Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»
Институт Информационных и Вычислительных Технологий
Кафедра Математического и компьютерного моделирования

**Типовые расчеты**

**по учебной дисциплине «Вычислительные методы»**

Выполнил: Чагин С. А.
Вариант: 18
Учебная группа: А-02-22
Преподаватель: Пепа Р. Ю.

Москва 2024

ТР №1.18. Чагин С. А-02-22

$Z = \sqrt[3]{15,0 - 8,09 \cdot 8,766}$

Вычислить значение $Z$ и оценить абсолютную и относит. погрешности результата. Указать верные цифры.

Решение:

$Z = f(x_1; x_2; x_3)$

$x_1^* = 15,0 \quad \Delta(x_1^*) = 0,05 \quad x_2^* = 8,09 \quad \Delta(x_2^*) = 0,005$

$x_3^* = 8,766 \quad \Delta(x_3^*) = 0,0005$

$$\Delta(f^*) \le \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*) \right| \cdot \Delta(x_i^*)$$

$$\Delta(Z^*) \le \left| \frac{1}{3\sqrt[3]{(x_1^* - x_2^* x_3^*)^2}} \right| \cdot \Delta(x_1^*) + \left| \frac{-x_3^*}{3\sqrt[3]{(x_1^* - x_2^* x_3^*)^2}} \right| \cdot \Delta(x_2^*)$$

$$+ \left| \frac{-x_2^*}{3\sqrt[3]{(x_1^* - x_2^* x_3^*)^2}} \right| \cdot \Delta(x_3^*) = \frac{1 \cdot 0,05 + 0,005 \cdot 8,766 + 0,0005 \cdot 8,09}{3\sqrt[3]{(15 - 8,09 \cdot 8,766)^2}}$$

$= 0,00223 = 2,23 \cdot 10^{-3}$

$\bar{Z} \approx -3,82397 \qquad \delta Z = \frac{0,00223}{3,82397} = 5,83 \cdot 10^{-4}$

$2,23 \cdot 10^{-3} \le 0,5 \cdot 10^{-k+1-0} = 0,5 \cdot 10^{-k+1} \longrightarrow k = 3$

Ответ: $Z = -3,82397 \pm 0,00223$; $\delta Z = 5,83 \cdot 10^{-4}$;

кол-во верных цифр – 3.

ПР № 2.18 Чагин С. А-02-22

$\varepsilon = 0,01$ $\quad \sin x - \sqrt{x-1} = f(x)$

При $x = 1$ $\quad f(x) = \sin 1 - \sqrt{1-1} = 0,84$

При $x = 2$ $\quad f(x) = \sin 2 - \sqrt{2-1}$

[1; 2] Метод бисекции.

| $k$ | $a_k$ | $x_k$ | $b_k$ | знак $f(a_k)$ | знак $f(x_k)$ | $b_k - a_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1,5 | 2 | + | + | 1 |
| 1 | 1,5 | 1,75 | 2 | + | + | 0,5 |
| 2 | 1,75 | 1,875 | 2 | + | + | 0,25 |
| 3 | 1,875 | 1,9375 | 2 | + | − | 0,125 |
| 4 | 1,875 | 1,90625 | 1,9375 | + | − | 0,0625 |
| 5 | 1,875 | 1,890625 | 1,90625 | + | + | 0,03125 |
| 6 | 1,890625 | 1,8984375 | 1,90625 | + | − | 0,015625 |

[1,890625; 1,8984375]

Ответ: $\bar{x} = 1,90 \pm 0,01$

ТР №3.18 2 Чагин С. А-02-22

$f(x) = \sin x - \sqrt{x-1}$

$[a;b] = [1,890625; 1,8984375]$ $\varepsilon = 0,0001$

$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$, критерий окончания МПИ:

$D \cdot |x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \varepsilon$ $x^{(0)} = 1,89453125$

$\varphi(x) = x - \alpha f(x)$ $\alpha = \frac{2}{M+m}$

$M = \max\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)|$ $m = \min\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)|$

$f'(x) = \cos(x) - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} < 0$ на $[a;b]$

