

DINÂMICA DO 8 CORPO RÍGIDO

8.1 Introdução

Um corpo rígido constitui-se de um conjunto de partículas (massas pontuais) dispostas de tal forma que as distâncias relativas entre elas são fixas. As leis da mecânica do ponto continuam válidas se considerarmos somente o movimento do centro de massa do corpo rígido. Além deste movimento translacional descrito pelas leis de Newton, o corpo também pode sofrer uma rotação ao redor de um eixo, que pode eventualmente passar pelo seu centro de massa. Assim, para especificarmos com exatidão a posição de um corpo rígido, é necessário conhecermos o movimento de seu centro de massa e o ângulo de rotação θ , como mostra a Fig. 8.1.

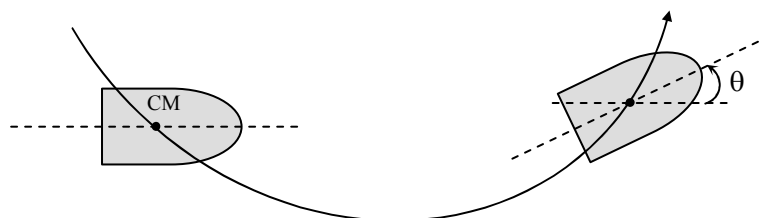


Fig. 8.1 – Movimento de um corpo rígido combinando translação e rotação.

8.2 Rotação em torno de um eixo fixo

Vamos rever algumas grandezas físicas necessárias para descrever a rotação de um corpo rígido ao redor de um eixo fixo. Consideremos um ponto localizado a uma distância r do eixo de rotação de tal maneira que seu vetor

posição forma um ângulo θ com a linha tracejada horizontal, conforme mostra a Fig. 8.2.

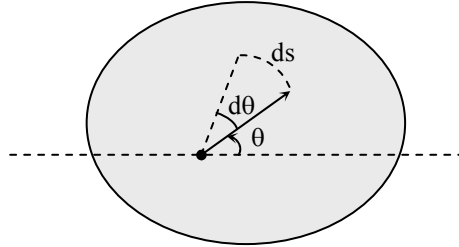


Fig. 8.2 – Rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo.

A velocidade angular do corpo é definida como sendo a variação temporal do ângulo θ :

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} \quad [\text{rad/s}]$$

Durante um intervalo de tempo dt , o ponto descreve um arco $ds = r d\theta = r \omega dt$, onde na última igualdade usamos a definição de ω dada acima. A velocidade tangencial corresponde à variação de ds com o tempo e assim,

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = r \omega(t) \quad [\text{m/s}]$$

Como deixamos explícito acima, $\omega(t)$ pode depender do tempo e sua variação define a aceleração angular α :

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad [\text{rad/s}^2]$$

Evidentemente, neste caso temos também aceleração tangencial e como r é constante durante a rotação (corpo rígido), ela é definida como:

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = r \frac{d\omega}{dt} = r \alpha \quad [\text{m/s}^2]$$

Devemos nos lembrar que como este ponto descreve um círculo, também sofre a aceleração centrípeta dada por:

$$a_c = -\frac{v^2}{r} = -\omega^2 r$$

O conjunto de equações acima tem uma forma similar ao encontrado no caso do movimento retilíneo se substituirmos θ , ω e α por x , v e a . No caso em que α é constante (rotação uniformemente acelerada) obtemos por integração direta que:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

As grandezas θ , ω e α que caracterizam o movimento rotacional também podem ser representadas vetorialmente. A *direção* neste caso é a do eixo em torno do qual o corpo roda. O *sentido* é definido pela regra da mão direita, colocando-se os dedos na direção em que θ aumenta. O polegar coincide então com o eixo de rotação e indica o sentido do vetor $\vec{\theta}$. Estritamente falando, $\vec{\theta}$ só pode ser considerado vetor quando o eixo de rotação não muda ou quando $|\vec{\theta}| \rightarrow 0$. Caso contrário, ele não obedece a regra de comutação dada por:

$$\vec{\theta}_1 + \vec{\theta}_2 = \vec{\theta}_2 + \vec{\theta}_1$$

Como exemplo, consideremos duas rotações consecutivas de um paralelepípedo, ambas de 90° , conforme mostra a Fig. 8.3. Se a 1ª rotação se der em torno de x e a 2ª em torno de y , a posição final do corpo será diferente daquela obtida se a ordem das rotações forem invertidas. Isto demonstra a não comutatividade de $\vec{\theta}$. Por outro lado, $\vec{\omega}$ e $\vec{\alpha}$ comutam porque envolvem vetores infinitesimais ($\vec{\omega} = d\vec{\theta}/dt$ e $\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$).

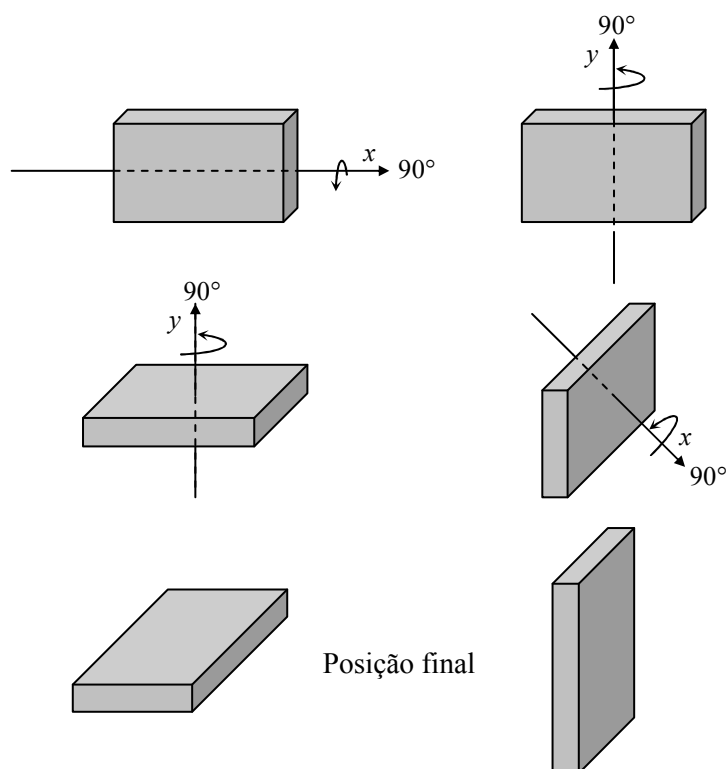


Fig. 8.3 – Não comutatividade da rotação de um corpo rígido para eixo não fixo.

8.3 Energia rotacional e momento de inércia

Se imaginarmos um corpo rígido rodando em torno de um eixo fixo, dividido num número muito grande de partes, cada uma com massa Δm_i , veremos que a energia cinética de cada uma destas partes é:

$$K_i = \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i r_i^2 \omega^2$$

pois sabemos que a velocidade tangencial é $v_i = r_i \omega$ e que a velocidade angular ω é a mesma para todos os elementos de massa Δm_i . A energia cinética total do corpo rígido pode ser encontrada somando-se as energias individuais de cada componente do sistema:

$$K = \sum_i K_i = \frac{1}{2} \left(\sum_i \Delta m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

O termo entre parênteses é conhecido como *momento de inércia*, denotado por I . A energia cinética de rotação de um corpo rígido pode então ser escrita como:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

com $I = \sum_i \Delta m_i r_i^2$. A definição do momento de inércia dada acima é válida

no caso em que o corpo é composto por partículas discretas. Se tivermos uma distribuição contínua de massa devemos fazer $\Delta m_i \rightarrow dm$ e transformar a soma em integral:

$$I = \int_V r^2 dm$$

Comparando a energia cinética de rotação com a de translação, vemos que o momento de inércia faz o papel da massa inercial e a velocidade angular faz o papel da velocidade tangencial.

O momento de inércia depende fortemente da distribuição de massa com relação a um eixo específico, em torno do qual o corpo roda. Desta forma, um mesmo corpo rígido pode ter vários momentos de inércia que dependem dos eixos de rotação escolhidos. Para uma dada velocidade angular ω , como o momento de inércia depende do eixo de rotação, a energia cinética também dependerá. Como exemplo, vamos considerar três massas pontuais (portanto, discretas), ligadas por hastes rígidas sem massa, de maneira a formar o triângulo equilátero mostrado na Fig. 8.4. O momento de inércia em relação ao eixo (1) mostrado na Fig. 8.4 é dado por:

$$I_1 = \sum m_i r_i^2 = 2m \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} mL^2$$

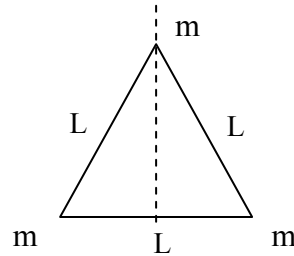


Fig. 8.4 – Corpo rígido formado por um triângulo equilátero com massas no vértice.

Queremos, a seguir, calcular o momento de inércia com relação a um eixo perpendicular ao plano da figura e passando pelo centro de massa do triângulo. A distância de cada massa a este eixo é de $d = L/\sqrt{3}$, de forma que teremos:

$$I_{CM} = 3md^2 = mL^2$$

Por sua vez, o momento de inércia em relação a um eixo perpendicular ao plano da figura e passando por uma das massas é:

$$I_2 = 2mL^2$$

O momento de inércia apresenta uma série de propriedades interessantes que muitas vezes simplificam a realização dos cálculos. Veremos estas propriedades a seguir.

