

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea in Matematica

Evoluzione e condensazione in un modello di popolazione con selezione e mutazione

Relatore: Paolo Dai Pra

Laureando: Nicolás Ruggeri
1099633

22 settembre 2017

*Alla mia famiglia,
per la libertà lasciatami nelle scelte
e per i sacrifici che mi sono stati dedicati
senza appariscenza.
A tutti coloro che,
in maniera più o meno diretta,
hanno reso questa frazione del viaggio
ciò che stata.*

Indice

1	Modello di selezione e mutazione di Kingman	5
1.1	Introduzione	5
1.2	Sviluppo del modello	6
1.3	Condensazione	7
1.4	Comportamento asintotico	8
2	Simulazione numerica	10
2.1	Verifica delle ipotesi	10
2.2	Simulazione dell'evoluzione	13
2.3	Osservazioni sulla simulazione	16
3	Dimostrazioni	18
3.1	Proposizione 1.2	18
3.2	Proposizione 1.3	18
3.3	Proposizione 1.5	20
3.4	Teorema 1.6	22
3.5	Teorema 1.7	24
4	Appendice	32
4.1	Teorema di rinnovamento	32
4.2	Successioni completamente monotone	32
4.3	Convergenza di misure	33

1 Modello di selezione e mutazione di Kingman

1.1 Introduzione

Nel seguente analizzeremo il modello di evoluzione della distribuzione dell'adattamento in una popolazione sottoposta a mutazione ed evoluzione proposto da Kingman in [1] e successivamente analizzato in [2], interessandoci particolarmente all'insorgenza di un fenomeno di condensazione più in avanti esplicitato. Il modello è costruito su una popolazione che si evolve a steps discreti $n \in \mathbb{N}$. Denoteremo con $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la distribuzione dell'adattamento nella n -esima generazione e con q la distribuzione della mutazione, dove tutte le p_n e la q sono da intendersi come misure di probabilità su $[0, 1]$. Detta

$$w_n = \int x p_n(dx)$$

la media della distribuzione n -esima, si modella l'evoluzione dell'adattamento in maniera ricorsiva come:

$$p_{n+1}(dx) = (1 - \beta)w_n^{-1}x p_n(dx) + \beta q(dx) \quad (1.1)$$

dove $\beta \in (0, 1)$ è un parametro descrivente le incidenze di selezione e mutazione. Si nota che la distribuzione si evolve in maniera iterativa come una combinazione convessa di $q(dx)$ e $(1 - \beta)w_n^{-1}x p_n(dx)$. L'idea sottostante è che una porzione β della popolazione venga sottoposta a una mutazione che, in quanto tale, rende nullo il lavoro compiuto dall'evoluzione fino allo step n (la mutazione agisce dopo l'evoluzione), ricalibrando la frazione β da zero. La restante frazione $1 - \beta$ non incorre a mutazione ed evolve perciò regolarmente secondo la qualità dell'adattamento: questo è reso matematicamente dal termine x posto davanti a p_n , che accentua i valori più vicini all'adattamento massimo 1. La normalizzazione tramite w_n è necessaria affinché l'integrale di p_{n+1} su $[0, 1]$ valga ancora 1.

Dimostreremo che, sotto alcune ipotesi non triviali, la distribuzione limite è indipendente da p_0 e presenta una condensazione di massa sul valore ottimale, resa dalla misura di Dirac, in

$$p(dx) = \beta \frac{q(dx)}{1 - x} + \gamma(\beta)\delta_1(dx)$$

È da notare che il valore del modello non risiede nella sua capacità predittiva in una reale dinamica evolutiva, data la trascurazione di altri parametri determinanti nella formazione delle

generazioni, alcuni tra i quali accoppiamento non casuale e distanza spazio-temporale. L'interesse effettivo é quello in un modello che, nonostante la sua descrizione relativamente semplice, riesca a presentare l'apparizione di un fenomeno di condensazione.

1.2 Sviluppo del modello

Definiamo i seguenti oggetti:

$$W_n := \prod_{i=0}^{n-1} w_i$$

$$\mu_n := \int_0^1 x^n q(dx)$$

$$m_n := \int_0^1 x^n p_0(dx)$$

Si ha allora una formulazione esplicita per la distribuzione della generazione n-esima della dinamica in (1.1)

Proposizione 1.1. *L'espressione generale di p_n per $n \geq 1$ é data da*

$$W_n p_n(dx) = \sum_{r=0}^{n-1} W_{n-r} (1-\beta)^r \beta x^r q(dx) + (1-\beta)^n x^n p_0(dx) \quad (1.2)$$

Inoltre

$$W_n = \sum_{r=1}^{n-1} W_{n-r} (1-\beta)^{r-1} \beta \mu_r + (1-\beta)^{n-1} m_n \quad (1.3)$$

Dimostrazione. La dimostrazione di (1.2) é una semplice induzione utilizzando (1.1). Per mostrare (1.3) basta integrare (1.2) su $[0, 1]$ e ricordare le definizioni di μ_n e m_n . □

Proposizione 1.2. *Per $|z| < 1$ vale*

$$\sum_{n=1}^{\infty} W_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\beta)^{n-1} m_n z^n \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} (1-\beta)^{n-1} \beta \mu_n z^n \right]^{-1} \quad (1.4)$$

o alternativamente

$$\sum_{n=1}^{\infty} W_n z^n = \int \frac{z x p_0(dx)}{1 - (1-\beta)zx} \left[1 - \int \frac{\beta z x q(dx)}{1 - (1-\beta)zx} \right]^{-1} \quad (1.5)$$

La parte destra di (1.5) é analitica nel disco di \mathbb{C}

$$D := \{z : (1 - \beta)|z| < 1\}$$

tranne negli zeri del denominatore, cioe' gli z tali che

$$\int \frac{\beta zx}{1 - (1 - \beta)zx} q(dx) = 1$$

equazione la cui parte immaginaria \Im e' data da

$$\beta \Im(z) \int \frac{xq(dx)}{|1 - (1 - \beta)zx|^2} = 0$$

che ha soluzione solo per $\Im(z) = 0$. Perciò tutti gli zeri sono reali. Essendo la parte destra di (1.5) crescente in z , ci può essere al massimo uno zero in D . In effetti c'è uno zero se e solo se

$$\int \frac{\beta x q(dx)}{(1 - \beta)(1 - x)} > 1$$

o equivalentemente

$$\int \frac{q(dx)}{1 - x} > \beta^{-1} \quad (1.6)$$

poiché per crescita in z il valore dell'integrale deve passare da < 1 per $z = 0$ a $z > 1$ per $z \rightarrow 1/(1 - \beta)$.

1.3 Condensazione

Kingman in [1] dimostra che si possono presentare qualitativamente tre situazioni, a seconda o no che sia soddisfatta la condizione (1.6). Noi d'ora in poi supporremo

$$\int \frac{q(dx)}{1 - x} \leq \beta^{-1} \quad (1.7)$$

e in seguito faremo una seconda assunzione su una successione u_n . Questo perché il nostro interesse é rivolto all'apparizione del fenomeno di condensazione, che non si presenta in caso contrario. Definiamo i numeri $f_n := \beta(1 - \beta)^{-1}\mu_n$. Essi soddisfano

$$f_n \geq 0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n \leq 1 \quad (1.8)$$

dimostrabile semplicemente usando la definizione di μ_n e (1.7). Si può perciò utilizzare il teorema di rinnovamento (presentato in appendice) con $b_n = 0$ per ottenere una sequenza ricorsiva

$$u_0 := 0 \quad u_n := \sum_{r=1}^n f_r u_{n-r}$$

Proposizione 1.3. *Le successioni (f_n) e (u_n) sono completamente monotone (vedi appendice). In particolare vale che $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ cresce verso un limite*

Supporremo d'ora in poi

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \longrightarrow 1 \quad (1.9)$$

Ancora in [1] l'autore mostra che in caso contrario si ottiene comunque condensazione, ma non strettamente slegata da p_0 e qualitativamente diversa da quella che ci accingiamo a spiegare.

