

## 微積溯源序

微積溯源八卷，前四卷爲微分術，後四卷爲積分術，乃算學中最深之事也。余既與西士傅蘭雅譯畢代數術二十五卷，更思求其進境，故又與傅君譯此書焉。先是咸豐年間，曾有海寧李壬叔與西士偉烈亞力譯出代微積拾級一書，流播海內。余素與壬叔相友，得讀其書，粗明微積二術之梗概。所以又譯此書者，蓋欲補其所略也。書中代數之式甚繁，校算不易，則劉君省菴之力居多。

今刻工已竣矣，故序之，曰：吾以爲古時之算法惟有加減而已。其乘與除乃因加減之不勝其繁，故更立二術以使之簡易也。開方之法，又所以濟除法之窮者也。蓋算學中自有加減乘除開方五法，而一切淺近易明之數，無不可通矣。惟人之心思智慮日出不窮，往往以能人之所不能者爲快。遇有窒礙難通之處，輒思立法以濟其窮。故有減其所不可減而正負之名不得不立矣；除其所不能除而寄母通分之法又不得不立矣。代數中種種記號之法皆出於不得已而立者也，惟每立一法必能使繁者爲簡，難者爲易，遲者爲速，而算學之境界藉此得更進一層。如是屢進不已而所立之法於是乎日多矣。微分積分者，蓋又因乘除開

方之不勝其繁，且有窒礙難通之處，故更立此二術以濟其窮，又使簡易而速者也。試觀圓徑求周、真數求對等事，雖無微分積分之時，亦未嘗不可求，惟須乘除開方數十百次。其難有不可言喻者，不如用微積之法理明而數捷也。然則謂加減乘除開方代數之外者，更有二術焉，一曰微分，一曰積分可也。其積分術爲微分之還原，猶之開平方爲自乘之還原、除法爲乘之還原、減法爲加之還原也。然加與乘其原無不可還，而微分之原有可還有不可還，是猶算式中有不可開之方耳，又何怪焉。如必曰加減乘除開方已足供吾之用矣，何必更究其精？是舍舟車之便利而必欲負重遠行也。其用力多而成功少，蓋不待智者而辨矣。

同治十三年九月十八日，金匱華衡芳序。

# 微積溯源卷一

## 論變數與函數之變比例

第一款 用代數以解任何曲線，其中每有幾種數，其大小恒有定率者，如橢圓之長徑、拋物線之通徑、雙曲線之屬徑之類是也。

又每有幾種數可有任若干相配之同數，其大小恒不能有定率者，如曲線任一點之縱橫線是也。

數既有此兩種分別，則每種須有一總名以賅之，故名其有定之數曰常數，無定之數曰變數。

凡常數之同數不能增亦不能損。

凡變數之同數，能變爲大，亦能變爲小。故其從此同數變至彼同數之時，必歷彼此二數間最小最微之各分數。

如平圓之半徑爲常數，而其任一段之弧或弧之弦矢切割各線，及各線與弧所成之面，

皆謂之變數。

橢圓之長徑短徑皆爲常數，而其曲線之任一段或曲線上任一點之縱橫線，並其形內形外所能作之任何線或面或角，皆謂之變數。

拋物線之通徑爲常數，而其曲線之任一段或任一點之縱橫線、或弧與縱橫線所成之面，皆謂之變數。他種曲線亦然。

凡常數，恒以甲乙丙丁等字代之。凡變數，恒以天地人等字代之。

第二款 若有彼此二數皆爲變數，此數變而彼數因此數變而亦變者，則彼數爲此數之函數。

如平圓之八線皆爲弧之函數。若反求之，亦可以弧爲八線之函數。

又如重學中令物體前行之力，與其物所行之路，皆爲時刻之函數。

如有式  $\frac{\text{地} \perp \text{天}}{\text{甲} \perp \text{天}}$ ，此式中甲爲常數，天爲自主之變數，地爲天之函數。故地之同

數能以天與甲明之。

如有式  $\frac{\text{地} \perp \text{一}}{\text{甲}(\text{地} \perp \text{一})}$ ，此式中甲與一皆爲常數，地爲自主之變數，天爲地之函數，

故天之同數可以地與甲及一明之。

如有式  $\frac{\text{丙} \perp \text{天}^2}{\text{甲} \perp \sqrt{\text{乙} \perp \text{天}}}$ ，其甲

