赛区评阅编号（由赛区组委会填写）：

2020 年高教社杯全国大学生数学建模竞赛

承　诺　书

我们仔细阅读了《全国大学生数学建模竞赛章程》和《全国大学生数学建模竞赛参赛规则》（2019 年修订稿，以下简称为“竞赛章程和参赛规则”，可从全国大学生数学建模竞赛网站下载）。

我们完全清楚，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式，包括电话、电子邮件、“贴吧”、QQ 群、微信群等，与队外的任何人（包括指导教师）交流、讨论与赛题有关的问题；无论主动参与讨论还是被动接收讨论信息都是严重违反竞赛纪律的行为。

我们完全清楚，抄袭别人的成果是违反竞赛章程和参赛规则的行为；如果引用别人的成果或资料（包括网上资料），必须按照规定的参考文献的表述方式列出，并在正文引用处予以标注。

我们以中国大学生名誉和诚信郑重承诺，严格遵守竞赛章程和参赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛章程和参赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们授权全国大学生数学建模竞赛组委会，可将我们的论文以任何形式进行公开展示（包括进行网上公示，在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等）。

我们参赛选择的题号（从 A/B/C/D/E 中选择一项填写）： A

我们的报名参赛队号（12 位数字全国统一编号）： 12

参赛学校（完整的学校全称，不含院系名）： 西安财经大学

参赛队员 (打印并签名) ：1. 赵佳敏

2. 张贵玉

3. 金珂

指导教师或指导教师组负责人　(打印并签名)：

（指导教师签名意味着对参赛队的行为和论文的真实性负责）

日期：______年___月___日

（请勿改动此页内容和格式。此承诺书打印签名后作为纸质论文的封面，注意电子版论文中不得出现此页。以上内容请仔细核对，如填写错误，论文可能被取消评奖资格。）

赛区评阅编号（由赛区组委会填写）：

2020 年高教社杯全国大学生数学建模竞赛

编 号 专 用 页

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

评阅人						
备注						

送全国评阅统一编号（赛区组委会填写）：

全国评阅随机编号（全国组委会填写）：

（请勿改动此页内容和格式。此编号专用页仅供赛区和全国评阅使用，参赛队打印后装订到纸质论文的第二页上。注意电子版论文中不得出现此页。

降雨系统和灰水系统的运作和设计问题

摘要

本文主要是要求我们模拟降雨系统和灰水系统的运作，然后使用模拟决定可以达到某种程度的节约用水的最有效方式。

针对问题一：问题一主要是让我们估计三月降雨量分布中三个参数 p_3, m_3 和 λ_3 的值，从题目中我们可以使用估计 p_3 的值，然后可以把 p_3 的值代入 EY_i 中就可以得到一个关于 m_3 和 λ_3 的一个表达式，然后使用 Matlab 得出他与 m_3 的组合，代入伽马分布的分布函数计算出各个情况下的分布，进而把值代入损失函数求出它的损失函数值，最后求出 p_3, λ_3, m_3 的值分别为 $0.3, 0.056, 0.306$ 。

针对问题二：问题二主要是让我们估计每年平均节约的用水量，根据题目我们可以计算出年降水量、年灰水量、年冲洗厕所用水量、花园的年用水量。而根据题目我们可以知道节约的用水量是用掉的雨水量加灰水量之和，然后我们就可以算出每年平均节约的用水量为 80369.22L。

针对问题三：问题三主要是让我们选择安装系统从而使得总费用最少，经过分析，我们采用了数学规划模型，在问题二中我们已经算出了每年平均节约用水量以及每年雨水节约量和灰水节约量，我们就可以算出每年雨水节约量和灰水节约量的比例，根据比例我们就可以大概估计出每年节约 50000 升和每年节约 60000 升用水量中的雨水节约量和灰水节约量，最后根据题目中的约束条件，采用数学规划模型列出目标函数，最后利用 lingo 软件求得每年节约 50000 升和每年节约 60000 升最用最少的方法。

