微積溯源序

微積溯源八卷，前四卷爲微分術，後四卷爲積分術，乃算學中最深之事也。余既與西士傅蘭雅譯畢代數術二十五卷，更思求其進境，故又與傅君譯此書焉。先是咸豐年間，曾有海甯李壬叔與西士偉烈亞力譯出代微積拾級一書，流播海内。余素與壬叔相友，得讀其書，粗明微積二術之梗概。所以又譯此書者，蓋欲補其所略也。書中代數之式甚繁，校算不易，則劉君省菴之力居多。

今刻工已竣矣，故序之，曰：吾以爲古時之算法惟有加減而已。其乘與除乃因加減之不勝其繁，故更立二術以使之簡易也。開方之法，又所以濟除法之窮者也。蓋算學中自有加減乘除開方五法，而一切淺近易明之數，無不可通矣。惟人之心思智慮日出不窮，往往以能人之所不能者爲快。遇有窒礙難通之處，輒思立法以濟其窮。故有減其所不可減而正負之名不得不立矣；除其所不能除而寄母通分之法又不得不立矣。代數中種種記號之法皆出於不得已而立者也，惟每立一法必能使繁者爲簡，難者爲易，遲者爲速，而算學之境界藉此得更進一層。如是屢進不已而所立之法於是乎日多矣。微分積分者，蓋又因乘除開

方之不勝其繁，且有窒礙難通之處，故更立此二術以濟其窮，又使簡易而速者也。試觀圓徑求周、真數求對等事，雖無微分積分之時，亦未嘗不可求，惟須乘除開方數十百次。其難有不可言喻者，不如用微積之法理明而數捷也。然則謂加減乘除開方代數之外者，更有二術焉，一曰微分，一曰積分可也。其積分術爲微分之還原，猶之開平方爲自乘之還原、除法爲乘之還原、減法爲加之還原也。然加與乘其原無不可還，而微分之原有可還有不可還，是猶算式中有不可開之方耳，又何怪焉。如必曰加減乘除開方已足供吾之用矣，何必更究其精？是舍舟車之便利而必欲負重遠行也。其用力多而成功少，蓋不待智者而辨矣。

同治十三年九月十八日，金匱華蘅芳序。

微積溯源卷一

論變數與函數之變比例

第一款 用代數以解任何曲線，其中每有幾種數，其大小恆有定率者，如橢圓之長徑、拋物線之通徑、雙曲線之屬徑之類是也。

又每有幾種數可有任若干相配之同數，其大小恆不能有定率者，如曲線任一點之縱橫線是也。

數既有此兩種分別，則每種須有一總名以賅之，故名其有定之數曰常數，無定之數曰變數。

凡常數之同數不能增亦不能損。

凡變數之同數，能變爲大，亦能變爲小。故其從此同數變至彼同數之時，必歷彼此二數間最小最微之各分數。

如平圓之半徑爲常數，而其任一段之弧或弧之弦矢切割各線、及各線與弧所成之面，

皆謂之變數。

橢圓之長徑短徑皆爲常數，而其曲線之任一段或曲線上任一點之縱橫線，並其形内形外所能作之任何線或面或角，皆謂之變數。

拋物線之通徑爲常數，而其曲線之任一段或任一點之縱橫線、或弧與縱橫線所成之面，皆謂之變數。他種曲線亦然。

凡常數，恆以甲乙丙丁等字代之。凡變數，恆以天地人等字代之。

第二款　若有彼此二數皆爲變數，此數變而彼數因此數變而亦變者，則彼數爲此數之函數。

如平圓之八線皆爲弧之函數。若反求之，亦可以弧爲八線之函數。

又如重學中令物體前行之力，與其物所行之路，皆爲時刻之函數。

如有式$地=\frac{甲\top天}{甲\perp天}$，此式中甲爲常數，天爲自主之變數，地爲天之函數。故地之同數能以天與甲明之。

如有式$天=\frac{地\perp一}{甲(地\top一)}$，此式中甲與一皆爲常數，地爲自主之變數，天爲地之函數，故天之同數可以地與甲及一明之。

如有式$戊=甲\perp乙天\perp丙天^{二}$或$戊=\sqrt{甲^{二}\perp乙天\perp天^{二}}$或$戊=\frac{丙\perp天^{二}}{甲\perp\sqrt{乙天}}$，其甲

乙丙爲常數，天爲自變之數，而戊皆爲天之函數。

凡函數之中，可以有數箇自主之變數。

如有式$戊 = 甲天^{二} \perp 乙天地 \perp 丙地^{二}$ 則天與地皆爲自主之變數，戊爲天地兩變數之函數。

凡變數之函數，其形雖有多種，然每可化之，使不外乎以下數類$天^{卯}$、$甲^{天}$、正弦天、餘弦天 等類是也。

凡函數爲$天^{卯}$之類，其指數爲常數，則可從天之卯方，用代數之常法化之。而以有窮之項明其函數之同數。故謂之代數函數，亦謂之常函數。

如有式$戊 = 甲天^{三} \perp \frac{\sqrt{甲^{二} \perp 天^{二}}}{乙天^{二} \top 丙^{二}天}$，此種函數，其戊之同數可用加減乘除開方等法而得之。

凡函數爲$甲^{天}$、對天之類，則其函數之同數不能以有窮之項明之。故謂之越函數。越者，超越於尋常之意也。

凡函數爲正弦天、餘弦天及正切天、正割天之類，其函數之同數皆可以平圓之各線明之。故謂之圓函數，亦謂之角函數。

以上三種函數常函數、越函數、圓函數也。，若已知天之同數，則其函數之同數卽可求得。故

名此三種函數爲陽函數。因其顯而易明，故謂之陽函數。

更有他種函數，必先解其方程式，令函數中之各變數分開，然後能求其同數者。

如有式$戊天 = \frac{戊丅天}{戊丄天}$，其戊爲天之函數，如欲求其戊與天相配之同數，必先解其二次方程式始能通。

此種之式名曰天之陰函數。因其雜糅未明，故謂之陰函數。反之亦可云天爲戊之陰函數。

如解其方程式爲$戊 = \frac{二}{一}\left[天丄\frac{天二}{一}丄\frac{天}{\sqrt{天^{四}丄六天^{二}丄一}}\right]$，則戊變爲天之陰函數。

整理者註：右最後一句云戊變爲天之陰函數，這顯而易見是錯誤的。原文大英百科全書卷第九之 Fluxions 作 explicit function，卽陽函數，此當爲譯者譯錯。目前由於校勘凡例未定，暫留此字，待討論後決定修改與否。

昔代數之家，凡遇須用開平方之處，每于其式之左旁作一根字以記之，如根天爲天之平方根。後又變通其法，而以根號記之，如$\sqrt{天}$爲天之平方根。此代數之例也。茲可仿照此例，凡遇某變數之函數，亦用一號以記之。所以凡有任何變數之函數，皆可書一函字于其變數之旁，以爲識別。