乙丙爲常數，天爲自變之數，而戊皆爲天之函數。

凡函數之中，可以有數箇自主之變數。

如有式  $戊 = 甲天^2 + 乙天地 + 丙地^2$ ，則天與地皆爲自主之變數，戊爲天地兩變數之函數。

凡變數之函數，其形雖有多種，然每可化之，使不外乎以下數類  $天^{\frac{1}{2}}$ ， $天^{\frac{1}{3}}$ ， $天^{\frac{1}{4}}$ ， $天^{\frac{1}{5}}$  等類是也。

凡函數爲  $天^{\frac{1}{n}}$  之類，其指數爲常數，則可從天之卯方，用代數之常法化之。而以有窮之項明其函數之同數。故謂之代數函數，亦謂之常函數。

如有式  $戊 = 甲天^2 + \sqrt{\frac{甲^2 + 天^2}{乙天^2 + 丙^2}}$ ，此種函數，其戊之同數可用加減乘除開方等法而得之。

凡函數爲  $天^{\frac{1}{n}}$  之類，則其函數之同數不能以有窮之項明之。故謂之越函數。越者，超越於尋常之意也。

凡函數爲  $天^{\frac{1}{n}}$ ， $天^{\frac{1}{m}}$  及  $天^{\frac{1}{k}}$ ， $天^{\frac{1}{l}}$  之類，其函數之同數皆可以平圓之各線明之。故謂之圓函數，亦謂之角函數。以上三種函數常函數、越函數、圓函數也。，若已知天之同數，則其函數之同數即可求得。故

名此三種函數爲陽函數。因其顯而易明，故謂之陽函數。

更有他種函數，必先解其方程式，令函數中之各變數分開，然後能求其同數者。

如有式  $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ ，其成爲天之函數，如欲求其成與天相配之同數，必先解其次方程式始能通。

此種之式名曰天之陰函數。因其雜糅未明，故謂之陰函數。反之亦可云天爲成之陰函數。

如解其方程式爲  $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ ，則成變爲天之陰函數。

整理者註：右最後一句云成變爲天之陰函數，這顯而易見是錯誤的。原文大英百科全書卷第九之 Fluxions 作 explicit function，即陽函數，此當爲譯者譯錯。目前由於校勘凡例未定，暫留此字，待討論後決定修改與否。

昔代數之家，凡遇須用開平方之處，每于其式之左旁作一根字以記之，如  $\sqrt{x}$  爲天之平方根。後又變通其法，而以根號記之，如  $\sqrt{x}$  爲天之平方根。此代數之例也。茲可仿照此例，凡遇某變數之函數，亦用一號以記之。所以凡有任何變數之函數，皆可書一函字于其變數之旁，以爲識別。

如天之函數則作  $\text{函}x$ ，或作  $\text{函}(x)$ ，皆言天之函數也。

所以凡見變數之左旁有一函字者，其函字并非代表天之倍數，其意謂是某變數之函數

也。

用此法則可將 $\text{戊} = \text{天}^{\text{卯}}$ 、 $\text{戊} = \text{甲}^{\text{天}}$ 、 $\text{戊} = \text{對天}$ 、 $\text{戊} = \text{正弦天}$ 、 $\text{戊} = \text{餘弦天}$ 各種之式以一語賅之，謂之 $\text{戊} = \text{函天}$ 或 $\text{戊} = \text{函}(\text{天})$ 。

若函數從兩箇變數而成，其天與地皆爲自主之變數，其式如 $\text{戊} = \text{甲}^{\text{天}} \text{乙}^{\text{地}}$ 者，則可以 $\text{戊} = \text{函}(\text{天}, \text{地})$ 別之。函數爲多箇變數所成者，仿此推之。惟函數只指其變數言之，若甲乙丙丁各常數。雖多不論。

第三款 凡觀此書者，必先明變數與函數變比例之限。如幾何原本中證明平圓之面積必比其外切多等邊形之面積微小，若其外切多等邊形之邊愈多，則其面積愈近于平圓之面積。所以可設平圓之面積爲任何小，而切其圓外爲多等邊形，可使多等邊形之面積與平圓之面積較其數甚小于所設之圓面積；再設其多等邊形之面積爲級數，而其邊之變率可每變多若干倍，則其多等邊形之面積必漸與平圓之面積相近而以平圓爲限。雖切于圓外之多邊形其邊任變至若何多，其面積總不能等于平圓之面積。然其級數之總數可比平圓之面積所差甚微，其較數之小，可小至莫可名言。

