

CONTROLE CENTRALIZADO DE MANCAIS MAGNÉTICOS COM A TÉCNICA LQR E CARACTERÍSTICA INTEGRAL

Marcelo de Almeida Lopes¹, José Andrés Santisteban², Afonso Celso Del Nero³

¹Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro, Brasil, marceloalopes@vm.uff.br

²Universidade Federal Fluminense, PGMEC, Rio de Janeiro, Brasil, jasantisteban@vm.uff.br

³Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, Nero@coep.uff.br

Abstract: Different aspects are considered in the design of active magnetic bearings (AMB), such as the mechanical one, the electronics and the control. Until now, we have tested some control techniques in a prototype of electric induction motor whose rotor is hovered by AMB's. Nevertheless, these were of the decentralized type, which means that the different freedom degrees are considered decoupled, so the classic control theory may be utilized. Different to that approach, in this work the developing of a centralized control system is shown. In this way the plant is considered as a real multiple input – multiple output (MIMO) system. Additionally, it was designed an optimal controller using the LQR (Linear Quadratic Regulator) strategy with an integral characteristic. Some simulations and experimental results confirm the good performance of this approach.

Keywords: Magnetic bearings, electric motor, centralized control, optimal control.

1. INTRODUÇÃO

A evolução dos mancais magnéticos se pauta principalmente nos aspectos relacionados à modelagem do sistema eletromecânico, ao contínuo desenvolvimento da eletrônica de potência e das estratégias de controle. Quando se trata de um sistema de controle centralizado são consideradas as interações entre os diferentes graus de liberdade do rotor suportado pelos mancais magnéticos. Neste caso, uma modelagem mais acurada considera o efeito giroscópico, grandeza particularmente notada em altas rotações, como acontece nos turbogeradores, flywheels, ultracentrifugas, etc [1]. A eletrônica continua sendo uma ferramenta importante no processo de construção do mancal e tem por objetivo coletar os sinais de corrente, posição e velocidade de giro do rotor para, posteriormente, tratá-los, em geral, digitalmente, via conversor A/D, microprocessador, microcontrolador ou DSP, e, finalmente, fornecer as referências de corrente apropriadas às bobinas do dispositivo através de conversores D/A [2-9].

Os modelos matemáticos para rotores suportados com mancais magnéticos dependem da velocidade de rotação. Quando estes são considerados rígidos, fica evidente a presença do efeito giroscópico. Contudo, para baixas

velocidades de operação este efeito pode ser considerado desprezível e, com isso, o modelo do rotor se torna desacoplado, o que significa que cada variável de entrada afeta apenas uma das variáveis de saída, e cada uma destas é afetada por apenas uma variável de entrada.

Esta situação é muito desejável, pois se pode considerar o sistema como uma justaposição de canais independentes. Como cada um destes canais é um sistema SISO, técnicas clássicas de controle podem ser aplicadas de maneira independente. Nessas condições, o sistema de controle de posicionamento é denominado de descentralizado.

Desta forma é possível impor, por exemplo, a cada grau de liberdade o comportamento de um conjunto mola-amortecedor (rigidez e amortecimento), utilizando um controlador PD (proporcional derivativo). Quando, em adição, deseja-se rastrear perfeitamente referências constantes, e também rejeitar, em regime, degraus de distúrbios, a presença de dinâmica integradora é necessária, ou seja, utiliza-se um controlador PID em cada canal.

Por outro lado, quando se trabalha no espaço de estados, a ferramenta básica de controle é a denominada realimentação de estados $\mathbf{x}(t)$ na forma $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$, onde, no caso geral, cada componente do vetor de controle $\mathbf{u}(t)$ depende de todas as variáveis de estado: $\mathbf{u}_i = k_{i1}\mathbf{x}_1 + k_{i2}\mathbf{x}_2 + \dots + k_{in}\mathbf{x}_n$. A matriz \mathbf{K} resultante é “cheia”, ou seja, nenhum de seus elementos é nulo, e a lei de controle resultante é chamada de centralizada. Muitas vezes é possível substituir, com pouca perda de desempenho, a lei $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ por $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_{des}\mathbf{x}(t)$ onde a matriz \mathbf{K}_{des} apresenta muitos elementos nulos, o que facilita a sua implementação prática. Neste caso, cada variável de entrada depende apenas de algumas variáveis de estado e a lei de controle se torna descentralizada. Um controle descentralizado pode ser aplicado mesmo a um sistema onde não haja desacoplamento.

