微積溯源序

微積溯源八卷，前四卷爲微分術，後四卷爲積分術，乃算學中最深之事也。余旣與西士傅蘭雅譯畢代數術二十五卷，更思求其進境，故又與傅君譯此書焉。先是咸豐年間，曾有海甯李壬叔與西士偉烈亞力譯出代微積拾級一書，流播海内。余素與壬叔相友，得讀其書，粗明微積二術之梗概。所以又譯此書者，蓋欲補其所略也。書中代數之式甚繁，校算不易，則劉君省菴之力居多。

今刻工已竣矣，故序之，曰：吾以爲古時之算法惟有加減而已。其乘與除乃因加減之不勝其繁，故更立二術以使之簡易也。開方之法，又所以濟除法之窮者也。蓋算學中自有加減乘除開方五法，而一切淺近易明之數，無不可通矣。惟人之心思智慮日出不窮，往往以能人之所不能者爲快。遇有窒礙難通之處，輒思立法以濟其窮。故有減其所不可減而正負之名不得不立矣；除其所不能除而寄母通分之法又不得不立矣。代數中種種記號之法皆出於不得已而立者也，惟每立一法必能使繁者爲簡，難者爲易，遲者爲速，而算學之境界藉此得更進一層。如是屢進不已而所立之法於是乎日多矣。微分積分者，蓋又因乘除開

方之不勝其繁，且有窒礙難通之處，故更立此二術以濟其窮，又使簡易而速者也。試觀圓徑求周、眞數求對等事，雖無微分積分之時，亦未嘗不可求，惟須乘除開方數十百次。其難有不可言喻者，不如用微積之法理明而數捷也。然則謂加減乘除開方代數之外者，更有二術焉，一曰微分，一曰積分可也。其積分術爲微分之還原，猶之開平方爲自乘之還原、除法爲乘之還原、減法爲加之還原也。然加與乘其原無不可還，而微分之原有可還有不可還，是猶算式中有不可開之方耳，又何怪焉。如必曰加減乘除開方已足供吾之用矣，何必更究其精？是舍舟車之便利而必欲負重遠行也。其用力多而成功少，蓋不待智者而辨矣。

同治十三年九月十八日，金匱華蘅芳序。

微積溯源卷一

論變數與函數之變比例

第一款　用代數以解任何曲線，其中每有幾種數，其大小恆有定率者，如橢圓之長徑、拋物線之通徑、雙曲線之屬徑之類是也。又每有幾種數可有任若干相配之同數，其大小恆不能有定率者，如曲線任一點之縱橫線是也。數既有此兩種分別，則每種須有一總名以賅之，故名其有定之數曰常數，無定之數曰變數。

凡常數之同數不能增亦不能損。

凡變數之同數，能變為大，亦能變為小。故其從此同數變至彼同數之時，必歷彼此二數間最小最微之各分數。

如平圓之半徑為常數，而其任一段之弧或弧之弦矢切割各線、及各線與弧所成之面，

皆謂之變數。

橢圓之長徑短徑皆爲常數，而其曲線之任一段或曲線上任一點之縱橫線，並其形內形外所能作之任何線或面或角，皆謂之變數。

拋物線之通徑爲常數，而其曲線之任一段或任一點之縱橫線、或弧與縱橫線所成之面，皆謂之變數。他種曲線亦然。

凡常數，恆以甲乙丙丁等字代之。凡變數，恆以天地人等字代之。

第二款　若有彼此二數皆爲變數，此數變而彼數因此數變而亦變者，則彼數爲此數之函數。

如平圓之八線皆爲弧之函數。若反求之，亦可以弧爲八線之函數。

又如重學中令物體前行之力，與其物所行之路，皆爲時刻之函數。

如有式$地=\frac{甲丅天}{甲丄天}$，此式中甲爲常數，天爲自主之變數，地爲天之函數。故地之同數能以天與甲明之。

如有式$天=\frac{地丄一}{甲(地丅一)}$，此式中甲與一皆爲常數，地爲自主之變數，天爲地之函數，故天之同數可以地與甲及一明之。

如有式$戌=甲丄乙天丄丙天^{二}$或$戌=\sqrt{甲^{二}丄乙天丄天^{二}}$或$戌=\frac{丙丄天^{二}}{甲丄\sqrt{乙天}}$，其甲

乙丙爲常數，天爲自變之數，而戊皆爲天之函數。

凡函數之中，可以有數箇自主之變數。

如有式$戊=甲天^{二}\perp乙天地\perp丙地^{二}$則天與地皆爲自主之變數，戊爲天地兩變數之函數。

凡變數之函數，其形雖有多種，然每可化之，使不外乎以下數類$天^{卯}$、$甲^{天}$、正弦天、餘弦天等類是也。

凡函數爲$天^{卯}$之類，其指數爲常數，則可從天之卯方，用代數之常法化之。而以有窮之項明其函數之同數。故謂之代數函數，亦謂之常函數。

如有式$戊=甲天^{三}\perp\dfrac{\sqrt{甲^{二}\perp天^{二}}}{乙天^{二}\top丙^{二}天}$，此種函數，其戊之同數可用加減乘除開方等法而得之。

