А-02-22
Левшенко Дмитрий
Вычислительные методы
Типовые расчеты
Вариант 7

1.

$\boxed{1.}$ $Z = 3.7 \cdot (\cos(3.7 \cdot 1.7))^2 \sin(1.7)$

$Z = f(x,y) = x \cdot (\cos(x \cdot y))^2 \cdot \sin(y) \qquad x = 3.7, \; y = 1.7$

$\Delta x = 0.05 \qquad \Delta y = 0.05$

$f(3.7, 1.7) = 3.7 \cdot (\cos(3.7 \cdot 1.7))^2 \cdot \sin(1.7) \approx 3.66899$

$\cdot 0.07$
142

$$\Delta f = |f'_x| \Delta x + |f'_y| \Delta y = \left| \left(\cos^2(xy) \sin(y) + x \sin(y) \cdot 2\cos(xy)(-\sin(xy)) y \right) \cdot \Delta x \right| +$$

1786

$$+ \left| \cos y \cdot x \cdot \cos^2(xy) \cdot \Delta y \right| + \left| x \sin(y) \cdot 2\cos(xy)(-\sin(xy)) \cdot x \, \Delta y \right|$$

$$\Delta f = \left| \cos(xy) \sin(y) \left(\cos(xy) + (-2xy \sin(xy)) \right) \Delta x \right| +$$

$$\left| \cos(xy) \cdot x \left(\cos(xy) \cdot x \cos y - 2x \sin y \sin(xy) \right) \Delta y \right| =$$

$$\Rightarrow \left| \cos(3.7 \cdot 1.7) \cdot \sin(1.7) \cdot \left(\cos(3.7 \cdot 1.7) - 2 \cdot 3.7 \cdot 1.7 \cdot \sin(3.7 \cdot 1.7) \right) \cdot 0.05 \right|$$

$$= 0.0453304$$

$$\left| \cos(3.7 \cdot 1.7) \cdot 3.7 \left(\cos(3.7 \cdot 1.7) \cdot 3.7 \cdot \cos(1.7) - 2 \cdot 3.7 \cdot \sin(1.7) \cdot \sin(3.7 \cdot 1.7) \right) \cdot 0.05 \right| =$$

$$= |-0.0974412| \Rightarrow \Delta f = 0.14277$$

$$0.14277 \le 1 \qquad 0.14277 \not\le 0.1$$

Сравниваем единицы разрядов с полученной абсолютной погрешнос

Начиная с десятых начинаются неверные цифры

$$\delta f = \frac{\Delta f}{|f|} = \frac{0.14277}{3.66899} = 0.038 \Rightarrow 3.8\,\%$$

Ответ: $f = 3.66 \pm 0.14$, результат содержит одну верную цифру

Ответ: 3.66 +- 0.14

2.

$\boxed{2}$ $f(x)=e^x-(x-3)^2+2$

$\xi = 0.01$

Составим таблицу значений исходной функции

x	0.5	1
f(x)	$\sqrt{e}-4.25$	$e-2$
f(x)	-2.6	0.71

Из таблицы видно, что в качестве отрезка локализации можно взять отрезок $[0.5, 1]$

Применим метод бисекции

$[a_0, b_0] = [0.5, 1]$

1-ый шаг: т.к. длина текущего отрезка равна $0.5 > 2\varepsilon = 0.02$, то ищем след. приближение: $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2} = 0.75$

