Лойко Степан А-09-22

ТР №1

Вариант 6 (25)

$z = \frac{1}{\sqrt{4.00}} - 0.11^2 - 3.6$

$z = f(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{x}} - y^2 - t$

$x = 4.00 \pm 0.005 \quad y = 0.11 \pm 0.005 \quad t = 3.6 \pm 0.05 \qquad \Delta\overline{z}-? \quad \delta\overline{z}-?$

$\Delta\overline{z} \widetilde{\leq} |\frac{\delta z}{\delta x}|\Delta\overline{x} + |\frac{\delta z}{\delta y}|\Delta\overline{y} + |\frac{\delta z}{\delta t}|\Delta\overline{t} = |\frac{1}{2x\sqrt{x}}| \cdot 0.005 + |2y| \cdot 0.005 + |1| \cdot 0.05 =$

$= |\frac{1}{2 \cdot 4.00 \cdot \sqrt{4.00}}| \cdot 0.005 + |2 \cdot 0.11| \cdot 0.005 + |1| \cdot 0.05 \cong 0.05 = \Delta\overline{z}$

$z = \frac{1}{2.00} - 0.0121 - 3.6 = -3.1121$

$\delta z \cong \frac{\Delta\overline{z}}{|z|} = \frac{0.05}{3.1121} = 0.016 = 1.6\%$

$z = -3.1121 \pm 0.05 \Rightarrow$ цыфры 3 и 1 являются верными

Лойко Степан А-09-22

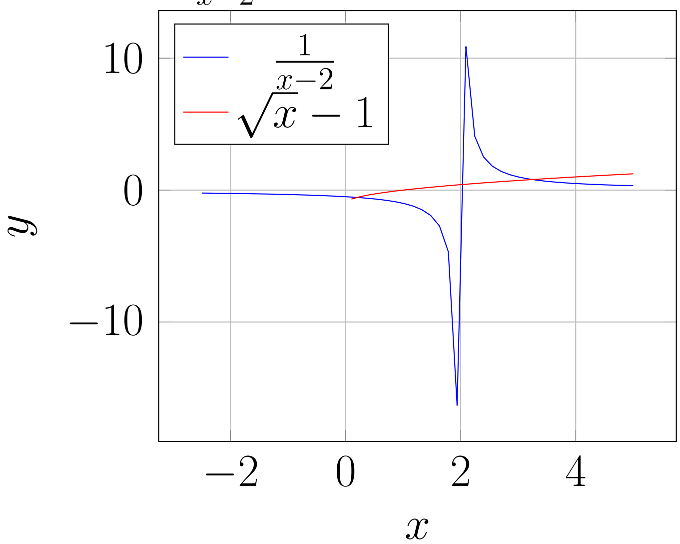
ТР №2

Вариант 6 (25)

Локализовать корень нелинейного уравнения $f(x) = 0$ и найти его методом бисекции с точностью $\varepsilon_1 = 0.01$

$f(x) = \frac{1}{x-2} - \sqrt{x} + 1$

Решение: $\frac{1}{x-2} = \sqrt{x} - 1$



Очевидно, что $\overline{x} \in [3;4] = [a^{(0)}; b^{(0)}]$

Проверим критерий окончания итераций: $b^{(0)} - a^{(0)} \leq 2\varepsilon -?$

$4 - 3 > 0.02 \Rightarrow$ подолжаем вычисления.

Найдем середину текущего отрезка локализации: $x^{(0)} = \frac{a^{(0)}+b^{(0)}}{2} = \frac{3+4}{2} = 3,5$

Вычисляем:

$f(a^{(0)}) = 0.267949 > 0 \qquad f(x^{(0)}) = -0.204162 < 0$

Если:

$f(a^{(0)})f(x^{(0)}) < 0 \Rightarrow \overline{x}$ находится на левой половине отрезка

$f(a^{(0)})f(x^{(0)}) > 0 \Rightarrow \overline{x}$ находится на правой половине отрезка

k	$a^{(k)}$	$x^{(k)}$	$b^{(k)}$	$f(a^{(k)})$	$f(x^{(k)})$	$b^{(k)} - a^{(k)}$	$b^{(k)} - a^{(k)} \leq 2\varepsilon -?$
0	3	3.5	4	$\oplus$	$\ominus$	1	$\ominus$
1	3	3.25	3.5	$\oplus$	$\ominus$	0.5	$\ominus$
2	3	3.125	3.25	$\oplus$	$\oplus$	0.25	$\ominus$
3	3.125	3.1875	3.25	$\oplus$	$\ominus$	0.125	$\ominus$
4	3.125	3.15625	3.1875	$\oplus$	$\ominus$	0.0625	$\ominus$
5	3.125	3.140625	3.15625	$\oplus$	$\oplus$	0.03125	$\ominus$
6	3.140625	3.1484375	3.15625	$\oplus$	$\ominus$	0.015625	$\oplus$

$$\Downarrow$$

$$\overline{x} = x^{(6)} + \varepsilon = 3.148 \pm 0.02$$

Лойко Степан А-09-22

ТР №3

Вариант 6 (25)

Найти корень нелинейного уравнения методом МПИ.

