微積溯源序

微積溯源八卷，前四卷爲微分術，後四卷爲積分術，乃算學中最深之事也。余既與西士傅蘭雅譯畢代數術二十五卷，更思求其進境，故又與傅君譯此書焉。先是咸豐年間，曾有海甯李壬叔與西士偉烈亞力譯出代微積拾級一書，流播海內。余素與壬叔相友，得讀其書，粗明微積二術之梗概。所以又譯此書者，蓋欲補其所略也。書中代數之式甚繁，校算不易，則劉君省菴之力居多。

今刻工已竣矣，故序之，曰：吾以爲古時之算法惟有加減而已。其乘與除乃因加減之不勝其繁，故更立二術以使之簡易也。開方之法，又所以濟除法之窮者也。蓋算學中自有加減乘除開方五法，而一切淺近易明之數，無不可通矣。惟人之心思智慮日出不窮，往往以能人之所不能者爲快。遇有窒礙難通之處，輒思立法以濟其窮。故有減其所不可減而正負之名不得不立矣；除其所不能除而寄母通分之法又不得不立矣。代數中種種記號之法皆出於不得已而立者也，惟每立一法必能使繁者爲簡，難者爲易，遲者爲速，而算學之境界藉此得更進一層。如是屢進不已而所立之法於是乎日多矣。微分積分者，蓋又因乘除開

方之不勝其繁，且有窒礙難通之處，故更立此二術以濟其窮，又使簡易而速者也。試觀圓徑求周、真數求對等事，雖無微分積分之時，亦未嘗不可求，惟須乘除開方數十百次。其難有不可言喻者，不如用微積之法理明而數捷也。然則謂加減乘除開方代數之外者，更有二術焉，一曰微分，一曰積分可也。其積分術爲微分之還原，猶之開平方爲自乘之還原、除法爲乘之還原、減法爲加之還原也。然加與乘其原無不可還，而微分之原有可還有不可還，是猶算式中有不可開之方耳，又何怪焉。如必曰加減乘除開方已足供吾之用矣，何必更究其精？是舍舟車之便利而必欲負重遠行也。其用力多而成功少，蓋不待智者而辨矣。

同治十三年九月十八日，金匱華蘅芳序。

微積溯源卷一

論變數與函數之變比例

第一款　用代數以解任何曲線，其中每有幾種數，其大小恒有定率者，如橢圓之長徑、拋物線之通徑、雙曲線之屬徑之類是也。又每有幾種數可有任若干相配之同數，其大小恒不能有定率者，如曲線任一點之縱橫線是也。數既有此兩種分別，則每種須有一總名以賅之，故名其有定之數曰常數，無定之數曰變數。

凡常數之同數不能增亦不能損。

凡變數之同數，能變爲大，亦能變爲小。故其從此同數變至彼同數之時，必歷彼此二數間最小最微之各分數。

如平圓之半徑爲常數，而其任一段之弧或弧之弦矢切割各線、及各線與弧所成之面，

皆謂之變數。

橢圓之長徑短徑皆爲常數，而其曲線之任一段或曲線上任一點之縱橫線，並其形内形外所能作之任何線或面或角，皆謂之變數。

拋物線之通徑爲常數，而其曲線之任一段或任一點之縱橫線、或弧與縱橫線所成之面，皆謂之變數。他種曲線亦然。

凡常數，恒以甲乙丙丁等字代之。凡變數，恒以天地人等字代之。

第二款　若有彼此二數皆爲變數，此數變而彼數因此數變而亦變者，則彼數爲此數之函數。

如平圓之八線皆爲弧之函數。若反求之，亦可以弧爲八線之函數。

又如重學中令物體前行之力，與其物所行之路，皆爲時刻之函數。

如有式$地 = \frac{甲 \top 天}{甲 \perp 天}$，此式中甲爲常數，天爲自主之變數，地爲天之函數。故地之同數能以天與甲明之。

如有式$天 = \frac{地 \perp 一}{甲(地 \top 一)}$，此式中甲與一皆爲常數，地爲自主之變數，天爲地之函數，故天之同數可以地與甲及一明之。

如有式$戊 = 甲 \perp 乙天 \perp 丙天^{二}$或$戊 = \sqrt{甲^{二} \perp 乙天 \perp 天^{二}}$或$戊 = \frac{丙 \perp 天^{二}}{甲 \perp \sqrt{乙天}}$，其

