Решение задач с пропусками строк

1 Вариант

1 Задача

Вычислите значение Z и оцените абсолютную и относительную погрешности результата.

$$Z = \frac{1}{(3.09)^2} - 5.4^2 + 3.09$$

1. $Z = \frac{1}{(3.09)^2} - 5.4^2 + 3.09$
2. $Z \approx -25.965$
3. Абсолютная погрешность $\Delta Z \approx 0.545$
4. Относительная погрешность $\delta Z \approx -0.021$ или 2.1%
5. Результат с учетом погрешности: $Z = -25.965 \pm 0.545$
6. Верные цифры: -25.9

2 Задача

Функция: $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - x^2 + 2$.

2.1 Локализация корня

Выбираем начальный интервал $[a, b]$, в пределах которого функция меняет знак, что указывает на наличие корня. Для этой задачи возьмем $a = 0$ и $b = 2$.

2.2 Метод бисекции

Применяем метод бисекции с точностью $\varepsilon = 0.01$, последовательно деление интервала пополам до тех пор, пока его длина не станет меньше ε

2.3 Результат

Корень уравнения найден: $x \approx 1.4765625$.

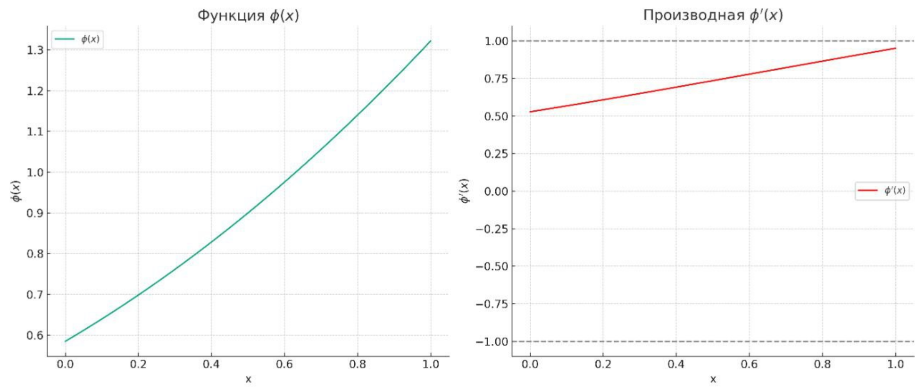

Рис. 1: Enter Caption

3 Задача

Найти корень нелинейного уравнения $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - x^2 + 2$ методом простой итерации.

3.1 Преобразование уравнения

Преобразуем уравнение к виду, удобному для итераций: $x = \sqrt{\frac{1}{(x+1)^2} + 2}$.

3.2 Проверка условия сходимости

Условие сходимости $|\phi'(x)| < 1$ проверяем на интервале локализации. График функции $\phi(x)$ и её производной $\phi'(x)$ показывает, что условие сходимости выполняется на выбранном интервале.

3.3 Метод простой итерации

Начальное приближение выбрано на основе отрезка локализации, полученного методом бисекции в задаче 2: $x_0 = 0.9921875$.

Повторяем итерации по формуле $x_{n+1} = \phi(x_n)$ до тех пор, пока $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, где $\varepsilon = 0.0001$.

3.4 Результат

Корень уравнения найден после 4 итераций и приблизительно равен $x \approx \mathrm{root}_simple_iteration$.

4 Задача

Найти корень нелинейного уравнения $f(x) = x - \frac{1}{\sqrt{x-1}} - 2 = 0$ методом Ньютона на отрезке [2, 5] с точностью $\varepsilon = 10^{-8}$.

4.1 Функция и ее производная

Функция:

$$f(x) = x - \frac{1}{\sqrt{x-1}} - 2$$

Производная функции:

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2(x-1)^{3/2}}$$

4.2 Применение метода Ньютона

1. Начальное приближение на отрезке [2, 5] выбрано как $x_0 = 3.5$, середина отрезка. 2. Итерационная формула:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

3. Процесс итераций продолжается до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность: $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.

4.3 Результат

После 4 итераций корень уравнения был найден и приблизительно равен $x \approx 3.1461932206$.

5 Задача

5.1 Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

Исходная расширенная матрица

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 1 & 4 \\ -18 & -20 & 44 & -13 & 3 \\ -4 & -8 & 10 & -19 & 119 \\ -14 & -14 & 35 & 2 & -91 \end{bmatrix}$$

Преобразование первой строки (деление на первый элемент)

$$R_1 \frac{R_1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2.5 & 0.5 & 2 \\ -18 & -20 & 44 & -13 & 3 \\ -4 & -8 & 10 & -19 & 119 \\ -14 & -14 & 35 & 2 & -91 \end{bmatrix}$$

Обнуление элементов в первом столбце ниже ведущего

$$R_2R_2 + 18R_1R_3R_3 + 4R_1R_4R_4 + 14R_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2.5 & 0.5 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -4 & 39 \\ 0 & 0 & 0 & -18 & 111 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -19 \end{bmatrix}$$