$f(x) = \frac{1}{x-2} - \sqrt{x} + 1, \varepsilon = 0.0001$

Решение: отр. лок.: $\overline{x} \in [3; 4] = [a^{(0)}; b^{(0)}]$

1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} = \sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{x}-1} - 2$

Отсюда: $x = \frac{1}{\sqrt{x}-1} - 2 = \varphi(x)$

$|\varphi'(x)| = | - \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}|$

$q = \max[a^0; b^0]|\varphi'(x)| = |\varphi'(4)| = 0.25 < 1 \Rightarrow$ условие сходимости выполняется

Возьмем в качестве начального приблежения середину отрезка локализации:

$x_0 = 3.5$

Вычисляем: $x_1 = \varphi(x_0) = \frac{1}{\sqrt{3.5}-1} - 2 \cong -0.852$

Проверим критерй окончания: $|x_k - x_{k-1}| \leq \frac{1-q}{q}\varepsilon$:

$|x_1 - x_0| \leq \frac{1-q}{q}\varepsilon$

$4.352 = | - 0.852 - 3.5| \nleq \frac{1-0.25}{0.25}10^{-4} = 0.0003$

$x_2 = \varphi(x_1) = \frac{1}{\sqrt{}}$

Лойко Степан А-09-22

ТР №4

Вариант 6 (25)

$f(x) = x - 2e^{-x} - 1 \qquad [a;b] = [1;3] \qquad \varepsilon = 10^{-8}$

$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - 2e^{-x_k} - 1}{\frac{e^{x_k}+2}{e^{x_k}}}$

Возьмем в качестве начального приближения середину отрезка локализации:

$x_0 = 2$

Вычисляем:

$x_1 = x_0 - \frac{x_0 - 2e^{-x_0} - 1}{\frac{e^{x_0}+2}{e^{x_0}}} = 2 - \frac{2 - 2e^{-2} - 1}{\frac{e^{2}+2}{e^{2}}} = 1.42603$

Проверяем критерий окончания:

$|x_1 - x_0| = 0.57397 \nleq 0.00000001$ - продолжаем вычисления

$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - 2e^{-x_1} - 1}{\frac{e^{x_1}+2}{e^{x_1}}} = 1.42603 - \frac{1.42603 - 2e^{-1.42603} - 1}{\frac{e^{1.42603}+2}{e^{1.42603}}} = 1.46284$

$|x_2 - x_1| = 0.03681 \nleq 0.00000001$ - продолжаем вычисления

$x_3 = x_2 - \frac{x_2 - 2e^{-x_2} - 1}{\frac{e^{x_2}+2}{e^{x_2}}} = 1.46284 - \frac{1.46284 - 2e^{-1.46284} - 1}{\frac{e^{1.46284}+2}{e^{1.46284}}} = 1.46306$

$|x_3 - x_2| = 0.00022 \nleq 0.00000001$ - продолжаем вычисления

$x_4 = x_3 - \frac{x_3 - 2e^{-x_3} - 1}{\frac{e^{x_3}+2}{e^{x_3}}} = 1.46306 - \frac{1.46306 - 2e^{-1.46306} - 1}{\frac{e^{1.46306}+2}{e^{1.46306}}} = 1.46306$

$|x_4 - x_3| = 0 \leq 0.00000001$

В этот раз неравенство выполнилось, поэтому итерации можно прекратить, т.к. была достигнута точность $\varepsilon = 10^{-8}$

Ответ: $\overline{x} = 1.46306 \pm 0.00000001$

Лойко Степан А-09-22

ТР №5

Вариант 6 (25)

$$\begin{cases} 7x_1 - 7x_2 - 9x_3 - 4x_4 = -67 \\ -14x_1 + 10x_2 + 14x_3 + 1x_4 = 139 + 2 \cdot I \\ -35x_1 + 3x_2 + 11x_3 - 36x_4 = 359 + 5 \cdot I \\ 49x_1 - 37x_2 - 45x_3 - 16x_4 = -409 - 7 \cdot I \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x_1 - 7x_2 - 9x_3 - 4x_4 = -67 \\ -4x_2 - 4x_3 - 7x_4 = 5 \\ -32x_2 - 34x_3 - 56x_4 = 24 - 8 \cdot II \\ 12x_2 + 18x_3 + 12x_4 = 60 + 3 \cdot II \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x_1 - 7x_2 - 9x_3 - 4x_4 = -67 \\ -4x_2 - 4x_3 - 7x_4 = 5 \\ -2x_3 = -16 \\ 6x_3 - 9x_4 = 75 \end{cases}$$

$x_3 = \frac{-16}{-2} = 8$

$x_4 = \frac{75-6\cdot 8}{-9} = -3$

$x_2 = \frac{5+4\cdot 8+7\cdot(-3)}{-4} = -4$

$x_1 = \frac{-67+7\cdot(-4)+9\cdot 8+4\cdot(-3)}{7} = -5$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$

Лойко Степан А-09-22

ТР №8

Вариант 6 (25)

A= $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 4 \\ -20 \\ 6 \\ 36 \\ -45 \end{pmatrix}$

$\alpha_1 = -\frac{c_1}{b_1} = -\frac{-2}{4} = 0.5 \qquad \beta_1 = \frac{d_1}{b_1} = \frac{4}{4} = 1$

$\gamma_2 = b_2 + a_2 \cdot \alpha_1 = 10 + 3 \cdot 0.5 = 11.5$

$\alpha_2 = -\frac{c_2}{\gamma_2} = -\frac{2}{11.5} \qquad \beta_2 = \frac{d_2 - a_2\beta_1}{\gamma_2} = \frac{-20-3\cdot1}{11.5} = \frac{-23}{11.5} = -2$

$\gamma_3 = b_3 + a_3 \cdot \alpha_2 = 8 + 3 \cdot \frac{2}{11.5} = \frac{196}{23}$