如天之函數則作函天，或作函(天)，皆言天之函數也。

所以凡見變數之左旁有一函字者，其函字並非代表天之倍數，其意謂是某變數之函數

也。

用此法則可將戊＝天^{卯}、戊＝甲^{天}、戊＝對天、戊＝正弦天、戊＝餘弦天 各種之式以一語賅之，謂之戊＝函天 或戊＝函(天)。

若函數從兩箇變數而成，其天與地皆爲自主之變數，其式如戊＝甲天^{二}⊥乙天地⊥丙地^{二} 者，則可以戊＝函(天,地) 別之。函數爲多箇變數所成者，仿此推之。

惟函數只指其變數言之，若甲乙丙丁各常數。雖多不論。

第三款 凡觀此書者，必先明變數與函數變比例之限。如幾何原本中證明平圓之面積必比其外切多等邊形之面積微小，若其外切多等邊形之邊愈多，則其面積愈近于平圓之面積。所以可設平圓之面積爲任何小，而切其圓外爲多等邊形，可使多等邊形之面積與平圓之面積較其數甚小于所設之圓面積；再設其多等邊形之面積爲級數，而其邊之變率可每變多若干倍，則其多等邊形之面積必漸與平圓之面積相近而以平圓爲限。雖切于圓外之多邊形其邊任變至若何多，其面積總不能等于平圓之面積。然其級數之總數可比平圓之面積所差甚微，其較數之小，可小至莫可名言。

若用此法于圓內容多等邊形，則其多等邊形之面積亦以平圓之面積爲限。

總言之，凡平圓之周爲其內容外切多等邊形之限。

如代數術第二百六十六款言，如令甲代平圓之任何弧，則 $\frac{\text{正弦甲}}{\text{甲}}$ 恆大于半徑，而 $\frac{\text{正切甲}}{\text{甲}}$ 恆小于半徑。然令其弧爲任何小，則其式之同數必甚近于半徑，而其所差之數可小至不能以言語形容。所以此兩數中間之數爲一。即半徑也。故其公限亦爲一。

由此可見凡弧與弦切，三者之中取其二以相較，其比例之限必相等。

如代數術中亦會證甲弧爲 卯 正切 $\frac{\text{卯}}{\text{甲}}$ 與 卯 正弦 $\frac{\text{卯}}{\text{甲}}$ 兩式之限，惟其卯必爲任何大。

依代數術第五十六款之例 $\text{一}\perp\text{天}\perp\text{天}^{\text{二}}\perp\text{天}^{\text{三}}\cdots\cdots\perp\text{天}^{\text{卯}\top\text{一}}$ 即 $\frac{\text{一}\top\text{天}}{\text{一}\top\text{天}^{\text{卯}}}$。若天變至小于一，而卯大至無窮，則 $\text{天}^{\text{卯}}=\bigcirc$，而式變爲 $\frac{\text{一}\top\text{天}}{\text{一}}$。所以任取其級數若干項之和，必小于 $\frac{\text{一}\top\text{天}}{\text{一}}$。惟其項愈多，則與 $\frac{\text{一}\top\text{天}}{\text{一}}$ 愈相近，而其所差之數可小至莫可名言。

則可見 $\frac{\text{一}\top\text{天}}{\text{一}}$ 必爲其諸級數之限。

若依二項例之式 $\left(\text{一}\perp\frac{\text{卯}}{\text{天}}\right)^{\text{卯}}=\text{一}\perp\frac{\text{一}}{\text{天}}\perp\frac{\text{一}\cdot\text{二}}{\text{天}^{\text{二}}}\left(\text{一}\perp\frac{\text{卯}}{\text{一}}\right)\perp\frac{\text{一}\cdot\text{二}\cdot\text{三}}{\text{天}^{\text{三}}}\left(\text{一}\perp\frac{\text{卯}}{\text{一}}\right)\left(\text{一}\perp\frac{\text{卯}}{\text{二}}\right)\perp\cdots\cdots$，其卯之同數無論如何，必合于理。惟卯若爲大數，則其各項之

乘數$一\perp\frac{二}{卯}$、$一\perp\frac{三}{卯}$之類與一相較之差甚小，若卯愈大，則其差愈微；若令卯爲任意大，則各乘數可略等于一，所以得$\left(一\perp\frac{天}{卯}\right)^{卯}=一\perp\frac{天}{一}\perp\frac{天^{二}}{一.二}\perp\frac{天^{三}}{一.二.三}\perp$……㊙甲。

曾在代數術第一百七十七款中證㊙甲式之右邊爲由函數$戊^{天}$而成。其戊之同數因爲二.七一八二八一八，即訥白爾對數之根也。所以卯若愈大則$\left(一\perp\frac{天}{卯}\right)^{卯}$必愈與$戊^{天}$相近，而其限爲$戊^{天}$。

如令天＝一，則$\left(一\perp\frac{天}{卯}\right)^{卯}$之限爲戊，即$\left(一\perp\frac{天}{卯}\right)^{卯}\mid 戊=二.七一八二八一八$，故其函數爲常數。

第四款　惟因函數之同數本從變數而生，故變數之同數與函數之長數比則爲$\frac{戊'\,丅\,戊}{辛}=二天\perp辛$。

設函數之式爲$戊=天^{三}$，令天長數爲辛，而以函數之新同數爲$戊'$則

$$\text{戊}' = (\text{天} \perp \text{辛})^{\text{三}} \begin{cases} = \text{天}^{\text{三}} \perp \text{三天}^{\text{二}}\text{辛} \perp \text{三天辛}^{\text{二}} \perp \text{辛}^{\text{三}} \\ = \text{戊} \perp \text{三天}^{\text{二}}\text{辛} \perp \text{三天辛}^{\text{二}} \perp \text{辛}^{\text{三}} \end{cases}$$

，而$\dfrac{\text{辛}}{\text{戊}' \top \text{戊}} = \text{三天}^{\text{二}} \perp \text{三天辛} \perp \text{辛}^{\text{二}}$。可見天變爲$\text{天} \perp \text{辛}$之時，其函數戊必變爲$\text{戊} \perp \text{三天}^{\text{二}}\text{辛} \perp \text{三天辛}^{\text{二}} \perp \text{辛}^{\text{三}}$，其所長之數爲$\text{三天}^{\text{二}}\text{辛} \perp \text{三天辛}^{\text{二}} \perp \text{辛}^{\text{三}}$。此式中之各項皆爲辛之整方與他數相乘所成。又可見變數與函數之變比例，其式爲$\text{三天}^{\text{二}}\text{辛} \perp \text{三天辛}^{\text{二}} \perp \text{辛}^{\text{三}}$，其初項$\text{三天}^{\text{二}}$與天之長數辛無相關。

設函數之式爲$\text{戊} = \text{天}^{\text{四}}$。令天之長數爲辛，而以$\text{戊}'$爲函數之新同數，則$\text{戊}' = \text{戊} \perp \text{四天}^{\text{三}}\text{辛} \perp \text{六天}^{\text{二}}\text{辛}^{\text{二}} \perp \text{四天辛}^{\text{三}} \perp \text{辛}^{\text{四}}$，而$\dfrac{\text{辛}}{\text{戊}' \top \text{戊}} = \text{四天}^{\text{三}} \perp \text{六天}^{\text{二}}\text{辛} \perp \text{四天辛}^{\text{二}} \perp \text{辛}^{\text{三}}$。

由此可見天若變爲$\text{天} \perp \text{辛}$，則其各函數之新同數如左：

如$\text{戊} = \text{天}^{\text{二}}$，則$\text{戊}' = \text{戊} \perp \text{二天辛} \perp \text{辛}^{\text{二}}$。如$\text{戊} = \text{天}^{\text{三}}$，則$\text{戊}' = \text{戊} \perp \text{三天}^{\text{二}}\text{辛} \perp \text{三天辛}^{\text{二}} \perp \text{辛}^{\text{三}}$。如$\text{戊} = \text{天}^{\text{四}}$，則$\text{戊}' = \text{戊} \perp \text{四天}^{\text{三}}\text{辛} \perp \text{六天}^{\text{二}}\text{辛}^{\text{二}} \perp \text{四天辛}^{\text{三}} \perp \text{辛}^{\text{四}}$。其餘類推。