Teorema dos eixos paralelos (Teorema de Steiner)

Se conhecermos o momento de inércia de um corpo em relação a um eixo passando pelo centro de massa, podemos facilmente encontrar o momento de inércia em relação a um eixo paralelo a ele, como mostra a Fig. 8.5. O momento de inércia em relação ao eixo passando pelo centro de massa é:

$$I_{CM} = \int r^2 dm$$

enquanto que em relação ao eixo paralelo,

$$I = \int r'^2 dm$$

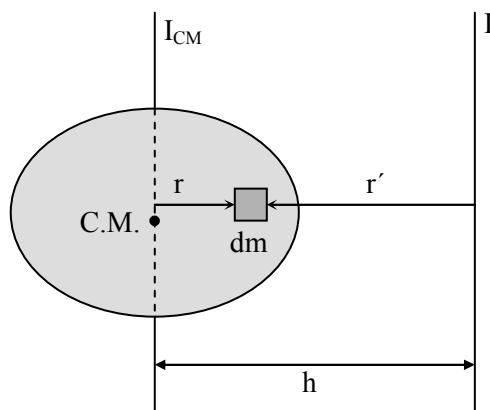


Fig. 8.5 – Figura usada para a demonstração do teorema dos eixos paralelos.

Entretanto, como $r' = h - r$ podemos escrever:

$$I = \int (h - r)^2 dm = \int r^2 dm + h^2 \int dm - 2h \int r dm$$

O último termo nos dá a distância do C.M. ao eixo passando pelo C.M. que, obviamente, é nula. Logo,

$$I = I_{CM} + Mh^2$$

No exemplo das três massas formando o triângulo equilátero visto anteriormente na Fig. 8.4, encontramos: $I_{CM} = mL^2$. Tomando um eixo paralelo que passa por uma das massas temos $h = L/\sqrt{3}$ e $M = 3m$. Pelo teorema de Steiner encontramos:

$$I_2 = I_{CM} + Mh^2 = mL^2 + 3m \frac{L^2}{3} = 2mL^2$$

que coincide com o resultado obtido anteriormente.

Teorema dos eixos perpendiculares

Este teorema é válido para corpos planos, do tipo placa, mostrado na Fig. 8.6.

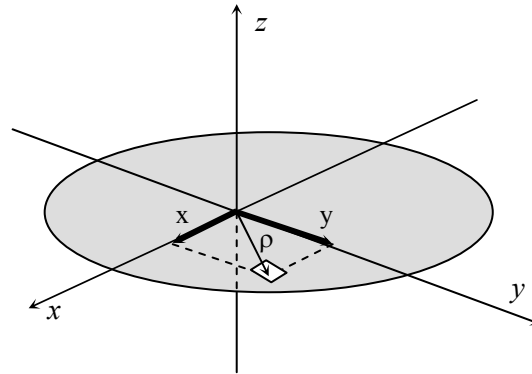


Fig. 8.6 – Figura usada para a demonstração do teorema dos eixos perpendiculares.

Os momentos de inércia com relação aos eixos x , y e z são dados por:

$$I_x = \int y^2 dm$$

$$I_y = \int x^2 dm$$

$$I_z = \int \rho^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm$$

Portanto, $I_z = I_x + I_y$, isto é, a soma dos momentos de inércia de dois eixos perpendiculares contidos no plano do corpo é igual ao momento de inércia em relação a um 3º eixo perpendicular ao plano do corpo e passando pela interseção dos dois primeiros. Quando este 3º eixo passa pelo centro de massa é denominado de eixo polar.

Vamos a seguir considerar alguns exemplos de cálculo de momento de inércia.

a) Massa pontual – Este caso, mostrado na Fig. 8.7, é o mais simples e leva a um momento de inércia dado por: $I = md^2$,. Onde d é a distância da massa ao eixo.

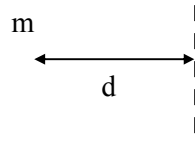


Fig. 8.7 – Massa pontual rodando em torno de um eixo.

b) Arco de raio R - O cálculo do momento de inércia de um anel de raio R em relação a um eixo passando pelo centro de massa e perpendicular ao plano do anel (eixo polar) também é bastante simples porque cada elemento de massa dm está à mesma distância $r = R = \text{constante}$ do eixo de rotação, conforme indicado na Fig. 8.8. Portanto,

$$I = \int r^2 dm = R^2 \int dm = MR^2$$

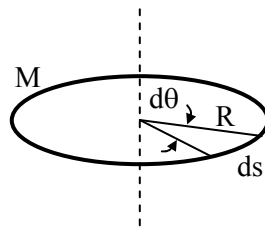


Fig. 8.8 – Anel rodando em torno do eixo polar.

c) Barra delgada de comprimento L - A barra mostrada na Fig. 8.9 roda em torno de um eixo perpendicular passando pelo centro de massa. A densidade linear de massa é $\lambda = M/L$, de forma que o elemento infinitesimal possui $dm = \lambda dx = (M/L) dx$. Como $-L/2 \leq x \leq L/2$, temos:

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \left(\frac{M}{L} \right) dx = \left(\frac{M}{L} \right) \frac{x^3}{3} \Big|_{-L/2}^{L/2} = \frac{ML^2}{12}$$

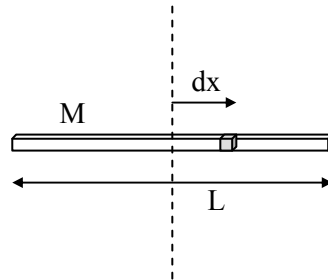


Fig. 8.9 – Barra delgada rodando em torno do centro de massa.

d) Barra delgada com eixo passando pela extremidade – Conforme indicado na Fig. 8.10, a única diferença do caso anterior é o intervalo de variação de x , que agora é: $0 \leq x \leq L$. Desta forma, a integral fica:

$$I = \int_0^L x^2 \left(\frac{M}{L}\right) dx = \left(\frac{M}{L}\right) \frac{x^3}{3} \Big|_0^L = \frac{ML^2}{3} = I_{\text{CM}} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

onde nesta última passagem utilizamos o teorema dos eixos paralelos.

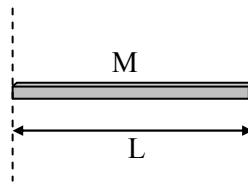


Fig. 8.10 - Barra delgada rodando em torno da ponta.

e) Anel de raio r com eixo no plano do anel - A densidade linear de massa para o anel é $\lambda = M/2\pi R$, de forma que o elemento de massa mostrado na Fig. 8.11 possui $dm = \lambda R d\theta = (M/2\pi) d\theta$. Sua distância ao eixo y é dada por: $x = R \sin \theta$ e, portanto,

$$I_y = \int_0^{2\pi} \frac{M}{2\pi} R^2 \sin^2 \theta d\theta = \frac{MR^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \cos 2\theta)}{2} d\theta$$

$$\Rightarrow I_y = \frac{MR^2}{2} = I_x$$

pela própria simetria do problema. Por outro lado, vemos que $I_x + I_y = MR^2 =$

I_z como era de se esperar pelo teorema dos eixos perpendiculares.

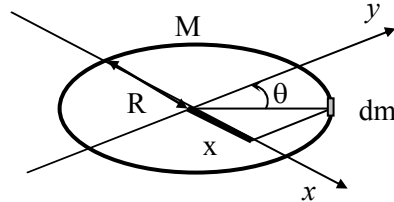


Fig. 8.11 – Anel rodando em torno de um eixo contido no seu plano.

f) Disco de raio R - A densidade superficial de massa de um disco de raio R é $\sigma = M/\pi R^2$. Conforme vemos na Fig. 8.12, um disco pode ser considerado como composto de um grande número de anéis concêntricos, de raio r e espessura dr. A massa elementar de cada um destes anéis é dada por: $dm = \sigma dA$, onde $dA = 2\pi r dr$.

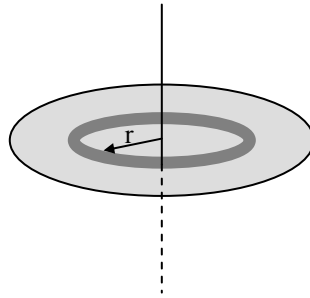


Fig. 8.12 – Disco rodando em torno do eixo polar.

O momento de inércia polar do anel é $dI_z = dm r^2$. Para calcularmos o momento de inércia do disco devemos somar as contribuições de todos os anéis concêntricos compreendidos entre 0 e r. Assim,

$$I_z = \int_0^R r^2 \left(\frac{M}{\pi R^2} \right) 2\pi r dr = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{MR^2}{2}$$

Pelo teorema dos eixos perpendiculares,

$$I_z = I_y = \frac{1}{2} I_x = \frac{MR^2}{4}$$

g) Cilindro maciço de raio R - A densidade volumétrica de massa para um cilindro de raio R e altura H é dada por: $\rho = M/V = M/\pi R^2 H$. Por outro lado, um cilindro pode ser encarado como se fosse uma pilha de inúmeros discos finos de raio R e altura dz, como visto na Fig. 8.13. A massa de cada disco é $dm = \rho \pi R^2 dz = M dz/H$. O momento de inércia polar de cada disco elementar é $dI_z = \frac{1}{2} dm r^2$, como calculado no item anterior. Ao se somar as contribuições de todos os discos fazemos uma integral onde z varia de 0 a H. Assim,

$$I = \frac{1}{2} \int R^2 dm = \frac{1}{2} \frac{MR^2}{H} \int_0^H dz = \frac{1}{2} MR^2$$

Neste caso não podemos usar o teorema dos eixos perpendiculares para encontrar I_z ou I_y , pois o corpo não é plano.