关键词： lingo　数学规划　伽马分布

一、问题重述

1.1 背景知识

水资源短缺已经成为许多国家面临的最重要的问题之一。本项目要求你模拟降雨系统和灰水系统的运作，然后使用模拟决定可以达到某种程度的节约用水的最有效方式。这个系统包含一个收集房顶的雨水的降雨箱和一个收集淋浴和洗涤机器的污水的灰水箱。雨水和灰水可以用来冲厕所或者灌溉花园（假设花园可以使用洗涤剂）。

这里将基于一天进行模拟：每天模拟收集到的雨水和灰水的数量，然后模拟厕所和花园的用水量。对花园首先使用雨水，然后再使用灰水，冲厕所正好相反。如果没有足够的储存水用来冲厕所或者灌溉花园，那么将使用生活用水。

表1 给出了某城市从1908到2011年的基于月份的降雨量数据。

月份	平均降雨量	10%分位数	50%分位数	90%分位数	平均下雨天数
一月	47.6	10.9	36.9	99.2	8.4
二月	48	6.8	32.6	108.5	7.5
三月	50.4	11.8	38.8	104.9	9.4
四月	57.3	17.7	49.8	114.4	11.8
五月	55.8	21.3	55.1	91.2	14.6
六月	49	25.1	42.6	85.3	15.4
七月	47.5	23.3	44.4	72.1	16.1
八月	50	23.5	49.2	77.7	16.1

九月	58.1	27.8	53	92.4	14.9
十月	66.4	25.4	67	111.3	14.2
十一月	60.4	21.5	53.8	114.7	11.8
十二月	59.5	17.6	52.3	110.3	10.4

假设每天的降雨量是相互独立的，令 $X_{i,j}$ 表示第 i 月（$i \in \{1,2,\ldots,12\}$）第 j 天的降雨量，然后假设

$$\begin{array}{ll} X_{i,j} & A_{i,j}B_{i,j}, \text{这里} A_{i,j} \text{和} B_{i,j} \text{相互独立} \\ A_{i,j} & \text{Bernoulli}(p_i) \\ B_{i,j} & \Gamma(\lambda_i, m_i) \end{array}$$

其中，Bernoulli（p）表示参数为 p 的两点分布，$\Gamma(\lambda_i, m_i)$ 是参数为 λ_i 和 m_i 的伽玛分布，分布密度为

$$f(x;\lambda,m) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^m}{\Gamma(m)} x^{m-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x > 0, \\ \quad 0, & x \le 0. \end{cases}$$

上面给出了每天降雨量的模型，我们也需要每月降雨量的模型。令 n_i 表示第 i 个月的天数，那么第 i 个月的降雨量是

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n_i} X_{i,j}$$

则有

$$EY_i = n_i p_i m_i / \lambda_i$$

令 $N_i = \sum_{j=1}^{n_i} A_{i,j} \sim \text{binom}(n_i, p_i)$，这里binom指二项分布。然后使用全概率公式，可以得到对于 $x \ge 0$ 有

$$\mathcal{P}(Y_i \le x) = \mathcal{P}(N_i = 0) + \sum_{k=1}^{n_i} \mathcal{P}(C_{i,k} \le x)\mathcal{P}(N_i = k)$$

其中 $C_{i,k} \sim \Gamma(\lambda_i, km_i)$。可以使用下面的事实：独立的服从 $\Gamma(\lambda, m_1)$ 和 $\Gamma(\lambda, m_2)$ 分布的随机

变量的和服从$\Gamma(\lambda, m_1+m_2)$分布，即伽玛分布关于形状参数具有可加性。

1.2 问题提出

任务1

这里需要估计$X_{i,j}$的参数。使用如下方法。这里（包括以后）假设二月总是有28天。

平均下雨天恰好是N_i的样本均值。使用它们估计p_i的值。

使用EY_i和平均降雨量可以得到与λ_i有关的m_i的一个表达式（这里已经估计了p_i）。

为了估计λ_i，我们使用观测到的分位数。令$F_i = F_{Y_i}$是Y_i的理论分布函数，可以从第i个月的降雨量求得。分位数$d_i(k), k=1,\ldots,9$是样本点的百分之$10k$分位数。也即是

$$F_i(d_i(k)) = \int_0^{d_i(k)} \frac{\lambda^m}{\Gamma(m)} x^{m-1} \mathrm{e}^{-\lambda x} dx = k/10$$

