微積溯源:

有海 傅 審李壬叔 粗 蘭 微積溯源八卷, 則劉君省菴之力居多。 明微積 雅 譯畢代數術二十五卷, 與西士偉烈亞力譯出代微積拾 二術之梗概。 前四卷爲微分術, 所以又譯此書者, 更思求其進境, 後四卷爲積分術, 級 蓋欲補其所略也。 書, 故又與傅君譯此 流播海内。 乃算學中最深之事也。 書焉。 書中代數之式甚繁, 余素與壬叔相 先是咸豐年 友, 余既與 得讀 蕳 其 西 曾

加減 界藉此得更進一層。 皆出於不得已而立者也, 以能人之所不能者爲快。 不勝其繁, 負之名不得不立矣;除其所不能除而寄母通分之法又不得不立矣。 乘除開方五法, 今刻工已竣矣,故序之,曰:吾以爲古時之算法惟有加減而已。 故更立二術以使之簡易也。 而 如是屢進不已而所立之法於是乎日多矣。微分積分者,蓋又因乘除開 切淺近易明之數, 惟每立一法必能使繁者爲簡, 遇有窒礙難通之處, 開方之法, 無不可通矣。惟人之心思智慮日出 輒思立法以濟其窮。故有減其所不可減 又所以濟除法之窮者也。 難者爲易, 遲者爲速, 代數中種 其乘與除乃因加減之 蓋算學中 |不窮, 種記號 而算學之境 泛法 往往

微

積

溯

源序

源

序

方之不勝其繁, 且有窒礙難通之處, 故更立此二術以濟其窮, 又使簡易而速者也。 試 觀 圓

難有 徑求周、 不可言喻者, 真數求對等事,雖無微分積分之時, 不如用微積之法理 明而數捷也。 亦未嘗不可求, 然則謂 加 減 惟須 乘 除 開 乘 除開方數十百次。 方 代 、數之外者, 更有 其

一術焉, 一曰微分, 一日積分可也。 其積分術爲微分之還原, 猶之開 平方爲自乘之還原、

除法為乘之還原、 是猶算式中有 不可開之方耳, 減法爲加之還原也。然加與乘其原無不可還,而微分之原有可還有不可 又何 怪焉。 如 必日 加 減 減 乗 除 開 方已足供吾之用矣,

更究其精?是舍舟車之便利而必欲負 重 遠行也。 其用 力多而成功少, 蓋不待智者而辨矣。

同治十三年九月十八日, 金匱華蘅芳序。

微積溯源卷

論變數與函數之變比例

第一 款 用代數以解任何曲線, 其中每有幾種數, 其大小恒有定率者, 如橢圓之長徑、 抛物線

之通徑、

雙曲線之屬徑之類是也。

線是也。 又每有幾種數可有任若干相配之同數, 其大小恒不能有定率者, 如曲線任一點之縱橫

凡常數之同數不能增亦不能損。

變數。

數既有此兩種分別,

則每種須有一

總名以賅之,故名其有定之數曰常數,

無定之數日

數閒最小最微之各分數。 凡變數之同數, 能變爲大, 亦能變爲小。 故其從此同數變至彼同數之時, 必歷彼此二

| 平圓之半徑爲常數,而其任一段之弧或弧之弦矢切割各線、 論 變 數與 函 數之變比 例 及各線與弧所成之面

皆謂之變數

橢圓之長徑短徑皆爲常數,而其曲線之任一段或曲線上任一點之縱橫線,並其形内形

外所能作之任何線或面或角,皆謂之變數。

抛物線之通徑爲常數,而其曲線之任一段或任一點之縱橫線、 或弧與縱橫線所成之

面,皆謂之變數。他種曲線亦然。

凡常數,恒以甲乙丙丁等字代之。凡變數,恒以天地人等字代之。

若有彼此二數皆爲變數,此數變而彼數因此數變而亦變者,則彼數爲此數之函數。

如平圓之八線皆爲弧之函數。若反求之,亦可以弧爲八線之函數。

第二款

如有式亭 = 〒 二天 如有式峇 = ヺヿ゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゠ 此式中甲爲常數,天爲自主之變數,地爲天之函數。又如重學中令物體前行之力,與其物所行之路,皆爲時刻之函數。 故地之同