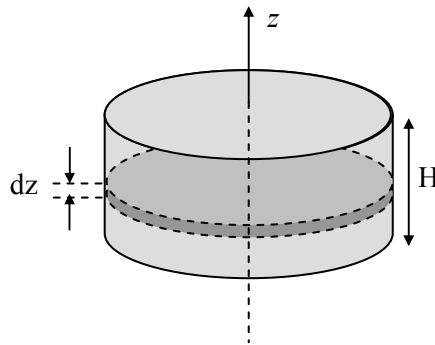


Fig. 8.13 – Cilindro maciço rodando em torno do eixo de simetria.

8.4 Dinâmica da rotação em torno de um eixo fixo

Da mesma forma que a translação, a rotação é causada por um agente externo produzindo uma força. Consideremos um corpo rígido rodando com velocidade angular ω em torno de um eixo fixo O, conforme mostra a Fig. 8.14. Existe uma força \vec{F} aplicada a uma distância \vec{r} do eixo. Queremos encontrar o trabalho realizado por esta força.

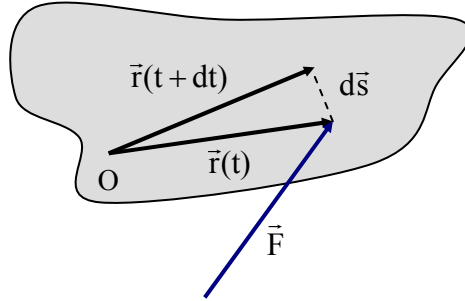


Fig. 8.14 - Trabalho realizado por uma força durante a rotação de um corpo rígido

Durante um intervalo de tempo dt , o corpo roda a um ângulo $d\theta = \vec{\omega} dt$, de modo que o ponto especificado pelo vetor $\vec{r}(t)$ percorrerá uma distância $d\vec{s}$ e o trabalho realizado pela força \vec{F} é dado por:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Usando a definição vetorial de $d\vec{\theta}$ e $d\vec{\omega}$, podemos escrever $d\vec{s}$ como sendo

$$d\vec{s} = d\vec{\theta} \times \vec{r} = (\vec{\omega} \times \vec{r}) dt$$

e assim,

$$dW = \vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) dt$$

Entretanto, como $\vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$ podemos escrever a potência fornecida pela força \vec{F} como sendo:

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$$

Para que o trabalho (ou potência) não seja nulo, \vec{F} deve ter uma componente paralela a $d\vec{s}$ e, conseqüentemente, perpendicular a \vec{r} . Comparando com o movimento translacional vemos que $\vec{\omega}$ faz o papel de \vec{v} e $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ faz o papel da força. $\vec{\tau}$ é denominado de *torque* da força \vec{F} em relação ao ponto O.

Vamos a seguir encontrar uma relação entre $\vec{\tau}$ e $\vec{\alpha}$ que seja correspondente à 2ª lei de Newton. Já vimos que $K = \frac{1}{2} I \omega^2$, portanto:

$$P = \frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{I \omega^2}{2} \right) = I \vec{\omega} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\omega} \cdot \vec{\tau}$$

Logo,

$$\vec{\tau} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \vec{\alpha}$$

No caso de termos várias forças produzindo vários torques, escrevemos:

$$\sum_{i=1}^N \vec{\tau}_i = I \vec{\alpha}$$

Como aplicação direta desta lei de rotação, vamos considerar o seguinte exemplo: uma corda de densidade linear de massa λ está enrolada em uma roldana de massa M e raio R , que pode rodar livremente em torno de um eixo, como mostra a Fig. 8.15. O momento de inércia da roldana é $I_0 = \frac{1}{2} M R^2$.

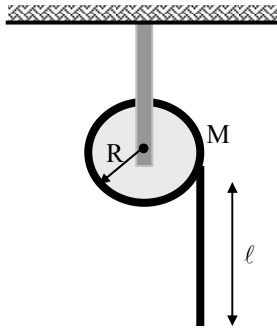


Fig. 8.15 – Corda desenrolando de uma roldana.

Se um comprimento ℓ_0 está inicialmente desenrolado e a velocidade angular inicial ω_0 é nula, qual será a aceleração e a velocidade da corda como função de ℓ ? Nesta situação, a massa pendente é $m(\ell) = \lambda \ell$ e a 2ª lei de Newton para a corda é:

$$ma = mg - T \Rightarrow \lambda \ell a = \lambda \ell g - T$$

O torque realizado pela corda sobre a polia é dada por: $\tau = RT$ de modo que,

$$RT = I_0 \alpha = I_0 \frac{d\omega}{dt}$$

Por outro lado, como a corda não desliza sobre a roldana podemos escrever $v = R\omega$ e $a = R\alpha$. Assim,

$$RT = I_0 \frac{a}{R} \Rightarrow T = \frac{I_0 a}{R^2} = \frac{Ma}{2}$$

Substituindo este resultado na equação para a corda obtemos:

$$a = \frac{\lambda \ell g}{\lambda \ell + \frac{M}{2}}$$

Para o cálculo da velocidade fazemos: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\ell} \frac{d\ell}{dt}$

Como $d\ell/dt = v$, temos:

$$v \frac{dv}{d\ell} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{d\ell} = \frac{\lambda \ell g}{\lambda \ell + \frac{M}{2}}$$

$$\frac{1}{2} v^2 = \int_{\ell_0}^{\ell} \frac{\lambda g \ell d\ell}{\lambda \ell + M/2} = g(\ell - \ell_0) - \frac{gM}{2\lambda} \ln \left(\frac{M/2 + \lambda \ell}{M/2 + \lambda \ell_0} \right)$$

Este resultado mostra que se $M = 0$ a corda estará em queda livre. Porém, se $M \neq 0$ parte da energia é gasta para aumentar a velocidade angular da polia.

8.5 Equilíbrio estático de um corpo rígido

Como vimos até agora, um corpo rígido pode possuir movimentos rotacional e translacional, aos quais estarão associados respectivamente um torque e uma força externa. Dizemos que um corpo está em equilíbrio quando seu movimento rotacional-translacional não se alterar no tempo ($a = \alpha = 0$). Em particular, quando há ausência de movimento ($v = \omega = 0$) dizemos que o

corpo está em *equilíbrio estático* (repouso). A condição necessária para que ocorra esta situação é:

$$\sum \vec{F} = 0 \quad (\text{translacional})$$

$$\sum \vec{\tau} = 0 \quad (\text{rotacional})$$

Vamos analisar alguns exemplos onde o equilíbrio estático se manifesta. Inicialmente, vamos considerar uma escada encostada numa parede sem atrito, como mostra a Fig. 8.16. Sabendo-se que a massa da escada é M , o comprimento é L e o atrito com o chão é μ , queremos calcular o menor ângulo θ para o qual a escada não escorrega.

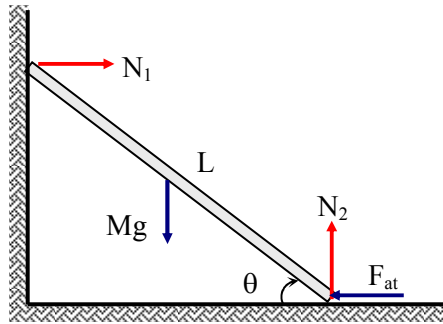


Fig. 8.16 – Escada apoiada numa parede sem atrito.

Como as forças e torques totais são nulos:

$$Mg - N_2 = 0$$

$$N_1 - F_{\text{at}} = N_1 - \mu N_2 = 0$$

$$Mg \frac{L}{2} \cos \theta - N_1 L \sin \theta = 0 \quad (\text{torque em torno de O})$$

Deste conjunto de equação encontramos uma expressão para o ângulo mínimo θ :

$$\text{tg} \theta = \frac{1}{2\mu} \quad \text{ou} \quad \theta = \text{tg}^{-1} \left(\frac{1}{2\mu} \right)$$

Um segundo exemplo é o de uma caixa de altura h e base L , colocada

sobre uma mesa inclinada com atrito, conforme mostra a Fig. 8.17. Se a caixa não desliza, qual é a máxima inclinação antes dela rolar?

Enquanto o torque em torno de O devido à força peso estiver apontado no sentido indo para o interior da página (horário) não haverá rotação. Quando ele inverte de sentido (anti-horário), haverá rotação. Existe uma situação em que o torque é nulo, o que define o ângulo crítico θ_c . Se este ângulo for diminuído, o torque é horário (não roda) e se for aumentado é anti-horário (roda). Esta situação crítica ocorre quando \vec{r} é paralelo a \vec{F} ($\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$), isto é, quando a força peso passar pelo ponto de apoio O. Nesta condição,

$$\text{tg}\theta_c = \frac{L/2}{h/2} = \frac{L}{h}$$

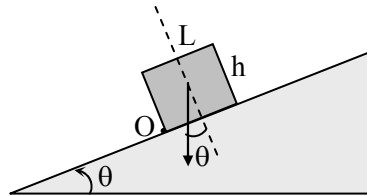


Fig. 8.17 – Caixa num plano inclinado com atrito.

