



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

ESTUDO DA DINÂMICA NÃO LINEAR DE UM SATÉLITE DUAL- SPIN COM AMORTECEDOR DE NUTAÇÃO NA PLATAFORMA

Roberto Augusto dos Reis

Dissertação de Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espacial e Controle – ETE/CMC, orientada pelo Prof. Dr. Mário César Ricci.

INPE
São José dos Campos
2004

Aprovado pela banca
Examinadora em cumprimento a
requisito exigido para a obtenção
do Título de Mestre em
Engenharia e Tecnologia
Espaciais/ Mecânica Espacial e
Controle

Dr. Evandro Marconi Rocco

Presidente/INPE/SJCampos-SP

Dr. Mário César Ricci

Orientador/INPE/SJCampos-SP

Dr. Adenilson Roberto da Silva

Membro da Banca/INPE/SJCampos-SP

Dr. Álvaro Manoel de Souza Soares

Convidado UNITAU/Taubaté-SP

Candidato: Roberto Augusto dos Reis

São José dos Campos, 02 de abril de 2004

À minha amada esposa ,
SIMONE ESTÁCIO e filhos,
RICARDO E. DINELLI e
LUIS EDUARDO E. DOS REIS.

AGRADECIMENTOS

Ao orientador Prof. Dr. Mário César Ricci pelo conhecimento passado, e pela orientação e apoio na realização deste trabalho;

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE pela oportunidade de estudos e utilização de suas instalações;

Aos professores do INPE pelo conhecimento compartilhado;

Aos amigos Carlos Alexandre Wuensche de Souza e Primavera Botelho de Souza pela confiança, força interior, apoio e incentivo irrestrito nesta atividade;

Aos meus colegas de mestrado Átila Bueno, Daniel Carmona e Cristiano Fiorillo pelo companheirismo demonstrado em inúmeras vezes;

À ETEP pelas horas dispensadas para o mestrado;

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, pelo auxílio financeiro de um ano e meio de bolsa de mestrado;

A todos que por ventura não foram mencionadas e de forma direta e que colaboraram com este trabalho.

RESUMO

Esse trabalho tem como objetivo o estudo da dinâmica não linear de um satélite *dual-spin* com um amortecedor de nutação axial na plataforma. O problema envolve o estudo do movimento de um corpo com partes móveis. Foram obtidos resultados por meio de simulações das equações diferenciais do movimento utilizando-se o *software* Simulink. Obteve-se a posição e velocidade do amortecedor e as velocidades angulares da plataforma, em regime permanente, para determinados valores iniciais das velocidades angulares, com valores iniciais nulos para a posição e velocidade do amortecedor.

O objetivo secundário dessa dissertação é estruturar o problema do cálculo numérico de soluções periódicas e pontos de bifurcação complexos no movimento de um satélite *dual-spin* com um amortecedor de nutação na plataforma. Muitos problemas da matemática aplicada apresentam soluções periódicas (reações químicas, *flutter* de asas de avião, etc.). O que se planeja aqui é buscar esse tipo de solução para as equações de movimento de um satélite *dual-spin*. Pretende-se verificar o comportamento do sistema quando um torque senoidal for aplicado ao rotor, um dos componentes do sistema.

Dada uma variação de um dos parâmetros do sistema, a saber, a amplitude de torque senoidal do rotor, o movimento será estudado através da resolução de problemas de valor de contorno em dois pontos com a finalidade de buscar soluções periódicas de mesmo período nos movimentos da massa do amortecedor e das rotações angulares da plataforma e pontos de bifurcação de Hopf (1942) (complexos), onde soluções periódicas emergem de soluções estacionárias.

ABSTRACT

The aim of this work is to study the nonlinear dynamics of a dual-spin satellite with a axial nutation damper in the platform. The problem involves the study of the motion of a body with mobile parts. Results were obtained by means of simulation of the differential equations of motion using Simulink software. Results obtained were position and velocity of the nutation damper and the angular velocities of the platform, in steady state, for determined initial values of the angular speeds, with null initial values for the position and speed of the damper.

The secondary aim of this dissertation is to structuralize the problem of the numerical calculation of periodic solutions and complex points of bifurcation in the movement of a satellite dual-spin with a nutation damper in the platform. Many problems of the applied mathematics present periodic solutions (chemical reactions, flutter of wing of airplane, etc.). What it is planned here is to search this type of solution for the equations of motion of a satellite dual-spin. It is intended to verify the behavior of the system when a sinusoidal torque will be applied to the rotor, one of the components of the system.

Given a variation of one of the parameters of the system, to know, the amplitude of sinusoidal torque of the rotor, the movement will be studied through the resolution of Two Points Boundary Value Problems with the purpose searching periodic solutions of same period in the movements of the mass of the damper and the angular rotations of the platform and points of bifurcation of Hopf (1942) (complex), where periodic solutions emerge from stationary solutions.

SUMÁRIO

Lista de Siglas e Abreviaturas.....	15
Lista de Figuras.....	21
Lista de Tabelas.....	23
 Capítulo 1 - Introdução.....	 25
1.1 Objetivo do Trabalho.....	25
1.2 Organização do Trabalho.....	26
 Capítulo 2 – Conceitos Básicos	
2.1 Sistemas Dinâmicos não lineares.....	27
2.2 Atratores.....	28
2.3 Bifurcações.....	29
2.4 Pontos de bifurcações complexos.....	29
 Capítulo 3 - Técnicas de Troca de Momento Angular.....	 31
3.1 Estabilização por Rotação.....	31
3.2 Partes móveis internas.....	32
3.3 <i>Dual Spin</i>	34
 Capítulo 4 – Equações do Movimento.....	 37
 Capítulo 5 – Simulação Dinâmica de um satélite <i>Dual Spin</i>.....	 43
 Capítulo 6 – O Método dos Múltiplos tiros.....	 47
4.1 Cálculo de $\partial F / \partial s$ por integração.....	51
 Capítulo 7 – Cálculo Numérico para pontos de Bifurcação em Equações	
Diferenciais Ordinárias.....	53
7.1 Definição de ponto de bifurcação.....	54
7.1.1 Critério suficiente para bifurcações.....	56
7.2 Cálculo numérico de pontos de bifurcações em EDO's.....	57
7.2.1 Caso especial de bifurcações primárias.....	59

7.2.2 Adição de variáveis auxiliares	59
7.3 Condições iniciais para o cálculo de bifurcações.....	61
7.4 Mapeamento τ	62
7.5 Cálculo de τ_{lk} e ci's pelo método dos múltiplos tiros.....	63
7.6 Oscilações em equações diferenciais ordinárias.....	66
7.7 Cálculo de pontos de bifurcação de Hopf.....	67
7.8 Cálculo de órbitas periódicas.....	68
7.8.1 Dados Iniciais.....	72
Capítulo 8 – Ramo de Órbitas Periódicas.....	73
Capítulo 9 – Cálculo de Pontos de Bifurcação Complexos.....	77
Capítulo 10 – Resultados Obtidos.....	81
Capítulo 11 – Conclusões.....	85
Referências Bibliográficas.....	87
Apêndice A – Derivadas Parciais de Primeira Ordem.....	91
Apêndice B – Programas implementados na linguagem Matlab.....	97
Apêndice C –Diagrama de blocos SIMULINK.....	137

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

a, b	- limites do intervalo de integração do problema do valor de contorno em dois pontos
A, A_0	- amplitude adimensional de soluções periódicas, $\coloneqq y_1(0) - y_1(\bar{x}_1)$
$A' \coloneqq \frac{\partial r(y(a), y(b))}{\partial y(a)}$	- matriz de derivadas parciais
A_r	- Amplitude do torque senoidal aplicado ao rotor
A_r^*	incremento de amplitude prescrito por uma condição de contorno
A_1, A_{p-1}	- matrizes $(m \times n)$ do método dos múltiplos tiros
$B \coloneqq \frac{\partial r(y(a), y(b))}{\partial y(b)}$	- matriz de derivadas parciais
$d \neq 0$	- número arbitrário
D	- energia dissipada no amortecedor
$E \coloneqq A' + BG_{p-1}G_{p-2} \cdots G_1$	- matriz dos múltiplos tiros
$f(\alpha, x, y), F(x, Y)$	- vetor de funções representando o lado direito de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$f_y(\alpha, x, y)$	- matriz $(n \times n)$ de derivadas parciais de f em relação a y $:= \frac{\partial f(\alpha, x, y)}{\partial y}$
$F_k(\alpha, s_k, s_{k+1})$	- vetor n -dimensional de <i>funções erro</i> associado ao nó $k + 1$, $:= y(\alpha, x_{k+1}; x_k, s_k) - s_{k+1}, \quad k = 1, \dots, p - 2$
$F_{p-1}(\alpha, s_1, s_{p+1})$	- vetor n -dimensional de condições de contorno,
$F(\alpha, s)$	- vetor $n(p - 1)$ -dimensional de funções, $:= F_k, \quad k = 1, \dots, p - 1$
G	- centro de massa
G_k	- matriz $(n \times n)$ do método dos múltiplos tiros, $k = 1, \dots, p - 2$
$g(\alpha, x)$	- função de variável independente x e do parâmetro α
h, \bar{h}, h_0	- $h : [a, b] \rightarrow R^n$, solução do sistema linearizado; solução próximo ao ponto de bifurcação; solução do sistema linearizado no ponto de bifurcação
I	- matriz identidade $(n \times n)$
I_x, I_y, I_z	- momentos principais de inércia
\mathbf{K}	- corpo dos complexos
m	- massa do dissipador

m_t	- massa total do satélite
M	- vetor dos componentes de torque
n	- dimensão do problema
p	- número de nós do intervalo $[a, b]$ do método dos múltiplos tiros ($p > 2$)
P_l	- matriz $(n \times n)$, $:= e_l e_l^T$
P_{lk}	- matriz $(n \times n)$, $:= p_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } (i, j) \neq (l, k) \\ 1, & \text{se } (i, j) = (l, k) \end{cases}$
$r_{A/G}$	- deslocamento de A em relação a G
s_k	- vetor n -dimensional de estimativas associado ao nó k , $k = 1, \dots, p-1$
s_{kj}	- j -ésima componente do vetor s_k
\mathbf{R}	- corpo dos reais
T	- Energia cinética total
T_0	- período adimensional da solução periódica no ponto de bifurcação de Hopf
T^*	- período adimensional prescrito para a solução periódica
T_r	- Torque aplicado ao rotor
V	- energia potencial do sistema

$x, a = x_1, x_2, \dots, x_p = b$	- variável independente e respectivos valores nos m nós do método dos múltiplos tiros
\bar{x}	- variável independente, $0 \leq \bar{x} \leq 1$
\bar{x}_1	- valor fixo da variável independente, $0 \leq \bar{x}_1 \leq 1$
\mathbf{X}, \mathbf{Y}	- espaços vetoriais de Banach
$y(\alpha, x; x_k, s_k)$	- solução do problema de valor inicial n -dimensional $y' = f(\alpha, x, y)$ com $y(x_k) = s_k$ e $x \in [x_k, x_{k+1}]$
$y(\alpha)$	- ramo de soluções em função do parâmetro α
$y_1(0), y_2(0), \dots$	- valores das variáveis em $t = 0$
$y_1(1), y_2(1), \dots$	- valores das variáveis em $t = 1$
z	- posição da massa do dissipador em relação ao sistema de referência x, y, z , centrado no ponto A , fixo no corpo
α	- parâmetro real
α_0	- valor crítico para o parâmetro
α^*	- valor prescrito para o parâmetro
Δy_j	- vetor incremental de soluções n -dimensional obtido após integração no intervalo k , a partir de pequenas diferenças nas condições iniciais, $:= y(\alpha, x_{k+1}; x_k, s_k + \Delta s_{kj}) - y(\alpha, x_{k+1}; x_k, s_k)$

Δs_{kj}	- incremento na j -ésima componente do vetor s_k
$v_G, v_{A/G}, v_{i/A}$	- velocidade do centro de gravidade; velocidade do ponto A em relação ao centro de gravidade; velocidade da partícula i em relação ao ponto A , respectivamente
$\varsigma(x)$	- variável dependente, $\varsigma[0,1] \rightarrow \mathbf{R}$
ω	- frequência no ramo das soluções periódicas
$\omega_x, \omega_y, \omega_z$	- velocidades angulares em torno dos eixos do sistema de referência
$\tau := e_i^T (A' h(a) + B h(b))$	- funções de teste
τ'	- mapeamento de um problema do valor de contorno nos números reais, $\tau' = T(y, \alpha)$
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	- rotações em torno dos eixos do sistema de referência
$\dot{\theta}_r$	- rotação do rotor em relação à plataforma
$\Psi : \mathbf{Y} \times \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{X}$	- operador não linear
$\Psi_y(y_0, \alpha_0)$	- Jacobiano calculado em $(y, \alpha) = (y_0, \alpha_0)$
$:=$	- símbolo de definição

LISTA DE FIGURAS

Fig. 2.1 - Bifurcação super-crítica.....	30
Fig. 2.2 - Bifurcação sub-crítica.....	30
Fig. 3.1 - Movimento com relação a um ponto arbitrário.....	33
Fig. 4.1 - Satélite <i>dual-spin</i> com amortecedor na plataforma	37
Fig. 5.1 - Valores em regime permanente para $x_1, x_2, \omega_x, \omega_y$ e ω_r	45
Fig. 5.2 – Valores em regime permanente para $x_1, x_2, \omega_x, \omega_y$ e ω_r	46
Fig. 6.1 - Esboço do método dos múltiplos tiros	47
Fig. 7.1 - Diagrama de bifurcações	55
Fig. 7.2 - Diagrama de bifurcações para $F(u, \lambda)$	56

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Manobrabilidade de um satélite <i>Dual-Spin</i> lançado com ω_x e ω_y iguais a 6,28 rad/s.....	44
Tabela 5.2 – Manobrabilidade de um satélite <i>Dual-Spin</i> lançado com ω_x, ω_y e ω_z iguais a 6,28 rad/s.....	45
Tabela 9.1 – Valores adotados para os parâmetros.....	82

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O estudo da dinâmica e dos fenômenos não-lineares no movimento de um satélite *dual-spin* com um amortecedor de natação é um caso especial de muito interesse na área de engenharia e tecnologia de satélites. Alguns satélites de sensoriamento remoto e de comunicação possuem partes rotativas que podem ser representadas pelo esquema *dual-spin*. Essa denominação é dada a satélites que combinam as vantagens de uma plataforma orientada e de um rotor encarregado de manter a rigidez giroscópica.

Para efeito de estabilização em torno do eixo de menor momento de inércia um dispositivo dissipador de energia deve ser incluído na parte orientada (Kaplan, 1976).

As equações de movimento deste tipo de satélite foram obtidas por Kaplan (1976) e mais adiante por Hughes (1986), que utilizaram a equação do momento angular generalizado desenvolvida por Grubin (1962).

Da mesma forma que Meehan e Asokanthan (1996), as equações serão obtidas utilizando a equação de Lagrange em presença de dissipação.

Mesmo no modelo simplificado, para o rotor sujeito a um torque senoidal no tempo, observa-se uma grande variedade de soluções envolvendo o acoplamento de movimentos de massa do amortecedor e rotações angulares da plataforma e do rotor.

1.1 – Objetivo do Trabalho

Esse trabalho tem como objetivo a investigação de fenômenos não-lineares no movimento de um satélite *dual-spin* com um amortecedor de natação axial na plataforma. O problema envolve o estudo do movimento de um corpo com partes móveis. A intenção aqui é simular as equações diferenciais do movimento, utilizando-se o *software* Simulink, para verificar o comportamento das variáveis $x_1, x_2, \omega_x, \omega_y$ e ω_z , a saber, a posição e velocidade do amortecedor e as velocidades angulares da plataforma, em regime permanente, sob determinados valores iniciais de ω_r, ω_x e ω_y , fixando-se valores iniciais nulos para x_1 e x_2 .

Será ainda estruturado o problema do cálculo numérico de soluções periódicas e de pontos de bifurcação complexos no movimento de um satélite *dual-spin* com um

amortecedor de nutação na plataforma. Muitos problemas da matemática aplicada apresentam soluções periódicas (reações químicas, *flutter* de asas de avião, etc.). O que se planeja aqui é buscar esse tipo de solução para as equações de movimento de um satélite *dual-spin*. Pretende-se verificar o comportamento do sistema quando um torque senoidal for aplicado ao rotor, um dos componentes do sistema.

Dada uma variação de um dos parâmetros do sistema, a saber, a amplitude de torque senoidal do rotor, o movimento será estudado através da resolução de problemas de valor de contorno em dois pontos com a finalidade de buscar:

- a) soluções periódicas de mesmo período nos movimentos da massa do amortecedor e das rotações angulares da plataforma;
- b) pontos de bifurcação de Hopf (1942) (complexos), onde soluções periódicas emergem de soluções estacionárias.

1.2 – Organização do Trabalho

Quanto ao trabalho aqui apresentado, no Capítulo 2 traz os conceitos básicos. No Capítulo 3 encontra-se um breve histórico sobre técnicas de troca de momento angular. O Capítulo 4 trata do desenvolvimento das equações de movimento para um satélite *dual-spin*. O Capítulo 5 trata da simulação das equações de movimento para um satélite *dual-spin*, utilizando o software Simulink, e a apresentação dos resultados obtidos. O Capítulo 6 descreve o método dos múltiplos tiros, um importante método criado por Burlish e Stoer (1966) para solução de problemas do valor de contorno em dois pontos. O Capítulo 7 descreve o cálculo de pontos de bifurcação e ramos de soluções em equações diferenciais ordinárias. O Capítulo 8 apresenta o problema de valor de contorno em dois pontos para o cálculo de pontos de bifurcação para as equações de movimento do satélite em questão. O Capítulo 9 expõe dois problemas de valor de contorno em dois pontos para o cálculo de ramos de soluções para o problema em questão. O capítulo 10 descreve os resultados obtidos. No capítulo 11 são apresentadas as conclusões deste trabalho. No apêndice A são mostradas as derivadas de primeira ordem das equações do movimento; no apêndice B estão as listagens dos programas implementados e no apêndice C o diagrama de blocos referente às equações de movimento usando Simulink.

CAPÍTULO 2

CONCEITOS BÁSICOS

2.1 Sistemas dinâmicos não-lineares

Chama-se dinâmico um sistema cujo comportamento temporal é descrito por equações diferenciais ou por equações a diferenças. No primeiro caso, diz-se que o sistema é contínuo, ao passo que no segundo caso o sistema é discreto. Sistemas contínuos e discretos podem, portanto, ser descritos da seguinte maneira, respectivamente:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2.2)$$

sendo que \mathbf{F} e \mathbf{G} são funções vetoriais genéricas, \mathbf{x} é o vetor de estado e \mathbf{u} é o vetor de entrada. Quando \mathbf{F} e \mathbf{G} não dependem explicitamente de t diz-se que o sistema é autônomo. Caso contrário, o sistema é dito não-autônomo. Frequentemente, nem todos os estados do sistema são observados, mas apenas alguns deles, ou mesmo uma combinação (possivelmente não-linear) deles. Nesses casos é comum definir uma função de observação, ou função de saída descrita por:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2.3)$$

sendo que \mathbf{H} é uma função vetorial genérica e \mathbf{y} é o vetor saída de dimensão p . Uma definição análoga a (2.3) existe para sistemas discretos.

Um sistema cujo comportamento temporal é descrito por uma “Lei” como por exemplo as equações (2.1) e (2.2), é chamado determinístico. Por outro lado, um sistema cujo comportamento não é descrito por nenhuma “Lei” dinâmica é chamado

aleatório. Cabe aqui salientar que um sistema aleatório pode ser não linear. Portanto, não-linearidade e determinismo são propriedades diferentes dos sistemas.

Uma diferença de interesse entre sistemas lineares e não-lineares é que pequenas variações em parâmetros de sistemas lineares estáveis levam apenas a mudanças quantitativas na dinâmica, ao passo que pequenas mudanças em parâmetros de sistemas não-lineares podem produzir variações qualitativas na dinâmica de tais sistemas, ou em outras palavras, observam-se variações na estrutura das soluções do sistema. Quando isso ocorre, diz-se que o sistema passou por uma bifurcação.

2.2 ATRATORES

Atratores são regiões do espaço de estado (o estado da fase é um espaço particular obtido quando uma coordenada é a derivada temporal da anterior) para as quais as soluções do sistema convergem, ou seja, são regiões onde a solução do sistema é atraída à medida que $t \rightarrow \infty$. Matematicamente falando, há diversas definições de atratores e nem todas são universalmente aceitas. Para propósito do presente texto, não é necessário ter uma definição formal de atrator, mas cabe salientar que:

1) O único tipo de atrator que pode ser apresentado por um sistema linear, autônomo e estruturalmente estável é um ponto fixo. Outros tipos de atratores, tais como ciclos limite de diversas periodicidades, toros, e atratores caóticos são observados somente em sistemas não-lineares;

2) Por definição, um atrator é um objeto estacionário, pois é definido como uma região para a qual convergem as soluções quando $t \rightarrow \infty$. Sendo assim, uma série temporal não estacionária, ou um sistema variante no tempo, por definição não convergem para um único atrator;

3) À medida que um sistema sofre uma bifurcação ele passa de um atrator para outro, qualitativamente diferente do primeiro.

2.3 BIFURCAÇÕES

A saída de um sistema linear autônomo que seja dinâmica e estruturalmente estável, ou não autônomo, mas com entrada constante, convergirá para um valor fixo, chamado de ponto fixo ou ponto de equilíbrio. Como as soluções do sistema dinâmico em questão são atraídas para esse ponto de equilíbrio, o mesmo é chamado atrator. A variação de um dos parâmetros deste sistema linear alterará a localização desse ponto de equilíbrio, mas não será capaz de transformar este ponto em algum outro tipo de atrator. Uma exceção ocorre quando o sistema se torna marginalmente estável (com pelo menos um autovalor sobre o eixo imaginário $j\omega$) ou mesmo instável.

Uma das características mais interessantes de sistemas não lineares é que tais sistemas podem convergir para atratores qualitativamente diferentes dependendo das condições iniciais ou mesmo dos valores de seus parâmetros. Também, variações em tais parâmetros podem resultar em mudanças qualitativas no atrator do sistema. Quando isso acontece, diz-se que o sistema bifurcou. Matematicamente, uma bifurcação ocorre quando pelo menos um dos autovalores da matriz jacobiana do sistema (2.1) atravessa o eixo $j\omega$ em qualquer direção. No caso de sistemas discretos, a bifurcação ocorre quando pelo menos um dos autovalores da matriz jacobiana do sistema (2.2) atravessa o círculo de raio unitário.

2.4 PONTOS DE BIFURCAÇÃO COMPLEXOS

A estrutura das soluções de muitos problemas descritos por equações diferenciais ordinárias não-lineares pode mudar drasticamente em alguns pontos onde soluções periódicas emergem de soluções estacionárias sob lenta variação de algum parâmetro, pontos estes chamados de pontos de bifurcação complexos.

Tais pontos de bifurcação podem ser classificados como Sub-críticos ou Super-críticos, conforme as ilustrações abaixo

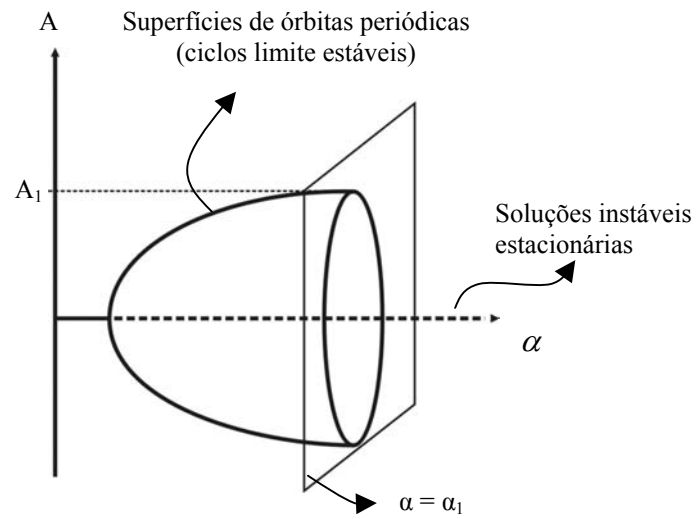


Fig. 2.1 – Bifurcação Super-crítica

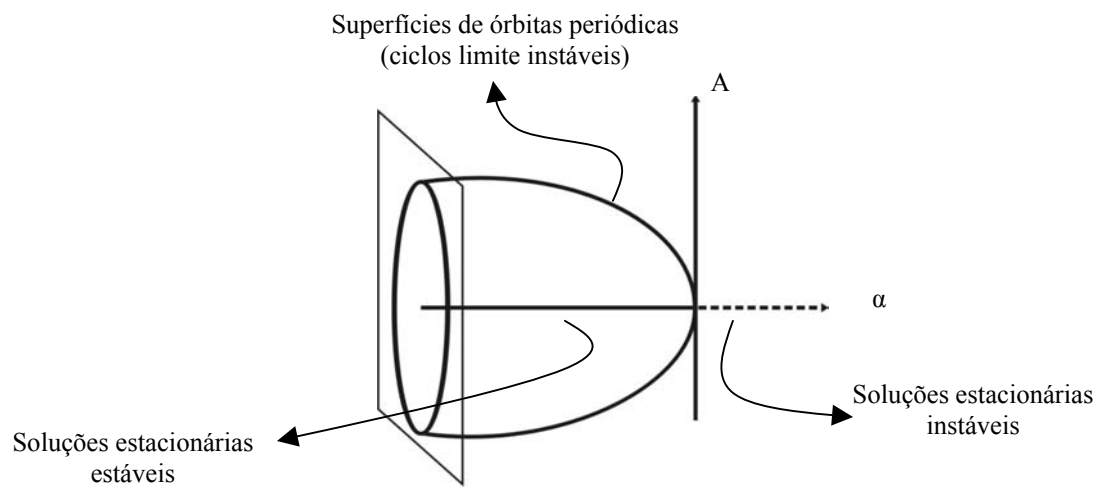


Fig. 2.2 – Bifurcação Sub-crítica

CAPÍTULO 3

TÉCNICAS DE TROCAS DE MOMENTO ANGULAR

Um giroscópio é um dispositivo autônomo que proporciona uma direção inercial de referência através da propriedade da rigidez do momento angular. Eles podem ser usados para fornecer informação da atitude para um sistema de controle autônomo ou ainda podem gerar torques de controle pelas técnicas de troca de momento angular. Contudo, em geral, os giroscópios são muito pequenos com relação ao veículo no qual estão instalados e os torques produzidos por eles não produzem efeitos sobre o veículo. Desta forma, eles devem fornecer dados para o controle de atuadores, os quais aplicam grandes torques no satélite. Quando forças aerodinâmicas são disponíveis, *aileron*s ou lemes podem fornecer estes torques de controle. No espaço, todavia, o ambiente não permite o uso de superfícies de controle convencionais, logo, outros métodos tiveram de ser desenvolvidos. A técnica de interesse, neste caso, é o uso da troca de momento angular. Esses métodos usam a redistribuição de momento angular dentre os vários subsistemas do satélite. Desta forma, se um *giro*, grande o suficiente, for usado num veículo, seu torque será capaz de controlar diretamente a atitude. Há vários tipos de conceitos e dispositivos para troca de momento angular. A seleção de uma técnica em particular é função da necessidade da missão, tamanho do satélite e outras restrições. Vários dispositivos e técnicas serão aqui apresentados.

3.1 Estabilização por Rotação

A forma mais simples de aplicar momento angular para controle de atitude é fazer com que todo o satélite gire sobre um único eixo. É claro, isso impõe severas restrições no projeto e aplicações da missão, porém é um método estável e passivo. Em outras palavras, um grande corpo girante é giroscopicamente rígido. Para satisfazer o critério de estabilidade as restrições de projeto devem incluir o requisito de que o veículo seja configurado para girar em torno do eixo principal de maior momento de inércia. Correções periódicas de atitude são feitas, com pequenos empuxos a gás, para eliminar o efeito das pequenas perturbações de torque, que podem fazer com que o vetor momento angular precesse lentamente a partir da direção desejada (normal à órbita).

3.2 Partes Internas Móveis

Muitas missões não podem ser executadas simplesmente girando o satélite para obter rigidez giroscópica, assim, outras técnicas de troca de momento angular foram desenvolvidas. Satélites que empregam estes métodos situam-se em uma grande classe de sistemas dinâmicos designados como *corpos com partes internas móveis*. Veículos possuindo giros representam uma categoria específica, pois o centro de massa do satélite não se move quando se aplicam torques para controle de atitude. Considere primeiramente o caso geral de um corpo com massa interna móvel. Para esse caso, os primeiros trabalhos analisando os efeitos no movimento de atitude de um satélite foram realizados por Roberson (1958) e Grubin (1962). Ambos desenvolveram as equações do movimento para um corpo rígido contendo um número arbitrário de corpos rígidos. Roberson escolheu o centro de massa do sistema como ponto de referência para as equações de movimento. O inconveniente desta formulação é que os momentos de inércia do corpo principal (ou plataforma), variam no tempo, porque o ponto de referência está se movendo, relativamente ao satélite, com o movimento das massas em seu interior. Grubin contornou esta complicação escolhendo o centro de massa da plataforma como ponto de referência. Assim, os momentos de inércia da plataforma são constantes relativamente ao sistema de coordenadas fixo no corpo, ou seja, na plataforma. As equações de movimento resultantes não são mais simples que àquelas obtidas por Roberson, mas a escolha do centro de massa da plataforma como ponto de referência (e não o centro de massa do sistema) mostra - se ser mais fisicamente coerente. Além disto, essa escolha permite que o movimento de uma massa interna seja expresso de uma forma mais simples relativamente aos eixos do satélite.

Na aurora da era espacial, Grubin mostrou que a equação de Euler do momento angular não necessita estar referenciada somente a casos de origem fixa ou a centros de massa. De fato, a origem pode ser arbitrária e ter movimento arbitrário, desde que um termo adicional seja incluído na equação. Considere a equação clássica

$$\mathbf{M}_o = \frac{d\mathbf{h}_o}{dt},$$

que relaciona o momento das forças externas em torno do ponto O (centro de massa) com o momento angular em torno do ponto O (figura 3.1). Introduzindo a equação

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_o,$$

onde \mathbf{F} é uma força externa aplicada, m é a massa total do sistema e \mathbf{a}_o é a aceleração do centro de massa. Considere um ponto arbitrário A com movimento arbitrário. O momento angular e torque em torno de O , conhecidos o momento angular e torque em torno de A , são dados por:

$$\mathbf{h}_o = \mathbf{h}_A - \mathbf{r}_A m_t \times \dot{\mathbf{r}}_A,$$

$$\mathbf{M}_o = \mathbf{M}_A - \mathbf{r}_A \times \mathbf{F},$$

$$\mathbf{a}_o = \mathbf{a}_A + \ddot{\mathbf{r}}_A,$$

onde \mathbf{r}_A é o vetor posição indo de A até O . Combinando estas equações tem-se

$$\mathbf{M}_A - \mathbf{r}_A \times m_t (\mathbf{a}_A + \ddot{\mathbf{r}}_A) = \frac{d}{dt} (\mathbf{h}_A - m_t \mathbf{r}_A \times \dot{\mathbf{r}}_A),$$

ou

$$\mathbf{M}_A = \dot{\mathbf{h}}_A + \mathbf{S}_A \times \mathbf{a}_A,$$

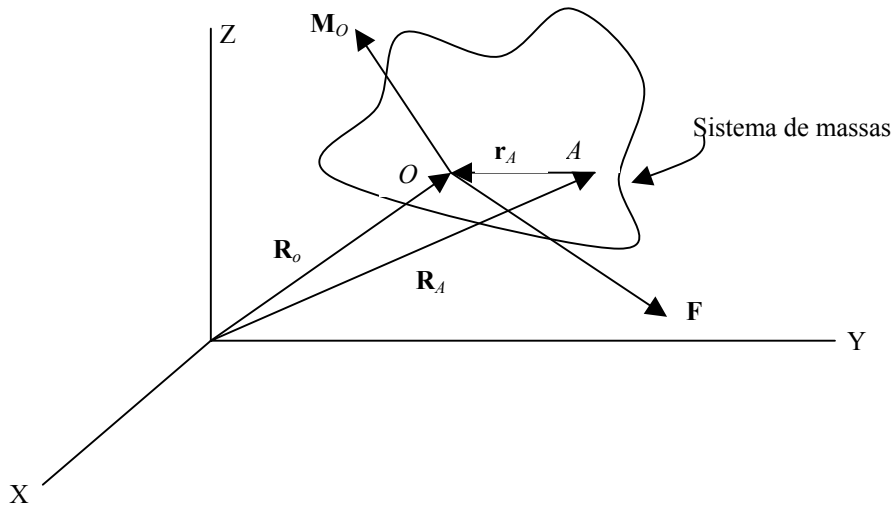


Fig. 3.1 – Movimento com relação a um ponto arbitrário.

onde $\mathbf{S}_A \equiv m_I \mathbf{r}_A$ é o momento estático do corpo com relação ao ponto A e \mathbf{a}_A é a aceleração absoluta do ponto A . Assim, para um corpo rígido com 1, 2, 3 como eixos principais e origem em um ponto arbitrário, as *equações de Euler generalizadas* tornam-se

$$\begin{aligned} M_1 &= I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 + (S_2 a_3 - S_3 a_2), \\ M_2 &= I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 + (S_3 a_1 - S_1 a_3), \\ M_3 &= I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 + (S_1 a_2 - S_2 a_1). \end{aligned}$$

3.3 Dual Spin

Há um caso especial onde movimentos internos são de grande interesse para o projetista de satélites. Esta é a situação quando um *giro* ou um rotor é usado para redistribuir momento angular, por meio da alteração de suas velocidades ou do fenômeno de *girotorqueamento*. Tais técnicas incluem o uso de *volantes de inércia* que possuem um momento angular residual por questões de manutenção de rigidez, giros para aplicação de torque de controle quando necessário, e rodas de reação com momento angular nominal em torno de zero, mas que alteram dados de velocidade para aplicar torques em torno de seus eixos de giro.

