МИНОБРНАУКИ РОССИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное

учреждение высшего образования

Институт ИВТИ

Кафедра УИТ

Типовой расчет

Вариант 8

Студент гр. А-02-22 ______________________ Ледовской М.М.

(подпись)

Преподаватель ______________________ Пепа Р.Ю.

(оценка/зачёт, подпись)

Москва
2024

Типовые расчёты. Вариант 8

Задание 1

$z = \cos 3.14 + 2,15 - 3.0^3$

$z = f(x_1; x_2; x_3) = \cos x_1 + x_2 - x_3^3$

$x_1 = 3.14$ $\qquad x_2 = 2.15$ $\qquad x_3 = 3.0$

$\Delta x_1 = 0,005$ $\qquad \Delta x_2 = 0,005$ $\qquad \Delta x_3 = 0,05$

Вычисляя находим $f(x_1; x_2; x_3) = -25,85$

$\Delta f = |f'_{x_1}| \cdot \Delta x_1 + |f'_{x_2}| \cdot \Delta x_2 + |f'_{x_3}| \cdot \Delta x_3 = |-\sin x_1| \cdot \Delta x_1 + |1| \cdot \Delta x_2 + |-3x_3^2| \cdot \Delta x_3 = 0,0015926 5 \cdot 0,005 + 0,005 + 27 \cdot 0,05 =$
$= 1,3550079 6325 \approx 1,36$

$\delta f = \dfrac{1,36}{25,85} = 0,0379 = 3,79\%$

Ответ: $f = -25,85 \pm 1,36$, результат содержит 1 верную цифру ($f = -30 \pm 1$)

Задание 2

$f(x) = \cos x + 2 - x^3 = 0$, $\varepsilon = 0,01$

Составим таблицу значений исходной функции

x	1	2
f(x)	1,54	−6,42

Из таблицы видно, что в качестве отрезка локализации можно взять отрезок $[1, 2]$

Применим метод бисекции $[a_0, b_0] = [1, 2]$

Шаг 1: Т.к длина текущего отрезка равна $1 > 2\varepsilon = 0,02$, то ищем след. приближение. Находим середину отрезка $[a_0, b_0]$: $x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2} = 1,5$, вычисляем $f(a_0) = 1,54 > 0$ $\quad f(x_0) = -1,30426 < 0$

Функция меняет знак $\Rightarrow a_1 = a_0 = 1 \quad b_1 = x_0 = 1,5$

Шаг 2: $b_1 - a_1 = 0,5 > 0,02 \Rightarrow x_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2} = 1,25$

$f(a_0) = 1,54 > 0 \quad f(x_1) = 0,362197$

Значит $a_2 = x_1 = 1,25 \quad b_2 = b_1 = 1,5$

Шаг 3: $b_2 - a_2 = 0,25 > 0,02 \Rightarrow x_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2} = 1,375$

$f(a_2) = 0,362197 > 0 \quad f(x_2) = -0,40562 < 0$

$a_3 = a_2 = 1,25 \quad b_3 = x_2 = 1,375$

Шаг 4: $b_3 - a_3 = 0,125 > 0,02$ $x_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} = 1,3125$

$f(x_3) = -0,00555256 < 0$

$a_4 = a_3 = 1,25$ $b_4 = x_3 = 1,3125$

Шаг 5: $b_4 - a_4 = 0,0625 > 0,02$

$x_4 = \frac{a_4 + b_4}{2} = 1,28125$

$f(x_4) = 0,182215 > 0 \Rightarrow a_5 = x_4 = 1,28125$ $b_5 = b_4 = 1,3125$

Шаг 6: $b_5 - a_5 = 0,03125 > 0,02$ $x_5 = 1,296875$

$f(x_5) = 0,0893143 > 0 \Rightarrow a_6 = x_5 = 1,296875$

$b_6 = b_5 = 1,3125$

Шаг 7: $b_6 - a_6 = 0,015625 < 0,02 \Rightarrow \bar{x} = 1,3046875 \pm 0,01$

Ответ: $\bar{x} = 1,30 \pm 0,01$

Задание 3

$f(x) = \cos x + 2 - x^3 = 0$ $\varepsilon = 0,0001$ $[1,25; 1,375]$

$f'(x) = -\sin(x) - 3x^2$ Отрезок локализации

$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$

$\frac{q}{1-q} \cdot |x^{(k+1)} - x^{(k)}| \le \varepsilon$ - крит. окон. Нач. прибл. $x_0 = 1,3125$

