Рябчиков Арсений А-09-22

ТР 1

Вариант 10 (21)

$z = \log_2 2.01 - 2^{-1.006+2.0}$

$z = f(x, y, z) = \log_2 x - 2^{-y+z}$

$x = 2.01 \quad z = 0.005 \quad y = 1.006 \pm 0.0005 \quad z = 2.0 \pm 0.05 \qquad \Delta\overline{z}-?,\ \delta\overline{z}-?$

$\Delta\overline{z}\widetilde{\leq}|\frac{\delta z}{\delta x}|\Delta\overline{x}+|\frac{\delta z}{\delta y}|\Delta\overline{y}+|\frac{\delta z}{\delta t}|\Delta\overline{t} = |\frac{1}{x\cdot\ln 2}|\cdot 0.005+|2^{-y+t}\cdot\ln 2|\cdot 0.0005+|2^{-y+t}\cdot\ln 2|\cdot 0.05 =$

$= |\frac{1}{2.01\cdot\ln 2}| \cdot 0.005 + |2^{-1.006+2.0} \cdot \ln 2| \cdot 0.0005 + |2^{-1.006+2.0} \cdot \ln 2| \cdot 0.05 \cong$

$\cong 0.0733 \leq 0.08 = \Delta\overline{z}$

$z = \log_2 2.01 - 2^{0.994} \approx -0.987267$

$\delta\overline{z} \cong \frac{\Delta\overline{z}}{|z|} = \frac{0.08}{0.987267} = 0.081 = 8.1\%$

Результат с учетом погрешности:

$z = -0.99 \pm 0.08$

Или $z = -0.987267 \cdot (1 \pm 0.081)$

Или оставив только верные цифры: $z = -0.9$, т.к.

$0.08 \leq 0.1 \oplus$

$0.08 \leq 0.01 \ominus$

$-0.\overset{В}{9}\overset{Н}{8}\overset{Н}{7}\overset{Н}{2}\overset{Н}{6}\overset{Н}{7}$

Рябчиков Арсений А-09-22

ТР 2

Вариант 10 (21)

Локализовать корень нелинейного уравнения $f(x) = 0$ и найти его методом бисекции с точностью $\varepsilon = 0.01$.

$f(x) = \log_2 x - 2^{-x}$ - определена на бесконечном интервале $x \in (0, +\infty)$.

$f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} + 2^{-x} \ln 2 > 0$ для всех x принадлежащих области определения $\Rightarrow f(x)$ возрастает на всей своей области определения. Если есть корень, то он один.

Составим таблицу значений исходной функции с шагом 1.

x	0.6	1.6	2.6
$f(x)$	-1.39672	0.348195	1.21357

Из таблицы видно, что в качестве отрезка локализации можно взять отрезок $[0.6, 1.6]$, так как на нем функция меняет знак, а, значит, пересекает ось OX.

Применим метод бисекции. Обозначим $[a_0, b_0] = [0.6, 1.6]$.

1-й шаг. Так как длина текущего отрезка равна $1 > 2\varepsilon = 0.02$, то ищем следующее приближение. Находим середину отрезка $[a_0, b_0]$:

$x_0 = \frac{a_0+b_0}{2} = 1.1$

и вычисляем

$f(a_0) \approx -1.39672 < 0, f(x_0) \approx -0.329013 < 0.$

Видно что на левом подотрезке $[a_0, x_0]$ функция не меняет знак, следовательно, корень находится на другой половине отрезка, поэтому полагаем:

$a_1 = x_0 = 1,1 \quad b_1 = b_0 = 1,6$

Дальнейшие вычисления для краткости представим в виде таблицы:

k	a_k	b_k	$x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$	Знак $f(a_k)$	Знак $f(x_k)$	$b_k - a_k$
0	0.6	1.6	1.1	$-$	$-$	1
1	1.1	1.6	1.35	$-$	$+$	0.5
2	1.1	1.35	1.225	$-$	$-$	0.25
3	1.225	1.35	1.2875	$-$	$-$	0.125
4	1.2875	1.35	1.31875	$-$	$-$	0.0625
5	1.31875	1.35	1.334375	$-$	$+$	0.03125
6	1.31875	1.334375	1.3265625	$-$	$+$	0.015625

Поскольку на 6-ом шаге длина очередного отрезка стала меньше, чем $2\varepsilon = 0,04$, то вычисления следует прекратить и середину последнего отрезка принять за приближенное значение корня (с точностью ε).

Ответ: $\overline{x} = 1.32 \pm 0.01$

Рябчиков Арсений А-09-22
ТР 3
Вариант 10 (21)

$f(x) = \log_2 x - 2^{-x} \qquad \varepsilon = 0.001$

В качестве отрезка локализации возьмем отрезок $[1.225, 1.35]$ из ТР 2

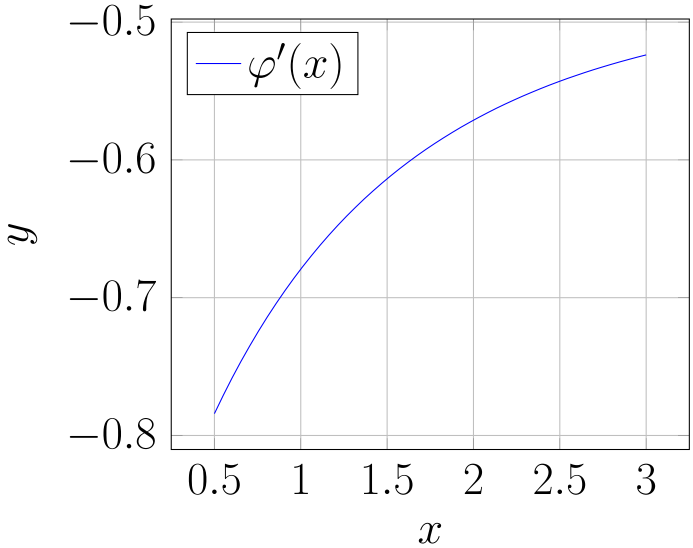
Преобразуем уравнение $f(x) = 0$ к виду $x = \varphi(x)$:

$\log_2 x = 2^{-x}$

$x = 2^{2^{-x}}$

Получили $\varphi(x) = 2^{2^{-x}}$

$\varphi'(x) = -2^{2^{-x}} \cdot \ln^2 2$



$q = \max\limits_{[1.225,1.35]} |\varphi'(x)| = |\varphi'(1.35)| \approx 0.631 < 1 \Rightarrow$ Условие сходимости выполнено

Критерий окончания: $|x_k - x_{k-1}| \leq \frac{1-q}{q}\varepsilon = \frac{1-0.631}{0.631}0.001 \approx 0.0006$

Возьмем в качестве начального приближения середину отрезка локализации:

$x_0 = 1.2875$

Вычисляем:

$x_1 = \varphi(x) = 2^{2^{-1.2875}} \approx 1.32837$

Проверяем критерий окончания: $|x_1 - x_0| = 0.04087 \nleq \frac{1-q}{q} = 0.0006$ - продолжаем итерации

$x_2 = \varphi(x) = 2^{2^{-1.32837}} \approx 1.31788$

$|x_2 - x_1| = 0.01049 \nleq \frac{1-q}{q} = 0.0006$ - продолжаем итерации

$x_3 = \varphi(x) = 2^{2^{-1.31788}} \approx 1.32054$

$|x_3 - x_2| = 0.00266 \nleq \frac{1-q}{q} = 0.0006$ - продолжаем итерации

$x_4 = \varphi(x) = 2^{2^{-1.32054}} \approx 1.31986$

$|x_4 - x_3| = 0.00068 \nleq \frac{1-q}{q} = 0.0006$ - продолжаем итерации

$x_5 = \varphi(x) = 2^{2^{-1.31986}} \approx 1.32003$

$|x_5 - x_4| = 0.00017 \leq \frac{1-q}{q} = 0.0006$

На 5-ой итерации неравенство оказалось верным, значит процесс можно прекраш

Ответ: $\overline{x} = 1.3200 \pm 0.0001$

Рябчиков Арсений А-09-22

ТР 4

Вариант 10 (21)

