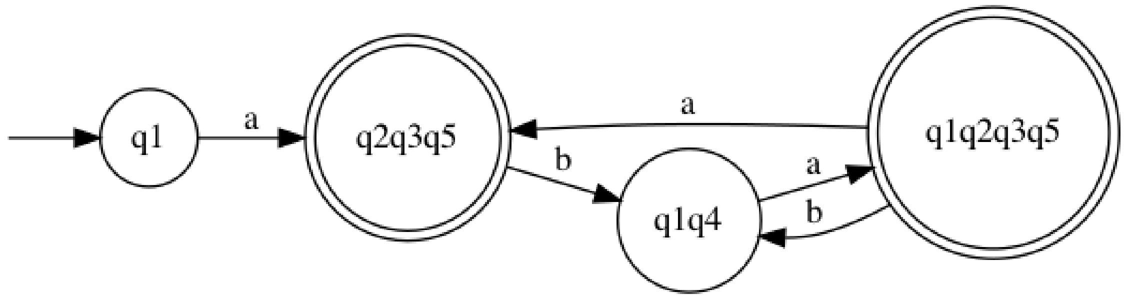


Избавимся от λ-переходов и применим алгоритм Томпсона:



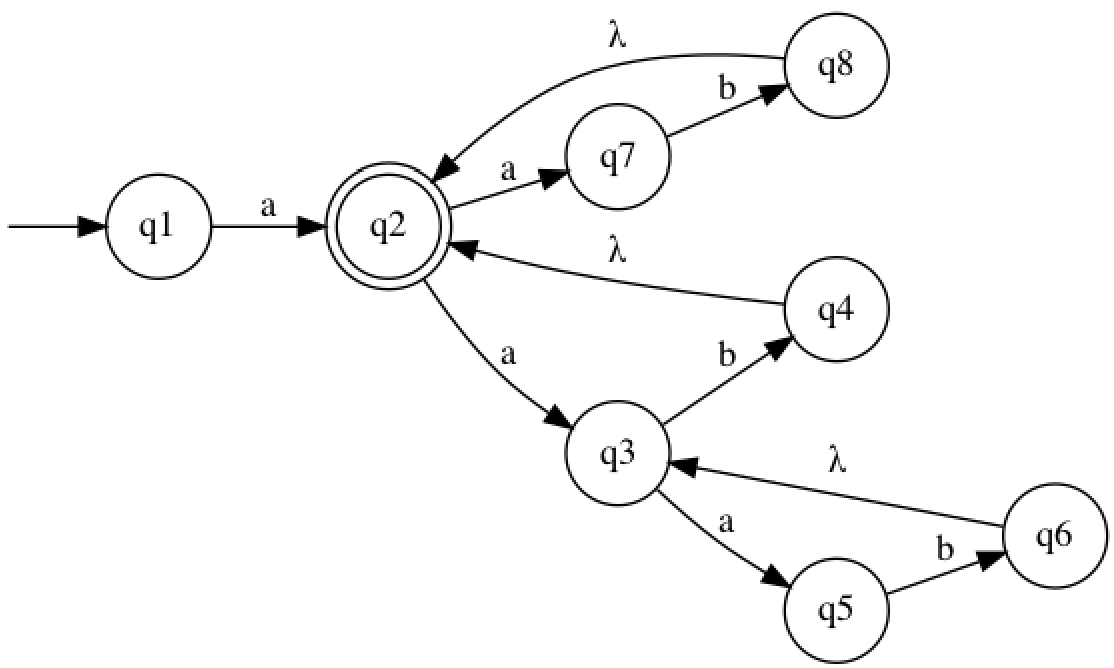
Q	a	b
q1	q2 q3 q5	-
q2 q3 q5	-	q1 q4
q1 q4	q1 q2 q3 q5	-
q1 q2 q3 q5	q2 q3 q5	q1 q4

По данной таблице видно, что при построении ДКА он будет минимальным. Построим ДКА:

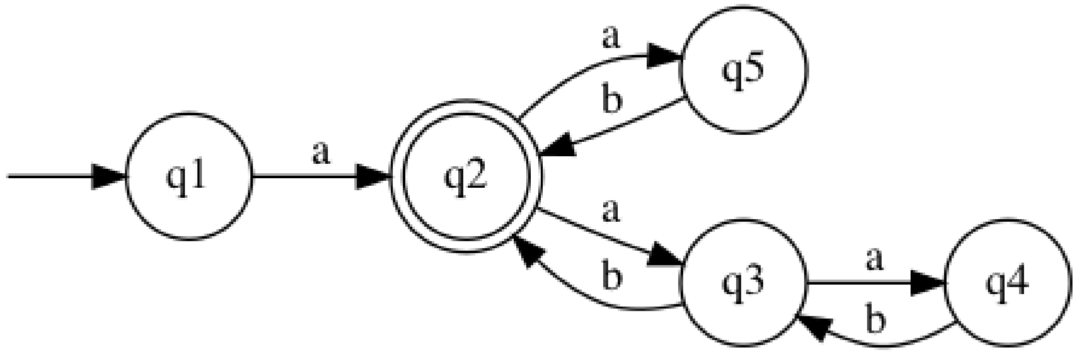


2. $a(a(ab)^*b)^*(ab)^*$

   Построим НКА:

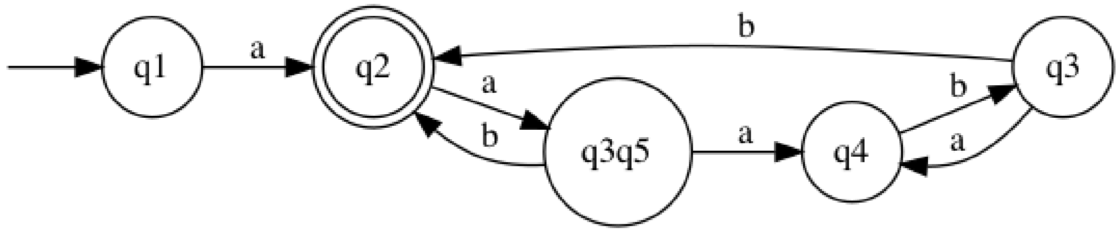


Избавимся от λ-переходов и применением алгоритм Томпсона:

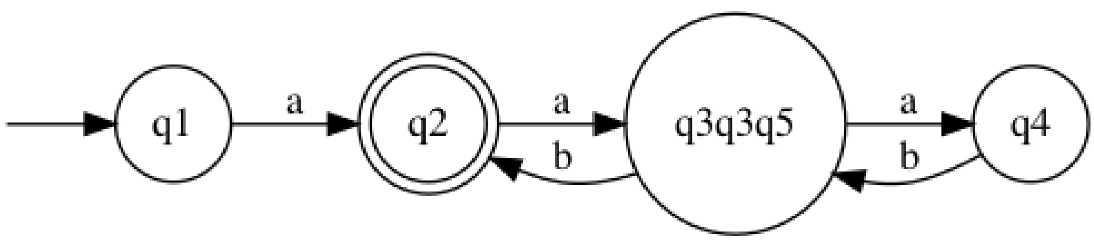


Q	a	b
q1	q2	-
q2	q3 q5	-
q3 q5	q4	q2
q4	-	q3
q3	q4	q2

Построим ДКА:

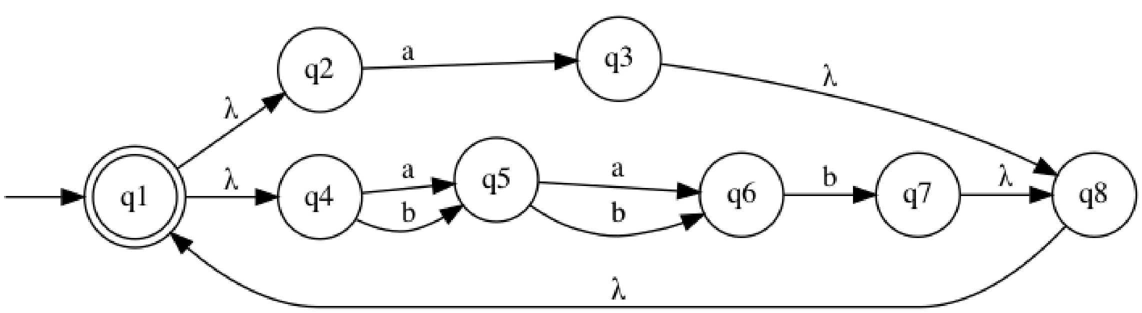


Однако это не минимальный ДКА. По таблице в алгоритме Томпсона 3и5 строки совпадают, следовательно вершины можно объединить с сохранением переходов. Получим минимальный ДКА:

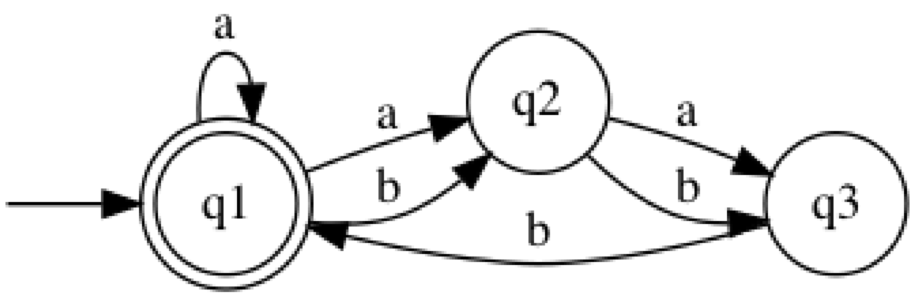


3. $(a + (a + b)(a + b)b)^*$

Построим НКА:

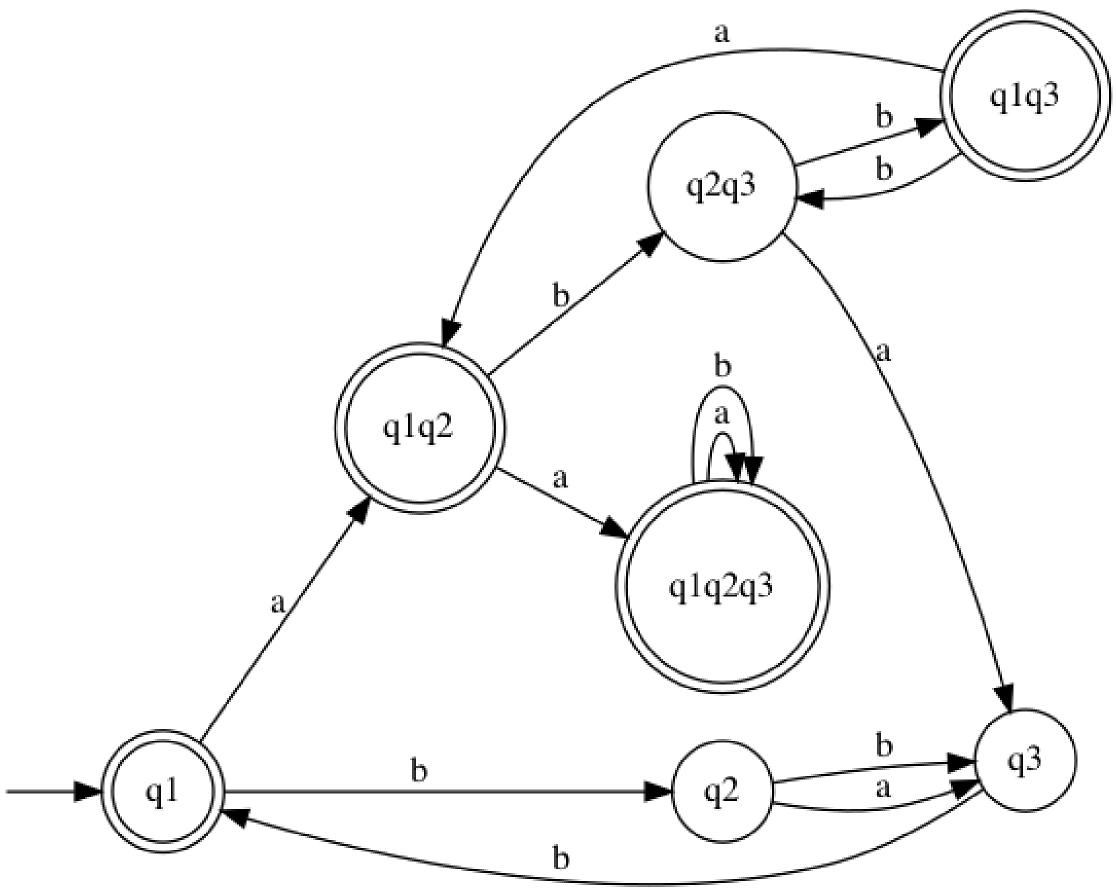


Избавимся от λ-переходов и применением алгоритм Томпсона:



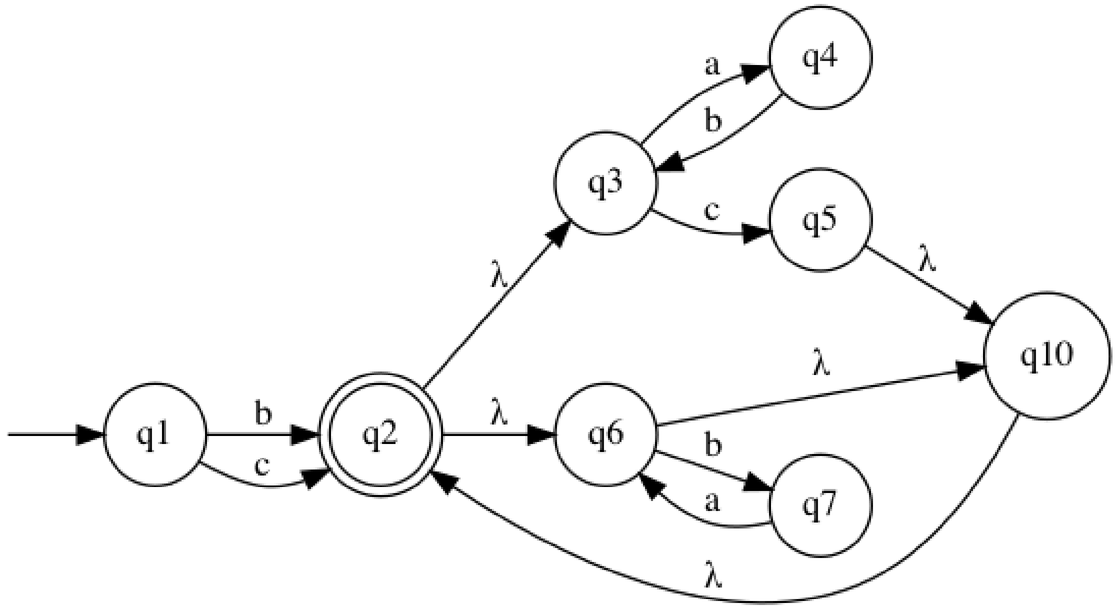
Q	a	b
q1	q1 q2	q2
q1 q2	q1 q2 q3	q2 q3
q2	q3	q3
q1 q2 q3	q1 q2 q3	q1 q2 q3
q3	-	q1
q2 q3	q3	q1 q3
q1 q3	q1 q2	q2 q3

По данной таблице видно, что при построении ДКА он будет минимальным. Построим ДКА:



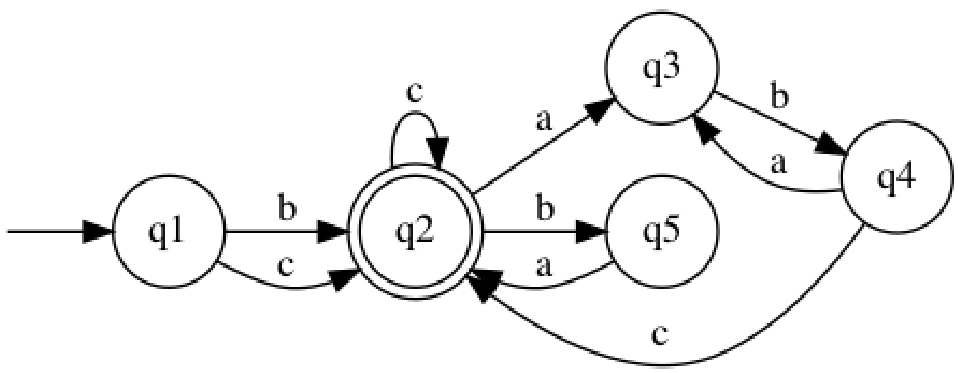
4. $(b+c)((ab)^*c+(ba)^*)^*$

Построим НКА:



Избавимся от λ-переходов и применением алгоритм Томпсона.

Замечание. В процессе избавления от λ-переходов получил ДКА:

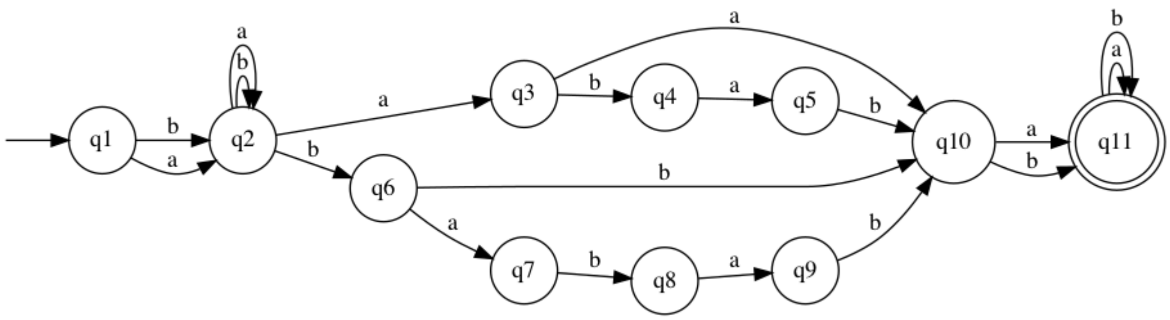


Убедимся в том, что он минимальный:

Q	a	b	c
q1	-	q2	q2
q2	q3	q5	q2
q3	-	q4	-
q4	q3	-	q2
q5	q2	-	-

5. $(a+b)^+(aa+bb+abab+baba)(a+b)^+$

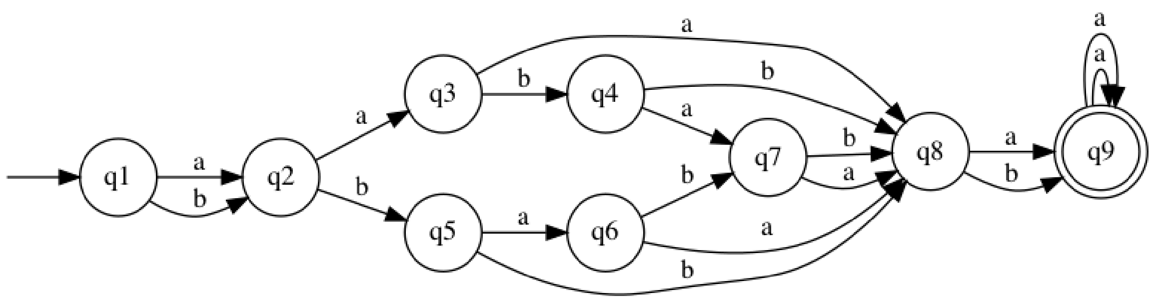
Построим НКА:



Применением алгоритм Томпсона:

Q	a	b
q1	q2	q2
q2	q2 q3	q2 q6
q2 q3	q2 q3 q10	q2 q6 q4

На этом моменте я понял, что эта таблица будет нереально огромной и из-за этого повыситься вероятность допущения ошибки. Поэтому начал строить у себя постепенно сразу ДКА и исправлять. Построим ДКА:

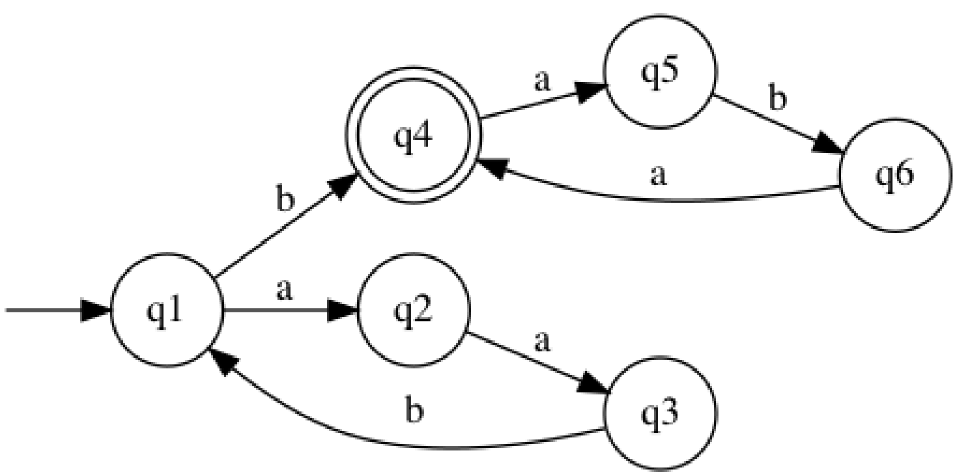


c

4 Задание №4. Определить является ли язык регулярным или нет.

