

微積溯源序

微積溯源八卷，前四卷爲微分術，後四卷爲積分術，乃算學中最深之事也。余既與西士 傅蘭雅譯畢代數術二十五卷，更思求其進境，故又與傅君譯此書焉。先是咸豐年間，曾有海甯李壬叔與西士 偉烈亞力譯出代微積拾級一書，流播海內。余素與壬叔相友，得讀其書，粗明微積二術之梗概。所以又譯此書者，蓋欲補其所略也。書中代數之式甚繁，校算不易，則劉君 省菴之力居多。

今刻工已竣矣，故序之，曰：吾以爲古時之算法惟有加減而已。其乘與除乃因加減之不勝其繁，故更立二術以使之簡易也。開方之法，又所以濟除法之窮者也。蓋算學中自有加減乘除開方五法，而一切淺近易明之數，無不可通矣。惟人之心思智慮日出不窮，往往以能人之所不能者爲快。遇有窒礙難通之處，輒思立法以濟其窮。故有減其所不可減而正負之名不得不立矣；除其所不能除而寄母通分之法又不得不立矣。代數中種種記號之法皆出於不得已而立者也，惟每立一法必能使繁者爲簡，難者爲易，遲者爲速，而算學之境界藉此得更進一層。如是屢進不已而所立之法於是乎日多矣。微分積分者，蓋又因乘除開

方之不勝其繁，且有窒礙難通之處，故更立此二術以濟其窮，又使簡易而速者也。試觀圓徑求周、真數求對等事，雖無微分積分之時，亦未嘗不可求，惟須乘除開方數十百次。其難有不可言喻者，不如用微積之法理明而數捷也。然則謂加減乘除開方代數之外者，更有二術焉，一曰微分，一曰積分可也。其積分術爲微分之還原，猶之開平方爲自乘之還原、除法爲乘之還原、減法爲加之還原也。然加與乘其原無不可還，而微分之原有可還有不可還，是猶算式中有不可開之方耳，又何怪焉。如必曰加減乘除開方已足供吾之用矣，何必更究其精？是舍舟車之便利而必欲負重遠行也。其用力多而成功少，蓋不待智者而辨矣。

同治十三年九月十八日，金匱華衡芳序。

微積溯源卷一

論變數與函數之變比例

第一款 用代數以解任何曲線，其中每有幾種數，其大小恒有定率者，如橢圓之長徑、拋物線之通徑、雙曲線之屬徑之類是也。

又每有幾種數可有任若干相配之同數，其大小恒不能有定率者，如曲線任一點之縱橫線是也。

數既有此兩種分別，則每種須有一總名以賅之，故名其有定之數曰常數，無定之數曰變數。

凡常數之同數不能增亦不能損。

凡變數之同數，能變爲大，亦能變爲小。故其從此同數變至彼同數之時，必歷彼此二數間最小最微之各分數。

如平圓之半徑爲常數，而其任一段之弧或弧之弦矢切割各線，及各線與弧所成之面，

皆謂之變數。

橢圓之長徑短徑皆爲常數，而其曲線之任一段或曲線上任一點之縱橫線，並其形內形外所能作之任何線或面或角，皆謂之變數。

拋物線之通徑爲常數，而其曲線之任一段或任一點之縱橫線、或弧與縱橫線所成之面，皆謂之變數。他種曲線亦然。

凡常數，恒以甲乙丙丁等字代之。凡變數，恒以天地人等字代之。

第二款 若有彼此二數皆爲變數，此數變而彼數因此數變而亦變者，則彼數爲此數之函數。

如平圓之八線皆爲弧之函數。若反求之，亦可以弧爲八線之函數。

又如重學中令物體前行之力，與其物所行之路，皆爲時刻之函數。

如有式 $\frac{\text{地} \perp \text{天}}{\text{甲} \perp \text{天}}$ ，此式中甲爲常數，天爲自主之變數，地爲天之函數。故地之同

數能以天與甲明之。

如有式 $\frac{\text{地} \perp \text{一}}{\text{甲}(\text{地} \perp \text{一})}$ ，此式中甲與一皆爲常數，地爲自主之變數，天爲地之函數，

