

## 微積溯源序

微積溯源八卷，前四卷爲微分術，後四卷爲積分術，乃算學中最深之事也。余既與西士傅蘭雅譯畢代數術二十五卷，更思求其進境，故又與傅君譯此書焉。先是咸豐年間，曾有海寧李壬叔與西士偉烈亞力譯出代微積拾級一書，流播海內。余素與壬叔相友，得讀其書，粗明微積二術之梗概。所以又譯此書者，蓋欲補其所略也。書中代數之式甚繁，校算不易，則劉君省菴之力居多。

今刻工已竣矣，故序之，曰：吾以爲古時之算法惟有加減而已。其乘與除乃因加減之不勝其繁，故更立二術以使之簡易也。開方之法，又所以濟除法之窮者也。蓋算學中自有加減乘除開方五法，而一切淺近易明之數，無不可通矣。惟人之心思智慮日出不窮，往往以能人之所不能者爲快。遇有窒礙難通之處，輒思立法以濟其窮。故有減其所不可減而正負之名不得不立矣；除其所不能除而寄母通分之法又不得不立矣。代數中種種記號之法皆出於不得已而立者也，惟每立一法必能使繁者爲簡，難者爲易，遲者爲速，而算學之境界藉此得更進一層。如是屢進不已而所立之法於是乎日多矣。微分積分者，蓋又因乘除開

方之不勝其繁，且有窒礙難通之處，故更立此二術以濟其窮，又使簡易而速者也。試觀圓徑求周、真數求對等事，雖無微分積分之時，亦未嘗不可求，惟須乘除開方數十百次。其難有不可言喻者，不如用微積之法理明而數捷也。然則謂加減乘除開方代數之外者，更有二術焉，一曰微分，一曰積分可也。其積分術爲微分之還原，猶之開平方爲自乘之還原、除法爲乘之還原、減法爲加之還原也。然加與乘其原無不可還，而微分之原有可還有不可還，是猶算式中有不可開之方耳，又何怪焉。如必曰加減乘除開方已足供吾之用矣，何必更究其精？是舍舟車之便利而必欲負重遠行也。其用力多而成功少，蓋不待智者而辨矣。

同治十三年九月十八日，金匱華蘅芳序。

# 微積溯源卷一

## 論變數與函數之變比例

第一款 用代數以解任何曲線，其中每有幾種數，其大小恆有定率者，如橢圓之長徑、拋物線之通徑、雙曲線之屬徑之類是也。

又每有幾種數可有任若干相配之同數，其大小恆不能有定率者，如曲線任一點之縱橫線是也。

數既有此兩種分別，則每種須有一總名以賅之，故名其有定之數曰常數，無定之數曰變數。

凡常數之同數不能增亦不能損。

凡變數之同數，能變爲大，亦能變爲小。故其從此同數變至彼同數之時，必歷彼此二數間最小最微之各分數。

如平圓之半徑爲常數，而其任一段之弧或弧之弦矢切割各線、及各線與弧所成之面，

皆謂之變數。

橢圓之長徑短徑皆爲常數，而其曲線之任一段或曲線上任一點之縱橫線，並其形內形外所能作之任何線或面或角，皆謂之變數。

拋物線之通徑爲常數，而其曲線之任一段或任一點之縱橫線、或弧與縱橫線所成之面，皆謂之變數。他種曲線亦然。

凡常數，恆以甲乙丙丁等字代之。凡變數，恆以天地人等字代之。

第二款 若有彼此二數皆爲變數，此數變而彼數因此數變而亦變者，則彼數爲此數之函數。

如平圓之八線皆爲弧之函數。若反求之，亦可以弧爲八線之函數。

又如重學中令物體前行之力，與其物所行之路，皆爲時刻之函數。

如有式  $\frac{\text{甲} \perp \text{天}}{\text{甲} \perp \text{天}}$ ，此式中甲爲常數，天爲自主之變數，地爲天之函數。故地之同

數能以天與甲明之。

如有式  $\frac{\text{地} \perp \text{一}}{\text{甲}(\text{地} \perp \text{一})}$ ，此式中甲與一皆爲常數，地爲自主之變數，天爲地之函數，

故天之同數可以地與甲及一明之。

如有式  $\text{戊} = \frac{\text{甲} \perp \text{乙} \text{天} \perp \text{丙} \text{天} \perp \text{戊} \text{戊}}{\sqrt{\text{甲} \perp \text{乙} \text{天} \perp \text{天} \perp \text{戊} \text{戊}}} = \frac{\text{丙} \perp \text{天} \perp}{\text{甲} \perp \sqrt{\text{乙} \text{天}}}$ ，其甲

乙丙爲常數，天爲自變之數，而戊皆爲天之函數。

凡函數之中，可以有數箇自主之變數。

如有式  $戊 = 甲^2 \cdot 乙 \cdot 丙^2$ ，則天與地皆爲自主之變數，戊爲天地兩變數之函數。

凡變數之函數，其形雖有多種，然每可化之，使不外乎以下數類  $天^n$ ， $甲^m \cdot 乙^n$ ， $正切天$ ， $餘弦天$  等類是也。

凡函數爲  $天^n$  之類，其指數爲常數，則可從天之卯方，用代數之常法化之。而以有窮之項明其函數之同數。故謂之代數函數，亦謂之常函數。

如有式  $戊 = 甲^2 \cdot 乙 \cdot 丙^2$ ，此種函數，其戊之同數可用加減乘除開方等法而得之。

凡函數爲  $天^n$ ， $正切天$  之類，則其函數之同數不能以有窮之項明之。故謂之越函數。越者，超越於尋常之意也。

凡函數爲  $正切天$ ， $餘弦天$  及  $正切天$ ， $正切天$  之類，其函數之同數皆可以平圓之各線明之。故謂之圓函數，亦謂之角函數。

以上三種函數常函數、越函數、圓函數也。，若已知天之同數，則其函數之同數即可求得。故

名此三種函數爲陽函數。因其顯而易明，故謂之陽函數。

更有他種函數，必先解其方程式，令函數中之各變數分開，然後能求其同數者。

如有式  $\sqrt{x} = \frac{x+1}{x-1}$ ，其戊爲天之函數，如欲求其戊與天相配之同數，必先解其次方程式始能通。

此種之式名曰天之陰函數。因其雜糅未明，故謂之陰函數。反之亦可云天爲戊之陰函數。

如解其方程式爲  $\sqrt{x} = \frac{x+1}{x-1}$ ，則戊變爲天之陰函數。

整理者註：右最後一句云戊變爲天之陰函數，這顯而易見是錯誤的。原文大英百科全書卷第九之 Fluxions 作 explicit function，即陽函數，此當爲譯者譯錯。目前由於校勘凡例未定，暫留此字，待討論後決定修改與否。

