

## 微積溯源序

微積溯源八卷，前四卷爲微分術，後四卷爲積分術，乃算學中最深之事也。余既與西士 傅蘭雅譯畢代數術二十五卷，更思求其進境，故又與傅君譯此書焉。先是咸豐年間，曾有海甯李壬叔與西士 偉烈亞力譯出代微積拾級一書，流播海內。余素與壬叔相友，得讀其書，粗明微積二術之梗概。所以又譯此書者，蓋欲補其所略也。書中代數之式甚繁，校算不易，則劉君 省菴之力居多。

今刻工已竣矣，故序之，曰：吾以爲古時之算法惟有加減而已。其乘與除乃因加減之不勝其繁，故更立二術以使之簡易也。開方之法，又所以濟除法之窮者也。蓋算學中自有加減乘除開方五法，而一切淺近易明之數，無不可通矣。惟人之心思智慮日出不窮，往往以能人之所不能者爲快。遇有窒礙難通之處，輒思立法以濟其窮。故有減其所不可減而正負之名不得不立矣；除其所不能除而寄母通分之法又不得不立矣。代數中種種記號之法皆出於不得已而立者也，惟每立一法必能使繁者爲簡，難者爲易，遲者爲速，而算學之境界藉此得更進一層。如是屢進不已而所立之法於是乎日多矣。微分積分者，蓋又因乘除開

方之不勝其繁，且有窒礙難通之處，故更立此二術以濟其窮，又使簡易而速者也。試觀圓徑求周、真數求對等事，雖無微分積分之時，亦未嘗不可求，惟須乘除開方數十百次。其難有不可言喻者，不如用微積之法理明而數捷也。然則謂加減乘除開方代數之外者，更有二術焉，一曰微分，一曰積分可也。其積分術爲微分之還原，猶之開平方爲自乘之還原、除法爲乘之還原、減法爲加之還原也。然加與乘其原無不可還，而微分之原有可還有不可還，是猶算式中有不可開之方耳，又何怪焉。如必曰加減乘除開方已足供吾之用矣，何必更究其精？是舍舟車之便利而必欲負重遠行也。其用力多而成功少，蓋不待智者而辨矣。

同治十三年九月十八日，金匱華衡芳序。

# 微積溯源卷一

## 論變數與函數之變比例

第一款 用代數以解任何曲線，其中每有幾種數，其大小恒有定率者，如橢圓之長徑、拋物線之通徑、雙曲線之屬徑之類是也。

又每有幾種數可有任若干相配之同數，其大小恒不能有定率者，如曲線任一點之縱橫線是也。

數既有此兩種分別，則每種須有一總名以賅之，故名其有定之數曰常數，無定之數曰變數。

凡常數之同數不能增亦不能損。

凡變數之同數，能變爲大，亦能變爲小。故其從此同數變至彼同數之時，必歷彼此二數間最小最微之各分數。

如平圓之半徑爲常數，而其任一段之弧或弧之弦矢切割各線，及各線與弧所成之面，

皆謂之變數。

橢圓之長徑短徑皆爲常數，而其曲線之任一段或曲線上任一點之縱橫線，並其形內形外所能作之任何線或面或角，皆謂之變數。

拋物線之通徑爲常數，而其曲線之任一段或任一點之縱橫線、或弧與縱橫線所成之面，皆謂之變數。他種曲線亦然。

凡常數，恒以甲乙丙丁等字代之。凡變數，恒以天地人等字代之。

第二款 若有彼此二數皆爲變數，此數變而彼數因此數變而亦變者，則彼數爲此數之函數。

如平圓之八線皆爲弧之函數。若反求之，亦可以弧爲八線之函數。

又如重學中令物體前行之力，與其物所行之路，皆爲時刻之函數。

如有式  $\frac{\text{地} \perp \text{天}}{\text{甲} \perp \text{天}}$ ，此式中甲爲常數，天爲自主之變數，地爲天之函數。故地之同

數能以天與甲明之。

如有式  $\frac{\text{地} \perp \text{一}}{\text{甲}(\text{地} \perp \text{一})}$ ，此式中甲與一皆爲常數，地爲自主之變數，天爲地之函數，

