Решение задач с пропусками строк

1 Вариант

1 Задача

Вычислите значение Z и оцените абсолютную и относительную погрешности результата.

$$Z = \frac{1}{(3.09)^2} - 5.4^2 + 3.09$$

1. $Z = \frac{1}{(3.09)^2} - 5.4^2 + 3.09$
2. $Z \approx -25.965$
3. Абсолютная погрешность $\Delta Z \approx 0.545$
4. Относительная погрешность $\delta Z \approx -0.021$ или 2.1%
5. Результат с учетом погрешности: $Z = -25.965 \pm 0.545$
6. Верные цифры: -25.9

2 Задача

Функция: $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - x^2 + 2$.

2.1 Локализация корня

Выбираем начальный интервал $[a, b]$, в пределах которого функция меняет знак, что указывает на наличие корня. Для этой задачи возьмем $a = 0$ и $b = 2$.

2.2 Метод бисекции

Применяем метод бисекции с точностью $\varepsilon = 0.01$, последовательно деление интервала пополам до тех пор, пока его длина не станет меньше ε

2.3 Результат

Корень уравнения найден: $x \approx 1.4765625$.

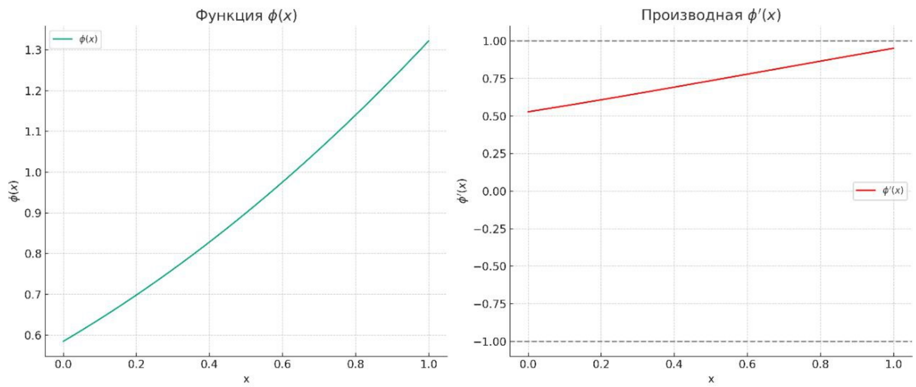


Рис. 1: Enter Caption

3 Задача

Найти корень нелинейного уравнения $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - x^2 + 2$ методом простой итерации.

3.1 Преобразование уравнения

Преобразуем уравнение к виду, удобному для итераций: $x = \sqrt{\frac{1}{(x+1)^2} + 2}$.

3.2 Проверка условия сходимости

Условие сходимости $|\phi'(x)| < 1$ проверяем на интервале локализации. График функции $\phi(x)$ и её производной $\phi'(x)$ показывает, что условие сходимости выполняется на выбранном интервале.

3.3 Метод простой итерации

Начальное приближение выбрано на основе отрезка локализации, полученного методом бисекции в задаче 2: $x_0 = 0.9921875$.

Повторяем итерации по формуле $x_{n+1} = \phi(x_n)$ до тех пор, пока $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, где $\varepsilon = 0.0001$.

3.4 Результат

Корень уравнения найден после 4 итераций и приблизительно равен $x \approx \mathrm{root}_s imple_i teration$.

4 Задача

Найти корень нелинейного уравнения $f(x) = x - \frac{1}{\sqrt{x-1}} - 2 = 0$ методом Ньютона на отрезке [2, 5] с точностью $\varepsilon = 10^{-8}$.

4.1 Функция и ее производная

Функция:

$$f(x) = x - \frac{1}{\sqrt{x-1}} - 2$$

Производная функции:

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2(x-1)^{3/2}}$$

4.2 Применение метода Ньютона

1. Начальное приближение на отрезке [2, 5] выбрано как $x_0 = 3.5$, середина отрезка. 2. Итерационная формула:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

3. Процесс итераций продолжается до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность: $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.

4.3 Результат

После 4 итераций корень уравнения был найден и приблизительно равен $x \approx 3.1461932206$.

5 Задача

5.1 Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

Исходная расширенная матрица

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 1 & 4 \\ -18 & -20 & 44 & -13 & 3 \\ -4 & -8 & 10 & -19 & 119 \\ -14 & -14 & 35 & 2 & -91 \end{bmatrix}$$

Преобразование первой строки (деление на первый элемент)

$$R_1 \frac{R_1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2.5 & 0.5 & 2 \\ -18 & -20 & 44 & -13 & 3 \\ -4 & -8 & 10 & -19 & 119 \\ -14 & -14 & 35 & 2 & -91 \end{bmatrix}$$

Обнуление элементов в первом столбце ниже ведущего

$$R_2R_2 + 18R_1R_3R_3 + 4R_1R_4R_4 + 14R_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2.5 & 0.5 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -4 & 39 \\ 0 & 0 & 0 & -18 & 111 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -19 \end{bmatrix}$$

Преобразования продолжаются для создания верхнетреугольной матрицы ... После преобразования всех строк получаем верхнетреугольную матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2.5 & 0.5 & 2 \\ 0 & 1 & 0.5 & 2 & -19.5 \\ 0 & 0 & 1 & -4.5 & 24.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