故天之同數可以地與甲及一明之。

如有式 $\text{戊} = \frac{\text{甲} \perp \text{乙} \text{天} \perp \text{丙} \text{天} \perp \text{戊} \text{戊}}{\sqrt{\text{甲} \perp \text{乙} \text{天} \perp \text{天} \perp \text{戊} \text{戊}}} = \frac{\text{丙} \perp \text{天} \perp}{\text{甲} \perp \sqrt{\text{乙} \text{天}}}$ ，其甲

乙丙爲常數，天爲自變之數，而戊皆爲天之函數。

凡函數之中，可以有數箇自主之變數。

如有式 $戊 = 甲天^2 + 乙天地 + 丙地^2$ ，則天與地皆爲自主之變數，戊爲天地兩變數之函數。

凡變數之函數，其形雖有多種，然每可化之，使不外乎以下數類 $天^{\frac{1}{2}}$ ， $天^{\frac{1}{3}}$ ， $天^{\frac{1}{4}}$ ， $天^{\frac{1}{5}}$ 等類是也。

凡函數爲 $天^{\frac{1}{n}}$ 之類，其指數爲常數，則可從天之卯方，用代數之常法化之。而以有窮之項明其函數之同數。故謂之代數函數，亦謂之常函數。

如有式 $戊 = 甲天^2 + \sqrt{\frac{甲^2 + 天^2}{乙天^2 + 丙^2}}$ ，此種函數，其戊之同數可用加減乘除開方等法而得之。

凡函數爲 $天^{\frac{1}{n}}$ 之類，則其函數之同數不能以有窮之項明之。故謂之越函數。越者，超越於尋常之意也。

凡函數爲 $天^{\frac{1}{n}}$ ， $天^{\frac{1}{m}}$ 及 $天^{\frac{1}{k}}$ ， $天^{\frac{1}{l}}$ 之類，其函數之同數皆可以平圓之各線明之。故謂之圓函數，亦謂之角函數。以上三種函數常函數、越函數、圓函數也。，若已知天之同數，則其函數之同數即可求得。故

名此三種函數爲陽函數。

因其顯而易明，故謂之陽函數。

更有他種函數，必先解其方程式，令函數中之各變數分開，然後能求其同數者。

如有式 $x^2 = \frac{x^2 - 1}{x}$ ，其成爲天之函數，如欲求其成與天相配之同數，必先解其次方程式始能通。

此種之式名曰天之陰函數。

因其雜糅未明，故謂之陰函數。

反之亦可云天爲成之陰函數。

如解其方程式爲 $x^2 = \frac{x^2 - 1}{x}$

$$\frac{x^2 - 1}{x} = x^2 - \frac{1}{x}$$

，則成變爲天之陰函數。

整理者註：右最後一句云成變爲天之陰函數，這顯而易見是錯誤的。原文大英百科全書卷第九之 Fluxions 作 explicit function，即陽函數，此當爲譯者譯錯。目前由於校勘凡例未定，暫留此字，待討論後決定修改與否。

昔代數之家，凡遇須用開平方之處，每于其式之左旁作一根字以記之，如 \sqrt{x} 爲天之平方根。後又變通其法，而以根號記之，如 \sqrt{x} 爲天之平方根。此代數之例也。茲可仿照此例，凡遇某變數之函數，亦用一號以記之。所以凡有任何變數之函數，皆可書一函字于其變數之旁，以爲識別。

如天之函數則作 $\text{函}x$ ，或作 $\text{函}(x)$ ，皆言天之函數也。

所以凡見變數之左旁有一函字者，其函字并非代表天之倍數，其意謂是某變數之函數也。

用此法則可將 $\text{天} = \text{天}$ 、 $\text{成} = \text{甲} \text{天}$ 、 $\text{成} = \text{對} \text{天}$ 、 $\text{成} = \text{正} \text{弦} \text{天}$ 、 $\text{成} = \text{餘} \text{弦} \text{天}$ 各種之式以一語賅之，謂之 $\text{成} = \text{函} \text{天}$ 或 $\text{成} = \text{函}(\text{天})$ 。