$\alpha_3 = -\frac{c_3}{\gamma_3} = \frac{2}{\frac{196}{23}} = \frac{23}{98} \qquad \beta_3 = \frac{d_3 - a_3\beta_2}{\gamma_3} = \frac{6-3\cdot2}{\frac{196}{23}} = 0$

$\gamma_4 = b_4 + a_4 \cdot \alpha_3 = 12 + 3 \cdot \frac{23}{98} = \frac{1493}{98}$

$\alpha_4 = -\frac{c_4}{\gamma_4} = \frac{4}{\frac{1493}{98}} = \frac{392}{1493} \qquad \beta_4 = \frac{d_4 - a_4\beta_3}{\gamma_4} = \frac{36-3\cdot0}{\frac{1493}{98}} = \frac{3528}{1493}$

$\gamma_5 = b_5 + a_5 \cdot \alpha_4 = 5 - 3 \cdot \frac{392}{1493} = \frac{2594}{1493}$

$\beta_5 = \frac{d_5 - a_5\beta_4}{\gamma_5} = \frac{-45+3\cdot\frac{3528}{1493}}{\frac{2594}{1493}} = -22\frac{1055}{1297}$

$x_5 = \beta_5 = -22\frac{1055}{1297}$

$x_4 = \alpha_4 \cdot x_5 + \beta_4 = \frac{392}{1493} \cdot (-22\frac{1055}{1297}) + \frac{3528}{1493} = -\frac{4704}{1297}$

$x_3 = \alpha_3 \cdot x_4 + \beta_3 = \frac{23}{98} \cdot (-\frac{4704}{1297}) + 0 = -\frac{1104}{1297}$

$x_2 = \alpha_2 \cdot x_3 + \beta_2 = -\frac{2}{11.5} \cdot (-\frac{1104}{1297}) - 2 = -\frac{2402}{1297}$

$x_1 = \alpha_1 \cdot x_2 + \beta_1 = 0.5 \cdot (-\frac{2402}{1297}) + 1 = \frac{96}{1297}$

Ответ: X= $\begin{pmatrix} \frac{96}{1297} \\ -\frac{2402}{1297} \\ -\frac{1104}{1297} \\ -\frac{4704}{1297} \\ -22\frac{1055}{1297} \end{pmatrix}$

Лойко Степан А-09-22

ТР №9

Вариант 6 (25)

$$A= \begin{pmatrix} 2.847 & -0.447 & 0 \\ 0.302 & -1.036 & 1.63 \\ 1.311 & 2.661 & -2.226 \end{pmatrix} \quad b= \begin{pmatrix} -1.67 \\ 1.206 \\ -2.9 \end{pmatrix}$$

$$\| A \|_1 = \max_{1\le j\le 3} \sum_{i=1}^{3} |A_{ij}| = \max\{4.46; 4.144; 3.856\} = 4.46$$

$$\| A \|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} |A_{ij}|^2} = (2.847^2 + 0.447^2 + 0 + 0.302^2 + 1.036^2 + 1.63^2 + 1.311^2 +$$

$$+2.661^2 + 2.226^2)^{0.5} \approx 5.09$$

$$\| A \|_\infty = \max_{1\le i\le 3} \sum_{j=1}^{3} |A_{ij}| = \max\{3.294; 2.968; 6.198\} = 6.198$$

$$\| b \|_1 = \sum_{i=1}^{3} |A_i| = |-1.67| + |1.206| + |-2.9| = 5.776$$

$$\| b \|_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} |A_i|^2} = \sqrt{1.67^2 + 1.206^2 + 2.9^2} \approx 3.557$$

$$\| b \|_\infty = \max_{1\le i\le 3} |A_i| = \max\{1.67; 1.206; 2.9\} = 2.9$$

$$\Delta_1 b = |5\cdot 10^{-3}| + |5\cdot 10^{-4}| + |5\cdot 10^{-2}| = 0.0555$$

$$\Delta_2 b = \sqrt{(5\cdot 10^{-3})^2 + (5\cdot 10^{-4})^2 + (5\cdot 10^{-2})^2} \approx 0.05$$

$$\Delta_\infty b = \max\{|5\cdot 10^{-3}|; |5\cdot 10^{-4}|; |5\cdot 10^{-2}|\} = 0.05$$

$$\delta_1 b = \frac{\Delta_1 b}{\|b\|_1} = \frac{0.0555}{5.776} \approx 0.0096$$

$$\delta_2 b = \frac{\Delta_2 b}{\|b\|_2} = \frac{0.05}{3.557} \approx 0.014$$

$$\delta_\infty b = \frac{\Delta_\infty b}{\|b\|_\infty} = \frac{0.05}{2.9} \approx 0.0172$$

Лойко Степан А-09-22

ТР №11

Вариант 6 (25)

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 104x_4 = 644 \\ 136x_1 - 7x_2 + 9x_3 - 3x_4 = -16 \\ 7x_1 + 7x_2 + 155x_3 - 8x_4 = -1034 \\ -5x_1 + 164x_2 + 9x_3 - 9x_4 = -1420 \end{cases}$$