$f(x) = 2\cos x - \frac{1}{2\sqrt{x+3}} \qquad [a,b] = [4,6] \qquad \varepsilon = 10^{-8}$

$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

$x_{k+1} = x_k - \frac{2\cos x_k - \frac{1}{2\sqrt{x_k+3}}}{-2\sin x_k + \frac{1}{4(x_k+3)^{1.5}}}$

Возьмем в качестве начального приближения середину отрезка локализации:

$x_0 = 5$

Вычисляем:

$x_1 = x_0 - \frac{2\cos x_0 - \frac{1}{2\sqrt{x_0+3}}}{-2\sin x_0 + \frac{1}{4\cdot x_0^{1.5}}} = 5 - \frac{2\cos 5 - \frac{1}{2\sqrt{8}}}{-2\sin 5 + \frac{1}{4\cdot 8^{1.5}}} = 4.797527988$

Проверяем критерий окончания:

$|x_1 - x_0| = 0.202472012 \nleq 0.00000001$ - продолжаем вычисления

$x_2 = x_1 - \frac{2\cos x_1 - \frac{1}{2\sqrt{x_1+3}}}{-2\sin x_1 + \frac{1}{4\cdot x_1^{1.5}}} = 4.797527988 - \frac{2\cos 4.797527988 - \frac{1}{2\sqrt{7.797527988}}}{-2\sin 4.797527988 + \frac{1}{4\cdot 7.797527988^{1.5}}} = 4.80201085$

$|x_2 - x_1| = 0.00448286 \nleq 0.00000001$ - продолжаем вычисления

$x_3 = x_2 - \frac{2\cos x_2 - \frac{1}{2\sqrt{x_2+3}}}{-2\sin x_2 + \frac{1}{4\cdot x_2^{1.5}}} = 4.80201085 - \frac{2\cos 4.80201085 - \frac{1}{2\sqrt{7.80201085}}}{-2\sin 4.80201085 + \frac{1}{4\cdot 7.80201085^{1.5}}} = 4.802011729$

$|x_3 - x_2| = 0.000000879 \nleq 0.00000001$ - продолжаем вычисления

$x_4 = x_3 - \frac{2\cos x_3 - \frac{1}{2\sqrt{x_3+3}}}{-2\sin x_3 + \frac{1}{4\cdot x_3^{1.5}}} = 4.802011729 - \frac{2\cos 4.802011729 - \frac{1}{2\sqrt{7.802011729}}}{-2\sin 4.802011729 + \frac{1}{4\cdot 7.802011729^{1.5}}} = 4.802011729$

$|x_4 - x_3| = 0 \leq 0.00000001$

В этот раз неравенство выполнилось, поэтому итерации можно прекратить, т.к. была достигнута точность $\varepsilon = 10^{-8}$

Ответ: $\overline{x} = 4.80201172 \pm 0.00000001$

Рябчиков Арсений А-09-22

ТР 5

Вариант 10 (21)

$$\begin{cases} -4x_1 - 7x_2 - 3x_3 = -50 \\ 40x_1 + 73x_2 + 36x_3 + 9x_4 = 431 + 10 \cdot I \\ 28x_1 + 49x_2 + 23x_3 - 4x_4 = 392 + 7 \cdot I \\ -28x_1 - 79x_2 - 69x_3 - 109x_4 = 542 - 7 \cdot I \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x_1 - 7x_2 - 3x_3 = -50 \\ 3x_2 + 6x_3 + 9x_4 = -69 \\ 2x_3 - 4x_4 = 42 \\ -30x_2 - 48x_3 - 109x_4 = 892 + 10 \cdot II \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x_1 - 7x_2 - 3x_3 = -50 \\ 3x_2 + 6x_3 + 9x_4 = -69 \\ 2x_3 - 4x_4 = 42 \\ 12x_3 - 19x_4 = 202 - 6 \cdot III \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x_1 - 7x_2 - 3x_3 = -50 \\ 3x_2 + 6x_3 + 9x_4 = -69 \\ 2x_3 - 4x_4 = 42 \\ 5x_4 = -50 \end{cases}$$

$x_4 = \frac{-50}{5} = -10$

$x_3 = \frac{42-40}{2} = 1$

$x_2 = \frac{-69-6+90}{3} = 5$

$x_1 = \frac{-50+35+3}{-4} = 3$

Ответ: X$= \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ -10 \end{pmatrix}$

Рябчиков Арсений А-09-22

ТР 8

Вариант 10 (21)

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 22 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -8 \\ 32 \\ 23 \\ -36 \\ -92 \end{pmatrix}$$

$\alpha_1 = -\frac{c_1}{b_1} = \frac{2}{4} = 0.5 \qquad \beta_1 = \frac{d_1}{b_1} = \frac{-8}{4} = -2$

$\gamma_2 = b_2 + a_2 \cdot \alpha_1 = 22 - 6 \cdot 0.5 = 19$

$\alpha_2 = -\frac{c_2}{\gamma_2} = -\frac{5}{19} \qquad \beta_2 = \frac{d_2 - a_2\beta_1}{\gamma_2} = \frac{32-6\cdot 2}{19} = \frac{20}{19}$

$\gamma_3 = b_3 + a_3 \cdot \alpha_2 = 4 - 1 \cdot \frac{5}{19} = \frac{71}{19}$

$\alpha_3 = -\frac{c_3}{\gamma_3} = \frac{1}{\frac{71}{19}} = \frac{19}{71} \qquad \beta_3 = \frac{d_3 - a_3\beta_2}{\gamma_3} = \frac{23-1\cdot\frac{20}{19}}{\frac{71}{19}} = \frac{417}{71}$

$\gamma_4 = b_4 + a_4 \cdot \alpha_3 = 12 + 2 \cdot \frac{19}{71} = \frac{890}{71}$

$\alpha_4 = -\frac{c_4}{\gamma_4} = \frac{5}{\frac{890}{71}} = \frac{71}{178} \qquad \beta_4 = \frac{d_4 - a_4\beta_3}{\gamma_4} = \frac{-36-2\cdot\frac{417}{71}}{\frac{890}{71}} = -\frac{339}{89}$

$\gamma_5 = b_5 + a_5 \cdot \alpha_4 = 8 + 4 \cdot \frac{71}{178} = \frac{854}{89}$

$\beta_5 = \frac{d_5 - a_5\beta_4}{\gamma_5} = \frac{-92+4\cdot\frac{339}{89}}{\frac{854}{89}} = -8$

$x_5 = \beta_5 = -8$

$x_4 = \alpha_4 \cdot x_5 + \beta_4 = -\frac{71}{178} \cdot 8 - \frac{339}{89} = -7$

$x_3 = \alpha_3 \cdot x_4 + \beta_3 = -\frac{19}{71} \cdot 7 + \frac{417}{71} = 4$

$x_2 = \alpha_2 \cdot x_3 + \beta_2 = -\frac{5}{19} \cdot 4 + \frac{20}{19} = 0$

$x_1 = \alpha_1 \cdot x_2 + \beta_1 = \beta_1 = -2$

Ответ: $X=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$

Рябчиков Арсений А-09-22

ТР 9

Вариант 10 (21)

$$A= \begin{pmatrix} -0.888 & 1.055 & -1.656 \\ -2.627 & -1.466 & -2.558 \\ 2.014 & -0.835 & 0.56 \end{pmatrix} \quad b= \begin{pmatrix} -1 \\ 2.951 \\ -2.988 \end{pmatrix}$$

$$\parallel A \parallel_1 = \max_{1\le j\le 3} \sum_{i=1}^{3} |A_{ij}| = \max\{5.529; 3.356; 4,774\} = 5.529$$

$$\parallel A \parallel_E = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} |A_{ij}|^2} = (0.888^2 + 1.055^2 + 1.656^2 + 2.627^2 + 1.466^2 + 2.558^2 +$$

$$+2.014^2 + 0.835^2 + 0.56^2)^{0.5} \approx 5.03$$

$$\parallel A \parallel_\infty = \max_{1\le i\le 3} \sum_{j=1}^{3} |A_{ij}| = \max\{3.599; 6.651; 3.409\} = 6.651$$

$$\parallel b \parallel_1 = \sum_{i=1}^{3} |A_i| = |-1| + |2.951| + |-2.988| = 6.939$$