Меняем знак $f'(x) = \sin x + 3x^2 \Rightarrow -\cos - 2 + x^3$

$m = f'(1,25) = 5,64$

$M = f'(1,375) = 6,65$

$\alpha = \frac{2}{5,64 + 6,65} \approx 0,16$ $\varphi(x) = x - 0,16(-\cos x - 2 + x^3)$

$q = \frac{M-m}{M+m} = 0,081$

$x_1 = \varphi(x_0) = 1,31161$

$|x_k - x_{k-1}| \le \frac{1-q}{q} \varepsilon$

$|x_1 - x_0| = 0,0008 \le 0,00113$

Ответ: $1,31161 \pm 0,0001$

Задание 4

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x} = 0 \qquad \varepsilon = 10^{-8}$$

Отрезок локализации [4, 6]

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Критерий окончания: $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$

$$f'(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x+1}\,(x+1)} + \frac{1}{x^2}$$

Начальное приближение $x_0 = 5$

Итерация 1

$$x_1 = 5 - \frac{0{,}00412415}{0{,}0229897} \approx 4{,}82060879437 3$$

$$|5 - 4{,}820608 79| = 0{,}17937121 > \varepsilon$$

Итерация 2

$$x_2 = 4{,}82060879437 3 - \frac{-0{,}0001968 4943598}{0{,}025227 9702 5847} = 4{,}82841108 3570979$$

$$|x_2 - x_1| = 0{,}0078022 89198 > \varepsilon$$

Итерация 3

$$x_3 = 4{,}82841108 35709795 - \frac{-4.0305 6534e^{-7}}{0{,}025126 4775029} = 4{,}828427124678627$$

$$|x_3 - x_2| = 1.6041107648e{-5} > \varepsilon$$

Итерация 4

$$x_4 = 4{,}828427124678627 - \frac{-1{,}69761427e{-12}}{0{,}02512626585} = 4{,}828427124746191$$

$$|x_4 - x_3| = 6.75637323865 5353e{-11} < \varepsilon$$

Ответ: $\bar{x} = 4{,}82842712 \pm 10^{-8}$

Задание 5

Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} -4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 7x_4 = -15 \\ -16x_1 - 33x_2 + 9x_3 - 27x_4 = -72 \\ -20x_1 - 102x_2 + 16x_3 - 29x_4 = -147 \\ 4x_1 + 60x_2 - 2x_3 = 50 \end{cases}$$

Перепишем систему уравнений в матричном виде и решим его методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -4 & -6 & 2 & 7 & -15 \\ -16 & -33 & 9 & -27 & -72 \\ -20 & -102 & 16 & -29 & -147 \\ 4 & 60 & -2 & 0 & 50 \end{array}\right)$$

1-ую строку делим на -4

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1.5 & -0.5 & -1.75 & 3.75 \\ -16 & -33 & 9 & -27 & -72 \\ -20 & -102 & 16 & -29 & -147 \\ 4 & 60 & -2 & 0 & 50 \end{array}\right)$$

к 2 строке добавляем 1 строку, умноженную на 16; к 3 строке добавляем 1 строку, умноженную на 20; от 4 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 4

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1.5 & -0.5 & -1.75 & 3.75 \\ 0 & -9 & 1 & -55 & -12 \\ 0 & -72 & 6 & -64 & -72 \\ 0 & 54 & 0 & 7 & 35 \end{array}\right)$$