8.6 Aceleração constante

Vamos nesta seção considerar o caso em que existe uma força externa agindo sobre o corpo rígido, capaz de produzir uma aceleração constante. Em geral, existe nesta situação um movimento combinado de rotação e translação. Estes movimentos podem ser analisados independentemente e posteriormente relacionados por uma equação do tipo $\alpha = a/R$ ou $\omega = v/R$.

a) Iô-iô – Considere um iô-iô de massa M e raio R (na forma de um disco como o mostrado na Fig. 8.18) que é solto a partir do repouso. Queremos encontrar $\omega(t)$ e $v(t)$.

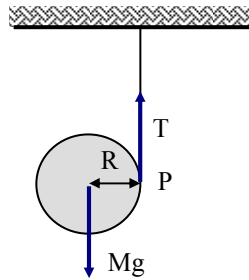


Fig. 8.18 – Lô-lô solto a partir do repouso.

As equações para forças e torque são dadas respectivamente por:

$$Mg - T = Ma$$

$$TR - I\alpha \Rightarrow T = \frac{I\alpha}{R}$$

onde $I = MR^2/2$, a é a aceleração do centro de massa do disco e o torque é calculado em relação a este ponto. Nas duas equações acima temos 3 incógnitas (T , a e α), mas uma nova equação envolvendo a e α pode ser encontrada. Se estivermos no centro de massa veremos o ponto P subindo com aceleração a e o disco rodando com aceleração angular α . Assim, é fácil notarmos que: $a = R\alpha = R d\omega/dt$, onde então,

$$Mg - \frac{I}{R} \frac{d\omega}{dt} = MR \frac{d\omega}{dt}$$

$$\left(MR + \frac{I}{R} \right) \frac{d\omega}{dt} = MR \left(1 + \frac{1}{2} \right) \frac{d\omega}{dt} = Mg$$

Logo: $\frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{3} \frac{g}{R}$ de onde se obtém $\omega(t) = \frac{2}{3} \frac{gt}{R}$ e consequentemente

$$v(t) = R\omega(t) = \frac{2}{3} gt$$

b) Carretel – Um carretel de raio interno r e raio externo R encontra-se sobre uma mesa com atrito como indicado na Fig. 8.19. Ele é puxado por um fio que produz uma força \vec{F} fazendo um ângulo θ com a horizontal. Observa-se que

para $\theta < \theta_c$ (ângulo crítico) o carretel rola sem deslizar na direção da força \vec{F} e para $\theta > \theta_c$ ele roda no sentido oposto. Queremos encontrar o valor de θ_c . Vamos supor que o carretel ande na direção de \vec{F} . As equações para a translação do centro de massa são:

$$Mg = N + F \sin \theta$$

$$Ma = -F_{at} + F \cos \theta$$

e para o torque em torno do centro de massa:

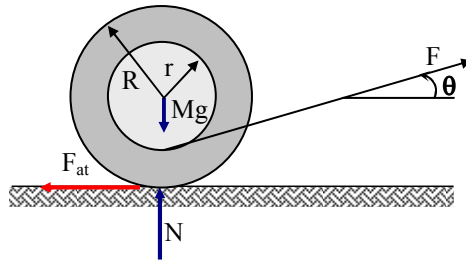


Fig. 8.19 - Carretel puxado sobre uma mesa com atrito.

$$F_{at} R - Fr = I_0 \alpha$$

onde supusemos que o carretel é acelerado para a direita. Usando $a = \alpha R$ e $I_0 = \frac{1}{2} MR^2$, temos para a equação da translação:

$$-F_{at} = Ma - F \cos \theta = MR\alpha - F \cos \theta$$

Substituindo F_{at} na equação da aceleração angular obtemos:

$$-MR^2\alpha + FR \cos \theta - Fr = I_0 \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha (I_0 + MR^2) = F(R \cos \theta - r)$$

$$\alpha = F \frac{(R \cos \theta - r)}{\frac{3}{2} MR^2}$$

Quando $\alpha > 0$ o carretel roda para a direita (sentido horário) e quando $\alpha < 0$ ele roda para a esquerda (sentido anti-horário). O ângulo crítico ocorre para $\alpha = 0$ isto é:

$$R \cos \theta_c - r = 0 \Rightarrow \theta_c = \cos^{-1} \left(\frac{r}{R} \right)$$

c) Disco sobre uma mesa sem atrito – A Fig. 8.20 mostra um disco de massa M e raio R , que está deitado sobre uma massa sem atrito. Ele é puxado por um corpo de massa m através de um fio enrolado ao seu redor. Se o sistema é solto a partir do repouso, qual será a velocidade do centro do disco e a tensão na corda?

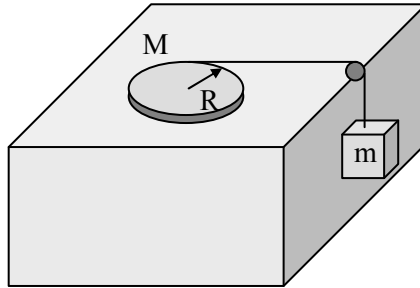


Fig. 8.20 - Disco puxado sobre uma mesa sem atrito.

A única força agindo sobre o disco é a tensão na corda. As equações para a translação e rotação do corpo são dadas respectivamente por:

$$T = Ma = M \frac{dv}{dt}$$

$$TR = I_0 \alpha = I_0 \frac{d\omega}{dt}$$

com $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$. Para o corpo de massa m temos apenas a translação, descrita pela equação:

$$mg - T = ma' = m(a + \alpha R)$$

onde levamos em conta o vínculo $a' = a + \alpha R$. Isto significa que a aceleração do corpo m se deve tanto à aceleração do centro de massa disco, como do fato da corda estar sendo desenrolada com aceleração angular α . Substituindo os valores de a e α obtidos anteriormente ficamos com:

$$mg - T = m \left(\frac{T}{M} + \frac{TR^2}{I_0} \right) = \frac{3mT}{M}$$

Desta equação podemos tirar o valor de T como:

$$mg = T \left(1 + \frac{3m}{M} \right) \Rightarrow T = \frac{mg}{1 + 3m/M}$$

e voltando para a expressão da aceleração obtemos:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{T}{M} = \frac{g}{3 + \frac{M}{m}} \Rightarrow v(t) = \frac{gt}{3 + \frac{M}{m}}$$

enquanto que para a aceleração angular,

$$\alpha = \frac{TR}{\frac{1}{2}MR^2} = \left(\frac{2mg}{MR} \right) \frac{1}{1 + 3m/M} = \frac{2g}{R} \frac{1}{3 + \frac{M}{m}}$$

$$\Rightarrow \omega(t) = \frac{2gt}{R(3 + M/m)}$$

d) Disco puxado pelo centro de massa – O disco visto na Fig. 8.21 não patina devido à existência da força de atrito. Neste caso, $a = \alpha R$ e as equações de movimento são:

$$F - F_{at} = Ma$$

$$F_{at}R = I\alpha = I_a/R \Rightarrow F_{at} = \frac{I_a}{R^2} = \frac{Ma}{2}$$

Logo, $F - Ma/2 = Ma$, que nos leva à aceleração: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{2}{3} \frac{F}{M}$ e à velocidade: $v(t) = \frac{2F}{3M} t$.

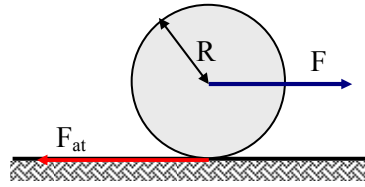


Fig. 8.21 – Disco puxado pelo centro de massa.

8.7 Momentum angular

Consideremos uma partícula descrita pelo vetor posição $\vec{r}(t)$, movendo-se no espaço com velocidade $\vec{v}(t)$, como mostra a Fig. 8.22. A 2ª lei de Newton para esta partícula é dada por:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

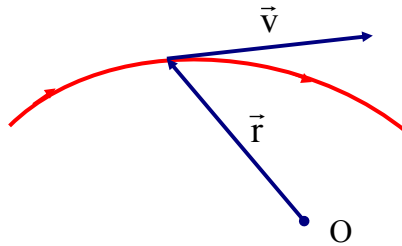


Fig. 8.22 – Movimento tridimensional de uma partícula.

Vamos multiplicar vetorialmente os dois lados desta igualdade por $\vec{r}(t)$. Desta forma teremos:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

onde $\vec{\tau}$ é o torque da força \vec{F} em relação ao ponto O. Por outro lado, se tomarmos a derivada do produto $\vec{r} \times \vec{p}$ temos:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \vec{v} \times m\vec{v}$$

O produto vetorial $\vec{v} \times \vec{v}$ é nulo (vetores paralelos) e assim:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Logo:

$$\vec{\tau} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

onde $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ é definido como *momentum angular* da partícula em relação ao ponto O. Note que \vec{L} depende do ponto O considerado. Como vimos anteriormente, $\vec{\tau} = I\vec{\alpha} = I d\vec{\omega}/dt = d(I\vec{\omega})/dt$. Esta última passagem só é válida quando temos rotação em torno de um eixo fixo e neste caso I é constante. Então,

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \text{ ou } \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Como dissemos, a primeira igualdade é válida quando I é constante (movimento em torno de um eixo) e é muito empregada em cálculos onde corpos extensos são envolvidos. A segunda igualdade é bastante importante quando massas pontuais são envolvidas. Um exemplo interessante é o de uma partícula movendo-se em linha reta, como mostra a Fig. 8.23. Ela apresenta momentum angular se sua trajetória não passar pela origem de \vec{r} . Vemos que:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = -rmv \sin \theta \hat{k}$$

Como $r \sin \phi = b$, temos $\vec{L} = -mbv\hat{k}$.

