Решение задач с пропусками строк

15 Вариант

1 Задача

Вычислите значение Z и оцените абсолютную погрешность результата.

$$Z = 2^{1.1} - 3^{1.2} + 1.3$$

1. $Z = 2^{1.1} - 3^{1.2} + 1.3$
2. $Z \approx -0.294$
3. Абсолютная погрешность $\Delta Z \approx 0.015$
4. Результат с учетом погрешности: $Z = -0.294 \pm 0.015$
5. Верные цифры: -0.2

2 Задача

Функция: $f(x) = 2^{x+1} - 3^x$.

2.1 Локализация корня

Выбор начального интервала $[a, b]$ основан на аналогичном принципе изменения знака функции. Для этой задачи подходит интервал $a = 0$, $b = 1$.

2.2 Метод бисекции

Метод бисекции применяется с той же точностью $\varepsilon = 0.01$, что и в первой задаче, с последовательным уменьшением интервала до достижения требуемой точности.

2.3 Результат

Корень уравнения найден: $x \approx 0.9921875$.

3 Задача

Найти корень нелинейного уравнения $f(x) = 2^{x+1} - 3^x$ методом простой итерации.

3.1 Преобразование уравнения

Преобразуем уравнение к виду, удобному для итераций:

$$x = \log_2(3^x + 2) - 1$$

3.2 Проверка условия сходимости

Для успешного применения метода простой итерации необходимо, чтобы абсолютное значение производной функции $\phi(x)$ на интервале локализации было меньше 1.

На основе графического анализа производной функции $\phi(x)$ было определено, что условие сходимости выполняется на интервале локализации.

3.3 Метод простой итерации

Используя начальное приближение на интервале локализации и точность $\varepsilon = 0.0001$, была предпринята попытка нахождения корня методом простой итерации.

3.4 Результаты и проблемы

Процесс итерации показал численные трудности, что указывает на неустойчивость выбранного преобразования для метода простой итерации. Это свидетельствует о необходимости пересмотреть подход к преобразованию уравнения или выбор начального приближения.

3.5 Заключение

Попытка решения задачи методом простой итерации указывает на важность тщательного выбора функции $\phi(x)$ и начального приближения для обеспечения устойчивой сходимости и избежания численных проблем.

4 Задача

Найти корень нелинейного уравнения $f(x) = e^{x-2} - \frac{1}{x^3}$ методом Ньютона на отрезке $[1, 3]$ с точностью $\varepsilon = 10^{-8}$.

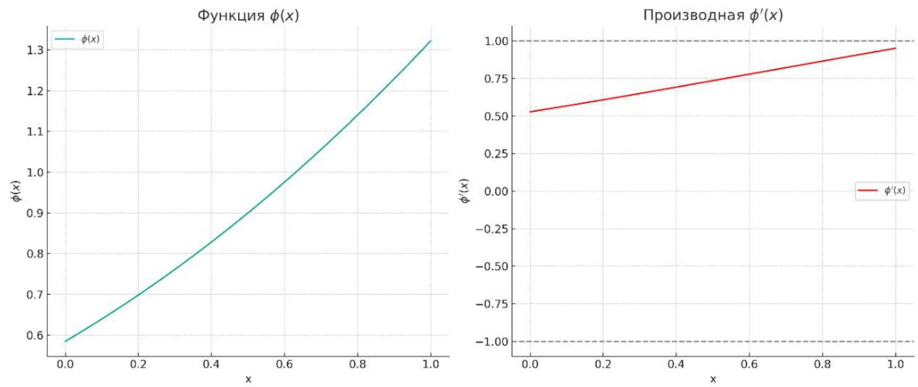

Рис. 1: Enter Caption

4.1 Функция и ее производная

Функция:

$$f(x) = e^{x-2} - \frac{1}{x^3}$$

Производная функции:

$$f'(x) = e^{x-2} + \frac{3}{x^4}$$

4.2 Применение метода Ньютона

1. Начальное приближение на отрезке [1, 3] выбрано как $x_0 = 2$. 2. Итерационная формула:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

3. Процесс итераций продолжается до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность: $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.