若函數從兩箇變數而成，其天與地皆爲自主之變數，其式如 $\text{成} = \text{甲} \text{天} \text{乙} \text{地}$ 者，則可以 $\text{成} = \text{函}(\text{天}, \text{地})$ 別之。函數爲多箇變數所成者，仿此推之。惟函數只指其變數言之，若甲乙丙丁各常數。雖多不論。

第三款 凡觀此書者，必先明變數與函數變比例之限。如幾何原本中證明平圓之面積必比其外

切多等邊形之面積微小，若其外切多等邊形之邊愈多，則其面積愈近于平圓之面積。所以可設平圓之面積爲任何小，而切其圓外爲多等邊形，可使多等邊形之面積與平圓之面積較其數甚小于所設之圓面積；再設其多等邊形之面積爲級數，而其邊之變率可每變多若干倍，則其多等邊形之面積必漸與平圓之面積相近而以平圓爲限。雖切于圓外之多邊形其邊任變至若何多，其面積總不能等于平圓之面積。然其級數之總數可比平圓之面積所差甚微，其較數之小，可小至莫可名言。

若用此法于圓內容多等邊形，則其多等邊形之面積亦以平圓之面積爲限。總言之，凡平圓之周爲其內容外切多等邊形之限。

如代數術第二百六十六款言，如令甲代平圓之任何弧，則 $\frac{\text{正} \text{弦} \text{甲}}{\text{甲}}$ 恒小于半徑，而 $\frac{\text{正} \text{切} \text{甲}}{\text{甲}}$

意大，則各乘數可略等于 1，所以得 $\left(1 - \frac{1}{\tau}\right)^{\frac{1}{\tau}} = 1 - \frac{1}{\tau} + \frac{1 \cdot 2}{2! \tau^2} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3! \tau^3} + \dots$ ①。

曾在代數術第一百七十七款中證 ① 式之右邊爲由函數 τ 而成。其 τ 之同數因爲 $\tau - 1$ 之 τ 之根也。所以卯若愈大則 $\left(1 - \frac{1}{\tau}\right)^{\frac{1}{\tau}}$ 必愈與 τ 相近，而其限爲 τ 。

如令 $\tau = 1$ ，則 $\left(1 - \frac{1}{\tau}\right)^{\frac{1}{\tau}}$ 之限爲 τ ，即 $\left(1 - \frac{1}{\tau}\right)^{\frac{1}{\tau}} - \tau = 0$ 。故其函數爲常數。

第四款 惟因函數之同數本從變數而生，故變數之同數與函數之長數比則爲 $\frac{\tau}{\tau - 1} = \tau$ 。

辛。

設函數之式爲 $\tau = \tau$ ，今天長數爲 τ ，而以函數之新同數爲 τ' ，則

$$\tau' = (\tau - 1)^{\frac{1}{\tau}} = \tau - \frac{1}{\tau} + \frac{1 \cdot 2}{2! \tau^2} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3! \tau^3} + \dots, \quad \frac{\tau}{\tau - 1} = \tau + \frac{1}{\tau - 1} = \tau + \frac{1}{\tau - 1}$$

三^二天^辛一^辛。可見天變爲天^一辛之時，其函數^戊必變爲^戊一三^二天^辛一三^二天^辛一^辛，其所長之數爲^三天^辛一三^二天^辛一^辛。此式中之各項皆爲辛之整方與他數相乘所成。又可見變數與函數之變比例，其式爲^三天^辛一三^二天^辛一^辛，其初項^三天^辛與天之長數辛無相關。

設函數之式爲^戊 = 天^四。令天之長數爲辛，而以^戊爲函數之新同數，則^戊 = ^戊一四^二天^辛一六^二天^辛一四^二天^辛一^辛，而 $\frac{\text{辛}}{\text{戊} \cdot \text{丁} \cdot \text{戊}} = \text{四} \cdot \text{天}^{\text{三}} \cdot \text{一} \cdot \text{六} \cdot \text{天}^{\text{二}} \cdot \text{辛} \cdot \text{一} \cdot \text{四} \cdot \text{天}^{\text{辛}} \cdot \text{一} \cdot \text{辛}^{\text{四}}$ 。

