微積溯源序

微積溯源八卷，前四卷爲微分術，後四卷爲積分術，乃算學中最深之事也。余旣與西士傅蘭雅譯畢代數術二十五卷，更思求其進境，故又與傅君譯此書焉。先是咸豐年間，曾有海寧李壬叔與西士偉烈亞力譯出代微積拾級一書，流播海内。余素與壬叔相友，得讀其書，粗明微積二術之梗概。所以又譯此書者，蓋欲補其所略也。書中代數之式甚繁，校算不易，則劉君省菴之力居多。

今刻工已竣矣，故序之，曰：吾以爲古時之算法惟有加減而已。其乘與除乃因加減之不勝其繁，故更立二術以使之簡易也。開方之法，又所以濟除法之窮者也。蓋算學中自有加減乘除開方五法，而一切淺近易明之數，無不可通矣。惟人之心思智慮日出不窮，往往以能人之所不能者爲快。遇有窒礙難通之處，輒思立法以濟其窮。故有減其所不可減而正負之名不得不立矣；除其所不能除而寄母通分之法又不得不立矣。代數中種種記號之法皆出於不得已而立者也，惟每立一法必能使繁者爲簡，難者爲易，遲者爲速，而算學之境界藉此得更進一層。如是屢進不已而所立之法於是乎日多矣。微分積分者，蓋又因乘除開

方之不勝其繁，且有窒礙難通之處，故更立此二術以濟其窮，又使簡易而速者也。試觀圓徑求周、眞數求對等事，雖無微分積分之時，亦未嘗不可求，惟須乘除開方數十百次。其難有不可言喻者，不如用微積之法理明而數捷也。然則謂加減乘除開方代數之外者，更有二術焉，一曰微分，一曰積分可也。其積分術爲微分之還原，猶之開平方爲自乘之還原、除法爲乘之還原、減法爲加之還原也。然加與乘其原無不可還，而微分之原有可還有不可還，是猶算式中有不可開之方耳，又何怪焉。如必曰加減乘除開方已足供吾之用矣，何必更究其精？是舍舟車之便利而必欲負重遠行也。其用力多而成功少，蓋不待智者而辨矣。

同治十三年九月十八日，金匱華蘅芳序。

微積溯源卷一

論變數與函數之變比例

第一款　用代數以解任何曲線，其中每有幾種數，其大小恆有定率者，如橢圓之長徑、拋物線之通徑、雙曲線之屬徑之類是也。

又每有幾種數可有任若干相配之同數，其大小恆不能有定率者，如曲線任一點之縱橫線是也。

數旣有此兩種分別，則每種須有一總名以賅之，故名其有定之數曰常數，無定之數曰變數。

凡常數之同數不能增亦不能損。

凡變數之同數，能變爲大，亦能變爲小。故其從此同數變至彼同數之時，必歷彼此二數間最小最微之各分數。

如平圓之半徑爲常數，而其任一段之弧或弧之弦矢切割各線、及各線與弧所成之面，

皆謂之變數。

橢圓之長徑短徑皆爲常數，而其曲線之任一段或曲線上任一點之縱橫線，並其形內形外所能作之任何線或面或角，皆謂之變數。

拋物線之通徑爲常數，而其曲線之任一段或任一點之縱橫線、或弧與縱橫線所成之面，皆謂之變數。他種曲線亦然。

凡常數，恆以甲乙丙丁等字代之。凡變數，恆以天地人等字代之。

第二款　若有彼此二數皆爲變數，此數變而彼數因此數變而亦變者，則彼數爲此數之函數。

如平圓之八線皆爲弧之函數。若反求之，亦可以弧爲八線之函數。

又如重學中令物體前行之力，與其物所行之路，皆爲時刻之函數。

如有式$\text{地}=\frac{\text{甲丅天}}{\text{甲丄天}}$，此式中甲爲常數，天爲自主之變數，地爲天之函數。故地之同數能以天與甲明之。

如有式$\text{天}=\frac{\text{地丄一}}{\text{甲}(\text{地丅一})}$，此式中甲與一皆爲常數，地爲自主之變數，天爲地之函數，故天之同數可以地與甲及一明之。

如有式$\text{戊}=\text{甲丄乙天丄丙天}^{\text{二}}$或$\text{戊}=\sqrt{\text{甲}^{\text{二}}\text{丄乙天丄天}^{\text{二}}}$或$\text{戊}=\frac{\text{丙丄天}^{\text{二}}}{\text{甲丄}\sqrt{\text{乙天}}}$，其甲

乙丙爲常數，天爲自變之數，而戊皆爲天之函數。

凡函數之中，可以有數箇自主之變數。

如有式$戊 = 甲天^{二} \perp 乙天地 \perp 丙地^{二}$則天與地皆爲自主之變數，戊爲天地兩變數之函數。

凡變數之函數，其形雖有多種，然每可化之，使不外乎以下數類$天^{卯}$、$甲^{天}$、$正弦天$、$餘弦天$等類是也。

凡函數爲$天^{卯}$之類，其指數爲常數，則可從天之卯方，用代數之常法化之。而以有窮之項明其函數之同數。故謂之代數函數，亦謂之常函數。

如有式$戊 = 甲天^{三} \perp \frac{\sqrt{甲^{二} \perp 天^{二}}}{乙天^{二} \top 丙^{二}天}$，此種函數，其戊之同數可用加減乘除開方等法而得之。

