Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ

ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

Институт Информационных и Вычислительных Технологий

Кафедра Математического и компьютерного моделирования

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ

Вариант: 14

Студент гр. А-02-22 ______________________ Пивоваров Я.В.

(подпись)

Преподаватель ______________________ Пепа Р.Ю.

(оценка/зачёт, подпись)

Москва

2024

ТР. 1.14

Пивоваров Я. В. А-01-22

$$z = \sqrt{18.12} + \sqrt[3]{11.12} + \sqrt[4]{88.11}$$

Вычислить значение z и оценить абсолютную и относительную погрешности результата. Указать верные цифры

$$z(x_1; x_2; x_3) = \sqrt{x_1} + \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[4]{x_3}$$

$x_1^* = 18.12 \quad \Delta x_1^* = 0.005$

$x_2^* = 11.12 \quad \Delta x_2^* = 0{,}005$

$x_3^* = 88.11 \quad \Delta x_3^* = 0{,}005$

$$\Delta(f^*) \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^* \ldots x_n^*) \right| \cdot \Delta(x_i^*)$$

$$\Delta(z^*) \leq \left| \frac{1}{2\sqrt{x_1^*}} \right| \Delta(x_1^*) + \left| \frac{1}{3\sqrt[3]{(x_2^*)^2}} \right| \cdot \Delta(x_2^*) + \left| \frac{1}{4\sqrt[4]{(x_3^*)^3}} \right| \cdot \Delta(x_3^*) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{18{,}12}} \cdot 0{,}005 + \frac{1}{3\sqrt[3]{11{,}12^2}} \cdot 0{,}005 + \frac{1}{4\sqrt[4]{88{,}11^3}} \cdot 0{,}005 = 0{,}000965 = 9{,}65 \cdot 10^{-4}$$

абс погрешность

$\tilde{z} = 9{,}55257$ – значен. $\delta z = \dfrac{0{,}000965}{9{,}55257} = 0{,}000101 \approx 1{,}01 \cdot 10^{-4}$ – относ погрешность

$z = \underbrace{9{,}552}_{\text{верные}}57 + 0{,}000965$

Ответ: $z = 9{,}55257 \pm 0{,}00096$, результат содержит 4 верные цифры

$\delta z = 1{,}01 \cdot 10^{-4}$ – относ. погрешность.

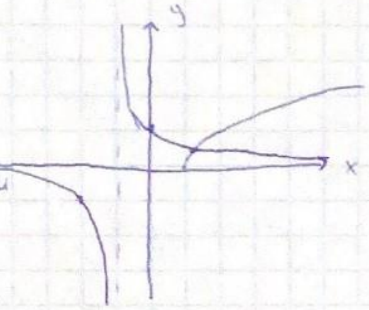
Т.Р. 2.14

$$f(x) = \sqrt{x-1} - \frac{1}{x+1} \qquad \varepsilon = 0{,}01$$

Локализовать $f(x)=0$ методом бисекции

$$\sqrt{x-1} - \frac{1}{x+1} = 0$$

$$\sqrt{x-1} = \frac{1}{x+1}$$



$\Rightarrow$ имеет один корень

Составим таблицу их. ф-ции

x	0	1	2	3
f(x)	–	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1,15

Из таблицы видно, что в качестве отрезка локализации можно взять отрезок [1;2], т.к. на нем ф-ция меняет знак.

Метод бисекции:

n	a_n	b_n	x_n	знак $f(a_n)$	знак $f(b_n)$	знак $f(x_n)$	$b_n - a_n$
0	1	2	1,5	–	+	+	1
1	1	1,5	1,25	–	+	+	0,5
2	1	1,25	1,125	–	+	–	0,25
3	1,125	1,25	1,1875	–	+	–	0,125
4	1,1875	1,25	1,21875	–	+	+	0,0625
5	1,1875	1,21875	1,203125	–	+	–	0,03125
6	1,203125	1,21875	1,2109375	–	+	+	$0{,}015625 \le 0{,}02 = 2\varepsilon$

[1,203125 ; 1,21875]

Ответ: $\bar{x} = 1{,}20 \pm 0{,}01$

Т.р 3.14

$f(x) = \sqrt{x-1} - \frac{1}{x+1}$ $\quad \varepsilon = 0,0001$ методом простой итерации

$[a;b] = [1,203125; 1,21875]$

$\varphi(x) = x - \alpha f(x) \Rightarrow \alpha = \frac{2}{M+m}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \frac{1}{(x+1)^2}$