$f''(x) = -\sin(x) + \frac{1}{(4x-4)\sqrt{x-1}} < 0$ на $[a;b]$, тогда $f'(x)$ на $[a;b]$ монотонно убывает

$M = \max\limits_{[a;b]} |f'(x)| = |f'(1,8984375)| = 0,84931496$

$m = \min\limits_{[a;b]} |f'(x)| = |f'(1,890625)| = 0,84421687$

$\alpha = \frac{2}{0,84931496 + 0,84421687} = 1,18096$

$q = \frac{M-m}{M+m} = 0,0030$ $D = \frac{q}{1-q} = \frac{0,003}{0,997} = 0,003$

$\varphi(x) = x - 1,18096(\sin x - \sqrt{x-1})$

$x^{(1)} = \varphi(x^{(0)}) = \varphi(1,89453125) = 1,89186547$

$D \cdot |x^{(1)} - x^{(0)}| = 0,003 \cdot |1,89186547 - 1,89453125| =$

$= 0,000008 \le 0,0001 = \varepsilon$

Ответ: $\bar{x} = x^{(1)} \pm \varepsilon = 1,8918 \pm 0,0001$

ТР №4.18 Чагин С. А-02-22.

$$4x^3 - \frac{3}{\sqrt{x+3}} \qquad [0,3];\ \mathcal{E} = 10^{-8}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad x_{k+1} = x_k - \frac{4x^3 - \frac{3}{\sqrt{x+3}}}{12x^2 + \frac{3}{\sqrt{x+3}\,(2x+6)}}$$

$$x_0 = 1 \qquad x_1 = x_0 - \frac{4x_0^3 - \frac{3}{\sqrt{x_0+3}}}{12x_0^2 + \frac{3}{\sqrt{x_0+3}\,(2x_0+6)}} = 0{,}794871794$$

$$|x_1 - x_0| = 0{,}20513 \not< \mathcal{E}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{4x_1^3 - \frac{3}{\sqrt{x_1+3}}}{12x_1^2 + \frac{3}{\sqrt{x_1+3}\,(2x_1+6)}} = 0{,}734643828$$

$$|x_2 - x_1| = 0{,}06023 \not< \mathcal{E}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{4x_2^3 - \frac{3}{\sqrt{x_2+3}}}{12x_2^2 + \frac{3}{\sqrt{x_2+3}\,(2x_2+6)}} = 0{,}729620291$$

$$|x_3 - x_2| = 0{,}00502 \not< \mathcal{E}$$

$$x_4 = x_3 - \frac{4x_3^3 - \frac{3}{\sqrt{x_3+3}}}{12x_3^2 + \frac{3}{\sqrt{x_3+3}\,(2x_3+6)}} = 0{,}729586801$$

$$|x_4 - x_3| = 0{,}000033 \not< \mathcal{E}$$

$$x_5 = x_4 - \frac{4x_4^3 - \frac{3}{\sqrt{x_4+3}}}{12x_4^2 + \frac{3}{\sqrt{x_4+3}\,(2x_4+6)}} = 0{,}729586800$$

$$|x_5 - x_4| = 0{,}000\,000\,001 \leq \mathcal{E} = 10^{-8}$$

Ответ: $\bar{x} = 0{,}729586800 \pm 10^{-8}$

Чагин С. А-02-22

№5.18 Решить систему $Ax=b$ методом Гаусса (схема единственного деления)

$$A=\begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 & -10 \\ 54 & -29 & -14 & -89 \\ -6 & 5 & -1 & 12 \\ -12 & 18 & -28 & -11 \end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix} -73 \\ -665 \\ 92 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Решение: Прямой ход

Шаг 1

$$\mu_{2,1}=\frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}=\frac{54}{6}=9 \qquad \mu_{3,1}=\frac{a_{3,1}}{a_{1,1}}=\frac{-6}{6}=-1$$

$$\mu_{4,1}=\frac{a_{4,1}}{a_{1,1}}=\frac{-12}{6}=-2$$

$$\begin{cases} 6x_1-3x_2-2x_3-10x_4=-73 \\ -2x_2+4x_3+x_4=-8 \\ 2x_2-3x_3+2x_4=19 \\ 12x_2-32x_3-31x_4=-46 \end{cases}$$