Lemma 1.4. *Usando (1.3) si mostra per induzione che*

$$W_n = (1 - \beta)^{n-1} \sum_{r=1}^n m_r u_{n-r} \quad (1.10)$$

Proposizione 1.5. *Supponendo (1.7) e (1.9) le costanti*

$$v_n := \sum_{r=1}^n m_r u_{n-r}$$

soddisfano

$$\frac{v_n}{v_{n-1}} \longrightarrow 1$$

Sapendo che $W_n = w_0 w_1 \dots w_{n-1} = (1 - \beta)^{n-1} v_n$ consegue che

$$w_n \rightarrow 1 - \beta \quad (1.11)$$

Teorema 1.6. *La successione (p_n) converge fortemente su ogni intervallo $[0, \xi]$, $\xi < 1$ alla misura:*

$$\tilde{p}(dx) = \frac{\beta q(dx)}{1 - x} \quad (1.12)$$

Inoltre (p_n) converge debolmente su $[0, 1]$ a:

$$p(dx) = \frac{\beta q(dx)}{1 - x} + \left(1 - \int \frac{\beta q(dx)}{1 - x}\right) \delta_1(dx) \quad (1.13)$$

1.4 Comportamento asintotico

Nella sezione precedente abbiamo mostrato che la successione (p_n) converge alla misura

$$p(dx) = \frac{\beta q(dx)}{1 - x} + \gamma(\beta) \delta_1(dx)$$

dove definiamo

$$\gamma(\beta) := 1 - \int \frac{\beta q(dx)}{1-x}$$

Questo risultato in particolare indica la dimensione $\gamma(\beta)$ dell'atomo che si forma al massimo adattamento. Vogliamo ora studiare il comportamento che hanno le generazioni asintoticamente in un intorno del massimo adattamento 1, descritto dal teorema principale di [2]. Nell'articolo viene supposta la condizione

$$\lim_n \frac{m_n}{\mu_n} = 0 \quad (1.14)$$

che perciò aggiungeremo a quelle già assunte: essa é un'indicazione del fatto che la distribuzione della mutazione é stocasticamente piú larga di quella della popolazione iniziale.

Quella presentata é una generalizzazione di quanto presentato in [2]: é degna di nota l'indipendenza del risultato dal limite k , che era stato assunto uguale a 1 dagli autori.

Teorema 1.7. *Supponiamo $\exists \alpha > 1, k > 0$ tali che*

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{q(1-h, 1)}{h^\alpha} = k \quad (1.15)$$

e che valgano (1.7), (1.14). Allora $\forall x > 0$:

$$\lim_{n \nearrow \infty} p_n(1 - \frac{x}{n}, 1) = \frac{\gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x y^{\alpha-1} e^{-y} dy \quad (1.16)$$

2 Simulazione numerica

2.1 Verifica delle ipotesi

In questa sezione verrà presentata una simulazione numerica, sviluppata in Matlab versione 9.0.0.341360(R2016a), per la simulazione e conferma delle predizioni teoriche. Si può trovare in appendice un codice alternativo per Wolfram Mathematica. Ci avvaliamo prima di tutto di uno script per la verifica delle ipotesi sulle distribuzioni q, p_0 e sul parametro β . Raccogliendo quelle precedentemente assunte, bisogna verificare che:

$$i) \int \frac{q(dx)}{1-x} \leq \beta^{-1}$$

$$ii) \frac{u_n}{u_{n-1}} \longrightarrow 1$$

$$iii) \frac{m_n}{\mu_n} \longrightarrow 0$$

Nello studio delle popolazioni e in tutti i codici seguenti si supporrà di lavorare con le misure q, p_n nella forma delle loro densità su $[0, 1]$. Nello specifico la simulazione avrà coi seguenti dati:

- $p_0(x) = 1$ distribuzione uniforme su $[0, 1]$
- $q(x) = \frac{\sin(1-x)}{1-\cos(1)}$ che porta $\alpha = 2$ nel teorema (1.7)
- $\beta = 0, 1$

Il primo script di verifica di ipotesi è il seguente:

```
1 % FUNCTION di verifica ipotesi i),ii),iii)
2
3 function verifica_ipotesi(p_0,q,beta)
4
5 % INPUT: p_0,q: densita' delle distribuzioni relative ad adattamento e
6 % mutazione (input come funzioni)
7 % beta: coefficiente che definisce il rinnovo delle generazioni
8 % appartenente a (0,1)
9
10
11 % IPOTESI 1 % integranda q(dx)/1-x
12 g= chebfun(@(x) q(x)./(1-x),[0 1], 'splitting', 'on');
13
14 I=sum(g); % sum e' il comando di integrazione per funzioni
15 % chebfun
16 v1= I<= 1/beta; % variabile logica (1 o 0) sulla veridicità di ipotesi 1
17 fprintf('\n IPOTESI 1 VERIFICATA: \t %d \n',v1)
18
19 % calcolo le m_n e mu_n (registrate nei vettori m e mu) così come le f_n e
20 % u_n, necessari per ipotesi 2 e 3
21 m=[]; mu=[]; u=[];
22 leng=400;
23 for n=1:leng
24     m(n)=sum( chebfun(@(x) x.^n .*q(x),[0 1], 'splitting', 'on'));
25     mu(n)=sum( chebfun(@(x) x.^n .*p_0(x),[0 1], 'splitting', 'on'));
26 end
27 f=beta./(1-beta).* mu;
28 for n=1:leng
29     u(n)=dot(f(1:n-1),u(n-1:-1:1)); % definizione ricorsiva di u_n
```

```

29 end
30
31 % IPOTESI 2
32 plot(2:leng,mu(2:leng)./mu(1:leng-1))
33 title('verifica ipotesi: andamento del rapporto u_n/u_{n-1}')
34 print('ipotesi2','-djpeg'); % salva il grafico in formato jpg
35
36 % IPOTESI 3
37 figure;
38 plot(1:leng,m./mu)
39 title('rapporto m_n/mu_n al crescere di n')
40 print('ipotesi3','-djpeg');

```

Si nota in questo, come nei seguenti codici, che tutte le funzioni in uso sono state convertite in formato *chebfun*. Questo pacchetto aggiuntivo di Matlab converte le funzioni in un vettore che indica le interpolazioni in punti di Chebyshev della stessa. L'approssimazione a precisione di macchina avviene in genere con un numero non elevato di punti, rendendo la computazione veloce. Il vantaggio è un calcolo molto più preciso degli integrali, reso possibile dalla regolarità C^∞ dei polinomi e dalla conoscenza dei punti di interpolazione degli stessi. Il comando 'splitting','on' consente al programma di spezzare la singola interpolazione in interpolazioni su più intervalli, consentendo l'approssimazione in norma infinito nonostante eventuali punti di discontinuità della funzione(sebbene nel nostro caso non sia necessario).

