Вариант № 17.

ТР 1. Вычислить значение z и оценить абсолютную и относительную погрешность результатов, считая, что значения исходных данных получены в результате округления по дополнению. Записать результат с учетом погрешности. Указать верные цифры.

$$\sqrt[3]{e^{-3,03}-e^{3,03}}\cdot 5,5 \approx -15,08905 \quad a^*=3,03 \quad b^*=5,5$$
$$\Delta a^* = 0,005 \quad \Delta b^* = 0,05$$

$$|z_a'|\cdot|\Delta a| = \left|5,5\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(e^{-3,03}-e^{3,03})^2}}\cdot(-e^{-3,03}-e^{3,03})\right|\cdot|0,005| =$$
$$=\left|-\frac{11}{6}\frac{(e^{-3,03}+e^{3,03})}{\sqrt[3]{(e^{-3,03}-e^{3,03})^2}}\cdot 0,005\right| = 5,0532$$

$$|z_b'|\cdot|\Delta b| = \left|\sqrt[3]{e^{-3,03}-e^{3,03}}\cdot 0,05\right| = 0,1372$$

$$\Delta z = |z_a'|\cdot|\Delta a| + |z_b'||\Delta b| = 5,0532 + 0,1372 = 5,1904$$
$$\delta z = \frac{5,1904}{|-15,08905|} = 0,344$$

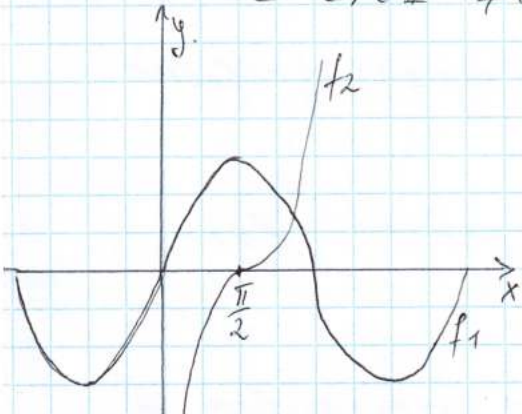
$z = -10 \pm 5,0532$ Ответ: $-10 \pm 5,0532$.

ТР2. Локализовать корень нелинейного уравнения $f(x)=0$ и найти его методом бисекции с точностью $\varepsilon = 0.01$.

$\varepsilon = 0,01 \quad f(x) = \sin x + (x-1,5)^3 = 0$

$f_1 = \sin x \quad f_2 = (x-1,5)^2$

Отрезок локализации: $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$



$0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi$: $\frac{0+\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \approx 1,5708$

$0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}$: $\frac{0+\pi/2}{2} = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854$

$0,\ \pi/8,\ \pi/4$: $\frac{0+\pi/4}{2} = \frac{\pi}{8} \approx 0,3927$

$\frac{\pi}{8},\ \frac{3\pi}{16},\ \frac{\pi}{4}$: $\frac{\pi/4+\pi/8}{2} = \frac{3\pi}{16} \approx 0,589$

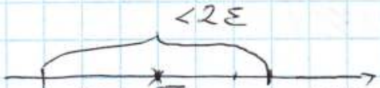
$\frac{3\pi}{16},\ \frac{7\pi}{32},\ \frac{\pi}{4}$: $\frac{\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{7\pi}{32} \approx 0,6872$

$\frac{3\pi}{16},\ \frac{13\pi}{64},\ \frac{7\pi}{32}$: $\frac{\frac{3\pi}{16}+\frac{7\pi}{32}}{2} = \frac{13\pi}{64} \approx 0,6381$

$\frac{13\pi}{64},\ \frac{27\pi}{128},\ \frac{7\pi}{32}$: $\frac{\frac{7\pi}{32}+\frac{13\pi}{64}}{2} = \frac{27\pi}{128} \approx 0,6627$

$\frac{13\pi}{64},\ \frac{53\pi}{256},\ \frac{27\pi}{128}$: $\frac{\frac{13\pi}{64}+\frac{27\pi}{128}}{2} = \frac{53\pi}{258} \approx 0,654$

$\bar{x} = 0,654023$.



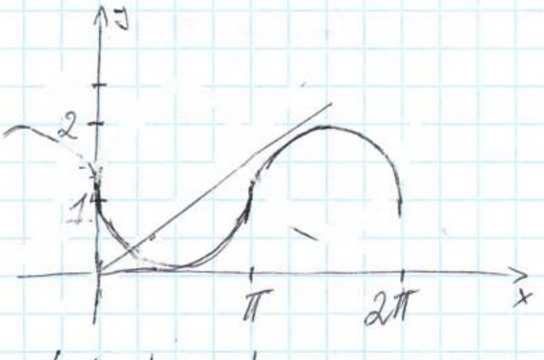
Ответ: $\bar{x} = 0,654023 \pm 0,01$

ТР3. Найти корень уравнения из задачи 2 методом простой итерации. Для этого преобразовать уравнение $f(x)=0$ к виду, удобному для итераций и проверить выполнение условия сходимости. В качестве отрезка локализации взять отрезок, полученный методом бисекции при решении задачи 2. Найти корень методом простой итерации с точностью $\varepsilon = 0{,}0001$

$f(x) = \sin x + (x-1{,}5)^3 \quad \varepsilon = 0{,}0001.$

$\sin x + (x-1{,}5)^3 = 0 \quad x = \underbrace{\sqrt[3]{-\sin x} + 1{,}5}_{\varphi(x)}$ отрезок локализации $[\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}]$

$f'(x) = \cos x + 3(x-1{,}5)^2$ положительна на отрезке локализации.



$x_0 = \frac{3\pi}{16} \quad \varphi(x_0) = 0{,}677922$

$x_1 = 0{,}677922 \quad \varphi(x_1) = 0{,}644021$

$x_2 = 0{,}644021 \quad \varphi(x_2) = 0{,}656373$

$x_3 = 0{,}656373 \quad \varphi(x_3) = 0{,}651793$

$x_4 = 0{,}651793 \quad \varphi(x_4) = 0{,}65348$

$x_5 = 0{,}65348 \quad \varphi(x_5) = 0{,}652857$

$x_6 = 0{,}652857 \quad \varphi(x_6) = 0{,}653087$

$x_7 = 0{,}653087 \quad \varphi(x_7) = 0{,}653062$

$|\varphi'(x)|_{[\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}]} = \left| -\frac{\cos(x)}{3\sqrt[3]{\sin^2(x)}} \right| < 1$

$M = f'(\frac{\pi}{8}) = 4{,}60223. \quad m = f'(\frac{\pi}{4}) = 2{,}23907$

$\alpha = \frac{2}{4{,}60223 + 2{,}23907} \approx 0{,}29 \quad \varphi(x) = x - 0{,}29(\sin x + (x-1{,}5)^3)$

$q = \frac{M-m}{M+m} = \frac{-2{,}23907 + 4{,}60223}{4{,}60223 + 2{,}23907} \approx 0{,}345$

$x_5 = 0{,}65348 \quad \varphi(x_5) = 0{,}653091 = x_6$

Проверим критерий окончания.