由此可見天若變爲天^一辛，則其各函數之新同數如左：

如^戊 = 天^二，則^戊 = ^戊一^二天^辛一^辛。如^戊 = 天^三，則^戊 = ^戊一三^二天^辛一三^二天^辛一^辛。如^戊 = 天^四，則^戊 = ^戊一四^二天^辛一六^二天^辛一四^二天^辛一^辛。

其餘類推。

總言之，若以卯爲天之任何整指數，而令天之長數爲辛，又以巳午未申等字挨次而代辛之各方之倍數，則函數^戊 = 天^卯之新同數必爲^戊 = ^辛一^巳辛^一一^午辛^二一^未辛^三一^申辛^四……由是知函數之新同數必爲級數，其初項^戊爲函數之原同數，其餘各項爲天之長數辛之各整方，以巳午未申之類爲各倍數，其各倍數皆爲天之別種函數，其

式亦從本函數而生。

由以上各式又可見函數爲 $\text{戊} = \text{天}^{\text{二}}$ 、 $\text{戊} = \text{天}^{\text{三}}$ 、 $\text{戊} = \text{天}^{\text{四}}$ 之類，則其變數與函數之變比例必爲 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}^{\text{丁}} \text{戊}} = \text{二天}^{\text{一}} \text{辛}$ 、 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}^{\text{丁}} \text{戊}} = \text{三天}^{\text{一}} \text{一三天}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{二}}$ 、 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}^{\text{丁}} \text{戊}} = \text{四天}^{\text{一}} \text{一六天}^{\text{一}} \text{一辛}^{\text{一}} \text{一四天}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{三}}$ 之類。總之若以卯爲天之整指數，則 $\text{戊} = \text{天}^{\text{卯}}$ 之變比例必爲 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}^{\text{丁}} \text{戊}} = \text{巳} \text{一午} \text{辛}^{\text{一}} \text{一未} \text{辛}^{\text{二}} \text{一申} \text{辛}^{\text{三}} \text{一} \dots$ 。由此可見，變數天之長數與函

數 $\text{天}^{\text{卯}}$ 之長數其變比例 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}^{\text{丁}} \text{戊}}$ 之同數 $\text{巳} \text{一午} \text{辛}^{\text{一}} \text{一未} \text{辛}^{\text{二}} \text{一申} \text{辛}^{\text{三}} \text{一} \dots$ 可分之爲兩式，其一式爲 巳 ，此式與天之長數辛無相關；又一式爲 $\text{午} \text{辛}^{\text{一}} \text{一未} \text{辛}^{\text{二}} \text{一申} \text{辛}^{\text{三}} \text{一} \dots$ 。即 $\text{辛}^{\text{一}} (\text{午} \text{一未} \text{辛}^{\text{一}} \text{一申} \text{辛}^{\text{二}} \text{一} \dots)$ 。此式因以辛爲乘數，故辛若變小，其數亦必隨辛而變小。如令辛爲任何小，則此式之數可小至甚近于○。故此數可以不計，而以巳爲變比例之限。

設有繁函數之式 $\text{戊} = \text{甲} \text{一乙} \text{天}^{\text{一}} \text{丙} \text{天}^{\text{二}}$ ，令天之長數爲辛，則天變爲 $\text{天}^{\text{一}} \text{辛}$ 之時，其函數之同數必變爲 $\text{戊} \begin{cases} = \text{甲} \text{一乙} (\text{天}^{\text{一}} \text{辛}) \text{一丙} (\text{天}^{\text{一}} \text{辛})^{\text{二}} \\ = \text{甲} \text{一乙} \text{天}^{\text{一}} \text{丙} \text{天}^{\text{二}} \text{一} (\text{乙} \text{一丙} \text{天}) \text{辛}^{\text{一}} \text{一丙} \text{辛}^{\text{二}} \end{cases}$ ，故

戊'丁戊 = (乙上二丙天)辛上丙辛^二， $\frac{\text{辛}}{\text{戊'丁戊}} = \text{乙上二丙天} \text{上丙辛}$ 。其乙上二丙天爲本函數變比例之限。