Преобразум систему:

$$\begin{cases} 136x_1 - 7x_2 + 9x_3 - 3x_4 = -16 \\ -5x_1 + 164x_2 + 9x_3 - 9x_4 = -1420 \\ 7x_1 + 7x_2 + 155x_3 - 8x_4 = -1034 \\ -5x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 104x_4 = 644 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{136}x_2 - \frac{9}{136}x_3 + \frac{3}{136}x_4 - \frac{16}{136} \\ x_2 = \frac{5}{164}x_1 - \frac{9}{164}x_3 + \frac{9}{164}x_4 - \frac{1420}{164} \\ x_3 = -\frac{7}{155}x_1 - \frac{7}{155}x_2 + \frac{8}{155}x_4 - \frac{1034}{155} \\ x_4 = \frac{5}{104}x_1 - \frac{2}{104}x_2 + \frac{6}{104}x_3 + \frac{644}{104} \end{cases}$$

$$\text{B}= \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{136} & -\frac{9}{136} & \frac{3}{136} \\ \frac{5}{164} & 0 & -\frac{9}{164} & \frac{9}{164} \\ -\frac{7}{155} & -\frac{7}{155} & 0 & \frac{8}{155} \\ \frac{5}{104} & -\frac{2}{104} & -\frac{6}{104} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\parallel B \parallel_\infty = \max_{1\le i\le 4} \sum_{j=1}^{4} |B_{ij}| = \max\{0.0074; 0.0304; -0.387; -0.0288\} = 0.0304$$

$\parallel B \parallel_\infty = 0.0304 < 1 \Rightarrow$ методы будут сходится

Метод Якоби:

Возьмем в качестве начального приближения вектор $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{7}{136}x_2^{(0)} - \frac{9}{136}x_3^{(0)} + \frac{3}{136}x_4^{(0)} - \frac{16}{136} = \frac{7}{136} - \frac{9}{136} + \frac{3}{136} - \frac{16}{136} = -0.1102 \\ x_2^{(1)} = \frac{5}{164}x_1^{(0)} - \frac{9}{164}x_3^{(0)} + \frac{9}{164}x_4^{(0)} - \frac{1420}{164} = \frac{5}{164} - \frac{9}{164} + \frac{9}{164} - \frac{1420}{164} = -8.628 \\ x_3^{(1)} = -\frac{7}{155}x_1^{(0)} - \frac{7}{155}x_2^{(0)} - \frac{8}{155}x_4^{(0)} - \frac{1034}{155} = -\frac{7}{155} - \frac{7}{155} - \frac{8}{155} - \frac{1034}{155} = -6.8 \\ x_4^{(1)} = \frac{5}{104}x_1^{(0)} - \frac{2}{104}x_2^{(0)} - \frac{6}{104}x_3^{(0)} + \frac{644}{104} = \frac{5}{104} - \frac{2}{104} - \frac{6}{104} + \frac{644}{104} = 6.163 \end{cases}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} -0.1102 \\ -8.628 \\ -6.813 \\ 6.163 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{7}{136}x_2^{(1)} - \frac{9}{136}x_3^{(1)} + \frac{3}{136}x_4^{(1)} - \frac{16}{136} = 0.025 \\ x_2^{(2)} = \frac{5}{164}x_1^{(1)} - \frac{9}{164}x_3^{(1)} + \frac{9}{164}x_4^{(1)} - \frac{1420}{164} = -7.949 \\ x_3^{(2)} = -\frac{7}{155}x_1^{(1)} - \frac{7}{155}x_2^{(1)} - \frac{8}{155}x_4^{(1)} - \frac{1034}{155} = -6.594 \\ x_4^{(2)} = \frac{5}{104}x_1^{(1)} - \frac{2}{104}x_2^{(1)} - \frac{6}{104}x_3^{(1)} + \frac{644}{104} = 6.708 \end{cases}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.025 \\ -7.919 \\ -6.594 \\ 6.708 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{7}{136}x_2^{(2)} - \frac{9}{136}x_3^{(2)} + \frac{3}{136}x_4^{(2)} - \frac{16}{136} = 0.057 \\ x_2^{(3)} = \frac{5}{164}x_1^{(2)} - \frac{9}{164}x_3^{(2)} + \frac{9}{164}x_4^{(2)} - \frac{1420}{164} = -7.927 \\ x_3^{(3)} = -\frac{7}{155}x_1^{(2)} - \frac{7}{155}x_2^{(2)} - \frac{8}{155}x_4^{(2)} - \frac{1034}{155} = -6.661 \\ x_4^{(3)} = \frac{5}{104}x_1^{(2)} - \frac{2}{104}x_2^{(2)} - \frac{6}{104}x_3^{(2)} + \frac{644}{104} = 6.726 \end{cases}$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.057 \\ -7.927 \\ -6.661 \\ 6.726 \end{pmatrix}$$

$$\parallel x_1 - x_0 \parallel_\infty = \left\| \begin{matrix} -1.1102 \\ -9.628 \\ -7.813 \\ 5.163 \end{matrix} \right\|_\infty = 9.628$$

$$\parallel x_3 - x_2 \parallel_\infty = \left\| \begin{matrix} 0.022 \\ -0.008 \\ -0.067 \\ 0.018 \end{matrix} \right\|_\infty = 0.067\text{-погрешность приближенного решения.}$$

$\frac{\|x_1 - x_0\|_\infty}{\|x_3 - x_2\|_\infty} = \frac{9.628}{0.067} \approx 144$

Норма невязки уменьшилсь в 144 раз.