凡函數爲$甲^{天}$、$對天$之類，則其函數之同數不能以有窮之項明之。故謂之越函數。越者，超越於尋常之意也。

凡函數爲$正弦天$、$餘弦天$及$正切天$、$正割天$之類，其函數之同數皆可以平圓之各線明之。故謂之圓函數，亦謂之角函數。

以上三種函數常函數、越函數、圓函數也。，若已知天之同數，則其函數之同數卽可求得。故

名此三種函數爲陽函數。因其顯而易明，故謂之陽函數。

更有他種函數，必先解其方程式，令函數中之各變數分開，然後能求其同數者。如有式$\text{戊天}=\frac{\text{戊丅天}}{\text{戊丄天}}$，其戊爲天之函數，如欲求其戊與天相配之同數，必先解其二次方程式始能通。

此種之式名曰天之陰函數。因其雜糅未明，故謂之陰函數。反之亦可云天爲戊之陰函數。

如解其方程式爲$\text{戊}=\frac{\text{二}}{\text{一}}\left[\text{天丄}\frac{\text{天}}{\text{一}}\text{丄}\frac{\text{天}}{\sqrt{\text{天}^{\text{四}}\text{丄六天}^{\text{二}}\text{丄一}}}\right]$，則戊變爲天之陽函數。

整理者註：右最後一句云戊變爲天之陰函數，這顯而易見是錯誤的。原文大英百科全書卷第九之 Fluxions 作 explicit function，即陽函數，此當爲譯者譯錯。目前由於校勘凡例未定，暫留此字，待討論後決定修改與否。

昔代數之家，凡遇須用開平方之處，每于其式之左旁作一根字以記之，如根天爲天之平方根。後又變通其法，而以根號記之，如$\sqrt{\text{天}}$爲天之平方根。此代數之例也。茲可仿照此例，凡遇某變數之函數，亦用一號以記之。所以凡有任何變數之函數，皆可書一函字于其變數之旁，以爲識別。

如天之函數則作函天，或作$\text{函}(\text{天})$，皆言天之函數也。

所以凡見變數之左旁有一函字者，其函字並非代表天之倍數，其意謂是某變數之函數

也。

用此法則可將$戌 = 天^{卯}$、$戌 = 甲^{天}$、$戌 = 對天$、$戌 = 正弦天$、$戌 = 餘弦天$ 各種之式以一語賅之，謂之$戌 = 函天$ 或$戌 = 函(天)$。

若函數從兩箇變數而成，其天與地皆爲自主之變數，其式如$戌 = 甲天^{二} \perp 乙天地 \perp 丙地^{二}$ 者，則可以$戌 = 函(天, 地)$ 別之。函數爲多箇變數所成者，仿此推之。

惟函數只指其變數言之，若甲乙丙丁各常數。雖多不論。

第三款 凡觀此書者，必先明變數與函數變比例之限。如幾何原本中證明平圓之面積必比其外切多等邊形之面積微小，若其外切多等邊形之邊愈多，則其面積愈近于平圓之面積。所以可設平圓之面積爲任何小，而切其圓外爲多等邊形，可使多等邊形之面積與平圓之面積較其數甚小于所設之圓面積；再設其多等邊形之面積爲級數，而其邊之變率可每變多若干倍，則其多等邊形之面積必漸與平圓之面積相近而以平圓爲限。雖切于圓外之多邊形其邊任變至若何多，其面積總不能等于平圓之面積。然其級數之總數可比平圓之面積所差甚微，其較數之小，可小至莫可名言。

若用此法于圓內容多等邊形，則其多等邊形之面積亦以平圓之面積爲限。

總言之，凡平圓之周爲其內容外切多等邊形之限。

如代數術第二百六十六款言，如令甲代平圓之任何弧，則$\frac{正弦甲}{甲}$恆大于半徑，而$\frac{正切甲}{甲}$恆小于半徑。然令其弧爲任何小，則其式之同數必甚近于半徑，而其所差之數可小至不能以言語形容。所以此兩數中間之數爲一。卽半徑也。故其公限亦爲一。

由此可見凡弧與弦切，三者之中取其二以相較，其比例之限必相等。

如代數術中亦會證甲弧爲$卯正切\frac{卯}{甲}$與$卯正弦\frac{卯}{甲}$兩式之限，惟其卯必爲任何大。

依代數術第五十六款之例$一丄天丄天^{二}丄天^{三}\cdots\cdots丄天^{卯丅一}$卽$\frac{一丅天}{一丅天^{卯}}$。若天變至小于一，而卯大至無窮，則$天^{卯}＝〇$，而式變爲$\frac{一丅天}{一}$。所以任取其級數若干項之和，必小于$\frac{一丅天}{一}$。惟其項愈多，則與$\frac{一丅天}{一}$愈相近，而其所差之數可小至莫可名言。則可見$\frac{一丅天}{一}$必爲其諸級數之限。