2-ую строку делим на -9

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1.5 & -0.5 & -1.75 & 3.75 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{55}{9} & \frac{4}{3} \\ 0 & -72 & 6 & -64 & -72 \\ 0 & 54 & 0 & 7 & 35 \end{array}\right)$$

от 1 строки отнимаем 2 строку, умноженную на 1.5; к 3 строке добавляем 2 строку, умноженную на 72; от 4 строки отнимаем 2 строку, умноженную на 54

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{131}{12} & 1.75 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{55}{9} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -2 & 376 & 24 \\ 0 & 0 & 6 & -323 & -37 \end{array}\right)$$

3-ую строку делим на -2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{131}{12} & 1.75 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{55}{9} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -188 & -12 \\ 0 & 0 & 6 & -323 & -37 \end{array}\right)$$

к 1 строке добавляем 3 строку, умноженную на 13; к 2 строке добавляем 3 строку, умноженную на 19; от 4 строки отнимаем 3 строку, умноженную на 6

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{883}{12} & -2.25 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{133}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -188 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 805 & 35 \end{array}\right)$$

4-ую строку делим на 805

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{883}{12} & -2.25 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{133}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -188 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{23} \end{array}\right)$$

к 1 строке добавляем 4 строку, умноженную на 88312; к 2 строке добавляем 4 строку, умноженную на 1339; к 3 строке добавляем 4 строку, умноженную на 188

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{131}{138} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{133}{207} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{88}{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{23} \end{array}\right)$$

Ответ:

Ответ:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{131}{138} \\ x_2 = \frac{133}{207} \\ x_3 = -\frac{88}{23} \\ x_4 = \frac{1}{23} \end{cases}$$

Задание 8

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 18 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 11 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 20 \\ 18 \\ -159 \\ 5 \\ 69 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 8x_1 - 4x_2 = 20 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 18 \\ 3x_2 + 18x_3 - 6x_4 = -159 \\ 3x_3 + 13x_4 - 4x_5 = 5 \\ -6x_4 + 11x_5 = 69 \end{cases}$$

Обозначим элементы главной диагонали матрицы системы через b_i, поддиагональные через a_i, наддиаг – c_i. Значение вектора b, d_i

Прямой ход

$$\alpha_1 = -\frac{c_1}{b_1} = \frac{1}{8} = 0,125 \qquad \beta_1 = \frac{d_1}{b_1} = \frac{20}{8} = 2,5$$

$$\gamma_2 = b_2 + a_2\alpha_1 = 3 + (-1)\cdot(0,125) = 2,875$$

$$\alpha_2 = -\frac{c_2}{\gamma_2} = \frac{1}{2,875} = 0,347826$$

$$\beta_2 = \frac{d_2 - a_2\beta_1}{\gamma_2} = \frac{18 + 1\cdot 2,5}{2,875} = 7,130435$$

$$\gamma_3 = b_3 + a_3\alpha_2 = 18 + 3\cdot 0,347826 = 19,043478$$

$$\alpha_3 = -\frac{c_3}{\gamma_2} = \frac{6}{2,875} = 2,086957$$

$$\beta_3 = \frac{d_3 - a_3\beta_2}{\gamma_3} = \frac{-159 - 3\cdot 7,130435}{19,043478} = -9,472603$$

$$\gamma_4 = b_4 + a_4\alpha_3 = 13 + 3\cdot 2,086957 = 19,260871$$

$$\alpha_4 = -\frac{c_4}{\gamma_4} = \frac{4}{19,260871} = 0,207675 \qquad \beta_5 = \frac{d_5 - a_5\beta_4}{b_5 + a_5\alpha_4} = \frac{69 - (-6)\cdot 1,735011}{2 + (-6)\cdot 0,207675}$$

$$\beta_4 = \frac{d_4 - a_4\beta_3}{\gamma_4} = \frac{5 - 3\cdot(-9,472603)}{19,260871} = 1,735011 \qquad \beta_5 = 105,325374$$