凡函數爲甲、對天之類，則其函數之同數不能以有窮之項明之。故謂之越函數。越者，超越於尋常之意也。

凡函數爲正弦天、餘弦天及正切天、正割天之類，其函數之同數皆可以平圓之各線明之。故謂之圓函數，亦謂之角函數。

以上三種函數常函數、越函數、圓函數也。，若已知天之同數，則其函數之同數即可求得。故

名此三種函數爲陽函數。因其顯而易明，故謂之陽函數。

更有他種函數，必先解其方程式，令函數中之各變數分開，然後能求其同數者。

如有式$戊天 = \frac{戊丅天}{戊丄天}$，其戊爲天之函數，如欲求其戊與天相配之同數，必先解其二次方程式始能通。

此種之式名曰天之陰函數。因其雜糅未明，故謂之陰函數。反之亦可云天爲戊之陰函數。

如解其方程式爲$戊 = \frac{二}{一}\left[天丄\frac{天}{一}丄\frac{天}{\sqrt{天^{四}丄六天^{二}丄一}}\right]$，則戊變爲天之陰函數。

整理者註：右最後一句云戊變爲天之陰函數，這顯而易見是錯誤的。原文大英百科全書卷第九之 Fluxions 作 explicit function，即陽函數，此當爲譯者譯錯。目前由於校勘凡例未定，暫留此字，待討論後決定修改與否。

昔代數之家，凡遇須用開平方之處，每于其式之左旁作一根字以記之，如根天爲天之平方根。後又變通其法，而以根號記之，如$\sqrt{天}$爲天之平方根。此代數之例也。茲可仿照此例，凡遇某變數之函數，亦用一號以記之。所以凡有任何變數之函數，皆可書一函字于其變數之旁，以爲識別。

如天之函數則作函天，或作函(天)，皆言天之函數也。

所以凡見變數之左旁有一函字者，其函字並非代表天之倍數，其意謂是某變數之函數

也。

用此法則可將$戊=天^{卯}$、$戊=甲^{天}$、$戊=對天$、$戊=正弦天$、$戊=餘弦天$ 各種之式以一語賅之，謂之$戊=函天$ 或$戊=函(天)$。

若函數從兩箇變數而成，其天與地皆爲自主之變數，其式如$戊=甲天^{二}\perp乙天地\perp丙地^{二}$ 者，則可以$戊=函(天,地)$別之。函數爲多箇變數所成者，仿此推之。

惟函數只指其變數言之，若甲乙丙丁各常數。雖多不論。

第三款 凡觀此書者，必先明變數與函數變比例之限。如幾何原本中證明平圓之面積必比其外切多等邊形之面積微小，若其外切多等邊形之邊愈多，則其面積愈近于平圓之面積。所以可設平圓之面積爲任何小，而切其圓外爲多等邊形，可使多等邊形之面積與平圓之面積較其數甚小于所設之圓面積；再設其多等邊形之面積爲級數，而其邊之變率可每變多若干倍，則其多等邊形之面積必漸與平圓之面積相近而以平圓爲限。雖切于圓外之多邊形其邊任變至若何多，其面積總不能等于平圓之面積。然其級數之總數可比平圓之面積所差甚微，其較數之小，可小至莫可名言。

若用此法于圓內容多等邊形，則其多等邊形之面積亦以平圓之面積爲限。

總言之，凡平圓之周爲其內容外切多等邊形之限。

如代數術第二百六十六款言，如令甲代平圓之任何弧，則$\frac{正弦甲}{甲}$恆大于半徑，而$\frac{正切甲}{甲}$恆小于半徑。然令其弧爲任何小，則其式之同數必甚近于半徑，而其所差之數可小至不能以言語形容。所以此兩數中間之數爲一。卽半徑也。故其公限亦爲一。

由此可見凡弧與弦切，三者之中取其二以相較，其比例之限必相等。

如代數術中亦會證甲弧爲卯正切$\frac{卯}{甲}$與卯正弦$\frac{卯}{甲}$兩式之限，惟其卯必爲任何大。

依代數術第五十六款之例$一⊥天⊥天^{二}⊥天^{三}\cdots\cdots⊥天^{卯丅一}$卽$\frac{一丅天}{一丅天^{卯}}$。若天變至小于一，而卯大至無窮，則$天^{卯}＝〇$，而式變爲$\frac{一丅天}{一}$。所以任取其級數若干項之和，必小于$\frac{一丅天}{一}$。惟其項愈多，則與$\frac{一丅天}{一}$愈相近，而其所差之數可小至莫可名言。則可見$\frac{一丅天}{一}$必爲其諸級數之限。

