Министерство науки и высшего образования Российской Федерации ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

Институт Информационных и Вычислительных Технологий

Кафедра Математического и компьютерного моделирования

Типовые расчёты

Выполнила: студентка группы А-02-22

Бирюкова А.С.

Вариант:2

Проверил: ст. преп. Пепа Р.Ю.

Москва 2024

№1.

$3{,}13^2 \arcsin(2{,}122 - 1{,}88) = 2{,}39462$

$x = 2{,}122$ $\quad \Delta x = 0{,}0005$

$y = 1{,}88$ $\quad \Delta y = 0{,}005$

$z = 3{,}13$ $\quad \Delta z = 0{,}005$

$f(x,y,z) = z^2 \arcsin(x-y)$

$\Delta f = |f'_x| \cdot \Delta x + |f'_y| \cdot \Delta y + |f'_z| \cdot \Delta z$

$$\Delta f = \left|\frac{z^2}{\sqrt{1-x^2+2xy-y^2}}\right| \cdot \Delta x + \left|\frac{-z^2}{\sqrt{1-x^2+2xy-y^2}}\right| \Delta y + |2\arcsin(x-y) \cdot z| \Delta z =$$

$$= |0{,}09702 \cdot 0{,}0005 + 10{,}09702 \cdot 0{,}005 + 1{,}53011 \cdot 0{,}005 = 0{,}06318416$$

$$\delta f = \frac{\Delta f}{|f|} = \frac{0{,}06318416}{2{,}39462} = 0{,}02638588$$

в вниии

$f = 2{,}39462 \pm 0{,}02638588$

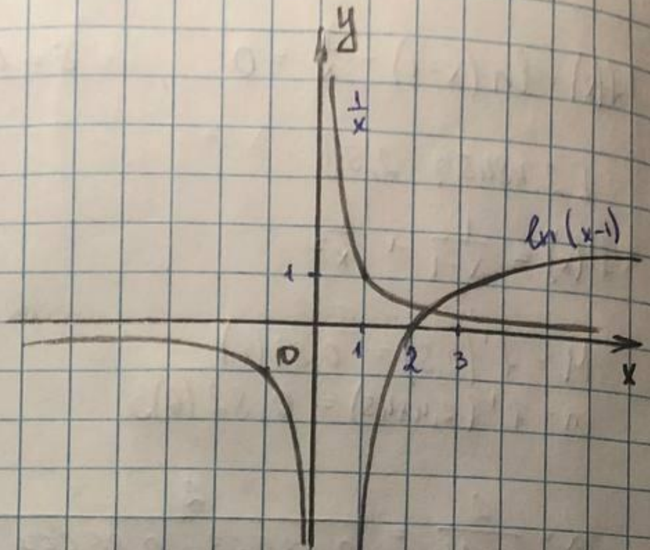
Ответ: $\Delta f = 0{,}06318416$, $\delta f = 0{,}02638588$.

№2.

$f(x) = \ln(x-1) - \frac{1}{x}$, $\varepsilon = 0{,}01$

$\ln(x-1) = \frac{1}{x}$

$[2;3]$



$x_0 = \frac{2+3}{2} = 2{,}5$

$f(2) = \ln(2-1) - \frac{1}{2} = -0{,}5$
$f(2{,}5) = \ln(2{,}5-1) - \frac{1}{2{,}5} = 0{,}005465$
$f(3) = \ln(3-1) - \frac{1}{3} = 0{,}359814$

1) $[2;\ 2{,}5]$ $x_1 = \frac{2+2{,}5}{2} = 2{,}25$, $f(2{,}25) = -0{,}22$

2) $[2{,}25;\ 2{,}5]$ $x_2 = \frac{2{,}25+2{,}5}{2} = 2{,}375$, $f(2{,}375) = -0{,}103$

3) $[2{,}375;\ 2{,}5]$ $x_3 = \frac{2{,}375+2{,}5}{2} = 2{,}438$ $f(2{,}438) = -0{,}047$

4) $[2{,}438;\ 2{,}5]$ $x_4 = \frac{2{,}438+2{,}5}{2} = 2{,}469$ $f(2{,}469) = -0{,}02044$

5) $[2{,}469;\ 2{,}5]$ $x_5 = \frac{2{,}469+2{,}5}{2} = 2{,}4845$ $f(2{,}4845) = -0{,}007417$

6) $[2{,}4845;\ 2{,}5]$ $x_6 = \frac{2{,}4845+2{,}5}{2} = 2{,}49225$ $f(2{,}49225) = -0{,}000958808$

$|2{,}5 - 2{,}49225| = 0{,}00775 < 2 \cdot 0{,}01$

$\bar{x} = \frac{2{,}5+2{,}49225}{2} = 2{,}496125 \approx 2{,}496$

Ответ: 2,496.

