МИНОБРНАУКИ РОССИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Институт	ИВТИ
Кафедра	УИТ

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ 1.

Дисциплина: Вычислительные Методы

Вариант 16

Студент гр. А-02-22		Синявский С.Ю
Преподаватель	(подпись)	Пепа Р.Ю.

Москва

2024

Задание 1

16.

$$Z = \frac{1}{\sqrt{4{,}00}} - 0{,}11^2 - 3{,}6$$

$$Z(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_1} - x_2^2 - x_3$$

$$\begin{cases} x_1^* = \sqrt{4{,}00} & \Delta x_1^* \le 0{,}01 \\ x_2^* = 0{,}11^2 & \Delta x_2^* \le 2 \cdot 0{,}11 \cdot 0{,}005 \\ x_3^* = 3{,}6 & \Delta x_3^* \le 0{,}05 \end{cases}$$

$$\Delta Z^* = |f'_{x_1}| \cdot \Delta x_1^* + |f'_{x_2}| \, \Delta x_2^* + |f'_{x_3}| \, \Delta x_3^*$$

абс. погр. $\Delta Z^* \le \left| -\frac{1}{(\sqrt{4{,}00})^2} \right| \cdot 0{,}01 + \left| -2 \cdot 0{,}11 \right| \cdot 2 \cdot 0{,}11 \cdot 0{,}005 + |1| \cdot 0{,}05 = 0{,}052742$

относ погр. $\delta_{Z^*} = \frac{\Delta Z^*}{Z} = \frac{0{,}052742}{+3{,}1121} = 0{,}0169474$

$Z = -\underbrace{3{,}1}_{\text{верные}}121 \pm 0{,}052742$

Задание 2.16

$$f(x) = \frac{1}{x-2} - \sqrt{x} + 1$$

x	0	1		
$f(x)$	0,5	−1		

Отрезок локализации $[a_0, b_0] = [0, 1]$

1 $x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{1}{2}$

$\cancel{f\left(\tfrac{1}{2}\right) = -0{,}374 < 0}$ $f(a_0) = \frac{1}{2} > 0$

$\cancel{a_1 = \tfrac{1}{2},\ b_1 = 1}$ $f(x_0) = -0{,}37 < 0$

$\cancel{\frac{a_1 + b_1}{2} = 0{,}75}$

a	b	$f(x_i)$
0	0,5	−0,37
0	0,25	−0,071
0,125	0,25	0,113
0,1875	0,25	0,015
0,1875	0,21875	−0,0291
0,1875	0,203125	−0,00722

$\to b - a = 0{,}01562 < 2\varepsilon$

Ответ: $0{,}6094 \pm 0{,}01$

$x_6 = 0{,}6094$

Задача 3

$f = \frac{1}{x-2} - \sqrt{x} + 1$, $\mathcal{E} = 0{,}0001$

$\varphi(x) = x - \alpha f(x)$, $\alpha = \frac{2}{M+m}$

отрезок : $[0{,}1875;\ 0{,}25]$

$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $m = f'(0{,}1875) = -1{,}4591$

$M = f'(\cancel{0{,}1875}\ 0{,}25) = -1{,}3265$

$\alpha = -0{,}7179$

$q = -0{,}0476$

$x_0 = 0{,}21875$

$x_1 = \varphi(x_0) = 0{,}21875 + 0{,}7179\left(-\frac{1}{(0{,}21875-2)^2} - \frac{1}{2\sqrt{0{,}21875}}\right) = -0{,}122489$

$+0{,}3412 \leq \frac{1-q}{q}\mathcal{E} = +0{,}0022$

$x_2 = \varphi(x_1) = 0{,}743771$

$x_3 = 0{,}705043$

$x_4 = 0{,}704424$

$|x_4 - x_3| \leq +0{,}0022$

Ответ: $0{,}704424 \pm 0{,}0001$

Задача 4

$f = x - 2e^{-x} - 1$ $a = 1,\ b = 3$, $e = 10^{-8}$

$x_0 = 2$

$x_1 = 2 - \frac{2 - 2e^{-2} - 1}{1 + 2e^{-2}} = 1{,}42603$

$x_2 = 1{,}46284$

$x_3 = 1{,}463055506$ $x_4 - x_3 = 7 \cdot 10^{-9} \leq 10^{-8}$

$x_4 = 1{,}463055513$ Ответ: $1{,}463055513 \pm 0{,}00000001$

Задача 5

$$\begin{pmatrix} -4 & 7 & -10 & -2 \\ -8 & 8 & -22 & 1 \\ -32 & 44 & -82 & -6 \\ -32 & 116 & -64 & -74 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 23 \\ 47 \\ 186 \\ 182 \end{pmatrix}$$

$$\mu_{2,1} = \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} = \frac{-8}{-4} = 2 \qquad \mu_{3,1} = \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} = \frac{-32}{-4} = 8 \qquad \mu_{4,1} = \frac{a_{4,1}}{a_{1,1}} = 8$$