リデン・ 敷能以天與甲明之。

如有式天 = \(\mathbb{P}(\delta\to T-)\) 此式中甲與一皆爲常數,地爲自主之變數,天爲地之函數,

故天之同數可以地與甲及一明之。

如有式戍 = 甲 _ つ天 _ あ天 _ 或戍 $=\sqrt{\mathbb{P}^{-}}$ \perp 乙天 \perp 天 $^{-}$ 飯戍 = $\Psi \perp \sqrt{C} \mathcal{F}$ 丙 上 夫一, 其

甲乙丙爲常數,天爲自變之數,而戌皆爲天之函數。

凡函數之中,可以有數箇自主之變數。

函數。 如有式戍 = ヲチ゛」 Cチ巻 _ あぎ゛則天與地皆爲自主之變數, 戍爲天地兩變數之

察眾天 等類是也。 凡變數之函數,其形雖有多種,然每可化之,使不外乎以下數類天學、甲基、臣說天、

凡函數爲兲"之類,其指數爲常數,則可從天之卯方,用代數之常法化之。

如有式法 = 甲夫二 _ ______,此種函數,其戌之同數可而以有窮之項明其函數之同數。故謂之代數函數,亦謂之常函數。 乙夫一丁丙一夫 此種函數,其戌之同數可用加減乘除開方等法

越於尋常之意也。 凡函數爲甲、學天之類, 而得之。 則其函數之同數不能以有窮之項明之。故謂之越函數。

超

之。故謂之圓函數, 凡函數爲正弦天、察弦天及正切天、 亦謂之角函數。 臣與天之類,其函數之同數皆可以平圓之各線明

以上三種函數常函數、 越函數、 圓函數也。, 若已知天之同數, 則其函數之同數卽可求得。 故

論變數與函

數之變比例

名此三種! 函數爲陽函數。 因其顯而易明,故謂之陽函數

如有式及光 更有他種函數, . || 戎 茂下方, 其心是言、言义, 」 【《京社》, 必先解其方程式, 令函數中之各變數分開, 其戌爲天之函數, 如欲求其戌與天相配之同數, 然後能求其同數者。 必先解其二

次方程式始能通。

如解其方程式爲尽 = 二 此種之式名曰天之陰函數。 因其雜糅未明, 故謂之陰函數。 反之亦可云天爲戌之陰函數 則戌變爲天之陰函數。

仿照此例,凡遇某變數之函數, 平方根。後又變通其法, 昔代數之家,凡遇須用開平方之處,每于其式之左旁作一根字以記之,如為尹爲天之 而以根號記之,如
天 爲天之平方根。此代數之例也。茲可 亦用一號以記之。所以凡有任何變數之函數,皆可書 ١

一函字于其變數之旁, 以爲識別。

如天之函數則作爫兲,或作紭(兲),皆言天之函數也。

也。 所以凡見變數之左旁有一函字者,其函字并非代表天之倍數, 其意謂是某變數之函數

用此法則可將这 光學、 H, 甲夫、 戌 = 對天、 戌 = 正弦天、 戎 ||察路片 各種之式

以一語賅之,謂之茂 = 爲天 或茂 = 溪(天)。

若函數從兩箇變數而成,其天與地皆爲自主之變數,其式如戌 = ヲモー」 Cチ壱 則可以及 . = 爫(天, 咾) 別之。函數爲多箇變數所成者, 仿此推之。

惟函數只指其變數言之,若甲乙丙丁各常數。雖多不論。

第三款 凡觀此書者,必先明變數與函數變比例之限。 平圓之面積所差甚微,其較數之小,可小至莫可名言。 外之多邊形其邊任變至若何多,其面積總不能等于平圓之面積。然其級數之總數可比 每變多若干倍,則其多等邊形之面積必漸與平圓之面積相近而以平圓爲限。 之面積較其數甚小于所設之圓面積;再設其多等邊形之面積爲級數,而其邊之變率可 所以可設平圓之面積爲任何小,而切其圓外爲多等邊形,可使多等邊形之面積與平圓 切多等邊形之面積微小,若其外切多等邊形之邊愈多,則其面積愈近于平圓之面 如幾何原本中證明平圓之面積必比其外 雖切于圓