Метод Зейделя:

Возьмем в качестве начального приближения вектор $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{7}{136} x_2^{(0)} - \frac{9}{136} x_3^{(0)} + \frac{3}{136} x_4^{(0)} - \frac{16}{136} = -0.1102 \\ x_2^{(1)} = \frac{5}{164} x_1^{(1)} - \frac{9}{164} x_3^{(0)} + \frac{9}{164} x_4^{(0)} - \frac{1420}{164} = -8.662 \\ x_3^{(1)} = -\frac{7}{155} x_1^{(1)} - \frac{7}{155} x_2^{(1)} - \frac{8}{155} x_4^{(0)} - \frac{1034}{155} = -6.326 \\ x_4^{(1)} = \frac{5}{104} x_1^{(1)} - \frac{2}{104} x_2^{(1)} - \frac{6}{104} x_3^{(1)} + \frac{644}{104} = 6.429 \end{cases}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} -0.1102 \\ -8.662 \\ -6.326 \\ 6.429 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{7}{136}x_2^{(1)} - \frac{9}{136}x_3^{(1)} + \frac{3}{136}x_4^{(1)} - \frac{16}{136} = 0.003 \\ x_2^{(2)} = \frac{5}{164}x_1^{(2)} - \frac{9}{164}x_3^{(1)} + \frac{9}{164}x_4^{(1)} - \frac{1420}{164} = -7.958 \\ x_3^{(2)} = -\frac{7}{155}x_1^{(2)} - \frac{7}{155}x_2^{(2)} - \frac{8}{155}x_4^{(1)} - \frac{1034}{155} = -6.643 \\ x_4^{(2)} = \frac{5}{104}x_1^{(2)} - \frac{2}{104}x_2^{(2)} - \frac{6}{104}x_3^{(2)} + \frac{644}{104} = 6.441 \end{cases}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.003 \\ -7.958 \\ -6.643 \\ 6.441 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{7}{136}x_2^{(2)} - \frac{9}{136}x_3^{(2)} + \frac{3}{136}x_4^{(2)} - \frac{16}{136} = 0.054 \\ x_2^{(3)} = \frac{5}{164}x_1^{(3)} - \frac{9}{164}x_3^{(2)} + \frac{9}{164}x_4^{(2)} - \frac{1420}{164} = -7.938 \\ x_3^{(3)} = -\frac{7}{155}x_1^{(3)} - \frac{7}{155}x_2^{(3)} - \frac{8}{155}x_4^{(2)} - \frac{1034}{155} = -6.647 \\ x_4^{(3)} = \frac{5}{104}x_1^{(3)} - \frac{2}{104}x_2^{(3)} - \frac{6}{104}x_3^{(3)} + \frac{644}{104} = 6.442 \end{cases}$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.054 \\ -7.938 \\ -6.647 \\ 6.442 \end{pmatrix}$$

$$\| x_1 - x_0 \|_\infty = \left\| \begin{matrix} -1.1102 \\ -9.662 \\ -7.326 \\ 5.429 \end{matrix} \right\|_\infty = 9.662$$

$$\| x_3 - x_2 \|_\infty = \left\| \begin{matrix} 0.051 \\ 0.02 \\ -0.004 \\ 0.001 \end{matrix} \right\|_\infty = 0.051 \text{-погрешность приближенного решения.}$$

$\frac{\|x_1 - x_0\|_\infty}{\|x_3 - x_2\|_\infty} = \frac{9.662}{0.051} \approx 185$

Норма невязки уменьшилсь в 185 раз.

Лойко Степан А-09-22

ТР №13

Вариант 6 (25)

x	-2.4	-1.2	0	1.2	2.4
y	1.6	4.6	5.5	7	9.9

Приближение многочленом 1-ой степени: $P_1(x) = a_0 + a_1 x$

$\sum\limits_{i=1}^{5}(y - a_0 - a_1 x)^2 \to \min$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{5}(y - a_0 - a_1 x) = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{5}(yx - a_0 x - a_1 x^2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{5} y - 5a_0 - a_1 \sum\limits_{i=1}^{5} x = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{5}(yx) - a_0 \sum\limits_{i=1}^{5} x - a_1 \sum\limits_{i=1}^{5} x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{y} - a_0 - a_1 \overline{x} = 0 \\ \overline{yx} - a_0 \overline{x} - a_1 \overline{x^2} = 0 \end{cases}$$

$\overline{y} = \frac{1.6+4.6+5.5+7+9.9}{5} \approx 5.72$ $\qquad$ $\overline{x} = \frac{0}{5} = 0$

$\overline{yx} = \frac{-3.84-5.52+8.4+23.73}{5} \approx 4.554$ $\qquad$ $\overline{x^2} = \frac{1.44\cdot 2+5.76\cdot 2}{5} \approx 2.88$

$$\begin{cases} a_0 = 5.72 \\ a_1 = \dfrac{4.554}{2.88} \approx 1.58 \end{cases}$$

$P_1(x) = -1.72 - 3.53x$

Среднеквадратичное отклонение:

$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{5}\sum\limits_{i=1}^{5}(P_1(x_i) - y_i)^2} \approx 0.57$

Лойко Степан А-09-22

ТР №20

Вариант 6 (25)

Вычислить приближенное значение интегала: $\int_a^b f(x)dx$ используя квадратур формулы: а) центральных прямоугольников с шагом h = 0.4; дать априорную оценку погрешности; б) тапецй с шагами h = 0.4 и h = 0.2; оценить погрешность последнего результата по правилу Рунге и уточнить последний результат по Рунге; в) Симпсона с шагом h = 0.4

$f(x)$	a	b
$x\arctan(x)$	1.1	2.7

Решение: $I = \int_{1.1}^{2.7} x\arctan(x)dx$

а) Центр. прямоуг-ов.: $h = 0.4$. Отрезок $[1.1; 2.7]$ разбивается с указанным шагом на N = 4 равных частей точками: $\{x_i\}_{i=0}^{4} = \{1.1; 1.5; 1.9; 2.3; 2.7\}$

