TP N ° 1
Résolution de l'équation f(x) = 0

Mr. M.A.TABERKIT

Traveaux pratiques de Méthodes Numériques

1 Partie 1 : Rappel

1.1 Résolution des équations du type f(x) = 0

Nous nous restreignons, par souci de simplicité, à la recherche de racines réelles des fonctions réelles continues. L'existence des solutions utilisent le théorème des valeurs intermédiaires.

1.1.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est une fonction continue sur [a, b], et si $f(a) < f(b)$, alors il existe au moins un point $c \in [a, b]$ tel que f(c)=0. Si de plus f est strictement monotone sur [a, b], la racine est unique dans[a, b].

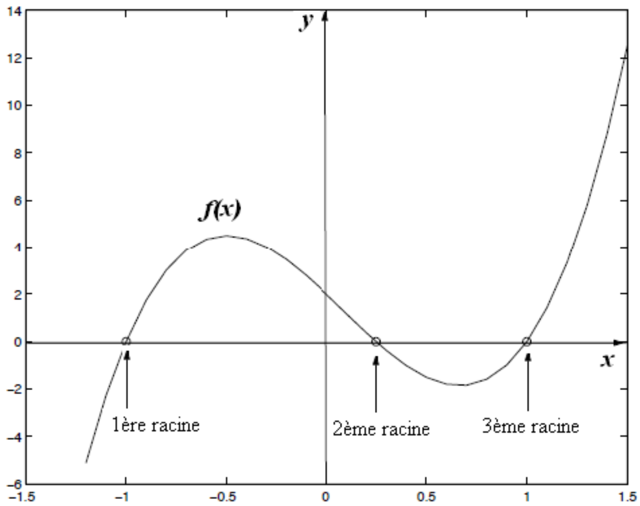

FIGURE 1 – Exemple d'une fonction f présentant 3 racines.

1.1.2 La Méthode de dichotomie ou bissection

Le mot dichotomie (dicho = deux, tomie = coupe) exprime clairement le principe de la méthode. Soit [a, b] un intervalle initial de localisation de la racine recherchée. Supposons que l'on ait $f(a) < f(b)$, L'algorithme de la dichotomie s'écrit :

Algorithm 1 Résolution de f(x)=0

```
while abs(b − a) > ε do
    m = (a + b)/2
    if f(a) ∗ f(m) < 0 then
        b=m, la solution s est dans l'intervalle [a,m]
    else
        a = m, la solution s est dans l'intervalle [m,b]
    end if
end while
```

Exemple :

- Calculer avec 4 chiffres après la virgule, une racine approchée de l'équation : $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$.
- Développez le programme MATLAB correspondant à la résolution de cette équation.
- Expliquer les différentes commandes utilisées en rajoutant des commentaires à votre programme.

1.1.3 La Méthode du point fixe

Le principe de cette méthode consiste à transformer l'équation f(x) = 0 en une équation équivalente : g(x) = x avec $x \in [a, b]$.On part d'une valeur initiale x_0 , on calcul $x_1 = g(x_0)$ puis on calcule $x_2 = g(x_1)$ et ainsi de suite jusqu'à l'obtention d'une stabilisation du processus c.-à-d $x_n \simeq g(x_{n-1})$ avec une précision demandée.

La solution approximative pour l'équation f(x)=0 est donc x_n. Autrement dit, le principe de la méthode du point fixe est basé sur la construction d'une suite itérative s'approchant de plus en plus de la racine exacte, son premier élément pouvant être n'importe quel point de l'intervalle [a, b].

Exemple : Appliquons la méthode du point fixe à l'exemple précédent.
$f(x) = x^3 + x - 1 = 0$
Il existe plusieurs façons de réécrire l'équation sous la forme :

- $x = -x^3 + 1$
- $x = \frac{1}{x^2+1}$

On peut choisir g(x)= $\frac{1}{x^2+1}$ et une solution initiale : $x_0 = 0.5$.

- Calculer avec 4 chiffres après la virgule, une racine approchée de l'équation : $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$.
- Développez le programme MATLAB correspondant à la résolution de cette équation.
- Expliquer les différentes commandes utilisées en rajoutant des commentaires à votre programme.
- Qu'est ce que vous pouvez remarquer en comparant cette méthode avec la première ?