Diversas técnicas de controle como alocação de pólos [10], LQG [11], H_∞ [12] e μ -synthesis [13-14], já foram empregadas nos AMBs. No entanto, embora tenha sido reportado que as três últimas oferecerem um melhor desempenho quando aplicadas a um sistema desbalanceado, com incerteza no modelo [15] ou com distúrbios estocásticos, existe a dificuldade de estabelecer os estados iniciais e dados estatísticos a respeito dessas perturbações.

Contudo, algumas publicações apresentam maneiras para contornar este problema [16], mas com o conseguinte aumento da complexidade de implementação.

Em geral, as variáveis de estados escolhidas são as posições e velocidades de determinados pontos do rotor, mas quando se deseja, como é o caso, rejeitar distúrbios constantes, deve haver ação integradora na malha de controle. Assim, neste trabalho, as integrais das posições serão também variáveis de estado, dando uma característica análoga a um controlador PID. O projeto aqui desenvolvido é o de um controlador ótimo centralizado, do tipo LQR [17], com característica integral; busca-se uma matriz de realimentação K que, multiplicando às posições e suas respectivas integrais e derivadas, forneça as referências de corrente de controle para os mancais magnéticos. O seu desempenho é equivalente aos dos controladores já reportados, mas o seu projeto e implementação são menos complexos.

2. MODELAGEM DO SISTEMA

O protótipo desenvolvido possui dois mancais magnéticos radiais. Um na tampa direita do motor e outro na esquerda, como na representação simplificada da Figura 1. Cada mancal gera uma força horizontal e vertical.

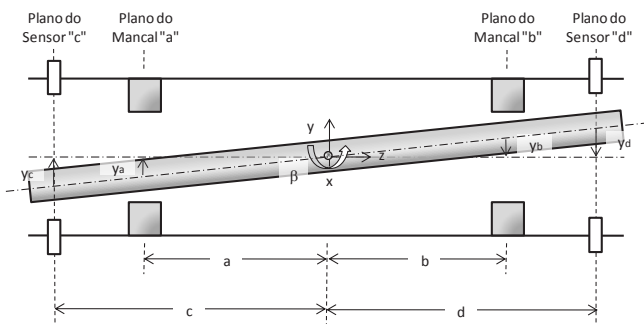


Figura 1. Disposição dos MMs radiais. [1].

Inicialmente, como é usual, a força magnética f_m é linearizada levando a:

$$f_m = k_s d + k_i i_c, \quad (1)$$

onde i_c é a corrente de controle que atravessa a bobina do eletroímã e d é a espessura do entreferro; as constantes k_s e k_i dependem das características geométricas, número de espiras e do ponto de operação.

Para o modelo mecânico do rotor, seja o vetor das forças magnéticas (entradas de controle) $\mathbf{f} = [f_{yd} f_{ye} f_{xd} f_{xe}]'$ onde os sub-índices d , e indicam direita e esquerda e x , y são as direções horizontal e vertical; seja também $\mathbf{p} = [y_d y_e x_d x_e]'$ o vetor dos deslocamentos radiais medidos. Considerando o eixo como corpo rígido, a equação (2) representa o comportamento dinâmico deste modelo [1].

$$\mathbf{f} = M_b \ddot{\mathbf{p}} + G_b \mathbf{p} \quad (2)$$

Onde M_b e G_b são a matriz de massa e a matriz giroscópica, ambas de dimensão 4×4 , transformadas das coordenadas do centro de gravidade para as coordenadas solidárias com as

direções de ação das forças magnéticas. Estas consideram a massa m do rotor, os momentos de inércia transversais I_y , I_x , o polar I_z e a velocidade do rotor Ω em rad/s, como mostradas abaixo.

$$M_b = \frac{1}{(b-a)^2} \begin{bmatrix} mb^2 + I_y & -mab - I_y & 0 & 0 \\ -mab - I_y & ma^2 + I_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & mb^2 + I_x & -mab - I_x \\ 0 & 0 & -mab - I_x & ma^2 + I_x \end{bmatrix}$$

$$G_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot I_z \cdot \Omega$$

Como as componentes do vetor \mathbf{f} são as forças magnéticas que podem ser linearizadas, como na equação (1), então a equação (2) pode ser transformada em:

$$\ddot{\mathbf{p}} = k_s M_b^{-1} \mathbf{p} - M_b^{-1} G_b \mathbf{p} + k_i M_b^{-1} \mathbf{i}, \quad (3)$$

onde $\mathbf{i} = [i_{yd} i_{ye} i_{xd} i_{xe}]'$ é o vetor das correntes de controle.