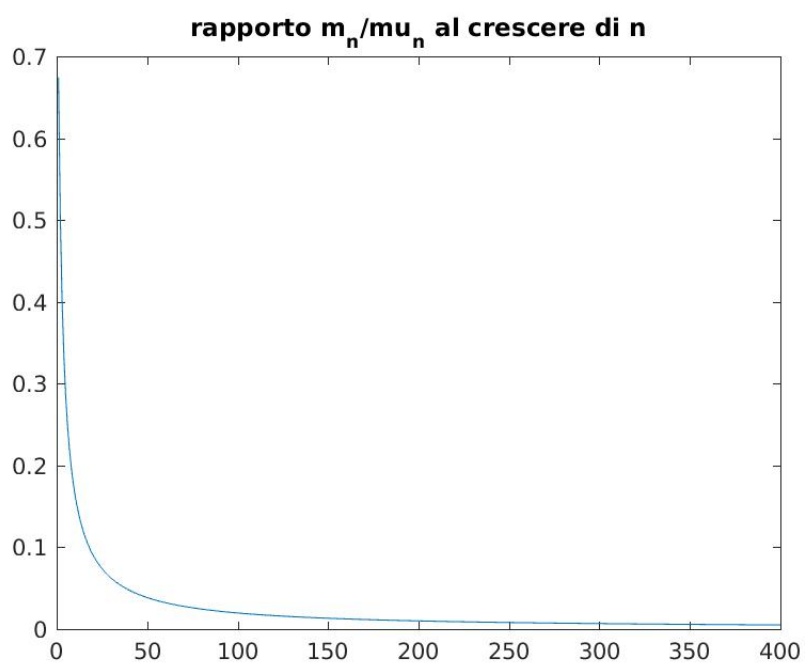
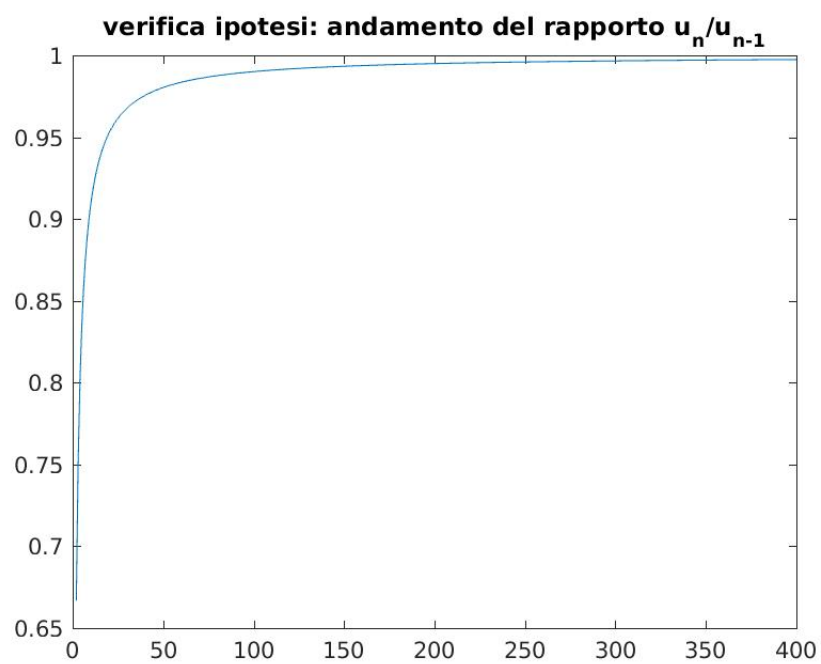
L'output dello script secondo gli input di cui sopra porta a:

```

1 >> crea_mondo
2
3 IPOTESI 1 VERIFICATA: 1

```

e ai grafici, dai quali si evince che anche le ipotesi 2 e 3 sono verificate:



2.2 Simulazione dell'evoluzione

Verificate le ipotesi si può passare alla computazione vera e propria, effettuata tramite il seguente script:

```

1 function evoluzione(p_0,q,beta,steps,alpha)
2
3 % INPUT: p_0,q: funzioni che danno la densità delle misure relative
4 %         beta: parametro che determina l'evoluzione
5 %         steps: numero di generazioni da considerare
6 %         alpha: parametro come in teorema su comportamento asintotico
7
8
9 asint=zeros(steps,2); % matrice con colonna 1: valori di p_n(1-x/n,1)
10 %                                % colonna 2: integrale a cui dovrebbe
11 %                                % convergere
12
13 p=@(x) beta.*q(x)./(1-x); % distribuzione limite teorico senza delta in 1
14
15 w0=sum(chebfun(@(x) x.*p_0(x),[0 1],'splitting','on'));
16 p_prec=@(x) (1-beta)./(w0.*x.*p_0(x)+beta.*q(x));
17
18
19 xsup=10;
20
21
22 k=(1-sum(chebfun(p,[0 1],'splitting','on')))/gamma(alpha).*integral(@(y) y
23     .^(alpha-1).*exp(-y),0,xsup);
24
25 asint(1,:)=sum(chebfun(p_prec,[1-xsup 1],'splitting','on')) k];
26
27 figure; fplot(p,[0 1]);
28 axis([0 1 0 2]) % impone i limiti di grandezza degli assi
29 title('funzioni di densità delle generazioni e del limite')
30
31 hold on
32 for n=2:steps
33     w=sum(chebfun(@(x) x.*p_prec(x),[0 1],'splitting','on'));
34     p_new=@(x) (1-beta).*(x.*p_prec(x)./w + beta.*q(x));
35     if rem(n,50)==0 % plotto una generazione ogni 50
36         fplot(p_new,[0 1]);
37     end
38     % per lo stesso motivo di prima, preferisco integrare una funzione
39     % chebfun e memorizzare in asint il valore
40     pcheb=chebfun(p_new,[1-xsup./n 1],'splitting','on');
41     asint(n,:)=sum(pcheb) k];
42     p_prec=p_new;
43 end
44 hold off
45 print('densita_limite','-djpeg');
46
47 figure; plot(1:steps,asint(:,1),'k',1:steps,asint(:,2),'b')
48 axis([0 steps asint(1,2)-0.1 asint(1,2)+0.1]);
49 title('andamento dei valori integrali limite')
50 print('integrali_limite','-djpeg');
51
52 asint

```

Si vede che gli steps discreti di evoluzione sono stati effettuati come iterazioni sulle funzioni di densità in formato di funzione Matlab, che sono poi state convertite in formato *chebfun*. Il vantaggio di questa operazione e del relativo costo computazionale è quello di una miglior gestione delle eventuali discontinuità nella nuova funzione di densità in

```

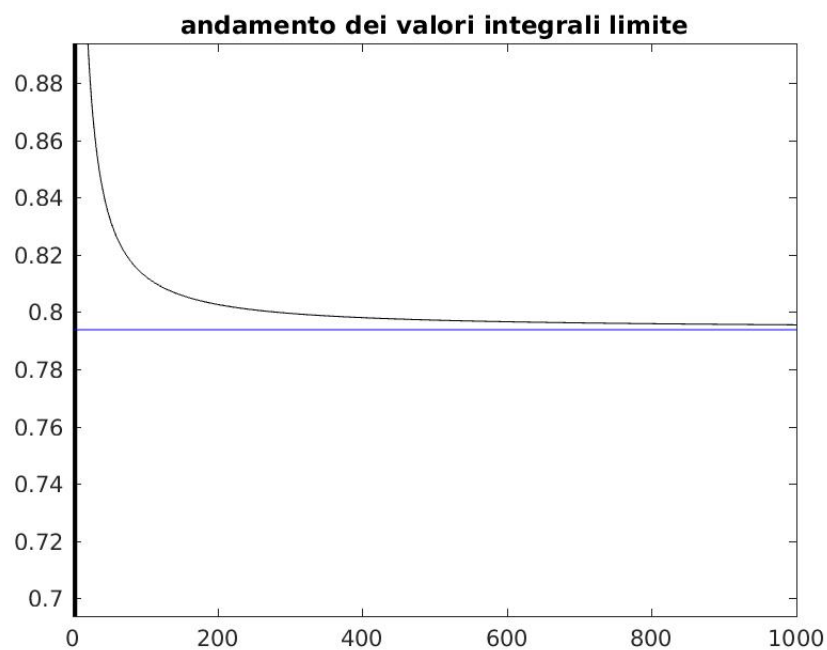
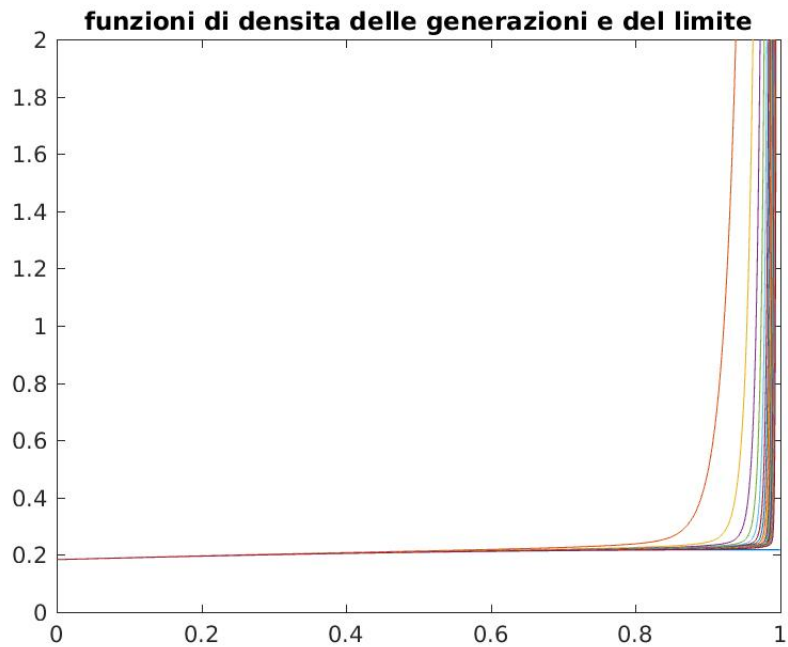
1 p_new=@(x) (1-beta).*(x.*p_prec(x)./w + beta.*q(x));