若用此法于圓內容多等邊形，則其多等邊形之面積亦以平圓之面積爲限。總言之，凡平圓之周爲其內容外切多等邊形之限。

如代數術第二百六十六款言，如令甲代平圓之任何弧，則  $\frac{\text{甲}}{\text{母}} \frac{\text{半徑}}{\text{半徑}}$  恒小于半徑，而  $\frac{\text{甲}}{\text{母}} \frac{\text{半徑}}{\text{半徑}}$  恒小于半徑。然令其弧爲任何小，則其式之同數必甚近于半徑，而其所差之數可小至不能以言語形容。所以此兩數中間之數爲一。即半徑也。故其公限亦爲一。

由此可見凡弧與弦切，三者之中取其二以相較，其比例之限必相等。

如代數術中亦會證甲弧爲  $\frac{\text{甲}}{\text{母}} \frac{\text{半徑}}{\text{半徑}}$  與  $\frac{\text{甲}}{\text{母}} \frac{\text{半徑}}{\text{半徑}}$  兩式之限，惟其卯必爲任何大。

依代數術第五十六款之例  $1 \frac{1}{\text{天}} 1 \frac{1}{\text{天}} 1 \frac{1}{\text{天}} \dots 1 \frac{1}{\text{天}}$  即  $1 \frac{1}{\text{天}}$ 。若天變至小

于一，而卯大至無窮，則  $\frac{1}{\text{天}} = 0$ ，而式變爲  $1 \frac{1}{\text{天}}$ 。所以任取其級數若干項之和，

必小于  $1 \frac{1}{\text{天}}$ 。惟其項愈多，則與  $1 \frac{1}{\text{天}}$  愈相近，而其所差之數可小至莫可名言。

則可見  $1 \frac{1}{\text{天}}$  必爲其諸級數之限。

若依二項例之式  $\left(1 \frac{1}{\text{天}}\right)^{\text{卯}} = 1 \frac{1}{\text{天}} 1 \frac{1}{\text{天}} \dots \left(1 \frac{1}{\text{天}}\right)^{\text{卯}} 1 \frac{1}{\text{天}} \dots \left(1 \frac{1}{\text{天}}\right)^{\text{卯}}$

$\left(1 \frac{1}{\text{天}}\right)^{\text{卯}} \dots$ ，其卯之同數無論如何，必合于理。惟卯若爲大數，則其各項之



乘數  $1 - \frac{1}{2^n}$  之類與一相較之差甚小，若卯愈大，則其差愈微；若令卯爲任意大，則各乘數可略等於一，所以得  $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{2^n \cdot 2^n} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{2^n \cdot 2^n \cdot 2^n} + \dots$  ①。

曾在代數術第一百七十七款中證①式之右邊爲由函數  $e^x$  而成。其戊之同數因爲  $e^{-x}$  即訥白爾對數之根也。所以卯若愈大則  $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^{2^n}$  必愈與  $e^{-x}$  相近，而其限爲  $e^{-x}$ 。

如令  $x = 1$ ，則  $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^{2^n}$  之限爲戊，即  $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^{2^n} - e^{-1} = 0.718281828$ ，故其函數爲常數。

第四款 惟因函數之同數本從變數而生，故變數之同數與函數之長數比則爲  $\frac{x}{e^x} = 1 - \frac{1}{2^n}$ 。

設函數之式爲  $y = e^x$ ，令天長數爲辛，而以函數之新同數爲戊，則



辛之各方之倍數，則函數 $\text{戊} = \text{天}^{\text{卯}}$ 之新同數必爲 $\text{戊}' = \text{辛}^{\text{一}} \text{巴}^{\text{辛}} \text{辛}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{二}} \text{辛}^{\text{三}} \text{辛}^{\text{四}} \text{辛}^{\text{五}} \text{辛}^{\text{六}} \text{辛}^{\text{七}} \text{辛}^{\text{八}} \text{辛}^{\text{九}} \text{辛}^{\text{十}} \text{辛}^{\text{十一}} \text{辛}^{\text{十二}}$ 。由是知函數之新同數必爲級數，其初項戊爲函數之原同數，其餘各項爲天之長數辛之各整方，以巳午未申之類爲各倍數，其各倍數皆爲天之別種函數，其式亦從本函數而生。

