

MARCELO VINICIUS MAGNOLI

CÁLCULO DAS VELOCIDADES ANGULARES CRÍTICAS  
DA LINHA DE EIXO DE TURBINAS HIDRÁULICAS COM  
ÊNFASE NO COMPORTAMENTO ESTRUTURAL  
DINÂMICO DO GERADOR

Dissertação apresentada à Escola  
Politécnica da Universidade de  
São Paulo para obtenção do  
Título de Mestre em Engenharia

SÃO PAULO

2005

MARCELO VINICIUS MAGNOLI

CÁLCULO DAS VELOCIDADES ANGULARES CRÍTICAS  
DA LINHA DE EIXO DE TURBINAS HIDRÁULICAS COM  
ÊNFASE NO COMPORTAMENTO ESTRUTURAL  
DINÂMICO DO GERADOR

Dissertação apresentada à Escola  
Politécnica da Universidade de  
São Paulo para obtenção do  
Título de Mestre em Engenharia

Área de Concentração:  
Engenharia Mecânica

Orientador:  
Professor Doutor  
Clóvis de Arruda Martins

SÃO PAULO

2005

## FICHA CATALOGRÁFICA

Magnoli, Marcelo Vinicius

Cálculo das velocidades angulares críticas da linha de eixo de turbinas hidráulicas com ênfase no comportamento estrutural dinâmico do gerador. São Paulo, 2005.

191p.

Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1. Turbina hidráulica 2. Gerador 3. Dinâmica de rotores 4. Velocidade angular crítica 5. Síntese modal de componentes

I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica.

Ao meu avô Mário que teria se orgulhado do meu  
sucesso, que despertou em mim a inspiração e à minha  
querida Karin que me devolveu a inspiração e a alegria,  
por um momento, tomadas de mim.

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Sueli e Nino, que sempre me deram o melhor, sempre me apoiaram e sempre acreditaram em mim. Por terem me proporcionado uma excelente educação e por serem os ótimos pais que são.

À Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, que através da sua instituição e de seus professores, me formou como Engenheiro Mecânico e Mestre em Engenharia. Ao Professor Dr. Clóvis, que demonstrou a mim a importância da pesquisa e da metodologia científica na prática da Engenharia.

À Voith Siemens onde trabalho há quatro anos e meio, que contribuiu para o meu amadurecimento profissional e que me ajudou na elaboração deste trabalho. Em especial, ao Dr. Manuel, por me incentivar constantemente.

## RESUMO

O projeto de turbinas hidráulicas tem estado em constante evolução, levando a máquinas mais rápidas e mais leves, nas quais os carregamentos são mais severos e as estruturas mais flexíveis. Com isto, os cálculos dos componentes da turbina devem ser realizados com maior precisão do que no passado, entre eles a determinação das velocidades angulares críticas da linha de eixo e seus fatores dinâmicos de amplificação de deslocamento, sobre os quais a maior influência é exercida pelo rotor do gerador. Para tanto, é elaborado um modelo numérico da linha de eixo, com base na pesquisa da literatura, na qual o rotor do gerador é usualmente considerado como um corpo rígido. Entretanto, para se verificar o efeito de suas propriedades de inércia e rigidez distribuídas sobre o movimento da estrutura, ele é descrito aqui por um modelo de elementos finitos, incluído no restante do sistema através do método da síntese modal de componentes. Os resultados numéricos mostram desvios não desprezíveis entre o método tradicional e o proposto aqui, sendo que se aconselha que o rotor do gerador seja descrito por este procedimento, quando os fatores de segurança empregados forem pequenos ou se a exatidão dos valores calculados for de grande importância.

## ABSTRACT

Continuous improvements in hydraulic turbines project has lead to faster and smaller machines, in which loads are more severe and structures are more flexible. As a matter of fact, its components must be calculated more accurately than in the past. Such is the case of shaft line angular critical speeds and their dynamic displacement amplification multipliers, whose main influence is caused by the generator rotor. Therefore, a shaft line numeric model is set up, based on the literature review, where the generator rotor is usually considered as a rigid body. However, in order to verify its distributed inertia and stiffness properties effect on the structure behaviour, it shall be described here by a finite element model, that is included in the overall system using the component mode synthesis method. The numerical results yield significantly deviations between the model proposed here and the traditional, taking one to recommend that, when security factors are low or when calculated values accuracy is important, the generator rotor shall be modelled by the procedure described here.

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LISTA DE SÍMBOLOS

1. INTRODUÇÃO .....	1
2. REVISÃO DA LITERATURA.....	3
2.1. Noções essenciais de turbinas hidráulicas .....	3
2.1.1. Tipos de turbinas .....	3
2.1.2. Elementos de turbinas hidráulicas.....	10
2.1.3. Elementos da linha de eixo .....	11
2.1.4. Arranjos de máquina típicos.....	12
2.1.5. Condições de operação.....	16
2.2. Considerações gerais sobre dinâmica de rotores.....	17
2.2.1. Efeito giroscópico .....	18
2.2.2. Diagrama de Campbell.....	22
2.2.3. Limite de estabilidade .....	25
2.2.4. Linearização .....	27
2.3. Particularidades em relação a turbinas hidráulicas .....	27
2.3.1. Velocidades angulares críticas e vibrações .....	27
2.3.2. Amortecimento.....	30
2.4. Modelagem dos elementos da linha de eixo .....	31
2.4.1. Gerador.....	31
2.4.2. Eixo .....	32
2.4.3. Acoplamento .....	32
2.4.4. Mancais hidrodinâmicos e seus suportes .....	33
2.4.5. Rotor da turbina .....	39
2.4.6. Labirintos .....	41
2.4.7. Empuxo magnético .....	43
2.4.8. Forças de excitação estáticas e dinâmicas.....	44



3. METODOLOGIA .....	50
3.1. Modelos numéricos .....	50
3.2. Formulação da SMC .....	51
3.3. Esquemas numéricos para a solução de sistemas.....	57
3.3.1. Método QR.....	57
3.3.2. Método de Newmark.....	58
3.4. Verificação dos modelos numéricos .....	60
3.4.1. Efeito giroscópico .....	60
3.4.2. Conexão entre elementos de viga e sólidos.....	65
3.4.3. Síntese modal de componentes .....	69
3.4.4. Cálculo da velocidade angular crítica .....	73
3.5. Modelo em elementos finitos da máquina .....	75
3.5.1. Modelo em elementos finitos do gerador.....	75
3.5.2. Modelo em elementos finitos da linha de eixo completa.....	81
3.5.3. Determinação dos coeficientes dinâmicos .....	84
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO .....	87
4.1. Procedimento .....	87
4.2. Máquina A.....	88
4.2.1. Informações da máquina .....	88
4.2.2. Resultados pelo método tradicional .....	91
4.2.3. Resultados pelo método da SMC .....	96
4.2.4. Comparação dos resultados.....	104
4.2.5. Discussão dos resultados.....	107
4.3. Máquina B.....	108
4.3.1. Informações da máquina .....	108
4.3.2. Resultados pelo método tradicional .....	111
4.3.3. Resultados pela SMC .....	118
4.3.4. Comparação dos resultados.....	132
4.3.5. Discussão dos resultados.....	135
5. CONCLUSÕES .....	137

ANEXO A – ROTINA DE CÁLCULO DAS FREQUÊNCIAS E MODOS NATURAIS DA LINHA DE EIXO EM FUNÇÃO DA VELOCIDADE ANGULAR DE ROTAÇÃO .....	139
LISTA DE REFERÊNCIAS .....	144
BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA .....	150

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 2.1:</b> Faixa de operação dos diversos tipos de turbinas hidráulicas.....	4
<b>Figura 2.2:</b> Exemplo de turbina Francis.....	5
<b>Figura 2.3:</b> Exemplo de turbina Pelton vertical. ....	6
<b>Figura 2.4:</b> Exemplo de turbina Kaplan ou hélice. ....	7
<b>Figura 2.5:</b> Exemplo de turbina S. ....	7
<b>Figura 2.6:</b> Exemplo de turbina bulbo. ....	8
<b>Figura 2.7:</b> Exemplo de turbina tubular. ....	8
<b>Figura 2.8:</b> Exemplo de turbina-bomba. ....	9
<b>Figura 2.9:</b> Principais elementos de uma turbina hidráulica.....	11
<b>Figura 2.10:</b> Exemplo de arranjo com dois mancais guia e com o mancal escora apoiado sobre a tampa da turbina.....	13
<b>Figura 2.11:</b> Exemplo de arranjo com três mancais guia e com o mancal escora apoiado abaixo do gerador. ....	14
<b>Figura 2.12:</b> Exemplo de arranjo com quatro mancais guia e com o mancal escora apoiado acima do gerador. ....	14
<b>Figura 2.13:</b> Rotor simétrico, bi-apoiado, com inércia concentrada e com rigidez e amortecimento isotrópicos. ....	20
<b>Figura 2.14:</b> Diagrama de Campbell do rotor simétrico, bi-apoiado, com inércia concentrada e com rigidez e amortecimento isotrópicos ....	23
<b>Figura 2.15:</b> Exemplo de rotor Francis e seus labirintos. ....	42
<b>Figura 3.1:</b> Dimensões do rotor simétrico, bi-apoiado, com inércia concentrada, rigidez e amortecimento isotrópicos e não amortecido.....	60
<b>Figura 3.2:</b> Modelo do rotor, em elementos finitos, apenas com elementos de viga.....	63
<b>Figura 3.3:</b> Primeiro modo de vibrar do modelo em elementos finitos, apenas com elementos de viga. ....	64
<b>Figura 3.4:</b> Segundo modo de vibrar do modelo em elementos finitos, apenas com elementos de viga. ....	64
<b>Figura 3.5:</b> Terceiro modo de vibrar do modelo em elementos finitos, apenas com elementos de viga. ....	65

<b>Figura 3.6:</b> Modelo do rotor, em elementos finitos, com elementos de viga e sólidos. ....	67
<b>Figura 3.7:</b> Primeiro modo de vibrar do modelo em elementos finitos, com elementos de viga e sólidos. ....	68
<b>Figura 3.8:</b> Segundo modo de vibrar do modelo em elementos finitos, com elementos de viga e sólidos. ....	68
<b>Figura 3.9:</b> Terceiro modo de vibrar do modelo em elementos finitos, com elementos de viga e sólidos. ....	69
<b>Figura 3.10:</b> Subestrutura do disco do rotor, para a SMC, modelada com elementos finitos do tipo sólido. ....	70
<b>Figura 3.11:</b> Modelo do rotor, em elementos finitos, com elementos de viga e sólidos. ....	71
<b>Figura 3.12:</b> Primeiro modo de vibrar do modelo em elementos finitos, calculado pelo método da SMC. ....	72
<b>Figura 3.13:</b> Segundo modo de vibrar do modelo em elementos finitos, calculado pelo método da SMC. ....	72
<b>Figura 3.14:</b> Terceiro modo de vibrar do modelo em elementos finitos, calculado pelo método da SMC. ....	73
<b>Figura 3.15:</b> Diagrama de Campbell para o rotor dos exemplos. ....	74
<b>Figura 3.16:</b> Modelo em elementos finitos, com elementos de casca, de um setor do rotor do gerador, e condições de contorno. ....	76
<b>Figura 3.17:</b> Modelo em elementos finitos, com elementos sólidos, de um setor do rotor do gerador. ....	76
<b>Figura 3.18:</b> Exemplo do primeiro modo de vibrar do rotor do gerador. ....	79
<b>Figura 3.19:</b> Exemplo do segundo modo de vibrar do rotor do gerador. ....	80
<b>Figura 3.20:</b> Exemplo do terceiro modo de vibrar do rotor do gerador. ....	80
<b>Figura 3.21:</b> Exemplo do quarto modo de vibrar do rotor do gerador. ....	81
<b>Figura 3.22:</b> Exemplo de esquema físico da linha de eixo. ....	82
<b>Figura 3.23:</b> Exemplo de modelo em elementos finitos da linha de eixo. ....	82
<b>Figura 4.1:</b> Corte pela linha de eixo da Máquina A. ....	89
<b>Figura 4.2:</b> Detalhe do rotor do gerador e do acoplamento do cubo ao eixo. ....	89
<b>Figura 4.3:</b> Corte pelo modelo de elementos finitos da Máquina A. ....	92

<b>Figura 4.4:</b> Diagrama de Campbell para a Máquina A na condição de disparo. ....	92
<b>Figura 4.5:</b> Modo de vibrar da Máquina A associado à primeira velocidade angular crítica de precessão reversa. ....	94
<b>Figura 4.6:</b> Modo de vibrar da Máquina A associado à primeira velocidade angular crítica de precessão direta. ....	94
<b>Figura 4.7:</b> Modo de vibrar da Máquina A associado à segunda velocidade angular crítica de precessão reversa. ....	95
<b>Figura 4.8:</b> Modo de vibrar da Máquina A associado à segunda velocidade angular crítica de precessão direta. ....	95
<b>Figura 4.9:</b> Modelo em elementos finitos da subestrutura do rotor do gerador da Máquina A e condições de contorno. ....	96
<b>Figura 4.10:</b> Primeiro modo natural da subestrutura do rotor do gerador da Máquina A. ....	97
<b>Figura 4.11:</b> Segundo modo natural da subestrutura do rotor do gerador da Máquina A. ....	97
<b>Figura 4.12:</b> Terceiro modo natural da subestrutura do rotor do gerador da Máquina A. ....	98
<b>Figura 4.13:</b> Quarto modo natural da subestrutura do rotor do gerador da Máquina A. ....	98
<b>Figura 4.14:</b> Modelo em elementos finitos da linha de eixo da Máquina A calculada pelo método da SMC. ....	100
<b>Figura 4.15:</b> Diagrama de Campbell para a Máquina A na condição de disparo, calculada pelo método da SMC. ....	100
<b>Figura 4.16:</b> Modo de vibrar da Máquina A associado à primeira velocidade angular crítica de precessão reversa. ....	101
<b>Figura 4.17:</b> Modo de vibrar da Máquina A associado à primeira velocidade angular crítica de precessão direta. ....	102
<b>Figura 4.18:</b> Modo de vibrar da Máquina A associado à segunda velocidade angular crítica de precessão reversa. ....	102
<b>Figura 4.19:</b> Modo de vibrar da Máquina A associado à segunda velocidade angular crítica de precessão direta. ....	103

<b>Figura 4.20:</b> Modo de vibrar da Máquina A associado à terceira velocidade angular crítica de precessão direta. ....	103
<b>Figura 4.21:</b> Modo de vibrar da Máquina A associado à terceira velocidade angular crítica de precessão direta. ....	104
<b>Figura 4.22:</b> Diagrama de Campbell para a Máquina A na condição de disparo, calculado pelo método tradicional e pela SMC. ....	105
<b>Figura 4.23:</b> Corte pela linha de eixo da Máquina B. ....	109
<b>Figura 4.24:</b> Detalhe do rotor do gerador da Máquina B. ....	109
<b>Figura 4.25:</b> Corte pelo modelo de elementos finitos da Máquina B. ....	112
<b>Figura 4.26:</b> Diagrama de Campbell da Máquina B na condição de operação normal. ....	113
<b>Figura 4.27:</b> Diagrama de Campbell da Máquina B na condição de disparo. ....	113
<b>Figura 4.28:</b> Modo de vibrar da Máquina B associado à primeira velocidade angular crítica de precessão reversa na condição de operação normal. ....	115
<b>Figura 4.29:</b> Modo de vibrar da Máquina B associado à primeira velocidade angular crítica de precessão direta na condição de operação normal. ....	115
<b>Figura 4.30:</b> Modo de vibrar da Máquina B associado à segunda velocidade angular crítica de precessão reversa na condição de operação normal. ....	116
<b>Figura 4.31:</b> Modo de vibrar da Máquina B associado à primeira velocidade angular crítica de precessão reversa na condição de disparo. ....	116
<b>Figura 4.32:</b> Modo de vibrar da Máquina B associado à primeira velocidade angular crítica de precessão direta na condição de disparo. ....	117
<b>Figura 4.33:</b> Modo de vibrar da Máquina B associado à segunda velocidade angular crítica de precessão reversa na condição de disparo. ....	117
<b>Figura 4.34:</b> Modelo em elementos finitos da subestrutura do rotor do gerador da Máquina B e condições de contorno. ....	118
<b>Figura 4.35:</b> Primeiro modo natural da subestrutura do rotor do gerador da Máquina B. ....	119
<b>Figura 4.36:</b> Segundo modo natural da subestrutura do rotor do gerador da Máquina B. ....	119
<b>Figura 4.37:</b> Terceiro modo natural da subestrutura do rotor do gerador da Máquina B. ....	120

<b>Figura 4.38:</b> Quarto modo natural da subestrutura do rotor do gerador da Máquina B.....	120
<b>Figura 4.39:</b> Quinto modo natural da subestrutura do rotor do gerador da Máquina B.....	121
<b>Figura 4.40:</b> Modelo em elementos finitos da linha de eixo da Máquina B calculada pelo método da SMC.....	122
<b>Figura 4.41:</b> Diagrama de Campbell para a Máquina B na condição de operação nominal , calculada pelo método da SMC. ....	122
<b>Figura 4.42:</b> Diagrama de Campbell para a Máquina B na condição de disparo , calculada pelo método da SMC.....	123
<b>Figura 4.43:</b> Modo de vibrar da Máquina B associado à primeira velocidade angular crítica de precessão reversa, em operação normal. ....	124
<b>Figura 4.44:</b> Modo de vibrar da Máquina B associado à primeira velocidade angular crítica de precessão direta, em operação normal.....	125
<b>Figura 4.45:</b> Modo de vibrar da Máquina B associado à segunda velocidade angular crítica de precessão reversa, em operação normal. ....	126
<b>Figura 4.46:</b> Modo de vibrar da Máquina B associado à segunda velocidade angular crítica de precessão direta, em operação normal.....	127
<b>Figura 4.47:</b> Modo de vibrar da Máquina B associado à primeira velocidade angular crítica de precessão reversa, na condição de disparo. ....	128
<b>Figura 4.48:</b> Modo de vibrar da Máquina B associado à primeira velocidade angular crítica de precessão direta, na condição de disparo.....	129
<b>Figura 4.49:</b> Modo de vibrar da Máquina B associado à segunda velocidade angular crítica de precessão reversa, na condição de disparo. ....	130
<b>Figura 4.50:</b> Modo de vibrar da Máquina B associado à segunda velocidade angular crítica de precessão direta, na condição de disparo.....	131
<b>Figura 4.51:</b> Diagrama de Campbell para a Máquina B na condição de operação normal, calculado pelo método tradicional e pela SMC. ....	133
<b>Figura 4.52:</b> Diagrama de Campbell para a Máquina B na condição de disparo, calculado pelo método tradicional e pela SMC. ....	133

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 2.1:</b> Valores factíveis para a elasticidade total, segundo SCHEIDL [39] e SIMON [41] .....	39
<b>Tabela 2.2:</b> Influência do labirinto sobre as velocidades angulares críticas, segundo LIESS et al. [26]. .....	41
<b>Tabela 2.3:</b> Influência do labirinto sobre as amplitudes de deslocamento no mancal guia da turbina, segundo LIESS et al. [26]. .....	42
<b>Tabela 3.1:</b> Frequências naturais calculadas analiticamente e numericamente, pelo MEF apenas com elementos de viga. ....	63
<b>Tabela 3.2:</b> Frequências naturais calculadas analiticamente e numericamente, pelo MEF com elementos de viga e sólidos. ....	67
<b>Tabela 3.3:</b> Frequências naturais calculadas analiticamente e numericamente, pelo MEF e SMC com elementos de viga e sólidos. ....	71
<b>Tabela 4.1:</b> Principais características da Máquina A. ....	90
<b>Tabela 4.2:</b> Propriedades de inércia da Máquina A. ....	90
<b>Tabela 4.3:</b> Coeficientes de rigidez da Máquina A. ....	91
<b>Tabela 4.4:</b> Propriedades adotadas para o aço. ....	91
<b>Tabela 4.5:</b> Velocidades angulares críticas da Máquina A na condição de disparo. ....	93
<b>Tabela 4.6:</b> Velocidades angulares críticas da Máquina A na condição de disparo. ....	101
<b>Tabela 4.7:</b> Velocidades angulares críticas da Máquina A na condição de disparo, calculadas pelo método tradicional e pela SMC. ....	106
<b>Tabela 4.8:</b> Principais características da Máquina B. ....	110
<b>Tabela 4.9:</b> Propriedades de inércia da Máquina B. ....	110
<b>Tabela 4.10:</b> Coeficientes de rigidez da Máquina B. ....	111
<b>Tabela 4.11:</b> Coeficientes de amortecimento da Máquina B. ....	111
<b>Tabela 4.12:</b> Velocidades angulares críticas da Máquina B na condição normal... ..	114
<b>Tabela 4.13:</b> Velocidades angulares críticas da Máquina B na condição de disparo. ....	114
<b>Tabela 4.14:</b> Velocidades angulares críticas da Máquina B na condição normal... ..	123



<b>Tabela 4.15:</b> Velocidades angulares críticas da Máquina B na condição de disparo.....	123
<b>Tabela 4.16:</b> Velocidades angulares críticas da Máquina B na condição de operação normal, calculadas pelo método tradicional e pela SMC. ....	134
<b>Tabela 4.17:</b> Velocidades angulares críticas da Máquina B na condição de disparo, calculadas pelo método tradicional e pela SMC. ....	134

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MEF método dos elementos finitos

SMC síntese modal de componentes

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Alfabeto Latino

$A$	área	$[m^2]$
$\bar{A}$	área média	$[m^2]$
$A^S$	fator de cisalhamento	$[-]$
$b$	altura do distribuidor	$[m]$
$[B]$	matriz de estado	$[-]$
$\bar{B}$	campo magnético médio	$[T]$
$B_1$	valor de pico do campo magnético	$[T]$
$c$	amortecimento	$[N \cdot s/m]$
$[C]$	matriz de amortecimento	$[Ns/m]$
$c^*$	amortecimento adimensional	$[-]$
$c_b$	folga radial no mancal	$[m]$
$c_f$	amortecimento angular	$[Ns/rad]$
$c_{ii}$	amortecimento direto em $i$	$[Ns/m]$
$c_{ij}$	amortecimento cruzado de $j$ em $i$	$[Ns/m]$
$D$	diâmetro	$[m]$
$[D]$	matriz de “amortecimento” combinada	$[Ns/m]$
$d_e$	diâmetro externo do eixo	$[m]$
$D_e$	diâmetro externo do disco	$[m]$
$d_i$	diâmetro interno do eixo	$[m]$
$D_i$	diâmetro interno do disco	$[m]$
$D_p$	coeficiente de pressão	$[-]$
$E$	módulo de elasticidade do material	$[Pa]$
$E_a$	campo elétrico induzido	$[V]$
$E_d$	energia dissipada por ciclo	$[J]$
$\mathcal{F}$	função de dissipação de Rayleigh	$[W]$
$F$	carregamento sobre o mancal	$[N]$
$\{F\}$	vetor de forças externas	$[N]$

$\hat{F}$	vetor de carregamento para a SMC	[N]
$F_i$	força na direção i	[N]
$[F_i]$	vetor de carregamento sobre os nós i	[N]
$F_M$	empuxo magnético radial	[N]
$f_{n_i}$	i-ésima frequência natural	[Hz]
$F_R$	força radial	[N]
$F_R^*$	força radial adimensional	[-]
$F_u$	força de desbalanceamento	[N]
$g$	aceleração local da gravidade	[m/s <sup>2</sup> ]
$G$	módulo de cisalhamento do material	[Pa]
$[G]$	matriz de efeito giroscópico	[Ns/m]
$g_e$	folga radial no entreferro do gerador	[m]
$[G_e]$	matriz de efeito giroscópico do elemento	[kg]
$h$	espessura do filme de óleo	[m]
$H$	queda líquida	[m]
$h_c$	espessura do acoplamento	[m]
$I$	momento transversal de inércia de área	[m <sup>4</sup> ]
$\bar{I}$	corrente de fase	[A]
$\bar{I}_d$	componente direto da corrente	[A]
$\bar{I}_q$	componente de quadratura da corrente	[A]
$J$	momento polar de inércia de área	[m <sup>4</sup> ]
$J_P$	momento polar de inércia de massa	[kg·m <sup>2</sup> ]
$J_{P,H}$	momento polar de inércia de massa hidrodinâmico	[kg·m <sup>2</sup> ]
$J_{P,r}$	momento polar de inércia de massa do rotor	[kg·m <sup>2</sup> ]
$J_T$	momento transversal de inércia de massa	[kg·m <sup>2</sup> ]
$J_{T,H}$	momento transversal de inércia de massa hidrodinâmico	[kg·m <sup>2</sup> ]
$J_{T,r}$	momento transversal de inércia de massa do rotor	[kg·m <sup>2</sup> ]
$k$	rigidez	[N/m]
$[K]$	matriz de rigidez	[N/m]
$\hat{K}$	matriz de rigidez para a SMC	[N/m]

$k^*$	rigidez adimensional	[-]
$k_{c,x}$	rigidez lateral do acoplamento	[N/m]
$k_{c,\alpha}$	rigidez angular do acoplamento	[N/rad]
$[K_e]$	matriz de massa do elemento	[kg]
$k_{eq}$	rigidez equivalente	[N/m]
$k_f$	rigidez angular	[N/rad]
$k_{ii}$	rigidez direta em i	[N/m]
$[K_{ii}]$	matriz de rigidez direta em i	[N/m]
$k_{ij}$	rigidez cruzada de j em i	[N/m]
$[K_{ij}]$	matriz de rigidez cruzada de j em i	[N/m]
$k_M$	rigidez relativa ao empuxo magnético	[N/m]
$k_s$	fator de enrolamento	[-]
$L$	comprimento	[m]
$L_p$	altura do pólo	[m]
$m$	massa	[kg]
$M$	momento	[m]
$[M]$	matriz de massa	[kg]
$[\hat{M}]$	matriz de massa para a SMC	[kg]
$m_a$	massa adicional	[kg/m]
$[M_e]$	matriz de massa do elemento	[kg]
$m_h$	massa hidrodinâmica	[kg]
$m_r$	massa do rotor	[kg]
$n$	rotação nominal	[rpm]
$N$	velocidade angular de rotação	[rps]
$n_d$	rotação de disparo	
$N_f$	número de espiras por fase	[-]
$n_q$	rotação específica	[rpm]
$p$	pressão	[Pa]
$P$	carregamento	[N]
$\{q\}$	vetor de coordenadas modais	[m]
$Q$	vazão	[m <sup>3</sup> /s]
$\{q_B\}$	coordenadas generalizadas das fronteiras	[m]

$q_i$	i-ésima coordenada generalizada	[m]
$\{q_N\}$	coordenadas modais dos modos naturais	[m]
$r$	coordenada radial	[m]
$r$	raio de giração	[m]
$\vec{r}$	vetor de posição	[m]
$R$	raio do eixo	[m]
$R_1$	raio na entrada do rotor	[m]
$R_2$	raio na saída do rotor	[m]
$r_a$	resistência de armadura	$[\Omega]$
$Re$	número de Reynolds	[-]
$R_g$	raio médio da folga radial	[m]
$S$	número de Sommerfeld	[-]
$s_i$	i-ésimo pólo	[1/s]
$t$	tempo	[s]
$[T]$	matriz de transformação da subestrutura	[-]
$\{u\}$	vetor de deslocamentos	[m]
$U$	energia potencial	[J]
$\vec{U}$	voltagem de fase	[V]
$u_B$	vetor de deslocamentos dos nós da fronteira	[m]
$u_I$	vetor de deslocamentos dos nós internos	[m]
$u_{i_j}$	deslocamento do nó “j” na direção “i”	[m]
$V$	velocidade do fluxo na caixa espiral	[m/s]
$w$	largura da caixa espiral	[m]
$W_i$	altura externa do rotor	[m]
$x$	deslocamento em x	[m]
$\{x\}$	vetor de deslocamentos	[m]
$X$	amplitude em x	[m]
$x_d$	reatância direta	$[\Omega]$
$x_q$	reatância de quadratura	$[\Omega]$
$y$	deslocamento em y	[m]
$Y$	amplitude em y	[m]

$z$	coordenada axial	[m]
$[Z]$	vetor de variáveis de estado	[-]

### Alfabeto Grego

$\alpha$	deslocamento angular em x	[rad]
$\beta$	deslocamento angular em y	[rad]
$\gamma$	deslocamento angular complexo	[rad]
$\gamma_f$	ângulo de incidência do fluxo	[rad]
$\delta$	excentricidade	[m]
$\Delta J_u$	produto de inércia de desbalanceamento em x	[kg·m <sup>2</sup> ]
$\Delta J_v$	produto de inércia de desbalanceamento em y	[kg·m <sup>2</sup> ]
$\delta q_i$	i-ésimo deslocamento virtual	[m]
$\delta \vec{r}$	vetor de deslocamento	[m]
$\delta W_{nc}$	trabalho virtual das forças não conservativas	[J]
$\varepsilon$	excentricidade relativa à folga radial do mancal	[-]
$\zeta$	fator de amortecimento	[-]
$\theta$	coordenada angular	[rad]
$\theta_{ij}$	rotação do nó “j” ao redor da direção “i”	[rad]
$\kappa$	número de onda	[-]
$[\Lambda^2]$	matriz das frequências naturais	(rad/s) <sup>2</sup>
$\mu$	viscosidade dinâmica	[N·s/m <sup>2</sup> ]
$\mu_0$	permeabilidade do vácuo ( $4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A <sup>2</sup> )	[N/A <sup>2</sup> ]
$\nu$	coeficiente de Poisson	[-]
$\xi$	função de perturbação	[-]
$\rho$	densidade do material ou fluido	[m <sup>3</sup> /s]
$\varphi$	posição angular de equilíbrio	[rad]
$\phi$	coeficiente de vazão	[-]
$[\Phi]$	matriz modal	[-]

$[\Phi_C]$	matriz dos modos restritos	$[-]$
$[\Phi_N]$	matriz dos modos naturais	$[-]$
$\psi$	atraso de fase	$[\text{rad}]$
$\omega$	velocidade angular de rotação	$[\text{rad/s}]$
$\omega_{\text{crit}_i}$	i-ésima velocidade angular crítica	$[\text{rad/s}]$
$\omega_e$	frequência angular de excitação	$[\text{rad/s}]$
$\omega_{n_i}$	i-ésima frequência natural angular	$[\text{rad/s}]$



## 1. INTRODUÇÃO

Na constante procura por competitividade, no projeto e construção de equipamentos eletromecânicos para usinas hidrelétricas, a tecnologia tem evoluído e as turbinas hidráulicas têm se tornado cada vez mais rápidas e mais leves. Tais mudanças causam um aumento das forças hidrodinâmicas, das forças inerciais e de desbalanceamento, tanto mecânico como eletromagnético e hidráulico, assim como levam a estruturas mais esbeltas e flexíveis. Com isto, sem nenhuma ação preventiva, o nível de vibrações na máquina tenderia a aumentar, o que faz com que sejam necessários, entre outros, o projeto mecânico, o cálculo e a modelagem da linha de eixo, que garantam com precisão o bom funcionamento da instalação hidrelétrica.

Com este objetivo, foram reunidos, de maneira crítica, elementos na literatura que pudessem servir para a elaboração de um modelo de cálculo completo e preciso da linha de eixo da máquina, tendo em vista a determinação dos principais parâmetros de projeto, ou seja, os valores de velocidades angulares críticas e os fatores dinâmicos de amplificação de deslocamento correspondentes. Uma dada velocidade angular crítica se caracteriza por ser a frequência de excitação, das forças de desbalanceamento mecânico, magnético ou hidráulico, para a qual ocorre ressonância com a frequência natural de um dos modos de vibrar. Dada a importância destas grandezas, busca-se aperfeiçoar a descrição dinâmica do gerador, para se melhorar a exatidão das simulações, por se tratar do componente que mais influencia o comportamento da linha de eixo.

Mesmo que o interesse seja em avaliar o efeito da modelagem numérica mais sofisticada do gerador, como um corpo elástico, com propriedades de inércia e rigidez distribuídas, é impossível de se calcular as velocidades angulares críticas e os fatores dinâmicos de amplificação de deslocamento sem que todos os componentes que contribuem para o movimento da linha de eixo estejam modelados.

Para tanto, no início do capítulo 2, consagrado à pesquisa bibliográfica, é feita uma introdução às turbinas hidráulicas, seus principais componentes e condições de operação, o que é essencial para que se possa compreender o sistema em questão. Também de igual importância é adquirir os conceitos básicos de dinâmica de rotores, expostos na sequência do capítulo, e conhecer as

particularidades deste tipo de máquina. Em continuação, para cada um dos componentes do sistema, são apresentados os modelos analíticos a serem empregados aqui para o cálculo do eixo.

No capítulo 3, são introduzidos os métodos numéricos escolhidos para as simulações do sistema. Os esquemas numéricos se tornam gradativamente mais sofisticados e, a cada inovação incluída, os resultados são verificados com o exemplo de um rotor simples, cuja solução analítica possui forma fechada, possibilitando tal comparação. O modelo numérico do cubo do rotor do gerador de turbinas hidráulicas, utilizando o método da síntese modal de componentes, também é descrito neste capítulo.

O capítulo 4 reúne a teoria do capítulo 2 e a metodologia de cálculo do capítulo 3, para que se possa efetuar o cálculo computacional da linha de eixo completa de duas máquinas reais. Para uma mesma turbina, as velocidades angulares críticas e fatores dinâmicos de amplificação de deslocamento são avaliados pelo método tradicional, que considera o gerador como um corpo rígido, e também usando-se a síntese modal de componentes, para que a sua elasticidade seja levada em conta. As comparações, interpretações dos resultados e discussões são deixadas para o final do capítulo 4, sendo que as conclusões finais encontram-se no capítulo 5.

## **2. REVISÃO DA LITERATURA**

### **2.1. Noções essenciais de turbinas hidráulicas**

Antes que se possa passar à modelagem do sistema para o cálculo das velocidades angulares críticas e dos fatores dinâmicos de amplificação de deslocamento, é preciso que se tenha uma visão clara dos tipos de turbinas hidráulicas existentes e quais são os elementos que as compõem. Dentre eles, somente alguns fazem parte da linha de eixo e contribuem para o seu movimento de vibração. No decorrer desta seção, estes elementos recebem explicações mais detalhadas sobre o seu funcionamento e suas funções.

Além dos componentes em si, os tipos de arranjo de máquina também influem na modelagem do sistema e precisam ser conhecidos e descritos, por modificarem a geometria e a disposição da turbina. As condições de operação, às quais a máquina pode ser submetida, orientam a análise das forças e fenômenos físicos que devem ser incluídos na formulação do sistema, ajudando no entendimento do seu funcionamento e das consequências sobre a dinâmica do eixo.

#### **2.1.1. Tipos de turbinas**

Mesmo que todas as turbinas hidráulicas possuam princípios de operação semelhantes, elas não são exatamente iguais e o tipo de rotor escolhido dá origem a diversos desenhos de máquina. Outras diferenças, menos aparentes, também podem existir e antes que se proceda ao cálculo de qualquer fenômeno físico presente no sistema, é indispensável conhecer os tipos de turbinas. Baseado nas informações fornecidas por SIMONE [42], segue a descrição das diversas espécies de turbinas hidráulicas e dos critérios elementares de utilização de cada uma delas.

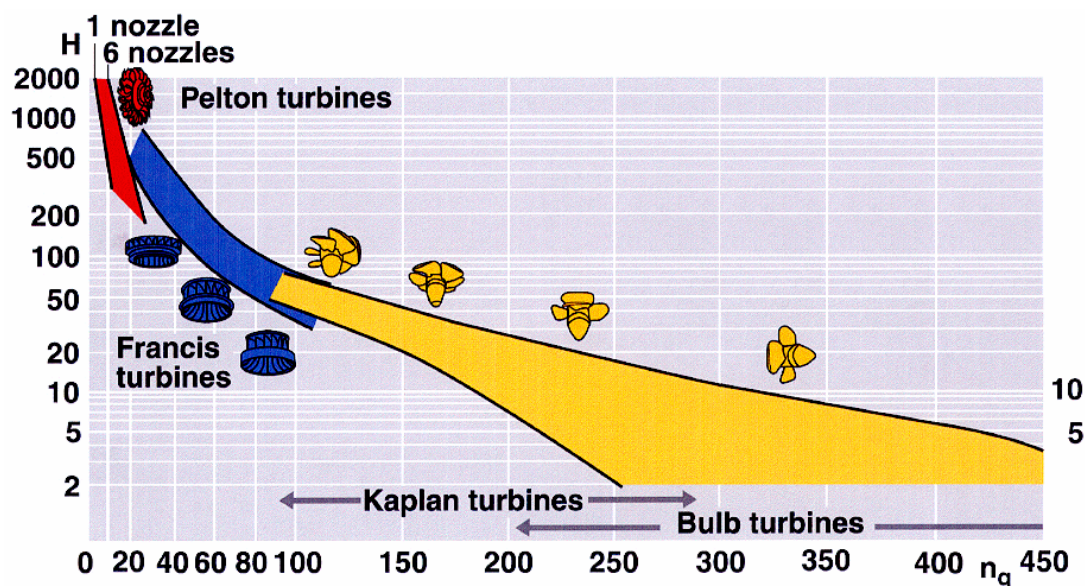
Conforme as características do aproveitamento hídrico, como altura de queda, vazão e número de máquinas, um tipo diferente de perfil hidráulico é empregado para o rotor. Dependendo também da altura de queda e da potência de cada unidade, define-se a orientação do eixo, vertical ou horizontal.

O rotor pode ser Francis, Pelton, ou Kaplan, como mostrado nas figuras 2.2, 2.3 e 2.4. A escolha é baseada na queda e na rotação específica da máquina, definida por:

$$n_q = \frac{n\sqrt{Q}}{H^{3/4}} \quad (2.1)$$

H	:	queda líquida	[m]
n	:	rotação nominal da máquina	[rpm]
$n_q$	:	rotação específica	[rpm]
Q	:	vazão por turbina	[m <sup>3</sup> /s]

Máquinas Pelton são indicadas para rotações específicas inferiores a 20 rpm e quedas superiores a 200 m, já as Francis podem ser utilizadas na faixa de 20 a 100 rpm e 30 a 800 m, enquanto que as Kaplan são utilizadas para valores superiores a 100 rpm e quedas inferiores a 70 m. Estes limites não são fixos e há pequenas sobreposições entre eles, como visto na figura 2.1.



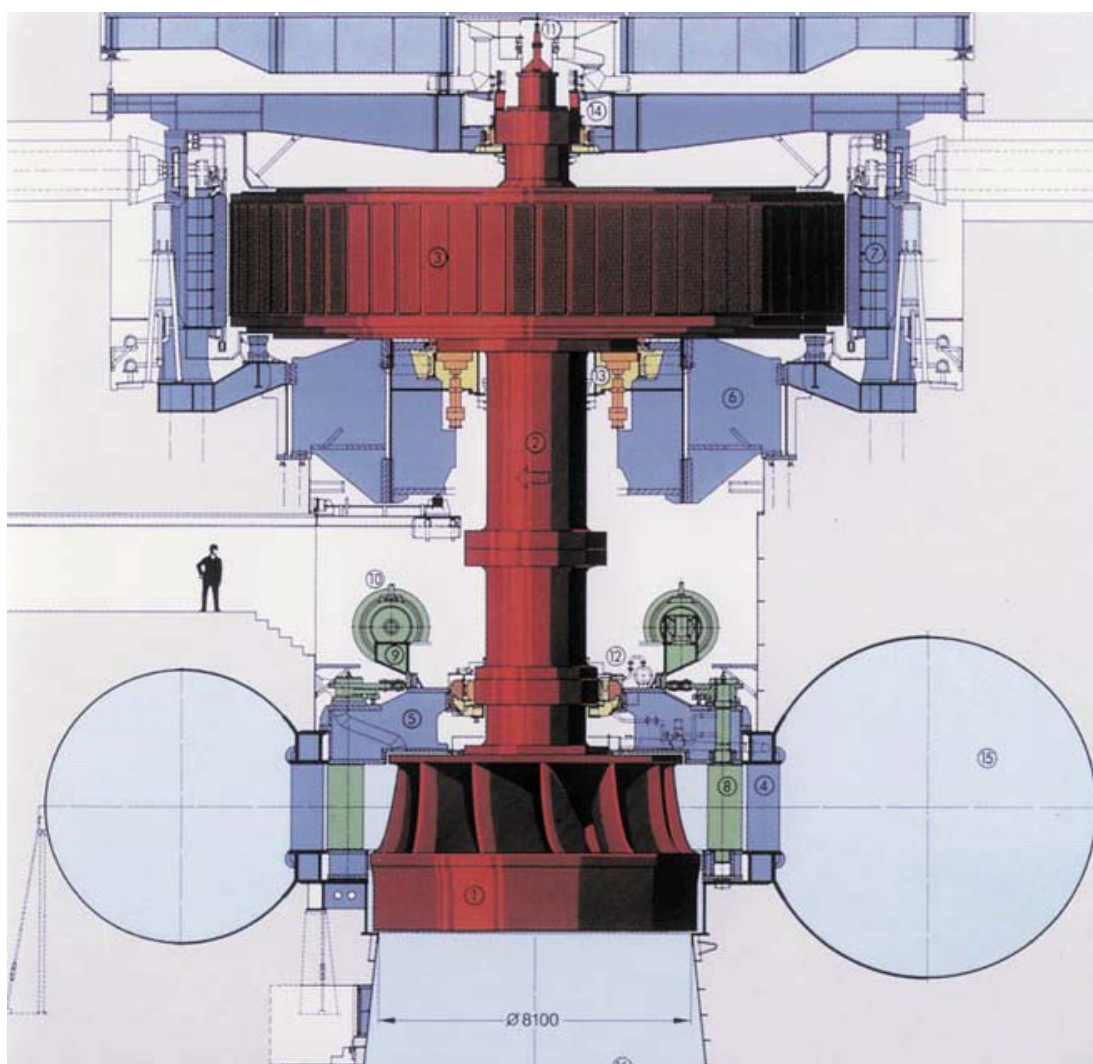
**Figura 2.1:** Faixa de operação dos diversos tipos de turbinas hidráulicas [46].

Ainda conforme SIMONE [42], para potências superiores a 15 MW, a escolha é por máquinas de eixo vertical, ao passo que para potências menores é

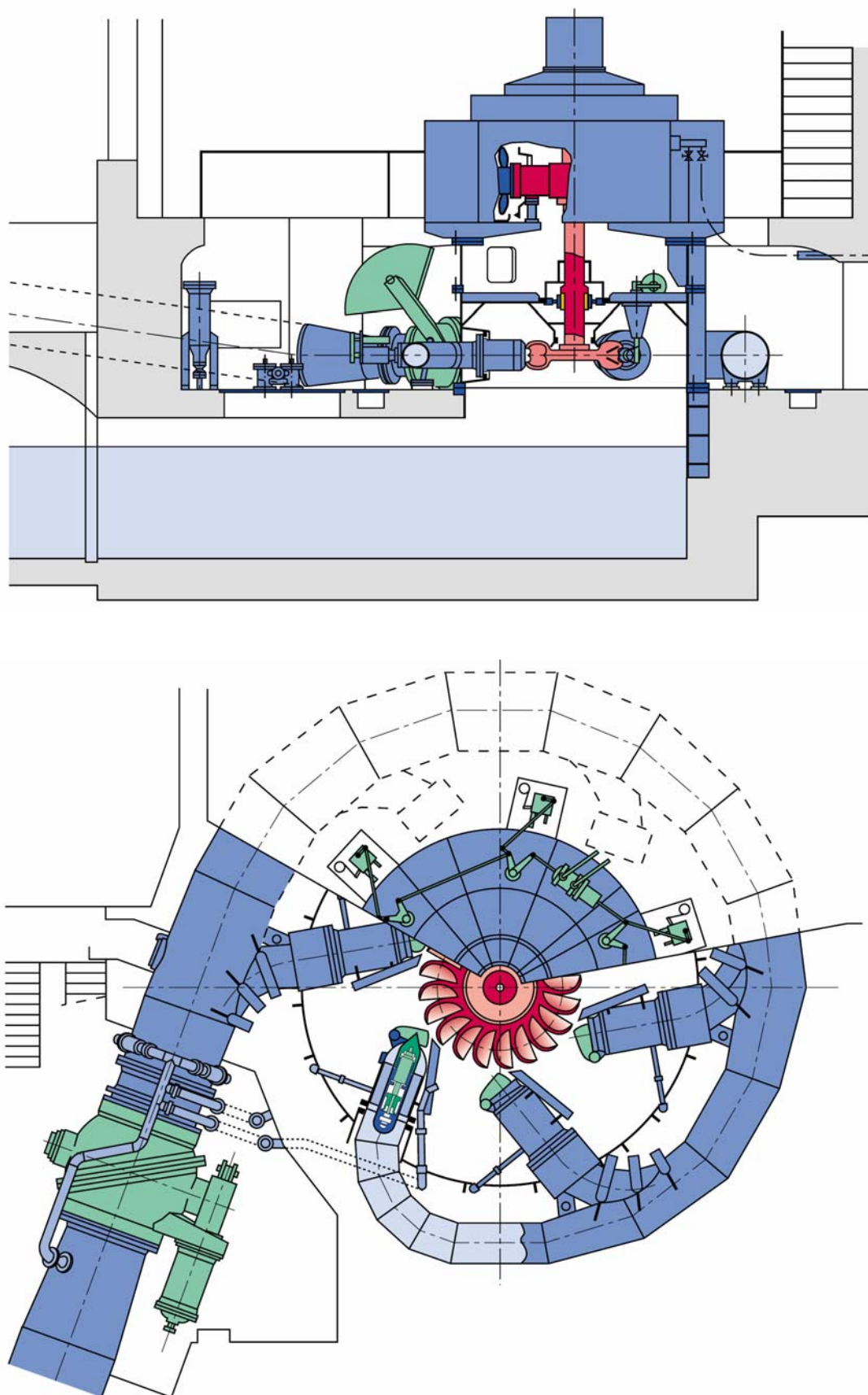
comum optar-se pelo eixo horizontal. Na configuração horizontal, as máquinas Kaplan geralmente assumem outras variantes que são as turbinas S, bulbo e tubular, que podem ser vistas nas figuras 2.5, 2.6 e 2.7.

Outra variação das turbinas Kaplan são as turbinas hélice, cuja única diferença são as pás do rotor que, em vez de se ajustarem ao fluxo, conforme a condição de operação, são mantidas fixas.

Um último aspecto, quanto aos seus tipos, é que, a não ser as turbinas Pelton, que são turbinas de ação, todas as demais são turbinas de reação e podem ser projetadas para também atuarem como bombas, como a da figura 2.8.

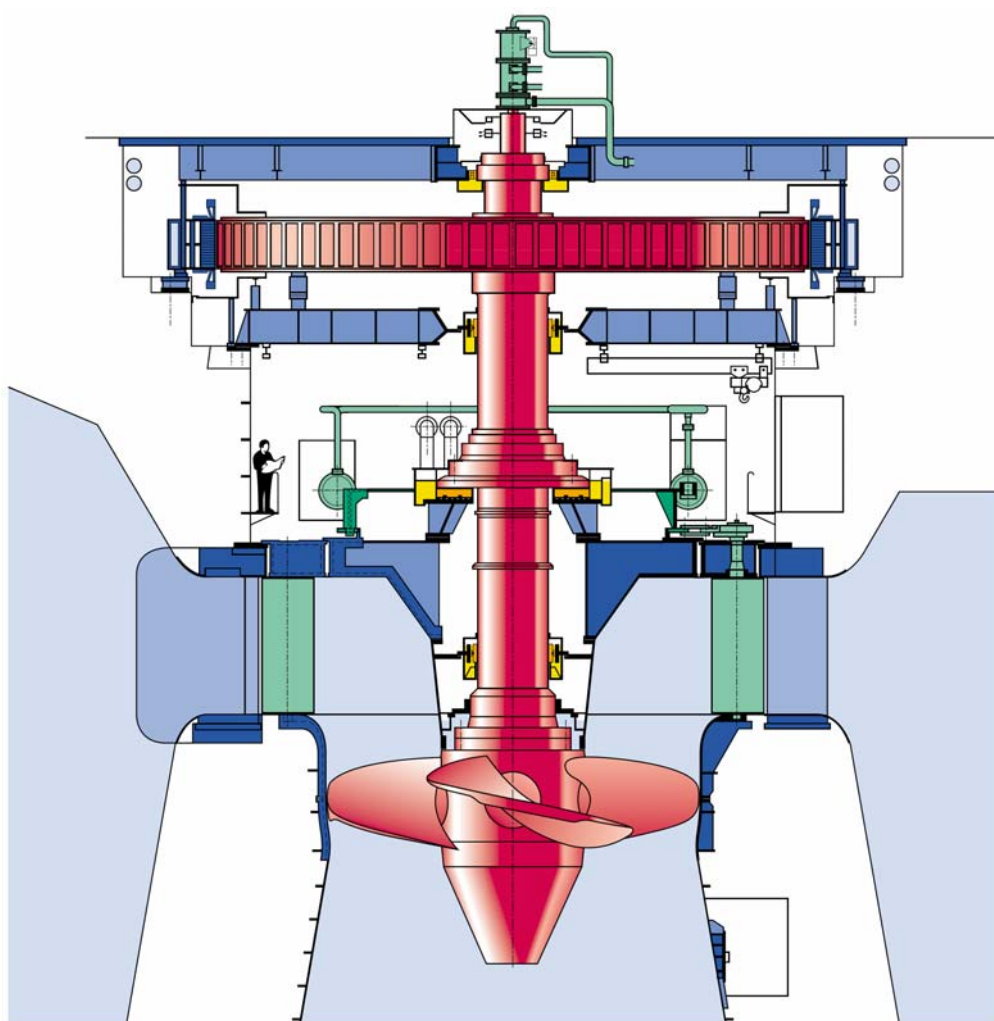


**Figura 2.2:** Exemplo de turbina Francis [46].

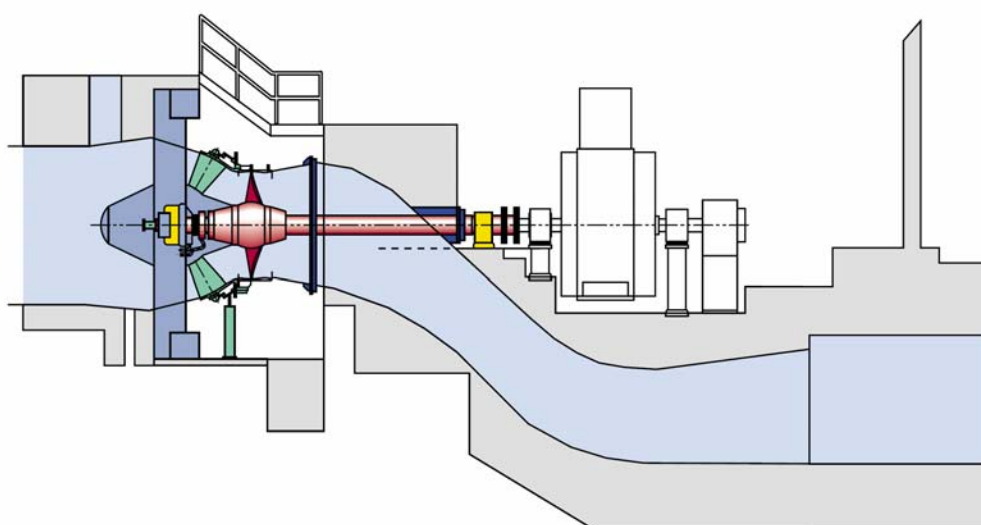


**Figura 2.3:** Exemplo de turbina Pelton vertical, vistas em corte e de topo [46].

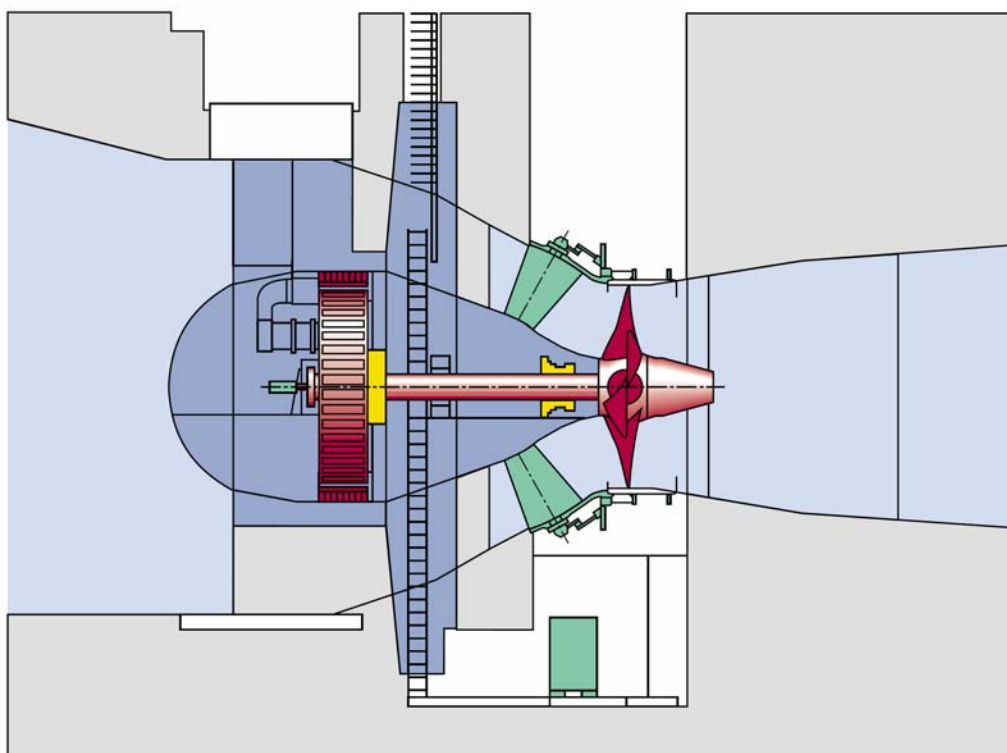




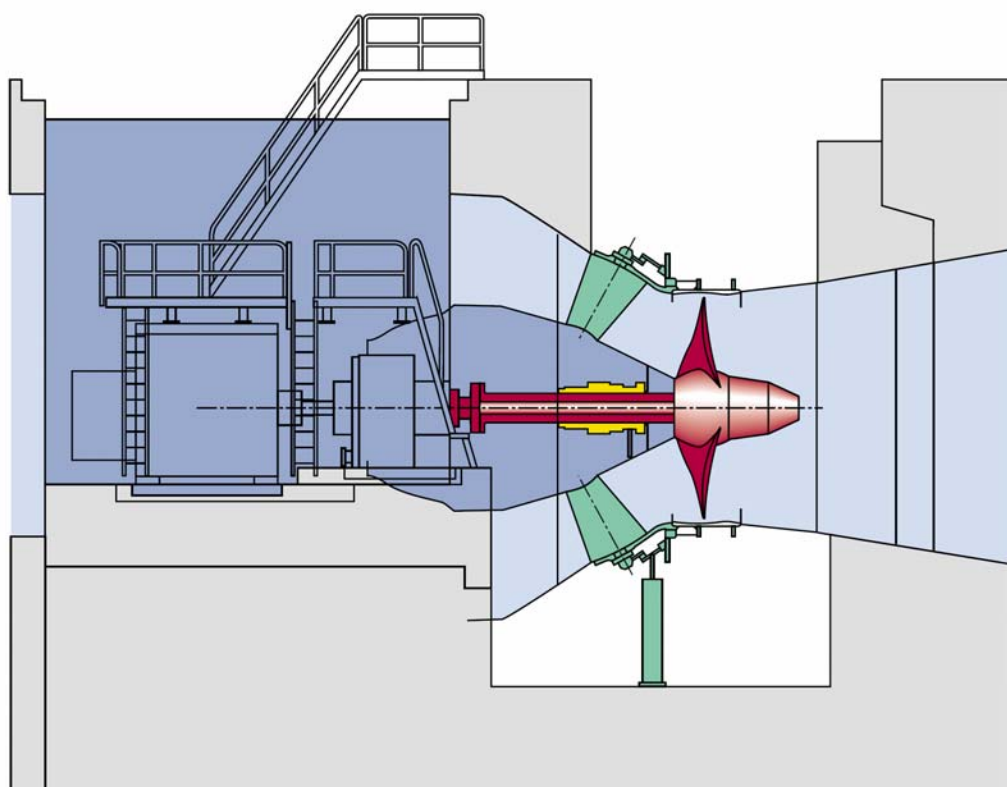
**Figura 2.4:** Exemplo de turbina Kaplan ou hélice [46].