$$\parallel b \parallel_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} |A_i|^2} = \sqrt{1^2 + 2.951^2 + 2.988^2} \approx 4.317$$

$$\parallel b \parallel_\infty = \max_{1\le i\le 3} |A_i| = \max\{1; 2.951; 2.988\} = 2.988$$

$$\Delta_1 b = |5\cdot 10^{-1}| + |5\cdot 10^{-4}| + |5\cdot 10^{-4}| = 0.501$$

$$\Delta_2 b = \sqrt{(5\cdot 10^{-1})^2 + (5\cdot 10^{-4})^2 + (5\cdot 10^{-4})^2} \approx 0.5$$

$$\Delta_\infty b = \max\{|5\cdot 10^{-1}|; |5\cdot 10^{-4}|; |5\cdot 10^{-4}|\} = 0.5$$

$$\delta_1 b = \frac{\Delta_1 b}{\|b\|_1} = \frac{0.501}{6.939} \approx 0.0722$$

$$\delta_2 b = \frac{\Delta_2 b}{\|b\|_2} = \frac{0.5}{4.317} \approx 0.1158$$

$$\delta_\infty b = \frac{\Delta_\infty b}{\|b\|_\infty} = \frac{0.5}{2.988} \approx 0.1673$$

Рябчиков Арсений А-09-22

ТР 11

Вариант 10 (21)

$$\begin{cases} -4x_1+4x_3+73x_4=-645 \\ -3x_1+67x_2-4x_3=415 \\ 4x_1+8x_2+90x_3+3x_4=863 \\ 118x_1-8x_2-2x_3-5x_4=679 \end{cases}$$

Преобразум систему:

$$\begin{cases} 118x_1-8x_2-2x_3-5x_4=679 \\ -3x_1+67x_2-4x_3=415 \\ 4x_1+8x_2+90x_3+3x_4=863 \\ -4x_1+4x_3+73x_4=-645 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1=\frac{8}{118}x_2+\frac{2}{118}x_3+\frac{5}{118}x_4+\frac{679}{118} \\ x_2=\frac{3}{67}x_1+\frac{4}{67}x_3+\frac{415}{67} \\ x_3=-\frac{4}{90}x_1-\frac{8}{90}x_2-\frac{3}{90}x_4+\frac{863}{90} \\ x_4=\frac{4}{73}x_1-\frac{4}{73}x_3-\frac{645}{73} \end{cases}$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & \frac{8}{118} & \frac{2}{118} & \frac{5}{118} \\ \frac{3}{67} & 0 & \frac{4}{67} & 0 \\ -\frac{4}{90} & -\frac{8}{90} & 0 & -\frac{3}{90} \\ \frac{4}{73} & 0 & -\frac{4}{73} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\parallel B \parallel_\infty = \max_{1\le i\le 4}\sum_{j=1}^{4}|B_{ij}| = \max\{0.1271; 0.1045; 0.1667; 0\} = 0.1667$$

$\parallel B \parallel_\infty = 0.1667 < 1 \Rightarrow$ методы будут сходится

Метод Якоби:

Возьмем в качестве начального приближения вектор $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{8}{118}x_2^{(0)} + \frac{2}{118}x_3^{(0)} + \frac{5}{118}x_4^{(0)} + \frac{679}{118} = \frac{8}{118} + \frac{2}{118} + \frac{5}{118} + \frac{679}{118} = 5.8814 \\ x_2^{(1)} = \frac{3}{67}x_1^{(0)} + \frac{4}{67}x_3^{(0)} + \frac{415}{67} = \frac{3}{67} + \frac{4}{67} + \frac{415}{67} = 6.2985 \\ x_3^{(1)} = -\frac{4}{90}x_1^{(0)} - \frac{8}{90}x_2^{(0)} - \frac{3}{90}x_4^{(0)} + \frac{863}{90} = -\frac{4}{90} - \frac{8}{90} - \frac{3}{90} + \frac{863}{90} = 9.4222 \\ x_4^{(1)} = \frac{4}{73}x_1^{(0)} - \frac{4}{73}x_3^{(0)} - \frac{645}{73} = \frac{4}{73} - \frac{4}{73} - \frac{645}{73} = -8.8356 \end{cases}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 5.8814 \\ 6.2985 \\ 9.4222 \\ -8.8356 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{8}{118}x_2^{(1)} + \frac{2}{118}x_3^{(1)} + \frac{5}{118}x_4^{(1)} + \frac{679}{118} = 5.9666 \\ x_2^{(2)} = \frac{3}{67}x_1^{(1)} + \frac{4}{67}x_3^{(1)} + \frac{415}{67} = 7.0199 \\ x_3^{(2)} = -\frac{4}{90}x_1^{(1)} - \frac{8}{90}x_2^{(1)} - \frac{3}{90}x_4^{(1)} + \frac{863}{90} = 9.0622 \\ x_4^{(2)} = \frac{4}{73}x_1^{(1)} - \frac{4}{73}x_3^{(1)} - \frac{645}{73} = -9.0296 \end{cases}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 5.9666 \\ 7.0199 \\ 9.0622 \\ -9.0296 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{8}{118}x_2^{(2)} + \frac{2}{118}x_3^{(2)} + \frac{5}{118}x_4^{(2)} + \frac{679}{118} = 6.0012 \\ x_2^{(3)} = \frac{3}{67}x_1^{(2)} + \frac{4}{67}x_3^{(2)} + \frac{415}{67} = 7.0022 \\ x_3^{(3)} = -\frac{4}{90}x_1^{(2)} - \frac{8}{90}x_2^{(2)} - \frac{3}{90}x_4^{(2)} + \frac{863}{90} = 9.0007 \\ x_4^{(3)} = \frac{4}{73}x_1^{(2)} - \frac{4}{73}x_3^{(2)} - \frac{645}{73} = -9.0052 \end{cases}$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 6.0012 \\ 7.0022 \\ 9.0007 \\ -9.0052 \end{pmatrix}$$

$$\| x_1 - x_0 \|_\infty = \left\| \begin{matrix} 4.8814 \\ 5.2985 \\ 8.4222 \\ -9.8356 \end{matrix} \right\|_\infty = 9.8356$$

$$\| x_3 - x_2 \|_\infty = \left\| \begin{matrix} 0.0346 \\ -0.0177 \\ -0.0615 \\ 0.0244 \end{matrix} \right\|_\infty = 0.0615\text{-погрешность приближенного решения.}$$

$\frac{\|x_1 - x_0\|_\infty}{\|x_3 - x_2\|_\infty} = \frac{9.8356}{0.0615} \approx 160$

Норма невязки уменьшилс в 160 раз.

Метод Зейделя:

Возьмем в качестве начального приближения вектор $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{8}{118}x_2^{(0)} + \dfrac{2}{118}x_3^{(0)} + \dfrac{5}{118}x_4^{(0)} + \dfrac{679}{118} = 5.8814 \\ x_2^{(1)} = \dfrac{3}{67}x_1^{(1)} + \dfrac{4}{67}x_3^{(0)} + \dfrac{415}{67} = 6.5171 \\ x_3^{(1)} = -\dfrac{4}{90}x_1^{(1)} - \dfrac{8}{90}x_2^{(1)} - \dfrac{3}{90}x_4^{(0)} + \dfrac{863}{90} = 8.7149 \\ x_4^{(1)} = \dfrac{4}{73}x_1^{(1)} - \dfrac{4}{73}x_3^{(1)} - \dfrac{645}{73} = -8.9909 \end{cases}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 5.8814 \\ 6.5171 \\ 8.7149 \\ -8.9909 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{8}{118}x_2^{(1)} + \frac{2}{118}x_3^{(1)} + \frac{5}{118}x_4^{(1)} + \frac{679}{118} = 5.9628 \\ x_2^{(2)} = \frac{3}{67}x_1^{(2)} + \frac{4}{67}x_3^{(1)} + \frac{415}{67} = 6.9813 \\ x_3^{(2)} = -\frac{4}{90}x_1^{(2)} - \frac{8}{90}x_2^{(2)} - \frac{3}{90}x_4^{(1)} + \frac{863}{90} = 9.003 \\ x_4^{(2)} = \frac{4}{73}x_1^{(2)} - \frac{4}{73}x_3^{(2)} - \frac{645}{73} = -9.0022 \end{cases}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 5.9628 \\ 6.9813 \\ 9.003 \\ -9.0022 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{8}{118}x_2^{(2)} + \frac{2}{118}x_3^{(2)} + \frac{5}{118}x_4^{(2)} + \frac{679}{118} = 5.9987 \\ x_2^{(3)} = \frac{3}{67}x_1^{(3)} + \frac{4}{67}x_3^{(2)} + \frac{415}{67} = 7.00012 \\ x_3^{(3)} = -\frac{4}{90}x_1^{(3)} - \frac{8}{90}x_2^{(3)} - \frac{3}{90}x_4^{(2)} + \frac{863}{90} = 9.00012 \\ x_4^{(3)} = \frac{4}{73}x_1^{(3)} - \frac{4}{73}x_3^{(3)} - \frac{645}{73} = -9.00008 \end{cases}$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 5.9987 \\ 7.00012 \\ 9.00012 \\ -9.00008 \end{pmatrix}$$