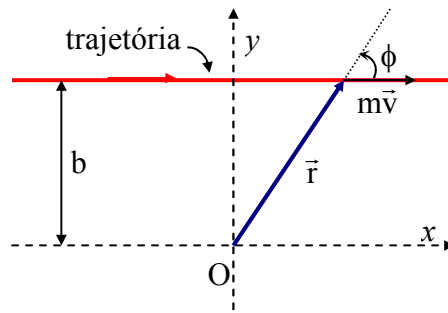


Fig. 8.23 – Movimento retilíneo de uma partícula.

8.8 Torque e momentum angular de um sistema de partículas

Consideramos um sistema composto de N partículas, cada uma movendo-se com velocidade \vec{v}_i medidas em relação a um ponto fixo O . O momentum angular total do sistema é dado por:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i$$

que por sua vez satisfaz a igualdade:

$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^N \vec{\tau}_i = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Ao calcularmos o torque total sobre o sistema de partículas, notamos que o torque devido às forças internas é nulo. Para provarmos este fato, consideremos duas partículas constituintes do sistema mostradas na Fig. 8.24.

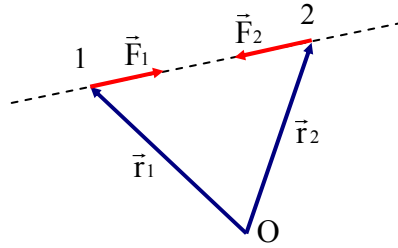


Fig. 8.24 – Torque devido às forças internas..

As forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 constituem um par ação-reação e pela 3ª lei de Newton sabemos que $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Assim, o torque devido a estas forças é dado por:

$$\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1$$

Como $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ está na direção da linha pontilhada que une 1 a 2, seu produto vetorial com \vec{F}_1 é nulo e assim concluímos que os torques devidos às forças internas se cancelam aos pares. Portanto, a equação correta é:

$$\vec{\tau}_{\text{ext}} = d\vec{L}/dt$$

Como vimos anteriormente, para o caso de rotação ao redor de um eixo fixo temos $\vec{L} = I\vec{\omega}$ e, portanto:

$$\vec{\tau}_{\text{ext}} = I d\vec{\omega}/dt$$

Como um primeiro exemplo, vamos calcular o momentum angular para um disco girando ao redor de seu eixo de simetria como mostrado na Fig. 8.25. Tomando a i -ésima massa m_i do disco, temos:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = m_i r_i v_i \hat{k}$$

Como $v_i = r_i \omega$, segue que:

$$\vec{L}_i = m_i r_i (r_i \omega) \hat{k} = (m_i r_i^2) \omega \hat{k}$$

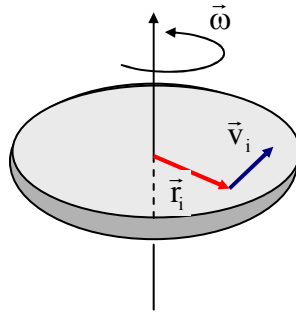


Fig. 8.25 – Rotação de um disco em torno de seu eixo polar.

e assim, o momentum angular total é dado por:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i (m_i r_i^2) \omega \hat{k} = I \omega \hat{k} = I \vec{\omega}$$

onde, de acordo com a definição anterior $I = \sum_i m_i r_i^2$.

No caso que acabamos de ver, o eixo de rotação passa pelo centro de massa. Caso ele esteja deslocado de uma distância R do centro de massa,

como mostra a Fig. 8.26, o momento de inércia será dado por (teorema dos eixos paralelos):

$$I' = I_{CM} + MR^2$$

e o momento angular fica sendo:

$$\vec{L}' = I' \vec{\omega} = I_{CM} \vec{\omega} + (MR^2) \vec{\omega}$$

A velocidade do centro de massa pode ser escrita vetorialmente como:

$$\vec{V}_{CM} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

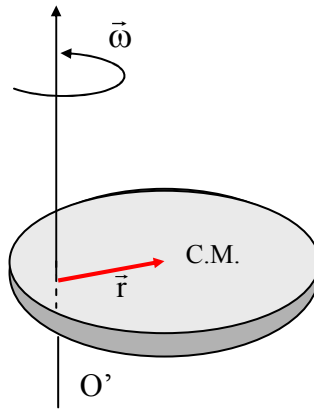


Fig. 8.26 – Rotação de um disco em torno de um eixo paralelo ao eixo polar.

Assim, se tomarmos o duplo produto vetorial

$$\vec{R} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) = \vec{\omega} (\vec{R} \cdot \vec{R}) - \vec{R} (\vec{R} \cdot \vec{\omega}) = R^2 \vec{\omega}$$

pois como \vec{R} e $\vec{\omega}$ são perpendiculares temos $\vec{R} \cdot \vec{\omega} = 0$. Desta forma,

$$\vec{L}' = \vec{L}_{CM} + \vec{R} \times \vec{P}_{CM}$$

de onde vemos que o momentum angular de um corpo rígido em relação à rotação em torno de um eixo O' é a soma do momentum angular em relação

ao centro de massa com o momentum angular associado à rotação do centro de massa em torno do eixo O' .

Vimos há pouco que a variação do momentum angular de um sistema depende apenas do torque externo aplicado sobre ele. Vamos utilizar este conceito para analisar a máquina de Atwood mostrada na Fig. 8.27, onde a roldana tem massa M , raio R e momento de inércia $I_0 = MR^2/2$. O momentum angular total do sistema em relação ao eixo O é a soma do momentum da roldana ($I_0\omega$) com o das duas massas ($m_1 vR + m_2 vR$). Como a corda não desliza sobre a roldana, $v = \omega R$ e, portanto:

$$L = I_0 \frac{v}{R} + (m_1 + m_2) vR$$

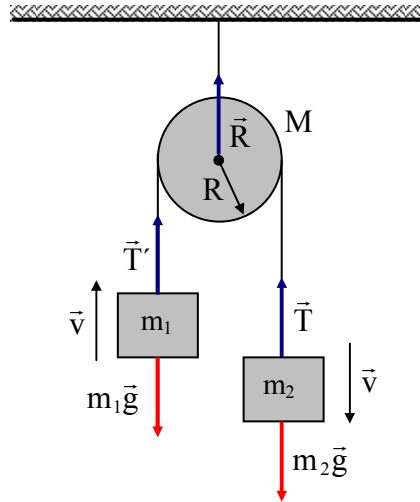


Fig. 8.27 – Máquina de Atwood.

As forças externas agindo sobre o sistema são $m_1 \vec{g}$, $m_2 \vec{g}$ e \vec{R} , mas esta última não realiza torque pois está aplicada sobre o eixo de rotação ($\vec{r} = 0$). Tomando como positivo o sentido entrando no papel, encontramos o torque como sendo:

$$\tau_{\text{ext}} = (m_2 - m_1)gR = \frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dv} \frac{dv}{dt} = \frac{dL}{dv} a$$

Substituindo a expressão de L como função de v obtemos:

$$(m_2 - m_1)gR = \left[\frac{I_0}{R} + (m_1 + m_2)R \right] a$$

$$\Rightarrow a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{I_0}{R^2}} = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}$$

Para o caso $M = 0$, recuperamos o resultado obtido no Cap. 4. Podemos ainda calcular as tensões T e T' existentes na corda. Isolando m_1 e m_2 , obtemos:

$$m_2g - T = m_2a \Rightarrow T = m_2(g - a)$$

$$T' - m_1g = m_1a \Rightarrow T' = m_1(a + g)$$

Como o valor de a já foi determinado, encontramos:

$$T = m_2 \frac{(2m_1 + M/2)g}{m_1 + m_2 + M/2}$$

$$T' = m_1 \frac{(2m_2 + M/2)g}{m_1 + m_2 + M/2}$$

No caso $M = 0$, $T = T' = \frac{2m_1m_2g}{m_1+m_2}$, como já obtido anteriormente.