若依二項例之式$\left(一丄\frac{卯}{天}\right)^{卯}＝一丄\frac{一}{天}丄\frac{一\cdot二}{天^{二}}\left(一丄\frac{卯}{二}\right)丄\frac{一\cdot二\cdot三}{天^{三}}\left(一丄\frac{卯}{二}\right)\left(一丄\frac{卯}{三}\right)丄\cdots\cdots$，其卯之同數無論如何，必合于理。惟卯若爲大數，則其各項之

乘數$一⊥\frac{二}{卯}$、$一⊥\frac{三}{卯}$之類與一相較之差甚小，若卯愈大，則其差愈微；若令卯為任意大，則各乘數可略等于一，所以得$\left(一⊥\frac{天}{卯}\right)^{卯}＝一⊥\frac{天}{一}⊥\frac{天^{二}}{一.二}⊥\frac{天^{三}}{一.二.三}⊥$……㊙甲。

曾在代數術第一百七十七款中證㊙甲式之右邊為由函數$戊^{天}$而成。其戊之同數因為二.七一八二八一八，即訥白爾對數之根也。所以卯若愈大則$\left(一⊥\frac{天}{卯}\right)^{卯}$必愈與$戊^{天}$相近，而其限為$戊^{天}$。

如令天＝一，則$\left(一⊥\frac{天}{卯}\right)^{卯}$之限為戊，即$\left(一⊥\frac{天}{卯}\right)^{卯}$｜戊＝二.七一八二八一八，故其函數為常數。

第四款　惟因函數之同數本從變數而生，故變數之同數與函數之長數比則為$\frac{戊′丅戊}{辛}＝二天⊥辛$。

設函數之式為$戊＝天^{三}$，令天長數為辛，而以函數之新同數為戊′，則

$$\text{戊}' = (\text{天} \perp \text{辛})^{\text{三}} \begin{cases} = \text{天}^{\text{三}} \perp \text{三天}^{\text{二}}\text{辛} \perp \text{三天辛}^{\text{二}} \perp \text{辛}^{\text{三}} \\ = \text{戊} \perp \text{三天}^{\text{二}}\text{辛} \perp \text{三天辛}^{\text{二}} \perp \text{辛}^{\text{三}} \end{cases}$$

，而 $\dfrac{\text{辛}}{\text{戊}' \top \text{戊}} = \text{三天}^{\text{二}} \perp \text{三天辛} \perp \text{辛}^{\text{二}}$。可見天變爲 $\text{天} \perp \text{辛}$ 之時，其函數戊必變爲 $\text{戊} \perp \text{三天}^{\text{二}}\text{辛} \perp \text{三天辛}^{\text{二}} \perp \text{辛}^{\text{三}}$，其所長之數爲 $\text{三天}^{\text{二}}\text{辛} \perp \text{三天辛}^{\text{二}} \perp \text{辛}^{\text{三}}$。此式中之各項皆爲辛之整方與他數相乘所成。又可見變數與函數之變比例，其式爲 $\text{三天}^{\text{二}}\text{辛} \perp \text{三天辛}^{\text{二}} \perp \text{辛}^{\text{三}}$，其初項 $\text{三天}^{\text{二}}$ 與天之長數辛無相關。

設函數之式爲 $\text{戊} = \text{天}^{\text{四}}$。令天之長數爲辛，而以 $\text{戊}'$ 爲函數之新同數，則 $\text{戊}' = \text{戊} \perp \text{四天}^{\text{三}}\text{辛} \perp \text{六天}^{\text{二}}\text{辛}^{\text{二}} \perp \text{四天辛}^{\text{三}} \perp \text{辛}^{\text{四}}$，而 $\dfrac{\text{辛}}{\text{戊}' \top \text{戊}} = \text{四天}^{\text{三}} \perp \text{六天}^{\text{二}}\text{辛} \perp \text{四天辛}^{\text{二}} \perp \text{辛}^{\text{三}}$。

由此可見天若變爲 $\text{天} \perp \text{辛}$，則其各函數之新同數如左：

如 $\text{戊} = \text{天}^{\text{二}}$，則 $\text{戊}' = \text{戊} \perp \text{二天辛} \perp \text{辛}^{\text{二}}$。如 $\text{戊} = \text{天}^{\text{三}}$，則 $\text{戊}' = \text{戊} \perp \text{三天}^{\text{二}}\text{辛} \perp \text{三天辛}^{\text{二}} \perp \text{辛}^{\text{三}}$。如 $\text{戊} = \text{天}^{\text{四}}$，則 $\text{戊}' = \text{戊} \perp \text{四天}^{\text{三}}\text{辛} \perp \text{六天}^{\text{二}}\text{辛}^{\text{二}} \perp \text{四天辛}^{\text{三}} \perp \text{辛}^{\text{四}}$。其餘類推。

總言之，若以卯爲天之任何整指數，而令天之長數爲辛，又以巳午未申等字挨次而代

辛之各方之倍數，則函數戌＝天^{卯}之新同數必爲戌′＝辛丄巳辛丄午辛^{二}丄未辛^{三}丄申辛^{四}丄……。由是知函數之新同數必爲級數，其初項戌爲函數之原同數，其餘各項爲天之長數辛之各整方，以巳午未申之類爲各倍數，其各倍數皆爲天之別種函數，其式亦從本函數而生。