显然$d_i(5)$正好是中位值。

通过最小化下面的损失函数来拟合λ_i

$$L(\lambda_i) = \frac{1}{0.09}(F_i(d_i(1))-0.1)^2 + \frac{1}{0.25}(F_i(d_i(5))-0.5)^2 + \frac{1}{0.09}(F_i(d_i(9))-0.9)^2$$

基于上述知识，请估计三月降雨量分布中三个参数p_3, m_3和λ_3的值并精确到两位有效数字。作为参考，对于第一个月，p_1, m_1和λ_1的估计应该是0.27，0.24和0.043。

任务2

假设该城市一月至十二月的平均最大温度分别是：25.9, 25.8, 23.9, 20.3, 16.7, 14.1,13.5, 15.0, 17.2, 19.7, 22.0, 24.2，屋顶的面积为100平方米，花园的面积为200平方米，一个四口之家每天冲洗厕所的次数是随机的，服从binom(15,0.8)分布，每次冲洗厕所需要5升水，每天沐浴的次数是4次，每次用水35升，洗衣房洗衣的次数是随机变量，服从binom(8，0.125)分布，每次洗衣用水35升。请基于以下原则模拟一个四口之家的一个降雨箱和灰水箱的运作。

对于该模拟，时间增量以一天为单位，给出一年的时间长度。每天的模拟状态更新如下：

1. 模拟日降雨量（单位：毫米）。降雨箱收集的雨水容量（以升为单位）等于屋顶的面积（以平方米为单位）乘以降雨的深度。
2. 模拟日灰水量（单位：升）。灰水箱收集的水容量等于沐浴器的使用次数乘以每次沐浴的用水量加上洗衣房洗衣的次数乘以每次洗衣物的用水量。
3. 用来冲洗厕所的水等于冲洗的次数乘以每次冲洗器的用水量。该水首先取自灰水箱，然后取自雨水箱，然后取自生活用水。记录下节约的水量，也即是冲洗厕所时来自于箱子里的水而不是生活用水。
4. 花园的用水量计算如下。在第i个月里希望持续三天花园里水的平均深度至少是当月平均最大温度除以15（以毫米为单位），（因此在1月份的任意一个连续三天的周期内，花园里平均至少有$25.9/15=1.727$毫米的水。）前两天花园里水的深度必须包含雨水和灌溉水。用水量（以升为单位）是水的深度乘以花园的面积（以平方米为单位）。该水首先取自雨水箱，然后来自灰水箱，最后来自生活用水。

基于以上描述，请估计每年平均节约的用水量。你能否设计另外一种方法用来估计每年节约的用水量。

任务3

现在使用上面建立的模拟帮助选择安装哪种系统。

假设箱子的容量有1000，2000，3000，5000和10000升，每1000升容量花费1000元。假设铺设管道（不计管道长度）的费用是1万元，如果每安装一个雨水箱则增加2千元，每安装一个灰水箱则增加5千元。

请分别给出（平均）每年节约50000升和60000升费用最少的方法。

二、问题分析

1. 对问题一的分析

问题一主要是让我们估计三月降雨量分布中三个参数 p_3, m_3 和 λ_3 的值，从题目中可以知道平均下雨天恰好是 N_i 的样本均值，我们就可以使用它们估计 p_3 的值，然后可以把 p_3 的值代入 EY$_i$ 中就可以得到一个关于 m_3 和 λ_3 的一个表达式，因为我们无法准确计算 m_3 和 λ_3 的值，只能知道他的大概取值范围，所以我们就可以选取 λ_3 的值域为 0-1，步长设为 0.001，使用 Matlab 得出他与 m_3 的组合，然后代入伽马分布的分布函数计算出各个情况下的分布，进而把值代入损失函数求出它的损失函数值，由损失函数的意义我们可以得出损失值的最小值对应 m_3 和 λ_3 的值就是我们所要求的与实际值最接近的 m_3 和 λ_3 的值。