昔代數之家，凡遇須用開平方之處，每于其式之左旁作一根字以記之，如  $\sqrt{x}$  爲天之平方根。後又變通其法，而以根號記之，如  $\sqrt{x}$  爲天之平方根。此代數之例也。茲可仿照此例，凡遇某變數之函數，亦用一號以記之。所以凡有任何變數之函數，皆可書一函字于其變數之旁，以爲識別。

如天之函數則作  $\text{函}x$ ，或作  $\text{函}(x)$ ，皆言天之函數也。

所以凡見變數之左旁有一函字者，其函字並非代表天之倍數，其意謂是某變數之函數

也。

用此法則可將 $\text{成} = \text{天}^{\text{卯}}$ 、 $\text{成} = \text{甲}^{\text{天}}$ 、 $\text{成} = \text{對}^{\text{天}}$ 、 $\text{成} = \text{正}^{\text{弦}^{\text{天}}}$ 、 $\text{成} = \text{餘}^{\text{弦}^{\text{天}}}$ 各種之式以一語賅之，謂之 $\text{成} = \text{函}^{\text{天}}$ 或 $\text{成} = \text{函}(\text{天})$ 。

若函數從兩箇變數而成，其天與地皆爲自主之變數，其式如 $\text{成} = \text{甲}^{\text{天}} \text{乙}^{\text{地}}$ 或 $\text{成} = \text{函}(\text{天}, \text{地})$ 者，則可以 $\text{成} = \text{函}(\text{天}, \text{地})$ 別之。函數爲多箇變數所成者，仿此推之。

惟函數只指其變數言之，若甲乙丙丁各常數。雖多不論。

### 第三款

凡觀此書者，必先明變數與函數變比例之限。如幾何原本中證明平圓之面積必比其外切多等邊形之面積微小，若其外切多等邊形之邊愈多，則其面積愈近于平圓之面積。所以可設平圓之面積爲任何小，而切其圓外爲多等邊形，可使多等邊形之面積與平圓之面積較其數甚小于所設之圓面積；再設其多等邊形之面積爲級數，而其邊之變率可每變多若干倍，則其多等邊形之面積必漸與平圓之面積相近而以平圓爲限。雖切于圓外之多邊形其邊任變至若何多，其面積總不能等于平圓之面積。然其級數之總數可比平圓之面積所差甚微，其較數之小，可小至莫可名言。

若用此法于圓內容多等邊形，則其多等邊形之面積亦以平圓之面積爲限。總言之，凡平圓之周爲其內容外切多等邊形之限。

如代數術第二百六十六款言，如令甲代平圓之任何弧，則  $\frac{\text{正弦甲}}{\text{甲}}$  恆大于半徑，而  $\frac{\text{正切甲}}{\text{甲}}$  恆小于半徑。然令其弧爲任何小，則其式之同數必甚近于半徑，而其所差之數可小至不能以言語形容。所以此兩數中間之數爲一。即半徑也。故其公限亦爲一。

由此可見凡弧與弦切，三者之中取其二以相較，其比例之限必相等。

如代數術中亦會證甲弧爲  $\frac{\text{正弦甲}}{\text{甲}}$  與  $\frac{\text{正切甲}}{\text{甲}}$  兩式之限，惟其卯必爲任何大。

依代數術第五十六款之例  $1 - \frac{1}{\text{天}} + \frac{1}{\text{天}^2} - \frac{1}{\text{天}^3} + \frac{1}{\text{天}^4} - \dots + \frac{1}{\text{天}^{\text{卯}-1}} - \frac{1}{\text{天}^{\text{卯}}}$  即  $\frac{1 - \frac{1}{\text{天}^{\text{卯}}}}{1 - \frac{1}{\text{天}}}$ 。若天變至小

于一，而卯大至無窮，則  $\frac{1}{\text{天}} = 0$ ，而式變爲  $\frac{1 - \frac{1}{\text{天}}}{1}$ 。所以任取其級數若干項之和，

必小于  $\frac{1 - \frac{1}{\text{天}}}{1}$ 。惟其項愈多，則與  $\frac{1 - \frac{1}{\text{天}}}{1}$  愈相近，而其所差之數可小至莫可名言。

則可見  $\frac{1 - \frac{1}{\text{天}}}{1}$  必爲其諸級數之限。

若依二項例之式  $\left(1 - \frac{1}{\text{天}}\right)^{\text{卯}} = 1 - \frac{1}{\text{天}} + \frac{1 \cdot 2}{\text{天}^2} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{\text{天}^3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{\text{天}^4} - \dots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{\text{天}^5} - \dots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{\text{天}^6} - \dots$ ，其卯之同數無論如何，必合于理。惟卯若爲大數，則其各項之



乘數一、二、三之類與一相較之差甚小，若卯愈大，則其差愈微；若令卯爲任意大，則各乘數可略等於一，所以得

$$\left( \frac{1}{\text{天}} \right)^{\text{卯}} = \frac{1}{\text{天}} \cdot \frac{1}{\text{天}} \cdot \frac{1}{\text{天}} \cdots \frac{1}{\text{天}}$$

……  
 ①。

曾在代數術第一百七十七款中證<sup>①</sup>式之右邊爲由函數 $\delta$ 而成。其戊之同數因爲 $\frac{1}{\delta}$ 。而 $\frac{1}{\delta}$ 之同數爲 $\delta$ 。所以卯若愈大則 $\left(1 - \frac{1}{\delta}\right)$ 必愈與 $\delta$ 相近，而其限爲 $\delta$ 。

如今天 = 1, 則  $\left(1 - \frac{\rho}{\tau}\right)^{\rho\tau}$  之限爲戊, 卽  $\left(1 - \frac{\rho}{\tau}\right)^{\rho\tau} - \text{戊} = 1.71821818$ , 故其函數爲常數。

第四款 惟因函數之同數本從變數而生，故變數之同數與函數之長數比則爲

$$\frac{\text{辛}}{\text{戊丁戊}} = \frac{\text{二天}}{\text{一}} \quad \text{辛。}$$

設函數之式爲 $y = ax^2 + bx + c$ ，令天長數爲 $x$ ，而以函數之新同數爲 $y$ ，則

$$\begin{aligned} \text{戊}' &= (\text{天} \uparrow \text{辛})^{\text{三}} = \text{天}^{\text{三}} \uparrow \text{三} \text{天}^{\text{二}} \text{辛} \uparrow \text{三} \text{天}^{\text{二}} \text{辛} \uparrow \text{三} \text{天}^{\text{二}} \text{辛} \uparrow \text{三} \text{天}^{\text{二}} \text{辛} \\ &= \text{戊} \uparrow \text{三} \text{天}^{\text{二}} \text{辛} \uparrow \text{三} \text{天}^{\text{二}} \text{辛} \uparrow \text{三} \text{天}^{\text{二}} \text{辛} \end{aligned} \quad , \quad \frac{\text{辛}}{\text{戊}' \uparrow \text{丁} \text{戊}} = \text{三} \text{天}^{\text{二}} \uparrow$$