$M = 1,24218$

$m = 1,31543$

$\alpha = \frac{2}{1,27218 + 1,31543} = 0,772914$

$q = \left|\frac{M-m}{M+m}\right| = 0,0167143$

$D = \frac{q}{1-q} = \frac{0,0167143}{1-0,0\cdot 7143} \approx 0,017$

$\varphi(x) = x - 0,772914\left(\sqrt{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$

$x^{(1)} = \varphi(x^{(0)}) = \varphi(1,2109375) = 1,20554$

$D \cdot |x^{(1)} - x^{(0)}| = 0,017\,|1,20554 - 1,2109375| = 0,0000917 \le 0,0001 = \varepsilon$

Ответ: $\bar{x} = x^{(1)} \pm \varepsilon = 1,2055 \pm 0,0001$

П.р 4.14

$e^x - 2x - 5 = 0 \quad [0; 3]; \; \varepsilon = 10^{-8}$ методом Ньютона.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}; \quad x_{k+1} = x_k - \frac{e^x - 2x - 5}{e^x - 2}$$

$$x_0 = \frac{3-0}{2} = 1{,}5 \qquad f'(x) = e^x - 2$$

$$x_1 = x_0 - \frac{e^{x_0} - x_0 \cdot 2 - 5}{e^{x_0} - 2}$$

$$x_1 = 1{,}5 - \frac{e^{1{,}5} - 3 - 5}{e^{1{,}5} - 2} \approx 2{,}91770819 \quad |x_1 - x_0| > \varepsilon$$

$$x_2 = 2{,}91771 - \frac{e^{2{,}91771} - 2 \cdot 2{,}91771 - 5}{e^{2{,}91771} - 2} \approx 2{,}4532255521 \quad |x_2 - x_1| > \varepsilon$$

$$x_3 = x_2 - \frac{e^{x_2} - 2 \cdot x_2 - 5}{e^{x_2} - 2} = 2{,}2746079 4477 \quad |x_3 - x_2| > \varepsilon$$

$$x_4 = x_3 - \frac{e^{x_3} - 2 \cdot x_3 - 5}{e^{x_3} - 2} = 2{,}251965843 \quad |x_4 - x_3| > \varepsilon$$

$$x_5 = x_4 - \frac{e^{x_4} - 2x_4 - 5}{e^{x_4} - 2} = 2{,}2516362719 \quad |x_5 - x_4| > \varepsilon$$

$$x_6 = x_5 - \frac{e^{x_5} - 2x_5 - 5}{e^{x_5} - 2} = 2{,}251636203 \quad |x_6 - x_5| > \varepsilon$$

$$x_7 = x_6 - \frac{e^{x_6} - 2x_6 - 5}{e^{x_6} - 2} = 2{,}2516362031 \quad |x_7 - x_6| < \varepsilon$$

Ответ: $\bar{x} = 2{,}25163620 \pm 10^{-8}$

П.р 5.14 Решить систему ур-ний $Ax = b$ методом Гаусса (схема ед. дел.)

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 2 & 0 \\ 9 & 11 & -2 & -1 \\ -81 & -106 & 12 & 8 \\ -90 & -68 & 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -37 \\ -45 \\ 465 \\ 356 \end{pmatrix}$$

Решение: Прямой ход

Шаг 1

$$\mu_{2,1} = \frac{a_{21}}{a_{1,1}} = \frac{9}{9} = 1; \quad \mu_{3,1} = \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} = \frac{-81}{9} = -9$$

$$\mu_{4,1} = \frac{a_{4,1}}{a_{1,1}} = \frac{-90}{9} = -10$$

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 0 \cdot x_4 = -37 \\ 7x_2 - 4x_3 - x_4 = -8 \\ -70x_2 + 30x_3 + 8x_4 = 132 \\ -28x_2 + 26x_3 + 8x_4 = -12 \end{cases}$$

Шаг 2: $\mu_{3,2} = \frac{a^{(1)}_{3,2}}{a^{(1)}_{2,2}} = \frac{-70}{7} = -10$

$\mu_{4,2} = \frac{a^{(1)}_{4,2}}{a^{(1)}_{2,2}} = \frac{-28}{7} = -4$

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 0x_4 = -37 \\ 7x_2 - 4x_3 - x_4 = -8 \\ -10x_3 - 2x_4 = 52 \\ 10x_3 + 4x_4 = -44 \end{cases}$$