總言之,凡平圓之周爲其内容外切多等邊形之限 若用此法于圓内容多等邊形,則其多等邊形之面積亦以平圓之面積爲限。

如代數術第二百六十六款言, 數 與 函 數之變比 例 如令甲代平圓之任何弧, 則 正弦甲 H 恒小于半徑, 而

恒小于半徑。然令其弧爲任何小,則其式之同數必甚近于半徑,而其所差之數可小至

不能以言語形容。所以此兩數中間之數爲一。即半徑也。故其公限亦爲一。

如代數術中亦會證甲弧爲爭斥對 與爭斥發 [4] 兩式之限,惟其卯必爲任何大。由此可見凡弧與弦切,三者之中取其二以相較,其比例之限必相等。

依代數術第五十六款之例- L 兲 L 兲 ̄L 兲 ̄…… L = 0,而式變爲———。所以任取其級數若干項 天^{別丁一} 卽

之和,必小于-變至小于一,而卯大至無窮,則天智 オープス。 惟其項愈多,則與 ┐ 愈相近,而其所差之數可小至莫可名

言。則可見一一大 冫 必爲其諸級數之限

若依二項例之式 其卯之同數無論如何,必合于理。 || |} |-惟卯若爲大數, 則其各項

之乘數一

之類與一相較之差甚小,若卯愈大,

則其差愈微;若令

卯爲任意大, - 上 · · · · · · · • • • • 則各乘數可略等于一,所以得 ا ⊢ 岩 ||

曾在代數術第一百七十七款中證匣式之右邊爲由函數及表 天三 而成。 其戊之同數因爲

11

近,而其限爲这^夫。 **とーンレンーン,卽訥白爾對數之根也。所以卯若愈大則** <u>|</u> |-必愈與这类相

故其函數爲常數。 如令天 = 則 之限爲戊, 卽 (一上等) 一茂=二、七一ハニハーハ、

第四款 惟因函數之同數本從變數而生, 故變數之同數與函數之長數比則爲 戏/丁戌 ||二米

設函數之式爲及 = 天三, 令天長數爲辛,而以函數之新同數爲及'則

$$eta' = (\mathcal{F}, \perp \dot{\mathcal{F}})^{-} \begin{cases} = \mathcal{F}^{-} \perp = \mathcal{F}^{-} \dot{\mathcal{F}} \perp = \mathcal{F}^{-} \perp \dot{\mathcal{F}}^{-} + \mathcal{F}^{-} \end{pmatrix}, \quad E \frac{\dot{\mathcal{F}}}{\dot{\mathcal{K}}' + \dot{\mathcal{K}}} = \mathcal{F}^{-} \perp \dot{\mathcal{F}}^{-} \end{pmatrix}$$

論變數與函數之變比例

七

111

辛≒,其所長之數爲≒ㅊーキ ⊥ ≒ㅊキー ∟ キー゚。 此式中之各項皆爲辛之整方與他數 .天辛 _ 辛-。可見天變爲天 _ 辛 之時,其函數戎 必變爲戎 _ ニ天-辛 _ ニ天ギ _

項ニモー與天之長數辛無相關。 相乘所成。又可見變數與函數之變比例,其式爲ニ冼ニギ L ニ冼ギニ L ギニ,其初

四天 $^{-1}$ 辛 $_{\perp}$ 六天 $^{-1}$ 辛 $_{\perp}$ 口四天辛 $^{-1}$ $_{\perp}$ 土辛 $_{\parallel}$ 八万 $_{\parallel}$ $_{\parallel}$ 一四天 $_{\parallel}$ $_{\parallel}$ 二四天 $_{\parallel}$ 二二四天 $_{\parallel}$ 二二二四天 $_{\parallel}$ 二二二四天