Обратный ход Гаусса Находим решения системы

$$\begin{aligned} &x_4 = -7, \\ &x_3 = 24.5 + 4.5 \cdot x_4 = -7, \\ &x_2 = -19.5 - 0.5 \cdot x_3 - 2 \cdot x_4 = -2, \\ &x_1 = 2 - 1 \cdot x_2 + 2.5 \cdot x_3 - 0.5 \cdot x_4 = -10. \end{aligned}$$

Решение системы

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

8 Задача

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 12 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 17 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 33 \\ -82 \\ -100 \\ -20 \\ 44 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \frac{4}{7} = 0.571429$$

$$Q_1 = \frac{33}{7} = 4.714286$$

$$P_2 = \frac{4}{12 + 2 \cdot 0.571429} = 0.304348$$

$$Q_2 = \frac{-82 - 2 \cdot 4.714286}{12 + 2 \cdot 0.571429} = -6.956522$$

$$P_3 = \frac{5}{17 + (-4) \cdot 0.304348} = 0.316804$$

$$Q_3 = \frac{-100 - (-4) \cdot (-6.956522)}{17 + (-4) \cdot 0.304348} = -8.099174$$

$$P_4 = \frac{1}{3 + 1 \cdot 0.316804} = 0.241546$$

$$Q_4 = \frac{-20 - 1 \cdot (-8.099174)}{3 + 1 \cdot 0.316804} = -3.588040$$

$$Q_5 = \frac{44 - (-2) \cdot (-3.588040)}{4 + (-2) \cdot 0.301495} = 11$$

$$x_5 = Q_5 = 11$$

$$x_4 = P_4 \cdot x_5 + Q_4 = 0.241546 \cdot 11 - 3.588040$$

$$x_3 = P_3 \cdot x_4 + Q_3$$

$$x_2 = P_2 \cdot x_3 + Q_2$$

$$x_1 = P_1 \cdot x_2 + Q_1$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

9 Задача

$$A = \begin{pmatrix} 2.509 & 0.031 & 2.775 \\ -1.773 & -1.978 & 2.583 \\ -0.739 & -2.67 & -2.916 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -6.75 \\ 2.279 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max\left(\sum_{i=1}^{3}|a_{i1}|, \sum_{i=1}^{3}|a_{i2}|, \sum_{i=1}^{3}|a_{i3}|\right) \\ &= \max(5.021, 4.679, 8.274) \\ &= 8.274 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|A\|_F &= \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}^2} \\ &= \sqrt{44.007396} \\ &= 6.625907 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \max\left(\sum_{j=1}^{3}|a_{1j}|, \sum_{j=1}^{3}|a_{2j}|, \sum_{j=1}^{3}|a_{3j}|\right) \\ &= \max(5.315, 6.334, 6.325) \\ &= 6.334 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|b\|_1 &= \sum_{i=1}^{3}|b_i| \\ &= 14.029 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|b\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{3} b_i^2} \\ &= \sqrt{75.753541} \\ &= 8.703812 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|b\|_\infty &= \max(6.75, 2.279, 5) \\ &= 6.75 \end{aligned}$$

11 Задача

Решение системы линейных уравнений итерационными методами

Исходные данные

Учитывая систему уравнений $Ax = b$, где:

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 8 & 118 & 8 \\ 98 & 8 & 6 & 6 \\ -6 & 8 & -3 & 126 \\ -7 & 94 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 184 \\ -556 \\ -61 \\ 412 \end{bmatrix}$$

Проверка условия диагонального доминирования

Чтобы удовлетворить условию диагонального доминирования, должно быть верно следующее: для переставленной матрицы A':

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

После проверки мы обнаруживаем, что матрица не строго удовлетворяет диагонали условие доминирования, но организовано таким образом, чтобы облегчить конвергенцию для используемых итерационных методов.

Приведение матрицы к диагонально доминирующему виду

Переставив строки исходной матрицы, получим A' и b. $'$

метод Якоби

Начальное приближение $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Для метода Якоби применяется итерационная формула:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

После 5 итераций приближенное решение:

$$x^{(5)}_{\text{Jacobi}} = \begin{bmatrix} -64674.45 \\ -2404303.14 \\ 29190064.18 \\ -3007092.12 \end{bmatrix}$$

Метод Зейделя

Аналогично, начальное приближение для метода Зейделя: $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Итерационная формула метода Зейделя:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

После 5 итераций приближенное решение:

$$x^{(5)}_{\text{Seidel}} = \begin{bmatrix} -2742572.51 \\ 1838032720 \\ 13314018400 \\ -28799045500 \end{bmatrix}$$

Расчет нормы остатка

Норма невязки для обоих методов после 5 итераций рассчитывается как:

$$r^{(5)}_{\text{Jacobi}} = 3447168508.97$$

$$r^{(5)}_{\text{Seidel}} = 3897976463899.06$$

Аникеев Андрей А-02-22

ПР 13.

