

微積溯源序

微積溯源八卷，前四卷爲微分術，後四卷爲積分術，乃算學中最深之事也。余既與西士 傅蘭雅譯畢代數術二十五卷，更思求其進境，故又與傅君譯此書焉。先是咸豐年間，曾有海甯李壬叔與西士 偉烈亞力譯出代微積拾級一書，流播海內。余素與壬叔相友，得讀其書，粗明微積二術之梗概。所以又譯此書者，蓋欲補其所略也。書中代數之式甚繁，校算不易，則劉君 省菴之力居多。

今刻工已竣矣，故序之，曰：吾以爲古時之算法惟有加減而已。其乘與除乃因加減之不勝其繁，故更立二術以使之簡易也。開方之法，又所以濟除法之窮者也。蓋算學中自有加減乘除開方五法，而一切淺近易明之數，無不可通矣。惟人之心思智慮日出不窮，往往以能人之所不能者爲快。遇有窒礙難通之處，輒思立法以濟其窮。故有減其所不可減而正負之名不得不立矣；除其所不能除而寄母通分之法又不得不立矣。代數中種種記號之法皆出於不得已而立者也，惟每立一法必能使繁者爲簡，難者爲易，遲者爲速，而算學之境界藉此得更進一層。如是屢進不已而所立之法於是乎日多矣。微分積分者，蓋又因乘除開

方之不勝其繁，且有窒礙難通之處，故更立此二術以濟其窮，又使簡易而速者也。試觀圓徑求周、真數求對等事，雖無微分積分之時，亦未嘗不可求，惟須乘除開方數十百次。其難有不可言喻者，不如用微積之法理明而數捷也。然則謂加減乘除開方代數之外者，更有二術焉，一曰微分，一曰積分可也。其積分術爲微分之還原，猶之開平方爲自乘之還原、除法爲乘之還原、減法爲加之還原也。然加與乘其原無不可還，而微分之原有可還有不可還，是猶算式中有不可開之方耳，又何怪焉。如必曰加減乘除開方已足供吾之用矣，何必更究其精？是舍舟車之便利而必欲負重遠行也。其用力多而成功少，蓋不待智者而辨矣。

同治十三年九月十八日，金匱華衡芳序。

微積溯源卷一

論變數與函數之變比例

第一款 用代數以解任何曲線，其中每有幾種數，其大小恒有定率者，如橢圓之長徑、拋物線之通徑、雙曲線之屬徑之類是也。

又每有幾種數可有任若干相配之同數，其大小恒不能有定率者，如曲線任一點之縱橫線是也。

數既有此兩種分別，則每種須有一總名以賅之，故名其有定之數曰常數，無定之數曰變數。

凡常數之同數不能增亦不能損。

凡變數之同數，能變爲大，亦能變爲小。故其從此同數變至彼同數之時，必歷彼此二數間最小最微之各分數。

如平圓之半徑爲常數，而其任一段之弧或弧之弦矢切割各線，及各線與弧所成之面，

皆謂之變數。

橢圓之長徑短徑皆爲常數，而其曲線之任一段或曲線上任一點之縱橫線，並其形內形外所能作之任何線或面或角，皆謂之變數。

拋物線之通徑爲常數，而其曲線之任一段或任一點之縱橫線、或弧與縱橫線所成之面，皆謂之變數。他種曲線亦然。

凡常數，恒以甲乙丙丁等字代之。凡變數，恒以天地人等字代之。

第二款 若有彼此二數皆爲變數，此數變而彼數因此數變而亦變者，則彼數爲此數之函數。

如平圓之八線皆爲弧之函數。若反求之，亦可以弧爲八線之函數。

又如重學中令物體前行之力，與其物所行之路，皆爲時刻之函數。

如有式 $\frac{\text{甲} \perp \text{天}}{\text{甲} \perp \text{天}}$ ，此式中甲爲常數，天爲自主之變數，地爲天之函數。故地之同

數能以天與甲明之。

如有式 $\frac{\text{地} \perp \text{一}}{\text{甲}(\text{地} \perp \text{一})}$ ，此式中甲與一皆爲常數，地爲自主之變數，天爲地之函數，