$$\begin{aligned} -4x_1 + 7x_2 - 10x_3 - 2x_4 &= 23 \\ 16x_2 - 2x_3 - 4x_4 &= 1 \\ -12x_2 - 2x_3 + 10x_4 &= 2 \\ 60x_2 + 16x_3 - 58x_4 &= -2 \end{aligned} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \begin{aligned} -4x_1 + 7x_2 - 10x_3 - 2x_4 &= 23 \\ 0 - 6x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 1 \\ 0 + 0 + 2x_3 + 0 &= 0 \\ 0 + 0 + 0 - 8x_4 &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_4 = -1 \\ x_3 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_1 = -7 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Задача 8.16

$$\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 = -73 \\ -6x_1 + 20x_2 - 5x_3 = 106 \\ -6x_2 + 22x_3 + 5x_4 = 72 \\ -2x_3 + 10x_4 + 4x_5 = -76 \\ -5x_4 + 10x_5 = 20 \end{cases}$$

$\alpha_1 = \frac{5}{8}$, $\beta_1 = -9\frac{1}{8}$, $\gamma_2 = \frac{65}{4}$

$\alpha_2 = \frac{4}{13}$, $\beta_2 = \frac{643}{65}$, $\gamma_3 = \frac{262}{13}$

$\alpha_3 = -\frac{65}{262}$, $\beta_3 = \frac{4269}{655}$, $\gamma_4 = \frac{1245}{131}$

$\alpha_4 = -\frac{524}{1245}$, $\beta_4 = -\frac{41242}{6225}$, $\beta_5 = -\frac{8171}{7535}$

$$\begin{cases} x_5 = \beta_5 = -1{,}084406 \\ x_4 = -6{,}168812 \\ x_3 = 8{,}047987 \\ x_2 = 12{,}368611 \\ x_1 = -1{,}394618 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -1,.. \\ 6,.. \\ 8,.. \\ 12,.. \\ -1,.. \end{pmatrix}$

Задание 9.16

$$\begin{pmatrix} 2,847 & -0,447 & 0 \\ 0,302 & -1,036 & 1,63 \\ 1,311 & 2,661 & -2,226 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1,67 \\ 1,206 \\ -2,9 \end{pmatrix}$$

для матрицы A:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1} |a_{i,j}| = 4,46$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| = 6,198$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T \cdot A)} = 4,115$$

$$\|A\|_F = 5,087 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |A_{i,j}|^2} = 5,087$$

для вектора в:

абс. погр.: $5 \cdot 10^{-3}$, $5 \cdot 10^{-4}$, $5 \cdot 10^{-2}$ соотв.

1) в норме $\|\cdot\|_1$: $\Delta(b) = 5 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-2} = 555 \cdot 10^{-4} \approx 5,6 \cdot 10^{-2}$

2) в норме $\|\cdot\|_2$: $\Delta(b) = 0,05$

3) в норме $\|\cdot\|_\infty$: $\Delta(b) = 5 \cdot 10^{-2}$

$\|b_1\|_1 = 5,776$

$\|b\|_2 = 3,557$

$\|b\|_\infty = 2,9$

тогда

$$\delta_1 b = \frac{5,6 \cdot 10^{-2}}{5,776} = 9,7 \cdot 10^{-3}, \quad \delta_2 b = \frac{0,05}{3,557} = 0,014, \quad \delta_3 b = \frac{5 \cdot 10^{-2}}{2,9} \approx 0,017$$

Задача 11.16

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 104x_4 = 644 \\ 136x_1 \cancel{+7}x_2 + 9x_3 - 3x_4 = -16 \\ 7x_1 + 7x_2 + 155x_3 - 8x_4 = -1034 \\ -5x_1 + 164x_2 + 9x_3 - 9x_4 = -1420 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 136x_1 - 7x_2 + 9x_3 - 3x_4 = -16 \\ -5x_1 + 164x_2 + 9x_3 - 9x_4 = -1420 \\ 7x_1 + 7x_2 + 155x_3 - 8x_4 = -1034 \\ -5x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 104x_4 = 644 \end{cases}$$

$$\cancel{x_1 = +\frac{7}{136}x_2 - \frac{9}{136}x_3 + \frac{3}{136}x_4 - \frac{16}{136}}$$

