# 微積溯源序

微積溯源八卷，前四卷爲微分術，後四卷爲積分術，乃算學中最深之事也。余既與西士傅蘭雅譯畢代數術二十五卷，更思求其進境，故又與傅君譯此書焉。先是咸豐年間，曾有海甯李壬叔與西士偉烈亞力譯出代微積拾級一書，流播海内。余素與壬叔相友，得讀其書，粗明微積二術之梗概。所以又譯此書者，蓋欲補其所略也。書中代數之式甚繁，校算不易，則劉君省菴之力居多。

今刻工已竣矣，故序之，曰：吾以爲古時之算法惟有加減而已。其乘與除乃因加減之不勝其繁，故更立二術以使之簡易也。開方之法，又所以濟除法之窮者也。蓋算學中自有加減乘除開方五法，而一切淺近易明之數，無不可通矣。惟人之心思智慮日出不窮，往往以能人之所不能者爲快。遇有窒礙難通之處，輒思立法以濟其窮。故有減其所不可減而正負之名不得不立矣；除其所不能除而寄母通分之法又不得不立矣。代數中種種記號之法皆出於不得已而立者也，惟每立一法必能使繁者爲簡，難者爲易，遲者爲速，而算學之境界藉此得更進一層。如是屢進不已而所立之法於是乎日多矣。微分積分者，蓋又因乘除開

方之不勝其繁，且有窒礙難通之處，故更立此二術以濟其窮，又使簡易而速者也。試觀圓徑求周、真數求對等事，雖無微分積分之時，亦未嘗不可求，惟須乘除開方數十百次。其難有不可言喻者，不如用微積之法理明而數捷也。然則謂加減乘除開方代數之外者，更有二術焉，一曰微分，一曰積分可也。其積分術爲微分之還原，猶之開平方爲自乘之還原、除法爲乘之還原、減法爲加之還原也。然加與乘其原無不可還，而微分之原有可還有不可還，是猶算式中有不可開之方耳，又何怪焉。如必曰加減乘除開方已足供吾之用矣，何必更究其精？是舍舟車之便利而必欲負重遠行也。其用力多而成功少，蓋不待智者而辨矣。

同治十三年九月十八日，金匱華蘅芳序。

# 微積溯源卷一

## 論變數與函數之變比例

第一款　用代數以解任何曲線，其中每有幾種數，其大小恆有定率者，如橢圓之長徑、拋物線之通徑、雙曲線之屬徑之類是也。又每有幾種數可有任若干相配之同數，其大小恆不能有定率者，如曲線任一點之縱橫線是也。