甲乙丙爲常數，天爲自變之數，而戊皆爲天之函數。

凡函數之中，可以有數箇自主之變數。

如有式 $戊 = 甲天^{二} \perp 乙天地 \perp 丙地^{二}$ 則天與地皆爲自主之變數，戊爲天地兩變數之函數。

凡變數之函數，其形雖有多種，然每可化之，使不外乎以下數類 $天^{卯}$、$甲^{天}$、正弦天、餘弦天 等類是也。

凡函數爲 $天^{卯}$ 之類，其指數爲常數，則可從天之卯方，用代數之常法化之。

而以有窮之項明其函數之同數。故謂之代數函數，亦謂之常函數。

如有式 $戊 = 甲天^{三} \perp \dfrac{\sqrt{甲^{二} \perp 天^{二}}}{乙天^{二} \top 丙^{二}天}$，此種函數，其戊之同數可用加減乘除開方等法而得之。

凡函數爲甲、對天之類，則其函數之同數不能以有窮之項明之。故謂之越函數。越者，超越於尋常之意也。

凡函數爲正弦天、餘弦天及正切天、正割天之類，其函數之同數皆可以平圓之各線明之。故謂之圓函數，亦謂之角函數。

以上三種函數常函數、越函數、圓函數也。，若已知天之同數，則其函數之同數即可求得。故

名此三種函數爲陽函數。因其顯而易明，故謂之陽函數。

更有他種函數，必先解其方程式，令函數中之各變數分開，然後能求其同數者。

如有式$\text{戊天} = \frac{\text{戊} \top \text{天}}{\text{戊} \perp \text{天}}$，其戊爲天之函數，如欲求其戊與天相配之同數，必先解其二次方程式始能通。

此種之式名曰天之陰函數。因其雜糅未明，故謂之陰函數。反之亦可云天爲戊之陰函數。

如解其方程式爲$\text{戊} = \frac{\text{二}}{\text{一}}\left[\text{天} \perp \frac{\text{天}}{\text{一}} \perp \frac{\text{天}}{\sqrt{\text{天}^{\text{四}} \perp \text{六天}^{\text{二}} \perp \text{一}}}\right]$，則戊變爲天之陰函數。

昔代數之家，凡遇須用開平方之處，每于其式之左旁作一根字以記之，如根天爲天之平方根。後又變通其法，而以根號記之，如$\sqrt{\text{天}}$爲天之平方根。此代數之例也。茲可仿照此例，凡遇某變數之函數，亦用一號以記之。所以凡有任何變數之函數，皆可書一函字于其變數之旁，以爲識別。

如天之函數則作函天，或作函(天)，皆言天之函數也。

所以凡見變數之左旁有一函字者，其函字并非代表天之倍數，其意謂是某變數之函數也。

用此法則可將$\text{戊} = \text{天}^{\text{卯}}$、$\text{戊} = \text{甲}^{\text{天}}$、$\text{戊} = \text{對天}$、$\text{戊} = \text{正弦天}$、$\text{戊} = \text{餘弦天}$ 各種之式

以一語賅之，謂之$戊 = 函天$ 或$戊 = 函(天)$。若函數從兩箇變數而成，其天與地皆爲自主之變數，其式如$戊 = 甲天^{二} \perp 乙天地 \perp 丙地^{二}$者，則可以$戊 = 函(天, 地)$別之。函數爲多箇變數所成者，仿此推之。