故天之同數可以地與甲及一明之。

如有式 $\text{成} = \frac{\text{甲} \perp \text{乙} \perp \text{天} \perp \text{丙} \perp \text{天} \perp \text{或} \text{成} = \sqrt{\text{甲} \perp \text{乙} \perp \text{天} \perp \text{天} \perp \text{或} \text{成} = \frac{\text{丙} \perp \text{天} \perp}{\text{甲} \perp \sqrt{\text{乙} \perp \text{天}}}$ ，其

甲乙丙爲常數，天爲自變之數，而戊皆爲天之函數。

凡函數之中，可以有數箇自主之變數。

如有式 $戊 = 甲天^2 + 乙天地 + 丙地^2$ ，則天與地皆爲自主之變數，戊爲天地兩變數之函數。

凡變數之函數，其形雖有多種，然每可化之，使不外乎以下數類 $天^m$ ， $甲天$ ， $正弦天$ ， $餘弦天$ 等類是也。

凡函數爲 $天^n$ 之類，其指數爲常數，則可從天之卯方，用代數之常法化之。而以有窮之項明其函數之同數。故謂之代數函數，亦謂之常函數。

如有式 $戊 = 甲天^3 + \frac{\sqrt{甲^2 + 天^2}}{乙天^2 + 丙^2天}$ ，此種函數，其戊之同數可用加減乘除開方等法而得之。

凡函數爲 $天$ ， $正天$ 之類，則其函數之同數不能以有窮之項明之。故謂之越函數。越者，超越於尋常之意也。

凡函數爲 $正弦天$ ， $餘弦天$ 及 $正切天$ ， $正割天$ 之類，其函數之同數皆可以平圓之各線明之。故謂之圓函數，亦謂之角函數。

以上三種函數常函數、越函數、圓函數也。，若已知天之同數，則其函數之同數即可求得。故

以一語賅之，謂之 $\frac{y}{x}$ 或 $\frac{y}{x}$ （ $\frac{y}{x}$ ）。

若函數從兩箇變數而成，其天與地皆爲自主之變數，其式如 $\frac{y}{x} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ ， $\frac{y}{x}$ 者，則可以 $\frac{y}{x}$ （ $\frac{y}{x}$ ）別之。函數爲多箇變數所成者，仿此推之。

惟函數只指其變數言之，若甲乙丙丁各常數。雖多不論。

第三款 凡觀此書者，必先明變數與函數變比例之限。如幾何原本中證明平圓之面積必比其外

切多等邊形之面積微小，若其外切多等邊形之邊愈多，則其面積愈近于平圓之面積。

所以可設平圓之面積爲任何小，而切其圓外爲多等邊形，可使多等邊形之面積與平圓之面積較其數甚小于所設之圓面積；再設其多等邊形之面積爲級數，而其邊之變率可每變多若干倍，則其多等邊形之面積必漸與平圓之面積相近而以平圓爲限。雖切于圓外之多邊形其邊任變至若何多，其面積總不能等于平圓之面積。然其級數之總數可比平圓之面積所差甚微，其較數之小，可小至莫可名言。

若用此法于圓內容多等邊形，則其多等邊形之面積亦以平圓之面積爲限。總言之，凡平圓之周爲其內容外切多等邊形之限。

如代數術第二百六十六款言，如令甲代平圓之任何弧，則

$\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ 恒小于半徑，而 $\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$

④.....上

近，而其限爲_{天。}也。

如令 $\frac{1}{\lambda} = 1$ ，則 $\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$ 之限爲戊，即 $\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}} - 1 = 0$ 。故其函數爲常數。

辛。

$$\text{戌}' = (\text{天} \text{上} \text{辛})^{\text{三}} = \left\{ \begin{array}{l} = \text{天}^{\text{三}} \text{上} \text{三天}^{\text{二}} \text{辛} \text{上} \text{三天}^{\text{二}} \text{辛}^{\text{三}} \\ = \text{戌} \text{上} \text{三天}^{\text{二}} \text{辛} \text{上} \text{三天}^{\text{二}} \text{辛}^{\text{三}} \end{array} \right. , \quad \frac{\text{辛}}{\text{戌}' \text{天}} = \text{三天}^{\text{二}} \text{上}$$

