Controlador PID - Conceitos básicos e implementação digital

Cauê Menegaldo

2 de setembro de 2015

1 Controlador PID

PID é um algoritmo de controle com a ação de três termos: Proporcional (P), Integral (I) e Derivativo (D).

O termo proporcional tem o objetivo de minimizar o erro (e) do sistema, que é a diferença entre o sinal de controle, ou *set point*, (u_c) e a variável controlada (y)

$$e = u_c - y \tag{1}$$

Se um controlador tiver somente a ação proporcional ele terá um erro em estado estacionário.

O termo integral tem o objetivo de eliminar o erro em regime estacionário somando o termo do erro ao longo do tempo.

O termo derivativo tem o objetivo de estabilizar o sistema em malha fechada e diminuir o tempo de acomodação prevendo o erro e avaliando sua taxa de variação no tempo.

A saída do controlador (u) pode ser expressa como uma somatória da ação de todos os termos

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt} \tag{2}$$

Em que K_p, K_i e K_d são, respectivamente, os ganhos do termo proporcional, integral e derivativo permitindo o ajuste de cada um deles.

1.1 Representação Alternativa

Outra forma de apresentar o PID, com o significado físico dos parâmetros mais claros, é em função de um único ganho K para um erro também único compensado por erros passados e futuros, tempo integrativo T_i, que indica o tempo (ou amostras) para eliminar a soma dos erros passados, e tempo derivativo T_d, que indica o tempo (ou amostras) em que irá prever o valor do erro futuro

$$K = K_p \qquad T_i = \frac{K_p}{K_i} \qquad T_d = \frac{K_d}{K_p} \tag{3}$$

$$u(t) = K\left(e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau + T_d\frac{de(t)}{dt}\right) \tag{4}$$

Pode também ser representado pela função de transferência. Substituindo a Eq. 1 na Eq. 4:

$$U(s) = K\left(U_c(s) - Y(s) + \frac{1}{sT_i}\big(U_c(s) - Y(s)\big) - sT_dY(s)\right) \tag{5}$$

1.2 Modificações no algoritmo PID

Quando se trata de implementação do algoritmo PID, algumas modificações se fazem necessárias.

1.2.1 Evitando Amplificação dos Ruídos

Implementar o termo derivativo da forma apresentada se torna inviável uma vez que os ruídos de medição serão muitíssimo amplificados. O ganho do termo derivativo precisa ser limitado. Podemos resolver isso com a seguinte aproximação:

$$sT_d \approx \frac{sT_d}{1 + sT_d/N} \tag{6}$$

Tal aproximação funciona bem para baixas frequências, mas o ganho do termo derivativo é limitado a N em altas frequências. Tipicamente o valor de N deve ser entre 8 e 20.

1.2.2 Fração do Termo Proporcional

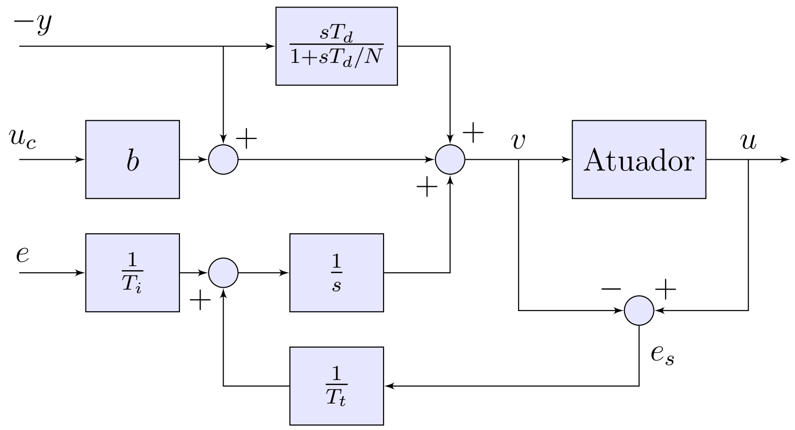
No trabalho de controladores analógicos observou-se também vantajoso não implementar o termo proporcional de forma direta, mas uma fração b do sinal de controle. Dessa forma, substituindo a Eq. 6 e a fração b obtemos:

$$U(s) = K\left(bU_c(s) - Y(s) + \frac{1}{sT_i}\big(U_c(s) - Y(s)\big) - \frac{sT_d}{1 + sT_d/N}Y(s)\right) \tag{7}$$

1.2.3 *Anti-windup*

A saída do controlador u é limitada a saturação do atuador (u_{lim}) o que pode trazer alguns efeitos indesejados. Se o erro for suficientemente grande, o termo integrador, por ser uma somatória dos erros passados, pode também adquirir um valor alto. Quando o erro é reduzido, o termo integrador pode ser tão alto que levaria um tempo indesejado para atuar de forma normal. Este efeito é chamado de *windup*.