1. $L = \{(aab)^n b(aba)^m \mid n \geq 0, m \geq 0\}$

Данный язык является регулярным. Построим ДКА:



2. $L = \{uaav \mid u \in \{a,b\}^*, v \in \{a,b\}^*, |u|_b \geq |u|_a\}$

   Зафиксируем $\forall n > 0$. Возьмем слово $w = b^n aaa^n$. Будем проверять его по лемме:

   $$|w| = n + 2 + n \geq n, \quad w = xyz$$

   Пусть $p \leq n$ и $p > 0$. Тогда составим разбиение:

   $$x = b^{n-p}$$
   $$y = b^p$$
   $$z = aaa^n$$
   $$|xy| = p + n - p \leq n$$
   $$|y| = p \geq 1$$

   По лемме: $\forall k \geq 0$, $xy^k z \in L$. Возьмем $k = 0$. Тогда:

   $$xy^0 z = b^{n-p} b^0 aaa^n = b^{n-p} aaa^n$$

   В силу того, что $p > 0$, следует, что $|u|_b < |u|_a$, что противоречит языку. Лемма не выполнилась при $k = 0$, а значит L - не регулярный язык.

3. $L = \{a^m w \mid w \in \{a,b\}^*, 1 \leq |w|_b \leq m\}$

   Зафиксируем $\forall n > 0$. Возьмем слово $w = a^n b^n$. Будем проверять его по лемме:

   $$|w| = n + n \geq n, \quad w = xyz$$

   Пусть $p < n$ и $p > 0$. Тогда составим разбиение:

   $$x = a^{n-p}$$
   $$y = a^p$$
   $$z = b^n$$
   $$|xy| = p + n - p \leq n$$
   $$|y| = p \geq 1$$

   По лемме: $\forall k \geq 0$, $xy^k z \in L$. Возьмем $k = 0$. Тогда:

   $$xy^0 z = a^{n-p} a^0 b^n = a^{n-p} b^n$$

   В силу того, что $p > 0$, следует, что $n - p < n$. Это означает, что лемма не выполнилась при $k = 0$ (по условию $1 \leq |w|_b \leq m$, а вышло $m = n - p$ и $|w|_b = n$), а значит L - не регулярный язык.

4. $L = \{a^k b^m a^n \mid k = n \vee m > 0\}$

   Зафиксируем $\forall n > 0$. Возьмем слово $w = a^n b a^n$. Будем проверять его по лемме:

   $$|w| = n + 1 + n \geq n, \quad w = xyz$$

   Пусть $p \leq n$ и $p > 0$. Тогда составим разбиение:

   $$x = a^{n-p}$$
   $$y = a^p$$
   $$z = ba^n$$
   $$|xy| = n - p + p \leq n$$
   $$|y| = p \geq 1$$

   По лемме: $\forall j \geq 0$, $xy^j z \in L$. Будем накачивать по j:

   $$xy^j z = a^{n-p} a^{pj} ba^n = a^{n-p+pj} ba^n = a^{n+p(j-1)} ba^n$$

   Обратимся к языку. Изначальное условие $k = n \vee m > 0$. На нашей получившейся накачке $m = 1$, n остается $n > 0$. Тогда $k = n \vee 1 > 0$. А мы получили, что $k = n + p(j-1)$. При $j > 1$ получаем противоречие, а значит лемма не выполняется $\rightarrow$ язык не регулярный.

5. $L = \{ucv \mid u \in \{a,b\}^*, v \in \{a,b\}^*, u \neq v^R\}$

Докажем не регулярность языка через $\overline{L}$.

$\overline{L} = \{ucv \mid u \in \{a,b\}^*, v \in \{a,b\}^*, u = v^R\}$

Зафиксируем $\forall n > 0$. Возьмем слово $w = a^n c a^n$. Будем проверять его по лемме:

$$|w| = n + 1 + n \geq n, \quad w = xyz$$

Пусть $p \leq n$ и $p > 0$. Тогда составим разбиение:

$$x = a^{n-p}$$

$$y = a^p$$

$$z = ca^n$$

$$|xy| = n - p + p \leq n$$

$$|y| = p \geq 1$$

По лемме: $\forall k \geq 0$, $xy^kz \in L$. Будем накачивать по k:

$$xy^kz = a^{n-p}a^{pk}ca^n = a^{n-p+pk}ca^n = a^{n+p(k-1)}ca^n$$

Обратимся к языку. Изначальное условие обратного языка $u = v^R$. На нашей получившейся накачке $u = a^{n+p(k-1)}$, $v^R = a^n$. Тогда при $k > 1$ условие $u = v^R$ не выполняется. Получено противоречие, а значит лемма не выполняется $\rightarrow$ язык $\overline{L}$ не регулярный $\rightarrow$ язык L не регулярный.