總言之，若以卯爲天之任何整指數，而令天之長數爲辛，又以巳午未申等字挨次而代

辛之各方之倍數，則函數$\text{戊}=\text{天}^{\text{卯}}$之新同數必爲$\text{戊}'=\text{辛}\perp\text{巳辛}\perp\text{午辛}^{\text{二}}\perp\text{未辛}^{\text{三}}\perp\text{申辛}^{\text{四}}\perp\cdots\cdots$。由是知函數之新同數必爲級數，其初項戊爲函數之原同數，其餘各項爲天之長數辛之各整方，以巳午未申之類爲各倍數，其各倍數皆爲天之別種函數，其式亦從本函數而生。

由以上各式又可見函數爲$\text{戊}=\text{天}^{\text{二}}$、$\text{戊}=\text{天}^{\text{三}}$、$\text{戊}=\text{天}^{\text{四}}$之類，則其變數與函數之變比例必爲$\frac{\text{辛}}{\text{戊}'\top\text{戊}}=\text{二天}\perp\text{辛}$、$\frac{\text{辛}}{\text{戊}'\top\text{戊}}=\text{三天}^{\text{二}}\perp\text{三天辛}\perp\text{辛}^{\text{二}}$、$\frac{\text{辛}}{\text{戊}'\top\text{戊}}=\text{四天}^{\text{三}}\perp\text{六天}^{\text{二}}\text{辛}\perp\text{四天辛}^{\text{二}}\perp\text{辛}^{\text{三}}$之類。總之若以卯爲天之整指數，則$\text{戊}=\text{天}^{\text{卯}}$之變比例必爲$\frac{\text{辛}}{\text{戊}'\top\text{戊}}=\text{巳}\perp\text{午辛}\perp\text{未辛}^{\text{二}}\perp\text{申辛}^{\text{三}}\perp\cdots\cdots$。由此可見，變數天之長數與函數$\text{天}^{\text{卯}}$之長數其變比例$\frac{\text{辛}}{\text{戊}'\top\text{戊}}$之同數$\text{巳}\perp\text{午辛}\perp\text{未辛}^{\text{二}}\perp\text{申辛}^{\text{三}}\perp\cdots\cdots$可分之爲兩式，其一式爲巳，此式與天之長數辛無相關；又一式爲$\text{午辛}\perp\text{未辛}^{\text{二}}\perp\text{申辛}^{\text{三}}\perp\cdots\cdots$。即$\text{辛}\left(\text{午}\perp\text{未辛}\perp\text{申辛}^{\text{二}}\perp\cdots\cdots\right)$。此式因以辛爲乘數，故辛若變小，其數亦必隨辛而變小。如令辛爲任何小，則此式之數可小至甚近于〇。故此數可以不計，而以巳爲變比例之限。

設有繁函數之式戌 ＝ 甲 ⊥ 乙天 ⊥ 丙天^{二}，令天之長數爲辛，則天變爲天 ⊥ 辛 之時，其函數之同數必變爲戌$\left\{\begin{array}{l}＝ 甲 ⊥ 乙(天 ⊥ 辛) ⊥ 丙(天 ⊥ 辛)^{二} \\ ＝ 甲 ⊥ 乙天 ⊥ 丙天^{二} ⊥ (乙 ⊥ 二丙天)辛 ⊥ 丙辛^{二}\end{array}\right.$，故戌′丅戌 ＝ (乙 ⊥ 二丙天)辛 ⊥ 丙辛^{二}，叵$\frac{辛}{戌'丅戌}$ ＝ 乙 ⊥ 二丙天 ⊥ 丙辛。其乙 ⊥ 二丙天爲本函數變比例之限。

以此法偏試各種特設之函數，見其皆有相類之性情，所以例設如左。

例曰∴命任何自主之變數爲天，而令天之任何函數等于戌，則天變爲天 ⊥ 辛 之時，函數之新同數爲戌′ ＝ 戌 ⊥ 巳辛 ⊥ 午辛^{二} ⊥ 未辛^{三} ⊥……，其變數與函數之變比例爲$\frac{辛}{戌'丅戌}$ ＝ 巳 ⊥ 午辛 ⊥ 未辛^{二} ⊥ 申辛^{三} ⊥……。此式中之初項巳 爲變比例之限，無論何種函數，其限皆可依此比例求之。

由以上所論變數之長數與函數之長數相關之理，可于算學中開出兩種極廣大極精微之法。

其第一種爲有任何變數之任何函數而求其變數與函數變比例之限。

其第二種爲有任何變數與函數變比例之限而求其函數之原式。

此二種法，若細攷其根源，卽奈端所謂正流數、反流數也；亦卽來本之所謂微分算術、積分算術也；又卽拉果闌諸所謂函數變例也。

論各種函數求微分之公法

第五款　若函數之式爲$戊 = 天^{二}$，令天變爲$天 \perp 辛$，則函數之新同數必爲$戊' = 戊 \perp 二天辛 \perp 辛^{二}$，其與原同數之較爲$戊' \top 戊$，卽$二天辛 \perp 辛^{二}$，此式之初項$二天辛$，名之曰溢率。

依同理推之，若函數之式爲$戊 = 天^{三}$，令天變爲$天 \perp 辛$，則函數之新同數爲$戊' = 戊 \perp 三天^{二}辛 \perp 三天辛^{二} \perp 辛^{三}$，其與原同數之較爲$戊' \top 戊$，卽$三天^{二}辛 \perp 三天辛^{二} \perp 辛^{三}$。其初項$三天^{二}辛$爲溢率。

若函數之式爲$戊 = 天^{四}$，而天變爲$天 \perp 辛$，則函數之新同數與原同數之較爲$四天^{三}辛 \perp 六天^{二}辛^{二} \perp 四天辛^{三} \perp 辛^{四}$，而其溢率爲$四天^{三}辛$。

總言之，凡天之函數無論爲某方，恆可以$天 \perp 辛$代其天，而變其函數之同數爲$戊 \perp 巳辛 \perp 午辛^{二} \perp 未辛^{三} \perp \cdots\cdots$，乃以原同數戊減之得$巳辛 \perp 午辛^{二} \perp 未辛^{三} \perp \cdots\cdots$，而取其初項$巳辛$爲溢率。

準此推之，則知天之溢率即為其長數辛。惟因函數之溢率每藉天之長數而生，故微分術中，恆以彳天代天之溢率。其彳號者，非天之倍數，不過是天之溢率耳。溢率之名，本為流數術中所用。而彳號者，即微字之偏旁，故微分之術用之。

如有式戌＝天^{二}，則彳戌＝二天彳天。此式之意謂戌之微分等于二天乘天之微分。猶言函數戌之溢率等于以二天乘其天之溢率也。如有式戌＝天^{三}，則彳戌＝三天^{二}彳天。此式之意謂戌之微分等于三天^{二}乘天之微分。猶言函數戌之溢率等于以三天^{二}乘其天之溢率也。