二天<sup>二</sup>辛<sup>二</sup>辛<sup>二</sup>。可見天變爲天<sup>二</sup>辛<sup>二</sup>之時，其函數戊必變爲戊<sup>二</sup>天<sup>二</sup>辛<sup>二</sup>辛<sup>二</sup>天<sup>二</sup>辛<sup>二</sup>天<sup>二</sup>辛<sup>二</sup>，其所長之數爲三<sup>二</sup>天<sup>二</sup>辛<sup>二</sup>天<sup>二</sup>辛<sup>二</sup>天<sup>二</sup>辛<sup>二</sup>。此式中之各項皆爲辛之整方與他數相乘所成。又可見變數與函數之變比例，其式爲三<sup>二</sup>天<sup>二</sup>辛<sup>二</sup>天<sup>二</sup>辛<sup>二</sup>天<sup>二</sup>辛<sup>二</sup>，其初項三<sup>二</sup>天<sup>二</sup>與天之長數辛無相關。

設函數之式爲戊<sup>二</sup> = 天<sup>四</sup>。令天之長數爲辛，而以戊<sup>二</sup>爲函數之新同數，則戊<sup>二</sup> = 戊<sup>二</sup>上四天<sup>三</sup>辛<sup>二</sup>上六天<sup>二</sup>辛<sup>二</sup>上四天<sup>二</sup>辛<sup>二</sup>上辛<sup>四</sup>， $\frac{\text{辛}}{\text{戊}' \uparrow \text{丁} \text{戊}} = \text{四天}^{\text{三}} \uparrow \text{六天}^{\text{二}} \text{辛} \uparrow \text{四天}^{\text{二}} \text{辛} \uparrow \text{辛}^{\text{四}}$ 。

由此可見天若變爲天<sup>二</sup>辛<sup>二</sup>，則其各函數之新同數如左：

如戊<sup>二</sup> = 天<sup>二</sup>，則戊<sup>二</sup> = 戊<sup>二</sup>上二天<sup>二</sup>辛<sup>二</sup>辛<sup>二</sup>。如戊<sup>二</sup> = 天<sup>二</sup>，則戊<sup>二</sup> = 戊<sup>二</sup>上二天<sup>二</sup>辛<sup>二</sup>上二天<sup>二</sup>辛<sup>二</sup>上辛<sup>四</sup>。如戊<sup>二</sup> = 天<sup>四</sup>，則戊<sup>二</sup> = 戊<sup>二</sup>上四天<sup>三</sup>辛<sup>二</sup>上六天<sup>二</sup>辛<sup>二</sup>上四天<sup>二</sup>辛<sup>二</sup>上辛<sup>四</sup>。其餘類推。

總言之，若以卯爲天之任何整指數，而令天之長數爲辛，又以巳午未申等字挨次而代

辛之各方之倍數，則函數 $\text{戊} = \text{天}^{\text{卯}}$ 之新同數必爲 $\text{戊}' = \text{辛}^{\text{一}} \text{巳}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{午}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{未}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{申}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{酉}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{戌}^{\text{一}} \dots$ 。由是知函數之新同數必爲級數，其初項 $\text{戊}$ 爲函數之原同數，其餘各項爲天之長數辛之各整方，以巳午未申之類爲各倍數，其各倍數皆爲天之別種函數，其式亦從本函數而生。

由以上各式又可見函數爲 $\text{戊} = \text{天}^{\text{一}} \text{戊} = \text{天}^{\text{二}} \text{戊} = \text{天}^{\text{三}} \text{戊} = \text{天}^{\text{四}} \text{之類}$ ，則其變數與函數之變比例必爲 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}' \text{丁} \text{戊}} = \frac{\text{二天}^{\text{一}} \text{辛}}{\text{戊}' \text{丁} \text{戊}} = \frac{\text{三天}^{\text{一}} \text{辛}}{\text{戊}' \text{丁} \text{戊}} = \frac{\text{四天}^{\text{一}} \text{辛}}{\text{戊}' \text{丁} \text{戊}} = \dots$ 。由此可見，變數天之長數與函數比例必爲 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}' \text{丁} \text{戊}} = \text{巳}^{\text{一}} \text{午}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{未}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{申}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{酉}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{戌}^{\text{一}} \dots$ 。由此可見，變數天之長數與函

數 $\text{天}^{\text{卯}}$ 之長數其變比例 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}' \text{丁} \text{戊}}$ 之同數 $\text{巳}^{\text{一}} \text{午}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{未}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{申}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{酉}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{戌}^{\text{一}} \dots$ 可分之爲兩式，其一式爲 $\text{巳}$ ，此式與天之長數辛無相關；又一式爲 $\text{辛}^{\text{一}} \text{午}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{未}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{申}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{酉}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{戌}^{\text{一}} \dots$ 。即 $\text{辛}^{\text{一}} (\text{午}^{\text{一}} \text{未}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{申}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{酉}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{戌}^{\text{一}} \dots)$ 。此式因以辛爲乘數，故辛若變小，其數亦必隨辛而變小。如令辛爲任何小，則此式之數可小至甚近于 $\bigcirc$ 。故此數可以不計，而以巳爲變比例之限。



此二種法，若細攷其根源，卽奈端所謂正流數、反流數也；亦卽來本之所謂微分算術、積分算術也；又卽拉果闡諸所謂函數變例也。

## 論各種函數求微分之公法

第五款 若函數之式爲  $y = f(x)$ ，令天變爲  $x + \Delta x$ ，則函數之新同數必爲  $y' = f(x + \Delta x)$ ，其與原同數之較爲  $y' - y$ ，卽  $f(x + \Delta x) - f(x)$ ，此式之初項  $f(x)$ ，名之曰溢率。依同理推之，若函數之式爲  $y = f(x)$ ，令天變爲  $x + \Delta x$ ，則函數之新同數爲  $y' = f(x + \Delta x)$ ，其與原同數之較爲  $y' - y$ ，卽  $f(x + \Delta x) - f(x)$ 。其初項  $f(x)$  爲溢率。

若函數之式爲  $y = f(x)$ ，而天變爲  $x + \Delta x$ ，則函數之新同數與原同數之較爲  $y' - y$ ，而其溢率爲  $f(x + \Delta x)$ 。