$f(a_0) = -2.6 < 0$ $\quad f(x_0) = e^{0.75}-(0.75-3)^2+2 \approx -0.945$

$f(b_0) = 0.71$

ф-ция на отрезке $[x_0, b_0]$ меняет знак, тогда $a_1 = x_0 = 0.75$

$b_1 = b_0 = 1$

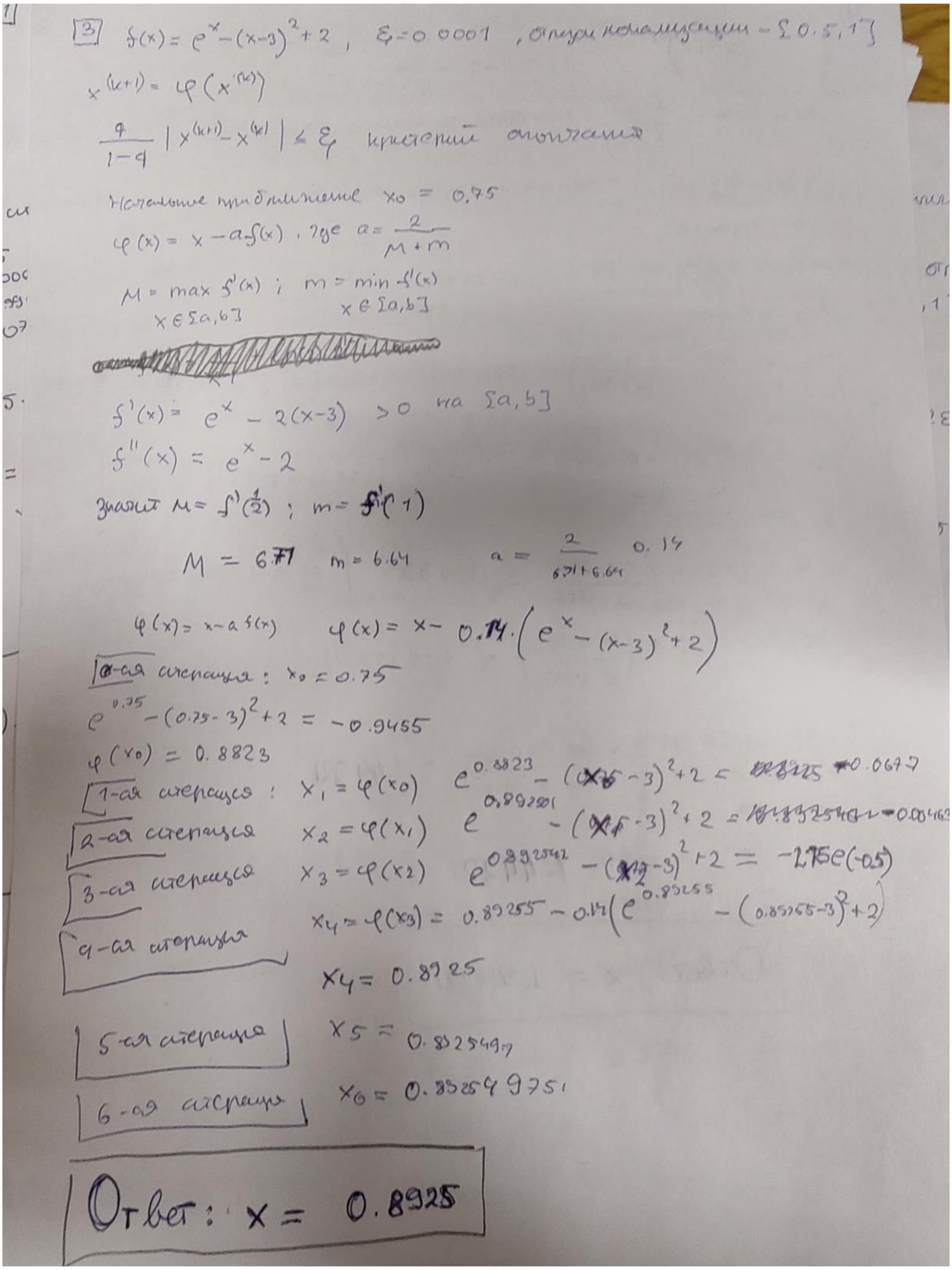
k	a_k	b_k	$x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$	знак $f(a_k)$	знак $f(x_k)$	знак $f(b_k)$	$b_k - a_k$	2ε
0	0.5	1	0.75	−	−	+	0.5	>
1	0.75	1	0.875	−	−	+	0.25	>
2	0.875	1	0.9375	−	+	+	0.125	>
3	0.875	0.9375	0.90625	−	+	+	0.0625	>
4	0.875	0.90625	0.8906	−	−	+	0.03125	>
5	0.8906	0.90625	0.8984	−	+	+	0.01565	<

На 5-ом шаге $b_5 - a_5 < 2\xi \Rightarrow \bar{x} = 0.89 \pm 0.01$

$\boxed{\text{Ответ: } \bar{x} = 0.89 \pm 0.01}$

Ответ: 0.89

3.



3 $f(x) = e^x - (x-3)^2 + 2$, $\varepsilon = 0.0001$, отрезок локализации – $[0.5, 1]$

