Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ

УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО

ОБРАЗОВАНИЯ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

«МЭИ»

Институт Информационных и Вычислительных Технологий

Кафедра Математического и компьютерного моделирования

Типовые расчёты

Выполнила: студент группы А-02-22

Железнов А.О.

Вариант:4

Проверил: ст. преп. Пепа Р.Ю.

Москва 2024

Задание 1. Вариант 4.

$Z = 1.25^3 + 1.687 - 2.2^2$.

$Z = f(x, y, z) = x^3 + y - z^2$

$x = 1.25 \quad y = 1.687 \quad z = 2.2$

$\Delta x = 0{,}005 \quad , \Delta y = 0{,}0005 \quad , \Delta z = 0{,}05$.

Вычисляя, находим $f = -1{,}199875$.

$\Delta f = |f'_x| \cdot \Delta x + |f'_y| \Delta y + |f'_z| \cdot \Delta z \ominus$

$\ominus\ 3x^2 \cdot \Delta x + \Delta y + 2z \cdot \Delta z = 3 \cdot 1.25^2 \cdot 0{,}005 + 0{,}0005 +$

$+ 2 \cdot 2{,}2 \cdot 0{,}05 \approx 0{,}2439_{38} \approx 0{,}24$.

Сравним единицы разрядов с полученной абсолютной погрешностью.

$0{,}24 \leq 1$; $0{,}24 \not\leq 0{,}1$.

Начиная с десятых начинаются неверные цифры.

$\delta f = \dfrac{\Delta f}{|f|} = \dfrac{0{,}24}{1{,}1} = 0{,}22 = 22\%$.

Ответ: $f = -1{,}1 \pm 0{,}24$, результат содержит одну верную цифру.

Задание 2 Вариант 4.

x^3+x-3, $\varepsilon=0{,}01$

$f(x)=x^3+x-3=0$

Составим таблицу значений исходной функции:

x	1	2
$f(x)$	-1	7

Из таблицы видно, что в качестве отрезка можно взять $[1,2]$.

Применим метод бисекции:

$[a_0, b_0]=[1,2]$

1 Шаг. Т.к. длина отрезка равна $1>2\varepsilon=0{,}02$, то ищем следующее приближение.

Находим середину отрезка $[a_0, b_0]$:

$x_0=\frac{a_0+b_0}{2}=1{,}5$, вычисляем:

$f(a_0)=-1<0$, $f(x_0)=1{,}875>0$

Функция на отрезке меняет знак, тогда

$a_1=a_0=1$, $b_0=x_0=1{,}5$.

2 Шаг: $b_1-a_1=0{,}5>2\varepsilon$, $x_1=\frac{2{,}5}{2}=1{,}25$.

$f(a_1)=-1<0$, $f(1{,}25)=0{,}20>0$.

ф-ция меняет знак:

$b_2-a_2=0{,}25>2\varepsilon$.

3 Шаг: $x_3=\frac{1+1{,}25}{2}=1{,}125$, функция не меняет знак.

$b_3-a_3=0{,}125>2\varepsilon$

4 Шаг: $x_4=\frac{1{,}125+1{,}25}{2}=1{,}1875$, функция не меняет знак.

5 Шаг: $x_5=\frac{1{,}25+1{,}1875}{2}=1{,}21875$, функция меняет знак но $b_5-a_5>2\varepsilon$

6 Шаг: $x_6=\frac{1{,}1875+1{,}21875}{2}=1{,}203125$, На 6 шаге $b_6-a_6<2\varepsilon \Rightarrow \bar{x}=1{,}20\pm0{,}01$

Задание 3   Вариант 4.

~~$f(x) = x^2 - \frac{1}{x} - 5 = 0$, $\varepsilon = 0{,}0001$.~~

$f(x) = x^3 + x - 3 = 0$, $\varepsilon = 0{,}0001$

Отрезок локализации – $[\cancel{1;2}]$ $[1{,}125; 1{,}25]$.

$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$

$\frac{q}{1-q} \cdot (x^{(k+1)} - x^{(k)}) \leq \varepsilon$ – критерий окончания.

Начальное приближение $x_0 = 1{,}1875$

$\varphi(x) = x - \alpha \cdot f(x)$; где $\alpha = \frac{2}{M+m}$.

$M = \max\limits_{x \in [a,b]} f'(x)$; $m = \min\limits_{x \in [a,b]} f'(x)$.