**Figura 2.5:** Exemplo de turbina S [46].

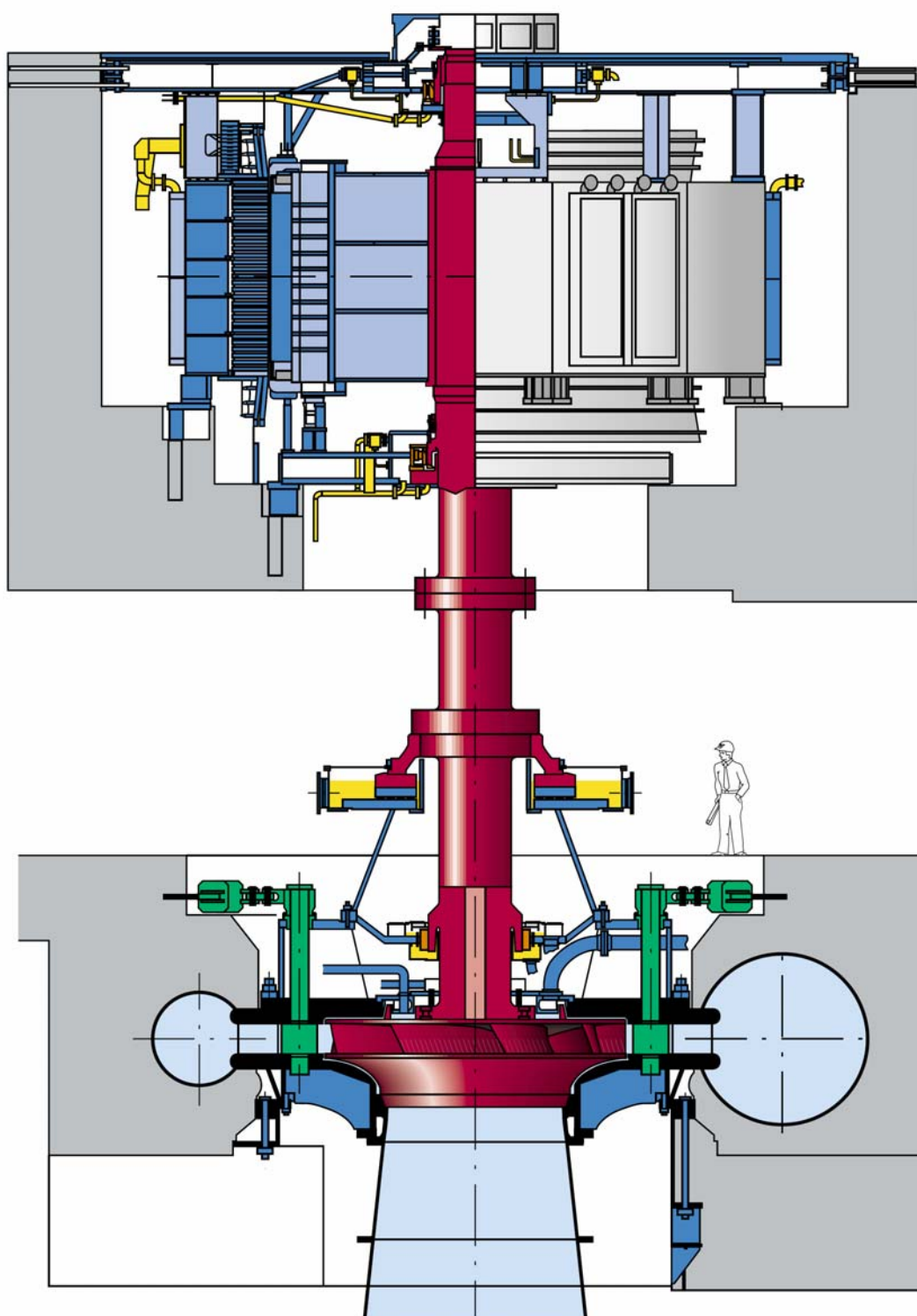


**Figura 2.6:** Exemplo de turbina bulbo [46].



**Figura 2.7:** Exemplo de turbina tubular [46].





**Figura 2.8:** Exemplo de turbina-bomba [46].

### 2.1.2. Elementos de turbinas hidráulicas

Apesar dos diferentes tipos de turbinas apresentados anteriormente, todos eles contam com os mesmos componentes e com a mesma disposição geral do conjunto. Assim, os principais elementos são discutidos a seguir, para que se possa identificar quais deles são os mais importantes para o movimento oscilatório do eixo e, logo, quais deles devem ser modelados e considerados no cálculo que se propõe.

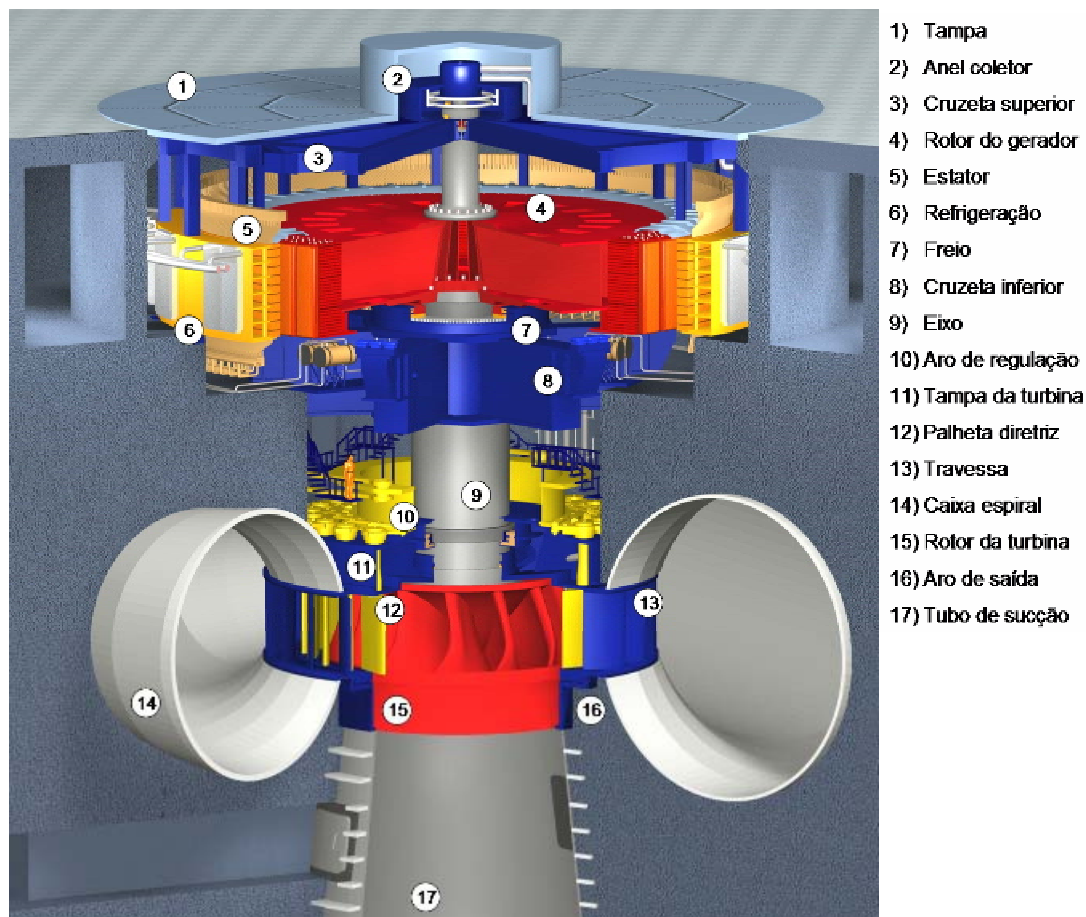
Nos cortes de máquina exibidos nas figuras 2.2 a 2.8, os elementos rotativos que formam a linha de eixo estão indicados em vermelho, são eles o rotor da turbina, eixo e rotor do gerador, composto por uma estrutura metálica central, sobre a qual é montada, por interferência, a coroa magnética, com pólos em balanço em seu diâmetro externo. Em laranja e amarelo estão mostrados os mancais e seus sistemas auxiliares de bombeamento de óleo. Os elementos em verde correspondem às peças móveis, empregadas no sistema de regulação da máquina, e aos seus sistemas de comando. Para máquinas Francis, Kaplan e suas variantes tratam-se de palhetas diretrizes, bielismo, aro de regulação e servomotores, já em turbinas Pelton são os injetores e defletores. O azul escuro aponta os elementos fixos, que consistem do estator do gerador, suportes dos mancais, tampa da turbina, travessas e caixa espiral. Finalmente, em azul claro, vêm-se os volumes ocupados pelo escoamento e, em cinza, a estrutura civil.

De modo a facilitar a visualização dos elementos que foram descritos, pode-se observar na figura 2.9 um corte tridimensional de uma turbina Francis, onde todos eles estão indicados.

Em todos estes cortes, percebe-se que, independentemente do tipo de máquina, todos os componentes possuem o mesmo arranjo geral e que elas contam, na sua maioria, com os mesmos elementos. Mais precisamente, todas apresentam a mesma disposição da linha de eixo, composta pelo eixo, rotor do gerador e rotor da turbina, assim como os mesmos componentes que interagem com ela, que são o estator do gerador, os mancais e os seus suportes. Portanto, a mesma metodologia pode ser utilizada para o cálculo das velocidades angulares críticas e fatores dinâmicos de amplificação de deslocamento, qualquer que seja o tipo de turbina.

No entanto, uma modelagem adequada de cada um dos itens envolvidos é necessária para que se possa prever os valores acima com precisão. Para tanto, na

seção 2.3.2 são apresentados os modelos teóricos que foram pesquisados para o cálculo.



**Figura 2.9:** Principais elementos de uma turbina hidráulica [46].

### 2.1.3. Elementos da linha de eixo

Com um enfoque não tão direcionado a uma visão geral da máquina, mas já se preocupando com os elementos relevantes para o cálculo dinâmico da linha de eixo, SIMON [41] aponta como elementos essenciais o rotor da turbina, o gerador, os segmentos de eixo e os mancais guia. O mancal escora, como verificado numericamente por BENKÖ; HOLMÉN [6] não é um elemento tão importante para o cálculo, sendo que o considerar ou não resulta em variações da ordem de 0,3 a 0,5% no valor das velocidades angulares críticas, portanto sua utilização na

modelagem, seguindo as equações deduzidas por HILGENDORF [22] e FRÖSSEL [16], se torna opcional.

GROSSE [18] e SCHEIDL [39] escrevem também sobre a necessidade de se considerar os suportes e fundações onde estão montados os mancais, pois eles alteram os valores de rigidez equivalente que se deve utilizar para tais componentes. Ambos analisam os componentes sob o ponto de vista de parâmetros dinâmicos para a modelagem do sistema. GROSSE [18] é quem faz isto de maneira mais sistemática, dividindo-os em inércia, rigidez e amortecimento. Os elementos que determinam a inércia do sistema são o rotor da turbina, o gerador e os segmentos de eixo. Estes mesmos componentes também influem na rigidez, assim como o filme de óleo dos mancais, as carcaças dos mancais, os seus suportes, as fundações e o empuxo eletromagnético. Por fim, o amortecimento é causado pelo filme de óleo, pelos labirintos do rotor e pelo amortecimento estrutural.

BETTIG; HAN [8] também levam em conta o desalinhamento entre os segmentos de eixo, o que resulta em uma rigidez adicional a ser considerada no acoplamento entre eles. Segundo eles, apenas com a introdução deste elemento no modelo de cálculo e com valores elevados de desalinhamento, é possível fazer com que seus resultados numéricos possuam correlação com os dados medidos em uma turbina Kaplan de 34 MW. Porém, os dois são os únicos a considerar tal efeito, além do que o texto escrito por eles revela alguns equívocos em relação à determinação das demais rigidezes e, segundo NIKOLAJSEN [34], os desalinhamentos em turbinas hidráulicas são ajustados durante a montagem para que sejam os menores possíveis. Logo, a importância dada por eles a este elemento e seu caráter indispensável não possuem fundamento. Assim, para a modelagem é suficiente se concentrar nos componentes claramente citados por GROSSE [18], SCHEIDL [39] e SIMON [41].

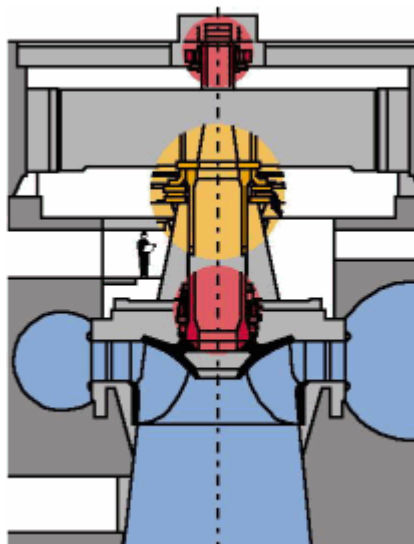
#### **2.1.4. Arranjos de máquina típicos**

Como já mencionado anteriormente, os arranjos de máquina se referem à disposição geral dos componentes da turbina. Eles afetam a sua configuração geométrica e, assim, causam mudanças à forma em que a linha de eixo é representada, para efeito de cálculo das velocidades angulares críticas e fatores

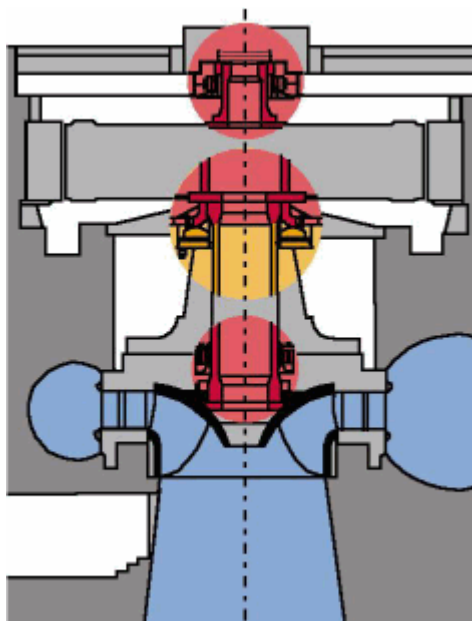
dinâmicos de amplificação de deslocamento. Duas máquinas com elementos idênticos podem apresentar valores muito distintos para estas grandezas segundo o tipo de arranjo. Em função do tipo, tamanho, rotação, potência e altura de queda das turbinas hidráulicas, diversas concepções de arranjo são possíveis, as quais variam principalmente em relação ao número de mancais e às suas posições.

Existem turbinas hidráulicas com dois mancais guia, como a estudada por LOTH; SPRYSL; EBI [27] ou com três mancais guia, como a analisada por SIMON [41]. Geralmente, quatro mancais guia são usados apenas em turbinas-bomba, como naquela calculada por SCHWIRZER [40]. Invariavelmente, todas elas possuem apenas um mancal escora. As figuras 2.10, 2.11 e 2.12 mostram exemplos de arranjos de máquinas com dois, três e quatro mancais guia, respectivamente, os quais estão indicados em vermelho.

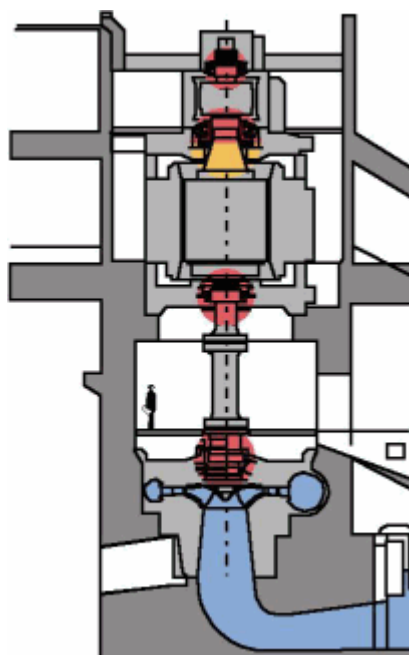
Também é possível ver as variações de posição do mancal escora, que pode ser colocado apoiado sobre a tampa da turbina, sob o gerador ou sobre ele, como mostrado em amarelo nas figuras 2.10, 2.11 e 2.12, respectivamente. Sempre há um mancal guia imediatamente acima da turbina e pode haver mancais guia imediatamente acima ou abaixo do gerador.



**Figura 2.10:** Exemplo de arranjo com dois mancais guia e com o mancal escora apoiado sobre a tampa da turbina [46].



**Figura 2.11:** Exemplo de arranjo com três mancais guia e com o mancal escora apoiado abaixo do gerador [46].



**Figura 2.12:** Exemplo de arranjo com quatro mancais guia e com o mancal escora apoiado acima do gerador [46].

Apesar de, teoricamente, qualquer uma das combinações do número de mancais guia e da posição do mancal escora ser factível, GUMMER [20] afirma que

os dois arranjos mais comuns contam com o mancal escora apoiado sobre a tampa da turbina e dois mancais guias ou, senão, contam com o mancal escora apoiado sob o gerador e três mancais guia. Estes são, coincidentemente, os arranjos das figuras 2.10 e 2.11.

Ele comenta que a escolha entre estes dois tipos de arranjo é influenciada, além de por aspectos técnicos, por tendências históricas e culturais. O segundo arranjo é mais antigo, foi utilizado nas, até então, maiores usinas do mundo, Itaipu e Guri e correspondia, ao menos até 1998, à totalidade das máquinas instaladas na China, Estados Unidos e ex-União Soviética. O primeiro arranjo, também foi utilizado em grandes usinas, entre elas Paulo Afonso IV, Cabora Bassa, Xingó e Karakaya, e corresponde ao arranjo predominante na Argentina, Brasil, Canadá, Moçambique, Suécia e Turquia.

De acordo com GUMMER [20], as vantagens técnicas do primeiro tipo de arranjo são as de dispensar o uso de um terceiro mancal guia, tornar a tampa da turbina mais rígida e reduzir o comprimento da linha de eixo e, conseqüentemente, a altura da casa de força, resultando em uma economia bastante considerável. Por outro lado, o segundo tipo de arranjo proporciona mais espaço dentro do poço da turbina, mais fácil acesso aos componentes para manutenção e desmontagem mais simples.

De qualquer forma, qualquer que seja o tipo de arranjo, a natureza dinâmica dos mancais é a mesma e, logo, a sua modelagem também é comum, bastando apenas saber a posição correta para incluí-los no modelo. Mesmo que a metodologia de cálculo não seja afetada pelo tipo de arranjo, os valores das velocidades angulares críticas podem variar enormemente, como dito por BENKÖ; HOLMÉN [6].

Outro ponto a ser notado sobre o arranjo das máquinas é que os suportes dos mancais guia do gerador podem ser ancorados diretamente na estrutura civil ou apoiados sobre a carcaça do estator, conforme SCHWIRZER [40]. Isto tem influência sobre a rigidez dos suportes, que deve ser devidamente calculada, como descrito na seção 2.4.4, tanto é que BARP [3] sugere que, ao invés de se adicionar um terceiro mancal guia, se mantenham dois que tenham sua estrutura reforçada.

Um último aspecto importante é que todas as considerações feitas aqui sobre os arranjos das máquinas verticais também valem para as horizontais.

### 2.1.5. Condições de operação

As condições de operação da máquina podem influenciar a presença, magnitude e importância dos fenômenos físicos observados, como em relação à velocidade angular de rotação, às forças hidráulicas no rotor e ao empuxo magnético. Neste sentido, elas são determinantes para que se avalie a necessidade de se considerar ou não, entre outros, uma dada força na modelagem do sistema.

Como dito por SIMONE [42], as turbinas hidráulicas são em sua grande maioria máquinas síncronas, ou seja, são projetadas para operarem com velocidade angular de rotação sempre constante durante a operação nominal. Nesta condição, o torque no rotor da turbina, produzido pelo escoamento, é equilibrado pelo torque originado no gerador pela ação das forças eletromagnéticas e qualquer variação é corrigida pelo regulador de velocidade, controlando a abertura do distribuidor ou injetores e, conseqüentemente, a vazão, e pelo regulador de tensão, variando a corrente de excitação dos pólos.

Na partida, a máquina é lentamente levada do repouso até a velocidade angular nominal, sem que esta seja ultrapassada. O inverso ocorre no momento da parada, também sem que a rotação nominal seja ultrapassada.

Condições especiais de operação, como descritas por BENKÖ; HOLMÉN [6], são a rejeição de carga e o disparo. Em uma rejeição de carga, por razões diversas, o gerador é subitamente desconectado da rede elétrica e desmagnetizado, fazendo com que o torque nele desapareça e, com isto, com que o torque hidráulico, sem nenhum esforço que o equilibre, acelere a turbina. Ao detectar o aumento da rotação, o regulador de velocidade fecha o distribuidor ou os injetores, reduzindo o torque no rotor até que a máquina possa ser completamente parada pelo freio mecânico posicionado no gerador. A máxima rotação atingida nesta condição é denominada sobre-velocidade, sendo sempre superior à rotação nominal.

No caso do disparo, o mesmo ocorre. Contudo, por algum problema no sistema de regulação de velocidade, o distribuidor ou os injetores não são fechados e a vazão é mantida constante e, então, o torque hidráulico mantido. Nestas circunstâncias, a máquina acelera até que o escoamento pela turbina se torne tão desordenado a ponto que o torque hidráulico diminua e seja equilibrado apenas pelas



forças de atrito viscoso nos mancais hidrodinâmicos. Assim, a máquina atinge uma rotação constante, bem superior à rotação nominal, chamada de rotação de disparo.

Estas três rotações, nominal, de disparo e sobre-velocidade, são importantes para a análise dinâmica da linha de eixo, pois elas são normalmente comparadas às velocidades angulares críticas, como feito por SCHEIDL [39] e SIMON [41].

## **2.2. Considerações gerais sobre dinâmica de rotores**

O cálculo das velocidades angulares críticas é um problema típico de dinâmica de rotores e, por este motivo, antes de se entrar, especificamente, no estudo das turbinas hidráulicas, faz-se necessário rever alguns conceitos fundamentais sobre este tópico. Por exemplo, o efeito giroscópico, estudado no início desta seção, é um fenômeno que recebe pouca atenção em muitas aplicações de engenharia mecânica, porém ele é de suma importância na dinâmica de rotores, influenciando significativamente no valor das frequências naturais e conseqüentemente no valor das velocidades angulares críticas. Em seguida, é apresentada uma ferramenta muito útil para a determinação das velocidades angulares críticas, o diagrama de Campbell. Com ele é possível se obter uma representação gráfica das principais frequências do sistema e verificar sua dependência em relação à velocidade angular de rotação.

Mais um ponto de interesse na dinâmica de rotores é o limite de estabilidade, que, como dito mais a frente nesta seção, pode ser função de diversos parâmetros do sistema. Dadas as possíveis conseqüências que podem ocorrer, para máquinas de grande porte, caso o limite de estabilidade seja ultrapassado, é aconselhável examinar a teoria envolvida e os registros bibliográficos, de modo que a decisão de levá-lo ou não em conta nas análises seja bem fundamentada. Outro aspecto comum em dinâmica de rotores e discutido ao fim desta seção é a linearização do sistema ao redor da posição de equilíbrio, quando mancais hidrodinâmicos curtos e lisos são utilizados. Mesmo que a linearização seja a prática comum nestes problemas, não é aceitável utilizá-la antes de se verificar a sua adequação às condições existentes.

### 2.2.1. Efeito giroscópico

Nos problemas de dinâmica de rotores, devido ao movimento de rotação do eixo combinado a deslocamentos angulares das massas associadas a ele, de natureza vibracional, surge a ação do efeito giroscópico. Neste caso, por influir significativamente no movimento do sistema, ele deve ser modelado e incluído na equação dinâmica do sistema, que fica:

$$[M]\{\ddot{x}\} + ([C] + [G])\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \quad (2.2)$$

$[C]$	:	matriz de amortecimento	$[Ns/m]$
$[G]$	:	matriz de efeito giroscópico	$[Ns/m]$
$[K]$	:	matriz de rigidez	$[N/m]$
$[M]$	:	matriz de massa	$[kg]$
$\{F\}$	:	vetor de forças externas	$[N]$
$\{x\}$	:	vetor de deslocamentos	$[m]$

A equação (2.2) demonstra que a matriz de efeito giroscópico multiplica o vetor de velocidades. Logo, apesar de não ser uma regra, muitas vezes é necessário, mesmo que o sistema não possua amortecimento, transformar as equações para o espaço de estados para que elas possam ser resolvidas, quer a solução seja obtida numericamente ou analiticamente, devido ao termo que envolve o vetor de velocidades. Vale-se notar também que a matriz de efeito giroscópico é antissimétrica, o que deve ser levado em conta na escolha do esquema numérico a ser utilizado para a resolução.

Além disto, outra característica da matriz de efeito giroscópico é que a sua diagonal principal é nula. Estas duas propriedades fazem com que ela não cause dissipação de energia, como mostrado pelo cálculo da função de dissipação de Rayleigh e do trabalho das forças não conservativas:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} [\dot{q}]^T [G] [\dot{q}] \quad (2.3)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n G_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (2.4)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n G_{ii} \dot{q}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n G_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} G_{ji} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (2.5)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n 0 \cdot \dot{q}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n G_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n G_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (2.6)$$

$$\mathcal{F} = 0 \quad (2.7)$$

$$\delta W_{nc} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \quad (2.8)$$

$$\therefore \delta W_{nc} = 0 \quad (2.9)$$

$\mathcal{F}$	:	função de dissipação de Rayleigh	[W]
$q_i$	:	i-ésima coordenada generalizada	[m]
$\delta q_i$	:	i-ésimo deslocamento virtual	[m]
$\delta W_{nc}$	:	trabalho virtual das forças não conservativas	[J]

Para ilustrar a influência do efeito giroscópico sobre o movimento do sistema, toma-se um exemplo simples desenvolvido por RAO, J.S. [36] de um rotor simétrico, bi-apoiado, com inércia concentrada e com rigidez e amortecimento isotrópicos, ilustrado na figura 2.13. Para pequenos deslocamentos, as equações que regem o movimento ficam:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m\delta\omega^2 \cos(\omega t) \quad (2.10)$$

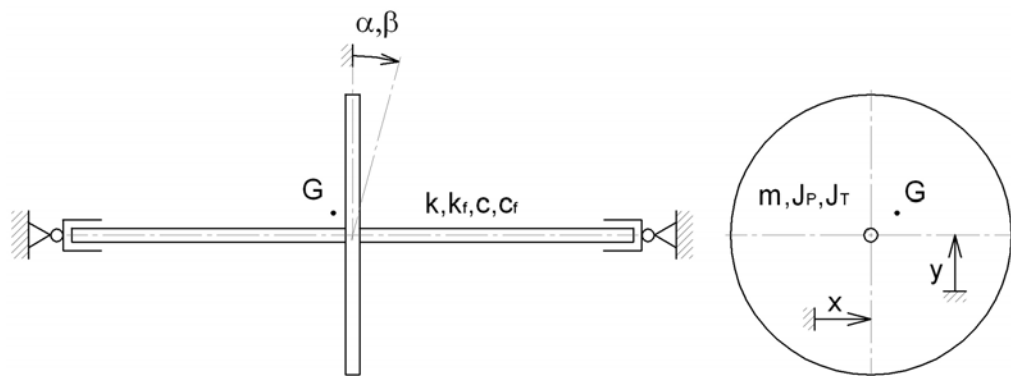
$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = m\delta\omega^2 \sin(\omega t) \quad (2.11)$$

$$J_T \ddot{\alpha} + c_f \dot{\alpha} + J_p \omega \dot{\beta} + k_f \alpha = \Delta J_u \omega^2 \cos(\omega t) - \Delta J_v \omega^2 \sin(\omega t) \quad (2.12)$$

$$J_T \ddot{\beta} + c_f \dot{\beta} - J_p \omega \dot{\alpha} + k_f \beta = \Delta J_u \omega^2 \sin(\omega t) + \Delta J_v \omega^2 \cos(\omega t) \quad (2.13)$$

$c$	:	amortecimento translacional	[Ns/m]
$c_f$	:	amortecimento angular	[Ns/rad]
$J_p$	:	momento polar de inércia de massa	[kg·m <sup>2</sup> ]

$J_T$	:	momento transversal de inércia de massa	$[\text{kg}\cdot\text{m}^2]$
$k$	:	rigidez translacional	$[\text{N}/\text{m}]$
$k_f$	:	rigidez angular	$[\text{N}/\text{rad}]$
$m$	:	massa do rotor	$[\text{kg}]$
$t$	:	tempo	$[\text{s}]$
$x$	:	deslocamento em x	$[\text{m}]$
$y$	:	deslocamento em y	$[\text{m}]$
$\Delta J_u$	:	produto de inércia desbalanceado em x	$[\text{kg}\cdot\text{m}^2]$
$\Delta J_v$	:	produto de inércia desbalanceado em y	$[\text{kg}\cdot\text{m}^2]$
$\alpha$	:	deslocamento angular em x	$[\text{rad}]$
$\beta$	:	deslocamento angular em y	$[\text{rad}]$
$\delta$	:	excentricidade do centro de massa	$[\text{m}]$
$\omega$	:	velocidade angular de rotação do eixo	$[\text{rad}/\text{s}]$



**Figura 2.13:** Rotor simétrico, bi-apoiado, com inércia concentrada e com rigidez e amortecimento isotrópicos.

Como o foco é no efeito giroscópico, desprezam-se todos os amortecimentos. As equações (2.10) e (2.11), que descrevem apenas os movimentos translacionais puros, são deixadas de lado e reescrevem-se as equações (2.12) e (2.13) com a ajuda de variáveis complexas, tendo-se então:

$$J_T \ddot{\gamma} - iJ_P \omega \dot{\gamma} + k_f \gamma = (\Delta J_u + i\Delta J_v) \omega^2 e^{i\omega t}, \quad \text{com} \quad \gamma = \alpha + i\beta \quad (2.14)$$

$\gamma$  : deslocamento angular complexo [rad]

Resolvendo-se a equação característica correspondente à equação diferencial acima, obtêm-se as raízes complexas, dadas por:

$$s_{1,2} = i \frac{J_P}{2J_T} \omega \mp \sqrt{-\left(\frac{J_P}{2J_T} \omega\right)^2 - \frac{k_f}{J_T}} \quad (2.15)$$

$s_i$  : i-ésimo pólo do sistema [1/s]

Se o eixo não estiver rodando, não há efeito giroscópico e as frequências naturais, que são a parte imaginária dos pólos complexos, se tornam:

$$\omega_{n_{1,2}} = \mp \sqrt{\frac{k_f}{J_T}} \quad (2.16)$$

$\omega_{n_i}$  : i-ésima frequência natural angular [rad/s]

Isto corresponde ao simples movimento de oscilação angular da massa do rotor em torno do centro do eixo, sem que exista influência do efeito giroscópico. No entanto, para o caso geral, pode-se rearranjar a equação (2.15) de modo a se obter as frequências naturais na seguinte forma:

$$\omega_{n_1} = \frac{J_P}{2J_T} \omega \left[ 1 - \sqrt{1 + \frac{k_f}{J_T} \left( \frac{2J_T}{J_P} \frac{1}{\omega} \right)^2} \right] \quad (2.17)$$

$$\omega_{n_2} = \frac{J_P}{2J_T} \omega \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{k_f}{J_T} \left( \frac{2J_T}{J_P} \frac{1}{\omega} \right)^2} \right] \quad (2.18)$$

Assumindo-se a velocidade angular de rotação sempre maior do que zero, percebe-se que a frequência natural  $\omega_{n_1}$  é sempre negativa e  $\omega_{n_2}$  sempre positiva. Isto se deve ao fato de que  $\omega_{n_2}$  corresponde ao movimento oscilatório que ocorre na

mesma direção de rotação do eixo, enquanto que  $\omega_{n_1}$  se refere ao movimento na direção inversa. Em outras palavras,  $\omega_{n_2}$  é a frequência de precessão direta e  $\omega_{n_1}$  é a frequência de precessão reversa.

Observa-se nas equações (2.17) e (2.18) que as frequências naturais  $\omega_{n_1}$  e  $\omega_{n_2}$  são monotônicas em relação à velocidade angular de rotação e que possuem como assíntotas 0 e  $(J_p/J_T)\omega$ , respectivamente. Logo, quando a velocidade angular de rotação é nula, ambas são iguais a  $\sqrt{k_f/J_T}$  e, conforme ela aumenta,  $\omega_{n_1}$  diminui e  $\omega_{n_2}$  aumenta. Por este mesmo motivo, a velocidade angular crítica de precessão reversa sempre existe e para que a direta exista, é obrigatório que  $J_p/J_T < 1$ .

Este comportamento pode ser generalizado para configurações de eixo mais complexas e é confirmado por SIMON [41], que afirma que, no caso da precessão direta, o efeito giroscópico aumenta as frequências naturais e, portanto, as velocidades angulares críticas da linha de eixo e que, no caso da precessão reversa, elas diminuem e, conseqüentemente, também as velocidades angulares críticas.

### 2.2.2. Diagrama de Campbell

A velocidade angular crítica é a frequência de excitação na qual há ressonância entre a frequência natural de um dado modo e as forças de desbalanceamento do eixo. A frequência de tais forças varia e é sempre igual à velocidade angular de revolução da linha de eixo. Por outro lado, como mostrado na seção anterior, as frequências naturais do sistema também podem variar em função da velocidade angular de rotação, além de em função das propriedades hidrodinâmicas dos mancais guia. Portanto, tratando as frequências naturais e a frequência de excitação por desbalanceamento como funções de  $\omega$ , as velocidades angulares críticas são dadas pelos pontos de intersecção entre elas, de modo que elas sejam iguais, como mostra a equação (2.19):

$$\omega_{crit_i} = \omega_{n_i}(\omega) \Leftrightarrow \omega_{n_i}(\omega) = \omega_e(\omega) \quad (2.19)$$

$\omega_{crit_i}$  : i-ésima velocidade angular crítica [rad/s]



Assim os pontos da curva azul, que se encontram no segundo quadrante, estão relacionados à precessão reversa e são dados por  $\omega_{n_1}$ , enquanto que aqueles, que estão no primeiro quadrante, se referem à precessão direta e são obtidos a partir de  $\omega_{n_2}$ .

No diagrama, traçam-se retas de inclinação unitária, correspondendo às frequências de excitação  $\omega$  e  $-\omega$ , relativas às forças de excitação por desbalanceamento. Os pontos de intersecção entre estas retas e as curvas das frequências naturais determinam as velocidades angulares críticas do sistema. É importante notar que, no caso do movimento translacional puro, as frequências de precessão direta e reversa são coincidentes, fazendo com que a primeira velocidade angular crítica do sistema seja dupla, no entanto, correspondendo a dois modos de vibrar diferentes, como no caso de frequências naturais múltiplas. Portanto, o rotor apresenta apenas três velocidades angulares críticas distintas:

$$\omega_{crit_0} = 75,11 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{crit_1} = 193,4 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{crit_2} = 304,5 \text{ rad/s}$$

A seguir, desenham-se retas verticais, que se referem à velocidade angular de rotação constante de 120 rad/s na condição de operação da máquina,  $-\omega_r$  e  $\omega_r$ . A intersecção destas retas com as curvas das frequências naturais, resulta nas frequências naturais da linha de eixo na condição de operação do rotor. Valem as mesmas considerações sobre sua natureza e sua multiplicidade feitas sobre as velocidades angulares críticas.

$$\omega_{n_0} = 75,11 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{n_1} = 206,8 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{n_2} = 257,8 \text{ rad/s}$$

No gráfico, também pode-se mostrar frequências de excitação provenientes de outras origens, como é o caso hipotético de  $\omega_f$ , constante e igual a 170 rad/s.



Mesmo que não mostrados aqui, ainda é possível indicar os limites de estabilidade do sistema, em relação à velocidade angular de rotação, que seriam apresentados como retas verticais.

### 2.2.3. Limite de estabilidade

Muitas vezes o conceito de estabilidade é confundido com o de ressonância. Com amortecimento sub-crítico, na ressonância, ou, no caso da dinâmica de rotores, nas velocidades angulares críticas, a amplificação dos deslocamentos lineares ao redor da posição de equilíbrio passa por um máximo local. Por outro lado, se o limite de estabilidade, em relação à frequência de rotação ou qualquer outro parâmetro, for ultrapassado, há uma bifurcação dinâmica na resposta do sistema e a trajetória do movimento pode evoluir para outro atrator qualquer, seja ele um foco ou um ciclo-limite, estáveis ou instáveis, uma trajetória quase-periódica ou uma trajetória caótica, como descrito por NAYFEH; BALACHANDRAN [32].

Para linhas de eixo com rigidez anisotrópica, como em eixos suportados por mancais hidrodinâmicos, LUND [28] cita uma regra empírica de que o limite de estabilidade, em relação à frequência de rotação, é igual a duas vezes a primeira velocidade angular crítica. NIKOLAJSEN [34] utiliza e confirma esta mesma aproximação com algumas simulações numéricas. EHRICH, TIMOSHENKO; KRÄMER; NEWKIRK, LEWIS e PINKUS apud BENKÖ; HOLMÉN [6] fazem a mesma constatação e relacionam este fenômeno ao comportamento dinâmico característico do filme de óleo ou senão ao amortecimento interno.

Como mencionado acima, o limite de estabilidade também pode ser modificado por outros parâmetros do sistema. Ainda considerando mancais com propriedades anisotrópicas, LUND [28] demonstra como os termos cruzados de rigidez e amortecimento podem afetar o limite de estabilidade, através do cálculo da energia dissipada por ciclo, tomando como exemplo um rotor simétrico, de eixo rígido, montado sobre mancais flexíveis:

$$E_d = \pi\omega_n \left[ c_{xx}|X|^2 + c_{yy}|Y|^2 - (c_{xy} + c_{yx})X|Y|\sin(\angle X - \angle Y) + \dots \right. \\ \left. \dots - \pi(k_{xy} - k_{yx})X|Y|\cos(\angle X - \angle Y) \right] \quad (2.20)$$

$c_{ii}$	:	amortecimento direto em $i$	[Ns/m]
$c_{ij}$	:	amortecimento cruzado de $j$ em $i$	[Ns/m]
$E_d$	:	energia dissipada por ciclo	[J]
$k_{ij}$	:	rigidez cruzada de $j$ em $i$	[N/m]
$X$	:	amplitude complexa em $x$	[m]
$Y$	:	amplitude complexa em $y$	[m]
$\omega_n$	:	frequência natural	[rad/s]

Observa-se na equação (2.20) que, dependendo dos valores de amortecimento e rigidez cruzados, a energia dissipada pode ser negativa, o que significaria que a energia do sistema estaria aumentando a cada ciclo, fazendo que ele se tornasse instável, segundo o critério de Liapunov. GUINZBURG [19] também se mostra interessado por este efeito e sugere, de uma forma mais simplista e menos determinística, que, para diferentes possibilidades de projeto para uma mesma máquina, o risco de se ultrapassar o limite de estabilidade seja avaliado pelas relações  $k_{ij}/c_{ii}$  e  $k_{ij}/c_{jj}$ . Apesar de menos preciso, este método encontra respaldo teórico na equação (2.20), porém, sem um critério preciso, só pode de fato ser utilizado na comparação entre diferentes concepções de uma mesma máquina.

NIKOLAJSEN [34] ainda demonstra uma outra forma de se alterar o limite de estabilidade da linha de eixo, ao se alterar o grau de desalinhamento entre os mancais de uma estrutura hiperestática. No entanto, devido à variedade dos resultados de suas simulações numéricas, não há indicação de que exista qualquer procedimento que possa otimizar os desalinhamentos de modo a aumentar o limite de estabilidade do rotor. Além do que ele mesmo menciona que, em turbinas hidráulicas, mesmo com mancais guia de geometria fixa, que são ajustados apenas durante a montagem, os desalinhamentos são mantidos os menores possíveis, causando pouca influência à dinâmica do eixo.

Para ele, o efeito do desalinhamento também está ligado à rigidez dos mancais. Em rotores mal alinhados, mancais mais flexíveis aumentam o limite de estabilidade, enquanto que, em rotores bem alinhados, ocorre o contrário.

#### **2.2.4. Linearização**

Apesar de BENKÖ; HOLMÉN [6] relatarem o aparecimento de ressonâncias paramétricas, típicas de sistemas não-lineares, em duas máquinas Kaplan de 50 e de 80 MW, segundo KRODKIEWSKI; SUN [24], modelos lineares têm sido normalmente utilizados para o cálculo das velocidades angulares críticas, da resposta dinâmica e do limite de estabilidade, a passo que modelos não-lineares têm sido úteis para a comprovação dos resultados dos modelos linearizados, determinação de ciclos-limite e verificação de ressonâncias sub-harmônicas, como as observadas por BENKÖ; HOLMÉN [6]. LUND [28] afirma que, em aplicações comuns, o comportamento não-linear não é de grande interesse na prática e que a aproximação linear pode ser usada para a avaliação do limite de estabilidade e deve ser o critério de projeto para turbinas hidráulicas.

Esta é uma questão que surge especialmente quando se refere ao comportamento dos mancais guia hidrodinâmicos e, praticamente, todos os autores pesquisados, optam pela linearização ao redor da posição de equilíbrio, como será visto mais adiante.

### **2.3. Particularidades em relação a turbinas hidráulicas**

Depois de se obter uma visão geral sobre dinâmica de rotores, passa-se ao estudo das turbinas hidráulicas, em especial. Elas possuem suas peculiaridades, fazendo com que certos aspectos da dinâmica de rotores recebam mais atenção e possibilitando que outros sejam deixados de lado. Além disto, em função do tipo de equipamento mecânico com que se está lidando, os critérios de projeto podem variar a ponto de serem completamente diferentes. Ao longo desta seção, são discutidos os pontos particulares de dinâmica de rotores relativos às turbinas hidráulicas e apresentados os critérios de projeto normalmente utilizados, as verificações a serem realizadas e os cuidados a serem tomados.

#### **2.3.1. Velocidades angulares críticas e vibrações**

Máquinas rotativas em geral podem ser classificadas de acordo com a sua velocidade angular de operação em relação à primeira velocidade angular crítica.

Pode-se dizer que aquelas que operam abaixo da primeira velocidade angular crítica possuem rotação sub-crítica e aquelas com rotação superior possuem rotação super-crítica. Tal diferença é feita porque as super-críticas, ao partirem do repouso, devem passar pela velocidade angular crítica antes de atingirem a sua rotação nominal. Portanto, dependendo do amortecimento, próximo à velocidade angular crítica pode haver ressonância e, então, os esforços e deslocamentos aos quais a linha de eixo e a base estariam submetidas podem ser de grande magnitude. Neste caso, o projeto mecânico de todo o sistema deve ter em consideração este efeito.

Entretanto, para SIMON [41], as turbinas hidráulicas são geralmente projetadas de modo a que elas operem “sub-criticamente”. GROSSE [18] já é mais categórico e escreve que as “máquinas hidráulicas são sempre operadas abaixo da primeira velocidade angular crítica de flexão”. Mesmo para turbinas-bomba, que são normalmente máquinas mais rápidas, BARP [3] também diz que elas são geralmente operadas abaixo da primeira velocidade angular crítica. De acordo com ele, o motivo é que, nestes tipos de máquinas rotativas, as grandes massas presentes impedem que elas passem rapidamente pela região ao redor da velocidade angular crítica. No entanto, segundo ele, talvez no futuro, com um melhor conhecimento dos fenômenos de vibração envolvidos, seja possível mudar a filosofia de operá-las abaixo das velocidades angulares críticas.

SCHEIDL [39] dá como valor para a primeira velocidade angular crítica, tal como definida aqui e também por RAO, J.S. [36], que ela deve ser de 15 a 25% maior do que a rotação mais elevada da máquina, ou seja, 15 a 25% maior do que a rotação de disparo, dependendo das exigências de cada instalação e se constituindo como um critério de projeto.

Também em relação à ordem de grandeza da primeira velocidade angular crítica de turbinas hidráulicas, GLATTFELDER; GREIN; DÖRFLER [17] consideram que ela pode variar de 0,1 a 10 Hz, enquanto que os fatores de amplificação correspondentes podem ir de 4 a 20, na ressonância, e se mantendo altos por uma larga faixa de frequências. Porém, eles não dão a devida importância ao amortecimento do sistema e, logo, tal amplificação pode ser encarada como o pior caso, fora que, para eles, em 1981, a determinação quantitativa destas amplitudes de vibração estava além das capacidades da época.

Mesmo todas estas considerações sendo aplicáveis às precessões direta e reversa, a preocupação durante o projeto está, na maioria das vezes, voltada para a primeira velocidade angular crítica de precessão direta, porque, como garante SIMON [41], casos de precessão reversa muito raramente foram relatados em turbinas hidráulicas.

Ele classifica as vibrações axiais da linha de eixo como não problemáticas e não atribui importância a ela, assim como todos os demais autores. Já as vibrações torsionais dependem apenas da rigidez torsional e das massas rotativas, assim, as frequências naturais podem ser facilmente calculadas com grande precisão. Para ele, elas também são quase sempre não problemáticas, a não ser que suas frequências naturais coincidam com a frequência da rede ou um de seus múltiplos, mas, caso isto ocorra, a solução é simples e alcançada apenas modificando-se os diâmetros interno e externo do eixo. Por outro lado, ele crê que as vibrações flexionais são muito mais complexas, envolvendo as propriedades dinâmicas dos mancais e de seus suportes, a elasticidade do eixo, o empuxo magnético e o efeito giroscópico.

Ainda, segundo SIMON [41], baseado em resultados teóricos e numéricos, o efeito giroscópico e a primeira velocidade angular crítica de flexão são principalmente determinados pelas propriedades do gerador, sendo que a segunda também é influenciada pelo rotor da turbina. A explicação para este comportamento é que, como confirma BARP [3], em máquinas hidráulicas é comum que a massa e o diâmetro do gerador sejam muito maiores do que os do rotor da turbina.

SCHWIRZER [40] faz a mesma observação de que o gerador domina a primeira velocidade angular crítica, enquanto que a participação do rotor da turbina apenas pode ser notada a partir da segunda velocidade angular crítica. Ele se baseia em medições de campo, que comprovam suas simulações numéricas e que mostram grandes amplitudes de vibração nos mancais guia do gerador para a primeira velocidade angular crítica e no mancal guia da turbina para a segunda velocidade angular crítica.

Por ser um critério de projeto da máquina, a primeira velocidade angular crítica requer que uma modelagem adequada dos parâmetros de inércia e rigidez do gerador seja feita, para que se obtenham resultados confiáveis.

### 2.3.2. Amortecimento

Apesar de se tratar de um efeito por muitas vezes desprezado, como se verifica em parte das referências pesquisadas, o amortecimento pode modificar significativamente o valor das velocidades angulares críticas e a resposta do sistema. A sua importância pode ser percebida, por exemplo, quando SIMON [41] verifica analiticamente e numericamente que, a partir do terceiro modo de vibrar, o amortecimento é tão grande que nenhuma amplificação significativa ocorre próximo à ressonância. Isto justifica o interesse que é dado apenas às primeiras velocidades angulares críticas.

Existe uma certa divergência entre os autores que se interessam pelo amortecimento atuante sobre a linha de eixo de turbinas hidráulicas. BARP [3] afirma que o amortecimento surge no filme de óleo, nos labirintos do rotor e do efeito aerodinâmico supostamente presente no entreferro do gerador. Segundo ele, a parcela mais determinante corresponde ao amortecimento do filme de óleo, enquanto que o amortecimento dos labirintos seria desprezível, assim como o aerodinâmico.

Já GROSSE [18] considera presentes no sistema o amortecimento estrutural, o amortecimento do filme de óleo e dos labirintos. Ambos concordam que a contribuição mais importante vem do filme de óleo dos mancais. Entretanto, ao contrário de BARP [3], ele defende que o amortecimento dos labirintos do rotor não pode ser ignorado. Por dispor de ferramentas de cálculo e medições mais recentes, GROSSE [18] inspira mais credibilidade e, para assegurar a precisão dos resultados, é aconselhável incluir este efeito nos modelos de cálculo.

Fórmulas para o cálculo do amortecimento do filme de óleo e dos labirintos podem ser encontradas nas seções 2.4.4 e 2.4.6. Apesar de citar o amortecimento estrutural, GROSSE [18] não o utiliza em seus cálculos. Além disto, baseado nos estudos de FREDÖ; ANDRÉN; FALK [15], para o primeiro modo, ele é da ordem de  $\zeta = 0,001$  a  $0,02$ , em estruturas puramente metálicas. Logo, ele pode ser desprezado na presença dos demais.

## 2.4. Modelagem dos elementos da linha de eixo

Uma vez conhecidos os tipos de turbinas hidráulicas existentes, seus principais componentes, quais deles fazem parte da linha de eixo da máquina, depois de terem sido introduzidos os conceitos básicos de dinâmica de rotores e salientadas as particularidades em relação a este tipo de equipamento, resta apenas formular os modelos analíticos dos diversos elementos envolvidos e que contribuem para o movimento oscilatório do eixo. Um a um, os elementos são descritos e avaliados do ponto vista de sua participação na dinâmica da estrutura, quer seja ao adicionar inércia, amortecimento ou rigidez ao sistema. Percorrem-se os componentes da linha de eixo, partindo do rotor gerador, descendo para eixo, acoplamento e mancais hidrodinâmicos, até chegar ao rotor da turbina e seus labirintos. Finalmente, modelam-se os carregamentos atuantes sobre a estrutura, causados pelo empuxo magnético e pelas forças hidráulicas, devido ao escoamento pelo rotor.

### 2.4.1. Gerador

Como observado na seção anterior, o gerador possui grande influência nos resultados dos cálculos da linha de eixo. Por isto, suas características dinâmicas devem ser modeladas com precisão, tanto em relação às suas propriedades de inércia quanto de rigidez.

SCHEIDL [39] é um dos poucos autores que menciona a influência da elasticidade do rotor do gerador na determinação das velocidades angulares críticas. Apesar de ter consciência disto, ele o considera, em suas simulações, como se fosse um corpo rígido. SIMON [41] também reconhece que o gerador não se comporta rigidamente em relação ao eixo, mas sim de maneira elástica, alterando os valores das velocidades angulares críticas, os modos de vibrar e o movimento do sistema. Ambos admitem a importância do efeito elástico do gerador, porém não o incluem na modelagem, provavelmente, por limitações computacionais e quanto aos métodos numéricos de suas épocas.

Quando o gerador é considerado como se fosse um corpo rígido, sua massa e seus momentos de inércia de massa podem ser facilmente avaliados na maioria dos programas de CAD atuais, com modelos tridimensionais. No entanto, se o objetivo

for o de refinar a descrição dinâmica do gerador, como é o caso aqui, uma alternativa, para se levar em conta sua rigidez e suas propriedades de massa, é a de se determinar suas matrizes de massa e rigidez, através do método da síntese modal de componentes, e incluí-las nas matrizes globais do sistema. Esta metodologia será o foco de um estudo mais detalhado apresentado no capítulo 3 e se caracteriza por ser mais precisa do que o procedimento utilizado por MEHNE [30], que também considera este efeito elástico em suas simulações, mas de maneira estática e com massa e rigidez concentradas.

#### **2.4.2. Eixo**

Os segmentos de eixo da máquina contribuem para a dinâmica do sistema com massa e rigidez. Apesar de sua massa ser bastante pequena, se comparada ao gerador ou mesmo ao rotor da turbina, ela não pode ser desprezada, haja visto os grandes diâmetros de eixo utilizados em turbinas hidráulicas. Por outro lado, talvez este seja o componente mais importante para a determinação da rigidez da linha de eixo.

Os elementos de eixo escolhidos, para o cálculo com elementos finitos, são vigas de Timoshenko, como utilizadas por BETTIG; HAN [8] em seus cálculos. Entretanto, adicionalmente, às matrizes de massa e rigidez usuais, deve também ser considerada a matriz de efeito giroscópico, sendo que todas estão dadas no Apêndice B. LOTH; SPRYSL; EBI [27] dão uma indicação da discretização necessária para o eixo no cálculo com elementos finitos, eles utilizam 41 elementos de viga para uma máquina com dois mancais guia e comprovam a precisão de seus cálculos com resultados experimentais obtidos na usina hidrelétrica de Bieudron, que abriga três turbinas Pelton, cada uma com geradores de 465 MVA.

#### **2.4.3. Acoplamento**

Apesar de se tratar de um elemento absolutamente não essencial à modelagem da linha de eixo, como explicado na seção 2.1.3, abaixo, seguem as formulações utilizadas por BETTIG; HAN [8] para o cálculo da rigidez lateral e da rigidez angular do acoplamento.



$$k_{c,x} = \frac{\pi E h_c}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (2.21)$$

$$k_{c,\alpha} = \frac{2\pi r_1^2 h_c G}{3 \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (2.22)$$

E	:	módulo de elasticidade do material	[Pa]
G	:	módulo de cisalhamento do material	[Pa]
$h_c$	:	espessura do acoplamento	[m]
$k_{c,\alpha}$	:	rigidez angular do acoplamento	[N/rad]
$k_{c,x}$	:	rigidez lateral do acoplamento	[N/m]

Como dito anteriormente, a inclusão deste elemento no modelo numérico, para o cálculo das velocidades angulares críticas e da resposta dinâmica do sistema, é totalmente opcional, por representar uma parcela ínfima da rigidez em turbinas hidráulicas que estejam devidamente alinhadas, como assegurado por NIKOLAJSSEN [34].

#### 2.4.4. Mancais hidrodinâmicos e seus suportes

Os mancais são os vínculos entre as partes rotativas da máquina e o restante da estrutura. Em turbinas hidráulicas, eles são sempre do tipo hidrodinâmico, como dito por SIMONE [42]. Eles suportam o carregamento ao qual a linha de eixo está sujeita, proporcionando as forças de reação que mantêm o eixo em equilíbrio estático e dinâmico.

Eles são compostos pelo filme de óleo e por sua carcaça metálica, além de seus suportes, que podem ser cruzetas, apoiadas sobre o estator ou sobre a estrutura civil, ou a própria tampa da turbina, como já descrito na seção 2.1.4. Todos estes componentes possuem rigidez e, no caso do filme de óleo, ele também apresenta amortecimento. SCHEIDL [39] atribui à estrutura civil uma participação da ordem de 5% no valor das velocidades angulares críticas, porém, ele é o único autor a

considerar tal influência e os demais a consideram como rígida, como é o caso de BETTIG; HAN [7].

O comportamento do filme de óleo é não-linear em função da velocidade angular de rotação e do carregamento, afetando sua rigidez e seu amortecimento, como lembrado por SIMON [41]. É por este motivo que SCHEIDL [39] conclui que os esforços aplicados sobre o rotor podem influenciar ligeiramente o valor das velocidades angulares críticas.

Mas LUND [28] afirma que, apesar do efeito não-linear ser evidente, já em 1987, o conceito de coeficientes dinâmicos linearizados já era amplamente utilizado em dinâmica de rotores e bem aceito, passada alguma resistência inicial e com base em resultados experimentais e inúmeras referências. No entanto, GROSSE [18] e SCHWIRZER [40] atentam para que os coeficientes dinâmicos devem ser cuidadosamente escolhidos para que eles causem a mínima imprecisão possível nos resultados. BARP [3] e SIMON [41] se asseguram da confiabilidade do método, testando o efeito da linearização, com ajuda da análise variacional da rigidez do filme de óleo. KRODKIEWSKI; SUN [24] também verificam, através da comparação com o cálculo não-linear, que não há perda significativa de precisão com o uso dos coeficientes dinâmicos. Contudo, para que esta técnica seja válida, é necessário que a linearização seja feita ao redor da posição de equilíbrio estático, como dito por BETTIG; HAN [7] e KRODKIEWSKI; SUN [24]. No caso de estruturas hiperestáticas, pode ser usado um modelo de elementos finitos para o cálculo estático, como feito por NIKOLAISEN [34].