Шаг 3: $\mu_{4,3} = \frac{a^{(2)}_{4,3}}{a^{(2)}_{3,3}} = \frac{10}{-10} = -1$

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 0x_4 = -37 \\ 7x_2 - 4x_3 - x_4 = -8 \\ -10x_3 - 2x_4 = 52 \\ 2x_4 = 8 \end{cases}$$

Обратный ход

$$\begin{cases} x_4 = 4 \\ x_3 = -\frac{52+8}{10} = -6 \\ x_2 = \frac{-8-24+4}{7} = -4 \\ x_1 = \frac{+16-37+12}{9} = -1 \end{cases}$$

Ответ: $x = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

П.р № 8.14 Решить систему ур-ний $Ax = b$ методом прогонки.

Промежуточные результаты вычислить с шестью знаками после запятой.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 16 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 30 \\ -12 \\ -65 \\ -18 \\ -24 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 12x_1 - 6x_2 = 30 \\ -4x_1 + 8x_2 - x_3 = -12 \\ -5x_2 + 16x_3 + 3x_4 = -65 \\ 3x_3 + 13x_4 - 4x_5 = -18 \\ -3x_4 + 6x_5 = -24 \end{cases}$$

Решение. Прямой ход:

Вычислим прогоночные коэффициенты:

b_i - э-ты главной диагонали d_i - правая ч. ур-ния

a_i - э-ты поддиагонали

c_i - э-ты наддиагонали (i - соответствует номеру уравнения)

$$\alpha_1 = -\frac{c_1}{b_1} = -\frac{-6}{12} = 0,5; \quad \beta_1 = \frac{d_1}{b_1} = \frac{30}{12} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2,5$$

$$y_2 = b_2 + a_2\alpha_1 = 8 - 4 \cdot 0,5 = 8 - 2 = 6$$

$$\alpha_2 = \frac{-c_2}{y_2} = \frac{1}{6}; \quad \beta_2 = \frac{d_2 - a_2\beta_1}{y_2} = \frac{-12 - (-4)\cdot 2,5}{6} = \frac{-12+10}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$y_3 = b_3 + a_3 \cdot \alpha_2 = 16 - 5 \cdot \frac{1}{6} = 15\frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

$$\alpha_3 = \frac{-c_3}{y_3} = \frac{-3}{\frac{91}{6}} = \frac{-18}{91}, \quad \beta_3 = \frac{d_3 - a_3\beta_2}{y_3} = \frac{-65 - 5 \cdot \frac{1}{3}}{91/6} = -\frac{400}{91}$$

$$y_4 = b_4 + a_4\alpha_3 = 13 + 3 \cdot \frac{(-18)}{91} = \frac{1129}{91}$$

$$\alpha_4 = -\frac{c_4}{y_4} = \frac{4}{1129/91} = \frac{364}{1129}; \quad \beta_4 = \frac{d_4 - a_4\beta_3}{y_4} = \frac{-18 - 3\cdot\left(-\frac{400}{91}\right)}{364/1129} = -\frac{247251}{16562}$$

$$\beta_5 = \frac{d_5 - a_5 \cdot \beta_4}{b_5 + a_5\alpha_4} = \frac{-24 - (-3)\cdot\left(\frac{-247251}{16562}\right)}{6 - 3 \cdot 364/1129} = -\frac{452729}{33124}$$

Обратный ход:

$x_5 = \beta_5 = -13,667703$

$x_4 = \alpha_4 x_5 + \beta_4 = -19,335406$

$x_3 = \alpha_3 x_4 + \beta_3 = -0,571019$

$x_2 = \alpha_2 x_3 + \beta_2 = -0,428503$

$x_1 = \alpha_1 x_2 + \beta_1 = 2,285749$

Ответ: $x = (2,285749; -0,428503; -0,571019; -19,335406; -13,667703)$

П.р №9.14

Вычислить нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_E$, $\|\cdot\|_\infty$ матрицы A и нормы вектора $\vec{b}$, считая, что компоненты вектора $\vec{b}$ получены в результате округ.

$$A = \begin{pmatrix} 1,591 & -0,75 & -2,093 \\ -1,863 & -2,892 & 2,026 \\ -2,442 & -0,221 & -2,502 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2,851 \\ -0,536 \\ 2,6 \end{pmatrix}$$