故天之同數可以地與甲及一明之。

如有式  $\frac{\text{丙} \perp \text{天}^2}{\text{甲} \perp \sqrt{\text{乙} \text{天}}}$ ，其甲

乙丙爲常數，天爲自變之數，而戊皆爲天之函數。

凡函數之中，可以有數箇自主之變數。

如有式  $戊 = 甲天^2 + 乙天地 + 丙地^2$ ，則天與地皆爲自主之變數，戊爲天地兩變數之函數。

凡變數之函數，其形雖有多種，然每可化之，使不外乎以下數類  $天^{\frac{1}{2}}$ ， $天^{\frac{1}{3}}$ ， $天^{\frac{1}{4}}$ ， $天^{\frac{1}{5}}$  等類是也。

凡函數爲  $天^{\frac{1}{n}}$  之類，其指數爲常數，則可從天之卯方，用代數之常法化之。而以有窮之項明其函數之同數。故謂之代數函數，亦謂之常函數。

如有式  $戊 = 甲天^2 + \sqrt{\frac{甲^2 + 天^2}{乙天^2 + 丙^2}}$ ，此種函數，其戊之同數可用加減乘除開方等法而得之。

凡函數爲  $天^{\frac{1}{n}}$  之類，則其函數之同數不能以有窮之項明之。故謂之越函數。越者，超越於尋常之意也。

凡函數爲  $天^{\frac{1}{n}}$ ， $天^{\frac{1}{m}}$  及  $天^{\frac{1}{k}}$ ， $天^{\frac{1}{l}}$  之類，其函數之同數皆可以平圓之各線明之。故謂之圓函數，亦謂之角函數。以上三種函數常函數、越函數、圓函數也。，若已知天之同數，則其函數之同數即可求得。故

名此三種函數爲陽函數。因其顯而易明，故謂之陽函數。

更有他種函數，必先解其方程式，令函數中之各變數分開，然後能求其同數者。

如有式  $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{x - 1}{x + 1}$ ，其戊爲天之函數，如欲求其戊與天相配之同數，必先解其次方程式始能通。

此種之式名曰天之陰函數。因其雜糅未明，故謂之陰函數。反之亦可云天爲戊之陰函數。

如解其方程式爲  $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{x - 1}{x + 1}$ ，則戊變爲天之陰函數。

昔代數之家，凡遇須用開平方之處，每于其式之左旁作一根字以記之，如  $\sqrt{x}$  爲天之平方根。後又變通其法，而以根號記之，如  $\sqrt{x}$  爲天之平方根。此代數之例也。茲可仿照此例，凡遇某變數之函數，亦用一號以記之。所以凡有任何變數之函數，皆可書一函字于其變數之旁，以爲識別。

如天之函數則作  $\text{函}x$ ，或作  $\text{函}(x)$ ，皆言天之函數也。

所以凡見變數之左旁有一函字者，其函字并非代表天之倍數，其意謂是某變數之函數也。

用此法則可將  $\text{戊} = \text{天}^{\text{卯}}$ 、 $\text{戊} = \text{甲}^{\text{天}}$ 、 $\text{戊} = \text{對}^{\text{天}}$ 、 $\text{戊} = \text{正弦}^{\text{天}}$ 、 $\text{戊} = \text{餘弦}^{\text{天}}$  各種之式

以一語賅之，謂之 $\alpha \parallel \beta$ 或 $\alpha \parallel \beta(\alpha)$ 。

若函數從兩個變數而成，其天與地皆爲自主之變數，其式如 $\alpha = \alpha(\alpha, \beta)$ ，則可以 $\alpha \parallel \beta$ 或 $\alpha(\alpha, \beta)$ 別之。函數爲多個變數所成者，仿此推之。惟函數只指其變數言之，若甲乙丙丁各常數。雖多不論。

第三款 凡觀此書者，必先明變數與函數變比例之限。如幾何原本中證明平圓之面積必比其外

切多等邊形之面積微小，若其外切多等邊形之邊愈多，則其面積愈近于平圓之面積。所以可設平圓之面積爲任何小，而切其圓外爲多等邊形，可使多等邊形之面積與平圓之面積較其數甚小于所設之圓面積；再設其多等邊形之面積爲級數，而其邊之變率可每變多若干倍，則其多等邊形之面積必漸與平圓之面積相近而以平圓爲限。雖切于圓外之多邊形其邊任變至若何多，其面積總不能等于平圓之面積。然其級數之總數可比平圓之面積所差甚微，其較數之小，可小至莫可名言。