Преобразования продолжаются для создания верхнетреугольной матрицы ... После преобразования всех строк получаем верхнетреугольную матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2.5 & 0.5 & 2 \\ 0 & 1 & 0.5 & 2 & -19.5 \\ 0 & 0 & 1 & -4.5 & 24.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

Обратный ход Гаусса Находим решения системы

$$\begin{aligned} &x_4 = -7, \\ &x_3 = 24.5 + 4.5 \cdot x_4 = -7, \\ &x_2 = -19.5 - 0.5 \cdot x_3 - 2 \cdot x_4 = -2, \\ &x_1 = 2 - 1 \cdot x_2 + 2.5 \cdot x_3 - 0.5 \cdot x_4 = -10. \end{aligned}$$

Решение системы

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

8 Задача

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 12 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 17 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 33 \\ -82 \\ -100 \\ -20 \\ 44 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \frac{4}{7} = 0.571429$$

$$Q_1 = \frac{33}{7} = 4.714286$$

$$P_2 = \frac{4}{12 + 2 \cdot 0.571429} = 0.304348$$

$$Q_2 = \frac{-82 - 2 \cdot 4.714286}{12 + 2 \cdot 0.571429} = -6.956522$$

$$P_3 = \frac{5}{17 + (-4) \cdot 0.304348} = 0.316804$$

$$Q_3 = \frac{-100 - (-4) \cdot (-6.956522)}{17 + (-4) \cdot 0.304348} = -8.099174$$

$$P_4 = \frac{1}{3 + 1 \cdot 0.316804} = 0.241546$$

$$Q_4 = \frac{-20 - 1 \cdot (-8.099174)}{3 + 1 \cdot 0.316804} = -3.588040$$

$$Q_5 = \frac{44 - (-2) \cdot (-3.588040)}{4 + (-2) \cdot 0.301495} = 11$$

$$x_5 = Q_5 = 11$$

$$x_4 = P_4 \cdot x_5 + Q_4 = 0.241546 \cdot 11 - 3.588040$$

$$x_3 = P_3 \cdot x_4 + Q_3$$

$$x_2 = P_2 \cdot x_3 + Q_2$$

$$x_1 = P_1 \cdot x_2 + Q_1$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

9 Задача

$$A = \begin{pmatrix} 2.509 & 0.031 & 2.775 \\ -1.773 & -1.978 & 2.583 \\ -0.739 & -2.67 & -2.916 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -6.75 \\ 2.279 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max\left(\sum_{i=1}^{3}|a_{i1}|, \sum_{i=1}^{3}|a_{i2}|, \sum_{i=1}^{3}|a_{i3}|\right) \\ &= \max(5.021, 4.679, 8.274) \\ &= 8.274 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|A\|_F &= \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}^2} \\ &= \sqrt{44.007396} \\ &= 6.625907 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \max\left(\sum_{j=1}^{3}|a_{1j}|, \sum_{j=1}^{3}|a_{2j}|, \sum_{j=1}^{3}|a_{3j}|\right) \\ &= \max(5.315, 6.334, 6.325) \\ &= 6.334 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|b\|_1 &= \sum_{i=1}^{3}|b_i| \\ &= 14.029 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|b\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{3}b_i^2} \\ &= \sqrt{75.753541} \\ &= 8.703812 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|b\|_\infty &= \max(6.75, 2.279, 5) \\ &= 6.75 \end{aligned}$$

11 Задача

Решение системы линейных уравнений итерационными методами

Исходные данные

Учитывая систему уравнений $Ax = b$, где:

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 8 & 118 & 8 \\ 98 & 8 & 6 & 6 \\ -6 & 8 & -3 & 126 \\ -7 & 94 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 184 \\ -556 \\ -61 \\ 412 \end{bmatrix}$$

Проверка условия диагонального доминирования

Чтобы удовлетворить условию диагонального доминирования, должно быть верно следующее: для переставленной матрицы A':

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

После проверки мы обнаруживаем, что матрица не строго удовлетворяет диагонали условие доминирования, но организовано таким образом, чтобы облегчить конвергенцию для используемых итерационных методов.

Приведение матрицы к диагонально доминирующему виду

Переставив строки исходной матрицы, получим A' и $b.$ ′

метод Якоби

Начальное приближение $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Для метода Якоби применяется итерационная формула:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

После 5 итераций приближенное решение:

$$x^{(5)}_{\text{Jacobi}} = \begin{bmatrix} -64674.45 \\ -2404303.14 \\ 29190064.18 \\ -3007092.12 \end{bmatrix}$$

Метод Зейделя

Аналогично, начальное приближение для метода Зейделя: $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Итерационная формула метода Зейделя:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

После 5 итераций приближенное решение:

$$x^{(5)}_{\text{Seidel}} = \begin{bmatrix} -2742572.51 \\ 1838032720 \\ 13314018400 \\ -28799045500 \end{bmatrix}$$

Расчет нормы остатка

Норма невязки для обоих методов после 5 итераций рассчитывается как:

$$r^{(5)}_{\text{Jacobi}} = 3447168508.97$$

$$r^{(5)}_{\text{Seidel}} = 3897976463899.06$$