Формула: $I = \int_a^b f(x)dx \cong h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1} + \frac{h}{2}) \cong$

$\cong 0.4(f(1.3) + f(1.7) + f(2.1) + f(2.5)) \cong$

$\cong 0.4(1.18963 + 1.76642 + 2.36539 + 2.97572) \cong$

$\cong 3.318864$

Априоная оценка погрешности: $|J - I| \leq \frac{M_2(b-a)}{24}h^2$, где $M_2 = max[a,b]|f''(x)|$

$f(x) = x\arctan(x) \qquad f'(x) = \arctan(x) + \frac{x}{x^2+1} \qquad f''(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2}$

$|f''(x)| - [1.1; 2.7]$

$M_2 = |f''(1.1)| = |0.409492|$

$|J - I| \leq \frac{0.409492(2.7-1.1)}{24} = 0.027299467$

б) Трапеций:1)$h = 0.4$

Формула: $I^{0.4} = \int\limits_a^b f(x)dx \cong h(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(x_i)) =$

$= 0.4(\frac{f(1.1)+f(2.7)}{2} + f(1.5) + f(1.9) + f(2.3)) =$

$= 0.4(\frac{0.916279+3.28344}{2} + 1.47419 + 2.064 + 2.66954) = 3.3230358$

2) $h = 0.2$

$I^{0.2} \cong h(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(x_i)) =$

$= 0.2(\frac{f(1.1)+f(2.7)}{2} + f(1.3) + f(1.5) + f(1.7) + f(1.9) + f(2.1) + f(2.3) + f(2.5)) =$

$= 0.2(\frac{0.916279+3.28344}{2} + 1.18963 + 1.47419 + 1.76642 + 2.064 + 2.36539 + 2.66954 +$

$+ 2.97572) = 3.3209499$

Априоная оценка погрешности: $J - I \approx \frac{I^{0.2} - I^{0.4}}{3} = \frac{3.3209499 - 3.3230358}{3} = -0.0006953$

Уточнение по Рунге: $I_{ytohcn} = I^{0.2} + \frac{I^{0.2} - I^{0.4}}{3} = 3.3209499 + \frac{3.3209499 - 3.3230358}{3} =$

$= 3.3202546$

в) Симсон: $h = 0.4$

Формула: $I_c^{0.4} = \frac{h}{6}(f(x_0) + f(x_n) + 4\sum_{i=1}^{n} f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)) =$

$= \frac{0.4}{6}(f(1.1) + f(2.7) + 4(f(\frac{x_0+x_1}{2}) + f(\frac{x_1+x_2}{2}) + f(\frac{x_2+x_3}{2}) + f(\frac{x_3+x_4}{2})) + 2(f(x_1) +$

$+ f(x_2) + f(x_3))) = \frac{0.4}{6}(f(1.1) + f(2.7) + 4(f(1.3) + f(1.7) + f(2.1)) + 2(f(1.5) +$

$+ f(1.9) + f(2.3))) = 2.52673$

Лойко Степан А-09-22

ТР №21

Вариант 6 (25)

$\int_a^b (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c4x^4)dx \qquad \varepsilon = 0.01$

a	b	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4
-1.3	-0.8	0	3	-2	3	0

Решение: $J = \int\limits_{-1.3}^{-0.8} (0 + 3x - 2x^2 + 3x^3 + 0x^4)dx$

$|J - I_{tr}^h| \leq \frac{M_2(b-a)}{12} h^2 < \varepsilon \Rightarrow h < \sqrt{\frac{12\varepsilon}{M_2(b-a)}}$

$f(x) = 3x - 2x^2 + 3x^3$

$f'(x) = 3 - 4x + 9x^2$

$f''(x) = -4 + 18x$

На отрезке [-1.3;-0.8] $f''(x)$ возростает $\Rightarrow M_2 = \max\limits_{[a;b]} |f''(x)| = |f''(-0.8)| = 18.4$

$\Rightarrow h < \sqrt{\frac{12 \cdot 0.01}{18.4 \cdot (-0.8 + 1.3)}} \cong 0.1142$

Величина $N = \frac{b-a}{h}$ - целое число $\Rightarrow N = [\frac{b-a}{h}] + 1 = [\frac{-0.8+1.3}{0.1142}] + 1 = [4.37] + 1 =$

$= 4 + 1 = 5 \Rightarrow h_{max} = \frac{b-1}{N} = \frac{-0.8+1.3}{5} = 0.1$

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-1.3	-1.2	-1.1	-1	-0.9	-0.8

$I_{tr}^1 \cong h(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum\limits_{i=1}^{n-1} f(x_i)) = 0.1(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x1) + f(x2) + f(x3) + f(x5)) =$

$= 0.1(\frac{-13.871 - 5.216}{2} - 11.664 - 9.713 - 8 - 6.507) = -4.5427$

$J = \int\limits_{-1.3}^{-0.8} (3x - 2x^2 + 3x^3)dx = (\frac{3x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^4}{4})|_{-1.3}^{-0.8} = -4.5332$

$|J - I_{tr}^h| < \varepsilon \Rightarrow |-4.5332 + 4.5427| = 0.0095 < \varepsilon = 0.01 \Rightarrow$ Указанная точность достигнута

Лойко Степан А-09-22

ТР №23

Вариант 6 (25)

Вычислить цетральную и левую разностные производные и вторую разностну производную ф-ции $f(x)$ с шагом $h = 0.1$ в точке $x_0 = \frac{a+b}{2}$