x	-1	-0.5	0	0.5	1
y	1	3.6	1.1	0	-0.8

1) $$\begin{cases} (n+1)a_0 + \left(\sum_0^n x_k\right)a_1 = \sum_0^n y_k \\ \left(\sum_0^n x_k\right)a_0 + \left(\sum x_k^2\right)a_1 = \sum_0^n y_k x_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a_0 + 0 \cdot a_1 = 4.9 \\ 0a_0 + 2.5a_1 = -3.6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = 0.98 \\ a_1 = -1.44 \end{cases}$$

$$P_1(x) = -1.44x + 0.98$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n+1}\sum\left(P_k(x_k) - y_k\right)^2} = 1.079.$$

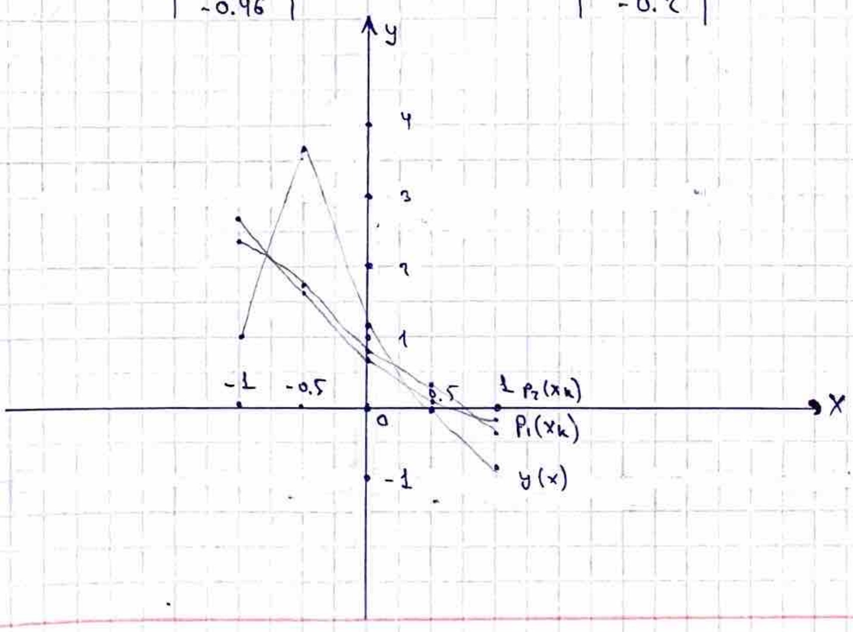
2) $$\begin{cases} (n+1)a_0 + \left(\sum_0^n x_k\right)a_1 + \left(\sum_0^n x_k^2\right)a_2 = \sum_0^n y_k. \\ \left(\sum_0^n x_k\right)a_0 + \left(\sum_0^n x_k^2\right)a_1 + \left(\sum_0^n x_k^3\right)a_2 = \sum_0^n y_k x_k. \\ \left(\sum_0^n x_k^2\right)a_0 + \left(\sum_0^n x_k^3\right)a_1 + \left(\sum_0^n x_k^4\right)a_2 = \sum_0^n y_k x_k^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a_0 + 0a_1 + 2.5a_2 = 4.9 \\ 0a_0 + 2.5a_1 + 0 \cdot a_2 = -3.6 \\ 0a_0 + 0a_1 + 2.125a_2 = 1.1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_0 = 0.72 \\ a_1 = -1.44 \\ a_2 = 0.52 \end{cases}$$

$$P_2(x) \approx 0.52x^2 - 1.44x + 0.72.$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n+1}\left(\sum\left(P_2(x_k) - y_k\right)^2\right)} = 1.22.$$

$$P_1(x_k) = \begin{vmatrix} 2.42 \\ 1.7 \\ 0.98 \\ 0.26 \\ -0.46 \end{vmatrix} \qquad P_2(x_k) = \begin{vmatrix} 2.68 \\ 1.57 \\ 0.72 \\ 0.13 \\ -0.2 \end{vmatrix}$$