由此可見天若變爲天 _ ギ,則其各函數之新同數如左:

||-||-|-

如决 ₩。其餘類推。 三天辛 $^-$ oxdot 辛 $^{\pm\circ}$ 。如成 = 天 $^{\mathrm{m}}$,则成'= 戊 oxdot 四天 $^{\pm\div}$ oxdot 二 元天 $^{-\div}$ oxdot 四天辛 $^-$ oxdot= 天⁻,則戌' = 戌 丄 二天辛 丄 辛⁻。如戌 = 天⁻,則戌' = 戌 丄 三天一辛上

項爲天之長數辛之各整方,以巳午未申之類爲各倍數,其各倍數皆爲天之別種函數, 母☆『 _。由是知函數之新同數必爲級數,其初項戌爲函數之原同數,其餘各 辛之各方之倍數,則函數及 = 天》之新同數必爲及 = 平 _ 巴辛 _ 午辛 _ 上 未辛 _ _ 總言之,若以卯爲天之任何整指數,而令天之長數爲辛,又以巳午未申等字挨次而代

其式亦從本函數而生。

之變比例必爲 $\frac{7}{\cancel{K}/7\cancel{K}}=$ 二天 \bot 辛、 $\frac{7}{\cancel{K}/7\cancel{K}}=$ 三天 $^ \bot$ 三天辛 \bot 辛 $^-$ 、 $\frac{7}{\cancel{K}/7\cancel{K}}$

之變比例必爲—— ̄= 巴 」 午辛 」 未辛一 」 申辛二 」 ……。由此可見,變數天之 ロチュー ドチュキ | ロチキー | キュー・・ニー・・ニー・ | 1887年 | ロチュー | ロチュー | 1887年 | ロチュー | 1887年 | ロチュー | 1887年 | 1887年

長數與函數 犬ダ 之長數其變比例 ―――― 之同數C L キギ L 未ギー L 申ギー L・・・・・・

小,其數亦必隨辛而變小。如令辛爲任何小,則此式之數可小至甚近于○。故此數可 毋幸⁻ ∠ 。 卽幸 (午 ∠ 夬辛 ∠ 毋幸⁻ ∠)。此式因以辛爲乘數,故辛若變 可分之為兩式,其一式爲巴,此式與天之長數辛無相關;又一式爲弁弁 _ ^ キキー゙ _

以不計,而以巳爲變比例之限

其函數之同數必變爲及 設有繁函數之式及 = Ψ _ ′ ′ ′ ′ ′ ′ ′ ′ ′ ′ ′ , 令天之長數爲辛,則天變爲ㅊ _ ギ 之時, $\left(= \Psi \perp C \xi \perp \delta \xi^{-} \perp (C \perp - \delta \xi)^{2} + \delta \xi^{-} \right)$ | = 甲 \perp 乙(天 \perp 辛) \perp 丙(天 \perp 辛) $^{\perp}$, 故

= (乙 」 二丙天)辛 」 丙辛一, 匡 一 茂/丁戌 ||0 二丙天

+

→ガ⊁ 爲本函數變比例之限。

以此法徧試各種特設之函數,見其皆有相類之性情,所以例設如左。

例曰:命任何自主之變數爲天,而令天之任何函數等于戌,則天變爲뭐 ㄴ ₦ 之時,

= ヒ L キキ L きキ L もき L 此式中之初項に 爲變比例之限,

無論何種函數,其限皆可依此比例求之。

由以上所論變數之長數與函數之長數相關之理, 可于算學中開出兩種極廣大極精微之

其第一種爲有任何變數之任何函數而求其變數與函數變比例之限。

其第二種爲有任何變數與函數變比例之限而求其函數之原式

此二種法, 若細攷其根源,卽奈端所謂正流數、 反流數也;亦卽來本之所謂微分算

積分算術也;又卽拉果闌諸所謂函數變例也。

各 種 囪 數求微分之公法

第五款 若函數之式爲戌 = メー゙,令天變爲メ ∟ ギ,則函數之新同數必爲メビ= メヒ ∟ 依同理推之,若函數之式爲尽 = 天三,令天變爲天 _ 书,則函數之新同數爲尽' = 辛二。其初項ニモニキ 爲溢率。 キー, 其與原同數之較爲戌'T戌, 卽」ㅊキ _ キー, 此式之初項リㅊキ, 名之曰溢率。 三天⁻辛 | 三天辛⁻ | 辛⁻,其與原同數之較爲戌/T戌,卽三天⁻辛 | 三天辛⁻ | 二天平上