若依二項例之式$\left(一⊥\frac{卯}{天}\right)^{卯}＝一⊥\frac{一}{天}⊥\frac{一.二}{天^{二}}\left(一⊥\frac{卯}{一}\right)⊥\frac{一.二.三}{天^{三}}\left(一⊥\frac{卯}{一}\right)\left(一⊥\frac{卯}{二}\right)$ $\left(一⊥\frac{卯}{三}\right)⊥\cdots\cdots$，其卯之同數無論如何，必合于理。惟卯若爲大數，則其各項之

乘數$一\perp\frac{卯}{二}$、$一\perp\frac{卯}{三}$之類與一相較之差甚小，若卯愈大，則其差愈微，若令卯為任意大，則各乘數可略等于一，所以得$\left(一\perp\frac{卯}{天}\right)^{卯}=一\perp\frac{一}{天}\perp\frac{一\cdot二}{天^{二}}\perp\frac{一\cdot二\cdot三}{天^{三}}\perp$……甲。

曾在代數術第一百七十七款中證甲式之右邊為由函數$戊^{天}$而成。其戊之同數因為二.七一八二八一八，即訥白爾對數之根也。所以卯若愈大則$\left(一\perp\frac{卯}{天}\right)^{卯}$必愈與$戊^{天}$相近，而其限為$戊^{天}$。

如令天＝一，則$\left(一\perp\frac{卯}{天}\right)^{卯}$之限為戊，即$\left(一\perp\frac{卯}{天}\right)^{卯}$一戊＝二.七一八二八一八，故其函數為常數。

第四款　惟因函數之同數本從變數而生，故變數之同數與函數之長數比則為$\frac{辛}{戊'\top戊}=二天\perp辛$。

設函數之式為$戊=天^{三}$，令天長數為辛，而以函數之新同數為戊′則

$$戊' = (天 \perp 辛)^{三} \begin{cases} = 天^{三} \perp 三天^{二}辛 \perp 三天辛^{二} \perp 辛^{三} \\ = 戊 \perp 三天^{二}辛 \perp 三天辛^{二} \perp 辛^{三} \end{cases}$$

，而$\dfrac{辛}{戊' \top 戊} = 三天^{二} \perp 三天辛 \perp 辛^{二}$。可見天變爲$天 \perp 辛$之時，其函數$戊$必變爲$戊 \perp 三天^{二}辛 \perp 三天辛^{二} \perp 辛^{三}$，其所長之數爲$三天^{二}辛 \perp 三天辛^{二} \perp 辛^{三}$。此式中之各項皆爲辛之整方與他數相乘所成。又可見變數與函數之變比例，其式爲$三天^{二}辛 \perp 三天辛^{二} \perp 辛^{三}$，其初項$三天^{二}$與天之長數辛無相關。

設函數之式爲$戊 = 天^{四}$。令天之長數爲辛，而以$戊'$爲函數之新同數，則$戊' = 戊 \perp 四天^{三}辛 \perp 六天^{二}辛^{二} \perp 四天辛^{三} \perp 辛^{四}$，而$\dfrac{辛}{戊' \top 戊} = 四天^{三} \perp 六天^{二}辛 \perp 四天辛^{二} \perp 辛^{三}$。

由此可見天若變爲$天 \perp 辛$，則其各函數之新同數如左：

如$戊 = 天^{二}$，則$戊' = 戊 \perp 二天辛 \perp 辛^{二}$。如$戊 = 天^{三}$，則$戊' = 戊 \perp 三天^{二}辛 \perp 三天辛^{二} \perp 辛^{三}$。如$戊 = 天^{四}$，則$戊' = 戊 \perp 四天^{三}辛 \perp 六天^{二}辛^{二} \perp 四天辛^{三} \perp 辛^{四}$。其餘類推。

總言之，若以卯爲天之任何整指數，而令天之長數爲辛，又以巳午未申等字挨次而代

辛之各方之倍數，則函數戌＝天^{卯}之新同數必爲戌′＝辛⊥巳辛⊥午辛^{二}⊥未辛^{三}⊥申辛^{四}⊥……。由是知函數之新同數必爲級數，其初項戌爲函數之原同數，其餘各項爲天之長數辛之各整方，以巳午未申之類爲各倍數，其各倍數皆爲天之別種函數，其式亦從本函數而生。

由以上各式又可見函數爲戌＝天^{二}、戌＝天^{三}、戌＝天^{四}之類，則其變數與函數之變比例必爲$\frac{戌'丅戌}{辛}$＝二天⊥辛、$\frac{戌'丅戌}{辛}$＝三天^{二}⊥三天辛⊥辛^{二}、$\frac{戌'丅戌}{辛}$＝四天^{三}⊥六天^{二}辛⊥四天辛^{二}⊥辛^{三}之類。總之若以卯爲天之整指數，則戌＝天^{卯}之變比例必爲$\frac{戌'丅戌}{辛}$＝巳⊥午辛⊥未辛^{二}⊥申辛^{三}⊥……。由此可見，變數天之長數與函數天^{卯}之長數其變比例$\frac{戌'丅戌}{辛}$之同數巳⊥午辛⊥未辛^{二}⊥申辛^{三}⊥……可分之爲兩式，其一式爲巳，此式與天之長數辛無相關；又一式爲午辛⊥未辛^{二}⊥申辛^{三}⊥……。即辛（午⊥未辛⊥申辛^{二}⊥……）。此式因以辛爲乘數，故辛若變小，其數亦必隨辛而變小。如令辛爲任何小，則此式之數可小至甚近于〇。故此數可以不計，而以巳爲變比例之限。