惟函數只指其變數言之，若甲乙丙丁各常數，雖多不論。

第三款 凡觀此書者，必先明變數與函數變比例之限。如幾何原本中證明平圓之面積必比其外切多等邊形之面積微小，若其外切多等邊形之邊愈多，則其面積愈近于平圓之面積。所以可設平圓之面積爲任何小，而切其圓外爲多等邊形，可使多等邊形之面積與平圓之面積較其數甚小于所設之圓面積；再設其多等邊形之面積爲級數，而其邊之變率可每變多若干倍，則其多等邊形之面積必漸與平圓之面積相近而以平圓爲限。雖切于圓外之多邊形其邊任變至若何多，其面積總不能等于平圓之面積。然其級數之總數可比平圓之面積所差甚微，其較數之小，可小至莫可名言。

若用此法于圓內容多等邊形，則其多等邊形之面積亦以平圓之面積爲限。

總言之，凡平圓之周爲其內容外切多等邊形之限。

如代數術第二百六十六款言，如令甲代平圓之任何弧，則$\frac{正弦甲}{甲}$恒小于半徑，而$\frac{正切甲}{甲}$

恒小于半徑。然令其弧爲任何小，則其式之同數必甚近于半徑，而其所差之數可小至不能以言語形容。所以此兩數中間之數爲一。即半徑也。故其公限亦爲一。

由此可見凡弧與弦切，三者之中取其二以相較，其比例之限必相等。

如代數術中亦會證甲弧爲卯正切$\frac{\text{卯}}{\text{甲}}$與卯正弦$\frac{\text{卯}}{\text{甲}}$兩式之限，惟其卯必爲任何大。

依代數術第五十六款之例$\text{〡丄天丄天}^{\text{二}}\text{丄天}^{\text{三}}\text{……丄天}^{\text{卯丅〡}}$即$\frac{\text{〡丅天}}{\text{〡丅天}^{\text{卯}}}$。若天變至小于一，而卯大至無窮，則$\text{天}^{\text{卯}}=\text{〇}$，而式變爲$\frac{\text{〡丅天}}{\text{〡}}$。所以任取其級數若干項之和，必小于$\frac{\text{〡丅天}}{\text{〡}}$。惟其項愈多，則與$\frac{\text{〡丅天}}{\text{〡}}$愈相近，而其所差之數可小至莫可名言。則可見$\frac{\text{〡丅天}}{\text{〡}}$必爲其諸級數之限。

若依二項例之式$\left(\text{〡丄}\frac{\text{卯}}{\text{天}}\right)^{\text{卯}}=\text{〡丄}\frac{\text{〡}}{\text{天}}\text{丄}\frac{\text{〡}\cdot\text{二}}{\text{天}^{\text{二}}}\left(\text{〡丄}\frac{\text{卯}}{\text{〡}}\right)\text{丄}\frac{\text{〡}\cdot\text{二}\cdot\text{三}}{\text{天}^{\text{三}}}\left(\text{〡丄}\frac{\text{卯}}{\text{〡}}\right)\left(\text{〡丄}\frac{\text{卯}}{\text{二}}\right)\text{丄……}$，其卯之同數無論如何，必合于理。惟卯若爲大數，則其各項之乘數$\text{〡丄}\frac{\text{卯}}{\text{二}}$、$\text{〡丄}\frac{\text{卯}}{\text{三}}$之類與一相較之差甚小，若卯愈大，則其差愈微；若令

卯爲任意大，則各乘數可略等于一，所以得$\left(一\perp\frac{卯}{天}\right)^{卯}=一\perp\frac{一}{天}\perp\frac{一\cdot二}{天^{二}}\perp\frac{一\cdot二\cdot三}{天^{三}}\perp\cdots\cdots$甲。

曾在代數術第一百七十七款中證甲式之右邊爲由函數$戊^{天}$而成。其戊之同數因爲二.七一八二八一八，卽訥白爾對數之根也。所以卯若愈大則$\left(一\perp\frac{卯}{天}\right)^{卯}$必愈與$戊^{天}$相近，而其限爲$戊^{天}$。