№3.

$f(x) = \ln(x-1) - \frac{1}{x} = 0$, $\varepsilon = 0{,}0001$

$[2{,}4845;\ 2{,}5]$

$f'(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2}$

$M = f'(2{,}5) = 0{,}82667$

$m = f'(2{,}4845) = 0{,}83563$

$\alpha = \frac{2}{m+M} = \frac{2}{0{,}83563 + 0{,}82667} = 1{,}20315$

$q = \left|\frac{M-m}{M+m}\right| = 0{,}00539$

$x_{n+1} = x_n - \alpha \cdot f(x_n)$

$x_{n+1} = x_n - 1{,}20315 \cdot \left(\ln(x-1) - \frac{1}{x}\right)$

$x_0 = \frac{2{,}4845 + 2{,}5}{2} = 2{,}49225$

$x_1 = x_0 - 1{,}20315\left(\ln(x_0 - 1) - \frac{1}{x_0}\right) = 2{,}4934$

$|x_1 - x_0| = 0{,}00115$

$\frac{1-q}{q} \cdot \varepsilon = 0{,}0184529$

$|x_1 - x_0| < \frac{1-q}{q} \cdot \varepsilon$ – выполняется

Ответ: $2{,}4934 \pm 0{,}0001$.

№4.

$f(x) = 4(x-3,5)^3 - e^{-x} = 0$, $x \in [3,5]$, $\varepsilon = 10^{-8}$

$f'(x) = 12x^2 - 84x + 147 + e^{-x}$

$x_0 = \frac{3+5}{2} = 4$, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$x_1 = 4 - \frac{4(x_0-3,5)^3 - e^{-x_0}}{12x_0^2 - 84x_0 + 147 + e^{-x_0}} = 3,84041$ $\qquad |x_1 - x_0| = 0,15959$

$x_2 = 3,74388$ $\qquad |x_2 - x_1| = 0,09653$

$x_3 = 3,69728$ $\qquad |x_3 - x_2| = 0,0466$

$x_4 = 3,68524$ $\qquad |x_4 - x_3| = 0,01204$

$x_5 = 3,68448$ $\qquad |x_5 - x_4| = 0,00076$

$x_6 = 3,68447237 12989$ $\qquad |x_6 - x_5| = 0,00001237 12989$

$x_7 = 3,68447237 04492$ $\qquad |x_7 - x_6| = 0,0000000 08497 < 10^{-8}$

Ответ: $3,6844723704492 \pm 10^{-8}$.

ТР5.

$$\begin{cases} -8x_1+6x_2+3x_3-5x_4=-64 \\ -32x_1+17x_2+13x_3-24x_4=-278 \\ -8x_1-22x_2+4x_3-23x_4=-135 \\ -48x_1-27x_2+15x_3-79x_4=-509 \end{cases}$$

$\mu_{21}=\frac{-32}{-8}=4$, $\mu_{31}=\frac{-8}{-8}=1$, $\mu_{41}=\frac{-48}{-8}=6$

$$\begin{cases} -8x_1+6x_2+3x_3-5x_4=-64 \\ -7x_2+x_3-4x_4=-22 \\ -28x_2+x_3-18x_4=-71 \\ -63x_2-3x_3-49x_4=-125 \end{cases}$$

$\mu_{32}=\frac{-28}{-7}=4$, $\mu_{42}=\frac{-63}{-7}=9$

$$\begin{cases} -8x_1+6x_2+3x_3-5x_4=-64 \\ -7x_2+x_3-4x_4=-22 \\ -3x_3-2x_4=17 \\ -12x_3-13x_4=73 \end{cases}$$

$\mu_{43}=\frac{-12}{-3}=4$.

$$\begin{cases} -8x_1+6x_2+3x_3-5x_4=-64 \\ -7x_2+x_3-4x_4=-22 \\ -3x_3-2x_4=17 \\ -5x_4=5 \end{cases}$$

$x_4=-1$; $x_3=\frac{17-2}{-3}=-5$

$x_2=\frac{-22-4+5}{-7}=3$

$x_1=\frac{-64-5+15-18}{-8}=9$

Ответ: $x_1=9$; $x_2=3$; $x_3=-5$; $x_4=-1$.