Шаг 2

$$\mu_{3,2}=\frac{a^{(1)}_{3,2}}{a^{(1)}_{2,2}}=\frac{2}{-2}=-1$$

$$\mu_{4,2}=\frac{a^{(1)}_{4,2}}{a^{(1)}_{2,2}}=\frac{12}{-2}=-6$$

$$\begin{cases} 6x_1-3x_2-2x_3-10x_4=-73 \\ -2x_2+4x_3+x_4=-8 \\ x_3+3x_4=11 \\ -8x_3-25x_4=-94 \end{cases}$$

Шаг 3

$$\mu_{4,3}=\frac{a^{(2)}_{4,3}}{a^{(2)}_{3,3}}=\frac{-8}{1}=-8$$

$$\begin{cases} 6x_1-3x_2-2x_3-10x_4=-73 \\ -2x_2+4x_3+x_4=-8 \\ x_3+3x_4=11 \\ -x_4=-6 \end{cases}$$

Обратный ход

$$\begin{cases} x_4=6 \\ x_3=11-3\cdot6=-7 \\ x_2=\frac{-8-6-4\cdot(-7)}{-2}=-7 \\ x_1=\frac{-73+10\cdot6+2\cdot(-7)+3(-7)}{6}=-8 \end{cases}$$

Ответ: $x=\begin{pmatrix} -8 \\ -7 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$

Чагин С А-02-22

№8.18 Решить систему уравнений $Ax = b$ методом прогонки.
Промежуточные результаты вычислять с шестью знаками после запятой.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 12 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 7 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -21 \\ -4 \\ 21 \\ 4 \\ -40 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 9x_1 - 5x_2 = -21 \\ -4x_1 + 12x_2 + 2x_3 = -4 \\ x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 21 \\ x_3 + 11x_4 - 5x_5 = 4 \\ -4x_4 + 7x_5 = -40 \end{cases}$$

Решение: Прямой ход

Вычисляем прогоночные коэффиценты.

$\alpha_1 = -\frac{c_1}{b_1} = -\frac{-5}{9} = \frac{5}{9}$ $b_i$ – э-ты гл. диагонали
$a_i$ – э-ты поддиагонали $i$ – номер ур
$c_i$ – э-ты наддиагонали
$\beta_1 = \frac{d_1}{b_1} = \frac{-21}{9}$ $d_i$ – правая часть $i$ ур.

$$y_2 = b_2 + a_2\alpha_1 = 12 + \frac{5}{9}\cdot(-4) = 9\frac{7}{9} = \frac{88}{9}$$

$$\alpha_2 = \frac{-c_2}{y_2} = \frac{-2}{88/9} = \frac{-9}{44} \qquad \beta_2 = \frac{d_2 - a_2\beta_1}{y_2} = \frac{-4-(-4)\left(-\frac{21}{9}\right)}{88/9} = \frac{-15}{11}$$

$$y_3 = b_3 + a_3\alpha_2 = 4 - \frac{9}{44}\cdot 1 = \frac{167}{44}$$

$$\alpha_3 = \frac{-c_3}{y_3} = \frac{-2}{167/44} = \frac{-88}{167} \qquad \beta_3 = \frac{d_3 - a_3\beta_2}{y_3} = \frac{21 - 1\cdot\left(-\frac{15}{11}\right)}{-\frac{88}{167}} = \frac{-20541}{484}$$

$$y_4 = b_4 + a_4\alpha_3 = 11 - \frac{88}{167}\cdot 1 = \frac{1749}{167}$$

$$\alpha_4 = \frac{-c_4}{y_4} = \frac{-(-5)}{1749/167} = \frac{835}{1749} \qquad \beta_4 = \frac{d_4 - a_4\beta_3}{y_4} = \frac{4 + 1\cdot\frac{20541}{484}}{1749/167} =$$

$$= 4{,}434245$$

$$\beta_5 = \frac{d_5 - a_5\beta_4}{b_5 + a_5\alpha_4} = \frac{-40 - (-4)\cdot 4{,}434245}{7 + (-4)\cdot\frac{835}{1749}} = -4{,}373584$$