$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ на $[a,b]$, функция строго

~~$f''(x) = 6x > 0$ на $[a,b]$.~~

~~$f'''(x) = 0 \neq 0$ на $[a,b]$.~~

положительная, поэтому

~~$m = f'(1) = 4$, $M = f'(2) = 13$.~~

$m = f'(1{,}125) = 4{,}79$, $M = f'(1{,}25) = 5{,}69$.

$\alpha = \frac{2}{4{,}79 + 5{,}69} = 0{,}19$, $\varphi(x) = x - 0{,}19(x^3 + x - 3)$.

$q = \frac{M-m}{M+m} = \frac{5{,}69 - 4{,}79}{5{,}69 + 4{,}79} = 0{,}086$

$x_1 = \varphi(x_0) = 1{,}1875 - 0{,}19(1{,}1875^3 + 1{,}1875 - 3) = 1{,}21371$

$|x_1 - x_0| = 0{,}02 \leq \frac{1 - 0{,}086}{0{,}086} \cdot 0{,}0001 = 0{,}001$

Неверно

Задание 3 Вариант 4 Продолжение.

$x_2 = \varphi(x_1) = 1,21371 - 0,19(1,21371^3 + 1,21371 - 3) \approx 1,2134.$

$|x_2 - x_1| = 0,00031 \leq 0,001$

Ответ: $\bar{x} = 1,2137 \pm 0,0001$.

Задание 4 Вариант 4

$f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x} - 5 = 0, \quad \varepsilon = 10^{-8}$

$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

В моем случае:

$x_{k+1} = x_k - \frac{3x^2 - \frac{1}{x} - 5}{6x + \frac{1}{x^2}}$

Отрезок локализации: $[1; 2]$.

Критерий окончания: $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$.

$f'(x) = 6x + \frac{1}{x^2}$.

Начальное приближение $x_0 = 1,5$.

1). $x_1 = 1,5 - 0,114705882 = 1,385294118$

$|1,5 - 1,385294118| > \varepsilon$.

2). $x_2 = 1,385294118 - \underset{> \varepsilon}{0,0039909} = 1,381303218$

3). $x_3 = 1,381303218 - \underset{> \varepsilon}{4,73595 \cdot 10^{-6}} = 1,38129848205$.

4). $x_3 = 1,38129848205 - \underset{< \varepsilon}{6,00527 \cdot 10^{-12}} = 1,381298482043994 73$

Ответ: $\bar{x} = 1,38129848 \pm 10^{-8}$.

Задание № 5. Вариант 4.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -10 & 3 \\ 24 & -26 & 84 & -24 \\ 12 & 82 & -4 & -10 \\ -18 & -78 & -8 & 5 \end{pmatrix};\quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ -20 \\ -714 \\ 675 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - 10x_3 + 3x_4 = 12 \\ 24x_1 - 26x_2 + 84x_3 - 24x_4 = -20 \\ 12x_1 + 82x_2 - 4x_3 - 10x_4 = -714 \\ -18x_1 - 78x_2 - 8x_3 + 5x_4 = 675. \end{cases}$$

Метод Гаусса.

1). умножим 1 строку на 8, добавим 2-ю к 1-й:

$$\begin{cases} -10x_2 + 4x_3 = 76 \\ 24x_1 - 26x_2 + 84x_3 - 24x_4 = -20 \\ 12x_1 + 82x_2 - 4x_3 - 10x_4 = -714 \\ -18x_1 - 78x_2 - 8x_3 + 5x_4 = 675. \end{cases}$$

2). умножим 3-ю строку на −2, добавим 3-ю к 2-й.

$$\begin{cases} -10x_2 + 4x_3 = 76 \\ -190x_2 + 92x_3 - 4x_4 = 1408 \\ 12x_1 + 82x_2 - 4x_3 - 10x_4 = -714 \\ -18x_1 - 78x_2 - 8x_3 + 5x_4 = 675 \end{cases}$$

3). умножим 1-ю строку на 19, 2 на (−1), добавим 2 к 1

$$\begin{cases} 0 \quad 0 \quad -16 \quad 4 \quad 36 \\ 0 \quad -190 \quad 92 \quad -4 \quad 1408 \\ 0 \quad 540 \quad -168 \quad -120 \quad -4452 \\ -18 \quad -78 \quad -8 \quad 5 \quad 675 \end{cases}$$