數既有此兩種分別，則每種須有一總名以賅之，故名其有定之數曰常數，無定之數曰變數。

凡常數之同數不能增亦不能損。

凡變數之同數，能變爲大，亦能變爲小。故其從此同數變至彼同數之時，必歷彼此二數間最小最微之各分數。

如平圓之半徑爲常數，而其任一段之弧或弧之弦矢切割各線、及各線與弧所成之面，

皆謂之變數。

橢圓之長徑短徑皆爲常數，而其曲線之任一段或曲線上任一點之縱橫線，並其形內形外所能作之任何線或面或角，皆謂之變數。

拋物線之通徑爲常數，而其曲線之任一段或任一點之縱橫線、或弧與縱橫線所成之面，皆謂之變數。他種曲線亦然。

凡常數，恆以甲乙丙丁等字代之。凡變數，恆以天地人等字代之。

第二款　若有彼此二數皆爲變數，此數變而彼數因此數變而亦變者，則彼數爲此數之函數。

如平圓之八線皆爲弧之函數。若反求之，亦可以弧爲八線之函數。

又如重學中令物體前行之力，與其物所行之路，皆爲時刻之函數。

如有式$地=\frac{甲丅天}{甲丄天}$，此式中甲爲常數，天爲自主之變數，地爲天之函數。故地之同數能以天與甲明之。

如有式$天=\frac{地丄一}{甲(地丅一)}$，此式中甲與一皆爲常數，地爲自主之變數，天爲地之函數，故天之同數可以地與甲及一明之。

如有式$戌=甲丄乙天丄丙天^{二}$或$戌=\sqrt{甲^{二}丄乙天丄天^{二}}$或$戌=\frac{丙丄天^{二}}{甲丄\sqrt{乙天}}$，其甲

乙丙爲常數，天爲自變之數，而戊皆爲天之函數。

凡函數之中，可以有數箇自主之變數。

如有式$戊 = 甲天^{二} \perp 乙天地 \perp 丙地^{二}$ 則天與地皆爲自主之變數，戊爲天地兩變數之函數。

凡變數之函數，其形雖有多種，然每可化之，使不外乎以下數類$天^{卯}$、$甲^{天}$、正弦天、餘弦天 等類是也。

凡函數爲$天^{卯}$之類，其指數爲常數，則可從天之卯方，用代數之常法化之。而以有窮之項明其函數之同數。故謂之代數函數，亦謂之常函數。

如有式$戊 = 甲天^{三} \perp \dfrac{\sqrt{甲^{二} \perp 天^{二}}}{乙天^{二} \top 丙^{二}天}$，此種函數，其戊之同數可用加減乘除開方等法而得之。

凡函數爲甲、對天之類，則其函數之同數不能以有窮之項明之。故謂之越函數。越者，超越於尋常之意也。

凡函數爲正弦天、餘弦天及正切天、正割天之類，其函數之同數皆可以平圓之各線明之。故謂之圓函數，亦謂之角函數。

以上三種函數常函數、越函數、圓函數也。，若已知天之同數，則其函數之同數卽可求得。故

名此三種函數爲陽函數。因其顯而易明，故謂之陽函數。

更有他種函數，必先解其方程式，令函數中之各變數分開，然後能求其同數者。

如有式 $戊天 = \frac{戊\top天}{戊\perp天}$，其戊爲天之函數，如欲求其戊與天相配之同數，必先解其二次方程式始能通。

此種之式名曰天之陰函數。因其雜糅未明，故謂之陰函數。反之亦可云天爲戊之陰函數。

如解其方程式爲 $戊 = \frac{二}{一}\left[天\perp\frac{天}{一}\perp\frac{天}{\sqrt{天^{四}\perp六天^{二}\perp一}}\right]$，則戊變爲天之陰函數。

**整理者註**：右最後一句云戊變爲天之陰函數，這顯而易見是錯誤的。原文大英百科全書卷第九之 Fluxions 作 explicit function，卽陽函數，此當爲譯者譯錯。目前由於校勘凡例未定，暫留此字，待討論後決定修改與否。

昔代數之家，凡遇須用開平方之處，每于其式之左旁作一根字以記之，如根天爲天之平方根。後又變通其法，而以根號記之，如 $\sqrt{天}$ 爲天之平方根。此代數之例也。茲可仿照此例，凡遇某變數之函數，亦用一號以記之。所以凡有任何變數之函數，皆可書一函字于其變數之旁，以爲識別。

如天之函數則作函天，或作函(天)，皆言天之函數也。

所以凡見變數之左旁有一函字者，其函字並非代表天之倍數，其意謂是某變數之函數

也。

用此法則可將戊＝天$^{卯}$、戊＝甲$^{天}$、戊＝對天、戊＝正弦天、戊＝餘弦天 各種之式以一語賅之，謂之戊＝函天 或戊＝函(天)。

若函數從兩箇變數而成，其天與地皆爲自主之變數，其式如戊＝甲天$^{二}$⊥乙天地⊥丙地$^{二}$者，則可以戊＝函(天,地)別之。函數爲多箇變數所成者，仿此推之。