總言之，凡天之函數無論爲某方，恆可以  $f(x)$  代其天，而變其函數之同數爲  $f(x + \Delta x)$ ，乃以原同數減之得  $y' - y$ ，而取其初項  $f(x)$  爲溢率。

準此推之，則知天之溢率即爲其長數辛。惟因函數之溢率每藉天之長數而生，故微分術中，恆以 $\frac{\Delta}{\Delta x}$ 代天之溢率。其 $\Delta$ 號者，非天之倍數，不過是天之溢率耳。溢率之名，本爲流數術中所用。而 $\Delta$ 號者，即微字之偏旁，故微分之術用之。

如有式 $y = x^2$ ，則 $\Delta y = 2x \Delta x$ 。此式之意謂 $y$ 之微分等于 $2x$ 乘 $x$ 之微分。猶言函數 $y$ 之溢率等于以 $2x$ 乘其 $x$ 之溢率也。如有式 $y = x^3$ ，則 $\Delta y = 3x^2 \Delta x$ 。此式之意謂 $y$ 之微分等于以 $3x^2$ 乘 $x$ 之微分。猶言函數 $y$ 之溢率等于以 $3x^2$ 乘其 $x$ 之溢率也。

第六款 惟因每遇 $y = x^2$ ，則 $\Delta y = 2x \Delta x$ ，所以可寫之如 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$ 。此爲天微分之倍數，亦謂之微係數。

又依前法推之，如函數之式爲 $y = x^3$ ，則 $\Delta y = 3x^2 \Delta x$ ，而 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2$ 。其 $3x^2$ 爲原函數 $y = x^3$ 之微係數。

總言之，無論何種函數之微係數，皆可以 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 代之。而函數之新同數爲 $y + \Delta y$ ， $x + \Delta x$ ，所以 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y$ ，其已爲天之他函數，其形每隨函數之式而變。如之 $y$ 之同數爲何式，則其已之同數即易求得。

凡函數之欲求微分者，先于其式之左旁作一 $\times$ 號以記之。如有 $[(\text{甲} \perp \text{天})(\text{乙} \neg \neg \text{天} \neg \neg)]$ 式，欲求其微分，則可先作 $\times[(\text{甲} \perp \text{天})(\text{乙} \neg \neg \text{天} \neg \neg)]$ 。

凡函數之欲求微係數者，于其式之左旁作 $\times$ 號，又以 $\times$ 代爲其分母。如有 $[(\text{甲} \perp \text{天})(\text{乙} \neg \neg \text{天} \neg \neg)]$ 式，欲求其微係數，則作 $\frac{\times[(\text{甲} \perp \text{天})(\text{乙} \neg \neg \text{天} \neg \neg)]}{\times \text{天}}$ 。

從以上各款諸說，易知求微分之公法。

法曰：無論天之任何函數，欲求微分，則以 $\times$ 代其原式中之天而詳之。依辛之整方數自小而大序之，取其初有辛之項，而以 $\times$ 代其辛即得。

如有式 $\text{戌} = \text{甲} \text{天} \perp \text{乙} \text{天} \neg \neg$ ，欲求其微係數，則以 $\text{天} \perp \times$ 代其天，而令函數之新同數

$$\begin{aligned} \text{爲戌}' & \left\{ \begin{aligned} &= \text{甲}(\text{天} \perp \times) \perp \text{乙}(\text{天} \perp \times) \neg \neg \\ &= \text{甲} \text{天} \perp \text{乙} \text{天} \neg \neg \perp (\text{甲} \perp \neg \neg \text{乙} \text{天}) \times \perp \text{乙} \times \neg \neg \\ &= \text{戌} \perp (\text{甲} \perp \neg \neg \text{乙} \text{天}) \times \perp \text{乙} \times \neg \neg \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

取其初有辛之項 $(\text{甲} \perp$

$$\text{乙} \text{天}) \times, \text{以} \times \text{天} \text{代其辛, 即得} \times \text{戌} = (\text{甲} \perp \neg \neg \text{乙} \text{天}) \times \text{天}, \text{故其} \frac{\times \text{天}}{\times \text{戌}} = \text{甲} \perp \neg \neg \text{乙} \text{天}。$$

第七款 上款之法，必令天變爲 $\times$ ，而詳其函數之同數爲級數，此乃論其立法之理當如是也。惟求得級數之後，所用者僅爲其辛一方之項，則但能求得此項已足用矣。前于第

四款中言此項之倍數爲變數與函數變比例之限，又于第六款中言此項之倍數謂之微係數。然則求函數之微係數與求變數與函數變比例之限，其法本無異也。

如有式  $\text{戊} = \frac{\text{天}}{\text{甲}^2}$ ，則  $\text{戊}' = \frac{\text{天} \uparrow \text{辛}}{\text{甲}^2}$ 。而  $\text{戊} \downarrow \text{戊}' = \frac{\text{天}}{\text{甲}^2} - \frac{\text{天} \uparrow \text{辛}}{\text{甲}^2}$ ，即  $\text{戊} \downarrow \text{戊}' = \frac{\text{天}(\text{天} \uparrow \text{辛})}{\text{甲}^2}$ ，故其變比例之式爲  $\frac{\text{辛}}{\text{戊} \downarrow \text{戊}'} = \frac{\text{天}(\text{天} \uparrow \text{辛})}{\text{天} \uparrow \text{辛}}$ 。惟此式可不待詳爲級數而始得其變比例之限，因可見辛愈小，則其式愈近于  $\frac{\text{天}^2}{\text{甲}^2}$ ，故此式必卽爲  $\frac{\text{天}}{\text{甲}^2}$  之同數，

所以得  $\frac{\text{天}}{\text{甲}^2} = \frac{\text{天}^2}{\text{甲}^2 \text{天}}$ 。

若以戊爲任何函數之原同數，而以  $\text{天} \uparrow \text{辛}$  代其天，則其函數之新同數爲  $\text{戊}' = \text{戊} \uparrow \text{辛} \uparrow \text{辛}^2 \uparrow \text{辛}^3 \uparrow \dots\dots$ ，即得  $\frac{\text{辛}}{\text{戊}' \downarrow \text{戊}} = \text{辛} \uparrow \text{辛}^2 \uparrow \text{辛}^3 \uparrow \dots\dots$ 。惟

因  $\frac{\text{辛}}{\text{戊}' \downarrow \text{戊}}$  之限爲辛，故得  $\frac{\text{天}}{\text{甲}^2} = \text{辛}$ ，而  $\frac{\text{天}}{\text{甲}^2} = \text{辛} \uparrow \text{天}$ 。