若函數之式爲成 = 天四,而天變爲天 _ 平,則函數之新同數與原同數之較爲日天三平 _ 六天⁻辛⁻ 」四天辛⁻ 」辛^四,**正**其頌率爲四天⁻辛。

巳辛 _ 午辛 ⁻ _ 未辛 ⁻ _ _,乃以原同數戌減之得ピキ゚ └ チャ゚ └ チャ゚ └

總言之,凡天之函數無論爲某方,恆可以뭐 L ₦ 代其天,而變其函數之同數爲뭐

.....,而取其初項ሮ贄 爲溢率。

名,本爲流數術中所用。而彳號者,卽微字之偏旁,故微分之術用之。 術中,恆以〃ㅊ 代天之溢率。其彳號者,非天之倍數,不過是天之溢率耳。 準此推之,則知天之溢率卽爲其長數辛。惟因函數之溢率每藉天之長數而生, 溢率之 故微分

各種函 一數求微分之公法

微 積

此式之意謂戌之微分等于≒ㅊ╴乘天之微分。猶言函數戌之溢率等于以≒ 言函數戌之溢率等于以りた 乘其天之溢率也。如有式戍 = チヒー,則タヒス = ニメータチ。 如有式

茂 = 天一,則 4 茂 = リ た 4 天。此式之意謂戌之微分等于リ 汚 乘天之微分。

第六款 惟因每遇戍 = 天 $^{-}$,則犭戍 = 八天犭天,所以可寫之如 4 天 = 11天。此爲天微分之

倍數,亦謂之微係數。

メ「 乘其天之溢率也。

其ニモー爲原函數戌=モー之微係數。 又依前法推之,如函數之式爲成 = 天二,則《成 = 三天二》天,而 《天 = 三夫二。

總言之, 無論何種函數之微係數,皆可以 4 天 代之。而函數之新同數爲及 L 巴爭 Lぽぽ舀數之一? (沒有44)

戌之同數爲何式,則其巳之同數卽易求得。 千辛一 L,所以 4 天 = 巴,其巳爲天之他函數,其形每隨函數之式而變。

如之

式,欲求其微分,則可先作犭[(甲 L 天)(ひ‐ T 天‐)]。 凡函數之欲求微分者,先于其式之左旁作一彳號以記之。 如有[(甲 ⊥ 天)(乙-⊤天-)]

式,欲求其微係數,則作 凡函數之欲求微係數者,于其式之左旁作彳號,又以〃ㅊ 爲其分母。如有[(w ㄴ ㅊ)(ピート ギド)] $A[(\Psi \perp \xi)(Z^{-} T \xi^{-})]$ 人天

法曰:無論天之任何函數,欲求微分,則以돈 L 艹 代其原式中之天而詳之。依辛之

從以上各款諸說,易知求微分之公法。

同數爲及',則得及' 如有式及 = 甲光 L 整方數自小而大序之,取其初有辛之項,而以 4 天 代其辛即得。 $= \Psi \mathcal{F} \perp \mathcal{C} \mathcal{F}^{-} \perp (\Psi \perp - \mathcal{C} \mathcal{F}) \hat{\mathcal{F}} \perp \mathcal{C} \hat{\mathcal{F}}^{-}$ ○天一,欲求其微係數,則以天 □ ギ 代其天, $= P(\mathcal{F} \perp \hat{F}) \perp C(\mathcal{F} \perp \hat{F})^{-1}$ 。取其初有辛之 而令函數之新

項(母 (甲 ⊥ 二乙天) $_{\perp}$ ーク天)辛,以犭夭 代其辛,卽得犭戍 $_{\parallel}$ $_{\parallel}$ ||

= 戌 \bot (甲 \bot 二 乙 天) 辛 \bot 乙 辛 $^-$