O interesse de se encontrar a posição de equilíbrio estático é para que se conheça exatamente o carregamento sobre cada mancal, porque a força atuante sobre cada um deles é equilibrada pela força hidrodinâmica, devido à distribuição de pressão não uniforme no filme de óleo. Então, para a determinação dos coeficientes dinâmicos, é preciso partir da equação de Reynolds, dada por BETTIG; HAN [7], KRODKIEWSKI; SUN [24], LUND [28] e ZACHARIADIS [47]:

$$\frac{\partial}{R\partial\theta}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p}{R\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\right) = 6\omega\frac{\partial h}{\partial\theta} + 12\frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.23)$$

$h$	:	espessura do filme de óleo	[m]
$p$	:	pressão	[Pa]
$R$	:	raio do eixo	[m]
$t$	:	coordenada de tempo	[s]
$z$	:	coordenada axial	[m]
$\mu$	:	viscosidade dinâmica	[N·s/m <sup>2</sup> ]
$\theta$	:	coordenada angular	[rad]
$\omega$	:	velocidade angular de rotação	[rad/s]

Ao se impor as condições de contorno, é possível resolver a equação diferencial em regime permanente e escrever a expressão das forças hidrodinâmicas em função da excentricidade relativa e da posição angular de equilíbrio. ZACHARIADIS [47] deduz estas equações para o caso de mancais curtos e lisos, como os utilizados em turbinas hidráulicas.

$$F_x = -\frac{\mu RL^3}{c_b^2} \left\{ \left[ (\omega - 2\dot{\varphi}) \left( \frac{4\varepsilon^2 \cos \varphi + \pi \varepsilon a(\varepsilon) \sin \varphi}{4a(\varepsilon)^4} \right) \right] + \dots \right. \\ \left. \dots + \dot{\varepsilon} \left[ \frac{\pi b(\varepsilon) \cos \varphi + 4\varepsilon a(\varepsilon) \sin \varphi}{2a(\varepsilon)^5} \right] \right\} \quad (2.24)$$

$$F_y = \frac{\mu RL^3}{c_b^2} \left\{ \left[ (\omega - 2\dot{\varphi}) \left( \frac{\pi \varepsilon a(\varepsilon) \cos \varphi - 4\varepsilon^2 \sin \varphi}{4a(\varepsilon)^4} \right) \right] + \dots \right. \\ \left. \dots + \dot{\varepsilon} \left[ \frac{4\varepsilon a(\varepsilon) \cos \varphi - \pi b(\varepsilon) \sin \varphi}{2a(\varepsilon)^5} \right] \right\} \quad (2.25)$$

$$a(\varepsilon) = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \quad (2.26)$$

$$b(\varepsilon) = 1 + 2\varepsilon^2 \quad (2.27)$$

$c_b$	:	folga radial no mancal	[m]
$F_i$	:	força estática na direção $i$	[N]
$L$	:	comprimento do mancal	[m]
$\varepsilon$	:	excentricidade relativa à folga radial	[-]

$\varphi$  : posição angular de equilíbrio [rad]

Substituindo-se as forças nas direções x e y nas equações (2.24) e (2.25) pelas reações obtidas no cálculo do equilíbrio estático da linha de eixo, obtém-se um sistema de equações não lineares em  $\varepsilon$  e  $\varphi$ . Depois de resolvê-lo, basta utilizar os valores encontrados no cálculo dos coeficientes dinâmicos, como feito por ZACHARIADIS [47]:

$$k_{xx} = -k_p \frac{\partial F_{x_1}}{\partial y} \quad (2.28)$$

$$k_{xy} = -k_p \frac{\partial F_{x_1}}{\partial z} \quad (2.29)$$

$$k_{yx} = k_p \frac{\partial F_{y_1}}{\partial y} \quad (2.30)$$

$$k_{yy} = k_p \frac{\partial F_{y_1}}{\partial z} \quad (2.31)$$

$$c_{xx} = -c_p \left( \frac{2 \sin \varphi}{\varepsilon} F_{x_1} + \cos \varphi F_{x_2} \right) \quad (2.32)$$

$$c_{xy} = -c_p \left( -\frac{2 \cos \varphi}{\varepsilon} F_{x_1} + \sin \varphi F_{x_2} \right) \quad (2.33)$$

$$c_{yx} = c_p \left( \frac{2 \sin \varphi}{\varepsilon} F_{y_1} + \cos \varphi F_{y_2} \right) \quad (2.34)$$

$$c_{yy} = c_p \left( -\frac{2 \cos \varphi}{\varepsilon} F_{y_1} + \sin \varphi F_{y_2} \right) \quad (2.35)$$

$$k_p = \mu \omega R L \left( \frac{L}{c_b} \right)^2 \quad (2.36)$$

$$c_p = \mu R \left( \frac{L}{c_b} \right)^3 \quad (2.37)$$

$$F_{x_1} = \frac{4\varepsilon^2 \cos \varphi + \pi \varepsilon a(\varepsilon) \sin \varphi}{4a(\varepsilon)^4} \quad (2.38)$$

$$F_{x_2} = \frac{\pi b(\varepsilon) \cos \varphi + 4\varepsilon a(\varepsilon) \sin \varphi}{2a(\varepsilon)^5} \quad (2.39)$$

$$F_{y_1} = \frac{\pi \varepsilon a(\varepsilon) \cos \varphi - 4 \varepsilon^2 \sin \varphi}{4 a(\varepsilon)^4} \quad (2.40)$$

$$F_{y_2} = \frac{4 \varepsilon a(\varepsilon) \cos \varphi - \pi b(\varepsilon) \sin \varphi}{2 a(\varepsilon)^5} \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial F_{x_1}}{\partial y} = \frac{4 \varepsilon [a(\varepsilon) + d(\varepsilon) \cos^2 \varphi] + 3 \pi \varepsilon^2 a(\varepsilon) \sin \varphi \cos \varphi}{4 c_b a(\varepsilon)^6} \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial F_{x_1}}{\partial z} = \frac{4 \varepsilon d(\varepsilon) \sin \varphi \cos \varphi + \pi a(\varepsilon)^3 \cos^2 \varphi + \pi a(\varepsilon) b(\varepsilon) \sin^2 \varphi}{4 c_b a(\varepsilon)^6} \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial F_{y_1}}{\partial y} = \frac{-4 \varepsilon d(\varepsilon) \sin \varphi \cos \varphi + \pi a(\varepsilon)^3 \sin^2 \varphi + \pi a(\varepsilon) b(\varepsilon) \cos^2 \varphi}{4 c_b a(\varepsilon)^6} \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial F_{y_1}}{\partial z} = \frac{-4 \varepsilon [d(\varepsilon) \sin^2 \varphi + a(\varepsilon)^2] + 3 \pi \varepsilon^2 a(\varepsilon) \sin \varphi \cos \varphi}{4 c_b a(\varepsilon)^6} \quad (2.45)$$

$$d(\varepsilon) = 1 + 3 \varepsilon^2 \quad (2.46)$$

$k_{ii}$	:	rigidez direta em i	[N/m]
$k_{ij}$	:	rigidez cruzada de j em i	[N/m]
$c_{ii}$	:	amortecimento direto em i	[N·s/m]
$c_{ij}$	:	amortecimento cruzado de j em i	[N·s/m]

Outra alternativa talvez mais simples para se obter os coeficientes dinâmicos do filme de óleo é empregando-se números adimensionais. Dado o carregamento em cada mancal, é suficiente calcular o número de Sommerfeld, ler os valores de rigidez e amortecimento adimensionais em um gráfico e convertê-los em rigidez e amortecimento absolutos. Os números adimensionais e os gráficos podem ser encontrados, por exemplo, em RAO, J.S. [36].

$$S = \frac{\mu N}{F} \left( \frac{R}{c_b} \right)^2 \quad (2.47)$$

$$k^* = \frac{k c_b}{F} \quad (2.48)$$

$$c^* = \frac{c\omega c_b}{F} \quad (2.49)$$

c	:	amortecimento	[N·s/m]
c*	:	amortecimento adimensional	[-]
F	:	carregamento estático sobre o mancal	[N]
k	:	rigidez	[N/m]
k*	:	rigidez adimensional	[-]
N	:	velocidade angular de rotação	[rps]
S	:	número de Sommerfeld	[-]

SCHEIDL [39] dispensa toda esta formulação, para a avaliação dos coeficientes dinâmicos, e afirma que um valor de elasticidade, comumente usado em turbinas hidráulicas e aceito na Europa, é de 0,1 µm/kN para a rigidez do filme de óleo.

A pouca importância dada por ele a estes parâmetros deve-se ao fato que, como dito acima, além do filme de óleo, há a carcaça do mancal e seu suporte. O efeito causado por esta montagem, segundo SCHWIRZER [40], é que a rigidez de cada um deles é combinada em série e a rigidez equivalente em paralelo com o amortecimento.

$$k_{eq} = \frac{1}{\sum_{q=1}^n \frac{1}{k_q}} \quad (2.50)$$

k <sub>eq</sub>	:	rigidez equivalente	[N/m]
k <sub>q</sub>	:	rigidez do q-ésimo componente	[N/m]
n	:	número total de rigidezes em série	[-]

De acordo com SCHEIDL [39], como a carcaça do mancal e seu suporte são consideravelmente mais flexíveis do que o filme de óleo, a rigidez equivalente é regida basicamente por estes dois elementos. BENKÖ; HOLMÉN [6] confirmam este efeito, pois, em suas simulações numéricas, aumentando ou diminuindo a rigidez

do filme de óleo por um fator de dez vezes, as primeiras velocidades angulares críticas de uma máquina Kaplan de 50 MW e outra de 80 MW variam apenas 1%.

SCHEIDL [39] e SIMON [41] se interessam, então, pela rigidez da montagem como um todo e mencionam o que eles chamam de valores factíveis para a elasticidade total, do ponto de vista de projeto e limitações tecnológicas. Estes valores encontram-se na tabela 2.1.

**Tabela 2.1:** Valores factíveis para a elasticidade total, segundo SCHEIDL [39] e SIMON [41]

	Elasticidade Total [ $\mu\text{m/kN}$ ]
Mancal Guia da Turbina	0,6 ~ 0,95
Mancal Guia Inferior do Gerador	$1,15 \times 0,6 \sim 1,15 \times 0,95$
Mancal Guia Superior do Gerador	$1,70 \times 0,6 \sim 1,70 \times 0,95$

Contudo, mesmo que estes sejam valores esperados e recomendados para o cálculo, uma vez definido o desenho da carcaça do mancal e seus suportes, a rigidez exata deve ser calculada através de modelos analíticos ou, se não for possível, com ajuda de modelos de elementos finitos, como realizado por NIKOLAJSEN [34].

#### 2.4.5. Rotor da turbina

Por se encontrar sempre em balanço na linha de eixo da máquina, o rotor da turbina não contribui com rigidez para o movimento da estrutura, mas apenas com inércia. Logo, ele é tratado como se fosse um corpo rígido, como feito por BETTIG; HAN [7].

Atualmente, mesmo com geometrias complexas de pás, a massa e os momentos de inércia do rotor podem ser facilmente avaliados com a ajuda de programas CAD tridimensionais. Assim, elas podem ser determinadas com bastante precisão. Por outro lado, as propriedades de inércia do rotor também devem levar em conta o efeito do escoamento. Para GROSSE [18], as forças de interação entre as pás e o fluxo são função da aceleração e podem ser atribuídas ao termo correspondente à massa na equação do movimento.

THUß [44] se interessa exclusivamente por este fenômeno e o interpreta da mesma maneira que GROSSE [18]. Ele se refere a esta inércia adicional como massa hidrodinâmica e momento de inércia hidrodinâmico. Para se determinar estes parâmetros, THUß [44] propõe que eles sejam medidos em modelos reduzidos e transpostos para os protótipos. Ele afirma ter obtido uma boa correlação entre os dados calculados por este método e as medições realizadas diretamente em alguns protótipos.

No entanto, os resultados dos ensaios de modelo nem sempre estão disponíveis, além de haver outras dificuldades na aplicação deste procedimento, porque, como foi mostrado por THUß [44], a geometria dos componentes adjacentes também pode influir nos parâmetros hidrodinâmicos, além do que, de acordo com GROSSE [18], eles podem variar dependendo do ponto de operação da máquina. São estes os motivos que levam BENKÖ; HOLMÉN [6] a utilizarem uma aproximação comum em propulsores marítimos para o cálculo destas propriedades em rotores Kaplan. Ao contrário, LIESS et al. [26] fundamentam sua aproximação em observações em turbinas hidráulicas e no trabalho de THUß [44], para sugerir que a massa hidrodinâmica e o momento de inércia hidrodinâmico, presentes no rotor, equivalem a uma vez e meia a massa e o momento de inércia do próprio rotor. Esta é a aproximação a ser adotada nos cálculos.

$$m_H \approx 1,5 \cdot m_r \quad (2.51)$$

$$J_{P,H} \approx 1,5 \cdot J_{P,r} \quad (2.52)$$

$$J_{T,H} \approx 1,5 \cdot J_{T,r} \quad (2.53)$$

$m_h$	:	massa hidrodinâmica	[kg]
$m_r$	:	massa do rotor	[kg]
$J_{P,H}$	:	momento polar hidrodinâmico	[kg·m <sup>2</sup> ]
$J_{P,r}$	:	momento polar do rotor	[kg·m <sup>2</sup> ]
$J_{T,H}$	:	momento transversal hidrodinâmico	[kg·m <sup>2</sup> ]
$J_{T,r}$	:	momento transversal do rotor	[kg·m <sup>2</sup> ]



Mesmo que a precisão destas fórmulas possa ser melhorada, este não deve ser o ponto principal no cálculo da linha de eixo, pois, baseado em análises de sensibilidade e em dados de sistemas de monitoramento de vibrações, GROSSE [18] afirma que, para a primeira velocidade angular crítica, a massa do rotor possui uma influência secundária no movimento do eixo. Isto é comprovado por BENKÖ; HOLMÉN [6], quando, em suas simulações numéricas, ao desprezar o efeito da água, o valor da primeira velocidade angular crítica varia apenas entre 1,5 e 2,5%. Somente a segunda velocidade angular crítica, cujo modo natural correspondente apresenta maiores deflexões do rotor da turbina, sofre um pouco mais a influência deste efeito, podendo ser alterada de 8 a 12%.

#### 2.4.6. Labirintos

Os labirintos do rotor podem influenciar os modos de vibrar do sistema e até mesmo causar instabilidade, como dito por GLATTFELDER; GREIN; DÖRFLER [17]. De acordo com GUINZBURG et al. [19], este efeito é causado principalmente pelas forças tangenciais e tende a ser mais intenso em condições de pouca vazão ou com pequenas folgas radiais dos labirintos.

LISS et al. [26] concordam sobre a sua importância no cálculo e apresentam os resultados de algumas simulações com e sem o efeito dos labirintos, reproduzidos nas tabelas 2.2 e 2.3.

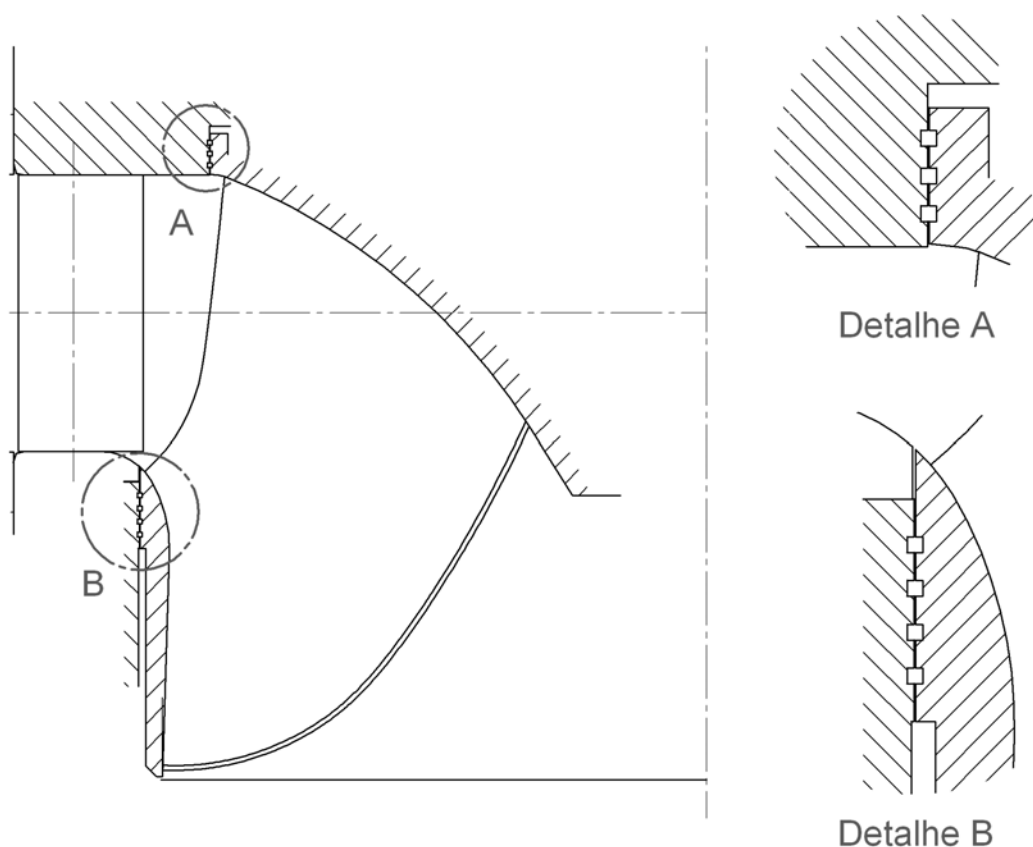
**Tabela 2.2:** Influência do labirinto sobre as velocidades angulares críticas, segundo LISS et al. [26], em um rotor de 7,3 m de diâmetro.

	$\omega_{crit_1}$ [rpm]	$\omega_{crit_2}$ [rpm]	$\omega_{crit_3}$ [rpm]
Com Labirintos	247,3	523,2	5.276,8
Sem Labirintos	247,4	417,3	5.338,1

**Tabela 2.3:** Influência do labirinto sobre as amplitudes de deslocamento no mancal guia da turbina, segundo LIESS et al. [26], em um rotor de 7,3 m de diâmetro e força de excitação harmônica de 250 kN.

	Amplitude Normal [mm]	Amplitude no Disparo [mm]
Com Labirintos	0,28	3,18
Sem Labirintos	0,36	5,51

LIESS et al. [26] os modelam como se fossem mancais adicionais. Entretanto, devido à sua geometria geralmente com sulcos, como mostrado na figura 2.15, para a determinação dos coeficientes dinâmicos, eles recorrem à equação de conservação do momento, resolvida tridimensionalmente pelo método de diferenças finitas e com o modelo  $k-\varepsilon$  de turbulência, pois, em pequenos rotores Francis lentos, o número de Reynolds na região dos labirintos é da ordem de  $Re = 4.500$ , sendo que, no caso dos maiores rotores já construídos, ele pode chegar até a  $Re = 100.000$ .



**Figura 2.15:** Exemplo de rotor Francis e seus labirintos.

GROSSE [18] também faz referência ao método de cálculo dos coeficientes dinâmicos através das equações de Navier-Stokes e usando este mesmo modelo de turbulência. No entanto, ele considera os labirintos do rotor muito similares a mancais de deslizamento, afirmando que eles possuem as mesmas características em relação à rigidez e ao amortecimento. Logo, as equações da seção 2.4.4 podem ser empregadas para os labirintos, desde que eles sejam lisos ou que se utilize um comprimento equivalente.

#### 2.4.7. Empuxo magnético

No gerador, devido à magnetização dos pólos e do estator, surgem forças de atração entre ambos que, idealmente, se distribuem uniformemente de maneira axissimétrica ao redor do rotor do gerador. Deste modo, todo o carregamento se balancearia e a resultante destas forças seria nula.

Entretanto, devido às tolerâncias de montagem e às deflexões da linha de eixo com a máquina em operação, o rotor do gerador passa a ser excêntrico em relação ao campo magnético e daí surge o empuxo. Esta força é radial e, de acordo com HARTKOPF; HOFFMANN; JÖCKEL [21], é aplicada na região onde a folga radial entre o rotor do gerador e o estator é menor.

Por se tratar de uma força magnética de atração, quanto menor a distância entre eles, mais intensa ela é, tendendo a aproximar os dois. Portanto, como diz SIMON [41], na faixa de operação da turbina, o empuxo magnético atua como se fosse uma mola linear adicional, mas com rigidez negativa, levando a uma redução no valor das velocidades angulares críticas e do limite de estabilidade.

HARTKOPF; HOFFMANN; JÖCKEL [21] e BETTIG; HAN [8] propõem a equação de BEHREND [5] para modelar a força magnética radial causada pela excentricidade do gerador:

$$F_M = \frac{\overline{AB}^2}{4\mu_0} \frac{e}{g_e} \quad (2.54)$$

$\overline{A}$	:	área média da folga radial	$[m^2]$
$\overline{B}$	:	campo magnético médio na folga radial	$[T]$

$e$	:	excentricidade do rotor do gerador	[m]
$F_M$	:	empuxo magnético radial	[N]
$g_e$	:	folga radial nominal no entreferro	[m]
$\mu_0$	:	permeabilidade do vácuo ( $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$ )	[N/A <sup>2</sup> ]

Percebe-se claramente, na equação acima, que a força magnética depende linearmente da posição, representada pela excentricidade do gerador. Logo, fica demonstrada a possibilidade de modelagem desta força como uma mola linear, sendo que o fato da rigidez ser negativa fica por conta de seu caráter atrativo.

$$k_M = -\frac{\overline{AB}^2}{4\mu_0} \frac{1}{g} \quad (2.55)$$

$k_M$	:	rigidez relativa ao empuxo magnético	[N/m]
-------	---	--------------------------------------	-------

Os resultados numéricos de BENKÖ; HOLMÉN [6] mostram que as velocidades angulares críticas são muito sensíveis em relação ao empuxo magnético. Pequenas variações no seu coeficiente de mola negativo causam grandes variações no valor das velocidades angulares críticas. Contudo, eles afirmam que esta não é uma fonte de imprecisão do cálculo, pois o empuxo depende apenas de propriedades eletromagnéticas que podem ser precisamente avaliadas, como mostra o Apêndice A.

SIMON [41] ressalta que, durante a operação normal da máquina, a força magnética é plenamente efetiva e assume o valor dado pela equação (2.54), porém, em caso de rejeição de carga ou de disparo, ela tende a desaparecer. Segundo BENKÖ; HOLMÉN [6], na rejeição de carga, para evitar sobre-tensões, o campo de excitação é reduzido, diminuindo o empuxo magnético, enquanto que no disparo ambos seriam nulos. SIMON [41] já é mais cauteloso e sugere que, para estas duas condições, o cálculo seja feito com e sem o efeito do empuxo.

#### 2.4.8. Forças de excitação estáticas e dinâmicas

As forças externas às quais a linha de eixo está submetida são originárias do desalinhamento da máquina, do desbalanceamento mecânico, magnético e das forças hidráulicas devido ao escoamento pelo rotor, como descrevem BETTIG; HAN [8] e

SCHWIRZER [40]. Entretanto, de acordo com BARP [3], SCHWIRZER [40] e SIMON [41], as mais importantes e que requerem maior atenção são as forças hidráulicas, pois a contribuição do desbalanceamento é muito pequena, se comparada a elas.

Apesar de BETTIG; HAN [7] justificarem a discrepância entre seus resultados numéricos e experimentais, em uma máquina Kaplan de 34 MW, pelo desalinhamento e não por falhas na modelagem das forças, BENKÖ; HOLMÉN [6] e NIKOLAISEN [34], assim como os outros, garantem que ele não causa nenhum efeito perceptível sobre os dados medidos.

Em relação ao desbalanceamento mecânico, apesar de sua pequena influência, ele resulta na força de excitação harmônica a seguir:

$$F_u = m\delta\omega^2 e^{i\omega t} \quad (2.56)$$

$F_u$	:	força de desbalanceamento	[N]
$m$	:	massa girante	[kg]
$t$	:	coordenada de tempo	[s]
$\omega$	:	velocidade angular de rotação	[rad/s]

O valor usado nos cálculos para o momento de desbalanceamento ( $m\delta$ ) é definido como o máximo permitido pela norma ISO 1940-1 [23] para turbinas hidráulicas e segue a classe G 6,3. O ponto de aplicação da força é o centro do rotor do gerador porque, como explicado por BARP [3], a massa do gerador é substancialmente maior do que a da turbina.

A natureza das forças hidráulicas depende da condição de operação da turbina, de acordo com GROSSE [18], SCHWIRZER [40] e SIMON [41]. Eles afirmam que durante a operação normal, elas tendem a ser harmônicas ou periódicas. As forças medidas no rotor da turbina-bomba de Vianden 10, citadas por BARP [3], nesta condição de operação, confirmam este fato, pois elas podem ser divididas em uma componente periódica de frequência igual à de rotação da máquina e uma outra sem frequência ou fase bem definidas, mas de amplitude desprezível. GLATTFELDER; GREIN; DÖRFLER [17] e NETSCH; GIACOMETTI [33]

afirmam o mesmo e acrescentam que, nesta condição, a transformada de Fourier no domínio da frequência das forças hidráulicas também contém outras frequências características, como a frequência de interação entre as pás do rotor e as palhetas, a frequência de passagem do rotor pelas palhetas, pela bequilha, e seus harmônicos.

Porém, em condições de operação transientes, como durante a partida, parada, rejeição de carga e disparo, GLATTFELDER; GREIN; DÖRFLER [17], GROSSE [18], SCHEIDL [39], SCHWIRZER [40] e SIMON [41] relatam que as forças hidráulicas passam a ser completamente estocásticas e as suas amplitudes se tornam muito maiores. BARP [3] e SCHWIRZER [40] sugerem que, caso o movimento transiente seja de interesse, o espectro de frequências das forças hidráulicas poderia ser medido no ensaio de modelo reduzido e transposto para o protótipo. Para BARP [3] esta seria a maneira de, talvez no futuro, operar as turbinas hidráulicas acima da primeira velocidade angular crítica, enquanto que SCHWIRZER [40] alega que seria possível dimensionar o eixo e os mancais com maior precisão. No entanto, como mencionado na seção 2.3.1, ainda prevalece a filosofia de manter as velocidades angulares de rotação abaixo da primeira crítica e, portanto, estas condições de operação não recebem muita atenção.

Por outro lado, a parcela estática das forças hidráulicas é de grande importância tanto para o dimensionamento do eixo, quanto para a determinação da posição de equilíbrio estático e das reações correspondentes, o que também influi nos coeficientes dinâmicos dos mancais, como comentado na seção 2.4.4. ADKINS; BRENNEN [1], CHAMIEH et al. [10] e GUINZBURG et al. [19] explicam que ela é causada pelo gradiente de pressão existente entre a entrada e o final da caixa espiral e que ela se torna maior quando o rotor trabalha fora do seu ponto ótimo. Ela pode ser obtida a partir de ensaios de modelo para cada desenho de rotor e transposta para o protótipo pelas leis de semelhança hidráulica, como encontradas em CHAMIEH et al. [10]:

$$F_R = F_R^* D b \rho g H \quad (2.57)$$

b	:	altura do distribuidor	[m]
D	:	diâmetro característico	[m]

$F_R$	:	força radial	[N]
$F_R^*$	:	força radial adimensional	[-]
$g$	:	aceleração local da gravidade	[m/s <sup>2</sup> ]
$H$	:	queda líquida	[m]
$\rho$	:	densidade do fluido	[m <sup>3</sup> /s]

Mas nem sempre os resultados dos ensaios de modelo estão disponíveis, por isto e também para melhorar a compreensão deste fenômeno, ADKINS; BRENNEN [1] desenvolvem um modelo teórico para o cálculo da força hidráulica estática radial, que mostram uma excelente correlação com seus resultados experimentais. A equação proposta por eles, partindo da equação de Bernoulli em regime transiente, encontra-se a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{F}_R}{\rho\pi b\omega R_1^3} = & \phi^2 \left[ \frac{W_i}{b} \sec^2 \gamma_f + \mathbf{k} \frac{R_1}{R_2} - 2 + 2i \tan \gamma_f \right] \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi^2(\theta') e^{i\theta'} d\theta' \\ & - i\phi \left[ \frac{W_i}{b} \sec^2 \gamma_f \ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right) + 1 \right] \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\theta') e^{i\theta'} d\theta' \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\phi = \frac{Q}{2\pi b\omega R_1^2} \quad (2.59)$$

$$\mathbf{k} = \cos \left[ \tan(\gamma_f) \ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right) \right] + i \sin \left[ \tan(\gamma_f) \ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right) \right] \quad (2.60)$$

$Q$	:	vazão	[m <sup>3</sup> /s]
$R_1$	:	raio na entrada do rotor	[m]
$R_2$	:	raio na saída do rotor	[m]
$W_i$	:	altura externa do rotor	[m]
$\phi$	:	coeficiente de vazão	[-]
$\gamma_f$	:	ângulo de incidência do fluxo	[rad]
$\theta'$	:	coordenada angular no referencial do rotor	[rad]
$\xi$	:	função de perturbação	[-]

A função de perturbação vem da solução da seguinte equação diferencial:

$$\phi \sec^2 \gamma_f \left[ 2 \ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right) \frac{d\xi}{d\theta'} + \phi \xi^2 \right] + D_p - 1 = 0 \quad (2.61)$$

$D_p$  : coeficiente de pressão na caixa espiral [-]

Ainda é preciso recorrer a mais expressões, oriundas das equações da continuidade e da conservação do momento, para que se possa resolver o sistema.

$$\frac{d(BV)}{d\theta} = \phi \xi \quad (2.62)$$

$$\frac{rB}{2} \frac{dD_p}{d\theta} = - \frac{d(rBV^2)}{d\theta} - r \ln rB \frac{d(V^2)}{d\theta} + \phi [1 - \phi \tan(\gamma_f) \xi] \xi \quad (2.63)$$

$$B(\theta) = \int_{R_1}^{R_3} \frac{w}{bR_1} dr \quad (2.64)$$

$$\ln rB(\theta) = \int_{R_1}^{R_3} \ln \left( \frac{r}{R_1} \right) \frac{w}{bR_1} dr \quad (2.65)$$

$$rB(\theta) = \int_{R_1}^{R_3} \frac{r}{R_1} \frac{w}{bR_1} dr \quad (2.66)$$

$r$  : coordenada radial no referencial inercial [m]  
 $V$  : velocidade do fluxo na caixa espiral [m/s]  
 $w$  : largura da caixa espiral [m]  
 $\theta$  : coordenada angular no referencial inercial [rad]

ADKINS; BRENNEN [1], CHAMIEH et al. [10] ainda asseguram que a distribuição de pressão não uniforme ao redor da caixa espiral também dá origem a forças que dependem linearmente da posição do rotor. Logo, que deveriam ser modeladas como forças elásticas. No entanto, CHAMIEH et al. [10] garantem que elas só são observadas em máquinas cuja rotação nominal é maior do que a primeira velocidade angular crítica, ao mesmo tempo que ADKINS; BRENNEN [1] verificam



experimentalmente que elas possuem amplitude desprezível para velocidades compatíveis com aquelas encontradas em turbinas hidráulicas.

### 3. METODOLOGIA

#### 3.1. Modelos numéricos

Devido à quantidade de elementos que contribuem para a dinâmica da linha de eixo, como visto na seção 2.1.3, entre eles: o próprio eixo, o gerador, os mancais e seus suportes, o rotor da turbina e seus labirintos, o número de graus de liberdade do sistema também é grande. Isto já torna proibitivo que se empreguem métodos analíticos para calcular a resposta do sistema, suas frequências e modos naturais, sendo preciso recorrer a métodos numéricos. Aqui, o esquema a ser utilizado é o método dos elementos finitos (MEF).

Além disto, para que na modelagem da linha de eixo se possa considerar o gerador como um corpo flexível, também é preciso que ele seja representado por um modelo numérico, no caso, de elementos finitos, por conta de suas propriedades de massa e rigidez distribuídas e de sua geometria complexa.

Levando-se em conta ainda que, como explicado na seção 2.2.2, para a determinação das velocidades angulares críticas do sistema, é necessário avaliar as frequências naturais da linha de eixo para diversos valores de velocidade angular de rotação, este se transforma em um cálculo repetitivo, que só é viável numericamente e que pode exigir recursos computacionais significativos. Para se ter uma idéia, deve-se ter uma visão dos tipos de elementos finitos escolhidos para a modelagem da linha de eixo.

O eixo é modelado aqui por elementos de viga de Timoshenko que incluem o efeito giroscópico, como descrito na seção 2.4.2. Já o rotor da turbina, que só contribui com inércia ao sistema, como dito na seção 2.4.5, pode ser representado por massa e momentos de inércia concentrados, localizados na extremidade do eixo, enquanto que os flanges de acoplamento, os mancais hidrodinâmicos, os labirintos e o empuxo magnético podem ser modelados como simples elementos de mola e amortecedores. Por outro lado, neste caso, o gerador requer que sejam utilizados elementos sólidos e elementos de casca em grandes modelos de elementos finitos, que podem contar com dezenas de milhar de elementos.

Os elementos de viga, massas e momentos de inércia concentrados, molas e amortecedores não demandam muitos recursos computacionais durante a simulação numérica. Contudo, os elementos sólidos e de casca, especialmente em grandes modelos, podem levar a um consumo de tempo e memória excessivo, como seria o caso se fosse necessário recalculá-los o gerador para cada valor de velocidade angular de rotação. Para contornar esta limitação, com o método da síntese modal de componentes (SMC), as frequências e modos naturais do gerador, isolado do resto da estrutura, são calculados apenas uma vez e descrevem o seu comportamento dinâmico simplificado no cálculo do sistema como um todo.

Pela complexidade das máquinas hidráulicas, é praticamente inviável comparar valores teóricos com os valores de velocidades angulares críticas, forças e deslocamentos dinâmicos, calculados numericamente. Logo, uma alternativa para se verificar a eficácia dos modelos e métodos de cálculo é utilizá-los em problemas simples com solução analítica conhecida e comparar os resultados. Uma vez que a concordância entre ambos seja adequada, eles podem ser utilizados com confiança para a simulação da linha de eixo.

A seguir é dada uma breve introdução à SMC, a métodos de extração de autovalores, autovetores e de solução da equação do movimento. Na sequência, são verificados os modelos numéricos para o efeito giroscópico, para a conexão entre elementos finitos com diferentes graus de liberdade, como no caso da interface entre elementos de viga e sólidos, para a SMC e para o processo de cálculo das velocidades angulares críticas.

### **3.2. Formulação da SMC**

Como descrito acima, a idéia de se utilizar a SMC para o cálculo do gerador é avaliar os seus modos de vibrar apenas uma vez, com uma malha de elementos finitos envolvendo elementos de casca e sólidos, cuja discretização seja grande o suficiente a ponto de reproduzir com precisão o seu comportamento dinâmico. Para evitar que o modelo numérico do gerador seja recalculado para cada valor de velocidade angular de rotação, a SMC permite que os resultados do cálculo modal previamente efetuado sejam aproveitados, com um número reduzido de coordenadas,

na simulação da linha de eixo completa, realizada repetidas vezes para a determinação da velocidade angular crítica. A seguir o método é exposto, com base na teoria desenvolvida por CRAIG; BAMPTON [11] e mais uma vez explicada por SCHABASSER [38].

De maneira geral, os objetivos da SMC são reduzir o número de graus de liberdade do sistema, a ser resolvido em uma análise dinâmica, e permitir que diferentes partes da estrutura sejam modificadas sem a necessidade de recalculá-la por inteiro, economizando tempo e recursos computacionais. Para isto, a estrutura é dividida em subestruturas, representadas por uma quantidade de graus de liberdade menor do que aquela resultante da sua discretização em elementos finitos, e, ao final, elas são todas combinadas para simular o sistema como um todo. Cada subestrutura é descrita por um conjunto de coordenadas composto pelos nós da fronteira, entre ela e as subestruturas adjacentes, e pelas coordenadas modais dos seus modos de vibrar, calculados considerando a fronteira como fixa.

O primeiro passo, para a formulação do método, é particionar o vetor de deslocamentos da subestrutura segundo os nós da fronteira e os nós internos e, em seguida, estes últimos são expressos em função dos chamados “modos restritos” e “modos normais”.

$$\{\mathbf{u}\}_{(r)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \text{---} \\ \mathbf{u}_I \end{Bmatrix}_{(r)} \quad (3.1)$$

$\{\mathbf{u}\}_{(r)}$  :      vetor de deslocamentos da subestrutura “r”      [m]  
 $\mathbf{u}_B$  :      vetor de deslocamentos dos nós da fronteira      [m]  
 $\mathbf{u}_I$  :      vetor de deslocamentos dos nós internos      [m]

Os deslocamentos da subestrutura causados pelo efeito elástico do movimento dos nós da fronteira são os chamados modos restritos. Esta parcela do movimento é obtida impondo o equilíbrio estático de forças na subestrutura.

$$\left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{K}_{BB} & \mathbf{K}_{BI} \\ \hline \mathbf{K}_{IB} & \mathbf{K}_{II} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_B \\ \mathbf{F}_I \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \quad (3.2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [\mathbf{K}_{BB}]\{\mathbf{u}_B\} + [\mathbf{K}_{BI}]\{\mathbf{u}_I\} = \{\mathbf{F}_B\}_{F_I=0} \\ [\mathbf{K}_{IB}]\{\mathbf{u}_B\} + [\mathbf{K}_{II}]\{\mathbf{u}_I\} = \{\mathbf{F}_I\} \end{cases} \Rightarrow \quad (3.3)$$

$$\xRightarrow{F_I=0} [\mathbf{K}_{IB}]\{\mathbf{u}_B\} + [\mathbf{K}_{II}]\{\mathbf{u}_I\} = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \quad (3.4)$$

$$\Leftrightarrow \{\mathbf{u}_I\} = -[\mathbf{K}_{II}]^{-1}[\mathbf{K}_{IB}]\{\mathbf{u}_B\} \Leftrightarrow \quad (3.5)$$

$$\Leftrightarrow \{\mathbf{u}_I\} = [\Phi_C]\{\mathbf{u}_B\} \quad (3.6)$$

$$\therefore [\Phi_C] \equiv -[\mathbf{K}_{II}]^{-1}[\mathbf{K}_{IB}] \quad (3.7)$$

$[\mathbf{F}_i]$	:	vetor de carregamento sobre os nós i	$[\mathbf{N}]$
$[\mathbf{K}_{ii}]$	:	matriz de rigidez direta em i	$[\mathbf{m}]$
$[\mathbf{K}_{ij}]$	:	matriz de rigidez cruzada de j em i	$[\mathbf{m}]$
$[\Phi_C]$	:	matriz dos modos restritos	$[-]$

A outra parcela dos deslocamentos da subestrutura é dada pelos modos normais, que, como já dito acima, são os modos de vibrar da subestrutura calculados impondo como condições de contorno que os nós da fronteira estejam fixos.

$$\{\mathbf{u}_I\} \cong [\Phi_N]\{\mathbf{q}_N\} \quad (3.8)$$

$\{\mathbf{q}_N\}$	:	coordenadas modais dos modos naturais	$[\mathbf{m}]$
$[\Phi_N]$	:	matriz dos modos naturais	$[-]$

A aproximação da equação (3.8) vem do fato que o número de modos normais utilizados para exprimir os deslocamentos é menor do que o número de graus de liberdade da subestrutura, que é o mesmo que o número total de modos naturais. Porém, normalmente, apenas alguns poucos modos naturais são suficientes para caracterizar o comportamento dinâmico das estruturas. É desta redução da

quantidade de coordenadas utilizadas para descrever as subestruturas que vem a economia de tempo e recursos computacionais da SMC.

Combinando as equações (3.6) e (3.8) para se obter os deslocamentos totais dos nós da subestrutura vem:

$$\{u_I\} = [\Phi_C]\{q_B\} + [\Phi_N]\{q_N\}, \quad q_B = u_B \quad (3.9)$$

$\{q_B\}$  : coordenadas generalizadas das fronteiras [m]

Assim, é possível escrever a transformada de CRAIG; BAMPTON [11], que são os autores do método:

$$\begin{Bmatrix} u_B \\ \vdots \\ u_I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & | & 0 \\ \hline \Phi_C & | & \Phi_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_B \\ \vdots \\ q_N \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \quad (3.10)$$

$$\Leftrightarrow \{u\} = [T]\{q\} \quad (3.11)$$

$$\therefore [T] \equiv \begin{bmatrix} I & | & 0 \\ \hline \Phi_C & | & \Phi_N \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$[T]$  : matriz de transformação da subestrutura [-]

A transformada é utilizada para se conseguir as matrizes de massa e rigidez da subestrutura para a SMC projetando-se a equação matricial do movimento no espaço transformado, de modo a efetivamente reduzir o número de graus de liberdade do sistema a ser resolvido.

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\} \Leftrightarrow \quad (3.13)$$

$$\Leftrightarrow [M][T]\{\ddot{q}\} + [K][T]\{q\} = \{F\} \Rightarrow \quad (3.14)$$

$$\Rightarrow [T]^T [M][T]\{\ddot{q}\} + [T]^T [K][T]\{q\} = [T]^T \{F\} \Leftrightarrow \quad (3.15)$$

$$\Leftrightarrow [\hat{M}]\{\ddot{q}\} + [\hat{K}]\{q\} = \{\hat{F}\} \quad (3.16)$$

$$\therefore \begin{cases} [\hat{M}] = [T]^T [M] [T] \\ [\hat{K}] = [T]^T [K] [T] \\ [\hat{F}] = [T]^T [F] \end{cases} \quad (3.17)$$

$[\hat{F}]$	:	vetor de carregamento para a SMC	[N]
$[\hat{K}]$	:	matriz de rigidez para a SMC	[N/m]
$[\hat{M}]$	:	matriz de massa para a SMC	[kg]

Substituindo as equações (3.12) e (3.7) na equação (3.17), escrevem-se as expressões das matrizes de massa e rigidez para a SMC de maneira explícita:

$$[\hat{M}] = \begin{bmatrix} [M_{BB}] + [\Phi_C]^T [M_{II}] [\Phi_C] & | & [\Phi_C]^T [M_{II}] [\Phi_N] \\ \hline [\Phi_N]^T [M_{II}] [\Phi_C] & | & [\Phi_N]^T [M_{II}] [\Phi_N] \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$[\hat{K}] = \begin{bmatrix} [K_{BB}] + [K_{BI}] [\Phi_C] & | & 0 \\ \hline 0 & | & [\Phi_N]^T [K_{II}] [\Phi_N] \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Como visto nas equações acima, a SMC foi originalmente desenvolvida sem considerar o amortecimento da estrutura, nem o efeito giroscópico. Entretanto, a mesma transformação e projeção usadas para as matrizes de massa e rigidez podem ser utilizadas para as matrizes de amortecimento e de efeito giroscópico, como feito por ELSSEL; VOSS [13]. A única diferença é que, nestas circunstâncias, é preciso resolver as equações do movimento no espaço de estados.

$$[\hat{M}]\{\ddot{q}\} + ([\hat{C}] + [\hat{G}])\{\dot{q}\} + [\hat{K}]\{q\} = \{\hat{F}\} \quad (3.20)$$

$$[\hat{C}] = [T]^T [C] [T] \Rightarrow \quad (3.21)$$

$$\Rightarrow [\hat{C}] = \left[ \begin{array}{c|c} [C_{BB}] + [\Phi_C]^T [C_{II}] [\Phi_C] & [\Phi_C]^T [C_{II}] [\Phi_N] \\ \hline [\Phi_N]^T [C_{II}] [\Phi_C] & [\Phi_N]^T [C_{II}] [\Phi_N] \end{array} \right] \quad (3.22)$$

$$[\hat{G}] = [T]^T [G] [T] \Rightarrow \quad (3.23)$$

$$\Rightarrow [\hat{G}] = \left[ \begin{array}{c|c} [G_{BB}] + [\Phi_C]^T [G_{II}] [\Phi_C] & [\Phi_C]^T [G_{II}] [\Phi_N] \\ \hline [\Phi_N]^T [G_{II}] [\Phi_C] & [\Phi_N]^T [G_{II}] [\Phi_N] \end{array} \right] \quad (3.24)$$

Em relação à utilidade desta teoria numérica, LI; YAM [25], FISHER; WITTEVEEN; SCHABASSER [14] e RAO, M.A. et al. [37] demonstram a aplicabilidade do método em uma grande variedade de problemas, enquanto que outros autores se concentram na estimativa do erro, por se tratar, em essência, de um método aproximado. CASTANIER; TAN; PIERRE [9] verificam, no seu caso, utilizando elementos sólidos, que a discrepância entre as frequências naturais calculadas com o modelo de elementos finitos completo e com a SMC não é maior do que 0,9% para os 15 primeiros modos de vibrar. Eles afirmam também que apenas 10 modos naturais de cada subestrutura foram necessários para atingir estes resultados. TOURNOUR et al. [45], em uma grande quantidade de problemas com vigas e chapas, obtiveram 2,9% como a maior diferença entre o MEF tradicional e a SMC.

No entanto, algumas condições devem ser atendidas para que os erros sejam mantidos pequenos. TOURNOUR et al. [45] mencionam, dentre outras, que as hipóteses assumidas ao se aplicar a SMC são que as fronteiras em si são rígidas, não possuem massa nem amortecimento e que elas são tão somente a interface entre duas subestruturas. A primeira e a segunda hipóteses asseguram a continuidade de deslocamentos e forças na fronteira, respectivamente, enquanto que a terceira permite a simplificação da continuidade de forças na fronteira. No modelo físico do gerador, as fronteiras da subestrutura são os flanges de acoplamento entre ele e o eixo, que no modelo de elementos finitos são os nós comuns ao eixo e ao gerador. Logo, pode-se dizer que os requisitos para a aplicação da SMC são verificados para o caso do gerador.



Mesmo assim, da mesma maneira que para os outros modelos numéricos propostos, a precisão da SMC deve ser comprovada para o problema específico de dinâmica de rotores. Portanto, na seção 3.4, além da verificação de outros métodos, é efetuada a prova da SMC, comparando seus resultados com os valores teóricos esperados para um rotor de geometria simples.

Porém, antes disto, é feita uma rápida apresentação dos esquemas numéricos empregados aqui para a extração dos autovalores e autovetores e para a resolução da equação do movimento: o método QR e o método de Newmark. São estes os métodos usados para os cálculos da solução dos modelos numéricos a serem verificados, das velocidades angulares críticas e dos fatores dinâmicos de amplificação de deslocamento.

### 3.3. Esquemas numéricos para a solução de sistemas

#### 3.3.1. Método QR

No cálculo das velocidades angulares críticas, o problema de extração dos autovalores e autovetores está sempre presente, pois, como já definido anteriormente, a velocidade angular crítica é a frequência de excitação na qual há ressonância entre a frequência natural de um dado modo e as forças de desbalanceamento do eixo. Por este motivo, para a elaboração do diagrama de Campbell e para a busca das velocidades angulares críticas, é preciso determinar as frequências naturais do sistema para diversos valores de velocidade angular de rotação.

A equação, cujos autovalores e autovetores devem ser avaliados, é a equação diferencial matricial homogênea associada à equação (2.2):

$$[M]\{\ddot{x}\} + [D]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (3.25)$$

$$[D] = [C] + [G] \quad (3.26)$$

$[C]$	:	matriz de amortecimento	$[Ns/m]$
$[D]$	:	matriz de “amortecimento” combinada	$[Ns/m]$

$[G]$	:	matriz de efeito giroscópico	$[Ns/m]$
$[K]$	:	matriz de rigidez	$[N/m]$
$[M]$	:	matriz de massa	$[kg]$
$\{x\}$	:	vetor de deslocamentos	$[m]$

Pelo fato da matriz de efeito giroscópico ser antissimétrica, não é possível representá-la como uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez. Além do que seus termos dependem da geometria dos elementos e da velocidade angular de rotação. Desta mesma forma, a matriz de amortecimento é composta por termos oriundos dos amortecimentos no filme de óleo dos mancais e dos labirintos do rotor, que têm influência em locais pontuais da estrutura e que são função da velocidade angular de rotação. Logo, ela também não pode ser expressa como o amortecimento de Rayleigh. Assim, para resolver o sistema no espaço de estados, utiliza-se o método QR, disponível no programa ANSYS [2] e introduzido no Apêndice D, que por sua simplicidade e agilidade, é o algoritmo escolhido aqui para o cálculo das frequências naturais, na verificação dos modelos numéricos, e no cálculo das velocidades angulares críticas de máquinas hidráulicas.

### 3.3.2. Método de Newmark

Além do cálculo das frequências naturais da linha de eixo, para a determinação das velocidades angulares críticas, é preciso avaliar a resposta dinâmica do sistema para determinar os fatores dinâmicos de amplificação de deslocamento. Tais fatores são estimados para um carregamento harmônico conhecido e de frequência definida, que representa as forças de excitação externas ao sistema, que são as forças de desbalanceamento mecânico, aplicadas ao gerador, e de desbalanceamento hidráulico, aplicadas ao rotor da turbina.

A forma mais simples e eficiente seria com o método da superposição modal. Mas, partindo-se da equação (2.2), que descreve o movimento do sistema forçado, e empregando-se a transformação modal da equação (3.27), normalizada em relação à matriz de massa, obtêm-se:

$$\{x\} = [\Phi]\{q\} \quad (3.27)$$

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] \{\ddot{q}\} + [\Phi]^T [D] [\Phi] \{\dot{q}\} + [\Phi]^T [K] [\Phi] \{q\} = [\Phi]^T \{F\} \quad (3.28)$$

$$[I] \{\ddot{q}\} + [\Phi]^T [D] [\Phi] \{\dot{q}\} + [\Lambda^2] \{q\} = [\Phi]^T \{F\} \quad (3.29)$$

$\{F\}$	:	vetor de forças externas	[N]
$\{q\}$	:	vetor de coordenadas modais	[m]
$[\Phi]$	:	matriz modal	[-]

Na equação (3.29) aparece a limitação deste método, seja para o cálculo de transientes quaisquer, seja para a determinação da resposta harmônica do sistema, porque devido à natureza das matrizes de efeito giroscópico e de amortecimento do sistema, já discutida na seção anterior, as equações diferenciais do sistema não podem ser desacopladas pela transformação modal. Assim, o termo dependente do vetor de velocidades resta acoplado e a resposta dinâmica do sistema não pode ser encontrada pelo método da superposição modal.

Então, para se efetuar este cálculo, propõe-se a integração direta no tempo, empregando o método de Newmark, implementado no programa ANSYS [2] e descrito no Apêndice E, que com ajuda do método de diferenças finitas, avalia os deslocamentos forçados da estrutura ao longo do tempo.

Ao se aplicar um carregamento harmônico à linha de eixo, a sua resposta também é harmônica, então basta tomar a amplitude dos deslocamentos dinâmicos na série temporal calculada e dividi-la pelo deslocamento estático, para que se encontre o fator dinâmico de amplificação de deslocamento.

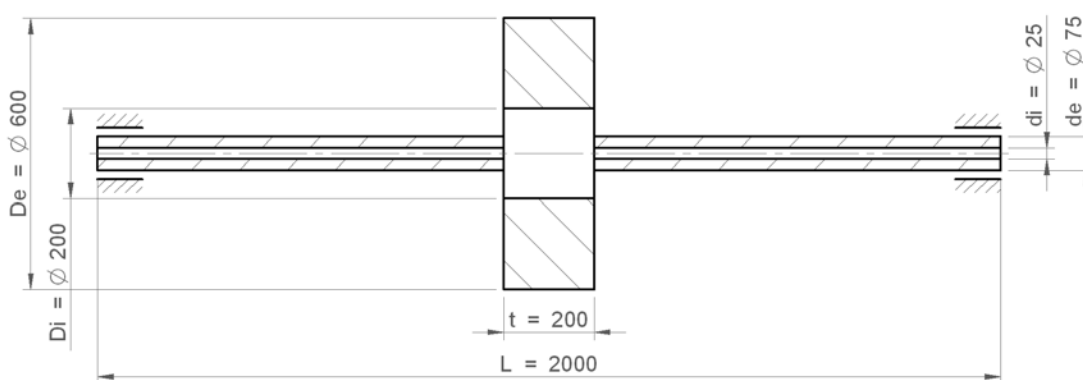
Assim sendo, como os dois esquemas numéricos a serem empregados para a solução do autoproblema e do movimento harmônico do sistema acabaram de ser introduzidos aqui e com a formulação da SMC já tendo sido apresentada na seção 3.2, pode-se ir à verificação dos modelos de cálculo que farão parte da modelagem do rotor do gerador e da linha de eixo de turbinas hidráulicas.

### 3.4. Verificação dos modelos numéricos

#### 3.4.1. Efeito giroscópico

Como mencionado no início do capítulo, ao se comparar os resultados de cada modelo numérico individualmente com valores teóricos, é possível provar que ele é adequado para a simulação do fenômeno físico em questão. Com isto, se pode criar um modelo numérico sofisticado, que empregue diferentes técnicas de modelagem, cuja eficácia foi comprovada separadamente, para se calcular de maneira confiável um sistema complexo, para o qual a comparação com um modelo analítico é bastante difícil.

O primeiro elemento a ser verificado é a viga de Timoshenko que inclui a matriz de efeito giroscópico. Para isto, as frequências naturais do rotor simétrico, bi-apoiado, com inércia concentrada, rigidez e amortecimento isotrópicos e não amortecido, já estudado na seção 2.2.1, são calculadas analiticamente e em seguida comparadas com os resultados numéricos obtidos no programa ANSYS [2]. A geometria e as dimensões do rotor em questão podem ser vistas na figura 3.1.



**Figura 3.1:** Dimensões do rotor simétrico, bi-apoiado, com inércia concentrada, rigidez e amortecimento isotrópicos e não amortecido.

A partir das equações diferenciais (2.10) e (2.11), a frequência natural dupla, correspondente aos movimentos de translação pura, é dada por:

$$\omega_{n_0} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.30)$$

k	:	rigidez do eixo	[N/m]
m	:	massa do rotor	[kg]
$\omega_{n_i}$	:	i-ésima frequência natural	[rad/s]

Recordando as frequências naturais relativas aos movimentos angulares de precessão reversa e de precessão direta, já apresentadas na seção 2.2.1, têm-se:

$$\omega_{n_1} = \frac{J_P}{2J_T} \omega \left[ 1 - \sqrt{1 + \frac{k_f}{J_T} \left( \frac{2J_T}{J_P} \frac{1}{\omega} \right)^2} \right] \quad (2.17)$$

$$\omega_{n_2} = \frac{J_P}{2J_T} \omega \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{k_f}{J_T} \left( \frac{2J_T}{J_P} \frac{1}{\omega} \right)^2} \right] \quad (2.18)$$

$J_P$	:	momento polar de inércia de massa	[kg·m <sup>2</sup> ]
$J_T$	:	momento transversal de inércia de massa	[kg·m <sup>2</sup> ]
$k_f$	:	rigidez angular	[N/rad]
$\omega$	:	velocidade angular de rotação do eixo	[rad/s]

A massa e os momentos de inércia polar e transversal podem ser facilmente calculados a partir do diâmetro externo,  $D_e$ , diâmetro interno,  $D_i$ , e espessura,  $t$ , do disco. Porém, a rigidez translacional e a rigidez angular no centro do eixo, onde está montado o disco, requerem um cálculo mais elaborado. Pelo teorema de Castigliano, como demonstrado no Apêndice C, determina-se a deflexão no centro do disco, causada pela aplicação de uma força radial, e obtém-se o coeficiente de rigidez.

$$k = \frac{3\pi E}{\frac{4L^3 - 12L^2t + 12Lt^2 - 4t^3}{d_e^4 - d_i^4} + \frac{12L^2t - 12Lt^2 + 4t^3}{D_e^4 - D_i^4}} \quad (3.31)$$

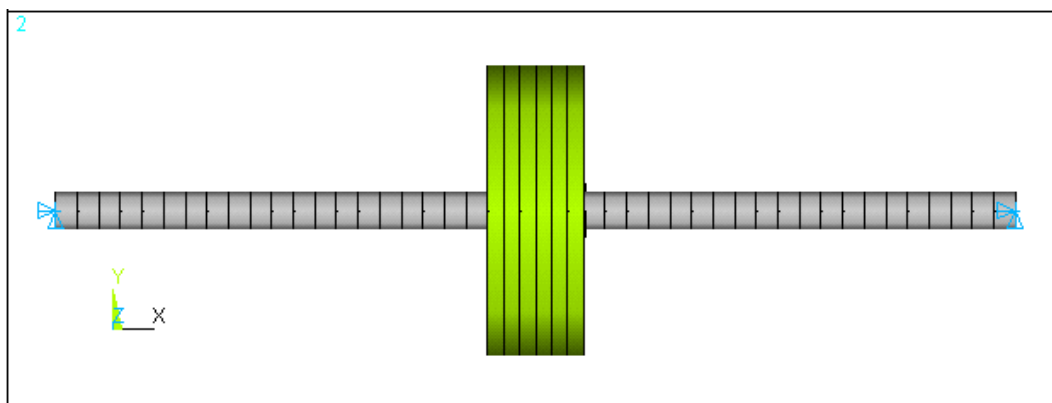
$D_e$	:	diâmetro externo do disco	[m]
$d_e$	:	diâmetro externo do eixo	[m]
$D_i$	:	diâmetro interno do disco	[m]
$d_i$	:	diâmetro interno do eixo	[m]
$E$	:	módulo de elasticidade	[Pa]
$L$	:	comprimento do eixo	[m]
$t$	:	espessura do disco	[m]

Analogamente para a deflexão angular, causada pela aplicação de um momento fletor, tira-se o coeficiente de rigidez angular.

$$k_f = \frac{3\pi EL^2}{\frac{16L^3 - 48L^2t + 48Lt^2 - 16t^3}{d_e^4 - d_i^4} + \frac{48L^2t - 48Lt^2 + 16t^3}{D_e^4 - D_i^4}} \quad (3.32)$$

Assim, tendo todos os valores necessários, é possível calcular as frequências naturais a partir das equações (3.30), (2.17) e (2.18).

Para o cálculo numérico é utilizado um modelo com, no total, 46 elementos de viga. Para que as hipóteses do cálculo analítico, em que somente o rotor possui inércia e somente ele causa o efeito giroscópico, sejam reproduzidas no modelo de elemento finitos, impõe-se que os elementos em cinza, na figura 3.2, possuam densidade nula. Por este mesmo motivo, são avaliadas apenas as matrizes de efeito giroscópico dos elementos em verde, que correspondem ao rotor. Nos apoios simples, restringem-se os graus de liberdade de translação dos respectivos nós, como visto em azul-claro. Os graus de liberdade de rotação são mantidos livres.