第六款 惟因每遇戌＝天^{二}，則彳戌＝二天彳天，所以可寫之如$\frac{\text{彳戌}}{\text{彳天}}$＝二天。此為天微分之倍數，亦謂之微係數。

又依前法推之，如函數之式為戌＝天^{三}，則彳戌＝三天^{二}彳天，而$\frac{\text{彳戌}}{\text{彳天}}$＝三天^{二}。其三天^{二}為原函數戌＝天^{三}之微係數。

總言之，無論何種函數之微係數，皆可以$\frac{\text{彳戌}}{\text{彳天}}$代之。而函數之新同數為戌丄巳辛丄午辛^{二}丄……，所以$\frac{\text{彳戌}}{\text{彳天}}$＝巳，其巳為天之他函數，其形每隨函數之式而變。如之戌之同數為何式，則其巳之同數即易求得。

凡函數之欲求微分者，先于其式之左旁作一彳號以記之。如有$[(甲\perp天)(乙^{二}\top天^{二})]$式，欲求其微分，則可先作$彳[(甲\perp天)(乙^{二}\top天^{二})]$。

凡函數之欲求微係數者，于其式之左旁作彳號，又以$彳天$爲其分母。如有$[(甲\perp天)(乙^{二}\top天^{二})]$式，欲求其微係數，則作$\dfrac{彳天}{彳[(甲\perp天)(乙^{二}\top天^{二})]}$。

從以上各款諸說，易知求微分之公法。

法曰：無論天之任何函數，欲求微分，則以$天\perp辛$代其原式中之天而詳之。依辛之整方數自小而大序之，取其初有辛之項，而以$彳天$代其辛即得。

如有式$戊=甲天\perp乙天^{二}$，欲求其微係數，則以$天\perp辛$代其天，而令函數之新同數爲$戊'$，則得$戊'\begin{cases}=甲(天\perp辛)\perp乙(天\perp辛)^{二}\\=甲天\perp乙天^{二}\perp(甲\perp二乙天)辛\perp乙辛^{二}\\=戊\perp(甲\perp二乙天)辛\perp乙辛^{二}\end{cases}$。取其初有辛之項$(甲\perp二乙天)辛$，以$彳天$代其辛，卽得$彳戊=(甲\perp二乙天)彳天$，故其$\dfrac{彳天}{彳戊}=甲\perp二乙天$。

第七款

上款之法，必令天變爲$天\perp辛$，而詳其函數之同數爲級數，此乃論其立法之理當如是也。惟求得級數之後，所用者僅爲其辛一方之項，則但能求得此項已足用矣。前于第

四款中言此項之倍數爲變數與函數變比例之限，又于第六款中言此項之倍數謂之微係數。然則求函數之微係數與求變數與函數變比例之限，其法本無異也。

如有式$\text{戊}=\dfrac{\text{天}}{\text{甲}^{\text{二}}}$，則$\text{戊}'=\dfrac{\text{天}\perp\text{辛}}{\text{甲}^{\text{二}}}$。而$\text{戊}\top\text{戊}'=\dfrac{\text{天}}{\text{甲}^{\text{二}}}\top\dfrac{\text{天}\perp\text{辛}}{\text{甲}^{\text{二}}}$，卽$\text{戊}\top\text{戊}'=\dfrac{\text{天}(\text{天}\perp\text{辛})}{\top\text{甲}^{\text{二}}\text{辛}}$，故其變比例之式爲$\dfrac{\text{辛}}{\text{戊}\top\text{戊}'}=\dfrac{\text{天}(\text{天}\perp\text{辛})}{\top\text{甲}^{\text{二}}}$。惟此式可不待詳爲級數而始得其變比例之限，因可見辛愈小，則其式愈近于$\top\dfrac{\text{天}^{\text{二}}}{\text{甲}^{\text{二}}}$，故此式必卽爲$\dfrac{\text{彳天}}{\text{彳戊}}$之同數，所以得$\text{彳戊}=\top\dfrac{\text{天}^{\text{二}}}{\text{甲}^{\text{二}}\text{彳天}}$。

若以戊爲任何函數之原同數，而以$\text{天}\perp\text{辛}$代其天，則其函數之新同數爲$\text{戊}'=\text{戊}\perp\text{巳辛}\perp\text{午辛}^{\text{二}}\perp\text{未辛}^{\text{三}}\perp\cdots\cdots$，卽得$\dfrac{\text{辛}}{\text{戊}'\top\text{戊}}=\text{巳}\perp\text{午辛}\perp\text{未辛}^{\text{二}}\perp\cdots\cdots$。惟因$\dfrac{\text{辛}}{\text{戊}'\top\text{戊}}$之限爲巳，故得$\dfrac{\text{彳天}}{\text{彳戊}}=\text{巳}$，而$\text{彳戊}=\text{巳彳天}$。

由此得一解曰：凡微分之術，其意專爲求任何變數與函數同時變大之限耳。

凡求任何函數之微分，不過將一尋常之代數式另用他法以變化之。因其變化之法與代數中常用之法異，則不得不另有一名以別之，故謂之微分術。

第八款 凡變數與函數變比例之限，無論以何數爲主，其形必同。

如戊爲天之函數，若天變爲$\text{天}\perp\text{辛}$，則戊變爲$\text{戊}\perp\text{巳辛}\perp\text{午辛}^{\text{二}}\perp\text{未辛}^{\text{三}}\perp\cdots\cdots$。其巳、午、未各數俱爲天之他函數，從本函數所生。如令其$\text{巳辛}\perp\text{午辛}^{\text{二}}\perp\text{未辛}^{\text{三}}\perp\cdots\cdots=\text{子}$，則天與戊同時變大之數爲辛與子。如依代數術第一百六十三款之法反求其級數，則得$\text{辛}=\frac{\text{巳}}{\text{一}}\text{子}\top\frac{\text{巳}^{\text{二}}}{\text{午}}\text{子}^{\text{二}}\perp\cdots\cdots$，故其變數與函數之公比例爲$\frac{\text{子}}{\text{辛}}=\frac{\text{巳}}{\text{一}}\top\frac{\text{巳}^{\text{二}}}{\text{午}}\text{子}\perp\cdots\cdots$。故$\frac{\text{子}}{\text{辛}}$之限爲$\frac{\text{巳}}{\text{一}}$，而$\frac{\text{辛}}{\text{子}}$之限爲巳，此卽$\frac{\text{一}}{\text{巳}}$也。

第九款 由此易知，凡有相等之函數，則其微係數亦必相等。

如戊與亥爲兩函數，而$\text{戊}=\text{亥}$，其天變爲$\text{天}\perp\text{辛}$之時，戊變爲$\text{戊}'$，亥變爲$\text{亥}'$，則$\text{戊}'=\text{亥}'$，而$\text{戊}'\top\text{戊}=\text{亥}'\top\text{亥}$，故$\frac{\text{辛}}{\text{戊}'\top\text{戊}}=\frac{\text{辛}}{\text{亥}'\top\text{亥}}$。如以巳與午各爲其變比例之限，則$\text{巳}=\text{午}$。故$\text{巳彳天}=\text{午彳天}$，而$\text{彳戊}=\text{彳亥}$。

由此可見，凡函數之式無論如何改形，若其同數無異者，則其微係數必同。

如函數之原式爲$\text{天}^{\text{三}}\perp\text{甲}^{\text{三}}$，若改其形爲$(\text{天}\perp\text{甲})(\text{天}^{\text{二}}\top\text{甲天}\perp\text{甲}^{\text{二}})$，則此式之微係數與原式之微係數必無異。