Considerando um vetor de estados \mathbf{x} de dimensão 8 pode-se expressar (3) em termos de equações dinâmicas:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \ddot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \mathbf{i}, \quad (4)$$

onde os blocos indicados são de dimensão 4×4 e dados por $A_{21} = k_s M_b^{-1}$, $A_{22} = -M_b^{-1} G_b$ e $B_2 = k_i M_b^{-1}$; I é a identidade. Como já comentado, para conseguir efeito análogo ao do PID, será necessário adicionar dinâmica integradora à planta, o que se faz considerando também como variáveis de estado as integrais das posições. O modelo de planta utilizado, com doze variáveis de estado é:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \ddot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} \\ \int \mathbf{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \mathbf{i}, \quad (5)$$

Chamando o vetor de estados expandido de \mathbf{x} , o vetor de entradas \mathbf{i} de \mathbf{u} e batizando as matrizes acima de A e B , chega-se à equação padrão $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$ na qual se baseia a próxima seção.

3. O CONTROLADOR ÓTIMO

Como já foi dito, o controlador ótimo centralizado será desenvolvido com a estratégia LQR, recordada a seguir. Dado um sistema pelas suas equações no espaço de estados $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$, define-se um índice de desempenho quadrático do tipo:

$$J(\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(\cdot)) = \int_0^\infty (\mathbf{x}' Q \mathbf{x} + \mathbf{u}' R \mathbf{u}) dt, \quad (6)$$

onde Q é uma matriz simétrica não-negativa e R é simétrica positiva [10].

Tal índice mede, ao mesmo tempo, o desempenho transitório do sistema ($\mathbf{x}' Q \mathbf{x}$) e o custo do controle necessário ($\mathbf{u}' R \mathbf{u}$). A escolha das matrizes de ponderação Q e R reflete a importância colocada pelos projetistas no desempenho e/ou no custo do controle. Trata-se então de

encontrar uma função de entrada $u^*(t)$ que minimize o índice acima.

A solução deste problema de minimização mostra que a entrada de controle ótimo é uma realimentação de estados: $u^*(t) = -K^*x(t)$ onde $K^* = R^{-1}B'P$ é a matriz de realimentação de estados ótima e P é uma matriz $n \times n$, a solução simétrica não negativa da Equação de Riccati Matricial Algébrica associada:

$$PA + A'P - PBR^{-1}B'P = 0$$

O caminho é simples: definidas Q e R soluciona-se a equação acima, calcula-se a matriz de realimentação K^* e monta-se a lei de controle $u^* = -Kx$, que estabiliza o sistema de modo ótimo.

Para estabilizar o rotor com mancais magnéticos e fornecer dinâmica extra por meio de realimentação de estados ótima, foram implementadas diversas simulações considerando uma rotação de 3600rpm no eixo. A primeira considerou ambas as matrizes Q e R identidades. Entretanto, o resultado não foi satisfatório, pois, para um distúrbio (força) em degrau, o erro de regime somente era anulado depois de vários segundos. Para acelerar a resposta, foi adotada a seguinte estratégia: A matriz R foi mantida como sendo igual à identidade e, a matriz Q foi conservada como diagonal, mas os oito primeiros termos da sua diagonal foram ajustados até que os autovalores da matriz $A - BK$ fossem todos da mesma ordem de grandeza. Os valores dos termos escolhidos para a matriz Q foram:

$$Q = \text{diag}(10^{10} \ 10^{10} \ 10^{10} \ 10^{10} \ 10^8 \ 10^8 \ 10^8 \ 10^8 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1).$$

A matriz $P(t)$, a matriz de realimentação K^* e os autovalores do sistema em malha fechada foram obtidos com auxílio do software Matlab®, usando-se o comando "lqr(A,B,Q,R)".