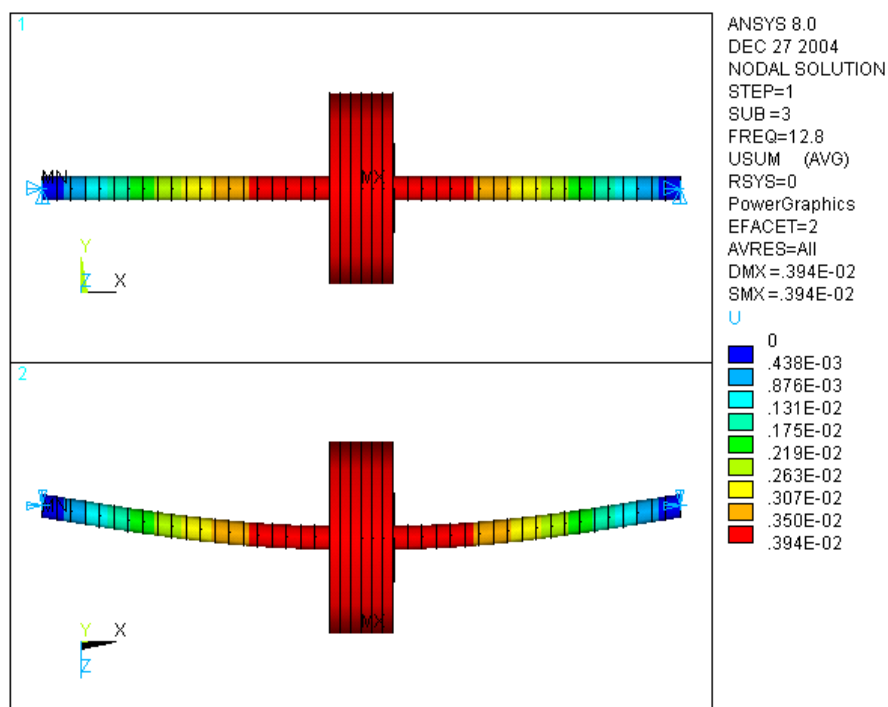


**Figura 3.2:** Modelo do rotor, em elementos finitos, apenas com elementos de viga.

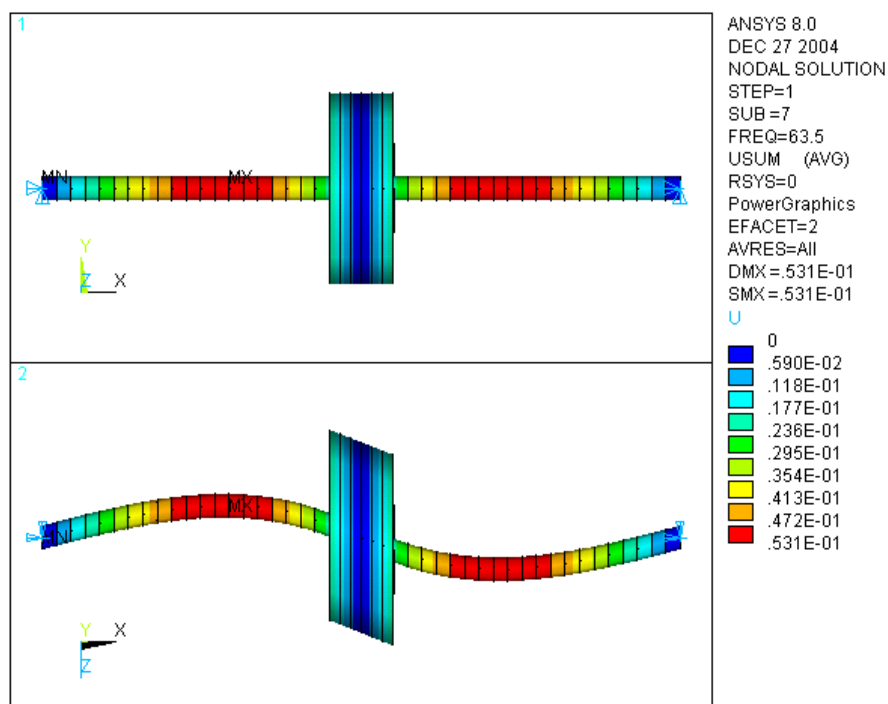
Adotando-se  $E = 205 \text{ MPa}$  e  $\rho = 7.850 \text{ kg/m}^3$ , como módulo de elasticidade e densidade do aço, calculando-se as frequências naturais analiticamente e resolvendo-se no espaço de estados o modelo de elementos finitos, descrito acima, pelo método QR, obtêm-se os resultados da tabela 3.1. Os modos de vibrar calculados numericamente estão nas figuras 3.3, 3.4 e 3.5. Apesar de nestas figuras o eixo parecer cisalhado, esta é apenas uma limitação na representação gráfica do programa ANSYS [2], porque, de fato, é considerada a rotação de cada seção do eixo, como fica claro na formulação do elemento, exposta no Apêndice B.

**Tabela 3.1:** Frequências naturais calculadas analiticamente e numericamente, pelo MEF apenas com elementos de viga ( $m = 394,6 \text{ kg}$ ,  $J_p = 19,73 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ,  $J_T = 11,18 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ,  $k = 2,588 \text{ kN/mm}$ ,  $k_f = 2.588 \text{ kN}\cdot\text{m/rad}$ ,  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ).

	$f_{n_0}$ [Hz]	$f_{n_1}$ [Hz]	$f_{n_2}$ [Hz]
Modelo Analítico	12,89	63,81	91,89
Modelo Numérico	12,84	63,53	91,61
Desvio	-0,39%	-0,44%	-0,30%

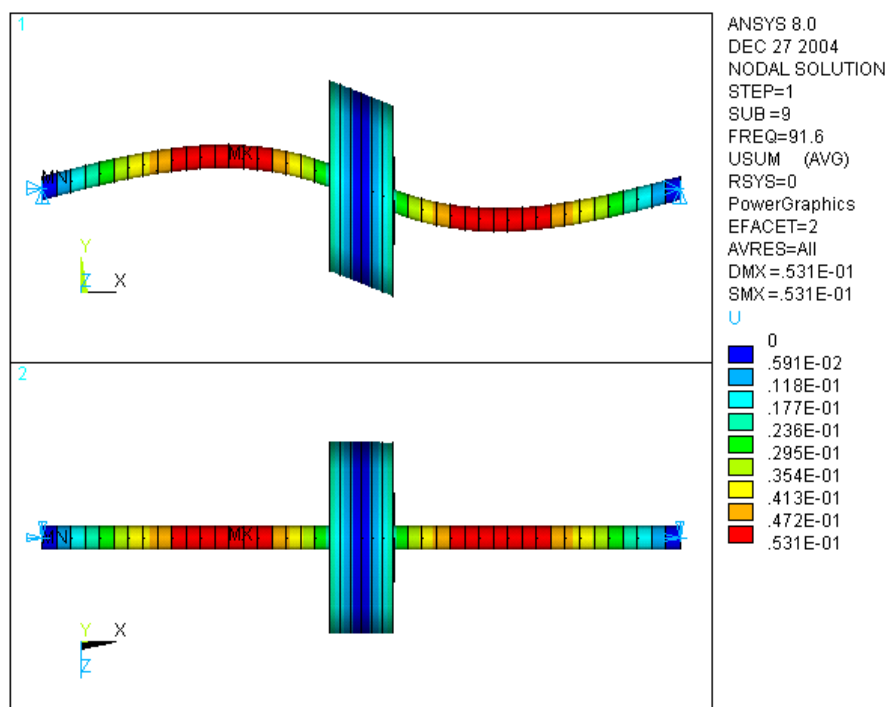


**Figura 3.3:** Primeiro modo de vibrar do modelo em elementos finitos, apenas com elementos de viga.



**Figura 3.4:** Segundo modo de vibrar do modelo em elementos finitos, apenas com elementos de viga.





**Figura 3.5:** Terceiro modo de vibrar do modelo em elementos finitos, apenas com elementos de viga.

A partir dos modos de vibrar, mostrados nas figuras 3.3, 3.4 e 3.5, percebe-se que as frequências naturais calculadas numericamente se referem realmente aos mesmos movimentos, cujas frequências naturais foram calculadas analiticamente, assim, é correto compará-las. Ambos resultados se mostraram extremamente próximos, sendo que o desvio máximo encontrado entre as frequências naturais foi de -0,44%. Portanto, conclui-se que o modelo numérico de viga com efeito giroscópico é capaz de reproduzir o comportamento teórico do eixo com precisão.

Observe-se que normalmente o efeito giroscópico causa o acoplamento entre as equações do movimento em diferentes direções, fazendo com que os modos de vibrar não sejam planos. Entretanto, por conta da massa concentrada e da simetria do eixo, neste caso em particular, os modos são planos.

### 3.4.2. Conexão entre elementos de viga e sólidos

Muitas vezes em componentes de geometria complicada, como é o caso do gerador, para que eles possam ser modelados pelo MEF, é preciso empregar elementos do tipo casca ou sólidos, em vez de elementos de viga. Normalmente os

elementos de casca, assim como os de viga, possuem seis graus de liberdade por nó, sendo três de translação e três de rotação, enquanto que os elementos sólidos apresentam três graus de liberdade translacionais por nó. Em modelos que empregam mais de um tipo de elemento, deve-se verificar se, na interface entre eles, os graus de liberdade são compatíveis.

Na simulação da linha de eixo de turbinas hidráulicas, esta situação pode ocorrer na união entre o eixo e o gerador. Quando o gerador pode ser modelado por elementos do tipo casca, não há diferença entre o tipo e o número de graus de liberdade na conexão entre eles e os elementos de viga. Porém, quando é preciso usar elementos sólidos na simulação do gerador, haveria uma inconsistência na ligação com os elementos do eixo. Então, neste caso, para que os esforços solicitantes, incluindo os momentos fletores, possam ser transferidos adequadamente por toda a estrutura, é necessário que sejam usadas equações que representem os vínculos cinemáticos do sistema nestas interfaces.

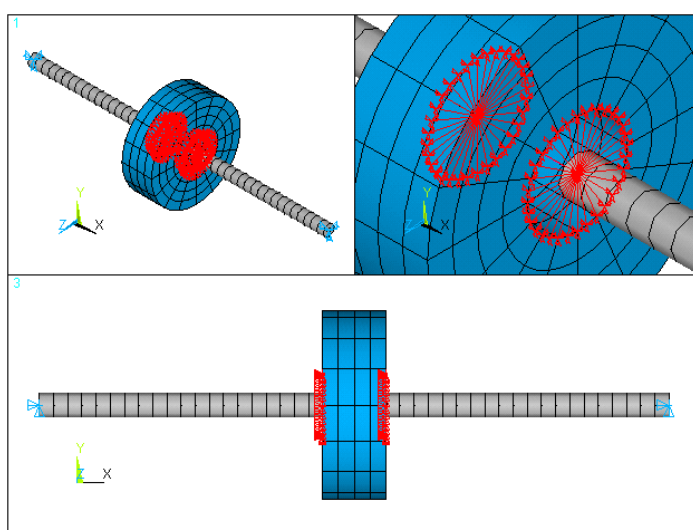
Nas faces de união entre o cubo do gerador e o eixo não há movimento relativo, logo elas podem ser pensadas como vínculos rígidos e a seguinte relação cinemática é imposta:

$$\|(\vec{r}_{G_i} + \delta\vec{r}_{G_i}) - (\vec{r}_S + \delta\vec{r}_S)\| = \|\vec{r}_{G_i} - \vec{r}_S\|, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (3.33)$$

$\vec{r}_{G_i}$	:	vetor de posição do nó “i” do gerador	[m]
$\delta\vec{r}_{G_i}$	:	deslocamento do nó “i” do gerador	[m]
$\vec{r}_S$	:	vetor de posição do nó do eixo na interface	[m]
$\delta\vec{r}_S$	:	deslocamento do nó do eixo na interface	[m]
n	:	número de nós do gerador na interface	[-]

As relações decorrentes da condição expressa na equação (3.33) são introduzidas no exemplo numérico da seção anterior e, ao mesmo tempo, o rotor passa a ser modelado por 256 elementos sólidos. Com isto, pretende-se verificar a funcionalidade da metodologia proposta. Na figura 3.6, os vínculos rígidos são simbolizados por linhas vermelhas entre os nós envolvidos. A matriz de efeito

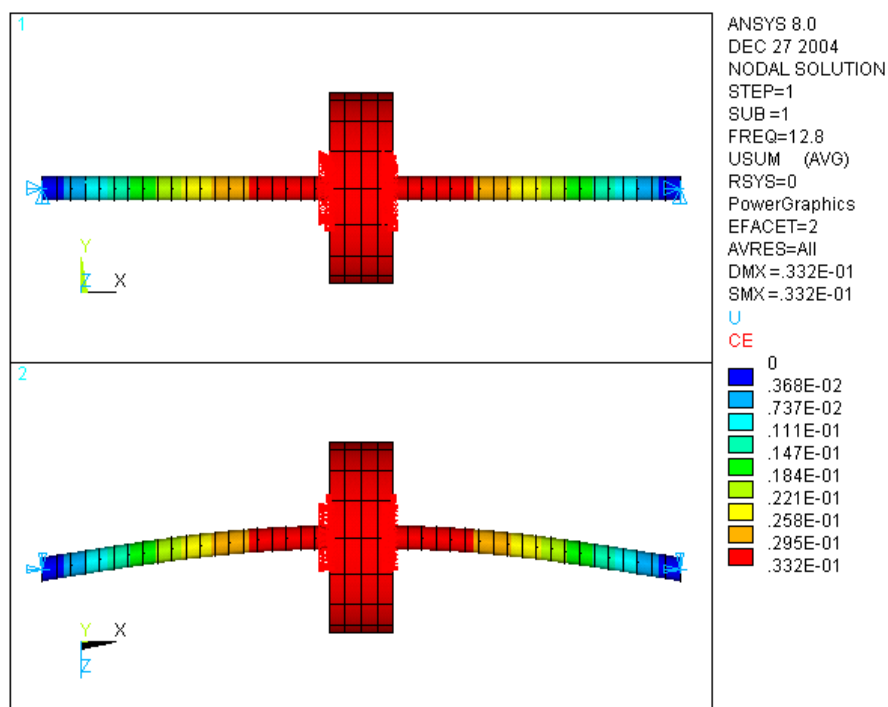
giroscópico, do elemento de viga da seção anterior, é inserida no programa de elementos finitos através de um tipo de elemento genérico, cujos elementos da sua matriz são informados um a um pelo usuário. Este procedimento é realizado automaticamente por parte do algoritmo apresentado no Anexo A. A inércia e a rigidez do rotor já são acrescentadas pelos elementos sólidos. Os resultados obtidos por este procedimento são comparados, na tabela 3.2, aos valores calculados analiticamente na seção anterior.



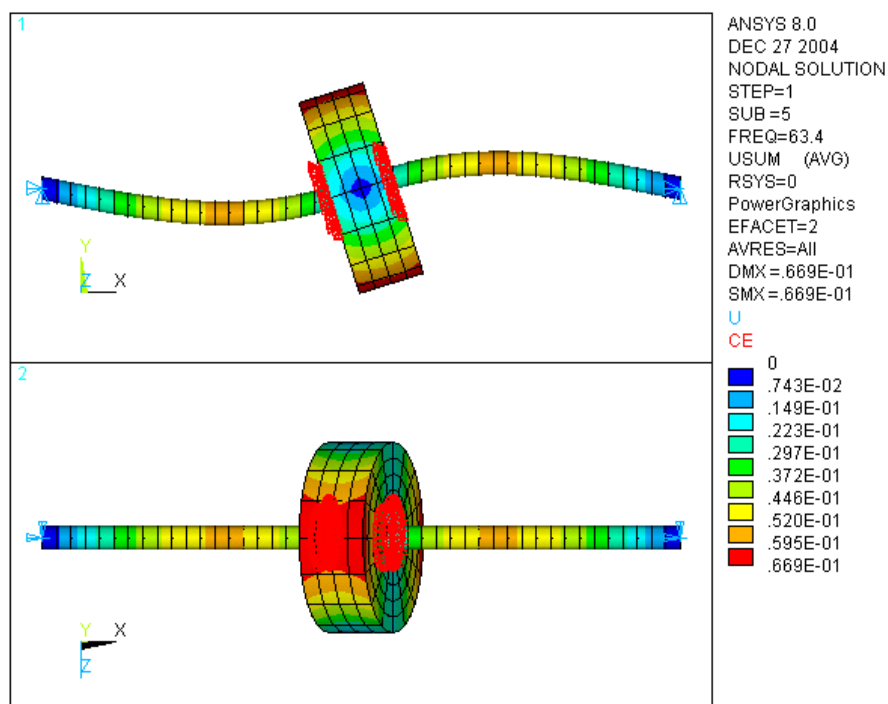
**Figura 3.6:** Modelo do rotor, em elementos finitos, com elementos de viga e sólidos.

**Tabela 3.2:** Frequências naturais calculadas analiticamente e numericamente, pelo MEF com elementos de viga e sólidos ( $m = 394,6 \text{ kg}$ ,  $J_p = 19,73 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ,  $J_T = 11,18 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ,  $k = 2,588 \text{ kN/mm}$ ,  $k_f = 2.588 \text{ kN}\cdot\text{m/rad}$ ,  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ).

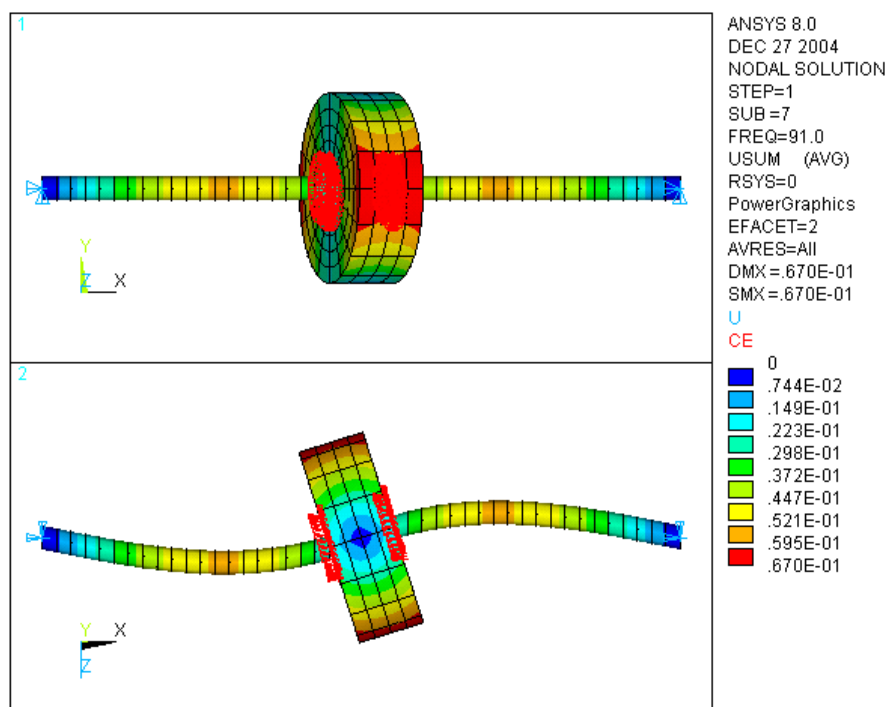
	$f_{n_0}$ [Hz]	$f_{n_1}$ [Hz]	$f_{n_2}$ [Hz]
Modelo Analítico	12,89	63,81	91,89
Modelo Numérico	12,84	63,41	90,99
Desvio	-0,39%	-0,63%	-0,98%



**Figura 3.7:** Primeiro modo de vibrar do modelo em elementos finitos, com elementos de viga e sólidos.



**Figura 3.8:** Segundo modo de vibrar do modelo em elementos finitos, com elementos de viga e sólidos.



**Figura 3.9:** Terceiro modo de vibrar do modelo em elementos finitos, com elementos de viga e sólidos.

Mais uma vez, feita a verificação dos modos de vibrar obtidos computacionalmente vistos nas figuras 3.7, 3.8 e 3.9, comparam-se as frequências naturais avaliadas analiticamente e numericamente. Os valores continuam a estar muito próximos, apresentando um desvio máximo de -0,98%. Baseado nestes resultados, pode-se afirmar que a metodologia sugerida nesta seção é válida para os cálculos dinâmicos da linha de eixo, envolvendo elementos de viga e elementos sólidos, podendo repetir precisamente o modelo teórico.

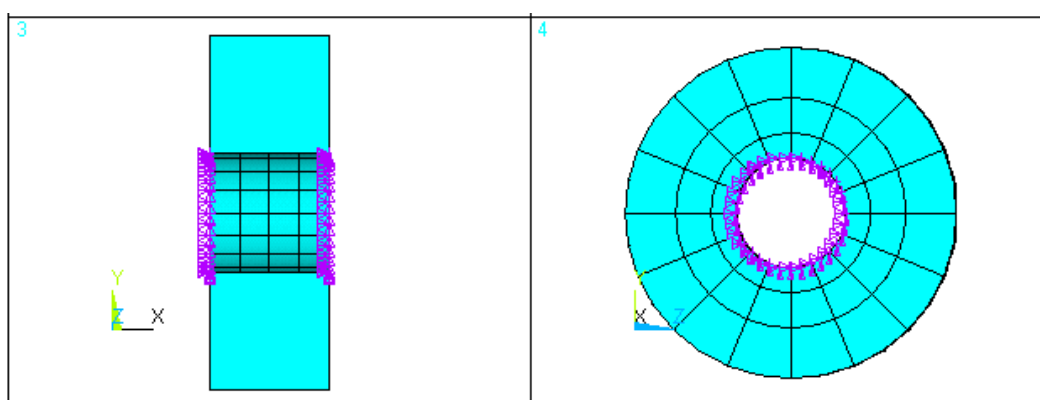
### 3.4.3. Síntese modal de componentes

Tendo verificado, na seção 3.4.1, a capacidade dos elementos de viga de Timoshenko em reproduzir o efeito giroscópico e, na seção 3.4.2, a possibilidade de combinar, com exatidão, elementos de viga e sólidos no cálculo das frequências naturais do sistema, resta apenas verificar a precisão da SMC em tais simulações. Para tanto, o mesmo exemplo das seções anteriores é considerado e, mais uma vez os resultados numéricos são comparados com os valores analíticos.

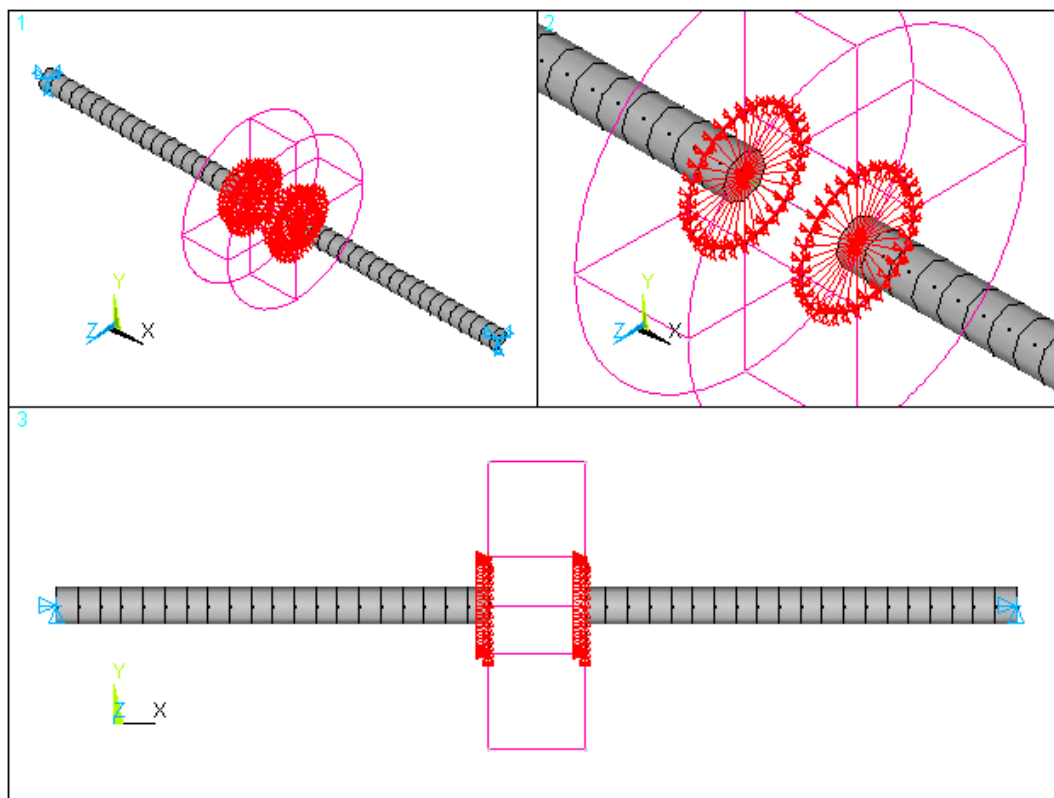
Como já dito acima, o objetivo de se empregar a SMC é modelar o rotor do gerador como uma subestrutura, reduzindo substancialmente o número de graus de liberdade do sistema a ser resolvido para a determinação das velocidades angulares críticas e dos fatores dinâmicos de amplificação de deslocamento. Portanto, é natural que, no exemplo, a subestrutura seja o disco do rotor.

O mesmo modelo de elementos finitos da seção anterior é utilizado aqui, sendo que os 256 elementos sólidos, que compõem o disco, formam agora a subestrutura, que pode ser vista na figura 3.10, onde os nós das fronteiras, entre a subestrutura e o resto da estrutura, estão indicados em roxo. No total, são 64 nós, resultando em 192 graus de liberdade, que somados às coordenadas generalizadas de 10 “modos normais” da subestrutura, totalizam 202 graus de liberdade. Apenas para que uma das vantagens do método fique evidente, na seção anterior, sem a utilização da SMC, o número de graus de liberdade, correspondente ao disco do rotor, era de 4.320.

Na figura 3.11, está mostrado o sistema completo, com o contorno da subestrutura do disco do rotor em linhas rosas. Observam-se, em linhas vermelhas, os vínculos rígidos entre os nós das extremidades do eixo e os nós da fronteira da subestrutura. Eles ainda são necessários, como na seção 3.4.2, pois os nós da subestrutura correspondem aos elementos sólidos utilizados para modelar o disco. Então, para que os graus de liberdade dos nós da interface entre o eixo e o disco sejam compatíveis, é preciso recorrer aos vínculos rígidos.



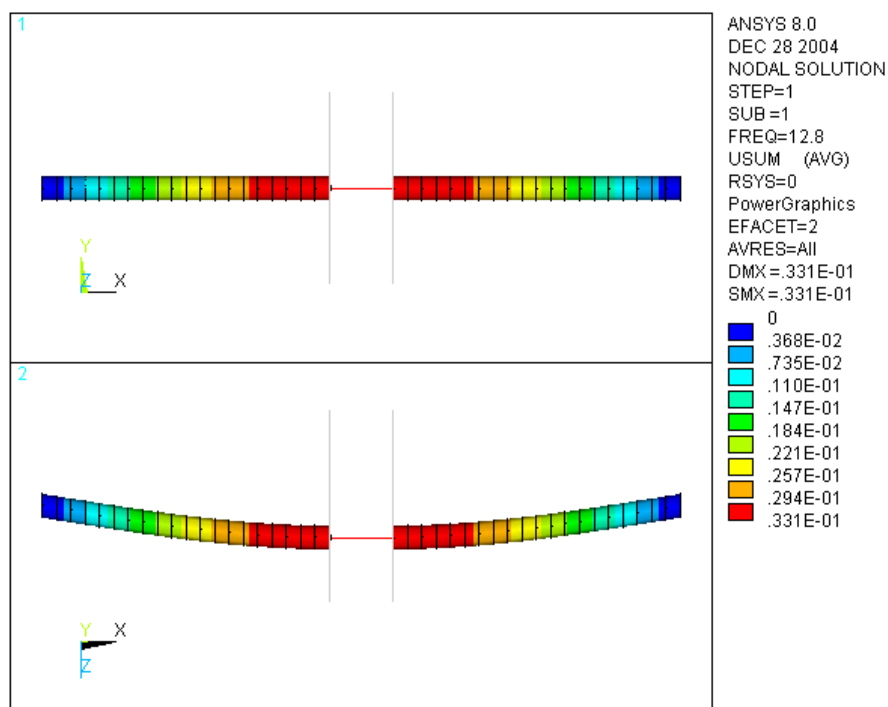
**Figura 3.10:** Subestrutura do disco do rotor, para a SMC, modelada com elementos finitos do tipo sólido.



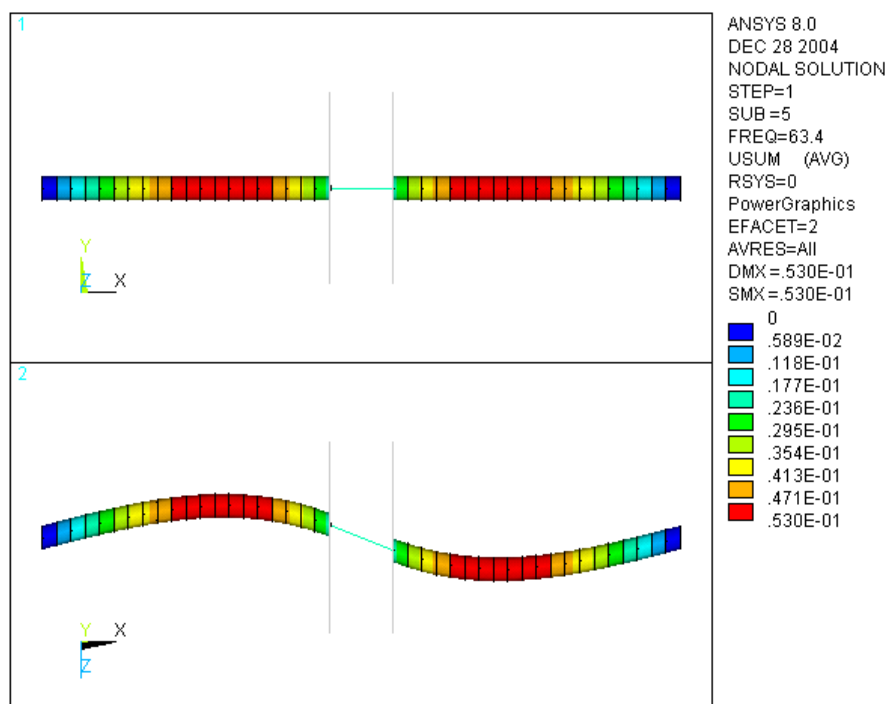
**Figura 3.11:** Modelo do rotor, em elementos finitos, com elementos de viga e sólidos.

**Tabela 3.3:** Frequências naturais calculadas analiticamente e numericamente, pelo MEF e SMC com elementos de viga e sólidos ( $m = 394,6 \text{ kg}$ ,  $J_p = 19,73 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ,  $J_T = 11,18 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ,  $k = 2,588 \text{ kN/mm}$ ,  $k_f = 2.588 \text{ kN}\cdot\text{m/rad}$ ,  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ).

	$f_{n_0}$ [Hz]	$f_{n_1}$ [Hz]	$f_{n_2}$ [Hz]
Modelo Analítico	12,89	63,81	91,89
Modelo Numérico	12,84	63,45	91,13
Desvio	-0,39%	-0,56%	-0,83%

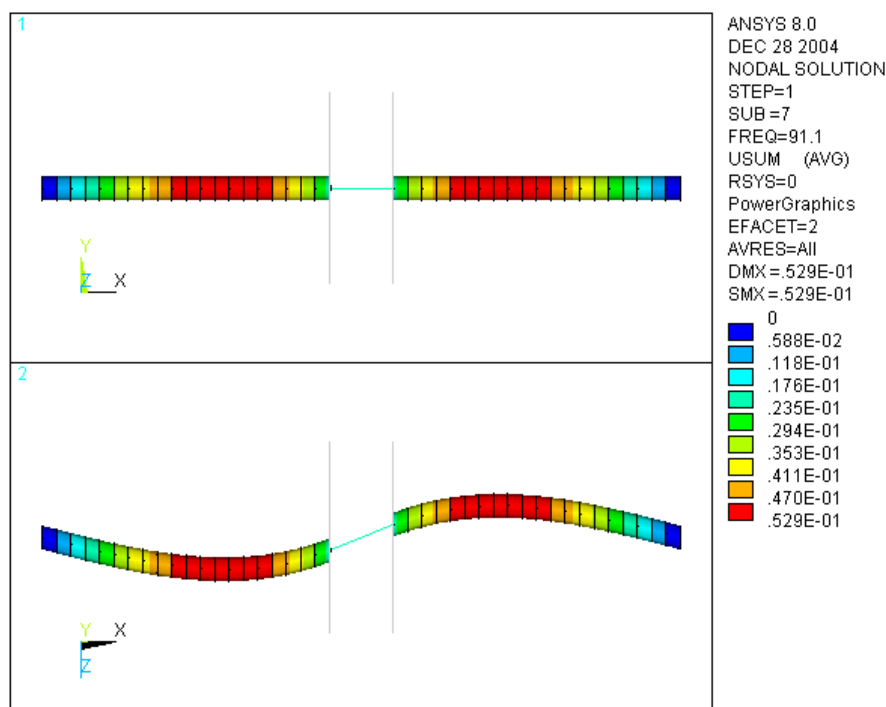


**Figura 3.12:** Primeiro modo de vibrar do modelo em elementos finitos, calculado pelo método da SMC.



**Figura 3.13:** Segundo modo de vibrar do modelo em elementos finitos, calculado pelo método da SMC.





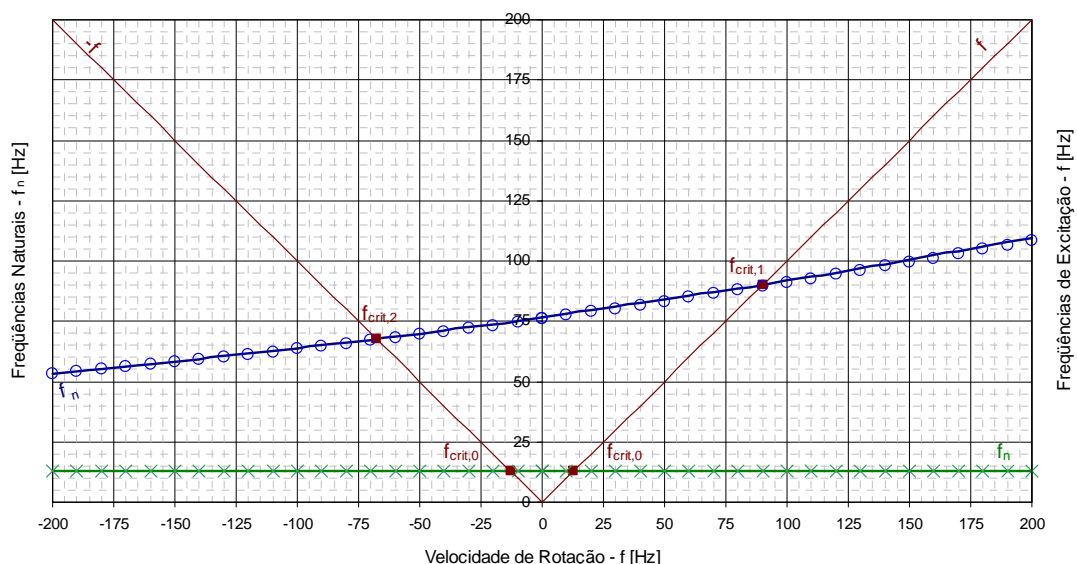
**Figura 3.14:** Terceiro modo de vibrar do modelo em elementos finitos, calculado pelo método da SMC.

Comprovada a adequação entre os modos de vibrar calculados pelo método da SMC, mostrados nas figuras 3.12, 3.13 e 3.14, e os teoricamente esperados, analisam-se as frequências naturais. Como visto na tabela 3.3, as frequências naturais calculadas numericamente pelo método da SMC se afastam dos resultados analíticos em no máximo -0,83%. Portanto, pode-se assegurar que a SMC produz resultados extremamente próximos aos esperados analiticamente e que a redução do número de graus de liberdade do sistema, obtida com a aplicação do método, não compromete a precisão dos cálculos. Assim, é possível empregar o método para a avaliação das velocidades angulares críticas e fatores dinâmicos de amplificação de deslocamento da linha de eixo.

#### 3.4.4. Cálculo da velocidade angular crítica

Nas seções anteriores, para a verificação da eficácia dos modelos numéricos, com elementos de viga, na seção 3.4.1, com vínculos rígidos entre elementos de viga e sólidos, na seção 3.4.2, e utilizando-se a SMC, na seção 3.4.3, as frequências naturais do sistema foram avaliadas apenas para um dado valor de velocidade

angular de rotação. Para realmente comprovar a exatidão e a utilidade do método, são determinadas as velocidades angulares críticas do rotor usado nos exemplos acima. Para isto, emprega-se o diagrama de Campbell da figura 3.15.



**Figura 3.15:** Diagrama de Campbell para o rotor dos exemplos. ( $m = 394,6$  kg,  $J_p = 19,73$  kg·m<sup>2</sup>,  $J_T = 11,18$  kg·m<sup>2</sup>,  $k = 2,588$  kN/mm,  $k_f = 2.588$  kN·m/rad)

No diagrama acima, a linha contínua verde representa as frequências naturais correspondentes ao movimento de translação, calculadas analiticamente, enquanto que a linha contínua azul se refere às frequências naturais do movimento de inclinação do rotor, também obtidas analiticamente. As cruces verdes e os círculos azuis mostram as frequências naturais determinadas numericamente com o modelo da seção anterior, que adota os elementos de viga com efeito giroscópico, os vínculos rígidos entre elementos de diferentes tipos e a SMC. Percebe-se, graficamente, que para todos os valores de velocidade angular de rotação os desvios entre os resultados teóricos e numéricos são extremamente pequenos.

Com as frequências naturais já calculadas, pode-se encontrar, numericamente ou a partir do gráfico, as velocidades angulares críticas do sistema, listadas abaixo.

$$f_{crit_0} = 12,89 \text{ Hz}$$

$$f_{crit_1} = 67,66 \text{ Hz}$$

$$f_{\text{crit}_2} = 90,30 \text{ Hz}$$

Assim como foi feito na seção 2.2.2, também seria possível obter as frequências naturais, a partir da intersecção, no diagrama, das curvas que as representam e de retas verticais, relativas à velocidade angular de rotação da máquina. Os valores encontrados poderiam ser comparados a outras frequências de excitação, eventualmente existentes no sistema.

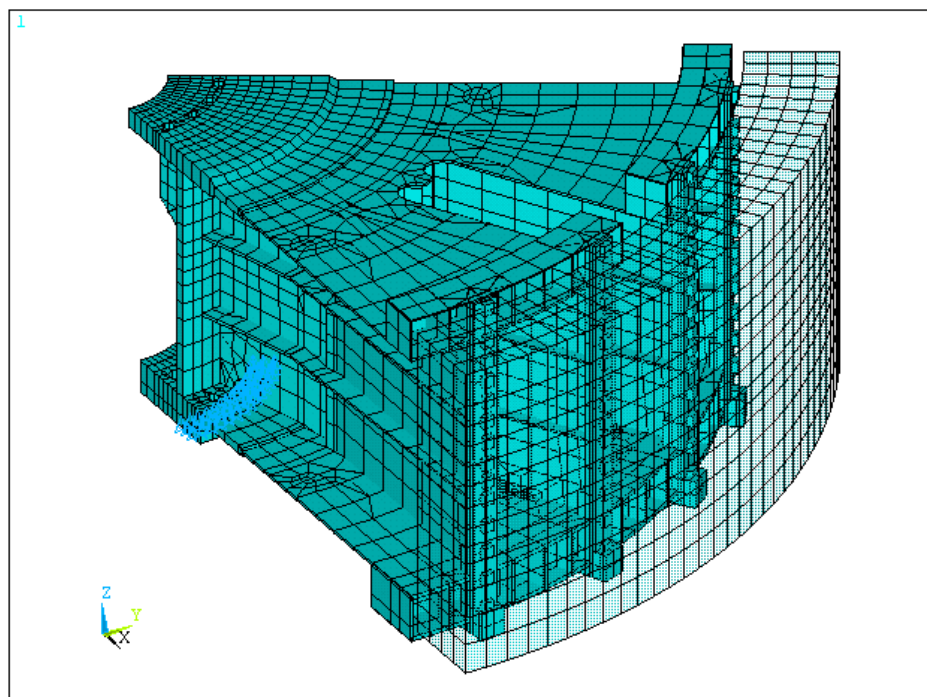
Portanto, em relação à funcionalidade do método apresentado, conclui-se que ele é adequado para o cálculo das frequências angulares críticas, para a elaboração do diagrama de Campbell e que ele pode ser usado, em conjunto com o modelo de elementos finitos da máquina, descrito na seção a seguir, para o estudo da linha de eixo de turbinas hidráulicas.

### **3.5. Modelo em elementos finitos da máquina**

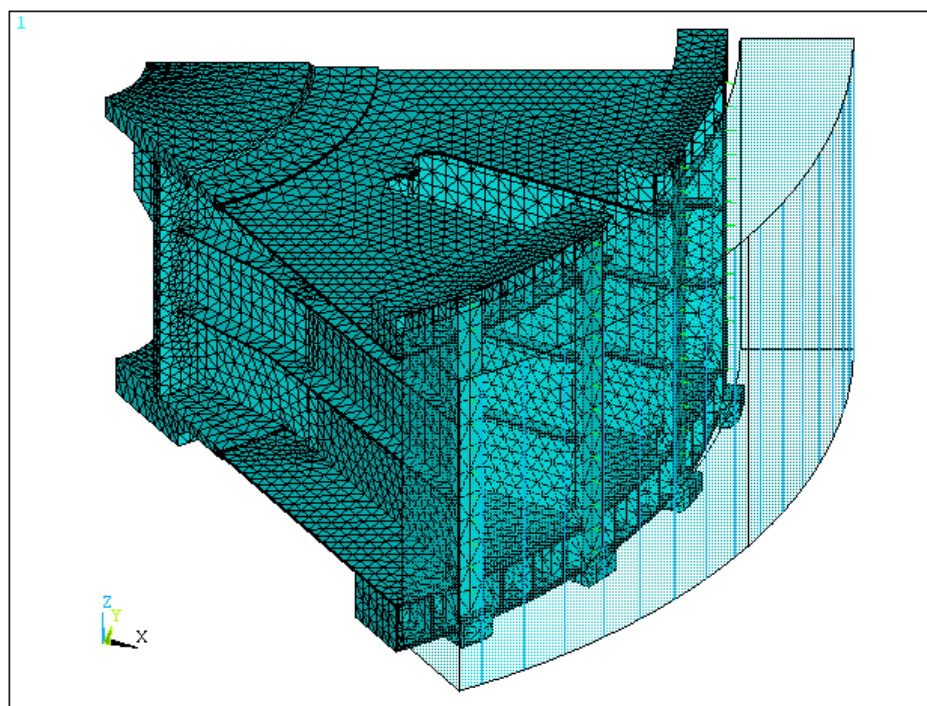
#### **3.5.1. Modelo em elementos finitos do gerador**

Como dito acima, o modelo em elementos finitos do gerador possui uma geometria muito complexa e pode envolver de 5.000 a 70.000 elementos sólidos ou de casca. Por exemplo, a figura 3.16 mostra um modelo com cascas e 5.946 elementos de um setor do rotor do gerador, enquanto que a figura 3.17 ilustra um modelo com sólidos e 60.106 elementos do mesmo componente da mesma máquina.

Para o cálculo das frequências e modos naturais de geradores de turbinas hidráulicas, a variação entre o número e tipo dos elementos causa desvios inferiores a 15%, como neste caso extremo. Ela só se faz realmente sentir no cálculo de tensões, mas que não é o foco aqui.



**Figura 3.16:** Modelo em elementos finitos, com elementos de casca, de um setor do rotor do gerador, e condições de contorno.



**Figura 3.17:** Modelo em elementos finitos, com elementos sólidos, de um setor do rotor do gerador.

Em ambas as figuras acima, os elementos translúcidos representam a coroa magnética do rotor, cuja fixação ao cubo está adequadamente modelada com elementos elásticos bi-lineares, que reproduzem o efeito da montagem por interferência entre estas duas partes. Os pólos encontram-se montados no diâmetro externo da coroa magnética e, portanto, estão em balanço e não contribuem com rigidez para a estrutura. Por este motivo, eles são modelados apenas como massas adicionais.

No caso de se representar o gerador como um corpo elástico, para o cálculo das velocidades angulares críticas e fatores dinâmicos de amplificação de deslocamento, o empuxo magnético deve ser incluído no modelo do rotor do gerador. Por sua ação ser equivalente à de uma mola com coeficiente de rigidez negativo, como explicado na seção 2.4.7, são utilizados elementos de mola, com orientação radial, dispostos ao longo da circunferência da coroa, para simular o seu efeito. A relação entre o coeficiente de rigidez total e o de cada elemento é dada por MEHNE [30]:

$$k = \frac{k_M}{\sum_{i=0}^{n-1} \cos^2\left(\frac{2\pi}{n} i\right)} \quad (3.34)$$

$$k = \frac{k_M}{\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{n} 2i\right) \right]} \quad (3.35)$$

$$\therefore k = \begin{cases} \frac{k_M}{n}, n = 1, 2 \\ 2 \frac{k_M}{n}, n > 2 \end{cases} \quad (3.36)$$

k	:	rigidez de cada elemento de mola	[N/m]
k <sub>M</sub>	:	rigidez total relativa ao empuxo magnético	[N/m]
n	:	número de elementos de mola	[-]

Em relação à SMC, na figura 3.16, vêem-se em azul as restrições de deslocamento aplicadas ao modelo. Os nós, aos quais são impostas estas condições

de contorno, são os nós da fronteira da subestrutura do rotor do gerador e que pertencem à região do flange de acoplamento com o eixo. Nestas condições, são calculados os modos naturais e restritos da subestrutura e, conseqüentemente, as matrizes de massa e rigidez para a SMC. Baseado na experiência de CASTANIER; TAN; PIERRE [9] descrita na seção 3.2, apenas os dez primeiros modos naturais da subestrutura do gerador são empregados para este cálculo.

A título de curiosidade, pelo fato do rotor do gerador apresentar simetria cíclica ou, em outras palavras, por seus setores possuírem todos a mesma geometria e por ela se repetir ciclicamente no espaço, seus modos de vibrar, além de se constituírem como ondas senoidais no tempo, também são funções senoidais do espaço, como dito por MEIROVITCH [31] para discos planos.

$$[\Phi]_i = [\Phi] \sin\left(\kappa \frac{2\pi}{n} i + \psi\right), \forall \left\{ \kappa \in \mathbb{N} \mid \kappa \leq \frac{n}{2} \right\}, i = 1, \dots, n \quad (3.37)$$

$n$	:	número de setores	[-]
$[\Phi]$	:	componente da matriz modal	[-]
$[\Phi]_i$	:	matriz modal do i-ésimo setor	[-]
$\kappa$	:	número de onda	[-]
$\psi$	:	atraso de fase	[rad]

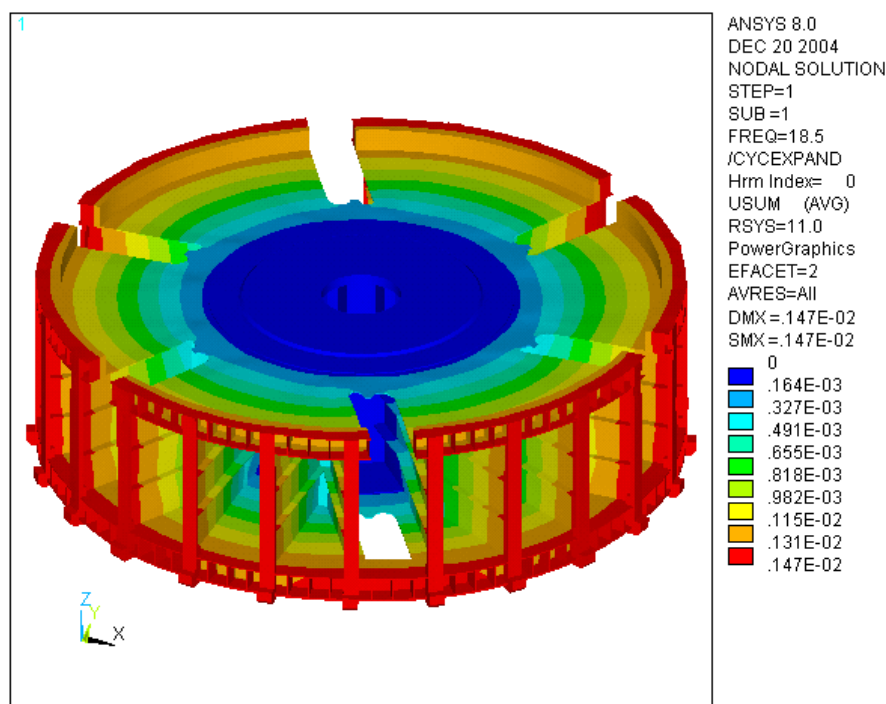
O processo de extração dos modos e frequências naturais do gerador poderia se tornar mais rápido, se apenas um setor fosse modelado e calculado, sendo que os modos de vibrar da estrutura completa poderiam ser obtidos aplicando-se a equação (3.37) para cada setor e para cada número de onda. Porém, para que este método funcionasse, seria preciso impor a condição de contorno sugerida por DICKENS [12] aos nós das fronteiras do setor:

$$\begin{Bmatrix} u'_c \\ \vdots \\ u'_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\kappa \frac{2\pi}{n}\right) & \sin\left(\kappa \frac{2\pi}{n}\right) \\ -\sin\left(\kappa \frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\kappa \frac{2\pi}{n}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_c \\ \vdots \\ u_s \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

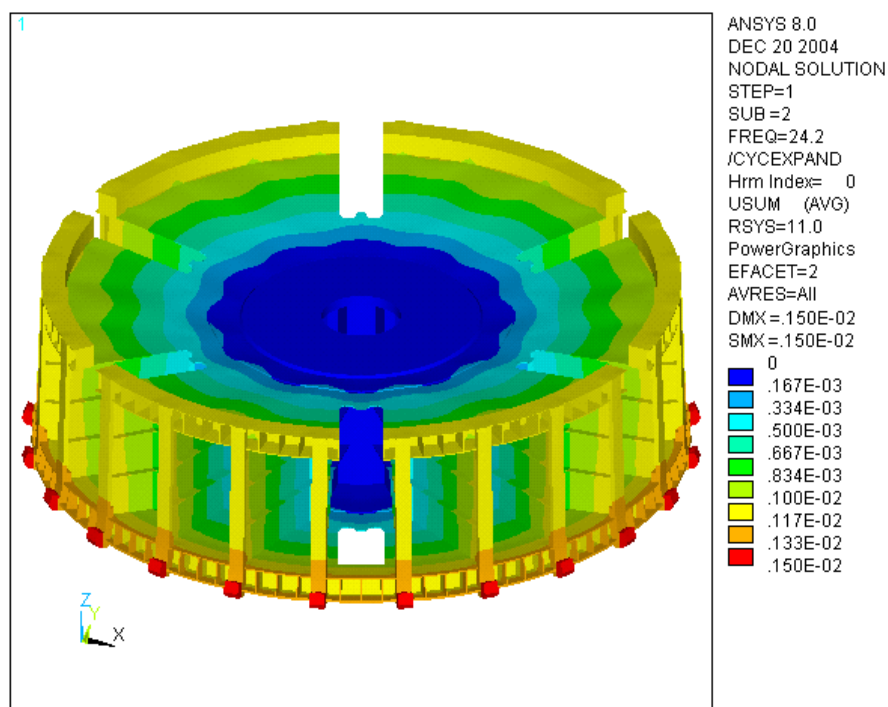
$u_c$	:	primeira componente da primeira fronteira	[m]
$u_s$	:	segunda componente da primeira fronteira	[m]
$u'_c$	:	primeira componente da segunda fronteira	[m]
$u'_s$	:	segunda componente da segunda fronteira	[m]

Todo este procedimento poderia ser realizado inteiramente e automaticamente pelo programa ANSYS [2], porém, para a SMC, são necessárias as matrizes de massa e de rigidez da subestrutura completa. Além disto, a interface entre as subestruturas não pode ser definida com apenas um setor. Por estes motivos, o método de cálculo exposto por DICKENS [12], embora engenhoso, não pode ser usado em conjunto com a SMC. Nestas condições, os modos naturais e restritos da subestrutura do gerador devem ser calculados com o modelo completo do rotor.

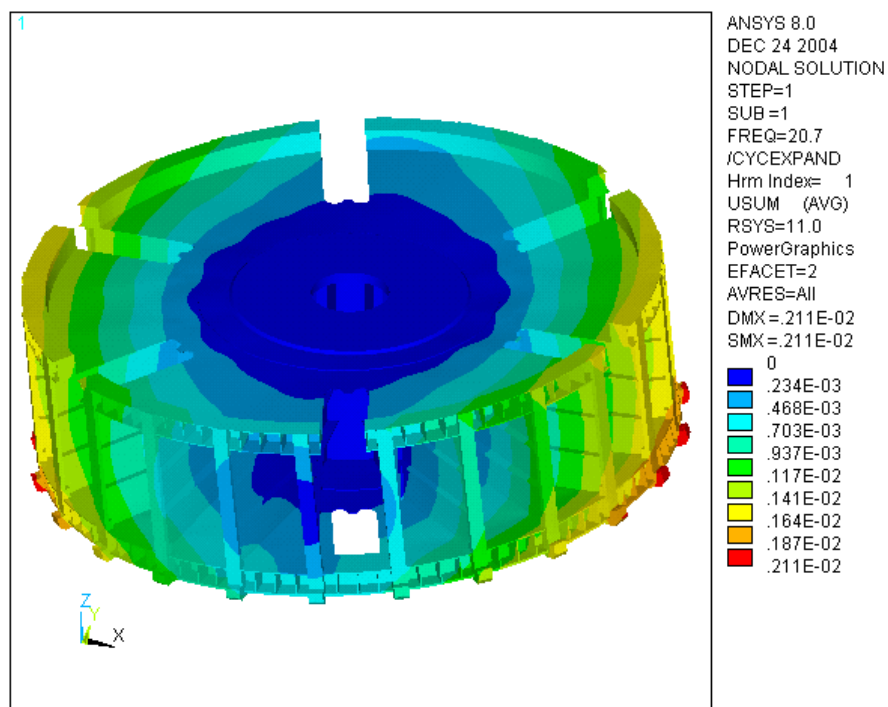
As figuras 3.18 a 3.21 mostram os quatro primeiros dos dez modos naturais utilizados para a SMC. Assim, pela complexidade destes poucos modos, percebe-se claramente que, qualquer tentativa de representá-los com precisão por métodos analíticos, mesmo que com ajuda da equação (3.37), tornaria-se provavelmente impraticável.



**Figura 3.18:** Exemplo do primeiro modo de vibrar do rotor do gerador.

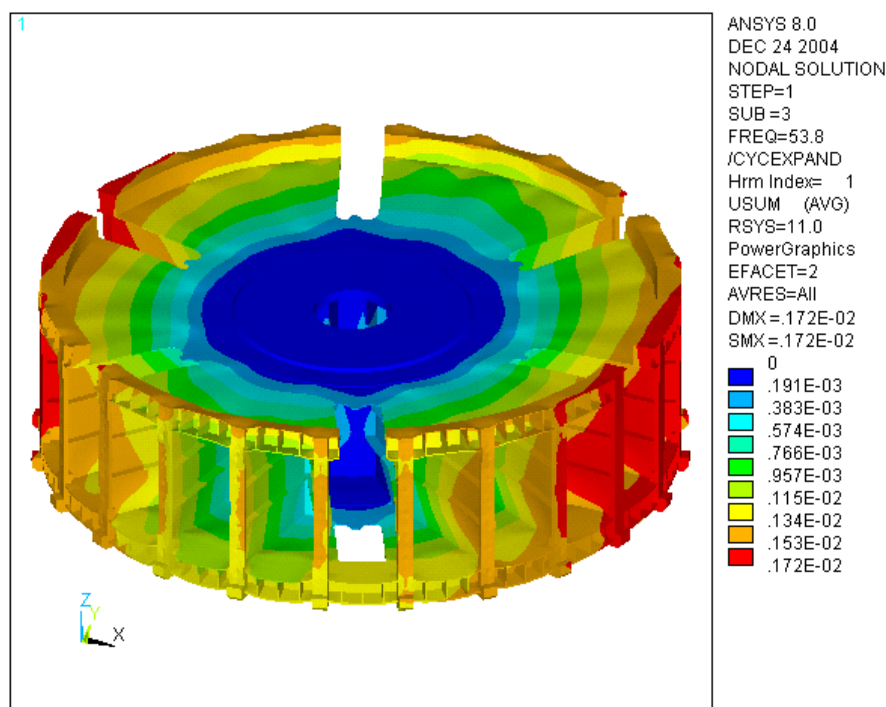


**Figura 3.19:** Exemplo do segundo modo de vibrar do rotor do gerador.



**Figura 3.20:** Exemplo do terceiro modo de vibrar do rotor do gerador.





**Figura 3.21:** Exemplo do quarto modo de vibrar do rotor do gerador.

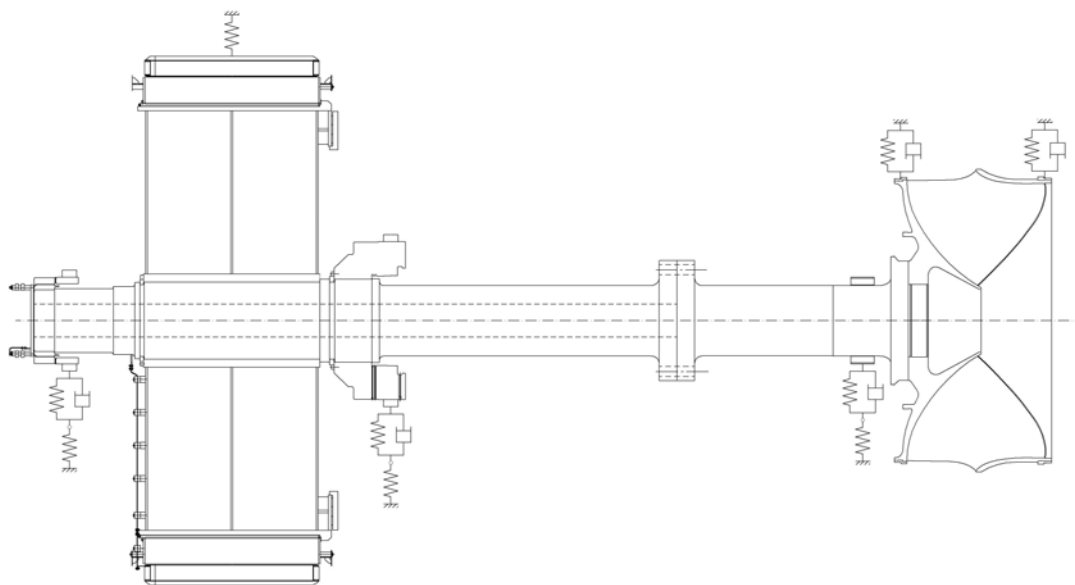
Deste modo, para finalizar a descrição de todos os modelos numéricos usados, resta simplesmente o modelo da linha de eixo completa, apresentado logo abaixo.