惟此理，若反言之而謂相等之微係數必從相等之函數而生，則不盡然。

如函數之式爲戊＝甲⊥乙天，令天變爲天⊥辛，而戊變爲戊′，則戊′＝甲⊥乙天⊥乙辛＝戊⊥乙辛，故得$\frac{戊'丅戊}{辛}$＝乙。觀此可知，其常數之項甲不能入變比例之限內，故其微係數必與戊＝乙天之微係數無異。惟微係數乙既能屬於本函數甲⊥乙天，又能屬於他函數乙天，所以有下例。

例曰：凡變數與常數相加減之函數，其微係數中不見其加減之常數。惟變數與常數相乘除者，則其微係數中有常數爲倍數。

求兩函數相乘積之微分

第十款　凡變數之函數，無論其形如何，皆可以第六款之公法求其微分。然不如每種異形之函數各設一專法以求之，則更簡捷。

如有式戊＝未申，其未與申各爲天之函數。今欲得一法專能求未、申相乘積之微分，若令天變爲天⊥辛，則未、申二函數必變爲未′＝未⊥巳辛⊥午辛^{二}⊥……，申′＝申⊥巳′辛⊥午′辛^{二}⊥……，其巳、午爲由未函數所得之天之他函數；其巳′、午′爲

由申函數所得之天之他函數。

再令$\text{戊}'=\text{未}'\text{申}'$，則依法得$\text{戊}'=\text{未}'\text{申}'=\text{未申}\perp(\text{未巳}'\perp\text{申巳})\text{辛}\perp(\text{未午}'\perp\text{巳巳}'\perp\text{申午})\text{辛}^{二}\perp\cdots\cdots$。以戊代其未申，移項而以辛約之，則得$\frac{\text{辛}}{\text{戊}'\text{丅}\text{戊}}=\text{未巳}'\perp\text{申巳}\perp(\text{未午}'\perp\text{巳巳}'\perp\text{申午})\text{辛}\perp\cdots\cdots$。此式中之$\text{未巳}'$與$\text{申巳}$兩項乃天之他函數，而與辛無涉者，其餘各項俱有辛之各方爲乘數。設辛爲甚微，則其所乘之衆項亦甚微，故其變比例之限爲$\frac{\text{辛}}{\text{戊}'\text{丅}\text{戊}}=\text{未巳}'\perp\text{申巳}$。惟因$\text{巳}=\frac{\text{辛}}{\text{未}'\text{丅}\text{未}}$、$\text{巳}'=\frac{\text{辛}}{\text{申}'\text{丅}\text{申}}$，故可依第六款之法以$\frac{\text{彳天}}{\text{彳戊}}$代其$\frac{\text{辛}}{\text{戊}'\text{丅}\text{戊}}$，以$\frac{\text{彳天}}{\text{彳未}}$代其$\frac{\text{辛}}{\text{未}'\text{丅}\text{未}}$，以$\frac{\text{彳天}}{\text{彳申}}$代其$\frac{\text{辛}}{\text{申}'\text{丅}\text{申}}$。則得$\frac{\text{彳天}}{\text{彳戊}}=\text{未}\frac{\text{彳天}}{\text{彳申}}\perp\text{申}\frac{\text{彳天}}{\text{彳未}}$，而$\text{彳戊}=\text{未彳申}\perp\text{申彳未}$。故得專法如左：

凡求同變彼此兩函數相乘積之微分，法將此函數乘彼函數之微分，又將彼函數乘此函數之微分，而以乘得之兩式相加卽得。

求多函數連乘積之微分

第十一款　前款論函數之式爲$戊 = 未申$，則$彳戊 = 未彳申 \perp 申彳未$，所以$\frac{戊}{彳戊} = \frac{未}{彳未} \perp \frac{申}{彳申}$。

由此推之，如戊爲三箇同變數之函數連乘如$未酉亥$，可令其$申 = 酉亥$，則亦能爲$戊 = 未申$　而$\frac{戊}{彳戊} = \frac{未}{彳未} \perp \frac{申}{彳申}$。惟因$申 = 酉亥$，可依同例得$\frac{申}{彳申} = \frac{酉}{彳酉} \perp \frac{亥}{彳亥}$，所以$\frac{戊}{彳戊} = \frac{未}{彳未} \perp \frac{酉}{彳酉} \perp \frac{亥}{彳亥}$。若仍將$未申$　代還其戊而以常法化之，則爲$彳戊 = 酉亥彳未 \perp 未亥彳酉 \perp 未酉彳亥$。故得專法如左：

凡求同變數之若干函數連乘積之微分，法以各本函數之微分與其餘之各他函數連乘，而以各乘得之式相加卽得。

此法易用以總式以明之。無論其同變數之函數有若干數連乘，皆可以一例推之：

如多函數連乘之式爲$未申酉亥$，則其微分之式爲$彳(未申酉亥) = 未申酉亥\left[\frac{未}{彳未} \perp \frac{申}{彳申} \perp \frac{酉}{彳酉} \perp \frac{亥}{彳亥}\right]$。

求變數之分函數微分

第十二款　若有分數之式，其母子爲同變數之各函數，則欲得其求微分之專法，可令戌 $=\frac{申}{未}$，則未 $=$ 戌申，而彳未 $=$ 戌彳申 $\perp$ 申彳戌。乃以其戌之同數$\frac{申}{未}$代其戌，則彳未 $=$

$\frac{申}{未彳申}\perp$ 申彳戌，而彳戌 $=\frac{申^{二}}{申彳未\top未彳申}$。故得專法如左：

凡同變量之函數，若爲分數，則求微分之法可將分母乘其分子之微分，乃以分子乘分母之微分減之，而以分母之平方約之。

此法亦可用一總式以明之。

惟因戌 $=\frac{申}{未}$ 之微分爲$\frac{戌}{彳戌}=\frac{未}{彳未}\top\frac{申}{彳申}$，所以戌 $=\frac{亥地}{未申酉}$ 之微分爲$\frac{戌}{彳戌}=$

$\frac{未}{彳未}\perp\frac{申}{彳申}\perp\frac{酉}{彳酉}\top\frac{亥}{彳亥}\top\frac{地}{彳地}$。由此推之，則戌 $=\frac{亥地}{未申酉}$ 之微分當爲$\frac{戌}{彳戌}=$

$\frac{未申酉}{彳(未申酉)}\top\frac{亥地}{彳(亥地)}$。又依第十一款之例，其$\frac{未申酉}{彳(未申酉)}=\frac{未}{彳未}\perp\frac{申}{彳申}\perp\frac{酉}{彳酉}$，

而 $\frac{亥地}{彳(亥地)} = \frac{亥}{彳亥} \perp \frac{地}{彳地}$，故得 $\frac{戌}{彳戌} = \frac{未}{彳未} \perp \frac{申}{彳申} \perp \frac{酉}{彳酉} \top \frac{亥}{彳亥} \top \frac{地}{彳地}$。由是知若有分數之函數，其分母分子爲任若干同變數之函數連乘之積如 $\frac{亥地}{未申酉}$ 者，可以 $彳\left(\frac{亥地}{未申酉}\right) = \frac{亥地}{未申酉}\left[\frac{未}{彳未} \perp \frac{申}{彳申} \perp \frac{酉}{彳酉} \top \frac{亥}{彳亥} \top \frac{地}{彳地}\right]$ 之式明之。