設有繁函數之式$戊=甲\perp乙天\perp丙天^{二}$，令天之長數爲辛，則天變爲$天\perp辛$之時，其函數之同數必變爲戊$\left\{\begin{array}{l}=甲\perp乙(天\perp辛)\perp丙(天\perp辛)^{二}\\=甲\perp乙天\perp丙天^{二}\perp(乙\perp二丙天)辛\perp丙辛^{二}\end{array}\right.$，故$戊'丅戊=(乙\perp二丙天)辛\perp丙辛^{二}$，而$\frac{辛}{戊'丅戊}=乙\perp二丙天\perp丙辛$。其$乙\perp二丙天$爲本函數變比例之限。

以此法徧試各種特設之函數，見其皆有相類之性情，所以例設如左。

例曰∴命任何自主之變數爲天，而令天之任何函數等于戊，則天變爲$天\perp辛$之時，函數之新同數爲$戊'=戊\perp巳辛\perp午辛^{二}\perp未辛^{三}\perp\cdots\cdots$，其變數與函數之變比例爲$\frac{辛}{戊'丅戊}=巳\perp午辛\perp未辛^{二}\perp申辛^{三}\perp\cdots\cdots$。此式中之初項巳爲變比例之限，無論何種函數，其限皆可依此比例求之。

由以上所論變數之長數與函數之長數相關之理，可于算學中開出兩種極廣大極精微之法。

其第一種爲有任何變數之任何函數而求其變數與函數變比例之限。

其第二種爲有任何變數與函數變比例之限而求其函數之原式。

此二種法，若細攷其根源，卽奈端所謂正流數、反流數也；亦卽來本之所謂微分算術、積分算術也；又卽拉果蘭諸所謂函數變例也。

論各種函數求微分之公法

第五款　若函數之式爲戊＝天^{二}，令天變爲天丄辛，則函數之新同數必爲戊′＝戊丄二天辛丄辛^{二}，其與原同數之較爲戊′丅戊，卽二天辛丄辛^{二}，此式之初項二天辛，名之曰溢率。

依同理推之，若函數之式爲戊＝天^{三}，令天變爲天丄辛，則函數之新同數爲戊′＝戊丄三天^{二}辛丄三天辛^{二}丄辛^{三}，其與原同數之較爲戊′丅戊，卽三天^{二}辛丄三天辛^{二}丄辛^{三}。

其初項三天^{二}辛爲溢率。

若函數之式爲戊＝天^{四}，而天變爲天丄辛，則函數之新同數與原同數之較爲四天^{三}辛丄六天^{二}辛^{二}丄四天辛^{三}丄辛^{四}，而其溢率爲四天^{三}辛。

總言之，凡天之函數無論爲某方，恆可以天丄辛代其天，而變其函數之同數爲戊丄巳辛丄午辛^{二}丄未辛^{三}丄……，乃以原同數戊減之得巳辛丄午辛^{二}丄未辛^{三}丄……，而取其初項巳辛爲溢率。

準此推之，則知天之溢率卽爲其長數辛。惟因函數之溢率每藉天之長數而生，故微分

術中，恆以$彳天$代天之溢率。其彳號者，非天之倍數，不過是天之溢率耳。溢率之名，本爲流數術中所用。而彳號者，卽微字之偏旁，故微分之術用之。

如有式$戊=天^{二}$，則$彳戊=二天彳天$。此式之意謂戊之微分等于二天乘天之微分。猶言函數戊之溢率等于以二天乘其天之溢率也。如有式$戊=天^{三}$，則$彳戊=三天^{二}彳天$。此式之意謂戊之微分等于$三天^{二}$乘天之微分。猶言函數戊之溢率等于以$三天^{二}$乘其天之溢率也。

第六款 惟因每遇$戊=天^{二}$，則$彳戊=二天彳天$，所以可寫之如$\frac{彳戊}{彳天}=二天$。此爲天微分之倍數，亦謂之微係數。

又依前法推之，如函數之式爲$戊=天^{三}$，則$彳戊=三天^{二}彳天$，而$\frac{彳戊}{彳天}=三天^{二}$。

其$三天^{二}$爲原函數$戊=天^{三}$之微係數。

總言之，無論何種函數之微係數，皆可以$\frac{彳戊}{彳天}$代之。而函數之新同數爲$戊\perp巳辛\perp午辛^{二}\perp\cdots\cdots$，所以$\frac{彳戊}{彳天}=巳$，其巳爲天之他函數，其形每隨函數之式而變。如之戊之同數爲何式，則其巳之同數卽易求得。