### 3.5.2. Modelo em elementos finitos da linha de eixo completa

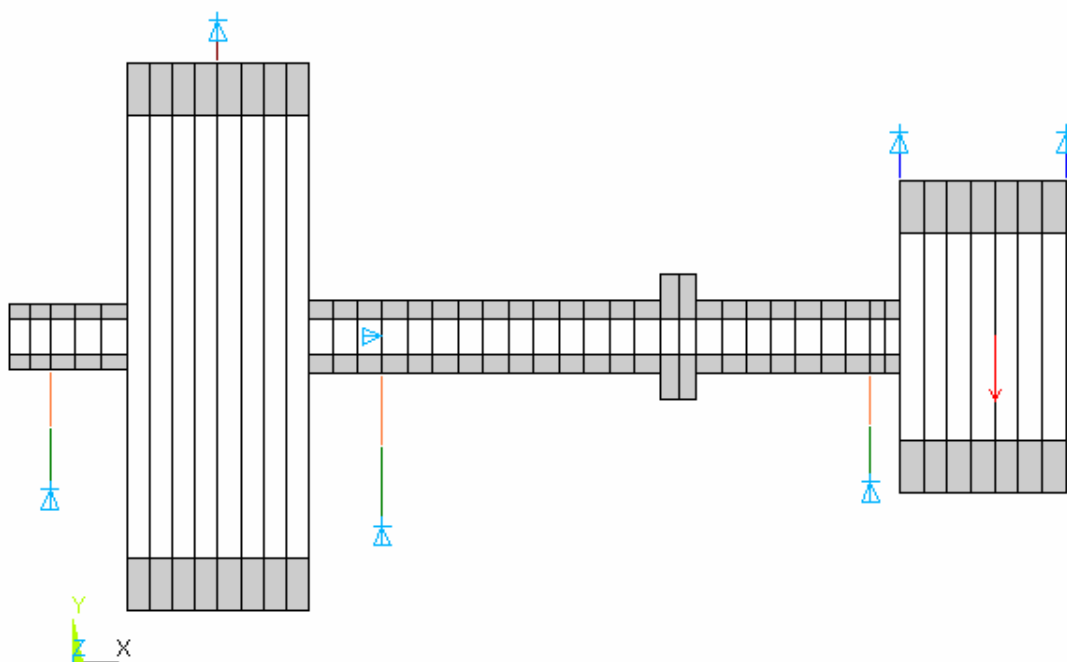
O modelo em elementos finitos do sistema reúne o gerador, o eixo, os mancais hidrodinâmicos e seus suportes, o rotor da turbina e os labirintos, ou seja, todos os componentes que compõem a linha de eixo, como descrito na seção 2.1.3, e cujos modelos de cálculo foram elaborados na seção 2.4. O empuxo magnético e as forças de excitação estáticas e dinâmicas, já apresentados nestas mesmas seções, também fazem parte do modelo.

Abaixo, na figura 3.22, se vê um esquema da linha de eixo, onde aparecem desenhados o gerador, o eixo e o rotor da turbina, enquanto que os mancais hidrodinâmicos, seus suportes e os labirintos já foram substituídos por conjuntos de molas e amortecedores, de acordo com a modelagem adotada para cada um deles. Este também é o caso do empuxo magnético, que também já se encontra

representado por molas. O modelo em elementos finitos deste mesmo exemplo pode ser observado na figura 3.23.



**Figura 3.22:** Exemplo de esquema físico da linha de eixo.



**Figura 3.23:** Exemplo de modelo em elementos finitos da linha de eixo.

No caso do cálculo tradicional da linha de eixo, o gerador é considerado como um corpo rígido, como dito na seção 2.4.1, e, portanto, no modelo de elementos finitos, é suficiente informar apenas sua massa e seus momentos de inércia de massa. Para isto, é utilizado um cilindro com estas mesmas propriedades, obtidas através do ajuste dos seus diâmetros interno e externo, e cuja matriz de massa é a mesma de um elemento de viga.

$$D_e = \sqrt{\frac{2m}{\rho\pi L} + \frac{4J_p}{m}} \quad (3.39)$$

$$D_i = \sqrt{\frac{4J_p}{m} - \frac{2m}{\rho\pi L}} \quad (3.40)$$

$D_e$	:	diâmetro externo do cilindro	[m]
$D_i$	:	diâmetro interno do cilindro	[m]
$J_p$	:	momento polar de inércia do gerador	[kg·m <sup>2</sup> ]
$L$	:	comprimento do gerador e do cilindro	[m]
$m$	:	massa do rotor do gerador	[kg]
$\rho$	:	densidade do material	[kg/m <sup>3</sup> ]

Já utilizando-se a SMC, para representar o rotor do gerador como um corpo elástico com massa e rigidez distribuídas, é utilizada a metodologia da seção 3.4.3 e o modelo numérico da seção 3.5.1.

Para modelar as seções de eixo, como explicado na seção 2.4.2 com elementos de viga de Timoshenko com efeito giroscópico, basta simplesmente informar o comprimento, o diâmetro interno e o externo de cada uma delas.

A rigidez e o amortecimento dos mancais hidrodinâmicos podem ser avaliados através dos coeficientes hidrodinâmicos, apresentados na seção 2.4.4. Esta mesma seção mostra que a rigidez dos suportes pode ser estimada, por exemplo, com um modelo de elementos finitos. Os mancais hidrodinâmicos e seus suportes são simulados, no modelo do sistema, por elementos de mola e amortecedores, como vistos respectivamente em laranja e verde escuro na figura 3.23.

O rotor da turbina, como o gerador no caso do cálculo tradicional, é representado, no modelo de cálculo, apenas por suas propriedades de inércia através de um cilindro e das equações (3.39) e (3.40). O efeito da massa hidrodinâmica também é levado em conta, estimado e incluído no modelo, segundo a seção 2.4.5.

Para os labirintos do rotor, detalhados na seção 2.4.6 e mostrados em azul escuro na figura 3.23, também são usados elementos de mola e amortecedores, como no caso dos mancais hidrodinâmicos.

Finalmente, o coeficiente de rigidez, correspondente ao empuxo magnético, é calculado através da equação (2.54) da seção 2.4.7 e incluído no modelo através de elementos de mola, em marrom na figura 3.23. As forças de excitação, descritas na seção 2.4.8, podem ser inseridas diretamente no modelo de cálculo da linha de eixo.

As forças de desbalanceamento mecânico são calculadas com base na classe de balanceamento G 6,3 da norma ISO 1940-1 [23], enquanto que, diante das alternativas disponíveis para o cálculo das forças de hidráulicas de excitação, o método mais simples é aquele com base em números adimensionais obtidos a partir de ensaios de modelo reduzido.

Como pode ser notado, para os objetivos propostos, a elaboração do modelo em elementos finitos da linha de eixo não requer nenhuma ferramenta ou modelo de cálculo além daqueles já concebidos acima, é preciso apenas combiná-los de maneira adequada para a montagem do modelo de elementos finitos para o cálculo das velocidades angulares críticas e dos fatores dinâmicos de amplificação de deslocamento.

### **3.5.3. Determinação dos coeficientes dinâmicos**

Apesar de todos os modelos de cálculo já terem sido desenvolvidos anteriormente, há uma dificuldade na avaliação dos coeficientes de rigidez e amortecimento do filme de óleo dos mancais hidrodinâmicos e dos labirintos do rotor, pois seus coeficientes dinâmicos dependem da velocidade angular de rotação e do deslocamento estático, como fica claro nas equações (2.24) a (2.45) da seção 2.4.4. Para que esta dependência fique explícita e para representá-la de maneira simplificada, é possível escrever:

$$k = k(\omega, \varepsilon, \varphi) = k(\omega, \{x\}) \quad (3.41)$$

$$c = c(\omega, \varepsilon, \varphi) = c(\omega, \{x\}) \quad (3.42)$$

$c$	:	amortecimento	[Ns/m]
$k$	:	rigidez	[N/m]
$\{x\}$	:	vetor de deslocamento da estrutura	[m]
$\varepsilon$	:	excentricidade relativa à folga radial	[-]
$\varphi$	:	posição angular de equilíbrio	[rad]
$\omega$	:	velocidade angular de rotação	[rad/s]

Então, para cada valor de velocidade angular de rotação, é necessário resolver o problema estático da linha elástica do eixo, para se determinar o vetor de deslocamentos:

$$[K]\{x\} = \{F\} \quad (3.43)$$

$[K]$	:	matriz de rigidez	[N/m]
$\{F\}$	:	vetor de carregamento	[N]

Aqui, observando as equações (3.41) e (3.43), fica clara a dependência entre os coeficientes de rigidez, os deslocamentos e as reações da estrutura, no caso de sistemas hiperestáticos, e entre os coeficientes de rigidez e os deslocamentos, no caso de sistemas isostáticos. Desta forma, as equações (3.41) a (3.43) formam um sistema não linear e propõem-se dois modos de resolvê-lo.

A primeira consiste em exprimir os coeficientes de rigidez explicitamente em função dos deslocamentos e resolver a equação não-linear (3.43) diretamente pelo método de Newton-Raphson, como feito pelo programa ANSYS [2]. Na outra, impõem-se valores iniciais para os deslocamentos no filme de óleo e nos labirintos do rotor, avaliam-se os coeficientes de rigidez e resolve-se a equação (3.43) de maneira linear. Com os novos valores de deslocamento calculados, repete-se o processo iterativamente, até que o resultado convirja.

Uma forma mais simples de se evitar estes procedimentos é adotar valores constantes de rigidez e amortecimento para o sistema, baseado nos coeficientes sugeridos por SCHEIDL [39] e SIMON [41] e reproduzidos na tabela 2.1. Por não se tratar do foco principal deste estudo e na ausência de dados detalhados para a determinação das propriedades do filme de óleo dos mancais hidrodinâmicos e dos labirintos do rotor, este será o procedimento preferido de cálculo a ser utilizado nos exemplos do capítulo 4, a seguir.

## **4. RESULTADOS E DISCUSSÃO**

### **4.1. Procedimento**

Com o objetivo de se avaliar qual a influência das propriedades de inércia e rigidez distribuídas do rotor do gerador sobre o comportamento dinâmico da linha de eixo de máquinas hidráulicas, no capítulo 2, foram reunidos, com base na literatura, modelos analíticos que permitissem que fosse elaborado um modelo matemático da máquina e seus carregamentos, enquanto que no capítulo 3 foram apresentados e desenvolvidos modelos numéricos que possibilitassem que as suas velocidades angulares críticas e os seus correspondentes fatores dinâmicos de amplificação de deslocamento fossem calculados.

Agora, como exemplo, neste capítulo, tais características dinâmicas de duas turbinas hidráulicas serão calculadas, como descrito na seção 3.5.2, a partir da combinação de ambos os tipos de modelos, buscando descobrir e quantificar qual o efeito da elasticidade do gerador sobre a estrutura. Portanto, os resultados do cálculo pelo método tradicional e pela SMC serão comparados e analisados, de forma a se chegar a uma conclusão.

Para as simulações, as informações típicas das máquinas, geometria da linha de eixo, propriedades dos materiais, massas e inércias do rotor da turbina e do rotor do gerador, rigidez e amortecimento do filme de óleo dos mancais e dos labirintos do rotor, empuxo magnético e carregamento serão dados. Para começar será proposto um problema simples, em que não se considera nenhum amortecimento e em que se supõe a máquina apenas na condição de disparo, como definido na seção 2.1.5, ou seja, sem empuxo magnético, tudo isto para que se possa focar de maneira mais fácil apenas no efeito que se deseja observar e também para que os resultados sejam facilmente reproduzíveis, sem a necessidade de se empregar, para a resolução numérica do sistema, códigos comerciais sofisticados.

Em seguida será estudada uma máquina, cujo modelo matemático não possui nenhuma simplificação e para a qual as condições de operação normal e de disparo serão consideradas. Assim, este último modelo conta, supostamente, com maior

precisão para descrever a realidade física do sistema. A primeira máquina a ser simulada é denominada “Máquina A” e a segunda “Máquina B”.

## **4.2. Máquina A**

### **4.2.1. Informações da máquina**

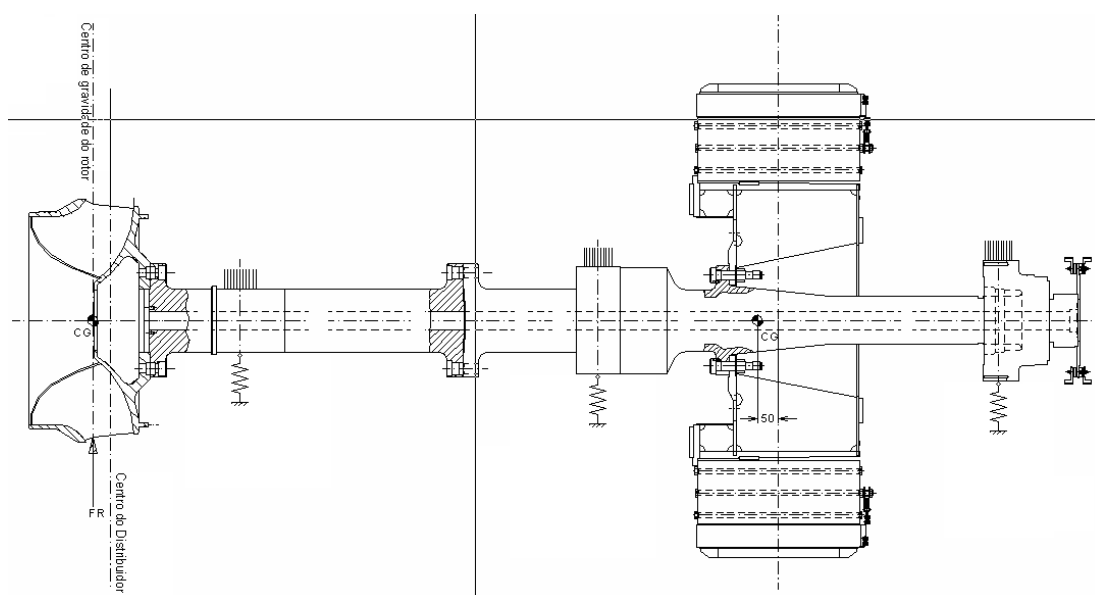
Como dito na seção anterior, para a avaliação da Máquina A, algumas simplificações são realizadas, para facilitar a reprodutibilidade dos resultados e para que se concentre na descrição estrutural dinâmica do gerador.

Esta máquina é calculada apenas na condição de disparo, que segundo a seção 2.1.5, é uma condição de regime permanente, em que há a desmagnetização do rotor e do estator do gerador, fazendo com que o empuxo magnético seja eliminado, desde que não haja nenhum efeito residual. Ainda para tornar o sistema menos complicado, todos os amortecimentos são simplesmente ignorados.

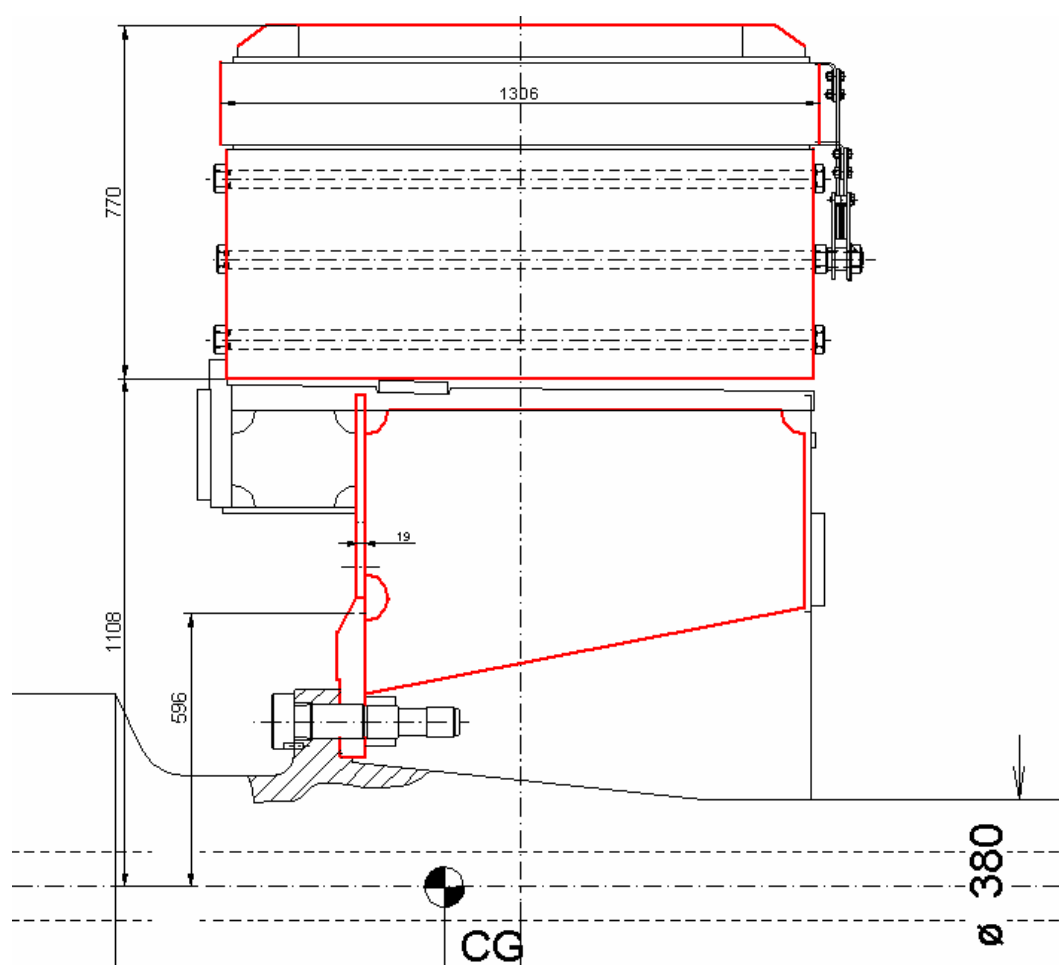
A seguir, na tabela 4.1, encontram-se as principais características da máquina. Já o corte pela linha de eixo está na figura 4.1, onde podem ser vistos os vários componentes, a geometria, o arranjo dos mancais e suas posições. As propriedades de inércia, de rigidez e do material são dadas nas tabelas 4.2, 4.3 e 4.4.

Vale notar para esta máquina que, como visto na figura 4.2, o acoplamento do rotor do gerador ao eixo é bastante peculiar, pois ele se conecta apenas por um flange de acoplamento na parte inferior do cubo, sem que haja também um na parte superior. Supõe-se que esta deva ser uma montagem mais flexível e, por este motivo, se justifica que a elasticidade do rotor do gerador seja levada em conta.





**Figura 4.1:** Corte pela linha de eixo da Máquina A.



**Figura 4.2:** Detalhe do rotor do gerador e do acoplamento do cubo ao eixo.

**Tabela 4.1:** Principais características da Máquina A.

Dado	Símbolo	
Tipo de Turbina	-	Francis
Orientação do Eixo	-	Vertical
Queda Líquida Nominal	H [m]	166
Potência Nominal	P [MW]	43
Rotação Nominal	n [rpm]	450
Rotação de Disparo	$n_d$ [rpm]	783
Diâmetro da Turbina	- [mm]	1.900
Diâmetro do Gerador	- [mm]	3.760

**Tabela 4.2:** Propriedades de inércia da Máquina A.

Dado	Símbolo	
Massa do Rotor da Turbina	$m_r$ [kg]	1.800
Massa Hidrodinâmica	$m_h$ [kg]	2.700
Momento Polar de Inércia do Rotor	$J_{P,r}$ [kg·m <sup>2</sup> ]	720
Momento Polar de Inércia Hidrodinâmico	$J_{P,h}$ [kg·m <sup>2</sup> ]	1.080
Momento Transversal de Inércia do Rotor	$J_{T,r}$ [kg·m <sup>2</sup> ]	500
Momento Transversal de Inércia Hidrodinâmico	$J_{T,h}$ [kg·m <sup>2</sup> ]	750
Massa do Gerador	- [kg]	70.000
Momento Polar de Inércia do Gerador	- [kg·m <sup>2</sup> ]	157.200
Momento Transversal de Inércia do Gerador	- [kg·m <sup>2</sup> ]	85.180

**Tabela 4.3:** Coeficientes de rigidez da Máquina A.

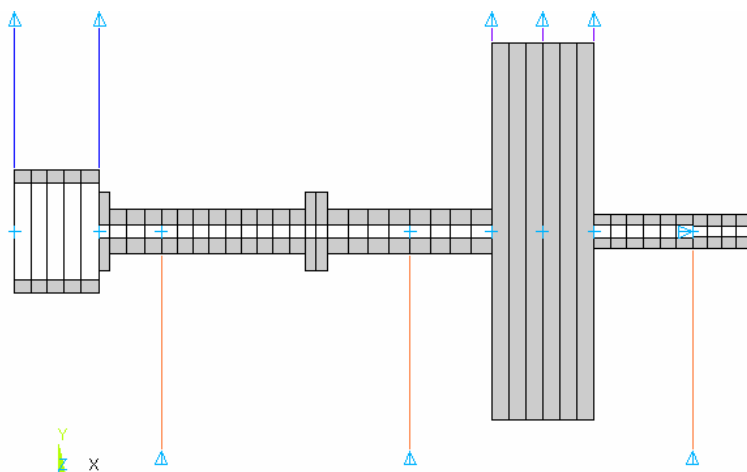
Dado	Símbolo	
Rigidez do Mancal Guia da Turbina	- [kN/mm]	1.110
Rigidez do Mancal Guia Inferior do Gerador	- [kN/mm]	910
Rigidez do Mancal Guia Superior do Gerador	- [kN/mm]	485

**Tabela 4.4:** Propriedades adotadas para o aço.

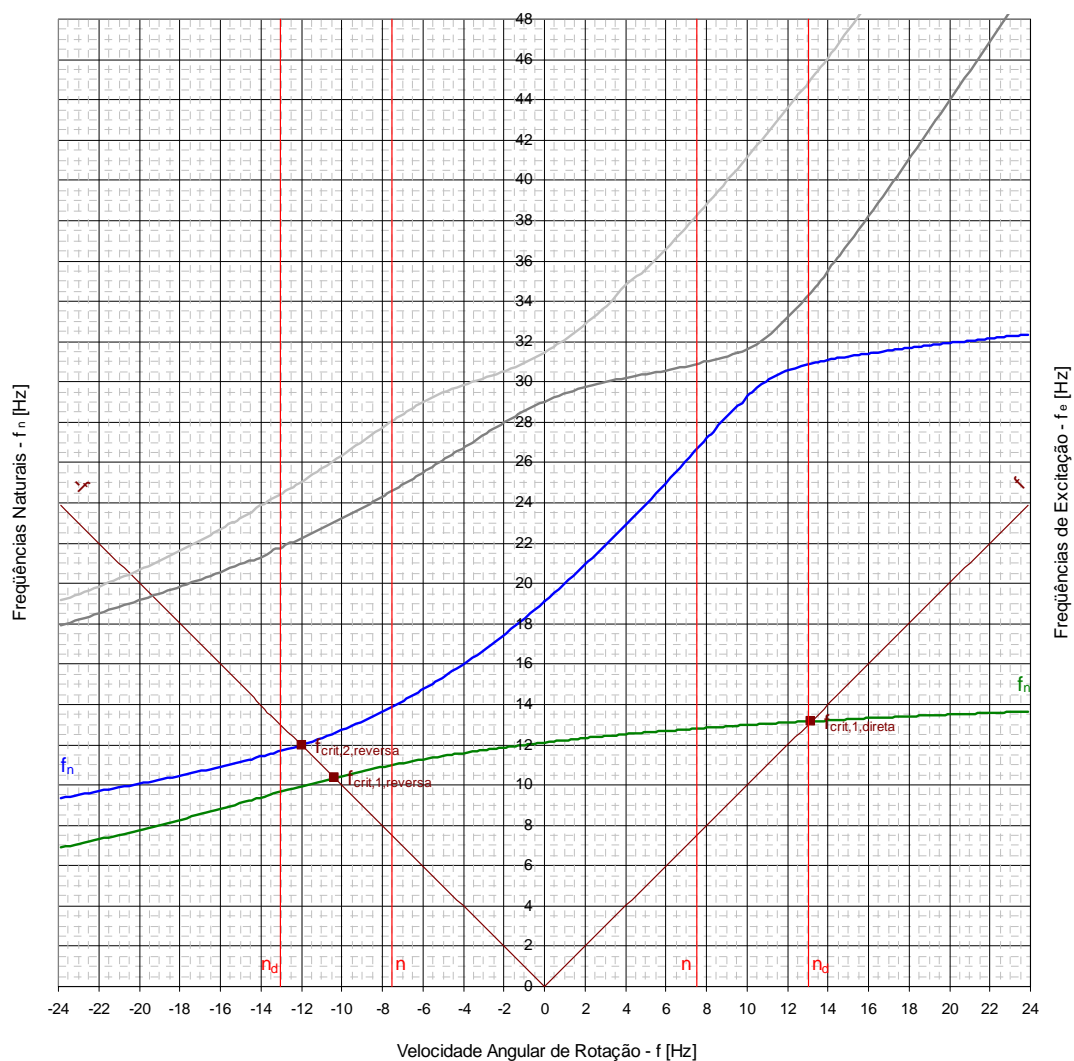
Dado	Símbolo	
Densidade	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	7.850
Módulo de Elasticidade	E [GPa]	205
Coeficiente de Poisson	$\nu$ [-]	0,3

#### 4.2.2. Resultados pelo método tradicional

Para o cálculo dos resultados, é criado um modelo para a simulação numérica como descrito na seção 3.5.2, que é resolvido com a ajuda do programa ANSYS [2]. Para o cálculo repetitivo das frequências e modos naturais, em função da velocidade angular de rotação, é utilizado o algoritmo listado no Anexo A. O corte pelo modelo de elementos finitos empregado para o cálculo, é apresentado na figura 4.3. Já a figura 4.4 mostra o diagrama de Campbell com os valores obtidos da simulação. Nele estão indicadas as quatro primeiras frequências naturais de flexão da linha de eixo e a determinação gráfica da primeira e segunda velocidades angulares críticas, assim como a frequência nominal de rotação da turbina e a de disparo.



**Figura 4.3:** Corte pelo modelo de elementos finitos da Máquina A.



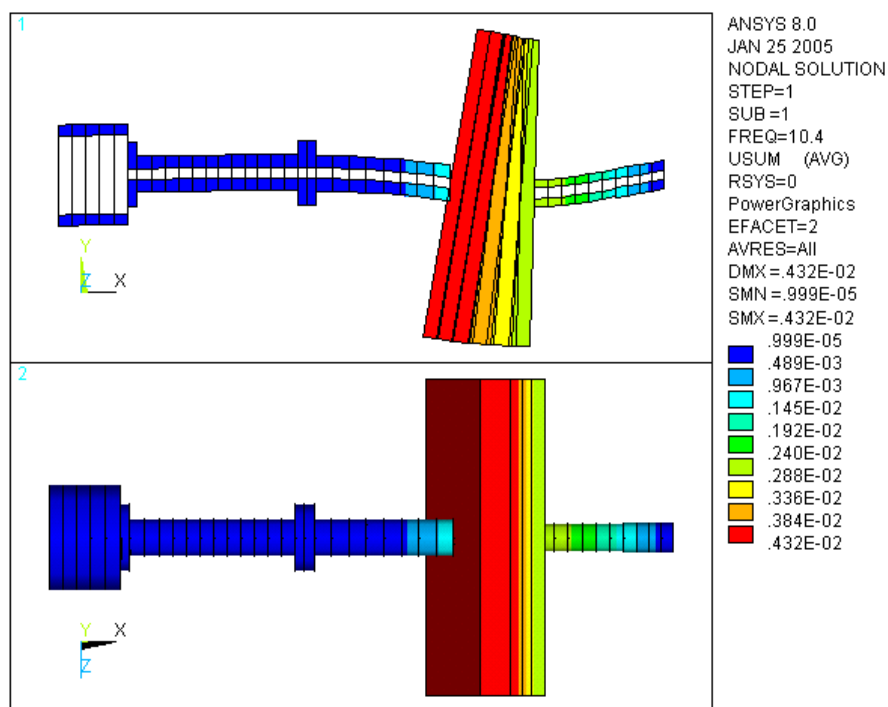
**Figura 4.4:** Diagrama de Campbell para a Máquina A na condição de disparo.

É interessante notar que para o terceiro e quarto modos naturais não existem velocidades angulares críticas de precessão direta, pois nunca é possível que a frequência de excitação seja igual às frequências naturais correspondentes, como é observado graficamente, pela inexistência de intersecção entre as curvas da terceira e quarta frequências naturais e a reta de inclinação unitária positiva, relativa à velocidade angular de rotação da máquina. Porém, este não é um fato de se admirar, logo que tal comportamento já era previsto para o rotor simples simétrico, caso o momento polar de inércia de massa fosse maior do que o transversal. Aqui, apesar da mesma expressão analítica não ser mais válida, da relação existente ser mais complicada e de não ser possível obtê-la analiticamente, ela ainda continua a existir.

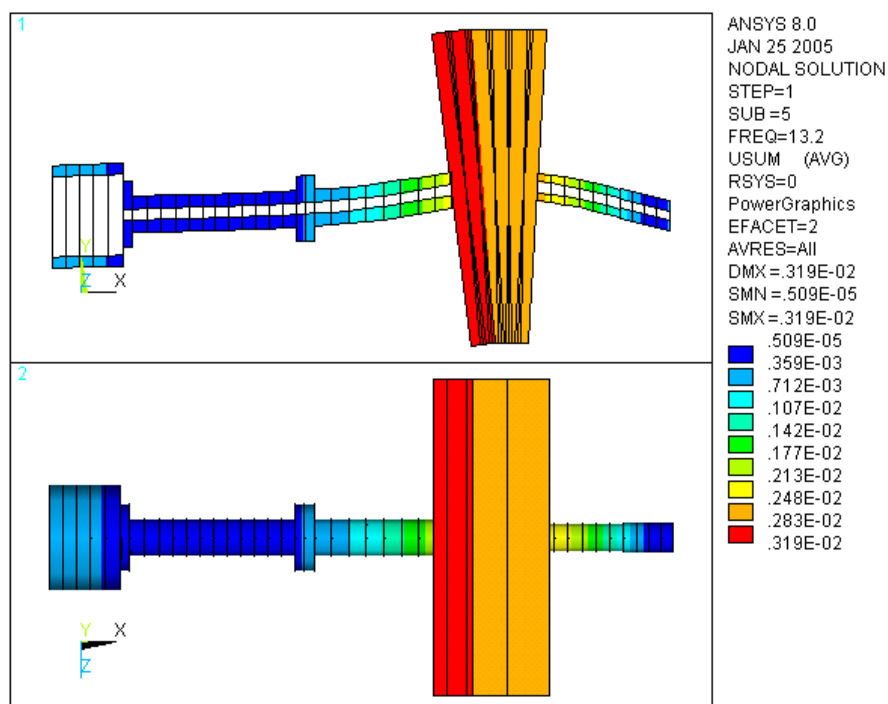
Para o primeiro e segundo modos de vibrar, cujas velocidades angulares críticas de precessão direta e reversa existem, seus valores foram determinados numericamente e encontram-se na tabela 4.5, expressos em termos de frequências em Hertz. Os modos de vibrar associados a estas velocidades angulares críticas estão nas figuras 4.5 a 4.8. Nelas comprova-se o dito por BARP [3], SCHWIRZER [40] e SIMON [41], citado na seção 2.3.1, de que a primeira velocidade angular crítica é regida essencialmente pelo movimento do gerador, sendo que a influência da turbina surge somente a partir da segunda.

**Tabela 4.5:** Velocidades angulares críticas da Máquina A na condição de disparo.

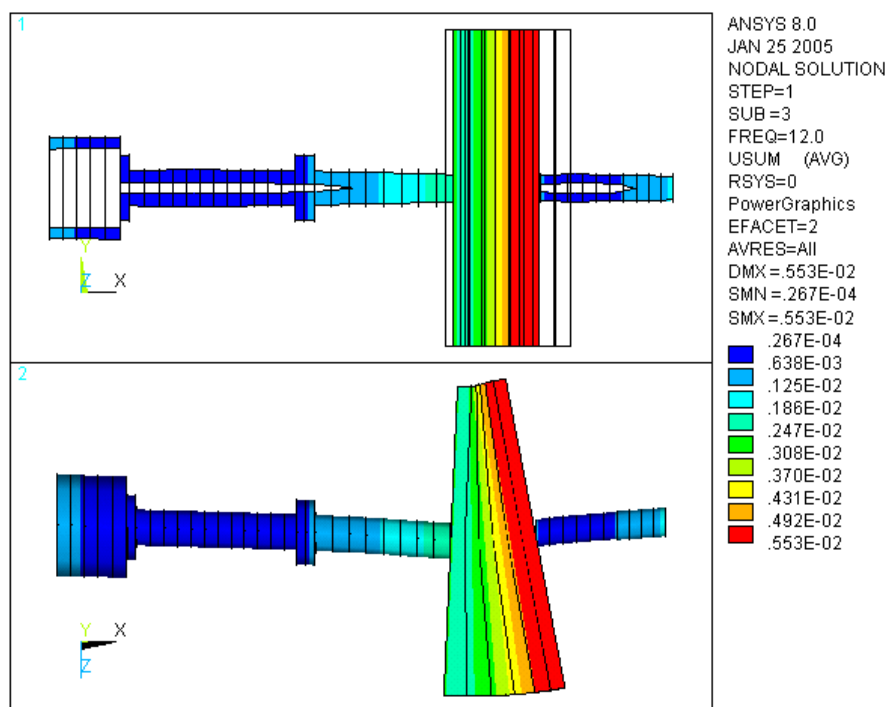
Tipo	Frequência Angular Crítica
Primeira Reversa	$f_{crit_1}^{cw} = 10,36 \text{ Hz}$
Primeira Direta	$f_{crit_1}^{fw} = 13,16 \text{ Hz}$
Segunda Reversa	$f_{crit_2}^{cw} = 12,00 \text{ Hz}$
Segunda Direta	$f_{crit_2}^{fw} = 33,13 \text{ Hz}$



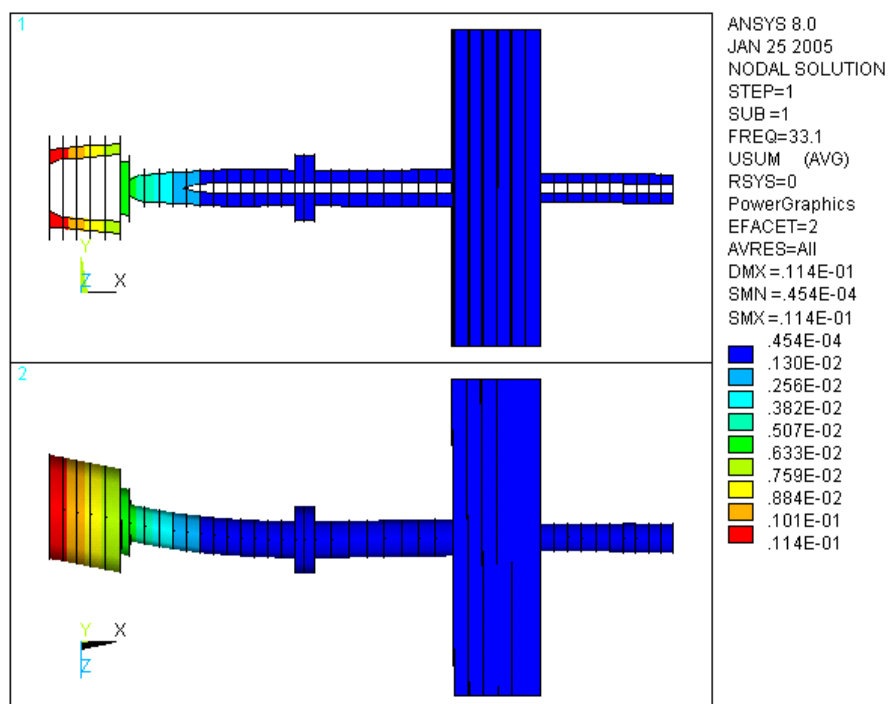
**Figura 4.5:** Modo de vibrar da Máquina A associado à primeira velocidade angular crítica de precessão reversa.



**Figura 4.6:** Modo de vibrar da Máquina A associado à primeira velocidade angular crítica de precessão direta.



**Figura 4.7:** Modo de vibrar da Máquina A associado à segunda velocidade angular crítica de precessão reversa.

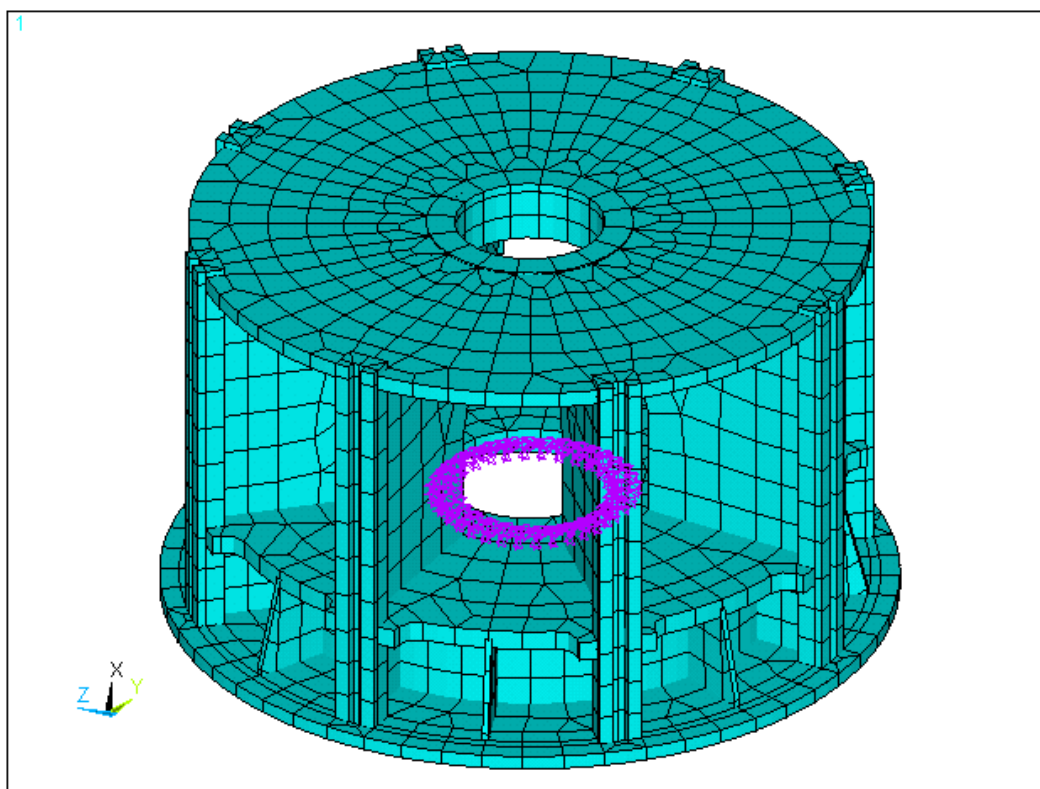


**Figura 4.8:** Modo de vibrar da Máquina A associado à segunda velocidade angular crítica de precessão direta.

### 4.2.3. Resultados pelo método da SMC

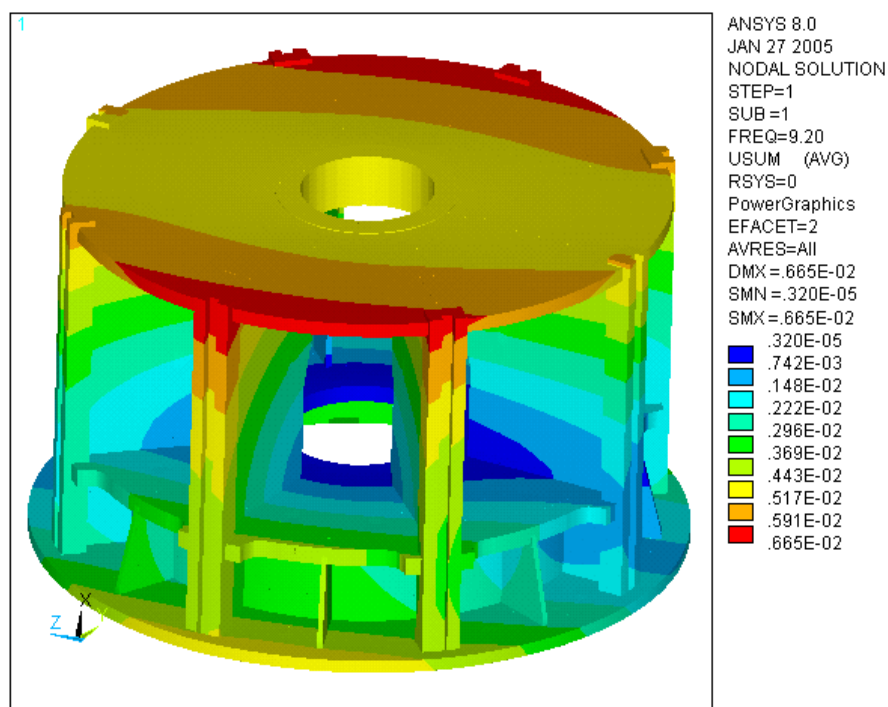
Para a comparação de ambos os métodos de cálculo e verificação da influência do gerador no movimento da estrutura, os mesmos cálculos realizados com o método tradicional são repetidos com o método da SMC, que é capaz de considerar as propriedades de massa e rigidez distribuídas do rotor do gerador.

Para que a SMC seja usada para o cálculo da linha de eixo da turbina, primeiro é preciso que os modos naturais e restritos da subestrutura sejam determinados, como explicado na seção 3.2. Abaixo, na figura 4.9, vê-se o modelo em elementos finitos do rotor do gerador, composto por 9.286 nós, 1.582 elementos de casca e 576 elementos sólidos, todos de segunda ordem. As condições de contorno, correspondentes ao acoplamento com o eixo estão marcadas em roxo. Para a intuição da natureza dinâmica do movimento, os quatro primeiros modos naturais do gerador estão reproduzidos nas figuras 4.10 a 4.13, apesar de que os dez primeiros modos são considerados para a simulação do sistema.

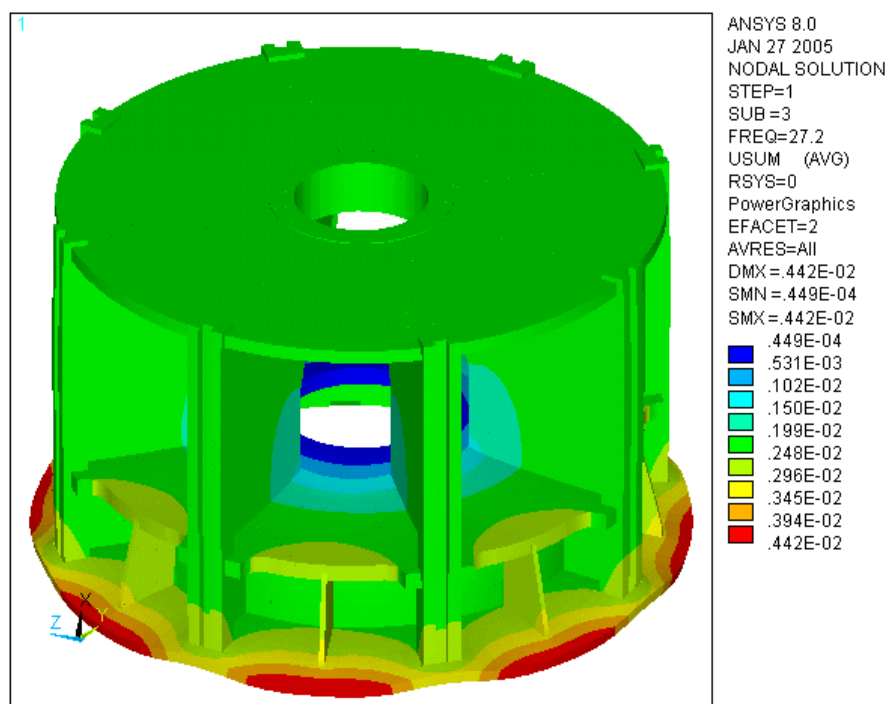


**Figura 4.9:** Modelo em elementos finitos da subestrutura do rotor do gerador da Máquina A e condições de contorno.

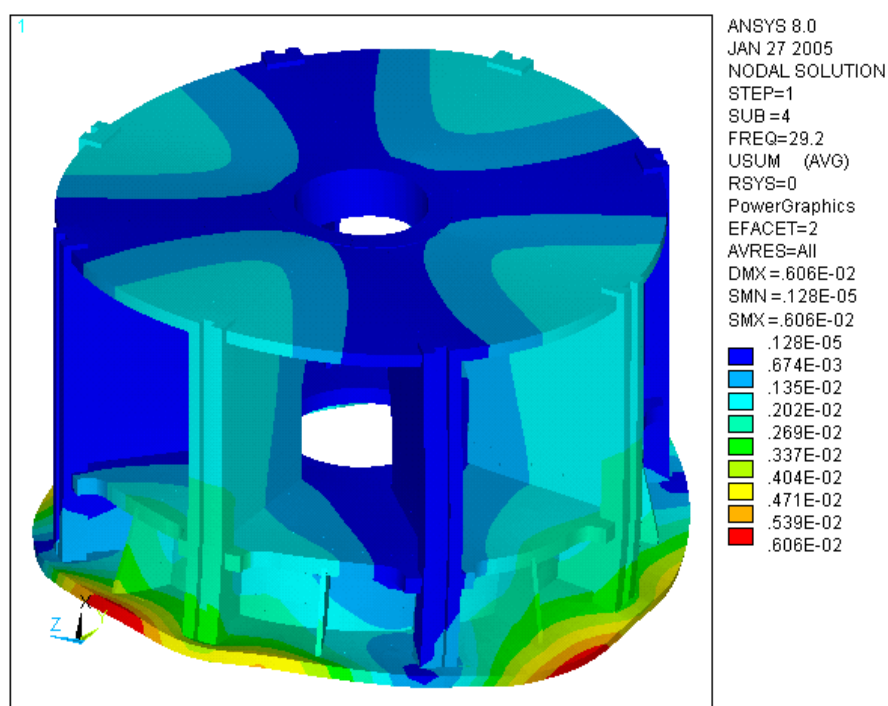




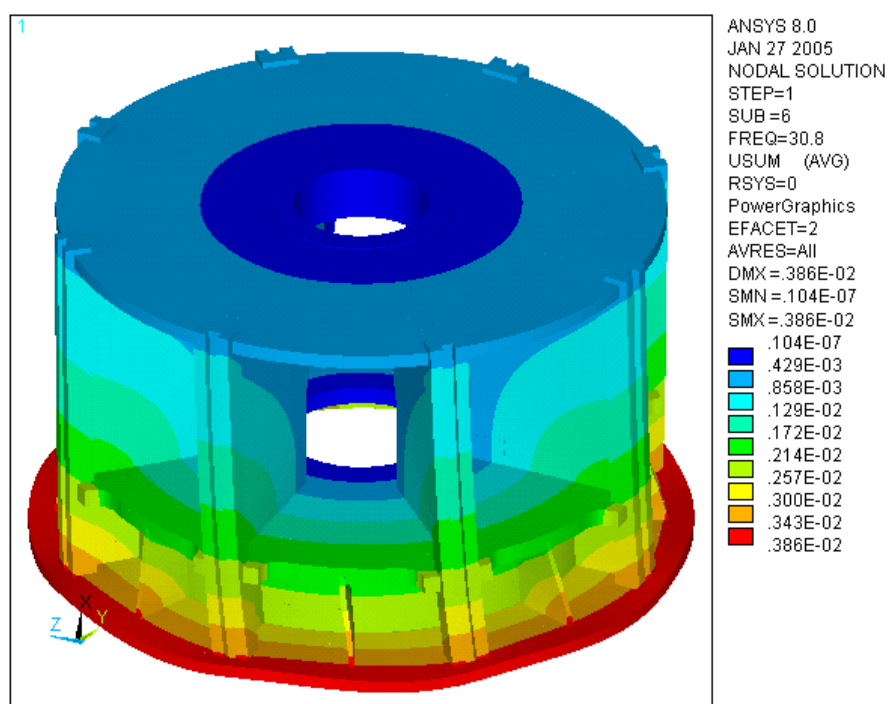
**Figura 4.10:** Primeiro modo natural da subestrutura do rotor do gerador da Máquina A.



**Figura 4.11:** Segundo modo natural da subestrutura do rotor do gerador da Máquina A.



**Figura 4.12:** Terceiro modo natural da subestrutura do rotor do gerador da Máquina A.

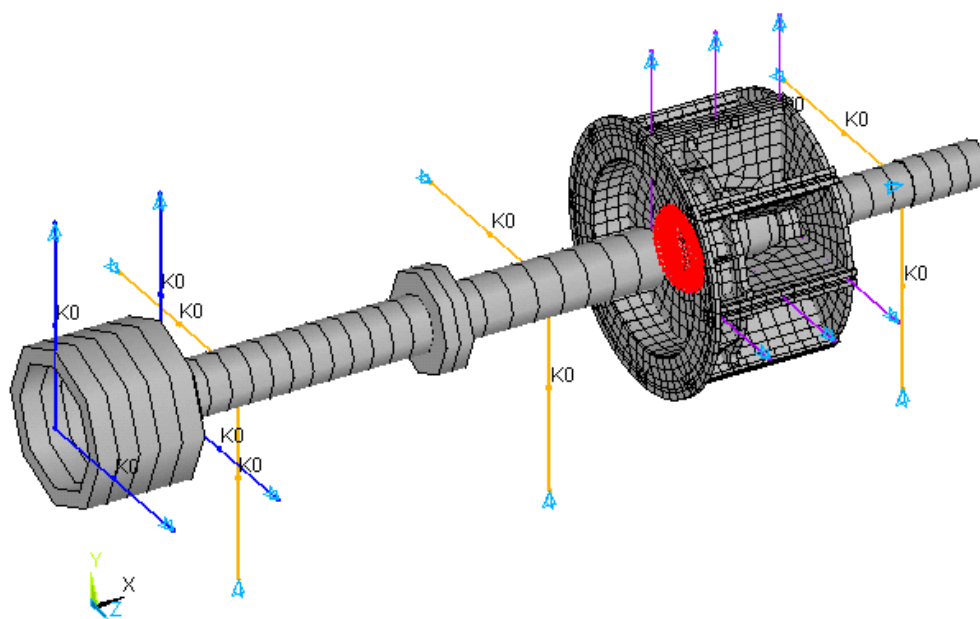


**Figura 4.13:** Quarto modo natural da subestrutura do rotor do gerador da Máquina A.

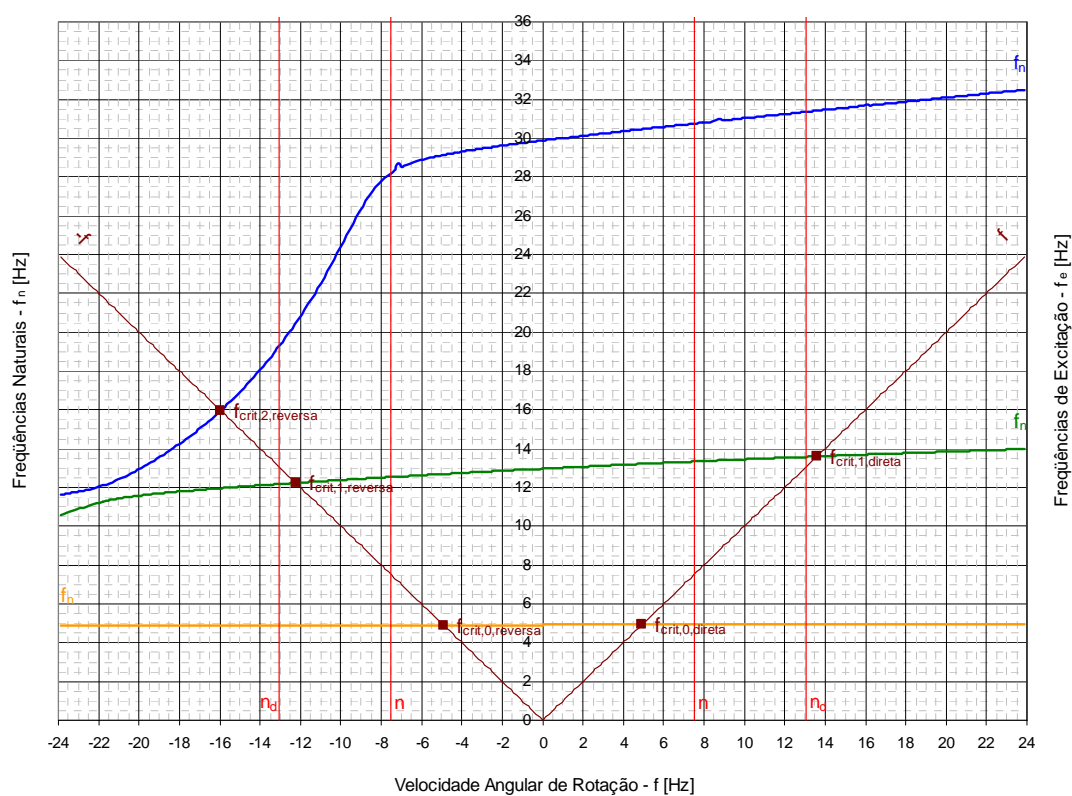
Note-se que os valores das frequências naturais, mostrados nas figuras dos modos naturais, se referem à subestrutura isolada. Quando suas matrizes de massa e rigidez reduzidas, calculadas pela SMC, são integradas ao restante da estrutura, as frequências naturais deste componente deixam de existir e o sistema como um todo passa a contar com novas frequências naturais, que são influenciadas porém pelo movimento da subestrutura.

O primeiro e o segundo modos naturais do rotor do gerador se distinguem pela flexão do cubo ao redor do acoplamento, em uma e duas direções. Pela forma destes modos e suas frequências na subestrutura isolada, pode-se esperar que eles causem mudanças às velocidades angulares críticas da linha de eixo e seus modos de vibrar associados. Por outro lado, o segundo e quarto modos naturais apresentam, respectivamente, movimento axial e torsional do cubo em relação ao acoplamento que, apesar de suas frequências, mas por conta de suas formas, não devem causar nenhum efeito significativo sobre movimento da estrutura completa.

A integração da subestrutura ao modelo do sistema completo pode ser observada na figura 4.14. Apesar de nela estarem mostrados todos os elementos finitos que compõem o rotor do gerador, apenas as suas matrizes de massa e rigidez reduzidas pela SMC são somadas às matrizes globais do sistema. Os seus únicos nós, que são incluídos no modelo, são aqueles referentes ao acoplamento e que servem para estabelecer os vínculos rígidos, marcados em vermelho, entre o cubo e o eixo. Os valores calculados pela SMC são vistos no diagrama de Campbell da figura 4.15, as velocidades angulares críticas, resolvidas numericamente, são dadas na tabela 4.6 e os modos de vibrar associados estão nas figuras 4.16 a 4.21.