$$\| x_1 - x_0 \|_\infty = \left\| \begin{matrix} 4.8814 \\ 5.5171 \\ 7.7149 \\ -9.9909 \end{matrix} \right\|_\infty = 9.9909$$

$$\| x_3 - x_2 \|_\infty = \left\| \begin{matrix} 0.0359 \\ 0.01882 \\ -0.00288 \\ 0.00212 \end{matrix} \right\|_\infty = 0.0359\text{-погрешность приближенного решения.}$$

$\frac{\|x_1 - x_0\|_\infty}{\|x_3 - x_2\|_\infty} = \frac{9.9909}{0.0359} \approx 278$

Норма невязки уменьшилс в 278 раз.

Рябчиков Арсений А-09-22
ТР 13
Вариант 10 (21)

x	-1.2	-0.6	0	0.6	1.2
y	2.5	0.5	-1.3	-4.9	-5.4

Приближение многочленом 1-ой степени: $P_1(x) = a_0 + a_1x$

$$\sum_{i=1}^{5}(y - a_0 - a_1x)^2 \to \min$$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{5}(y - a_0 - a_1x) = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{5}(yx - a_0x - a_1x^2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{5} y - 5a_0 - a_1\sum_{i=1}^{5} x = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{5}(yx) - a_0\sum_{i=1}^{5} x - a_1\sum_{i=1}^{5} x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{y} - a_0 - a_1\overline{x} = 0 \\ \overline{yx} - a_0\overline{x} - a_1\overline{x^2} = 0 \end{cases}$$

$\overline{y} = \frac{2.5+0.5-1.3-4.9-5.4}{5} \approx -1.72$ $\qquad$ $\overline{x} = \frac{0}{5} = 0$

$\overline{yx} = \frac{-3-0.3-2.94-6.48}{5} \approx -2.544$ $\qquad$ $\overline{x^2} = \frac{1.44\cdot 2+0.36\cdot 2}{5} \approx 0.72$

$$\begin{cases} a_0 = -1.72 \\ a_1 = \dfrac{-2.544}{0.72} \approx -0.283 \end{cases}$$

$P_1(x) = -1.72 - 3.53x$

Среднеквадратичное отклонение:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(P_1(x_i) - y_i)^2} \approx 0.57$$

Приближение многочленом 2-ой степени: $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

$$\sum_{i=1}^{5}(y - a_0 - a_1x - a_2x^2)^2 \to \min$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{5}(y-a_0-a_1x-a_2x^2)=0 \\ \sum\limits_{i=1}^{5}(yx-a_0x-a_1x^2-a_2x^3)=0 \\ \sum\limits_{i=1}^{5}(yx^2-a_0x^2-a_1x^3-a_2x^4)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{5}y-5a_0-a_1\sum\limits_{i=1}^{5}x-a_2\sum\limits_{i=1}^{5}x^2=0 \\ \sum\limits_{i=1}^{5}(yx)-a_0\sum\limits_{i=1}^{5}x-a_1\sum\limits_{i=1}^{5}x^2-a_2\sum\limits_{i=1}^{5}x^3=0 \\ \sum\limits_{i=1}^{5}(yx^2)-a_0\sum\limits_{i=1}^{5}x^2-a_1\sum\limits_{i=1}^{5}x^3-a_2\sum\limits_{i=1}^{5}x^4=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{y}-a_0-a_1\overline{x}-a_2\overline{x^2}=0 \\ \overline{yx}-a_0\overline{x}-a_1\overline{x^2}-a_2\overline{x^3}=0 \\ \overline{yx^2}-a_0\overline{x^2}-a_1\overline{x^3}-a_2\overline{x^4}=0 \end{cases}$$

$\overline{y}=\frac{2.5+0.5-1.3-4.9-5.4}{5}\approx-1.72$ $\qquad$ $\overline{x}=\frac{0}{5}=0$

$\overline{yx}=\frac{-3-0.3-2.94-6.48}{5}\approx-2.544$ $\qquad$ $\overline{x^2}=\frac{1.44\cdot2+0.36\cdot2}{5}\approx0.72$

$\overline{yx^2}=\frac{3.6+0.18-1.764-7.776}{5}\approx-1.152$ $\qquad$ $\overline{x^3}=\frac{0}{5}=0$

$\overline{x^4}=\frac{2.0736\cdot2+0.1296\cdot2}{5}\approx0.88128$

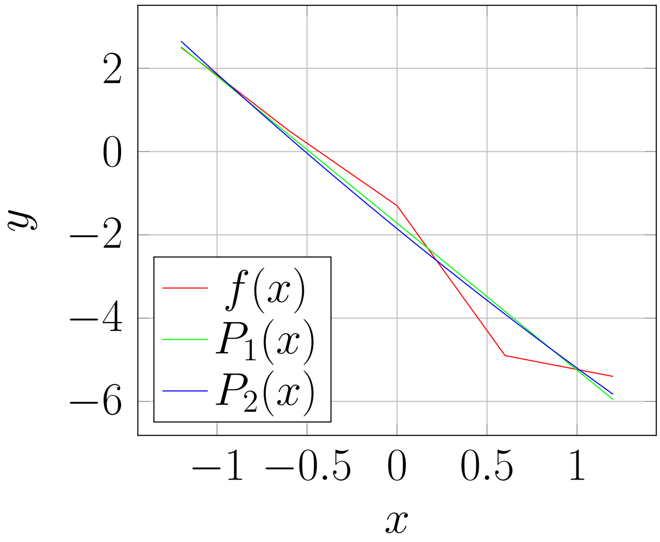
$$\begin{cases} -1.72-a_0-0.72a_2=0 \\ -2.544-0.72a_1=0 \\ -1.152-0.72a_0-0.99128a_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0=-1.852 \\ a_1=-3.533 \\ a_2=0.183 \end{cases}$$

$P_2(x)=-1.852-3.533x+0.183x^2$

Среднеквадратичное отклонение:

$$\sigma_2=\sqrt{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(P_2(x_i)-y_i)^2}\approx0.55$$



2
0
−2
−4
−6
y
f(x)
P1(x)
P2(x)
−1
−0.5
0
0.5
1
x

Рябчиков Арсений А-09-22

ТР 14

Вариант 10 (21)

x	0.6	4.5	5.2	5.5	6.4	6.8
y	2.676	100.8	133.224	148.5	199.296	224.264

Приближение к функции: $\Phi(x) = ax + bx^2$

$$\sum_{i=1}^{6}(y - ax - bx^2)^2 \to \min$$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{6}(yx - ax^2 - bx^3) = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{6}(yx^2 - ax^3 - bx^4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{6}(yx) - a\sum_{i=1}^{6}x^2 - b\sum_{i=1}^{6}x^3 = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{6}(yx^2) - a\sum_{i=1}^{6}x^3 - b\sum_{i=1}^{6}x^4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{yx} - a\overline{x^2} - b\overline{x^3} = 0 \\ \overline{yx^2} - a\overline{x^3} - b\overline{x^4} = 0 \end{cases}$$

$$\overline{yx} = \frac{2.676 \cdot 0.6 + 100.8 \cdot 4.5 + 133.224 \cdot 5.2 + 148.5 \cdot 5.5 + 199.296 \cdot 6.4 + 224.264 \cdot 6.8}{6} \approx 794.2$$

$$\overline{yx^2} = \frac{2.676 \cdot 0.6^2 + 100.8 \cdot 4.5^2 + 133.224 \cdot 5.2^2 + 148.5 \cdot 5.5^2 + 199.296 \cdot 6.4^2 + 224.264 \cdot 6.8^2}{6} \approx 4778.3$$

$$\overline{x^2} = \frac{0.6^2 + 4.5^2 + 5.2^2 + 5.5^2 + 6.4^2 + 6.8^2}{6} \approx 27.5$$

$$\overline{x^3} = \frac{0.6^3 + 4.5^3 + 5.2^3 + 5.5^3 + 6.4^3 + 6.8^3}{6} \approx 162.4$$

$$\overline{x^4} = \frac{0.6^4 + 4.5^4 + 5.2^4 + 5.5^4 + 6.4^4 + 6.8^4}{6} \approx 978.7$$