$|x_6 - x_5| = 0{,}000389 \le \frac{1-q}{q}\varepsilon = 0{,}000189 \Rightarrow$ неверно.

Выполним следующую операцию:

$x_7 = \varphi(x_6) = 0{,}653035$

$|x_7 - x_6| = 0{,}000056 \le \frac{1-q}{q}\varepsilon = 0{,}000189 \Rightarrow$ верно.

Ответ: $\bar{x} = 0{,}653 \pm 0{,}0001$

ТР4 Найти корень нелинейного уравнения $f(x)=0$, локализовать на отрезке $[a, b]$, методом Ньютона с точностью $\varepsilon = 10^{-8}$

$f(x) = 3(x-2) - \frac{1}{x-1}$, отрезок локализации $[2;4]$

$x_{k+1} = x_k - \frac{3(x_k-2) - \frac{1}{x_k-1}}{3 + \frac{1}{(x-1)^2}}$ возьмем в качестве начального приближения $x_0 = 3$.

$x_1 = 3 - \frac{3(3-2) - \frac{1}{3-1}}{3 + \frac{1}{(3-1)^2}} = 2{,}2307692307 \quad |x_1 - x_0| = 0{,}769231 \not\le \varepsilon.$

$x_2 = x_1 - \frac{3(x_1-2) - \frac{1}{x_1-1}}{3 + \frac{1}{(x_1-1)^2}} = 2{,}263602257 \quad |x_2 - x_1| = 0{,}032831 \not\le \varepsilon$

$$x_3 = x_2 - \frac{3(x_2-2) - \frac{1}{x_2-1}}{3 + \frac{1}{(x_2-1)^2}} = 2{,}263762612 \quad |x_3 - x_2| = 0{,}00015 \nleq \varepsilon$$

$$x_4 = x_3 - \frac{3(x_3-2) - \frac{1}{x_3-1}}{3 + \frac{1}{(x_3-1)^2}} = 2{,}263762615 \quad |x_4 - x_3| = 0{,}00000049 \nleq \varepsilon$$

$$x_5 = x_4 - \frac{3(x_4-2) - \frac{1}{x_4-1}}{3 + \frac{1}{(x_4-1)^2}} = 2{,}263762615 \quad |x_5 - x_4| = 0 \leq \varepsilon \Rightarrow$$ точность достигнута.

Ответ: $2{,}26376261 \pm 0{,}00000001$.

ТР5. Решить систему уравнений $Ax = b$ методом Гаусса (схема единственного деления).

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -6 & 6 & -2 \\ 50 & 21 & -36 & 5 \\ -60 & -108 & -6 & -54 \\ 10 & -57 & 0 & -50 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 46 \\ -131 \\ 1014 \\ 215 \end{pmatrix}$$

Шаг 1.

$$\mu_{2,1} = \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} = -\frac{50}{10} = -5$$

$$\mu_{3,1} = \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} = -\frac{-60}{10} = +6$$

$$\mu_{4,1} = \frac{a_{4,1}}{a_{1,1}} = -\frac{10}{10} = -1$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} -10 & -6 & 6 & -2 \\ 0 & -9 & -6 & -5 \\ 0 & -72 & -42 & -42 \\ 0 & -63 & 6 & -52 \end{pmatrix} \quad B^{(1)} = \begin{pmatrix} 46 \\ 99 \\ 738 \\ 261 \end{pmatrix}$$

Шаг 2

$$\mu_{3,2} = \frac{a^{(1)}_{3,2}}{a^{(1)}_{2,2}} = \frac{-72}{-9} = 8$$

$$\mu_{4,2} = \frac{a^{(1)}_{4,2}}{a^{(1)}_{2,2}} = \frac{-63}{-9} = 7$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} -10 & -6 & 6 & -2 \\ 0 & -9 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 48 & -17 \end{pmatrix} \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 46 \\ 99 \\ -54 \\ -432 \end{pmatrix}$$

Шаг 3.

$$\mu_{4,3} = \frac{a^{(2)}_{4,3}}{a^{(2)}_{3,3}} = \frac{48}{6} = 8$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} -10 & -6 & 6 & -2 \\ 0 & -9 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b^{(3)} = \begin{pmatrix} 46 \\ 99 \\ -54 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Обратный ход:

$$\begin{cases} -10x_1 - 6x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 46 \\ -9x_2 - 6x_3 - 5x_4 = 99 \\ 6x_3 - 2x_4 = -54 \\ -x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_4 = 0 \\ x_3 = \dfrac{-54 + 2x_4}{6} \\ x_2 = \dfrac{99 + 5x_4 + 6x_3}{-9} \\ x_1 = \dfrac{46 + 6x_2 - 6x_3 + 2x_4}{-10} \end{cases}$$

$x_4 = 0$
$x_3 = -9$
$x_2 = -5$
$x_1 = -7$

Ответ: $x = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$

ТР 8. Решить систему уравнений $Ax = b$ метод. прогонки.

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 10 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 16 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 19 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 8 \end{pmatrix} & c_i \\ \qquad\qquad\qquad a_i \; b_i & \end{array} \qquad b = \begin{pmatrix} -14 \\ -57 \\ -164 \\ 45 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Прямой ход. $\alpha_1 = -\frac{c_1}{b_1} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

$\beta_1 = \frac{d_1}{b_1} = \frac{-14}{4} = -3,5.$

$\gamma_2 = b_2 + a_2\alpha_1 = 10 + (-1)\cdot(-\frac{1}{2}) = 10,5.$

$\alpha_2 = -\frac{c_2}{\gamma_2} = -\frac{5}{10,5} = -\frac{10}{21}$

$$\beta_2 = \frac{d_2 - a_2\beta_1}{\gamma_2} = \frac{-57 - (-1)(-3,5)}{10,5} = -5\frac{16}{21}$$

$\gamma_3 = b_3 + a_3\alpha_2 = 16 + 4\cdot\left(-\frac{10}{21}\right) = 14\frac{2}{21}$

$\alpha_3 = \frac{-c_3}{\gamma_3} = \frac{-4}{14\frac{2}{21}} = -\frac{21}{74}$ $\quad \beta_3 = \frac{d_3 - a_3\beta_2}{\gamma_3} = \frac{-164 - 4\cdot\left(-5\frac{16}{21}\right)}{14\frac{2}{21}} = -10.$

$\gamma_4 = b_4 + a_4\alpha_3 = 19 + (-5)\cdot\left(-\frac{21}{74}\right) = 20\frac{31}{74}$

$\alpha_4 = -\frac{c_4}{\gamma_4} = \frac{5}{20\frac{31}{74}} = \frac{370}{1511}$ $\quad \beta_4 = \frac{d_4 - a_4\beta_3}{\gamma_4} = \frac{8 - (-5)\cdot(-10)}{\frac{370}{1511}} = -171\frac{96}{185}.$

$$\beta_5 = \frac{d_5 - a_5\beta_4}{b_5 + a_5\alpha_4} = \frac{8 - (-5)\cdot\left(-171\cdot\frac{96}{185}\right)}{8 + (-5)\cdot\frac{370}{1511}} = -64,30025$$