Обратный ход

$x_5 = \beta_5 = 105,325374$

$x_4 = \alpha_4 x_5 + \beta_4 = 23,60845804545$

$x_3 = \alpha_3 x_4 + \beta_3 = 39,797234$

$x_2 = \alpha_2 x_3 + \beta_2 = 20,972948$

$x_1 = \alpha_1 x_2 + \beta_1 = 5,121619$

Ответ: $X = (5,121619;\ 20,972948;\ 39,797234;\ 23,6084580\cancel{45}$
$;\ 105,325374)^T$

Задание 9

$$A = \begin{pmatrix} 2,297 & -1,058 & 1,135 \\ 0,368 & 0,494 & -0,441 \\ 1,735 & 1,674 & -1,793 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -2,551 \\ -6,35 \\ 2,678 \end{pmatrix}$$

Норма $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |A_{ij}|$

$\|A\|_1 = \max\{4,4;\ 3,226;\ 3,369\} = 4,4$

Норма $\|A\|_E = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |A_{ij}|^2} \approx 4,15753$

Норма $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |A_{ij}| = \max\{4,49;\ 1,303;\ 5,202\} = 5,202$

Норма $\|b\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |b_i| = 11,579$

Норма $\|b\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |b_i|^2} = 7,34859$

Норма $\|b\|_\infty = \max|b_i| = 2,678$

Найдём относительную погрешность получ норм b.

$\Delta b = \begin{pmatrix} 0,0005 \\ 0,005 \\ 0,0005 \end{pmatrix}$ $\quad \|\Delta b\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |b_i| = 0,006$

$\|\Delta b\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |b_i|^2} = 0,00504975$

$\|\Delta b\|_\infty = \max|\Delta b_i| = 0,005$

$\delta_1 b = \dfrac{\|\Delta b\|_1}{\|b\|_1} = \dfrac{0,006}{11,579} = 0,0005181794628206235$

$\delta_2 b = \dfrac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2} = \dfrac{0,00504975}{7,34859} = 0,00068717264128220 53$

$\delta_3 b = \dfrac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \dfrac{0,005}{2,678} = 0,0018670649738610904$

Задание 11

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & 71 \\ -4 & -4 & 82 & 0 \\ -8 & 160 & -10 & 9 \\ 73 & -4 & -6 & -4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -234 \\ -264 \\ -858 \\ -674 \end{pmatrix}$$

Преобразуем систему к виду удобному для итераций

$$\begin{cases} 73x_1 - 4x_2 - 6x_3 - 4x_4 = -674 \\ -8x_1 + 160x_2 - 10x_3 + 9x_4 = -858 \\ -4x_1 - 4x_2 + 82x_3 + 0x_4 = -264 \\ 7x_1 + 3x_2 + x_3 + 71x_4 = -234 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{4}{73}x_2 + \frac{6}{73}x_3 + \frac{4}{73}x_4 - \frac{674}{73} \\ x_2 = \frac{8}{160}x_1 + \frac{10}{160}x_3 - \frac{9}{160}x_4 - \frac{858}{160} \\ x_3 = \frac{4}{82}x_1 + \frac{4}{82}x_2 + 0x_4 - \frac{264}{82} \\ x_4 = -\frac{7}{71}x_1 - \frac{3}{71}x_2 - \frac{1}{71}x_3 - \frac{234}{71} \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}0547945 & 0{,}0821918 & 0{,}0547945 \\ 0{,}05 & 0 & 0{,}0625 & -0{,}05625 \\ 0{,}04878 & 0{,}04878 & 0 & 0 \\ -0{,}0985915 & -0{,}0422535 & -0{,}0140845 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|B\|_\infty = \max\{0{,}1917808,\ 0{,}16875;\ 0{,}09756,\ 0{,}1549295\} = 0{,}1917808 < 1$$

Метод Якоби сходится для $\forall x^{(0)}$

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Итерация I $\quad X^{(1)} = \begin{pmatrix} -9{,}0410954123 \\ -5{,}306250 \\ -3{,}121952195 \\ -3{,}450704148 \end{pmatrix}$