Como a implementação foi feita via computador, a matriz K^* foi posteriormente discretizada [18-19], através da equação:

$$K_d^* = K^*[I + (A - BK^*)h/2], \quad (7)$$

onde h é o tempo de amostragem que, neste projeto, foi de 1 ms.

4. RESULTADOS

4.1. Simulações

As simulações, aqui apresentadas, foram realizadas com o auxílio do programa Matlab®. Para isso, a matriz de realimentação ótima foi calculada, no ambiente de comandos, para uma velocidade de 3600rpm. As matrizes A_{21} , A_{22} e B_2 foram calculadas com os dados do protótipo mostrados na tabela 1 e obtiveram-se:

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 75.9235546,5 & 0 & 0 \\ 5.546,592422 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 72.9535546,5 \\ 0 & 0 & 5.546,592422 \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -18,2965 & 18,2965 \\ 0 & 0 & 23,5810 & -23,5810 \\ 18,2965 & -18,2965 & 0 & 0 \\ -23,5810 & 23,5810 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 50,7414 & 3,8578 & 0 & 0 \\ 3,8578 & 64,2826 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 45,3845 & 3,4505 \\ 0 & 0 & 3,4505 & 57,4961 \end{bmatrix}$$

Na plataforma Simulink foi construído o diagrama de blocos do sistema controlado. Nas figuras abaixo são mostrados alguns detalhes. Na Figura 2 se observa que as saídas da matriz de realimentação ótima são limitadas com blocos de saturação. Na Figura 3 se mostram os diagramas de blocos que representam cada um dos modelos linearizados dos mancais magnéticos, interagindo com o bloco que modela o sistema mecânico do rotor do motor. Na Figura 4 se mostra o subsistema mecânico, onde aparece em evidência a velocidade do rotor como sendo mais uma entrada, cuja amplitude definirá o nível do efeito giroscópico.

Tabela 1. Dados do protótipo.

Parâmetro	Valor
Massa do rotor (m)	5,3042 kg
Distância entre o Centro de Massa (CM) e o mancal direito (a)	-68,9 mm
Distância entre o CM e o mancal esquerdo (b)	88,8 mm
Número de enrolamentos (N)	564 voltas
Entreferro (h_0)	0,45 mm
Área do pólo da bobina (S)	136 mm ²
Ângulo da sapata polar (α)	22,5°
Inércia no eixo x e y (I_x e I_y)	37,19.10 ⁻³ kg.m ²
Inércia no eixo z (I_z)	4,132.10 ⁻³ kg.m ²
Corrente de bias para ambos eixos (i_{bias})	700 mA
Corrente de compensação do peso (i_{lev})	350 mA

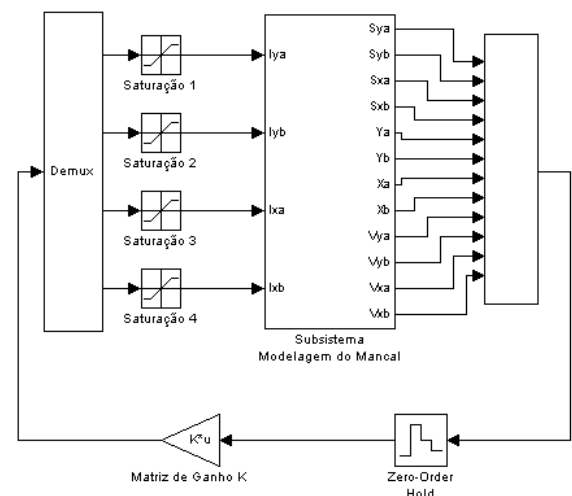


Figura 2. Diagrama de blocos do sistema de controle.

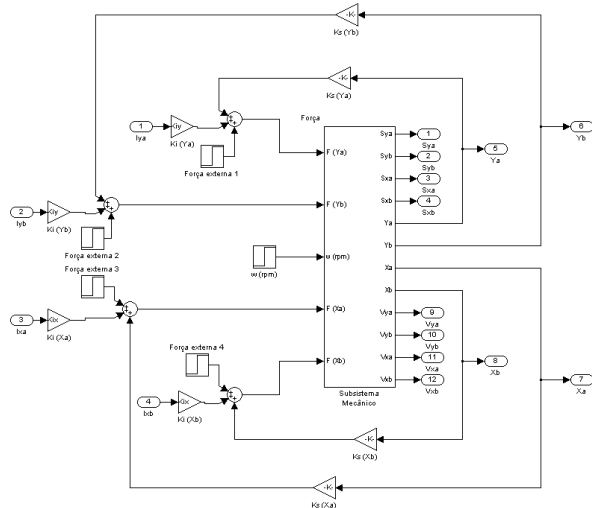


Figura 3. Diagrama de blocos do subsistema mancais-rotor.