凡函數之欲求微分者，先于其式之左旁作一彳號以記之。如有$[(甲\perp天)(乙^{二}\top天^{二})]$式，欲求其微分，則可先作$彳[(甲\perp天)(乙^{二}\top天^{二})]$。

凡函數之欲求微係數者，于其式之左旁作彳號，又以$彳天$爲其分母。如有$[(甲\perp天)(乙^{二}\top天^{二})]$式，欲求其微係數，則作$\frac{彳天}{彳[(甲\perp天)(乙^{二}\top天^{二})]}$。

從以上各款諸說，易知求微分之公法。

法曰：無論天之任何函數，欲求微分，則以$天\perp辛$代其原式中之天而詳之。依辛之整方數自小而大序之，取其初有辛之項，而以$彳天$代其辛即得。

如有式$戊=甲天\perp乙天^{二}$，欲求其微係數，則以$天\perp辛$代其天，而令函數之新同數爲$戊'$，則得$戊'\begin{cases}=甲(天\perp辛)\perp乙(天\perp辛)^{二}\\=甲天\perp乙天^{二}\perp(甲\perp二乙天)辛\perp乙辛^{二}\\=戊\perp(甲\perp二乙天)辛\perp乙辛^{二}\end{cases}$。取其初有辛之項$(甲\perp二乙天)辛$，以$彳天$代其辛，卽得$彳戊=(甲\perp二乙天)彳天$，故其$\frac{彳天}{彳戊}=甲\perp二乙天$。

第七款　上款之法，必令天變爲$天\perp辛$，而詳其函數之同數爲級數，此乃論其立法之理當如是

也。惟求得級數之後，所用者僅爲其辛一方之項，則但能求得此項已足用矣。前于第四款中言此項之倍數爲變數與函數變比例之限，又于第六款中言此項之倍數謂之微係數。然則求函數之微係數與求變數與函數變比例之限，其法本無異也。

如有式 $戊=\frac{天}{甲^{二}}$，則 $戊'=\frac{天丄辛}{甲^{二}}$。而 $戊丅戊'=\frac{天}{甲^{二}}丅\frac{天丄辛}{甲^{二}}$，卽 $戊丅戊'=\frac{天(天丄辛)}{丅甲^{二}辛}$，故其變比例之式爲 $\frac{辛}{戊丅戊'}=\frac{天(天丄辛)}{丅甲^{二}}$。惟此式可不待詳爲級數而始得其變比例之限，因可見辛愈小，則其式愈近于 $丅\frac{天^{二}}{甲^{二}}$，故此式必卽爲 $\frac{彳天}{彳戊}$ 之同數，

所以得 $彳戊=丅\frac{天^{二}}{甲^{二}彳天}$。

若以戊爲任何函數之原同數，而以天丄辛代其天，則其函數之新同數爲 $戊'=戊丄巳辛丄午辛^{二}丄未辛^{三}丄\cdots\cdots$，卽得 $\frac{辛}{戊'丅戊}=巳丄午辛丄未辛^{二}丄\cdots\cdots$。惟因 $\frac{辛}{戊'丅戊}$ 之限爲巳，故得 $\frac{彳天}{彳戊}=巳$，而 $彳戊=巳彳天$。

由此得一解曰：凡微分之術，其意專爲求任何變數與函數同時變大之限耳。

凡求任何函數之微分，不過將一尋常之代數式另用他法以變化之。因其變化之法與代

數中常用之法異，則不得不另有一名以別之，故謂之微分術。

第八款　凡變數與函數變比例之限，無論以何數爲主，其形必同。

如戊爲天之函數，若天變爲天⊥辛，則戊變爲戊⊥巳辛⊥午$辛^{二}$⊥未$辛^{三}$⊥……。其巳、午、未各數俱爲天之他函數，從本函數所生。如令其巳辛⊥午$辛^{二}$⊥未$辛^{三}$⊥……＝子，則天與戊同時變大之數爲辛與子。如依代數術第一百六十三款之法反求其級數，則得辛＝$\frac{巳}{一}$子⊤$\frac{巳^{二}}{午}$$子^{二}$⊥……，故其變數與函數之公比例爲$\frac{子}{辛}$＝$\frac{巳}{一}$⊤$\frac{巳^{二}}{午}$子⊥……。故$\frac{子}{辛}$之限爲$\frac{巳}{一}$，而$\frac{辛}{子}$之限爲巳，此卽$\frac{一}{巳}$也。

第九款　由此易知，凡有相等之函數，則其微係數亦必相等。

如戊與亥爲兩函數，而戊＝亥，其天變爲天⊥辛之時，戊變爲戊′，亥變爲亥′，則戊′＝亥′，而戊′⊤戊＝亥′⊤亥，故$\frac{辛}{戊'⊤戊}$＝$\frac{辛}{亥'⊤亥}$。如以巳與午各爲其變比例之限，則巳＝午。故巳彳天＝午彳天，而彳戊＝彳亥。