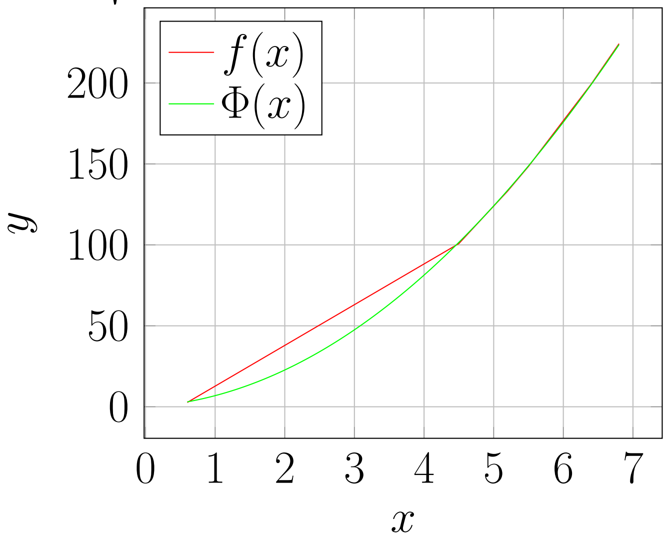
$$\begin{cases} 794.2 - 27.5a - 162.4b = 0 \\ 4778.3 - 162.4a - 978.7b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2.382 \\ b = 4.487 \end{cases}$$

$$\Phi(x) = 2.382x + 4.487x^2$$

Среднеквадратичное отклонение:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(/Phi(x_i) - y_i)^2} \approx 0.502$$



Рябчиков Арсений А-09-22

ТР 15

Вариант 10 (21)

x	2	3	4	5
y	-2	0	3	2

$\widetilde{x} = 2.45$

Решение при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа:

$L_3(x) = y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} +$
$+ y_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$

$L_3(\widetilde{x}) = -2\frac{(2.45-3)(2.45-4)(2.45-5)}{(2-3)(2-4)(2-5)} + 3\frac{(2.45-2)(2.45-3)(2.45-5)}{(4-2)(4-3)(4-5)} + 2\frac{(2.45-2)(2.45-3)(2.45-4)}{(5-2)(5-3)(5-4)} =$
$= -\frac{5797}{8000} - \frac{15147}{16000} + \frac{1023}{8000} = -1.5434375$

$f(2.45) = -1.5434375$

Решение при помощи интерполяционного многочлена Ньютона:

$$\begin{array}{c|c|cccc} x_0 = 2 & y_0 = -2 & & & \\ x_1 = 3 & y_1 = 0 & \Delta^1 y_0 = 2 & \Delta^2 y_0 = 1 & \\ x_2 = 4 & y_2 = 3 & \Delta^1 y_1 = 3 & \Delta^2 y_1 = -4 & \Delta^3 y_0 = -5 \\ x_3 = 5 & y_3 = 2 & \Delta^1 y_2 = -1 & & \end{array}$$

$P_3(x) = y_0 + \frac{\Delta^1 y_0}{1!h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

$h = 1$

$P_3(\widetilde{x}) = -2 + 2(2.45-2) + \frac{1}{2!}(2.45-2)(2.45-3) - \frac{5}{3!}(2.45-2)(2.45-3)(2.45-4) =$
-1.5434375

$f(2.45) = -1.5434375$

Рябчиков Арсений А-09-22

ТР 16

Вариант 10 (21)

x	0	0.8	1.6	2.4	2.8
y	1	2.5	4.8	8.3	10.5

$\widetilde{x} = 1.02$

$x_0 = 0.8 \quad x_1 = 1.6 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 2.4 \quad x_4 = 2.8$

$$\begin{array}{c|c|cccc}
x_0 = 0.8 & \underline{F_0} = y_0 = 2.5 & & & & \\
 & & \underline{F_{01}} & & & \\
x_1 = 1.6 & F_1 = y_1 = 4.8 & & \underline{F_{012}} & & \\
 & & F_{12} & & \underline{F_{0123}} & \\
x_2 = 0 & F_2 = y_2 = 1 & & F_{123} & & \underline{F_{01234}} \\
 & & F_{23} & & F_{1234} & \\
x_3 = 2.4 & F_3 = y_3 = 8.3 & & F_{234} & & \\
 & & F_{34} & & & \\
x_4 = 2.8 & F_4 = y_4 = 10.5 & & & &
\end{array}$$

$F_{01} = \frac{F_1 - F_0}{x_1 - x_0} = \frac{4.8 - 2.5}{1.6 - 0.8} = 2.875$

$F_{12} = \frac{F_2 - F_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 4.8}{0 - 1.6} = 2.375$

$F_{23} = \frac{F_3 - F_2}{x_3 - x_2} = \frac{8.3 - 1}{2.4} = 3.041666667$

$F_{34} = \frac{F_4 - F_3}{x_4 - x_3} = \frac{10.5 - 8.3}{2.8 - 2.4} = 5.5$

$F_{012} = \frac{F_{12} - F_{01}}{x_2 - x_0} = \frac{2.375 - 2.875}{0 - 0.8} = 0.625$

$F_{123} = \frac{F_{23} - F_{12}}{x_3 - x_1} = \frac{3.041666667 - 2.375}{2.4 - 1.6} = 0.8333333337$

$F_{234} = \frac{F_{34} - F_{23}}{x_4 - x_2} = \frac{5.5 - 3.041666667}{2.8} = 0.8779761904$

$F_{0123} = \frac{F_{123} - F_{012}}{x_3 - x_0} = \frac{0.8333333337 - 0.625}{2.4 - 0.8} = 0.1302083336$

$F_{1234} = \frac{F_{234} - F_{123}}{x_4 - x_1} = \frac{0.8779761904 - 0.8333333337}{2.8 - 1.6} = 0.03720238058$

$F_{01234} = \frac{F_{1234} - F_{0123}}{x_4 - x_0} = \frac{0.03720238058 - 0.1302083336}{2.8 - 0.8} = -0.04650297651$

Приближение многочленом степени $m = 0$:

$P_0(x) \equiv F_0 = 2.5$

$P_0(\widetilde{x}) = 2.5$

$F_{01} \cdot \omega_1(\widetilde{x}) = F_{01} \cdot (\widetilde{x} - x_0) = 2.875 \cdot (1.02 - 0.8) = 0.6325$

$\varepsilon_0 = |F_{01} \cdot \omega_1(\widetilde{x})| \approx 0.6$ - погрешность Интерполирования

$\underline{f(1.02) = 2.5 \pm 0.6}$

Приближение многочленом степени $m = 1$:

$P_1(x) = P_0(x) + F_{01} \cdot \omega_1(x)$

$P_1(\widetilde{x}) = 2.5 + 0.6325 = 3.1325$

$F_{012} \cdot \omega_2(\widetilde{x}) = F_{012} \cdot (\widetilde{x} - x_0) \cdot (\widetilde{x} - x_1) = 0.625 \cdot (1.02 - 0.8) \cdot (1.02 - 1.6) = -0.07975$

$\varepsilon_1 = |F_{012} \cdot \omega_2(\widetilde{x})| \approx 0.08$ - погрешность Интерполирования