由以上各式又可見函數爲戌＝天^{二}、戌＝天^{三}、戌＝天^{四}之類，則其變數與函數之變比例必爲$\frac{戌'丅戌}{辛}$＝二天丄辛、$\frac{戌'丅戌}{辛}$＝三天^{二}丄三天辛丄辛^{二}、$\frac{戌'丅戌}{辛}$＝四天^{三}丄六天^{二}辛丄四天辛^{二}丄辛^{三}之類。總之若以卯爲天之整指數，則戌＝天^{卯}之變比例必爲$\frac{戌'丅戌}{辛}$＝巳丄午辛丄未辛^{二}丄申辛^{三}丄……。由此可見，變數天之長數與函數天^{卯}之長數其變比例$\frac{戌'丅戌}{辛}$之同數巳丄午辛丄未辛^{二}丄申辛^{三}丄……可分之爲兩式，其一式爲巳，此式與天之長數辛無相關；又一式爲午辛丄未辛^{二}丄申辛^{三}丄……。卽辛（午丄未辛丄申辛^{二}丄……）。此式因以辛爲乘數，故辛若變小，其數亦必隨辛而變小。如令辛爲任何小，則此式之數可小至甚近于〇。故此數可以不計，而以巳爲變比例之限。

設有繁函數之式$戊 = 甲 \perp 乙天 \perp 丙天^{二}$，令天之長數爲辛，則天變爲$天 \perp 辛$之時，其函數之同數必變爲戊$\begin{cases} = 甲 \perp 乙(天 \perp 辛) \perp 丙(天 \perp 辛)^{二} \\ = 甲 \perp 乙天 \perp 丙天^{二} \perp (乙 \perp 二丙天)辛 \perp 丙辛^{二} \end{cases}$，故$戊' 丅 戊 = (乙 \perp 二丙天)辛 \perp 丙辛^{二}$，而$\frac{辛}{戊' 丅 戊} = 乙 \perp 二丙天 \perp 丙辛$。其$乙 \perp 二丙天$爲本函數變比例之限。

以此法徧試各種特設之函數，見其皆有相類之性情，所以例設如左。

例曰：命任何自主之變數爲天，而令天之任何函數等于戊，則天變爲$天 \perp 辛$之時，函數之新同數爲$戊' = 戊 \perp 巳辛 \perp 午辛^{二} \perp 未辛^{三} \perp \cdots\cdots$，其變數與函數之變比例爲$\frac{辛}{戊' 丅 戊} = 巳 \perp 午辛 \perp 未辛^{二} \perp 申辛^{三} \perp \cdots\cdots$。此式中之初項巳爲變比例之限，無論何種函數，其限皆可依此比例求之。

由以上所論變數之長數與函數之長數相關之理，可于算學中開出兩種極廣大極精微之法。

其第一種爲有任何變數之任何函數而求其變數與函數變比例之限。

其第二種爲有任何變數與函數變比例之限而求其函數之原式。

此二種法，若細攷其根源，卽奈端所謂正流數、反流數也；亦卽來本之所謂微分算術、積分算術也；又卽拉果闌諸所謂函數變例也。

論各種函數求微分之公法

第五款　若函數之式爲$戊=天^{二}$，令天變爲$天丄辛$，則函數之新同數必爲$戊'=戊丄二天辛丄辛^{二}$，其與原同數之較爲$戊'丅戊$，卽$二天辛丄辛^{二}$，此式之初項$二天辛$，名之曰瀜率。

依同理推之，若函數之式爲$戊=天^{三}$，令天變爲$天丄辛$，則函數之新同數爲$戊'=戊丄三天^{二}辛丄三天辛^{二}丄辛^{三}$，其與原同數之較爲$戊'丅戊$，卽$三天^{二}辛丄三天辛^{二}丄辛^{三}$。其初項$三天^{二}辛$爲瀜率。

若函數之式爲$戊=天^{四}$，而天變爲$天丄辛$，則函數之新同數與原同數之較爲$四天^{三}辛丄六天^{二}辛^{二}丄四天辛^{三}丄辛^{四}$，而其瀜率爲$四天^{三}辛$。

總言之，凡天之函數無論爲某方，恆可以$天丄辛$代其天，而變其函數之同數爲$戊丄巳辛丄午辛^{二}丄未辛^{三}丄\cdots\cdots$，乃以原同數戊減之得$巳辛丄午辛^{二}丄未辛^{三}丄\cdots\cdots$，而取其初項$巳辛$爲瀜率。

準此推之，則知天之瀜率卽爲其長數辛。惟因函數之瀜率每藉天之長數而生，故微分

術中，恆以彳天代天之溢率。其彳號者，非天之倍數，不過是天之溢率耳。溢率之名，本爲流數術中所用。而彳號者，卽微字之偏旁，故微分之術用之。

如有式戊＝天^{二}，則彳戊＝二天彳天。此式之意謂戊之微分等于二天乘天之微分。猶言函數戊之溢率等于以二天乘其天之溢率也。如有式戊＝天^{三}，則彳戊＝三天^{二}彳天。此式之意謂戊之微分等于三天^{二}乘天之微分。猶言函數戊之溢率等于以三天^{二}乘其天之溢率也。