Решение: для $\vec{b}$:

$$\|b\|_1 = |-2,851| + |-0,536| + |2,6| = 5,987$$

$$\|b\|_2 = \sqrt{(-2,851)^2 + (-0,536)^2 + 2,6^2} = 3,896$$

$$\|b\|_\infty = \max\{|-2,851|; |-0,534|, |2,6|\} = 2,851$$

в $\|b\|_1$: $\Delta b = |5\cdot10^{-4}| + |5\cdot10^{-4}| + |5\cdot10^{-2}| = 0,051$

в $\|b\|_2$: $\Delta b = \sqrt{(5\cdot10^{-2})^2 + 2\cdot(5\cdot10^{-4})^2} \approx 0,050$

в $\|b\|_\infty$: $\Delta b = \max\{|5\cdot10^{-2}|; |5\cdot10^{-4}|; |5\cdot10^{-4}|\} = 5\cdot10^{-2}$

$$\delta_1 b = \frac{0,051}{5,987} \approx 0,0085; \quad \delta_2 b = \frac{0,050}{3,896} \approx 0,013; \quad \delta_3 b = \frac{5\cdot10^{-2}}{2,851} \approx 0,018$$

Для матрицы A:

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |A_{ij}| = \max\{|1,591| + |-1,863| + |-2,442|; |-0,751| + |-2,892| + |-0,2\ldots$$

$$|-2,093| + |2,026| + |-2,502|\} = 6,621$$

$$\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |A_{ij}|^2} = 6,10254$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}| = \max\{|1,591| + |-0,751| + |-2,093|; |-1,863| + |2,892| + |2,026,\ldots$$

$$|-2,442| + |-0,221| + |-2,502|\} = 6,481$$

Ответ: $\|b\|_1 = 5,987$; $\|b\|_2 = 3,896$; $\|b\|_\infty = 2,851$

$\delta_1 b = 0,0085$; $\delta_2 b = 0,013$, $\delta_3 b = 0,018$

$\|A\|_1 = 6,621$; $\|A\|_E = 6,10254$; $\|A\|_\infty = 6,481$

III.р 11.14

$$A=\begin{pmatrix} 99 & -3 & -9 & -5 \\ 3 & 3 & 4 & 50 \\ -4 & 1 & 93 & -9 \\ -10 & 169 & 9 & 7 \end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix} -628 \\ -376 \\ -369 \\ 821 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 99x_1 - 3x_2 - 9x_3 - 5x_4 = -628 \\ -10x_1 + 169x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 821 \\ -4x_1 + x_2 + 93x_3 - 9x_4 = -369 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 50x_4 = -375 \end{cases}$$

Решение

Метод Якоби

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-628 + 3x_2 + 9x_3 + 5x_4}{99} \\ x_2 = \dfrac{821 + 10x_1 - 9x_3 - 7x_4}{169} \\ x_3 = \dfrac{-369 + 4x_1 - x_2 + 9x_4}{93} \\ x_4 = \dfrac{-376 - 3x_1 - 3x_2 - 4x_3}{50} \end{cases} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{99} & \frac{9}{99} & \frac{5}{99} \\ \frac{10}{169} & 0 & -\frac{9}{169} & -\frac{7}{169} \\ \frac{4}{93} & -\frac{1}{93} & 0 & \frac{9}{93} \\ -\frac{3}{50} & -\frac{3}{50} & -\frac{4}{50} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|B\|_\infty = \max\left\{\frac{3+9+5}{99}, \frac{10+9+7}{169}, \frac{4+1+9}{93}, \frac{10}{50}\right\} = 0{,}2 < 1 \text{ - метод сходится}$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$n=1$

$$\begin{cases} x_1 = -6{,}343 + 0{,}030 + 0{,}091 + 0{,}051 = -6{,}171 \\ x_2 = 4{,}858 + 0{,}059 + 0{,}053 - 0{,}041 = 4{,}823 \\ x_3 = -3{,}968 + 0{,}043 - 0{,}011 + 0{,}097 = -3{,}839 \\ x_4 = -7{,}52 - 0{,}06 - 0{,}06 - 0{,}08 = -7{,}72 \end{cases} \qquad x^{(1)} = \begin{pmatrix} -6{,}171 \\ 4{,}823 \\ -3{,}839 \\ -7{,}72 \end{pmatrix}$$