$x_5 = \beta_5 = -64,30025.$

$x_4 = \alpha_4\cdot x_5 + \beta_4 = \frac{370}{1511}\cdot(-64,30025) + \left(-171\frac{96}{185}\right) = -187,26418.$

$x_3 = \alpha_3 x_4 + \beta_3 = -\frac{21}{74}\cdot(-187,26418) - 10 = 43,14254.$

$x_2 = \alpha_2 x_3 + \beta_2 = -\frac{10}{21}\cdot(43,14254) - 5\frac{16}{21} = -26,30597.$

$x_1 = \alpha_1 x_2 + \beta_1 = -\frac{1}{2}\cdot(-26,30597) - 3,5 = 9,652985.$

Ответ: $x = \begin{pmatrix} 9,652985 \\ -26,30597 \\ 43,14254 \\ -187,26418 \\ -64,30025 \end{pmatrix}$

ТР9. Вычислить нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_E$, $\|\cdot\|_\infty$ матрицы A и нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ вектора b. Считая, что компоненты вектора b получены в результате округления по дополнению, найти его относительную погрешность в каждой из трех указанных норм.

$$A = \begin{pmatrix} 0,497 & 1,656 & 2,281 \\ -0,06 & -1,598 & 2,505 \\ 2,212 & -2,561 & 0,127 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ -5,44 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\|A\|_1 = \max\{2,769;\ 5,815;\ 4,913\} = 5,815.$

$\|A\|_E = \sqrt{0,497^2 + 1,656^2 + 2,281^2 + 0,06^2 + 1,598^2 + 2,505^2 + 2,212^2 + 2,561^2 + 0,127^2} \approx$
$\approx 5,33782.$

$\|A\|_\infty = \max\{4,434;\ 4,163;\ 4,9\} = 4,9.$

Абсолютная погрешность компонент вектора равны соответственно $5\cdot10^{-1}, 5\cdot10^{-3}, 5\cdot10^{-1}$.

$\|\cdot\|_1:\ \Delta(b) = |5\cdot10^{-1}| + |5\cdot10^{-3}| + |5\cdot10^{-1}| \approx 1,005.$
$\|\cdot\|_2:\ \Delta(b) = \sqrt{(5\cdot10^{-1})^2 + (5\cdot10^{-3})^2 + (5\cdot10^{-1})^2} \approx 0,707$
$\|\cdot\|_\infty:\ \Delta(b) = \max\{|5\cdot10^{-1}|; |5\cdot10^{-3}|; |5\cdot10^{-1}|\} = 5\cdot10^{-1}$

$\|b\|_1 = |-5| + |-5,44| + |-1| = 11,44.$
$\|b\|_2 = \sqrt{(-5)^2 + (-5,44)^2 + (-1)^2} = 7,45611.$
$\|b\|_\infty = \max\{|-5|; |-5,44|; |-1|\} = 5,44.$

$\delta_1 b = \dfrac{1,005}{11,44} \approx 0,0878 \quad \delta_2 b = \dfrac{0,707}{7,45611} \approx 0,0948 \quad \delta_\infty b = \dfrac{5\cdot10^{-1}}{5,44} \approx 0,0919$

ТР 11

$$A=\begin{pmatrix}-8 & 109 & -3 & 9\\ 5 & -1 & 2 & 82\\ 118 & 7 & 8 & 4\\ -6 & -8 & 119 & 0\end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix}586\\ -51\\ 872\\ 29\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}118x_1+7x_2+8x_3+4x_4=872\\ -8x_1+109x_2-3x_3+9x_4=586\\ -6x_1-8x_2+119x_3+0=29\\ 5x_1-x_2+2x_3+82x_4=-51\end{cases}$$

Достаточное усл-ие сходимости ✓ выполнено.

Преобразуем систему.

$$\begin{cases}x_1=\frac{872}{118}-\frac{7x_2}{118}-\frac{8x_3}{118}-\frac{4x_4}{118}\\ x_2=\frac{586}{109}+\frac{8x_1}{109}+\frac{3x_3}{109}-\frac{9x_4}{109}\\ x_3=\frac{29}{119}+\frac{6x_1}{119}+\frac{8x_2}{119}+0\\ x_4=-\frac{51}{82}-\frac{5x_1}{82}+\frac{x_2}{82}-\frac{2x_3}{82}\end{cases}$$

$$B=\begin{pmatrix}0 & -\frac{7}{118} & -\frac{8}{118} & -\frac{4}{118}\\ \frac{8}{109} & 0 & \frac{3}{109} & -\frac{9}{109}\\ \frac{6}{119} & \frac{8}{119} & 0 & 0\\ -\frac{5}{82} & +\frac{1}{82} & -\frac{2}{82} & -0\end{pmatrix}$$

$\|B\|_\infty < 1$, методы будут сходиться.

Метод Якоби: $x^{(0)}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

1 шаг:
$$\begin{cases}x_1^{(1)}=\frac{872}{118}-\frac{7}{118}-\frac{8}{118}-\frac{4}{118}=7,22881\\ x_2^{(1)}=\frac{586}{109}+\frac{8}{109}+\frac{3}{109}-\frac{9}{109}=5,40367\\ x_3^{(1)}=\frac{29}{119}+\frac{6}{119}+\frac{8}{119}=0,361345\\ x_4^{(1)}=\frac{-51}{82}-\frac{5}{82}+\frac{1}{82}-\frac{2}{82}=-0,695121\end{cases} \quad x^{(1)}=\begin{pmatrix}7,22881\\ 5,40367\\ 0,361345\\ -0,695121\end{pmatrix}$$

2 шаг:
$$\begin{cases}x_1^{(2)}=\frac{872}{118}-\frac{7\cdot x_2^{(1)}}{118}-\frac{8\cdot x_3^{(1)}}{118}-\frac{4\cdot x_4^{(1)}}{118}=7,06834\\ x_2^{(2)}=\frac{586}{109}+\frac{8\cdot x_1^{(1)}}{109}+\frac{3\cdot x_3^{(1)}}{109}-\frac{9\cdot x_4^{(1)}}{109}=5,97404\\ x_3^{(2)}=\frac{29}{119}+\frac{6\cdot x_1^{(1)}}{119}+\frac{8\cdot x_2^{(1)}}{119}=0,971447\\ x_4^{(2)}=\frac{-51}{82}-\frac{5x_1^{(1)}}{82}+\frac{1\cdot x_2^{(1)}}{82}-\frac{2x_3^{(1)}}{82}=-1,00565\end{cases} \quad x^{(2)}=\begin{pmatrix}7,06834\\ 5,97404\\ 0,971447\\ -1,00565\end{pmatrix}$$

3 шаг: аналогично предыдущим, получаем $x^{(3)}=\begin{pmatrix}7,00367\\ 6,0047\\ 1,0017\\ -1,00379\end{pmatrix}$