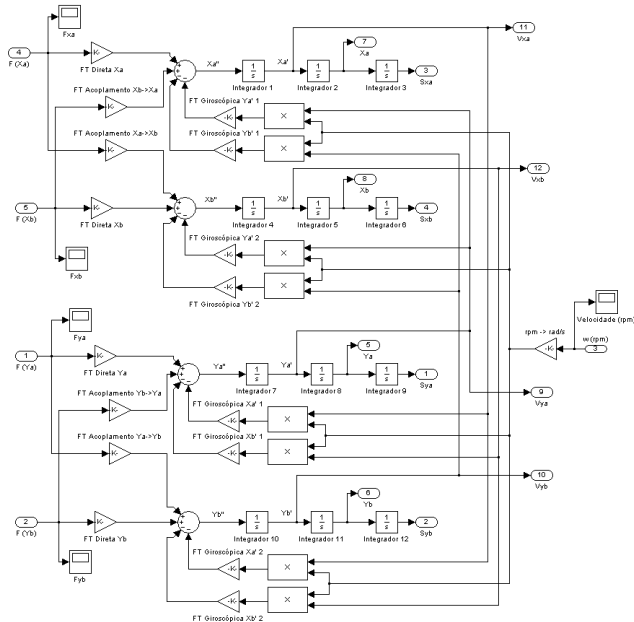


Figura 4. Diagrama de blocos do sub-sistema mecânico.

Na Figura 5, mostra-se a resposta do sistema de controle considerando um dos eixos verticais partindo de uma posição inicial de $-0,45\text{mm}$ e com o rotor girando a 3600rpm . Como esperado o erro de regime tende para zero.

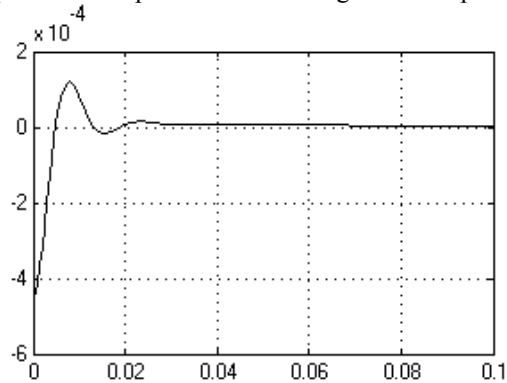


Figura 5. Comportamento da posição vertical considerando valor inicial de $-0,45\text{mm}$ com rotor girando a 3.600 rpm .

Na Figura 6, mostra-se o comportamento de um dos eixos horizontais enquanto está acontecendo o posicionamento do eixo vertical mostrado na Figura 5. Neste caso, o eixo horizontal inicia na posição centralizada, mas sofre apenas uma perturbação máxima da ordem de $0,6\text{ }\mu\text{m}$. O erro de regime também tende para zero.

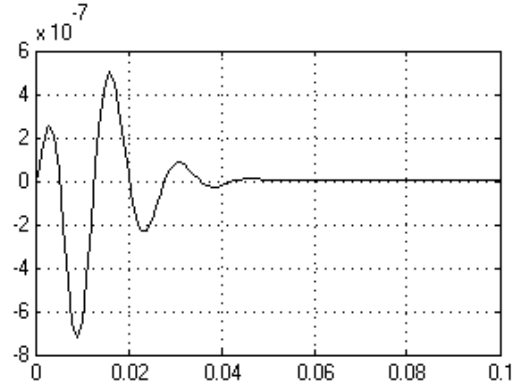


Figura 6. Comportamento da posição horizontal considerando valor inicial de $-0,45\text{mm}$ no eixo vertical com rotor girando a 3.600 rpm .