由此得一解曰：凡微分之術，其意專爲求任何變數與函數同時變大之限耳。

凡求任何函數之微分，不過將一尋常之代數式另用他法以變化之。因其變化之法與代數中常用之法異，則不得不另有一名以別之，故謂之微分術。





惟此理，若反言之而謂相等之微係數必從相等之函數而生，則不盡然。

如函數之式爲  $\alpha = \alpha + \beta$ ，令  $\alpha$  變爲  $\alpha + \delta$ ，而  $\beta$  變爲  $\beta + \epsilon$ ，則  $\alpha = \alpha + \beta + \delta + \epsilon$   
 $\beta = \beta + \epsilon$ ，故得  $\frac{\delta}{\epsilon} = 1$ 。觀此可知，其常數之項  $\alpha$  不能入變比例之限

內，故其微係數必與  $\alpha = \beta$  之微係數無異。惟微係數  $\beta$  既能屬於本函數  $\alpha + \beta$ ，又能屬於他函數  $\beta$ ，所以有下例。

例曰：凡變數與常數相加減之函數，其微係數中不見其加減之常數。惟變數與常數相乘除者，則其微係數中有常數爲倍數。

## 求兩函數相乘積之微分

第十款 凡變數之函數，無論其形如何，皆可以第六款之公法求其微分。然不如每種異形之函數各設一專法以求之，則更簡捷。

如有式  $\alpha = \alpha + \beta$ ，其未與  $\alpha$  各爲天之函數。今欲得一法專能求  $\alpha + \beta$  之微分，若令  $\alpha$  變爲  $\alpha + \delta$ ，則未、 $\beta$  二函數必變爲  $\alpha + \delta + \beta + \epsilon = \alpha + \beta + \delta + \epsilon$ ，其已、 $\beta$  爲

由申函數所得之天之他函數。

再令 $\text{戊}' = \text{米}'\text{母}'$ ，則依法得 $\text{戊}' = \text{米}'\text{母}' = \text{米}\text{申}\text{上}(\text{米}\text{巳}'\text{上}\text{申}\text{巳})\text{辛}\text{上}(\text{米}\text{午}'\text{上}\text{巳}\text{巳}'\text{上}\text{母}\text{午})\text{辛}\text{上}\dots\dots$ 。以戊代其 $\text{米}\text{母}$ ，移項而以辛約之，則得 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}'\text{丁}\text{戊}} = \text{米}\text{巳}'\text{上}\text{母}\text{巳}\text{上}$

( $\text{米}\text{午}'\text{上}\text{巳}\text{巳}'\text{上}\text{母}\text{午})\text{辛}\text{上}\dots\dots$ 。此式中之 $\text{米}\text{巳}'$ 與 $\text{母}\text{巳}$ 兩項乃天之他函數，而與辛無涉者，其餘各項俱有辛之各方為乘數。設辛為甚微，則其所乘之眾項亦甚微，故其變比例之限為 $\frac{\text{戊}'\text{丁}\text{戊}}{\text{辛}} = \text{米}\text{巳}'\text{上}\text{母}\text{巳}$ 。惟因 $\text{巳} = \frac{\text{米}'\text{丁}\text{米}}{\text{辛}}$ 、 $\text{巳}' = \frac{\text{母}'\text{丁}\text{母}}{\text{辛}}$ ，故可

依第六款之法以 $\frac{\text{米}'\text{丁}\text{米}}{\text{辛}}$ 代其 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}'\text{丁}\text{戊}}$ ；以 $\frac{\text{米}'\text{丁}\text{米}}{\text{辛}}$ 代其 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}'\text{丁}\text{戊}}$ ；以 $\frac{\text{米}'\text{丁}\text{米}}{\text{辛}}$ 代其 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}'\text{丁}\text{戊}}$ 。則得 $\frac{\text{米}'\text{丁}\text{米}}{\text{辛}} = \text{米}\text{巳}'\text{上}\text{母}\text{巳}$ ，而 $\frac{\text{米}'\text{丁}\text{米}}{\text{辛}} = \text{米}\text{巳}'\text{上}\text{母}\text{巳}$ 。故得專法如左：

凡求同變彼此兩函數相乘積之微分，法將此函數乘彼函數之微分，又將彼函數乘此函數之微分，而以乘得之兩式相加即得。

# 求多函數連乘積之微分

第十一款 前款論函數之式爲 $\frac{戊}{戊} = \frac{未}{未} \cdot \frac{申}{申} \cdot \frac{酉}{酉} \cdot \frac{戌}{戌}$ ，則 $\frac{戊}{戊} = \frac{未}{未} \cdot \frac{申}{申} \cdot \frac{酉}{酉} \cdot \frac{戌}{戌}$ ，所以 $\frac{戊}{戊} = \frac{未}{未} \cdot \frac{申}{申} \cdot \frac{酉}{酉} \cdot \frac{戌}{戌}$ 。由此推之，如戊爲三箇同變數之函數連乘如 $\frac{未}{未} \cdot \frac{申}{申} \cdot \frac{酉}{酉}$ ，可令其 $\frac{未}{未} = \frac{申}{申} \cdot \frac{酉}{酉}$ ，則亦能爲 $\frac{戊}{戊}$ ，而 $\frac{戊}{戊} = \frac{未}{未} \cdot \frac{申}{申} \cdot \frac{酉}{酉}$ 。惟因 $\frac{未}{未} = \frac{申}{申} \cdot \frac{酉}{酉}$ ，可依同例得 $\frac{戊}{戊} = \frac{未}{未} \cdot \frac{申}{申} \cdot \frac{酉}{酉}$ ，所以 $\frac{戊}{戊} = \frac{未}{未} \cdot \frac{申}{申} \cdot \frac{酉}{酉}$ 。若仍將 $\frac{未}{未}$ 代還其戊而以常法化之，則爲 $\frac{戊}{戊} = \frac{未}{未} \cdot \frac{申}{申} \cdot \frac{酉}{酉}$ 。故得專法如左：

凡求同變數之若干函數連乘積之微分，法以各本函數之微分與其餘之各他函數連乘，而以各乘得之式相加卽得。

此法易用以總式以明之。無論其同變數之函數有若干數連乘，皆可以一例推之：

如多函數連乘之式爲 $\frac{未}{未} \cdot \frac{申}{申} \cdot \frac{酉}{酉} \cdot \frac{戌}{戌}$ ，則其微分之式爲 $\frac{未}{未} \cdot \frac{申}{申} \cdot \frac{酉}{酉} \cdot \frac{戌}{戌} \left[ \frac{未}{未} \cdot \frac{申}{申} \cdot \frac{酉}{酉} \cdot \frac{戌}{戌} \right]$ 。