由此可見，凡函數之式無論如何改形，若其同數無異者，則其微係數必同。

如函數之原式爲$天^{三}$⊥$甲^{三}$，若改其形爲(天⊥甲)($天^{二}$⊤甲天⊥$甲^{二}$)，則此式之微係

數與原式之微係數必無異。

惟此理，若反言之而謂相等之微係數必從相等之函數而生，則不盡然。

如函數之式爲戊＝甲⊥乙天，令天變爲天⊥辛，而戊變爲戊′，則戊′＝甲⊥乙天⊥乙辛＝戊⊥乙辛，故得$\frac{辛}{戊'丅戊}$＝乙。觀此可知，其常數之項甲不能入變比例之限內，故其微係數必與戊＝乙天之微係數無異。惟微係數乙既能屬於本函數甲⊥乙天，又能屬於他函數乙天，所以有下例。

例曰：凡變數與常數相加減之函數，其微係數中不見其加減之常數。惟變數與常數相乘除者，則其微係數中有常數爲倍數。

求兩函數相乘積之微分

第十款 凡變數之函數，無論其形如何，皆可以第六款之公法求其微分。然不如每種異形之函數各設一專法以求之，則更簡捷。

如有式戊＝未申，其未與申各爲天之函數。今欲得一法專能求未、申相乘積之微分，若令天變爲天⊥辛，則未、申二函數必變爲未′＝未⊥巳辛⊥午辛^{二}⊥……、申′＝

申⊥巳′辛⊥午′辛二⊥……，其巳、午爲由未函數所得之天之他函數；其巳′、午′爲由申函數所得之天之他函數。

再令戌′＝未′申′，則依法得戌′＝未′申′＝未申⊥(未巳′⊥申巳)辛⊥(未午′⊥巳巳′⊥申午)辛二⊥……。以戌代其未申，移項而以辛約之，則得$\frac{\text{辛}}{\text{戌}'\top\text{戌}}$＝未巳′⊥申巳⊥(未午′⊥巳巳′⊥申午)辛⊥……。此式中之未巳′與申巳兩項乃天之他函數，而與辛無涉者，其餘各項俱有辛之各方爲乘數。設辛爲甚微，則其所乘之衆項亦甚微，故其變比例之限爲$\frac{\text{辛}}{\text{戌}'\top\text{戌}}$＝未巳′⊥申巳。惟因巳＝$\frac{\text{辛}}{\text{未}'\top\text{未}}$、巳′＝$\frac{\text{辛}}{\text{申}'\top\text{申}}$，故可依第六款之法以$\frac{\text{彳天}}{\text{彳戌}}$代其$\frac{\text{辛}}{\text{戌}'\top\text{戌}}$；以$\frac{\text{彳天}}{\text{彳未}}$代其$\frac{\text{辛}}{\text{未}'\top\text{未}}$；以$\frac{\text{彳天}}{\text{彳申}}$代其$\frac{\text{辛}}{\text{申}'\top\text{申}}$。則得$\frac{\text{彳天}}{\text{彳戌}}$＝未$\frac{\text{彳天}}{\text{彳申}}$⊥申$\frac{\text{彳天}}{\text{彳未}}$，而彳戌＝未彳申⊥申彳未。故得專法如左：

凡求同變彼此兩函數相乘積之微分，法將此函數乘彼函數之微分，又將彼函數乘此函數之微分，而以乘得之兩式相加卽得。

求多函數連乘積之微分

第十一款　前款論函數之式爲$戊=未申$，則$彳戊=未彳申\perp申彳未$，所以$\frac{彳戊}{戊}=\frac{彳未}{未}\perp\frac{彳申}{申}$。

由此推之，如戊爲三箇同變數之函數連乘如$未酉亥$，可令其$申=酉亥$，則亦能爲$戊=未申$而$\frac{彳戊}{戊}=\frac{彳未}{未}\perp\frac{彳申}{申}$。惟因$申=酉亥$，可依同例得$\frac{彳申}{申}=\frac{彳酉}{酉}\perp\frac{彳亥}{亥}$，所以$\frac{彳戊}{戊}=\frac{彳未}{未}\perp\frac{彳酉}{酉}\perp\frac{彳亥}{亥}$。若仍將$未申$代還其戊而以常法化之，則爲$彳戊=酉亥彳未\perp未亥彳酉\perp未酉彳亥$。故得專法如左：

凡求同變數之若干函數連乘積之微分，法以各本函數之微分與其餘之各他函數連乘，而以各乘得之式相加即得。

此法易用以總式以明之。無論其同變數之函數有若干數連乘，皆可以一例推之：

如多函數連乘之式爲$未申酉亥$，則其微分之式爲$彳(未申酉亥)=未申酉亥\left[\frac{彳未}{未}\perp\frac{彳申}{申}\perp\frac{彳酉}{酉}\perp\frac{彳亥}{亥}\right]$。