A técnica de particular interesse, que será considerada nesse trabalho, evoluiu da idéia simples de girar o veículo, usada originalmente no satélite Explorer I. A primeira limitação aqui está no fato de não se poder empregar sensores de orientação bem como antenas, pois todas as partes giram em torno do eixo de rotação. A próxima etapa lógica na evolução de tais satélites foi combinar uma plataforma orientada e um rotor. Este conceito apareceu para manter a vantagem da rigidez giroscópica e permitir uma plataforma orientada para instrumentos científicos, antenas, etc. Satélites com grandes rotores e plataformas orientadas são chamados de *dual spinners*. A maioria dos satélites de comunicação comerciais, lançados nos anos 70, tinha esta configuração. De fato, os satélites da Organização Internacional de Satélites de Telecomunicação (INTELSAT - *International Telecommunications Satellite Organization*) foram concebidos neste conceito desde 1968. O primeiro deles foi conhecido como INTELSAT III, cujo eixo de giro coincidia com o eixo principal de maior momento de inércia. A partir de 1971 surgiram os projetos INTELSAT IV. Diferentemente do INTELSAT III, que tinha o elipsóide de inércia achatado, este satélite tinha o elipsóide

de inércia alongado, isto é, ele girava em torno do eixo principal de menor momento de inércia. A plataforma não girava e era apontada para a Terra, enquanto o rotor mantinha a rigidez giroscópica.

A condição da estabilidade de giro em torno do eixo de maior momento de inércia, para corpos rígidos em presença de dissipação, estimulou a questão para os *dual spinners*. Os primeiros projetos, assim como o INTELSAT III, tinham plataformas relativamente pequenas ou antenas que não giravam e rotores girando em torno do eixo principal de maior momento de inércia. Adotou-se o critério de estabilidade em questão e o desempenho em vôo demonstrou que estes eram essencialmente estáveis. Porém, as restrições de diâmetro das coifas dos veículos lançadores limitavam o diâmetro do rotor. A condição de estabilidade de giro em torno do eixo de maior momento de inércia efetivamente limitava o tamanho de satélites girantes. Todavia, havia forte demanda por grandes satélites de comunicação no meio da década 60.

A Força Aérea norte americana decidiu tentar e contornar esta limitação orbitando um *dual-spinner* experimental cujo rotor girava sobre o eixo de menor momento de inércia. Este foi o Satélite de Comunicações Táticas (TACSAT). O primeiro problema foi desenvolver um critério de estabilidade apropriado para tal configuração. A *Hughes Aircraft Company* desenvolveu um conjunto de condições relacionadas com mecanismos de dissipação de energia na plataforma e rotor. Descrevendo resumidamente: *a colocação de dispositivos de dissipação na plataforma de um dual spin poderia compensar o efeito desestabilizador da dissipação no rotor*. Além disto, um grande amortecedor de nutação montado na plataforma, proveria o sistema com estabilidade nutacional em torno do eixo de menor momento de inércia. A referida empresa patenteou este conceito e o chamou de *Gyrostat*. Este desenvolvimento mostrou que o tamanho da plataforma não estava mais limitado a restrições na relação de inércias. O rotor não precisa ser rígido, mas, para garantir a estabilidade, ele não pode dissipar energia numa taxa maior que àquela dissipada pela plataforma. Naquela época, argumentos de estabilidade dos *dual spinners* não eram rigorosos, mas a Força Aérea decidiu continuar em frente com o TACSAT o qual foi lançado em fevereiro de 1969 com uma performance de sucesso, o que permitiu continuação da série INTELSAT IV.

Vários argumentos sobre estabilidade foram considerados por Likins (1967), O fato do critério de giro em torno do eixo de maior inércia não se aplicar aos *dual spinners* foi descoberto independentemente por A. J. Iorillo (1965). No entanto, a

disseminação dos primeiros resultados sofreu um atraso devido ao primeiro trabalho de Landon ter sido rejeitado para publicação, em 1962. O problema foi tratado avaliando o problema do balanço força – torque em amortecedores, os quais tendiam a estabilizar o movimento. Landon e B. Stewart (1964) da RCA publicaram uma aproximação do método do sumidouro de energias que tinha sido aplicado anteriormente para satélites girantes. Este trabalho foi limitado a *dual spinners* com simetria axial e dissipador de energia de massa nula em um dos corpos. Ao mesmo tempo, Iorillo (1965) estava desenvolvendo o conceito *Gyrostat* na *Hughes* e, em 1965, apresentou argumentos estendendo a tecnologia para satélites com simetria axial com amortecedor em ambos os corpos.

Baseado em Kaplan (1976) páginas 175 a 178.

CAPÍTULO 4

EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

O sistema sob investigação consiste em um satélite *dual-spin* com uma plataforma assimétrica, contendo um dissipador do tipo massa-mola-amortecedor e um rotor balanceado, conforme a Figura 4.1. Foi adotado um dissipador do tipo massa-mola-amortecedor por ser mais eficiente, que àquele toroidal a fluído, para pequenos ângulos de nutação, conforme mostrou Cochran e Thompson (1980). Resultados mostraram que a estabilidade independe do tipo de amortecedor, para qualquer movimento de nutação, embora ocorra mudança nas constantes de tempo.

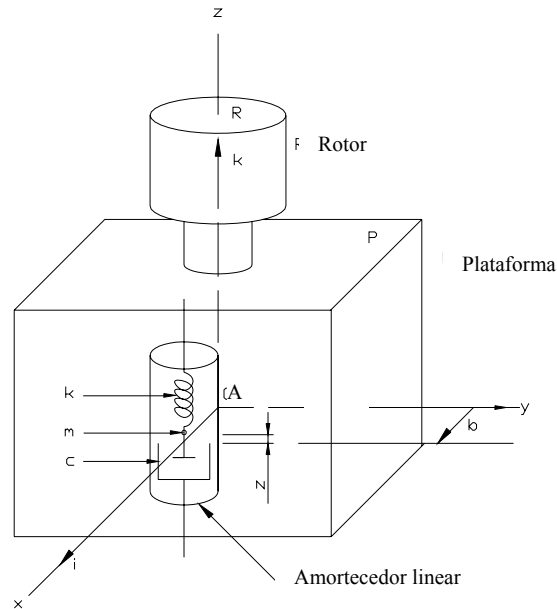


Fig. 4.1 - Satélite *dual-spin* com amortecedor na plataforma.

Fonte: Kaplan (1976), página 48

Desprezando o movimento de translação o sistema possui cinco graus de liberdade que são $z, \theta_x, \theta_y, \theta_z$ e θ_r , onde z representa a posição da massa do dissipador em relação ao sistema de referência x, y, z , centrado no ponto A , fixo no corpo; θ_x, θ_y e θ_z representam as rotações em torno dos eixos do sistema de referência e $\dot{\theta}_r$ representa a rotação do rotor em relação à plataforma. A massa m do dissipador está centrada no eixo x e se move paralelamente ao eixo z a uma distância b do eixo y . O dissipador é composto por uma mola de constante elástica k e amortecedor com

constante viscosa c . O rotor é centrado no eixo z e a rotação do mesmo é permitida apenas em relação àquele eixo. O sistema rotaciona em torno do centro de massa G , que coincide com A quando $z = 0$. O sistema (incluindo rotor e plataforma) tem massa total m_t e os momentos principais de inércia são I_x, I_y, I_z , quando $z = 0$. Note que a posição de A com relação ao centro de massa G (considerado fixo na órbita) e os momentos principais de inércia do sistema em torno de A , variam com a posição da massa do amortecedor. O rotor tem um momento de inércia em torno do eixo z , I_r , que está incluído no momento principal de inércia do sistema I_z , descrito acima. A intenção aqui é investigar a resposta dinâmica do sistema quando sujeito a um torque variante T_r aplicado nos mancais do rotor.

As equações de movimento serão obtidas aqui usando as Equações de Lagrange com dissipação (Thomson, 1993). Kaplan (1976) e Hughes (1986) obtiveram as mesmas equações de movimento utilizando a equação do momento angular generalizado desenvolvida por Grubin (1962).

A energia cinética total, considerando o sistema formado por partículas de massa m_i , é dada por

$$T = \frac{1}{2} m_t v_G^2 - \frac{1}{2} m_t v_{A/G}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_{i/A}^2, \quad (4.1)$$

onde T representa a energia cinética total; $v_G, v_{A/G}$ e $v_{i/A}$ são, respectivamente, a velocidade do centro de gravidade, a velocidade do ponto A em relação ao centro de gravidade e a velocidade da partícula i em relação ao ponto A . O primeiro termo da Equação (4.1) representa a energia cinética considerando como se toda a massa estivesse concentrada no centro de massa G . O segundo termo refere-se a correção associada ao movimento do sistema de referência x, y, z em relação ao centro de massa G . O terceiro termo refere-se a energia cinética do sistema em relação ao ponto A (Meehan e Asokanthan, 1996).

O deslocamento de A em relação a G é proporcional ao deslocamento da massa m do dissipador na forma

$$\mathbf{r}_{A/G} = -\mu z \mathbf{k}, \quad (4.2)$$

com $\mu \equiv m / m_t$.

A velocidade do ponto A em relação a G , supondo que a plataforma gire com uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ em torno de A , depende do movimento da massa m na forma:

$$\dot{\mathbf{r}}_{A/G} = -\mu(z\omega_y \mathbf{i} - z\omega_x \mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}). \quad (4.3)$$

O segundo termo da Equação (4.1) pode ser reescrito usando as Equações (4.2) e (4.3), a saber:

$$\frac{1}{2} m_t v_{A/G}^2 = \frac{1}{2} m \mu \dot{z}^2 + \frac{1}{2} m \mu z^2 \omega_y^2 + \frac{1}{2} m \mu z^2 \omega_x^2. \quad (4.4)$$

O tensor de inércia do sistema em relação ao ponto A ($z \neq 0$) é dado por

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x + mz^2 & 0 & -mbz \\ 0 & I_y + mz^2 & 0 \\ -mbz & 0 & I_z \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

A energia cinética do sistema em relação ao ponto A consiste da soma de três parcelas. A primeira parcela é devido à velocidade angular da plataforma e é dada por

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (I_x + mz^2) \omega_x^2 + \frac{1}{2} (I_y + mz^2) \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 - mbz \omega_x \omega_z. \quad (4.6)$$

A segunda parcela é devido à velocidade angular do rotor em relação à plataforma, $\boldsymbol{\omega}_r = \omega_r \mathbf{K}$, resultando no acréscimo de dois termos devido ao termo quadrático em ω_z na Equação (4.6)

$$\frac{1}{2} I_r \omega_r^2 + I_r \omega_r \omega_z. \quad (4.7)$$

A terceira parcela é devido à velocidade da massa do amortecedor em relação à plataforma. Além do termo referente à velocidade em si, deve-se acrescentar o termo devido ao momento angular em relação a A ,

$$(\mathbf{b}\mathbf{i} + \mathbf{z}\mathbf{k}) \times m\dot{\mathbf{z}}\mathbf{k} = -mb\dot{\mathbf{z}}\mathbf{j}. \quad (4.8)$$

Logo, a terceira parcela fica:

$$\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{z}}^2 - mb\dot{\mathbf{z}}\omega_y. \quad (4.9)$$

Portanto, a energia cinética do sistema em relação ao ponto A é

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_{i/A}^2 &= \frac{1}{2}(I_x + mz^2)\omega_x^2 + \frac{1}{2}(I_y + mz^2)\omega_y^2 + \frac{1}{2}I_z\omega_z^2 - mbz\omega_x\omega_z + \frac{1}{2}I_r\omega_r^2 \\ &+ I_r\omega_r\omega_z + \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{z}}^2 - mb\dot{\mathbf{z}}\omega_y. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Desconsiderando o movimento do centro de massa e substituindo as Equações (4.4) e (4.10) na Equação (4.1) tem-se que a energia cinética do sistema é dada por:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}[I_x + m(1-\mu)z^2]\omega_x^2 - mbz\omega_x\omega_z + \frac{1}{2}[I_y + m(1-\mu)z^2]\omega_y^2 + \frac{1}{2}m(1-\mu)\dot{\mathbf{z}}^2 \\ &+ \frac{1}{2}I_z\omega_z^2 + \frac{1}{2}I_r\omega_r^2 + I_r\omega_r\omega_z - mb\dot{\mathbf{z}}\omega_y \end{aligned} \quad (4.11)$$

A energia potencial do sistema é a energia potencial da mola, dada por:

$$V = \frac{1}{2}kz^2. \quad (4.12)$$

A energia dissipada no amortecedor é dada por:

$$D = \frac{1}{2}c\dot{\mathbf{z}}^2. \quad (4.13)$$

As Equações de Lagrange do movimento podem ser escritas na forma matricial

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}} \right] + [\omega] \left[\frac{\partial T}{\partial \omega} \right] = \mathbf{M}, \quad (4.14)$$

onde $\mathbf{M} = [M_x \ M_y \ M_z]^T$ é o vetor dos componentes do torque e $[\omega]$ é a matriz anti-simétrica:

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Substituindo a Equação (4.11) na Equação (4.14) tem-se

$$\begin{aligned} I_x \dot{\omega}_x - (I_y - I_z) \omega_y \omega_z + I_r \omega_r \omega_y + m(1 - \mu) \dot{\omega}_x z^2 - m(1 - \mu) \omega_y \omega_z z^2 \\ + 2m(1 - \mu) \omega_x z \dot{z} - mb \dot{\omega}_z z - mb \omega_x \omega_y z = M_x, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} I_y \dot{\omega}_y - (I_z - I_x) \omega_x \omega_z - I_r \omega_r \omega_x + m(1 - \mu) \dot{\omega}_y z^2 + m(1 - \mu) \omega_x \omega_z z^2 \\ + 2m(1 - \mu) \omega_y z \dot{z} - mb \ddot{z} + mb \omega_x^2 z - mb \omega_z^2 z = M_y, \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$I_z \dot{\omega}_z - (I_x - I_y) \omega_x \omega_y + I_r \dot{\omega}_r + mb \omega_y \omega_z z - 2mb \omega_x \dot{z} - mb \dot{\omega}_x z = M_z. \quad (4.18)$$

As Equações (4.16) a (4.18) formam um sistema de três equações a cinco incógnitas, à saber, ω_x , ω_y , ω_z , ω_r e z . Duas equações adicionais são requeridas: uma associada com o torque do rotor e a outra com a força no amortecedor. Sabe-se que

$$T_r = I_r (\dot{\omega}_z + \dot{\omega}_r), \quad (4.19)$$

onde T_r é o módulo do torque aplicado no eixo do rotor. A Equação (4.19) que descreve o balanço entre a aceleração e o torque que governam o movimento relativo do rotor desconsidera qualquer tipo de torque de atrito devido aos mancais. Da mesma forma, a

equação que estabelece o balanço entre a aceleração e a força da massa do amortecedor obtida como sendo:

$$m(1-\mu)\ddot{z} + c\dot{z} + kz - m(1-\mu)(\omega_x^2 + \omega_y^2)z + mb\omega_x\omega_z - mb\dot{\omega}_y = 0. \quad (4.20)$$

CAPÍTULO 5

SIMULAÇÃO DINÂMICA DE UM SATÉLITE *DUAL SPIN*

A seguir são apresentados os resultados utilizando o Simulink, um software de extensão do Matlab, dotando-o de uma interface e janelas acionadas por ícones e menus, apropriadamente para a construção de modelos de simulação de sistemas dinâmicos na forma de diagrama de blocos. O modelo do satélite *Dual-Spin*, descrito pelas equações (8.7) a (8.12), contendo os valores de parâmetros dados pela tabela 9.1, foi inserido num computador. O diagrama de blocos é mostrado no apêndice C

A intenção foi verificar o comportamento das variáveis $x_1, x_2, \omega_x, \omega_y$ e ω_z , em regime permanente, para determinados valores iniciais de ω_r, ω_x e ω_y , fixando-se valores iniciais nulos para x_1 e x_2 . Os resultados são mostrados a seguir.

As tabelas 5.1 e 5.2 e as Figuras 5.1 e 5.2 mostram os resultados de várias simulações (numeradas de 1 a 25 nas tabelas e mostradas de 1 a 19 nas figuras). Cada curva, nas Figuras 5.1 e 5.2, representa uma das seis últimas colunas das tabelas 5.1 e 5.2, respectivamente. É o resultado da interpolação dos vários valores tabelados por coluna. Os valores tabelados nessas colunas são valores em regime permanente. Cada curva representa uma variável, a saber x_1 e x_2 , a posição e a velocidade da massa do amortecedor são representadas pelas cores azul e cian, respectivamente; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ e ω_r , as velocidades angulares da plataforma em torno dos eixos x, y, z e a velocidade angular do rotor em relação à plataforma, são representadas pelas curvas verde, vermelha, cinza e laranja, respectivamente.

As variáveis x_2 e ω_y têm valores nulos, em regime permanente, para todas as simulações. A curva azul mostra que a posição da massa do amortecedor pode atingir valores inconcebíveis (mais de 20 metros!) em regime permanente. É óbvio que isso não ocorre, na prática pressupõe-se uma liberdade de posição não muito maior que aproximadamente 1 metro acima e abaixo do plano xy .

As simulações que apresentam valores iniciais crescentes para ω_r enquanto mantém os mesmos valores iniciais para $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, mostram claramente uma troca de momento angular entre o rotor e a plataforma. Pode-se observar, por exemplo, na

Figura 5.1, que quando ω_r aumenta em regime permanente, observa-se um decréscimo em ω_z (simulação 6, 10 e 16) e vice-versa (simulação 9 e 14). O mesmo se observa, com menor intensidade, na Fig. 5.2. Para valores iniciais da velocidade relativa do rotor acima de 30 rad/s ($\cong 286$ rpm) as velocidades angulares em torno dos eixos x e y vão para zero.

Um caso prático é a condição de operação nominal ($\omega_x = \omega_y = z = 0$, $\omega_r = \Omega_r =$ constante, $\omega_z = \Omega_p =$ constante, $T_r = 0$). Os resultados mostram que é possível obter $\omega_z = \Omega_p$.

Tabela 5.1 – Manobrabilidade de um satélite *Dual-Spin* lançado com ω_x e ω_y iguais a 6,28 rad/s

Sim.	Valores iniciais				Valores em Regime Permanente					
	ω_r (rad/s)	ω_z (rad/s)	ω_x (rad/s)	ω_y (rad/s)	x_1 (m)	x_2 (m/s)	ω_x (rad/s)	ω_y (rad/s)	ω_z (rad/s)	ω_r (rad/s)
1	0	0	6,28	6,28	-21,00	0	0	0	0	0
2	1	0	6,28	6,28	4,15	0	-1,38	0	0,80	0,20
3	2	0	6,28	6,28	-10,00	0	1,43	0	0,87	1,12
4	3	0	6,28	6,28	8,80	0	-1,40	0	1,40	1,52
5	4	0	6,28	6,28	21,00	0	-1,46	0	0,66	3,33
6	5	0	6,28	6,28	0,00	0	0,00	0	-3,73	8,73
7	6	0	6,28	6,28	0,00	0	0,00	0	1,00	5,00
8	7	0	6,28	6,28	22,30	0	-1,45	0	1,02	6,00
9	8	0	6,28	6,28	22,00	0	-1,25	0	1,77	6,80
10	9	0	6,28	6,28	0,00	0	0,00	0	-4,25	13,25
11	10	0	6,28	6,28	-23,00	0	1,45	0	1,35	8,65
12	15	0	6,28	6,28	-22,15	0	1,43	0	2,07	12,90
13	20	0	6,28	6,28	-17,10	0	1,35	0	3,95	16,10
14	25	0	6,28	6,28	0,00	0	0	0	7,27	17,73
15	30	0	6,28	6,28	0,00	0	0	0	1,02	28,98
16	35	0	6,28	6,28	0,00	0	0	0	-1,49	36,49
17	40	0	6,28	6,28	0,00	0	0	0	0,60	39,40
18	45	0	6,28	6,28	0,00	0	0	0	0,95	44,05
19	50	0	6,28	6,28	0,00	0	0	0	1,21	48,79
20	60	0	6,28	6,28	0,00	0	0	0	0,40	59,60
21	70	0	6,28	6,28	0,00	0	0	0	0,90	69,09
22	80	0	6,28	6,28	0,00	0	0	0	0,17	79,83
23	90	0	6,28	6,28	0,00	0	0	0	-0,04	90,04
24	100	0	6,28	6,28	0,00	0	0	0	0,07	99,93
25	150	0	6,28	6,28	0,00	0	0	0	-0,06	150,05

RESULTADOS SIMULINK

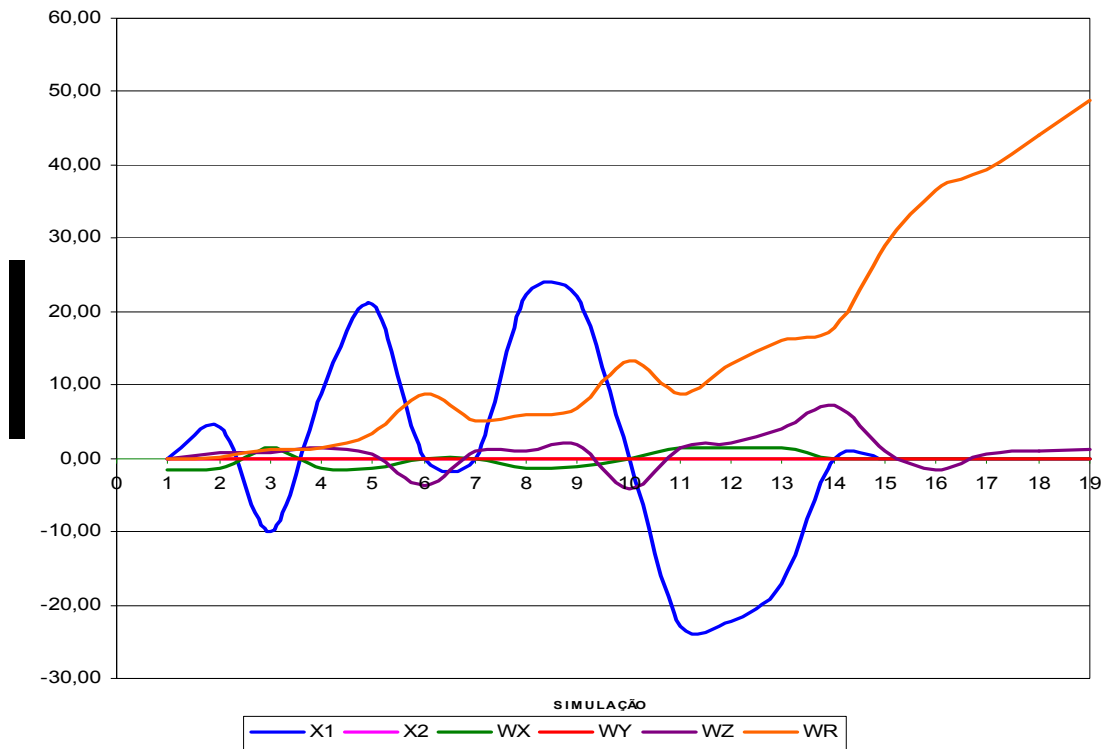


Fig. 5.1 – Valores em regime permanente para $x_1, x_2, \omega_x, \omega_y$ e ω_r .

Tabela 5.2 – Manobrabilidade de um satélite *Dual-Spin* lançado com

ω_x, ω_y e ω_z iguais a 6,28 rad/s

Sim.	Valores iniciais				Valores em regime permanente					
	ω_r (rad/s)	ω_z (rad/s)	ω_x (rad/s)	ω_y (rad/s)	x_1 (m)	x_2 (m)	ω_x (rad/s)	ω_y (rad/s)	ω_z (rad/s)	ω_r (rad/s)
1	0	6,28	6,28	6,28	-20,00	0	1,46	0	0,94	5,33
2	1	6,28	6,28	6,28	0,00	0	1,44	0	1,45	5,80
3	2	6,28	6,28	6,28	-22,30	0	1,45	0	1,18	7,10
4	3	6,28	6,28	6,28	18,70	0	-1,43	0	1,72	7,55
5	4	6,28	6,28	6,28	0,00	0	0,00	0	-3,20	13,48
6	5	6,28	6,28	6,28	24,30	0	-1,45	0	1,38	9,90
7	6	6,28	6,28	6,28	0,00	0	0,00	0	2,71	14,99
8	7	6,28	6,28	6,28	-19,00	0	1,42	0	2,39	10,88
9	8	6,28	6,28	6,28	19,40	0	-1,42	0	2,40	11,87
10	9	6,28	6,28	6,28	-23,00	0	1,44	0	2,00	13,27
11	10	6,28	6,28	6,28	-20,00	0	1,42	0	2,45	13,85
12	15	6,28	6,28	6,28	-19,40	0	1,38	0	3,50	17,80
13	20	6,28	6,28	6,28	-22,80	0	1,41	0	3,30	22,96
14	25	6,28	6,28	6,28	-20,00	0	1,38	0	4,32	26,96

15	30	6,28	6,28	6,28	0,00	0	0	0	8,43	27,85
16	35	6,28	6,28	6,28	0,00	0	0	0	8,99	32,29
17	40	6,28	6,28	6,28	0,00	0	0	0	8,10	38,18
18	45	6,28	6,28	6,28	0,00	0	0	0	7,78	43,49
19	50	6,28	6,28	6,28	0,00	0	0	0	7,76	49,52
20	60	6,28	6,28	6,28	0,00	0	0	0	7,79	58,49
21	70	6,28	6,28	6,28	0,00	0	0	0	7,11	69,17
22	80	6,28	6,28	6,28	0,00	0	0	0	1,20	85,08
23	90	6,28	6,28	6,28	0,00	0	0	0	6,82	89,46
24	100	6,28	6,28	6,28	0,00	0	0	0	6,00	100,25
25	150	6,28	6,28	6,28	0,00	0	0	0	6,76	149,52

Novamente, plotando estas simulações simultaneamente, tem-se mais um panorama de comportamento de um satélite *Dual-Spin* quando diversos valores de torque do rotor (Fig. 5.2).

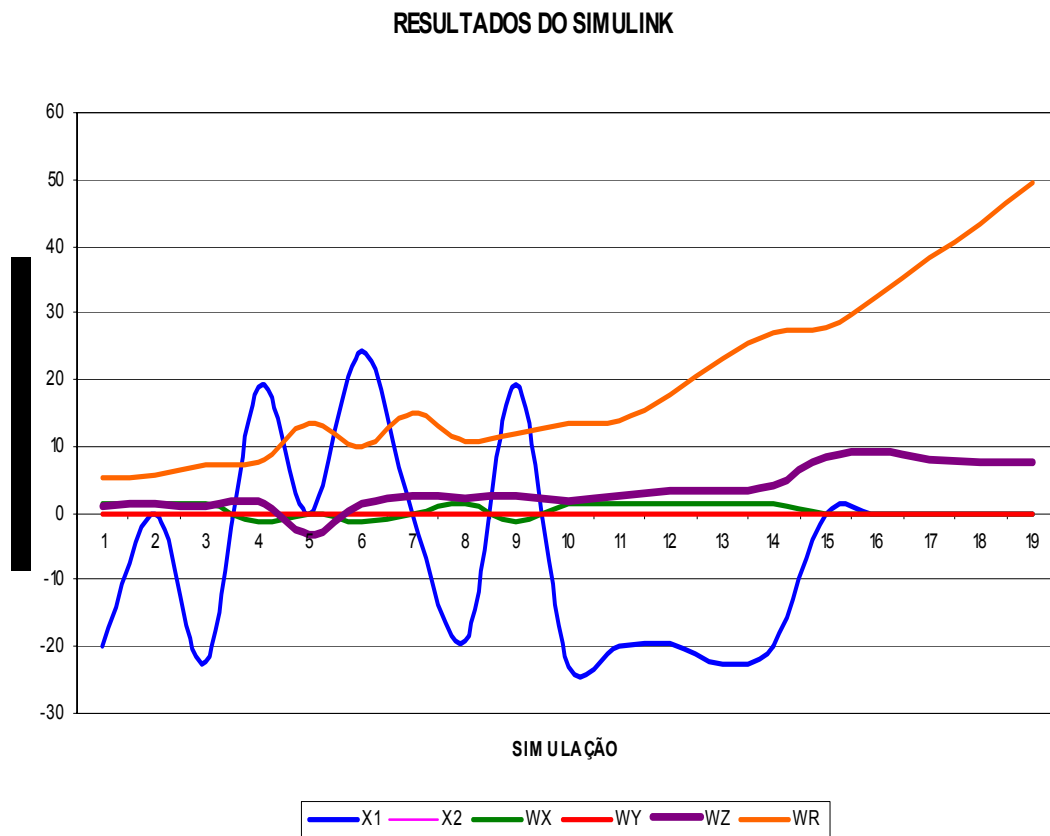


Fig. 5.2 – Valores em regime permanente para $x_1, x_2, \omega_x, \omega_y$ e ω_r .

CAPÍTULO 6

O MÉTODO DOS MÚLTIPLOS TIROS

Pretende-se arquitetar o problema do cálculo numérico de órbitas periódicas e pontos de bifurcação complexos. Uma ferramenta para atingir esse objetivo é usar o método dos múltiplos tiros (criado por Burlish e Stoer, 1966) para resolver o problema de valor de contorno de dois pontos (do inglês, “Two Point Boundary Value Problem – TPBVP”). O método usa uma estimativa inicial como ponto de partida e tenta, iterativamente, chegar a uma solução que satisfaça as condições de contorno dadas.