```

tramite funzioni matlab, e, come già accennato, di un calcolo più preciso sugli integrali tramite *chebfun* in

```
1 w= sum(chebfun(@(x) x.*p_prec(x),[0 1], 'splitting', 'on'));
2 ...
3 asint(n,:)=[sum(pcheb) k];
```

Il risultato di 1000 steps di evoluzione porta ai seguenti plots, che descrivono rispettivamente i grafici delle funzioni densità, stampata una ogni 50, e i valori a confronto degli integrali numerici a destra e sinistra in (1.16) (nel caso $x = 10$)



2.3 Osservazioni sulla simulazione

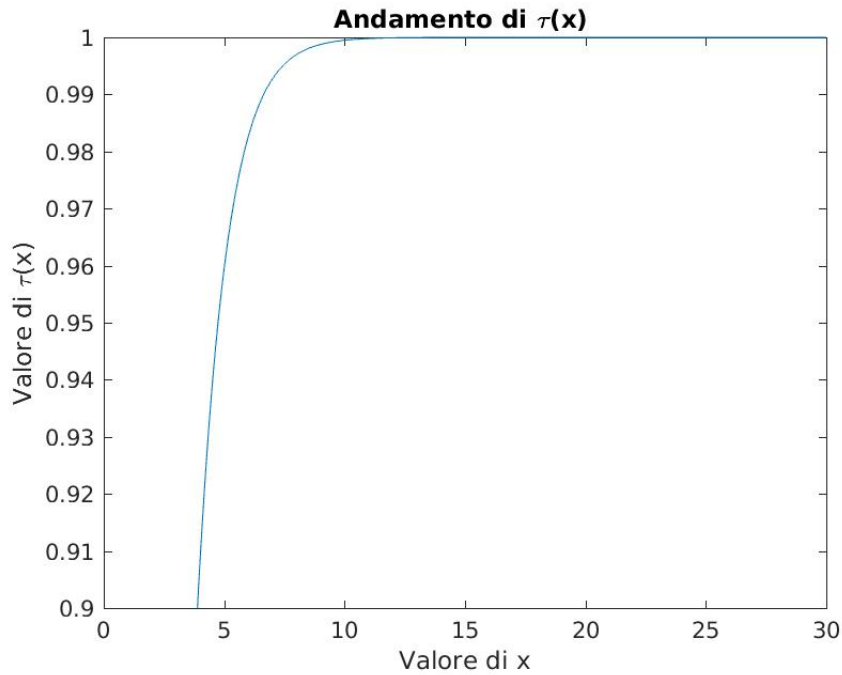
Come previsto dai risultati teorici, i grafici delle densità mostrano un'accumulazione sul valore massimo 1: quella ottenuta é la rappresentazione grafica dell'avvicinamento alla misura di dirac sul punto stesso, che é intuitivamente detta avere densità "infinita" in 1.

Va però osservato che, nonostante la prevista condensazione nel punto di massimo adattamento, la massa non si concentra totalmente lí: il peso dell'atomo si avvicina al valore $\gamma(\beta)$ e la restante $1 - \gamma(\beta)$ rimane distribuita sull'intervallo $[0, 1)$.

Si conferma altresí la tendenza descritta dal teorema (1.7), come visto nel secondo grafico. É da notare la relazione tra il termine

$$\frac{\gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

e il valore $\gamma(\beta)$: il valore $\tau(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x y^{\alpha-1} e^{-y} dy$ tende molto rapidamente a 1 per x alti



Questo fatto funge da ulteriore conferma sulla dimensione $\gamma(\beta)$ del condensato.

3 Dimostrazioni

3.1 Proposizione 1.2

Dimostrazione. Per (1.4) basta considerare (1.3), moltiplicare per z^n e sommare su tutti gli $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} W_n z^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(z^n \sum_{r=1}^{n-1} W_{n-r} (1-\beta)^{r-1} \beta \mu_r + z^n (1-\beta)^{n-1} m_n \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n (1-\beta)^{n-1} m_n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(z^n \sum_{r=1}^{n-1} W_{n-r} (1-\beta)^{r-1} \beta \mu_r \right) \end{aligned}$$

Il secondo addendo si può scrivere nel seguente modo

$$\begin{aligned} &\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=r+1}^{\infty} z^n W_{n-r} (1-\beta)^{r-1} \beta \mu_r \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \left((1-\beta)^{r-1} \beta \mu_r \sum_{n=r+1}^{\infty} z^n W_{n-r} \right) \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \left((1-\beta)^{r-1} \beta \mu_r \sum_{n=1}^{\infty} W_n z^{n+r} \right) \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} ((1-\beta)^{r-1} \beta \mu_r z^r) \sum_{n=1}^{\infty} W_n z^n \end{aligned}$$

da cui (1.4).

Per la formulazione equivalente (1.5) sostituendo nella parte destra di (1.4) le definizioni di m_n e μ_n si ottiene

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \left((1-\beta)^{n-1} z^n \int x^n p_0(dx) \right) \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} (1-\beta)^{n-1} \beta z^n \int x^n q(dx) \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{1-\beta} \int \sum_{n=1}^{\infty} (zx(1-\beta))^n p_0(dx) \left(1 - \frac{\beta}{1-\beta} \int \sum_{n=1}^{\infty} (zx(1-\beta))^n q(dx) \right)^{-1} \end{aligned}$$

sapendo che $x, z, 1-\beta$ sono tutti minori di 1, la sommatoria converge alla somma di una serie di potenze, da cui la tesi. \square

3.2 Proposizione 1.3

Dimostrazione. Dimostriamo che la sequenza (u_n) è completamente monotona quando lo è (f_n) .

Prima di tutto dimostriamolo nel caso in cui f_n sia del tipo

$$f_n = \sum_{j=1}^k a_j x_j^n \quad (3.1)$$

con

$$k \geq 1 \quad a_j > 0, \quad 0 < x_j < 1, \quad \sum_{j=1}^k a_j x_j (1 - x_j)^{-1} \leq 1$$

Introduciamo

$$\begin{aligned} U(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n \right)^{-1} \\ &= \left(1 - \sum_{j=1}^k a_j x_j z (1 - x_j z)^{-1} \right)^{-1} \end{aligned}$$

Dove la prima uguaglianza si verifica usando la definizione di u_n poiché

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^n f_r u_{n-r} z^n = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=r}^{\infty} f_r u_{n-r} z^n \\ &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} f_r z^r \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = \sum_{r=1}^{\infty} f_r z^r \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n + 1 \end{aligned}$$

e la seconda si ottiene da

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n &= \sum_{n=1}^{\infty} a_j x_j^n z^n = \sum_{j=1}^k a_j \sum_{n=1}^{\infty} x_j^n z^n \\ &= \sum_{j=1}^k a_j \left(\frac{1}{1 - x_j z} - 1 \right) = \sum_{j=1}^k \frac{a_j x_j}{1 - x_j z} z \end{aligned}$$

Perciò $U(z)$ é funzione razionale di grado k con poli ai punti z che soddisfano

$$\sum_{j=1}^k a_j x_j z (-x_j z)^{-1} = 1 \quad (3.2)$$

equazione la cui parte immaginaria é

$$\Im(z) \sum_{j=1}^k a_j x_j |1 - x_j z|^{-2} = 0$$

Perció gli unici poli sono reali. Da (3.2) si vede che necessariamente essi sono > 0 e poiché $u_n \leq 1$ essi devono essere in $[1, +\infty)$ (altrimenti $U(z)$ converge). Se ξ é una di queste radici vale

$$\lim_{z \rightarrow \xi} (z - \xi)U(z) = - \sum_{j=1}^k a_j x_j (1 - x_j \xi)^{-2} < 0$$

Perció le radici di (3.2) sono tutti poli semplici e perciò necessariamente k punti $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$. Quindi $U(z)$ ammette scrittura nella forma

$$U(z) = \sum_{j=1}^k \frac{b_j}{\xi_j - z} \quad b_j > 0, \xi_j > 1$$

Quindi

$$u_n = \sum_{j=1}^k b_j \xi_j^{-n-1}$$

che é una successione completamente monotona.