Обратный ход

$$x_5 = \beta_5 = -4{,}373584$$

$$x_4 = \alpha_4 x_5 + \beta_4 = \frac{-835}{1749}\cdot 4{,}373584 + 4{,}434245 = 2{,}346227$$

$$x_3 = \alpha_3 x_4 + \beta_3 = -\frac{88}{167}\cdot 2{,}346227 + \left(\frac{-20541}{484}\right) = -42{,}440083$$

$$x_2 = \alpha_2 x_3 + \beta_2 = \frac{-9}{44}(-42{,}440083) + \left(\frac{-15}{11}\right) = 7{,}317290$$

$$x_1 = \alpha_1 x_2 + \beta_1 = 5/9 \cdot 7{,}31729 - \frac{21}{9} = 1{,}731828$$

Ответ: $X = (1{,}731828;\ 7{,}317290;\ -42{,}440083;\ 2{,}346227;\ -4{,}373584)^T$

№9 18 Чагин С. А-02-22

Вычислить нормы $\|\cdot\|_1; \|\cdot\|_E; \|\cdot\|_\infty$ для матрицы A и вектора $\vec{b}$. Считая, что компоненты вектора b получены в рез. окр. ...

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 2,046 & 1,821 & -1,45 \\ -2,198 & 1,181 & 0,742 \\ 2,572 & 0,985 & 2,397 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2,01 \\ -3,03 \\ -2,1 \end{pmatrix} \quad \Delta b = \begin{pmatrix} 5\cdot10^{-3} \\ 5\cdot10^{-3} \\ 5\cdot10^{-2} \end{pmatrix}$$

Для $\vec{b}$:

$$\|b\|_1 = |2,01| + |-3,03| + |-2,1| = 7,14$$

$$\|b\|_2 = \sqrt{2,01^2 + (-3,03)^2 + (-2,1)^2} = 4,20$$

$$\|b\|_\infty = \max\{|2,01|; |-3,03|; |-2,1|\} = 3,03$$

$$в\ \|b\|_1: \Delta b = |5\cdot10^{-3}| + |5\cdot10^{-3}| + |5\cdot10^{-2}| = 0,06$$

$$в\ \|b\|_2: \Delta b = \sqrt{(5\cdot10^{-3})^2 + (5\cdot10^{-3})^2 + (5\cdot10^{-2})^2} = 0,05$$

$$в\ \|b\|_\infty: \Delta b = \max\{|5\cdot10^{-3}|, |5\cdot10^{-3}|; |5\cdot10^{-2}|\} = 5\cdot10^{-2}$$

$$\delta_1 b = \frac{0,06}{7,14} = 0,0084 \quad \delta_2 b = \frac{0,05}{4,2} = 0,119 \quad \delta_3 b = \frac{5\cdot10^{-2}}{3,03} = 0,0165$$

Для A:

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |A_{ij}| = \max\{|2,046| + |-2,198| + |2,572|; |1,821| +$$

$$+ |1,181| + |0,985|; |-1,45| + |0,742| + |2,397|\} = \max\{6,816; 3,987;$$

$$4,589\} = 6,816$$

$$\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |A_{ij}|^2} = 5,45089 = \sqrt{29,7122}$$

$$\|A\|_\infty = \max\{|2,046| + |1,821| + |-1,45|; |-2,198| + |1,181| + |0,742|;$$

$$|2,572| + |0,985| + |2,397|\} = \max\{5,317; 4,121; 5,954\} = 5,954$$

Ответ: $\|b\|_1 = 7,14$; $\|b\|_2 = 4,20$ $\|b\|_\infty = 3,03$;

$\delta_1 b = 0,0084$; $\delta_2 b = 0,119$; $\delta_3 b = 0,0165$;

$\|A\|_1 = 6,816$; $\|A\|_E = 5,45089$; $\|A\|_\infty = 5,954$

Чагин С. А-02-22

ТР №11.18. Дана система $Ax = b$. Привести к виду, удобному для итераций, проверить выполн. достаточного усл. сх-ти. Три итерации по методу Якоби и три итерации по методу Зейделя. Определить, во сколько раз уменьшится норма невязки в каждом случае. Используя априорную оценку, вычислить погрешность приближенного решения, полученного на третьей итерации каждого метода.