若用此法于圓內容多等邊形，則其多等邊形之面積亦以平圓之面積爲限。總言之，凡平圓之周爲其內容外切多等邊形之限。

如代數術第二百六十六款言，如令甲代平圓之任何弧，則

$\frac{\text{正弦甲}}{\text{甲}}$  恒小于半徑，而  $\frac{\text{正切甲}}{\text{甲}}$





意大，則各乘數可略等于 1，所以得  $\left(1 - \frac{1}{\tau}\right)^{\frac{1}{\tau}} = 1 - \frac{1}{\tau} + \frac{1 \cdot 2}{2! \tau^2} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3! \tau^3} + \dots$  ①。

曾在代數術第一百七十七款中證 ① 式之右邊爲由函數  $\tau$  而成。其  $\tau$  之同數因爲  $\tau - 1$  之同數，即納白爾對數之根也。所以卯若愈大則  $\left(1 - \frac{1}{\tau}\right)^{\frac{1}{\tau}}$  必愈與  $\tau$  相近，而其限爲  $\tau$ 。

如令  $\tau = 1$ ，則  $\left(1 - \frac{1}{\tau}\right)^{\frac{1}{\tau}}$  之限爲  $\tau$ ，即  $\left(1 - \frac{1}{\tau}\right)^{\frac{1}{\tau}} - \tau = 0$ 。故其函數爲常數。

第四款 惟因函數之同數本從變數而生，故變數之同數與函數之長數比則爲  $\frac{\tau}{\tau - 1} = \tau$ 。

辛。

設函數之式爲  $\tau = \tau$ ，今天長數爲  $\tau$ ，而以函數之新同數爲  $\tau'$ ，則

$$\tau' = (\tau - 1)^{\frac{1}{\tau}} = \tau - \frac{1}{\tau} + \frac{1 \cdot 2}{2! \tau^2} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3! \tau^3} + \dots, \quad \frac{\tau}{\tau - 1} = \tau$$

三<sup>二</sup>天<sup>二</sup>辛<sup>一</sup>辛<sup>二</sup>。可見天變爲天<sup>一</sup>辛<sup>二</sup>之時，其函數<sup>三</sup>戊<sup>一</sup>必變爲戊<sup>一</sup>三<sup>二</sup>天<sup>二</sup>辛<sup>一</sup>辛<sup>二</sup>三<sup>二</sup>天<sup>二</sup>辛<sup>一</sup>辛<sup>二</sup>，其所長之數爲三<sup>二</sup>天<sup>二</sup>辛<sup>一</sup>辛<sup>二</sup>三<sup>二</sup>天<sup>二</sup>辛<sup>一</sup>辛<sup>二</sup>。此式中之各項皆爲辛之整方與他數相乘所成。又可見變數與函數之變比例，其式爲三<sup>二</sup>天<sup>二</sup>辛<sup>一</sup>辛<sup>二</sup>三<sup>二</sup>天<sup>二</sup>辛<sup>一</sup>辛<sup>二</sup>，其初項三<sup>二</sup>天<sup>二</sup>辛<sup>一</sup>辛<sup>二</sup>與天之長數辛無相關。

設函數之式爲戊<sup>一</sup> = 天<sup>四</sup>。令天之長數爲辛，而以戊<sup>一</sup>爲函數之新同數，則戊<sup>一</sup> = 戊<sup>一</sup>三<sup>二</sup>天<sup>二</sup>辛<sup>一</sup>辛<sup>二</sup>四<sup>二</sup>天<sup>二</sup>辛<sup>一</sup>辛<sup>二</sup>六<sup>二</sup>天<sup>二</sup>辛<sup>一</sup>辛<sup>二</sup>四<sup>二</sup>天<sup>二</sup>辛<sup>一</sup>辛<sup>二</sup>，而 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}^{\text{一}} \text{丁} \text{戊}} = \text{四} \text{天}^{\text{二}} \text{辛}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{二}} \text{六} \text{天}^{\text{二}} \text{辛}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{二}} \text{四} \text{天}^{\text{二}} \text{辛}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{二}}$ 。