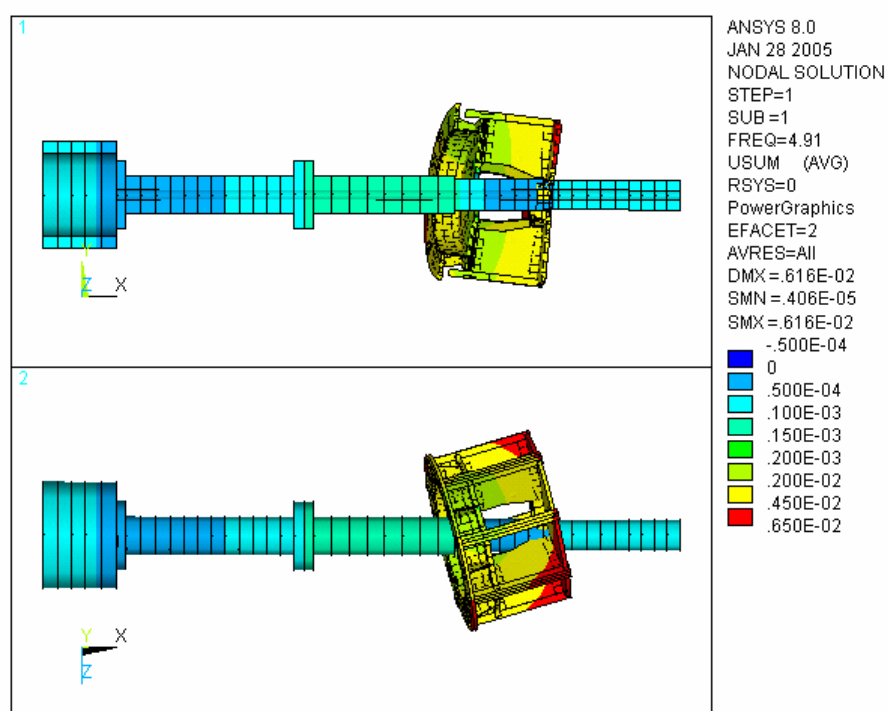
**Figura 4.14:** Modelo em elementos finitos da linha de eixo da Máquina A calculada pelo método da SMC.

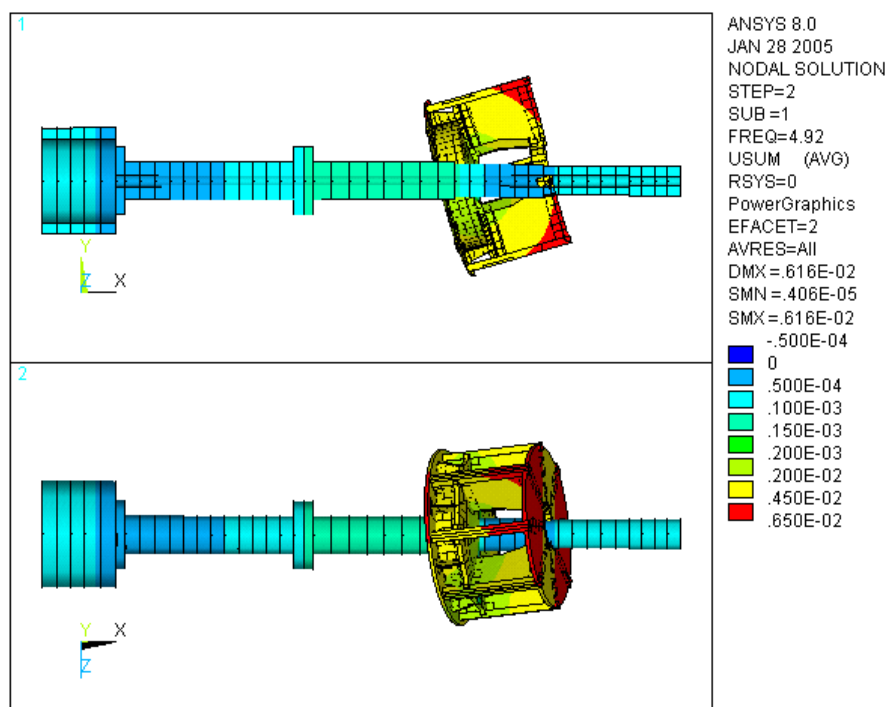


**Figura 4.15:** Diagrama de Campbell para a Máquina A na condição de disparo, calculada pelo método da SMC.

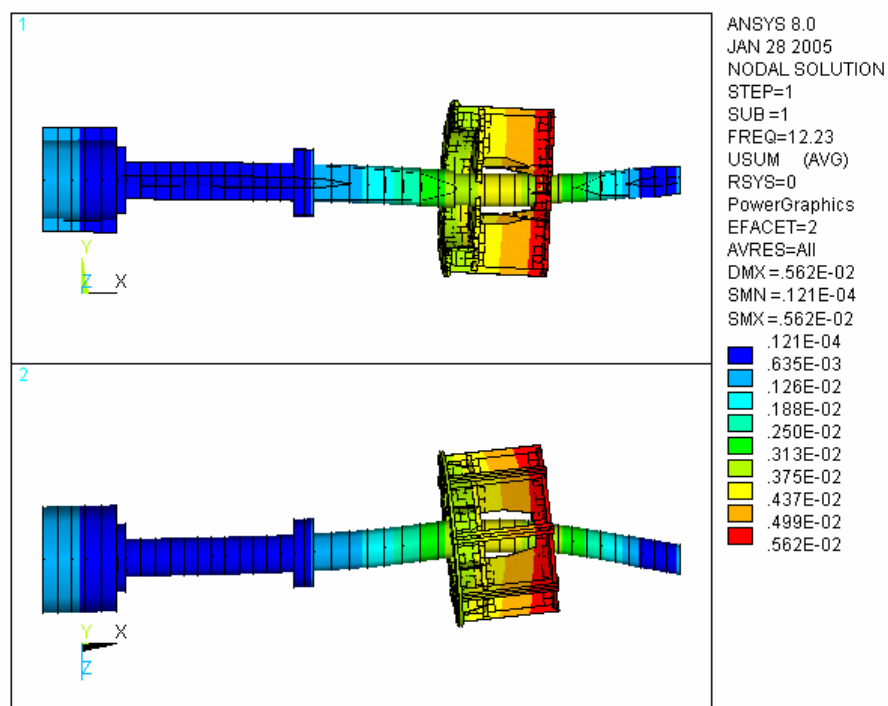
**Tabela 4.6:** Velocidades angulares críticas da Máquina A na condição de disparo.

Tipo	Frequência Angular Crítica
Primeira Reversa	$f_{crit_1}^{cw} = 4,91 \text{ Hz}$
Primeira Direta	$f_{crit_1}^{fw} = 4,92 \text{ Hz}$
Segunda Reversa	$f_{crit_2}^{cw} = 12,23 \text{ Hz}$
Segunda Direta	$f_{crit_2}^{fw} = 13,60 \text{ Hz}$
Terceira Reversa	$f_{crit_3}^{cw} = 15,96 \text{ Hz}$
Terceira Direta	$f_{crit_3}^{fw} = 33,33 \text{ Hz}$

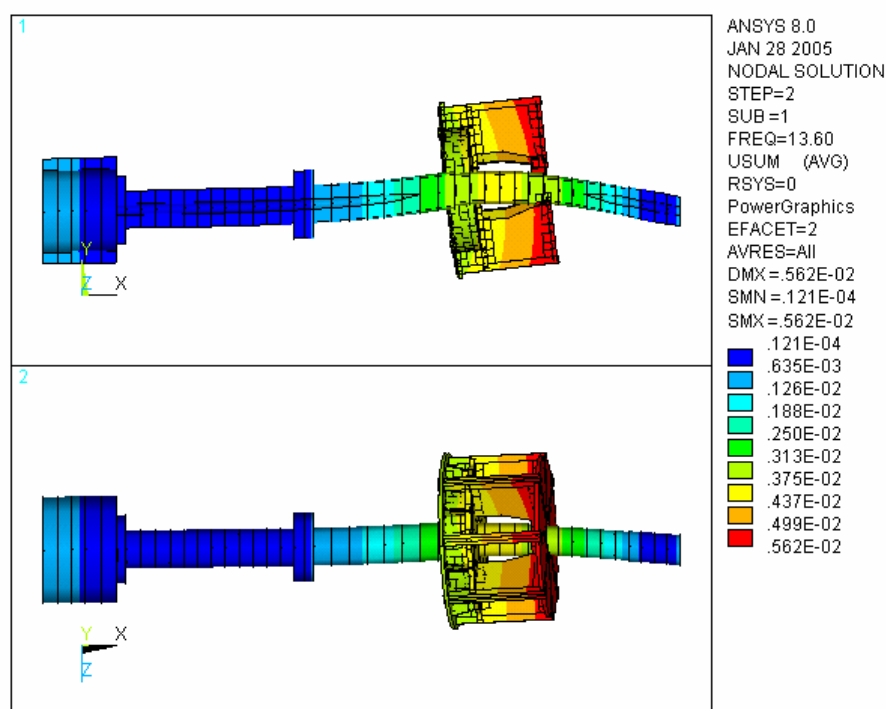
**Figura 4.16:** Modo de vibrar da Máquina A associado à primeira velocidade angular crítica de precessão reversa (escala não uniforme).



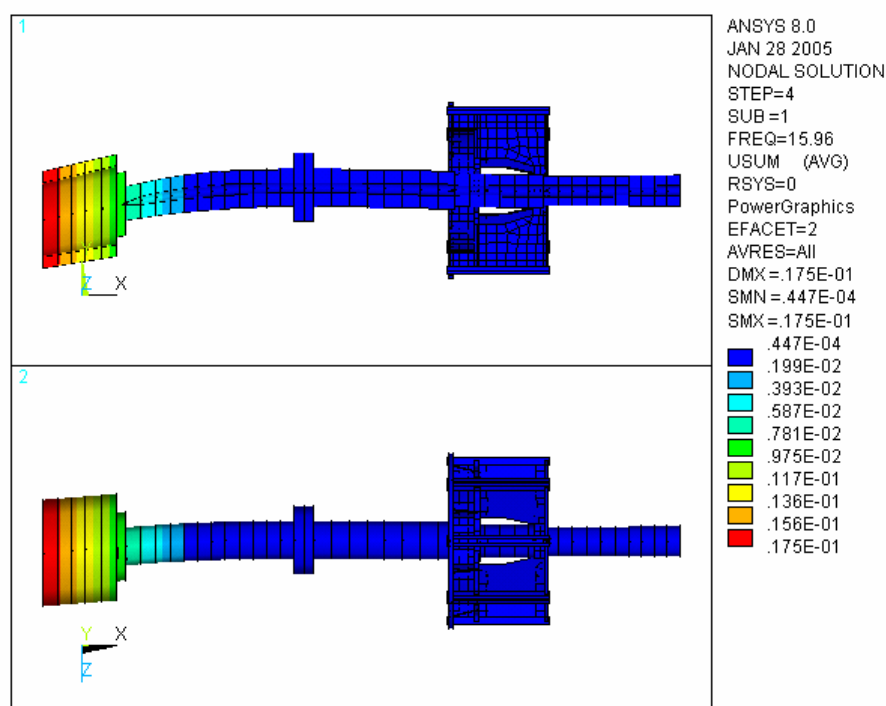
**Figura 4.17:** Modo de vibrar da Máquina A associado à primeira velocidade angular crítica de precessão direta (escala não uniforme).



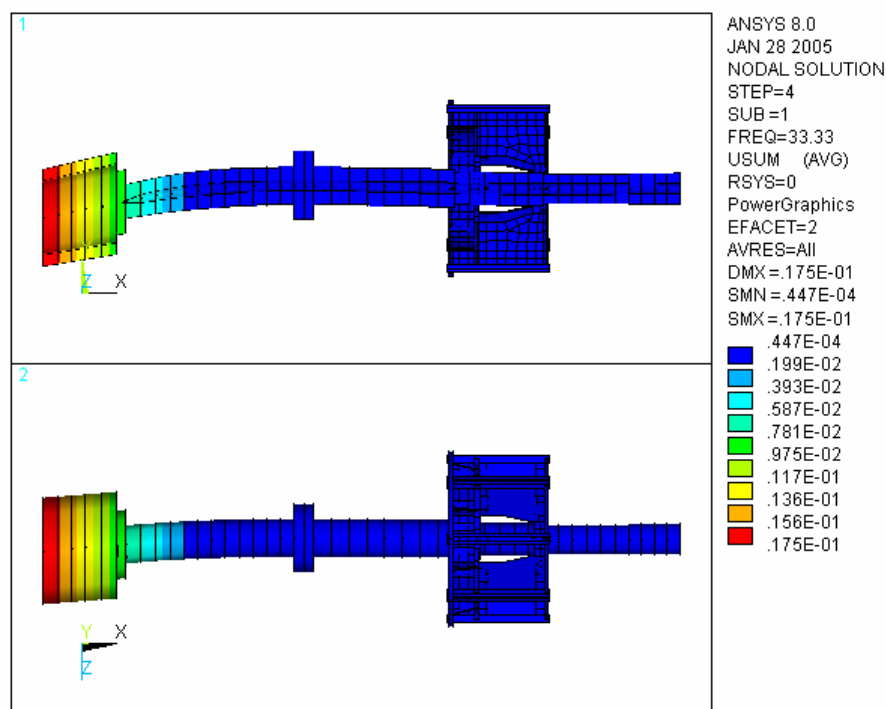
**Figura 4.18:** Modo de vibrar da Máquina A associado à segunda velocidade angular crítica de precessão reversa.



**Figura 4.19:** Modo de vibrar da Máquina A associado à segunda velocidade angular crítica de precessão direta.



**Figura 4.20:** Modo de vibrar da Máquina A associado à terceira velocidade angular crítica de precessão direta.



**Figura 4.21:** Modo de vibrar da Máquina A associado à terceira velocidade angular crítica de precessão direta.

Apesar de o primeiro modo de vibrar da linha de eixo ser essencialmente regido pelo primeiro modo natural da subestrutura do gerador, as suas frequências naturais são diferentes. Isto se deve a que, na simulação isolada do rotor do gerador, os modos naturais são calculados restringindo-se os graus de liberdade da fronteira da subestrutura, como exposto na seção 3.2, sendo que na realidade, no modelo da estrutura completa, ela não é rígida, tendo seu movimento e flexibilidade associados ao eixo da máquina. Isto explica a divergência e mostra que há uma interação entre o gerador e o restante da estrutura. A comparação deste resultado e dos demais, obtidos pela SMC e pelo método tradicional, é realizada na seção a seguir.

#### 4.2.4. Comparação dos resultados

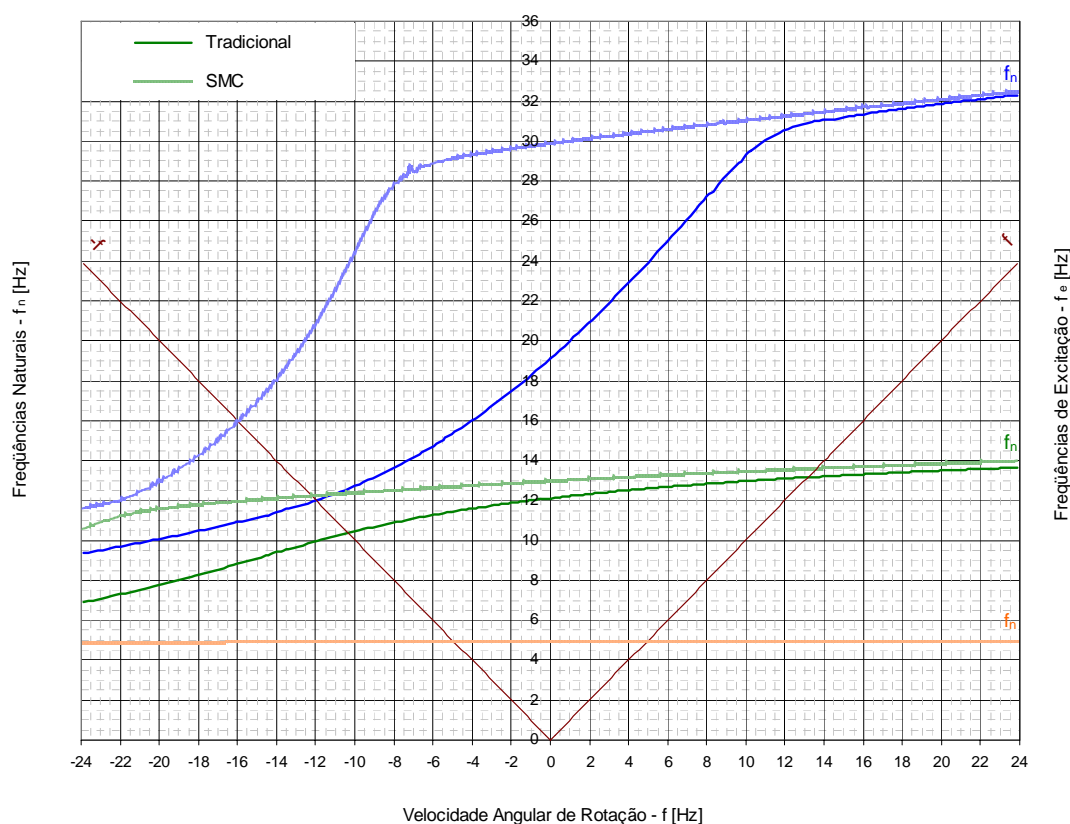
Tendo sido apresentados todos os resultados das análises pelo método tradicional e pelo método da SMC, é preciso que seja feita uma avaliação dos resultados e uma comparação entre eles.

O aspecto mais claro de divergência entre os dois conjuntos de dados é o aparecimento, no cálculo pela SMC, de um modo de vibrar sem correspondente no



modelo tradicional. O modo relativo à primeira velocidade angular crítica, determinada pela SMC, se distingue pelo movimento flexional do cubo do gerador, como um corpo elástico, ao redor do seu ponto de fixação ao eixo, como observado nas figuras 4.16 e 4.17. Assim, é claro o motivo pelo qual este modo de vibrar não possui um análogo no método tradicional, pois, neste último, o rotor do gerador é considerado como um corpo rígido.

Contudo, a primeira e a segunda velocidades angulares críticas, obtidas pelo método tradicional, são comparáveis à segunda e à terceira, calculadas pela SMC, como pode ser comprovado confrontando-se os seus respectivos modos de vibrar, vistos nas figuras 4.5, 4.6 e 4.18, 4.19, para um par de frequências reversas e diretas, e também nas figuras 4.7, 4.8 e 4.20, 4.21, para outro par. Para facilitar a visualização desta correspondência e a comparação dos valores, os resultados conseguidos por ambos os métodos estão no diagrama de Campbell da figura 4.22 e na tabela 4.7.



**Figura 4.22:** Diagrama de Campbell para a Máquina A na condição de disparo, calculado pelo método tradicional e pela SMC.

**Tabela 4.7:** Velocidades angulares críticas da Máquina A na condição de disparo, calculadas pelo método tradicional e pela SMC.

Método Tradicional		SMC		Desvio
Tipo	Frequência Angular Crítica	Tipo	Frequência Angular Crítica	
-	-	Primeira Reversa	$f_{crit_1}^{cw} = 4,91 \text{ Hz}$	-
-	-	Primeira Direta	$f_{crit_1}^{fw} = 4,92 \text{ Hz}$	-
Primeira Reversa	$f_{crit_1}^{cw} = 10,36 \text{ Hz}$	Segunda Reversa	$f_{crit_2}^{cw} = 12,23 \text{ Hz}$	18,1%
Primeira Direta	$f_{crit_1}^{fw} = 13,16 \text{ Hz}$	Segunda Direta	$f_{crit_2}^{fw} = 13,60 \text{ Hz}$	3,34%
Segunda Reversa	$f_{crit_2}^{cw} = 12,00 \text{ Hz}$	Terceira Reversa	$f_{crit_3}^{cw} = 15,96 \text{ Hz}$	33,0%
Segunda Direta	$f_{crit_2}^{fw} = 33,13 \text{ Hz}$	Terceira Direta	$f_{crit_3}^{fw} = 33,33 \text{ Hz}$	0,60%

Além da presença da frequência natural referente ao movimento do cubo do gerador ao redor do acoplamento com eixo, percebe-se, no diagrama de Campbell acima, que há um desvio considerável entre a curva da segunda frequência natural do método tradicional e a sua análoga no método da SMC, que é a curva da sua terceira frequência natural. É interessante observar que este desvio é mais significativo por volta de -9,20 Hz a 9,20 Hz, que, em termos de valores absolutos, é a frequência do primeiro modo natural do rotor do gerador na subestrutura isolada. Assim, parece claro o impacto das propriedades de massa e rigidez distribuídas do gerador na dinâmica do sistema.

Entretanto, apesar deste efeito, as velocidades angulares críticas diretas da linha de eixo não se mostram tão afetadas. Isto se deve porque, neste caso, elas se localizam um pouco afastadas da região que é mais influenciada pela elasticidade do gerador. A consistência desta afirmação é confirmada pelo fato de que as velocidades angulares críticas reversas, que se notabilizam por serem menores do que as diretas, têm seus valores mais alterados.

#### 4.2.5. Discussão dos resultados

Como acaba de ser observado, as principais mudanças causadas pela utilização do método da SMC, para a descrição das propriedades de inércia e rigidez distribuídas do rotor do gerador, são o aparecimento de um novo modo de vibrar da linha de eixo, dominado pelo movimento do gerador, e a variação das curvas das frequências naturais, por volta de -9,20 Hz a 9,20 Hz.

Por mais que este novo modo de vibrar envolva essencialmente apenas a vibração do gerador, pode ser visto na sua forma, na figura 4.17, que ele implica em deformações do eixo, ainda que proporcionalmente bem menores. Portanto, caso a velocidade angular crítica correspondente a este modo esteja próxima ao ponto de operação da Máquina A, pode haver prejuízos ao bom funcionamento da turbina. Isto justifica a modelagem do gerador pelo método da SMC, ao invés do método tradicional.

Por exemplo, se os fatores dinâmicos de amplificação de deslocamento forem de interesse na condição de operação nominal da máquina, onde a rotação é de 7,5 Hz e para a qual as discrepâncias entre as curvas das frequências naturais do segundo modo de vibrar ainda são significativas, como visto no diagrama de Campbell da figura 4.22, o efeito da flexibilidade do gerador não é desprezível e, portanto, se sugere que ele seja levado em conta através do método da SMC.

Por outro lado, se a preocupação for apenas com os valores das frequências angulares críticas e garantir, segundo um dado critério, como o de SCHEIDL [39], citado na seção 2.3.1, que elas se encontrem suficientemente afastadas das rotações de operação da máquina, seria suficiente a utilização do método tradicional. A mesma afirmação é válida, caso o dimensionamento mecânico dos componentes da máquina for baseado em critérios puramente estáticos e se seus fatores de segurança, assim como aqueles para se avaliar a distância entre as frequências de rotação do eixo e as velocidades angulares críticas, forem exagerados.

Com base nos resultados da Máquina A, pode-se dizer, resumidamente, que se for desejada uma maior precisão para os cálculos, de maneira a se reduzirem os fatores de segurança, ou se as características dinâmicas do sistema forem de interesse em diversas condições de operação, deve-se utilizar o modelo flexível do rotor gerador, descrito pela SMC. No entanto, se somente cálculos simples e critérios

estáticos, para o dimensionamento da turbina forem usados, em conjunto com fatores de segurança altos, a consideração do gerador como um corpo rígido é aceitável e, conseqüentemente, o método tradicional também.

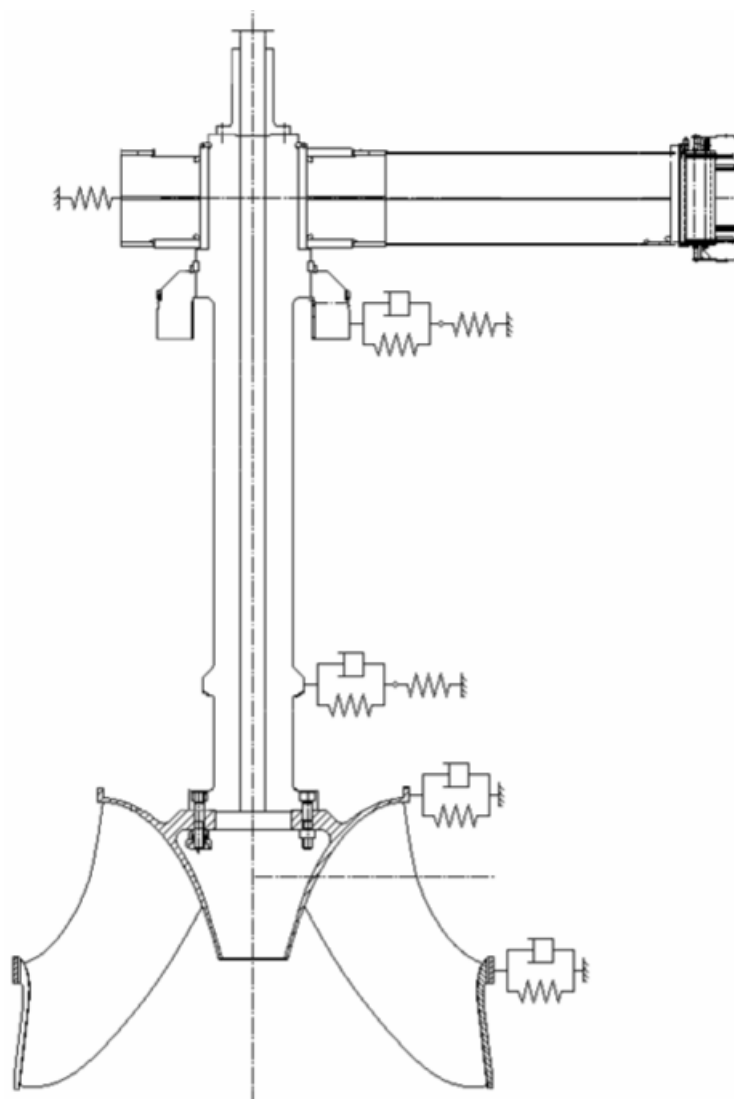
Estas conclusões são tiradas somente da análise da Máquina A. Por este motivo, com o intuito de se comprovar ou se relativizar os comentários acima, a seguir, todas as simulações são repetidas para a Máquina B, que possui características bastante diferentes.

### **4.3. Máquina B**

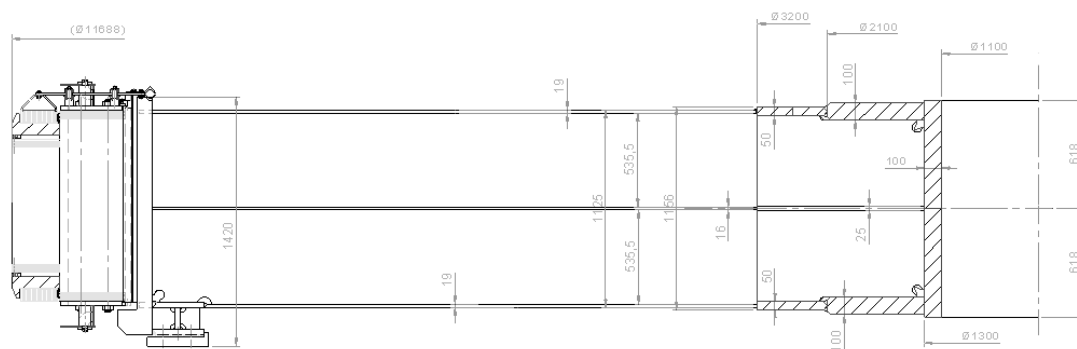
#### **4.3.1. Informações da máquina**

Como planejado, depois da análise da Máquina A, que conteve algumas simplificações, procede-se ao estudo da Máquina B, que é descrita por um modelo mais detalhado, que contempla o amortecimento e o empuxo magnético, além de servir para a avaliação da condição de operação normal, assim como a de disparo. Em teoria, este caso deve proporcionar resultados mais precisos e mais próximos à realidade do que o proposto antes, pois ele conta com mais elementos para descrever o comportamento do sistema.

O cubo do rotor da Máquina B, ao contrário da Máquina A, é fixado ao eixo por um flange de acoplamento inferior e outro superior, ademais, por se tratar de uma turbina hidráulica de baixa rotação, como visto na tabela 4.8, o gerador é proporcionalmente muito maior, em relação ao resto da máquina, do que no caso anterior, de onde espera-se que a flexibilidade do rotor tenha grande influência sobre o movimento da estrutura. Na tabela 4.8 ainda encontram-se outras características da turbina, enquanto que nas tabelas 4.9, 4.10 e 4.11 estão as propriedades de inércia, rigidez e amortecimento do sistema. Já as propriedades do material são as mesmas da tabela 4.4. Finalmente, o corte pela linha de eixo e o detalhe do rotor do gerador podem ser observados nas figuras 4.23 e 4.24.



**Figura 4.23:** Corte pela linha de eixo da Máquina B.



**Figura 4.24:** Detalhe do rotor do gerador da Máquina B.

**Tabela 4.8:** Principais características da Máquina B.

Dado	Símbolo	
Tipo de Turbina	-	Francis
Orientação do Eixo	-	Vertical
Queda Líquida Nominal	H [m]	31,1
Potência Nominal	P [MW]	62
Rotação Nominal	n [rpm]	93,8
Rotação de Disparo	$n_d$ [rpm]	177
Diâmetro da Turbina	- [mm]	5.500
Diâmetro do Gerador	- [mm]	11.720

**Tabela 4.9:** Propriedades de inércia da Máquina B.

Dado	Símbolo	
Massa do Rotor da Turbina	$m_r$ [kg]	65.000
Massa Hidrodinâmica	$m_h$ [kg]	70.740
Momento Polar de Inércia do Rotor	$J_{P,r}$ [kg·m <sup>2</sup> ]	72.280
Momento Polar de Inércia Hidrodinâmico	$J_{P,h}$ [kg·m <sup>2</sup> ]	252.000
Momento Transversal de Inércia do Rotor	$J_{T,r}$ [kg·m <sup>2</sup> ]	36.140
Momento Transversal de Inércia Hidrodinâmico	$J_{T,h}$ [kg·m <sup>2</sup> ]	126.000
Massa do Gerador	- [kg]	252.000
Momento Polar de Inércia do Gerador	- [kg·m <sup>2</sup> ]	5.808.000
Momento Transversal de Inércia do Gerador	- [kg·m <sup>2</sup> ]	2.935.000

**Tabela 4.10:** Coeficientes de rigidez da Máquina B.

Dado	Símbolo	Normal	Disparo
Rigidez do Labirinto da Coroa	- [kN/mm]	39,48	172,8
Rigidez do Labirinto do Cubo	- [kN/mm]	9,264	40,56
Rigidez do Mancel Guia da Turbina	- [kN/mm]	1.448	1.800
Rigidez do Mancel Guia do Gerador	- [kN/mm]	684,6	1.100
Empuxo Magnético	- [kN/mm]	-256	-25,6

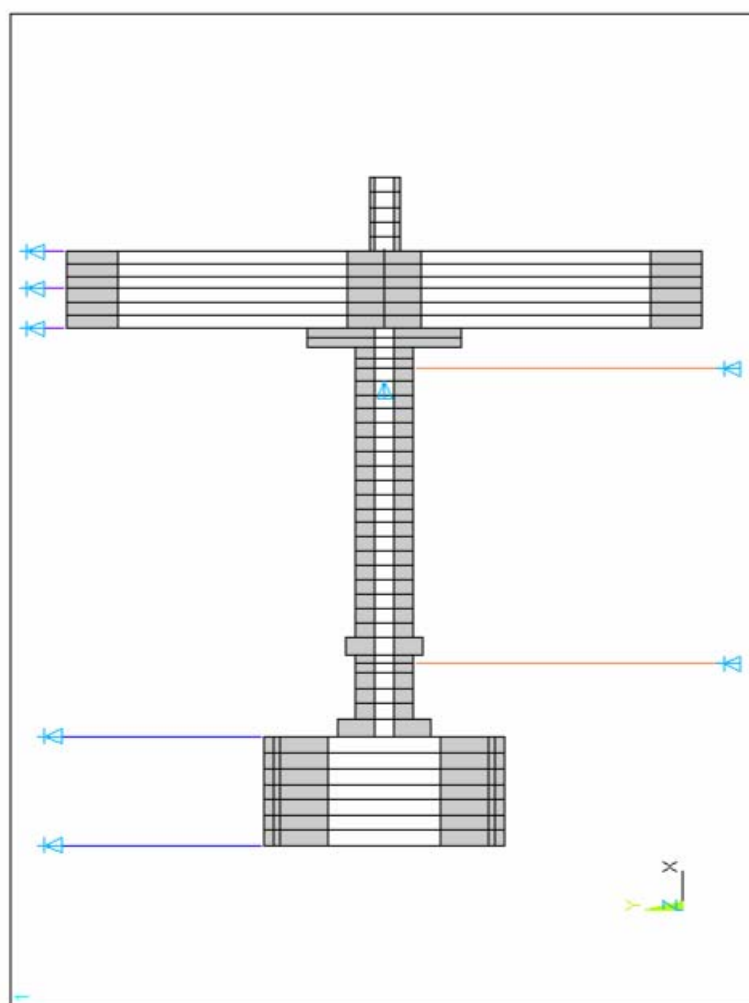
**Tabela 4.11:** Coeficientes de amortecimento da Máquina B.

Dado	Símbolo	Normal	Disparo
Amortecimento do Labirinto da Coroa	- [kN·s/mm]	16,41	24,68
Amortecimento do Labirinto do Cubo	- [kN·s/mm]	3,852	5,791
Amortecimento do Mancel Guia da Turbina	- [N·s/mm]	8,412	8,412
Amortecimento do Mancel Guia do Gerador	- [N·s/mm]	5,887	5,888

#### 4.3.2. Resultados pelo método tradicional

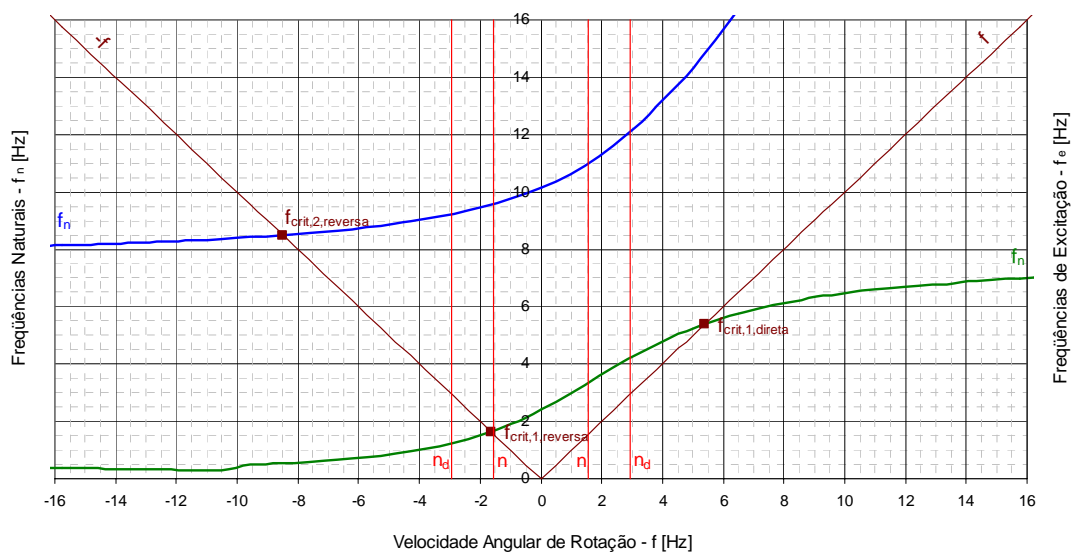
De maneira análoga ao realizado para a Máquina A, os resultados são obtidos para a Máquina B. O modelo em elementos finitos, que representa a linha de eixo mostrada na figura 4.23 e que foi utilizado para a simulação numérica, é visto na figura 4.25. Na sequência estão representados, nas figuras 4.26 e 4.27 os diagramas de Campbell, para a condição de operação normal e para a condição de disparo. Neles estão indicadas as curvas das duas primeiras frequências naturais da linha de

eixo, suas velocidades angulares críticas e suas frequências de rotação. Já por estes gráficos, percebe-se que não há a segunda velocidade angular crítica de precessão direta, da mesma forma que a terceira e a quarta velocidades angulares críticas de precessão direta também não existiam para a Máquina A, calculada pelo método tradicional.

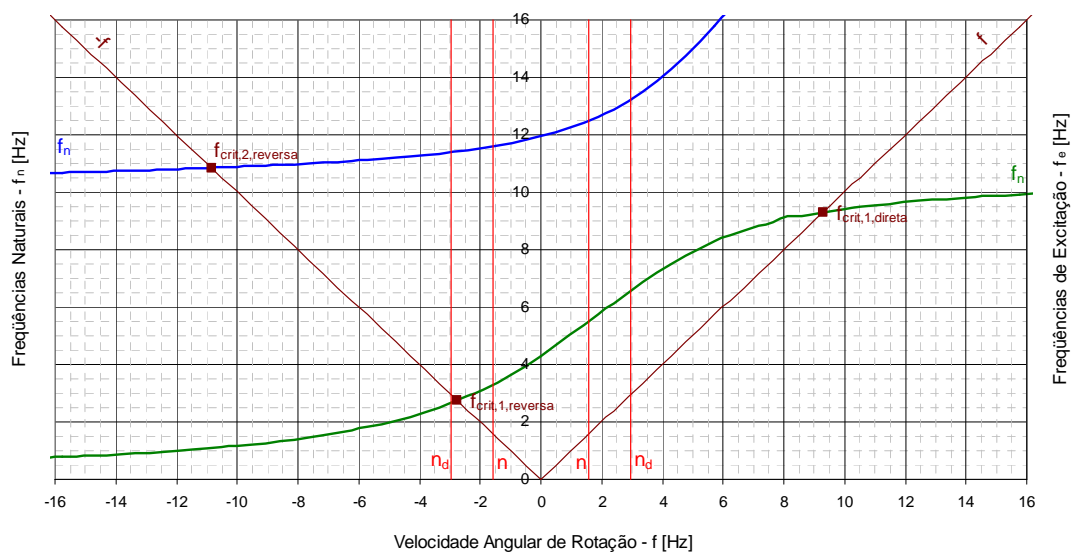


**Figura 4.25:** Corte pelo modelo de elementos finitos da Máquina B.





**Figura 4.26:** Diagrama de Campbell da Máquina B na condição de operação normal.



**Figura 4.27:** Diagrama de Campbell da Máquina B na condição de disparo.

A partir dos gráficos acima e das tabelas 4.12 e 4.13, que mostram os valores das velocidades angulares críticas avaliados numericamente, percebe-se que elas são menores na condição de operação normal do que no disparo, fazendo com que elas estejam mais próximas às frequências de rotação da máquina e que, então, os fatores dinâmicos de amplificação de deslocamento sejam maiores. Assim, sob este ponto de vista, pode-se dizer que este é o regime crítico de funcionamento da turbina e que o

dimensionamento da linha de eixo deve se concentrar nesta condição. Este comportamento já era de se esperar, pois, como se pode observar na tabela 4.10, os coeficientes de rigidez são menores na condição de operação normal.

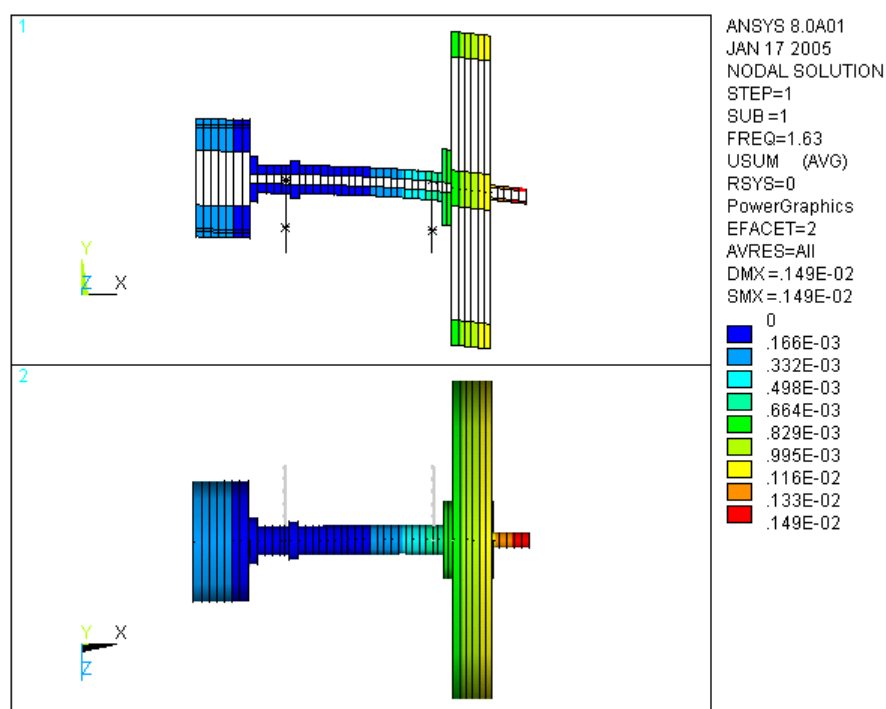
Fora os valores de velocidades angulares críticas, mostrados nas tabelas 4.12 e 4.13, os seus modos de vibrar associados estão nas figuras 4.28 a 4.30, para a condição de operação normal, e nas figuras 4.31 a 4.33, para a condição de disparo. Mais uma vez, a exemplo da Máquina A, é possível verificar as afirmações de BARP [3], SCHWIRZER [40] e SIMON [41], na seção 2.3.1, de que o primeiro modo de vibrar é dominado pelo gerador, enquanto que o movimento da turbina se faz sentir apenas a partir do segundo.

**Tabela 4.12:** Velocidades angulares críticas da Máquina B na condição normal.

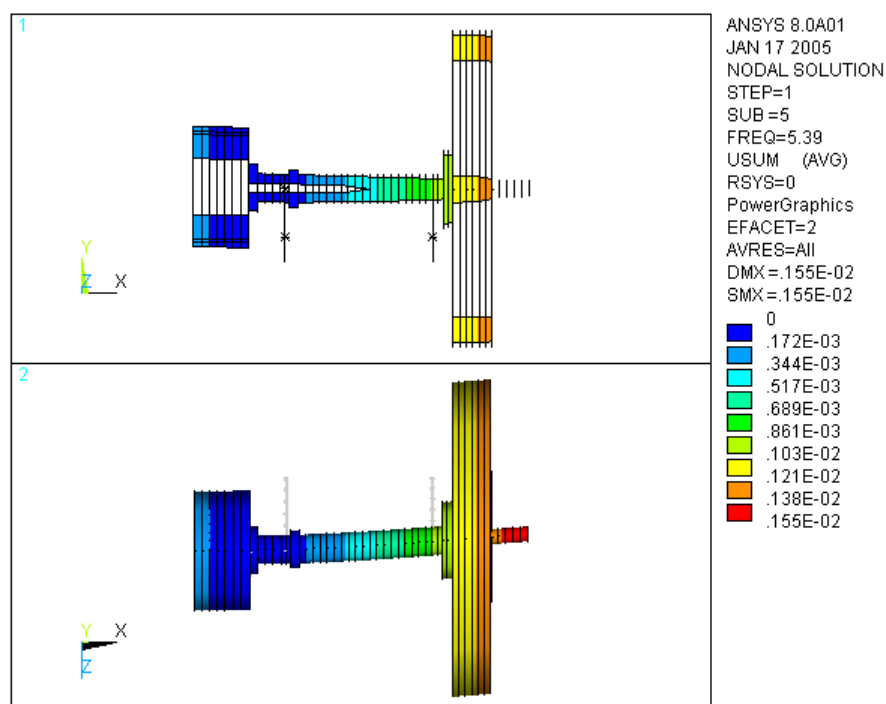
Tipo	Frequência Angular Crítica
Primeira Reversa	$f_{crit_1}^{cw} = 1,633 \text{ Hz}$
Primeira Direta	$f_{crit_1}^{fw} = 5,388 \text{ Hz}$
Segunda Reversa	$f_{crit_2}^{cw} = 8,496 \text{ Hz}$

**Tabela 4.13:** Velocidades angulares críticas da Máquina B na condição de disparo.

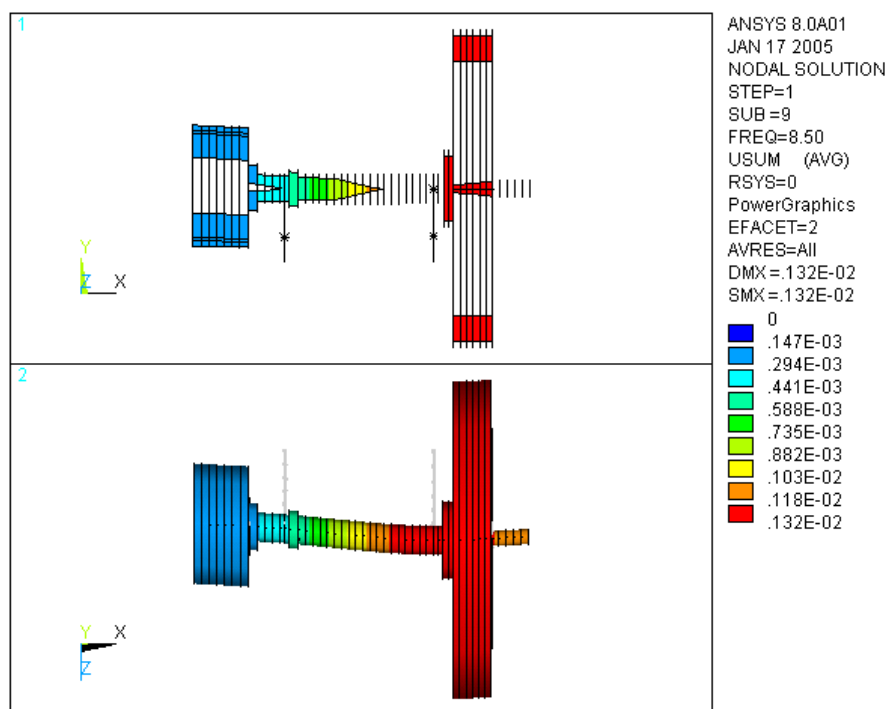
Tipo	Frequência Angular Crítica
Primeira Reversa	$f_{crit_1}^{cw} = 2,748 \text{ Hz}$
Primeira Direta	$f_{crit_1}^{fw} = 9,312 \text{ Hz}$
Segunda Reversa	$f_{crit_2}^{cw} = 10,84 \text{ Hz}$



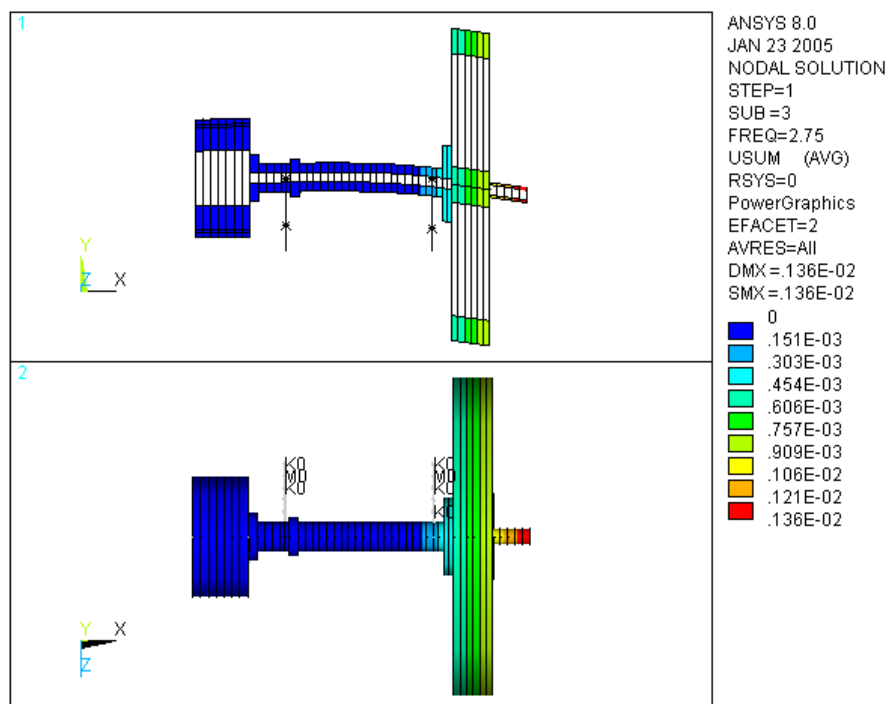
**Figura 4.28:** Modo de vibrar da Máquina B associado à primeira velocidade angular crítica de precessão reversa na condição de operação normal.



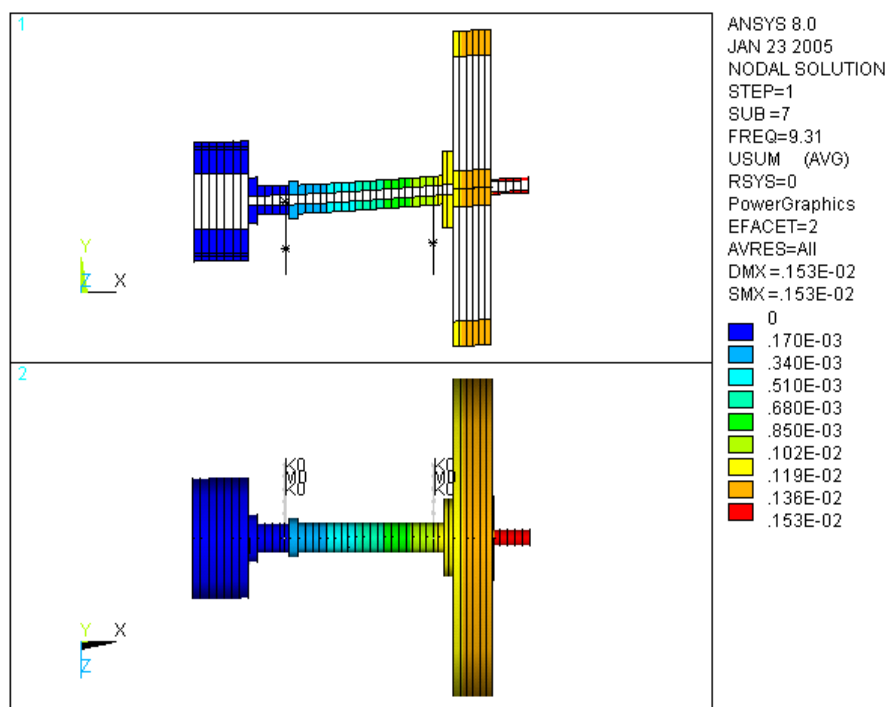
**Figura 4.29:** Modo de vibrar da Máquina B associado à primeira velocidade angular crítica de precessão direta na condição de operação normal.



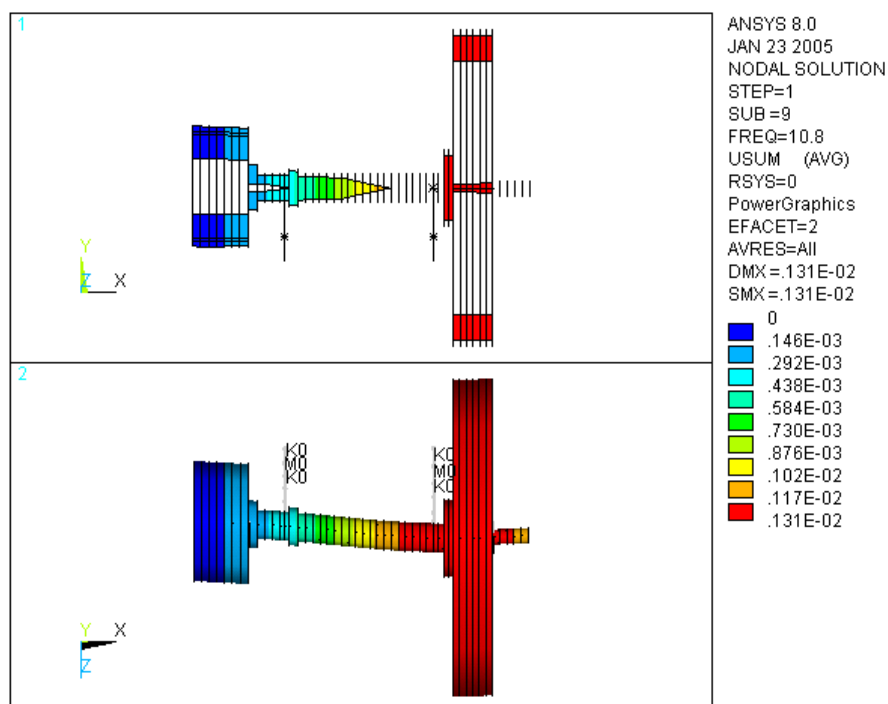
**Figura 4.30:** Modo de vibrar da Máquina B associado à segunda velocidade angular crítica de precessão reversa na condição de operação normal.



**Figura 4.31:** Modo de vibrar da Máquina B associado à primeira velocidade angular crítica de precessão reversa na condição de disparo.



**Figura 4.32:** Modo de vibrar da Máquina B associado à primeira velocidade angular crítica de precessão direta na condição de disparo.

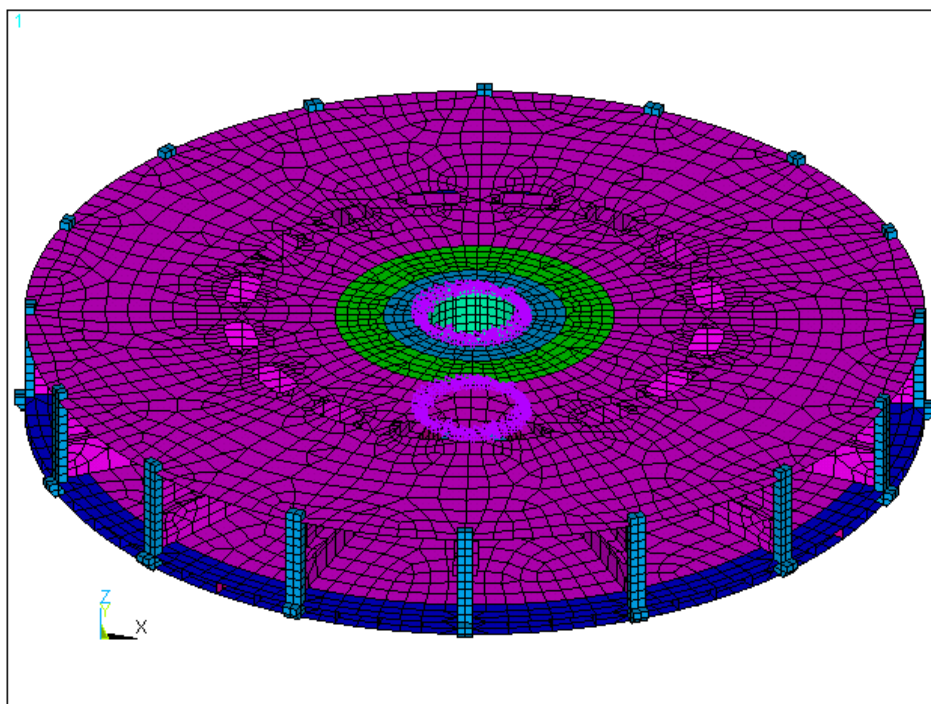


**Figura 4.33:** Modo de vibrar da Máquina B associado à segunda velocidade angular crítica de precessão reversa na condição de disparo.

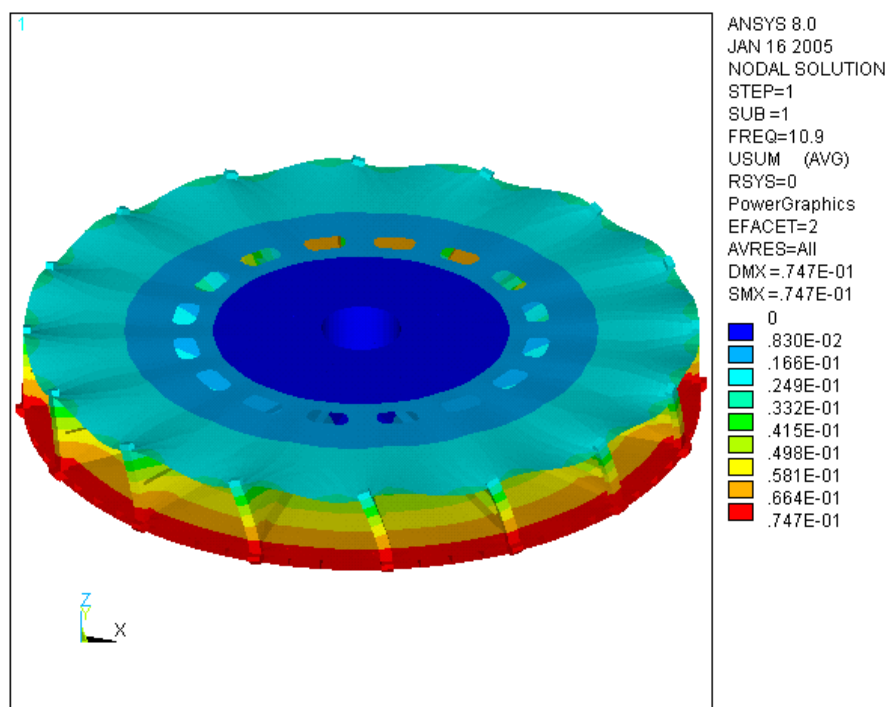
### 4.3.3. Resultados pela SMC

Depois de determinados, pelo método tradicional, as velocidades angulares críticas e seus modos de vibrar associados, eles são novamente calculados, mas agora pelo método da SMC, com o objetivo de se comparar as diferenças e de se verificar qual a interferência das propriedades de massa e rigidez distribuídas do rotor do gerador sobre a resposta dinâmica da estrutura.