以此法徧試各種特設之函數，見其皆有相類之性情，所以例設如左。

例曰：命任何自主之變數爲天，而令天之任何函數等于戊，則天變爲 $\text{天} \text{上} \text{天}$ 之時，函數之新同數爲戊' = 戊上巴辛上午辛^二上未辛^二上……，其變數與函數之變比例爲 $\frac{\text{辛}}{\text{戊'丁戊}} = \text{巴上午辛上未辛上申辛上……}$ 。此式中之初項巴爲變比例之限，

無論何種函數，其限皆可依此比例求之。

由以上所論變數之長數與函數之長數相關之理，可于算學中開出兩種極廣大極精微之法。

其第一種爲有任何變數之任何函數而求其變數與函數變比例之限。

其第二種爲有任何變數與函數變比例之限而求其函數之原式。

此二種法，若細攷其根源，卽奈端所謂正流數、反流數也；亦卽來本之所謂微分算術、積分算術也；又卽拉果蘭諸所謂函數變例也。

論各種函數求微分之公法

第五款

若函數之式爲 $\alpha = \beta^{\gamma}$ ，令天變爲 $\alpha + \Delta\alpha$ ，則函數之新同數必爲 $\alpha' = (\alpha + \Delta\alpha)^{\gamma}$ ，其與原同數之較爲 $\Delta\alpha$ ，即 $\Delta\alpha = \alpha' - \alpha$ ，此式之初項 $\Delta\alpha$ ，名之曰溢率。依同理推之，若函數之式爲 $\alpha = \beta^{\gamma}$ ，令天變爲 $\alpha + \Delta\alpha$ ，則函數之新同數爲 $\alpha' = (\alpha + \Delta\alpha)^{\gamma}$ ，其與原同數之較爲 $\Delta\alpha$ ，即 $\Delta\alpha = \alpha' - \alpha$ ，其初項 $\Delta\alpha$ 爲溢率。

若函數之式爲 $\alpha = \beta^{\gamma}$ ，而天變爲 $\alpha + \Delta\alpha$ ，則函數之新同數與原同數之較爲 $\Delta\alpha$ ，而其溢率爲 $\Delta\alpha$ 。

總言之，凡天之函數無論爲某方，恆可以 $\alpha + \Delta\alpha$ 代其天，而變其函數之同數爲 $\alpha' = (\alpha + \Delta\alpha)^{\gamma}$ ，乃以原同數減之得 $\Delta\alpha = \alpha' - \alpha$ ，而取其初項 $\Delta\alpha$ 爲溢率。

準此推之，則知天之溢率即爲其長數辛。惟因函數之溢率每藉天之長數而生，故微分術中，恆以 $\Delta\alpha$ 代天之溢率。其 $\Delta\alpha$ 號者，非天之倍數，不過是天之溢率耳。溢率之名，本爲流數術中所用。而 $\Delta\alpha$ 號者，即微字之偏旁，故微分之術用之。

如有式 $y = x^2$ ，則 $\frac{dy}{dx} = 2x$ 。此式之意謂 y 之微分等于 $2x$ 乘 x 之微分。猶言函數 y 之溢率等于以 $2x$ 乘其 x 之溢率也。如有式 $y = x^3$ ，則 $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ 。此式之意謂 y 之微分等于以 $3x^2$ 乘 x 之微分。猶言函數 y 之溢率等于以 $3x^2$ 乘其 x 之溢率也。

第六款 惟因每遇 $y = x^n$ ，則 $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$ ，所以可寫之如 $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$ 。此爲天微分之

倍數，亦謂之微係數。

又依前法推之，如函數之式爲 $y = x^3$ ，則 $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ ，而 $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$ 。