。

# 求變數之分函數微分

第十二款 若有分數之式，其母子爲同變數之各函數，則欲得其求微分之專法，可令 $\frac{u}{v}$ ，

則未<sub>二</sub>戌<sub>一</sub>申，而<sub>二</sub>未<sub>一</sub>戌<sub>二</sub>申<sub>一</sub>。乃以其戌之同數<sub>二</sub>未<sub>一</sub>代其戌，則<sub>二</sub>未<sub>一</sub>

$\frac{\text{申}}{\text{上申申}} \text{戊} \text{而} \text{戊} = \frac{\text{申}}{\text{申申丁未申}} \text{未} \text{未} \text{申} \text{申} \text{申}$ 。故得專法如左：

凡同變量之函數，若爲分數，則求微分之法可將分母乘其分子之微分，乃以分子乘分母之微分減之，而以分母之平方約之。

此法亦可用一總式以明之。

[illegible]

## 求變數之分函數微分

而  $\frac{\text{亥地}}{\text{子(亥地)}} = \frac{\text{亥}}{\text{子}} \frac{\text{地}}{\text{亥地}}$ ，故得  $\frac{\text{戌}}{\text{子戌}} = \frac{\text{未}}{\text{子未}} \frac{\text{申}}{\text{子申}} \frac{\text{酉}}{\text{子酉}} \frac{\text{亥}}{\text{子亥}} \frac{\text{地}}{\text{子地}}$ 。由

是知若有分數之函數，其分母分子爲任若干同變數之函數連乘之積如  $\frac{\text{亥地}}{\text{未申酉}}$  者，可

以  $\frac{\text{亥地}}{\text{未申酉}} = \frac{\text{亥地}}{\text{未申酉}} \left[ \frac{\text{未}}{\text{子未}} \frac{\text{申}}{\text{子申}} \frac{\text{酉}}{\text{子酉}} \frac{\text{亥}}{\text{子亥}} \frac{\text{地}}{\text{子地}} \right]$  之式明之。

第十三款 茲欲攷任何函數地之任何乘方求微分之專法。其地或爲自變之數，或爲他變之函數，皆可。

先設  $\text{戌} = \text{地}^{\text{卯}}$ ，其卯爲任何整數，則其函數之詳式必有卯箇地連乘如  $\text{戌} = \text{地} \cdot \text{地} \cdot \text{地} \cdot \text{地} \cdots \cdots$ 。則依第十一款之例， $\frac{\text{戌}}{\text{子戌}} = \frac{\text{地}}{\text{子地}} \frac{\text{地}}{\text{子地}} \frac{\text{地}}{\text{子地}} \frac{\text{地}}{\text{子地}} \cdots \cdots$ ，其項必有卯數。

故  $\frac{\text{戌}}{\text{子戌}} = \frac{\text{地}}{\text{卯地}}$ ，而得  $\text{子戌} = \frac{\text{地}}{\text{卯地}} \text{戌} = \text{卯地}^{\text{卯}-1} \text{地}$ 。

設函數爲分指數如  $\text{戌} = \text{地}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}}$ ，則  $\text{戌}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}} = \text{地}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}} \cdot \frac{\text{卯}}{\text{寅}}} = \text{地}^{\frac{\text{卯}^2}{\text{寅}^2}}$ 。若依第九款之例，則得  $\text{卯戌} = \text{地}^{\frac{\text{卯}^2}{\text{寅}^2}-1} \text{子戌} =$

$\text{寅地}^{\frac{\text{卯}^2}{\text{寅}^2}-1} \text{子地}$ ， $\text{卯子戌} = \frac{\text{卯}}{\text{寅}} \times \frac{\text{戌}}{\text{寅地}^{\frac{\text{卯}^2}{\text{寅}^2}-1}} \text{子地}$ 。惟因  $\text{戌} = \text{地}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}}$ 、 $\text{戌}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}-1} = \text{地}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}-1} \text{寅地}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}}$ ，所

以  $\frac{\text{戌}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}-1}}{\text{寅地}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}-1}} = \text{地}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}-1}$ 、 $\text{卯子戌} = \frac{\text{卯}}{\text{寅}} \text{地}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}-1} \text{子地}$ 。

再設卯爲負指數，無論爲整數爲分數，則  $\text{戌} = \text{地}^{\text{卯}}$ ，即  $\text{戌} = \frac{\text{地}^{\text{卯}}}{1}$ 。若依第十二款之

例，因其分子爲常數，故其分子之微分當爲〇，而得 $\frac{\text{地}^{二卯}}{\text{卯地}^{卯丁一} \times \text{地}}$ ，卽 $\frac{\text{戊}}{\text{卯地}^{卯丁一} \times \text{地}}$ 。

合觀本款之各式，可見地之指數卯無論爲正爲負爲整爲分，其微分之式必爲 $\frac{\text{戊}^{卯}}{\text{卯地}^{卯丁一} \times \text{地}}$ 。故得專法如左：

凡求函數乘方之微分，法將其原指數以一減之爲新指數，而以原指數爲其倍數，又以變數之微分乘之卽得。惟其原函數若本有常數爲倍數者，則其原倍數必仍在乘數之中。

如函數之式爲 $\text{戊}^{卯} = \text{甲天}^{卯}$ ，則其微分之式爲 $\frac{\text{戊}^{卯}}{\text{卯地}^{卯丁一} \times \text{天}}$ 。

求函數諸乘方之微分更有簡便之法，可藉代數術第一百六十款與一百六十一款之二項例而得。所以于此不論者，因二項之例亦可由微分而得，余欲用微分之術證明二項之例以便于用，故俟後詳論之。

## 求變數平方根之微分

用前法已能求各負方之微分，惟因 $\sqrt{x}$ 為微分術中常見之式，所以必更設一最易之專法以便于用。

依本款求諸乘方微分之法， $\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}$ ，即 $\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}$ ，

即 $\frac{d}{dx}(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n}\sqrt[n]{x}^{\frac{1-n}{n}}$ 。所以得專法如左：

凡求函數平方根之微分，法以函數之微分爲實而二倍其原函數之平方根以約之即得。

## 求重函數之微分

第十四款 設有地爲天之函數而戊爲地之函數，欲求其戊與天相配之微分。

令天變其同數爲 $x$ ，則地變爲 $y$ ， $y = f(x)$ 。乃令 $x$ 變爲 $x + \Delta x$ ，則地變爲 $y + \Delta y$ 。惟因戊爲地之函數，若地變爲 $y + \Delta y$ ，則戊變爲 $z + \Delta z = f(y + \Delta y)$ 。其 $y, \Delta y, z, \Delta z$ 各數爲地之他函數，