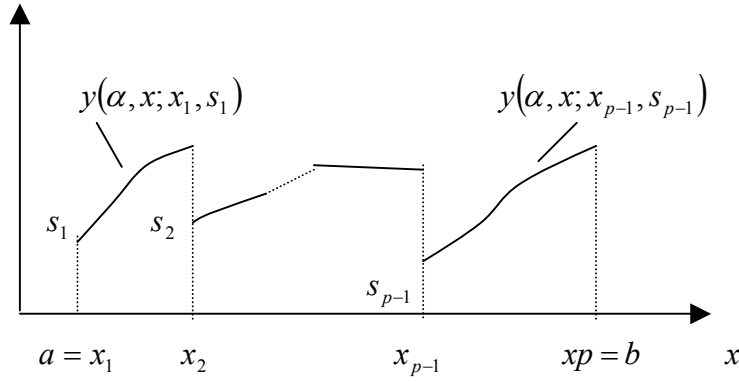


Fig. 6.1 – Esboço do método dos múltiplos tiros

O intervalo $[a, b]$ onde se deseja achar a solução é dividido em p pontos (nós) de modo que $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{p-1} < x_p = b$. Denote $y(\alpha, x; x_k, s_k)$ ($k = 1, \dots, p-1$) como a solução do problema do valor inicial

$$y' = f(\alpha, x, y), \quad y(x_k) = s_k, \quad x \in [x_k, x_{k+1}]. \quad (6.1)$$

Atribui-se a cada nó uma estimativa inicial da solução procurada, ou seja, o nó k é associado a um vetor $s_k \in \mathbf{R}^n$. A partir do valor inicial s_k as equações são integradas de x_k a x_{k+1} . O resultado da integração em x_{k+1} é dado por

$$y(\alpha, x_{k+1}; x_k, s_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(\alpha, x, y) dx + s_k. \quad (6.2)$$

Obviamente o resultado da integração em x_{k+1} , $y(\alpha, x_{k+1}; x_k, s_k)$, não coincide com a estimativa do estado para o nó $k+1$, s_{k+1} . Assim, para $p > 2$, definem-se as funções erro

$$F_k(\alpha, s_k, s_{k+1}) := y(\alpha, x_{k+1}; x_k, s_k) - s_{k+1} = 0, \quad k = 1, \dots, p-2, \quad (6.3)$$

que devem ser levadas para zero conjuntamente com as condições de contorno,

$$F_{p-1}(\alpha, s_1, s_{p-1}) := r(\alpha, s_1, y(\alpha, x_p; x_{p-1}, s_{p-1})) = 0. \quad (6.4)$$

As condições (6.3) e (6.4) definem um sistema de $n(p-1)$ equações não-lineares

$$F(\alpha, s) := \begin{pmatrix} F_1(\alpha, s_1, s_2) \\ \vdots \\ F_{p-2}(\alpha, s_{p-2}, s_{p-1}) \\ F_{p-1}(\alpha, s_1, s_{p-1}) \end{pmatrix}_{n(p-1) \times 1} = 0 \quad \text{com} \quad s := \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_{p-1} \end{pmatrix}_{n(p-1) \times 1}. \quad (6.5)$$

O método de Newton para sistemas não-lineares é utilizado na resolução de (6.5). O método prescreve a atualização iterativa de s por meio da Equação (6.6)

$$s^{j+1} = s^j - \left(\frac{\partial F(\alpha, s^j)}{\partial s} \right)^{-1} F(\alpha, s^j), \quad (6.6)$$

onde o expoente j representa a j -ésima iteração, $F(\alpha, s)$ é dada por (6.5) e

$$\frac{\partial F(\alpha, s)}{\partial s} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial s_{p-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_{p-1}}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial F_{p-1}}{\partial s_{p-1}} \end{bmatrix}_{n(p-1) \times n(p-1)} \quad (6.7)$$

Derivando (6.5) com relação a s , para $k = 1$ a $p - 2$, tem-se

$$G_k := \frac{\partial F_k}{\partial s_k} = \frac{\partial y(\alpha, x_{k+1}; x_k, s_k)}{\partial s_k}; \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial F_k}{\partial s_{k+1}} = -I_{n \times n}; \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial F_k}{\partial s_j} = 0, \quad \forall j \neq k \text{ e } \forall j \neq k+1. \quad (6.10)$$

Para $k = p - 1$ de (6.4) vem:

$$A_1 := \frac{\partial F_{p-1}}{\partial s_1} = \frac{\partial r(\alpha, s_1, y(\alpha, x_p; x_{p-1}, s_{p-1}))}{\partial s_1}; \quad (6.11)$$

$$A_{p-1} := \frac{\partial F_{p-1}}{\partial s_{p-1}} = \frac{\partial r(\alpha, s_1, y(\alpha, x_p; x_{p-1}, s_{p-1}))}{\partial s_{p-1}}; \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial F_{p-1}}{\partial s_j} = 0, \quad \forall j \neq 1 \text{ e } \forall j \neq p-1. \quad (6.13)$$

Assim,

$$\frac{\partial F(\alpha, s)}{\partial s} = \begin{bmatrix} G_1 & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & -I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & G_{p-2} & -I \\ A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{p-1} \end{bmatrix}_{n(p-1) \times n(p-1)} \quad (6.14)$$

O cálculo de cada matriz G pode ser feito aproximando-se a derivada parcial por um quociente de diferenças. Segundo (6.8) G_k é dada por

$$G_k = \frac{\partial F_k}{\partial s_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1(\alpha, x_{k+1}; x_k, s_k)}{\partial s_{k1}} & \dots & \frac{\partial y_1(\alpha, x_{k+1}; x_k, s_k)}{\partial s_{kn}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_n(\alpha, x_{k+1}; x_k, s_k)}{\partial s_{k1}} & \dots & \frac{\partial y_n(\alpha, x_{k+1}; x_k, s_k)}{\partial s_{kn}} \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad (6.15)$$

onde s_{kj} denota a j -ésima componente do vetor s_k .

A j -ésima coluna de G_k , G_{kj} , pode ser expressa por $\Delta y_j / \Delta s_{kj}$, com Δy_j definido por

$$\Delta y_j := y(\alpha, x_{k+1}; x_k, s_k + \Delta s_{kj}) - y(\alpha, x_{k+1}; x_k, s_k), \quad (6.16)$$

onde $y(\alpha, x_{k+1}; x_k, s_k)$ é dado por (6.2) e $y(\alpha, x_{k+1}; x_k, s_k + \Delta s_{kj})$ por

$$y(\alpha, x_{k+1}; x_k, s_k + \Delta s_{kj}) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(\alpha, x, y) dx + s_k + \Delta s_{kj}. \quad (6.17)$$

Em outras palavras, o intervalo k é integrado usando as condições iniciais s_k , como em (6.2). Em seguida o mesmo intervalo é novamente integrado mas com a j -ésima componente de s_k incrementada de Δs_{kj} , como mostra (6.17). A diferença dos dois resultados, dividida por Δs_{kj} , é a j -ésima coluna de G_k . O cálculo de A_{p-1} é feito exatamente como o cálculo de G . Já o cálculo de A_1 não exige integração, mas apenas $n+1$ avaliações de r (uma utilizando s_1 e n incrementando-se uma das componentes de s_1 a cada vez). Assim, para obter a matriz G_k ou A_{p-1} são necessárias $n+1$ integrações com n variáveis de estado.

Um grande problema do método descrito acima (método do quociente de diferenças) é a utilização da diferenciação numérica, onde os resultados ficam fortemente condicionados a escolha correta dos incrementos nas componentes de s_k , tornando-o muito suscetível a erros. A seguir, descreve-se um outro método mais robusto de obtenção da matriz $\partial F / \partial s$.

6.1 CÁLCULO DE $\partial F / \partial s$ POR INTEGRAÇÃO

Pela regra de Leibnitz, se

$$I(a) := \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} g(x, \alpha) dx \quad (6.18)$$

então

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \frac{\partial g(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx + g(b, \alpha) \frac{\partial b(\alpha)}{\partial \alpha} - g(a, \alpha) \frac{\partial a(\alpha)}{\partial \alpha}. \quad (6.19)$$

Derivando (6.2) com relação a s_{kj} , segundo regra de Leibnitz, considerando que x_k e x_{k+1} são constantes por hipótese, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial s_{kj}} y(\alpha, x_{k+1}; x_k, s_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\partial f(\alpha, x, y)}{\partial s_{kj}} dx + e_j, \quad (6.20)$$

onde e_j é o j -ésimo vetor unitário do \mathbf{R}^n .

Derivando (6.20) com relação a x , tem-se

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial y(\alpha, x; x_k, s_k)}{\partial s_{kj}} \right) = \frac{\partial f(\alpha, x, y)}{\partial s_{kj}} = \frac{\partial f(\alpha, x, y)}{\partial y} \frac{\partial y(\alpha, x; x_k, s_k)}{\partial s_{kj}}. \quad (6.21)$$

A equação (6.21) expressa um sistema de equações diferenciais de ordem n , onde as variáveis de estado são os elementos de G_{kj} , $\partial y(\alpha, x; x_k, s_k) / \partial s_{kj}$, que podem ser integradas em cada intervalo $[x_k, x_{k+1}]$ tendo como condição inicial o versor e_j .

Considerando todas as colunas da matriz G_k , tem-se, numa forma mais compacta,

$$G'_k = f_y(\alpha, x, y)G_k, \quad \text{com} \quad G_k(x_k) = I_{n \times n}. \quad (6.22)$$

Com isso, a cada intervalo há a necessidade de realizar a integração de $n + n^2$ variáveis de estado para obter a matriz G_k . Este é exatamente o mesmo esforço computacional do método do quociente de diferenças, com a vantagem de não ser necessária a aproximação das derivadas por quocientes de diferenças. Além de problemática, devido aos ajustes necessários nos incrementos para os cálculos das variações, a derivação numérica exige grande precisão no algoritmo de integração, sob o risco dos valores calculados serem completamente sem significado real, o que torna lento o processamento.

CAPÍTULO 7

CÁLCULO NUMÉRICO PARA PONTOS DE BIFURCAÇÃO EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Na matemática aplicada, muitos problemas são descritos por equações diferenciais ordinárias não lineares que dependem de parâmetros reais. A estrutura das soluções pode se alterar de uma forma dramática em certos pontos críticos do parâmetro, chamados *pontos de bifurcação*. A teoria das bifurcações trata esses fenômenos não lineares e vem se desenvolvendo desde Poincaré (1885). Uma revisão da teoria é encontrada em Keller et al. (1969), em Pimbley (1969) ou em Stakgold (1971).

Para determinar um ponto de bifurcação numericamente pode-se utilizar:

- a) *métodos indiretos* onde um ramo de soluções estacionárias é obtido selecionando os valores do parâmetro, por meio de um processo de continuação. A cada passo os sinais das partes reais dos autovalores do sistema linearizado são monitorados (uma função especial é utilizada). A troca de sinais significa alteração na estabilidade e, portanto, indica a bifurcação. Técnicas de interpolação ou extrapolação fornecem uma aproximação do ponto de bifurcação;
- b) *métodos diretos*: onde um sistema adequado é formulado e resolvido de uma só vez. Uma revisão e classificação excelentes dos métodos numéricos para problemas de bifurcação, suas aplicações, técnicas analíticas, técnicas de transformação, métodos de discretização, determinação numérica de pontos de bifurcação, etc... são encontrados em Mittelman e Weber (1980).

O presente capítulo descreve um método numérico desenvolvido por Seydel (1979), para o cálculo de pontos de bifurcação em problemas não lineares do valor de contorno em dois pontos, descritos por equações diferenciais ordinárias. É um método direto que foi escolhido pelo autor devido principalmente às facilidades de implementação e adaptação.

Primeiramente é dada a definição de um ponto de bifurcação. Em seguida a essência do método é focalizada onde o problema do valor de contorno dado é transformado num outro problema do valor de contorno com o dobro das equações do problema original, envolvendo derivadas parciais de primeira ordem. Cada solução do sistema estendido é um ponto de bifurcação e, portanto, tudo que o método necessita é

de um procedimento numérico para a solução de problemas do valor de contorno em dois pontos.

Logo após, dedica-se um espaço para a obtenção de valores iniciais, para o sistema estendido, visando à viabilidade da convergência do método. Uma função de teste é, logo após, inserida a qual fornece informações valiosas quanto a proximidade de pontos de bifurcação num processo de continuação.

Em seguida é descrita a vantagem de se utilizar o método dos múltiplos tiros, um algoritmo desenvolvido por Bulirsch (ver, p.e., Bulirsch et al. (1966)), no cômputo dos valores iniciais para o sistema estendido e das de teste.

Finalizando o capítulo é abordada a questão do cálculo numérico de órbitas periódicas que bifurcam a partir de soluções estacionárias.

7.1 DEFINIÇÃO DE PONTO DE BIFURCAÇÃO

Considere um operador não linear, $\Psi : \mathbf{Y} \times \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{X}$ onde \mathbf{Y} , \mathbf{X} são espaços de Banach¹ e \mathbf{K} denota o campo dos números reais ou complexos. Considere a equação

$$\Psi(y, \alpha) = 0. \quad (7.1)$$

Supondo que $\Psi(y_0, \alpha_0) = 0$ para algum $y_0 \in \mathbf{Y}$ e $\alpha_0 \in \mathbf{K}$, o interesse é resolver a Equação (5.1) para alguma vizinhança de $(y, \alpha) = (y_0, \alpha_0)$. De acordo com o *teorema das funções implícitas*, demonstrando **por Hildebrandt e Graves (1927)**, se a derivada de Fréchet², $\Psi_y(y_0, \alpha_0)$, é um homomorfismo³ de \mathbf{Y} em \mathbf{X} (o que equivale a dizer que $\Psi_y(y_0, \alpha_0)$ tem inversa limitada), então existe um único *ramo* suave de soluções $(y(\alpha), \alpha)$ de (7.1) tal que $\Psi(y(\alpha), \alpha) = 0$ com $y(\alpha_0) = y_0$, definido para $|\alpha - \alpha_0|$ menor que algum $\varepsilon_0 > 0$. Tais soluções são ditas *não singulares* ou *regulares* e

¹ Definições e resultados relativos a espaços de Banach podem ser encontrados nos apêndices A.4 e A.5 de **Ruelle (1989)**. O primeiro exemplo que se tem em mente é $\mathbf{X} = \mathbf{R}^m$ equipado com a norma euclidiana $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^m x_i^2 \right)^{1/2}$.

² Vide apêndice B.1 de Ruelle (1989).

³ Uma função biunívoca que é contínua e tem inversa contínua é chamada um *homomorfismo*.

são mostradas como curvas (ramos) em gráficos que geralmente trazem algum aspecto da solução y (p.e. a *norma* ou um componente) no eixo das ordenadas e o parâmetro α no eixo das abscissas.

A teoria das bifurcações estuda o caso onde $\Psi_y(y_0, \alpha_0)$ não tem inversa limitada. Nesta situação singular há uma variedade de possíveis conjuntos de soluções de (7.1). Neste caso (y_0, α_0) pode ser um *ponto de reversão* (“turning point”) de uma curva de soluções de (7.1) ou um *ponto de bifurcação simples* onde dois diferentes ramos de soluções se interceptam sem tangência. Outra possibilidade é a ocorrência de um *ponto de bifurcação múltiplo*, onde mais de dois ramos se interceptam (Fig. 7.1).

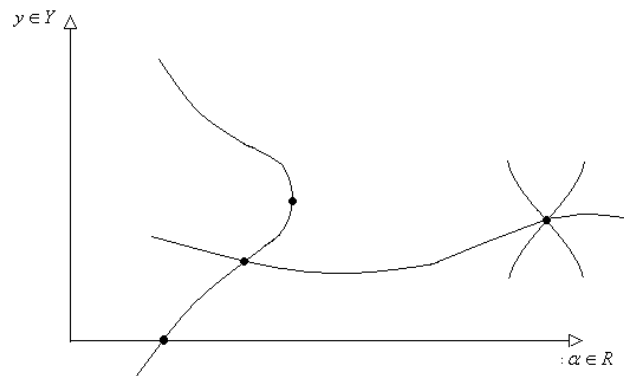


Fig. 7.1 – Diagrama de bifurcações.

No caso de (5.1) possuir a solução *trivial* $y \equiv 0$ para todo $\alpha \in \mathbf{R}$, a bifurcação a partir do ramo trivial é chamada de *bifurcação primária* (o nome *bifurcação* às vezes é usado indiscriminadamente, ver Vainberg (1964)). A maioria dos trabalhos e métodos sobre a teoria das bifurcações trata da bifurcação a partir da solução básica trivial. A ramificação a partir de uma solução mais geral não trivial (*bifurcação secundária*) pode ser reduzida ao caso de uma bifurcação primária, por meio de uma transformação apropriada do problema, caso conheça explicitamente a *solução básica* $y(\alpha)$. Em métodos numéricos, a solução básica é desconhecida e a bifurcação secundária não pode ser reduzida. Logo, os métodos de investigação de bifurcações primárias não podem ser aplicados à maioria dos problemas envolvendo fenômenos não lineares.

Apenas a título de informação, para dar um exemplo simples envolvendo bifurcação, considere o seguinte problema retirado de Stakgold (1971).

$$F(u, \lambda) = Lu + cu^3 - \lambda u = 0,$$

onde $\mathbf{Y}=\mathbf{X}=\mathbf{K}=\mathbf{R}$, $L, c \in \mathbf{R}$, $c \neq 0$.

O problema tem solução $u = 0$ para todo λ . Se $c > 0$ tem-se duas soluções não triviais para $\lambda > L$, dadas por $u = \pm \sqrt{(\lambda - L)/c}$, conforme a Fig. 7.2.

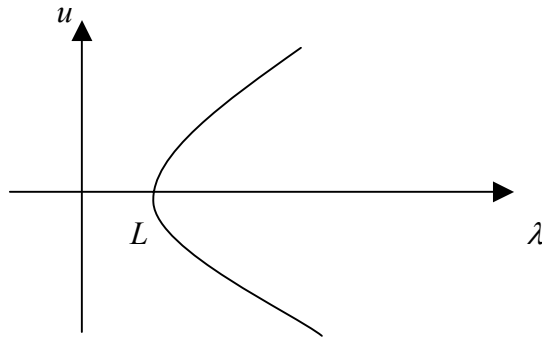


Fig. 7.2 – Diagrama de bifurcações para $F(u, \lambda)$.

7.1.1 CRITÉRIO SUFICIENTE PARA BIFURCAÇÕES

A questão de $\Psi_y(y_0, \alpha_0)$ não ser inversível num ponto de bifurcação é crucial na determinação numérica desses pontos. (y_0, α_0) é um ponto de bifurcação de (7.1) se, para Ψ , Ψ_y , contínuas, $\varphi: \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{R}$ um funcional com $\varphi(0) = 0$ e $d \neq 0$ um número arbitrário no alcance de φ , há um $h \in \mathbf{Y}$ tal que:

$$(i) \quad \Psi(y_0, \alpha_0) = 0, \tag{7.2a}$$

$$(ii) \quad \Psi_y(y_0, \alpha_0)h = 0 \text{ e} \tag{7.2b}$$

$$(iii) \quad \varphi(h) = d. \tag{7.2c}$$

Pela Equação (7.2c) $\varphi(h) = d \neq 0 \Rightarrow h \neq 0$. Nesse caso, (7.2b) tem uma solução não trivial e Ψ_y , não tem inversa. Portanto, (y_0, α_0) é um ponto de bifurcação.

7.2 CÁLCULO NUMÉRICO DE PONTOS DE BIFURCAÇÃO EM EDO'S

Considere o problema do valor de contorno em dois pontos

$$y' = f(\alpha, x, y) \quad (7.3a)$$

$$r(y(a), y(b)) = 0, \quad (7.3b)$$

onde x é a variável independente, $a \leq x \leq b$, x' denota derivada com relação a x , $y: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$, $f: [a, b] \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$, $r: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$.

Suponha que f é contínua e tenha as derivadas parciais de primeira ordem com relação a y_i , $i = 1, \dots, n$, contínuas.

Tomando (7.3) como o operador não linear (7.1) a equação linearizada correspondente a (5.2b) é dada por

$$h' = f_y(\alpha, x, y)h \quad (7.4a)$$

$$Ah(a) + Bh(b) = 0, \quad (7.4b)$$

onde f_y é a matriz de derivadas parciais de f com relação a y e $h: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$,

$$A \equiv \frac{\partial(y(a), y(b))}{\partial y(a)} \text{ e } B \equiv \frac{\partial(y(a), y(b))}{\partial y(b)}.$$

Para aplicar o critério do item 7.1.1 há a necessidade de um funcional $\varphi(h)$. Um funcional muito simples que pode ser utilizado é

$$\varphi(h) \equiv h_k(a), \quad 1 \leq k \leq n, \quad (7.5)$$

desde que o índice k seja escolhido de tal forma que não haja condição inicial imposta sobre $y_k(a)$, ou seja,

$$k \notin \Theta \equiv \left\{ 1 \leq j \leq n \mid \exists i, 1 \leq i \leq n, \exists \eta \in \mathbf{R} \text{ tal que } r_i(y(a), y(b)) = y_j(a) - \eta \right\}. \quad (7.6)$$

Essa escolha parece contraditória mas não é pois, dado que se escolhesse $j \in \Theta$ para o índice, isso levaria a $h_j(a) = 0$ devido (7.4b).

Agora podemos enunciar o seguinte teorema descrito por Seydel (1981)

TEOREMA 1. Suponha que o vetor $(2n + 1)$ -dimensional

$$Y_0(x) \equiv \begin{pmatrix} y_0(x) \\ \alpha_0 \\ h_0(x) \end{pmatrix}$$

resolva o problema do valor de contorno

$$Y' = F(x, Y) \equiv \begin{pmatrix} f(\alpha, x, y) \\ 0 \\ f_y(\alpha, x, y)h \end{pmatrix},$$

$$R(Y(a), Y(b)) \equiv \begin{pmatrix} r(y(a), y(b)) \\ A'h(a) + Bh(b) \\ h_k(a) - 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Então (y_0, α_0) é um ponto de bifurcação de (7.3).

PROVA. O teorema é provado da seguinte maneira:

$$Y' = F(x, Y) \Rightarrow \begin{cases} y' = f(\alpha, x, y) \\ \alpha \text{ constante} \\ h' = f_y(\alpha, x, y)h \end{cases},$$

$$R(Y(a), Y(b)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r(y(a), y(b)) = 0 \\ A'h(a) + Bh(b) = 0 \\ h_k(a) = 1 \end{cases}.$$

Por conseguinte, $y_0, \alpha_0 \in h_0$ resolvem (7.2), (7.3) e (7.4). $\varphi(0) = 0$, $d = 1$ está ao alcance de φ e a prova está completa.

Para calcular pontos de bifurcação para o problema (7.3) o TPBVP do TEOREMA 1 deve ser resolvido. O índice k não é unicamente determinado por (7.6). Seydel (1981) mostrou um exemplo em que o índice se alterava com a ramificação. No entanto, para os propósitos dessa dissertação, será adotado

$$k = \min_{1 \leq j \leq n} \{j \notin \Theta\} \quad (7.7)$$

7.2.1 CASO ESPECIAL DE BIFURCAÇÕES PRIMÁRIAS

Para calcular pontos de bifurcação a partir da solução trivial $y = 0$ o seguinte problema do valor de contorno $(n+1)$ -dimensional (uma simplificação do problema do TEOREMA 1) deve ser resolvido

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ h \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 \\ f_y(\alpha, x, y)h \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A'h(a) + Bh(b) \\ h_k(a) - 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (7.8)$$

Resolvendo (7.8) obtém-se o valor α_0 do ponto de bifurcação $(0, \alpha_0)$.

7.2.2 ADIÇÃO DE VARIÁVEIS AUXILIARES

A resolução dos problemas até agora vistos simplesmente obtém o ponto de bifurcação sem, contudo, fornecer informações a respeito da natureza do mesmo. É necessário saber, por exemplo, as posições angulares assim como a quantidade de ramos que emergem do ponto. Para obter tais informações é necessário calcular soluções regulares próximas aos pontos de bifurcação. Nesse caso, é conveniente introduzir variáveis auxiliares em (7.3). Além da variável do parâmetro $y_{n+1} \equiv \alpha$ outra variável auxiliar deve ser utilizada definida por

$$y_{n+2}(x) \equiv \int_a^x y_j^2(\tau) d\tau, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (7.9)$$

Fazendo $j = 1$, por exemplo, esta variável satisfaz

$$\|y_1\|^2 = y_{n+2}(b),$$

onde $\| \cdot \|$ denota a norma do \mathbf{R}^2 . As condições de contorno do problema de valor de contorno de dimensão $n_1 := n + 2$ a ser resolvido deve prescrever o valor η_1 de α ou o valor η_2 de $\|y_1\|^2$:

$$\begin{pmatrix} r(y(a), y(b)) \\ y_{n_1}(a) \\ \alpha(a) - \eta_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (7.10a)$$

$$\begin{pmatrix} y \\ \alpha \\ y_{n_1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f(\alpha, x, y) \\ 0 \\ y_1^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} r(y(a), y(b)) \\ y_{n_1}(a) \\ y_{n_1}(b) - \eta_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (7.10b)$$

Utiliza-se (7.10) para determinar ramos de soluções estacionárias por meio de métodos de continuação ou homotopia e para determinar soluções próximas a um ponto de bifurcação. Em vários casos, como por exemplo, no cálculo de soluções não triviais próximo a uma bifurcação primária deve-se preferir (7.10b). Nesse caso, resolve-se (7.8) e subsequentemente (7.10b) com um pequeno valor $\eta_2 > 0$. Verifica-se, portanto, que utilizando as variáveis auxiliares facilmente obtém-se dados que propiciam a construção de diagramas de bifurcações.

Se a variável auxiliar y_{n_1} é acrescentada ao problema do TEOREMA 1 tem-se a seguinte forma final para o sistema

$$Y(x) := \begin{pmatrix} y(x) \\ \alpha \\ y_{n_1}(x) \\ h(x) \end{pmatrix}, \quad Y' = F(x, Y) := \begin{pmatrix} f(\alpha, x, y) \\ 0 \\ y_1^2 \\ f_y(\alpha, x, y)h \end{pmatrix},$$

$$R(Y(a), Y(b)) := \begin{pmatrix} r(y(a), y(b)) \\ y_{n_1}(a) \\ A'h(a) + Bh(b) \\ h_k(a) - 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (7.11)$$

O sistema (7.11), de dimensão $n_2 := n_1 + n = 2(n+1)$, foi codificado, juntamente com (7.8) e (7.10), para alguns problemas citados na literatura e para o problema específico dessa tese na busca de ramos e pontos de bifurcação estacionários. Dado que a condição inicial para o vetor h , tema que será abordado na seção 7.3, determina a convergência do método (7.11) e, portanto, a obtenção dos pontos de bifurcação, adotou-se a metodologia de se aproximar do ponto de bifurcação utilizando (7.10) e daí, calculando uma boa aproximação \bar{h} para h_0 , resolve-se (7.11).

7.3 CONDIÇÕES INICIAIS PARA O CÁLCULO DE BIFURCAÇÕES

Nesta seção é desenvolvido um método para o cálculo de valores iniciais do problema (7.11) sem os quais a resolução pode ser extremamente difícil. No processo de homotopia utiliza-se (7.10) para obtenção de soluções regulares. Supõe-se, então, que a solução $(\bar{y}, \bar{\alpha})$ do problema do valor de contorno (7.3) foi obtida e está próxima do ponto de bifurcação (y_0, α_0) .

O problema linear do valor de contorno

$$h' = f_y(\bar{\alpha}, x, \bar{y})h, \quad \begin{pmatrix} A'h(a) + Bh(b) \\ h_k(a) - 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (7.12)$$

não tem solução para $(\bar{y}, \bar{\alpha}) \neq (y_0, \alpha_0)$. Removendo a l -ésima condição, dentre as $(n+1)$ condições de contorno, obtém-se um sistema solucionável

$$h' = f_y(\bar{\alpha}, x, \bar{y})h, \quad \begin{pmatrix} (I - P_l)(A'h(a) + Bh(b)) \\ h_k(a) - 1 \end{pmatrix} = 0, \quad (7.13)$$

onde I denota a matriz identidade e P_l é definida por

$$P_l := e_l e_l^T, \quad (7.14)$$

com $e_l := l$ -ésimo versor do \mathbf{R}^n , $1 \leq l \leq n$.

A solução \bar{h} de (7.13) depende de $(\bar{y}, \bar{\alpha})$ e espera-se que esteja próxima de h_0 para $(\bar{y}, \bar{\alpha})$ próximo de (y_0, α_0) .

Para resolver (7.13) é necessário a armazenagem de $f_y(\bar{\alpha}, x, \bar{y})$. Isto também tem que ser codificado em (7.11) para a obtenção do ponto de bifurcação. Então, é conveniente uma modificação nas condições de contorno de (7.11) para permitir o cálculo de \bar{h} que será utilizado como dado inicial para (7.11). Tal sistema modificado também é linear e, portanto, a solução numérica não é difícil de ser obtida

$$Y' = F(x, Y), \quad \bar{R}(Y(a), Y(b)) := \begin{pmatrix} y(a) - \bar{y}(a) \\ \alpha - \bar{\alpha} \\ y_{n_1}(a) \\ (I - P_l)(A'h(a) + Bh(b)) \\ h_k(a) - 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (7.15)$$

7.4 MAPEAMENTO τ

Se $(\bar{y}, \bar{\alpha}) \neq (y_0, \alpha_0)$ então a solução $Y(x)$ de (5.15) difere da solução $Y_0(x)$ de (7.11). Esta diferença pode ser medida pelo valor $\tau \in \mathbf{R}$ da condição de contorno que foi retirada de (7.12)

$$\tau := e_l^T (A'h(a) + Bh(b)). \quad (7.16)$$

Então, $Y(x)$ é, ao mesmo tempo, solução do seguinte problema do valor de contorno

$$Y' = F(x, Y), \quad R_\tau(Y(a), Y(b)) := \begin{pmatrix} r(y(a), y(b)) \\ y_{\eta_1}(a) \\ A'h(a) + Bh(b) - \tau e_l \\ h_k(a) - 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (7.17)$$

Para $\tau \in \mathbf{R}$ (7.17) representa uma família de problemas do valor de contorno que contém o problema (7.11) para $\tau = 0$. τ pode ser considerada como um *mapeamento* T do problema de valor de contorno (7.3) nos números reais

$$\tau' = T(y, \alpha).$$

Este mapeamento (ou transformação) fornece informações à respeito das ramificações (é uma indicação de bifurcação para $\tau = 0$). Portanto, durante o processo de continuação, é aconselhável o monitoramento de τ e a observação de quando a mesma muda de sinal.

Várias funções τ_{lk} são possíveis, dependendo da escolha dos índices k (ver (7.6)) e l (ver (7.14) ou (7.17)). As funções τ_{lk} podem ser determinadas numericamente resolvendo o sistema (7.15) e, subsequente, utilizando (7.16) para cada par $(\bar{y}, \bar{\alpha})$ obtido durante o processo de continuação. Entretanto, é muito mais conveniente e econômico usar o método descrito no próximo item, para o cálculo das funções e das condições iniciais, que é baseado no método dos múltiplos tiros, descrito no capítulo 4.

7.5 CÁLCULO DE τ_{lk} E CP'S PELO MÉTODO DOS MÚLTIPLOS TIROS

Ao invés de resolver problemas do valor de contorno para calcular as funções τ_{lk} (7.16) e os dados iniciais (7.13) ou (7.15), pode se usar o método dos múltiplos tiros descrito no capítulo 6, que requer apenas operações algébricas.