TP 14

$\varphi_0(x) = \sin x$

$\varphi_1(x) = \sin 3x$

x	1.8	4.4	4.5	5.1	5.3	6.7
y	-3.031	2.26	3.163	1.478	-1.07	4.203

$$\varphi(x) = a\sin x + b\sin 3x.$$

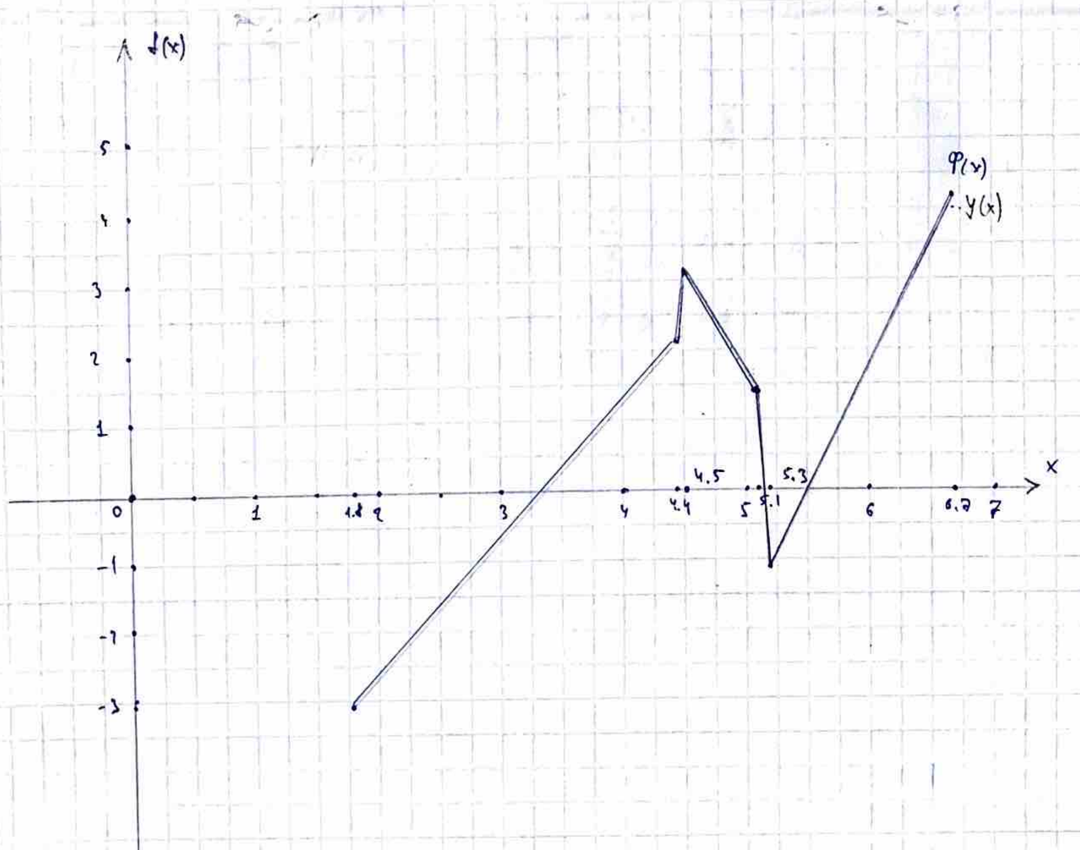
$$\begin{cases} \left(\sum_{k=0}^{n} (\sin x_k)^2\right) a + \left(\sum_{k=0}^{n} \sin x_k \cdot \sin 3x_k\right) \cdot b = \sum_{k=0}^{n} y_k \sin x_k \\ \left(\sum_{k=0}^{n} \sin x_k \cdot \sin 3x_k\right) a + \left(\sum_{k=0}^{n} (\sin 3x_k)^2\right) b = \sum_{k=0}^{n} y_k \sin 3x_k. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4.52\, a + (-1.93)\, b = -6.924 \\ -1.93\, a + 2.68 \cdot b = 10.983 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 0.315. \\ b = 4.325. \end{cases}$$

$$\varphi(x) = 0.315 \sin x + 4.325 \sin 3x.$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left(\varphi(x_k) - y_k\right)^2} = 0.0154$$

x	1.8	4.4	4.5	5.1	5.3	6.7.
$\varphi(x)$	-3.035	2.26	3.12	1.42	-1.09	4.23



ТР 15

x	-4	-3	-2	-1
y	0	-3	-1	1

$\tilde{x} = -2.81$

1). Интерполяционный многочлен Лагранжа:

$$L_3(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} +$$

$$+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

$$L_3(\tilde{x}) = 0 + (-3)\cdot \frac{(1.19)\cdot(-0.81)\cdot(-1.81)}{1\cdot(-1)(-2)} + (-1)\frac{(1.19)(0.19)(-1.81)}{(2)(1)(-1)} +$$

$$+ (1)\frac{(1.19)(0.19)(-0.81)}{(3)(2)(1)} = (-2.62) + (-0.205) + (-0.03) = -2.855$$

$L_3(-2.81) = -2.855$

2) Интерполяционный многочлен Ньютона:

$x_0 = -4$	0	$\Delta^1 y_0 = -3$	$\Delta^2 y_0 = 5$	$\Delta^3 y_0 = -5$
$x_1 = -3$	-3	$\Delta^1 y_1 = 2$	$\Delta^2 y_1 = 0$	
$x_2 = -2$	-1	$\Delta^1 y_2 = 2$		
$x_3 = -1$	1			

$$P_3(\tilde{x}) = y_0 + \frac{\Delta^1 y_0}{1!}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}(x-x_0)(x-x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$P_3(-2.81) = 0 + \frac{-3}{1!}(-2.81+4) + \frac{5}{2}(-2.81+4)(-2.81+3) + \frac{-5}{6}(-2.81+4)\cdot$$

$$\cdot(-2.81+3)(-2.81+2) = 0 - 3.57 + 0.57 + 0.15 = -2.85$$

$\underline{P_3(-2.81) = -2.85}$.