Nas Figuras 7 e 8, mostram-se as respostas dos mesmos eixos vertical e horizontal, inicialmente centralizados, após ser aplicada, em $0,2\text{s}$, uma perturbação de 100N em cada um dos dois eixos verticais, enquanto o rotor gira a 3600rpm . Como se observa, o controlador é capaz de restaurar as posições de equilíbrio. Note-se que no eixo horizontal o efeito da perturbação foi cem vezes menor do que no eixo vertical.

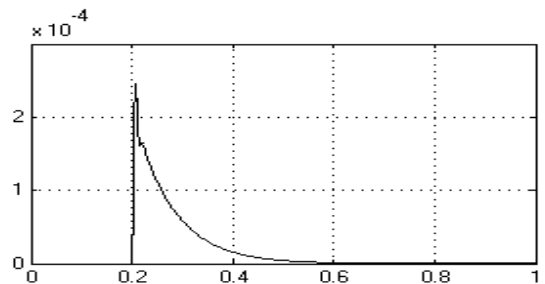


Figura 7. Comportamento da posição vertical após uma perturbação vertical total de 200N , com rotor girando a 3.600 rpm .

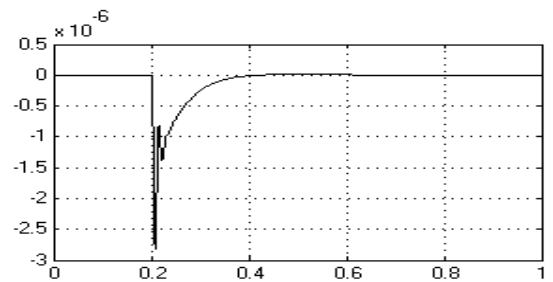


Figura 8. Comportamento da posição horizontal após uma perturbação vertical total de 200N , com rotor girando a 3.600 rpm .

4.2. Resultados Experimentais

Na Figura 9 se mostra o protótipo em teste e na Figura 10 os seus detalhes de construção interna, onde se apreciam os estatores dos mancais magnéticos radiais e axial, montados em ambas tampas com os seus respectivos rolamentos de segurança. No eixo, se observa que estão montados ambos os rotores dos mancais, um em cada extremidade, e, ao centro, o rotor do motor de indução. Adicionalmente, se mostra uma pequena tampa auxiliar para abrigar o sensor de velocidade.

Para implementar o sistema de controle ótimo um programa foi desenvolvido em C, rodando num computador. A taxa de amostragem foi de 1ms. A rotina completa do controlador é executada em 175 μ s.



Figura 9. Protótipo montado em bancada.



Figura 10. Conjunto das principais peças componentes do protótipo.

A seguir serão apresentadas algumas figuras, obtidas com um osciloscópio, que mostram o desempenho do controlador ótimo. Os dados foram colhidos do mancal magnético que fica na tampa direita do motor. Na parte superior aparece a posição horizontal e na parte inferior a vertical. A escala vertical é de 0,1mm/div e a horizontal de 0,1s/div.

Nas Figuras 11 a 14, mostram-se as posições centralizadas para diferentes rotações e sem carga radial no eixo. Observa-se que as vibrações são praticamente nulas quando o rotor se encontra parado e a frequência das vibrações acompanha a velocidade do rotor.

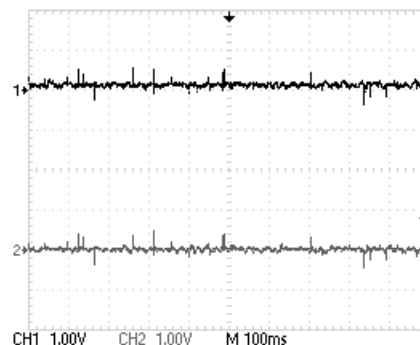


Figura 11. Posição horizontal (CH1) e vertical (CH2) com rotação nula.

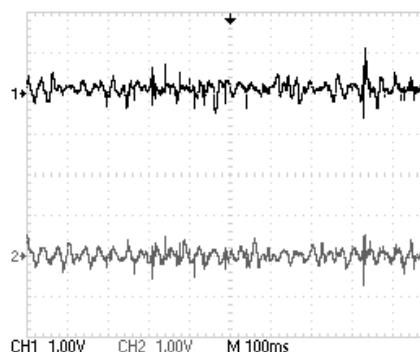


Figura 12. Posição horizontal (CH1) e vertical (CH2) com rotação de 1800rpm.