2. 对问题二的分析

问题二主要是让我们估计每年平均节约的用水量，根据题目中的状态，我们可以分为四种情况来计算：第一步：根据模拟的日降水量的计算方法算出月降水量以及年降水量；第二步：根据模拟的日灰水量，然后结合题目我们可以知道沐浴器的使用次数和用水量是确定的，洗衣房洗衣的次数是随机的，但是我们可以知道洗衣次数是服从二项分布的，然后我们就可以根据二项分布的数学期望的含义算出他的平均次数，用水量也确定了，就可以算出年灰水量；第三步：计算冲洗厕所的用水，因为冲洗厕所的次数也是随机的，我们就可以根据数学期望求出他的平均次数，然后就可以求出冲洗厕所所需要的水量，进而求出年冲洗厕所用水量；第四步：求出花园的用水量，先根据每个月的平均温度算出平均深度，然后排除掉每个月下雨的天数，进而求出花园的年用水量。而根据题目我们可以知道节约的用水量是用掉的雨水量加灰水量之和，然后我们就可以算出

每年平均节约的用水量。

3. 对问题三的分析

问题三主要是让我们选择安装系统从而使得总费用最少，经过分析，我们采用了数学规划模型，在问题二中我们已经算出了每年平均节约用水量以及每年雨水节约量和灰水节约量，我们就可以算出每年雨水节约量和灰水节约量的比例，根据比例我们就可以大概估计出每年节约 50000 升和每年节约 60000 升用水量中的雨水节约量和灰水节约量，最后根据题目中的约束条件，采用数学规划模型列出目标函数，最后利用 lingo 软件求得结果。

四、符号说明及名词解释

4.1 符号说明

符号	意义
M_i	表示第 i 个月的降雨量
S_1	表示屋顶的面积
EX	表示洗衣机洗衣的平均次数
EY	表示平均冲厕所的次数
T_i	表示每月的平均最大温度
S_2	表示花园的面积
E	表示第 i 个月的总天数
F	表示第 i 个月的平均下雨天数
U	表示雨水量
a_1 a_2 a_3 a_4 a_5	表示容量不同的雨水箱子

b_1 b_2 b_3 b_4 b_5	表示容量不同的灰水箱子

4.2 名词解释

1. 伽玛分布：（又称Γ分布）是统计学的一种连续概率函数，假设随机变量 X 为等到第α件事发生所需要的等候时间，密度函数为

$$\mathrm{f}(\mathrm{x},\beta,\alpha)=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}, x>0$$

$$EX=\frac{\alpha}{\beta}，Var(x)=\frac{\alpha}{\beta^{2}}$$

α称为形状参数（shape parameter），β称为逆尺度参数。

2. 损失函数：将随机事件或其有关随机变量的取值映射为非负实数以表示该随机事件的“风险”或“损失”的函数。在应用中，损失函数通常作为学习准则与优化问题相联系，即通过最小化损失函数求解和评估模型。

三、模型假设

1. 假设沐浴、洗衣的水都来自于生活用水。
2. 假设水的利用率都为 100%，没有损耗。
3. 假设问题二中不考虑雨水箱和灰水箱的容量问题。
4. 假设所有的数据都真实有效。

五、模型建立与求解

5.1 问题一模型的建立与求解

5.1.1 模型的分析

问题一主要是让我们估计三月降雨量分布中三个参数p_3,m_3和λ_3的值，从题目中可以知道平均下雨天恰好是N_i的样本均值，我们就可以使用它们估计p_3的值，然后可以

把p_3的值代入EY$_i$中就可以得到一个关于m_3和λ_3的一个表达式，因为我们无法准确计算m_3和λ_3的值，只能知道他的大概取值范围，所以我们就可以选取λ_3的值域为0-1，步长设为0.001，使用Matlab得出他与m_3的组合，然后代入伽马分布的分布函数计算出各个情况下的分布，进而把值代入损失函数求出它的损失函数值，由损失函数的意义我们可以得出损失值的最小值对应m_3和λ_3的值就是我们所要求的与实际值最接近的m_3和λ_3的值。

5.1.2 模型的建立

由题意可知：

降雨概率：

$$p_i = \frac{\text{平均下雨天数}}{\text{本月总天数}} = \frac{F}{E} \tag{5.1}$$

第i个月的平均降雨量：

$$EY_i = \frac{n_i p_i m_i}{\lambda_i} \tag{5.2}$$

接下来我们就可以根据以上两个方程得到一个表达式

因为λ_3的值域为0-1，我们可以选取步长为0.001，结合表达式列出m_3和λ_3的组合，然后代入伽马分布的分布函数计算出各个情况下的分布，进而把值代入损失函数求出它的损失函数值。得出与实际最相近的m_3和λ_3值。