$f(x) = x\arctan(x)$

a	b
1.1	2.7

$x_0 = \frac{1.1+2.7}{2} = 1.9$

$f'_c(x_0) \cong \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $\qquad f'_l(x_0) \cong \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$

$f'_c(1.9) \cong \frac{f(2)-f(1.8)}{0.2} \cong \frac{2.2143-1.9146}{0.2} \cong 1.4985$

$f'_l(1.9) \cong \frac{f(1.9)-f(1.8)}{0.1} \cong \frac{2.064-1.9146}{0.1} \cong 1.494$

для проверки значений вычислим точное значение производной:

$f'(x) = \arctan(x) + \frac{x}{1+x^2}$

$f'(1.9) = 1.49847$

$\Delta_c = |1.49847 - 1.4985| = 0.00003$

$\Delta_l = |1.49847 - 1.494| = 0.00447$

Центральная производная дала более точный результат.

$f''(x_0) = \frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow f''(1.9) = \frac{f(2)-2f(1.9)+f(1.8)}{0.1^2} = \frac{2.2143-2\cdot 2.064+1.9146}{0.1^2} = 0.09$

Точное значение: $f''(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2}$

$f''(1.9) = \frac{2}{(1+1.9^2)^2} = 0.094108$

абсолютная погрешность:

$\Delta = |0.094108 - 0.09| = 0.004108$

Лойко Степан А-09-22
ТР №24
Вариант 6 (25)

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{t+3} - \frac{t+3}{t^2} \\ y(1) = 4 \end{cases}$$

$h = 0.2 \qquad t \in [1; 1.8]$

Точное решение задачи:

$y' = \frac{y}{t+3} - \frac{t+3}{t^2}$

$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t+3} - \frac{t+3}{t^2}$

$\frac{dy}{y} = -\frac{dt}{t^2}$

$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dt}{t^2}$

$\ln(y) = \frac{1}{t} + C$

$y = C \cdot e^{\frac{1}{t}}$—общее решение

а) Метод Эйлера:

$h = 0.2$

$y_{n+1} = y_n + hf(t_n; y_n) \qquad y_0 = 4 \qquad t_0 = 1$

$y_1^h = y_0 + hf(t_0; y_0) = 4 + 0.2(\frac{4}{1+3} - \frac{1+3}{1^2}) = 3.4$

$y_2^h = y_1 + hf(t_1; y_1) = 3.4 + 0.2(\frac{3.4}{1.2+3} - \frac{1.2+3}{1.2^2}) = 2.9785$

$y_3^h = y_2 + hf(t_2; y_2) = 2.9785 + 0.2(\frac{2.9785}{1.4+3} - \frac{1.4+3}{1.4^2}) = 2.6649$

$y_4^h = y_3 + hf(t_3; y_3) = 2.6649 + 0.2(\frac{2.6649}{1.6+3} - \frac{1.6+3}{1.6^2}) = 2.4213$

$y_1^{2h} = y_0 + hf(t_0; y_0) = 4 + 0.4(\frac{4}{1+3} - \frac{1+3}{1^2}) = 2.8$

$y_2^{2h} = y_1 + hf(t_1; y_1) = 2.8 + 0.4(\frac{2.8}{1.4+3} - \frac{1.4+3}{1.4^2}) = 2.15659$

t	1	1.2	1.4	1.6
y^h	3.4	2.9785	2.6649	2.4213
y^{2h}	2.8	–	2.15659	–

Расчет оценки погрешности метода Эйлера по правилу Рунге:

$R = |\frac{y_i^h - y_j^{2h}}{2p-1}|$

$p = 1$

$R_0 = |3.4 - 2.8| = 0.6$

$R_1 = |2.6649 - 2.15659| = 0.50831$

б) Метод Рунге-Курты (2-го порядка):

$\tilde{y}_{n+1} = y_n + hf(t_n; y_n)$

$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(t_n; y_n) + f(t_{n+1}; \tilde{y}_{n+1})) \qquad y_0 = 4 \qquad t_0 = 1$

$\tilde{y}_1^h = y_0 + hf(t_0; y_0) = 4 + 0.2(\frac{4}{1+3} - \frac{1+3}{1^2}) = 3.4$

$y_1^h = y_0 + \frac{h}{2}(f(t_0; y_0) + f(t_1; \tilde{y}_1)) = 4 + 0.1((\frac{4}{1+3} - \frac{1+3}{1^2}) + (\frac{3.4}{1.2+3} - \frac{1.2+3}{1.2^2}) = 3.48929$

$\tilde{y}_2^h = y_1 + hf(t_1; y_1) = 3.48929 + 0.2(\frac{3.48929}{1.2+3} - \frac{1.2+3}{1.2^2}) = 3.07211$

$y_2^h = y_1 + \frac{h}{2}(f(t_1; y_1) + f(t_2; \tilde{y}_2)) = 3.48929 + 0.1((\frac{3.48929}{1.2+3} - \frac{1.2+3}{1.2^2}) + (\frac{3.07211}{1.4+3} - \frac{1.4+3}{1.4^2})) =$
$= 3.12603$

$\tilde{y}_3^h = y_2 + hf(t_2; y_2) = 3.12603 + 0.2(\frac{3.12603}{1.4+3} - \frac{1.4+3}{1.4^2}) = 2.81914$