O exame da Equação (6.22) mostra que a matriz G_k (o índice k denota o k -ésimo intervalo do método dos múltiplos tiros. Não confundir com a k -ésima componente do vetor h como em (7.6)) representa a *matriz de transição de estados* de $f_y(\alpha, x, y)$ e define completamente a transição dos estados para o sistema linear e homogêneo (7.18) à partir de $x = x_k$ até $x = x_{k+1}$

$$h' = f_y(\alpha, x, y)h, \quad h(a) = s \in \mathbf{R}^n. \quad (7.18)$$

Se o intervalo $[a, b]$ é dividido em p pontos (nós) de modo que $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{p-1} < x_p = b$, com G_k dada por (6.22) e considerando (7.18) pode-se escrever as seguintes equações matriciais

$$\begin{aligned} h(x_2) &= G_1 s \\ h(x_k) &= G_{k-1} h(x_{k-1}), \quad k = 3, \dots, p \end{aligned} \quad (7.19)$$

e, portanto,

$$h(b) = h(x_p) = G_{p-1} G_{p-2} \dots G_1 h(a). \quad (7.20)$$

A condição de contorno $h_k(a) = 1$ pode ser escrita na forma matricial

$$P_{lk} h(a) = e_l, \quad 1 \leq l \leq n, \quad e_l \text{ dado por (7.14)}, \quad (7.21)$$

onde os elementos p_{ij} da matriz P_{lk} ($n \times n$) são dados por

$$p_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } (i, j) \neq (l, k) \\ 1, & \text{se } (i, j) = (l, k). \end{cases}$$

Substituindo (7.21) nas condições de contorno (7.13) obtém-se

$$[(I - P_l)A + P_{lk}]h(a) + (I - P_l)Bh(b) = e_l. \quad (7.22)$$

Substituindo (7.20) em (7.22) tem-se

$$[(I - P_l)(A' + BG_{p-1}G_{p-2}\dots G_1) + P_{lk}]h(a) = e_l. \quad (7.23)$$

Pode-se colocar (7.23) numa forma mais compacta utilizando as seguintes definições

$$E := A' + BG_{p-1}G_{p-2}\dots G_1 \quad (7.24)$$

e

$$E_{lk} := (I - P_l)E + P_{lk}, \quad (7.25)$$

resultando numa equação algébrica linear para $h(a)$

$$E_{lk}h(a) = e_l. \quad (7.26)$$

A escolha do índice l deve ser tal que E_{lk} não seja singular. Dado que E_{lk} é igual a E com a l -ésima linha substituída pelo k -ésimo versor do \mathbf{R}^n , k dado por (7.6), para simplificar, o índice l deve ser escolhido de forma que a l -ésima linha de E não seja um vetor unitário, ou melhor,

$$l \in \{1 \leq i \leq n \mid \exists j, 1 \leq j \leq n, \exists \eta \in \mathbf{R} \text{ t.q. } r_i(y(a), y(b)) = y_j(b) - \eta\}, \quad (7.27)$$

significando que a l -ésima condição de contorno prescreve $y_j(b)$.

Na resolução do problema do valor de contorno dado, (7.3) ou (7.10), as matrizes A' , B , G_k e E são geradas numericamente pelo método dos múltiplos tiros e $h(a)$ é facilmente determinado por (7.26). O cálculo das função τ_{lk} é dado pelo produto escalar de $h(a)$ pela l -ésima linha de E

$$\tau_{lk} = e_l^T E h(a). \quad (7.28)$$

Os dados iniciais $h(x_k)$, $2 \leq k \leq p$, para o sistema (7.11) são dados por (7.19).

5.6 OSCILAÇÕES EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Oscilações estão presentes em diversos fenômenos naturais (em células de convecção, “flutter” em asas de aviões, reações químicas,...). Para certos valores de um parâmetro físico (técnico, biológico,...) as oscilações podem ser periódicas e para outros valores o movimento periódico pode desaparecer ou tornar-se turbulento. Problemas contendo oscilações podem ser modelados por equações diferenciais ordinárias (por exemplo, equações de Duffing, equações de Van der Pol ou equações de Lorenz) e os valores críticos dos parâmetros que separam soluções qualitativamente diferentes são pontos de bifurcação.

Considere um sistema modelado pelo conjunto de equações diferenciais dado por (7.3a)

$$y' = f(\alpha, x, y). \quad (7.3a)$$

Uma solução de (5.3a) é chamada estacionária se ela resolve a equação estática

$$0 = f(\alpha, x, y). \quad (7.29)$$

As soluções estacionárias são os estados de equilíbrio de (7.3a). As propriedades de estabilidade de uma solução estacionária podem se alterar para algum valor de α_0 do parâmetro α e podem ocorrer dois tipos de bifurcação: a) um outro ramo de soluções estacionárias pode emanar do primeiro (ou interceptá-lo) - assunto abordado até o momento nesse capítulo; ou b) o “novo” ramo consiste de soluções oscilatórias que dependem do tempo. O restante do capítulo irá tratar do cálculo de um ramo de soluções periódicas (ciclos limite) que bifurcam de soluções estacionárias. Esse tipo de bifurcação é denominada “bifurcação de Hopf” ver Hopf (1942) ou Marsden e McCracken (1976) ou “bifurcação complexa”.

O cálculo numérico de soluções periódicas será executado em duas etapas: a) primeiramente, calcula-se o ponto de bifurcação; b) posteriormente, calculam-se os ciclos limites que emanam das soluções estacionárias. Na próxima seção o método direto, desenvolvido anteriormente para cálculo de pontos de bifurcação estacionários, será modificado adequadamente no intuito de se calcular pontos de bifurcação de Hopf.

Será também descrito um método para o cálculo de órbitas periódicas ver Seydel (1981).

7.7 CÁLCULOS DE PONTO DE BIFURCAÇÃO DE HOPF

Pontos de bifurcação podem ser encontrados numericamente de uma forma indireta ou de uma forma direta como foi explicado no início do capítulo.

Métodos diretos que partem de (7.29) foram propostos por Kubícek (1980), Kubícek e Holodnick (1984). As condições para bifurcações de Hopf são formuladas como um sistema de equações algébricas.

Devido, principalmente, às facilidades de implementação e automatização utilizar-se-á aqui o método de Seydel (1981) que parte do método de Seydel (1979), minuciosamente detalhado nesse capítulo. Agora, o período T é uma incógnita e uma normalização tem que ser introduzida a qual fixa o período.

O método anexa o sistema linearizado

$$h' = f_y(\alpha, x, y)h. \quad (7.4a)$$

Sem perda da generalidade, a seguinte condição normalizante será imposta a primeira componente de (7.4a)

$$0 = h_1'(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\mathcal{F}_1(\alpha, x, y(0))}{\partial y_i} h_i(0). \quad (7.30)$$

Por simplicidade, o intervalo de integração será normalizado para o intervalo unitário, $0 \leq \bar{x} \leq 1$. Com estas normalizações o sistema linearizado (7.4) fica

$$h' = T f_y(\alpha, \bar{x}, y)h, \quad (7.31a)$$

$$\begin{aligned} h(0) &= h(1), \\ h_1'(0) &= 0, \end{aligned} \quad (7.31b)$$

onde x' em (7.31) denota derivada com relação a \bar{x} .

Então, o sistema (7.11) para o caso de bifurcação de Hopf, denota seguinte problema do valor de contorno em dois pontos de dimensão $2n + 2$

$$Y(\bar{x}) := \begin{pmatrix} y(\bar{x}) \\ \alpha \\ T \\ h(\bar{x}) \end{pmatrix}, \quad Y' = F(\bar{x}, Y) := \begin{pmatrix} Tf(\alpha, \bar{x}, y) \\ 0 \\ 0 \\ Tf_y(\alpha, \bar{x}, y)h \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y(0) - y(1) \\ h(0) - h(1) \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{F}_1(\alpha, \bar{x}, y(0))}{\partial y_i} h_i(0) \\ h_1(0) - 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (7.32)$$

O sistema (7.32) é um método conveniente para calcular pontos de bifurcação de Hopf e não se limita somente a estes casos. A bifurcação de ramos de soluções estacionárias pode também ser obtida por (7.32).

7.8 CÁLCULO DE RAMOS DE SOLUÇÕES PERIÓDICAS

Uma técnica de se obter ciclos limites estáveis consiste em integrar diretamente o problema do valor inicial (7.3a) por um longo intervalo da variável independente.

Uma outra abordagem para o problema consiste em reformular o sistema de edo's dado e obter um “TPBVP”, problema do valor de contorno em dois pontos, relativamente simples pois não se pode esquecer que o mesmo deve ser facilmente adaptável.

Sem perda da generalidade, a seguinte condição normalizante será imposta à primeira componente de y , condição esta que fixa o período incógnito T da solução periódica de (7.3a)

$$0 = y_1'(0) = f_1(\alpha, \bar{x}, y(0)). \quad (7.33)$$

Calcular órbitas periódicas de (7.3a) corresponde a resolver o seguinte problema do valor do contorno de dimensão $n + 2$

$$Y(\bar{x}) := \begin{pmatrix} y(\bar{x}) \\ \alpha \\ T \end{pmatrix}, \quad Y' = F(\bar{x}, Y) := \begin{pmatrix} Tf(\alpha, \bar{x}, y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y(0) - y(1) \\ f_1(\alpha, \bar{x}, y(0)) \\ g(y, \alpha, T) \end{pmatrix} = 0, \text{ com } g(y, \alpha, T) = \begin{cases} \alpha(0) - \alpha^* \\ T(0) - T^* \\ y_k(0) - \eta \end{cases}. \quad (7.34)$$

A condição de contorno $g(y, \alpha, T)$ controla a seleção de uma solução periódica. Se um valor $\alpha = \alpha^*$ é prescrito como condição inicial para o parâmetro, então $g(y, \alpha, T) = \alpha(0) - \alpha^*$; se um valor $T = T^*$ é prescrito como condição inicial para o período, então $g(y, \alpha, T) = T(0) - T^*$; e se, finalmente, um valor η é prescrito como condição inicial da componente k (por exemplo, $k = 1$), então $g(y, \alpha, T) = y_1(0) - \eta$. Fazendo $g = 0$, um ramo de soluções periódicas pode ser parametrizado em pelo menos uma das três possibilidades.

Deve-se destacar que soluções estacionárias também resolvem (7.34) e sob parametrização de um ramo de soluções, na vizinhança de um ponto de bifurcação, a convergência é no sentido de se obter soluções estacionárias e não periódicas. Se a parametrização de um ramo de soluções periódicas está longe do ponto de bifurcação, o processo iterativo continua obtendo soluções periódicas. Logo, (7.34) é bem adequada para calcular ramos de soluções periódicas longe do ponto de bifurcação.

Para cálculo de ciclos limite nas imediações de um ponto de bifurcação uma outra parametrização deve ser utilizada. Uma característica marcante que distingue as soluções estacionárias das soluções periódicas é a amplitude. A amplitude é zero para soluções constantes e diferente de zero para soluções periódicas. Então, uma parametrização que considere a amplitude não será dúbia. Um cálculo numérico preciso da amplitude é mostrado em Becker e Seydel (1981). Há, contudo, uma maneira mais simples de parametrizar um ramo periódico. Para isso, define-se amplitude como um incremento genérico:

$$A := y_1(0) - y_1(\bar{x}_1), \quad (7.35)$$

onde $0 < \bar{x}_1 < 1$, com \bar{x}_1 arbitrário mas fixo. Levando em conta a normalização (7.33), realmente, deve existir um \bar{x}_1 onde $y_1'(\bar{x}_1) = 0$ tal que A é a amplitude real da primeira componente de y .

Considerando (7.35) as seguintes asserções são válidas:

- (i) Se y é uma solução não estacionária de (7.3a) então há uma componente de y (sem perda da generalidade, y_1) e existem um $A \neq 0$ e um \bar{x}_1 tal que $y_1(0) - y_1(\bar{x}_1) - A = 0$.
- (ii) Se soluções não estacionárias (y, α) convergem para um ponto de bifurcação (y_0, α_0) com $f(\alpha_0, x, y_0) = 0$, então $A \rightarrow 0$.
- (iii) Se (y, α, T) é solução de (7.34) com $g(y, \alpha, T) := y_1(0) - y_1(\bar{x}_1) - A$, $A \neq 0$, então y é uma órbita periódica de (7.3a).

O incremento A é prescrito por uma condição de contorno. Com isso é possível a parametrização de um ramo de soluções periódicas numa vizinhança de um ponto de bifurcação. A escolha para \bar{x}_1 é arbitrária. Pode-se escolher, por exemplo, $\bar{x}_1 = 0,3$. O sinal de A também é arbitrário (não é necessário conhecer o sentido da bifurcação).

Para resolver o problema do valor de contorno, correspondente ao (7.34), que inclua a condição de contorno que prescreve a amplitude, é necessário adicionar uma nova variável

$$\varsigma(\bar{x}) := \begin{cases} y_1(\bar{x}), & \text{para } 0 \leq \bar{x} < \bar{x}_1, \\ y_1(\bar{x}_1), & \text{para } \bar{x}_1 \leq \bar{x} \leq 1, \end{cases} \quad (7.36a)$$

com a equação diferencial

$$\varsigma' = \begin{cases} y_1', & \text{para } 0 \leq \bar{x} < \bar{x}_1, \\ 0, & \text{para } \bar{x}_1 \leq \bar{x} \leq 1, \end{cases} \quad (7.36b)$$

com $\varsigma(0) = y_1(0)$. O ponto \bar{x}_1 representa um nó na integração de $\varsigma(\bar{x})$. Se o método dos múltiplos tiros (Bulirsch et al. (1966)) for utilizado, com \bar{x}_1 sendo um nó, a integração não apresentará dificuldades.

O problema do valor de contorno a ser resolvido, de dimensão $n+3$, para se calcular órbitas periódicas que bifurcam de soluções estacionárias é o seguinte

$$Y(\bar{x}) := \begin{pmatrix} y(\bar{x}) \\ \alpha \\ T \\ \varsigma(\bar{x}) \end{pmatrix}, \quad Y' = F(\bar{x}, Y) := \begin{cases} \begin{pmatrix} Tf(\alpha, \bar{x}, y) \\ 0 \\ 0 \\ Tf_1(\alpha, \bar{x}, y) \end{pmatrix} & \text{para } \bar{x} < \bar{x}_1, \\ \begin{pmatrix} Tf(\alpha, \bar{x}, y) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{para } \bar{x} \geq \bar{x}_1, \end{cases}$$

com as condições de contorno

$$\begin{pmatrix} y(0) - y(1) \\ f_1(\alpha, \bar{x}, y(0)) \\ y_1(0) - \varsigma(0) \\ y_1(0) - \varsigma(1) - A \end{pmatrix} = 0. \quad (7.37)$$

Cada solução de (7.36) para $A \neq 0$ é uma solução não estacionária e periódica de (5.3a). Um inconveniente de (7.36) está no fato do nó \bar{x}_1 ser mantido constante o que torna o método *local* (isto é, não global). O resultado prático é que não se consegue parametrizar um ramo de forma global. Ao invés de se tomar medidas paliativas, como alterar \bar{x}_1 ou o índice do vetor y em (7.33) e (7.35), é mais lógico mudar a parametrização e utilizar (7.34). Desta forma, o procedimento (7.36) deve ser entendido como uma forma de transição de soluções estacionárias para soluções periódicas.

7.8.1 DADOS INICIAIS

Será abordada a questão dos valores iniciais para o TPBVP (7.37). No caso da linearização h_0 ser obtida por meio de (7.32) uma estimativa inicial adequada deve considerar o vetor:

$$\begin{pmatrix} y \\ \alpha \\ T \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 + \delta h_0 \\ \alpha_0 \\ T_0 \\ h_0 \end{pmatrix}, \quad (7.38)$$

onde $(y_0, \alpha_0, T_0, h_0)^t$ é solução de (7.32). Obviamente, δ deve ser função de A , e, por meio de (7.35), tem-se

$$A = y_1(0) - y_1(\bar{x}_1) = y_{01}(0) + \delta h_{01}(0) - y_{01}(\bar{x}_1) - \delta h_{01}(\bar{x}_1). \quad (7.39)$$

Como $y_{01}(0) = y_{01}(\bar{x}_1)$ (primeira componente estacionária), então

$$A = \delta(h_{01}(0) - h_{01}(\bar{x}_1)) \Rightarrow \delta = \frac{A}{h_{01}(0) - h_{01}(\bar{x}_1)}. \quad (7.40)$$

Logo, uma estimativa inicial razoável seria:

$$\begin{pmatrix} y(\bar{x}) \\ \alpha(\bar{x}) \\ T(\bar{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 + \frac{A}{h_{01}(0) - h_{01}(\bar{x}_1)} h_0 \\ \alpha_0 \\ T_0 \end{pmatrix}. \quad (7.41)$$

CAPÍTULO 8

RAMOS DE SOLUÇÕES PERIÓDICAS

Um outro objetivo deste trabalho é buscar soluções periódicas de mesmo período nos movimentos da massa do amortecedor e nas rotações angulares da plataforma, e encontrar pontos de bifurcação de Hopf (complexos), onde soluções periódicas emergem de soluções estacionárias sob lenta variação de algum parâmetro. Note que as Equações (4.16) a (4.20) descrevem completamente a dinâmica do sistema cuja ordem é 5. O sistema passará a ter ordem 7 se considerarmos o torque aplicado ao rotor variando periodicamente, ou seja,

$$T_r = A_r \cos(\omega_r t),$$

com $\mathbf{M} = \mathbf{0}$.

Para calcular ramos de soluções estacionárias e periódicas do sistema dado pelas Equações (4.16) a (4.20), em função do parâmetro amplitude do torque aplicado ao rotor (A_r), temos que descrever o sistema em equações de 1ª ordem.

Trocando as variáveis por

$$x_1 \equiv z; \tag{8.1}$$

$$x_2 \equiv \dot{z}; \tag{8.2}$$

$$x_3 \equiv \omega_x; \tag{8.3}$$

$$x_4 \equiv \omega_y; \tag{8.4}$$

$$x_5 \equiv \omega_z; \tag{8.5}$$

$$x_6 \equiv \Omega, \tag{8.6}$$

e fazendo $A \equiv m(1 - \mu)$, $B \equiv mb$ e $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, o sistema descrito pelas Equações (4.16) a (4.20) pode ser rearranjado nas seguintes equações de primeira ordem

$$\dot{x}_1 = x_2; \tag{8.7}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{-1}{A(Ax_1^2 + I_y) - B^2} \{ \{ 2ABx_2x_4 - (Ax_1^2 + I_y)[A(x_3^2 + x_4^2) - k] + B^2(x_3^2 - x_5^2) \} x_1 + c(Ax_1^2 + I_y)x_2 + B[(2Ax_1^2 + I_x + I_y - I_z)x_5 - I_rx_6]x_3 \} \quad (8.8)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{-1}{[A(I_z - I_r) - B^2]x_1^2 + I_x(I_z - I_r)} \{ \{ 2[A(I_z - I_r) - B^2]x_2 - B(I_x - I_y + I_z - I_r)x_4 \} x_3 + BA_r \cos(\omega_r t)x_3 \} x_1 \{ \{ [A(I_z - I_r) - B^2]x_1^2 + (I_y - I_z)(I_z - I_r) \} x_5 - I_r(I_z - I_r)x_6 \} x_4 \}; \quad (8.9)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{Ax_1^2 + I_y} \frac{1}{A(Ax_1^2 + I_y) - B^2} \{ \{ (Ax_1^2 + I_y) \{ AI_rx_3x_6 + \{ A[B(x_4^2 + x_5^2) - 2Ax_2x_4] - Bk \} x_1 - Bcx_2 \} - \{ A[A(Ax_1^2 + I_x + I_y - I_z) + B^2]x_1^2 + I_y[A(I_x - I_z) + B^2] \} x_3x_5 \}; \quad (8.10)$$

$$\dot{x}_5 = \frac{1}{[A(I_z - I_r) - B^2]x_1^2 + I_x(I_z - I_r)} \{ \{ [A(I_x - I_y) + B^2]x_1^2 + I_x(I_x - I_y) \} x_3 - B[(I_x - I_y + I_z)x_5 + I_rx_6]x_1 \} x_4 - A_r \cos(\omega_r t)(Ax_1^2 + I_x) + 2BI_x x_2 x_3 \}; \quad (8.11)$$

$$\dot{x}_6 = \frac{1}{I_r \{ [A(I_z - I_r) - B^2]x_1^2 + I_x(I_z - I_r) \}} \{ A_r \cos(\omega_r t) \{ (AI_z - B^2)x_1^2 + I_x I_z \} + I_r \{ B \{ (I_x - I_y + I_z)x_5 + I_rx_6 \} x_1 x_4 - 2I_x x_2 x_3 \} - \{ [A(I_x - I_y) - B^2]x_1^2 + I_x(I_x - I_y) \} x_3 x_4 \}. \quad (8.12)$$

O interesse aqui é buscar soluções periódicas onde a incógnita é a frequência das soluções. As soluções periódicas devem satisfazer:

$$x_i(0) = x_i(T), \quad i = 1, \dots, 6, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (8.13)$$

onde ω é a frequência das soluções periódicas.

O comprimento do intervalo de tempo (período) é variável (depende da frequência ω). Seria desejável que o período fosse constante e igual à unidade. Isso pode ser obtido fazendo uma transformação para o intervalo unitário, $0 \leq \bar{t} \leq 1$, ou

$$T\bar{t} = t$$

$$y_i(\bar{t}) = x_i(t), \quad i = 1, \dots, 6. \quad (8.14)$$

Isso leva ao problema de valor de contorno na forma:

$$y'_i = f_i, \quad i = 1, \dots, 8, \quad (8.15a)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} r_i &= y_i(0) - y_i(1) = 0, & i &= 1, \dots, 6. \\ r_7 &= y_2(0) = 0, \\ r_8 &= \begin{cases} y_7(0) - A_r^* = 0, \\ y_8(0) - \omega^* = 0, \\ y_1(0) - z^* = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (8.15b)$$

onde $y' \equiv d / d\bar{t}$ e as funções f_i são dadas pelas Equações (9.1) a (9.8).

Para calcular a solução do sistema dado pelas Equações (4.16) a (4.20), para um dado valor de $A_r = A_r^*$, devemos resolver (8.15) com a primeira condição de contorno de r_8 . O valor de ω será dado por $\omega = y_8$. Para calcular a solução para um dado valor de $\omega = \omega^*$, devemos resolver (8.15) com a segunda condição de contorno de r_8 . O valor de A_r será dado por $A_r = y_7$. Finalmente, para calcular a solução para um dado valor de $z = z^*$, devemos resolver (8.15) com a terceira condição de contorno de r_8 . O valor de A_r será dado por $A_r = y_7$ e o valor de ω será dado por $\omega = y_8$.

Para cálculo de ciclos limite na vizinhança de um ponto de bifurcação deve ser considerado outra parametrização. Para isso introduz-se um “incremento” (amplitude) que é prescrita por uma condição de contorno. O novo problema de valor de contorno a ser resolvido é o seguinte:

$$\begin{aligned} y'_i &= f_i, & i &= 1, \dots, 8 \\ y'_9 &= f_1, & \text{para } \bar{t} < \bar{t}_c, \\ y'_9 &= 0, & \text{para } \bar{t} \geq \bar{t}_c \end{aligned} \quad (8.16a)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned}
r_i &= y_i(0) - y_i(1) = 0, & i &= 1, \dots, 6. \\
r_7 &= y_2(0) = 0, \\
r_8 &= y_1(0) - y_9(0) = 0, \\
r_9 &= y_1(0) - y_9(1) - A = 0,
\end{aligned} \tag{8.16b}$$

onde as funções f_i são dadas pelas Equações (9.1) a (9.8).

Cada solução de (9.16) para $A \neq 0$ é uma solução periódica não-estacionária do sistema dado pelas Equações (4.16) a (4.20). A questão que se coloca é a seguinte: Qual o valor de A a ser adotado? Devemos pensar o procedimento (9.16) como uma transição das soluções estacionárias para soluções periódicas. Seydel (1981) sugere que, para uma grande classe de problemas, é razoável tomar:

$$A = A_v = vA_0 \max\{1, y_1(0)\}; \quad v = 1, 2, \dots, v_{\max} \quad \text{com } A_0 = 0,05 \text{ e } v_{\max} = 5. \tag{8.17}$$

CAPÍTULO 9

CÁLCULO DE PONTOS DE BIFURCAÇÃO COMPLEXOS

A estrutura das soluções de muitos problemas descritos por equações diferenciais ordinárias não-lineares pode mudar drasticamente em pontos críticos do parâmetro chamados *pontos de bifurcação*. Um ponto de bifurcação de Hopf (ou ponto de bifurcação *complexo*) é um ponto crítico onde soluções periódicas emergem de soluções estacionárias com amplitudes indo de zero, no ponto de bifurcação, aumentando com o acréscimo do parâmetro (bifurcação *supercrítica*) ou aumentando com o decréscimo do parâmetro (bifurcação *subcrítica*). Um ponto bifurcação complexo é calculado resolvendo o problema inicial (4.16) a (4.20) com sua linearização simultaneamente. O sistema de cálculo de pontos de bifurcação é dado a seguir:

$$y_1' = f_1 = \frac{2\pi}{y_8} y_2, \quad (9.1)$$

$$y_2' = f_2 = -\frac{2\pi}{y_8} \frac{1}{A(Ay_1^2 + I_y) - B^2} \\ \{ \{ 2AB y_2 y_4 - (Ay_1^2 + I_y) [A(y_3^2 + y_4^2) - k] + B^2(y_3^2 - y_5^2) \} y_1 \\ + c(Ay_1^2 + I_y) y_2 + B[(2Ay_1^2 + I_x + I_y - I_z) y_5 - I_r y_6] y_3 \}, \quad (9.2)$$

$$y_3' = f_3 = -\frac{2\pi}{y_8} \frac{1}{[A(I_z - I_r) - B^2] y_1^2 + I_x(I_z - I_r)} \\ \{ \{ \{ 2[A(I_z - I_r) - B^2] y_2 - B(I_x - I_y + I_z - I_r) y_4 \} y_3 + B \cos(\omega_r t) y_7 \} y_1 \\ - \{ \{ [A(I_z - I_r) - B^2] y_1^2 + (I_y - I_z)(I_z - I_r) \} y_5 - I_r(I_z - I_r) y_6 \} y_4 \}, \quad (9.3)$$

$$y_4' = f_4 = \frac{2\pi}{y_8} \frac{1}{[A(I_y + Ay_1^2) - B^2]} \\ \{ \{ [A(I_z - I_x - Ay_1^2) - B^2] y_5 + AI_r y_6 \} y_3 \\ + [AB(y_4^2 + y_5^2) - 2A^2 y_2 y_4 - Bk] y_1 - Bc y_2 \}, \quad (9.4)$$

$$\begin{aligned}
y'_5 = f_5 = & -\frac{2\pi}{y_8} \frac{1}{[A(I_z - I_r) - B^2]y_1^2 + I_x(I_z - I_r)} \{B[(I_x - I_y + I_z)y_5 + I_r y_6]y_1 y_4 \\
& - \{2BI_x y_2 + [A(I_x - I_y) + B^2]y_1^2 + I_x(I_x - I_y)\}y_4\}y_3 \\
& + \cos(\omega_r t)(Ay_1^2 + I_x)y_7\}
\end{aligned} \tag{9.5}$$

$$\begin{aligned}
y'_6 = f_6 = & \frac{2\pi}{y_8} \frac{y_7}{I_r} \cos \omega_r t \\
& - \frac{2\pi B y_1}{[(I_z - I_r)(I_x + Ay_1^2) - B^2 y_1^2]y_8} [By_1 y_3 y_4 - 2Ay_1 y_2 y_3 \\
& + (I_y - I_z + Ay_1^2)y_4 y_5 - I_r y_4 y_6] \\
& - \frac{2\pi(I_x + Ay_1^2)}{[(I_z - I_r)(I_x + Ay_1^2) - B^2 y_1^2]y_8} [(I_x - I_y)y_3 y_4 - y_7 \cos \omega_r t \\
& + 2By_2 y_3 - By_1 y_4 y_5],
\end{aligned} \tag{9.6}$$

$$y'_7 = f_7 = 0 \quad (y_7 \equiv A_r), \tag{9.7}$$

$$y'_8 = f_8 = 0 \quad (y_8 \equiv \omega), \tag{9.8}$$

$$y'_9 = f_9 = \frac{\partial f_1}{\partial y_1} y_9 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} y_{10} + \frac{\partial f_1}{\partial y_3} y_{11} + \frac{\partial f_1}{\partial y_4} y_{12} + \frac{\partial f_1}{\partial y_5} y_{13} + \frac{\partial f_1}{\partial y_6} y_{14}, \tag{9.9}$$

$$y'_{10} = f_{10} = \frac{\partial f_2}{\partial y_1} y_9 + \frac{\partial f_2}{\partial y_2} y_{10} + \frac{\partial f_2}{\partial y_3} y_{11} + \frac{\partial f_2}{\partial y_4} y_{12} + \frac{\partial f_2}{\partial y_5} y_{13} + \frac{\partial f_2}{\partial y_6} y_{14}, \tag{9.10}$$

$$y'_{11} = f_{11} = \frac{\partial f_3}{\partial y_1} y_9 + \frac{\partial f_3}{\partial y_2} y_{10} + \frac{\partial f_3}{\partial y_3} y_{11} + \frac{\partial f_3}{\partial y_4} y_{12} + \frac{\partial f_3}{\partial y_5} y_{13} + \frac{\partial f_3}{\partial y_6} y_{14}, \tag{9.11}$$

$$y'_{12} = f_{12} = \frac{\partial f_4}{\partial y_1} y_9 + \frac{\partial f_4}{\partial y_2} y_{10} + \frac{\partial f_4}{\partial y_3} y_{11} + \frac{\partial f_4}{\partial y_4} y_{12} + \frac{\partial f_4}{\partial y_5} y_{13} + \frac{\partial f_4}{\partial y_6} y_{14}, \tag{9.12}$$

$$y'_{13} = f_{13} = \frac{\partial f_5}{\partial y_1} y_9 + \frac{\partial f_5}{\partial y_2} y_{10} + \frac{\partial f_5}{\partial y_3} y_{11} + \frac{\partial f_5}{\partial y_4} y_{12} + \frac{\partial f_5}{\partial y_5} y_{13} + \frac{\partial f_5}{\partial y_6} y_{14}, \tag{9.13}$$

$$y'_{14} = f_{14} = \frac{\partial f_6}{\partial y_1} y_9 + \frac{\partial f_6}{\partial y_2} y_{10} + \frac{\partial f_6}{\partial y_3} y_{11} + \frac{\partial f_6}{\partial y_4} y_{12} + \frac{\partial f_6}{\partial y_5} y_{13} + \frac{\partial f_6}{\partial y_6} y_{14}, \quad (9.14)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} r_i &= y_i(0) - y_i(1) = 0, & i &= 1, \dots, 6 \\ r_{i+6} &= y_{i+8}(0) - y_{i+8}(1) = 0, \\ r_{13} &= y_{10}(0) = 0, \\ r_{14} &= y_9(0) - 1 = 0, \end{aligned} \quad (9.15)$$

onde as derivadas parciais das funções f_i são dadas no Apêndice A.

CAPÍTULO 10

RESULTADOS OBTIDOS

Os programas desenvolvidos de acordo com os capítulos 4, 6, 7, 8 e 9 deste trabalho foram desenvolvidos na linguagem Matlab e podem ser vistos no Apêndice B. Eles foram migrados a partir de versões implementadas em Fortran desenvolvidas para outro sistema sob consideração; a saber: o mancal hidrodinâmico liso, longo, com e sem a presença do fenômeno da cavitação. Esse sistema apresenta soluções periódicas que emergem de soluções estacionárias e foi estudado por Ricci (1997).

Primeiramente uma consideração de caráter geral deve ser feita sobre as estratégias de programação utilizadas para se atingir o objetivo de se obter um panorama global das soluções em regime permanente das equações diferenciais envolvidas neste trabalho, ou seja, aquelas que descrevem o movimento de um satélite Dual Spin com amortecedor de nutação na plataforma.

Algumas estratégias podem ser utilizadas para se obter resultados. Uma delas, descrita a seguir, foi aplicada ao problema do mancal hidrodinâmico completamente cheio de lubrificante ver Ricci, (1997) e leva em consideração a inclusão de uma variável auxiliar (ver Capítulo 7), que nada mais é do que o quadrado da norma da primeira componente. A inclusão desta variável é mais uma forma de mostrar resultados, por meio de gráficos que trazem este aspecto da solução y (a norma de y_1) no eixo das ordenadas e o parâmetro α (no caso, a velocidade adimensional do rotor) no eixo das abscissas.