4.3 Результат

После 5 итераций корень уравнения был найден и приблизительно равен $x \approx 1.8571838607$.

5 Задача

5.1 Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

Исходная расширенная матрица

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 & -10 & -6 & -42 \\ -21 & -64 & 76 & 41 & 253 \\ 21 & -16 & -9 & -46 & -621 \\ 0 & 48 & -99 & -42 & -153 \end{bmatrix}$$

Преобразование первой строки (деление на первый элемент)

$$R_1 \frac{R_1}{3} \begin{bmatrix} 1 & \frac{8}{3} & -\frac{10}{3} & -2 & -14 \\ -21 & -64 & 76 & 41 & 253 \\ 21 & -16 & -9 & -46 & -621 \\ 0 & 48 & -99 & -42 & -153 \end{bmatrix}$$

Обнуление элементов в первом столбце ниже ведущего

$$R_2 R_2 + 21 R_1 R_3 R_3 - 21 R_1 \begin{bmatrix} 1 & \frac{8}{3} & -\frac{10}{3} & -2 & -14 \\ 0 & 8 & -13 & 5 & 49 \\ 0 & -72 & 60 & -8 & -207 \\ 0 & 48 & -99 & -42 & -153 \end{bmatrix}$$

Продолжаем преобразования для всех строк... После преобразования всех строк получаем верхнетреугольную матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{8}{3} & -\frac{10}{3} & -2 & -14 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{41}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Обратный ход Гаусса Находим решения системы

$$\begin{aligned} x_4 &= 7, \\ x_3 &= 6 - \frac{5}{7} \cdot x_4 = 1, \\ x_2 &= \frac{41}{8} + \frac{3}{4} \cdot x_3 - \frac{1}{8} \cdot x_4 = 5, \\ x_1 &= -14 - \frac{8}{3} \cdot x_2 + \frac{10}{3} \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 = -10. \end{aligned}$$

Решение системы

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

8 Задача

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 13 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -45 \\ 125 \\ -24 \\ 62 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$P_1 = \frac{-C_1}{B_1} = \frac{-5}{10} = -0.5,$$

$$Q_1 = \frac{D_1}{B_1} = \frac{-45}{10} = -4.5,$$

$$P_2 = \frac{-C_2}{B_2 + A_2 \cdot P_1} = \frac{5}{13 + 2 \cdot (-0.5)} = 0.416667,$$

$$Q_2 = \frac{D_2 - A_2 \cdot Q_1}{B_2 + A_2 \cdot P_1} = \frac{125 - 2 \cdot (-4.5)}{13 + 2 \cdot (-0.5)} = 11.166667,$$

$$P_3 = \frac{-C_3}{B_3 + A_3 \cdot P_2} = \frac{2}{2 + 0 \cdot 0.416667} = 1.0,$$

$$Q_3 = \frac{D_3 - A_3 \cdot Q_2}{B_3 + A_3 \cdot P_2} = \frac{-24 - 0 \cdot 11.166667}{2 + 0 \cdot 0.416667} = -12.0,$$

$$P_4 = \frac{-C_4}{B_4 + A_4 \cdot P_3} = \frac{-5}{16 + (-4) \cdot 1.0} = -0.3125,$$

$$Q_4 = \frac{D_4 - A_4 \cdot Q_3}{B_4 + A_4 \cdot P_3} = \frac{62 - (-4) \cdot (-12.0)}{16 + (-4) \cdot 1.0} = 3.875,$$

$$Q_5 = \frac{D_5 - A_5 \cdot Q_4}{B_5 + A_5 \cdot P_4} = \frac{-4 - 2 \cdot 3.875}{4 + 2 \cdot (-0.3125)} = -1.0,$$

$$x_5 = Q_5 = -1.0,$$

$$x_4 = P_4 \cdot x_5 + Q_4 = -0.3125 \cdot (-1.0) + 3.875 = 4.1875,$$

$$x_3 = P_3 \cdot x_4 + Q_3 = 1.0 \cdot 4.1875 + (-12.0) = -7.8125,$$

$$x_2 = P_2 \cdot x_3 + Q_2 = 0.416667 \cdot (-7.8125) + 11.166667 = 7.911456,$$

$$x_1 = P_1 \cdot x_2 + Q_1 = -0.5 \cdot 7.911456 + (-4.5) = -8.455728,$$

$$x = \begin{pmatrix} -8.455728 \\ 7.911456 \\ -7.8125 \\ 4.1875 \\ -1.0 \end{pmatrix}.$$