5.1.3 模型求解

根据方程（5.1），我们可以解得：

$$\mathrm{p}_3 = 0.3$$

再把n_3，p_3，EY_i 的值代入方程（5.2）中可以得到：

$$\frac{\mathrm{m}_3}{\lambda_3} = \mathrm{k} \ (\mathrm{k}\text{为常数})$$

接下来用 Matlab 列出m_3和λ_3的组合、分布函数各个情况下的分布以及损失的函数值（代码 1）

可以得到结果如下表所示（下面列出了一部分，具体见附录）

表 1　m_3和λ_3的组合表

λ_3	m_3	$F_3(d_3(1))$	$F_3(d_3(5))$	$F_3(d_3(9))$	$L(\lambda_3)$
0.052	0.27881	0.85855	0.980488	0.99965	7.42713
0.053	0.28417	0.858395	0.980935	0.99968	7.426301
0.054	0.289532	0.858257	0.981382	0.99970	7.425755
0.055	0.294894	0.858138	0.98182	0.999731	7.425486
0.056	0.305617	0.857952	0.982668	0.999774	7.425479
0.057	0.305617	0.857952	0.982668	0.999774	7.425722
0.058	0.310979	0.857884	0.983078	0.999793	7.426204
0.059	0.31634	0.857832	0.98348	0.99981	7.426912
0.060	0.32170	0.857794	0.983873	0.999826	7.427837
0.061	0.32706	0.857771	0.984257	0.999984	7.428969

根据以上表格可以知道：损失值是先减少后增长，由表中可以看出，损失值的最小值为 7.425479，因为题目要求精确到两位有效数字，我们就可以得到m_3值和λ_3值为 0.056, 0.306。

即$\mathrm{p}_3, \lambda_3, \mathrm{m}_3$的值分别为0.30, 0.056, 0.306

5.2 问题二模型的建立与求解

5.2.1 模型分析

问题二主要是让我们估计每年平均节约的用水量，根据题目中的状态，我们可以分

为四种情况来计算：第一步：根据模拟的日降水量的计算方法算出月降水量以及年降水量；第二步：根据模拟的日灰水量，然后结合题目我们可以知道沐浴器的使用次数和用水量是确定的，洗衣房洗衣的次数是随机的，但是我们可以知道洗衣次数是服从二项分布的，然后我们就可以根据二项分布的数学期望的含义算出他的平均次数，用水量也确定了，就可以算出年灰水量；第三步：计算冲洗厕所的用水，因为冲洗厕所的次数也是随机的，我们就可以根据数学期望求出他的平均次数，然后就可以求出冲洗厕所所需要的水量，进而求出年冲洗厕所用水量；第四步：求出花园的用水量，先根据每个月的平均温度算出平均深度，然后排除掉每个月下雨的天数，进而求出花园的年用水量。而根据题目我们可以知道节约的用水量是用掉的雨水量加灰水量之和，然后我们就可以算出每年平均节约的用水量。

5.2.2 模型的建立

1.日降水量 = 屋顶面积*降雨的深度

月降水量 = 屋顶面积*平均降雨量

根据以上结果，可以得出

年降雨量:

$$A=\sum_{i=1}^{12} M_i * S_1 \tag{5.3}$$

（A表示年降雨量,M_i表示第 i 个月的降雨量，S_1表示屋顶的面积）

2.日灰水量 = 沐浴器的使用次数*沐浴的用水量+洗衣房洗衣的次数*洗衣物的用水量

根据以上式子，可以得出：

年灰水量：

$$B=(4*35+EX*35)*365 \tag{5.4}$$

（其中，B表示年灰水量，EX表示洗衣机洗衣的平均次数）

2. 日冲厕所用水量 = 冲洗的次数*每次冲洗器的用水量

根据以上式子，可以得出：

年冲厕所用水量：

$$C = EY * 5 * 365 \tag{5.5}$$

（其中，C 表示年冲厕所用水量，EY 表示平均冲厕所的次数）

3. 花园的日用水量 = 水的深度*花园的面积

$$水的深度=\frac{每月的平均最大温度}{15}$$

根据以上公式，可以得出：

年花园用水量：

$$D = \sum_{i=1}^{12} \frac{T_i}{15} * S_2 * \sum_{i=1}^{12} (E - F) \tag{5.6}$$

（其中，D 表示年花园用水量，T_i 表示每月的平均最大温度，S_2 表示花园的面积，E 表示第 i 个月的总天数，F 表示第 i 个月的平均下雨天数）

4. 每年平均节约用水量：

$$G = h + i \tag{5.7}$$

（其中，G 表示每年平均节约用水量，h 表示每年节约的雨水量，i 表示每年节约的灰水量）

5.2.3 模型求解

1.根据题目，我们可以知道每个月的降水量，如下表所示

表 2　每个月的降水量表

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
水量	47.6	48	50.4	57.3	55.8	49	47.5	50	58.1	66.4	60.4	59.547

然后把数据代入方程（5.1）中可以得到

$$A = 65000L$$

2.根据题意，我们可以知道

每天洗衣房洗衣的次数是随机变量且服从 binom(8，0.125)分布

我们可以得出：$EX = 1$

把数据代入方程（5.2）中可以知道：

$$B = 63875L$$

3.根据题意，我们可以知道

每天冲洗厕所的次数是随机的且服从 binom(15,0.8)分布

我们可以得出：$EY = 12$

把数据代入方程（5.3）中可以知道：

$$C = 21900L$$

5. 根据题目，我们可以知道每个月的平均最大温度，如下表所示：

表 3　每个月的平均最大温度

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
温度	25.9	25.8	23.9	20.3	16.7	14.1	13.5	15.0	17.2	19.7	22.0	24.2

也可以知道每个月的平均下雨天数 F

表 4　每个月的平均下雨天数

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
下雨天数	8.4	7.5	9.4	11.8	14.6	15.4	16.1	16.1	14.9	14.2	11.8	10.4

然后把上列数据代入方程（5.4）中可以知道

$$D = 58515.4L$$

5.根据题意以及以上结果可以得出

$$h = 58515.4L，i = 21900L$$

$$G = 80415.4L$$

5.2.4 方法二

从题目中我们可以知道，每次冲厕所和灌溉花园的水都是先来自于雨水箱和灰水箱，直到雨水箱和灰水箱所有的水用完之后才开始用生活用水。而我们想要求每年所要节约的用水量，我们就可以把它分成两种情况。

第一种：没有用到生活用水。那我们所要求的节约的用水量就可以根据雨水箱和灰水箱的剩余量来进行计算，用刚开始雨水箱和灰水箱的总量减去之后雨水箱和灰水箱的剩余量就是我们所节约的用水量。

第二种情况：用到了生活用水。说明这个税后的雨水箱和灰水箱的总量不能满足我们的使用，那我们所节约的用水量就是刚开始雨水箱和灰水箱的总量。

5.3 问题三模型的建立与求解

5.3.1 模型分析

问题三主要是让我们选择安装系统从而使得总费用最少，经过分析，我们采用了数学规划模型，在问题二中我们已经算出了每年平均节约用水量以及每年雨水节约量和灰水节约量，我们就可以算出每年雨水节约量和灰水节约量的比例，根据比例我们就可以大概估计出每年节约 50000 升和每年节约 60000 升用水量中的雨水节约量和灰水节约量，最后根据题目中的约束条件，采用数学规划模型列出目标函数，最后利用 lingo 软件求得结果。

5.3.2 模型的建立

由题二可以知道，当一年的平均节约用水量为 80369.22L，其中雨水节约量为 58469.22L，

灰水节约量为 21900L。

所以我们可以求出当一年平均节约 50000 升和 60000 升时雨水和灰水的节约量。

年平均节约量为 50000L 时

雨水节约量：

$$R_1 = \frac{58469.22}{80369.22} * 50000 \tag{5.8}$$

灰水节约量：

$$Q_1 = 50000 - R_1 \tag{5.9}$$

年平均节约量为 60000L 时

雨水节约量：

$$R_2 = \frac{58469.22}{80369.22} * 60000 \tag{5.10}$$

灰水节约量：

$$Q_2 = 60000 - R_2 \tag{5.11}$$

由题意我们可以知道：

$$U = 1000 * a_1 + 2000 * a_2 + 3000 * a_3 + 5000 * a_4 + 10000 * a_5 \tag{5.12}$$

$$V = 1000 * b_1 + 2000 * b_2 + 3000 * b_3 + 5000 * b_4 + 10000 * b_5 \tag{5.13}$$