如令$天=一$，則$\left(一\perp\frac{卯}{天}\right)^{卯}$之限爲戊，卽$\left(一\perp\frac{卯}{天}\right)^{卯}-戊=二.七一八二八一八$，故其函數爲常數。

第四款 惟因函數之同數本從變數而生，故變數之同數與函數之長數比則爲$\frac{辛}{戊'\top戊}=二天\perp辛$。

設函數之式爲$戊=天^{三}$，令天長數爲辛，而以函數之新同數爲$戊'$則

$$戊'=(天\perp辛)^{三}\begin{cases}=天^{三}\perp三天^{二}辛\perp三天辛^{二}\perp辛^{三}\\=戊\perp三天^{二}辛\perp三天辛^{二}\perp辛^{三}\end{cases}$$，而$\frac{辛}{戊'\top戊}=三天^{二}\perp$

$\text{三天辛}\perp\text{辛}^{\text{二}}$。可見天變爲$\text{天}\perp\text{辛}$之時，其函數戊必變爲$\text{戊}\perp\text{三天}^{\text{二}}\text{辛}\perp\text{三天辛}^{\text{二}}\perp\text{辛}^{\text{三}}$，其所長之數爲$\text{三天}^{\text{二}}\text{辛}\perp\text{三天辛}^{\text{二}}\perp\text{辛}^{\text{三}}$。此式中之各項皆爲辛之整方與他數相乘所成。又可見變數與函數之變比例，其式爲$\text{三天}^{\text{二}}\text{辛}\perp\text{三天辛}^{\text{二}}\perp\text{辛}^{\text{三}}$，其初項$\text{三天}^{\text{二}}$與天之長數辛無相關。

設函數之式爲$\text{戊}=\text{天}^{\text{四}}$。令天之長數爲辛，而以$\text{戊}'$爲函數之新同數，則$\text{戊}'=\text{戊}\perp\text{四天}^{\text{三}}\text{辛}\perp\text{六天}^{\text{二}}\text{辛}^{\text{二}}\perp\text{四天辛}^{\text{三}}\perp\text{辛}^{\text{四}}$，而$\frac{\text{辛}}{\text{戊}'\top\text{戊}}=\text{四天}^{\text{三}}\perp\text{六天}^{\text{二}}\text{辛}\perp\text{四天辛}^{\text{二}}\perp\text{辛}^{\text{三}}$。

由此可見天若變爲$\text{天}\perp\text{辛}$，則其各函數之新同數如左：

如$\text{戊}=\text{天}^{\text{二}}$，則$\text{戊}'=\text{戊}\perp\text{二天辛}\perp\text{辛}^{\text{二}}$。如$\text{戊}=\text{天}^{\text{三}}$，則$\text{戊}'=\text{戊}\perp\text{三天}^{\text{二}}\text{辛}\perp\text{三天辛}^{\text{二}}\perp\text{辛}^{\text{三}}$。如$\text{戊}=\text{天}^{\text{四}}$，則$\text{戊}'=\text{戊}\perp\text{四天}^{\text{三}}\text{辛}\perp\text{六天}^{\text{二}}\text{辛}^{\text{二}}\perp\text{四天辛}^{\text{三}}\perp\text{辛}^{\text{四}}$。其餘類推。

總言之，若以卯爲天之任何整指數，而令天之長數爲辛，又以巳午未申等字挨次而代辛之各方之倍數，則函數$\text{戊}=\text{天}^{\text{卯}}$之新同數必爲$\text{戊}'=\text{辛}\perp\text{巳辛}\perp\text{午辛}^{\text{二}}\perp\text{未辛}^{\text{三}}\perp\text{申辛}^{\text{四}}\perp\cdots\cdots$。由是知函數之新同數必爲級數，其初項戊爲函數之原同數，其餘各項爲天之長數辛之各整方，以巳午未申之類爲各倍數，其各倍數皆爲天之別種函數，