Si completa la dimostrazione nel caso generale di (1.8) osservando che ogni funzione f_n di questo tipo si puó scrivere come limite

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f_n(l)$$

con $f_n(l)$ soddisfacente (3.1). La successione di rinnovamento $(u_n(l))_n$ corrispondente a $(f_n(l))_n$ é completamente monotona e lo é perciò il limite

$$u_n = \lim_{l \rightarrow \infty} u_n(l)$$

Per mostrare che quando (u_n) é completamente monotona la successione $\frac{u_n}{u_{(n-1)}}$ é crescente, basta utilizzare le proposizioni in appendice "successioni completamente monotone" e il fatto che quando $\log(E[X^r])$ é convesso in r vale

$$\log(E[X^n]) - \log(E[X^{n-1}]) \leq \log(E[X^{n+1}]) - \log(E[X^n])$$

□

3.3 Proposizione 1.5

Dimostrazione. Per quanto mostrato in proposizione 1.3, (u_n) é una sequenza completamente monotona e $u_0 = 1$. Allora vale (vedi appendice) che (u_n) é la successione dei momenti di una

certa misura di probabilità k su $[0, 1]$. Allora, detta λ la misura prodotto di k con p_0 , vale

$$m_r u_{n-r} = \int x^{n-r} y^r \lambda(dx, dy)$$

Perciò usando la definizione di v_n e sommando per $r = 1, \dots, n$ si ottiene

$$v_n = \int g_n(x, y) \lambda(dx, dy)$$

dove

$$g_n(x, y) := \begin{cases} \frac{x^n - y^n}{x - y} y & \text{se } x \neq y \\ nx^n & \text{se } x = y \end{cases}$$

- Dimostriamo che $\limsup(v_n/v_{n-1}) \leq 1$. Per farlo basta mostrare che

$$(n-1)g_n(x, y) \leq ng_{n-1}(x, y)$$

(perché poi si ha $(n-1)v_n \leq nv_{n-1}$).

Se $x = y$ ciò si mostra facilmente usando il fatto che $x \leq 1$.

Se $x \neq y$, nel caso $x > y$ é equivalente a

$$x^{n-1}((n-1)x - n) - y^{n-1}((n-1)x - n) \leq 0$$

che é vero per decrescenza di $z^{n-1}((n-1)z - n)$ in $[0, 1]$. Per $x < y$ la dimostrazione é uguale.

- Dimostriamo che $\liminf(v_n/v_{n-1}) \geq 1$. Preso $\alpha \in (0, 1)$, si mostra che per $\max\{x, y\} \geq \alpha$ vale

$$g_n(x, y) \geq \alpha g_{n-1}(x, y)$$

Allora:

$$v_n \geq \int_{\max(x, y) \geq \alpha} g_n(x, y) \lambda(dx, dy) \geq \alpha \int_{\max(x, y) \geq \alpha} g_{n-1}(x, y) \lambda(dx, dy)$$

$$\alpha v_{n-1} - \alpha \int_{x < \alpha, y < \alpha} g_{n-1}(x, y) \lambda(dx, dy)$$

si può vedere $g_{n-1} = \sum_{r=1}^{n-1} x^{n-1-r} y^r$ perciò

$$= \alpha v_{n-1} - \alpha \int_{x < \alpha, y < \alpha} \sum_{r=1}^{n-1} x^{n-1-r} y^r \lambda(dx, dy)$$

$$\geq \alpha v_{n-1} - \alpha \int_{x < \alpha, y < \alpha} \sum_{r=1}^{n-1} \alpha^{n-1} \lambda(dx, dy)$$

$$\geq \alpha v_{n-1} - (n-1)\alpha^n$$

per cui

$$\frac{v_n}{v_{n-1}} \geq \alpha - \frac{(n-1)\alpha^n}{v_{n-1}} \geq \alpha \frac{(n-1)\alpha^n}{m_1 u_{n-2}} \rightarrow \alpha$$

dove il limite é giustificato dal fatto che per (1.9) definitivamente per $n \geq \bar{n}$ il rapporto u_{n-1}/u_n é minore di $(1+\epsilon)$ tale che $(1+\epsilon)\alpha < 1$ e si può scrivere

$$\frac{(n-1)\alpha^n}{u_{n-2}} = \frac{n\alpha^n}{u_1} \frac{u_{n-3}}{u_{n-2}} \frac{u_{n-4}}{u_{n-3}} \dots \frac{u_2}{u_1}$$

Quindi $\liminf v_n/v_{n-1} \geq \alpha$ per ogni $\alpha \in (0, 1)$.

Abbinando i due punti si ottiene la tesi, $\lim v_n/v_{n-1} = 1$ □

3.4 Teorema 1.6

Dimostrazione. Cominciamo con l'osservare che $\forall x < 1 \in [0, \xi]$ vale

$$\frac{(1-\beta)^n x^n}{W_n} \longrightarrow 0 \quad (3.3)$$

Ciò si mostra usando la definizione di W_n e (1.11), perché vale

$$\forall \epsilon > 0 \exists \bar{n} : n \geq \bar{n} \implies \frac{1-\beta}{w_n} \leq (1+\epsilon)$$

perció

$$\begin{aligned} \frac{(1-\beta)^n x^n}{W_n} &= \frac{(1-\beta)^{\bar{n}} x^{\bar{n}}}{w_0 w_1 \dots w_{\bar{n}-1}} \frac{(1-\beta)^{n-\bar{n}-1} x^{n-\bar{n}-1}}{w_{\bar{n}} w_{\bar{n}+1} \dots w_{n-\bar{n}-1}} \\ &\leq \frac{(1-\beta)^{\bar{n}} x^{\bar{n}}}{w_0 w_1 \dots w_{\bar{n}-1}} (1+\epsilon)^{n-\bar{n}-1} x^{n-\bar{n}-1} = \frac{(1-\beta)^{\bar{n}} x^{\bar{n}}}{w_0 w_1 \dots w_{\bar{n}-1}} ((1+\epsilon)x)^{n-\bar{n}-1} \end{aligned}$$

e scegliendo ϵ abbastanza piccolo che $(1+\epsilon)x \leq (1+\epsilon)\xi < 1$ si ha che

$$((1+\epsilon)x)^{n-\bar{n}-1} \longrightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty$$

Mostriamo ora la **convergenza forte** su $[0, \xi]$ usando la definizione. Sia A insieme misurabile di $[0, \xi]$. Integrando la relazione (1.2) su A si ottiene

$$\int_A p_n(dx) = \int_A \sum_{r=0}^{n-1} \frac{W_{n-r}}{W_n} (1-\beta)^r \beta x^r q(dx) + \int_A \frac{(1-\beta)^n}{W_n} x^n p_0(dx)$$

Per (3.3) il secondo addendo tende a 0. Per avere la tesi basta allora mostrare che

$$\lim_n \sum_{r=0}^n \frac{W_{n-r}}{W_n} (1-\beta)^r x^r = \frac{1}{1-x} \quad (3.4)$$

Vale dalla definizione di W_n

$$\sum_{r=0}^n \frac{W_{n-r}}{W_n} (1-\beta)^r x^r = \sum_{r=0}^n \frac{1}{w_{n-1}w_{n-2}\dots w_{n-r-1}} (1-\beta)^r x^r =$$

e per (1.11), fissato $\epsilon > 0$ qualunque, $\exists \bar{n} : n > \bar{n} \implies (1-\beta)/w_n \in (1-\epsilon, 1+\epsilon)$. Sapendo che $n-r-1 \leq \bar{n} \iff r \leq n-\bar{n}-1$

$$= \sum_{r=0}^{n-\bar{n}-1} \frac{1}{w_{n-1}w_{n-2}\dots w_{n-r-1}} (1-\beta)^r x^r + \sum_{r=n-\bar{n}}^n \frac{1}{w_{n-1}w_{n-2}\dots w_{n-r-1}} (1-\beta)^r x^r$$