É comum também mostrar um outro aspecto das soluções, no caso de soluções periódicas, que é a amplitude em função do parâmetro.

Passamos a descrever a estratégia que foi adotada no caso do problema aqui abordado baseada na versão desenvolvida por Ricci (1997), em Fortran. Fixando os valores dos parâmetros de acordo com a Tabela 9.1 um ramo de soluções estacionárias das equações (4.16) a (4.20), para $T_r = A_r \cos(\omega_r t)$ e $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, pode ser obtido resolvendo (8.15) para diversos valores de A_r^* , ω^* e z^* . No programa principal, dependendo do valor de uma chave, são prescritos os valores iniciais da amplitude de entrada, da frequência da órbita periódica ou do deslocamento da mola.

Tabela 9.1 – Valores adotados para os parâmetros

parâmetro	Designação	Valor	Unidade
M	Massa do amortecedor	4,0	kg
μ	Relação entre a massa do amortecedor e a massa do satélite $\mu = m / m_t$	0,00554	-
B	Distância do amortecedor ao plano yz	1	m
I_x	Momento de inércia do satélite em relação ao eixo x	505,708	kgm ²
I_y	Momento de inércia do satélite em relação ao eixo y	466,390	kgm ²
I_z	Momento de inércia do satélite em relação ao eixo z	471,814	kgm ²
I_r	Momento de inércia do rotor em relação ao eixo z	330,812	kgm ²
K	Constante de mola do amortecedor	8,7	N/m
C	Coefficiente de amortecimento do amortecedor	0,4	Ns/m
ω_r	Frequência do rotor	0,02	rd/s

Fonte: Meehan e Asokanthan (1996).

Se chave = -1 a amplitude de entrada é prescrita, se chave = 0 a frequência da órbita periódica é prescrita e se chave = 1 o deslocamento da mola é prescrito. Para cada valor da amplitude de entrada, da frequência da órbita periódica ou do deslocamento da mola um TPBVP é resolvido e, portanto, centenas de TPBVP's são resolvidos para se determinar um ramo de soluções. A rotina SOLVER, ver Ricci (1997), desenvolvida para um TPBVP através do método dos múltiplos tiros, foi implementada e possui os seguintes argumentos de chamada (N, M, T, Y, EPS, IT), onde os parâmetros têm o seguinte significado:

- N - dimensão do problema;
- M - número de nós do intervalo [a,b];
- T - vetor de nós;
- Y - matriz da solução corrente. Y(i,j) é o vetor de solução no nó j, i=1,...,n, j=1,...,p;

- EPS - erro de tolerância relativo. Quando o maior valor do erro relativo entre Y atual e Y integrado é menor que EPS a rotina retorna;
- IT - Retorna o número de iterações necessárias. No caso de não haver convergência $IT = -1$.

A função de teste τ_{11} é monitorada em todo intervalo do parâmetro pesquisado e assim que a mesma muda de sinal a chave recebe um um terceiro valor (chave = 2) e um segundo tipo de TPBVP, para determinar pontos de bifurcação resolve-se (9.1) a (9.14) com as condições de contorno (9.15). Resolvido o ponto de bifurcação a variável chave recebe um novo valor (chave = -2) e a “primeira” solução periódica é calculada resolvendo o TPBVP (8.16) para um valor prescrito da amplitude igual a 0,05 e para as estimativas iniciais dadas por (7.41). O restante do ramo periódico é calculado resolvendo (8.15) com as parametrizações já descritas.

A função de teste é calculada através da rotina BRODE (ver Ricci, 1997) que é também utilizada para calcular os dados iniciais do sistema de variações. A rotina BRODE possui os seguintes argumentos de chamada (N, M, Y, INDK, TFUNC, N1), onde os parâmetros têm o seguinte significado:

- N, M, Y - conforme descrito em SOLVER;
- INDL, INDK - índices da função de teste τ_{lk} ;
- TFUNC - valor da função a ser retornado;
- N1 - dimensão do TPBVP básico ($N1=N+2$).

Ainda são utilizadas as rotinas:

- DERIVS que calcula as derivadas para a rotina Runge-Kutta-Fehlberg (RKF78);
- NLSYST que resolve um sistema de equações não lineares pelo Método de Newton;
- FCN que calcula os valores das funções utilizadas pela NLSYST
- ELIM que resolve um conjunto de equações lineares por eliminação de Gauss.

Estas rotinas foram migradas do Fortran para Matlab (ver Ricci, 1997).

A programação foi estruturada de forma a considerar a flexibilidade e a automação. Isto quer dizer que, com pequenas alterações em algumas subrotinas, pode-se facilmente resolver outros problemas, descritos por equações diferenciais ordinárias não lineares, utilizando a mesma técnica. As condições de contorno (no caso, (8.15b) e (9.15)) são consideradas em FCN. FCN calcula, para qualquer valor da chave, as funções erro (condições de contorno e condições intermediárias do método dos múltiplos tiros) para a rotina NLSYST. As condições de contorno também são consideradas na rotina SOLVER, onde aparecem as derivadas das mesmas em relação às estimativas (matrizes A_1 e A_{p-1} do método dos múltiplos tiros). Uma vez definidas a estratégia e condições de contorno, foi construída uma rotina capaz de obter A_1 e A_{p-1} para qualquer valor da chave.

Na rotina DERIVS é descrito o lado direito do sistema de equações diferenciais de primeira ordem (ou seja, as derivadas) dado que a matriz do método dos múltiplos tiros é obtida por integração. Esta mesma rotina também prescreve o lado direito do sistema a ser integrado (equação 6.22) onde variáveis de estado são os elementos de G_k , que são integradas em cada intervalo $[x_k, x_{k+1}]$ tendo como condição inicial a matriz identidade.

Infelizmente o programa para o ambiente Matlab foi executado para várias condições iniciais dos parâmetros mas não se obteve convergência no método de Newton utilizado no método dos múltiplos tiros.

É de conhecimento que no Método de Newton para sistemas de equações não lineares, se as condições iniciais não estão bem próximas do ponto de solução corre-se o risco do método divergir.

CAPÍTULO 10

CONCLUSÕES

O objetivo principal desse trabalho de dissertação foi o estudo da dinâmica não linear de um satélite *dual-spin* com um amortecedor de nutação axial na plataforma e esse objetivo foi alcançado através da modelagem do sistema usando o *software* Simulink. Resultados foram obtidos para a dinâmica não-linear e foram apresentados no capítulo 5. Esse estudo pode ajudar na compreensão do desempenho do sistema em aplicações práticas. Por exemplo, em algum momento após a liberação do satélite pelo lançador é iniciada uma manobra, denominada de *Spin-up*, que consiste na aceleração do rotor em relação à plataforma com o objetivo de eliminar as velocidades nos eixos x e y e fixar a velocidade da plataforma em relação ao eixo z na velocidade orbital. Uma simulação para essa manobra não foi realizada nesse trabalho e fica como sugestão para próximos trabalhos mas, o exame das figuras e tabelas do capítulo 5 indica que é plenamente factível realizar essa manobra por meio da manipulação da variável ω_r , a qual influencia diretamente o comportamento, em regime permanente, das variáveis $x_1, x_2, \omega_x, \omega_y$ e ω_z . Ou seja, os resultados apresentados apontam que essa manobra é perfeitamente possível, podendo eliminar qualquer velocidade residual nos eixos x e y transferindo o momento angular para o eixo z . Dessa forma, todo o momento angular será gerado pela rotação do rotor em relação à plataforma, podendo ocorrer, inclusive, a eliminação da rotação da plataforma em relação ao eixo z , ω_z .

A Tabela 5.1 e a Fig. 5.1 mostram que, sob torque externo nulo, há total transferência de velocidades para o eixo z quando $\omega_r > 20$ rd/s e condição inicial nula para ω_z . Nessa situação, em regime permanente, observa-se que a massa do amortecedor está estacionada em $z = 0$, ω_z adquire um pequeno valor e a soma de ω_z com ω_r constitui exatamente o valor inicial de ω_r . Os dados da Tabela 5.2 e da Fig. 5.2, que diferem dos dados da Tabela 5.1 e Fig. 5.1 pela condição inicial de ω_z ($\omega_z \neq 0$), mostram o mesmo comportamento observando-se que a soma de ω_z com ω_r , em regime permanente, constitui exatamente a soma dos valores iniciais de ω_z e ω_r .

Um outro objetivo dessa dissertação era obter soluções periódicas e pontos de bifurcação complexos no movimento de um satélite *dual-spin* com um amortecedor de nutação na plataforma, através do cálculo numérico envolvendo resoluções de problemas de valor de contorno em dois pontos. Muitos problemas da matemática aplicada apresentam soluções periódicas e planejava-se aqui buscar esse tipo de solução para as equações de movimento de um satélite *dual-spin*. Pretendia-se verificar o comportamento do sistema para um torque senoidal aplicado ao rotor. Foi utilizado um software migrado de programas em Fortran para o ambiente Matlab.

Contudo, não houve convergência no método de Newton usado no algoritmo dos múltiplos tiros. É de conhecimento que o Método de Newton para sistemas de equações não lineares é difícil convergência se as condições iniciais não estão bem próximas da solução.

Na tentativa de solucionar o problema as seguintes medidas são propostas para futuros trabalhos:

- a) Utilização do programa migrado do Fortran para o Matlab em problemas que possuam resultados comprovados na literatura. Fazendo isto, é possível descartar problemas que possam ter ocorrido na migração.
- b) Lançar mão de métodos analíticos para demonstrar à existência ou não de soluções periódicas no problema em questão. Os seguintes métodos poderão ser cogitados: Variedade Central, Método de Lindstedt e Método da Média, dentre outros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Becker, K. H.; Seydel, R. **A duffing equation with more then 20 branch points. In: Numerical Solution of nonlinear equations**, Allgower, E. L. et al., eds., *lecture notes* 878:98-107, Springer, Berlin, 1981.

Cochran, J. E.; Jr. and Thompson, J. A. **Nutation Dumpers vs Precession Dampers for Asymmetric Spacecraft**, **J. of Guid. Control**, vol 3, 1980, pp22 - 28

Burlish, R.; Stoer, J. **Numerical treatment of ordinary differential equations by extrapolation methods**, *Numer. Math.* 8:1-13, 1966.

Grubin, C. **Dynamics of a vehicle containing moving parts**. *Transactions of the ASME: Journal of Applied Mechanics*, vol. 29, September 1962, pp 486-4885.

Hildebrandt, T. H. ; Graves, K. M. **Implicit functions and their differentials in general analysis**. *A.M.S. Trans.* 29: 127-153, 1927.

Hopf, E. **Abzweigung einer periodischen lösung von einer stationären lösung eines differentialsystems**. *Bericht der mathematisch-physichen klasse der sächsischen akademie der wissenschaften zu leipzig*, 94:1-22, 1942.

Hughes, P. C. **Spacecraft attitude dynamics**. New York: Wiley, 1986.

Iorillo, A. J. **Nutation damping dynamics of axisymmetric rotor stabilized satellites**. *ASME Winter Meeting*. Chicago, Nov. 1965.

Kaplan, M. H. **Modern spacecraft dynamics & control**. John Wiley & Sons, 1976.

Keller, J. B.; Antmann, S. **Bifurcation theory and nonlinear eigenvalue problems**. New York, Benjamin, 1969.

Kubíček, M. **Algorithm for evaluation of complex bifurcation points in ordinary differential equations.** *SIAM J. Appl. Math.*, 38:103, 1980.

Kubíček, M.; Holodnic, M. **Numerical determination of bifurcation points in steady state and periodic solutions-numerical algorithms and examples.** In: Numerical methods for bifurcation problems. Küpper, T.; Mittelman, H.D.; Weber, H., eds., Birkhäuser Verlag, Basel, 1984, pp 247-270.

Landon, V.; Stewart, B. **Nutational stability axisymmetric body containing a Rotor.** *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 1, n° 6, Nov.-Dec.1964, pp 682-684.

Likins, P.W. **Attitude stability criteria for dual spin spacecraft.** *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 4, n° 12, Dec.1967, pp 1638-1643.

Marsden. J. E.; McCracken, M. **The hopf bifurcation and its applications**, Springer-Verlag, New York, 1976.

Meehan, P. A.; Asokanthan, S. F. **Nonlinear instabilities in a dual spin spacecraft with an axial nutational damper.** *Astronautical Society-Spaceflight Mechanics*, vol. 93, Part II, 1996.

Mittelman, H. D.; Weber, H. **Numerical methods for bifurcation problems-a survey and classification.** In: Bifurcation problems and their numerical solution. Mittelman, H. D.; Weber, H., eds., Birkhäuser Verlag, Basel, 1980, pp1-45.

Pimbley, G. H. **Eigenfunction branches of nonlinear operators, and their bifurcations.** In: *Lecture notes in Maths. 104:*, Berlin, Springer, 1969.

Poincaré, H. **Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'unmouvement de rotation.** *Acta mathematica* 7:259-380, 1885.

Ricci, M. C. **Aplicação de Métodos Numéricos de Continuação e de Bifurcação ao problema do mancal hidrodinâmico Liso, Longo, com e sem a presença de cavitação**, Tese de Doutorado, INPE, São José dos Campos, 1997.

Roberson, R. E. **Torques on a satellite vehicle from internal moving parts.** *Transactions of the ASME: Journal of Applied Mechanics*, vol. 25, June 1958, pp 196-200.

Ruelle, D. **Elements of differentiable dynamics and bifurcation theory.** Boston, Academic Press, 1989.

Seydel, R. **Numerical computation of branch points in ordinary differential equations.** *Numer. Math.* 32:51-68, 1979.

Seydel, R. **Numerical computation of periodic orbits that bifurcate from stationary solutions of ordinary differential equations.** *Applied mathematics and computation* 9:257-271, 1981.

Stakgold, I. **Branching of solutions of nonlinear equations.** *SIAM Review* 13:289-332, 1971.

Stoer, J.; Bulirsch, R. **Introduction to numerical analysis.** Springer Verlag, Berlin, 1980.

Thomson, W. T. **Theory of vibration with applications.** New Jersey: Prentice Hall, 1993.

Vainberg, M. M. **Variational methods for the study of nonlinear operators.** San Francisco, Holden-Day, 1964.

APÊNDICE - A

DERIVADAS PARCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DE UM SATÉLITE *DUAL SPIN*

A seguir são apresentadas as derivadas parciais de primeira ordem.

Derivando f_1 , dado por (5.1), em relação a y_i , $i = 1, \dots, 14$, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial y_2} &= \frac{2\pi}{y_8}; \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_8} &= -\frac{2\pi y_2}{y_8^2}; \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_i} &= 0, \quad i = 1, 3, \dots, 7, 9, \dots, 14.\end{aligned}$$

Derivando f_2 , dado por (5.2), em relação a y_i , $i = 1, \dots, 14$, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_2}{\partial y_1} &= \frac{2\pi}{y_8} \frac{1}{[A(Ay_1^2 + I_y) - B^2]^2} \{2AB\{Bcy_2 + [A(I_x - I_y - I_z) + 2B^2]y_5 - AI_r y_6\}y_3\}y_1 \\ &+ [A(y_3^2 + y_4^2) - k]\{A[A(Ay_1^2 + 2I_y) - 3B^2]y_1^2 + I_y(AI_y - B^2)\} \\ &+ B[A(Ay_1^2 - I_y) + B^2][2Ay_2 y_4 + B(y_3^2 - y_5^2)]\};\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y_2} = -\frac{2\pi}{y_8} \frac{2AB y_1 y_4 + c(Ay_1^2 + I_y)}{A(Ay_1^2 + I_y) - B^2};$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_2}{\partial y_3} &= \frac{2\pi}{y_8} \frac{1}{A(Ay_1^2 + I_y) - B^2} \{2[A(Ay_1^2 + I_y) - B^2]y_1 y_3 \\ &- B[(2Ay_1^2 + I_x + I_y - I_z)y_5 - I_r y_6]\};\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y_4} = -\frac{2\pi}{y_8} \frac{2A[By_2 - (Ay_1^2 + I_y)y_4]y_1}{A(Ay_1^2 + I_y) - B^2};$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y_5} = \frac{2\pi}{y_8} \frac{B}{A(Ay_1^2 + I_y) - B^2} [2By_1y_5 - (2Ay_1^2 + I_x + I_y - I_z)y_3];$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y_6} = \frac{2\pi}{y_8} \frac{BI_r y_3}{A(Ay_1^2 + I_y) - B^2};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial y_8} = & \frac{2\pi}{y_8^2} \frac{1}{A(Ay_1^2 + I_y) - B^2} \{ \{ 2AB y_2 y_4 - (Ay_1^2 + I_y) [A(y_3^2 + y_4^2) - k] + B^2(y_3^2 - y_5^2) \} y_1 \\ & + c(Ay_1^2 + I_y) y_2 + B[(2Ay_1^2 + I_x + I_y - I_z)y_5 - I_r y_6] y_3 \}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y_i} = 0, \quad i = 7, 9, \dots, 14.$$

Derivando f_3 , dado por (5.3), em relação a y_i , $i = 1, \dots, 14$, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3}{\partial y_1} = & \frac{2\pi}{y_8} \frac{1}{\{ [A(I_z - I_r) - B^2] y_1^2 + I_x(I_z - I_r) \}^2} \{ 2(I_z - I_r) [A(I_z - I_r) - B^2] (I_x - I_y + I_z) y_5 \\ & + I_r y_6 \} y_1 y_4 + 2 \{ \{ A(I_z - I_r) [A(I_z - I_r) - 2B^2] + B^4 \} y_1^2 - I_x(I_z - I_r) [A(I_z - I_r) - B^2] \} y_2 y_3 \\ & - B(I_x - I_y + I_z - I_r) \{ [A(I_z - I_r) - B^2] y_1^2 - I_x(I_z - I_r) \} y_3 y_4 + B \{ [A(I_z - I_r) - B^2] y_1^2 \\ & - I_x(I_z - I_r) \} \cos(\omega_r t) y_7 \}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y_2} = -\frac{2\pi}{y_8} \frac{2[A(I_z - I_r) - B^2] y_1 y_3}{\{ I_x(I_z - I_r) + [A(I_z - I_r) - B^2] y_1^2 \}};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3}{\partial y_3} = & \frac{2\pi}{y_8} \frac{y_1}{\{ I_x(I_z - I_r) + [A(I_z - I_r) - B^2] y_1^2 \}} \{ B(I_x - I_y + I_z - I_r) y_4 \\ & - 2[A(I_z - I_r) - B^2] y_2 \}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y_4} = \frac{2\pi}{y_8} \frac{1}{\{ I_x(I_z - I_r) + [A(I_z - I_r) - B^2] y_1^2 \}} \{ B(I_x - I_y + I_z - I_r) y_1 y_3$$

$$+ \{(I_z - I_r)(I_y - I_z) + [A(I_z - I_r) - B^2]y_1^2\}y_5 - I_r(I_z - I_r)y_6\};$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y_5} = \frac{2\pi}{y_8} \frac{y_4}{\{I_x(I_z - I_r) + [A(I_z - I_r) - B^2]y_1^2\}} \{(I_z - I_r)(I_y - I_z) + [A(I_z - I_r) - B^2]y_1^2\};$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y_6} = -\frac{2\pi}{y_8} \frac{I_r(I_z - I_r)y_4}{\{I_x(I_z - I_r) + [A(I_z - I_r) - B^2]y_1^2\}};$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y_7} = -\frac{2\pi}{y_8} \frac{B \cos(\omega_r t)y_1}{\{I_x(I_z - I_r) + [A(I_z - I_r) - B^2]y_1^2\}};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3}{\partial y_8} = & -\frac{2\pi}{y_8^2} \frac{1}{\{I_x(I_z - I_r) + [A(I_z - I_r) - B^2]y_1^2\}} \{ \{(I_z - I_r)(I_y - I_z) \\ & + [A(I_z - I_r) - B^2]y_1^2\}y_5 - I_r(I_z - I_r)y_6\}y_4 \\ & + \{B(I_x - I_y + I_z - I_r)y_3y_4 - 2[A(I_z - I_r) - B^2]y_2y_3 - B \cos(\omega_r t)y_7\}y_1 \}. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y_i} = 0, \quad i = 9, \dots, 14.$$

Derivando f_4 , dada por (5.4), em relação a y_i , $i = 1, \dots, 14$, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_4}{\partial y_1} = & \frac{2\pi}{y_8} \frac{1}{[A(I_y + Ay_1^2) - B^2]^2} \{2A^2 \{[A(I_x - I_y - I_z) + 2B^2]y_5 - AI_r y_6\}y_3 + Bcy_2\}y_1 \\ & + [A(I_y - Ay_1^2) - B^2][AB(y_4^2 + y_5^2) - 2A^2y_2y_4 - Bk]\}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial y_2} = -\frac{2\pi}{(I_y + Ay_1^2)[A(I_y + Ay_1^2) - B^2]y_8} [2A^2(I_y + Ay_1^2)y_1y_4 + Bc(I_y + Ay_1^2)];$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_4}{\partial y_3} &= \frac{2\pi[(I_z - I_x - Ay_1^2) + I_r y_6 + 2By_1 y_3]}{(I_y + Ay_1^2)y_8} + \frac{2\pi B(2Ay_1 y_3 - By_5)}{[A(I_y + Ay_1^2) - B^2]y_8} \\
&+ \left[\frac{2\pi B^2}{A(I_y + Ay_1^2)^2 - B^2(I_y + Ay_1^2)} \right] y_8 \left[(I_z - I_x - Ay_1^2)y_3 y_5 + I_r y_3 y_6 - 2Ay_1 y_2 y_4 + By_1(y_3^2 - y_5^2) \right] \\
\frac{\partial f_4}{\partial y_4} &= \frac{4A\pi}{(I_y + Ay_1^2)[A(I_y + Ay_1^2) - B^2]y_8} (Ay_1^2 + I_y)(By_1 y_4 - Ay_1 y_2) \\
\frac{\partial f_4}{\partial y_5} &= \frac{4\pi B Ay_1 y_4}{[A(I_y + Ay_1^2) - B^2]y_8} - \frac{2\pi B^2 y_3}{[A(I_y + Ay_1^2) - B^2]y_8} + \frac{2\pi B^2 [(I_z - I_x - Ay_1^2)y_3 - 2By_1 y_5]}{[A(I_y + Ay_1^2)^2 - B^2(I_y + Ay_1^2)]y_8} \\
\frac{\partial f_4}{\partial y_6} &= \frac{2\pi I_r y_3}{(I_y + Ay_1^2)y_8} + \left[\frac{2\pi B^2 I_r y_3}{A(I_y + Ay_1^2)^2 - B^2(I_y + Ay_1^2)} \right] y_8.
\end{aligned}$$

Derivando f_5 tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_5}{\partial y_1} &= \frac{2\pi By_1}{[(I_x + Ay_1^2)(I_z - I_r) - B^2 y_1^2]y_8} [(By_4 - 2Ay_2)y_3 + 2Ay_1 y_4 y_5] \\
&+ \frac{2\pi B[(I_x + Ay_1^2)(I_z - I_r) - B^2 y_1^2] - 2\pi By_1[2Ay_1(I_z - I_r) - 2B^2 y_1]}{[(I_x + Ay_1^2)(I_z - I_r) - B^2 y_1^2]^2 y_8} [(By_4 - 2Ay_2)y_1 y_3 \\
&+ (I_y - I_z + Ay_1^2)y_4 y_5 - I_r y_4 y_6] \\
&- \left[\frac{2\pi B^3 y_1^2 y_4 y_5}{[(I_x + Ay_1^2)(I_z - I_r)^2 - B^2(I_z - I_r)y_1^2]y_8} [2By_2 y_3 + (I_x - I_y)y_3 y_4 - A_r \cos \omega_r t \right. \\
&\left. - By_1 y_4 y_5] \frac{4\pi B^2 y_1 [A(I_y + Ay_1^2)^2 - B^2(I_y + Ay_1^2)] - 2\pi B^2 y_1^2 (2A^2 I_y y_1 + 4A^3 y_1^3 - 2B^2 Ay_1)}{[A(I_y + Ay_1^2)^2 - B^2(I_y + Ay_1^2)]^2 y_8} \right] \\
\frac{\partial f_5}{\partial y_2} &= \frac{4\pi By_3}{(I_z - I_r)y_8} - \frac{4\pi B Ay_1^2 y_3}{[(I_x + Ay_1^2)(I_z - I_r) - B^2 y_1^2]y_8} + \frac{4\pi B^3 y_1^2 y_3}{[(I_x + Ay_1^2)(I_z - I_r)^2 - B^2(I_z - I_r)y_1^2]y_8}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial y_3} = \frac{2\pi[2By_2 + (I_x - I_y)y_4]}{(I_z - I_r)y_8} + \frac{2\pi By_1^2[(By_4 - 2Ay_2)]}{[(I_x + Ay_1^2)(I_z - I_r) - B^2 y_1^2]y_8} \\ + \frac{2\pi B^2 y_1^2[2By_2 + (I_x - I_y)y_4]}{[(I_x + Ay_1^2)(I_z - I_r)^2 - B^2(I_z - I_r)y_1^2]y_8};$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial y_4} = \frac{2\pi[(I_x - I_y)y_3 - By_1 y_5]}{(I_z - I_r)y_8} + \frac{2\pi By_1[By_1 y_3 + (I_y - I_z + Ay_1^2)y_5 - I_r y_6]}{[(I_x + Ay_1^2)(I_z - I_r) - B^2 y_1^2]y_8} \\ + \frac{2\pi B^2 y_1^2[(I_x - I_y)y_3 - By_1 y_5]}{[(I_x + Ay_1^2)(I_z - I_r)^2 - B^2(I_z - I_r)y_1^2]y_8};$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial y_5} = -\frac{2\pi By_1 y_4}{(I_z - I_r)y_8} + \frac{2\pi By_1(I_y - I_z + Ay_1^2)y_4}{[(I_x + Ay_1^2)(I_z - I_r) - B^2 y_1^2]y_8} - \frac{2\pi B^3 y_1^2 y_1 y_4}{[(I_x + Ay_1^2)(I_z - I_r)^2 - B^2(I_z - I_r)y_1^2]y_8}$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial y_6} = -\frac{2\pi By_1 I_r y_4}{[(I_x + Ay_1^2)(I_z - I_r) - B^2 y_1^2]y_8}.$$

Derivando f_6 tem-se:

$$\frac{\partial f_6}{\partial y_1} = -\frac{2\pi By_1}{[(I_x + Ay_1^2)(I_z - I_r) - B^2 y_1^2]y_8}[(By_4 - 2Ay_2)y_3 + 2Ay_1 y_4 y_5] \\ - \frac{2\pi B[(I_x + Ay_1^2)(I_z - I_r) - B^2 y_1^2] - 2\pi By_1[2Ay_1(I_z - I_r) - 2B^2 y_1]}{[(I_x + Ay_1^2)(I_z - I_r) - B^2 y_1^2]^2 y_8}[(By_4 - 2Ay_2)y_1 y_3 \\ + (I_y - I_z + Ay_1^2)y_4 y_5 - I_r y_4 y_6] \\ + \frac{2\pi B^3 y_1^2 y_4 y_5}{[(I_x + Ay_1^2)(I_z - I_r)^2 - B^2(I_z - I_r)y_1^2]y_8}[2By_2 y_3 + (I_x - I_y)y_3 y_4 - A_r \cos \omega_r t \\ - By_1 y_4 y_5] \frac{4\pi B^2 y_1[A(I_y + Ay_1^2)^2 - B^2(I_y + Ay_1^2)] - 2\pi B^2 y_1^2(2A^2 I_y y_1 + 4A^3 y_1^3 - 2B^2 Ay_1)}{[A(I_y + Ay_1^2)^2 - B^2(I_y + Ay_1^2)]^2 y_8}$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial y_2} = -\frac{4\pi By_3}{(I_z - I_r)y_8} + \frac{4\pi BAy_1^2 y_3}{[(I_x + Ay_1^2)(I_z - I_r) - B^2 y_1^2]y_8} - \frac{4\pi B^3 y_1^2 y_3}{[(I_x + Ay_1^2)(I_z - I_r)^2 - B^2(I_z - I_r)y_1^2]y_8}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_6}{\partial y_3} = & -\frac{2\pi[2By_2 + (I_x - I_y)y_4]}{(I_z - I_r)y_8} - \frac{2\pi By_1^2[(By_4 - 2Ay_2)]}{[(I_x + Ay_1^2)(I_z - I_r) - B^2y_1^2]y_8} \\ & + \frac{2\pi B^2y_1^2[2By_2 + (I_x - I_y)y_4]}{[(I_x + Ay_1^2)(I_z - I_r)^2 - B^2(I_z - I_r)y_1^2]y_8};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_6}{\partial y_4} = & -\frac{2\pi[(I_x - I_y)y_3 - By_1y_5]}{(I_z - I_r)y_8} - \frac{2\pi By_1[By_1y_3 + (I_y - I_z + Ay_1^2)y_5 - I_ry_6]}{[(I_x + Ay_1^2)(I_z - I_r) - B^2y_1^2]y_8} \\ & - \frac{2\pi B^2y_1^2[(I_x - I_y)y_3 - By_1y_5]}{[(I_x + Ay_1^2)(I_z - I_r)^2 - B^2(I_z - I_r)y_1^2]y_8};\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial y_5} = \frac{2\pi By_1y_4}{(I_z - I_r)y_8} - \frac{2\pi By_1(I_y - I_z + Ay_1^2)y_4}{[(I_x + Ay_1^2)(I_z - I_r) - B^2y_1^2]y_8} + \frac{2\pi B^3y_1^2y_1y_4}{[(I_x + Ay_1^2)(I_z - I_r)^2 - B^2(I_z - I_r)y_1^2]y_8}$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial y_6} = \frac{4\pi^2 B \cos(\omega_r t)}{[(I_z - I_r)(I_x + Ay_1^2) - B^2y_1^2]y_8^2} y_1y_4y_7.$$

APÊNDICE - B

PROGRAMAS IMPLEMENTADOS

Programa SDualSpin_final

```
function SDualSpin_final()
global n A B Ix Iy Iz Ir k c wr m t y chave indicek indicel parametro frequencia
excentricidade amplitude
%
% Esse programa resolve um problema de valor de contorno em dois pontos
% usando o método dos múltiplos tiros. O objetivo é obter informações
% sobre pontos de bifurcação, onde ramos de órbitas periódicas emanam de
% ramos de soluções estacionárias, em função de um parâmetro (no caso, a
% amplitude do torque do rotor) para o problema
% do satélite dual-spin com um amortecedor de nutação axial na plataforma.
% Seis equações diferenciais de primeira ordem governam o sistema original.
% Dado que buscamos órbitas periódicas, as condições de contorno são
%  $y_i(0)-y_i(T)=0$ ,  $i=1,...,6$ . Duas equações são anexadas: uma para o
% parâmetro e outra para a frequência da órbita.
% As duas condições de contorno a serem anexadas são:  $y_2(0)=0$  e outra que
% parametriza ramos de soluções em função dos valores iniciais de
% frequência da órbita, do parâmetro ou da primeira variável.
% Para calcular órbitas periódicas próximo a pontos de bifurcação
% acrescenta-se mais uma equação. Se, ao invés, é para calcular pontos de
% bifurcação acrescentam-se seis equações as oito primeiras.
%
% Dimensão do problema original (n=6, problema DualSpin)....
%
n = 6;
%
% Adotando valores para parâmetros do sistema....
%
```

```

% A = m(1-mu); onde m aqui e' a massa do amortecedor (na~o confundir com
% o nu'mero de no's do me'todo dos mu'ltiplos tiros). Para m = 4 kg; mu =
% 0.00554 (relaça~o entre a massa do amortecedor, m, e a massa do sate'lte,
% mt), tem-se...
%
A = 3.97784; % kg.
%
% B = mb; onde b = 1 m, e' a dista^ncia do amortecedor ate' o plano yz...
%
B = 4.0; % kgm.
%
% para^metros de ine'rcia, constante de mola e coeficiente de amortecimento
% para o amortecedor e freque^ncia do rotor ...
%
Ix = 505.708; % kgm2
Iy = 466.390; % kgm2
Iz = 471.814; % kgm2
Ir = 330.812; % kgm2
k = 8.7; % N/m
c = 0.4; % Ns/m
wr = 0.02; % rd/s
%
% nu'mero de no's no intervalo [a,b] (me'todo dos mu'ltiplos tiros)....
%
m = 3;
%
% O intervalo [a,b]=[0,1]. t(1)...t(m) e' o vetor dos no's...
%
a = 0.;
b = 1.;
delta = (b-a)/(m-1);
t(1) = a;
for i = 2:m
    t(i) = t(i-1) + delta;

```

```

end
%
% Estimando a solu~o inicial nos no's...
% Os tpbvp's a serem resolvidos tem tre^s dimenso~es.
% Para o problema do sate'lite dual-spin tem-se as dimenso~es: 8, 9 e 14...
%
for i = 1:m
    y(1,i) = 0.0; % posi~ao do amortecedor
    y(2,i) = 0.0; % velocidade do amortecedor
    y(3,i) = 0.0;
    y(4,i) = 0.1;
    y(5,i) = 0.1;
    y(6,i) = y(5,i)*(Iy-Iz)/Ir;
    y(7,i) = 0.0;
    y(8,i) = 0.1;
    y(9,i) = 0.0;
    y(10,i) = 0.0;
    y(11,i) = 0.0;
    y(12,i) = 0.0;
    y(13,i) = 0.0;
    y(14,i) = 0.0;
end
%
% i'ndices para a fun~ao que vai testar se houve bifurca~o...
%
indicek = 1;
indichel = 1;
%
% chave pode assumir os valores -2, -1, 0, 1 ou 2...
%     = -2, calcula o'rbitas perio'dicas.   A dimensa~o do problema e': n + 3.
%     = -1, calcula ramo em fun~ao do para^metro. " " " " : n + 2.
%     = 0, calcula ramo em fun~ao da frequencia. " " " " : " .
%     = 1, calcula ramo em fun~ao de y1.      " " " " : " .
%     = 2, calcula pontos de bifurca~o.      " " " " : 2(n+1).