$$\cancel{x_2 = \frac{5}{164}x_2 + \frac{9}{5}x}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{16}{136} + \frac{7}{136}x_2 - \frac{9}{136}x_3 + \frac{3}{136}x_4 \\ x_2 = -\frac{1420}{164} + \frac{5}{164}x_1 - \frac{9}{164}x_3 + \frac{9}{164}x_4 \\ x_3 = -\frac{1034}{155} - \frac{7}{155}x_1 - \frac{7}{155}x_2 + \frac{8}{155}x_4 \\ x_4 = \frac{644}{104} + \frac{5}{104}x_1 - \frac{2}{104}x_2 + \frac{6}{104}x_3 \end{cases} \rightarrow B = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{136} & -\frac{9}{136} & \frac{3}{136} \\ \frac{5}{164} & 0 & -\frac{9}{164} & \frac{9}{164} \\ -\frac{7}{155} & -\frac{7}{155} & 0 & \frac{8}{155} \\ \frac{5}{104} & -\frac{2}{104} & \frac{6}{104} & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 0{,}13971 \\ 0{,}1402 \\ 0{,}1420 \\ 0{,}125 \end{array} \end{array}$$

$$\|B\|_\infty = 0{,}1420$$

Поскольку норма итерац. матрицы B оказалась меньше 1, метод будет сходиться.

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \le \frac{1-\|B\|}{\|B\|}\varepsilon = \cancel{0{,}06}\ 0{,}17$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

подставляя $x^{(0)}$ в правую часть системы, получим:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -\frac{15}{136} \\ x_2^{(1)} = -\frac{1415}{164} \\ x_3^{(1)} = -\frac{208}{31} \\ x_4^{(1)} = \frac{653}{104} \end{cases} \qquad x^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{15}{136} \\ -\frac{1415}{164} \\ -\frac{208}{31} \\ \frac{653}{104} \end{pmatrix}$$

2ой

Подставим $x^{(1)}$, получим:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0{,}02079 \\ x_2^{(2)} = -7{,}94911 \\ x_3^{(2)} = -5{,}95226 \\ x_4^{(2)} = 5{,}96583 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 0{,}02079 \\ -7{,}94911 \\ -5{,}95226 \\ 5{,}96583 \end{pmatrix}$$

3ий

Подставим $x^{(2)}$, получим:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = -0{,}001293 \\ x_2^{(3)} = -7{,}93646 \\ x_3^{(3)} = -6{,}0050 \\ x_4^{(3)} = 6{,}00278 \end{cases}$$

$$\|x^{(3)} - \bar{x}\| \leq \frac{\|B\|}{1-\|B\|} \cdot \|x^{(3)} - x^{(2)}\|_\infty$$

Метод Зейделя

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{16}{136} + \frac{7}{136} x_2^{(k)} - \frac{9}{136} x_3^{(k)} + \frac{3}{136} x_4^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1420}{164} + \frac{5}{164} x_1^{(k+1)} - \frac{9}{164} x_3^{(k)} + \frac{9}{164} x_4^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1034}{155} - \frac{7}{155} x_1^{(k+1)} - \frac{7}{155} x_2^{(k+1)} + \frac{8}{155} x_4^{(k)} \\ x_4^{k+1} = \frac{644}{104} + \frac{5}{104} x_1^{(k+1)} - \frac{2}{104} x_2^{(k+1)} + \frac{6}{104} x_3^{(k+1)} \end{cases}$$

возьмем $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1ый шаг:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -0{,}110294 \\ x_2^{(1)} = -8{,}6619 \\ x_3^{(1)} = -6{,}22319 \\ x_4^{(1)} = 5{,}99455 \end{cases}$$

2ой шаг:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = -0{,}0194187 \\ x_2^{(2)} = -7{,}98864 \\ x_3^{(2)} = -5{,}99992 \\ x_4^{(2)} = 5{,}99885 \end{cases}$$

3ий шаг:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 0{,}00055 \\ x_2^{(3)} = -8{,}00005 \\ x_3^{(3)} = -6{,}00006 \\ x_4^{(3)} = 6{,}00002 \end{cases} \qquad \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

для метода Якоби:

норма невязок $= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$

для 1го:

n =

$$r^{(0)} = \begin{pmatrix} 644 \\ -16 \\ -1034 \\ -1420 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 2 & -6 & 104 \\ 136 & -7 & 9 & -3 \\ 7 & 7 & 155 & -8 \\ -5 & 164 & 9 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 549 \\ -151 \\ -1195 \\ -1579 \end{pmatrix} =$$

$$r^{(3)} = \ldots = \begin{pmatrix} -0{,}45267 \\ 0{,}674104 \\ 0{,}361518 \\ -10{,}35701 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\|r^{(0)}\|}{\|r^{(3)}\|} = 293{,}28 \qquad \text{аналог. для Зейделя: } \frac{\|r^{0}\|}{\|r^{3}\|} = 37520$$

Апостериорная оценка:

$$\|x^{(3)} - \bar{x}\| \le \frac{\|B\|_\infty}{1 - \|B\|_\infty} \cdot \|x^3 - x^2\|_\infty$$

$0{,}117614 \le \cancel{0{,}017668}$ $0{,}02115208$ для Якоби

$0{,}00113 \le 0{,}00556$ для Зейделя