其 $y = x^n$ 爲原函數 $y = x^n$ 之微係數。

總言之，無論何種函數之微係數，皆可以 $\frac{dy}{dx}$ 代之。而函數之新同數爲 $y = x^3$ ，

$y = x^4$ ，……，所以 $\frac{dy}{dx} = 4x^3$ ，其 y 爲 x 之他函數，其形每隨函數之式而變。如之

$y = x^5$ 之同數爲何式，則其 y 之同數即易求得。

凡函數之欲求微分者，先于其式之左旁作一 y 號以記之。如有 $(x^3)(x^4)(x^5)$ 式，欲求其微分，則可先作 $y[(x^3)(x^4)(x^5)]$ 。

凡函數之欲求微係數者，于其式之左旁作 $\frac{1}{x}$ 號，又以 $\frac{1}{x}$ 為其分母。如有 $(\frac{1}{x} \frac{1}{x})$ 式，欲求其微係數，則作 $\frac{1}{x} \frac{1}{x} \frac{1}{x} \frac{1}{x}$ 。

從以上各款諸說，易知求微分之公法。

法曰：無論天之任何函數，欲求微分，則以 $\frac{1}{x}$ 代其原式中之 x 而詳之。依 x 之整方數自小而大序之，取其初有 x 之項，而以 $\frac{1}{x}$ 代其 x 即得。

如有式 $\frac{1}{x} = \frac{1}{x} \frac{1}{x} \frac{1}{x}$ ，欲求其微係數，則以 $\frac{1}{x}$ 代其 x ，而令函數之新同數為 $\frac{1}{x}$ ，則得 $\frac{1}{x} = \frac{1}{x} \frac{1}{x} \frac{1}{x} \frac{1}{x}$ 。取其初有 x 之項 $(\frac{1}{x} \frac{1}{x}) = \frac{1}{x} \frac{1}{x} \frac{1}{x} \frac{1}{x}$ 。

$\frac{1}{x} \frac{1}{x}$ ，以 $\frac{1}{x}$ 代其 x ，即得 $\frac{1}{x} \frac{1}{x} = (\frac{1}{x} \frac{1}{x} \frac{1}{x}) \frac{1}{x}$ ，故其 $\frac{1}{x} \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \frac{1}{x} \frac{1}{x}$ 。

第七款 上款之法，必令 x 變為 $\frac{1}{x}$ ，而詳其函數之同數為級數，此乃論其立法之理當如是也。惟求得級數之後，所用者僅為其 x 一方之項，則但能求得此項已足用矣。前于第四款中言此項之倍數為變數與函數變比例之限，又于第六款中言此項之倍數謂之微係

數。然則求函數之微係數與求變數與函數變比例之限，其法本無異也。

如有式 $\text{戊} = \frac{\text{天}}{\text{甲}^2}$ ，則 $\text{戊}' = \frac{\text{天} \uparrow \text{辛}}{\text{甲}^2}$ 。而 $\text{戊} \downarrow \text{戊}' = \frac{\text{天}}{\text{甲}^2} - \frac{\text{天} \uparrow \text{辛}}{\text{甲}^2}$ ，即 $\text{戊} \downarrow \text{戊}' =$

$\frac{\text{天}(\text{天} \uparrow \text{辛})}{\text{甲}^2}$ ，故其變比例之式爲 $\frac{\text{辛}}{\text{戊} \downarrow \text{戊}'} = \frac{\text{天}(\text{天} \uparrow \text{辛})}{\text{甲}^2}$ 。惟此式可不待詳爲級數而始

得其變比例之限，因可見辛愈小，則其式愈近于 $\frac{\text{天}^2}{\text{甲}^2}$ ，故此式必卽爲 $\frac{\text{天}}{\text{甲}}$ 之同數，

所以得 $\text{戊} = \frac{\text{天}^2}{\text{甲}^2}$ 。

若以戊爲任何函數之原同數，而以 $\text{天} \uparrow \text{辛}$ 代其天，則其函數之新同數爲 $\text{戊}' = \text{戊} \uparrow \text{辛} \uparrow \text{午} \text{辛}^2 \uparrow \text{未} \text{辛}^3 \uparrow \dots\dots$ ，即得 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}' \downarrow \text{戊}} = \text{戊} \uparrow \text{午} \text{辛} \uparrow \text{未} \text{辛}^2 \uparrow \dots\dots$ 。惟