Метод Зейделя: $x^{(0)}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\frac{872}{118}-\frac{7x_2^{(k)}}{118}-\frac{8x_3^{(k)}}{118}-\frac{4x_4^{(k)}}{118}\\ x_2^{(k+1)}=\frac{586}{109}+\frac{8x_1^{(k+1)}}{109}+\frac{3x_3^{(k)}}{109}-\frac{9x_4^{(k)}}{109}\\ x_3^{(k+1)}=\frac{29}{119}+\frac{6x_1^{(k+1)}}{119}+\frac{8x_2^{(k+1)}}{119}+0\\ x_4^{(k+1)}=-\frac{51}{82}-\frac{5x_1^{(k+1)}}{82}+\frac{x_2^{(k+1)}}{82}-\frac{2x_3^{(k+1)}}{82}\end{cases}$$

1 шаг: По очереди подставляем $x^{(0)}$ и вычисляем компоненты $x^{(1)}$, получаем:

$$x^{(1)}=\begin{pmatrix}7,22881\\ 5,85166\\ 1,00156\\ -1,0158\end{pmatrix}$$

2 шаг: $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 7,00923 \\ 5,83428 \\ 0,989325 \\ -1,00232 \end{pmatrix}$ 3 шаг: $x^{(3)} = \begin{pmatrix} 7,01063 \\ 6,00068 \\ 1,00058 \\ -1,00065 \end{pmatrix}$

Вектор невязки при $x^{(0)}$ равен: $R = \begin{pmatrix} 735 \\ 479 \\ -76 \\ -137 \end{pmatrix}$ $\|R\|_\infty = 735$.

Вектор невязки при $x^{(3)}$ в методе Якоби: $R = \begin{pmatrix} -0,4644 \\ -0,44373 \\ -0,14268 \\ 0,29373 \end{pmatrix}$ $\|R\|_\infty = 0,4644$

в методе Зейделя: $R = \begin{pmatrix} -1,26114 \\ 0,01872 \\ 0,0002 \\ -0,00033 \end{pmatrix}$ $\|R\|_\infty = 1,26114$.

В методе Якоби норма невязки уменьшилась в 1582 раза. В методе Зейделя в 582 раза.

ТР 13 Функция $y = y(x)$ задана таблицей своих значений. Применяя метод наименьших квадратов, приблизить ф-цию многочленами 1-й и 2-й степени. Для каждого приближения определить величину среднеквадратичной погрешности. Построить на одном чертеже точечный график ф-ции и графики многочленов.

x	-2,6	-1,3	0	1,3	2,6
y	2,6	0	2,7	-6,6	-7,9

1) $\begin{cases} (n+1)a_0 + \left(\sum\limits_{k=0}^{n} x_k\right) a_1 = \sum\limits_{k=0}^{n} y_k \\ \left(\sum\limits_{k=0}^{n} x_k\right) a_0 + \left(\sum\limits_{k=0}^{n} x_k^2\right) a_1 = \sum\limits_{k=0}^{n} y_k x_k \end{cases}$

$\begin{cases} 5a_0 + 0 \cdot a_1 = -9,2 \\ 0 \cdot a_0 + 16,9\, a_1 = -35,83 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -1,84 \\ a_1 = -2,12 \end{cases}$

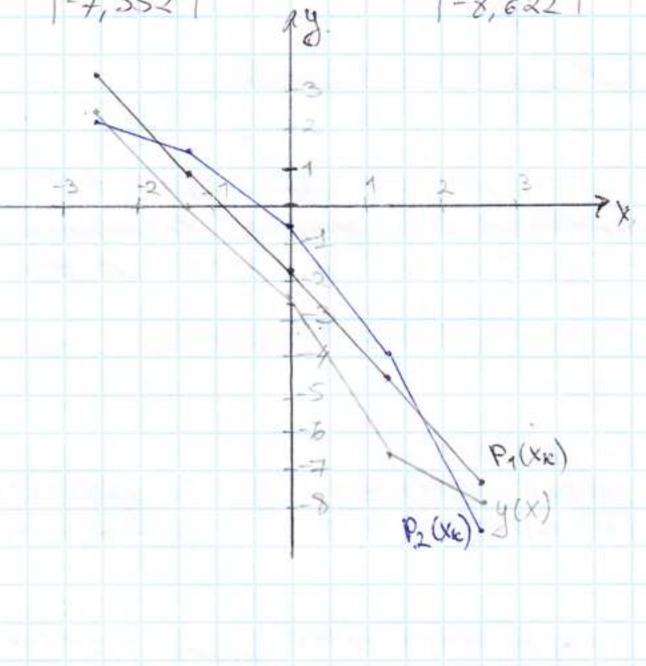
$P_1(x) = -1,84 - 2,12x \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}(P_1(x_k) - y_k)^2} = 2,11$

2) $\begin{cases} (n+1)a_0 + \left(\sum\limits_{k=0}^{n} x_k\right) a_1 + \left(\sum\limits_{k=0}^{n} x_k^2\right) a_2 = \sum\limits_{k=0}^{n} y_k \\ \left(\sum\limits_{k=0}^{n} x_k\right) a_0 + \left(\sum\limits_{k=0}^{n} x_k^2\right) a_1 + \left(\sum\limits_{k=0}^{n} x_k^3\right) a_2 = \sum\limits_{k=0}^{n} y_k x_k \\ \left(\sum\limits_{k=0}^{n} x_k^2\right) a_0 + \left(\sum\limits_{k=0}^{n} x_k^3\right) a_1 + \left(\sum\limits_{k=0}^{n} x_k^4\right) a_2 = \sum\limits_{k=0}^{n} y_k x_k^2 \end{cases}$ $\begin{cases} 5a_0 + 0 \cdot a_1 + 16,9a_2 = -9,2 \\ 0 \cdot a_0 + 16,9a_1 + 0a_2 = -35,8 \\ 16,9a_0 + 0 \cdot a_1 + 97,1a_2 = -46,9 \end{cases}$

$a_0 = -0,5; a_1 = -2,11 \; a_2 = -0,39$

$P_2(x) \approx -0,5 - 2,11x - 0,39x^2 \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n+1}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} P_2(x_k) - y_k\right)^2} = 1,853$

$P_1(x_k) = \begin{vmatrix} 3,672 \\ 0,916 \\ -1,84 \\ -4,596 \\ -7,352 \end{vmatrix} \qquad P_2(x_k) = \begin{vmatrix} 2,349 \\ 1,583 \\ -0,5 \\ -3,902 \\ -8,622 \end{vmatrix}$



ТР 14. Функция $y=y(x)$ задана таблицей своих значений. Применяя метод наименьших квадратов, приблизить ее функцией вида $\Phi(x) = a\varphi_0(x) + b\varphi_1(x)$. Определить величину среднеквадратичной погрешности. Построить на одном чертеже точный график исходных данных и график ф-ии $\Phi(x)$