$$A = \begin{pmatrix} 113 & 6 & 0 & -9 \\ 0 & -9 & 8 & 89 \\ -6 & 107 & 2 & -7 \\ -8 & -9 & 114 & -3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 693 \\ -424 \\ -542 \\ -330 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\begin{cases} 113x_1 + 6x_2 - 9x_4 = 693 \\ -6x_1 + 107x_2 + 2x_3 - 7x_4 = -542 \\ -8x_1 - 9x_2 + 114x_3 - 3x_4 = -330 \\ -9x_2 + 8x_3 + 89x_4 = -424 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{693 + 9x_4 - 6x_2}{113} \\ x_2 = \dfrac{-542 + 7x_4 - 2x_3 + 6x_1}{107} \\ x_3 = \dfrac{-330 + 3x_4 + 9x_2 + 8x_1}{114} \\ x_4 = \dfrac{-424 - 8x_3 + 9x_2}{89} \end{cases}$$

$$x = Bx + C$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{6}{113} & 0 & \frac{9}{113} \\ \frac{6}{107} & 0 & \frac{-2}{107} & \frac{7}{107} \\ \frac{8}{114} & \frac{9}{114} & 0 & \frac{3}{114} \\ 0 & \frac{9}{89} & \frac{-8}{89} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|B\|_\infty = \max\left\{\frac{6}{113}+\frac{9}{113};\ \frac{6}{107}+\frac{2}{107}+\frac{7}{107};\ \frac{8+9+3}{114};\ \frac{9+8}{89}\right\} = 0{,}19 < 1$$ – метод сходится

1. Пусть $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad X_1 = B\cancel{x_0}^{\,0} + C = C = \begin{pmatrix} \frac{693}{113} \\ -\frac{542}{107} \\ -\frac{330}{114} \\ -\frac{424}{89} \end{pmatrix}$

2. $$X_2 = BX_1 + C = \begin{pmatrix} \frac{6480555}{1076099} \\ -\frac{101801834}{20445881} \\ -\frac{61125826}{20445881} \\ -\frac{907594}{180937} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 6{,}02227 \\ -4{,}97909 \\ -2{,}98964 \\ -5{,}01608 \end{pmatrix}$$

3. $$X_3 = BX_2 + C = \begin{pmatrix} \frac{13856783439}{2310384553} \\ -\frac{10938539134}{2187709267} \\ -\frac{1164331207}{388471739} \\ -\frac{9096263442}{1819683409} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 5{,}99761 \\ -5 \\ -2{,}99721 \\ -4{,}99882 \end{pmatrix}$$

При подстановке $X_3$ в исходную систему равенства верны.

Норма невязки: $z^{(3)} = AX^{(3)} - b \qquad z^{(0)} = \cancel{AX^{(0)}} - b$

$$z^{(3)} = \begin{pmatrix} -0{,}28069 \\ 0{,}01166 \\ 0{,}33364 \\ 0{,}12734 \end{pmatrix} \qquad z^{(0)} = \begin{pmatrix} -693 \\ 542 \\ 330 \\ 424 \end{pmatrix} \qquad \frac{\|z^{(0)}\|_\infty}{\|z^{(3)}\|_\infty} = \frac{693}{0{,}33364} = 2077{,}09$$

**По методу Зейделя:**

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{107} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{8}{114} & \frac{9}{114} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{89} & -\frac{8}{89} & 0 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{6}{13} & 0 & \frac{9}{113} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{107} & \frac{7}{107} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{114} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X^{(k+1)} = B_1 X^{(k+1)} + B_2 X^{(k)} + C$$

$$\|B_1\|_\infty = \frac{17}{89} \qquad \|B_2\|_\infty = \frac{15}{113}$$

$$\begin{cases} X_1^{(k+1)} = 0 - \frac{6}{113} X_2^{(k)} + \frac{9}{113} X_4^{(k)} + \frac{693}{113} \\ X_2^{(k+1)} = \frac{6}{107} X_1^{(k+1)} + 0 - \frac{2}{107} X_3^{(k)} + \frac{7}{107} X_4^{(k)} - \frac{542}{107} \\ X_3^{(k+1)} = \frac{8}{114} X_1^{(k+1)} + \frac{9}{114} X_2^{(k+1)} + 0 + \frac{3}{114} X_4^{(k)} - \frac{330}{114} \\ X_4^{(k+1)} = \frac{9}{89} X_2^{(k+1)} - \frac{8}{89} X_3^{(k+1)} + 0 + 0 - \frac{424}{89} \end{cases}$$