三天^二辛^一辛^二。可見天變爲天^一辛^二之時，其函數 戊 必變爲 戊 ^一三天^二辛^一三天^二辛^一辛^二，其所長之數爲 戊 ^一三天^二辛^一三天^二辛^一辛^二。此式中之各項皆爲辛之整方與他數相乘所成。又可見變數與函數之變比例，其式爲 戊 ^一三天^二辛^一三天^二辛^一辛^二，其初項 戊 ^一與天之長數辛無相關。

設函數之式爲 戊 ^一天^四。令天之長數爲辛，而以 戊 ^一爲函數之新同數，則 戊 ^一 = 戊 ^一四天^二辛^一六天^二辛^一四天^二辛^一辛^二，而 $\frac{\text{戊}^{\text{辛}}}{\text{戊}^{\text{丁}}\text{戊}} = \text{四天}^{\text{二}}\text{辛}^{\text{一}}\text{六天}^{\text{二}}\text{辛}^{\text{一}}\text{四天}^{\text{二}}\text{辛}^{\text{一}}\text{辛}^{\text{二}}$ 。

由此可見天若變爲天^一辛^二，則其各函數之新同數如左：

如 戊 = 天^二，則 戊 ^一 = 戊 ^一二天^二辛^一辛^二。如 戊 = 天^三，則 戊 ^一 = 戊 ^一三天^二辛^一三天^二辛^一辛^二。如 戊 = 天^四，則 戊 ^一 = 戊 ^一四天^二辛^一六天^二辛^一四天^二辛^一辛^二。其餘類推。

總言之，若以卯爲天之任何整指數，而令天之長數爲辛，又以巳午未申等字挨次而代辛之各方之倍數，則函數 戊 = 天^卯之新同數必爲 戊 ^一 = 辛^一巳辛^一午辛^一未辛^一申^一辛^二……由是知函數之新同數必爲級數，其初項 戊 爲函數之原同數，其餘各項爲天之長數辛之各整方，以巳午未申之類爲各倍數，其各倍數皆爲天之別種函數，

其式亦從本函數而生。

由以上各式又可見函數爲 $戊 = 天^{\text{二}}$ 、 $戊 = 天^{\text{三}}$ 、 $戊 = 天^{\text{四}}$ 之類，則其變數與函數之變比例必爲 $\frac{辛}{戊^{\text{丁}}戊} = 二天^{\text{一}}辛$ 、 $\frac{辛}{戊^{\text{丁}}戊} = 三天^{\text{二}}上三天^{\text{一}}辛^{\text{二}}$ 、 $\frac{辛}{戊^{\text{丁}}戊} = 四天^{\text{三}}上四天^{\text{二}}辛^{\text{二}}上辛^{\text{三}}$ 之類。總之若以卯爲天之整指數，則 $戊 = 天^{\text{卯}}$ 之變比例必爲 $\frac{辛}{戊^{\text{丁}}戊} = 巳上午辛上未辛^{\text{二}}上申辛^{\text{三}}上……$ 。由此可見，變數天之

長數與函數 $天^{\text{卯}}$ 之長數其變比例 $\frac{辛}{戊^{\text{丁}}戊}$ 之同數 $巳上午辛上未辛^{\text{二}}上申辛^{\text{三}}上……$

可分之爲兩式，其一式爲 $巳$ ，此式與天之長數辛無相關；又一式爲 $午辛上未辛^{\text{二}}上申辛^{\text{三}}上……$ 。即 $辛(午上未辛上申辛上……)$ 。此式因以辛爲乘數，故辛若變小，其數亦必隨辛而變小。如令辛爲任何小，則此式之數可小至甚近于 $〇$ 。故此數可以不計，而以 $巳$ 爲變比例之限。

設有繁函數之式 $戊 = 甲上乙天上丙天^{\text{二}}$ ，令天之長數爲辛，則天變爲 $天^{\text{一}}辛$ 之時，其函數之同數必變爲 $戊$

$$\left\{ \begin{array}{l} = 甲上乙(天^{\text{一}}辛)上丙(天^{\text{二}}辛)^{\text{二}} \\ = 甲上乙天^{\text{一}}上丙天^{\text{二}}上(乙上二丙天)辛上丙辛^{\text{二}} \end{array} \right. , \quad \text{故}$$

戊丁戊 = (乙 上 二丙天) 辛 上 丙辛^二， $\frac{\text{辛}}{\text{戊丁戊}} = \text{乙 上 二丙天 上 丙辛}$ 。其乙 上 丙天 爲本函數變比例之限。