第十三款　兹欲攷任何函數地之任何乘方求微分之專法。其地或爲自變之數，或爲他變之函數，皆可。

先設 $戌 = 地^{卯}$，其卯爲任何整數，則其函數之詳式必有卯箇地連乘如 $戌 = 地 \cdot 地 \cdot 地 \cdot 地 \cdots\cdots$。則依第十一款之例，$\frac{戌}{彳戌} = \frac{地}{彳地} \perp \frac{地}{彳地} \perp \frac{地}{彳地} \perp \cdots\cdots$，其項必有卯數。

故 $\frac{戌}{彳戌} = \frac{地}{卯彳地}$，而得 $彳戌 = \frac{地}{卯彳地}戌 = 卯地^{卯\top一}彳地$。

設函數爲分指數如 $戌 = 地^{\frac{卯}{寅}}$，則 $戌^{卯} = 地^{寅}$。若依第九款之例，則得 $卯戌^{卯\top一}彳戌 = 寅地^{寅\top一}彳地$，而 $彳戌 = \frac{卯}{寅} \times \frac{戌^{卯\top一}}{地^{寅\top一}}彳地$。惟因 $戌 = 地^{\frac{卯}{寅}}$、$戌^{卯\top一} = 地^{寅\top\frac{卯}{寅}}$，所以 $\frac{戌^{卯\top一}}{地^{寅\top一}} = 地^{\frac{卯}{寅}\top一}$，而 $彳戌 = \frac{卯}{寅}地^{\frac{卯}{寅}\top一}彳地$。

再設卯爲負指數，無論爲整數爲分數，則 $戌 = 地^{\top卯}$，即 $戌 = \frac{地^{卯}}{一}$。若依第十二款之

例，因其分子爲常數，故其分子之微分當爲〇，而得$彳戌＝丅\frac{地^{二卯}}{卯地^{卯丅一}彳地}$，卽$彳戌＝丅卯地^{丅卯丅一}彳地$。

合觀本款之各式，可見地之指數卯無論爲正爲負爲整爲分，其微分之式必爲$彳\left(地^{卯}\right)＝卯地^{卯丅一}彳地$。故得專法如左：

凡求函數乘方之微分，法將其原指數以一減之爲新指數，而以原指數爲其倍數，又以變數之微分乘之卽得。惟其原函數若本有常數爲倍數者，則其原倍數必仍在乘數之中。

如函數之式爲$戌＝甲天^{卯}$，則其微分之式爲$彳\left(甲天^{卯}\right)＝卯甲天^{卯丅一}彳天$。

求函數諸乘方之微分更有簡便之法，可藉代數術第一百六十款與一百六十一款之二項例而得。所以于此不論者，因二項之例亦可由微分而得，余欲用微分之術證明二項之例以便于用，故俟後詳論之。

求變數平方根之微分

用前法已能求各負方之微分，惟因$\sqrt{地}=地^{\frac{二}{一}}$爲微分術中常見之式，所以必更設一最易之專法以便于用。

依本款求諸乘方微分之法，$彳\left(地^{\frac{二}{一}}\right)=\frac{二}{一}地^{\frac{二}{一}丅一}彳地$，卽$彳\left(地^{\frac{二}{一}}\right)=\frac{二}{一}地^{丅\frac{二}{一}}彳地$，卽$彳\left(\sqrt{地}\right)=\frac{二\sqrt{地}}{彳地}$。所以得專法如左：

凡求函數平方根之微分，法以函數之微分爲實而二倍其原函數之平方根以約之卽得。

求重函數之微分

第十四款　設有地爲天之函數而戊爲地之函數，欲求其戊與天相配之微分。

令天變其同數爲$天丄辛$，則地變爲$地'=地丄巳辛丄午辛^{二}丄未辛^{三}丄\cdots\cdots$。乃令$巳辛丄午辛^{二}丄未辛^{三}丄\cdots\cdots=子$，則地變爲$地丄子$。惟因戊爲地之函數，若地變爲$地丄子$，則戊變爲$戊'=戊丄巳'子丄午子^{二}丄未'子^{三}丄\cdots\cdots$。其$巳'午'未'$各數爲地之他函數，

與子及辛皆無相關。所以于此級數中，以子之同數乜辛丄午辛$^{\text{二}}$丄……代之，則天變為天丄辛之時，其戊之同數必變為戊′＝戊丄乜′乜辛丄(乜′午丄午′乜$^{\text{二}}$)辛$^{\text{二}}$丄……。所以得 $\frac{\text{辛}}{\text{戊丅戊}'}$ ＝乜′乜丄(乜′午丄午′乜$^{\text{二}}$)辛丄……。如令辛為甚小，則其限必為 $\frac{\text{辛}}{\text{戊丅戊}'}$ ＝乜′乜。惟因地為天之函數，故乜＝$\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}$。又因戊為地之函數，故乜＝$\frac{\text{彳地}}{\text{彳戊}}$。**整理者註：**上乜當為乜′。　如知戊亦可為天之函數，則 $\frac{\text{彳天}}{\text{彳戊}}$ ＝ $\frac{\text{辛}}{\text{戊丅戊}'}$ ＝乜′乜。由此可見，$\frac{\text{彳天}}{\text{彳戊}} = \frac{\text{彳地}}{\text{彳戊}} \times \frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}$，而彳戊＝$\left(\frac{\text{彳地}}{\text{彳戊}} \times \frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}\right)$彳天。故得專法如左：

凡有地為天之函數、戊為地之函數而欲求其微分者，法先以戊專為地之函數而求其微係數，又以地專為天之函數而求其微係數，乃將兩微係數相乘，又以天之微分乘之即為戊之微分。

已知 $\frac{\text{彳地}}{\text{彳戊}} \times \frac{\text{彳天}}{\text{彳地}} = \frac{\text{彳天}}{\text{彳戊}}$，如令戊＝天，則變其式為 $\frac{\text{彳地}}{\text{彳戊}} \times \frac{\text{彳天}}{\text{彳地}} = \frac{\text{彳天}}{\text{彳天}} = \text{一}$，所以可作 $\frac{\text{彳地}}{\text{彳天}} = \frac{\text{一}}{\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}}$。由是知：凡以天為地之函數與以地為天之函數，其兩微係數必可互為倒數。以法為實，以實為法，謂之倒數。　此例可由第八款得之。

求多項函數之微分

第十五款　如有同變數之若干函數合成一多項式，則求此多項式之微分亦可設一專法。

設亥地人爲變數天之任何函數，欲求$\text{戊} = \text{甲} \perp \text{乙亥} \perp \text{丙地} \top \text{戊人}$之微分，若天變爲$\text{天} \perp \text{辛}$而其同時中亥變爲$\text{亥} \perp \text{巳辛} \perp \text{午辛}^{\text{二}} \perp \cdots\cdots$，地變爲$\text{地} \perp \text{巳}'\text{辛} \perp \text{午}'\text{辛}^{\text{二}} \perp \cdots\cdots$，人變爲$\text{人} \perp \text{巳}''\text{辛} \perp \text{午}''\text{辛}^{\text{二}} \perp \cdots\cdots$，戊變爲$\text{戊}'$，故得

$$\text{戊}' = \begin{cases} \text{甲} \perp \text{乙亥} \perp \text{丙地} \top \text{戊人} \\ \perp (\text{乙巳} \perp \text{丙巳}' \perp \text{戊巳}'')\,\text{辛} \\ \perp (\text{乙午} \perp \text{丙午}' \perp \text{戊午}'')\,\text{辛}^{\text{二}} \\ \perp \cdots\cdots \end{cases}$$