```

```

% A metodologia adotada é a seguinte: inicia-se pela parametrização de um
% ramo (chave = -1, 0 ou 1) até se encontrar um ponto de bifurcação (que é
% acusada monitorando a função de teste). Muda-se para chave = 2 para
% calcular o ponto. Passa-se, então, para chave = -2 para calcular uma órbita
% periódica próxima ao ponto. Para parametrizar o restante do ramo
% periódico adota-se chave = -1...
%
chave = -1;
if (chave > 1) | (chave < -1)
    error('inicialmente a chave deve ser -1, 0 ou 1')
end
%
% Inicialmente a chave é -1, 0 ou 1. Um determinado tpbvp será resolvido
% centenas ou mesmo milhares de vezes, para determinar ramos de soluções.
% Agora, vamos adotar valores iniciais para os parâmetros que parametrizam os
% ramos...
%
if chave < 1
    if chave < 0
        %
        % chave = -1...
        %
        parametro = 0;
    else
        %
        % chave = 0...
        %
        frequencia = 0;
    end
else
    %
    % chave = 1...
    %
    excentricidade = 0;
end

```

```

end
%
% Vamos obter um ramo de soluções estacionárias parametrizado ou pelo
% parâmetro de interesse ou pela frequência ou pelo valor inicial da
% excentricidade do amortecedor...
%
ihom = HDualSpin_final
disp(ihom)
if ihom < 1000
%
% foi detectado um ponto de bifurcação. Passa para resolver o tpbv para
% encontrar o ponto...
%
    chave = 2;
    it = DSpin(2*(n+1))
%
% encontrado o ponto de bifurcação. Passa a obter a "primeira" solução
% periódica. Para isso resolve outro tpbv...
%
    chave = -2;
    amplitude = 0.005;
    y(1:n,1:m) = y(1:n,1:m) + amplitude*y(n+3:2*(n+1),1:m)/(y(n+3,1)-
y(n+3,fix(m/2))));
    it = DSpin(n+3)
%
% encontrada a "primeira" solução periódica. Passa-se a obter o ramo de
% soluções periódicas...
%
    chave = -1;
    parametro = y(n+1,1)
    ihom = HDualSpin_final
end

```

Programa HDualSpin_final

```
function ihom = HDualSpin_final
global n m y chave parametro frequencia excentricidade
if (chave > 1) | (chave < -1)
    error('chave deve ser -1, 0 ou 1 na parametrizaçã~o de um ramo')
end
%
% n e' a dimensã~o do problema original (n=6, no caso DualSpin); m e'
% para^metro do me'todo dos mu'ltiplos tiros. y e' o vetor soluçã~o nos no's.
% chave, aqui, assume os valores -1, 0 ou 1;
% parametro, frequencia e excentricidade prescrevem os valores para as
% condiç~oes de contorno...
%
%
% ihom - i'ndice de homotopia. Com o incremento de ihom um ramo e' obtido...
%
tfuncout = []; % vetor onde sera' armazenado a funçã~o de teste
yout1 = []; % vetor onde sera' armazenado a primeira soluçã~o (p.e., y(1,1))
yout2 = []; % vetor onde sera' armazenado a segunda soluçã~o (p.e., y(2,1))
parametroout = [];
frequenciaout = [];
excentricidadeout = [];
%
for ihom = 0:5000
    disp('ihom')
    disp(ihom)
    %
    % Para chave = -1, 0 ou 1 o tpbvp a ser resolvido tem a dimensã~o n+2 com
    % n+2 condiç~oes de contorno. Agora, vamos prescrever as estimativas nos
    % no's de acordo com o valor da chave...
    %
    if chave < 1
        if chave < 0
```

```

%
%   chave=-1. Será~o determinados ramos de soluço~es em funça~o do
%   parametro. A funça~o n+1 do sistema e' igual a zero. Uma vez
%   determinado o valor da varia'vel y(n+1) ela sera' constante. O valor e'
%   prescrito pela condiça~o de contorno r6 em todos os m no's...
%
%       y(n+1,1:m) = parametro;
else
%
%   chave=0. Será~o determinados ramos de soluço~es em funça~o da
%   frequencia. A funça~o n+2 do
%   sistema e' igual a zero. Uma vez determinado o valor da varia'vel y(n+2)
%   ela sera' constante.
%   O valor e' prescrito pela condiça~o de contorno r6 em todos os m no's...
%
%       y(n+2,1:m) = frequencia;
end
else
%
%   chave=1. Será~o determinados ramos de soluço~es em funça~o do valor
%   inicial da primeira varia'vel,
%   y1(0). O valor e' prescrito pela condiça~o de contorno r6 no no' num. 1...
%
%       y(1,1) = excentricidade;
end
%
%   Chamada da funça~o Solver que vai resolver o tpbvp pela te'cnica dos
%   mu'ltiplos tiros...
%
%       it = DSpin(n+2)
%       disp(ihom)
%       tfunc = brode
%       tfuncout = [tfuncout; tfunc];
%       yout1 = [yout1; y(1,1)];

```



```

yout2 = [yout2; y(2,1)];
parametroout = [parametroout; parametro];
frequenciaout = [frequenciaout; frequencia];
excentricidadeout = [excentricidadeout; excentricidade];
%
% Função de teste. Se ela trocar de sinal há a presença de uma bifurcação...
%
if ihom == 0
    testa = tfunc
%
% delta é o incremento na parametrização do ramo...
%
if chave < 1
    if chave < 0
%
% chave = -1. delta é o incremento no parametro...
%
        delta = 0.0001;
    else
%
% chave = 0. delta é o incremento na frequencia...
%
        delta = frequencia*0.01;
    end
    else
%
% chave = 1. delta é o incremento na excentricidade...
%
        delta = excentricidade*0.1;
    end
end
testb = testa*tfunc
testa = tfunc
if (testb > 0) | (ihom < 1000)

```

```

    if chave < 1
        if chave < 0
            %
            %     chave = -1. atualiza o parametro...
            %
            parametro = parametro + delta;
        else
            %
            %     chave = 0. atualiza a frequencia...
            %
            frequencia = frequencia + delta;
        end
    else
        %
        %     chave = 1. atualiza a excentricidade...
        %
        excentricidade = excentricidade + delta;
    end
    else
        plot(parametroout,tfuncout,'-',parametroout,yout1,'-',parametroout,yout2,'')
        return
    end
end

%
%
%-----
%
function tfunc = brode
global n m y G indicek indicel
%
%-----
%
% n - dimens~o do problema original (n=6, para o caso do DualSpin).
% m - nu'mero de no's do me'todo dos mu'ltiplos tiros no intervalo [a,b].

```

```

% y - matriz da soluça~o corrente. y(i,j) e' o vetor de soluça~o no no' j, i=1,...,n,
% j=1,...,m.
% G - matriz quadrada de ordem n do me'todo dos mu'ltiplos tiros...
% indicek, indicel - i'ndices para a funça~o de teste...
%
% -----
%
% Calculando a matriz  $E = A + B * G_{m-1} * G_{m-2} * \dots * G_1$ 
%
A = eye(n);
B = -A;
E = G(:, :, 1);
for i = 2:m-1
    E = G(:, :, i)*E;
end
E = A + B*E;
%
% Calculando o vetor h(a) atrave's de  $Elk * h(a) = el$ ;  $Elk = (I - Pl)E + Plk...$ 
%
el = A(:, indicel);    % el e' o l-e'simo vetor unita'rio do Rn...
Pl = el*el';
Plk = zeros(n);
Plk(indicel, indicek) = 1.;
Elk = (A - Pl)*E + Plk;
%
% Funça~o de teste. tfunc = el'*E*h(a)...
%
tfunc = el'*E*(Elk\el)
%
% Dados iniciais p/ bifurcaça~o. Estimativa inicial para h(xk)....
%
y(n+2+1:n+2+n, 1) = Elk\el;
for i = 2,m
    y(n+2+1:n+2+n, i) = G(:, :, i-1)*y(n+2+1:n+2+n, i-1);

```

end

Programa DSpin

```
function it = DSpin(n)
global m t y chave G
%
% -----
%
% n - dimens~ao do problema (8, 9 ou 14, no caso Dual Spin).
% m - nu~mero de no's no intervalo [a,b].
% t - vetor dos no's.
% y - matriz da solu~ao corrente. y(i,j) e' o vetor de solu~ao no no' j, i=1,...,n,
% j=1,...,m.
% chave - dependendo do valor um tipo de tpbvp e' para ser resolvido...
%
% -----
%
% checando o intervalo de validade de m (nu~mero de no's)...
%
if m <= 2
    error('m deve ser maior que 2')
end
identidade = eye(n);
passo_inicial = 1.0e-3;
refine = 4;

%
% Divide-se o intervalo de defini~ao do problema de valor de contorno em m
% no's (0=a=t(1)<t(2)<...<t(m)=b=1). Integra-se do no' j ao no' j+1 com ci's
% y(i,j), i=1,...,n. A matriz eme de derivadas parciais e' tambem calculada por
% integra~ao. E' uma matriz quadrada de ordem n*(m-1) com sub-matrizes Gjs
% de ordem n na diagonal principal e -1's nas posi~oes eme(i,n+i). Ha' ainda
```

```

% uma sub-matrizes A1 de ordem n no canto inferior esquerdo de
% eme. Para cada valor de j a sub-matriz Gj e' calculada com ci's dadas pela
% matriz identidade.
%
% -----
%
% As ci's y(i,j), i=1,...,n, j=1,...,m-1, s~ao colocadas no vetor s de n*(m-1)
% componentes (y sera' alterado mas na~o s). No final os componentes do vetor
% s sa~o colocados novamente na matriz y.
%
% -----
%
for i = 1:m-1
    s((i-1)*n+1:i*n,1) = y(1:n,i);
end

%
% -----
%
% A integraç~o e' repetida no ma'ximo 20 vezes, ou ate' se atingir a
% tolera^ncia desejada...
%
% -----
%
for it = 1:20
    disp('it = num2str(it)')
%
% em cada iteraç~o zeram-se as componentes de eme e colocam-se -1's em
% eme(i,n+i)....
%
    eme = sparse(n*(m-1),n*(m-1));
    for i = 1:n*(m-2)
        eme(i,n+i) = -1.;
    end
end

```

```

%
% integrando intervalo a intervalo ate' j=m-1....
%
for j = 1:m-1
    disp('j = num2str(j)')
%
% colocando no ini'cio do vetor y0, de n*(n+1) componentes, as n ci's para
% a integraça~o no
% intervalo j....
%
y0 = zeros(n*(n+1),1);
y0(1:n,1) = s((j-1)*n+1:j*n,1);
%
% completando o vetor y0 com a matriz identidade como ci para a
% integraça~o de Gj no intervalo
% [j,j+1]. Apo's as n componentes de y entra-se com as colunas da matriz
% identidade...
%
for i = 1:n
    y0(i*n+1:(i+1)*n,1) = identidade(1:n,i);
end
%
% integrando...
%
options = odeset('InitialStep',passo_inicial,...
    'MaxStep',t(j+1)-t(j),'Refine',refine);
[tn,yn] = ode45(@FcndualSpin,[t(j) t(j+1)],y0,options,n,j);
y(1:n,j+1) = yn(length(tn),1:n)';
%
% colocando os valores integrados em eme. A sub-matriz Gj e' formada
% coluna por coluna...
%
for i = 1:n
    eme((j-1)*n+1:(j-1)*n+n,(j-1)*n+i) = yn(length(tn),i*n+1:i*n+n)';

```

```

        G(1:n,i,j) = yn(length(tn),i*n+1:i*n+n)';
    end
    passo_inicial = tn(length(tn))-tn(length(tn)-refine);
end
%
% Fim do loop de integraç~o para a iteraç~o it. Nesse ponto tem-se y
% integrado para todos os
% intervalos e a matriz eme ja' conte'm as sub-matrizes Gj.
% -----
% completando a matriz eme com as derivadas de ri (i=1,...,n) com relaça~o a
% y(*,i) (i=1 e i=m-1)
% Sa~o as sub-matrizes A1 e Am-1. A sub-matriz Am-1 eh formada a partir de
% Gj.
%
% *****Essa parte do programa deve ser alterada quando muda o
% problema*****
%
% O problema abordado aqui e' o de buscar soluço~es perio'dicas para o
% movimento do sate'lite DualSpin. Dependendo do valor da chave
% (-2,-1,0,1,2) um TPBVP e' resolvido cada um com
% n equaço~es (n=8,9,14). Para todos eles as seis condiço~es de contorno
% iniciais, r1 a r6, na~o se alteram. Repare que (j-1)*n agora e' constante
% [(j-1)*n=(m-2)*8,(m-2)*9,(m-2)*14]. Vê arquivo A1 e Am-1.doc....
%
    for i = 1:6
        % ri = y(i,1) - y(i,m) = 0, i=1,6
        eme((j-1)*n+i,i) = 1.;
    end
    eme((j-1)*n+1:(j-1)*n+6,(j-1)*n+1:(j-1)*n+n) = -eme((j-1)*n+1:(j-1)*n+6,(j-
1)*n+1:(j-1)*n+n);
    if chave == 2
%
% chave=2 e' para calcular pontos de bifurcaço~o.
% Tem-se n=6+2+6=14. Por isso tem-se 14 cond. de contorno. As 6
% primeiras ja' foram consideradas. As 8 restantes sera~o consideradas

```

```

%   agora...
%
for i = 7:12           % ri+6 = y(i+8,1) - y(i+8,m) = 0, i=1,6
    eme((j-1)*n+i,i+2) = 1.0;
end
eme((j-1)*n+13,10) = 1.0;    % r13 = y(10,1) = 0
eme((j-1)*n+14,9) = 1.0;    % r14 = y(9,1) - 1.0 = 0
for i = 7:n
    if i < n - 1
        eme((j-1)*n+i,(j-1)*n+1:(j-1)*n+n) = -eme((j-1)*n+i+2,(j-1)*n+1:(j-
1)*n+n);
    else
        eme((j-1)*n+i,(j-1)*n+1:(j-1)*n+n) = 0.;
    end
end
else
    eme((j-1)*n+7,2) = 1.0;    % r7 = y(2,1) = 0
    eme((j-1)*n+7,(j-1)*n+1:(j-1)*n+n) = 0.;
    eme((j-1)*n+8,(j-1)*n+1:(j-1)*n+n) = 0.;
    if chave < 1
        if chave < 0
            if chave < -1
                %
                %   chave=-2 e' para calcular uma o'rbita perio'dica pro'xima de um
                %   ponto de bifurca~o.
                %   Tem-se n=6+3=9. Por isso tem-se 9 cond. de contorno. As 7(8)
                %   primeiras ja' foram
                %   consideradas. As 2(1) restante(s) sera'(a~o) consideradas agora...
                %
                eme((j-1)*n+8,1) = 1.0;    % r8 = y(1,1) - y(9,1) = 0
                eme((j-1)*n+8,9) = -1.0;
                eme((j-1)*n+9,1) = 1.0;    % r9 = y(1,1) - y(9,m) - amplitude = 0
                eme((j-1)*n+9,(j-1)*n+1:(j-1)*n+n) = -eme((j-1)*n+9,(j-1)*n+1:(j-
1)*n+n);
            end
        end
    end
end

```



```

else
%
%     chave=-1 e' para obter ramos de soluç~oes variando o parametro.
%     Tem-se n=6+2=8. Por isso tem-se 8 cond. de contorno. As 7(8)
%     primeiras ja' foram
%     consideradas. A restante sera' considerada agora...
%
%     eme((j-1)*n+8,7) = 1.0;    % r8 = y(7,1) - parametro = 0
end
else
%
%     chave=0 e' para obter ramos de soluç~oes variando a frequencia.
%     Tem-se n=6+2=8. Tem-se 8 cond. de contorno. As 7(8) primeiras ja'
%     foram consideradas. A restante sera' considerada agora...
%
%     eme((j-1)*n+8,8) = 1.0;    % r8 = y(8,1) - frequencia = 0
end
else
%
%     chave=1 e' para obter ramos de soluç~oes em funça~o do deslocamento
%     inicial da mola. Tem-se n=6+2=8. Tem-se 8 cond. de contorno. As 7(8)
%     primeiras ja' foram consideradas. A restante sera' considerada agora...
%
%     eme((j-1)*n+8,1) = 1.0;    % r8 = y(1,1) - deslocamento = 0
end
end
%
% Nesse ponto a matriz eme de derivadas parciais do me'todo de Newton esta'
% completa. Agora, sera~o atualizadas as estimativas para as condiç~oes
% iniciais do me'todo dos mu'ltiplos tiros pelo m'etodo de Newton usando
% eliminaç~o de Gauss...
%
delta_s = FunDualSpin(n,s);
delta_s = eme\delta_s;

```

```

s = s - delta_s;
retorna = 0;
disp('s = ')
disp(s)
if abs(delta_s./s) < 1.0e-09
    retorna = 1
    break
end
end
if retorna == 0
    error('sem convergencia apó s 20 iterações')
end
disp('critério de tolerancia atingido em ')
disp(it)
disp(' iterações')
for i = 1:m-1
    y(1:n,i)
    y(1:n,i) = s((i-1)*n+1:i*n,1);
    y(1:n,i)
end
%
%
% -----
%
function dydt = FcnDualSpin(t,y,n,j)
global A B Ix Iy Iz I r k c w r m
%
% t e y são os argumentos de FcnDualSpin; dydt é um vetor de derivadas de y
% com relação a t;
% n é a dimensão do problema (n=8, 9 ou 14 para o caso DualSpin); j é o
% j-ésimo intervalo do
% método dos múltiplos tiros. De A até wr tem-se os parâmetros do sistema;
% m é parâmetro
% do método dos múltiplos tiros...

```

%

$$dydt = [2*\pi/y(8)*y(2)$$

$$\begin{aligned} & -2*\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2 + Iy) - B^2) * ((2*A*B*y(2)*y(4)... \\ & - (A*y(1)^2 + Iy)*(A*(y(3)^2 + y(4)^2) - k) + B^2*(y(3)^2 - \\ & y(5)^2))*y(1)... \\ & + c*(A*y(1)^2 + Iy)*y(2) + B*((2*A*y(1)^2 + Ix + Iy - Iz)*y(5) - \\ & Ir*y(6))*y(3)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -2*\pi/y(8)/((A*(Iz - Ir) - B^2)*y(1)^2 + Ix*(Iz - Ir)) *... \\ & (((2*(A*(Iz - Ir) - B^2)*y(2) - B*(Ix - Iy + Iz - Ir)*y(4))*y(3) +... \\ & B*\cos(2*\pi/y(8)*wr*t)*y(7))*y(1) - (((A*(Iz - Ir) - B^2)*y(1)^2 +... \\ & (Iy - Iz)*(Iz - Ir))*y(5) - Ir*(Iz - Ir)*y(6))*y(4)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2*\pi/y(8)/(A*y(1)^2 + Iy)/(A*(A*y(1)^2 + Iy) - B^2) * ((A*y(1)^2 + Iy) \\ & *... \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (A*Ir*y(3)*y(6) + (A*(B*(y(4)^2 + y(5)^2) - 2*A*y(2)*y(4)) -... \\ & B*k)*y(1) - B*c*y(2)) - (A*(A*(A*y(1)^2 + Ix + Iy - Iz) +... \\ & B^2)*y(1)^2 + Iy*(A*(Ix - Iz) + B^2)) * y(3)*y(5)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2*\pi/y(8)/((A*(Iz - Ir) - B^2)*y(1)^2 + Ix*(Iz - Ir)) *... \\ & (((A*(Ix - Iy) + B^2)*y(1)^2 + Ix*(Ix - Iy))*y(3) -... \\ & B*((Ix - Iy + Iz)*y(5) + Ir*y(6))*y(1))*y(4) - \cos(2*\pi/y(8)*wr*t)*... \\ & (A*y(1)^2 + Ix)*y(7) + 2*B*Ix*y(2)*y(3)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2*\pi/y(8)/Ir/((A*(Iz - Ir) - B^2)*y(1)^2 + Ix*(Iz - Ir)) *... \\ & (\cos(2*\pi/y(8)*wr*t)*((A*Iz - B^2)*y(1)^2 + Ix*Iz)*y(7) +... \\ & Ir*(B*((Ix - Iy + Iz)*y(5) + Ir*y(6))*y(1)*y(4) - 2*Ix*y(2)*y(3)) -... \\ & ((A*(Ix - Iy) - B^2)*y(1)^2 + Ix*(Ix - Iy))*y(3)*y(4))) \end{aligned}$$

0.

0.];

$$J = \text{zeros}(n); J(1,2)=2*\pi/y(8); J(1,8)=-2*\pi/y(8)^2*y(2);$$

$$J(2,1)=4*\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)^2*((2*A*B*y(2)*y(4)- \\ (A*y(1)^2+Iy)*(A*(y(3)^2+y(4)^2)-k)+B^2*(y(3)^2- \\ y(5)^2))*y(1)+c*(A*y(1)^2+Iy)*y(2)+B*((2*A*y(1)^2+Ix+Iy-Iz)*y(5)- \\ Ir*y(6))*y(3))*A^2*y(1)-2*\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*(- \\ 2*A*y(1)^2*(A*(y(3)^2+y(4)^2)-k)+2*A*B*y(2)*y(4)- \\ (A*y(1)^2+Iy)*(A*(y(3)^2+y(4)^2)-k)+B^2*(y(3)^2- \\ y(5)^2)+2*c*A*y(1)*y(2)+4*B*A*y(1)*y(5)*y(3)));$$

$$J(2,2)=-2*\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)- \\ B^2)*(2*A*B*y(4)*y(1)+c*(A*y(1)^2+Iy)); \\ J(2,3)=-2*\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*((- \\ 2*(A*y(1)^2+Iy)*A*y(3)+2*B^2*y(3))*y(1)+B*((2*A*y(1)^2+Ix+Iy-Iz)*y(5)- \\ Ir*y(6)));$$

$$J(2,4)=-2*\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*(2*A*B*y(2)- \\ 2*(A*y(1)^2+Iy)*A*y(4))*y(1);$$

$$J(2,5)=-2*\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*(- \\ 2*B^2*y(5)*y(1)+B*(2*A*y(1)^2+Ix+Iy-Iz)*y(3));$$

$$J(2,6)=2*\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*B*Ir*y(3);$$

$$J(2,8)=2*\pi/y(8)^2/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*((2*A*B*y(2)*y(4)- \\ (A*y(1)^2+Iy)*(A*(y(3)^2+y(4)^2)-k)+B^2*(y(3)^2- \\ y(5)^2))*y(1)+c*(A*y(1)^2+Iy)*y(2)+B*((2*A*y(1)^2+Ix+Iy-Iz)*y(5)- \\ Ir*y(6))*y(3));$$

$$J(3,1)=4*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^2*(((2*A*(Iz-Ir)- \\ 2*B^2)*y(2)-B*(Ix-Iy+Iz-Ir)*y(4))*y(3)+B*\cos(2*\pi/y(8)*wr*t)*y(7))*y(1)- \\ (((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+(Iy-Iz)*(Iz-Ir))*y(5)-Ir*(Iz-Ir)*y(6))*y(4))*(A*(Iz- \\ Ir)-B^2)*y(1)-2*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(((2*A*(Iz-Ir)- \\ 2*B^2)*y(2)-B*(Ix-Iy+Iz-Ir)*y(4))*y(3)+B*\cos(2*\pi/y(8)*wr*t)*y(7)- \\ 2*(A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)*y(5)*y(4));$$

$$J(3,2)=-2*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(2*A*(Iz-Ir)- \\ 2*B^2)*y(3)*y(1);$$

$$J(3,3)=-2*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*((2*A*(Iz-Ir)- \\ 2*B^2)*y(2)-B*(Ix-Iy+Iz-Ir)*y(4))*y(1);$$

$$\begin{aligned}
J(3,4) &= -2\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(-B*(Ix-Iy+Iz- \\
&Ir)*y(3)*y(1)-((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+(Iy-Iz)*(Iz-Ir))*y(5)+Ir*(Iz-Ir)*y(6)); \\
J(3,5) &= 2\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*((A*(Iz-Ir)- \\
&B^2)*y(1)^2+(Iy-Iz)*(Iz-Ir))*y(4); \\
J(3,6) &= -2\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*Ir*(Iz-Ir)*y(4); \\
J(3,7) &= -2\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz- \\
&Ir))*B*\cos(2\pi/y(8)*wr*t)*y(1); \\
J(3,8) &= 2\pi/y(8)^2/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(((2*A*(Iz-Ir)- \\
&2*B^2)*y(2)-B*(Ix-Iy+Iz-Ir)*y(4))*y(3)+B*\cos(2\pi/y(8)*wr*t)*y(7))*y(1)- \\
&(((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+(Iy-Iz)*(Iz-Ir))*y(5)-Ir*(Iz-Ir)*y(6))*y(4))- \\
&4\pi^2/y(8)^3/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz- \\
&Ir))*B*\sin(2\pi/y(8)*wr*t)*wr*t*y(7)*y(1);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J(4,1) &= -4\pi/y(8)/(A*y(1)^2+Iy)^2/(A*(A*y(1)^2+Iy)- \\
&B^2)*((A*y(1)^2+Iy)*(A*Ir*y(3)*y(6)+(A*(B*(y(4)^2+y(5)^2)- \\
&2*A*y(2)*y(4))-B*k)*y(1)-B*c*y(2))-(A*(A*(A*y(1)^2+Ix+Iy- \\
&Iz)+B^2)*y(1)^2+Iy*(A*(Ix-Iz)+B^2))*y(3)*y(5))*A*y(1)- \\
&4\pi/y(8)/(A*y(1)^2+Iy)/(A*(A*y(1)^2+Iy)- \\
&B^2)^2*((A*y(1)^2+Iy)*(A*Ir*y(3)*y(6)+(A*(B*(y(4)^2+y(5)^2)- \\
&2*A*y(2)*y(4))-B*k)*y(1)-B*c*y(2))-(A*(A*(A*y(1)^2+Ix+Iy- \\
&Iz)+B^2)*y(1)^2+Iy*(A*(Ix- \\
&Iz)+B^2))*y(3)*y(5))*A^2*y(1)+2\pi/y(8)/(A*y(1)^2+Iy)/(A*(A*y(1)^2+Iy)- \\
&B^2)*(2*A*y(1)*(A*Ir*y(3)*y(6)+(A*(B*(y(4)^2+y(5)^2)-2*A*y(2)*y(4))- \\
&B*k)*y(1)-B*c*y(2))+(A*y(1)^2+Iy)*(A*(B*(y(4)^2+y(5)^2)-2*A*y(2)*y(4))- \\
&B*k)-(2*A^3*y(1)^3+2*A*(A*(A*y(1)^2+Ix+Iy-Iz)+B^2)*y(1))*y(3)*y(5)); \\
J(4,2) &= 2\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*(-2*A^2*y(4)*y(1)-B*c); \\
J(4,3) &= 2\pi/y(8)/(A*y(1)^2+Iy)/(A*(A*y(1)^2+Iy)- \\
&B^2)*((A*y(1)^2+Iy)*A*Ir*y(6)-(A*(A*(A*y(1)^2+Ix+Iy- \\
&Iz)+B^2)*y(1)^2+Iy*(A*(Ix-Iz)+B^2))*y(5)); \\
J(4,4) &= 2\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*A*(2*B*y(4)-2*A*y(2))*y(1); \\
J(4,5) &= 2\pi/y(8)/(A*y(1)^2+Iy)/(A*(A*y(1)^2+Iy)- \\
&B^2)*(2*(A*y(1)^2+Iy)*A*B*y(5)*y(1)-(A*(A*(A*y(1)^2+Ix+Iy- \\
&Iz)+B^2)*y(1)^2+Iy*(A*(Ix-Iz)+B^2))*y(3)); \\
J(4,6) &= 2\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*A*Ir*y(3);
\end{aligned}$$

$$J(4,8)=-2\pi/y(8)^2/(A*y(1)^2+Iy)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*((A*y(1)^2+Iy)*(A*Ir*y(3)*y(6)+(A*(B*(y(4)^2+y(5)^2)-2*A*y(2)*y(4))-B*k)*y(1)-B*c*y(2))-(A*(A*(A*y(1)^2+Ix+Iy-Iz)+B^2)*y(1)^2+Iy*(A*(Ix-Iz)+B^2))*y(3)*y(5));$$

$$J(5,1)=-4\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^2*(((A*(Ix-Iy)+B^2)*y(1)^2+Ix*(Ix-Iy))*y(3)-B*((Ix-Iy+Iz)*y(5)+Ir*y(6))*y(1))*y(4)-\cos(2\pi/y(8)*wr*t)*(A*y(1)^2+Ix)*y(7)+2*B*Ix*y(2)*y(3))*(A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)+2\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*((2*(A*(Ix-Iy)+B^2)*y(1)*y(3)-B*((Ix-Iy+Iz)*y(5)+Ir*y(6))*y(4)-2*\cos(2\pi/y(8)*wr*t)*A*y(1)*y(7));$$

$$J(5,2)=4\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*B*Ix*y(3);$$

$$J(5,3)=2\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(((A*(Ix-Iy)+B^2)*y(1)^2+Ix*(Ix-Iy))*y(4)+2*B*Ix*y(2));$$

$$J(5,4)=2\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(((A*(Ix-Iy)+B^2)*y(1)^2+Ix*(Ix-Iy))*y(3)-B*((Ix-Iy+Iz)*y(5)+Ir*y(6))*y(1));$$

$$J(5,5)=-2\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*B*(Ix-Iy+Iz)*y(1)*y(4);$$

$$J(5,6)=-2\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*B*Ir*y(1)*y(4);$$

$$J(5,7)=-2\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*\cos(2\pi/y(8)*wr*t)*(A*y(1)^2+Ix);$$

$$J(5,8)=-2\pi/y(8)^2/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(((A*(Ix-Iy)+B^2)*y(1)^2+Ix*(Ix-Iy))*y(3)-B*((Ix-Iy+Iz)*y(5)+Ir*y(6))*y(1))*y(4)-\cos(2\pi/y(8)*wr*t)*(A*y(1)^2+Ix)*y(7)+2*B*Ix*y(2)*y(3))-4\pi^2/y(8)^3/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*\sin(2\pi/y(8)*wr*t)*wr*t*(A*y(1)^2+Ix)*y(7);$$

$$J(6,1)=-4\pi/y(8)/Ir/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^2*(\cos(2\pi/y(8)*wr*t)*((A*Iz-B^2)*y(1)^2+Ix*Iz)*y(7)+Ir*(B*((Ix-Iy+Iz)*y(5)+Ir*y(6))*y(1)*y(4)-2*Ix*y(2)*y(3))-((A*(Ix-Iy)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Ix-Iy))*y(3)*y(4)))*(A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)+2\pi/y(8)/Ir/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(2*\cos(2\pi/y(8)*wr*t)*(A*Iz-B^2)*y(1)*y(7)+Ir*(B*((Ix-Iy+Iz)*y(5)+Ir*y(6))*y(4)-2*(A*(Ix-Iy)-B^2)*y(1)*y(3)*y(4)));$$

$$J(6,2)=-4\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*B*Ix*y(3);$$

```

J(6,3)=2*pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(-2*B*Ix*y(2)-((A*(Ix-
Iy)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Ix-Iy))*y(4));
J(6,4)=2*pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(B*((Ix-
Iy+Iz)*y(5)+Ir*y(6))*y(1)-((A*(Ix-Iy)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Ix-Iy))*y(3));
J(6,5)=2*pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*B*(Ix-Iy+Iz)*y(1)*y(4);
J(6,6)=2*pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*B*Ir*y(1)*y(4);
J(6,7)=2*pi/y(8)/Ir/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-
Ir))*cos(2*pi/y(8)*wr*t)*((A*Iz-B^2)*y(1)^2+Ix*Iz);
J(6,8)=-2*pi/y(8)^2/Ir/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-
Ir))*(cos(2*pi/y(8)*wr*t)*((A*Iz-B^2)*y(1)^2+Ix*Iz)*y(7)+Ir*(B*((Ix-
Iy+Iz)*y(5)+Ir*y(6))*y(1)*y(4)-2*Ix*y(2)*y(3))-((A*(Ix-Iy)-
B^2)*y(1)^2+Ix*(Ix-Iy))*y(3)*y(4)))+4*pi^2/y(8)^3/Ir/((A*(Iz-Ir)-
B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*sin(2*pi/y(8)*wr*t)*wr*t*((A*Iz-
B^2)*y(1)^2+Ix*Iz)*y(7);

```

```

if n == 9

```

```

%

```

```

% (chave=-2) e' para calcular uma o'rbita perio'dica pro'xima de um ponto de
% bifurcaço~o.