由以上各式又可見函數爲 $\text{戊} = \text{天}^{\text{一}}$ 、 $\text{戊} = \text{天}^{\text{二}}$ 、 $\text{戊} = \text{天}^{\text{三}}$ 、 $\text{戊} = \text{天}^{\text{四}}$ 之類，則其變數與函數之變比例必爲 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}' \text{丁} \text{戊}} = \frac{\text{二天}^{\text{一}} \text{辛}}{\text{戊}' \text{丁} \text{戊}} = \frac{\text{三天}^{\text{二}} \text{辛}}{\text{戊}' \text{丁} \text{戊}} = \frac{\text{四天}^{\text{三}} \text{辛}}{\text{戊}' \text{丁} \text{戊}} = \frac{\text{五天}^{\text{四}} \text{辛}}{\text{戊}' \text{丁} \text{戊}}$ 之類。總之若以卯爲天之整指數，則 $\text{戊} = \text{天}^{\text{卯}}$ 之變比例必爲 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}' \text{丁} \text{戊}} = \frac{\text{巴}^{\text{辛}} \text{辛}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{二}} \text{辛}^{\text{三}} \text{辛}^{\text{四}} \text{辛}^{\text{五}} \text{辛}^{\text{六}} \text{辛}^{\text{七}} \text{辛}^{\text{八}} \text{辛}^{\text{九}} \text{辛}^{\text{十}} \text{辛}^{\text{十一}} \text{辛}^{\text{十二}}}{\text{戊}' \text{丁} \text{戊}}$ 。由此可見，變數天之長數與函

數 $\text{天}^{\text{卯}}$ 之長數其變比例 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}' \text{丁} \text{戊}}$ 之同數 $\text{巴}^{\text{辛}} \text{辛}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{二}} \text{辛}^{\text{三}} \text{辛}^{\text{四}} \text{辛}^{\text{五}} \text{辛}^{\text{六}} \text{辛}^{\text{七}} \text{辛}^{\text{八}} \text{辛}^{\text{九}} \text{辛}^{\text{十}} \text{辛}^{\text{十一}} \text{辛}^{\text{十二}}$ ……可分之爲兩

式，其一式爲 $\text{巴}^{\text{辛}}$ ，此式與天之長數辛無相關；又一式爲 $\text{辛}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{二}} \text{辛}^{\text{三}} \text{辛}^{\text{四}} \text{辛}^{\text{五}} \text{辛}^{\text{六}} \text{辛}^{\text{七}} \text{辛}^{\text{八}} \text{辛}^{\text{九}} \text{辛}^{\text{十}} \text{辛}^{\text{十一}} \text{辛}^{\text{十二}}$ ……即 $\text{辛}^{\text{一}} (\text{辛}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{二}} \text{辛}^{\text{三}} \text{辛}^{\text{四}} \text{辛}^{\text{五}} \text{辛}^{\text{六}} \text{辛}^{\text{七}} \text{辛}^{\text{八}} \text{辛}^{\text{九}} \text{辛}^{\text{十}} \text{辛}^{\text{十一}} \text{辛}^{\text{十二}} \dots\dots)$ 。此式因以辛爲乘數，故辛若變小，其數亦必隨辛而變小。如令辛爲任何小，則此式之數可小至甚近于○。故此數可以不計，而以巳爲變比例之限。

設有繁函數之式  $\text{戊} = \text{甲} \text{上} \text{乙} \text{天} \text{上} \text{丙} \text{天} \text{上}^2$ ，令天之長數爲辛，則天變爲  $\text{天} \text{上} \text{辛} \text{上}^2$  之時，其函數之同數必變爲  $\text{戊}$

$$\left\{ \begin{aligned} &= \text{甲} \text{上} \text{乙} (\text{天} \text{上} \text{辛}) \text{上} \text{丙} (\text{天} \text{上} \text{辛}) \text{上}^2 \\ &= \text{甲} \text{上} \text{乙} \text{天} \text{上} \text{丙} \text{天} \text{上}^2 (\text{乙} \text{上} \text{二} \text{丙} \text{天}) \text{辛} \text{上} \text{丙} \text{辛} \text{上}^2 \end{aligned} \right. , \quad \text{故}$$

$$\text{戊}' \text{天} = (\text{乙} \text{上} \text{二} \text{丙} \text{天}) \text{辛} \text{上} \text{丙} \text{辛} \text{上}^2, \quad \frac{\text{辛}}{\text{戊}' \text{天}} = \text{乙} \text{上} \text{二} \text{丙} \text{天} \text{上} \text{丙} \text{辛} \text{上}^2。 \quad \text{其乙上二丙天}$$