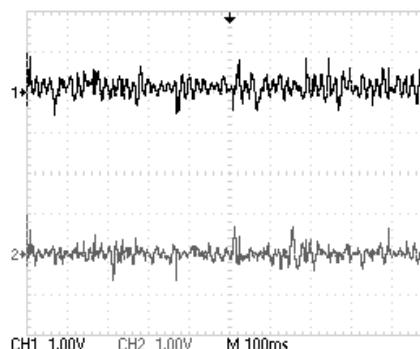


Figura 13. Posição horizontal (CH1) e vertical (CH2) com rotação de 3600rpm.

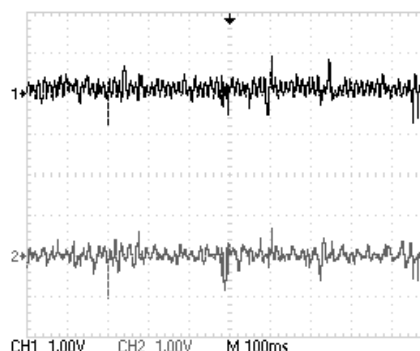


Figura 14. Posição horizontal (CH1) e vertical (CH2) com rotação de 4800rpm.

Nas Figuras 15 e 16 se observa a resposta do sistema de controle quando o rotor é submetido a uma perturbação transitória num dos eixos enquanto o rotor se encontra girando a 3600rpm. Como se observa, o efeito no eixo

ortogonal é desprezível, o que está de acordo com os resultados mostrados nas Figuras 7 e 8.

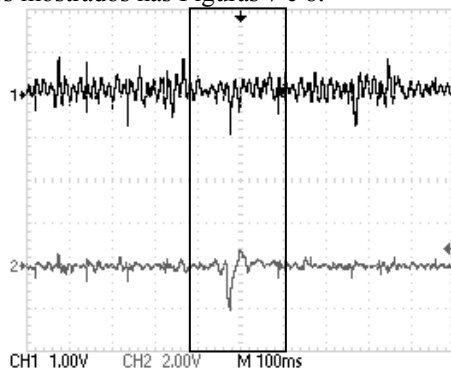


Figura 15. Posição horizontal (CH1) e vertical (CH2) com rotação de 3.600rpm e perturbação vertical.

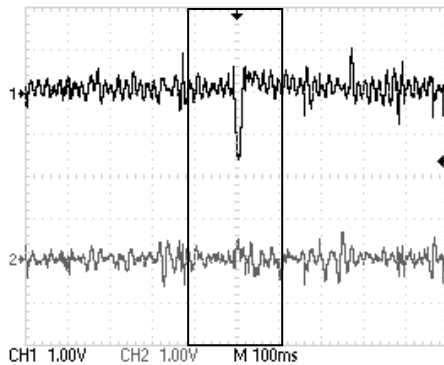


Figura 16. Posição horizontal (CH1) e vertical (CH2) com rotação de 3.600rpm e perturbação horizontal.

Outros testes foram realizados, utilizando outras matrizes ótimas, derivadas de outras matrizes Q , mas as vibrações foram maiores. A experiência sugere a mudança da matriz de realimentação de estados de acordo com a velocidade de operação do motor. Para isto existem algumas possibilidades. Por exemplo, uma poderia consistir no cálculo em tempo real dessas matrizes e uma outra consistiria em calcular previamente algumas matrizes e armazená-las em memória, para logo utilizá-las de acordo às diversas faixas de operação.

5. CONCLUSÃO

Este trabalho mostrou o desenvolvimento de um controlador ótimo centralizado, com característica integral, para um sistema de posicionamento de um rotor suportado com mancais magnéticos. A estratégia simples de arbitrar uma matriz diagonal Q para a obtenção da matriz de realimentação ótima se mostrou bem sucedida. Como previsto, o sistema de controle foi capaz de manter o erro de regime nulo até mesmo para perturbações em degrau como mostrado por simulações. Experimentalmente, se verificou a sua capacidade de rejeitar distúrbios transitórios.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio do CNPq e a colaboração do engenheiro Elkin Rodrigues.