$\varphi_0(x) = 1$; $\varphi_1(x) = \cos(2x)$

x	2,9	3,3	4,1	5,5	6,3	6,4
y	1,551	1,635	-0,041	0,406	1,699	1,665

$\Phi(x) = a + b\cos(2x)$

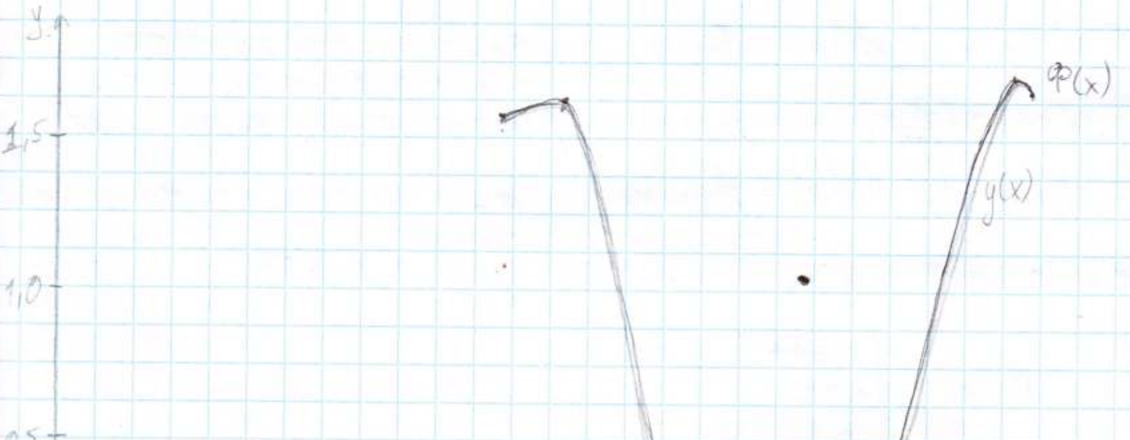
$$\begin{cases} (n+1)a + \left(\sum\limits_{k=0}^{n}\cos(2x)\right)b = \sum\limits_{k=0}^{n} y_k \\ \left(\sum\limits_{k=0}^{n}\cos(2x)\right)a + \left(\sum\limits_{k=0}^{n}(\cos(2x))^2\right)b = \sum\limits_{k=0}^{n} y_k\cos(2x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6a + 3,473298 = 6,915 \\ 3,47329a + 3,77741b = 6,26658 \end{cases}$$

$a = 0,40002 \quad b = 1,29988$

$\Phi(x) = 0,40002 + 1,29988\cos(2x) \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}(\Phi(x_k) - y_k)^2} = 0,00021$

x	2,9	3,3	4,1	5,5	6,3	6,4
$\Phi(x)$	1,55109	1,63521	-0,04084	0,40571	1,69917	1,66459



ТР15. Для функции $y=y(x)$, заданной таблицей своих значений, построить интерполяционные многочлены в форме Лагранжа и Ньютона. Используя, их вычислить приближенное значение функции в точке $\tilde{x}$.

x	0	1	2	3
y	0	2	1	-1

$\tilde{x} = 0,21$

1) интерполяционный многочлен Лагранжа:

$$L_3(x) = y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} +$$
$$+ y_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$L_3(\tilde{x}) = 0 + 2\cdot\frac{0,21\cdot(-1,79)(-2,79)}{1\cdot(-1)(-2)} + 1\cdot\frac{0,21\cdot(-0,79)(-2,79)}{2\cdot1\cdot(-1)} + (-1)\cdot\frac{0,21\cdot(-0,79)(-1,79)}{3\cdot2\cdot1} =$$
$$= 0,767837.$$

$L_3(0,21) = 0,767837$

2) интерполяционный многочлен Ньютона.

$x_0 = 0$	0	$\Delta^1 y_0 = 2$ $\quad \Delta^2 y_0 = -3$ $\quad \Delta^3 y_0 = 2$.
$x_1 = 1$	2	$\Delta^1 y_1 = -1$ $\quad \Delta^2 y_0 = -1$
$x_2 = 2$	1	$\Delta^1 y_2 = -2$
$x_3 = 3$	-1	

$$P_3(x) = y_0 + \frac{\Delta^1 y_0}{1!}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}(x-x_0)(x-x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$P_3(0{,}21) = 0 + \frac{2}{1}(0{,}21-0) + \frac{-3}{2}\cdot 0{,}21(0{,}21-1) + \frac{2}{6}\cdot 0{,}21(-0{,}79)\cdot(0{,}21-2) = 0{,}767837.$$

№ 16.

Функция $y=y(x)$ задана таблицей своих значений. Вычислить приближенное значение функции в точке $\tilde{x}$, используя интерполяционные многочлены Ньютона первой, второй и третьей степени. Для каждого вычисленного значения найти практическую оценку погрешности. Записать все результаты с учетом погрешности.

x	2	2,8	3,6	4	4,8
y	6,4	10,5	15,9	19	26,2

$\tilde{x} = 2{,}92$.

↓

x	3,6	2,8	2	4	4,8
y	15,9	10,5	6,4	19	26,2

$x_0 = 3{,}6$	$F_0 = y_0 = 15{,}9$	F_{01}	F_{012}		
$x_1 = 2{,}8$	$F_1 = y_1 = 10{,}5$	F_{12}	F_{123}	F_{0123}	
$x_2 = 2$	$F_2 = y_2 = 6{,}4$	F_{23}			F_{01234}
$x_3 = 4$	$F_3 = y_3 = 19$	F_{34}	F_{234}	F_{1234}	
$x_4 = 4{,}8$	$F_4 = y_4 = 26{,}2$				

$$F_{01} = \frac{F_1 - F_0}{x_1 - x_0} = \frac{10{,}5 - 15{,}9}{2{,}8 - 3{,}6} = 6{,}75 \quad F_{12} = \frac{F_2 - F_1}{x_2 - x_1} = 5{,}125 \quad F_{23} = \frac{F_3 - F_2}{x_3 - x_2} = 6{,}3$$

$$F_{34} = \frac{F_4 - F_3}{x_4 - x_3} = 9$$

$$F_{012} = \frac{F_{12} - F_{01}}{x_2 - x_0} = 1{,}015 \quad F_{123} = \frac{F_{23} - F_{12}}{x_3 - x_1} = 0{,}979 \quad F_{234} = \frac{F_{34} - F_{23}}{x_4 - x_2} = 0{,}964$$

$$F_{0123} = \frac{F_{123} - F_{012}}{x_3 - x_0} = -0{,}09 \quad F_{1234} = \frac{F_{234} - F_{123}}{x_4 - x_1} = -0{,}0075$$

$$F_{01234} = \frac{F_{1234} - F_{0123}}{x_4 - x_0} = 0{,}06875.$$

$m = 0$:

$P_0(x) = F_0 = 15{,}9$ $\quad P_0(\tilde{x}) = 15{,}9$ $\quad F_{01}\cdot\omega_1(\tilde{x}) = F_{01}(\tilde{x}-x_0) = 6{,}75(2{,}92-3{,}6) = -4{,}59$

$\varepsilon_0 = |F_{01}\cdot\omega_1(\tilde{x})| \approx 5$ $\quad f(2{,}92) = 15 \pm 5$.

$m = 1$:

$P_1(x) = P_0(x) + F_{01}\omega_1(x)$ $\quad P_1(\tilde{x}) = 15{,}9 - 4{,}59 = 11{,}31$.