求變數之分函數微分

第十二款 若有分數之式，其母子爲同變數之各函數，則欲得其求微分之專法，可令戌 $= \frac{\text{申}}{\text{未}}$，則未 $=$ 戌申，而彳未 $=$ 戌彳申 $\perp$ 申彳戌。乃以其戌之同數$\frac{\text{申}}{\text{未}}$代其戌，則彳未 $= \frac{\text{申}}{\text{未彳申}} \perp$ 申彳戌，而彳戌 $= \frac{\text{申}^{\text{二}}}{\text{申彳未} \top \text{未彳申}}$。故得專法如左：

凡同變量之函數，若爲分數，則求微分之法可將分母乘其分子之微分，乃以分子乘分母之微分減之，而以分母之平方約之。

此法亦可用一總式以明之。

惟因戌 $= \frac{\text{申}}{\text{未}}$ 之微分爲$\frac{\text{戌}}{\text{彳戌}} = \frac{\text{未}}{\text{彳未}} \top \frac{\text{申}}{\text{彳申}}$，所以戌 $= \frac{\text{亥地}}{\text{未申酉}}$ 之微分爲$\frac{\text{戌}}{\text{彳戌}} = \frac{\text{未}}{\text{彳未}} \perp \frac{\text{申}}{\text{彳申}} \perp \frac{\text{酉}}{\text{彳酉}} \top \frac{\text{亥}}{\text{彳亥}} \top \frac{\text{地}}{\text{彳地}}$。由此推之，則戌 $= \frac{\text{亥地}}{\text{未申酉}}$ 之微分當爲$\frac{\text{戌}}{\text{彳戌}} = \frac{\text{未申酉}}{\text{彳(未申酉)}} \top \frac{\text{亥地}}{\text{彳(亥地)}}$。又依第十一款之例，其$\frac{\text{未申酉}}{\text{彳(未申酉)}} = \frac{\text{未}}{\text{彳未}} \perp \frac{\text{申}}{\text{彳申}} \perp \frac{\text{酉}}{\text{彳酉}}$，

而 $\frac{亥地}{彳(亥地)} = \frac{亥}{彳亥} \perp \frac{地}{彳地}$，故得 $\frac{戌}{彳戌} = \frac{未}{彳未} \perp \frac{申}{彳申} \perp \frac{酉}{彳酉} \top \frac{亥}{彳亥} \top \frac{地}{彳地}$。由是知若有分數之函數，其分母分子爲任若干同變數之函數連乘之積如 $\frac{亥地}{未申酉}$ 者，可以 $彳\left(\frac{亥地}{未申酉}\right) = \frac{亥地}{未申酉}\left[\frac{未}{彳未} \perp \frac{申}{彳申} \perp \frac{酉}{彳酉} \top \frac{亥}{彳亥} \top \frac{地}{彳地}\right]$ 之式明之。

第十三款 茲欲攷任何函數地之任何乘方求微分之專法。其地或爲自變之數，或爲他變之函數，皆可。

先設 $戌 = 地^{卯}$，其卯爲任何整數，則其函數之詳式必有卯箇地連乘如 $戌 = 地 \cdot 地 \cdot 地 \cdot 地 \cdots\cdots$。則依第十一款之例，$\frac{戌}{彳戌} = \frac{地}{彳地} \perp \frac{地}{彳地} \perp \frac{地}{彳地} \perp \cdots\cdots$，其項必有卯數。

故 $\frac{戌}{彳戌} = \frac{地}{卯彳地}$，而得 $彳戌 = \frac{地}{卯彳地}戌 = 卯地^{卯\top一}彳地$。

設函數爲分指數如 $戌 = 地^{\frac{卯}{寅}}$，則 $戌^{卯} = 地^{寅}$。若依第九款之例，則得 $卯戌^{卯\top一}彳戌 = 寅地^{寅\top一}彳地$，而 $彳戌 = \frac{卯}{寅} \times \frac{戌^{卯\top一}}{地^{寅\top一}}彳地$。惟因 $戌 = 地^{\frac{卯}{寅}}$、$戌^{卯\top一} = 地^{寅\top\frac{卯}{寅}}$，所以 $\frac{戌^{卯\top一}}{地^{寅\top一}} = 地^{\frac{卯}{寅}\top一}$，而 $彳戌 = \frac{卯}{寅}地^{\frac{卯}{寅}\top一}彳地$。

再設卯爲負指數，無論爲整數爲分數，則$戊＝地^{丁卯}$，卽$戊＝\frac{一}{地^{卯}}$。若依第十二款之例，因其分子爲常數，故其分子之微分當爲〇，而得$彳戊＝丁\frac{卯地^{卯丁一}彳地}{地^{二卯}}$，卽$彳戊＝丁卯地^{丁卯丁一}彳地$。