二十三

## 求多項函數之微分

第十五款 如有同變數之若干函數合成一多項式，則求此多項式之微分亦可設一專法。

設亥地人為變數天之任何函數，欲求 $\text{戌}' = \text{甲} \text{乙} \text{亥} \text{丙} \text{地} \text{丁} \text{戌} \text{人}$ 之微分，若天變為 $\text{天} \text{丁} \text{辛}$ 而其同時中亥變為 $\text{亥} \text{丁} \text{巴} \text{辛} \text{丁} \text{午} \text{辛}'' \text{丁} \dots \dots$ ，地變為 $\text{地} \text{丁} \text{巴} \text{辛} \text{丁} \text{午} \text{辛}'' \text{丁} \dots \dots$ ，人變為 $\text{人} \text{丁} \text{巴} \text{辛} \text{丁} \text{午} \text{辛}'' \text{丁} \dots \dots$ ，戌變為 $\text{戌}'$ ，故得

$$\text{戌}' = \left\{ \begin{array}{l} \text{甲} \text{丁} \text{乙} \text{亥} \text{丁} \text{丙} \text{地} \text{丁} \text{戌} \text{人} \\ \text{丁} (\text{乙} \text{巴} \text{丁} \text{丙} \text{巴}' \text{丁} \text{戌} \text{巴}'' ) \text{辛} \\ \text{丁} (\text{乙} \text{午} \text{丁} \text{丙} \text{午}' \text{丁} \text{戌} \text{午}'' ) \text{辛}'' \\ \text{丁} \dots \dots \end{array} \right.$$

。如以戌代其右邊之上層，移其項而以辛約

之，則得已知 $\frac{\text{辛}}{\text{戌}' \text{丁} \text{戌}} = \text{乙} \text{巴} \text{丁} \text{丙} \text{巴}' \text{丁} \text{戌} \text{巴}'' \text{丁} (\text{乙} \text{午} \text{丁} \text{丙} \text{午}' \text{丁} \text{戌} \text{午}'' ) \text{辛} \text{丁} \dots \dots$ 。

觀其各限可見 $\frac{\text{辛}}{\text{戌}' \text{丁} \text{戌}}$ 為戌之微係數，而巴與巴'及巴''為亥與地及人之微係數。所以

其  $\frac{\text{天}}{\text{戊}} = \frac{\text{天}}{\text{乙亥}} \frac{\text{天}}{\text{上丙}} \frac{\text{天}}{\text{地丁}} \frac{\text{天}}{\text{戊人}}$ ，而  $\text{天} = \text{乙亥} \frac{\text{天}}{\text{上丙}} \frac{\text{天}}{\text{地丁}} \frac{\text{天}}{\text{戊人}}$ 。故得專法如左：

凡有同變數之各函數和較而成之多項式，則其總函數之微分必等于各函數微分之和較，而其常數之項恆變爲○。

## 代函數求微分各題

第十六款 茲設數題以明之。

一題 設有  $\text{天} = \text{甲天}^{\text{五}}$ ，欲求其微分之式。

此式與公式  $\text{天} = \text{甲天}^{\text{四}}$  爲一類，所以可用第十三款之法求其微分得  $\text{天} = \text{五甲天}^{\text{四}} \text{天}$ 。

二題 設有  $\text{天} = \frac{\text{天}^{\text{五}}}{\text{甲}}$ ，欲求其微分之式。

惟因  $\text{天} = \frac{\text{天}^{\text{五}}}{\text{甲}}$  即  $\text{天} = \text{甲天}^{\text{五}}$ ，故如法求得  $\text{天} = \text{丁五甲天}^{\text{六}} \text{天}$ ，即  $\text{天} =$

$\frac{\text{天}^{\text{六}}}{\text{丁五甲天}}$ 。

代函數求微分各題

三題 設有  $\text{戊} = \sqrt{\text{天}^{\frac{2}{3}}}$ ，欲求其微分之式。

$$\begin{aligned} \text{惟因 } \text{戊} &= \sqrt{\text{天}^{\frac{2}{3}}} \quad \text{即 } \text{戊} = \text{天}^{\frac{1}{3}}, \quad \text{故如法求得 } \text{戊} = \frac{1}{3} \text{天}^{\frac{1}{3}} \text{天}, \quad \text{即。} \text{戊} = \\ &= \frac{1}{3} \text{天} \sqrt{\text{天}}。 \end{aligned}$$

四題 設有  $\text{戊} = \text{甲} \text{天}^{\frac{2}{3}} \text{上} \text{乙} \text{天}^{\frac{1}{3}} \text{上} \text{丙} \text{天} \text{上} \text{戊}$ ，欲求其微分之式。

此爲多項之函數，故如法求得  $\text{戊} = \frac{2}{3} \text{甲} \text{天}^{\frac{1}{3}} \text{天} \text{上} \text{乙} \text{天} \text{上} \text{丙} \text{天} \text{上} \text{戊} \text{天}, \quad \text{即 } \text{戊} = \frac{2}{3} \text{甲} \text{天}^{\frac{1}{3}} \text{上} \text{乙} \text{天} \text{上} \text{丙} \text{天} \text{上} \text{戊} \text{天}。其常數之項戊于求微分之時變爲○而不見。$

五題 設有  $\text{戊} = \left( \text{甲} \text{上} \text{乙} \text{天}^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}$ ，欲求其微分之式。

$$\begin{aligned} \text{此即 } \text{戊} &= \text{甲} \text{上} \text{乙} \text{天}^{\frac{3}{2}}, \quad \text{即 } \text{戊} = \text{地}^{\frac{1}{2}} \text{上} \text{乙} \text{天}^{\frac{3}{2}} \text{上} \text{地}。 \text{惟因 } \text{地}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left( \text{甲} \text{上} \text{乙} \text{天}^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{即 } \text{戊} = \text{上} \text{乙} \text{天}^{\frac{3}{2}} \text{上} \text{天}, \quad \text{所以得} \\ \text{戊} &= \text{乙} \text{天}^{\frac{3}{2}} \left( \text{甲} \text{上} \text{乙} \text{天}^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \text{上} \text{天}^{\frac{3}{2}-1} \text{天}。 \end{aligned}$$

此題之式若不用地代其括弧內之數，而以  $\text{甲} \text{上} \text{乙} \text{天}^{\frac{3}{2}}$  爲一箇簡函數，其戊爲簡函數之某方面依第十三款之法求之，亦通。

六題 設有  $\text{戊} = \text{天}^{\frac{2}{3}} \left( \text{甲} \text{上} \text{天} \right)^{\frac{1}{3}}$ ，此題爲表明第十款之法。欲求其微分之式。