$F_{012}\,\omega_2(\tilde{x}) = F_{012}(\tilde{x}-x_0)(\tilde{x}-x_1) = -0{,}082824.$ $\quad \varepsilon_1 \approx 0{,}08$ $\quad f(2{,}92) = 11{,}31 \pm 0{,}08$

$m = 2$:

$P_2(x) = P_1(x) + F_{012}\,\omega_2(x)$ $\quad P_2(\tilde{x}) = 11{,}31 - 0{,}082824 = 11{,}227176.$

$F_{0123}\,\omega_3(\tilde{x}) = F_{0123}\cdot(\tilde{x}-x_0)(\tilde{x}-x_1)(\tilde{x}-x_2) = 0{,}00675648$ $\quad \varepsilon_2 \approx 0{,}007$ $\quad f(2{,}92) = 11{,}227 \pm 0{,}007$

$m = 3$:

$P_3(x) = P_2(x) + F_{0123}\,\omega_3(x)$ $\quad P_3(\tilde{x}) = 11{,}227176 - 0{,}0075648 = 11{,}22041952.$

$F_{01234}\cdot\omega_4(\tilde{x}) = F_{01234}\cdot(\tilde{x}-x_0)(\tilde{x}-x_1)(\tilde{x}-x_2)(\tilde{x}-x_3) = -0{,}0104793$

$\varepsilon_3 \approx 0{,}01$

$f(2{,}92) = 11{,}22 \pm 0{,}01.$

ТР20. Вычислить приближенное значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$, используя квадратурные формулы: а) центральных прямоугольник с шагом $h=0.4$; дать априорную оценку погрешности; б) трапеции с шагами $h=0.4$ и $h=0.2$; оценить погрешность последнего результата по правилу Рунге и уточнить последний результат по Рунге; в) Симпсона с шагом $h=0.4$

$$J = \int_{3,9}^{5,5} e^{0,3x^2}$$

а) Вычислить с помощью формулы центральных прямоугольников с $h=0.4$

$h=0.4 \quad \{x_i\}_{i=0}^{4} = \{3,9;\ 4,3;\ 4,7;\ 5,1;\ 5,5\}$.

$I^{(h)} = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}+h/2) = 0,4(e^{0,3\cdot(4,1)^2}+e^{0,3\cdot(4,5)^2}+e^{0,3\cdot(4,9)^2}+e^{0,3(5,3)^2}) = 2600,80476.$

$|J - I^{(h)}| \le \frac{M_2(b-a)h^2}{24} \qquad M_2 = \max_{[3,9;5,5]}|f''(x)|$

$f'(x) = 3/5\cdot x\cdot e^{0,3x^2} \qquad f''(x) = e^{0,3x^2}\left(\frac{3}{5}+\frac{9x^2}{25}\right) \qquad f''(3,9)=582,47179;\ f''(5,5)=100355,79414 \Rightarrow M_2 = 100355,79414$

$|J - I^{(h)}| \le \frac{100355,79414\cdot(5,5-3,9)\cdot 0,4^2}{24} = 1070,4618$

$J = 2600 \pm 1070$

б) Вычислить с помощью формулы трапеции.

1) $h=0,4$

$I_{тр}^{(h)} = h\cdot\left(\frac{f(x_0)+f(x_N)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\right) = 0,4\cdot\left(\frac{95,87066+8734,18574}{2} + 256,467 + 755,21313 + 2447,93478\right) = 3149,857192$

2) $h=0,2 \quad \{x_i\}_{i=0}^{8} = \{3,9;\ 4,1;\ 4,3;\ 4,5;\ 4,7;\ 4,9;\ 5,1;\ 5,3;\ 5,5\}$

$I_{тр}^{(h)} = 0,2\left(\frac{95,87066+8734,18574}{2} + 154,93412 + 256,467 + 434,8495 + 755,21313 + 1343,45509 + 2447,93478 + 4568,77319\right) = 2875,331002$

$J - I_{тр}^{(h)} \approx \frac{I_{тр}^{(h)} - I_{тр}^{(2h)}}{2^p-1} = \frac{2875,331002-3149,857192}{3} = -91,50873$

$I_{уточн} = 2875,331002 - 91,50873 = 2783,822272$

в) Вычислить с помощью функции Симпсона:

$h=0,4;\ n=4 \quad I_c^{(h)} = \frac{h}{6}\left(f(x_0)+f(x_n)+4\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) =$

$= \frac{0,4}{6}(95,87066+8734,18574 + 4(154,93412+434,8495+1343,45509+4568,77319) + 2(256,467+755,21313+2447,93478)) = 2783,82225$

ТР21. Дан интеграл вида $\int_a^b (c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4)dx$. Используя априорную оценку погрешности формулы трапеции, определить шаг интегрирования, достаточный для достижения точности $\varepsilon=0,01$ и вычислить интеграл с этим шагом. Вычислите точное значение интеграла, подтвердить достижение указанной точности.

$J = \int_{-0,1}^{0,4}(3-3x-3x^2+3x^3)dx \qquad |J - I_{тр}^{(h)}| \le \frac{M_2(b-a)h^2}{12}$

$M_2 = \max_{[-0,1;0,4]}|f''(x)| \qquad f'(x) = -3-6x+9x^2;\ f''(x) = -6+18x \quad M_2 = |f''(-0,1)| = 7,8$

$|J - I_{тр}^{(h)}| \le \frac{7,8(0,4+0,1)\cdot h^2}{12} \le \varepsilon = 0,01 \Rightarrow \frac{7,8\cdot 0,5\cdot h^2}{12} \le 0,01 \quad h \le 0,175412$

$\frac{b-a}{h} = \frac{0,4+0,1}{0,175412} = 2,85 \Rightarrow N=3 \Rightarrow h_{max} = \frac{b-a}{N} = \frac{0,5}{3} = 0,16666$

$\{x_i\}_{i=0}^{3} = \{-0,1;\ 0,06666;\ 0,23332;\ 0,39998\}$.

$I_{TP}^{(h)} = h\left(\frac{f(x_0)+f(x_N)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\right) = 0,16666\left(\frac{3,267+1,51208}{2} + 2,78758 + 2,17483\right) =$
$= 1,225275987.$

$J = \int_{-0,1}^{0,4}(3-3x-3x^2+3x^3)dx = \left(3x - \frac{3x^2}{2} - x^3 + \frac{3}{4}x^4\right)\Big|_{-0,1}^{0,4} = 0,9152 - (-0,313925) =$
$= 1,229125.$

$|J - I_{TP}^{(h)}| \le \varepsilon.$

$|1,229125 - 1,225275987| \le \varepsilon$

$0,003849013 \le 0,01 \Rightarrow$ точность $\varepsilon = 0,01$ достигнута

ТР23. Вычислить центральную и левую разностные производные, а также вторую разностную производную функции $f(x)$ с шагом $h=0,1$ в точке $x_0 = \frac{a+b}{2}$. Вычислить точное значение производной в заданной точке, сравнить качество приближения

$f(x) = e^{0,3\cdot x^2} \quad x_0 = \frac{5,5+3,9}{2} = 4,7 \quad h = 0,1$

$f_y'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{f(4,7+0,1) - f(4,7-0,1)}{0,2} = 2164,52437$

$f_л'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \frac{f(4,7) - f(4,7-0,1)}{0,1} = 1838,64262$

$f'(x) = \frac{3}{5}xe^{0,3x^2} \quad f'(4,7) = 2129,70102$

$\Delta_y = |2129,70102 - 2164,52437| = 34,82335$

$\Delta_л = |2129,70102 - 1838,64262| = 291,0584$

Центральная разностная производная дала значение на порядок точнее, что подтверждает ее более высокий класс точности.