$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$

$\frac{q}{1-q} |x^{(k+1)} - x^{(k)}| \le \varepsilon$ критерий окончания

Начальное приближение $x_0 = 0.75$

$\varphi(x) = x - af(x)$, где $a = \frac{2}{M+m}$

$M = \max_{x \in [a,b]} f'(x)$; $m = \min_{x \in [a,b]} f'(x)$

$f'(x) = e^x - 2(x-3) > 0$ на $[a, b]$

$f''(x) = e^x - 2$

Значит $M = f'(\frac{1}{2})$; $m = f'(1)$

$M = 6.71$ $m = 6.64$ $a = \frac{2}{6.71 + 6.64}$ 0.14

$\varphi(x) = x - af(x)$ $\varphi(x) = x - 0.14 \cdot (e^x - (x-3)^2 + 2)$

0-ая итерация: $x_0 = 0.75$

$e^{0.75} - (0.75-3)^2 + 2 = -0.9455$

$\varphi(x_0) = 0.8823$

1-ая итерация: $x_1 = \varphi(x_0)$ $e^{0.8823} - (x_1 - 3)^2 + 2 = -0.0677$

2-ая итерация $x_2 = \varphi(x_1)$ $e^{0.892801} - (x_2 - 3)^2 + 2 = -0.00463$

3-ая итерация $x_3 = \varphi(x_2)$ $e^{0.892542} - (x_3 - 3)^2 + 2 = -2.75e(-05)$

4-ая итерация $x_4 = \varphi(x_3) = 0.89255 - 0.14(e^{0.89255} - (0.89255 - 3)^2 + 2)$

$x_4 = 0.8925$

5-ая итерация $x_5 = 0.8925497$

6-ая итерация $x_6 = 0.892549751$

Ответ: $x = 0.8925$

Ответ: 0.8925

4.

4. $f(x) = \frac{1}{(x+1.5)^2} - 2x + 3$ $\quad \varepsilon = 10^{-8}$ $\quad [1; 3]$ - отрезок локализации

$f'(x) = -2 - \frac{2}{(x+1.5)^3}$

$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ критерий окончания $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$

$f'(x) = 12x^2 - 14$ Начальное приближение $x_0 = 2$

1-ая итерация

$x_1 = 2 - \left(\frac{0.918}{2.163}\right) = 1.57$ $\quad |2 - 1.57| = 0.43 > \varepsilon$

2-ая итерация

$x_2 = 1.57 - \left(\frac{-0.033}{-2.212}\right) = 1.55$ $\quad |1.57 - 1.55| = 0.02 > \varepsilon$

$x_3 = 1.55 - \left(\frac{0.0074}{-2.215}\right) = 1.5533$ $\quad |1.5533 - 1.55| = 0.0033 > \varepsilon$

$x_4 = 1.5533 - \left(\frac{0.000885}{2.21453}\right) = 1.5529$ $\quad |1.5529 - 1.5533| = 0.0004$

$x_5 = 1.5529 + \left(\frac{0.001453}{2.21459}\right) = 1.55357$ $\quad | \quad 7 \cdot 10^{-5} > \varepsilon$

$x_6 = 1.55357 + \left(\frac{0.000106}{+2.21495}\right) = 1.44221$ $\quad 8 \cdot 10^{-9} < \varepsilon$

Ответ: $\bar{x} = 1.44221 \pm 10^{-8}$

$\boxed{\text{Ответ: } x = 1.44221}$

Ответ: 1.44221

5.

$\boxed{5}$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -10 & -7 \\ -7 & 11 & 7 & -1 \\ -49 & -28 & 86 & 110 \\ 14 & -22 & 2 & 17 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -136 \\ 67 \\ 1432 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\mu_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = -1 \qquad \mu_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = -7 \qquad \mu_{41} = \frac{a_{41}}{a_{11}} = 2$$

$$7x_1 - 4x_2 - 10x_3 - 7x_4 = -136$$

$$-7x_1 + 11x_2 + 7x_3 - x_4 + 7x_1 - 4x_2 - 10x_3 - 7x_4 = 67 + 136 = 203$$

$$(-49 - 49)x_1 + (-28 - 28)x_2 + (86 - 70)x_3 + (110 - 49)x_4 = 1432 - 7 \cdot 136$$

$$-56x_2 + 16x_3 + 61x_4 = 480$$

$$(-7 \ 11 \ 7 \ -1)\bar{x} - (-7 \ 4 \ 10 \ 7)\bar{x} = 67 - 136$$

$$(0 \ 7 \ -3 \ -8)\bar{x} = -69$$

$$(-49 \ -28 \ 86 \ 110)\bar{x} - (-49 \ 28 \ 70 \ 49)\bar{x} = 1432 - 7 \cdot 136$$

$$(0 \ -56 \ 16 \ 61)\bar{x} = +480$$

$$(14 \ -22 \ 2 \ 17)\bar{x} - (14 \ -8 \ -20 \ -14)\bar{x} = 10 + 2 \cdot 136$$

$$(0 \ -14 \ 22 \ 31)\bar{x} = 282$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -10 & -7 \\ 0 & 7 & -3 & -8 \\ 0 & -56 & 16 & 61 \\ 0 & -14 & 22 & 31 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -136 \\ -69 \\ 480 \\ 282 \end{pmatrix}$$