由此可見天若變爲天<sup>一</sup>辛<sup>二</sup>，則其各函數之新同數如左：

如戊<sup>一</sup> = 天<sup>二</sup>，則戊<sup>一</sup> = 戊<sup>一</sup>三<sup>二</sup>天<sup>二</sup>辛<sup>一</sup>辛<sup>二</sup>。如戊<sup>一</sup> = 天<sup>三</sup>，則戊<sup>一</sup> = 戊<sup>一</sup>三<sup>二</sup>天<sup>二</sup>辛<sup>一</sup>辛<sup>二</sup>三<sup>二</sup>天<sup>二</sup>辛<sup>一</sup>辛<sup>二</sup>。如戊<sup>一</sup> = 天<sup>四</sup>，則戊<sup>一</sup> = 戊<sup>一</sup>三<sup>二</sup>天<sup>二</sup>辛<sup>一</sup>辛<sup>二</sup>四<sup>二</sup>天<sup>二</sup>辛<sup>一</sup>辛<sup>二</sup>六<sup>二</sup>天<sup>二</sup>辛<sup>一</sup>辛<sup>二</sup>四<sup>二</sup>天<sup>二</sup>辛<sup>一</sup>辛<sup>二</sup>。

其餘類推。

總言之，若以卯爲天之任何整指數，而令天之長數爲辛，又以巳午未申等字挨次而代辛之各方之倍數，則函數<sup>三</sup>戊<sup>一</sup> = 天<sup>四</sup>之新同數必爲戊<sup>一</sup> = 辛<sup>一</sup>三<sup>二</sup>天<sup>二</sup>辛<sup>一</sup>辛<sup>二</sup>四<sup>二</sup>天<sup>二</sup>辛<sup>一</sup>辛<sup>二</sup>五<sup>二</sup>天<sup>二</sup>辛<sup>一</sup>辛<sup>二</sup>六<sup>二</sup>天<sup>二</sup>辛<sup>一</sup>辛<sup>二</sup>……由是知函數之新同數必爲級數，其初項戊爲函數之原同數，其餘各項爲天之長數辛之各整方，以巳午未申之類爲各倍數，其各倍數皆爲天之別種函數，其

式亦從本函數而生。

由以上各式又可見函數爲 $\text{戊} = \text{天}^{\text{二}}$ 、 $\text{戊} = \text{天}^{\text{三}}$ 、 $\text{戊} = \text{天}^{\text{四}}$ 之類，則其變數與函數之變比例必爲 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}^{\text{丁}} \text{戊}} = \text{二天}^{\text{一}} \text{辛}$ 、 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}^{\text{丁}} \text{戊}} = \text{三天}^{\text{一}} \text{一三天}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{二}}$ 、 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}^{\text{丁}} \text{戊}} = \text{四天}^{\text{一}} \text{一六天}^{\text{一}} \text{一辛}^{\text{一}} \text{一四天}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{三}}$ 之類。總之若以卯爲天之整指數，則 $\text{戊} = \text{天}^{\text{卯}}$ 之變比例必爲 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}^{\text{丁}} \text{戊}} = \text{巳} \text{一午} \text{辛}^{\text{一}} \text{一未} \text{辛}^{\text{二}} \text{一申} \text{辛}^{\text{三}} \text{一} \dots$ 。由此可見，變數天之長數與函數天之長數其變比例

數 $\text{天}^{\text{卯}}$ 之長數其變比例 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}^{\text{丁}} \text{戊}}$ 之同數 $\text{巳} \text{一午} \text{辛}^{\text{一}} \text{一未} \text{辛}^{\text{二}} \text{一申} \text{辛}^{\text{三}} \text{一} \dots$ 可分之爲兩

式，其一式爲 $\text{巳}$ ，此式與天之長數辛無相關；又一式爲 $\text{午} \text{辛}^{\text{一}} \text{一未} \text{辛}^{\text{二}} \text{一申} \text{辛}^{\text{三}} \text{一} \dots$ 。即 $\text{辛}^{\text{一}} (\text{午} \text{一未} \text{辛}^{\text{一}} \text{一申} \text{辛}^{\text{二}} \text{一} \dots)$ 。此式因以辛爲乘數，故辛若變小，其數亦必隨辛