$n=2$

$$\begin{cases} x_1 = -6{,}343 + 0{,}03\cdot(4{,}823) + 0{,}091\cdot(-3{,}839) + 0{,}051\cdot(-7{,}72) = -6{,}941 \\ x_2 = 4{,}858 + 0{,}059\cdot(-6{,}171) - 0{,}053\cdot(-3{,}839) - 0{,}041\cdot(-7{,}72) = 5{,}014 \\ x_3 = -3{,}968 + 0{,}043\cdot(-6{,}171) - 0{,}011\cdot(4{,}823) + 0{,}097\cdot(-7{,}72) = -5{,}035 \\ x_4 = -7{,}52 - 0{,}06(-6{,}171) - 0{,}06\cdot(4{,}823) - 0{,}08\cdot(-3{,}839) = -7{,}132 \end{cases} \qquad x^{(2)} = \begin{pmatrix} -6{,}941 \\ 5{,}014 \\ -5{,}035 \\ -7{,}132 \end{pmatrix}$$

$n=3$

$$\begin{cases} x_1 = -6{,}343 + 0{,}03(5{,}014) + 0{,}091\cdot(-5{,}035) + 0{,}051(-7{,}132) = -7{,}014 \\ x_2 = 4{,}858 + 0{,}059\cdot(-6{,}941) - 0{,}053\cdot(-5{,}035) - 0{,}041\cdot(-7{,}132) = 5{,}008 \\ x_3 = -3{,}968 + 0{,}043\cdot(-6{,}941) - 0{,}011\cdot(5{,}014) + 0{,}097\cdot(-7{,}132) = -5{,}013 \\ x_4 = -7{,}52 - 0{,}06\cdot(-6{,}941) - 0{,}06\cdot(5{,}014) - 0{,}08\cdot(-5{,}035) = -7{,}002 \end{cases} \qquad x^{(3)} = \begin{pmatrix} -7{,}014 \\ 5{,}008 \\ -5{,}013 \\ -7{,}002 \end{pmatrix}$$

Норма невязки:

$r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$

$$r^{0} = \begin{pmatrix} -628 \\ -376 \\ -369 \\ 821 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 99 & -3 & -9 & -5 \\ 3 & 3 & 4 & 50 \\ -4 & 1 & 93 & -9 \\ -10 & 169 & 9 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -628 \\ -376 \\ -369 \\ 821 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 82 \\ 60 \\ 81 \\ 175 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -710 \\ -436 \\ -450 \\ 646 \end{pmatrix}$$

$$r^{(3)} = \begin{pmatrix} -628 \\ -376 \\ -369 \\ 821 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 99 & -3 & -9 & -5 \\ 3 & 3 & 4 & 50 \\ -4 & 1 & 93 & -9 \\ -10 & 169 & 9 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7,014 \\ 5,008 \\ -5,013 \\ -7,002 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,283 \\ 0,17 \\ 1,127 \\ -1,361 \end{pmatrix}$$

$\|r^{(0)}\|_1 = 2242$

$\|r^{(3)}\|_1 = 3,941$

$$\frac{\|r^{0}\|_1}{\|r^{(3)}\|_1} = \frac{2242}{3,941} = 568,9$$

Апостериорная оценка $\quad \|x^{(3)} - \bar{x}\|_\infty \le \frac{\|B\|_\infty}{1-\|B\|_\infty} \cdot \|x^{(3)} - x^{(2)}\|$

$$x^{(3)} - x^{(2)} = \begin{pmatrix} -0,073 \\ -0,006 \\ 0,022 \\ 0,130 \end{pmatrix} \qquad \|x^{(3)} - x^{(2)}\| = 0,13 \qquad \bar{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$x^{(3)} - \bar{x} = \begin{pmatrix} -0,014 \\ 0,008 \\ -0,013 \\ -0,002 \end{pmatrix} \qquad \|x^{(3)} - \bar{x}\| = 0,014$$

$0,014 \le \frac{0,2}{1-0,2} \cdot 0,13 = 0,0325 \Rightarrow$ оценка верна.