因 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}' \downarrow \text{戊}}$ 之限爲 戊 ，故得 $\frac{\text{天}}{\text{甲}} = \text{戊}$ ，而 $\text{戊} = \text{戊} \uparrow \text{天}$ 。

由此得一解曰：凡微分之術，其意專爲求任何變數與函數同時變大之限耳。

凡求任何函數之微分，不過將一尋常之代數式另用他法以變化之。因其變化之法與代數中常用之法異，則不得不另有一名以別之，故謂之微分術。

第八款 凡變數與函數變比例之限，無論以何數爲主，其形必同。

如戊爲天之函數，若天變爲 $\frac{\text{天}}{1}$ $\frac{\text{辛}}{1}$ ，則戊變爲 $\frac{\text{戊}}{1}$ $\frac{\text{巳}}{1}$ $\frac{\text{辛}}{1}$ $\frac{\text{午}}{1}$ $\frac{\text{辛}}{1}$ $\frac{\text{未}}{1}$ $\frac{\text{辛}}{1}$ $\frac{\text{申}}{1}$ ……。
其巳、午、未各數俱爲天之他函數，從本函數所生。如令其 $\frac{\text{巳}}{1}$ $\frac{\text{辛}}{1}$ $\frac{\text{午}}{1}$ $\frac{\text{辛}}{1}$ $\frac{\text{未}}{1}$ $\frac{\text{辛}}{1}$ $\frac{\text{申}}{1}$ ……
…… $\frac{\text{子}}{1}$ ，則天與戊同時變大之數爲辛與子。如依代數術第一百六十三款之法反求
其級數，則得 $\frac{\text{巳}}{1}$ $\frac{\text{子}}{1}$ $\frac{\text{巳}}{1}$ $\frac{\text{子}}{1}$ ……，故其變數與函數之公比例爲 $\frac{\text{子}}{1} = \frac{\text{巳}}{1}$
 $\frac{\text{巳}}{1}$ $\frac{\text{子}}{1}$ ……。故 $\frac{\text{子}}{1}$ 之限爲 $\frac{\text{巳}}{1}$ ，而 $\frac{\text{子}}{1}$ 之限爲 $\frac{\text{巳}}{1}$ ，此卽 $\frac{1}{1}$ 也。

第九款 由此易知，凡有相等之函數，則其微係數亦必相等。

如戌與亥爲兩函數，而戌 = 亥，其天變爲天_上午之時，戌變爲亥，亥變爲戌，則戌' = 亥'，而戌'下戌 = 亥'下亥，故 $\frac{\text{戌}'\text{下戌}}{\text{戌}'\text{下亥}} = \frac{\text{亥}'\text{下亥}}{\text{亥}'\text{下亥}}$ 。如以巳與午各爲其變比例之限，則巳 = 午。故巳下天 = 午下天，而巳下戌 = 亥下亥。

由此可見，凡函數之式無論如何改形，若其同數無異者，則其微係數必同。

如函數之原式爲 $y = a + bx + cx^2$ ，若改其形爲 $(x + \frac{a}{c})(x + \frac{b}{c})(x + \frac{c}{c})$ ，則此式之微係數與原式之微係數必無異。

惟此理，若反言之而謂相等之微係數必從相等之函數而生，則不盡然。

如函數之式爲 $ax = a + b + c + d$ ，令 a 變爲 $a + \Delta a$ ，而 b 變爲 $b + \Delta b$ ，則 $ax = a + b + c + d + \Delta a + \Delta b + \Delta c + \Delta d$ ，故得 $\frac{\Delta ax}{\Delta x} = \Delta a + \Delta b + \Delta c + \Delta d$ 。觀此可知，其常數之項 a, b, c, d 不能入變比例之限內，故其微係數必與 $ax = a + b + c + d$ 之微係數無異。惟微係數 a 既能屬於本函數 $ax = a + b + c + d$ ，又能屬於他函數 $bx = b + c + d$ ，所以有下例。

例曰：凡變數與常數相加減之函數，其微係數中不見其加減之常數。惟變數與常數相乘除者，則其微係數中有常數爲倍數。

求兩函數相乘積之微分