TP 16.

x	2	2.8	3.6	4.4	4.8
y	6.4	10.5	15.9	22.5	26.2

$\rightarrow$

x	3.6	4.4	2.8	4.8	2
y	15.9	22.5	10.5	26.2	6.4

$\tilde{x} = 3.8$

$x_0 = 3.6$, $x_1 = 4.4$, $x_2 = 2.8$, $x_3 = 4.8$, $x_4 = 2$

$F_0 = y_0 = 15.9$

$F_1 = y_1 = 22.5$

$F_2 = y_2 = 10.5$

$F_3 = y_3 = 26.2$

$F_4 = y_4 = 6.4$

F_{01}, F_{12}, F_{23}, F_{34}

F_{012}, F_{123}, F_{234}

F_{0123}, F_{1234}

F_{01234}

$$F_{01} = \frac{F_1 - F_0}{x_1 - x_0} = \frac{22.5 - 15.9}{4.4 - 3.6} = 8.25 \qquad F_{12} = \frac{F_2 - F_1}{x_2 - x_1} = \frac{10.5 - 22.5}{2.8 - 4.4} = 7.5$$

$$F_{23} = \frac{F_3 - F_2}{x_3 - x_2} = \frac{26.2 - 10.5}{4.8 - 2.8} = 7.85 \qquad F_{34} = \frac{F_4 - F_3}{x_4 - x_3} = \frac{6.4 - 26.2}{2 - 4.8} = 7.07$$

$$F_{012} = \frac{F_{12} - F_{01}}{x_2 - x_0} = \frac{7.5 - 8.25}{2.8 - 3.6} = 0.94 \qquad F_{123} = \frac{F_{23} - F_{12}}{x_3 - x_1} = \frac{7.85 - 7.5}{4.8 - 4.4} = 0.875$$

$$F_{234} = \frac{F_{34} - F_{23}}{x_4 - x_2} = \frac{7.07 - 7.85}{2 - 2.8} = -5.28 \qquad F_{1234} = \frac{F_{234} - F_{123}}{x_4 - x_1} = \frac{-5.28 - 0.875}{2 - 4.4} = 2.56$$

$$F_{0123} = \frac{F_{123} - F_{012}}{x_3 - x_0} = \frac{0.875 - 0.94}{4.8 - 3.6} = -0.054 \qquad F_{01234} = \frac{F_{1234} - F_{0123}}{x_4 - x_0} = \frac{2.56 + 0.054}{2 - 3.6} = -1.63$$

$m=0$: $P_0(x) = F_0 = 15.9$, $P_0(\tilde{x}) = 15.9$

$F_{01} \cdot \omega(\tilde{x}) = F_{01}(\tilde{x} - x_0) = 8.25(3.8 - 3.6) = 1.65 \qquad \varepsilon_0 = |F_{01}\, \omega_1(\tilde{x})| \approx 2$

$\underline{f(3.8) = 16 \pm 2}$.

$m=1$: $P_1(x) = P_0(x) + F_{01} \cdot \omega_1(x)$; $P_1(\tilde{x}) = 15.9 + 1.65 = 17.55$

$F_{012} \cdot \omega_2(\tilde{x}) = F_{012}(\tilde{x} - x_0)(\tilde{x} - x_1) = 0.94(3.8 - 3.6)(3.8 - 4.4) = -0.1128$

$\varepsilon_1 \approx 0.11 \qquad \underline{f(3.8) = 17.55 \pm 0.11}.$

$m=2$: $P_2(x) = P_1(x) + F_{012}\, \omega_2(x)$; $P_2(\tilde{x}) = 17.55 - 0.1128 \approx 17.4322$

$F_{0123} \cdot \omega_3(\tilde{x}) = F_{0123}(\tilde{x} - x_0)(\tilde{x} - x_1)(\tilde{x} - x_2) = -0.054(3.8 - 3.6)(3.8 - 4.4)(3.8 - 2.8) = 0.00648$

$\varepsilon_2 \approx 0.007. \qquad f(3.8) = 17.432 \pm 0.007.$

$m=3$: $P_3(x) = P_2(x) + F_{0123} \cdot \omega_3(\tilde{x}) = 17.437 + 0.007 = 17.444.$

$F_{01234} \cdot \omega_4(\tilde{x}) = F_{01234}(\tilde{x} - x_0)(\tilde{x} - x_1)(\tilde{x} - x_2)(\tilde{x} - x_3) = -1.63(3.8 - 3.6)(3.8 - 4.4)(3.8 - 2.8)(3.8 - 4.8) = -0.1956$

$\varepsilon_3 \approx 0.1956 \qquad \underline{f(3.8) = 17.444 \pm 0.1956}.$

ТР 20

$Y = \int_{1.1}^{2.7} \frac{\sin x}{x} dx$

а) Вычисление с помощью формулы центральных прямоугольников с $h = 0.4$.

$h = 0.4 \qquad \{x_i\}_{i=0}^{4} = \{1.1;\ 1.5;\ 1.9;\ 2.3;\ 2.7\}$

$I^{(h)} = h \sum_{i=1}^{N} f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) = 0.4\left(\frac{\sin 1.3}{1.3} + \frac{\sin 1.7}{1.7} + \frac{\sin 2.1}{2.1} + \frac{\sin 2.5}{2.5}\right) \approx$

$\approx 0.789989.$

$|Y - I^{(h)}| \le \frac{M_2 (b-a) h^2}{24} \qquad M_2 = \max_{[1.1;2.7]} |f''(x)|$

$f'(x) = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \qquad f''(x) = \frac{-\sin x - \frac{2\cos x}{x} + \frac{2\sin x}{x^2}}{x}.$

$f''(1.1) = -0.2207 \quad f''(2.7) = 0.133168$

$M_2 = 0.220780 \qquad |Y - I^{(h)}| \le \frac{0.22 \cdot (2.7 - 1.1) \cdot 0.4^2}{24} = 0.00235$

$Y = 0.790 \pm 0.003$

б). Вычисление с помощью ф-лы трапеций.