$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = 6517,63516$

$f''(x) = e^{0,3\cdot x^2}\cdot\left(\frac{3}{5} + \frac{9x^2}{25}\right) \Rightarrow f''(4,7) = 6458,88477$

$\Delta = |6458,88477 - 6517,63516| = 58,75039$

ТР24. Численно решить задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-ого порядка $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ на отрезке $[t_0; t_0+0,8]$ с шагом $h=0,2$

а) методом Эйлера; б) методом Рунге-Кутты 2-ого порядка. Оценить погрешность по правилу Рунге. Найти точное решение задачи. Построить на одном чертеже графики точного и приближенных решений.

$\begin{cases} y' = y/t + t\cos t + t \\ y(\pi) = \pi^2 \end{cases} \quad t_0 = \pi;\ t_1 = \pi+0,2;\ t_2 = \pi+0,4;\ t_3 = \pi+0,6;\ t_4 = \pi+0,8$

а) метод Эйлера.

$y_{n+1} = y_n + h\cdot f(t_n, y_n)$

$y_1 = y_0 + 0,2(y_0/t_0 + t_0\cos t_0 + t_0) = 10,49792 = \pi^2 + 0,2\pi$

$y_2 = 11,13956;\ y_3 = 11,82454;\ y_4 = 12,5873.$

б) метод Рунге-Кутты 2-ого порядка.

$\tilde{y}_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$

$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})\right)$

$\begin{cases} \tilde{y}_1 = 10,49792 \\ y_1 = 10,50458 \end{cases};\ \begin{cases} \tilde{y}_2 = 11,14662 \\ y_2 = 11,16829 \end{cases};\ \begin{cases} \tilde{y}_3 = 11,85367 \\ y = 11,89314 \end{cases};\ \begin{cases} \tilde{y}_4 = 12,65957 \\ y_4 = 12,77108 \end{cases}$

Расчет оценки погрешности метода Эйлера по правилу Рунге:

$y(t_i) - y_i^{(h/2)} \approx \frac{y_i^{(h/2)} - y_i^{h}}{2^1 - 1} = y_i^{(h/2)} - y_i^{(h)}.$

$2h = 0,4$

$t_0 = \pi$; $t_1 = \pi + 0,4$; $t_2 = \pi + 0,8$

$y_1 = y_0 + 0,4\left(\frac{y_0}{t_0} + t_0\cos(t_0) + t_0\right) = 11,12624$

$y_2 = y_1 + 0,4\left(y_1/t_1 + t_1\cos(t_1) + t_1\right) = 12,49471$

$t_0 = \pi: \tau_0 = 0$; $t_1 = \pi + 0,4: \tau_1 = y_2^{(0,2)} - y_1^{(0,4)} = 0,01341$; $t_2 = \pi + 0,8: \tau_2 = y_4^{(0,2)} - y_2^{(0,4)} = 0,09259$

Расчёт оценки погрешности метода Рунге-Кутты 2-ого порядка по правилу Рунге

$$y(t_i) - y_i^{(h/2)} \approx \frac{y_i^{(h/2)} - y_i^{(h)}}{2^2 - 1} = \frac{y_i^{(h/2)} - y_i^{(h)}}{3}$$

$2h = 0,4$

$t_0 = \pi$; $t_1 = \pi + 0,4$; $t_2 = \pi + 0,8$

$$\begin{cases} \tilde{y}_1 = y_0 + 0,4(y_0/t_0 + t_0\cos t_0 + t_0) = 11,12624 \\ y_1 = y_0 + \frac{0,4}{2}\left(y_0/t_0 + t_0\cos t_0 + t_0 + \frac{\tilde{y}_1}{t_1} + t_1\cos t_1 + t_1\right) = 11,18216 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{y}_2 = 12,55694 \\ y_2 = 12,74579 \end{cases}$$

$t_0 = \pi: \tau_0 = 0$; $t_1 = \pi + 0,4: \tau_1 = \frac{y_2^{(0,2)} - y_1^{(0,4)}}{3} = -0,00482333$; $t_2 = \pi + 0,8: \tau_2 = \frac{y_4^{(0,2)} + y_2^{(0,4)}}{3} = -0,00957$.

Поиск точного решения:

$y' = y/t + t\cos t + t \qquad y = v\cdot u$

$y' - y/t = t\cos t + t$

$u\cdot v' + u'v - \frac{uv}{t} = t\cos(t) + t$

$$\begin{cases} v = t \\ v' - \frac{v}{t} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad u'v + u(v' + \frac{v}{t}) = t\cos(t) + t$$