而變小。如令辛爲任何小，則此式之數可小至甚近于○。故此數可以不計，而以巳爲變比例之限。

設有繁函數之式 $\text{戊} = \text{甲} \text{一乙} \text{天}^{\text{一}} \text{丙} \text{天}^{\text{二}}$ ，令天之長數爲辛，則天變爲 $\text{天}^{\text{一}} \text{辛}$ 之時，

其函數之同數必變爲 $\text{戊} \left\{ \begin{array}{l} = \text{甲} \text{一乙} (\text{天}^{\text{一}} \text{辛}) \text{一丙} (\text{天}^{\text{一}} \text{辛})^{\text{二}} \\ = \text{甲} \text{一乙} \text{天}^{\text{一}} \text{丙} \text{天}^{\text{二}} \text{一} (\text{乙} \text{一丙} \text{天}) \text{辛}^{\text{一}} \text{一丙} \text{辛}^{\text{二}} \end{array} \right.$ ，故

戊'丁戊 = (乙上二丙天)辛上丙辛<sup>二</sup>， $\frac{\text{三辛}}{\text{戊'丁戊}} = \text{乙上二丙天} \text{上丙辛}$ 。其乙上二丙天爲本函數變比例之限。

以此法徧試各種特設之函數，見其皆有相類之性情，所以例設如左。

例曰：命任何自主之變數爲天，而令天之任何函數等于戊，則天變爲 $\text{天} \text{上} \text{天}$ 之時，函數之新同數爲戊' = 戊上巴辛上午辛<sup>二</sup>上未辛<sup>二</sup>上……，其變數與函數之變比例爲 $\frac{\text{辛}}{\text{戊'丁戊}} = \text{巴上午辛上未辛上申辛上……}$ 。此式中之初項巴爲變比例之限，

無論何種函數，其限皆可依此比例求之。

由以上所論變數之長數與函數之長數相關之理，可于算學中開出兩種極廣大極精微之法。

其第一種爲有任何變數之任何函數而求其變數與函數變比例之限。

其第二種爲有任何變數與函數變比例之限而求其函數之原式。

此二種法，若細攷其根源，卽奈端所謂正流數、反流數也；亦卽來本之所謂微分算術、積分算術也；又卽拉果蘭諸所謂函數變例也。

## 論各種函數求微分之公法

### 第五款

若函數之式爲  $\alpha = \beta^{\gamma}$ ，令天變爲  $\alpha + \Delta\alpha$ ，則函數之新同數必爲  $\alpha' = (\alpha + \Delta\alpha)^{\gamma}$ ，其與原同數之較爲  $\Delta\alpha$ ，即  $\Delta\alpha = \alpha' - \alpha$ ，此式之初項  $\Delta\alpha$ ，名之曰溢率。依同理推之，若函數之式爲  $\alpha = \beta^{\gamma}$ ，令天變爲  $\alpha + \Delta\alpha$ ，則函數之新同數爲  $\alpha' = (\alpha + \Delta\alpha)^{\gamma}$ ，其與原同數之較爲  $\Delta\alpha$ ，即  $\Delta\alpha = \alpha' - \alpha$ ，其初項  $\Delta\alpha$  爲溢率。

若函數之式爲  $\alpha = \beta^{\gamma}$ ，而天變爲  $\alpha + \Delta\alpha$ ，則函數之新同數與原同數之較爲  $\Delta\alpha$ ，而其溢率爲  $\Delta\alpha$ 。

總言之，凡天之函數無論爲某方，恆可以  $\alpha + \Delta\alpha$  代其天，而變其函數之同數爲  $\alpha' = (\alpha + \Delta\alpha)^{\gamma}$ ，乃以原同數  $\alpha$  減之得  $\Delta\alpha = \alpha' - \alpha$ ，而取其初項  $\Delta\alpha$  爲溢率。

準此推之，則知天之溢率即爲其長數  $\alpha$ 。惟因函數之溢率每藉天之長數而生，故微分術中，恆以  $\alpha$  代天之溢率。其  $\Delta\alpha$  號者，非天之倍數，不過是天之溢率耳。溢率之名，本爲流數術中所用。而  $\Delta\alpha$  號者，即微字之偏旁，故微分之術用之。