4). умножим 1-ю строку на 11/10, добавим 2-ю к 1

$$\begin{cases} -20520x_4 = -102600 \\ 17760x_3 - 24960x_4 = -142560 \\ 540x_2 - 168x_3 - 120x_4 = -4752 \\ -18x_1 - 78x_2 - 8x_3 + 5x_4 = 675 \end{cases}$$

Ответ:

$x_4 = 5$

$$x_3 = \frac{-17760}{17760} = -1$$

$$x_2 = \frac{-4320}{540} = -8$$

$$x_1 = \frac{18}{-18} = -1$$

Задание 9 Вариант 4.

$$A=\begin{pmatrix} 1,082 & 0,387 & -2,646 \\ -1,608 & 0,107 & 2,292 \\ 1,709 & 2,946 & -2,136 \end{pmatrix};\ b=\begin{pmatrix} 3 \\ 7,641 \\ -3,9 \end{pmatrix}.$$

Норма $\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |A_{ij}|$.

$$\|A_1\| = \max\{4,399;\ 3,44;\ 7,074\} = 7,074.$$

Норма $\|A\|_E = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |A_{ij}|^2}$ – вычисляем сумму квадратов всех элементов матрицы и берём корень.

$$\|A\|_E = \sqrt{32,334279} \approx 5,68632$$

Норма $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |A_{i,j}|$.

$$\|A\|_\infty = \max\{4,115;\ 4,007;\ 6,791\} = 6,791$$

Норма $\|b\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |b_i| = 14,541.$

Норма $||b||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2} \approx 9,08817$

Норма $||b||_\infty = \max |b_i| = 7,641.$

Найдем относит. погрешность получ. норм. b.

$$\Delta b = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,0005 \\ 0,05 \end{pmatrix}$$ — т.к. округл. по дополнению.

$$||\Delta b||_1 = \sum_{i=1}^{n} |\Delta b_i| = 0,5 + 0,0005 + 0,05 =$$
$$= 0,5505.$$

$$||\Delta b||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\Delta b_i|^2} = \sqrt{0,25 + 0,0005^2 + 0,05^2} =$$

$$= 0,502494$$

$$||\Delta b||_\infty = \max |\Delta b_i| = 0,5$$

$$\delta_1 b = \frac{||\Delta b||_1}{||b||_1} = \frac{0,5505}{14,541} = 0,0378585.$$

$$\delta_2 b = \frac{0,502494}{9,08817} = 0,055291.$$

$$\delta_3 b = \frac{0,5}{7,641} = 0,0654365.$$

Задание 11 Вариант 4.

$$A=\begin{pmatrix} -6 & 96 & 3 & -3 \\ -1 & -7 & -6 & 96 \\ 103 & 8 & 5 & 2 \\ -5 & 6 & 84 & -1 \end{pmatrix};\quad b=\begin{pmatrix} 153 \\ -133 \\ -582 \\ 541 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} 103x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 2x_4 = -582 \\ -6x_1 + 96x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 153 \\ -5x_1 + 6x_2 + 84x_3 - x_4 = 541 \\ -1x_1 - 7x_2 - 6x_3 + 96x_4 = -133 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{8}{103}x_2 - \frac{5}{103}x_3 - \frac{2}{103}x_4 - \frac{582}{103}. \\ x_2 = \frac{6}{96}x_1 - \frac{3}{96}x_3 + \frac{3}{96}x_4 + \frac{153}{96}. \\ x_3 = \frac{5}{84}x_1 - \frac{6}{84}x_2 + \frac{1}{84}x_4 + \frac{541}{84} \\ x_4 = \frac{1}{96}x_1 + \frac{7}{96}x_2 + \frac{6}{96}x_3 - \frac{133}{96}. \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{8}{103} & -\frac{5}{103} & -\frac{2}{103} \\ \frac{6}{96} & 0 & -\frac{3}{96} & \frac{3}{96} \\ \frac{5}{84} & -\frac{6}{84} & 0 & \frac{1}{84} \\ \frac{1}{96} & \frac{7}{96} & \frac{6}{96} & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } \|B\|_\infty =$$

$= 0,14583 < 1 \Rightarrow$ метод Якоби сходится для $\forall x^{(0)}$

Метод Якоби сходится независимо от нач приближения. Выберем в качестве нач приближ. $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Итерация 1: $X_1 = \begin{cases} -9\ 5 \\ 31,71428571 \\ -139 \\ -459 \end{cases}$

Итерация 2: $X_2 = \begin{cases} 640.42857143 \\ -6114.21428571 \\ 210.55714286 \\ -11575.21428571 \end{cases}$

Итерация 3: $X_3 = \begin{cases} -91757,84285714 \\ -164539,67755102 \\ 1265,2 \\ -22708,02857143 \end{cases}$.