爲本函數變比例之限。

以此法徧試各種特設之函數，見其皆有相類之性情，所以例設如左。

例曰：命任何自主之變數爲天，而令天之任何函數等于戊，則天變爲  $\text{天} \text{上} \text{辛} \text{上}^2$  之時，函數之新同數爲  $\text{戊}' = \text{戊} \text{上} \text{巴} \text{辛} \text{上} \text{午} \text{辛} \text{上}^2 \text{上} \text{未} \text{辛} \text{上}^2 \text{上} \dots\dots$ ，其變數與函數之變比例爲  $\frac{\text{辛}}{\text{戊}' \text{天}} = \text{巴} \text{上} \text{午} \text{辛} \text{上} \text{未} \text{辛} \text{上}^2 \text{上} \text{申} \text{辛} \text{上}^2 \text{上} \dots\dots$ 。此式中之初項巴爲變比例之限，

無論何種函數，其限皆可依此比例求之。

由以上所論變數之長數與函數之長數相關之理，可于算學中開出兩種極廣大極精微之法。

其第一種爲有任何變數之任何函數而求其變數與函數變比例之限。

其第二種爲有任何變數與函數變比例之限而求其函數之原式。

此二種法，若細攷其根源，即奈端所謂正流數、反流數也；亦即來本之所謂微分算術、積分算術也；又即拉果闡諸所謂函數變例也。

## 論各種函數求微分之公法

第五款 若函數之式爲  $\alpha = \beta$ ，令天變爲  $\beta + \pi$ ，則函數之新同數必爲  $\alpha' = \beta + \pi$ ，其與原同數之較爲  $\pi$ ，即  $\beta + \pi - \beta$ ，此式之初項  $\beta$ ，名之曰溢率。依同理推之，若函數之式爲  $\alpha = \beta$ ，令天變爲  $\beta + \pi$ ，則函數之新同數爲  $\alpha' = \beta + \pi$ ，其與原同數之較爲  $\alpha' - \alpha$ ，即  $\beta + \pi - \beta$ ，其初項  $\beta$  爲溢率。

若函數之式爲  $\alpha = \beta$ ，而天變爲  $\beta + \pi$ ，則函數之新同數與原同數之較爲  $\alpha' - \alpha$ ，而其溢率爲  $\pi$ 。

總言之，凡天之函數無論爲某方，恆可以  $\beta + \pi$  代其天，而變其函數之同數爲  $\alpha + \pi$ ，乃以原同數減之得  $\alpha - \beta + \pi - \beta = \pi$ ，而取其初項  $\beta$  爲溢率。

準此推之，則知天之溢率即爲其長數  $\pi$ 。惟因函數之溢率每藉天之長數而生，故微分

術中，恆以 $\frac{1}{x}$ 代天之溢率。其 $\frac{1}{x}$ 號者，非天之倍數，不過是天之溢率耳。溢率之名，本爲流數術中所用。而 $\frac{1}{x}$ 號者，卽微字之偏旁，故微分之術用之。

如有式 $y = x^2$ ，則 $\frac{dy}{dx} = 2x$ 。此式之意謂 $y$ 之微分等于 $2x$ 乘 $x$ 之微分。猶言函數 $y$ 之溢率等于以 $2x$ 乘其 $x$ 之溢率也。如有式 $y = x^3$ ，則 $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ 。此式之意謂 $y$ 之微分等于以 $3x^2$ 乘 $x$ 之微分。猶言函數 $y$ 之溢率等于以 $3x^2$ 乘其 $x$ 之溢率也。

第六款 惟因每遇 $y = x^2$ ，則 $\frac{dy}{dx} = 2x$ ，所以可寫之如 $\frac{dy}{dx} = 2x$ 。此爲天微分之

倍數，亦謂之微係數。

又依前法推之，如函數之式爲 $y = x^3$ ，則 $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ ，而 $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ 。其 $3x^2$ 爲原函數 $y = x^3$ 之微係數。

總言之，無論何種函數之微係數，皆可以 $\frac{dy}{dx}$ 代之。而函數之新同數爲 $y = x^2$ ， $y = x^3$ ， $y = x^4$ ，……，所以 $\frac{dy}{dx} = 2x$ ，其已爲天之他函數，其形每隨函數之式而變。如之 $y = x^2$ 爲何式，則其已之同數卽易求得。

凡函數之欲求微分者，先于其式之左旁作一 $\times$ 號以記之。如有 $[(\text{甲} \perp \text{天})(\text{乙} \neg \neg \text{天} \neg \neg)]$ 式，欲求其微分，則可先作 $\times[(\text{甲} \perp \text{天})(\text{乙} \neg \neg \text{天} \neg \neg)]$ 。