如有式  $y = x^2$ ，則  $\frac{dy}{dx} = 2x$ 。此式之意謂  $y$  之微分等于  $2x$  乘  $x$  之微分。猶言函數  $y$  之溢率等于以  $2x$  乘其  $x$  之溢率也。如有式  $y = x^3$ ，則  $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ 。此式之意謂  $y$  之微分等于以  $3x^2$  乘  $x$  之微分。猶言函數  $y$  之溢率等于以  $3x^2$  乘其  $x$  之溢率也。

第六款 惟因每遇  $y = x^n$ ，則  $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$ ，所以可寫之如  $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$ 。此爲天微分之

倍數，亦謂之微係數。

又依前法推之，如函數之式爲  $y = x^3$ ，則  $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ ，而  $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$ 。

其  $y = x^n$  爲原函數  $y = x^n$  之微係數。

總言之，無論何種函數之微係數，皆可以  $\frac{dy}{dx}$  代之。而函數之新同數爲  $y = x^n$ ，

$y = x^{n+1}$ ，所以  $\frac{dy}{dx} = (n+1)x^n$ ，其已爲  $x$  之他函數，其形每隨函數之式而變。如之

$y = x^n$  爲何式，則其已之同數即易求得。

凡函數之欲求微分者，先于其式之左旁作一  $\frac{d}{dx}$  號以記之。如有  $(x^2)(x^3)(x^4)$  式，欲求其微分，則可先作  $\frac{d}{dx}[(x^2)(x^3)(x^4)]$ 。

$$\frac{\text{天}}{\text{天}[(\text{甲} \perp \text{天})(\text{乙} \neg \text{天})]}。$$

則以  $\frac{1}{2}k$  代其原式中之  
而以  $\frac{1}{2}k$  代其辛即得。

係數，則以 $\frac{1}{n}$ 代其天

○

故其(甲上二乙天)天，

其函數之同數爲級數，此乃十一方之項，則但能求得此比例之限，又于第六款中言

數。然則求函數之微係數與求變數與函數變比例之限，其法本無異也。

如有式  $\text{戊} = \frac{\text{天}}{\text{甲}^2}$ ，則  $\text{戊}' = \frac{\text{天} \text{上}^{\frac{1}{2}}}{\text{甲}^2}$ 。而  $\text{戊} \text{ 下} \text{戊}' = \frac{\text{天}}{\text{甲}^2} - \frac{\text{天} \text{上}^{\frac{1}{2}}}{\text{甲}^2}$ ，即  $\text{戊} \text{ 下} \text{戊}' =$

$\frac{\text{天}(\text{天} \text{上}^{\frac{1}{2}})}{\text{下} \text{甲}^2}$ ，故其變比例之式爲  $\frac{\frac{1}{2} \text{天}}{\text{戊} \text{ 下} \text{戊}'} = \frac{\text{天}(\text{天} \text{上}^{\frac{1}{2}})}{\text{下} \text{甲}^2}$ 。惟此式可不待詳爲級數而始

得其變比例之限，因可見辛愈小，則其式愈近于  $\frac{\text{天}^2}{\text{甲}^2}$ ，故此式必卽爲  $\frac{1}{2} \frac{\text{天}}{\text{戊}}$  之同數，

所以得  $\frac{1}{2} \text{戊} = \frac{\text{天}^2}{\text{甲}^2 \frac{1}{2} \text{天}}$ 。

若以戊爲任何函數之原同數，而以  $\text{天} \text{上}^{\frac{1}{2}}$  代其天，則其函數之新同數爲  $\text{戊}' = \text{戊} \text{ 下} \text{戊}' = \frac{\text{天} \text{上}^{\frac{1}{2}} \text{天}}{\text{甲}^2}$ ，即得  $\frac{\frac{1}{2} \text{天}}{\text{戊} \text{ 下} \text{戊}'} = \frac{\text{天} \text{上}^{\frac{1}{2}} \text{天}}{\text{甲}^2 \frac{1}{2} \text{天}}$ 。惟