第六款　惟因每遇戊＝天^{二}，則彳戊＝二天彳天，所以可寫之如$\frac{彳天}{彳戊}$＝二天。此爲天微分之倍數，亦謂之微係數。

又依前法推之，如函數之式爲戊＝天^{三}，則彳戊＝三天^{二}彳天，而$\frac{彳天}{彳戊}$＝三天^{二}。

其三天^{二}爲原函數戊＝天^{三}之微係數。

總言之，無論何種函數之微係數，皆可以$\frac{彳天}{彳戊}$代之。而函數之新同數爲戊⊥巳辛⊥午辛^{二}⊥……，所以$\frac{彳天}{彳戊}$＝巳，其巳爲天之他函數，其形每隨函數之式而變。如之戊之同數爲何式，則其巳之同數卽易求得。

凡函數之欲求微分者，先于其式之左旁作一彳號以記之。如有$[(甲\perp天)(乙^{二}\top天^{三})]$式，欲求其微分，則可先作$彳[(甲\perp天)(乙^{二}\top天^{三})]$。

凡函數之欲求微係數者，于其式之左旁作彳號，又以$彳天$爲其分母。如有$[(甲\perp天)(乙^{二}\top天^{三})]$式，欲求其微係數，則作$\frac{彳天}{彳[(甲\perp天)(乙^{二}\top天^{三})]}$。

從以上各款諸說，易知求微分之公法。

法曰：無論天之任何函數，欲求微分，則以$天\perp辛$代其原式中之天而詳之。依辛之整方數自小而大序之，取其初有辛之項，而以$彳天$代其辛卽得。

如有式$戊=甲天\perp乙天^{二}$，欲求其微係數，則以$天\perp辛$代其天，而令函數之新同數爲$戊'$，則得$戊'\begin{cases}=甲(天\perp辛)\perp乙(天\perp辛)^{二}\\=甲天\perp乙天^{二}\perp(甲\perp二乙天)辛\perp乙辛^{二}\\=戊\perp(甲\perp二乙天)辛\perp乙辛^{二}\end{cases}$。取其初有辛之項$(甲\perp二乙天)辛$，以$彳天$代其辛，卽得$彳戊=(甲\perp二乙天)彳天$，故其$\frac{彳天}{彳戊}=甲\perp二乙天$。

第七款　上款之法，必令天變爲$天\perp辛$，而詳其函數之同數爲級數，此乃論其立法之理當如是

也。惟求得級數之後，所用者僅爲其辛一方之項，則但能求得此項已足用矣。前于第四款中言此項之倍數爲變數與函數變比例之限，又于第六款中言此項之倍數謂之微係數。然則求函數之微係數與求變數與函數變比例之限，其法本無異也。

如有式$戊=\frac{天}{甲^{二}}$，則$戊'=\frac{天丄辛}{甲^{二}}$。而$戊丅戊'=\frac{天}{甲^{二}}丅\frac{天丄辛}{甲^{二}}$，卽$戊丅戊'=\frac{天(天丄辛)}{丅甲^{二}辛}$，故其變比例之式爲$\frac{辛}{戊丅戊'}=\frac{天(天丄辛)}{丅甲^{二}}$。惟此式可不待詳爲級數而始得其變比例之限，因可見辛愈小，則其式愈近于$丅\frac{天^{二}}{甲^{二}}$，故此式必卽爲$\frac{亻天}{亻戊}$之同數，

所以得$亻戊=丅\frac{天^{二}}{甲^{二}亻天}$。

若以戊爲任何函數之原同數，而以天丄辛代其天，則其函數之新同數爲$戊'=戊丄巳辛丄午辛^{二}丄未辛^{三}丄\cdots\cdots$，卽得$\frac{辛}{戊'丅戊}=巳丄午辛丄未辛^{二}丄\cdots\cdots$。惟因$\frac{辛}{戊'丅戊}$之限爲巳，故得$\frac{亻天}{亻戊}=巳$，而$亻戊=巳亻天$。

由此得一解曰：凡微分之術，其意專爲求任何變數與函數同時變大之限耳。

凡求任何函數之微分，不過將一尋常之代數式另用他法以變化之。因其變化之法與代

數中常用之法異，則不得不另有一名以別之，故謂之微分術。

第八款　凡變數與函數變比例之限，無論以何數爲主，其形必同。

如戊爲天之函數，若天變爲天⊥辛，則戊變爲戊⊥巳辛⊥午辛^{二}⊥未辛^{三}⊥……。其巳、午、未各數俱爲天之他函數，從本函數所生。如令其巳辛⊥午辛^{二}⊥未辛^{三}⊥……＝子，則天與戊同時變大之數爲辛與子。如依代數術第一百六十三款之法反求其級數，則得辛＝$\frac{巳}{一}$子⊤$\frac{巳^{二}}{午}$子^{二}⊥……，故其變數與函數之公比例爲$\frac{子}{辛}$＝$\frac{巳}{一}$⊤$\frac{巳^{二}}{午}$子⊥……。故$\frac{子}{辛}$之限爲$\frac{巳}{一}$，而$\frac{辛}{子}$之限爲巳，此即$\frac{一}{巳}$也。