（其中，U表示雨水量，V表示灰水量，a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 表示容量不同的雨水箱子，b_1，b_2，b_3，b_4，b_5 表示容量不同的灰水箱子）

$$R_1 < U, Q_1 < V \tag{5.14}$$

$$R_2 < U, Q_2 < V \tag{5.15}$$

根据以上方程，可以得出：

$$
约束条件\begin{cases}U=1000*a_1+2000*a_2+3000*a_3+5000*a_4+10000*a_5\\ \text{V}=1000*b_1+2000*b_2+3000*b_3+5000*b_4+10000*b_5\\ R_1<U,Q_1<V\\ R_2<U,Q_2<V\end{cases} \qquad (5.16)
$$

目标函数

$$
\begin{aligned}Z_{\min}&=1000(a_1+b_1)+2000*(a_2+b_2)+3000*(a_3+b_3)+5000*(a_4+b_4)+10000*(a_5+b_5)\\&+2000*(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)+5000*(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5)+10000\end{aligned} \qquad (5.17)
$$

5.3.3 模型求解

根据以上方程，我们可以求得：

$$
\begin{aligned}R_1&=36375,Q_1=13625\\R_2&=43650,Q_2=16350\end{aligned}
$$

然后用 lingo 求解方程（5.15）

当年节约费用为 50000 时，可以解得：（代码 2）

Z_{min} = 82000 元

根据结果我们可以看出来

当我们选择一个 2000L、一个 5000L 和三个 10000L 的容器改造成雨水箱，选择一个 5000L 一个 10000L 的容器改造成灰水箱时可以使总费用最少。

当年节约费用为 60000 时，可以解得：（代码 3）

Z_{min} = 95000 元

根据结果我们可以看出来

当我们选择一个 5000L 和四个 10000L 的容器改造成雨水箱，选择两个个 10000L 的容器改造成灰水箱时可以使总费用最少。

六、模型评价

模型优点：

1. 我们引用了损失函数，可以使我们的结果更加精确。

2. 运用数学规划模型，可以较为容易且准确的得出费用最少的方案。

模型缺点：

1. 实际中的降雨量以及灰水量受各种因素影响，是一个动态的值，但是我们为了使问题简化，把他当成了一个确定的值，与实际情况可能有误差。

2. 每天沐浴、洗衣的次数都是由多种因素影响的，我们运算过程中直接运用数学期望求平均值，可能与实际有稍许不符。

七、参考文献

[1]姜启源，谢金星，叶俊.数学模型（第五版）[M].北京:，高等教育出版社，2019.

[2]肖华勇.实用数学建模与软件应用[M].西安:西北工业大学出版社，2014.

[3]姚泽清，郑旭东，赵颖.全国大学生数学建模竞赛赛题与优秀论文评析[M].北京: 国防工业出版社，2012.

[4]白伟华.随机变量的特征函数在概率论中的应用[J].黑龙江科学 ,2020(3).

[5]周琴，刘志清.概率论中的应用实例及其 MATLAB 实现[J].福建电脑，2020(1).

[6]周琴.概率论中关于数字特征的实验教学案例[J]. 数学学习与研究. 2019(03)

[7]韩中庚.数学建模方法及其应用[M].北京：高等教育出版社，2005.

[8]朱雪芳.MATLAB 软件在高等数学教学中的应用[J]. 福建电脑. 2018(08)

[9]卓金武.MATLAB 在数学建模中的应用[M].北京：北京航空航天大学出版社，2015.

[10]程立正.概率论与数理统计[M]. 上海:复旦大学出版社 , 2013.