REFERÊNCIAS

- [1] Schweitzer G., Bleuler H., Traxler A. *Active Magnetic Bearings*. v/d/Hochschulverlag AG an der ETH Zürich, 2009.
- [2] David, Domingos F. B. *Levitação de Rotor por Mancais-Motores Radiais Magnéticos e Mancais Axial Supercondutor Auto-Estável*, D. Sc., tesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2000.
- [3] Gomes, R. R.; Santisteban J. A.; Stephan, R. M. *Section VI - Sensor & Actuators: Optimized Performance of a Motor-Bearing*. ABCM Symposium Series in Mechatronics. Rio de Janeiro, Vol. 2, pp. 417-424, 2006.
- [4] Neves, V. P.; Santisteban J. A.; Plaisant, A. L. R. *Modeling and Control of an Axial Magnetic Bearing for a Prototype of Electric Motor Supported by Radial Magnetic Bearings*. The Eleventh International Symposium on Magnetic Bearings, Nara, Japan, 2008.
- [5] Ortiz, A. S. *Uma Proposta de Motor Elétrico sem Mancais Mecânico*, D. Sc., COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, 1994.
- [6] Santisteban, J.A. *Estudo de Influência da Carga Torsional Sobre o Posicionamento de Radial de um Motor-Mancais*, Tese de D. Sc., COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 1999.
- [7] Santisteban J. A.; Plaisant, A. L. R.; Neves, V. P.; Velandia, E. F. R. *Modelagem e Controle da Posição Axial de um Rotor de Motor Elétrico Suportado por Mancais Magnéticos*. Congresso Brasileiro de Automação, Juiz de Fora, 2008.
- [8] Santisteban J. A.; Noronha, R. F.; David, D.; Suhett, M. R.; Pedrosa J. F. *Implementation of Magnetic Bearings on an Electric Motor*. VI Conferência Internacional de Aplicações Industriais, Joinville, 2004.
- [9] Velandia, E. F. R.; Santisteban J. A.; Noronha, R. F.; Silva, V. A. P. *Section VI - Sensor & Actuators: Development of a Magnetically Borne Electrical Motor Prototype*. Symposium Series in Mechatronics. Vol. 2, pp. 401-408, 2006.
- [10] Beizama, A. M. *et al. Comparison between Pole-placement Control and Sliding Mode Control for 3-Pole Radial Magnetic Bearings*. International Symposium on Power Electronics, Electrical Drives, Automation and Motion. pp. 1315-1320, 2008.
- [11] Schuhmann, T., Hofmann, W. and Werner, R. *Sensor Integration and State Estimation on Magnetically Levitated Rotors*. International Symposium on Power Electronics, Electrical Drives, Automation and Motion. pp. 11-16, 2006.
- [12] Nair, S. S., Vaidyan, M. V. and Joy, M. L. *Generalized Design and Disturbance Analysis of Robust H_{∞} Control of Active Magnetic Bearings*. IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, Singapore, pp. 1124-1129, 2009.
- [13] Fittro, Roger L. and Knospe, Carl R. *Rotor Compliance Minimization Via μ -Control of Active Magnetic Bearings*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 10, Nº 2, pp. 238-249, 2002.
- [14] Namerikawat, T. and Fujita, M. *Uncertain Model and μ -Synthesis of a Magnetic Bearing*. International Conference on Control Applications, pp. 558-563, Hawaii, 1999.
- [15] Fujitai, Masayuki; Matsumurat, Fumio and Uchida, Kenko. *Experiments on the H_{∞} Disturbance Attenuation Control of a Magnetic Suspension System*. Proceedings on the 29th Conference. pp. 2773-2778, Hawaii, 1990.
- [16] Namerikawa, T. and Shinozuka, W. *H_{∞} Control of the Magnetic Bearing Considering Initial State Uncertainties*. Advanced Motion Control. The 8th IEEE International Workshop on. pp. 275-280, 2004.
- [17] Anderson, Brian D. O. and Moore, John B. *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*. Dover, 2007.
- [18] Åström, Karl J. and Wittenmark, Björn. *Computer Controlled Systems: Theory and Design*. Prentice-Hall, 1984.
- [19] Barczak, Czeslau L. *Controle Digital de Sistemas Dinâmicos: Projeto e Análise*. Edgard Blücher, 1995.