其式亦從本函數而生。

由以上各式又可見函數爲$戊=天^{二}$、$戊=天^{三}$、$戊=天^{四}$之類，則其變數與函數之變比例必爲$\frac{戊'丅戊}{辛}=二天\perp辛$、$\frac{戊'丅戊}{辛}=三天^{二}\perp三天辛\perp辛^{二}$、$\frac{戊'丅戊}{辛}=四天^{三}\perp六天^{二}辛\perp四天辛^{二}\perp辛^{三}$之類。總之若以卯爲天之整指數，則$戊=天^{卯}$之變比例必爲$\frac{戊'丅戊}{辛}=巳\perp午辛\perp未辛^{二}\perp申辛^{三}\perp\cdots\cdots$。由此可見，變數天之長數與函數$天^{卯}$之長數其變比例$\frac{戊'丅戊}{辛}$之同數$巳\perp午辛\perp未辛^{二}\perp申辛^{三}\perp\cdots\cdots$可分之爲兩式，其一式爲巳，此式與天之長數辛無相關；又一式爲$午辛\perp未辛^{二}\perp申辛^{三}\perp\cdots\cdots$。卽$辛(午\perp未辛\perp申辛^{二}\perp\cdots\cdots)$。此式因以辛爲乘數，故辛若變小，其數亦必隨辛而變小。如令辛爲任何小，則此式之數可小至甚近于〇。故此數可以不計，而以巳爲變比例之限。

設有繁函數之式$戊=甲\perp乙天\perp丙天^{二}$，令天之長數爲辛，則天變爲$天\perp辛$之時，其函數之同數必變爲$戊\begin{cases}=甲\perp乙(天\perp辛)\perp丙(天\perp辛)^{二}\\=甲\perp乙天\perp丙天^{二}\perp(乙\perp二丙天)辛\perp丙辛^{二}\end{cases}$，故

$戊'丅戊 = (乙 \perp 二丙天)辛 \perp 丙辛^{二}$，而$\dfrac{辛}{戊'丅戊} = 乙 \perp 二丙天 \perp 丙辛$。其$乙 \perp 二丙天$爲本函數變比例之限。

以此法徧試各種特設之函數，見其皆有相類之性情，所以例設如左。

例曰：命任何自主之變數爲天，而令天之任何函數等于戊，則天變爲$天 \perp 辛$之時，函數之新同數爲$戊' = 戊 \perp 巳辛 \perp 午辛^{二} \perp 未辛^{三} \perp \cdots\cdots$，其變數與函數之變比例爲$\dfrac{辛}{戊'丅戊} = 巳 \perp 午辛 \perp 未辛^{二} \perp 申辛^{三} \perp \cdots\cdots$。此式中之初項巳爲變比例之限，無論何種函數，其限皆可依此比例求之。

由以上所論變數之長數與函數之長數相關之理，可于算學中開出兩種極廣大極精微之法。

其第一種爲有任何變數之任何函數而求其變數與函數變比例之限。

其第二種爲有任何變數與函數變比例之限而求其函數之原式。

此二種法，若細攷其根源，卽奈端所謂正流數、反流數也；亦卽來本之所謂微分算術、積分算術也；又卽拉果闌諸所謂函數變例也。

論各種函數求微分之公法

第五款 若函數之式爲$戊=天^{二}$，令天變爲$天丄辛$，則函數之新同數必爲$戊'=戊丄二天辛丄辛^{二}$，其與原同數之較爲$戊'丅戊$，即$二天辛丄辛^{二}$，此式之初項$二天辛$，名之曰溢率。

依同理推之，若函數之式爲$戊=天^{三}$，令天變爲$天丄辛$，則函數之新同數爲$戊'=戊丄三天^{二}辛丄三天辛^{二}丄辛^{三}$，其與原同數之較爲$戊'丅戊$，即$三天^{二}辛丄三天辛^{二}丄辛^{三}$。其初項$三天^{二}辛$爲溢率。