。如以戊代其右邊之上層，移其項而以辛約之，則得已知$\dfrac{\text{辛}}{\text{戊}' \top \text{戊}} = \text{乙巳} \perp \text{丙巳}' \top \text{戊巳}'' \perp (\text{乙午} \perp \text{丙午}' \perp \text{戊午}'')\,\text{辛} \perp \cdots\cdots$。

觀其各限可見$\dfrac{\text{辛}}{\text{戊}' \top \text{戊}}$爲戊之微係數，而巳與$\text{巳}'$及$\text{巳}''$爲亥與地及人之微係數。所以

其 $\frac{\text{彳天}}{\text{彳戊}}=\frac{\text{彳天}}{\text{乙彳亥}}\perp\frac{\text{彳天}}{\text{丙彳地}}\top\frac{\text{彳天}}{\text{戊彳人}}$，而 $\text{彳戊}=\text{乙彳亥}\perp\text{丙彳地}\top\text{戊彳人}$。故得專法如左：

凡有同變數之各函數和較而成之多項式，則其總函數之微分必等于各函數微分之和較，而其常數之項恆變爲○。

代函數求微分各題

第十六款　茲設數題以明之。

一題　設有 $\text{戊}=\text{甲天}^{\text{五}}$，欲求其微分之式。

此式與公式 $\text{戊}=\text{甲天}^{\text{卯}}$ 爲一類，所以可用第十三款之法求其微分得 $\text{彳戊}=\text{五甲天}^{\text{四}}\text{彳天}$。

二題　設有 $\text{戊}=\frac{\text{天}^{\text{五}}}{\text{甲}}$，欲求其微分之式。

惟因 $\text{戊}=\frac{\text{天}^{\text{五}}}{\text{甲}}$ 卽 $\text{戊}=\text{甲天}^{\text{丅五}}$，故如法求得 $\text{彳戊}=\text{丅五甲天}^{\text{丅六}}\text{彳天}$，卽 $\text{彳戊}=\frac{\text{天}^{\text{六}}}{\text{丅五甲彳天}}$。

三題　設有戌 $= \sqrt{天^{三}}$，欲求其微分之式。

惟因戌 $= \sqrt{天^{三}}$ 卽戌 $= 天^{\frac{三}{二}}$，故如法求得彳戌 $= \frac{二}{三}天^{\frac{二}{一}}$彳天，卽。彳戌 $=$ $\frac{二}{三}$彳天$\sqrt{天}$。

四題　設有戌 $= 甲天^{三} \perp 乙天^{二} \perp 丙天 \perp 戊$，欲求其微分之式。

此爲多項之函數，故如法求得彳戌 $=$ 三甲天^{二}彳天⊥二乙天彳天⊥丙彳天，卽彳戌 $=$ (三甲天^{二} ⊥ 二乙天 ⊥ 丙) 彳天。其常數之項戊于求微分之時變爲〇而不見。

五題　設有戌 $= \left(甲 \perp 乙天^{卯}\right)^{巳}$，欲求其微分之式。

此可令地 $=$ 甲 ⊥ 乙天^{卯}，則戌 $= 地^{巳}$ 而彳戌 $= 巳地^{巳丅一}$彳地。惟因地$^{巳丅一} = \left(甲 \perp 乙天^{卯}\right)^{巳丅一}$，而彳地 $= \perp$乙卯天^{卯丅一}彳天，所以得

彳戌 $=$ 乙卯巳$\left(甲 \perp 乙天^{卯}\right)^{巳丅一} \perp 天^{卯丅一}$彳天。

此題之式若不用地代其括弧內之數，而以甲 ⊥ 乙天^{卯} 爲丨箇箇函數，其戌爲箇函數之某方而依第十三款之法求之，亦通。

六題　設有戌 $= 天^{三}(甲 \perp 天)^{二}$，此題爲表明第十款之法。欲求其微分之式。

令$巳 = 天^{三}$，$午 = (甲 \perp 天)^{二}$，則$戊 = 巳午$。故得$彳戊 = 午彳巳 \perp 巳彳午$。惟因$彳巳 = 三天^{二}彳天$，$彳午 = 二(甲 \perp 天)彳天$，所以$彳戊 = 三天^{二}(甲 \perp 天)^{二}彳天 \perp 二天^{三}(甲 \perp 天)彳天$，卽$彳戊 = 天^{二}(甲 \perp 天)(三甲 \perp 五天)彳天$。

若平常習算之時，可不必用巳、午二數相代，而卽以原式如法求之，亦同。

七題 設有$戊 = 天(一 \perp 天)(一 \perp 天^{二})$，其戊爲同變數之三箇函數連乘之積。欲求其微分之式。

依第十一款之法得$彳戊 = (一 \perp 天)(一 \perp 天^{二})彳天 \perp 天(一 \perp 天^{二})彳天 \perp 二天^{二}(一 \perp 天)彳天$，又以常法化之得$彳戊 = (一 \perp 二天 \perp 三天^{二} \perp 四天^{三})彳天$。

又法可從本公式$彳(未申酉) = 未申酉\left[\dfrac{未}{彳未} \perp \dfrac{申}{彳申} \perp \dfrac{酉}{彳酉}\right]$得

$彳戊 = 天(一 \perp 天)(一 \perp 天^{二})\left[\dfrac{天}{彳天} \perp \dfrac{一 \perp 天}{彳天} \perp \dfrac{一 \perp 天^{二}}{二天彳天}\right]$。此式易化爲$彳戊 = (一 \perp 二天 \perp 三天^{二} \perp 四天^{三})彳天$。

八題 設有$戊 = \dfrac{一 \perp 天^{二}}{天}$，此爲分數之函數。欲求其微分之式。

依第十三款之法得$彳戊 = \dfrac{(一 \perp 天^{二})^{二}}{(一 \perp 天^{二})彳天 \top 二天^{二}彳天}$，卽$彳戊 = \dfrac{(一 \perp 天^{二})^{二}}{(一 \top 天^{二})彳天}$。

九題 設有$\text{戊} = \dfrac{\text{天}^{\text{四}} \top \text{天}^{\text{二}} \perp \text{一}}{\text{天}^{\text{三}} \perp \text{天}} = \dfrac{\text{天}^{\text{四}} \top \text{天}^{\text{二}} \perp \text{一}}{\text{天}\left(\text{天}^{\text{二}} \perp \text{一}\right)}$，欲求其微分之式。

將所設之式與本公式$\text{彳}\left[\dfrac{\text{酉}}{\text{申未}}\right] = \dfrac{\text{酉}}{\text{申未}}\left[\dfrac{\text{未}}{\text{彳未}} \perp \dfrac{\text{申}}{\text{彳申}} \top \dfrac{\text{酉}}{\text{彳酉}}\right]$相比，則$\text{天} = \text{未}$，$\text{天}^{\text{二}} \perp \text{一} = \text{申}$，$\text{天}^{\text{四}} \top \text{天}^{\text{二}} \perp \text{一} = \text{酉}$。所以得

$$\text{彳戊} = \dfrac{\text{天}^{\text{四}} \top \text{天}^{\text{二}} \perp \text{一}}{\text{天}^{\text{三}} \perp \text{天}}\left[\dfrac{\text{天}}{\text{彳天}} \perp \dfrac{\text{一} \perp \text{天}^{\text{二}}}{\text{二天彳天}} \top \dfrac{\text{天}^{\text{四}} \top \text{天}^{\text{二}} \perp \text{一}}{\left(\text{四天}^{\text{三}} \top \text{二天}\right)\text{彳天}}\right]$$