Isolando a corda, como sua massa é nula, a força total sobre ela também o é. Podemos então calcular a força tangencial exercida pela polia sobre ela pois $F + T' - T = 0$. Como $m_2 > m_1$, temos $T > T'$ e

$$F = T - T' = \frac{M}{2} g \frac{(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + M/2}$$

8.9 Relação trabalho-energia rotacional

Da mesma forma que na translação, a variação da energia rotacional de um corpo se deve à realização de trabalho por um agente externo, no caso,

o torque. Já sabemos que $K = \frac{1}{2} I \omega^2$ e a diferencial desta energia será:

$$dK = I \omega d\omega = I(\omega dt) \frac{d\omega}{dt}$$

Sabemos ainda que $d\theta = \omega dt$ e $I d\omega/dt = I\alpha = \tau$. Logo:

$$dK = \tau d\theta = dW$$

Assim, torque que produz uma rotação $d\theta$ realiza uma quantidade de trabalho $dW = \tau d\theta$. A variação da energia rotacional é dada por:

$$\Delta K = \int \tau d\theta$$

8.10 Conservação do momentum angular

Quando o torque é nulo, $\vec{\tau}_{\text{ext}} = d\vec{L}/dt = 0$, o momentum angular é constante. Além da conservação do momentum e da energia, vemos agora a grandeza momentum angular também pode se conservar. Como $L = I\omega$, concluímos que diminuindo I , ω aumenta ou vice-versa. Como casos práticos podemos citar a patinação no gelo e saltos ornamentais. Vamos a seguir analisar alguns exemplos típicos de conservação de momentum angular.

a) Choque entre dois discos – Considere um disco de momento de inércia I_1 e velocidade angular ω_0 , rodando num eixo sem atrito passando por seu centro de massa. Ele cai sobre outro disco de momento de inércia I_2 , inicialmente parado. Vamos calcular a velocidade angular final do conjunto usando conservação do momentum angular.

$$L_i = L_f \Rightarrow I_1 \omega_0 = (I_1 + I_2) \omega_f \Rightarrow \omega_f = \left(\frac{I_1}{I_1 + I_2} \right) \omega_0$$

Este é um choque do tipo inelástico. Vamos calcular a variação da energia do sistema, dissipada em calor. As energias cinética inicial e final são dadas respectivamente por:

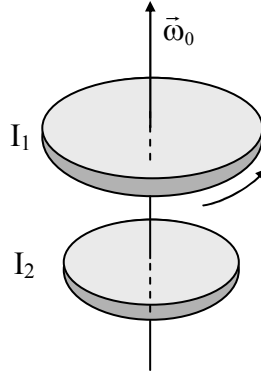


Fig. 8.28 - Choque inelástico entre dois discos.

$$E_i = \frac{1}{2} I_1 \omega_0^2 = \frac{1}{2} \frac{(I_1 \omega_0)^2}{I_1} = \frac{L_i^2}{2I_1}$$

$$E_f = \frac{1}{2} (I_1 + I_2) \omega_f^2 = \frac{1}{2} \frac{[(I_1 + I_2) \omega_f]^2}{(I_1 + I_2)} = \frac{1}{2} \frac{L_f^2}{(I_1 + I_2)}$$

Como $L_i = L_f$ vemos que $E_f < E_i$, isto é:

$$\Delta E = E_f - E_i = \frac{L_i^2}{2} \left(\frac{1}{I_1 + I_2} - \frac{1}{I_1} \right) = -\frac{I_2 I_1}{I_1 + I_2} \frac{\omega_0^2}{2} = -\frac{I_2}{I_1 + I_2} E_i$$

Este resultado é análogo ao do choque perfeitamente inelástico entre duas massas, discutido no Cap.4.

b) Choque inelástico entre bala e barra delgada – Uma barra, de massa M , comprimento L e momento de inércia $I = ML^2/12$, tem seu centro fixo. Uma bala de massa m e velocidade v é disparada perpendicularmente à barra e atinge a uma distância ℓ , ficando engastada. Se a haste está inicialmente em repouso com que velocidade angular ela rodará?

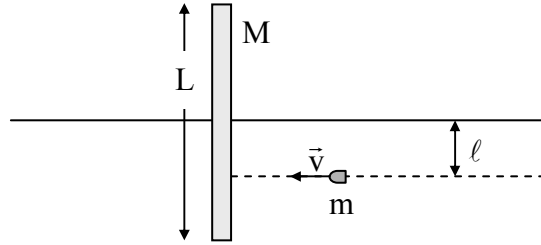


Fig 8.29 - Choque inelástico entre bala e barra delgada.

O momentum angular inicial é $L_i = mv\ell$ e o final é:

$$L_f = (I + m\ell^2)\omega = \left(\frac{ML^2}{12} + m\ell^2\right)\omega$$

Usando a conservação do momentum angular obtemos:

$$\omega = \frac{mv\ell}{\frac{ML^2}{12} + m\ell^2}$$

c) Velocidade dos planetas – Os planetas girando em torno do sol conservam momentum angular, pois a força gravitacional é central ($\vec{r} // \vec{F}$). Baseados neste fato, queremos mostrar que o vetor descrevendo a posição do planeta varre áreas iguais em tempos iguais. Vamos considerar um planeta girando em torno do Sol, como mostra a Fig. 8.30.

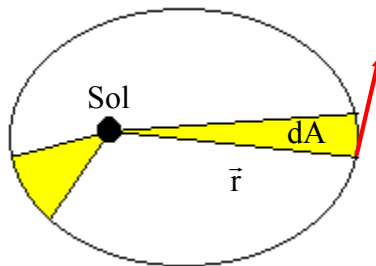


Fig. 8.30 – Rotação de um planeta em torno do Sol.

Durante um intervalo de tempo dt , o planeta desloca-se vdt e o vetor posição \vec{r} varre uma área $dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| dt$. Assim,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{1}{2m} |\vec{r} \times m\vec{v}| = \frac{|\vec{L}|}{2m}$$

Como \vec{L} é constante, dA/dt também o é e os planetas varrem áreas iguais em tempos iguais. Esta lei foi deduzida por Keppler a partir de observações astronômicas.

8.11 Combinação de translação e rotação

Quando um corpo rígido executa simultaneamente os movimentos de translação e rotação, torna-se em geral difícil descrever este movimento combinado. O que se faz é decompor o movimento em dois: o de translação do centro de massa e o de rotação em torno dele. A análise se simplifica mediante o uso do seguinte teorema: “*O torque total em relação ao centro de massa $\vec{\tau}_{CM}$ é igual à derivada temporal do momentum angular relativo a este ponto*”. Matematicamente,

$$\vec{\tau}_{CM} = \frac{d}{dt} \vec{L}_{CM}$$

Para a demonstração deste teorema vamos considerar o sistema de partículas mostrado na Fig. 8.31. \vec{r}_{CM} é o vetor posição do centro de massa, \vec{r}_i é o da i -ésima partícula relativo à origem O e \vec{r}_{iR} é o vetor relativo ao centro de massa. Estas coordenadas estão relacionadas através da expressão:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_{iR}$$

Já vimos no Cap. 6 que o vetor \vec{r}_{CM} é dado por:

$$M\vec{r}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_{CM} + \vec{r}_{iR}) = \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) \vec{r}_{CM} + \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_{iR}$$

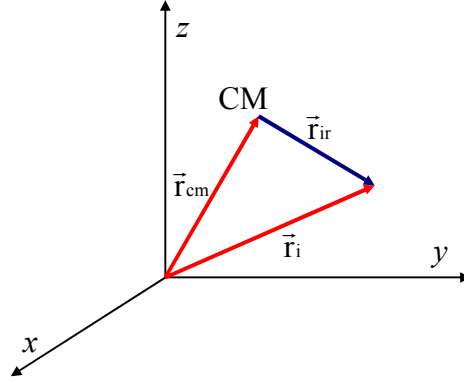


Fig. 8.31 – Sistema de partículas sujeito a translação e rotação.

e, portanto, $\sum m_i \vec{r}_{iR} = 0$, como era esperado já que a massa está distribuída compensadamente ao redor do centro de massa. A velocidade de i -ésima partícula é dada por:

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{iR}}{dt} = \vec{v}_{CM} + \vec{u}_i$$

onde \vec{v}_{CM} é a velocidade do centro de massa, \vec{u}_i é a velocidade relativa ao centro de massa e $\sum m_i \vec{u}_i = 0$, que é consequência direta da derivação de $\sum m_i \vec{r}_{iR} = 0$. O momentum angular da partícula relativo ao ponto O é:

$$\begin{aligned} \vec{L}_i &= \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = m_i (\vec{r}_{CM} + \vec{r}_{iR}) \times (\vec{v}_{CM} + \vec{u}_i) \\ \vec{L}_i &= m_i (\vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM}) + m_i (\vec{r}_{CM} \times \vec{u}_i) + m_i (\vec{r}_{iR} \times \vec{v}_{CM}) + m_i (\vec{r}_{iR} \times \vec{u}_i) \end{aligned}$$

O momentum angular total do sistema é $\vec{L} = \sum \vec{L}_i$. Portanto,

$$\vec{L} = \vec{r}_{CM} \times M \vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \left(\sum m_i \vec{u}_i \right) + \left(\sum m_i \vec{r}_{iR} \right) \times \vec{v}_{CM} + \sum_i m_i \vec{r}_{iR} \times \vec{u}_i$$

O primeiro termo é o momentum angular do centro de massa relativo ao ponto O, os dois termos entre parênteses são nulos e o último é o momentum angular relativo ao centro de massa, isto é,

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \vec{P}_{CM}$$

O torque total externo agindo no sistema é:

$$\vec{\tau}_{ext} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_{CM} + \vec{r}_{iR}) \times \vec{F}_i = \vec{r}_{CM} \times \sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \sum_{i=1}^N \vec{r}_{iR} \times \vec{F}_i$$

O segundo termo é o torque relativo ao centro de massa e o primeiro é o torque no centro de massa relativo ao ponto O.

$$\vec{\tau}_{ext} = \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_{ext} + \vec{\tau}_{CM}$$

Tomando a derivada temporal da expressão \vec{L} temos:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} \times M\vec{V}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times M \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} \\ &= \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} + \vec{r}_{CM} \times M\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} + \vec{r}_{CM} \times \vec{F} = \vec{\tau}_{ext} \end{aligned}$$

Comparando com a expressão para $\vec{\tau}_{ext}$ obtemos:

$$\vec{\tau}_{CM} = \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt}$$

Esta equação é muito importante, pois permite separar o movimento translacional do centro de massa do movimento rotacional ao seu redor. Vamos, em seguida, analisar alguns exemplos em que o movimento de rotação aparece combinado com o de translação.

a) Cilindro descendo um plano inclinado – Consideremos um cilindro rolando sobre um plano inclinado sem deslizar, como mostra a Fig. 8.32. Como o ponto de contato é o centro instantâneo de rotação sabemos que $V_{CM} = R\omega$ e $a_{CM} = R\alpha$.