Uma forma de evitar esse problema é avaliar quando o atuador é saturado e parar de incrementar o termo integrador, ou então zerá-lo. Uma forma ainda mais interessante é decrementar o termo integral de forma dinâmica em função de uma constante de tempo T_t (*tracking-time*), que indica quão rápido isso acontecerá, e da diferença entre a saturação e saída do controlador. T_t deve ser maior que T_d e menor que T_i. Sugere-se utilizar $T_t = \sqrt{T_i T_d}$ [2].



1.3 Discretização

Para implementar uma lei de controle em tempo real numa plataforma digital, como os microcontroladores e computadores, é necessário converter as equações diferenciais em equações algébricas. Esse processo é denominado discretização.

O controlador PID apresentado na equação (7), por se tratar de uma equação relativamente simples, pode ser discretizado utilizando métodos tradicionais como de Euler, das diferenças ou de Tustin. Abaixo é apresentado a aproximação por esses métodos.

1.3.1 Termo proporcional

O termo proporcional, separadamente, tem a seguinte forma:

$$P = K(b\,u_c - y) \tag{8}$$

Este termo não possui equações diferenciais, portanto não necessita de aproximação. Na forma discreta

$$P(k) = K\left(b\,u_c(k) - y(k)\right) \tag{9}$$

No qual k é o instante e h o tempo de atualização do controlador na plataforma digital.

1.3.2 Termo integral

O termo integral, separadamente, tem a seguinte forma:

$$I(t) = \frac{K}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \tag{10}$$

Pode ser representado em equações de diferenças

$$\frac{dI}{dt} = \frac{K}{T_i} e \tag{11}$$

Aproximando o termo integral com o **método de Euler (*forward difference*):**

$$I(k+1) = I(k) + \frac{Kh}{T_i} e(k) \tag{12}$$

Pelo **método das diferenças (*backward differences*):**

$$I(k+1) = I(k) + \frac{Kh}{T_i} e(k+1) \tag{13}$$

Pelo **método de Tustin (bilinear ou trapezoidal):**

$$I(k+1) = I(k) + \frac{Kh}{T_i} \frac{e(k+1) + e(k)}{2} \tag{14}$$

1.3.3 Termo derivativo

O termo derivativo, separadamente e considerando a aproximação realizada na seção 1.2.1, tem a seguinte forma:

$$D = -\frac{T_d}{N} \frac{dD}{dt} - KT_d \frac{dy}{dt} \tag{15}$$

Sendo uma equação de diferenças pode ser aproximado pelos mesmos métodos utilizados anteriormente para o termo integral.

Pelo **método de Euler (*forward difference*):**

$$D(k+1) = \left(1 - \frac{Nh}{T_d}\right) D(k) - KN\left(y(k+1) - y(k)\right) \tag{16}$$

Essa aproximação requer $T_d > Nh/2$ e se torna instável para valores muito pequenos de T_d.

Pelo **método das diferenças (*backward differences*):**

$$D(k) = \frac{T_d}{T_d + Nh} D(k-1) - \frac{KT_d N}{T_d + Nh} \left(y(k) - y(k-1)\right) \tag{17}$$

Este método tem a vantagem de que ele é sempre estável e que o pólo amostrado vai para zero quando T_d vai a zero. O método de *Tustin* dá uma aproximação de modo que o pólo vai para -1 quando T_d vai para zero.

Pelo **método de *Tustin* (bilinear ou trapezoidal):**

$$D(k) = \frac{2T_d - Nh}{2T_d + Nh} D(k-1) - \frac{2KT_d N}{2T_d + Nh} \left(y(k) - y(k-1)\right) \tag{18}$$

Referências

[1] Plínio de Lauro Sales Roberto Moura Anselmo Bittar, Castrucci. *Controle Automático*. LTC, 2011.

[2] Karl J Åström. Pid controllers: theory, design and tuning. *Instrument society of America*, 1995.

[3] Karl J Åström and Björn Wittenmark. *Computer-controlled systems: theory and design*. Courier Corporation, 2013.

[4] Paulo Álvaro Ogata, Katsuhiko e Maya and Fabrizio Leonardi. *Engenharia de controle moderno*. Prentice Hall, 2003.

[5] Pedro Manuel O. dos R. Soares. Discretização de controladores contínuos. Master's thesis, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1996.