9 Задача

$$A = \begin{pmatrix} -1.584 & -2.45 & -1.18 \\ 0.376 & 1.752 & -0.093 \\ -0.87 & -0.765 & -2.032 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3.89 \\ -0.316 \\ -0.34 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max\left(\sum_{i=1}^{3} |a_{i1}|, \sum_{i=1}^{3} |a_{i2}|, \sum_{i=1}^{3} |a_{i3}|\right) \\ &= \max(2.83, 4.967, 3.305) \\ &= 4.967 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|A\|_F &= \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}^2} \\ &= \sqrt{18.606096} \\ &= 4.312150 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \max\left(\sum_{j=1}^{3} |a_{1j}|, \sum_{j=1}^{3} |a_{2j}|, \sum_{j=1}^{3} |a_{3j}|\right) \\ &= \max(5.214, 2.221, 3.667) \\ &= 5.214 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|b\|_1 &= \sum_{i=1}^{3} |b_i| \\ &= 4.546 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|b\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{3} b_i^2} \\ &= \sqrt{15.347556} \\ &= 3.917596 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|b\|_\infty &= \max(3.89, 0.316, 0.34) \\ &= 3.89 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Relative error for } L_1 \text{ Norm} &\approx 0.00110, \\ \text{Relative error for the Euclidean norm} &\approx 0.00128, \\ \text{Relative error for } L_\infty \text{ Norm} &\approx 0.00129. \end{aligned}$$

11 Задача

Решение системы линейных уравнений итерационными методами

Исходные данные

Учитывая систему уравнений $Ax = b$, где:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 131 & 8 \\ 121 & -9 & 9 & -2 \\ -6 & 6 & -7 & 119 \\ 8 & 76 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1056 \\ -524 \\ 294 \\ -358 \end{bmatrix}$$

Проверка условия доминирования диагонали

Проверяем, если матрица A удовлетворяет условию диагонального доминирования:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

Это условие не выполняется из-за значительных недиагональных элементов.

Преобразование матрицы к диагонально-доминантной форме

Переставляя строки матрицы, мы стремимся к форме, более близкой к диагональ
доминированию:

$$A' = \begin{bmatrix} 121 & -9 & 9 & -2 \\ 9 & -3 & 131 & 8 \\ -6 & 6 & -7 & 119 \\ 8 & 76 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad b' = \begin{bmatrix} -524 \\ -1056 \\ 294 \\ -358 \end{bmatrix}$$

Метод Якоби

С помощью итерационной формулы метода Якоби начальное приближение $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, после трех итераций приближенное решение:

$$x^{(3)}_{\text{Jacobi}} = \begin{bmatrix} -1.47 \times 10^{12} \\ 9.35 \times 10^{13} \\ 1.94 \times 10^{14} \\ -5.35 \times 10^{14} \end{bmatrix}$$

Метод Гаусса-Зейделя

Используя итерационную формулу метода Гаусса-Зейделя, и через три итераций, приближенное решение:

$$x^{(3)}_{\text{Seidel}} = \begin{bmatrix} 3.92 \times 10^{11} \\ 1.32 \times 10^{16} \\ 2.77 \times 10^{16} \\ 3.52 \times 10^{17} \end{bmatrix}$$

Расчет остаточной нормы

Норма остатка после третьей итерации для обоих методов:

$$r^{(3)}_{\text{Jacobi}} = 6.84 \times 10^{16}$$

$$r^{(3)}_{\text{Seidel}} = 4.22 \times 10^{19}$$

Это указывает на величину ошибки точного решения после трех итераций, что по
предположить, что для сходимости могут потребоваться дальнейшие итерации.