$\underline{f(1.02) = 3.13 \pm 0.08}$

Приближение многочленом степени $m = 2$:

$P_2(x) = P_1(x) + F_{012} \cdot \omega_2(x)$

$P_2(\widetilde{x}) = 3.1325 - 0.07975 = 3.05275$

$F_{0123} \cdot \omega_3(\widetilde{x}) = F_{0123} \cdot (\widetilde{x} - x_0) \cdot (\widetilde{x} - x_1) \cdot (\widetilde{x} - x_2) =$

$= 0.1302083336 \cdot (1.02 - 0.8) \cdot (1.02 - 1.6) \cdot (1.02) = -0.0169468750347072$

$\varepsilon_2 = |F_{0123} \cdot \omega_3(\widetilde{x})| \approx 0.02$ - погрешность Интерполирования

$\underline{f(1.02) = 3.05 \pm 0.01}$

Приближение многочленом степени $m = 3$:

$P_3(x) = P_2(x) + F_{0123} \cdot \omega_3(x)$

$P_3(\widetilde{x}) = 3.05275 - 0.0169468750347072 = 3.05275$

$F_{01234} \cdot \omega_4(\widetilde{x}) = F_{01234} \cdot (\widetilde{x} - x_0) \cdot (\widetilde{x} - x_1) \cdot (\widetilde{x} - x_2) \cdot (\widetilde{x} - x_3) =$

$= -0.04650297651 \cdot (1.02 - 0.8) \cdot (1.02 - 1.6) \cdot (1.02) \cdot (1.02 - 2.4) = -0.008352388450247$

$\varepsilon_3 = |F_{01234} \cdot \omega_4(\widetilde{x})| \approx 0.008$ - погрешность Интерполирования

$\underline{f(1.02) = 3.053 \pm 0.008}$

Рябчиков Арсений А-09-22

ТР 20

Вариант 10 (21)

$\int_{1.3}^{2.9} \frac{\sqrt{x}-x}{1+e^{-x}} dx$

а) Квадратурная формула центральных прямоугольников:

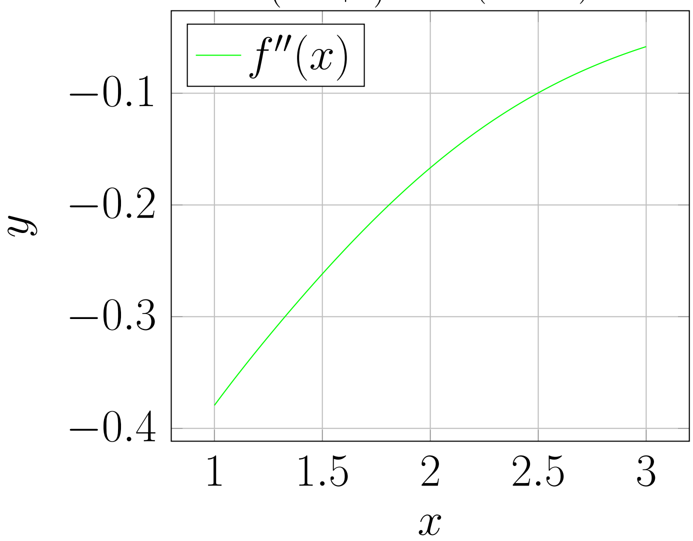
h=0.4

$I_{rect} = h \cdot \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)$

$I_{rect} = 0.4 \cdot (\frac{\sqrt{1.5}-1.5}{1+e^{-1.5}} + \frac{\sqrt{1.9}-1.9}{1+e^{-1.9}} + \frac{\sqrt{2.3}-2.3}{1+e^{-2.3}} + \frac{\sqrt{2.7}-2.7}{1+e^{-2.7}}) \approx -0.952436$

$f'(x) = \frac{e^{-x}(\sqrt{x}-x)+(e^{-x}+1)(\frac{1}{2\sqrt{x}}-1)}{(e^{-x}+1)^2}$

$f''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}(e^{-x}+1)} + \frac{2e^{-x}(\frac{1}{2\sqrt{x}}-1)}{(e^{-x}+1)^2} + (\sqrt{x}-x)(\frac{2e^{-2x}}{(e^{-x}+1)^3} - \frac{e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2})$



$M_2 = \max_{[1.3,2.9]} |f''(x)| = |f''(1.3)| \approx 0.359952$

$|J - I_{rect}| \leq \frac{M_2(b-a)h^2}{24} = \frac{0.359952(2.9-1.3)0.4^2}{24} \approx 0.004$

$J = -0.952 \pm 0.004$

б) Квадратурная формула трапеций:

h=0.4

$I_{trap} = h \cdot (\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i))$

$I_{trap} = 0.4 \cdot (\frac{\frac{\sqrt{1.3}-1.3}{1+e^{-1.3}} + \frac{\sqrt{2.9}-2.9}{1+e^{-2.9}}}{2} + \frac{\sqrt{1.7}-1.7}{1+e^{-1.7}} + \frac{\sqrt{2.1}-2.1}{1+e^{-2.1}} + \frac{\sqrt{2.5}-2.5}{1+e^{-2.5}}) \approx -0.957637$

h=0.2

$I_{trap} = 0.2 \cdot (\frac{\frac{\sqrt{1.3}-1.3}{1+e^{-1.3}} + \frac{\sqrt{2.9}-2.9}{1+e^{-2.9}}}{2} + \frac{\sqrt{1.5}-1.5}{1+e^{-1.5}} + \frac{\sqrt{1.7}-1.7}{1+e^{-1.7}} + \frac{\sqrt{1.9}-1.9}{1+e^{-1.9}} + \frac{\sqrt{2.1}-2.1}{1+e^{-2.1}} + \frac{\sqrt{2.3}-2.3}{1+e^{-2.3}} + \frac{\sqrt{2.5}-2.5}{1+e^{-2.5}} + \frac{\sqrt{2.7}-2.7}{1+e^{-2.7}}) \approx -0.955037$

$J - I_{rect}^{(h)} \approx \frac{I_{rect}^{(h)} - I_{rect}^{(2h)}}{3} = \frac{-0.955037 + 0.957637}{3} = 0.000867$

$I_{ytoch} = -0.955037 + 0.000867 = -0.95417$

$|J - I_{trap}| \leq \frac{M_2(b-a)h^2}{12} = \frac{0.359952(2.9-1.3)0.2^2}{12} \approx 0.0019$

$J = -0.9550 \pm 0.0019 \qquad I_{ytoch} = -0.95417$

в) Квадратурная формула Симпсона:

h=0.4

$I_{simpson} = \frac{h}{6} \cdot (f(x_0) + f(x_n) + 4 \cdot \sum_{i=1}^{n} f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i))$

$I_{simpson} = \frac{0.4}{6} \cdot (\frac{\sqrt{1.3}-1.3}{1+e^{-1.3}} + \frac{\sqrt{2.9}-2.9}{1+e^{-2.9}} + 4 \cdot (\frac{\sqrt{1.5}-1.5}{1+e^{-1.5}} + \frac{\sqrt{1.9}-1.9}{1+e^{-1.9}} + \frac{\sqrt{2.3}-2.3}{1+e^{-2.3}} + \frac{\sqrt{2.7}-2.7}{1+e^{-2.7}}) + 2 \cdot$
$\cdot (\frac{\sqrt{1.7}-1.7}{1+e^{-1.7}} + \frac{\sqrt{2.1}-2.1}{1+e^{-2.1}} + \frac{\sqrt{2.5}-2.5}{1+e^{-2.5}})) = -0.9541696594$