因  $\frac{\frac{1}{2} \text{天}}{\text{戊} \text{ 下} \text{戊}'}$  之限爲  $\frac{1}{2}$ ，故得  $\frac{1}{2} \text{天} = \frac{1}{2} \text{戊}$ ，而  $\frac{1}{2} \text{戊} = \frac{1}{2} \text{天}$ 。

由此得一解曰：凡微分之術，其意專爲求任何變數與函數同時變大之限耳。

凡求任何函數之微分，不過將一尋常之代數式另用他法以變化之。因其變化之法與代數中常用之法異，則不得不另有一名以別之，故謂之微分術。

第八款 凡變數與函數變比例之限，無論以何數爲主，其形必同。



如戊爲天之函數，若天變爲 $\frac{\text{天}}{1}$  $\frac{\text{辛}}{1}$ ，則戊變爲 $\frac{\text{戊}}{1}$  $\frac{\text{巳}}{1}$  $\frac{\text{辛}}{1}$  $\frac{\text{午}}{1}$  $\frac{\text{辛}}{1}$  $\frac{\text{未}}{1}$  $\frac{\text{辛}}{1}$  $\frac{\text{申}}{1}$ ……。  
其巳、午、未各數俱爲天之他函數，從本函數所生。如令其 $\frac{\text{巳}}{1}$  $\frac{\text{辛}}{1}$  $\frac{\text{午}}{1}$  $\frac{\text{辛}}{1}$  $\frac{\text{未}}{1}$  $\frac{\text{辛}}{1}$  $\frac{\text{申}}{1}$ ……  
…… $\frac{\text{子}}{1}$ ，則天與戊同時變大之數爲辛與子。如依代數術第一百六十三款之法反求  
其級數，則得 $\frac{\text{巳}}{1}$  $\frac{\text{子}}{1}$  $\frac{\text{巳}}{1}$  $\frac{\text{子}}{1}$ ……，故其變數與函數之公比例爲 $\frac{\text{子}}{1} = \frac{\text{巳}}{1}$   
 $\frac{\text{巳}}{1}$  $\frac{\text{子}}{1}$ ……。故 $\frac{\text{子}}{1}$ 之限爲 $\frac{\text{巳}}{1}$ ，而 $\frac{\text{子}}{1}$ 之限爲 $\frac{\text{巳}}{1}$ ，此卽 $\frac{1}{1}$ 也。

第九款 由此易知，凡有相等之函數，則其微係數亦必相等。

如戌與亥爲兩函數，而戌 = 亥，其天變爲天<sub>上</sub>午之時，戌變爲亥，亥變爲戌，則戌' = 亥'，而戌'丁戌 = 亥'丁亥，故  $\frac{\text{戌}'\text{丁戌}}{\text{戌}'\text{丁亥}} = \frac{\text{亥}'\text{丁亥}}{\text{亥}'\text{丁亥}}$ 。如以巳與午各爲其變比例之限，則巳 = 午。故巳<sub>上</sub>天 = 午<sub>上</sub>天，而<sub>上</sub>戌 = <sub>上</sub>亥。

由此可見，凡函數之式無論如何改形，若其同數無異者，則其微係數必同。

如函數之原式爲 $y = a + bx + cx^2$ ，若改其形爲 $(x + \frac{a}{c})^2$ ，則此式之微係數與原式之微係數必無異。

惟此理，若反言之而謂相等之微係數必從相等之函數而生，則不盡然。

如函數之式爲 $z = a + b\theta$ ，令 $\theta$ 變爲 $\theta + \Delta\theta$ ，而 $z$ 變爲 $z + \Delta z$ ，則 $\Delta z = a + b(\theta + \Delta\theta) - (a + b\theta) = b\Delta\theta$ ，故得 $\frac{\Delta z}{\Delta\theta} = b$ 。觀此可知，其常數之項 $a$ 不能入變比例之限內，故其微係數必與 $z = a + b\theta$ 之微係數無異。惟微係數 $b$ 既能屬於本函數 $a + b\theta$ ，又能屬於他函數 $\phi$ ，所以有下例。

例曰：凡變數與常數相加減之函數，其微係數中不見其加減之常數。惟變數與常數相乘除者，則其微係數中有常數爲倍數。

## 求兩函數相乘積之微分