附录

代码 1：

```
>>x1=38.8;

>>u=0:0.001:1;

>>w=1./u;

>>v=u*5.361702128;

>> y1=gamcdf(x1,v,w);

>> x2=11.8;

>> y2=gamcdf(x2,v,w);

>> x3=104.9;

>> y3=gamcdf(x3,v,w);)

>> xlswrite('F:\text4.xlsx',u)

>> xlswrite('F:\text5.xlsx',v)

>> xlswrite('F:\text6.xlsx',y1)

>> xlswrite('F:\text7.xlsx',y2)

>> xlswrite('F:\text8.xlsx',y3)

>> y4=1/0.09*(y2-0.1).^2+1/0.25*(y1-0.5).^2+1/0.09*(y3-0.9).^2;

>> xlswrite('F:\text9.xlsx',y4)
```

表 1：

λ_3	m_3	$F_3(d_3(1))$	$F_3(d_3(5))$	$F_3(d_3(9))$	$L(\lambda_3)$
0.048	0.25736	0.85939	0.97855	0.99950	7.43369
0.049	0.26272	0.85915	0.97905	0.99955	7.43154

0. 050	0. 26806	0. 85893	0. 979538	0. 999585	7. 42974
0. 051	0. 27344	0. 85873	0. 980013	0. 999619	7. 428278
0. 052	0. 27881	0. 85855	0. 980488	0. 99965	7. 42713
0. 053	0. 28417	0. 858395	0. 980935	0. 99968	7. 426301
0. 054	0. 289532	0. 858257	0. 981382	0. 99970	7. 425755
0. 055	0. 294894	0. 858138	0. 98182	0. 999731	7. 425486
0. 056	0. 305617	0. 857952	0. 982668	0. 999774	7. 425479
0. 057	0. 305617	0. 857952	0. 982668	0. 999774	7. 425722
0. 058	0. 310979	0. 857884	0. 983078	0. 999793	7. 426204
0. 059	0. 31634	0. 857832	0. 98348	0. 99981	7. 426912
0. 060	0. 32170	0. 857794	0. 983873	0. 999826	7. 427837
0. 061	0. 32706	0. 857771	0. 984257	0. 999984	7. 428969
0. 062	0. 33243	0. 857762	0.984632	0.999854	7.430297
0. 063	0.337787	0.857766	0.984999	0.999866	7.431814
0. 064	0.343149	0.857782	0.985358	0.999877	7.43351
0. 065	0.348511	0.857811	0.985709	0.999887	7.435378
0. 066	0. 35387	0. 857851	0. 98605	0. 99989	7.437409
0. 067	0.359234	0.857903	0.986387	0.999905	7.437409
0. 068	0.364596	0.857965	0.986715	0.999913	7.441935
0. 069	0.369957	0.858037	0.987034	0.99992	7.444415
0. 070	0.375319	0.858119	0.987347	0.999927	7.447033
0. 071	0.380681	0.858211	0.987652	0.999933	7.449781

0.072	0.386043	0.858312	0.98795	0.999939	7.452654

（因数据过多，上面只列出一部分）

代码 2：

```
model:

m=1000*a1+2000*a2+3000*a3+5000*a4+10000*a5;

n=1000*b1+2000*b2+3000*b3+5000*b4+10000*b5;

b=13625;

a=36375;

a<m;

b<n;

@gin(a1);@gin(a2);@gin(a3);@gin(a4);@gin(a5);@gin(b1);@gin(b2);@gin(b3);@gi
n(b4);@gin(b5);

Min=1000*(a1+b1)+2000*(a2+b2)+3000*(a3+b3)+5000*(a4+b4)+10000*(a5+b5)+2000*
(a1+a2+a3+a4+a5)+5000*(b1+b2+b3+b4+b5)+10000;

end
```

代码 3：

```
model:

m=1000*a1+2000*a2+3000*a3+5000*a4+10000*a5;

n=1000*b1+2000*b2+3000*b3+5000*b4+10000*b5;

b=16350;
```

```
a=43650;

a<m;

b<n;

@gin(a1);@gin(a2);@gin(a3);@gin(a4);@gin(a5);@gin(b1);@gin(b2);@gin(b3);@gi
n(b4);@gin(b5);

Min=1000*(a1+b1)+2000*(a2+b2)+3000*(a3+b3)+5000*(a4+b4)+10000*(a5+b5)+2000*
(a1+a2+a3+a4+a5)+5000*(b1+b2+b3+b4+b5)+10000;

end
```