Рябчиков Арсений А-09-22

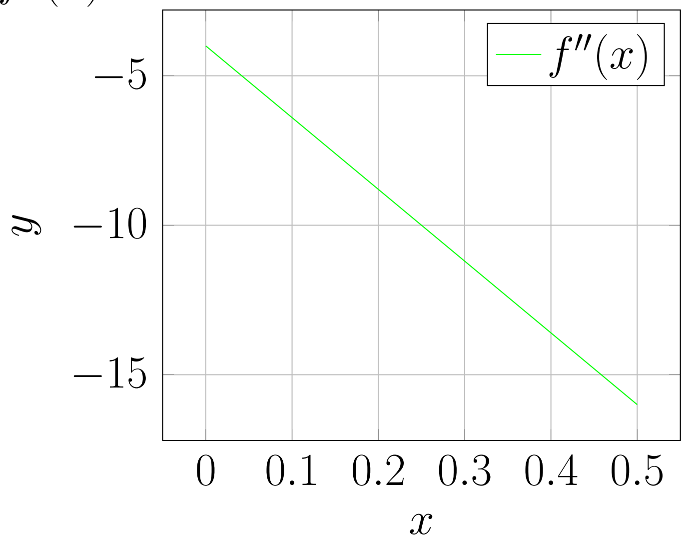
ТР 21

Вариант 10 (21)

$\int_0^{0.5}(-5\cdot x-2\cdot x^2-4\cdot x^3)dx \qquad \varepsilon=0.01$

$f'(x)=-5-4\cdot x-12\cdot x^2$

$f''(x)=-4-24\cdot x$



$M_2=\max\limits_{[0,0.5]}|f''(x)|=|f''(0.5)|=16$

$|J-I_{rect}|\leq\frac{M_2(b-a)h^2}{12}\leq\varepsilon$

$\frac{16(0.5-0)h^2}{12}\leq 0.01$

$h\leq\sqrt{\frac{0.01\cdot 12}{16\cdot 0.5}}\approx 0.1224744871$

$N=\frac{b-a}{h}$-целое число

$N=\frac{0.5}{0.1224744871}\approx 4.082482906\Rightarrow N_{min}=5\Rightarrow h_{max}=0.1$

h=0.1

$I_{trap}=h\cdot(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i))$

$I_{trap}=0.1\cdot(\frac{-5\cdot 0.5-2\cdot 0.5^2-4\cdot 0.5^3}{2}-5\cdot 0.1-2\cdot 0.1^2-4\cdot 0.1^3-5\cdot 0.2-2\cdot 0.2^2-4\cdot$

$\cdot 0.2^3-5\cdot 0.3-2\cdot 0.3^2-4\cdot 0.3^3-5\cdot 0.4-2\cdot 0.4^2-4\cdot 0.4^3)\approx -0.775$

$J=\int_0^{0.5}(-5\cdot x-2\cdot x^2-4\cdot x^3)dx=(-\frac{5}{2}\cdot x^2-\frac{2}{3}\cdot x^3-\frac{4}{4}\cdot x^4)\Big|_0^{0.5}=$

$=(-\frac{5}{2}\cdot 0.5^2-\frac{2}{3}\cdot 0.5^3-\frac{4}{4}\cdot 0.5^4)\approx -0.77083$

$|J-I_{rect}|\leq\varepsilon\Rightarrow|-0.77083+0.775|=0.00417<0.01\Rightarrow$указанная точность достигнута

Рябчиков Арсений А-09-22

ТР 23

Вариант 10 (21)

$f(x) = \frac{\sqrt{x}-x}{1+e^{-x}} \qquad a = 1.3 \qquad b = 2.9 \qquad h = 0.1$

$x_0 = \frac{1.3+2.9}{2} = 2.1$

$f'_{ch}(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2\cdot h} = \frac{\frac{\sqrt{2.2}-2.2}{1+e^{-2.2}} - \frac{\sqrt{2}-2}{1+e^{-2}}}{2\cdot 0.1} \approx -0.6465206462$

$f'_l(x_0) = \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{2\cdot h} = \frac{\frac{\sqrt{2.1}-2.1}{1+e^{-2.1}} - \frac{\sqrt{2}-2}{1+e^{-2}}}{0.1} \approx -0.6389633207$

Для сверки результата вычислим точное значение производной

$f'(x) = \frac{e^{-x}(\sqrt{x}-x)+(e^{-x}+1)(\frac{1}{2\sqrt{x}}-1)}{(e^{-x}+1)^2}$

$f'(x_0) = \frac{e^{-2.1}(\sqrt{2.1}-2.1)+(e^{-2.1}+1)(\frac{1}{2\sqrt{2.1}}-1)}{(e^{-2.1}+1)^2} \approx -0.6467727502$

Абсолютные погрешности равны

$\Delta_{ch} = |-0.6467727502 + 0.6465206462| = 0.000252104$

$\Delta_l = |-0.6467727502 + 0.6389633207| = 0.0078094295$

Видно, что центральная разностная производная дала более точный результат.

$f''(x_0) = \frac{f(x_0+h)-2\cdot f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2} = \frac{\frac{\sqrt{2.2}-2.2}{1+e^{-2.2}} - 2\cdot\frac{\sqrt{2.1}-2.1}{1+e^{-2.1}} + \frac{\sqrt{2}-2}{1+e^{-2}}}{0.1^2} \approx -0.1511465106$

Точное значение:

$f''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}(e^{-x}+1)} + \frac{2e^{-x}(\frac{1}{2\sqrt{x}}-1)}{(e^{-x}+1)^2} + (\sqrt{x}-x)(\frac{2e^{-2x}}{(e^{-x}+1)^3} - \frac{e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2})$

$f''(x_0) = -\frac{1}{4\cdot 2.1^{3/2}(e^{-2.1}+1)} + \frac{2e^{-2.1}(\frac{1}{2\sqrt{2.1}}-1)}{(e^{-2.1}+1)^2} + (\sqrt{2.1}-2.1)(\frac{2e^{-2\cdot 2.1}}{(e^{-2.1}+1)^3} - \frac{e^{-2.1}}{(e^{-2.1}+1)^2}) \approx -0.1510496163$

Абсолютная погрешность

$\Delta_{II} = |-0.1510496163 + 0.1511465106| = 0.0000968943$

Рябчиков Арсений А-09-22

ТР 24

Вариант 10 (21)

$$\begin{cases} y' = 2 \cdot t \cdot y - 2 \cdot t \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$h = 0.2 \qquad t \in [0, 0.8]$

Найдем сначала точное решение задачи:

$y' = 2 \cdot t \cdot y - 2 \cdot t$

$\frac{dy}{dt} = 2 \cdot t \cdot y - 2 \cdot t$

$\frac{dy}{y-1} = 2tdt$

$\int \frac{dy}{y-1} = \int 2tdt$

$\ln(y-1) = t^2 + C$

$y - 1 = C \cdot e^{t^2}$

$y = C \cdot e^{t^2} + 1-$ общее решение

$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = C + 1 \Rightarrow C = -1 \Rightarrow y = -e^{t^2} + 1-$ частное решение

а) Метод Эйлера:

h=0.2

$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \qquad y_0 = 0 \qquad t_0 = 0$

$y_1^h = y_0 + hf(t_0, y_0) = 0 + 0.2 \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0) = 0$

$y_2^h = y_1 + hf(t_1, y_1) = 0 + 0.2 \cdot (2 \cdot 0.2 \cdot 0 - 2 \cdot 0.2) = -0.08$

$y_3^h = y_2 + hf(t_2, y_2) = -0.08 + 0.2 \cdot (2 \cdot 0.4 \cdot (-0.08) - 2 \cdot 0.4) = -0.2528$

$y_4^h = y_3 + hf(t_3, y_3) = -0.2528 + 0.2 \cdot (2 \cdot 0.6 \cdot (-0.2528) - 2 \cdot 0.6) = -0.553472$

$y_1^{2h} = y_0 + hf(t_0, y_0) = 0 + 0.4 \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0) = 0$

$y_2^{2h} = y_1 + hf(t_1, y_1) = 0 + 0.4 \cdot (2 \cdot 0.4 \cdot 0 - 2 \cdot 0.4) = -0.16$

t	0	0.2	0.4	0.6	0.8
y^h	0	0	-0.08	-0.2528	-0.553472
y^{2h}	0	$-$	0	$-$	-0.16

Расчет оценки погрешности метода Эйлера по правилу Рунге:

$R = \left| \frac{y_i^h - y_j^{2h}}{2^p - 1} \right|$

$p = 1$

$R_0 = |y_0^h - y_0^{2h}| = 0$

$R_1 = |y_2^h - y_1^{2h}| = 0.08$

$R_2 = |y_4^h - y_2^{2h}| = 0.393472$

б) Метод Рунге-Курты (2-го порядка):

h=0.2

$\tilde{y}_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$

$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})) \qquad y_0 = 0 \qquad t_0 = 0$