1

$$\mu_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{-56}{7} = -8 \qquad \mu_{42} = \frac{a_{42}}{a_{22}} = -\frac{14}{7} = -2$$

$$(0\ -56\ 16\ 61)\bar{x} - (+0\ -56\ 24\ 64)\bar{x} = 480 - 69\cdot 8$$

$$(0\ 0\ -8\ -3)\bar{x} = 72$$

$$(0\ -14\ 22\ 31)\bar{x} - (0\ -14\ 6\ 16)\bar{x} = 282 - 2\cdot 136$$

$$(0\ 0\ 16\ 15)\bar{x} = 10$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -10 & -7 \\ 0 & 7 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 16 & 15 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -136 \\ -69 \\ 72 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\mu_{43} = \frac{a_{43}}{a_{33}} = \frac{+16}{-8} = -\frac{2}{1} = -2$$

$$(0\ 0\ 16\ 15)\bar{x} - (0\ 0\ +16\ +6)\bar{x} = 10 - 2\cdot 136$$

$$(0\ 0\ 0\ 9)\bar{x} = -262 + 262 = 0$$

$$\boxed{\text{Ответ: } x = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

2

$$\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 - 10x_3 - 7x_4 = -136 \\ 7x_2 - 3x_3 - 8x_4 = -69 \\ -8x_3 - 3x_4 = 72 \\ 9x_4 = -262 + 262 = 0 \end{cases}$$

$$x_4 = \frac{b_4}{a_{44}} = 0$$

$$x_3 = (b_{32} - a_{34}x_{24}) / a_{33} = -6$$

$$x_2 = (b_{21} - a_{23}x_{31} - a_{24}x_{41}) / a_{22} = 9$$

$$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - a_{14}x_4) / a_{11} = -10$$

Ответ: { -10; -6; 9; 0 }

8.

$\boxed{8}$

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \overset{b}{9} & \overset{c}{-5} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 11 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 27 \\ -11 \\ -62 \\ -29 \\ 51 \end{pmatrix}$$

элементы главной диагонали — b_i

элементы поддиагонали - a_i

элементы наддиагонали - c_i

d_i - элемент вектора

$$\alpha_1 = -\frac{c_1}{b_1} = \frac{+5}{9} \qquad \beta_1 = \frac{d_1}{b_1} = \frac{27}{9} = 3$$

$$\gamma_2 = b_2 + a_2\alpha_1 = -11 + 5 \cdot 27 = 135 - 11 = 124$$

$$\alpha_2 = -\frac{c_2}{\gamma_2} = \frac{-2}{124} = -\frac{1}{62} \qquad \beta_2 = \frac{d_2 - a_2\beta_1}{\gamma_2} = \frac{-\frac{1}{62} - 5 \cdot \frac{5}{9}}{124}$$

$$\alpha_3 = -\frac{c_3}{\gamma_3} = -\frac{85}{164} \qquad \beta_3 = \frac{d_3 - a_3\beta_2}{\gamma_3}$$

$$\gamma_4 = b_4 + a_4\alpha_3 \qquad \beta_5 = \frac{d_5 - a_5\beta_4}{b_5 + a_5\alpha_4}$$

Обратный ход:

$x_5 = \beta_5 = 3$

$x_4 = \alpha_4 x_5 + \beta_4 = -3$

$x_3 = \alpha_3 x_4 + \beta_3 = -7$

$x_2 = \alpha_2 x_3 + \beta_2 = +0$

$x_1 = \alpha_1 x_2 + \beta_1 = 3$

$$\boxed{\text{Ответ: } x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -7 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

Ответ: { 3; 0; -7; -3; 3 }

9.

9

$$A = \begin{pmatrix} 1.943 & 2.136 & 2.556 \\ -2.636 & -2.437 & 1.98 \\ -2.22 & 1.527 & 2.701 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3.465 \\ -1.583 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Норма $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |A_{ij}|$

$$\|A\|_1 = \max\{6.799,\ 6.5,\ 7.637\} = 7.637$$

Норма $\|A\|_E = \sqrt{\sum\limits_{j=0}^{k} \sum\limits_{i=0}^{n} |A_{ij}|^2}$ сумма квадратов всех эл-в матрицы

$$\|A\|_E = 7.0583$$

Норма $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |A_{ij}|$

$$\|A\|_\infty = \max\{7{,}035,\ 7{,}053,\ 6.848\} = 7.053$$

Норма $\|b\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |b_i| = 7.048$

Норма $\|b\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (b_i)^2} = \sqrt{12.006225 + 4 + 2.505889} = \sqrt{18.5118} = 4.3025$