```

```

% Tem-se n=6+3=9. Falta anexar uma funça~o...

```

```

%

```

```

dydt(9) = dydt(1); J(9,2) = J(1,2); J(9,8) = J(1,8);

```

```

if j > fix(m/2)

```

```

dydt(9) = 0.; J(9,2) = 0.; J(9,8) = 0.;

```

```

end

```

```

end

```

```

if n == 14

```

```

%

```

```

% (chave=2) e' para calcular pontos de bifurcaço~o.

```

```

% Tem-se n=6+2+6=14. Falta anexar 6 funço~es restantes...

```

```

%

```

```

for i=9:14

```

```

dydt(i) = J(i-8,1) * y(9) + J(i-8,2) * y(10) + J(i-8,3) * y(11) +...

```

```

J(i-8,4) * y(12) + J(i-8,5) * y(13) + J(i-8,6) * y(14);

```

end

$$J(9,8)=-2*\pi/y(8)^2*y(10); J(9,10)=2*\pi/y(8);$$

$$\begin{aligned} J(10,1)= & (-16*\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)^3*((2*A*B*y(2)*y(4)- \\ & (A*y(1)^2+Iy)*(A*(y(3)^2+y(4)^2)-k)+B^2*(y(3)^2- \\ & y(5)^2))*y(1)+c*(A*y(1)^2+Iy)*y(2)+B*((2*A*y(1)^2+Ix+Iy-Iz)*y(5)- \\ & Ir*y(6))*y(3))*A^4*y(1)^2+8*\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)^2*(- \\ & 2*A*y(1)^2*(A*(y(3)^2+y(4)^2)-k)+2*A*B*y(2)*y(4)- \\ & (A*y(1)^2+Iy)*(A*(y(3)^2+y(4)^2)-k)+B^2*(y(3)^2- \\ & y(5)^2)+2*c*A*y(1)*y(2)+4*B*A*y(1)*y(5)*y(3))*A^2*y(1)+4*\pi/y(8)/(A*(A \\ & *y(1)^2+Iy)-B^2)^2*((2*A*B*y(2)*y(4)-(A*y(1)^2+Iy)*(A*(y(3)^2+y(4)^2)- \\ & k)+B^2*(y(3)^2-y(5)^2))*y(1)+c*(A*y(1)^2+Iy)*y(2)+B*((2*A*y(1)^2+Ix+Iy- \\ & Iz)*y(5)-Ir*y(6))*y(3))*A^2-2*\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*(- \\ & 6*A*y(1)*(A*(y(3)^2+y(4)^2)- \\ & k)+2*c*A*y(2)+4*B*A*y(5)*y(3))*y(9)+4*\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)- \\ & B^2)^2*(2*A*B*y(4)*y(1)+c*(A*y(1)^2+Iy))*y(10)*A^2*y(1)- \\ & 2*\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)- \\ & B^2)*(2*A*B*y(4)+2*c*A*y(1))*y(10)+4*\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)- \\ & B^2)^2*(- \\ & 2*(A*y(1)^2+Iy)*A*y(3)+2*B^2*y(3))*y(1)+B*((2*A*y(1)^2+Ix+Iy-Iz)*y(5)- \\ & Ir*y(6))*y(11)*A^2*y(1)-2*\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*(- \\ & 4*A^2*y(1)^2*y(3)- \\ & 2*(A*y(1)^2+Iy)*A*y(3)+2*B^2*y(3)+4*A*B*y(5)*y(1))*y(11)+4*\pi/y(8)/(A \\ & *(A*y(1)^2+Iy)-B^2)^2*(2*A*B*y(2)- \\ & 2*(A*y(1)^2+Iy)*A*y(4))*y(1)^2*y(12)*A^2+8*\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)- \\ & B^2)*A^2*y(4)*y(1)^2*y(12)-2*\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*(2*A*B*y(2)- \\ & 2*(A*y(1)^2+Iy)*A*y(4))*y(12)+4*\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)^2*(- \\ & 2*B^2*y(5)*y(1)+B*(2*A*y(1)^2+Ix+Iy-Iz)*y(3))*y(13)*A^2*y(1)- \\ & 2*\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*(-2*B^2*y(5)+4*B*A*y(1)*y(3))*y(13)- \\ & 4*\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)^2*B*Ir*y(3)*y(14)*A^2*y(1); \\ J(10,2)= & (4*\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)- \\ & B^2)^2*(2*A*B*y(4)*y(1)+c*(A*y(1)^2+Iy))*A^2*y(1)- \\ & 2*\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*(2*A*B*y(4)+2*c*A*y(1))*y(9)- \\ & 4*\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*A*B*y(1)*y(12); \end{aligned}$$

$$J(10,3)=(4\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)^2*((-2*(A*y(1)^2+Iy)*A*y(3)+2*B^2*y(3))*y(1)+B*((2*A*y(1)^2+Ix+Iy-Iz)*y(5)-Ir*y(6)))A^2*y(1)-2\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*(-4*A^2*y(1)^2*y(3)-2*(A*y(1)^2+Iy)*A*y(3)+2*B^2*y(3)+4*A*B*y(5)*y(1)))y(9)-2\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*(-2*A*(A*y(1)^2+Iy)+2*B^2)*y(1)*y(11)-2\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*B*(2*A*y(1)^2+Ix+Iy-Iz)*y(13)+2\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*B*Ir*y(14);$$

$$J(10,4)=(4\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)^2*(2*A*B*y(2)-2*(A*y(1)^2+Iy)*A*y(4))*y(1)^2*A^2-2\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*(-4*A^2*y(1)^2*y(4)+2*A*B*y(2)-2*(A*y(1)^2+Iy)*A*y(4)))y(9)-4\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*A*B*y(1)*y(10)+4\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*A*(A*y(1)^2+Iy)*y(1)*y(12);$$

$$J(10,5)=(4\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)^2*(-2*B^2*y(5)*y(1)+B*(2*A*y(1)^2+Ix+Iy-Iz)*y(3))*A^2*y(1)-2\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*(-2*B^2*y(5)+4*B*A*y(1)*y(3)))y(9)-2\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*B*(2*A*y(1)^2+Ix+Iy-Iz)*y(11)+4\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*B^2*y(1)*y(13);$$

$$J(10,6)=-4\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)^2*B*Ir*y(3)*A^2*y(1)*y(9)+2\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*B*Ir*y(11);$$

$$J(10,8)=(-4\pi/y(8)^2/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)^2*((2*A*B*y(2)*y(4)-(A*y(1)^2+Iy)*(A*(y(3)^2+y(4)^2)-k)+B^2*(y(3)^2-y(5)^2))*y(1)+c*(A*y(1)^2+Iy)*y(2)+B*((2*A*y(1)^2+Ix+Iy-Iz)*y(5)-Ir*y(6))*y(3))*A^2*y(1)+2\pi/y(8)^2/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*(-2*A*y(1)^2*(A*(y(3)^2+y(4)^2)-k)+2*A*B*y(2)*y(4)-(A*y(1)^2+Iy)*(A*(y(3)^2+y(4)^2)-k)+B^2*(y(3)^2-y(5)^2)+2*c*A*y(1)*y(2)+4*B*A*y(1)*y(5)*y(3)))y(9)+2\pi/y(8)^2/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*(2*A*B*y(4)*y(1)+c*(A*y(1)^2+Iy))*y(10)+2\pi/y(8)^2/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*((-2*(A*y(1)^2+Iy)*A*y(3)+2*B^2*y(3))*y(1)+B*((2*A*y(1)^2+Ix+Iy-Iz)*y(5)-Ir*y(6)))y(11)+2\pi/y(8)^2/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*(2*A*B*y(2)-2*(A*y(1)^2+Iy)*A*y(4))*y(1)*y(12)+2\pi/y(8)^2/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*(-$$

$$\begin{aligned}
& 2*B^2*y(5)*y(1)+B*(2*A*y(1)^2+I_x+I_y-I_z)*y(3))*y(13)- \\
& 2*\pi/y(8)^2/(A*(A*y(1)^2+I_y)-B^2)*B*Ir*y(3)*y(14); \\
& J(10,9)=4*\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+I_y)-B^2)^2*((2*A*B*y(2)*y(4)- \\
& (A*y(1)^2+I_y)*(A*(y(3)^2+y(4)^2)-k)+B^2*(y(3)^2- \\
& y(5)^2))*y(1)+c*(A*y(1)^2+I_y)*y(2)+B*((2*A*y(1)^2+I_x+I_y-I_z)*y(5)- \\
& Ir*y(6))*y(3))*A^2*y(1)-2*\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+I_y)-B^2)*(- \\
& 2*A*y(1)^2*(A*(y(3)^2+y(4)^2)-k)+2*A*B*y(2)*y(4)- \\
& (A*y(1)^2+I_y)*(A*(y(3)^2+y(4)^2)-k)+B^2*(y(3)^2- \\
& y(5)^2)+2*c*A*y(1)*y(2)+4*B*A*y(1)*y(5)*y(3)); \\
& J(10,10)=-2*\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+I_y)- \\
& B^2)*(2*A*B*y(4)*y(1)+c*(A*y(1)^2+I_y)); \\
& J(10,11)=-2*\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+I_y)-B^2)*((- \\
& 2*(A*y(1)^2+I_y)*A*y(3)+2*B^2*y(3))*y(1)+B*((2*A*y(1)^2+I_x+I_y-I_z)*y(5)- \\
& Ir*y(6))); \\
& J(10,12)=-2*\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+I_y)-B^2)*(2*A*B*y(2)- \\
& 2*(A*y(1)^2+I_y)*A*y(4))*y(1); \\
& J(10,13)=-2*\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+I_y)-B^2)*(- \\
& 2*B^2*y(5)*y(1)+B*(2*A*y(1)^2+I_x+I_y-I_z)*y(3)); \\
& J(10,14)=2*\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+I_y)-B^2)*B*Ir*y(3); \\
& \\
& J(11,1)=(-16*\pi/y(8)/((A*(I_z-I_r)-B^2)*y(1)^2+I_x*(I_z-I_r))^3((((2*A*(I_z-I_r)- \\
& 2*B^2)*y(2)-B*(I_x-I_y+I_z-I_r)*y(4))*y(3)+B*cos(2*\pi/y(8)*wr*t)*y(7))*y(1)- \\
& (((A*(I_z-I_r)-B^2)*y(1)^2+(I_y-I_z)*(I_z-I_r))*y(5)-Ir*(I_z-I_r)*y(6))*y(4))*(A*(I_z- \\
& I_r)-B^2)^2*y(1)^2+8*\pi/y(8)/((A*(I_z-I_r)-B^2)*y(1)^2+I_x*(I_z- \\
& I_r))^2*(((2*A*(I_z-I_r)-2*B^2)*y(2)-B*(I_x-I_y+I_z- \\
& I_r)*y(4))*y(3)+B*cos(2*\pi/y(8)*wr*t)*y(7))-2*(A*(I_z-I_r)- \\
& B^2)*y(1)*y(5)*y(4))*(A*(I_z-I_r)-B^2)*y(1)+4*\pi/y(8)/((A*(I_z-I_r)- \\
& B^2)*y(1)^2+I_x*(I_z-I_r))^2((((2*A*(I_z-I_r)-2*B^2)*y(2)-B*(I_x-I_y+I_z- \\
& I_r)*y(4))*y(3)+B*cos(2*\pi/y(8)*wr*t)*y(7))*y(1)-((A*(I_z-I_r)- \\
& B^2)*y(1)^2+(I_y-I_z)*(I_z-I_r))*y(5)-Ir*(I_z-I_r)*y(6))*y(4))*(A*(I_z-I_r)- \\
& B^2)+4*\pi/y(8)/((A*(I_z-I_r)-B^2)*y(1)^2+I_x*(I_z-I_r))*(A*(I_z-I_r)- \\
& B^2)*y(5)*y(4))*y(9)+4*\pi/y(8)/((A*(I_z-I_r)-B^2)*y(1)^2+I_x*(I_z- \\
& I_r))^2*(2*A*(I_z-I_r)-2*B^2)*y(3)*y(1)^2*y(10)*(A*(I_z-I_r)-B^2)- \\
& 2*\pi/y(8)/((A*(I_z-I_r)-B^2)*y(1)^2+I_x*(I_z-I_r))*(2*A*(I_z-I_r)-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2*B^2*y(3)*y(10)+4*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz- \\
& Ir))^2*((2*A*(Iz-Ir)-2*B^2)*y(2)-B*(Ix-Iy+Iz-Ir)*y(4))*y(1)^2*y(11)*(A*(Iz- \\
& Ir)-B^2)-2*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*((2*A*(Iz-Ir)- \\
& 2*B^2)*y(2)-B*(Ix-Iy+Iz-Ir)*y(4))*y(11)+4*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)- \\
& B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^2*(-B*(Ix-Iy+Iz-Ir)*y(3)*y(1)-((A*(Iz-Ir)- \\
& B^2)*y(1)^2+(Iy-Iz)*(Iz-Ir))*y(5)+Ir*(Iz-Ir)*y(6))*y(12)*(A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)- \\
& 2*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(-B*(Ix-Iy+Iz-Ir)*y(3)-2*(A*(Iz- \\
& Ir)-B^2)*y(1)*y(5))*y(12)-4*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz- \\
& Ir))^2*((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+(Iy-Iz)*(Iz-Ir))*y(4)*y(13)*(A*(Iz-Ir)- \\
& B^2)*y(1)+4*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(A*(Iz-Ir)- \\
& B^2)*y(1)*y(4)*y(13)+4*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^2*Ir*(Iz- \\
& Ir)*y(4)*y(14)*(A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& J(11,2)=(4*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^2*(2*A*(Iz-Ir)- \\
& 2*B^2)*y(3)*y(1)^2*(A*(Iz-Ir)-B^2)-2*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)- \\
& B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(2*A*(Iz-Ir)-2*B^2)*y(3))*y(9)-2*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)- \\
& B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(2*A*(Iz-Ir)-2*B^2)*y(1)*y(11);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& J(11,3)=(4*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^2*((2*A*(Iz-Ir)- \\
& 2*B^2)*y(2)-B*(Ix-Iy+Iz-Ir)*y(4))*y(1)^2*(A*(Iz-Ir)-B^2)-2*\pi/y(8)/((A*(Iz- \\
& Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*((2*A*(Iz-Ir)-2*B^2)*y(2)-B*(Ix-Iy+Iz- \\
& Ir)*y(4))*y(9)-2*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(2*A*(Iz-Ir)- \\
& 2*B^2)*y(1)*y(10)+2*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*B*(Ix-Iy+Iz- \\
& Ir)*y(1)*y(12);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& J(11,4)=(4*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^2*(-B*(Ix-Iy+Iz- \\
& Ir)*y(3)*y(1)-((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+(Iy-Iz)*(Iz-Ir))*y(5)+Ir*(Iz- \\
& Ir)*y(6))*(A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)-2*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(- \\
& B*(Ix-Iy+Iz-Ir)*y(3)-2*(A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)*y(5))*y(9)+2*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)- \\
& B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*B*(Ix-Iy+Iz-Ir)*y(1)*y(11)+2*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)- \\
& B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+(Iy-Iz)*(Iz-Ir))*y(13)- \\
& 2*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*Ir*(Iz-Ir)*y(14);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& J(11,5)=(-4*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^2*((A*(Iz-Ir)- \\
& B^2)*y(1)^2+(Iy-Iz)*(Iz-Ir))*y(4)*(A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)+4*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)- \\
& B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)*y(4))*y(9)-2*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)- \\
& B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(-(A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2-(Iy-Iz)*(Iz-Ir))*y(12);
\end{aligned}$$

$$J(11,6)=4\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^2*Ir*(Iz-Ir)*y(4)*(A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)*y(9)-2\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*Ir*(Iz-Ir)*y(12);$$

$$J(11,7)=(4\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^2*B*\cos(2\pi/y(8)*wr*t)*y(1)^2*(A*(Iz-Ir)-B^2)-2\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*B*\cos(2\pi/y(8)*wr*t))*y(9);$$

$$J(11,8)=(-4\pi/y(8)^2/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^2*(((2*A*(Iz-Ir)-2*B^2)*y(2)-B*(Ix-Iy+Iz-Ir)*y(4))*y(3)+B*\cos(2\pi/y(8)*wr*t)*y(7))*y(1)-(((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+(Iy-Iz)*(Iz-Ir))*y(5)-Ir*(Iz-Ir)*y(6))*y(4))*(A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)+8\pi^2/y(8)^3/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^2*B*\sin(2\pi/y(8)*wr*t)*wr*t*y(7)*y(1)^2*(A*(Iz-Ir)-B^2)+2\pi/y(8)^2/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(((2*A*(Iz-Ir)-2*B^2)*y(2)-B*(Ix-Iy+Iz-Ir)*y(4))*y(3)+B*\cos(2\pi/y(8)*wr*t)*y(7)-2*(A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)*y(5)*y(4))-4\pi^2/y(8)^3/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*B*\sin(2\pi/y(8)*wr*t)*wr*t*y(7))*y(9)+2\pi/y(8)^2/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*((2*A*(Iz-Ir)-2*B^2)*y(3)*y(1)*y(10)+2\pi/y(8)^2/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*((2*A*(Iz-Ir)-2*B^2)*y(2)-B*(Ix-Iy+Iz-Ir)*y(4))*y(1)*y(11)+2\pi/y(8)^2/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(-B*(Ix-Iy+Iz-Ir)*y(3)*y(1)-((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+(Iy-Iz)*(Iz-Ir))*y(5)+Ir*(Iz-Ir)*y(6))*y(12)-2\pi/y(8)^2/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+(Iy-Iz)*(Iz-Ir))*y(4)*y(13)+2\pi/y(8)^2/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*Ir*(Iz-Ir)*y(4)*y(14);$$

$$J(11,9)=4\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^2*(((2*A*(Iz-Ir)-2*B^2)*y(2)-B*(Ix-Iy+Iz-Ir)*y(4))*y(3)+B*\cos(2\pi/y(8)*wr*t)*y(7))*y(1)-(((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+(Iy-Iz)*(Iz-Ir))*y(5)-Ir*(Iz-Ir)*y(6))*y(4))*(A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)-2\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(((2*A*(Iz-Ir)-2*B^2)*y(2)-B*(Ix-Iy+Iz-Ir)*y(4))*y(3)+B*\cos(2\pi/y(8)*wr*t)*y(7)-2*(A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)*y(5)*y(4));$$

$$J(11,10)=-2\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*((2*A*(Iz-Ir)-2*B^2)*y(3)*y(1);$$

$$J(11,11)=-2\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*((2*A*(Iz-Ir)-2*B^2)*y(2)-B*(Ix-Iy+Iz-Ir)*y(4))*y(1);$$

$$J(11,12)=-2*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(-B*(Ix-Iy+Iz-Ir)*y(3)*y(1)-((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+(Iy-Iz)*(Iz-Ir))*y(5)+Ir*(Iz-Ir)*y(6));$$

$$J(11,13)=2*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+(Iy-Iz)*(Iz-Ir))*y(4);$$

$$J(11,14)=-2*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*Ir*(Iz-Ir)*y(4);$$

$$\begin{aligned} J(12,1)= & (16*\pi/y(8)/(A*y(1)^2+Iy)^3/(A*(A*y(1)^2+Iy)- \\ & B^2)*((A*y(1)^2+Iy)*(A*Ir*y(3)*y(6)+(A*(B*(y(4)^2+y(5)^2)- \\ & 2*A*y(2)*y(4))-B*k)*y(1)-B*c*y(2))-(A*(A*(A*y(1)^2+Ix+Iy- \\ & Iz)+B^2)*y(1)^2+Iy*(A*(Ix- \\ & Iz)+B^2))*y(3)*y(5))*A^2*y(1)^2+16*\pi/y(8)/(A*y(1)^2+Iy)^2/(A*(A*y(1)^2+ \\ & Iy)-B^2)^2*((A*y(1)^2+Iy)*(A*Ir*y(3)*y(6)+(A*(B*(y(4)^2+y(5)^2)- \\ & 2*A*y(2)*y(4))-B*k)*y(1)-B*c*y(2))-(A*(A*(A*y(1)^2+Ix+Iy- \\ & Iz)+B^2)*y(1)^2+Iy*(A*(Ix-Iz)+B^2))*y(3)*y(5))*A^3*y(1)^2- \\ & 8*\pi/y(8)/(A*y(1)^2+Iy)^2/(A*(A*y(1)^2+Iy)- \\ & B^2)*(2*A*y(1)*(A*Ir*y(3)*y(6)+(A*(B*(y(4)^2+y(5)^2)-2*A*y(2)*y(4))- \\ & B*k)*y(1)-B*c*y(2))+(A*y(1)^2+Iy)*(A*(B*(y(4)^2+y(5)^2)-2*A*y(2)*y(4))- \\ & B*k)-(2*A^3*y(1)^3+2*A*(A*(A*y(1)^2+Ix+Iy- \\ & Iz)+B^2)*y(1))*y(3)*y(5))*A*y(1)- \\ & 4*\pi/y(8)/(A*y(1)^2+Iy)^2/(A*(A*y(1)^2+Iy)- \\ & B^2)*((A*y(1)^2+Iy)*(A*Ir*y(3)*y(6)+(A*(B*(y(4)^2+y(5)^2)- \\ & 2*A*y(2)*y(4))-B*k)*y(1)-B*c*y(2))-(A*(A*(A*y(1)^2+Ix+Iy- \\ & Iz)+B^2)*y(1)^2+Iy*(A*(Ix- \\ & Iz)+B^2))*y(3)*y(5))*A+16*\pi/y(8)/(A*y(1)^2+Iy)/(A*(A*y(1)^2+Iy)- \\ & B^2)^3*((A*y(1)^2+Iy)*(A*Ir*y(3)*y(6)+(A*(B*(y(4)^2+y(5)^2)- \\ & 2*A*y(2)*y(4))-B*k)*y(1)-B*c*y(2))-(A*(A*(A*y(1)^2+Ix+Iy- \\ & Iz)+B^2)*y(1)^2+Iy*(A*(Ix-Iz)+B^2))*y(3)*y(5))*A^4*y(1)^2- \\ & 8*\pi/y(8)/(A*y(1)^2+Iy)/(A*(A*y(1)^2+Iy)- \\ & B^2)^2*(2*A*y(1)*(A*Ir*y(3)*y(6)+(A*(B*(y(4)^2+y(5)^2)-2*A*y(2)*y(4))- \\ & B*k)*y(1)-B*c*y(2))+(A*y(1)^2+Iy)*(A*(B*(y(4)^2+y(5)^2)-2*A*y(2)*y(4))- \\ & B*k)-(2*A^3*y(1)^3+2*A*(A*(A*y(1)^2+Ix+Iy- \\ & Iz)+B^2)*y(1))*y(3)*y(5))*A^2*y(1)- \\ & 4*\pi/y(8)/(A*y(1)^2+Iy)/(A*(A*y(1)^2+Iy)- \\ & B^2)^2*((A*y(1)^2+Iy)*(A*Ir*y(3)*y(6)+(A*(B*(y(4)^2+y(5)^2)- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2*A*y(2)*y(4))-B*k)*y(1)-B*c*y(2))-(A*(A*(A*y(1)^2+I_x+I_y- \\
& I_z)+B^2)*y(1)^2+I_y*(A*(I_x- \\
& I_z)+B^2))*y(3)*y(5))*A^2+2*pi/y(8)/(A*y(1)^2+I_y)/(A*(A*y(1)^2+I_y)- \\
& B^2)*(2*A*(A*Ir*y(3)*y(6)+(A*(B*(y(4)^2+y(5)^2)-2*A*y(2)*y(4))- \\
& B*k)*y(1)-B*c*y(2))+4*A*y(1)*(A*(B*(y(4)^2+y(5)^2)-2*A*y(2)*y(4))- \\
& B*k)-(10*A^3*y(1)^2+2*A*(A*(A*y(1)^2+I_x+I_y-I_z)+B^2))*y(3)*y(5)))*y(9)- \\
& 4*pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+I_y)-B^2)^2*(-2*A^2*y(4)*y(1)- \\
& B*c)*y(10)*A^2*y(1)-4*pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+I_y)-B^2)*A^2*y(4)*y(10)- \\
& 4*pi/y(8)/(A*y(1)^2+I_y)^2/(A*(A*y(1)^2+I_y)- \\
& B^2)*((A*y(1)^2+I_y)*A*Ir*y(6)-(A*(A*(A*y(1)^2+I_x+I_y- \\
& I_z)+B^2)*y(1)^2+I_y*(A*(I_x-I_z)+B^2))*y(5))*y(11)*A*y(1)- \\
& 4*pi/y(8)/(A*y(1)^2+I_y)/(A*(A*y(1)^2+I_y)- \\
& B^2)^2*((A*y(1)^2+I_y)*A*Ir*y(6)-(A*(A*(A*y(1)^2+I_x+I_y- \\
& I_z)+B^2)*y(1)^2+I_y*(A*(I_x- \\
& I_z)+B^2))*y(5))*y(11)*A^2*y(1)+2*pi/y(8)/(A*y(1)^2+I_y)/(A*(A*y(1)^2+I_y)- \\
& B^2)*(2*A^2*y(1)*Ir*y(6)-(2*A^3*y(1)^3+2*A*(A*(A*y(1)^2+I_x+I_y- \\
& I_z)+B^2)*y(1))*y(5))*y(11)-4*pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+I_y)- \\
& B^2)^2*A^3*(2*B*y(4)- \\
& 2*A*y(2))*y(1)^2*y(12)+2*pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+I_y)-B^2)*A*(2*B*y(4)- \\
& 2*A*y(2))*y(12)-4*pi/y(8)/(A*y(1)^2+I_y)^2/(A*(A*y(1)^2+I_y)- \\
& B^2)*(2*(A*y(1)^2+I_y)*A*B*y(5)*y(1)-(A*(A*(A*y(1)^2+I_x+I_y- \\
& I_z)+B^2)*y(1)^2+I_y*(A*(I_x-I_z)+B^2))*y(3))*y(13)*A*y(1)- \\
& 4*pi/y(8)/(A*y(1)^2+I_y)/(A*(A*y(1)^2+I_y)- \\
& B^2)^2*(2*(A*y(1)^2+I_y)*A*B*y(5)*y(1)-(A*(A*(A*y(1)^2+I_x+I_y- \\
& I_z)+B^2)*y(1)^2+I_y*(A*(I_x- \\
& I_z)+B^2))*y(3))*y(13)*A^2*y(1)+2*pi/y(8)/(A*y(1)^2+I_y)/(A*(A*y(1)^2+I_y)- \\
& B^2)*(4*A^2*y(1)^2*B*y(5)+2*(A*y(1)^2+I_y)*A*B*y(5)- \\
& (2*A^3*y(1)^3+2*A*(A*(A*y(1)^2+I_x+I_y-I_z)+B^2)*y(1))*y(3))*y(13)- \\
& 4*pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+I_y)-B^2)^2*A^3*Ir*y(3)*y(14)*y(1); \\
& J(12,2)=(-4*pi/y(8)/(A*y(1)^2+I_y)/(A*(A*y(1)^2+I_y)-B^2)*(- \\
& 2*A^2*y(4)*y(1)-B*c)*A*y(1)-4*pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+I_y)-B^2)^2*(- \\
& 2*A^2*y(4)*y(1)-B*c)*A^2*y(1)+2*pi/y(8)/(A*y(1)^2+I_y)/(A*(A*y(1)^2+I_y)- \\
& B^2)*(2*A*y(1)*(-2*A^2*y(4)*y(1)-B*c)-2*(A*y(1)^2+I_y)*A^2*y(4)))*y(9)- \\
& 4*pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+I_y)-B^2)*A^2*y(1)*y(12);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J(12,3) &= (-4\pi/y(8)/(A*y(1)^2+Iy)^2/(A*(A*y(1)^2+Iy)- \\
& B^2)*((A*y(1)^2+Iy)*A*Ir*y(6)-(A*(A*(A*y(1)^2+Ix+Iy- \\
& Iz)+B^2)*y(1)^2+Iy*(A*(Ix-Iz)+B^2))*y(5))*A*y(1)- \\
& 4\pi/y(8)/(A*y(1)^2+Iy)/(A*(A*y(1)^2+Iy)- \\
& B^2)^2*((A*y(1)^2+Iy)*A*Ir*y(6)-(A*(A*(A*y(1)^2+Ix+Iy- \\
& Iz)+B^2)*y(1)^2+Iy*(A*(Ix- \\
& Iz)+B^2))*y(5))*A^2*y(1)+2\pi/y(8)/(A*y(1)^2+Iy)/(A*(A*y(1)^2+Iy)- \\
& B^2)*(2*A^2*y(1)*Ir*y(6)-(2*A^3*y(1)^3+2*A*(A*(A*y(1)^2+Ix+Iy- \\
& Iz)+B^2)*y(1))*y(5))*y(9)+2\pi/y(8)/(A*y(1)^2+Iy)/(A*(A*y(1)^2+Iy)- \\
& B^2)*(-A*(A*(A*y(1)^2+Ix+Iy-Iz)+B^2)*y(1)^2-Iy*(A*(Ix- \\
& Iz)+B^2))*y(13)+2\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*A*Ir*y(14); \\
J(12,4) &= (-4\pi/y(8)/(A*y(1)^2+Iy)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*A^2*(2*B*y(4)- \\
& 2*A*y(2))*y(1)^2-4\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)^2*A^3*(2*B*y(4)- \\
& 2*A*y(2))*y(1)^2+2\pi/y(8)/(A*y(1)^2+Iy)/(A*(A*y(1)^2+Iy)- \\
& B^2)*(2*A^2*y(1)^2*(2*B*y(4)-2*A*y(2))+(A*y(1)^2+Iy)*A*(2*B*y(4)- \\
& 2*A*y(2))))*y(9)-4\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)- \\
& B^2)*A^2*y(1)*y(10)+4\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*A*B*y(1)*y(12); \\
J(12,5) &= (-4\pi/y(8)/(A*y(1)^2+Iy)^2/(A*(A*y(1)^2+Iy)- \\
& B^2)*(2*(A*y(1)^2+Iy)*A*B*y(5)*y(1)-(A*(A*(A*y(1)^2+Ix+Iy- \\
& Iz)+B^2)*y(1)^2+Iy*(A*(Ix-Iz)+B^2))*y(3))*A*y(1)- \\
& 4\pi/y(8)/(A*y(1)^2+Iy)/(A*(A*y(1)^2+Iy)- \\
& B^2)^2*(2*(A*y(1)^2+Iy)*A*B*y(5)*y(1)-(A*(A*(A*y(1)^2+Ix+Iy- \\
& Iz)+B^2)*y(1)^2+Iy*(A*(Ix- \\
& Iz)+B^2))*y(3))*A^2*y(1)+2\pi/y(8)/(A*y(1)^2+Iy)/(A*(A*y(1)^2+Iy)- \\
& B^2)*(4*A^2*y(1)^2*B*y(5)+2*(A*y(1)^2+Iy)*A*B*y(5)- \\
& (2*A^3*y(1)^3+2*A*(A*(A*y(1)^2+Ix+Iy- \\
& Iz)+B^2)*y(1))*y(3))*y(9)+2\pi/y(8)/(A*y(1)^2+Iy)/(A*(A*y(1)^2+Iy)- \\
& B^2)*(-A*(A*(A*y(1)^2+Ix+Iy-Iz)+B^2)*y(1)^2-Iy*(A*(Ix- \\
& Iz)+B^2))*y(11)+4\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*A*B*y(1)*y(13); \\
J(12,6) &= -4\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)- \\
& B^2)^2*A^3*Ir*y(3)*y(1)*y(9)+2\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*A*Ir*y(11); \\
J(12,8) &= (4\pi/y(8)^2/(A*y(1)^2+Iy)^2/(A*(A*y(1)^2+Iy)- \\
& B^2)*((A*y(1)^2+Iy)*(A*Ir*y(3)*y(6)+(A*(B*(y(4)^2+y(5)^2)- \\
& 2*A*y(2)*y(4))-B*k)*y(1)-B*c*y(2))-(A*(A*(A*y(1)^2+Ix+Iy-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& I_z)+B^2)*y(1)^2+I_y*(A*(I_x- \\
& I_z)+B^2))*y(3)*y(5))*A*y(1)+4*\pi/y(8)^2/(A*y(1)^2+I_y)/(A*(A*y(1)^2+I_y)- \\
& B^2)^2*((A*y(1)^2+I_y)*(A*Ir*y(3)*y(6)+(A*(B*(y(4)^2+y(5)^2)- \\
& 2*A*y(2)*y(4))-B*k)*y(1)-B*c*y(2))-(A*(A*(A*y(1)^2+I_x+I_y- \\
& I_z)+B^2)*y(1)^2+I_y*(A*(I_x-I_z)+B^2))*y(3)*y(5))*A^2*y(1)- \\
& 2*\pi/y(8)^2/(A*y(1)^2+I_y)/(A*(A*y(1)^2+I_y)- \\
& B^2)*(2*A*y(1)*(A*Ir*y(3)*y(6)+(A*(B*(y(4)^2+y(5)^2)-2*A*y(2)*y(4))- \\
& B*k)*y(1)-B*c*y(2)))+(A*y(1)^2+I_y)*(A*(B*(y(4)^2+y(5)^2)-2*A*y(2)*y(4))- \\
& B*k)-(2*A^3*y(1)^3+2*A*(A*(A*y(1)^2+I_x+I_y- \\
& I_z)+B^2)*y(1))*y(3)*y(5))*y(9)-2*\pi/y(8)^2/(A*(A*y(1)^2+I_y)-B^2)*(- \\
& 2*A^2*y(4)*y(1)-B*c)*y(10)-2*\pi/y(8)^2/(A*y(1)^2+I_y)/(A*(A*y(1)^2+I_y)- \\
& B^2)*((A*y(1)^2+I_y)*A*Ir*y(6)-(A*(A*(A*y(1)^2+I_x+I_y- \\
& I_z)+B^2)*y(1)^2+I_y*(A*(I_x-I_z)+B^2))*y(5))*y(11)- \\
& 2*\pi/y(8)^2/(A*(A*y(1)^2+I_y)-B^2)*A*(2*B*y(4)-2*A*y(2))*y(1)*y(12)- \\
& 2*\pi/y(8)^2/(A*y(1)^2+I_y)/(A*(A*y(1)^2+I_y)- \\
& B^2)*(2*(A*y(1)^2+I_y)*A*B*y(5)*y(1)-(A*(A*(A*y(1)^2+I_x+I_y- \\
& I_z)+B^2)*y(1)^2+I_y*(A*(I_x-I_z)+B^2))*y(3))*y(13)- \\
& 2*\pi/y(8)^2/(A*(A*y(1)^2+I_y)-B^2)*A*Ir*y(3)*y(14); \\
& J(12,9)=-4*\pi/y(8)/(A*y(1)^2+I_y)^2/(A*(A*y(1)^2+I_y)- \\
& B^2)*((A*y(1)^2+I_y)*(A*Ir*y(3)*y(6)+(A*(B*(y(4)^2+y(5)^2)- \\
& 2*A*y(2)*y(4))-B*k)*y(1)-B*c*y(2))-(A*(A*(A*y(1)^2+I_x+I_y- \\
& I_z)+B^2)*y(1)^2+I_y*(A*(I_x-I_z)+B^2))*y(3)*y(5))*A*y(1)- \\
& 4*\pi/y(8)/(A*y(1)^2+I_y)/(A*(A*y(1)^2+I_y)- \\
& B^2)^2*((A*y(1)^2+I_y)*(A*Ir*y(3)*y(6)+(A*(B*(y(4)^2+y(5)^2)- \\
& 2*A*y(2)*y(4))-B*k)*y(1)-B*c*y(2))-(A*(A*(A*y(1)^2+I_x+I_y- \\
& I_z)+B^2)*y(1)^2+I_y*(A*(I_x-I_z)+B^2))*y(3)*y(5))*A^2*y(1)+2*\pi/y(8)/(A*y(1)^2+I_y)/(A*(A*y(1)^2+I_y)- \\
& B^2)*(2*A*y(1)*(A*Ir*y(3)*y(6)+(A*(B*(y(4)^2+y(5)^2)-2*A*y(2)*y(4))- \\
& B*k)*y(1)-B*c*y(2)))+(A*y(1)^2+I_y)*(A*(B*(y(4)^2+y(5)^2)-2*A*y(2)*y(4))- \\
& B*k)-(2*A^3*y(1)^3+2*A*(A*(A*y(1)^2+I_x+I_y-I_z)+B^2)*y(1))*y(3)*y(5)); \\
& J(12,10)=2*\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+I_y)-B^2)*(-2*A^2*y(4)*y(1)-B*c); \\
& J(12,11)=2*\pi/y(8)/(A*y(1)^2+I_y)/(A*(A*y(1)^2+I_y)- \\
& B^2)*((A*y(1)^2+I_y)*A*Ir*y(6)-(A*(A*(A*y(1)^2+I_x+I_y- \\
& I_z)+B^2)*y(1)^2+I_y*(A*(I_x-I_z)+B^2))*y(5));
\end{aligned}$$