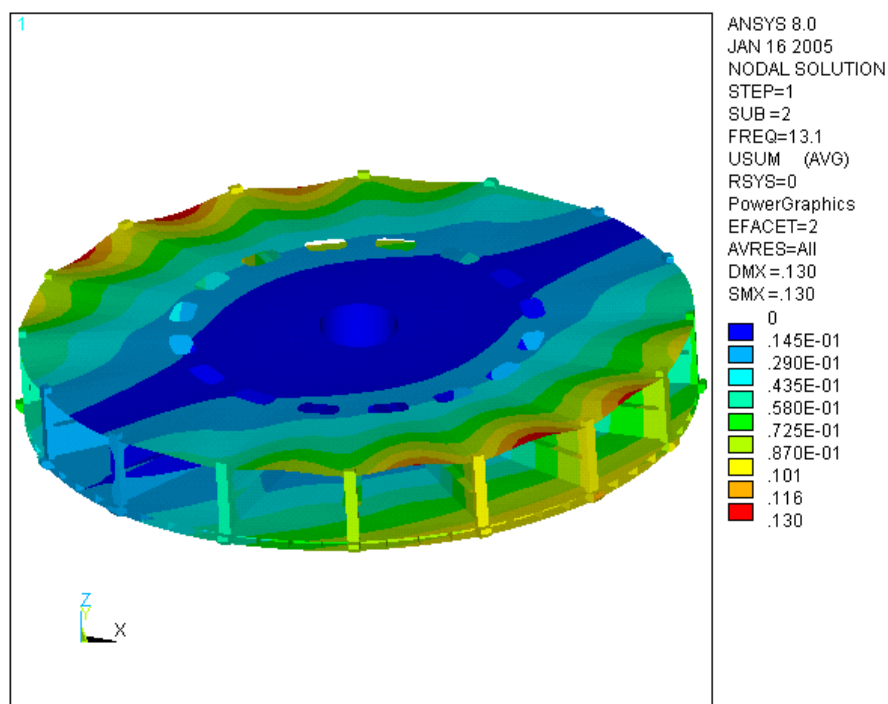
Para se avaliar os modos naturais e restritos da subestrutura do gerador, como requerido pela SMC e exposto na seção 3.2, é utilizado o modelo de elementos finitos da figura 4.34, que conta com 9.944 nós, 544 elementos sólidos lineares e 9.068 elementos de casca, também lineares. A interface com o eixo é feita pelos nós marcados em roxo, sendo que, para o cálculo da subestrutura, são impostas restrições de deslocamento aos seus graus de liberdade. Assim como para a Máquina A, dez modos são considerados para a simulação da estrutura completa, no entanto, apenas os cinco primeiros estão mostrados nas figuras 4.35 a 4.39, por serem suficientes para sugerir qual o movimento oscilatório do rotor do gerador.



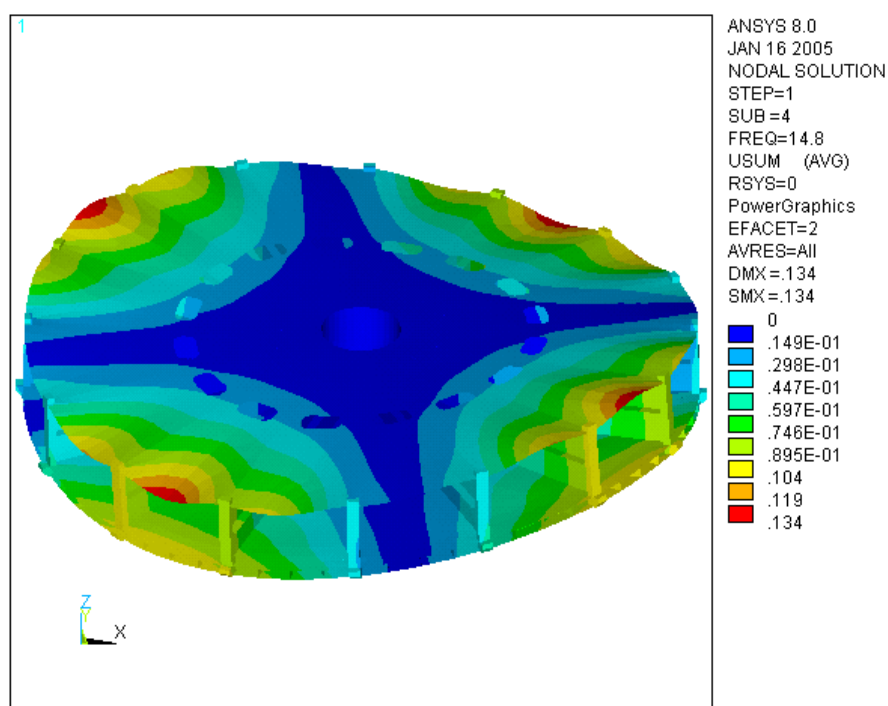
**Figura 4.34:** Modelo em elementos finitos da subestrutura do rotor do gerador da Máquina B e condições de contorno.



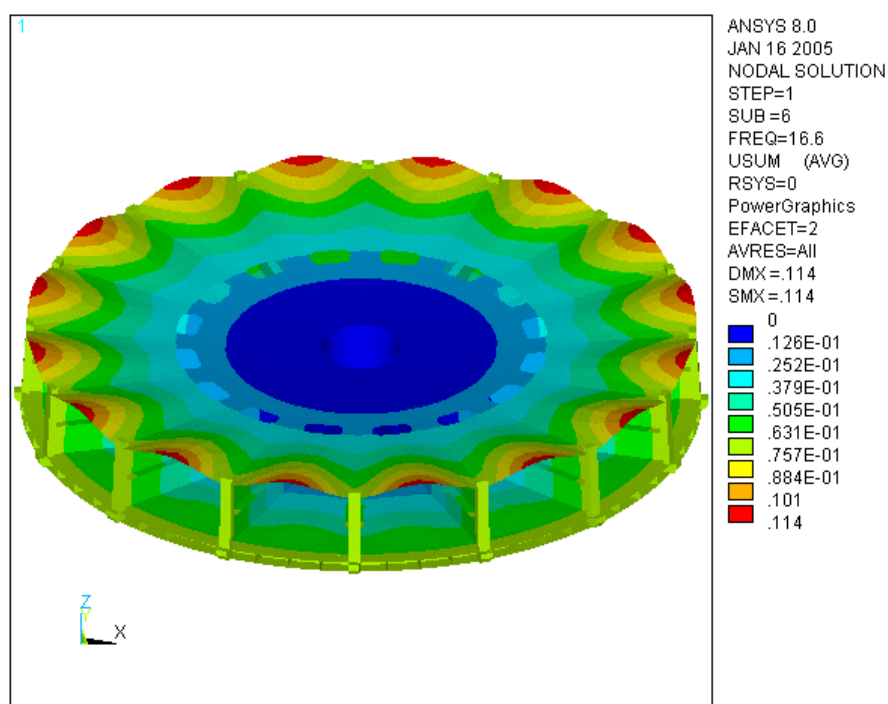
**Figura 4.35:** Primeiro modo natural da subestrutura do rotor do gerador da Máquina B.



**Figura 4.36:** Segundo modo natural da subestrutura do rotor do gerador da Máquina B.

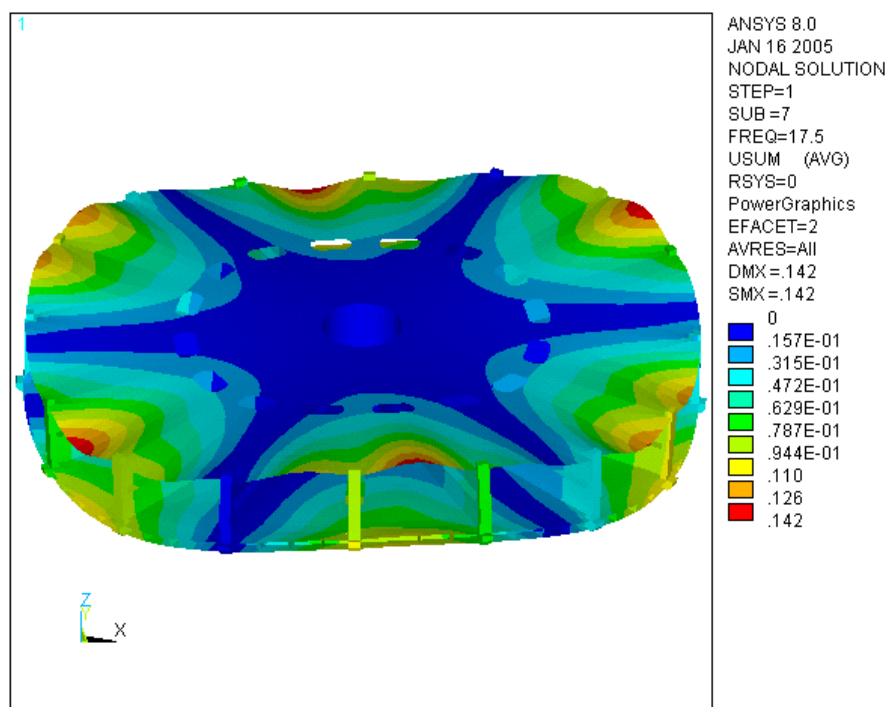


**Figura 4.37:** Terceiro modo natural da subestrutura do rotor do gerador da Máquina B.



**Figura 4.38:** Quarto modo natural da subestrutura do rotor do gerador da Máquina B.





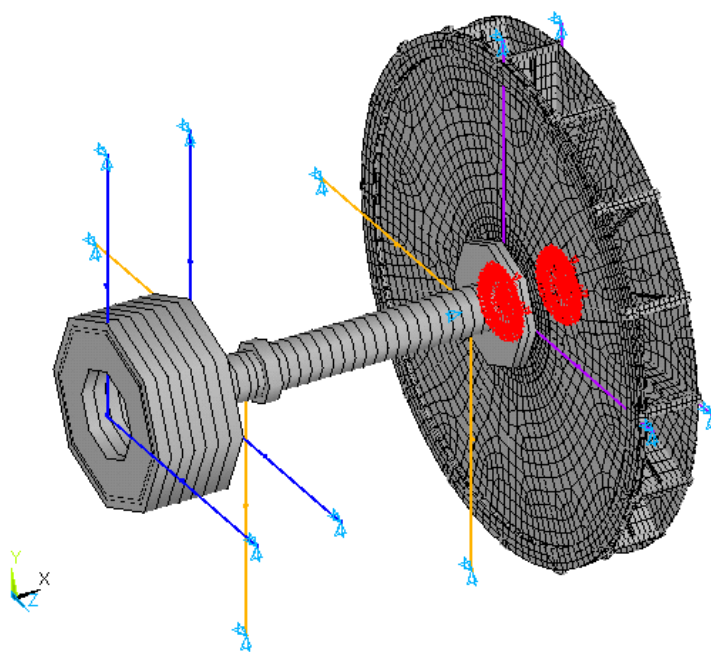
**Figura 4.39:** Quinto modo natural da subestrutura do rotor do gerador da Máquina B.

De novo, vale notar que os valores de frequências naturais, que aparecem nas figuras acima, servem somente para a subestrutura isolada, ao incluí-la no modelo da estrutura completa, o sistema passa a contar com novas frequências naturais e novos modos de vibrar, que contam com a contribuição do movimento do rotor do gerador.

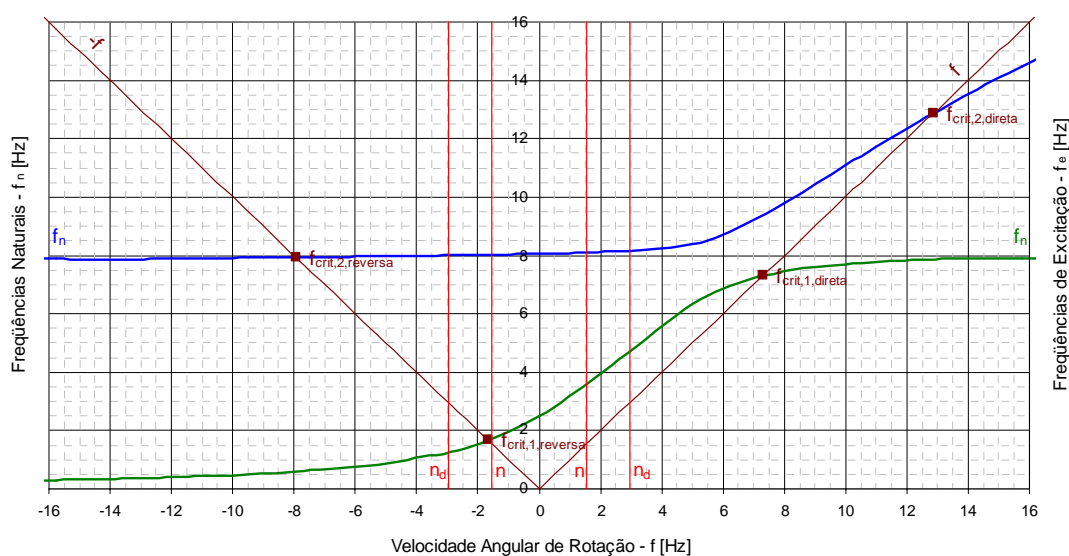
Pela forma do segundo, terceiro e quinto modos naturais da subestrutura, que se caracterizam pela flexão do rotor em relação ao eixo em uma, duas e três direções, presume-se que eles modifiquem as velocidades angulares críticas e seus modos de vibrar correspondentes. Por outro lado, o primeiro e quarto modos naturais do rotor possuem movimento torsional e axial, respectivamente, e, logo, não devem interferir no movimento flexional da linha de eixo.

Como já foi dito para a Máquina A, somente as matrizes de massa e rigidez reduzidas, estimadas pela SMC, são somadas às matrizes do restante da estrutura, para resultar nas matrizes globais do sistema. A representação gráfica do modelo de elementos finitos completo está mostrada na figura 4.40. Os diagramas de Campbell resultantes do cálculo para as condições de operação normal e de disparo são encontrados nas figuras 4.41 e 4.42. Mais adiante estão as velocidades angulares

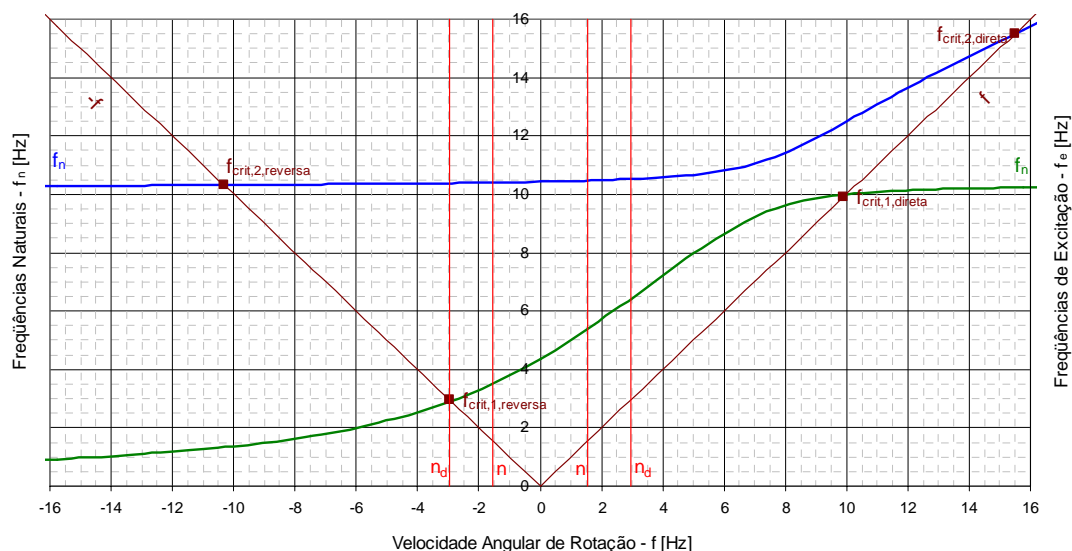
críticas para ambas as condições de operação da máquina, nas tabelas 4.14 e 4.15, seus modos de vibrar nas figuras 4.43 a 4.46 para a operação normal e nas figuras 4.47 a 4.50 para o disparo.



**Figura 4.40:** Modelo em elementos finitos da linha de eixo da Máquina B calculada pelo método da SMC.



**Figura 4.41:** Diagrama de Campbell para a Máquina B na condição de operação nominal, calculada pelo método da SMC.



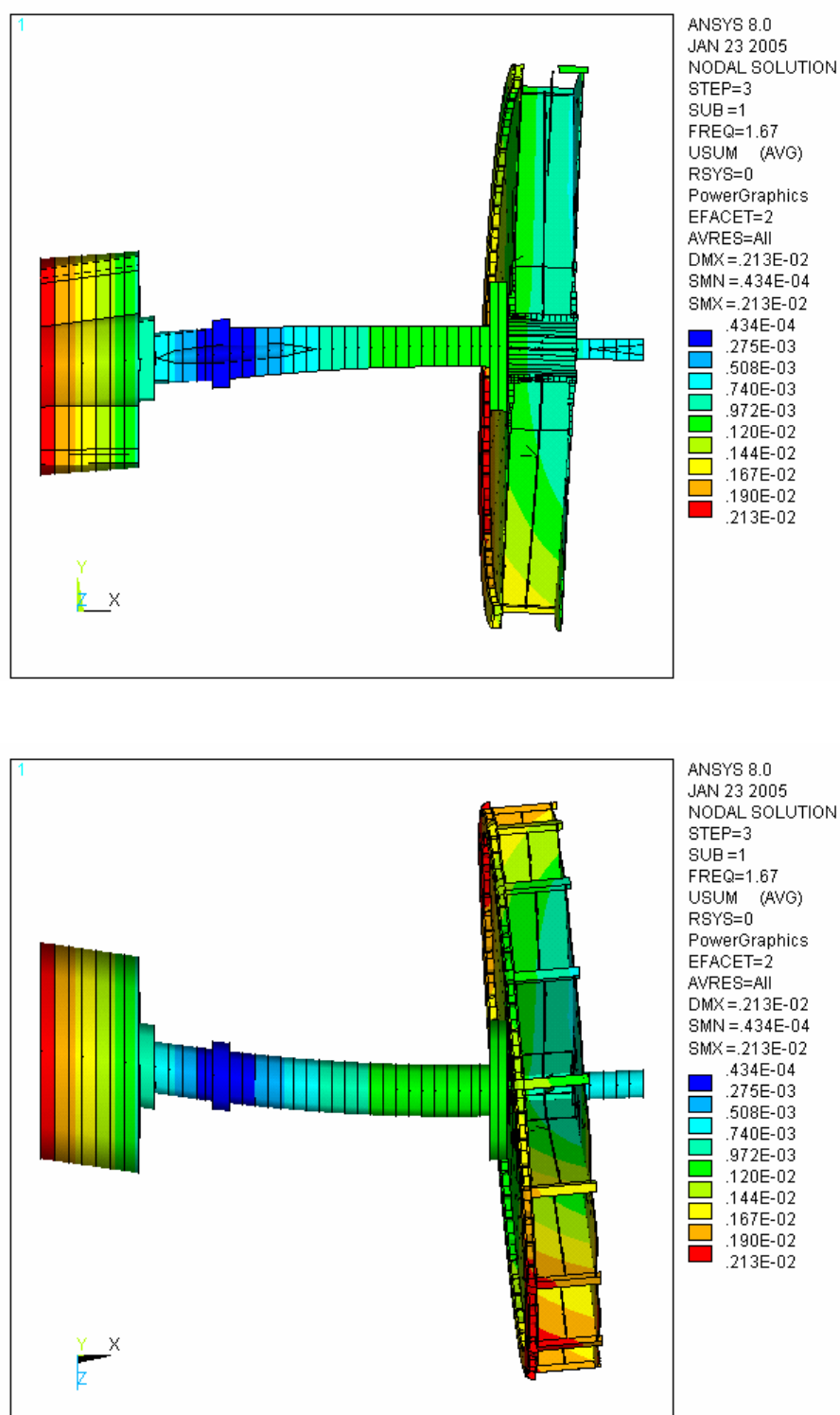
**Figura 4.42:** Diagrama de Campbell para a Máquina B na condição de disparo , calculada pelo método da SMC.

**Tabela 4.14:** Velocidades angulares críticas da Máquina B na condição normal.

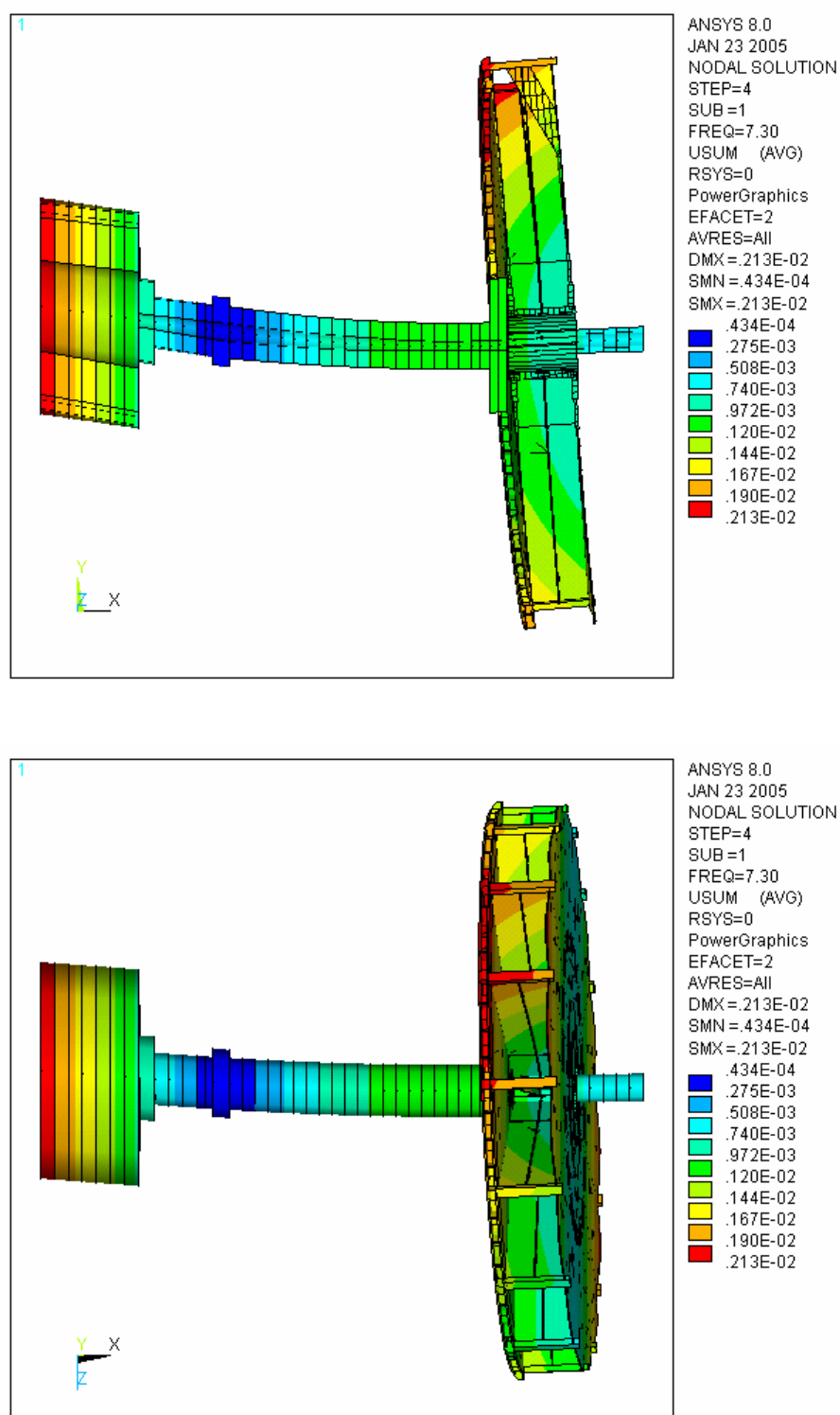
Tipo	Frequência Angular Crítica
Primeira Reversa	$f_{crit_1}^{cw} = 1,67 \text{ Hz}$
Primeira Direta	$f_{crit_1}^{fw} = 7,30 \text{ Hz}$
Segunda Reversa	$f_{crit_2}^{cw} = 7,94 \text{ Hz}$
Segunda Direta	$f_{crit_2}^{fw} = 12,88 \text{ Hz}$

**Tabela 4.15:** Velocidades angulares críticas da Máquina B na condição de disparo.

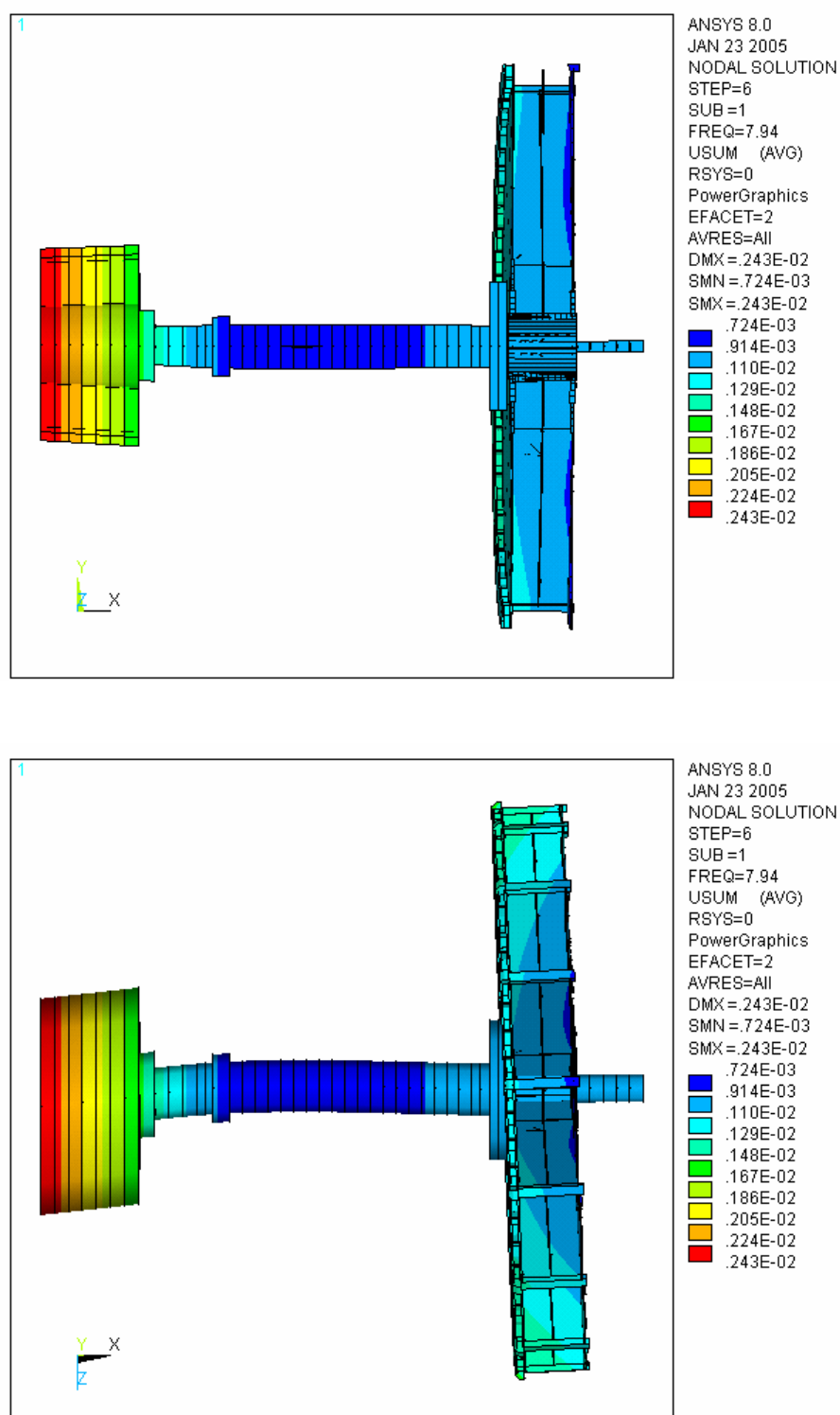
Tipo	Frequência Angular Crítica
Primeira Reversa	$f_{crit_1}^{cw} = 2,96 \text{ Hz}$
Primeira Direta	$f_{crit_1}^{fw} = 9,90 \text{ Hz}$
Segunda Reversa	$f_{crit_2}^{cw} = 10,32 \text{ Hz}$
Segunda Direta	$f_{crit_2}^{fw} = 15,51 \text{ Hz}$



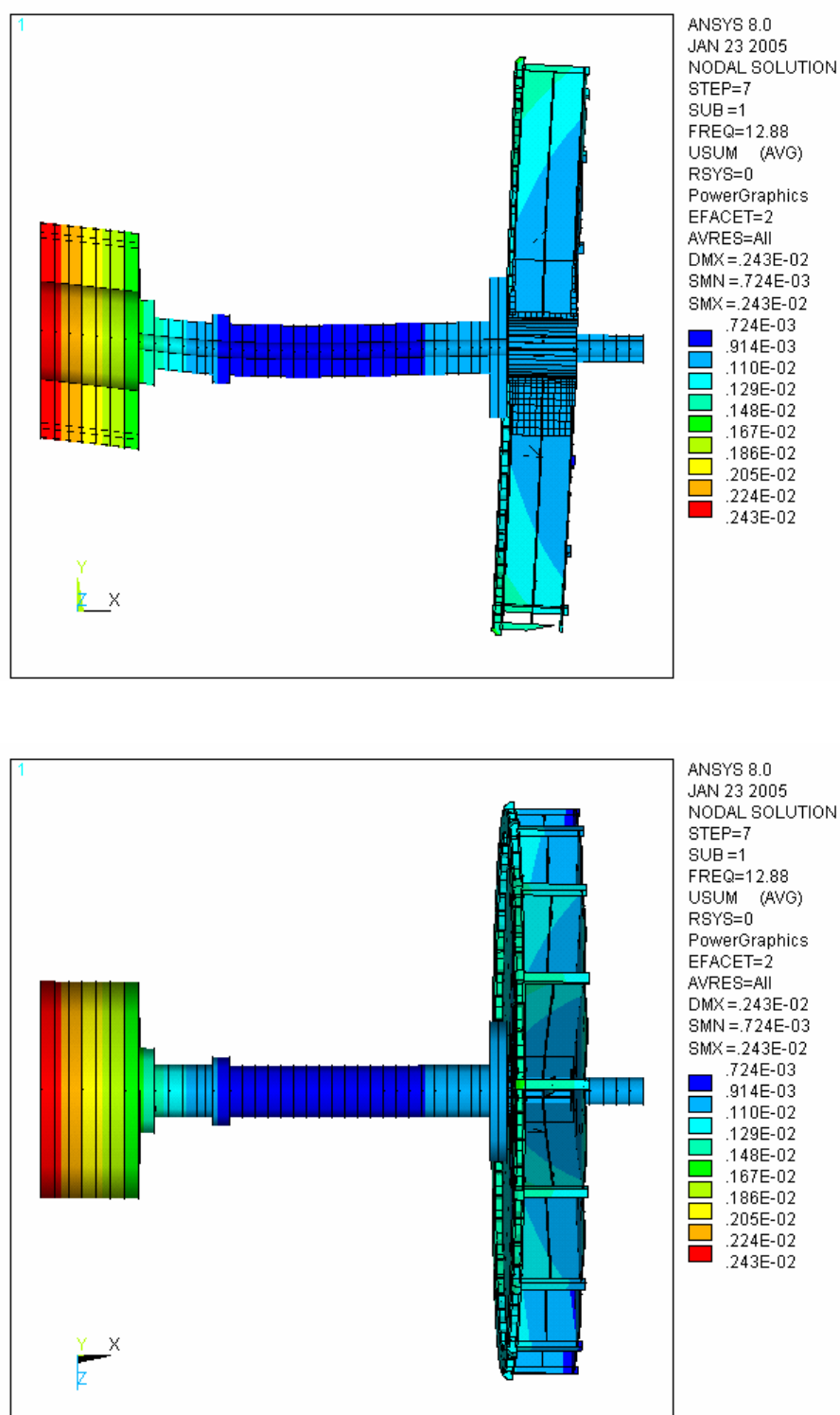
**Figura 4.43:** Modo de vibrar da Máquina B associado à primeira velocidade angular crítica de precessão reversa, em operação normal.



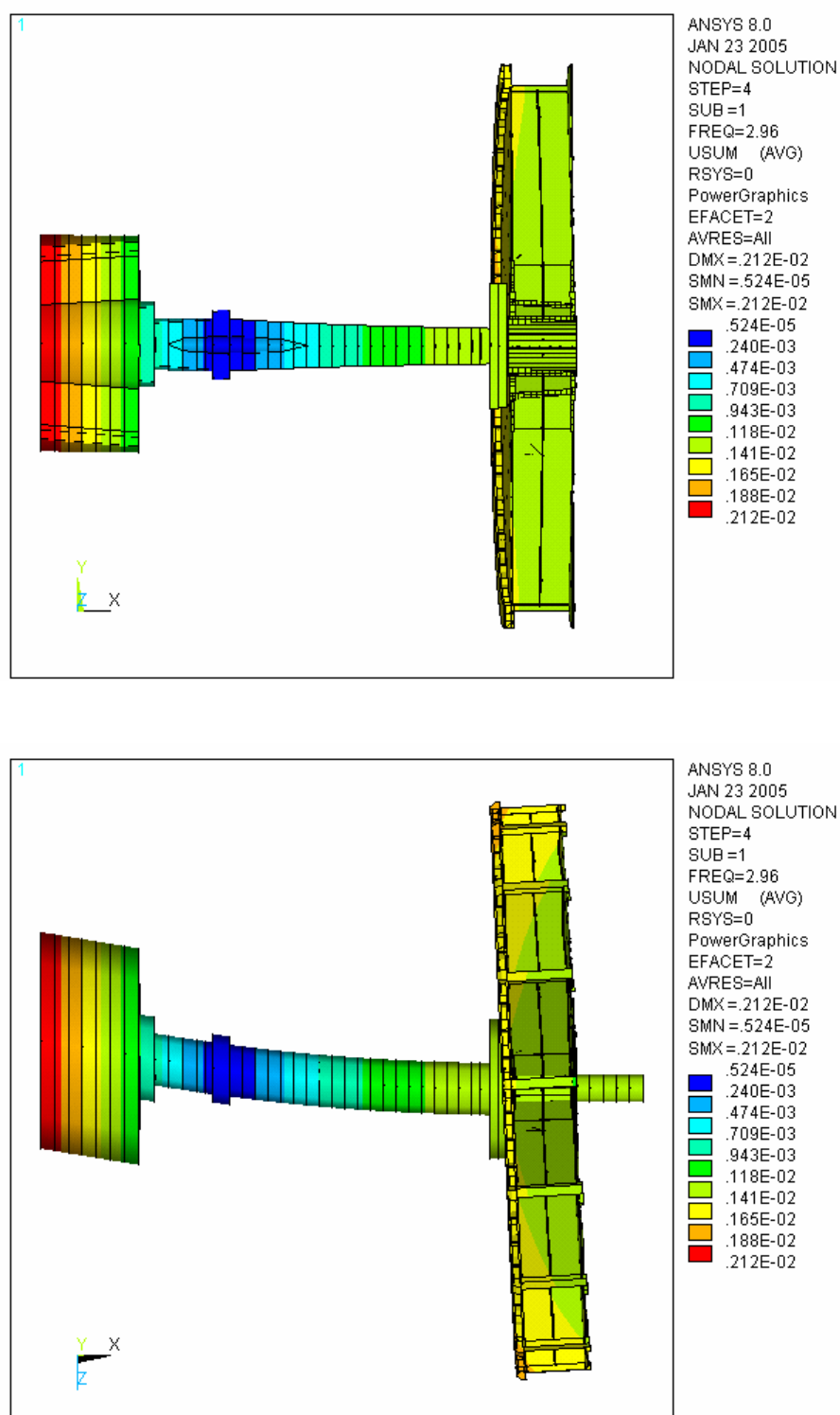
**Figura 4.44:** Modo de vibrar da Máquina B associado à primeira velocidade angular crítica de precessão direta, em operação normal.



**Figura 4.45:** Modo de vibrar da Máquina B associado à segunda velocidade angular crítica de precessão reversa, em operação normal.

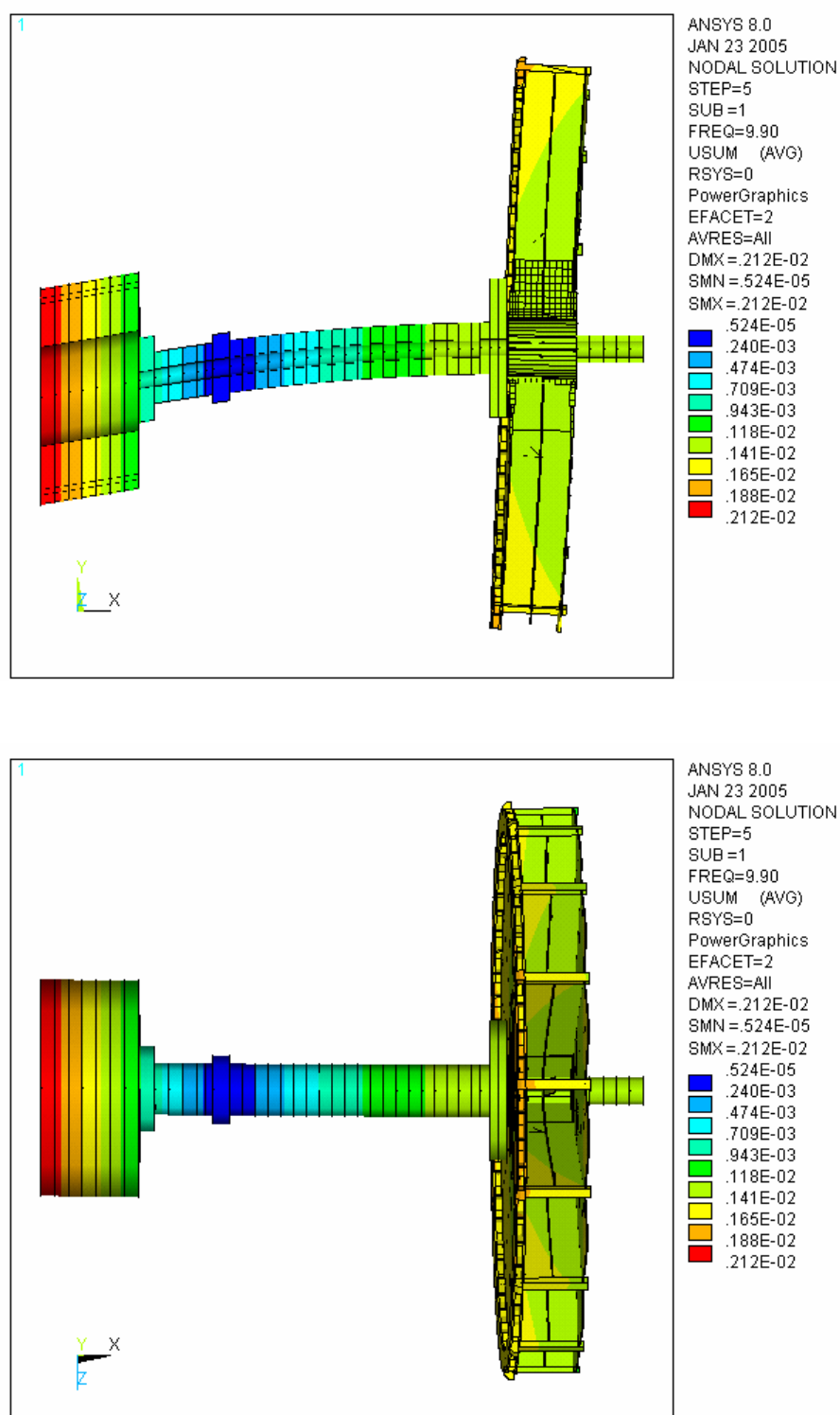


**Figura 4.46:** Modo de vibrar da Máquina B associado à segunda velocidade angular crítica de precessão direta, em operação normal.

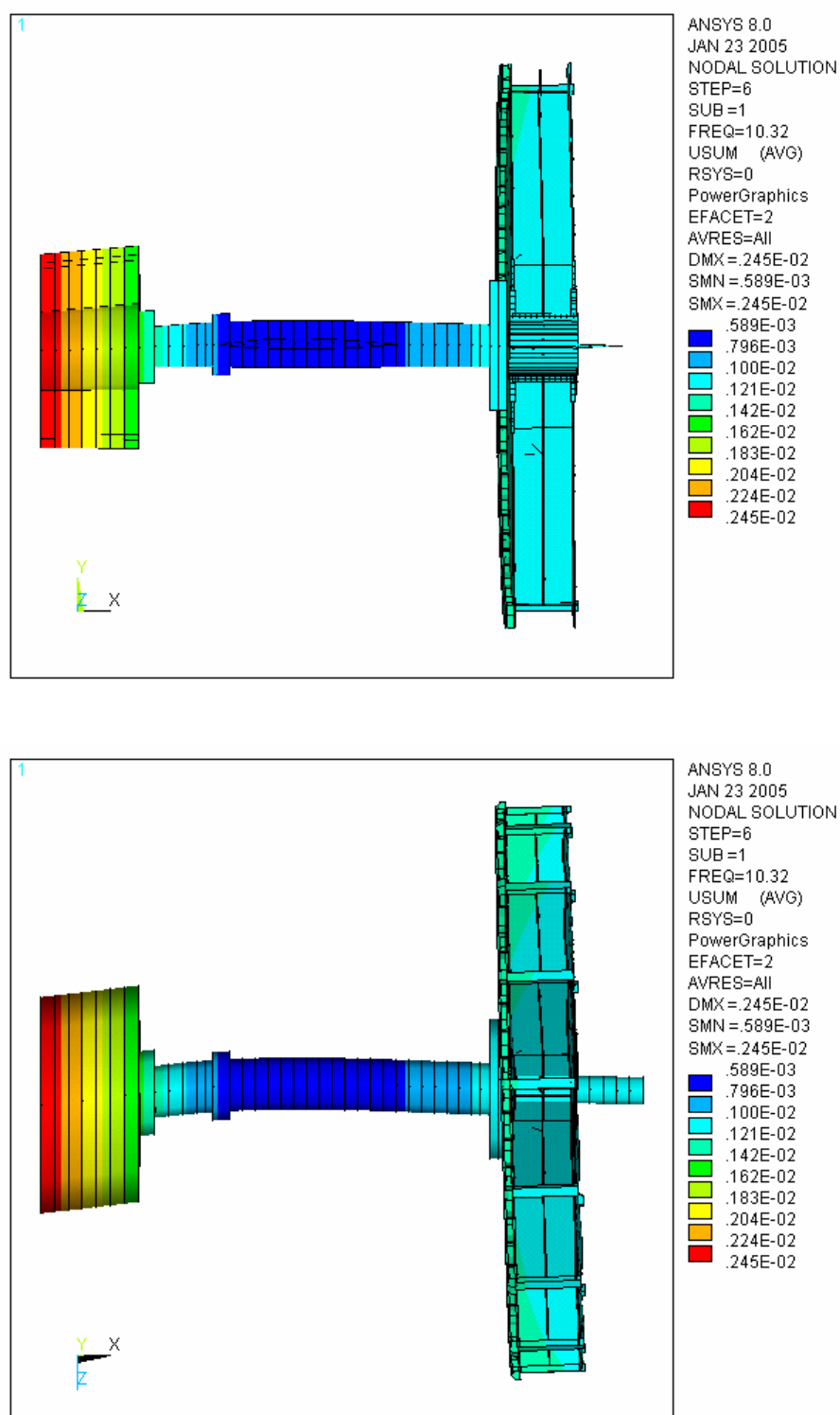


**Figura 4.47:** Modo de vibrar da Máquina B associado à primeira velocidade angular crítica de precessão reversa, na condição de disparo.

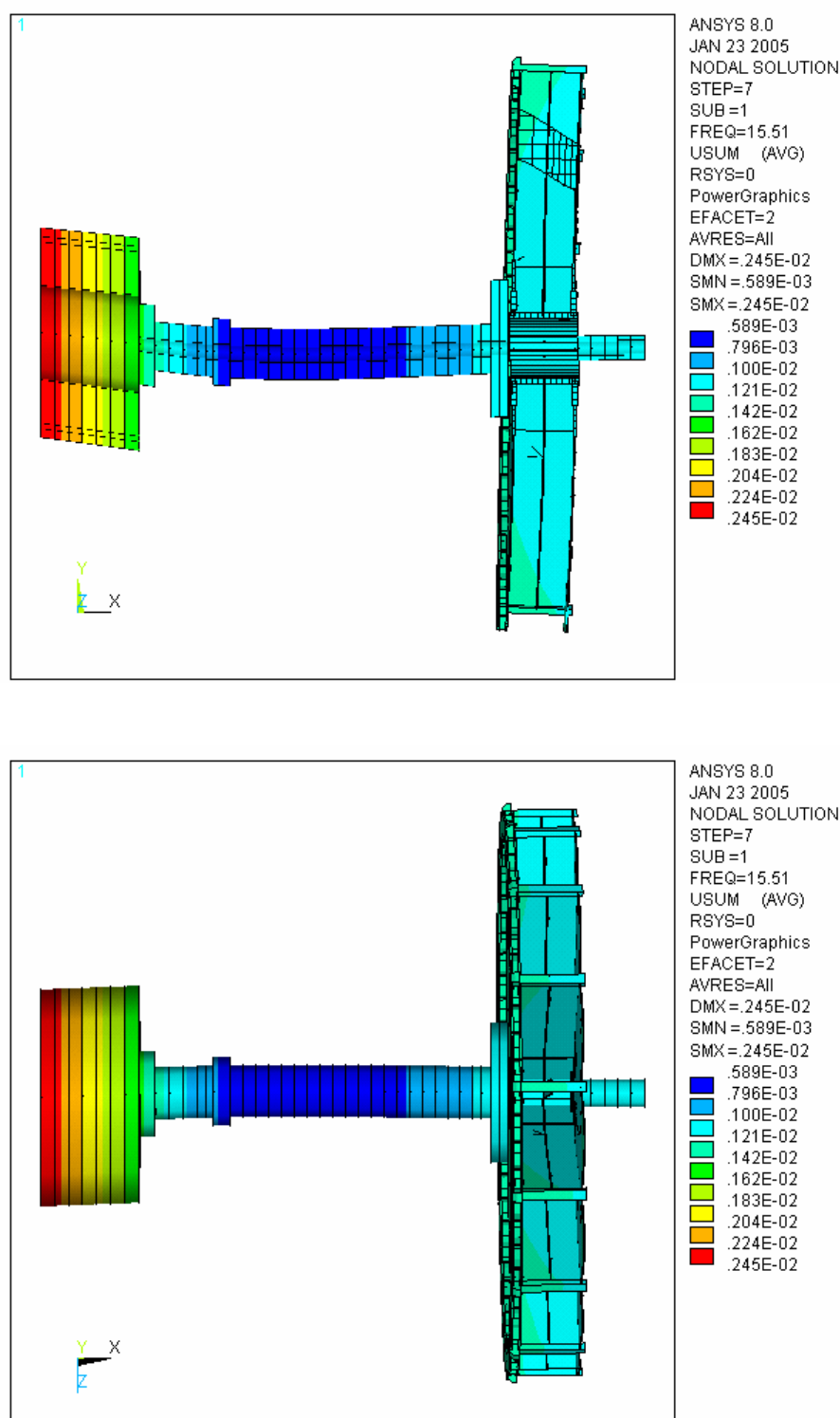




**Figura 4.48:** Modo de vibrar da Máquina B associado à primeira velocidade angular crítica de precessão direta, na condição de disparo.



**Figura 4.49:** Modo de vibrar da Máquina B associado à segunda velocidade angular crítica de precessão reversa, na condição de disparo.



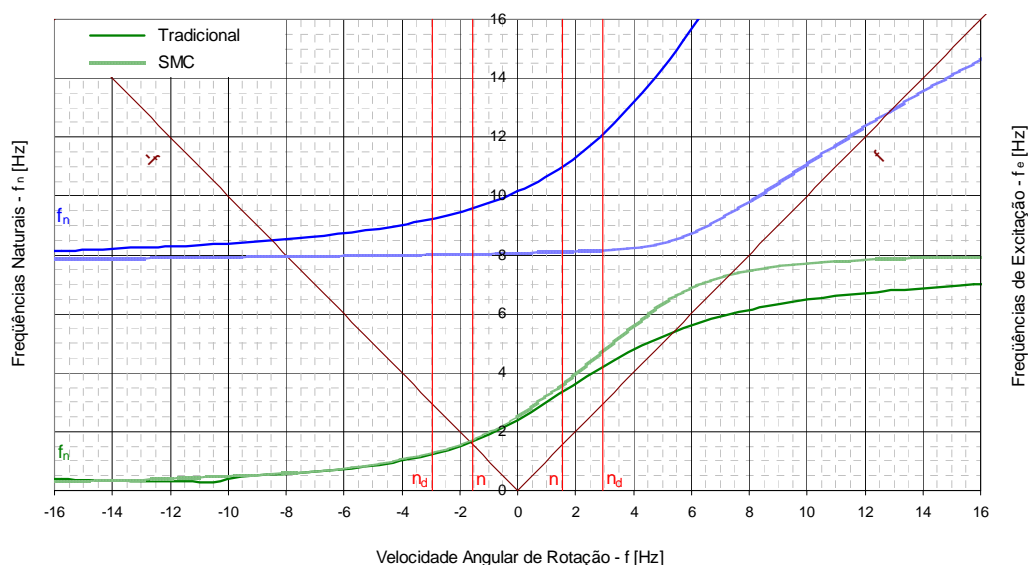
**Figura 4.50:** Modo de vibrar da Máquina B associado à segunda velocidade angular crítica de precessão direta, na condição de disparo.

Sobre as condições de operação da máquina, assim como esperado e já observado na solução pelo método tradicional, as velocidades angulares críticas são

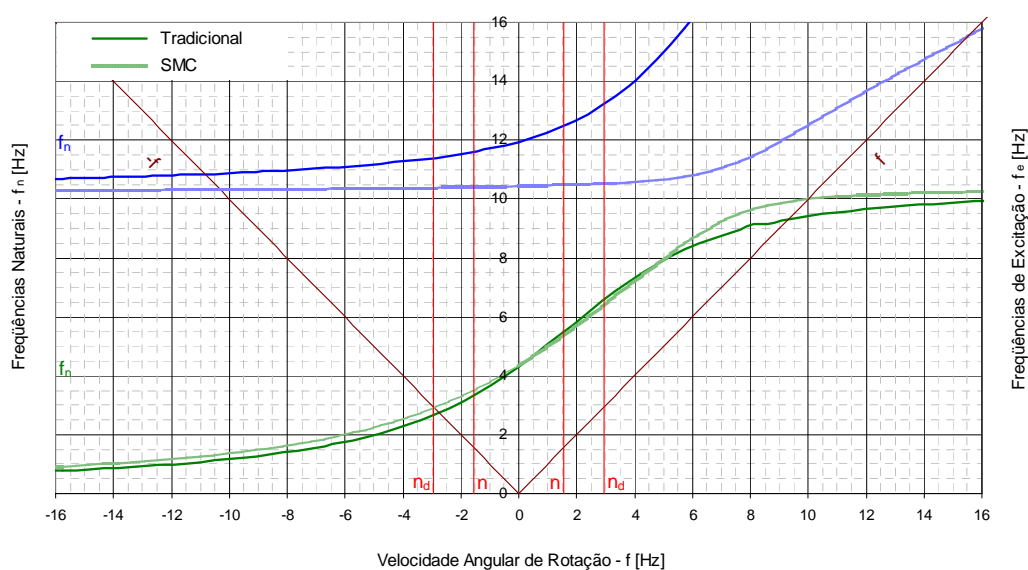
menores em operação normal do que no disparo. Por outro lado, ao contrário do caso anterior, agora, não há o aparecimento de nenhum novo modo de vibrar da linha de eixo entre os dois primeiros, que fosse devido à inclusão do rotor do gerador como um corpo elástico na simulação da estrutura completa. Isto se deve a que as frequências naturais da subestrutura isolada encontram-se entre as curvas das frequências naturais de flexão do eixo, calculadas pelo método tradicional. Então, o movimento do rotor do gerador combina-se com o do resto da estrutura, de maneira a alterar os modos de vibrar, sem que exista o aparecimento de um novo modo. Porém, pela mudança da curva de segunda frequência natural, surge a segunda velocidade angular crítica de precessão direta, que não estava presente nos resultados conseguidos pelo método tradicional. A comparação entre os resultados disponíveis, obtidos pelos dois métodos, é deixada para a próxima seção.

#### **4.3.4. Comparação dos resultados**

Como já percebido, em oposição ao observado para a Máquina A, neste caso, nenhum novo modo de vibrar surge ao se empregar a SMC. Assim, a semelhança qualitativa entre os resultados calculados pelo método tradicional e pela SMC é um pouco maior, porque todos os modos, calculados por uma metodologia, encontram perfeitamente os seus análogos naqueles determinados pelo outro método, como se vê ao se confrontar as figuras 4.28 a 4.33 e as figuras 4.43 a 4.50. Entretanto, nos diagramas de Campbell das figuras 4.51 e 4.52, comparando-se as curvas das frequências naturais, pode-se notar uma diferença, apesar de pequena, entre os valores da primeira frequência natural, estimada por cada um dos métodos. Já para a segunda, esta diferença se torna bem mais significativa e é mais pronunciada por volta de 13,1 Hz, que é a frequência do segundo modo natural da subestrutura isolada, tanto é que a segunda velocidade angular crítica direta, ausente no cálculo pelo método tradicional, passa agora a existir. Então, mais uma vez, faz-se clara a influência das propriedades de massa e inércia distribuídas do rotor do gerador sobre a dinâmica da linha de eixo.



**Figura 4.51:** Diagrama de Campbell para a Máquina B na condição de operação normal, calculado pelo método tradicional e pela SMC.



**Figura 4.52:** Diagrama de Campbell para a Máquina B na condição de disparo, calculado pelo método tradicional e pela SMC.

Nas tabelas 4.16 e 4.17, são comparadas as velocidades angulares críticas avaliadas pelos dois métodos. Diferentemente da Máquina A, agora, as mais afetadas são as velocidades angulares críticas de precessão direta, pois seus valores encontram-se mais próximos às frequências naturais da subestrutura isolada do que

aqueles de precessão reversa. Outro ponto de divergência é que, as velocidades angulares críticas, calculadas considerando-se a elasticidade do rotor do gerador, puderam tanto aumentar quanto diminuir em relação aos resultados obtidos pelo método tradicional, ao contrário da Máquina A, em que estes valores só subiram. Assim, chega-se a que a maneira como a flexibilidade do gerador interfere sobre a dinâmica da estrutura não pode ser determinada “a priori” sem o cálculo, porém a sua influência sobre a linha de eixo é patente.

**Tabela 4.16:** Velocidades angulares críticas da Máquina B na condição de operação normal, calculadas pelo método tradicional e pela SMC.

Método Tradicional		SMC		Desvio
Tipo	Frequência Angular Crítica	Tipo	Frequência Angular Crítica	
Primeira Reversa	$f_{crit_1}^{cw} = 1,63 \text{ Hz}$	Primeira Reversa	$f_{crit_1}^{cw} = 1,67 \text{ Hz}$	2,45%
Primeira Direta	$f_{crit_1}^{fw} = 5,39 \text{ Hz}$	Primeira Direta	$f_{crit_1}^{fw} = 7,30 \text{ Hz}$	35,4%
Segunda Reversa	$f_{crit_2}^{cw} = 8,50 \text{ Hz}$	Segunda Reversa	$f_{crit_2}^{cw} = 7,94 \text{ Hz}$	-6,59%
Segunda Direta	-	Segunda Direta	$f_{crit_2}^{fw} = 12,88 \text{ Hz}$	-

**Tabela 4.17:** Velocidades angulares críticas da Máquina B na condição de disparo, calculadas pelo método tradicional e pela SMC.

Método Tradicional		SMC		Desvio
Tipo	Frequência Angular Crítica	Tipo	Frequência Angular Crítica	
Primeira Reversa	$f_{crit_1}^{cw} = 2,75 \text{ Hz}$	Primeira Reversa	$f_{crit_1}^{cw} = 2,96 \text{ Hz}$	7,64%
Primeira Direta	$f_{crit_1}^{fw} = 9,31 \text{ Hz}$	Primeira Direta	$f_{crit_1}^{fw} = 9,90 \text{ Hz}$	6,34%
Segunda Reversa	$f_{crit_2}^{cw} = 10,84 \text{ Hz}$	Segunda Reversa	$f_{crit_2}^{cw} = 10,32 \text{ Hz}$	-4,80%
Segunda Direta	-	Segunda Direta	$f_{crit_2}^{fw} = 15,51 \text{ Hz}$	-

#### 4.3.5. Discussão dos resultados

Ao se considerar as propriedades de inércia e rigidez distribuídas do rotor do gerador, pela SMC, o comportamento dinâmico do sistema é modificado, apresentando como diferenças fundamentais, em relação à solução pelo método tradicional, a presença da segunda velocidade angular crítica de precessão direta e discrepâncias entre os valores calculados pelos dois métodos para as demais velocidades angulares críticas, em especial para a condição de operação normal. Estas variações são causadas pelas mudanças das curvas das frequências naturais, principalmente a segunda, por volta de 13,1 Hz.