Метод Зейделя

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{99} & \frac{9}{99} & \frac{5}{99} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{169} & -\frac{7}{169} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{93} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{10}{169} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{93} & -\frac{1}{93} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{50} & -\frac{3}{50} & -\frac{4}{50} & 0 \end{pmatrix}$$

$\|B_1\|_\infty = \max\{0,171;\ 0,095;\ 0,097\} = 0,171$

$\|B_2\|_\infty = \max\{\frac{10}{169};\ \frac{5}{93};\ \frac{10}{50}\} = 0,2$

$\|B_2\|_\infty + \|B_1\|_\infty = 0,171 + 0,2 = 0,371 < 1 \Rightarrow$ метод сходится

$$x^{(n+1)} = B_1 \cdot x^{(n+1)} + B_2 x^{(n)} + C$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$n = 1$

$$\begin{cases} x_1 = -6{,}343 + 0{,}030 + 0{,}091 + 0{,}051 = -6{,}171 \\ x_2 = 0{,}059(-6{,}171) - 0{,}053 - 0{,}041 + 4{,}858 = 4{,}4 \\ x_3 = -3{,}968 + 0{,}043(-6{,}171) - 0{,}011 \cdot (4{,}4) + 0{,}097 = -4{,}185 \\ x_4 = -7{,}52 - 0{,}06(-6{,}171) - 0{,}06(4{,}4) - 0{,}08(-4{,}185) = -7{,}079 \end{cases} \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} -6{,}171 \\ 4{,}4 \\ -4{,}185 \\ -7{,}079 \end{pmatrix}$$

$n = 2$

$$\begin{cases} x_1 = -6{,}343 + 0{,}03(4{,}4) + 0{,}091(-4{,}185) + 0{,}051(-7{,}079) = -6{,}953 \\ x_2 = 4{,}858 + 0{,}059(-6{,}953) - 0{,}053(-4{,}185) - 0{,}041(-7{,}079) = 4{,}96 \\ x_3 = -3{,}968 + 0{,}043(-6{,}953) - 0{,}011(4{,}96) + 0{,}097(-7{,}079) = -5{,}008 \\ x_4 = -7{,}52 - 0{,}06(-6{,}953) - 0{,}06(4{,}96) - 0{,}08(-5{,}008) = -6{,}999 \end{cases}$$

$$x^{(2)} = (-6{,}953;\ 4{,}96;\ -5{,}008;\ -6{,}999)$$

$n = 3$

$$\begin{cases} x_1 = -6{,}343 + 0{,}03(4{,}96) + 0{,}091(-5{,}008) + 0{,}051(-6{,}999) = -7{,}007 \\ x_2 = 4{,}858 + 0{,}059(-7{,}007) - 0{,}053(-5{,}008) - 0{,}041(-6{,}999) = 4{,}997 \\ x_3 = -3{,}968 + 0{,}043(-7{,}007) - 0{,}011(4{,}997) + 0{,}097(-6{,}999) = -5{,}003 \\ x_4 = -7{,}52 - 0{,}06(-7{,}007) - 0{,}06(4{,}997) - 0{,}08(-5{,}003) = -6{,}999 \end{cases}$$

$$x^{(3)} = (-7{,}007;\ 4{,}997;\ -5{,}003;\ -6{,}999)$$

Норма невязки:

$$r^{(0)} = \begin{pmatrix} -710 \\ -436 \\ -430 \\ 646 \end{pmatrix} \quad r^{(3)} = \begin{pmatrix} -628 \\ -376 \\ -369 \\ 821 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 99 & -3 & -9 & -5 \\ 3 & 3 & 4 & 50 \\ -4 & 1 & 93 & -9 \\ 70 & 169 & 9 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7{,}007 \\ 4{,}997 \\ -5{,}003 \\ -6{,}999 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}662 \\ -0{,}008 \\ 0{,}263 \\ 0{,}457 \end{pmatrix}$$

$$\|r^{(0)}\|_1 = 2242 \quad \|r^{(3)}\|_1 = 1{,}39$$

$$\frac{\|r^{(0)}\|}{\|r^{3}\|} = \frac{2242}{1{,}39} \approx 1613$$

Апостериорная оценка: $\|x^{(3)} - \bar{x}\|_\infty \le \dfrac{\|B_2\|_\infty}{1 - \|B\|_\infty} \cdot \|x^{(3)} - x^{(2)}\|_\infty$

$$x^{(3)} - x^{(2)} = \begin{pmatrix} -0{,}054 \\ 0{,}037 \\ 0{,}005 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \|x^{(3)} - x^{(2)}\|_\infty = 0{,}054$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$x^{(3)} - \bar{x} = \begin{pmatrix} -0{,}007 \\ -0{,}003 \\ -0{,}003 \\ 0{,}001 \end{pmatrix} \qquad \|x^{(3)} - \bar{x}\| = 0{,}007$$

$0{,}007 \le \dfrac{0{,}2}{1-0{,}2} \cdot 0{,}054 = 0{,}0135 \Rightarrow$ оценка верна