第九款　由此易知，凡有相等之函數，則其微係數亦必相等。

如戊與亥爲兩函數，而戊＝亥，其天變爲天⊥辛之時，戊變爲戊′，亥變爲亥′，則戊′＝亥′，而戊′⊤戊＝亥′⊤亥，故$\frac{辛}{戊'⊤戊}$＝$\frac{辛}{亥'⊤亥}$。如以巳與午各爲其變比例之限，則巳＝午。故巳彳天＝午彳天，而彳戊＝彳亥。

由此可見，凡函數之式無論如何改形，若其同數無異者，則其微係數必同。

如函數之原式爲天^{三}⊥甲^{三}，若改其形爲(天⊥甲)(天^{二}⊤甲天⊥甲^{二})，則此式之微係

數與原式之微係數必無異。

惟此理，若反言之而謂相等之微係數必從相等之函數而生，則不盡然。如函數之式爲戊＝甲⊥乙天，令天變爲天⊥辛，而戊變爲戊′，則戊′＝甲⊥乙天⊥乙辛＝戊⊥乙辛，故得$\frac{辛}{戊'丁戊}$＝乙。觀此可知，其常數之項甲不能入變比例之限內，故其微係數必與戊＝乙天之微係數無異。惟微係數乙既能屬於本函數甲⊥乙天，又能屬於他函數乙天，所以有下例。

例曰：凡變數與常數相加減之函數，其微係數中不見其加減之常數。惟變數與常數相乘除者，則其微係數中有常數爲倍數。

求兩函數相乘積之微分

第十款　凡變數之函數，無論其形如何，皆可以第六款之公法求其微分。然不如每種異形之函數各設一專法以求之，則更簡捷。

如有式戊＝未申，其未與申各爲天之函數。今欲得一法專能求未、申相乘積之微分，若令天變爲天⊥辛，則未、申二函數必變爲未′＝未⊥巳辛⊥午辛^{二}⊥……、申′＝

$申 \perp 巳'辛 \perp 午'辛^{二} \perp \cdots\cdots$，其巳、午爲由未函數所得之天之他函數∴其$巳'$、$午'$爲由申函數所得之天之他函數。

再令$戌' = 未'申'$，則依法得$戌' = 未'申' = 未申 \perp (未巳' \perp 申巳)辛 \perp (未午' \perp 巳巳' \perp 申午)辛^{二} \perp \cdots\cdots$。以戌代其未申，移項而以辛約之，則得$\dfrac{辛}{戌' \top 戌} = 未巳' \perp 申巳 \perp (未午' \perp 巳巳' \perp 申午)辛 \perp \cdots\cdots$。此式中之$未巳'$與申巳兩項乃天之他函數，而與辛無涉者，其餘各項俱有辛之各方爲乘數。設辛爲甚微，則其所乘之衆項亦甚微，故其變比例之限爲$\dfrac{辛}{戌' \top 戌} = 未巳' \perp 申巳$。惟因$巳 = \dfrac{辛}{未' \top 未}$、$巳' = \dfrac{辛}{申' \top 申}$，故可依第六款之法以$\dfrac{彳天}{彳戌}$代其$\dfrac{辛}{戌' \top 戌}$∴以$\dfrac{彳天}{彳未}$代其$\dfrac{辛}{未' \top 未}$∴以$\dfrac{彳天}{彳申}$代其$\dfrac{辛}{申' \top 申}$。則得$\dfrac{彳天}{彳戌} = 未\dfrac{彳天}{彳申} \perp 申\dfrac{彳天}{彳未}$，而$彳戌 = 未彳申 \perp 申彳未$。故得專法如左：

凡求同變彼此兩函數相乘積之微分，法將此函數乘彼函數之微分，又將彼函數乘此函數之微分，而以乘得之兩式相加卽得。

求多函數連乘積之微分

第十一款　前款論函數之式爲戌＝未申，則彳戌＝未彳申⊥申彳未，所以$\frac{彳戌}{戌}=\frac{彳未}{未}⊥\frac{彳申}{申}$。

由此推之，如戌爲三箇同變數之函數連乘如未酉亥，可令其申＝酉亥，則亦能爲戌＝未申而$\frac{彳戌}{戌}=\frac{彳未}{未}⊥\frac{彳申}{申}$。惟因申＝酉亥，可依同例得$\frac{彳申}{申}=\frac{彳酉}{酉}⊥\frac{彳亥}{亥}$，所以$\frac{彳戌}{戌}=\frac{彳未}{未}⊥\frac{彳酉}{酉}⊥\frac{彳亥}{亥}$。若仍將未申代還其戌而以常法化之，則爲彳戌＝酉亥彳未⊥未亥彳酉⊥未酉彳亥。故得專法如左：