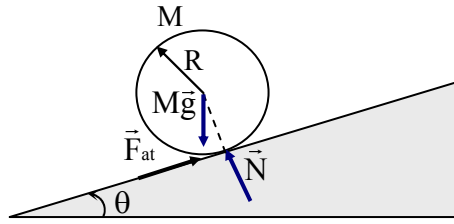


Fig. 8.32 - Cilindro descendo um plano inclinado com atrito.

O único torque ao centro de massa é dado pela força de atrito, no sentido que sai do plano da figura. Desta forma,

$$\tau_{CM} = F_{at} R = \frac{dL_{CM}}{dt} = I_{CM} \frac{d\omega}{dt} = I_{CM} \alpha = I_{CM} \frac{a_{CM}}{R} \Rightarrow F_{at} = \frac{I_{CM}}{R^2} a_{CM}$$

O movimento de translação é descrito pela equação:

$$Mg \sin \theta - F_{at} = Ma_{CM} \Rightarrow Mg \sin \theta = a_{CM} \left(M + \frac{I_{CM}}{R^2} \right) = \frac{3}{2} Ma_{CM}$$

$$\text{Logo: } a_{CM} = \frac{2}{3} g \sin \theta \text{ e } F_{at} = \frac{1}{3} Mg \sin \theta$$

b) Movimento de um giroscópio – O giroscópio, mostrado na Fig. 8.33, roda de tal forma que seu momentum angular é \vec{L} e seu eixo mantém-se no plano horizontal, isto é, $\vec{F} = -M\vec{g}$. O torque relativo ao centro de massa é $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, com módulo $|\vec{\tau}| = MgD$ e sentido de Ω .

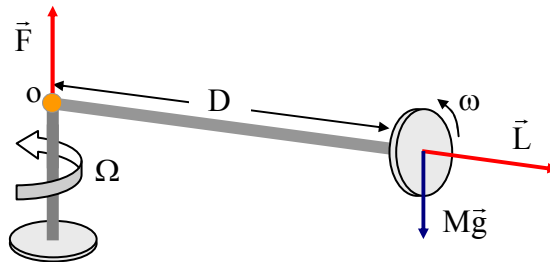


Fig. 8.33 - Movimento de um giroscópio.

Como $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$, vemos que $d\vec{L} = \vec{\tau} dt$. O vetor $d\vec{L}$ é perpendicular a \vec{L} , como indica a Fig. 8.34. Em outras palavras, variação de \vec{L} se dá apenas na direção e não no módulo (não existe componente de $d\vec{L}$ paralela a \vec{L}). O efeito é um giro do sistema em torno do ponto de apoio. O acréscimo de ângulo produzido pelo torque é dado por: $d\phi = \frac{dL}{L}$, e durante o intervalo de tempo dt temos:

$$d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{\tau dt}{L} = \frac{MgD}{L} dt$$

A taxa de variação do ângulo ϕ , chamada de *velocidade de precessão* do giroscópio, é dada por:

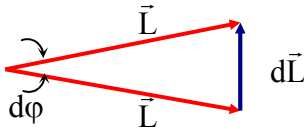
$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{MgD}{L} = \frac{MgD}{I\omega}$$


Fig. 8.34 – Variação de momentum angular produzida pelo torque.

Se \vec{L} fosse nulo Mg seria maior que F e o giroscópio cairia.

De um modo geral, quando o giroscópio é solto na horizontal, há um pequeno movimento na vertical denominado de *nutação*. Esta contribuição aparece quando consideramos a contribuição do movimento do centro de massa ao momentum angular do sistema. O centro de massa tem uma velocidade $V_{CM} = \Omega D$ e assim $|\vec{L}_{CM}| = MV_{CM}D = DM\Omega D = MD^2\Omega$. A direção e sentido de \vec{L}_{CM} é a mesma que \vec{F} . Quando o giroscópio é solto, $\Omega = 0$ e $\vec{L}_{CM} = 0$. O momentum angular nesta direção deve se conservar, pois não há nenhum torque externo nela. Assim, quando \vec{L}_{CM} deixa de ser zero, o giroscópio abaixa um pouco tal que \vec{L} passa a ter uma componente contrária a \vec{L}_{CM} no sentido de anulá-lo. A inércia associada a este movimento faz com

que haja uma oscilação periódica (nutation) na vertical, que tende a se amortecer se houver atrito no sistema. Extinto este movimento, o giroscópio se movimenta um pouco abaixo do plano horizontal.

Caso o giroscópio esteja fazendo um ângulo θ com a vertical, o torque é dado por $\tau = MgD \sin \theta$, de onde se obtém $d\phi = \frac{dL}{L \sin \theta} = \frac{MgD \sin \theta}{L} dt$ e, portanto, $\Omega = \frac{MgD}{L \sin \theta}$ independe do ângulo em que o giroscópio é posicionado.

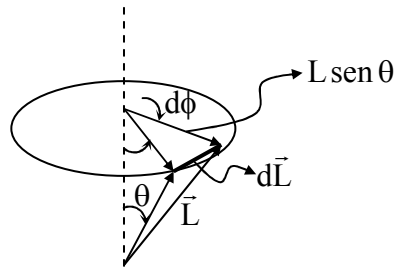
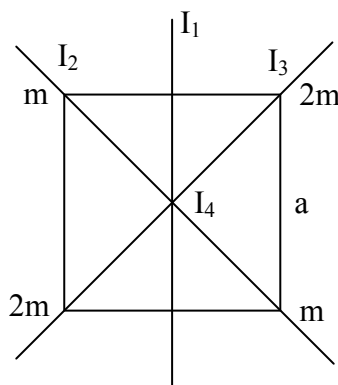
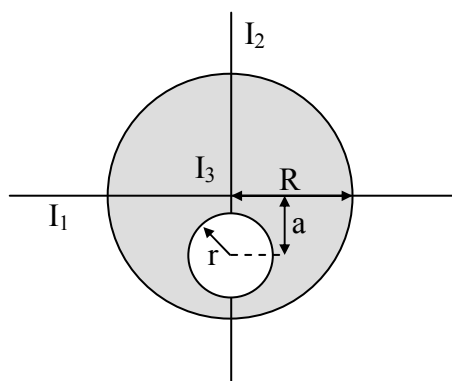


Fig. 8.35 – *Giroscópio com eixo inclinado.*

Exercícios

- 1 - Calcule o momento de inércia de um quadrilátero de massas pontuais em relação aos eixos mostrados na Fig. 8.36.
- 2 - Um disco de raio R e densidade superficial de massa σ tem um buraco circular de raio r , distando a do centro do disco. Calcule os momentos de inércia em relação aos eixos 1, 2 e 3, mostrados na Fig. 8.37.

**Fig. 8.36****Fig. 8.37**

- 3 - Calcule o momento de inércia de uma esfera de massa M e raio R em relação a um eixo passando pelo centro de massa.
- 4 - Uma barra delgada de massa M e comprimento L faz um ângulo θ com eixo y , conforme mostra a Fig. 8.38.
 - a) Calcule o momento de inércia para rotação em torno do eixo;
 - b) Calcule o momento de inércia para rotação em torno de um eixo paralelo a y e passando pelo centro de massa.
- 5 - Uma escada de M e comprimento L está apoiada numa parede sem atrito e no chão, com atrito μ (Fig. 8.39). Sabendo que o ângulo entre a escada e a parede é 45° , qual deve ser a tensão numa corda amarrada no meio da escada para que ela não caia?

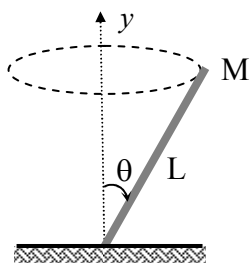


Fig. 8.38

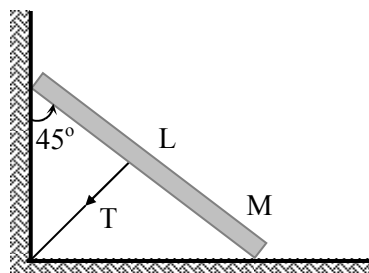


Fig. 8.39

- 6 - Uma escada de massa M e comprimento L está apoiada numa parede e no chão (ambos sem atrito) de maneira a formar um ângulo θ com a parede, conforme mostra a Fig. 8.40. Uma corda amarrada a uma altura H (paralela ao chão) mantém a escada em repouso. Calcule:
- a tensão na corda;
 - a máxima altura H_{\max} em que é possível haver equilíbrio;
 - a aceleração angular no instante em que esta corda for cortada.
- 7 - Uma escada de pintor de massa total $2M$ está aberta de maneira a formar um ângulo θ . Qual deve ser o coeficiente de atrito estático com o chão para que ela não caia? (Fig. 8.41).