令巳 = 天<sup>二</sup>，午 = (甲上 天)<sup>二</sup>，則戌 = 巳午。故得 亥戌 = 午 亥巳上 巳 亥午。惟因 亥巳 = 三天<sup>二</sup> 亥天，亥午 = 二(甲上 天) 亥天，所以 亥戌 = 三天<sup>二</sup> (甲上 天)<sup>二</sup> 亥天上 二天<sup>二</sup> (甲上 天) 亥天，即 亥戌 = 天<sup>二</sup> (甲上 天) (三甲上 丑天) 亥天。

若平常習算之時，可不必用巳，午二數相代，而即以原式如法求之，亦同。

七題 設有 戌 = 天(一上 天)(一上 天<sup>二</sup>)，其戌爲同變數之三箇函數連乘之積。欲求其微分之式。

依第十一款之法得 亥戌 = (一上 天)(一上 天<sup>二</sup>) 亥天上 天(一上 天<sup>二</sup>) 亥天上 二天<sup>二</sup> (一上 天) 亥天，又公常法化之得 亥戌 = (一上 二天上 三天<sup>二</sup> 上 四天<sup>二</sup>) 亥天。

又法可從本公式 亥(未申酉) = 未申酉  $\left[ \frac{\text{未}}{\text{亥未}} \frac{\text{申}}{\text{上亥申}} \frac{\text{酉}}{\text{上亥酉}} \right]$  得  
 亥戌 = 天(一上 天)(一上 天<sup>二</sup>)  $\left[ \frac{\text{天}}{\text{亥天}} \frac{\text{一上 天}}{\text{上亥天}} \frac{\text{一上 天<sup>二</sup>}}{\text{二天亥天}} \right]$ 。此式易化爲 亥戌 = (一上 二天上 三天<sup>二</sup> 上 四天<sup>二</sup>) 亥天。

八題 設有 戌 =  $\frac{\text{一上 天<sup>二</sup>}}{\text{天}}$ ，此爲分數之函數。欲求其微分之式。

依第十三款之法得 亥戌 =  $\frac{(\text{一上 天<sup>二</sup>})^{\text{二}}}{(\text{一上 天<sup>二</sup>}) 亥天 \text{ 上 } \text{二天<sup>二</sup> 亥天}}$ ，即 亥戌 =  $\frac{(\text{一上 天<sup>二</sup>})^{\text{二}}}{(\text{一上 天<sup>二</sup>}) 亥天}$ 。

九題 設有  $\text{戊} = \frac{\text{天}^{\text{四}} \text{丁} \text{天}^{\text{二}} \text{上} \text{一}}{\text{天}^{\text{三}} \text{上} \text{天}} = \frac{\text{天}^{\text{四}} \text{丁} \text{天}^{\text{二}} \text{上} \text{一}}{\text{天} (\text{天}^{\text{二}} \text{上} \text{一})}$ ，欲求其微分之式。

將所設之式與本公式  $\text{戊} = \left[ \frac{\text{酉}}{\text{申}} \text{米} \right] = \frac{\text{酉}}{\text{申}} \text{米} \left[ \frac{\text{米}}{\text{申}} \text{上} \frac{\text{申}}{\text{酉}} \text{丁} \frac{\text{酉}}{\text{酉}} \right]$  相比，則  $\text{天} = \text{米}$ ，

$$\begin{aligned} \text{天}^{\text{二}} \text{上} \text{一} &= \text{申} \cdot \text{天}^{\text{四}} \text{丁} \text{天}^{\text{二}} \text{上} \text{一} = \text{酉} \cdot \text{所求得} \\ \text{戊} &= \frac{\text{天}^{\text{四}} \text{丁} \text{天}^{\text{二}} \text{上} \text{一}}{\text{天}^{\text{三}} \text{上} \text{天}} \left[ \frac{\text{天}}{\text{天}} \text{上} \frac{\text{一}}{\text{二}} \frac{\text{天}^{\text{二}}}{\text{天}} \text{丁} \frac{\text{天}^{\text{四}} \text{丁} \text{天}^{\text{二}} \text{上} \text{一}}{(\text{四} \text{天}^{\text{三}} \text{丁} \text{二} \text{天}) \text{天}} \right] \text{，化之得} \\ &= \frac{(\text{天}^{\text{四}} \text{丁} \text{天}^{\text{二}} \text{上} \text{一})^{\text{二}}}{\text{丁} (\text{天}^{\text{六}} \text{上} \text{四} \text{天}^{\text{四}} \text{丁} \text{四} \text{天}^{\text{二}} \text{丁} \text{一}) \text{天}} \text{。} \end{aligned}$$

十題 設有  $\text{戊} = \text{三} \text{地}^{\text{二}}$ ， $\text{地} = \text{天}^{\text{三}} \text{上} \text{甲} \text{天}$  此題爲表明第十四款之法。 欲求其微分之式。

$$\begin{aligned} \text{如法求之，則} \frac{\text{天}}{\text{地}} &= \text{六} \text{地} \cdot \frac{\text{天}}{\text{地}} = \text{三} \text{天}^{\text{二}} \text{上} \text{甲} \text{，所以} \frac{\text{天}}{\text{地}} \times \frac{\text{天}}{\text{地}} = \text{六} \text{地} (\text{三} \text{天}^{\text{二}} \text{上} \text{甲}) \text{，} \\ \text{即} \frac{\text{天}}{\text{地}} \times \frac{\text{天}}{\text{地}} &= \text{一} \text{八} \text{天}^{\text{二}} \text{地} \text{上} \text{六} \text{甲} \text{地} \text{。雖因} \text{天} \text{戊} = \frac{\text{天}}{\text{地}} \times \frac{\text{天}}{\text{地}} \text{天} \text{，故得} \text{天} \text{戊} = \\ &\text{一} \text{八} \text{天}^{\text{二}} \text{地} \text{上} \text{六} \text{甲} \text{地} \text{天} \text{。} \end{aligned}$$

此式亦可由他法而得。蓋因其  $\text{戊} = \text{三} \text{地}^{\text{二}}$ ，則  $\text{天} \text{戊} = \text{六} \text{地} \text{天} \text{地}$ 。又因地  $= \text{天}^{\text{三}} \text{上} \text{甲} \text{天}$ ，則  $\text{天} \text{地} = \text{三} \text{天}^{\text{二}} \text{天} \text{上} \text{甲} \text{天}$ ，故回將  $\text{天} \text{地}$  之同數帶入  $\text{天} \text{戊}$  之同數中，其

所得之式亦爲 $\frac{1}{2} \pi r^2$ 。地 $\frac{1}{2} \pi r^2$ 上 $\frac{1}{2} \pi r^2$ 甲地 $\frac{1}{2} \pi r^2$ 。

## 求二項例之證

第十七款 以下各款之法必用二項例推之，故茲款特用微分之法證明其例以便于用。