若函數之式爲$戊=天^{四}$，而天變爲$天丄辛$，則函數之新同數與原同數之較爲$四天^{三}辛丄六天^{二}辛^{二}丄四天辛^{三}丄辛^{四}$，而其溢率爲$四天^{三}辛$。

總言之，凡天之函數無論爲某方，恆可以$天丄辛$代其天，而變其函數之同數爲$戊丄巳辛丄午辛^{二}丄未辛^{三}丄\cdots\cdots$，乃以原同數戊減之得$巳辛丄午辛^{二}丄未辛^{三}丄\cdots\cdots$，而取其初項$巳辛$爲溢率。

準此推之，則知天之溢率即爲其長數辛。惟因函數之溢率每藉天之長數而生，故微分術中，恆以$彳天$代天之溢率。其彳號者，非天之倍數，不過是天之溢率耳。溢率之名，本爲流數術中所用。而彳號者，即微字之偏旁，故微分之術用之。

如有式$戊 = 天^{二}$，則$彳戊 = 二天彳天$。此式之意謂戊之微分等于二天乘天之微分。猶言函數戊之溢率等于以二天乘其天之溢率也。如有式$戊 = 天^{三}$，則$彳戊 = 三天^{二}彳天$。此式之意謂戊之微分等于三天^{二}乘天之微分。猶言函數戊之溢率等于以三天^{二}乘其天之溢率也。

第六款　惟因每遇$戊 = 天^{二}$，則$彳戊 = 二天彳天$，所以可寫之如$\frac{彳天}{彳戊} = 二天$。此爲天微分之倍數，亦謂之微係數。

又依前法推之，如函數之式爲$戊 = 天^{三}$，則$彳戊 = 三天^{二}彳天$，而$\frac{彳天}{彳戊} = 三天^{二}$。

其三天^{二}爲原函數$戊 = 天^{三}$之微係數。

總言之，無論何種函數之微係數，皆可以$\frac{彳天}{彳戊}$代之。而函數之新同數爲$戊丄巳辛丄午辛^{二}丄\cdots\cdots$，所以$\frac{彳天}{彳戊} = 巳$，其巳爲天之他函數，其形每隨函數之式而變。如之戊之同數爲何式，則其巳之同數卽易求得。

凡函數之欲求微分者，先于其式之左旁作丨彳號以記之。如有$[(甲丄天)(乙^{二}丅天^{二})]$式，欲求其微分，則可先作$彳[(甲丄天)(乙^{二}丅天^{二})]$。

凡函數之欲求微係數者，于其式之左旁作彳號，又以$彳天$爲其分母。如有$[(甲 \perp 天)(乙^{二} \top 天^{二})]$式，欲求其微係數，則作$\dfrac{彳天}{彳[(甲 \perp 天)(乙^{二} \top 天^{二})]}$。

從以上各款諸說，易知求微分之公法。

法曰：無論天之任何函數，欲求微分，則以$天 \perp 辛$代其原式中之天而詳之。依辛之整方數自小而大序之，取其初有辛之項，而以$彳天$代其辛即得。

如有式$戊 = 甲天 \perp 乙天^{二}$，欲求其微係數，則以$天 \perp 辛$代其天，而令函數之新同數爲$戊'$，則得
$$戊' \left\{ \begin{aligned} &= 甲(天 \perp 辛) \perp 乙(天 \perp 辛)^{二} \\ &= 甲天 \perp 乙天^{二} \perp (甲 \perp 二乙天)辛 \perp 乙辛^{二} \\ &= 戊 \perp (甲 \perp 二乙天)辛 \perp 乙辛^{二} \end{aligned} \right.$$
。取其初有辛之項$(甲 \perp 二乙天)辛$，以$彳天$代其辛，卽得$彳戊 = (甲 \perp 二乙天)彳天$，故其$\dfrac{彳戊}{彳天} = (甲 \perp 二乙天)$。