- Il secondo addendo equivale a

$$\sum_{j=0}^{\bar{n}} (1-\beta)^{j+n-\bar{n}} x^{j+n-\bar{n}} \frac{W_{\bar{n}-j}}{W_n} = \frac{(1-\beta)^n x^n}{W_n} \sum_{j=0}^{\bar{n}} ((1-\beta)x)^{j-\bar{n}} W_{\bar{n}-j}$$

che per (3.3) tende a 0

- Il primo addendo vale

$$\sum_{r=0}^{n-\bar{n}-1} \frac{1}{w_{n-1}w_{n-2}\dots w_{n-r-1}} (1-\beta)^r x^r = \sum_{r=0}^{n-\bar{n}-1} \frac{1-\beta}{w_{n-1}} \dots \frac{1-\beta}{w_{n-r-1}} x^r$$

che é:

-minore o uguale di

$$\sum_{r=0}^{n-\bar{n}-1} (1+\epsilon)^r x^r$$

-maggiore o uguale di

$$\sum_{r=0}^{n-\bar{n}-1} (1-\epsilon)^r x^r$$

cioé

$$\sum_{r=0}^{n-\bar{n}-1} (1-\epsilon)^r x^r \leq \sum_{r=0}^{n-\bar{n}-1} \frac{1}{w_{n-1}w_{n-2}\dots w_{n-r-1}} (1-\beta)^r x^r \leq \sum_{r=0}^{n-\bar{n}-1} (1+\epsilon)^r x^r$$

e passando al limite per $n \rightarrow \infty$ si ottiene (scegliendo ϵ abbastanza piccolo)

$$\frac{1}{1 - (1 - \epsilon)x} \leq \lim_n \sum_{r=0}^{n-\bar{n}-1} \frac{(1 - \beta)^r x^r}{w_{n-1} w_{n-2} \dots w_{n-r-1}} \leq \frac{1}{1 - (1 + \epsilon)x}$$

Essendo $\epsilon > 0$ arbitrariamente piccolo vale

$$\lim_n \sum_{r=0}^{n-\bar{n}-1} \frac{1}{w_{n-1} w_{n-2} \dots w_{n-r-1}} (1 - \beta)^r x^r = \frac{1}{1 - x}$$

da cui (3.4) e perciò la tesi (1.12)

Dobbiamo ora mostrare la **convergenza debole** a (1.13) su tutto $[0, 1]$. Dato che su $[0, 1)$ c'è convergenza forte a \tilde{p} si può avere massa concentrata solo sul punto di massimo adattamento 1. In tal caso si avrebbe una misura limite

$$p(dx) := \frac{\beta q(dx)}{1 - x} + \gamma \delta_1(dx)$$

con γ da determinarsi. Basta imporre che $\int p(dx) = 1$ per ottenere l'espressione (1.13), cioè $\gamma(\beta) = 1 - \int \frac{\beta q(dx)}{1 - x}$.

Mostriamo la convergenza a questa candidata misura usando il punto *vi* del teorema di Portemanteau (vedi appendice): ogni misurabile $A \subseteq [0, 1]$ con $p(\partial A) = 0$ necessariamente ha frontiera non contenente 1, che è un atomo con misura non nulla per p . Perciò A è un misurabile contenuto in $[0, 1 - \epsilon]$, $\exists \epsilon > 0$. Ivi c'è convergenza forte, da cui $\lim_n p_n(A) = p(A)$.

□

3.5 Teorema 1.7

Lemma 3.1. *Se vale*

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{q(1 - h, 1)}{h^\alpha} = k$$

allora

$$\mu_n := \int_0^1 x^n q(dx) \sim k \Gamma(\alpha + 1) n^{-\alpha}$$

Dimostrazione. Sia $\epsilon > 0$ arbitrario fissato. L'ipotesi implica che $\exists \bar{h} > 0$ tale che per ogni $0 < h < \bar{h}$ valga

$$(k - \epsilon)h^\alpha < q(1 - h, 1) < (k + \epsilon)h^\alpha$$

Sia $M(dx)$ la misura assolutamente continua su $[1 - \bar{h}, 1]$ con densità

$\alpha(1 - x)^{\alpha-1}$. Vale $M(1 - h, 1) = h^\alpha$ perciò

$$(k - \epsilon)M(1 - h) < q(1 - h, 1) < M(1 - h, 1)(k + \epsilon)$$

Per crescita della funzione x^n esiste una successione di funzioni semplici $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ convergenti puntualmente dal basso in $[1 - \bar{h}, 1]$ del tipo:

$$\varphi_m(x) := \sum_{k=1}^{n_m} a_k \mathbf{1}_{[y_k, 1]}(x) \xrightarrow{m} x^n$$

con $(1 - \bar{h}) \leq y_1 < y_2 < \dots < y_{n_m}$.

Stimiamo allora il seguente integrale:

$$\begin{aligned} \int_{1-h}^1 x^n q(dx) &= \int_{1-h}^1 \lim_m \varphi_m(x) q(dx) = \lim_m \int_{1-h}^1 \varphi_m(x) q(dx) \\ &= \lim_m \sum_{k=1}^{n_m} \int_{1-h}^1 a_k \mathbf{1}_{[y_k, 1]} q(dx) = \lim_m \sum_{k=1}^{n_m} a_k q(y_k, 1) \\ &\leq \lim_m \sum_{k=1}^{n_m} a_k (k + \epsilon) M(y_k, 1) = \lim_m (k + \epsilon) \sum_{k=0}^{n_m} \int_{1-h}^1 a_k \alpha \mathbf{1}_{[y_k, 1]}(x) (1-x)^{\alpha-1} dx \\ &= (k + \epsilon) \int_{1-h}^1 \alpha x^n (1-x)^{\alpha-1} dx \leq \\ &\text{usando che } (1-x) \leq -\log(x) \\ &\leq \alpha(k + \epsilon) \int_{1-h}^1 (-\log x)^{\alpha-1} x^n dx = \end{aligned}$$

cambiando variabile $x = e^{-t}$

$$\begin{aligned} &= \alpha(k + \epsilon) \int_0^{-\log(1-h)} t^{\alpha-1} e^{-(n+1)t} dt = \alpha \frac{(k + \epsilon)}{(n+1)^\alpha} \int_0^{-\log(1-h)} (n+1)^\alpha t^{\alpha-1} e^{-(n+1)t} dt \\ &\leq \alpha \frac{(k + \epsilon)}{(n+1)^\alpha} \int_0^\infty (n+1)^\alpha t^{\alpha-1} e^{-(n+1)t} dt = \frac{(k + \epsilon)}{(n+1)^\alpha} \alpha \Gamma(\alpha) = (1 + \epsilon) \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(n+1)^\alpha} \end{aligned}$$

Si mostra similmente, sapendo che localmente a $x = 1$ vale $(1 - x) \geq (-\log(x))(k - \epsilon)$, la disugugaglianza

$$(k - \epsilon) \frac{(1 - \epsilon)^\alpha}{(n+1)^\alpha} \Gamma(\alpha + 1) \leq \int_{1-h}^1 x^n q(dx)$$

. Dato che per ogni $h > 0$ vale $\int_0^{1-h} n^\alpha x^n q(dx) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, allora

$$\mu_n = \int_0^1 x^n q(dx) = \int_0^{1-h} x^n q(dx) + \int_{1-h}^1 x^n q(dx) \sim k\Gamma(\alpha+1)(n+1)^{-\alpha} \sim k\Gamma(\alpha+1)n^{-\alpha}$$

□

Dimostrazione. Dimostriamo ora il teorema 1.7. Per il lemma 3.1

$$\mu_n = \int x^n q(dx) \sim k\Gamma(\alpha-1)n^{-\alpha}$$

Inoltre si evince dalla definizione di $\gamma(\beta)$ che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^n q(dx) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x^n q(dx) = \int_0^1 \frac{q(dx)}{1-x} = \frac{1}{\beta}(1-\gamma(\beta)) \quad (3.5)$$