Итерация II $\quad X^{(2)} = \begin{pmatrix} -9{,}9693035 \\ -5{,}815574770 \\ -3{,}91937573 \\ -2{,}1362206702 \end{pmatrix}$

Итерация III $\quad X^{(3)} = \begin{pmatrix} -9{,}99073191 \\ -5{,}985763996 \\ -3{,}989498798 \\ -2{,}01195474 \end{pmatrix}$

$r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$

$r^{(3)} = b - Ax^{(3)}$

$$r^{0} = \begin{pmatrix} -234 \\ -264 \\ -858 \\ -674 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & 71 \\ -4 & -4 & 82 & 0 \\ -8 & 160 & -10 & 9 \\ 73 & -4 & -6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -316 \\ -338 \\ -1009 \\ -733 \end{pmatrix}$$

$$r^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,73034 \\ -0,76696 \\ -1,99169 \\ -0,60455 \end{pmatrix} \qquad \|r^{(0)}\|_1 = 2396 \qquad \|r^{(3)}\|_1 = 4.09354$$

$$\frac{\|r^{(0)}\|_1}{\|r^{(3)}\|_1} = \frac{2396}{4.09354} = 585.3124679$$

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ – решение}$$

Апостериорная оценка: $\cancel{\|x^{(3)}\|}$ $\|x^{(3)} - \bar{x}\| \le \frac{\|B\|}{1-\|B\|} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$

$$x^{(3)} - x^{(2)} = \begin{pmatrix} -0,0214234 \\ -0,1701893 \\ -0,070123 \\ 0,124266 \end{pmatrix} \Rightarrow \|x^{(3)} - x^{(2)}\| = 0,124266$$

$$\frac{\|B\|}{1-\|B\|} = 0,2372881$$

$$\|x^{(3)} - \bar{x}\| \le 0,02948684$$

Метод Зейделя.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0,0547945 & 0,0821918 & 0,0547945 \\ 0 & 0 & 0,0625 & -0,05625 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \|B_1\| = 0,1917808$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0 & 0 & 0 \\ 0,04878 & 0,04878 & 0 & 0 \\ -0,0985915 & -0,0422535 & -0,0140845 & 0 \end{pmatrix}$$

$\|B_2\|_\infty = 0,1549295$

$\|B_1\|_\infty + \|B_2\|_\infty = 0,3467193 < 1$

выполн усл.

Формула $x^{(k+1)} = B_1 \cdot x^{(k+1)} + B_2 \cdot x^k + C$

Нач прибл $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

I итерация

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} -9,04109589 \\ -5,90830479 \\ -3,9438732 \\ -2,10343916 \end{pmatrix}$$

II итерация

$$X_2^{(2)} = \begin{pmatrix} -9,9975504 \\ -5,99920163 \\ -3,99906108 \\ -2,00135889 \end{pmatrix}$$

III итерация

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} -9,99946039 \\ -5,9998379 \\ -3,99996577 \\ -2,00006053 \end{pmatrix}$$

$$r^0 = \begin{pmatrix} -316 \\ -338 \\ -1009 \\ -733 \end{pmatrix} \qquad r^3 = \begin{pmatrix} -6,9999e-05 \\ -0,00044 \\ -0,02194 \\ -0,03874 \end{pmatrix}$$

$\|r^0\|_1 = 2396$

$\|r^3\|_1 = 0,06119$

$$\frac{\|r^0\|_1}{\|r^3\|_1} = \frac{2396}{0,06119} = 39156,724955$$

Апостериорная оценка $\|x^3 - \bar{x}\|_\infty \le \frac{\|B_2\|_\infty}{1 - \|B\|_\infty} \cdot \|x^{(3)} - x^{(2)}\|_\infty$

$\|x^{(3)} - x^{(2)}\|_\infty = 0,00129836 \qquad \frac{\|B_2\|_\infty}{1 - \|B\|_\infty} = 0,191692427$

$\|x^{(3)} - \bar{x}\|_\infty \le 0,0002489$