凡函數之欲求微係數者，于其式之左旁作 $\times$ 號，又以 $\times$ 天爲其分母。如有 $[(\text{甲} \perp \text{天})(\text{乙} \neg \neg \text{天} \neg \neg)]$ 式，欲求其微係數，則作 $\frac{\times[(\text{甲} \perp \text{天})(\text{乙} \neg \neg \text{天} \neg \neg)]}{\times \text{天}}$ 。

從以上各款諸說，易知求微分之公法。

法曰：無論天之任何函數，欲求微分，則以 $\times$ 天 $\neg \neg$ 代其原式中之天而詳之。依辛之整方數自小而大序之，取其初有辛之項，而以 $\times$ 天代其辛即得。

如有式 $\text{戊} = \text{甲} \text{天} \perp \text{乙} \text{天} \neg \neg$ ，欲求其微係數，則以 $\text{天} \perp \text{天} \neg \neg$ 代其天，而令函數之新同數

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} &= \text{甲}(\text{天} \perp \text{天} \neg \neg) \perp \text{乙}(\text{天} \perp \text{天} \neg \neg) \neg \neg \\ &= \text{甲} \text{天} \perp \text{乙} \text{天} \neg \neg \perp (\text{甲} \perp \neg \neg \text{乙} \text{天}) \text{天} \perp \text{乙} \text{天} \neg \neg \end{aligned} \right. \text{爲戊}， \text{則得戊}' \\ &= \text{戊} \perp (\text{甲} \perp \neg \neg \text{乙} \text{天}) \text{天} \perp \text{乙} \text{天} \neg \neg \end{aligned}$$

$$\neg \neg \text{乙} \text{天}) \text{天} \neg \neg， \text{以} \text{天} \text{天} \neg \neg \text{代其辛， 卽得} \text{天} \text{戊} = (\text{甲} \perp \neg \neg \text{乙} \text{天}) \text{天} \neg \neg， \text{故其} \frac{\text{天} \text{戊}}{\text{天} \text{戊}} = \text{甲} \perp \neg \neg \text{乙} \text{天}。$$

第七款 上款之法，必令天變爲 $\text{天} \perp \text{天} \neg \neg$ ，而詳其函數之同數爲級數，此乃論其立法之理當如是

也。惟求得級數之後，所用者僅爲其辛一方之項，則但能求得此項已足用矣。前于第四款中言此項之倍數爲變數與函數變比例之限，又于第六款中言此項之倍數謂之微係數。然則求函數之微係數與求變數與函數變比例之限，其法本無異也。

如有式  $\text{戊} = \frac{\text{天}}{\text{甲}^2}$ ，則  $\text{戊}' = \frac{\text{天} \text{上} \text{辛}}{\text{甲}^2}$ 。而  $\text{戊} \text{下} \text{戊}' = \frac{\text{天}}{\text{甲}^2} - \frac{\text{天} \text{上} \text{辛}}{\text{甲}^2}$ ，即  $\text{戊} \text{下} \text{戊}' = \frac{\text{天}(\text{天} \text{上} \text{辛})}{\text{下} \text{甲}^2 \text{辛}}$ ，故其變比例之式爲  $\frac{\text{辛}}{\text{戊} \text{下} \text{戊}'} = \frac{\text{天}(\text{天} \text{上} \text{辛})}{\text{下} \text{甲}^2}$ 。惟此式可不待詳爲級數而始得其變比例之限，因可見辛愈小，則其式愈近于  $\frac{\text{天}^2}{\text{甲}^2}$ ，故此式必即爲  $\frac{\text{天}}{\text{甲}}$  之同數，

所以得  $\text{天} \text{下} \text{戊} = \text{下} \frac{\text{天}^2}{\text{甲}^2 \text{天}}$ 。

若以戊爲任何函數之原同數，而以  $\text{天} \text{上} \text{辛}$  代其天，則其函數之新同數爲  $\text{戊}' = \text{戊} \text{上} \text{巴} \text{辛} \text{上} \text{午} \text{辛}^2 \text{上} \text{未} \text{辛}^3 \text{上} \dots$ ，即得  $\frac{\text{辛}}{\text{戊}' \text{下} \text{戊}} = \text{巴} \text{上} \text{午} \text{辛} \text{上} \text{未} \text{辛}^2 \text{上} \dots$ 。惟