TP8.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 8 & 4 & 0 & 0 & 0 & 40 \\ -1 & 5 & -2 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 9 & 4 & 0 & -43 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Прямой ход:

1) $\alpha_1 = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$ $\quad \beta_1 = \frac{40}{8} = 5$ $\quad \gamma_2 = 5 + (-1)\cdot\left(-\frac{4}{8}\right) = 5{,}5$

2) $\alpha_2 = -\frac{-2\cdot 10}{55} = +\frac{4}{11}$

$\beta_2 = \frac{8 \;+\; \cdot 5}{5{,}5} = \frac{26}{11}$ $\quad \gamma_3 = 9 - \frac{4}{11} = \frac{95}{11}$

3) $\alpha_3 = -\frac{4\cdot 11}{95}$

$\beta_3 = \frac{-43 + \frac{26}{11}}{95/11} = -\frac{447}{95}$ $\quad \gamma_4 = 2 + 0\cdot\left(-\frac{44}{95}\right) = 2$

4) $\alpha_4 = -\frac{1}{2}$

$\beta_4 = \frac{-18 + \frac{447}{95}\cdot 0}{2} = -9$ $\quad \beta_5 = \frac{4-9}{2+1/2} = -2$

Обратный ход:

$x_5 = \beta_5 = -2$

$x_4 = -\frac{1}{2}\cdot(-2) + (-9) = -8$

$x_3 = -\frac{44}{95}\cdot(-8) - \frac{447}{95} = -1$

$x_2 = \frac{4}{11}\cdot(-1) + \frac{26}{11} = 2$

$x_1 = -0{,}5\cdot 2 + 5 = 4.$

Ответ: $x = \{4;\ 2;\ -1;\ -8;\ -2\}$.

TP 9

$$A = \begin{pmatrix} 1,158 & -0,76 & 0,266 \\ -0,485 & -2,814 & -1,793 \\ -0,097 & 1,096 & 2,912 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2,19 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta b = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,005 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\|\cdot\|_1$: $\Delta b = 0,5 + 0,005 = 0,505$

$\|\cdot\|_2$: $\Delta b = \sqrt{0,5^2 + 0,005^2} = 0,500025$

$\|\cdot\|_\infty$: $\Delta b = \max\{0,5; 0,005; 0\} = 0,5$.

$$\|A\|_1 = \max \sum_{i=1}^{3} |A_{ij}| = \max\{1,158 + 0,485 + 0,097;\ 0,76 + 2,814 + 1,096;\ 0,266 + 1,793 + 2,912\} =$$

$$= \max\{1,74;\ 4,67;\ 4,971\} = 4,971.$$

$$\|A\|_E = \sqrt{\sum \sum (A_{ij})^2} = \sqrt{1,158^2 + 0,76^2 + 0,266^2 + 0,485^2 + 2,814^2 + 1,793^2 + 0,097^2 + 1,096^2 + 2,912^2} =$$

$$= 4,80087.$$

$$\|A\|_\infty = \max \sum_{j=1}^{3} |A_{ij}| = \max\{1,158 + 0,76 + 0,266;\ 0,485 + 2,814 + 1,793;\ 0,097 + 1,096 + 2,912\} =$$

$$= \max\{2,184;\ 5,092;\ 4,105\} = 5,092$$

$$\|b\|_1 = \sum_{i=1}^{3} |b_{ij}| = 6,19.$$

$$\|b\|_2 = \sqrt{\sum^{3} (b_{ij})^2} = \sqrt{4^2 + 2,19^2} = 4,56027.$$

$$\|b\|_\infty = \max |b_i| = \max\{4;\ 2,19;\ 0\} = 4.$$

$$\delta_1 b = \frac{0,505}{6,19} = 0,0815832$$

$$\delta_2 b = \frac{0,500025}{4,56027} = 0,10964811$$

$$\delta_3 b = \frac{0,5}{4} = 0,125.$$

ТРII

$$\begin{cases} 70x_2 - 9x_3 = 210 \\ 7x_1 + 8x_2 + 114x_3 - 7x_4 = 143 \\ 9x_1 + 8x_2 - 9x_3 + 145x_4 = -1209 \\ 81x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 642 \end{cases}$$

метод Якоби:

переставим строки:

$$\begin{cases} 81x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 642 \\ 70x_2 - 9x_3 = 210 \\ 7x_1 + 8x_2 + 114x_3 - 7x_4 = 143 \\ 9x_1 + 8x_2 - 9x_3 + 145x_4 = -1209 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} x_1 = 7{,}93 - 0{,}05x_2 - 0{,}074x_3 - 0{,}025x_4 \\ x_2 = 3 + 0{,}129x_3 \\ x_3 = 1{,}254 - 0{,}061x_1 - 0{,}07x_2 + 0{,}061x_4 \\ x_4 = -8{,}338 - 0{,}062x_1 - 0{,}055x_2 + 0{,}062x_3 \end{array}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}05 & -0{,}074 & -0{,}025 \\ 0 & 0 & 0{,}129 & 0 \\ -0{,}061 & -0{,}07 & 0 & 0{,}061 \\ -0{,}062 & -0{,}055 & 0{,}062 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|B\|_\infty = \max\{0{,}05+0{,}074+0{,}025;\ 0{,}129;\ 0{,}061+0{,}07+0{,}061;\ 0{,}062+0{,}055+0{,}062\} =$$

$$= \max\{0{,}149;\ 0{,}129;\ 0{,}192;\ 0{,}179\} = 0{,}192 < 1$$ – метод сходится

$$x^{(0)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

n=1

$$\begin{cases} x_1 = 7{,}93 - 0{,}05 - 0{,}074 - 0{,}025 = 7{,}781 \\ x_2 = 3 + 0{,}129 = 3{,}129 \\ x_3 = 1{,}254 - 0{,}061 - 0{,}07 + 0{,}061 = 1{,}184 \\ x_4 = -8{,}338 - 0{,}062 - 0{,}055 + 0{,}062 = -8{,}398 \end{cases} \qquad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 7{,}781 \\ 3{,}129 \\ 1{,}184 \\ -8{,}398 \end{pmatrix}$$

n=2

$$\begin{cases} x_1 = 7{,}93 - 0{,}05\cdot 3{,}129 - 0{,}074\cdot 1{,}184 + 0{,}025\cdot 8{,}398 = 7{,}896 \\ x_2 = 3 + 0{,}129\cdot 1{,}184 = 3{,}153 \\ x_3 = 1{,}254 - 0{,}061\cdot 7{,}781 - 0{,}07\cdot 3{,}129 + 0{,}061\cdot(-8{,}398) = 0{,}048 \\ x_4 = -8{,}338 - 0{,}062\cdot 7{,}781 - 0{,}055\cdot 3{,}129 + 0{,}062\cdot 1{,}184 = -8{,}919. \end{cases} \qquad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 7{,}896 \\ 3{,}153 \\ 0{,}048 \\ -8{,}919 \end{pmatrix}$$

n=3

$$\begin{cases} x_1 = 7{,}93 - 0{,}05\cdot 3{,}153 - 0{,}074\cdot 0{,}048 + 0{,}025\cdot 8{,}919 = 7{,}992 \\ x_2 = 3 + 0{,}129\cdot 0{,}048 = 3{,}006 \\ x_3 = 1{,}254 - 0{,}061\cdot 7{,}896 - 0{,}07\cdot 3{,}153 - 0{,}061\cdot 8{,}919 = 0{,}008 \\ x_4 = -8{,}338 - 0{,}062\cdot 7{,}896 - 0{,}055\cdot 3{,}153 + 0{,}062\cdot 0{,}048 = -8{,}998 \end{cases} \qquad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 7{,}992 \\ 3{,}006 \\ 0{,}008 \\ -8{,}998 \end{pmatrix}$$

Норма невязки: $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$, $r^{(3)} = b - Ax^{(3)}$.

$$r^0 = \begin{pmatrix} 210 \\ 143 \\ -1209 \\ 642 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 70 & -9 & 0 \\ 7 & 8 & 114 & -7 \\ 9 & 8 & -9 & 145 \\ 81 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ 143 \\ -1209 \\ 642 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 61 \\ 122 \\ 153 \\ 93 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 149 \\ 21 \\ -1362 \\ 549 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 210 \\ \ldots \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 70 & -9 & 0 \\ 7 & 8 & 114 & -7 \\ \ldots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7{,}992 \\ 3{,}006 \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ 143 \\ \ldots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 210{,}348 \\ 143{,}89 \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}348 \\ -0{,}89 \\ \ldots \end{pmatrix}$$

$$\frac{\|r^{(0)}\|}{\|r^{(3)}\|} = \frac{2081}{2,004} = 1038,42$$

$$\|x^{(3)} - x^{(2)}\|_\infty = \left\| \begin{matrix} 0,096 \\ -0,147 \\ -0,04 \\ -0,079 \end{matrix} \right\|_\infty = 0,362$$

$$\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = \left\| \begin{matrix} 6,781 \\ 2,129 \\ 0,184 \\ -9,398 \end{matrix} \right\|_\infty = 18,492$$

$$\frac{\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty}{\|x^{(3)} - x^{(2)}\|_\infty} = \frac{18,492}{0,362} = 51,083$$