，化之得$\text{彳戊} = \dfrac{\left(\text{天}^{\text{四}} \top \text{天}^{\text{二}} \perp \text{一}\right)^{\text{二}}}{\top\left(\text{天}^{\text{六}} \perp \text{四天}^{\text{四}} \top \text{四天}^{\text{二}} \top \text{一}\right)\text{彳天}}$。

十題 設有$\text{戊} = \text{三地}^{\text{二}}$，$\text{地} = \text{天}^{\text{三}} \perp \text{甲天}$此題爲表明第十四款之法。欲求其微分之式。

如法求之，則$\dfrac{\text{彳地}}{\text{彳戊}} = \text{六地}$，$\dfrac{\text{彳天}}{\text{彳地}} = \text{三天}^{\text{二}} \perp \text{甲}$，所以$\dfrac{\text{彳地}}{\text{彳戊}} \times \dfrac{\text{彳天}}{\text{彳地}} = \text{六地}\left(\text{三天}^{\text{二}} \perp \text{甲}\right)$，即$\dfrac{\text{彳地}}{\text{彳戊}} \times \dfrac{\text{彳天}}{\text{彳地}} = \text{一八天}^{\text{二}}\text{地} \perp \text{六甲地}$。惟因$\text{彳戊} = \dfrac{\text{彳地}}{\text{彳戊}} \times \dfrac{\text{彳天}}{\text{彳地}}\text{彳天}$，故得$\text{彳戊} = \text{一八天}^{\text{二}}\text{地彳天} \perp \text{六甲地彳天}$。

此式亦可由他法而得。蓋因其$\text{戊} = \text{三地}^{\text{二}}$，則$\text{彳戊} = \text{六地彳地}$。又因$\text{地} = \text{天}^{\text{三}} \perp \text{甲天}$，則$\text{彳地} = \text{三天}^{\text{二}}\text{彳天} \perp \text{甲彳天}$，故可將彳地之同數帶入彳戊之同數中，其

所得之式亦爲彳戊 $= 一八天^{二}地彳天 \perp 六甲地彳天$。

求二項例之證

第十七款　以下各款之法必用二項例推之，故茲款特用微分之法證明其例以便于用。

設有二項之式 $(一 \perp 天)^{卯} = 一 \perp 呷天 \perp 吃天^{二} \perp 哂天^{三} \perp 叮天^{四} \perp \cdots\cdots$，其指數卯可任爲或正或負或整數或分之數。則從此式易知其各項之倍數呷、吃、哂、叮等類皆從指數卯所生，而與天之同數無涉。又因式之左右旣爲相等之數，則其微分之式左右同，故可依第九款之法各求其微分，得 $(一 \perp 天)^{卯丅一}$ 彳天 $= 呷彳天 \perp 二吃天彳天 \perp 三哂天^{二}彳天 \perp 四叮天^{三}彳天 \perp \cdots\cdots$。若兩邊各以彳天徧約之，又以一 $\perp$ 天徧通之，則得 $(一 \perp 天)^{卯} = 呷 \perp (呷 \perp 二吃)天 \perp (二吃 \perp 三哂)天^{二} \perp (三哂 \perp 四叮)天^{三} \perp \cdots\cdots$㊀。又由原式得 $(一 \perp 天)^{卯} = 卯 \perp 卯呷天 \perp 卯吃天^{二} \perp 卯哂天^{三} \perp 卯叮天^{四} \perp \cdots\cdots$㊁，則㊀㊁兩式右邊之多項，其形雖不同，其數必無異。因其式皆能等於 $(一 \perp 天)^{卯}$

故也。所以

$$\left.\begin{aligned}\text{呷}&=\text{卯}\\ \text{呷}\perp\text{二口乙}&=\text{卯呷}\\ \text{二口乙}\perp\text{三口丙}&=\text{卯口乙}\\ \text{三口丙}\perp\text{四叮}&=\text{卯口丙}\\ &\vdots\\ &\vdots\end{aligned}\right\}\text{則}\left\{\begin{aligned}\text{呷}&=\text{卯}\\ \text{口乙}&=\frac{\text{二}}{(\text{卯}\top\text{一})}\text{呷}\\ \text{口丙}&=\frac{\text{三}}{(\text{卯}\top\text{二})}\text{口乙}\\ \text{叮}&=\frac{\text{四}}{(\text{卯}\top\text{三})}\text{口丙}\\ &\vdots\\ &\vdots\end{aligned}\right.$$

。故可用代法得$(\text{一}\perp\text{天})^{\text{卯}}=$

$\text{一}\perp\frac{\text{一}}{\text{卯}}\text{天}\perp\frac{\text{一}\cdot\text{二}}{\text{卯}(\text{卯}\top\text{一})}\text{天}^{\text{二}}\perp\frac{\text{一}\cdot\text{二}\cdot\text{三}}{\text{卯}(\text{卯}\top\text{一})(\text{卯}\top\text{二})}\text{天}^{\text{三}}\perp\cdots\cdots$。以$\frac{\text{甲}}{\text{天}}$代其天，兩邊俱以$\text{甲}^{\text{卯}}$通之，則得$(\text{甲}\perp\text{天})^{\text{卯}}=\text{甲}^{\text{卯}}\perp\frac{\text{一}}{\text{卯}}\text{甲}^{\text{卯}\top\text{一}}\text{天}\perp\frac{\text{一}\cdot\text{二}}{\text{卯}(\text{卯}\top\text{一})}\text{甲}^{\text{卯}\top\text{二}}\text{天}^{\text{二}}\perp$

$\frac{\text{一}\cdot\text{二}\cdot\text{三}}{\text{卯}(\text{卯}\top\text{一})(\text{卯}\top\text{二})}\text{甲}^{\text{卯}\top\text{三}}\text{天}^{\text{三}}\perp\cdots\cdots$。

第十八款　上款攷證二項例之法爲微分積分中常用之式。本款亦然。

凡遇相等之式如$\text{甲}\perp\text{乙天}\perp\text{丙天}^{\text{二}}\perp\text{丁天}^{\text{三}}\perp\cdots\cdots=\text{呷}\perp\text{口乙天}\perp\text{口丙天}^{\text{二}}\perp\text{叮天}^{\text{三}}\perp$

$\cdots\cdots$㊀者，若其各項之中之倍數皆爲常數，而天爲同變之數，則左右各項中之各倍

數必挨次相同，故可合之爲一公共之式。

次因其天爲變數，故可設想其天變至極小而無異于〇，則得甲＝甲′。如將㈠式中兩邊相等之甲、甲′截去而以天約其所餘之各項，則得乙⊥丙天⊥丁天^{二}⊥……＝乙′⊥丙′天⊥丁′天^{二}⊥……。此式中若令天無異于〇，則乙必無異于乙′。如是累推之，則得甲＝甲′、乙＝乙′、丙＝丙′、丁＝丁′、戊＝戊′……