因  $\frac{\text{辛}}{\text{戊}' \text{下} \text{戊}}$  之限爲巴，故得  $\frac{\text{天}}{\text{甲}} = \text{巴}$ ，而  $\text{天} \text{下} \text{戊} = \text{巴} \text{上} \text{天}$ 。

由此得一解曰：凡微分之術，其意專爲求任何變數與函數同時變大之限耳。凡求任何函數之微分，不過將一尋常之代數式另用他法以變化之。因其變化之法與代



第八款 凡變數與函數變比例之限，無論以何數爲主，其形必同。

[illegible]

如戌與亥爲兩函數，而戌 = 亥，其天變爲天<sub>上</sub>半之時，戌變爲戌<sub>上</sub>，亥變爲亥<sub>上</sub>，則戌<sub>上</sub> = 亥<sub>上</sub>，而戌<sub>上</sub>天戌 = 亥<sub>上</sub>天亥，故  $\frac{\text{戌}'\text{天戌}}{\text{戌}'\text{天亥}} = \frac{\text{亥}'\text{天亥}}{\text{亥}'\text{天亥}}$ 。如以巳與午各爲其變比例之限，則巳 = 午。故巳<sub>上</sub>天巳 = 午<sub>上</sub>天午，而巳<sub>上</sub>天巳 = 午<sub>上</sub>天午。

由此可見，凡函數之式無論如何改形，若其同數無異者，則其微係數必同。如函數之原式爲 $y = a^x + b^x$ ，若改其形爲 $y = (a^x + b^x)^{1/2}$ ，則此式之微係



申<sup>上</sup>巳<sup>上</sup>辛<sup>上</sup>午<sup>上</sup>辛<sup>上</sup>……，其巳、午爲由未函數所得之天之他函數；其巳、午爲由申函數所得之天之他函數。

再令戊<sup>上</sup> = 未<sup>上</sup>申<sup>上</sup>，則依法得戊<sup>上</sup> = 未<sup>上</sup>申<sup>上</sup> (未<sup>上</sup>巳<sup>上</sup>申<sup>上</sup>巳<sup>上</sup>辛<sup>上</sup> (未<sup>上</sup>午<sup>上</sup>上巳<sup>上</sup>上申<sup>上</sup>) 辛<sup>上</sup>上……)。以戊代其未<sup>上</sup>申<sup>上</sup>，移項而以辛約之，則得  $\frac{\text{戊}^{\text{上}}}{\text{戊}^{\text{上}} \text{辛}^{\text{上}}} = \frac{\text{未}^{\text{上}} \text{申}^{\text{上}}}{\text{未}^{\text{上}} \text{巳}^{\text{上}} \text{申}^{\text{上}} \text{巳}^{\text{上}} \text{辛}^{\text{上}}}$

(未<sup>上</sup>午<sup>上</sup>上巳<sup>上</sup>上申<sup>上</sup>辛<sup>上</sup>上……)。此式中之未<sup>上</sup>巳<sup>上</sup>與申<sup>上</sup>巳兩項乃天之他函數，而與辛無涉者，其餘各項俱有辛之各方爲乘數。設辛爲甚微，則其所乘之衆項亦甚微，故其變比例之限爲  $\frac{\text{戊}^{\text{上}} \text{辛}^{\text{上}}}{\text{戊}^{\text{上}} \text{辛}^{\text{上}}} = \frac{\text{未}^{\text{上}} \text{巳}^{\text{上}} \text{申}^{\text{上}} \text{巳}^{\text{上}}}{\text{未}^{\text{上}} \text{申}^{\text{上}} \text{巳}^{\text{上}} \text{辛}^{\text{上}}}$ 。惟因巳 =  $\frac{\text{未}^{\text{上}} \text{辛}^{\text{上}}}{\text{未}^{\text{上}} \text{申}^{\text{上}}}$ ，故可