1. Пусть $X_0 = X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} X_1^{(1)} = 0 - \frac{6}{113} \cdot 0 + \frac{9}{113} \cdot 0 + \frac{693}{113} = \frac{693}{113} \approx 6,133 \\ X_2^{(1)} = \frac{6}{107} \cdot 6,133 + 0 + 0 + 0 - \frac{542}{107} \approx -4,722 \\ X_3^{(1)} = \frac{8}{114} \cdot 6,133 + \frac{9}{114} \cdot (-4,722) + 0 + 0 - \frac{330}{114} \approx -2,837 \\ X_4^{(1)} = \frac{9}{89} \cdot (-4,722) - \frac{8}{89}(-2,837) + 0 + 0 - \frac{424}{89} \approx -4,987 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} X_1^{(2)} = -\frac{6}{113}(-4,722) + \frac{9}{113}(-4,987) + \frac{693}{113} \approx 5,986 \\ X_2^{(2)} = \frac{6}{107} \cdot 5,986 - \frac{2}{107} \cdot (-2,837) + \frac{7}{107}(-4,987) - \frac{542}{107} \approx -5,003 \\ X_3^{(2)} = \frac{8}{114} \cdot 5,986 + \frac{9}{114} \cdot (-5,003) + \frac{3}{114}(-4,987) - \frac{330}{114} \approx -3,000 \\ X_4^{(2)} = \frac{9}{89} \cdot (-5,003) - \frac{8}{89}(-3) - \frac{424}{89} \approx -5,003 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} X_1^{(3)} = -\frac{6}{113}(-5,003) + \frac{9}{113}(-5,003) + \frac{693}{113} \approx 6 \\ X_2^{(3)} = \frac{6}{107} \cdot 6 - \frac{2}{107}(-3) + \frac{7}{107}(-5,003) - \frac{542}{107} \approx -5 \\ X_3^{(3)} = \frac{8}{114} \cdot \cancel{5,006}\, 6 + \frac{9}{114}(-5) + \frac{3}{114} \cdot (-5,003) - \frac{330}{114} \approx -3 \\ X_4^{(3)} = \frac{9}{89} \cdot (-5) - \frac{8}{89}(-3) - \frac{424}{89} = -5 \end{cases}$$

$X^{(3)} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ При подстановке $x_3$ в исходную систему равенства верны.

Норма невязки: $\frac{\|Z^{(0)}\|_\infty}{\|Z^{(3)}\|_\infty} = \frac{693}{0} = \infty$

Априорная оценка Якоби:

$$\|X^{(3)} - \hat{X}\|_\infty < \|X^{(3)} - X^{(2)}\|_\infty \cdot \frac{\|B\|_\infty}{1 - \|B\|_\infty}$$

$$X^{(3)} - \bar{X} = \begin{pmatrix} 1,96 \\ -1,65 \\ -1,03 \\ -1,74 \end{pmatrix} \qquad \|X^{(3)} - \bar{X}\|_\infty = 1,96$$

$$X^{(3)} - X^{(2)} = \begin{pmatrix} -0,247 \\ -0,021 \\ -0,008 \\ 0,017 \end{pmatrix} \qquad \|X^{(3)} - X^{(2)}\| = 0,247$$

$$1,96 < 0,247 \cdot \frac{0,19}{1-0,19}$$

$0,06 < 0,23 \cdot 0,28 = 0,064$ - верно

Апостериорная оценка Зейделя:

$$\|X^{(3)} - \bar{X}\|_\infty < \|X^{(3)} - X^{(2)}\| \cdot \frac{\|B_2\|}{1 - \|B\|}$$

$0,0001 < 0,002 \cdot \dfrac{\frac{15}{113}}{1 - \frac{17}{89}} = 0,0003$ - верно