Da (1.2)

$$p_n(dx) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{W_{n-r}}{W_n} (1-\beta)^r \beta x^r q(dx) + \frac{1}{W_n} (1-\beta)^n x^n p_0(dx) \quad (3.6)$$

Introduciamo il seguente lemma

Lemma 3.2. *Detto*

$$c := \frac{k\beta}{\gamma(\beta)} \Gamma(\alpha+1) \sum_{k=1}^{\infty} W_k (1-\beta)^{1-k}$$

vale la relazione di asintoticit 

$$W_n \sim cn^{-\alpha}(1-\beta)^{n-1}$$

Dimostrazione. Integrando (3.6) su $[0, 1]$ si ottiene, dalla definizione di μ_n e m_n e sapendo che q, p_n sono misure in $[0, 1]$,

$$W_n = \sum_{r=0}^{n-1} W_{n-r} (1-\beta)^r \beta \mu_r + (1-\beta)^n m_n$$

perci  $u_n := W_n(1-\beta)^{1-n}$ soddisfa l'equazione di rinnovamento

$$u_n = \frac{\beta}{1-\beta} \sum_{r=1}^{n-1} u_{n-r} \mu_r + m_n$$

Possiamo utilizzare il teorema di rinnovamento perch  da (3.5)

$$\frac{\beta}{1-\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n = 1 - \frac{\gamma(\beta)}{1-\beta}, \text{ perci }$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} m_n}{1 - \frac{\beta}{1-\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n} = \frac{1-\beta}{\gamma(\beta)} \sum_{n=1}^{\infty} m_n < \infty$$

La convergenza della serie a ultimo termine deriva dal fatto che $\lim_n \frac{m_n}{\mu_n} = 0$ implica che m_n é definitivamente piú piccolo di μ_n , la cui serie converge per (3.5).

Dimostriamo l'esistenza di una successione $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che per tutti gli $n \geq 1$ valga $u_n \leq c_n n^{-\alpha}$. Fissati $\delta > 0$ e $0 < \epsilon < \eta < 1$ per asintoticita di μ_r posso scegliere n tale che $\eta n \leq n - 1$ e che

$$\forall r \geq (1 - \eta)n \quad \mu_r \leq (\Gamma(\alpha + 1)k + \delta)r^{-\alpha} \quad (3.7)$$

Troviamo ora per induzione i c_n . Ovviamente basta scegliere $c_1 := u_1$. Supponiamo che esistano c_1, c_2, \dots, c_{n-1} . Allora per $r = 1, \dots, n - 1$ vale

$$u_r \mu_{n-r} \leq \begin{cases} (1 - \epsilon)^{-\alpha} (\Gamma(\alpha + 1)k + \delta) n^{-\alpha} u_r & \text{se } r \leq \epsilon n \\ c_r (\Gamma(\alpha + 1)k + \delta) r^{-\alpha} (n - r)^{-\alpha} & \text{se } \epsilon \leq r \leq \eta n \\ c_r \eta^{-\alpha} n^{-\alpha} \mu_{n-r} & \text{se } \eta n \leq r \leq n - 1 \end{cases}$$

dove:

- nel primo caso si usa (3.7) su μ_{n-r} poiche' $r \leq \epsilon n \implies (n - r) \geq n(1 - \epsilon) \geq n(1 - \eta)$
- nel secondo caso uso l'ipotesi induttiva su u_r poiché $\epsilon \leq r \leq \eta n \leq (n - 1)$, e ancora su μ_{n-r} uso (3.7) perche' $r \leq \eta n \implies (n - r) \geq (n - \eta n) = n(1 - \eta)$
- nel terzo caso si applica l'ipotesi induttiva su u_r perche' $\epsilon n \leq \eta n \leq r \leq (n - 1)$

Usando queste disuguaglianze e l'equazione di rinnovamento $u_n = \frac{\beta}{1-\beta} \sum_{r=1}^{n-1} u_n \mu_{n-r} + m_n$ si ottiene

$$\begin{aligned}
u_n &\leq (1-\epsilon)^{-\alpha} \frac{\beta}{1-\beta} (\Gamma(\alpha+1)k + \delta) n^{-\alpha} \sum_{r=1}^{n-1} u_r \\
&\quad + \frac{\beta}{1-\beta} (\Gamma(\alpha+1)k + \delta) \sum_{r=\lfloor \epsilon n \rfloor + 1}^{\lfloor \eta n \rfloor} r^{-\alpha} (n-r)^{-\alpha} \\
&\quad + \frac{\beta}{1-\beta} \eta^{-\alpha} n^{-\alpha} \sum_{r=\lfloor \eta n \rfloor + 1}^{n-1} c_r \mu_{n-r} + m_n \\
&\leq (1-\epsilon)^{-\alpha} \frac{\beta}{1-\beta} (\Gamma(\alpha+1)k + \delta) \left(\sum_{r=1}^{\infty} u_r \right) n^{-\alpha} \\
&\quad + \frac{\beta}{1-\beta} (\Gamma(\alpha+1)k + \delta) \left(\frac{1}{n} \sum_{r=\lfloor \epsilon n \rfloor + 1}^{\lfloor \eta n \rfloor} c_r \left(\frac{r}{n} \right)^{-\alpha} \left(1 - \frac{r}{n} \right)^{-\alpha} \right) n^{1-2\alpha} \\
&\quad + \frac{\beta}{1-\beta} \eta^{-\alpha} \left(\sum_{r=\lfloor \eta n \rfloor + 1}^{n-1} c_r \mu_{n-r} \right) n^{-\alpha} + m_n := c_n n^{-\alpha}
\end{aligned}$$

Da cui l'esistenza della successione (c_n) .

Sappiamo che $m_n n^\alpha = \int_0^1 x^n n^\alpha \rightarrow 0$. Inoltre il secondo termine nella somma di cui sopra é limitato da un multiplo di

$$n^{1-2\alpha} \int_{\epsilon}^{\eta} r^{-\alpha} (1-r)^{-\alpha} dr \ll n^{-\alpha}$$

perché $\sum_{r=\lfloor \epsilon n \rfloor + 1}^{\lfloor \eta n \rfloor} \left(\frac{r}{n} \right)^{-\alpha} \left(1 - \frac{r}{n} \right)^{-\alpha}$ é la valutazione di una funzione semplice sottostante l'integranda $r^{-\alpha} (1-r)^{-\alpha}$. Si vede perciò che mandando $n \rightarrow \infty$ si ottiene che il limite $c^*(\epsilon, \delta, \eta)$ delle (c_n) é la soluzione unica di

$$c^* = (1-\epsilon)^{-\alpha} \frac{\beta}{1-\beta} (\Gamma(\alpha+1)k + \delta) \sum_{r=1}^{\infty} u_r + c^* \eta^{-\alpha} \frac{\beta}{1-\beta} \sum_{r=1}^{\infty} \mu_r$$

(L'ultimo termine dell'equazione deriva dal fatto che

$$S_n := \sum_{r=\lfloor \eta n \rfloor + 1}^{n-1} c_r \mu_{n-r} = \sum_{r=1}^{n-\lfloor \eta n \rfloor - 1} c_{n-r} \mu_r = c_{n-1} \mu_1 + c_{n-2} \mu_2 + \dots + c_{n-\lfloor \eta n \rfloor - 1} \mu_{\lfloor \eta n \rfloor - 1}$$

che implica

$$c^* \sum_{r=1}^{\infty} \mu_r \leftarrow \left(\min_{\{n-1, \dots, \lfloor \eta n \rfloor\}} c_j \right) \sum_{r=1}^{n-\lfloor \eta n \rfloor-1} \mu_r \leq S_n$$

$$S_n \leq \left(\max_{\{n-1, \dots, \lfloor \eta n \rfloor\}} c_j \right) \sum_{r=1}^{n-\lfloor \eta n \rfloor-1} \mu_r \rightarrow c^* \sum_{r=1}^{\infty} \mu_r$$

poiché $n - \lfloor \eta n \rfloor - 1 \geq n - \eta n - 1 = n(1 - \eta) - 1 \rightarrow \infty$).