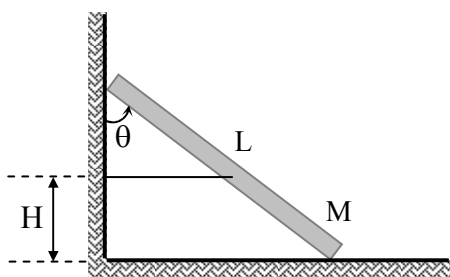


Fig. 8.40

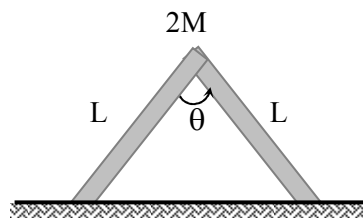


Fig. 8.41

- 8 - Um pintor de massa M está no topo de uma escada de peso desprezível (comprimento de cada lateral: L) que se apoia sobre um assoalho

extremamente liso. Há uma travessa a meia altura que impede a abertura da escada. O ângulo do vértice é θ . Qual é a força na travessa?

- 9 - Uma barra de comprimento L e massa M é colocada sobre um buraco, como mostrado na Fig. 8.42. Qual deve ser o coeficiente de atrito para a barra permanecer em repouso?
- 10 - Sobre uma superfície lisa desliza um bloco cúbico de lado L e massa M , com velocidade v (Fig. 8.43). Num determinado ponto, o cubo bate em um pequeno obstáculo. Qual deve ser a velocidade v para que o bloco rode em torno deste ponto?

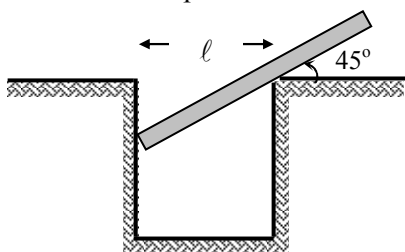


Fig. 8.42

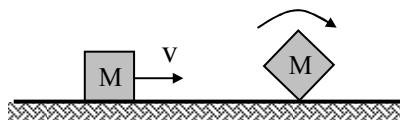


Fig. 8.43

- 11 - Na extremidade de uma haste de comprimento L a massa desprezível é colocada uma massa M . O sistema é solto de vertical sob a ação da gravidade. Qual é a equação que descreve o ângulo $\theta(t)$? (Fig. 8.44).
- 12 - Um arco de raio R , que gira com velocidade angular ω_0 , é colocado sobre uma superfície horizontal áspera, como mostra a Fig. 8.45, sendo a velocidade de seu centro de massa nula. Determinar a velocidade do centro de massa depois de cessado o escorregamento.
- 13 - A integral do torque com relação ao tempo é chamada impulso angular. Partindo da relação $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$, mostre que o impulso é a variação do momentum angular.
- 14 - Uma bola de bilhar inicialmente em repouso recebe um impulso instantâneo de um taco. Este é mantido horizontal a uma distância h do

centro. A bola sai com velocidade v_0 e a velocidade final é $9/7v_0$. Mostre que $h = 4/5R$, onde R é o raio da esfera.

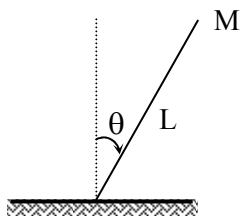


Fig. 8.44

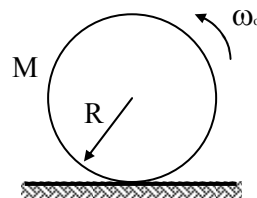


Fig. 8.45

- 15 - Niels Bohr postulou que um sistema mecânico em rotação só pode ter momentum angular com valores múltiplos de uma constante \hbar , chamada constante de Planck ($\hbar = h/2\pi = 1.054 \times 10^{-34}$ J.S), ou seja: $L = I\omega = n\hbar$, sendo n um inteiro positivo ou zero.
- Mostre que com este postulado, a energia de um rotor só pode adquirir valores discretos, isto é, quantizados.
 - Considere uma massa m obrigada a girar num círculo de raio R (átomo de Bohr ou átomo de hidrogênio). Quais são os possíveis valores para a velocidade angular levando-se em conta o postulado acima?
 - Quais valores de energia cinética o átomo pode ter?
- 16 - Muitos dos grandes rios correm para a região equatorial levando sedimentos arenosos. Que efeito isto tem sobre a rotação da Terra?
- 17 - Um cilindro de massa M e raio R roda sem deslizar sobre um plano horizontal. A velocidade do centro de massa é v . Ele encontra um plano com ângulo de inclinação θ à sua frente, como mostra a Fig. 8.46.
- Que altura o cilindro sobe no plano inclinado?
 - Nesta posição, qual foi a variação do momentum angular?
 - Quais foram os impulsos linear e angular?
 - Qual é o tempo que o cilindro demora para atingir a altura máxima?

18 - Um disco de massa M e raio R pode mover-se em torno de um eixo passando pelo seu centro de massa O , conforme mostra a Fig. 8.47. Uma partícula de massa também M segue uma trajetória linear com velocidade v e parâmetro de impacto $d = R/2$ relativo ao ponto O . Ao chocar-se com o disco ela sofre uma deflexão de 90° e tem sua velocidade mudada para $v(2\sqrt{3})$.

- Qual é a velocidade angular do disco após a colisão?
- Qual é a energia dissipada na colisão?

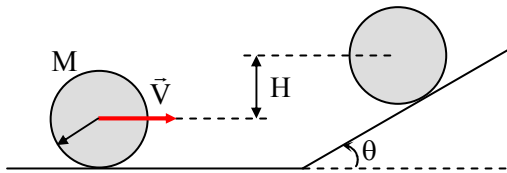


Fig. 8.46

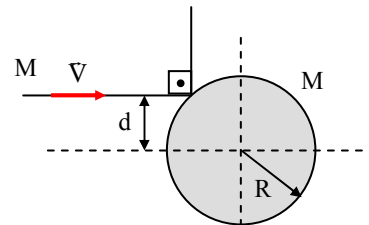


Fig. 8.47

19 - Um disco de massa $2m$ e raio R repousa sobre uma mesa horizontal extremamente lisa. Uma bala de massa m , velocidade v_0 e parâmetro de impacto R atinge o disco e engasta nele (Fig. 8.48). Calcule:

- A velocidade angular do sistema logo após a colisão;
- A velocidade do centro de massa após a colisão;
- A energia dissipada na colisão.

20 - Uma bola de bilhar inicialmente em repouso recebe um impulso instantâneo de um taco, que forma um ângulo θ com a horizontal, como mostra a Fig. 8.49. A bola sai com velocidade inicial v_0 e ao final do movimento ela encontra-se em repouso.

- Determine o ângulo θ para que isto aconteça;
- Qual é a velocidade angular inicial da bola?
- Qual foi a energia dissipada durante o movimento?

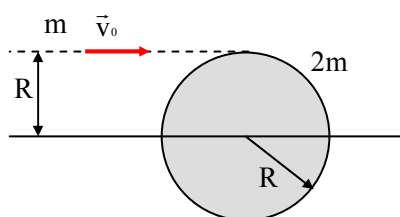


Fig. 8.48

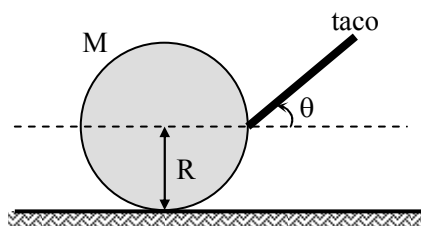


Fig. 8.49

- 21 - Uma partícula de massa m está presa ao extremo de um fio e percorre uma trajetória circular de raio r sobre uma mesa horizontal sem atrito. O fio passa por um orifício de mesa e o outro extremo se encontra inicialmente fixo. Neste caso, o raio inicial é r_0 e a velocidade angular inicial é ω_0 . Começa-se então a puxar lentamente o fio de maneira a diminuir o raio da trajetória circular, como mostra a Fig. 8.50.

- Como variará a velocidade angular em função de r ?
- Qual é o trabalho realizado para levar a partícula até o raio $r_0/2$?

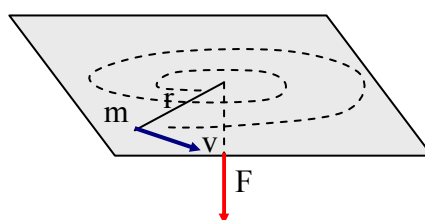


Fig. 8.50

- 22 - Considere um cilindro de massa M e raio R descendo um plano inclinado de ângulo θ sem deslizar. Calcule a aceleração do centro de massa e a força de atrito agindo sobre o cilindro.
- 23 - Uma bola de bilhar de massa M e raio R ($I = \frac{2}{5}MR^2$) desliza sem rodar com velocidade v_0 sobre uma mesa sem atrito. Subitamente ela encontra uma parte da mesa com atrito e depois de algum tempo está rodando sem deslizar.
- Calcule a velocidade final da bola;
 - Qual é a energia dissipada no processo?