凡求同變數之若干函數連乘積之微分，法以各本函數之微分與其餘之各他函數連乘，而以各乘得之式相加即得。

此法易用以總式以明之。無論其同變數之函數有若干數連乘，皆可以一例推之：

如多函數連乘之式爲未申酉亥，則其微分之式爲彳（未申酉亥）＝未申酉亥$\left[\frac{彳未}{未}⊥\frac{彳申}{申}⊥\frac{彳酉}{酉}⊥\frac{彳亥}{亥}\right]$。

求變數之分函數微分

第十二款　若有分數之式，其母子爲同變數之各函數，則欲得其求微分之專法，可令$\text{戌} = \frac{\text{申}}{\text{未}}$，則$\text{未} = \text{戌申}$，而$\text{彳未} = \text{戌彳申} \perp \text{申彳戌}$。乃以其戌之同數$\frac{\text{申}}{\text{未}}$代其戌，則$\text{彳未} = \frac{\text{申}}{\text{未彳申}} \perp \text{申彳戌}$，而$\text{彳戌} = \frac{\text{申}^{二}}{\text{申彳未} \top \text{未彳申}}$。故得專法如左：

凡同變量之函數，若爲分數，則求微分之法可將分母乘其分子之微分，乃以分子乘分母之微分減之，而以分母之平方約之。

此法亦可用一總式以明之。

惟因$\text{戌} = \frac{\text{申}}{\text{未}}$之微分爲$\frac{\text{戌}}{\text{彳戌}} = \frac{\text{未}}{\text{彳未}} \top \frac{\text{申}}{\text{彳申}}$，所以$\text{戌} = \frac{\text{亥地}}{\text{未申酉}}$之微分爲$\frac{\text{戌}}{\text{彳戌}} = \frac{\text{未}}{\text{彳未}} \perp \frac{\text{申}}{\text{彳申}} \perp \frac{\text{酉}}{\text{彳酉}} \top \frac{\text{亥}}{\text{彳亥}} \top \frac{\text{地}}{\text{彳地}}$。由此推之，則$\text{戌} = \frac{\text{亥地}}{\text{未申酉}}$之微分當爲$\frac{\text{戌}}{\text{彳戌}} = \frac{\text{未申酉}}{\text{彳(未申酉)}} \top \frac{\text{亥地}}{\text{彳(亥地)}}$。又依第十一款之例，其$\frac{\text{未申酉}}{\text{彳(未申酉)}} = \frac{\text{未}}{\text{彳未}} \perp \frac{\text{申}}{\text{彳申}} \perp \frac{\text{酉}}{\text{彳酉}}$，

而$\frac{亥地}{亻(亥地)} = \frac{亥}{亻亥} \perp \frac{地}{亻地}$，故得$\frac{戌}{亻戌} = \frac{未}{亻未} \perp \frac{申}{亻申} \perp \frac{酉}{亻酉} \top \frac{亥}{亻亥} \top \frac{地}{亻地}$。由是知若有分數之函數，其分母分子爲任若干同變數之函數連乘之積如$\frac{亥地}{未申酉}$者，可以$亻\left(\frac{亥地}{未申酉}\right) = \frac{亥地}{未申酉}\left[\frac{未}{亻未} \perp \frac{申}{亻申} \perp \frac{酉}{亻酉} \top \frac{亥}{亻亥} \top \frac{地}{亻地}\right]$之式明之。

第十三款　兹欲攷任何函數地之任何乘方求微分之專法。其地或爲自變之數，或爲他變之函數，皆可。

先設$戌 = 地^{卯}$，其卯爲任何整數，則其函數之詳式必有卯箇地連乘如$戌 = 地 \cdot 地 \cdot 地 \cdot 地 \cdots\cdots$。則依第十一款之例，$\frac{戌}{亻戌} = \frac{地}{亻地} \perp \frac{地}{亻地} \perp \frac{地}{亻地} \perp \cdots\cdots$，其項必有卯數。

故$\frac{戌}{亻戌} = \frac{地}{卯亻地}$，而得$亻戌 = \frac{地}{卯亻地}戌 = 卯地^{卯\top一}亻地$。

設函數爲分指數如$戌 = 地^{\frac{卯}{寅}}$，則$戌^{卯} = 地^{寅}$。若依第九款之例，則得$卯戌^{卯\top一}亻戌 = 寅地^{寅\top一}亻地$，而$亻戌 = \frac{卯}{寅} \times \frac{戌^{卯\top一}}{地^{寅\top一}}亻地$。惟因$戌 = 地^{\frac{卯}{寅}}$、$戌^{卯\top一} = 地^{寅\top\frac{卯}{寅}}$，所以$\frac{戌^{卯\top一}}{地^{寅\top一}} = 地^{\frac{卯}{寅}\top一}$，而$亻戌 = \frac{卯}{寅}地^{\frac{卯}{寅}\top一}亻地$。

再設卯爲負指數，無論爲整數爲分數，則$戊 = 地^{丅卯}$，即$戊 = \frac{地^{卯}}{一}$。若依第十二款之例，因其分子爲常數，故其分子之微分當爲〇，而得$彳戊 = 丅\frac{地^{二卯}}{卯地^{卯丅一}彳地}$，即$彳戊 = 丅卯地^{丅卯丅一}彳地$。