$u't = t\cos t + t$

$u' = \cos t + 1$

$du = (\cos t + 1)dt$

$u = \sin t + t + c$; $t = 0$

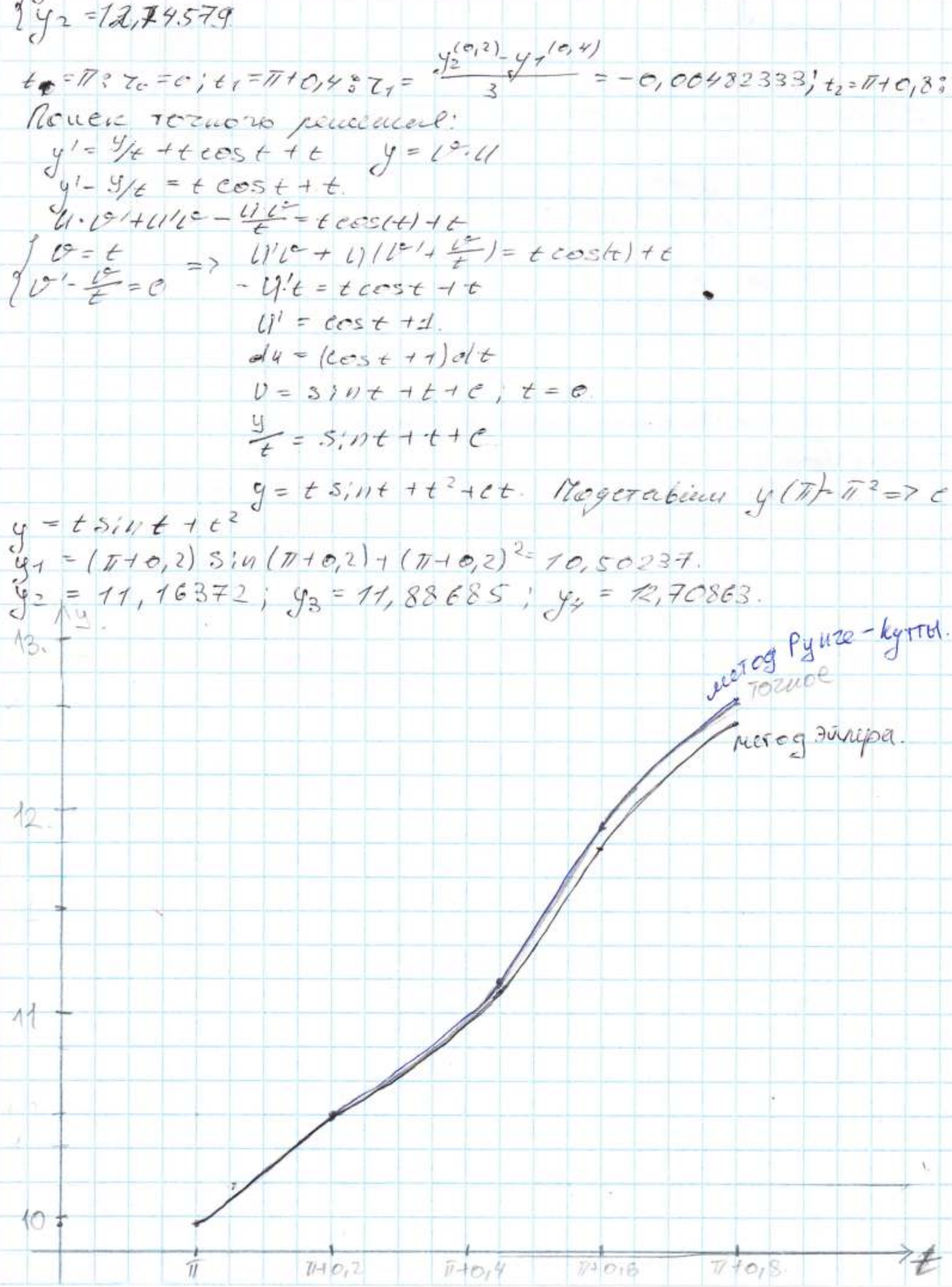
$\frac{y}{t} = \sin t + t + c$

$y = t\sin t + t^2 + ct$. Подставим $y(\pi) = \pi^2 \Rightarrow c = 0$

$y = t\sin t + t^2$

$y_1 = (\pi + 0,2)\sin(\pi + 0,2) + (\pi + 0,2)^2 = 10,50237$.

$y_2 = 11,16372$; $y_3 = 11,88685$; $y_4 = 12,70863$.



ТР27. Методом конечных разностей найти решение краевой задачи

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = f(x) \\ y(0) = y_0;\ y(1) = y_1 \end{cases}$$

с шагами $h_1 = \frac{1}{3}$, $h_2 = \frac{1}{6}$ и оценить погрешность по правилу Рунге. Построить на одном чертеже графики полученных приближенных решений.

$$\begin{cases} -y'' + 2\pi^2 \cdot y = 3\pi^2 \sin(\pi x) \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

1) $h_1 = 1/3 \Rightarrow x_0 = 0;\ x_1 = \frac{1}{3};\ x_2 = \frac{2}{3};\ x_3 = 1$

$$-\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + q(x_i) y_i = f(x_i)$$

$$-y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1}$$

$$\begin{cases} -y_0 + (2\pi^2 h^2 + 2) y_1 - y_2 = h_1^2 \cdot 3\pi^2 \sin(\pi x_1) \\ -y_1 + (2\pi^2 h^2 + 2) y_2 - y_3 = h_1^2\, 3\pi^2 \sin(\pi x_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{2\pi^2}{9} + 2\right) y_1 - y_2 = \frac{3\pi^2}{9} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ -y_1 + \left(\frac{2\pi^2}{9} + 2\right) y_2 = \frac{3\pi^2}{9} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0,89223 \\ y_2 = 0,89223 \end{cases}$$

2) $h_2 = \frac{1}{6} \Rightarrow x_0 = 0;\ x_1 = \frac{1}{6};\ x_2 = \frac{1}{3};\ x_3 = \frac{1}{2};\ x_4 = \frac{4}{6};\ x_5 = \frac{5}{6};\ x_6 = 1.$

$$\begin{cases} -y_0 + (2\pi^2 h^2 + 2) y_1 - y_2 = h_2^2 \cdot 3\pi^2 \sin(\pi/6) \\ -y_1 + (2\pi^2 h^2 + 2) y_2 - y_3 = h^2 \cdot 3\pi^2 \sin(\pi/3) \\ -y_2 + (2\pi^2 h^2 + 2) y_3 - y_4 = h^2 \cdot 3\pi^2 \sin(\pi/2) \\ -y_3 + (2\pi^2 h^2 + 2) y_4 - y_5 = h^2 \cdot 3\pi^2 \sin(2\pi/3) \\ -y_4 + (2\pi^2 h^2 + 2) y_5 - y_6 = h^2 \cdot 3\pi^2 \sin(5\pi/6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y_0 + 2,548311 y_1 - y_2 = 0,411234 \\ -y_1 + 2,548311 y_2 - y_3 = 0,712277 \\ -y_2 + 2,548311 y_3 - y_4 = 0,822467 \\ -y_3 + 2,548311 y_4 - y_5 = 0,712277 \\ -y_4 + 2,548311 y_5 - y_6 = 0,411234 \end{cases}$$

Метод прогонки

$\alpha_1 = \frac{c_1}{b_1} = 0,392417$ $\alpha_2 = \frac{c_2}{b_2 + a_2\alpha_1} = 0,463845$ $\alpha_3 = \frac{c_3}{b_3 + a_3\alpha_2} = 0,479739$

$\alpha_4 = -\frac{c_4}{b_4 + a_4\alpha_3} = 0,483426$ $\beta_1 = \frac{d_1}{b_1} = 0,161375$ $\beta_2 = \frac{d_2 - a_2\beta_1}{b_2 + a_2\alpha_1} = 0,405239$

$\beta_3 = \frac{d_3 - a_3\beta_2}{b_3 + a_3\alpha_2} = 0,588979$ $\beta_4 = \frac{d_4 - a_4\beta_3}{b_4 + a_4\alpha_3} = 0,62906$ $\beta_5 = \frac{d_5 - a_5\beta_4}{b_5 + a_5\alpha_4} = 0,503803$

$$\begin{aligned} y_5 &= \beta_5 = 0,503803 \\ y_4 &= \alpha_4 y_5 + \beta_4 = 0,872611 \\ y_3 &= \alpha_3 y_4 + \beta_3 = 1,007604 \\ y_2 &= \alpha_2 y_3 + \beta_2 = 0,872611 \\ y_1 &= \alpha_1 y_2 + \beta_1 = 0,503802 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$y(x_i) - y_i^{(h)} \approx \frac{y_i^{(h/2)} - y_i^{(h)}}{3}$$

$x = 0:\ z_0 = 0$

$x = 1/3:\ z_1 = \frac{y_2(1/6) - y_1(1/3)}{3} = -0,129476$

$x = 2/3:\ z_2 = \frac{y_4(1/6) - y_2(1/3)}{3} = 0,038458$

$x = 1:\ z_3 = \frac{y_6(1/6) - y_3(1/3)}{3} = 0,16793$