1) $h = 0.4 \qquad I_{тр}^{(h)} = h\left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\right) = 0.4\left(\frac{0.810 + 0.158}{2}\right) + 0.665 +$

$+ 0.498 + 0.324 = 0.789$

2) $h = 0.2 \qquad \{x\}_{i=0}^{8} = \{1.1;\ 1.3;\ 1.5;\ 1.7;\ 1.9;\ 2.1;\ 2.3;\ 2.5;\ 2.7\}.$

$I_{тр}^{(h)} = 0.2\left(\frac{0.810 + 0.158}{2} + 0.741\right) + 0.665 + 0.583 + 0.498 + 0.411 + 0.324 + 0.239 =$

$= 0.789.$

$Y - I_{тр}^{(h)} \approx \frac{I_{тр}^{(h)} - I_{тр}^{(2h)}}{2^p - 1} = \frac{\overset{296}{0.789} - 0.788604}{3} = 0.000231$

$I_{уточн} = 0.789296 + 0.000231 = 0.789527.$

в) Вычисление с помощью ф-лы симпсона.

$h = 0.4$

$I_c^{(h)} = \frac{h}{6}\left(f(x_0) + f(x_n) + 4\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} - x_i}{2}\right) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) = \frac{0.4}{6}\big(f(1.1) +$

$+ f(2.7) + 4\left(f(1.3) + f(1.7) + f(2.1) + f(2.5)\right) + 2\left(f(1.5) + f(1.9) + f(2.3)\right)\big)$

$= 0.789531.$

ПР 21.

$$\mathcal{J} = \int_{-1.7}^{-1.2} (2*x - 5x^2 + x^3 + 4x^4)\,dx \qquad \varepsilon = 0.01.$$

$$\left|\mathcal{J} - I_{\text{Пр}}^{(h)}\right| \le \frac{M_2 (b-a) h^2}{12} \qquad M_2 = \max_{[-1.7;-1.2]} |f''(x)|$$

$$f'(x) = 1 - 10x + 3x^2 + 16x^3$$

$$f''(x) = -10 + 6x + 48x^2$$

$$M_2 = |f''(-1.7)| = -10 - 6 \cdot 1.7 + 48 \cdot 1.7^2 = 118.52$$

$$\left|\mathcal{J} - I_{\text{Пр}}^{(h)}\right| \le \frac{118.52\,(-1.2 + 1.7)\,h^2}{12} \le \varepsilon = 0.01$$

$$\frac{118.52 \cdot 0.5\, h^2}{12} \le 0.01 \qquad h \le \sqrt{\frac{0.01 \cdot 12}{118.52 \cdot 0.5}}.$$

$$h \le 0.045$$

$$\frac{b-a}{h} = \frac{-1.2 + 1.7}{0.045} = 11.11 \Rightarrow N = 12.$$

$$h_{max} = \frac{b-a}{N} = \frac{0.5}{12} = 0.04167$$

$$\{x_0\}_{i=0}^{12} = \{-1.7;\ -1.65833;\ -1.616666;\ -1.57499;\ -1.53332;\ -1.49165;\ -1.44998;$$
$$-1.40831;\ -1.36664;\ -1.32497;\ -1.2833;\ -1.24163;\ -1.2\}$$

$$I_{\text{Пр}}^{(h)} = h\left(\frac{f(x_0) + f(x_N)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\right) = 0.04167\left(\frac{14.3454 + 0.1659807}{2} + 12.282 +\right.$$
$$\left. + 10.413 + 8.728 + 7.216 + 5.867 + 4.670 + 3.616 + 2.695 + 1.899 + 1.217 + 0.642 + 0.166\right) =$$
$$= 2.221 \qquad \mathcal{J} = \int_{-1.7}^{-1.2} (2 + x - 5x^2 + x^3 + 4x^4)\,dx = \left(2x + \frac{x^2}{2} - \frac{5x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{4x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1.7}^{-1.2} =$$

$$= -0.772256 + 3.037498 = 2.265242$$

$$\left|\mathcal{J} - I_{\text{Пр}}^{(h)}\right| \le \varepsilon \qquad |2.265242 - 2.221| \le \varepsilon$$

$$0.006 \le 0.01$$

Точность $\varepsilon = 0.01$ достигнута.

ПР 23

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$; $h = 0{,}1$; $x_0 = \frac{a+b}{2} = 1.9$.

$f'_y(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{f(1.9+0{,}1) - f(1.9-0{,}1)}{0.2} = \frac{0.454649 - 0.541026}{0.2} =$

$= -0.431885$.

$f'_n(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \frac{f(1.9) - f(1.8)}{0.1} = \frac{0.498053 - 0.541026}{0.1} = -0{,}42926$

$f'(x) = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$

$f'(x) \to f'(1.9) = -0.432285$

$\Delta y = |-0.432285 - (-0.431885)| = 0.0004$.