合觀本款之各式，可見地之指數卯無論爲正爲負爲整爲分，其微分之式必爲$彳\left(地^{卯}\right)＝卯地^{卯丁一}彳地$。故得專法如左：

凡求函數乘方之微分，法將其原指數以一減之爲新指數，而以原指數爲其倍數，又以變數之微分乘之卽得。惟其原函數若本有常數爲倍數者，則其原倍數必仍在乘數之中。

如函數之式爲$戊＝甲天^{卯}$，則其微分之式爲$彳\left(甲天^{卯}\right)＝卯甲天^{卯丁一}彳天$。

求函數諸乘方之微分更有簡便之法，可藉代數術第一百六十款與一百六十一款之二項例而得。所以于此不論者，因二項之例亦可由微分而得，余欲用微分之術證明二項之例以便于用，故俟後詳論之。

求變數平方根之微分

用前法已能求各負方之微分，惟因$\sqrt{地}=地^{\frac{二}{一}}$爲微分術中常見之式，所以必更設一最易之專法以便于用。

依本款求諸乘方微分之法，$彳\left(地^{\frac{二}{一}}\right)=\frac{二}{一}地^{\frac{二}{一}丅一}彳地$，即$彳\left(地^{\frac{二}{一}}\right)=\frac{二}{一}地^{丅\frac{二}{一}}彳地$，即$彳\left(\sqrt{地}\right)=\frac{二\sqrt{地}}{彳地}$。所以得專法如左：

凡求函數平方根之微分，法以函數之微分爲實而二倍其原函數之平方根以約之即得。

求重函數之微分

第十四款　設有地爲天之函數而戊爲地之函數，欲求其戊與天相配之微分。

令天變其同數爲$天\bot辛$，則地變爲$地'=地\bot巳辛\bot午辛^{二}\bot未辛^{三}\bot\cdots\cdots$。乃令$巳辛\bot午辛^{二}\bot未辛^{三}\bot\cdots\cdots=子$，則地變爲$地\bot子$。惟因戊爲地之函數，若地變爲$地\bot子$，則戊變爲$戊'=戊\bot巳'子\bot午'子^{二}\bot未'子^{三}\bot\cdots\cdots$。其$巳'午'未'$各數爲地之他函數，

與子及辛皆無相關。所以于此級數中，以子之同數$\text{巳辛} \perp \text{午辛}^{\text{二}} \perp \cdots\cdots$代之，則天變爲$\text{天} \perp \text{辛}$之時，其戌之同數必變爲$\text{戌}' = \text{戌} \perp \text{巳}'\text{巳辛} \perp (\text{巳}'\text{午} \perp \text{午}'\text{巳}^{\text{二}})\,\text{辛}^{\text{二}} \perp \cdots\cdots$。所以得$\dfrac{\text{辛}}{\text{戌} \top \text{戌}'} = \text{巳}'\text{巳} \perp (\text{巳}'\text{午} \perp \text{午}'\text{巳}^{\text{二}})\,\text{辛} \perp \cdots\cdots$。如令辛爲甚小，則其限必爲$\dfrac{\text{辛}}{\text{戌} \top \text{戌}'} = \text{巳}'\text{巳}$。惟因地爲天之函數，故$\text{巳} = \dfrac{\text{彳天}}{\text{彳地}}$。又因戌爲地之函數，故$\text{巳} = \dfrac{\text{彳地}}{\text{彳戌}}$。整理者註：上巳當爲巳′。如知戌亦可爲天之函數，則$\dfrac{\text{彳天}}{\text{彳戌}} = \dfrac{\text{辛}}{\text{戌} \top \text{戌}'} = \text{巳}'\text{巳}$。由此可見，$\dfrac{\text{彳天}}{\text{彳戌}} = \dfrac{\text{彳地}}{\text{彳戌}} \times \dfrac{\text{彳天}}{\text{彳地}}$，而$\text{彳戌} = \left(\dfrac{\text{彳地}}{\text{彳戌}} \times \dfrac{\text{彳天}}{\text{彳地}}\right)\text{彳天}$。故得專法如左：

凡有地爲天之函數、戌爲地之函數而欲求其微分者，法先以戌專爲地之函數而求其微係數，又以地專爲天之函數而求其微係數，乃將兩微係數相乘，又以天之微分乘之卽爲戌之微分。

已知$\dfrac{\text{彳地}}{\text{彳戌}} \times \dfrac{\text{彳天}}{\text{彳地}} = \dfrac{\text{彳天}}{\text{彳戌}}$，如令$\text{戌} = \text{天}$，則變其式爲$\dfrac{\text{彳地}}{\text{彳戌}} \times \dfrac{\text{彳天}}{\text{彳地}} = \dfrac{\text{彳天}}{\text{彳天}} = \text{一}$，所以可作$\dfrac{\text{彳地}}{\text{彳天}} = \dfrac{\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}}{\text{一}}$。由是知：凡以天爲地之函數與以地爲天之函數，其兩微係數必可互爲倒數。以法爲實，以實爲法，謂之倒數。此例可由第八款得之。