$\tilde{y}_1^h = y_0 + hf(t_0, y_0) = 0 + 0.2 \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0) = 0$

$y_1^h = y_0 + \frac{h}{2}(f(t_0, y_0) + f(t_1, \tilde{y}_1)) = 0 + \frac{0.2}{2}(2 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0.2 \cdot 0 - 2 \cdot 0.2) = -0.04$

$\tilde{y}_2^h = y_1 + hf(t_1, y_1) = -0.04 + 0.2 \cdot (-2 \cdot 0.04 \cdot 0.2 - 2 \cdot 0.2) = -0.2032$

$y_2^h = y_1 + \frac{h}{2}(f(t_1, y_1) + f(t_2, \tilde{y}_2)) =) = -0.04 + \frac{0.2}{2}(-2 \cdot 0.04 \cdot 0.2 - 2 \cdot 0.2 - 2 \cdot 0.4 \cdot 0.2032 - 2 \cdot 0.4) = -0.177856$

$\tilde{y}_3^h = y_2 + hf(t_2, y_2) = -0.177856 + 0.2 \cdot (-2 \cdot 0.177856 \cdot 0.4 - 2 \cdot 0.4) = -0.36631296$

$y_3^h = y_2 + \frac{h}{2}(f(t_2, y_2) + f(t_3, \tilde{y}_3)) =) = -0.177856 + \frac{0.2}{2}(-2 \cdot 0.177856 \cdot 0.4 - 2 \cdot 0.4 - 2 \cdot 0.6 \cdot 0.36631296 - 2 \cdot 0.6) = -0.4360420352$

$\tilde{y}_4^h = y_3 + hf(t_3, y_3) = -0.4360420352 + 0.2 \cdot (-2 \cdot 0.4360420352 \cdot 0.6 - 2 \cdot 0.6) = -0.780692123648$

$y_4^h = y_3 + \frac{h}{2}(f(t_3, y_3) + f(t_4, \tilde{y}_4)) =) = -0.4360420352 + \frac{0.2}{2}(-2 \cdot 0.4360420352 \cdot 0.4 - 2 \cdot 0.4 - 2 \cdot 0.6 \cdot 0.780692123648 - 2 \cdot 0.6) = -0.8932778192$

$\tilde{y}_1^{2h} = y_0 + hf(t_0, y_0) = 0 + 0.4 \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0) = 0$

$y_1^{2h} = y_0 + \frac{h}{2}(f(t_0, y_0) + f(t_1, \tilde{y}_1)) = 0 + \frac{0.4}{2}(2 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0.2 \cdot 0 - 2 \cdot 0.4) = -0.16$

$\tilde{y}_2^{2h} = y_1 + hf(t_1, y_1) = -0.16 + 0.4 \cdot (-2 \cdot 0.16 \cdot 0.4 - 2 \cdot 0.4) = -0.5312$

$y_2^{2h} = y_1 + \frac{h}{2}(f(t_1, y_1) + f(t_2, \tilde{y}_2)) =) = -0.16 + \frac{0.4}{2}(-2 \cdot 0.16 \cdot 0.4 - 2 \cdot 0.4 - 2 \cdot 0.8 \cdot 0.5312 - 2 \cdot 0.8) = -0.835584$

t	0	0.2	0.4	0.6	0.8
y^h	0	-0.04	-0.177856	-0.4360420352	-0.8932778192
y^{2h}	0	$-$	-0.16	$-$	-0.835584

Расчет оценки погрешности метода Рунге-Курты (2-го порядка) по правилу Рунге:

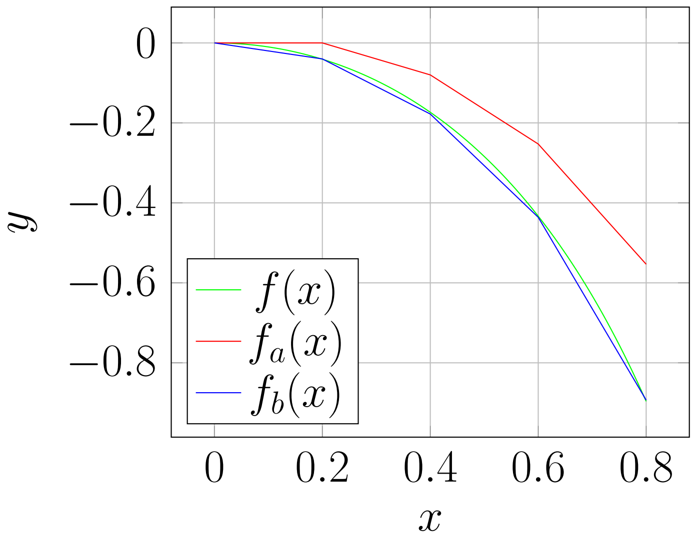
$R = \left| \frac{y_i^h - y_j^{2h}}{2^p - 1} \right|$

$p = 2$

$R_0 = \left| \frac{y_0^h - y_0^{2h}}{3} \right| = 0$

$R_1 = \left| \frac{y_2^h - y_1^{2h}}{3} \right| = 0.005952$

$R_2 = \left| \frac{y_4^h - y_2^{2h}}{3} \right| = 0.019231$



Рябчиков Арсений А-09-22
ТР 27
Вариант 10 (21)

$$\begin{cases} -y'' + y = 2e^{-x} \\ y(0) = 0, \qquad y(1) = \dfrac{1}{e} \end{cases}$$

$h_1 = \frac{1}{3} \qquad h_2 = \frac{1}{6} \qquad x \in [0, 1]$

$-\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + q(x_i)y_i = f(x_i)$

$-y_{i+1} + (2 + h^2 \cdot q(x_i))y_i - y_{i-1} = h^2 f(x_i)$

$h = \frac{1}{6}$

$$\begin{cases} -y_0 + (2+h^2)y_1 - y_2 = 2h^2 e^{-x_1} \\ -y_1 + (2+h^2)y_2 - y_3 = 2h^2 e^{-x_2} \\ -y_2 + (2+h^2)y_3 - y_4 = 2h^2 e^{-x_3} \\ -y_3 + (2+h^2)y_4 - y_5 = 2h^2 e^{-x_4} \\ -y_4 + (2+h^2)y_5 - y_6 = 2h^2 e^{-x_5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2.02778y_1 - y_2 = 0.047027 \\ -y_1 + 2.027778y_2 - y_3 = 0.039807 \\ -y_2 + 2.027778y_3 - y_4 = 0.033696 \\ -y_3 + 2.027778y_4 - y_5 = 0.028523 \\ -y_4 + 2.027778y_5 - 0.367879 = 0.024144 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_1 = 0.140705 \\ y_2 = 0.238293 \\ y_3 = 0.302692 \\ y_4 = 0.341804 \\ y_5 = 0.361887 \\ y_6 = 0.367879 \end{cases}$$

$h = \frac{1}{3}$

$$\begin{cases} -y_0 + (2+h^2)y_1 - y_2 = 2h^2 e^{-x_1} \\ -y_1 + (2+h^2)y_2 - y_3 = 2h^2 e^{-x_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2.111111y_1 - y_2 = 0.159229 \\ -y_1 + 2.111111y_2 - 0.367879 = 0.114093 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_1 = 0.236671 \\ y_2 = 0.340410 \\ y_3 = 0.367879 \end{cases}$$

Расчет оценки погрешности по правилу Рунге:

$R = \left| \frac{y_i^h - y_j^{2h}}{2^p - 1} \right|$

$p = 2$

$R_0 = \left| \frac{y_0^{\frac{1}{3}} - y_0^{\frac{1}{6}}}{3} \right| = 0$

$R_1 = \left| \frac{y_1^{\frac{1}{3}} - y_2^{\frac{1}{6}}}{3} \right| = 0.000541$

$R_2 = \left| \frac{y_2^{\frac{1}{3}} - y_4^{\frac{1}{6}}}{3} \right| = 0.000465$

$R_3 = \left| \frac{y_3^{\frac{1}{3}} - y_6^{\frac{1}{6}}}{3} \right| = 0$