$y_3^h = y_2 + \frac{h}{2}(f(t_2; y_2) + f(t_3; \tilde{y}_3)) = 3.12603 + 0.1((\frac{3.12603}{1.4+3} - \frac{1.4+3}{1.4^2}) + (\frac{2.81914}{1.6+3} - \frac{1.6+3}{1.6^2})) =$
$= 2.85636$

$\tilde{y}_4^h = y_3 + hf(t_3; y_3) = 2.85636 + 0.2(\frac{2.85636}{1.6+3} - \frac{1.6+3}{1.6^2}) = 2.62117$

$y_4^h = y_3 + \frac{h}{2}(f(t_3; y_3) + f(t_4; \tilde{y}_4)) = 2.85636 + 0.1((\frac{2.85636}{1.6+3} - \frac{1.6+3}{1.6^2}) + (\frac{2.62117}{1.8+3} - \frac{1.8+3}{1.8^2})) =$
$= 2.64523$

$\tilde{y}_1^{2h} = y_0 + 2hf(t_0; y_0) = 4 + 0.4(\frac{4}{1+3} - \frac{1+3}{1^2}) = 2.8$

$y_1^{2h} = y_0 + \frac{2h}{2}(f(t_0; y_0) + f(t_1; \tilde{y}_1)) = 4 + 0.2((\frac{4}{1+3} - \frac{1+3}{1^2}) + (\frac{2.8}{1.4+3} - \frac{1.4+3}{1.4^2}) = 3.07829$

$\tilde{y}_2^{2h} = y_1 + hf(t_1; y_1) = 3.07829 + 0.4(\frac{3.07829}{1.4+3} - \frac{1.4+3}{1.4^2}) = 2.46018$

$y_2^{2h} = y_1 + \frac{h}{2}(f(t_1; y_1) + f(t_2; \tilde{y}_2)) = 3.07829 + 0.2((\frac{3.07829}{1.4+3} - \frac{1.4+3}{1.4^2}) + (\frac{2.46018}{1.8+3} - \frac{1.8+3}{1.8^2})) =$
$= 2.57544$

t	1	1.2	1.4	1.6	1.8
y^h	–	3.48929	3.12603	2.85636	2.64523
y^{2h}	–	–	3.07829	–	2.57544

Расчет оценки погрешности метода Рунге-Курты (2-ого порядка) по правилу рунге: $R = |\frac{y_i^h - y_i^{2h}}{2^p - 1}|$

$p = 2$

$R_1 = |\frac{y_2^h - y_1^{2h}}{3}| = 0.0159113$

$R_2 = |\frac{y_4^h - y_2^{2h}}{3}| = 0.0232633$

Лойко Степан А-09-22

ТР №27

Вариант 6 (25)

$$\begin{cases} -y'' + xy = 2 + x - 2x^2 \\ \quad y(0) = 1 \qquad y(1) = 0 \end{cases}$$

$h_1 = \frac{1}{3} \qquad h_2 = \frac{1}{6} \qquad x \in [0;1]$

$-\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + q(x_i)y_i = f(x_i)$

$-y_{i+1} + (2 + h^2 \cdot q(x_i))y_i - y_{i-1} = h^2 f(x_i)$

$h = \frac{1}{6}$

$$\begin{cases} -y_0 + (2 + x_1h^2)y_1 - y_2 = (2 + x_1 - 2x_1^2)h^2 \\ -y_1 + (2 + x_2h^2)y_2 - y_3 = (2 + x_2 - 2x_2^2)h^2 \\ -y_2 + (2 + x_3h^2)y_3 - y_4 = (2 + x_3 - 2x_3^2)h^2 \\ -y_3 + (2 + x_4h^2)y_4 - y_5 = (2 + x_4 - 2x_4^2)h^2 \\ -y_4 + (2 + x_5h^2)y_5 - y_6 = (2 + x_5 - 2x_5^2)h^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 + 2.004629y_1 - y_2 = 0.0586419 \\ -y_1 + 2.00925y_2 - y_3 = 0.0586419 \\ -y_2 + 2.0138y_3 - y_4 = 0.05 \\ -y_3 + 2.0185y_4 - y_5 = 0.0493827 \\ -y_4 + 2.02314y_5 = 0.0401234 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_1 = 1.07483 \\ y_2 = 1.09599 \\ y_3 = 1.06864 \\ y_4 = 1.03811 \\ y_5 = 0.53295 \\ y_6 = 0 \end{cases}$$

$h = \frac{1}{3}$

$$\begin{cases} -y_0 + (2 + x_1h^2)y_1 - y_2 = (2 + x_1 - 2x_1^2)h^2 \\ -y_1 + (2 + x_2h^2)y_2 - y_3 = (2 + x_2 - 2x_2^2)h^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 + 2.037y_1 - y_2 = 0.2345679 \\ -y_1 + 2.074y_2 - y_3 = 0.1975308 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_1 = 0.85527 \\ y_2 = 0.50762 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

Расчет оценки погрешности по правилу Рунге:

$R = |\frac{y_i^h - y_i^{2h}}{2^p - 1}|$

$p = 2$

$R_0 = |\frac{y_0^{\frac{1}{3}} - y_0^{\frac{1}{6}}}{3}| = 0$

$R_1 = |\frac{y_1^{\frac{1}{3}} - y_2^{\frac{1}{6}}}{3}| = 0.08024$

$R_2 = |\frac{y_2^{\frac{1}{3}} - y_4^{\frac{1}{6}}}{3}| = 0.17683$

$R_3 = |\frac{y_3^{\frac{1}{3}} - y_6^{\frac{1}{6}}}{3}| = 0$