$$J(12,12)=2*\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*A*(2*B*y(4)-2*A*y(2))*y(1);$$

$$J(12,13)=2*\pi/y(8)/(A*y(1)^2+Iy)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*(2*(A*y(1)^2+Iy)*A*B*y(5)*y(1)-(A*(A*(A*y(1)^2+Ix+Iy-Iz)+B^2)*y(1)^2+Iy*(A*(Ix-Iz)+B^2))*y(3));$$

$$J(12,14)=2*\pi/y(8)/(A*(A*y(1)^2+Iy)-B^2)*A*Ir*y(3);$$

$$\begin{aligned} J(13,1)= & (16*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^3*(((A*(Ix-Iy)+B^2)*y(1)^2+Ix*(Ix-Iy))*y(3)-B*((Ix-Iy+Iz)*y(5)+Ir*y(6))*y(1))*y(4)- \\ & \cos(2*\pi/y(8)*wr*t)*(A*y(1)^2+Ix)*y(7)+2*B*Ix*y(2)*y(3))*(A*(Iz-Ir)-B^2)^2*y(1)^2-8*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^2*((2*(A*(Ix-Iy)+B^2)*y(1)*y(3)-B*((Ix-Iy+Iz)*y(5)+Ir*y(6))*y(4)- \\ & 2*\cos(2*\pi/y(8)*wr*t)*A*y(1)*y(7))*(A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)-4*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^2*(((A*(Ix-Iy)+B^2)*y(1)^2+Ix*(Ix-Iy))*y(3)-B*((Ix-Iy+Iz)*y(5)+Ir*y(6))*y(1))*y(4)- \\ & \cos(2*\pi/y(8)*wr*t)*(A*y(1)^2+Ix)*y(7)+2*B*Ix*y(2)*y(3))*(A*(Iz-Ir)-B^2)+2*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(2*(A*(Ix-Iy)+B^2)*y(3)*y(4)-2*\cos(2*\pi/y(8)*wr*t)*A*y(7))*y(9)-8*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^2*B*Ix*y(3)*y(10)*(A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)- \\ & 4*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^2*(((A*(Ix-Iy)+B^2)*y(1)^2+Ix*(Ix-Iy))*y(4)+2*B*Ix*y(2))*y(11)*(A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)+4*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(A*(Ix-Iy)+B^2)*y(1)*y(4)*y(11)-4*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^2*(((A*(Ix-Iy)+B^2)*y(1)^2+Ix*(Ix-Iy))*y(3)-B*((Ix-Iy+Iz)*y(5)+Ir*y(6))*y(1))*y(12)*(A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)+2*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(2*(A*(Ix-Iy)+B^2)*y(1)*y(3)-B*((Ix-Iy+Iz)*y(5)+Ir*y(6))*y(12))+4*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^2*B*(Ix-Iy+Iz)*y(1)^2*y(4)*y(13)*(A*(Iz-Ir)-B^2)-2*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*B*(Ix-Iy+Iz)*y(4)*y(13)+4*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^2*B*Ir*y(1)^2*y(4)*y(14)*(A*(Iz-Ir)-B^2)- \\ & 2*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*B*Ir*y(4)*y(14); \end{aligned}$$

$$J(13,2)=-8*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^2*B*Ix*y(3)*(A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)*y(9)+4*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*B*Ix*y(11);$$

$$J(13,3)=(-4*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^2*(((A*(Ix-Iy)+B^2)*y(1)^2+Ix*(Ix-Iy))*y(4)+2*B*Ix*y(2))*(A*(Iz-Ir)-$$

$$\begin{aligned}
& B^2 * y(1) + 4 * \pi / y(8) / ((A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - Ir)) * (A * (Ix - \\
& Iy) + B^2) * y(1) * y(4)) * y(9) + 4 * \pi / y(8) / ((A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - \\
& Ir)) * B * Ix * y(10) + 2 * \pi / y(8) / ((A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - Ir)) * ((A * (Ix - \\
& Iy) + B^2) * y(1)^2 + Ix * (Ix - Iy)) * y(12); \\
& J(13,4) = (-4 * \pi / y(8) / ((A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - Ir))^2 * (((A * (Ix - \\
& Iy) + B^2) * y(1)^2 + Ix * (Ix - Iy)) * y(3) - B * ((Ix - Iy + Iz) * y(5) + Ir * y(6)) * y(1)) * (A * (Iz - \\
& Ir) - B^2) * y(1) + 2 * \pi / y(8) / ((A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - Ir)) * (2 * (A * (Ix - \\
& Iy) + B^2) * y(1) * y(3) - B * ((Ix - Iy + Iz) * y(5) + Ir * y(6)))) * y(9) + 2 * \pi / y(8) / ((A * (Iz - Ir) - \\
& B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - Ir)) * ((A * (Ix - Iy) + B^2) * y(1)^2 + Ix * (Ix - Iy)) * y(11) - \\
& 2 * \pi / y(8) / ((A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - Ir)) * B * (Ix - Iy + Iz) * y(1) * y(13) - \\
& 2 * \pi / y(8) / ((A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - Ir)) * B * Ir * y(1) * y(14); \\
& J(13,5) = (4 * \pi / y(8) / ((A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - Ir))^2 * B * (Ix - \\
& Iy + Iz) * y(1)^2 * y(4) * (A * (Iz - Ir) - B^2) - 2 * \pi / y(8) / ((A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - \\
& Ir)) * B * (Ix - Iy + Iz) * y(4)) * y(9) - 2 * \pi / y(8) / ((A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - \\
& Ir)) * B * (Ix - Iy + Iz) * y(1) * y(12); \\
& J(13,6) = (4 * \pi / y(8) / ((A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - \\
& Ir))^2 * B * Ir * y(1)^2 * y(4) * (A * (Iz - Ir) - B^2) - 2 * \pi / y(8) / ((A * (Iz - Ir) - \\
& B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - Ir)) * B * Ir * y(4)) * y(9) - 2 * \pi / y(8) / ((A * (Iz - Ir) - \\
& B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - Ir)) * B * Ir * y(1) * y(12); \\
& J(13,7) = (4 * \pi / y(8) / ((A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - \\
& Ir))^2 * \cos(2 * \pi / y(8) * wr * t) * (A * y(1)^2 + Ix) * (A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1) - \\
& 4 * \pi / y(8) / ((A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - \\
& Ir)) * \cos(2 * \pi / y(8) * wr * t) * A * y(1)) * y(9); \\
& J(13,8) = (4 * \pi / y(8))^2 / ((A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - Ir))^2 * (((A * (Ix - \\
& Iy) + B^2) * y(1)^2 + Ix * (Ix - Iy)) * y(3) - B * ((Ix - Iy + Iz) * y(5) + Ir * y(6)) * y(1)) * y(4) - \\
& \cos(2 * \pi / y(8) * wr * t) * (A * y(1)^2 + Ix) * y(7) + 2 * B * Ix * y(2) * y(3)) * (A * (Iz - Ir) - \\
& B^2) * y(1) + 8 * \pi^2 / y(8)^3 / ((A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - \\
& Ir))^2 * \sin(2 * \pi / y(8) * wr * t) * wr * t * (A * y(1)^2 + Ix) * y(7) * (A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1) - \\
& 2 * \pi / y(8)^2 / ((A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - Ir)) * ((2 * (A * (Ix - \\
& Iy) + B^2) * y(1) * y(3) - B * ((Ix - Iy + Iz) * y(5) + Ir * y(6))) * y(4) - \\
& 2 * \cos(2 * \pi / y(8) * wr * t) * A * y(1) * y(7)) - 8 * \pi^2 / y(8)^3 / ((A * (Iz - Ir) - \\
& B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - Ir)) * \sin(2 * \pi / y(8) * wr * t) * wr * t * A * y(1) * y(7)) * y(9) - \\
& 4 * \pi / y(8)^2 / ((A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - Ir)) * B * Ix * y(3) * y(10) - \\
& 2 * \pi / y(8)^2 / ((A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - Ir)) * (((A * (Ix -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Iy)+B^2)*y(1)^2+Ix*(Ix-Iy))*y(4)+2*B*Ix*y(2))*y(11)-2*\pi/y(8)^2/((A*(Iz- \\ & Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(((A*(Ix-Iy)+B^2)*y(1)^2+Ix*(Ix-Iy))*y(3)- \\ & B*((Ix-Iy+Iz)*y(5)+Ir*y(6))*y(1))*y(12)+2*\pi/y(8)^2/((A*(Iz-Ir)- \\ & B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*B*(Ix-Iy+Iz)*y(1)*y(4)*y(13)+2*\pi/y(8)^2/((A*(Iz- \\ & Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*B*Ir*y(1)*y(4)*y(14); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J(13,9)= & -4*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^2*(((A*(Ix- \\ & Iy)+B^2)*y(1)^2+Ix*(Ix-Iy))*y(3)-B*((Ix-Iy+Iz)*y(5)+Ir*y(6))*y(1))*y(4)- \\ & \cos(2*\pi/y(8)*wr*t)*(A*y(1)^2+Ix)*y(7)+2*B*Ix*y(2)*y(3))* (A*(Iz-Ir)- \\ & B^2)*y(1)+2*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*((2*(A*(Ix- \\ & Iy)+B^2)*y(1)*y(3)-B*((Ix-Iy+Iz)*y(5)+Ir*y(6))*y(4)- \\ & 2*\cos(2*\pi/y(8)*wr*t)*A*y(1)*y(7)); \end{aligned}$$

$$J(13,10)=4*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*B*Ix*y(3);$$

$$J(13,11)=2*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(((A*(Ix- \\ Iy)+B^2)*y(1)^2+Ix*(Ix-Iy))*y(4)+2*B*Ix*y(2));$$

$$J(13,12)=2*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(((A*(Ix- \\ Iy)+B^2)*y(1)^2+Ix*(Ix-Iy))*y(3)-B*((Ix-Iy+Iz)*y(5)+Ir*y(6))*y(1));$$

$$J(13,13)=-2*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*B*(Ix- \\ Iy+Iz)*y(1)*y(4);$$

$$J(13,14)=-2*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*B*Ir*y(1)*y(4);$$

$$\begin{aligned} J(14,1)= & (16*\pi/y(8)/Ir/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz- \\ & Ir))^3*(\cos(2*\pi/y(8)*wr*t)*((A*Iz-B^2)*y(1)^2+Ix*Iz)*y(7)+Ir*(B*((Ix- \\ & Iy+Iz)*y(5)+Ir*y(6))*y(1)*y(4)-2*Ix*y(2)*y(3))-((A*(Ix-Iy)- \\ & B^2)*y(1)^2+Ix*(Ix-Iy))*y(3)*y(4)))*(A*(Iz-Ir)-B^2)^2*y(1)^2- \\ & 8*\pi/y(8)/Ir/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz- \\ & Ir))^2*(2*\cos(2*\pi/y(8)*wr*t)*(A*Iz-B^2)*y(1)*y(7)+Ir*(B*((Ix- \\ & Iy+Iz)*y(5)+Ir*y(6))*y(4)-2*(A*(Ix-Iy)-B^2)*y(1)*y(3)*y(4)))*(A*(Iz-Ir)- \\ & B^2)*y(1)-4*\pi/y(8)/Ir/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz- \\ & Ir))^2*(\cos(2*\pi/y(8)*wr*t)*((A*Iz-B^2)*y(1)^2+Ix*Iz)*y(7)+Ir*(B*((Ix- \\ & Iy+Iz)*y(5)+Ir*y(6))*y(1)*y(4)-2*Ix*y(2)*y(3))-((A*(Ix-Iy)- \\ & B^2)*y(1)^2+Ix*(Ix-Iy))*y(3)*y(4)))*(A*(Iz-Ir)-B^2)+2*\pi/y(8)/Ir/((A*(Iz-Ir)- \\ & B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))* (2*\cos(2*\pi/y(8)*wr*t)*(A*Iz-B^2)*y(7)- \\ & 2*Ir*(A*(Ix-Iy)-B^2)*y(3)*y(4)))*y(9)+8*\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)- \\ & B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^2*B*Ix*y(3)*y(10)*(A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^2*(-2*B*Ix*y(2)-((A*(Ix-Iy)- \\
& B^2)*y(1)^2+Ix*(Ix-Iy))*y(4))*y(11)*(A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)-4\pi/y(8)/((A*(Iz- \\
& Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(A*(Ix-Iy)-B^2)*y(1)*y(4))*y(11)- \\
& 4\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^2*(B*((Ix- \\
& Iy+Iz)*y(5)+Ir*y(6))*y(1)-((A*(Ix-Iy)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Ix- \\
& Iy))*y(3))*y(12)*(A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)+2\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)- \\
& B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(B*((Ix-Iy+Iz)*y(5)+Ir*y(6))-2*(A*(Ix-Iy)- \\
& B^2)*y(1)*y(3))*y(12)-4\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^2*B*(Ix- \\
& Iy+Iz)*y(1)^2*y(4)*y(13)*(A*(Iz-Ir)-B^2)+2\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)- \\
& B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*B*(Ix-Iy+Iz)*y(4)*y(13)-4\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)- \\
& B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^2*B*Ir*y(1)^2*y(4)*y(14)*(A*(Iz-Ir)- \\
& B^2)+2\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*B*Ir*y(4)*y(14); \\
& J(14,2)=8\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^2*B*Ix*y(3)*(A*(Iz- \\
& Ir)-B^2)*y(1)*y(9)-4\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*B*Ix*y(11); \\
& J(14,3)=(-4\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^2*(-2*B*Ix*y(2)- \\
& ((A*(Ix-Iy)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Ix-Iy))*y(4))*(A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)- \\
& 4\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(A*(Ix-Iy)- \\
& B^2)*y(1)*y(4))*y(9)-4\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz- \\
& Ir))*B*Ix*y(10)+2\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(-(A*(Ix-Iy)- \\
& B^2)*y(1)^2-Ix*(Ix-Iy))*y(12); \\
& J(14,4)=(-4\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^2*(B*((Ix- \\
& Iy+Iz)*y(5)+Ir*y(6))*y(1)-((A*(Ix-Iy)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Ix-Iy))*y(3))*(A*(Iz- \\
& Ir)-B^2)*y(1)+2\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(B*((Ix- \\
& Iy+Iz)*y(5)+Ir*y(6))-2*(A*(Ix-Iy)-B^2)*y(1)*y(3))*y(9)+2\pi/y(8)/((A*(Iz- \\
& Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(-(A*(Ix-Iy)-B^2)*y(1)^2-Ix*(Ix- \\
& Iy))*y(11)+2\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*B*(Ix- \\
& Iy+Iz)*y(1)*y(13)+2\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz- \\
& Ir))*B*Ir*y(1)*y(14); \\
& J(14,5)=(-4\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))^2*B*(Ix- \\
& Iy+Iz)*y(1)^2*y(4)*(A*(Iz-Ir)-B^2)+2\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz- \\
& Ir))*B*(Ix-Iy+Iz)*y(4))*y(9)+2\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz- \\
& Ir))*B*(Ix-Iy+Iz)*y(1)*y(12); \\
& J(14,6)=(-4\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz- \\
& Ir))^2*B*Ir*y(1)^2*y(4)*(A*(Iz-Ir)-B^2)+2\pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& B^2 * y(1)^2 + Ix * (Iz - Ir) * B * Ir * y(4) * y(9) + 2 * \pi / y(8) / ((A * (Iz - Ir) - \\
& B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - Ir) * B * Ir * y(1) * y(12)); \\
& J(14, 7) = (-4 * \pi / y(8) / Ir / ((A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - \\
& Ir))^2 * \cos(2 * \pi / y(8) * wr * t) * ((A * Iz - B^2) * y(1)^2 + Ix * Iz) * (A * (Iz - Ir) - \\
& B^2) * y(1) + 4 * \pi / y(8) / Ir / ((A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - \\
& Ir)) * \cos(2 * \pi / y(8) * wr * t) * (A * Iz - B^2) * y(1) * y(9); \\
& J(14, 8) = (4 * \pi / y(8)^2 / Ir / ((A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - \\
& Ir))^2 * (\cos(2 * \pi / y(8) * wr * t) * ((A * Iz - B^2) * y(1)^2 + Ix * Iz) * y(7) + Ir * (B * ((Ix - \\
& Iy + Iz) * y(5) + Ir * y(6)) * y(1) * y(4) - 2 * Ix * y(2) * y(3)) - ((A * (Ix - Iy) - \\
& B^2) * y(1)^2 + Ix * (Ix - Iy)) * y(3) * y(4))) * (A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1) - \\
& 8 * \pi^2 / y(8)^3 / Ir / ((A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - \\
& Ir))^2 * \sin(2 * \pi / y(8) * wr * t) * wr * t * ((A * Iz - B^2) * y(1)^2 + Ix * Iz) * y(7) * (A * (Iz - Ir) - \\
& B^2) * y(1) - 2 * \pi / y(8)^2 / Ir / ((A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - \\
& Ir)) * (2 * \cos(2 * \pi / y(8) * wr * t) * (A * Iz - B^2) * y(1) * y(7) + Ir * (B * ((Ix - \\
& Iy + Iz) * y(5) + Ir * y(6)) * y(4) - 2 * (A * (Ix - Iy) - \\
& B^2) * y(1) * y(3) * y(4))) + 8 * \pi^2 / y(8)^3 / Ir / ((A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - \\
& Ir)) * \sin(2 * \pi / y(8) * wr * t) * wr * t * (A * Iz - \\
& B^2) * y(1) * y(7) * y(9) + 4 * \pi / y(8)^2 / ((A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - \\
& Ir)) * B * Ix * y(3) * y(10) - 2 * \pi / y(8)^2 / ((A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - Ir)) * (- \\
& 2 * B * Ix * y(2) - ((A * (Ix - Iy) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Ix - Iy)) * y(4)) * y(11) - \\
& 2 * \pi / y(8)^2 / ((A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - Ir)) * (B * ((Ix - \\
& Iy + Iz) * y(5) + Ir * y(6)) * y(1) - ((A * (Ix - Iy) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Ix - Iy)) * y(3)) * y(12) - \\
& 2 * \pi / y(8)^2 / ((A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - Ir)) * B * (Ix - Iy + Iz) * y(1) * y(4) * y(13) - \\
& 2 * \pi / y(8)^2 / ((A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - Ir)) * B * Ir * y(1) * y(4) * y(14); \\
& J(14, 9) = -4 * \pi / y(8) / Ir / ((A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - \\
& Ir))^2 * (\cos(2 * \pi / y(8) * wr * t) * ((A * Iz - B^2) * y(1)^2 + Ix * Iz) * y(7) + Ir * (B * ((Ix - \\
& Iy + Iz) * y(5) + Ir * y(6)) * y(1) * y(4) - 2 * Ix * y(2) * y(3)) - ((A * (Ix - Iy) - \\
& B^2) * y(1)^2 + Ix * (Ix - Iy)) * y(3) * y(4))) * (A * (Iz - Ir) - \\
& B^2) * y(1) + 2 * \pi / y(8) / Ir / ((A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - \\
& Ir)) * (2 * \cos(2 * \pi / y(8) * wr * t) * (A * Iz - B^2) * y(1) * y(7) + Ir * (B * ((Ix - \\
& Iy + Iz) * y(5) + Ir * y(6)) * y(4) - 2 * (A * (Ix - Iy) - B^2) * y(1) * y(3) * y(4))); \\
& J(14, 10) = -4 * \pi / y(8) / ((A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - Ir)) * B * Ix * y(3); \\
& J(14, 11) = 2 * \pi / y(8) / ((A * (Iz - Ir) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Iz - Ir)) * (-2 * B * Ix * y(2) - \\
& ((A * (Ix - Iy) - B^2) * y(1)^2 + Ix * (Ix - Iy)) * y(4));
\end{aligned}$$

```

J(14,12)=2*pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*(B*((Ix-
Iy+Iz)*y(5)+Ir*y(6))*y(1)-((A*(Ix-Iy)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Ix-Iy))*y(3));
J(14,13)=2*pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*B*(Ix-
Iy+Iz)*y(1)*y(4);
J(14,14)=2*pi/y(8)/((A*(Iz-Ir)-B^2)*y(1)^2+Ix*(Iz-Ir))*B*Ir*y(1)*y(4);
end
%
% funçõ~es para integraç~ao da matriz Gj...
%
for i=n+1:n:n*(n+1)
    dydt(i:i+n-1,1)=J(1:n,1:n)*y(i:i+n-1);
end
%
%
% -----
%
function f = FunDualSpin(n,x)
global m y chave parametro frequencia excentricidade amplitude
%
% -----
%
% n - dimensã~o do problema (8, 9 ou 14, no caso Dual Spin).
% m - nu~mero de no's no intervalo [a,b].
% y - matriz da soluçã~o corrente. y(i,j) e' o vetor soluçã~o no no' j, i=1,...,n,
% j=1,...,m.
% x - vetor com as estimativas iniciais nos no's.
% f - vetor com os valores das funçõ~es nos no's.
%
% -----
%
% FunDualSpin calcula os valores das n(m-1) funçõ~es nos no's para o
% problema do sate~lite dual-spin apo's a intregraçã~o de todos os intervalos
% (me'todo dos mu~ltiplos tiros). As primeiras n(m-2) condiçõ~es sa~o
% calculadas para os no's interiores...

```

```

%
for j = 2:m-1
    f((j-2)*n+1:(j-2)*n+n,1) = y(1:n,j) - x((j-1)*n+1:(j-1)*n+n);
end
%
% -----
%
% n condições de contorno restantes (totalizando n(m-1) funções não-
% lineares)...
%
f((j-1)*n+1:(j-1)*n+6) = x(1:6) - y(1:6,m);      % ri = x(i) - y(i,m), i=1,6
if chave == 2
%
% chave=2 e' para calcular pontos de bifurcação.
% Tem-se n=6+2+6=14. Por isso tem-se 14 cond. de contorno. As 6 primeiras
% ja' foram consideradas. As 8 restantes serão consideradas agora...
%
f((j-1)*n+7:(j-1)*n+12) = x(9:14) - y(9:14,m);    % ri = x(i+2) - y(i+2,m),
i=7,12
f((j-1)*n+13) = x(10);                            % r13 = x(10)
f((j-1)*n+14) = x(9) - 1.0;                        % r14 = x(9) - 1.0
else
f((j-1)*n+7) = x(2);                               % r7 = x(2)
if chave < 1
    if chave < 0
        if chave < -1
%
% chave=-2 e' para calcular uma órbita periódica próxima de um ponto
% de bifurcação.
% Tem-se n=6+3=9. Por isso tem-se 9 cond. de contorno. As 7 primeiras
% ja' foram consideradas. As 2 restantes serão consideradas agora...
%
f((j-1)*n+8) = x(1) - x(9);                        % r8 = x(1) - x(9)

```

```

        f((j-1)*n+9) = x(1) - y(9,m) - amplitude;    % r9 = x(1) - y(9,m) -
amplitude
    else
%
%       chave=-1 e' para obter ramos de soluço~es variando o parametro.
%       Tem-se n=6+2=8. Por isso tem-se 8 cond. de contorno. As 7 primeiras
%       ja' foram consideradas. A restante sera' considerada agora...
%
        f((j-1)*n+8) = x(7) - parametro;            % r8 = x(7) - parametro
    end
    else
%
%       chave=0 e' para obter ramos de soluço~es variando a frequencia.
%       Tem-se n=6+2=8. Tem-se 8 cond. de contorno. As 7 primeiras ja' foram
%       consideradas. A restante sera' considerada agora...
%
        f((j-1)*n+8) = x(8) - frequencia;            % r8 = x(8) - frequencia
    end
    else
%
%       chave=1 e' para obter ramos de soluço~es em funça~o do deslocamento
%       inicial da mola.
%       Tem-se n=6+2=8. Tem-se 8 cond. de contorno. As 7 primeiras ja' foram
%       consideradas. A restante sera' considerada agora...
%
        f((j-1)*n+8) = x(1) - excentricidade;        % r8 = x(1) - deslocamento
    end
end
end

```


APÊNDICE C