$\Delta n = |-0.432285 - (-0.42926)| = 0.003025$.

Центральная разностная производная дала значение на порядок точнее, что подтверждает её более высокий класс точности.

$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = \frac{f(2) - 2f(1.9) + f(1.8)}{0.01} =$

$= \frac{0.454649 - 2 \cdot 0.498053 + 0.541026}{0{,}01} = -0{,}0431$.

$f''(x) = \frac{-\sin x - \frac{2\cos x}{x} + \frac{2\sin x}{x^2}}{x}$

$f''(x) \to f''(1.9) = -0.0430154$

$\Delta = |-0{,}0430154 - (-0.0431)| = 0.0000846$.

ТР 21

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{t-4} + \frac{t-4}{t} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$t \in [1, 1.8]$, $h = 0.2$

$t_0 = 1$; $t_1 = 1.2$; $t_2 = 1.4$; $t_3 = 1.6$; $t_4 = 1.8$

а) Метод Эйлера:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n)$$

$$y_1 = y_0 + 0.2\left(\frac{y_0}{t_0-4} + \frac{t_0-4}{t_0}\right) = -0.6$$

$y_2 = -1.0238$ $y_3 = -1.3165$ $y_4 = -1.5068$

б) Метод Рунге-Кутта 2-го порядка.

$$\begin{cases} \hat{y}_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \hat{y}_{n+1})\right) \end{cases}$$

$\begin{cases} \hat{y}_1 = 0.6 \\ y_1 = -0.511905 \end{cases}$ $\begin{cases} \hat{y}_2 = -0.942007 \\ y_2 = -0.826439 \end{cases}$ $\begin{cases} \hat{y}_3 = -1.180449 \\ y_3 = -1.129259 \end{cases}$ $\begin{cases} \hat{y}_4 = -1.335154 \\ y_4 = -1.293740 \end{cases}$.

Расчет оценки погрешности метода Эйлера по правилу Рунге:

$$y(t_i) - y_i^{(h/2)} \approx \frac{y_i^{(h/2)} - y_j^{(h)}}{2^1 - 1} = y_i^{(h/2)} - y_j^{(h)}$$

$2h = 0.4$ $t_0 = 1$; $t_1 = 1.4$; $t_2 = 1.8$.

$$y_1 = y_0 + 0.4\left(\frac{y_0}{t_0-4} + \frac{t_0-4}{t_0}\right) = -1.2$$

$$y_2 = y_1 + 0.4\left(\frac{y_1}{t-4} + \frac{t_1-4}{t_1}\right) = -1.7582$$

$t_1 = 1$: $r_0 = 0$

$t_2 = 1.4$: $r_1 = y_2^{(0.2)} - y_1^{(0.4)} = 0.1762$

$t_3 = 1.8$: $r_2 = y_4^{(0.2)} - y_2^{(0.4)} = 0.2514$

Расчет оценки погрешности метода Рунге-Кутта 2-го порядка по правилу Рунге:

$$y(t_i) - y_i^{(h/2)} \approx \frac{y_i^{(h/2)} - y_j^{(h)}}{2^2 - 1} = \frac{y_i^{(h/2)} - y_i^{(h)}}{3}$$ $2h = 0.4$.

$t_0 = 1$; $t_1 = 1.4$; $t_2 = 1.8$.

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = y_0 + 0.4\left(\frac{y_0}{t_0-4} + \frac{t_0-4}{t_0}\right) = -1.2 \\ y_1 = y_0 + \frac{0.4}{2}\left(\frac{y_0}{t_0-4} + \frac{t_0-4}{t_0} + \frac{\hat{y}_1}{t_1-4} + \frac{t_1-4}{t_1}\right) = -0.829174 \end{cases}$$

$\begin{cases} \hat{y}_2 = -1.486729 \\ y_2 = -1.267529 \end{cases}$

$t_1 = 1$: $r_0 = 0$

$t_2 = 1.4$: $r_1 = \frac{y_2^{(0.2)} - y_1^{(0.4)}}{3} = 8.94 \cdot 10^{-4}$

$t_3 = 1.8$: $r_2 = \frac{y_4^{(0.2)} - y_2^{(0.4)}}{3} = -8.7 \cdot 10^{-3}$.

Пр 24 продолжение.

Поиск точного решения.

$y' = \frac{y}{t-4} + \frac{t-4}{t}$

$y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$

$-u \cdot \frac{v}{t-4} + uv' + u'v = \frac{t-4}{t}$

$u\left(-\frac{v}{t-4} + v'\right) + u'v = \frac{t-4}{t}$

v такое, что условия выполняются:

$\begin{cases} u\left(-\frac{v}{t-4} + v'\right) = 0 \\ u' \cdot v = \frac{t-4}{t} \end{cases}$

$\frac{-v}{t-4} + v' = 0$

$v' = \frac{v}{t-4}$

$\frac{dv}{v} = \frac{1}{t-4}\,dt \qquad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dt}{t-4}$