Норма $\|b\|_\infty = \max(b_i) = 3.465$

Найдем относительную погрешность полученных норм

$$\Delta b = \begin{pmatrix} 0.0005 \\ 0.0005 \\ 0.5 \end{pmatrix} \quad \|\Delta b\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\Delta b_i| = 5 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-4} + 0.5 = 0.505$$

$$\|\Delta b\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\Delta b_i|^2} = \sqrt{25 \cdot 10^{-8} + 25 \cdot 10^{-8} + 25 \cdot 10^{-2}}$$

$$\delta_1 b = \frac{\|\Delta b\|_1}{\|b\|_1} = 0.145$$

$$\|\Delta b\|_2 = 0.500004$$

$$\delta_2 b = \frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2} = 0.315$$

$$\|\Delta b\|_\infty = 0.0005$$

$$\delta_3 b = \frac{0.5}{2} = 0.25$$

Ответы на листе

11.

$\boxed{11}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 108 & 9 & 2 \\ 142 & 8 & -7 & 9 \\ -7 & 5 & 6 & 115 \\ -9 & -7 & 121 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 574 \\ -180 \\ -4 \\ -992 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-8}{142}x_2 + \frac{7}{142}x_3 - \frac{9}{142}x_4 - \frac{180}{142} \\ x_2 = \frac{-1}{108}x_1 - \frac{9}{108}x_3 - \frac{2}{108}x_4 + \frac{574}{108} \\ x_3 = \frac{9}{121}x_1 + \frac{7}{121}x_2 - \frac{992}{121} \\ x_4 = \frac{7}{115}x_1 - \frac{5}{115}x_2 - \frac{6}{115}x_3 - \frac{4}{115} \end{cases}$$

Выберем в

1-ая итерация:

$x_0 = \frac{-1\cdot 8}{142} - \frac{1\cdot(-7)}{142} - \frac{(-1)\cdot 7\ 9}{142} - 1.26761$ $\quad x_0 = -1.9633$

$x_1 = \frac{(-1)\cdot 1}{108} - \frac{1\cdot 9}{108} - \frac{1\cdot 2}{108} + 5.314$ $\quad x_1 = 5.2037$

$x_2 = \frac{(-1)\cdot(-5)\cdot 1}{121} - \frac{1(-7)}{121} - 0 + (-8.15835)$ $\quad x_2 = -8.066$

$x_3 = -\frac{1\cdot(-7)}{115} - \frac{1\cdot 5}{115} - \frac{1\cdot 6}{115} - 0.0347$ $\quad x_3 = -0.0895$

2-ая итерация

$x_0 = -1.26 - \frac{5.2\cdot 8}{142} + \frac{8.06\cdot(-7)}{142} + \frac{9\cdot 0.0855}{142} = -1.953$

$x_1 = 5.314 + \frac{1.338}{108} + \frac{9\cdot 8.066}{108} + \frac{2\cdot 0.0855}{108} = 6.0067$

$x_2 = -8.15835 - \frac{9\cdot 1.33}{121} + \frac{5\cdot 2\cdot 7}{121} + \frac{6\cdot 0.0855\cdot 0}{121} = -7.996$

$x_3 = -0.0347 - \frac{7\cdot 1.33}{115} + \frac{-5.2037\cdot 5}{115} + \frac{8.06\cdot 6}{115} = 0.07$

3-я итерация

$x_0 = -1.95$
$x_1 = 6.0006$
$x_2 = -7.99663$
$x_3 = 0.0783$

$$x_0 = -1.267 - \frac{6.0006 \cdot 8}{142} - 7 \cdot \frac{7.996}{142} - 9 \cdot \frac{0.07}{142}$$

$$x_0 = -2.0004$$

$$x_1 = 5.31481 + \frac{1{,}5530 \cdot 1}{108} + \frac{7.9968 \cdot 9}{108} + \frac{0.07835 \cdot 2}{108} = 5.99786$$

$$x_2 = -8.19835 + (-1{,}953 \cdot 9)/121 + \frac{6.00(-7)}{121} + 0.07$$

$$x_2 = -7.996$$

$$x_3 = -0.0377 + \frac{(-7) \cdot 1{,}953}{115} - \frac{6.0007 \cdot 5}{115} + \frac{7.9968 \cdot 6}{155}$$

$$x_3 = 0.00026$$

$$\boxed{\text{Ответ: } \begin{array}{l} x_0 = -2 \\ x_1 = 6 \\ x_2 = -8 \\ x_3 = 0 \end{array}}$$

Ответ: { -2; 6; -8; 0 }