依第六款之法以  $\frac{\text{未}^{\text{上}} \text{辛}^{\text{上}}}{\text{未}^{\text{上}} \text{申}^{\text{上}}}$  代其  $\frac{\text{未}^{\text{上}} \text{辛}^{\text{上}}}{\text{未}^{\text{上}} \text{申}^{\text{上}}}$ ，以  $\frac{\text{未}^{\text{上}} \text{辛}^{\text{上}}}{\text{未}^{\text{上}} \text{申}^{\text{上}}}$  代其  $\frac{\text{未}^{\text{上}} \text{辛}^{\text{上}}}{\text{未}^{\text{上}} \text{申}^{\text{上}}}$ 。則得  $\frac{\text{未}^{\text{上}} \text{辛}^{\text{上}}}{\text{未}^{\text{上}} \text{申}^{\text{上}}} = \frac{\text{未}^{\text{上}} \text{辛}^{\text{上}}}{\text{未}^{\text{上}} \text{申}^{\text{上}}} \cdot \frac{\text{未}^{\text{上}} \text{辛}^{\text{上}}}{\text{未}^{\text{上}} \text{申}^{\text{上}}}$ ，而  $\frac{\text{未}^{\text{上}} \text{辛}^{\text{上}}}{\text{未}^{\text{上}} \text{申}^{\text{上}}} = \frac{\text{未}^{\text{上}} \text{辛}^{\text{上}}}{\text{未}^{\text{上}} \text{申}^{\text{上}}}$ 。故得專法如左：

凡求同變彼此兩函數相乘積之微分，法將此函數乘彼函數之微分，又將彼函數乘此函數之微分，而以乘得之兩式相加即得。

## 求多函數連乘積之微分

第十一款 前款論函數之式爲 $\frac{戊}{未}$ ，則 $\frac{戊}{未} = \frac{未}{未} \cdot \frac{戊}{未}$ ，所以 $\frac{戊}{未} = \frac{未}{未} \cdot \frac{戊}{未}$ 。

由此推之，如戊爲三箇同變數之函數連乘如 $\frac{未}{未} \cdot \frac{戊}{未} \cdot \frac{戊}{未}$ ，可令其母 $= \frac{未}{未}$ ，則亦能爲 $\frac{戊}{未}$ 。

而 $\frac{戊}{未} = \frac{未}{未} \cdot \frac{戊}{未}$ 。惟因母 $= \frac{未}{未}$ ，可依同例得 $\frac{戊}{未} = \frac{未}{未} \cdot \frac{戊}{未}$ 。

所以 $\frac{戊}{未} = \frac{未}{未} \cdot \frac{戊}{未}$ 。若仍將 $\frac{未}{未}$ 代還其戊而以常法化之，則爲 $\frac{戊}{未} =$

$\frac{未}{未} \cdot \frac{戊}{未} \cdot \frac{戊}{未}$ 。故得專法如左：

凡求同變數之若干函數連乘積之微分，法以各本函數之微分與其餘之各他函數連乘，而以各乘得之式相加卽得。

此法易用以總式以明之。無論其同變數之函數有若干數連乘，皆可以一例推之：

如多函數連乘之式爲 $\frac{未}{未} \cdot \frac{戊}{未}$ ，則其微分之式爲 $\frac{未}{未} \cdot \frac{戊}{未} = \frac{未}{未} \cdot \frac{戊}{未}$ 。

$\frac{戊}{未} \cdot \frac{未}{未} = \frac{戊}{未} \cdot \frac{未}{未}$ 。

# 求變數之分函數微分

第十二款 若有分數之式，其母子爲同變數之各函數，則欲得其求微分之專法，可令  $\frac{u}{v}$  。

則未<sub>二</sub>戊申<sub>一</sub>，而<sub>二</sub>未<sub>二</sub>戊申<sub>一</sub>。乃以其戊之同數<sub>二</sub>未<sub>一</sub>代其戊，則<sub>二</sub>未<sub>二</sub>

申<sub>二</sub>。故得專法如左……

凡同變量之函數，若爲分數，則求微分之法可將分母乘其分子之微分，乃以分子乘分母之微分減之，而以分母之平方約之。

此法亦可用一總式以明之。

[illegible]

## 求變數之分函數微分

而  $\frac{\text{亥地}}{\text{子(亥地)}} = \frac{\text{亥}}{\text{子}} \frac{\text{地}}{\text{地}}$ ，故得  $\frac{\text{戌}}{\text{亥}} = \frac{\text{未}}{\text{子}} \frac{\text{中}}{\text{申}} \frac{\text{酉}}{\text{酉}} \frac{\text{亥地}}{\text{子地}}$ 。由

是知若有分數之函數，其分母分子爲任若干同變數之函數連乘之積如  $\frac{\text{亥地}}{\text{未申酉}}$  者，可

以  $\frac{\text{亥地}}{\text{未申酉}} = \frac{\text{亥地}}{\text{未申酉}} \left[ \frac{\text{未}}{\text{子}} \frac{\text{申}}{\text{申}} \frac{\text{酉}}{\text{酉}} \frac{\text{亥}}{\text{亥}} \frac{\text{地}}{\text{地}} \right]$  之式明之。