以此法徧試各種特設之函數，見其皆有相類之性情，所以例設如左。

例曰：命任何自主之變數爲天，而令天之任何函數等于戊，則天變爲天 上 辛之時，函數之新同數爲戊' = 戊 上 巳辛 上 午辛^二 上 未辛^三 上 ……，其變數與函數之變比例爲 $\frac{\text{辛}}{\text{戊丁戊}} = \text{巳 上 午辛 上 未辛}^{\text{二}} \text{ 上 申辛}^{\text{三}} \text{ 上 } \dots\dots$ 。此式中之初項巳爲變比例之限，無論何種函數，其限皆可依此比例求之。

由以上所論變數之長數與函數之長數相關之理，可于算學中開出兩種極廣大極精微之法。

其第一種爲有任何變數之任何函數而求其變數與函數變比例之限。

其第二種爲有任何變數與函數變比例之限而求其函數之原式。

此二種法，若細攷其根源，即奈端所謂正流數、反流數也；亦即來本之所謂微分算術、積分算術也；又即拉果闡諸所謂函數變例也。

論各種函數求微分之公法

第五款

若函數之式爲 $y = f(x)$ ，令天變爲 $x + \Delta x$ ，則函數之新同數必爲 $y + \Delta y$ ，此式之初項 y ，名之曰溢率。

依同理推之，若函數之式爲 $y = f(x)$ ，令天變爲 $x - \Delta x$ ，則函數之新同數爲 $y - \Delta y$ 。其初項 y 爲溢率。

若函數之式爲 $y = f(x)$ ，而天變爲 $x + \Delta x$ ，則函數之新同數與原同數之較爲 Δy 。而其溢率爲 $\Delta y / \Delta x$ 。

總言之，凡天之函數無論爲某方，恆可以 $x + \Delta x$ 代其天，而變其函數之同數爲 $y + \Delta y$ ，乃以原同數減之得 Δy ，而取其初項 y 爲溢率。

準此推之，則知天之溢率即爲其長數 Δx 。惟因函數之溢率每藉天之長數而生，故微分術中，恆以 Δx 代天之溢率。其 Δx 號者，非天之倍數，不過是天之溢率耳。溢率之名，本爲流數術中所用。而 Δ 號者，即微字之偏旁，故微分之術用之。

凡函數之欲求微係數者，于其式之左旁作 $\dot{}$ 號，又以 $\dot{}$ 爲其分母。如有 $[(\text{甲} \perp \text{天})(\text{乙} \dashv \text{天} \dashv)]$ 式，欲求其微係數，則作 $\frac{\dot{}[(\text{甲} \perp \text{天})(\text{乙} \dashv \text{天} \dashv)]}{\dot{}\text{天}}$ 。

從以上各款諸說，易知求微分之公法。

法曰：無論天之任何函數，欲求微分，則以 $\text{天} \perp \text{辛}$ 代其原式中之天而詳之。依辛之整方數自小而大序之，取其初有辛之項，而以 $\text{天} \perp \text{辛}$ 代其辛即得。

如有式 $\text{戊} = \text{甲} \text{天} \perp \text{乙} \text{天} \dashv$ ，欲求其微係數，則以 $\text{天} \perp \text{辛}$ 代其天，而令函數之新

同數爲 $\text{戊}'$ ，則得 $\text{戊}'$

$$\left\{ \begin{aligned} &= \text{甲}(\text{天} \perp \text{辛}) \perp \text{乙}(\text{天} \perp \text{辛}) \dashv \\ &= \text{甲} \text{天} \perp \text{乙} \text{天} \dashv \perp (\text{甲} \perp \text{乙} \text{天}) \text{辛} \perp \text{乙} \text{辛} \dashv \\ &= \text{戊} \perp (\text{甲} \perp \text{乙} \text{天}) \text{辛} \perp \text{乙} \text{辛} \dashv \end{aligned} \right.$$

取其初有辛之

項 $(\text{甲} \perp \text{乙} \text{天}) \text{辛}$ ， $\text{天} \perp \text{辛}$ 代其辛，即得 $\text{戊}' = (\text{甲} \perp \text{乙} \text{天}) \dot{} \text{天}$ ，故其 $\frac{\dot{} \text{天}}{\dot{} \text{戊}} = (\text{甲} \perp \text{乙} \text{天})$