Норма невязки уменьшилась в 51,083 раза.
Погрешность приближенного решения 0,362.

Метод Зейделя.

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & -0,05 & -0,074 & -0,025 \\ 0 & 0 & 0,129 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,061 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,061 & -0,07 & 0 & 0 \\ -0,062 & -0,055 & 0,062 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|B_2\|_\infty = \max\{0,061 + 0,07;\ 0,062 + 0,055 + 0,062\} = \max\{0,131;\ 0,179\} = 0,179$$

$$\|B_2\|_\infty = \max\{0,05 + 0,074 + 0,025;\ 0,129;\ 0,061\} = \max\{0,149;\ 0,129;\ 0,061\} = 0,149$$

$$\|B_1\|_\infty + \|B_2\|_\infty = 0,179 + 0,149 = 0,328 < 1 \text{ — метод сходится}$$

$$x^{(n+1)} = B_1 \cdot x^{(n+1)} + B_2 \cdot x^{(n)} + C$$

$\underline{n = 1}$

$$\begin{cases} x_1 = 7,93 - 0,05 - 0,074 - 0,025 = 7,781 \\ x_2 = 3 + 0,129 = 3,129 \\ x_3 = 1,254 - 0,061 \cdot 7,781 - 0,07 \cdot 3,129 + 0,061 = 0,621 \\ x_4 = -8,338 - 0,062 \cdot 7,781 - 0,055 \cdot 3,129 + 0,062 \cdot 0,621 = -8,954 \end{cases} \qquad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 7,781 \\ 3,129 \\ 0,621 \\ -8,954 \end{pmatrix}$$

$$\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = \left\| \begin{matrix} 6,781 \\ 2,129 \\ -0,379 \\ -9,954 \end{matrix} \right\|_\infty = 19,243$$

$\underline{n = 2}$

$$\begin{cases} x_1 = 7,93 - 0,05 \cdot 3,129 - 0,074 \cdot 0,621 + 0,025 \cdot 8,954 = 7,951 \\ x_2 = 3 + 0,129 \cdot 0,621 = 3,075 \\ x_3 = 1,254 - 0,061 \cdot 7,951 = 0,769 \\ x_4 = -8,338 - 0,062 \cdot 7,951 - 0,055 \cdot 3,075 + 0,062 \cdot 0,769 = -8,952 \end{cases} \qquad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 7,951 \\ 3,075 \\ 0,769 \\ -8,952 \end{pmatrix}$$

$$\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty = \left\| \begin{matrix} 0,17 \\ -0,054 \\ 0,148 \\ 0,002 \end{matrix} \right\|_\infty = 0,374$$

$n=3$

$$\begin{cases} x_1 = 7,93 - 0,05 \cdot 3,075 - 0,074 \cdot 0,769 + 0,025 \cdot 8,952 = 7,943 \\ x_2 = 3 + 0,129 \cdot 0,769 = 3,099 \\ x_3 = 1,254 - 0,061 \cdot 7,943 - 0,07 \cdot 3,099 + 0,061 \cdot 8,952 = 1,099 \\ x_4 = -8,338 - 0,062 \cdot 7,943 - 0,055 \cdot 3,099 + 0,062 \cdot 1,099 = -8,933 \end{cases}$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 7,943 \\ 3,099 \\ 1,099 \\ -8,933 \end{pmatrix}$$

$$\|x^{(3)} - x^{(2)}\|_\infty = \left\| \begin{matrix} -0,008 \\ 0,024 \\ 0,33 \\ 0,019 \end{matrix} \right\|_\infty = 0,381$$

$$\frac{\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty}{\|x^{(3)} - x^{(2)}\|_\infty} = \frac{19,243}{0,381} = 50,507.$$

Норма невязки уменьшилась в 50,507.

Погрешность приближенного решения 0,381.