$\ln(v) = \ln(t-4) \qquad v = t-4$

$u' \cdot v = \frac{t-4}{t} \qquad u't - u'4 = \frac{t-4}{t}$

$u' = \frac{1}{t} \qquad u = \int \frac{dt}{t} \qquad u = \ln t + C$

$y = uv = (\ln t + C)(t-4)$

подставим $y(1) = 0 \Rightarrow 3C = 0, \quad C = 0$

$\Rightarrow y = \ln t\,(t-4)$

$y_1 = (1.2-4)\ln 1.2 = -0.540500$

$y_2 = (1.4-4)\ln 1.4 = -0.874828$

$y_3 = (1.6-4)\ln 1.6 = -1.128009$

$y_4 = (1.8-4)\ln 1.8 = -1.293131$

ТР 27

$$\begin{cases} -y'' + y = (\pi^2+1)\cos(\pi(2x-1)/2) \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$h_1 = \frac{1}{3}$ $h_2 = \frac{1}{6}$

1) $h_1 = \frac{1}{3}$ $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = 1$

$\frac{-y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + q(x_i) y_i = f(x_i)$, т.к. $q(x) = 1$, то

$\frac{-y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + y_i = f(x_i)$ $y_{i-1} + (2+h^2) y_i - y_{i+1} = h^2 f(x)$.

$$\begin{cases} -y_0 + (2+h^2) y_1 - y_2 = h^2(\pi^2+1)\cdot\cos(\pi x_1 + \frac{\pi}{2}) \\ -y_1 + (2+h^2) y_2 - y_3 = h^2(\pi^2+1)\cdot\cos(\pi x_2 + \frac{\pi}{2}) \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \frac{19}{9} y_1 - y_2 = \frac{1}{9}(\pi^2+1)\cdot\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}) \\ -y_1 + \frac{19}{9} y_2 = \frac{1}{9}(\pi^2+1)\cdot\cos(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}) \end{cases}.$$

$$\begin{cases} y_1 = -0.941335 \\ y_2 = -0.941335 \end{cases}$$

2) $h_2 = \frac{1}{6}$ $x_0 = 0$; $x_1 = \frac{1}{6}$; $x_2 = \frac{2}{6}$, $x_3 = \frac{3}{6}$, $x_4 = \frac{4}{6}$, $x_5 = \frac{5}{6}$, $x_6 = 1$.

$$\begin{cases} -y_0 + (2+h^2) y_1 - y_2 = h^2(\pi^2+1)\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}) \\ -y_1 + (2+h^2) y_2 - y_3 = h^2(\pi^2+1)\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}) \\ -y_2 + (2+h^2) y_3 - y_4 = h^2(\pi^2+1)\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) \\ -y_3 + (2+h^2) y_4 - y_5 = h^2(\pi^2+1)\cos(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}), \\ -y_4 + (2+h^2) y_5 - y_6 = h^2(\pi^2+1)\cos(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2}). \end{cases}$$

Метод прогонки

$\alpha_1 = -\frac{c_1}{b_1} = 0.493097$

$\alpha_2 = -\frac{c_2}{b_2 + a_2\alpha_1} = 0.651507$

$\alpha_3 = -\frac{c_3}{b_3 + a_3\alpha_2} = 0.726484$

$$\begin{cases} -y_0 - 2.028 y_1 - y_2 = -0.150967 \\ -y_1 + 2.028 y_2 - y_3 = -0.261482 \\ -y_2 + 2.028 y_3 - y_4 = -0.301933 \\ -y_3 + 2.028 y_4 - y_5 = -0.261482 \\ -y_4 + 2.028 y_5 - y_6 = -0.150567 \end{cases}$$

$\alpha_4 = -\frac{c_4}{b_4 + a_4\alpha_3} = 0.768335$

$\beta_1 = \frac{d_1}{B_1} = -0.07441.$

$\beta_2 = \frac{d_2 - a_2\beta_1}{b_2 + a_2\alpha_1} = -0.218856$

$\beta_3 = \frac{d_3 - a_3\beta_2}{b_3 + a_3\alpha_2} = -0.378345$

$\beta_4 = \frac{d_4 - a_4\beta_3}{b_4 + a_4\alpha_3} = -0.491560$

$\beta_5 = \frac{d_5 - a_5\beta}{b_5 + a_5\alpha_4} = -0.510077.$

Продолжение ПРП.

$y_5 = \beta_5 = -0.510077$

$y_4 = \alpha_4 y_5 + \beta_4 = -0.883470$

$y_3 = \alpha_3 y_4 + \beta_3 = -1.020177$

$y_2 = \alpha_2 y_3 + \beta_2 = -0.883505$

$y_1 = \alpha_1 y_2 + \beta_1 = -0.510095$

$$y(x_i) - y_i^{(h)} \approx \frac{y_i^{(h/2)} - y_j^{(h)}}{3}$$

$x = 0: \quad r_0 = 0$

$x = \frac{1}{3}: \quad r_1 = \dfrac{y_2^{(1/6)} - y_1^{(1/3)}}{3} = 0.143347$

$x = \frac{2}{3}: \quad r_2 = \dfrac{y_4^{(1/6)} - y_2^{(1/3)}}{3} = -0.026978$

$x = 1: \quad r_3 = \dfrac{y_6^{(1/6)} - y_3^{(1/3)}}{3} = -0.170026.$