合觀本款之各式，可見地之指數卯無論爲正爲負爲整爲分，其微分之式必爲$彳\left(地^{卯}\right) = 卯地^{卯丅一}彳地$。故得專法如左：

凡求函數乘方之微分，法將其原指數以一減之爲新指數，而以原指數爲其倍數，又以變數之微分乘之卽得。惟其原函數若本有常數爲倍數者，則其原倍數必仍在乘數之中。

如函數之式爲$戊 = 甲天^{卯}$，則其微分之式爲$彳\left(甲天^{卯}\right) = 卯甲天^{卯丅一}彳天$。

求函數諸乘方之微分更有簡便之法，可藉代數術第一百六十款與一百六十一款之二項例而得。所以于此不論者，因二項之例亦可由微分而得，余欲用微分之術證明二項之例以便于用，故俟後詳論之。

求變數平方根之微分

用前法已能求各負方之微分，惟因$\sqrt{地}=地^{\frac{一}{二}}$爲微分術中常見之式，所以必更設一最易之專法以便于用。

依本款求諸乘方微分之法，$彳\left(地^{\frac{一}{二}}\right)=\frac{一}{二}地^{\frac{一}{二}\top一}彳地$，即$彳\left(地^{\frac{一}{二}}\right)=\frac{一}{二}地^{\top\frac{一}{二}}彳地$，即$彳\left(\sqrt{地}\right)=\frac{彳地}{二\sqrt{地}}$。所以得專法如左：

凡求函數平方根之微分，法以函數之微分爲實而二倍其原函數之平方根以約之即得。

求重函數之微分

第十四款　設有地爲天之函數而戊爲地之函數，欲求其戊與天相配之微分。

令天變其同數爲$天\perp辛$，則地變爲$地'=地\perp巳辛\perp午辛^{二}\perp未辛^{三}\perp\cdots\cdots$。乃令$巳辛\perp午辛^{二}\perp未辛^{三}\perp\cdots\cdots=子$，則地變爲$地\perp子$。惟因戊爲地之函數，若地變爲$地\perp子$，則戊變爲$戊'=戊\perp巳'子\perp午'子^{二}\perp未'子^{三}\perp\cdots\cdots$。其$巳'午'未'$各數爲地之他函數，

與子及辛皆無相關。所以于此級數中，以子之同數 $\text{巳辛}\perp\text{午辛}^{二}\perp\cdots\cdots$ 代之，則天變為 $\text{天}\perp\text{辛}$ 之時，其戊之同數必變為 $\text{戊}'=\text{戊}\perp\text{巳}'\text{巳辛}\perp(\text{巳}'\text{午}\perp\text{午}'\text{巳}^{二})\,\text{辛}^{二}\perp\cdots\cdots$。所以得 $\dfrac{\text{辛}}{\text{戊}\top\text{戊}'}=\text{巳}'\text{巳}\perp(\text{巳}'\text{午}\perp\text{午}'\text{巳}^{二})\,\text{辛}\perp\cdots\cdots$。如令辛為甚小，則其限必為 $\dfrac{\text{辛}}{\text{戊}\top\text{戊}'}=\text{巳}'\text{巳}$。惟因地為天之函數，故 $\text{巳}=\dfrac{\text{彳天}}{\text{彳地}}$。又因戊為地之函數，故 $\text{巳}=\dfrac{\text{彳地}}{\text{彳戊}}$。整理者註：上巳當為巳′。 如知戊亦可為天之函數，則 $\dfrac{\text{彳天}}{\text{彳戊}}=\dfrac{\text{辛}}{\text{戊}\top\text{戊}'}=\text{巳}'\text{巳}$。由此可見，$\dfrac{\text{彳天}}{\text{彳戊}}=\dfrac{\text{彳地}}{\text{彳戊}}\times\dfrac{\text{彳天}}{\text{彳地}}$，而 $\text{彳戊}=\left(\dfrac{\text{彳地}}{\text{彳戊}}\times\dfrac{\text{彳天}}{\text{彳地}}\right)\text{彳天}$。故得專法如左：

凡有地為天之函數、戊為地之函數而欲求其微分者，法先以戊專為地之函數而求其微係數，又以地專為天之函數而求其微係數，乃將兩微係數相乘，又以天之微分乘之卽為戊之微分。

已知 $\dfrac{\text{彳地}}{\text{彳戊}}\times\dfrac{\text{彳天}}{\text{彳地}}=\dfrac{\text{彳天}}{\text{彳戊}}$，如令 $\text{戊}=\text{天}$，則變其式為 $\dfrac{\text{彳地}}{\text{彳戊}}\times\dfrac{\text{彳天}}{\text{彳地}}=\dfrac{\text{彳天}}{\text{彳天}}=一$，所以可作 $\dfrac{\text{彳地}}{\text{彳天}}=\dfrac{一}{\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}}$。由是知：凡以天為地之函數與以地為天之函數，其兩微係數必可互為倒數。以法為實，以實為法，謂之倒數。 此例可由第八款得之。