$r^{(0)} = b - A \cdot x^{(0)}$; $r^{(3)} = b - A x^{(3)}$

$$r^{(0)} = b - \begin{pmatrix} 90 \\ 82 \\ 118 \\ 84 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63 \\ -215 \\ -700 \\ 457 \end{pmatrix}.$$

$$r^{(3)} = b - \begin{pmatrix} -15173337.6 \\ -944038.4 \\ -10805425.4 \\ -399510.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15173490.6 \\ 943905.4 \\ 10804843.4 \\ 400051.2 \end{pmatrix}$$

$\|r^{(3)}\|_1 = 27322290,6.$

$\|r^{(0)}\|_1 = 1435.$

$\dfrac{1435}{27322290,6} = 0,000052212.$

Апостериорная оценка:

$x^{(3)} - x^{(2)} = \begin{pmatrix} -92397 \\ -158425 \\ 1055 \\ 39687 \end{pmatrix}$; $\|x^3 - x^2\|_\infty = 158425.$

$$\frac{\|B\|_\infty}{1-\|B\|_\infty} = \frac{0{,}14583}{1-0{,}14583} = 0{,}170727$$

$$\|x_3 - \bar{x}\| \leq 158425 \cdot 0{,}170727 \leq 27097{,}921585$$

Метод Зейделя:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{8}{103} & -\frac{5}{103} & -\frac{2}{103} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{96} & \frac{3}{96} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{84} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{96} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{84} & -\frac{6}{84} & 0 & 0 \\ \frac{1}{96} & \frac{7}{96} & \frac{6}{96} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \|B_1\|_\infty = 0{,}145631 \\ \|B_2\|_\infty = 0{,}14583. \end{array}\right\} + = 0{,}291461 < 1$$

Выполн. достаточ. условие метода.

Формула: $x^{(k+1)} = B_1 x^{(k+1)} + B_2 \cdot x^{(k)} + C$.

Начальное приближ. $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, как в методе Якоби.

Итерация № 1: $X^{(1)} = \begin{pmatrix} -5{,}7961165 \\ 1{,}23149272 \\ 6{,}01947025 \\ -0{,}9797834 \end{pmatrix}$

Итерация № 2 $X^{(2)} = \begin{pmatrix} -6{,}01931482 \\ 0{,}99881802 \\ 5{,}99917541 \\ -1{,}00033892 \end{pmatrix}$

Итерация № 3 $X^{(3)} = \begin{pmatrix} -5{,}99986759 \\ 1{,}00007383 \\ 6{,}0000025 \\ -0{,}99999666 \end{pmatrix}.$

$$r^{(0)} = b - A \cdot X^{(0)} = b - \begin{pmatrix} 90 \\ 82 \\ 118 \\ 84 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63 \\ -215 \\ -700 \\ 457 \end{pmatrix}$$

$$r^{(3)} = b - A \cdot X^{(3)} = b - \cancel{\begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 153{,}0073944 \\ -60{,}9993329 \\ -581{,}985366 \\ 580{,}999596 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -0{,}0013 \\ -72{,}0007 \\ -0{,}015 \\ 0{,}0005 \end{pmatrix}.$$

$\|r^0\|_1 = 1435$; $\|r^3\|_1 = 72{,}0175.$

$$-\frac{\|r^0\|_1}{\|r^3\|_1} = 19,92571.$$

Апостериорная оценка:

$$\|X_3 - \bar{x}\|_\infty \leq \frac{\|B_2\|_\infty}{1-\|B\|_\infty} \cdot \|x^{(3)} - x^{(2)}\|_\infty$$

$$x^{(3)} - x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,0207 \\ 0,001202 \\ 0,000832 \\ 0,60034 \end{pmatrix}; \ \|x^{(3)} - x^{(2)}\|_\infty =$$

$$= 0,0207.$$

$$\frac{\|B_2\|_\infty}{1-\|B\|_\infty} = \frac{0,14583}{1-0,145631} = 0,170687$$

$$\|X_2 - \bar{x}\| \leq 0,0207 \cdot 0,170687 = 0,00353322$$