Usando che $\beta \sum_{r=1}^{\infty} \mu_r = 1 - \gamma(\beta) - \beta$ e calcolando il limite per $\epsilon, \delta \searrow 0$, $\eta \nearrow 1$, $c^*(\epsilon, \delta, \eta)$ converge a

$$c = \frac{k\beta}{\gamma(\beta)} \Gamma(\alpha + 1) \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k = \frac{k\beta}{\gamma(\beta)} \Gamma(\alpha + 1) \sum_{k=1}^{\infty} W_k (1 - \beta)^{1-k}$$

Questo ragionamento porta, per definizione della successione (c_n) , a una limitazione inferiore per l'asintoticità. Una limitazione superiore si ricava similmente. \square

Completiamo la dimostrazione del teorema. Usando (3.6) e (1.2) si ottiene

$$p_n(1 - \frac{x}{n}, 1) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{W_{n-r}}{W_n} (1-\beta)^r \beta \int_{1-\frac{x}{n}}^1 y^r q(dy) + \frac{1}{W_n} (1-\beta)^n \int_{1-\frac{x}{n}}^1 y^n p_0(dy)$$

Si nota che

- Usando il lemma 3.2, il secondo addendo é asintoticamente nullo in quanto

$$\frac{1}{W_n} (1-\beta)^n \int_{1-\frac{x}{n}}^1 y^n p_0(dy) \sim (1-\beta) \frac{m_n}{cn^{-\alpha}} \frac{\int_{1-\frac{x}{n}}^1 y^n p_0(dy)}{\int_0^1 y^r q(dy)} \leq \frac{1-\beta}{c} \frac{m_n}{n^{-\alpha}} \rightarrow 0$$

- Il primo addendo é asintoticamente

$$n^\alpha \sum_{r=0}^{n-1} W_{n-r} c^{-1} (1-\beta)^{1-n+r} \beta \int_{1-\frac{x}{n}}^1 y^r q(dy)$$

I termini con $r \leq n - nM^{1/\alpha}$, scegliendo M ed n abbastanza grandi, tendono a zero in quanto

$$n^\alpha \sum_{r=0}^{n-1} W_{n-r} \int_{1-\frac{x}{n}}^1 y^r q(dy) \leq n^\alpha q(1 - \frac{x}{n}, 1) \sum_{r=0}^{n-Mn^{1/\alpha}} W_{n-r} = n^\alpha q(1 - \frac{x}{n}, 1) \sum_{r=Mn^{1/\alpha}}^n$$

che a meno di multipli per asintoticita' di W_n é minore di

$$\begin{aligned} n^\alpha q(1 - \frac{x}{n}, 1) \sum_{r=Mn^{1/\alpha}}^n r^{-\alpha} &\leq n^\alpha q(1 - \frac{x}{n}, 1) \sum_{r=Mn^{1/\alpha}}^n (Mn^{1/\alpha})^{-\alpha} \\ &= (\frac{n}{Mn^{1/\alpha}})^\alpha q(1 - \frac{x}{n}, 1) (n - Mn^{1/\alpha}) \end{aligned}$$

che é infinitesimo per l'ipotesi (1.15).

Con argomenti simili a quelli nella dimostrazione del lemma 3.1 si ricava che

$$\int_{1-x/n}^1 y^{sn} q(dy) \sim \alpha n^\alpha k \int_0^x a^{\alpha-1} e^{-as} da$$

e perciò per i rimanenti termini con $r > n - Mn^{1/\alpha}$ si ottiene che

$$k\alpha\beta c^{-1} \left(\sum_{m=1}^{\infty} W_m (1 - \beta)^{1-m} \right) \int_0^x a^{\alpha-1} e^{-a} da$$

Usando la definizione di c , come da lemma (3.2), si ha che

$$\alpha\beta c^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} W_m (1 - \beta)^{1-m} = \frac{\gamma(\beta)}{k\Gamma(\alpha)}$$

da cui la tesi.

□

4 Appendice

4.1 Teorema di rinnovamento

Teorema (Teorema di rinnovamento [3]). *Siano $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ due successioni numeriche tali che:*

$$a_n \geq 0 \quad \forall n \quad a := \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$$

$$b_n \geq 0 \quad \forall n \quad b := \sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$$

e sia $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la successione convoluzione definita ricorsivamente da

$$v_n = b_n + a_1 v_{n-1} + a_2 v_{n-2} + \cdots + a_n v_0$$

Se $\{a_n\}$ non é periodica e $a < 1$ allora $v_n \rightarrow 0$ e vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n = \frac{b}{1-a}$$

4.2 Successioni completamente monotone

Definizione 4.1. *Una successione $(a_n) \subset \mathbb{R}$ si dice **completamente monotona** se:*

$$(-1)^k \Delta^{(k)} a_n \geq 0 \quad \forall k, n \in \mathbb{N}$$

dove $\Delta^{(k)} a_n := \Delta^{(k-1)} a_{n+1} - \Delta^{(k-1)} a_n$ e $\Delta^{(0)} a_n := a_n$

Si può facilmente notare che una successione completamente monotona é in particolare decrescente. Inoltre esiste una caratterizzazione delle successioni completamente monotone:

Teorema 4.2. *Sia (a_n) una successione completamente monotona. Allora (a_n) é la successione dei momenti di una misura di probabilità su $[0, 1]$*

Per referenze si può consultare [5].

Teorema 4.3 (Convessità del valore atteso[6]). *Sia X variabile aleatoria in $L^s \cap L^r$. Allora $\log(E[|X|^r])$ é una funzione convessa in r , cioè $\forall \lambda \in [0, 1]$:*

$$\log(E[|X|^{\lambda r + (1-\lambda)s}]) \leq \lambda \log(E[|X|^r]) + (1-\lambda) \log(E[|X|^s])$$

4.3 Convergenza di misure

Introduciamo le nozioni di convergenza di misure utilizzate nel teorema finale della sezione 1.6.

Definizione 4.4. Sia (X, F) spazio misurabile. Diciamo che la successione di misure su X (μ_n) **converge fortemente** a μ se

$$\forall A \in F \quad \lim_n \mu_n(A) = \mu(A)$$

Se X é anche spazio metrico diciamo che (μ_n) **converge debolmente** a μ se

$$\forall f \in C_b(X) \quad \lim_n \int f d\mu_n = \int f d\mu$$

dove $C_b(X)$ é lo spazio delle funzioni continue e limitate su X .

Si verifica che la convergenza forte implica quella debole. Introduciamo infine una caratterizzazione della convergenza debole

Teorema 4.5 (Teorema di Portemanteau [4]). *Sia X spazio metrico $(\mu_n), \mu$ misure su X con $\mu_n(X), \mu(X) \leq 1$. TFAE:*

- (i) (μ_n) tende debolmente a μ*
- (ii) $\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu$ per tutte le f limitate e lipschitziane*
- (iii) $\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu$ per tutte le f tali che $\mu(U_f) = 0$, dove U_f insieme dei punti di discontinuit  di f*
- (iv) $\liminf_n \mu_n(C) \geq \mu(C)$ e $\limsup_n \mu_n(C) \leq \mu(C)$ per ogni $C \subset X$ chiuso*
- (v) $\liminf_n \mu_n(A) \geq \mu(A)$ e $\limsup_n \mu_n(A) \leq \mu(A)$ per ogni $A \subset X$ aperto*
- (vi) $\lim_n \mu_n(G) = \mu(G)$ per ogni misurabile G con $\mu(\partial G) = 0$*

Riferimenti bibliografici

- [1] Kingman J.F.C *A simple model for the balance between selection and mutation*, Journal of Applied Probability 15, 1-12, 1978
- [2] Dereich S, Mörters P *Emergence of condensation in Kingman's model of selection and mutation*, 27 Luglio 2012
- [3] Feller W. *An introduction to probability theory and its applications, Vol.1*, third edition, Wiley, 1968
- [4] Klenke A *Probability theory: a comprehensive course*, second edition, Springer London, 2013
- [5] Guo et al. *Advances in Difference Equations*, 2013:294
- [6] Dufour J-M *Properties of moments of random variables*, 13 gennaio 2015