Da mesma forma que para a Máquina A, a julgar pela variação das frequências naturais nos diagramas de Campbell das figuras 4.51 e 4.52, a elasticidade do gerador exerce grande influência sobre os fatores dinâmicos de amplificação de deslocamento em outras frequências que não estejam próximas à primeira velocidade angular crítica no disparo, como é o caso da frequência de rotação nominal a 1,56 Hz. Assim, por ser mais precisa, sugere-se que seja utilizada a descrição elástica do gerador, com a SMC.

Em relação ao valor em si das velocidades angulares críticas, os maiores desvios estão presentes para a primeira direta em operação normal, fazendo com que haja divergência para se avaliar a distância entre ela e as frequências de rotação da máquina, como define SCHEIDL [39] na seção 2.3.1. Para completar, a forma como as velocidades angulares críticas variam, aumentando ou diminuindo, em função do método usado, não pode ser generalizada, como mostram os resultados avaliados para a Máquina A e a Máquina B, disponíveis nas tabelas 4.7, 4.16 e 4.17. Então, faz-se necessário o cálculo contando com a flexibilidade do gerador, através da SMC.

No entanto, ao se empregar o critério de SCHEIDL [39] por exemplo, se um fator de segurança alto for utilizado, é aceitável que se adote o método tradicional. O mesmo é válido, caso os critérios de dimensionamento mecânico dos componentes sejam apenas estáticos e os fatores de segurança envolvidos altos, repetindo o que já foi dito para a Máquina A, na seção 4.2.5.

Logo, para a escolha do método a ser usado para o cálculo, é possível tirar as mesmas conclusões a partir da Máquina A e da Máquina B, apesar de seus

comportamentos serem diferentes em alguns pontos, frente à aplicação dos dois métodos. Se a exatidão dos cálculos for importante, se for desejada a determinação de parâmetros dinâmicos da linha de eixo, como os fatores de amplificação de deslocamento em diferentes condições de operação, ou se for de interesse reduzir os fatores de segurança do projeto, é recomendado que se empreguem as propriedades de inércia e rigidez distribuídas do rotor do gerador, com a ajuda da SMC. Do contrário, se os fatores de segurança adotados forem altos e os critérios de dimensionamento estáticos, pode-se fazer uso do método tradicional.



## 5. CONCLUSÕES

A partir dos modelos analíticos, para o cálculo das velocidades angulares críticas e fatores dinâmicos de amplificação de deslocamento, pesquisados na revisão bibliográfica do capítulo 2, das práticas comuns, encontradas na literatura, e dos métodos e modelos numéricos de cálculo, desenvolvidos ao longo do capítulo 3, foi possível verificar a influência das propriedades de inércia e rigidez distribuídas do rotor do gerador sobre a dinâmica do sistema. Para isto, no capítulo 4, estes modelos foram combinados e utilizados para o estudo de duas turbinas hidráulicas com características bastante diferentes, que foram avaliadas por dois métodos: o tradicional, que considera o gerador como um corpo rígido, e o da síntese modal de componentes (SMC), que leva em conta a flexibilidade do gerador.

A comparação entre os resultados conseguidos pelos dois métodos mostrou o impacto das propriedades estruturais do gerador sobre as velocidades angulares críticas e fatores dinâmicos de amplificação de deslocamento. Julga-se que a SMC possibilita o cálculo de valores mais exatos e mais próximos à realidade, por contar com uma descrição mais sofisticada do rotor do gerador, que é o principal responsável pelas frequências naturais e modos de vibrar da linha de eixo como um todo. Além disto, os cálculos não puderam mostrar se é possível ou como se estabelecer uma regra sobre como o gerador influencia no movimento da máquina, sendo a simulação necessária para cada caso. Neste sentido, novos estudos poderiam ser produtivos.

Por haver desvios significativos entre as grandezas estimadas pelos dois métodos, se a precisão dos resultados for importante, se for desejado conhecer os fatores dinâmicos de amplificação de deslocamento em diversas condições de operação ou se for de interesse reduzir criteriosamente os fatores de segurança usados no projeto da máquina, recomenda-se que o efeito da elasticidade do rotor do gerador seja incluído no modelo de cálculo pelo método da SMC. Contudo, se os fatores de segurança forem altos e os critérios de dimensionamento dos componentes da turbina forem estáticos, é aceitável que se considere o rotor do gerador como um corpo rígido e que se empregue o método tradicional.

A utilidade da SMC para a simulação do sistema e a sua eficiência computacional permitem sugerir que ela também seja usada para a modelagem de outros elementos da máquina que contribuem para a dinâmica da linha de eixo, como o rotor da turbina e os suportes dos mancais guia hidrodinâmicos. Assim, poderia ser verificada a hipótese de que o rotor da turbina, por estar em balanço, se comporta como um corpo rígido e as propriedades de inércia dos suportes dos mancais, mesmo que não tão grandes, também poderiam ser contempladas nas análises.

Detalhes tidos como menos significativos aqui, por não prejudicarem a comparação dos resultados e por não serem o foco deste estudo, poderiam ser aperfeiçoados, de maneira a melhorar a precisão na estimativa dos valores das velocidades angulares críticas e fatores dinâmicos de amplificação de deslocamento. Temas que se encaixariam, com este objetivo, são: a medição das forças de excitação hidráulicas, no ensaio de modelo, a determinação das propriedades hidrodinâmicas de inércia do rotor, a avaliação dos coeficientes dinâmicos dos labirintos do rotor e do filme de óleo dos mancais guia, o estudo do efeito da rigidez do mancal escora e, até mesmo, a contribuição da estrutura civil ao movimento.

## ANEXO A – ROTINA DE CÁLCULO DAS FREQUÊNCIAS E MODOS NATURAIS DA LINHA DE EIXO EM FUNÇÃO DA VELOCIDADE ANGULAR DE ROTAÇÃO

Por conta do caráter repetitivo do cálculo das frequências naturais da linha de eixo, para que se possa avaliá-las em função das diferentes velocidades angulares de rotação e para que com isto sejam determinadas as velocidades angulares críticas, foi desenvolvido um algoritmo de cálculo, que torna esta rotina automática. Ele pode ser visto a seguir.

```
! Resume jobname
RESUME

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!
! MAIN INPUT
!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

! Define jobname
File_Name='Shaft'

! Define the number of calculated modes
! If this value is changed, remember to also change the Write Output routine
n_Modes = 8

! Define maximum rotational speed to use in calculations (in rad/s)
Omega_Maximum = 100

! Define the number of rotational speed calculation steps (in rad/s)
n_Omega_Steps = 75

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!
! OUTPUT
!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

! Whirl natural damped frequency (columns #1 & #2 are for rotational speed)
*DIM,Whirl_Damp_Freq,ARRAY,n_Omega_Steps+1,n_Modes+2,1

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!
! AUXILIARY DEFINITIONS
!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

! pi
pi = 3.14159265359

! Both complex conjugate roots are extracted.
! Therefore, define number of extraction modes as:
n_Extraction_Modes = 2*n_Modes

! Rotational speed step
Omega_Step = Omega_Maximum / n_Omega_Steps
```

[illegible]

```
! End of code for gyroscopic matrix input using MATRIX27
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

! Number of real constants attached to Pipe16 elements
n_Pipe16_Real_Constants = 3

! Number of real constants attached to Beam4 elements
n_Beam4_Real_Constants = 1

! Number of real constants attached to Matrix27 elements
n_Matrix27_Real_Constants = 1

! Pipe16 real constants set
*DIM,Pipe16_Real_Constants,ARRAY,n_Pipe16_Real_Constants,1,1
Pipe16_Real_Constants(1)=1
Pipe16_Real_Constants(2)=2
Pipe16_Real_Constants(3)=3

! Beam4 real constants set
*DIM,Beam4_Real_Constants,ARRAY,n_Beam4_Real_Constants,1,1
Beam4_Real_Constants(1)=4

! Matrix27 real constants set
*DIM,Matrix27_Real_Constants,ARRAY,n_Matrix27_Real_Constants,1,1
Matrix27_Real_Constants(1)=5

! Length of each Pipe16 real constant set
n_Pipe16_Real_Constants_Lenght = 13

! Length of each Beam4 real constant set
n_Beam4_Real_Constants_Lenght = 12

! Real constants back-up array
*DIM,r_aux,ARRAY,n_Pipe16_Real_Constants_Lenght>n_Beam4_Real_Constants_Lenght,1,1

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! PREPARE THE SOLUTION PROCEDURE
!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

! Set the solution options

! Enter into solution
/SOLU

! Modal analysis requested
ANTYPE,2

! Turn off memory saving mode
MSAVE,0

! Set the extraction method and the number of modes to extract
MODOPT,QRDAMP,n_Extraction_Modes

! Choose the solver
EQSLV,FRONT

! Set the number of modes to extract
MXPAND,n_Extraction_Modes, , 1

! Turn off lumped mass
LUMPM,0

! Turn off pre-stress effects
PSTRES,0

! Set the extraction method, the number of modes to extract and
! the frequency extraction range (in Hz)
MODOPT,QRDAMP,n_Extraction_Modes,Omega_Maximum/(2*pi)/100,Omega_Maximum/(2*pi)*100,
.OFF
```

```
! Write the load step(the constrains must be already in the FE model)
LSWRITE,1

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!
! NATURAL FREQUENCIES CALCULATION
!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

! Loop through the rotation speeds
*DO,i,1,n_Omega_Steps+1,1

    ! Enter into the pre-processor
    /PREP7

    ! Loop through the Pipel6 real constants
    *DO,j,1,n_Pipel6_Real_Constants,1

        ! Loop through the real constant values
        *DO,k,1,n_Pipel6_Real_Constants_Lenght,1

            ! Back-up the real constant value
            *GET,r_aux(k),RCON,Pipel6_Real_Constants(j),CONST,k

        *ENDDO

        ! Set the Pipel6 real constant rotation speed and restore the back-up
R,Pipel6_Real_Constants(j),r_aux(1),r_aux(2),r_aux(3),r_aux(4),r_aux(5),r_aux(6),
    RMORE,r_aux(7),r_aux(8),r_aux(9),r_aux(10),r_aux(11),r_aux(12),
    RMORE,(i-1)*Omega_Step,

    *ENDDO

    ! Loop through the Beam4 real constants
    *DO,j,1,n_Beam4_Real_Constants,1

        ! Loop through the real constant values
        *DO,k,1,n_Beam4_Real_Constants_Lenght,1

            ! Back-up the real constant value
            *GET,r_aux(k),RCON,Beam4_Real_Constants(j),CONST,k

        *ENDDO

        ! Set the Beam4 real constant rotation speed
R,Beam4_Real_Constants(j),r_aux(1),r_aux(2),r_aux(3),r_aux(4),r_aux(5),r_aux(6),
    RMORE,r_aux(7),r_aux(8),r_aux(9),r_aux(10),(i-1)*Omega_Step,r_aux(12),

    *ENDDO

    ! Loop through the Matrix27 real constants
    *DO,j,1,n_Matrix27_Real_Constants,1

        ! Set the Matrix27 multiplying constant
gCONST = 2*((i-1)*Omega_Step)*rho*A*L

        ! Set the Matrix27 real constant elements
R,Matrix27_Real_Constants(j),,,,,,
    RMORE,,,,,,
    RMORE,,gCONST*C14,,gCONST*C16,,,
    RMORE,,gCONST*C20,,gCONST*C22,,,
    RMORE,,,gCONST*C27,,gCONST*C29,,
    RMORE,,,gCONST*C33,,,
    RMORE,,,,,,
    RMORE,,gCONST*C44,,gCONST*C46,,,
    RMORE,,gCONST*C50,,,,gCONST*C54,
    RMORE,,gCONST*C56,,,,,
    RMORE,,,,,,gCONST*C65,,
```

```

RMORE,gCONST*C67,,,,,gCONST*C72,
RMORE,,,,,gCONST*C77,,
RMORE,,,gCONST*C81,,,,
RMORE,,gCONST*C86,,,,,
RMORE,gCONST*C91,,gCONST*C93,,,
RMORE,,,,,gCONST*C102,
RMORE,,gCONST*C104,,,,,gCONST*C108,
RMORE,,,gCONST*C112,,gCONST*C114,
RMORE,,,,,,
RMORE,,,,,gCONST*C125,,
RMORE,,,gCONST*C129,,gCONST*C131,,
RMORE,,,gCONST*C136,,gCONST*C138,
RMORE,,,gCONST*C142,,gCONST*C144,

*ENDDO

! Enter into solution
/SOLU

! Solve for the current rotation speed
LSSOLVE,1,1,1,

! Enter into post-processor
/POST1

! Store rotation speed
Whirl_Damp_Freq(i,1) = (i-1)*Omega_Step
Whirl_Damp_Freq(i,2) = -(i-1)*Omega_Step

! Store damped natural frequencies
*DO,j,1,n_Modes,1
  *GET,Whirl_Damp_Freq(i,j+2),MODE,2*j-1,FREQ,IMAG
*ENDDO

*ENDDO

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!
! WRITE OUTPUT
!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

! Write whirl damped natural frequencies (assuming n_Modes = 8)
*CREATE,ansuitmp
*CFOPEN,File_Name,'whirl',' '
*VWRITE,Whirl_Damp_Freq(1,1),Whirl_Damp_Freq(1,2),Whirl_Damp_Freq(1,3),Whirl_Damp_Fre
q(1,4),Whirl_Damp_Freq(1,5),Whirl_Damp_Freq(1,6),Whirl_Damp_Freq(1,7),Whirl_Damp_Freq
(1,8),Whirl_Damp_Freq(1,9),Whirl_Damp_Freq(1,10)
(10F16.8)
*CFCLOSE
*END
/INPUT,ansuitmp

```

## LISTA DE REFERÊNCIAS

- [1] ADKINS, D.R.; BRENNEN, C.E. Analyses of Hydrodynamic Radial Forces on Centrifugal Pump Impellers. *Journal of Fluids Engineering. Transactions of the ASME*, New York, NY, USA, v.110, n.1, p.20-28, March 1988.
- [2] ANSYS, version 8.0. Canonsburg, PA, USA: Ansys, Inc., 2003. 1 CD-ROM.
- [3] BARP, B. Dynamic behaviour of large pump-turbine rotors. *International Water Power and Dam Construction*, Sidcup, Kent, UK, v.28, n.1, p.48-51, January 1976.
- [4] BATHE, K.J. **Finite Element Procedures**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1996.
- [5] BEHREND, B.A. On the Mechanical Forces in Dynamos caused by Magnetic Attraction. *Transactions of the AIAA*, Reston, VA, USA, v.7, p.617-633, 1900.
- [6] BENKÖ, G.B.; HOLMÉN, E.K. Parametric resonances in umbrella-type generating units. In: SYMPOSIUM ON VIBRATIONS IN HYDRAULIC PUMPS AND TURBINES, Manchester, 1966. **Proceedings 1966-67**, v.181, Part 3A. Birdcage Walk, Westminster, London, UK: The Institution of Mechanical Engineers, 1967. 10p.
- [7] BETTIG, B.P.; HAN, R.P.S. Modeling the Lateral Vibration of Hydraulic Turbine-Generator Rotors. *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, New York, NY, USA, v.121, n.3, p.322-327, July 1999.
- [8] BETTIG, B.P.; HAN, R.P.S. Predictive Maintenance Using the Rotordynamic Model of a Hydraulic Turbine-Generator Rotor. *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, New York, NY, USA, v.120, n.2, p.441-448, April 1998.
- [9] CASTANIER, P.; TAN, Y.C.; PIERRE, C. Characteristic Constraint Modes for Component Mode Synthesis. *AIAA Journal*, Reston, VA, USA, v.39, n.6, p.1182-1187, June 2001.



- [10] CHAMIEH, D.S.; ACOSTA, A.J.; BRENNEN, C.E.; CAUGHEY, T.K. Experimental Measurements of Hydrodynamic Radial Forces and Stiffness Matrices for a Centrifugal Pump-Impeller. *Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME*, New York, NY, USA, v.107, n.3, p.307-315, September 1985.
- [11] CRAIG, R.R.; BAMPTON, M.C.C. Coupling of Substructures for Dynamic Analysis. *AIAA Journal*, Reston, VA, USA, v.6, n.7, p.1313-1319, July 1968.
- [12] DICKENS, J. M. **Numerical Methods for Dynamic Substructure Analysis**. 1980. Thesis (Ph.D.) – University of California. Berkeley, CA, USA, 1980.
- [13] ELSSEL, K.; VOSS, H. A modal approach for the gyroscopic quadratic eigenvalue problem. In: *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, Jyväskylä, Finland, 2004. **Proceedings of ECCOMAS 2004**. Jyväskylä, Finland: [s.n.], 2004. 17p.
- [14] FISCHER, P.; WITTEVEEN, W.; SCHABASSER, M. Integrated MBS – FE – Durability Analysis of Truck Frame Components by Modal Stresses. In: *ADAMS USER MEETING*, Rome, Italy, 2000. **Proceedings**. Rome, Italy: ADAMS USER MEETING, 2000. 1 CD-ROM.
- [15] FREDÖ, C.; ANDRÉN, P.; FALK, T. Mechanical damping simulation in MSC.Nastran. In: *NORDIC MSC USER’S CONFERENCE*, Gothenburg, Sweden, 1999. **Proceedings**. Gothenburg, Sweden: NORDIC MSC USER’S CONFERENCE, 1999. 1 CD-ROM.
- [16] FRÖSSEL, W. Berechnung axialer Gleitlager mit balligen Gleitflächen. *Konstruktion*, Berlin, Deutschland, v.13, n.7, p.253-261, 1961.
- [17] GLATTFELDER, A.H.; GREIN, H.; DÖRFLER, P.K. Intense system vibrations in hydro plants. *International Water Power and Dam Construction*, Sidcup, Kent, UK, v.33, n.3, p.34-37, March 1981.
- [18] GROSSE, G. Shaft Vibration diagnosis in condition-based monitoring. *International Journal on Hydropower & Dams*, Sutton, UK, v.3, n.3, p.27-31, 1996.

- [19] GUINZBURG, A.; BRENNEN, C.E.; ACOSTA, A.J.; CAUGHEY, T.K. The Effect of Inlet Swirl on the Rotordynamic Shroud Forces in a Centrifugal Pump. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*. Transactions of the ASME, New York, NY, USA, v.115, n.2, p.287-292, April, 1993.
- [20] GUMMER, J.H. Alternative thrust bearing arrangements for large hydro units. *International Journal on Hydropower & Dams*, Sutton, UK, v.4, n.3, p.57-60, 1998.
- [21] HARTKOPF, T.; HOFMANN, M.; JÖCKEL, S. Direct-Drive Generators for Megawatt Wind Turbines. In: *European Wind Energy Conference & Exhibition*, Dublin, Ireland, 1997. **Proceedings**. Brussels, Belgium: European Wind Energy Association, 1997. 5p.
- [22] HILGENDORF, J. A. Contribution to the Calculation and Design of Tilting Pad Bearings of Crowned Sliding Surfaces. Voith Research and Construction, Heidenheim, Germany, v.20e, p.2.1-2.15, 1974.
- [23] INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARTIZATION. **Mechanical vibration – Balance quality requirements for rotors in a constant (rigid) state – ISO 1400**. Génève, Suisse, 2003. pt.1: Specification and verification of balance tolerances.
- [24] KRODKIEWSKI, J.M.; SUN, L. Modelling of Multi-bearing Rotor Systems for Vibration Analysis and Control Law Synthesis. In: *INTERNATIONAL SYMPOSIUM MV2 ON ACTIVE CONTROL IN MECHANICAL ENGINEERING*, 2, Lyon, France, 1997. **Proceedings of Second International Symposium MV2 on Active Control in Mechanical Engineering**. Lyon, France: [s.n.], 1997. v.1, p.S9-13-24.
- [25] LI, D.B.; YAM, L.H. Modal Synthesis Method for Vibration Isolation Design of Massive Rotating Machines Resiliently Supported by an Elastic Structure. *Journal of Sound and Vibration*, London, England, v.231, n.1, p.233-245, March 2000.

- [26] LIESS, C.; NORDMANN, R.; DIETZEN, F.J.; SIMON, F.; BRAUN, D. Determination of Leakage Flow and Dynamic Behavior of Labyrinth Seals for Hydraulic Machines. In: IAHR SYMPOSIUM, 15, Belgrade, Yugoslavia, 1990. **Proceedings of the 15th IAHR Symposium on Modern Technology in Hydraulic Energy Production**. Amsterdam, Netherlands: Delft, 1990. p.S1.1-S1.12.
- [27] LOTH, P.; SPRYSL, H.; EBI, G. Bearing Stiffness Determination through Vibration Analysis of Shaft Line of Bieudron Hydro Powerplant. In: MODELING, TESTING & MONITORING FOR HYDRO POWER PLANTS – III, 3, Aix-En-Provence, France, 1998. **Proceedings**. Sidcup, Kent, UK: International Journal of Hydropower & Dams, 1998. p.437-447.
- [28] LUND, J.W. Review of the Concept of Dynamic Coefficients for Fluid Film Journal Bearings. Journal of Tribology, Transactions of the ASME, New York, NY, USA, v.109, n.1, p.37-41, January 1987.
- [29] LYSAKER, H.; KJELDSSEN, M.; ARNDT, R. Mapping of hydraulic model dynamics using transient operating conditions. In: PROCEEDINGS OF THE 2002 ASME JOINT U.S.-EUROPEAN FLUIDS ENGINEERING CONFERENCE, Montreal, Canada, 2002. **American Society of Mechanical Engineers, Fluids Engineering Division (Publication)**. New York, NY, USA: American Society of Mechanical Engineers, 2002. v.257, n.1 A, p.203-208.
- [30] MEHNE, S. **Idealisierung der Koppelung von Laufrad und Wellenstrang zur Berechnung des gemeinsamen Schwingungsverhaltens**. 2002. 115p. Dissertação (Mestrado) – Berufsakademie Heidenheim. Heidenheim, Deutschland, 2002.
- [31] MEIROVITCH, L. **Elements of Vibration Analysis**. New York, NY, USA. McGraw-Hill Book Co., Inc., 1986.
- [32] NAYFEH, A.H., BALACHANDRAN, B. **Applied Nonlinear Dynamics**. New York, NY, USA. John Wiley & Sons, Inc., 1995.

- [33] NETSCH, H.; GIACOMETTI, A. Axial flow-induced vibrations in large high-head machines. *International Water Power and Dam Construction*, Sidcup, Kent, UK, v.34, n.8, p.21-27, August 1982.
- [34] NIKOLAJSEN, J.L. The Effect of Misalignment on Rotor Vibrations. In: *PROCEEDINGS OF THE 1996 INTERNATIONAL GAS TURBINE AND AEROENGINE CONGRESS & EXHIBITION*, Birmingham, UK, 1996. **American Society of Mechanical Engineers (Paper)**. New York, NY, USA: ASME, 1996. 7p.
- [35] PRESS, W.H. **Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1993.
- [36] RAO, J.S. **Rotor Dynamics**. New Delhi, India: Wiley Eastern Limited, 1985.
- [37] RAO, M.A.; SRINIVAS, J.; RAJU, V.B.V.R.; KUMAR, K.V.S.S. Coupled torsional-lateral vibration analysis of geared shaft systems using mode synthesis. *Journal of Sound and Vibration*, London, England, v.261, n.2, p.359-364, March 2003.
- [38] SCHABASSER, M. **Lebensdauerberechnung auf Basis von modalen Spannungen**. 2000. 35p. Dissertação (Mestrado) – Technische Universität Wien. Wien, Österreich, 2001.
- [39] SCHEIDL, W. Comportamento Dinâmico do Rotor, sob Condições Especiais da Velocidade Crítica. In: *XVI SIMPÓSIO NACIONAL DE PRODUÇÃO E TRANSMISSÃO DE ENERGIA ELÉTRICA*, 16, Campinas, SP, Brasil, 2001. **Anais**. Campinas, SP, Brasil: SNPTEE, 2002. 1 CD-ROM.
- [40] SCHWIRZER, T. Dynamic stressing of hydro electric units by stochastic hydraulic forces on the turbine runner. *International Water Power and Dam Construction*, Sidcup, Kent, UK, v.29, n.1, p.39-44, January 1977.
- [41] SIMON, F. On the Computation of the Dynamic Behavior of Shaft Systems in Hydro-electric Power Stations. *Voith Research and Construction*, Heidenheim, Germany, v.28e, p.4.1-4.9, May 1982.
- [42] SIMONE, G.A. **Centrais e Aproveitamentos Hidrelétricos**. São Paulo: Érica, 2000. 246p.

- [43] TAKEWAKI, I.; UETAMI, K. Inverse component-mode synthesis method for damped large structural systems. Computers and Structures, Exeter, England, v.78, n.1, p.415-423, November 2000.
- [44] THUß, W. The Influence of the Surrounding Medium on Natural Vibrations of Runners. Voith Research and Construction, Heidenheim, v.27e, p.4.1-4.7, 1981.
- [45] TOURNOUR, M.A.; ATALLA, N.; CHIELLO, O.; SGARD, F. Validation, performance, convergence and application of free interface component mode synthesis. Computers and Structures, Exeter, England, v.79, n.20-21, p.1861-1876, August 2001.
- [46] VOITH SIEMENS HYDRO POWER GENERATION GMBH & CO. KG. **Brochures**. Heidenheim, Germany: Voith AG, 2004.
- [47] ZACHARIADIS, D.C. Short bearing model for the evaluation of journal's dynamic angular misalignment effects on rotor vibrations. In: PROCEEDINGS OF THE 1998 INTERNATIONAL GAS TURBINE AND AEROENGINE CONGRESS & EXHIBITION, Stockholm, Sweden, 1998. **American Society of Mechanical Engineers (Paper)**. New York, NY, USA: ASME, 1998. 8p.

## BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA

BHAVE, S.K.; MURTHY, C.B.; GOYAL, S.K. Investigation into blade failures of Francis turbines. International Water Power and Dam Construction, Sidcup, Kent, UK, v.38, n.1, p.37-39, January 1986.

BRUGIER, D.; PASCAL, M.T. Influence of Elastic Deformations of Turbo-Generator Tilting Pad Bearings on the Static Behavior and on the Dynamic Coefficients in Different Designs. Journal of Tribology, Transactions of the ASME, New York, NY, USA, v.111, n.2, p.364-371, April 1989.

GARRIGAN et al. **Radial Characteristics of a Switched Reluctance Machine**. Madison, WI, USA: University of Wisconsin, 1999. (Report, 99-25).

KJELDSSEN, M. **Ikke lineære dynamiske systemer og kaos – Introdusert og anvendt på strømningsystemer**. Trondheim, Norway: Norges Teknisk Naturvitenskapelige Universitet, 2000. (Rapport, ITEV 2000:01).

KJELDSSEN, M. **Måleteknikk og Signal Analyse**. Trondheim, Norway: Norges Teknisk Naturvitenskapelige Universitet, 2000. (Rapport, ITEV 2000:02).

MAJOR, C.; ALLEN, G.; HOULE, Y. Monitoring the air gap. International Water Power and Dam Construction, Sidcup, Kent, UK, v.50, n.4, p.40-41, April 1998.

RANDY, W.; BEAUDOIN, R. Keeping a close eye on a new hydrogenerator. International Water Power and Dam Construction, Sidcup, Kent, UK, v.51, n.6, p.47-50, June 1999.

SHIAU, T. N.; HWANG, J. L.; CHANG, Y. B. A Study on Stability and Response Analysis of a Nonlinear Rotor System With Mass Unbalance and Side Load. Transactions of the ASME, New York, NY, USA, v.115, n.2, p.218-226, April 1993.

SIENZ, J. et al. Computational modelling of 3D objects by using fitting techniques and subsequent mesh generation. Computers and Structures, Exeter, England, v.78, n.1, p.397-413, November 2000.

WICKSTRÖM, A. Structural Analysis of Francis Turbine Runners using Adina. Computers and Structures, Exeter, England, v.64, n.5-6, p.1087-1095, 1997.

## APÊNDICE A – CÁLCULO DO EMPUXO MAGNÉTICO RADIAL

A equação de BEHREND [5], usada por BETTIG; HAN [8] e HARTKOPF; HOFMANN; JÖCKEL [21], dá o valor da força magnética atrativa entre o estator e o rotor do gerador, devido à excentricidade deste último em relação ao campo magnético.

$$F_M = \frac{\overline{AB}^2}{4\mu_0} \frac{e}{g_e} \quad (2.54)$$

$\overline{A}$	:	área média da folga radial	$[m^2]$
$\overline{B}$	:	campo magnético médio na folga radial	$[T]$
$e$	:	excentricidade do rotor do gerador	$[m]$
$F_M$	:	empuxo magnético radial	$[N]$
$g_e$	:	folga radial nominal	$[m]$
$\mu_0$	:	permeabilidade do vácuo ( $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$ )	$[N/A^2]$

A área média da folga radial é determinada de maneira simples pela seguinte equação:

$$\overline{A} = 2\pi R_g L_p \quad (A.1)$$

$R_g$	:	raio médio da folga radial	$[m]$
$L_p$	:	altura do pólo	$[m]$

Enquanto que o campo magnético médio é dado por:

$$\overline{B} \approx \frac{2}{\pi} B_1 \quad (A.2)$$

$B_1$  : valor de pico do campo magnético [T]

O valor de pico do campo magnético pode ser calculado a partir da equação abaixo.

$$B_1 = \frac{E_a}{\sqrt{2}k_s N L \omega R} \quad (A.3)$$

$E_a$  : campo elétrico induzido [V]

$k_s$  : fator de enrolamento [-]

$N_f$  : número de espiras por fase [-]

$\omega$  : velocidade angular de rotação [rad/s]

Finalmente, o campo elétrico induzido pode ser avaliado como segue:

$$\vec{E}_a = \vec{U} + r_a \vec{I} + ix_d \vec{I}_d + ix_q \vec{I}_q \quad (A.4)$$

$\vec{I}$  : corrente de fase [A]

$\vec{I}_d$  : componente direto da corrente [A]

$\vec{I}_q$  : componente de quadratura da corrente [A]

$r_a$  : resistência de armadura [ $\Omega$ ]

$x_d$  : reatância direta [ $\Omega$ ]

$x_q$  : reatância de quadratura [ $\Omega$ ]

$\vec{U}$  : voltagem de fase [V]



## APÊNDICE B – MATRIZES DINÂMICAS DO ELEMENTO DE VIGA DE TIMOSHENKO

As matrizes de massa, de efeito giroscópico e de rigidez do elemento de viga de Timoshenko, utilizadas no programa ANSYS [2], tais quais informadas na sua documentação, estão dadas abaixo. Para simplificar o equacionamento, foi considerada uma seção de eixo axissimétrica.

O vetor de deslocamentos deste elemento é formado pelos deslocamentos lineares e rotações tridimensionais do nó “1”, assim como do nó “2”.

$$\{u\} = \{u_{x_1} \quad u_{y_1} \quad u_{z_1} \quad \theta_{x_1} \quad \theta_{y_1} \quad \theta_{z_1} \quad u_{x_2} \quad u_{y_2} \quad u_{z_2} \quad \theta_{x_2} \quad \theta_{y_2} \quad \theta_{z_2}\}^T \quad (B.1)$$

$\{u\}$	:	vetor de deslocamentos do elemento	[m]
$u_{i_j}$	:	deslocamento do nó “j” na direção “i”	[m]
$\theta_{i_j}$	:	rotação do nó “j” ao redor da direção “i”	[rad]

A matriz de massa, simétrica, fica:

$$[M_e] = M_t \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 & 0 & D & 0 & C & 0 & 0 & 0 & 0 & -F \\ & B & 0 & -D & 0 & 0 & 0 & C & 0 & F & 0 & 0 \\ & & \frac{J}{3B} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J}{6B} & 0 & 0 & 0 \\ & & & H & 0 & 0 & 0 & -F & 0 & N & 0 & 0 \\ & & & & 0 & F & 0 & 0 & 0 & 0 & N & 0 \\ & & & & & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & B & 0 & 0 & 0 & D & 0 \\ & & & & & & & B & 0 & -D & 0 & 0 \\ & & & & & & & & \frac{J}{3B} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & H & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & H & 0 \end{bmatrix} \quad (B.2)$$

$$M_t = (\rho A + m_a)L \quad (B.3)$$

$$B = \frac{\frac{13}{35} + \frac{7}{10}\varphi + \frac{1}{3}\varphi^2 + \frac{6}{5}\left(\frac{r}{L}\right)^2}{(1+\varphi)^2} \quad (\text{B.4})$$

$$C = \frac{\frac{9}{70} + \frac{3}{10}\varphi + \frac{1}{6}\varphi^2 + \frac{6}{5}\left(\frac{r}{L}\right)^2}{(1+\varphi)^2} \quad (\text{B.5})$$

$$D = \frac{\left[ \frac{11}{210} + \frac{11}{120}\varphi + \frac{1}{24}\varphi^2 + \left( \frac{1}{10} - \frac{1}{2}\varphi \right) \left( \frac{r}{L} \right)^2 \right] L}{(1+\varphi)^2} \quad (\text{B.6})$$

$$F = \frac{\left[ \frac{13}{420} + \frac{3}{40}\varphi + \frac{1}{24}\varphi^2 + \left( \frac{1}{10} - \frac{1}{2}\varphi \right) \left( \frac{r}{L} \right)^2 \right] L}{(1+\varphi)^2} \quad (\text{B.7})$$

$$H = \frac{\left[ \frac{1}{105} + \frac{1}{60}\varphi + \frac{1}{120}\varphi^2 + \left( \frac{2}{15} - \frac{1}{6}\varphi + \frac{1}{3}\varphi^2 \right) \left( \frac{r}{L} \right)^2 \right] L^2}{(1+\varphi)^2} \quad (\text{B.8})$$

$$N = \frac{\left[ \frac{1}{140} + \frac{1}{60}\varphi + \frac{1}{120}\varphi^2 + \left( \frac{1}{30} + \frac{1}{6}\varphi - \frac{1}{6}\varphi^2 \right) \left( \frac{r}{L} \right)^2 \right] L^2}{(1+\varphi)^2} \quad (\text{B.9})$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (\text{B.10})$$

$$\varphi = \frac{12EI}{GA^s L^2} \quad (\text{B.11})$$

A	:	área da seção transversal	[m <sup>2</sup> ]
A <sup>s</sup>	:	fator de cisalhamento da seção	[-]
E	:	módulo de elasticidade	[Pa]
G	:	módulo de cisalhamento	[Pa]
I	:	momento transversal de inércia de área	[m <sup>4</sup> ]
J	:	momento polar de inércia de área	[m <sup>4</sup> ]
L	:	comprimento do elemento	[m]
m <sub>a</sub>	:	massa adicional	[kg/m]
[M <sub>e</sub> ]	:	matriz de massa do elemento	[kg]

r	:	raio de giração	[m]
ρ	:	densidade do material	[kg/m <sup>3</sup> ]

A matriz de efeito giroscópico, antissimétrica, é representada por:

$$[G_e] = 2\omega\rho AL \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & g & 0 & h & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & h & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & h & 0 & g & 0 & 0 & 0 & h \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & i & 0 & h & 0 & 0 & 0 & j \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & h & 0 & -j & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & g & 0 & -h & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & -h \\ & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 0 & i \\ & & & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (B.12)$$

$$g = \frac{\frac{6}{5}r^2}{L^2(1+\varphi)^2} \quad (B.13)$$

$$h = \frac{-\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\varphi\right)r^2}{L(1+\varphi)^2} \quad (B.14)$$

$$i = \frac{\left(\frac{2}{15} + \frac{1}{6}\varphi + \frac{1}{3}\varphi^2\right)r^2}{(1+\varphi)^2} \quad (B.15)$$

$$j = \frac{-\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{6}\varphi - \frac{1}{6}\varphi^2\right)r^2}{(1+\varphi)^2} \quad (B.16)$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (B.10)$$

$$\varphi = \frac{12EI}{GA^s L^2} \quad (B.11)$$

A	:	área da seção transversal	[m <sup>2</sup> ]
A <sup>S</sup>	:	fator de cisalhamento da seção	[-]
E	:	módulo de elasticidade	[Pa]
G	:	módulo de cisalhamento	[Pa]
[G <sub>e</sub> ]	:	matriz de efeito giroscópico do elemento	[kg]
I	:	momento transversal de inércia de área	[m <sup>4</sup> ]
L	:	comprimento do elemento	[m]
r	:	raio de giração	[m]
ρ	:	densidade do material	[kg/m <sup>3</sup> ]
ω	:	velocidade angular de rotação	[rad/s]

A matriz de rigidez, simétrica, pode ser calculada por:

$$[K_e] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & c \\ & & a & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & -c & 0 \\ & & & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ & & & & e & 0 & 0 & 0 & c & 0 & f & 0 \\ & & & & & e & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & f \\ & & & & & & \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & a & 0 & 0 & 0 & -c \\ & & & & & & & & a & 0 & c & 0 \\ & & & & & & & & & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & e & 0 \\ & & & & & & & & & & & e \end{bmatrix} \quad (B.17)$$

$$a = \frac{12EI}{L^3(1+\varphi)} \quad (B.18)$$

$$c = \frac{6EI}{L^2(1+\varphi)} \quad (B.19)$$

$$e = \frac{(4+\varphi)EI}{L(1+\varphi)} \quad (B.20)$$

$$f = \frac{(2 - \varphi)EI}{L(1 + \varphi)} \quad (\text{B.21})$$

$$\varphi = \frac{12EI}{GA^s L^2} \quad (\text{B.11})$$

A	:	área da seção transversal	[m <sup>2</sup> ]
A <sup>s</sup>	:	fator de cisalhamento da seção	[-]
E	:	módulo de elasticidade	[Pa]
G	:	módulo de cisalhamento	[Pa]
I	:	momento transversal de inércia de área	[m <sup>4</sup> ]
J	:	momento polar de inércia de área	[m <sup>4</sup> ]
[K <sub>e</sub> ]	:	matriz de massa do elemento	[kg]
L	:	comprimento do elemento	[m]

## APÊNDICE C – CÁLCULO DE DEFLEXÕES ESTÁTICAS PELO TEOREMA DE CASTIGLIANO

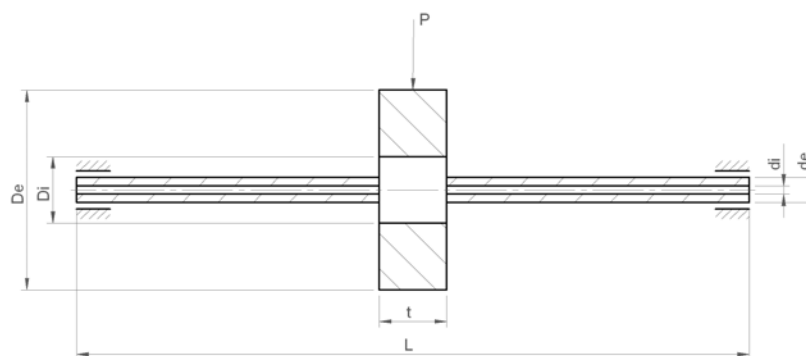
Para uma estrutura submetida a uma força  $P$ , o deslocamento  $\delta$  correspondente, no ponto e direção de aplicação desta força, pode ser determinado pelo teorema de Castigliano:

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} \quad (C.1)$$

$$\delta = \int_0^L \frac{M(P, x)}{EI(x)} \frac{\partial M(P, x)}{\partial P} dx \quad (C.2)$$

$E$	:	módulo de elasticidade	[Pa]
$I$	:	momento transversal de inércia de área	[m <sup>4</sup> ]
$L$	:	comprimento da estrutura	[m]
$M$	:	momento solicitante da estrutura	[m]
$P$	:	força aplicada	[N]
$U$	:	energia potencial elástica	[J]
$x$	:	coordenada da estrutura	[m]
$\delta$	:	deslocamento correspondente	[m]

Calcula-se, então, a deflexão causada por uma carga radial aplicada no centro do rotor da figura C.1 abaixo.



**Figura C.1:** Dimensões e carregamento radial aplicado ao centro do rotor.

$$\begin{aligned} \delta = & \int_0^{\frac{L-t}{2}} \frac{-\frac{P}{2}x}{E \frac{\pi}{64} (d_e^4 - d_i^4)} \frac{\partial \left( -\frac{P}{2}x \right)}{\partial P} dx + \int_{\frac{L-t}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{-\frac{P}{2}x}{E \frac{\pi}{64} (D_e^4 - D_i^4)} \frac{\partial \left( -\frac{P}{2}x \right)}{\partial P} dx + \dots \\ & \dots + \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{L+t}{2}} \frac{-\frac{P}{2}x + P \left( x - \frac{L}{2} \right)}{E \frac{\pi}{64} (D_e^4 - D_i^4)} \frac{\partial \left[ -\frac{P}{2}x + P \left( x - \frac{L}{2} \right) \right]}{\partial P} dx + \dots \end{aligned} \quad (C.3)$$

$$\dots + \int_{\frac{L+t}{2}}^L \frac{-\frac{P}{2}x + P \left( x - \frac{L}{2} \right)}{E \frac{\pi}{64} (d_e^4 - d_i^4)} \frac{\partial \left[ -\frac{P}{2}x + P \left( x - \frac{L}{2} \right) \right]}{\partial P} dx$$

$$\begin{aligned} \delta = & \frac{16P}{E\pi(d_e^4 - d_i^4)} \int_0^{\frac{L-t}{2}} x^2 dx + \frac{16P}{E\pi(D_e^4 - D_i^4)} \int_{\frac{L-t}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx + \dots \\ & \dots + \frac{16P}{E\pi(D_e^4 - D_i^4)} \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{L+t}{2}} (x-L)^2 dx + \frac{16P}{E\pi(d_e^4 - d_i^4)} \int_{\frac{L+t}{2}}^L (x-L)^2 dx \end{aligned} \quad (C.4)$$

$$\begin{aligned} \delta = & \frac{16P}{E\pi(d_e^4 - d_i^4)} \int_0^{\frac{L-t}{2}} x^2 dx + \frac{16P}{E\pi(D_e^4 - D_i^4)} \int_{\frac{L-t}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx + \dots \\ & \dots + \frac{16P}{E\pi(D_e^4 - D_i^4)} \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{L+t}{2}} u^2 du + \frac{16P}{E\pi(d_e^4 - d_i^4)} \int_{\frac{L+t}{2}}^L u^2 du \end{aligned} \quad (C.5)$$

$$\begin{aligned} \delta = & \frac{16P}{E\pi(d_e^4 - d_i^4)} \frac{L^3 - 3L^2t + 3Lt^2 - t^3}{24} + \frac{16P}{E\pi(D_e^4 - D_i^4)} \frac{3L^2t - 3Lt^2 + t^3}{24} + \dots \\ & \dots + \frac{16P}{E\pi(D_e^4 - D_i^4)} \frac{3L^2t - 3Lt^2 + t^3}{24} + \frac{16P}{E\pi(d_e^4 - d_i^4)} \frac{L^3 - 3L^2t + 3Lt^2 - t^3}{24} \end{aligned} \quad (C.6)$$

$$\delta = \frac{4P}{3E\pi} \left( \frac{L^3 - 3L^2t + 3Lt^2 - t^3}{d_e^4 - d_i^4} + \frac{3L^2t - 3Lt^2 + t^3}{D_e^4 - D_i^4} \right) \quad (C.7)$$

$D_e$	:	diâmetro externo do disco	[m]
$d_e$	:	diâmetro externo do eixo	[m]
$D_i$	:	diâmetro interno do disco	[m]
$d_i$	:	diâmetro interno do eixo	[m]
$t$	:	espessura do disco	[m]

Assim, na equação (C.7), é possível identificar o coeficiente de rigidez da estrutura, para este carregamento, como dado na equação (3.31):

$$k = \frac{3\pi E}{\frac{4L^3 - 12L^2t + 12Lt^2 - 4t^3}{d_e^4 - d_i^4} + \frac{12L^2t - 12Lt^2 + 4t^3}{D_e^4 - D_i^4}} \quad (3.31)$$

k : coeficiente de rigidez [N/m]

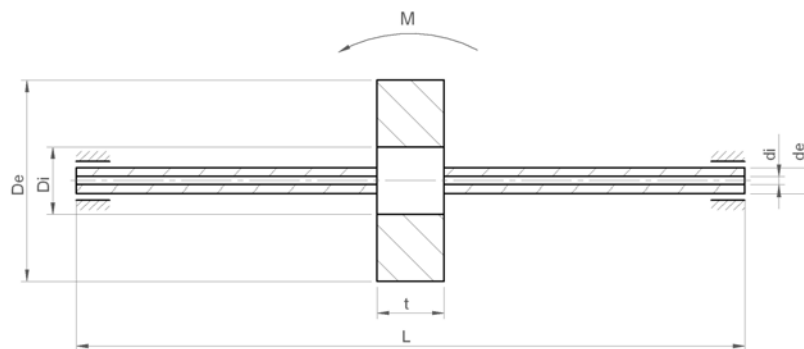
O deslocamento angular  $\theta$  de uma estrutura submetida a um momento fletor  $M'$ , no seu ponto e direção de aplicação, também pode ser determinado pelo teorema de Castigliano:

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial M'} \quad (C.8)$$

$$\theta = \int_0^L \frac{M(M', x)}{EI(x)} \frac{\partial M(M', x)}{\partial M'} dx \quad (C.9)$$

$M'$  : momento aplicado [N·m]

$\theta$  : deslocamento angular [rad]



**Figura C.2:** Dimensões e momento fletor aplicado ao centro do rotor.

Analogamente, avalia-se a deflexão angular causada por um momento fletor aplicado no centro do rotor da figura C.2.



$$\begin{aligned}
\theta = & \int_0^{\frac{L-t}{2}} \frac{-\frac{M'}{L}x}{E \frac{\pi}{64} (d_e^4 - d_i^4)} \frac{\partial \left( -\frac{M'}{L}x \right)}{\partial M'} dx + \dots \\
& \dots + \int_{\frac{L-t}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{-\frac{M'}{L}x}{E \frac{\pi}{64} (D_e^4 - D_i^4)} \frac{\partial \left( -\frac{M'}{L}x \right)}{\partial M'} dx + \dots \\
& \dots + \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{L+t}{2}} \frac{-\frac{M'}{L}x + M'}{E \frac{\pi}{64} (D_e^4 - D_i^4)} \frac{\partial \left( -\frac{M'}{L}x + M' \right)}{\partial M'} dx + \dots \\
& \dots + \int_{\frac{L+t}{2}}^L \frac{-\frac{M'}{L}x + M'}{E \frac{\pi}{64} (d_e^4 - d_i^4)} \frac{\partial \left( -\frac{M'}{L}x + M' \right)}{\partial M'} dx
\end{aligned} \tag{C.10}$$

$$\begin{aligned}
\theta = & \frac{M'}{E \frac{\pi}{64} (d_e^4 - d_i^4) L^2} \int_0^{\frac{L-t}{2}} x^2 dx + \frac{M'}{E \frac{\pi}{64} (D_e^4 - D_i^4) L^2} \int_{\frac{L-t}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx + \dots \\
& \dots + \frac{M'}{E \frac{\pi}{64} (D_e^4 - D_i^4) L^2} \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{L+t}{2}} (L-x)^2 dx + \frac{M'}{E \frac{\pi}{64} (D_e^4 - D_i^4) L^2} \int_{\frac{L+t}{2}}^L (L-x)^2 dx
\end{aligned} \tag{C.11}$$

$$\begin{aligned}
\theta = & \frac{64M'}{E\pi(d_e^4 - d_i^4)L^2} \int_0^{\frac{L-t}{2}} x^2 dx + \frac{64M'}{E\pi(D_e^4 - D_i^4)L^2} \int_{\frac{L-t}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx + \dots \\
& \dots + \frac{64M'}{E\pi(D_e^4 - D_i^4)L^2} \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{L+t}{2}} u^2 du + \frac{64M'}{E\pi(D_e^4 - D_i^4)L^2} \int_0^{\frac{L-t}{2}} u^2 du
\end{aligned} \tag{C.12}$$

$$\theta = \frac{128M'}{E\pi(d_e^4 - d_i^4)L^2} \int_0^{\frac{L-t}{2}} x^2 dx + \frac{128M'}{E\pi(D_e^4 - D_i^4)L^2} \int_{\frac{L-t}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx \tag{C.13}$$

$$\theta = \frac{16M'}{3E\pi L^2} \left( \frac{L^3 - 3L^2t + 3Lt^2 - t^3}{d_e^4 - d_i^4} + \frac{3L^2t - 3Lt^2 + t^3}{D_e^4 - D_i^4} \right) \tag{C.14}$$

Com a equação (C.14) também se pode identificar o coeficiente de rigidez angular para o carregamento em questão.

$$k_f = \frac{3\pi E L^2}{\frac{16L^3 - 48L^2t + 48Lt^2 - 16t^3}{d_e^4 - d_i^4} + \frac{48L^2t - 48Lt^2 + 16t^3}{D_e^4 - D_i^4}} \quad (3.32)$$

$k_f$  : coeficiente de rigidez angular [N/m]

## APÊNDICE D – MÉTODO QR

O método QR permite que sejam extraídos numericamente os autovalores e autovetores de sistemas amortecidos, que não podem ser expressos em termos do amortecimento de Rayleigh, ou proporcional. Neles se faz necessária a transformação do autoprobema quadrático em um autoprobema linear, a ser resolvido no espaço de estados.

Retoma-se a equação homogênea do movimento, que representa o sistema físico, dada por:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [D]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (3.25)$$

$[D]$	:	matriz de amortecimento	$[Ns/m]$
$[K]$	:	matriz de rigidez	$[N/m]$
$[M]$	:	matriz de massa	$[kg]$
$\{x\}$	:	vetor de deslocamentos	$[m]$

Primeiramente, recorre-se à transformada modal:

$$\{x\} = [\Phi]\{q\} \quad (3.27)$$

$\{q\}$	:	vetor de coordenadas modais	$[m]$
$[\Phi]$	:	matriz modal	$[-]$

Então, utilizando-se a normalização da matriz modal em relação à matriz de massa, a equação (3.25) fica:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] \{\ddot{q}\} + [\Phi]^T ([C] + [G]) [\Phi] \{\dot{q}\} + [\Phi]^T [K] [\Phi] \{q\} = \{0\} \quad (D.1)$$

$$\therefore [I] \{\ddot{q}\} + [\Phi]^T [D] [\Phi] \{\dot{q}\} + [\Lambda^2] \{q\} = \{0\} \quad (D.2)$$

$\Lambda^2$  : matriz das freqüências naturais  $[(\text{rad/s})^2]$

Agora, transforma-se a equação (D.2) para o espaço de estados:

$$\begin{cases} \{\dot{\mathbf{q}}\} = \{\mathbf{v}\} \\ \{\dot{\mathbf{v}}\} = -[\Phi]^T [D][\Phi]\{\mathbf{v}\} - [\Lambda^2]\{\mathbf{q}\} \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & | & [\mathbf{I}] \\ \hline -[\Lambda^2] & | & -[\Phi]^T [D][\Phi] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} \quad (\text{D.4})$$

Introduzindo-se o vetor de variáveis de estado e fazendo uso da transformada de Laplace, a equação (D.4) pode ser reescrita como:

$$\begin{cases} \{\mathbf{Z}\} \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} \\ [\mathbf{B}] \equiv \begin{bmatrix} [0] & | & [\mathbf{I}] \\ \hline -[\Lambda^2] & | & -[\Phi]^T [D][\Phi] \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{D.5})$$

$$\therefore \{\dot{\mathbf{Z}}\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{Z}\} \Leftrightarrow \quad (\text{D.6})$$

$$\Leftrightarrow [\mathbf{B}]\{\mathbf{Z}\} = s\{\mathbf{Z}\} \quad (\text{D.7})$$

$[\mathbf{B}]$  : matriz de estado  $[-, -, (\text{rad/s})^2, \text{Ns/kg}\cdot\text{m}]$   
 $s$  : pólo do sistema  $[\text{rad/s}]$   
 $\{\mathbf{Z}\}$  : vetor de variáveis de estado  $[\text{m}, \text{m/s}]$

Assim, nota-se claramente que, mesmo no espaço de estados, o autop problema está bem caracterizado na equação (D.7). Outro ponto importante é que os autovalores da matriz de estado são exatamente as freqüências naturais do problema original, formulado a partir da equação do movimento (3.25). Do mesmo modo, a partição superior dos autovetores, relativa aos deslocamentos, corresponde

justamente aos modos de vibrar do sistema original. Observe-se apenas que, no espaço de estados, são obtidas as frequências naturais, os modos naturais e seus complexos conjugados.

Para extrair os autovalores e autovetores complexos da matriz de estados em coordenadas modais é utilizado o algoritmo QR, amplamente testado e reconhecido por ser o mais eficiente do ponto de vista computacional. Este esquema numérico é relatado por PRESS [35] e encontra-se implementado e disponível no programa ANSYS [2]. Nele, os primeiros autovetores do sistema amortecido são aproximados por uma combinação linear dos autovetores reais do sistema não-amortecido, calculados pelo método dos Blocos de Lanczos. Em seguida, com os autovalores do sistema não-amortecido, é possível realizar a transformação para o espaço de estados com coordenadas modais, a partir da equação (D.4) e, assim, calcular os autopares complexos com mais rapidez, pelo método de Hessenberg.

## APÊNDICE E – MÉTODO DE NEWMARK

Para o cálculo de transientes em sistemas que não podem ser resolvidos pelo método da superposição modal, uma alternativa é a integração direta no tempo, empregando-se o método de Newmark, que com ajuda do método de diferenças finitas, avalia os deslocamentos forçados da estrutura ao longo do tempo.

Seguindo-se o equacionamento proposto por BATHE [4] e implementado no programa ANSYS [2], parte-se de:

$$\{\dot{x}_{n+1}\} = \{\dot{x}_n\} + [(1 - \delta)\{\ddot{x}_n\} + \delta\{\ddot{x}_{n+1}\}]\Delta t \quad (E.1)$$

$$\{x_{n+1}\} = \{x_n\} + \{\dot{x}_n\}\Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \{\ddot{x}_n\} + \alpha \{\ddot{x}_{n+1}\} \right] \Delta t^2 \quad (E.2)$$

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n \quad (E.3)$$

$x_n$	:	deslocamento no instante $t_n$	[m]
$x_{n+1}$	:	deslocamento no instante $t_{n+1}$	[m]
$\alpha$	:	parâmetro de integração de Newmark	[-]
$\delta$	:	parâmetro de integração de Newmark	[-]
$\Delta t$	:	passo de integração	[s]

As equações (E.1) e (E.2) podem ser rearranjadas de modo a isolar os termos referentes à velocidade e à aceleração no instante  $t_{n+1}$ :

$$\{\ddot{x}_{n+1}\} = a_0 (\{x_{n+1}\} - \{x_n\}) - a_2 \{\dot{x}_n\} - a_3 \{\ddot{x}_n\} \quad (E.4)$$

$$\{\dot{x}_{n+1}\} = \{\dot{x}_n\} + a_6 \{\ddot{x}_n\} + a_7 \{\ddot{x}_{n+1}\} \quad (E.5)$$

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \quad (E.6)$$

$$a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t} \quad (E.7)$$

$$a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1 \quad (E.8)$$

$$a_6 = \Delta t(1 - \delta) \quad (E.9)$$

$$a_7 = \delta \Delta t \quad (E.10)$$

Escrevendo-se a equação do movimento no instante  $t_{n+1}$  e substituindo-se nela as equações (E.4) e (E.5), têm-se:

$$[M]\{\ddot{x}_{n+1}\} + [D]\{\dot{x}_{n+1}\} + [K]\{x_{n+1}\} = \{F_{n+1}\} \quad (E.11)$$

$$\begin{aligned} & (a_0[M] + a_1[D] + [K])\{x_{n+1}\} = \\ & = \{F_{n+1}\} + [M](a_0\{x_n\} + a_2\{\dot{x}_n\} + a_3\{\ddot{x}_n\}) + [D](a_1\{x_n\} + a_4\{\dot{x}_n\} + a_5\{\ddot{x}_n\}) \end{aligned} \quad (E.12)$$

$$a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \quad (E.13)$$

$$a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1 \quad (E.14)$$

$$a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \quad (E.15)$$

$[D]$	:	matriz de amortecimento	$[Ns/m]$
$\{F_{n+1}\}$	:	carregamento no instante $t_{n+1}$	$[N]$
$[K]$	:	matriz de rigidez	$[N/m]$
$[M]$	:	matriz de massa	$[kg]$

Conhecendo-se o vetor de deslocamento no instante  $t_n$  e, conseqüentemente, os vetores de velocidade e aceleração, a determinação dos deslocamentos no instante  $t_{n+1}$  recai na resolução de um problema clássico de elementos finitos, dado pela equação (E.12). Quanto aos parâmetros de integração de Newmark, BATHE [4] sugere que sejam usados  $\alpha = 1/4$  e  $\delta = 1/2$ , para que a convergência do método seja incondicional e que não haja amortecimento numérico na resposta do sistema.