惟函數只指其變數言之，若甲乙丙丁各常數。雖多不論。

第三款 凡觀此書者，必先明變數與函數變比例之限。如幾何原本中證明平圓之面積必比其外切多等邊形之面積微小，若其外切多等邊形之邊愈多，則其面積愈近于平圓之面積。所以可設平圓之面積爲任何小，而切其圓外爲多等邊形，可使多等邊形之面積與平圓之面積較其數甚小于所設之圓面積；再設其多等邊形之面積爲級數，而其邊之變率可每變多若干倍，則其多等邊形之面積必漸與平圓之面積相近而以平圓爲限。雖切于圓外之多邊形其邊任變至若何多，其面積總不能等于平圓之面積。然其級數之總數可比平圓之面積所差甚微，其較數之小，可小至莫可名言。

若用此法于圓內容多等邊形，則其多等邊形之面積亦以平圓之面積爲限。

總言之，凡平圓之周爲其內容外切多等邊形之限。

如代數術第二百六十六款言，如令甲代平圓之任何弧，則 $\frac{正弦甲}{甲}$ 恆大于半徑，而 $\frac{正切甲}{甲}$ 恆小于半徑。然令其弧爲任何小，則其式之同數必甚近于半徑，而其所差之數可小至不能以言語形容。所以此兩數中間之數爲一。即半徑也。故其公限亦爲一。

由此可見凡弧與弦切，三者之中取其二以相較，其比例之限必相等。

如代數術中亦會證甲弧爲卯正切 $\frac{卯}{甲}$ 與卯正弦 $\frac{卯}{甲}$ 兩式之限，惟其卯必爲任何大。

依代數術第五十六款之例 $一\perp天\perp天^{二}\perp天^{三}\cdots\cdots\perp天^{卯\top一}$ 即 $\frac{一\top天}{一\top天^{卯}}$。若天變至小于一，而卯大至無窮，則 $天^{卯}=〇$，而式變爲 $\frac{一\top天}{一}$。所以任取其級數若干項之和，必小于 $\frac{一\top天}{一}$。惟其項愈多，則與 $\frac{一\top天}{一}$ 愈相近，而其所差之數可小至莫可名言。則可見 $\frac{一\top天}{一}$ 必爲其諸級數之限。

若依二項例之式 $\left(一\perp\frac{卯}{天}\right)^{卯}=一\perp\frac{一}{天}\perp\frac{一\cdot二}{天^{二}}\left(一\perp\frac{卯}{一}\right)\perp\frac{一\cdot二\cdot三}{天^{三}}\left(一\perp\frac{卯}{一}\right)\left(一\perp\frac{卯}{二}\right)\perp\cdots\cdots$，其卯之同數無論如何，必合于理。惟卯若爲大數，則其各項之

乘數$一丄\frac{卯}{二}$、$一丄\frac{卯}{三}$之類與一相較之差甚小，若卯愈大，則其差愈微∴若令卯為任意大，則各乘數可略等于一，所以得$\left(一丄\frac{卯}{天}\right)^{卯}＝一丄\frac{一}{天}丄\frac{一.二}{天^{二}}丄\frac{一.二.三}{天^{三}}丄$……㊊。

曾在代數術第一百七十七款中證㊊式之右邊為由函數$戊^{天}$而成。其戊之同數因為二.七一八二八一八，即訥白爾對數之根也。所以卯若愈大則$\left(一丄\frac{卯}{天}\right)^{卯}$必愈與$戊^{天}$相近，而其限為$戊^{天}$。

如令天＝一，則$\left(一丄\frac{卯}{天}\right)^{卯}$之限為戊，即$\left(一丄\frac{卯}{天}\right)^{卯}$丨戊＝二.七一八二八一八，故其函數為常數。

第四款 惟因函數之同數本從變數而生，故變數之同數與函數之長數比則為$\frac{辛}{戊'丅戊}＝二天丄辛$。

設函數之式為$戊＝天^{三}$，令天長數為辛，而以函數之新同數為$戊'$則

$$\text{戊}' = (\text{天} \perp \text{辛})^{\text{三}} \begin{cases} = \text{天}^{\text{三}} \perp \text{三天}^{\text{二}}\text{辛} \perp \text{三天辛}^{\text{二}} \perp \text{辛}^{\text{三}} \\ = \text{戊} \perp \text{三天}^{\text{二}}\text{辛} \perp \text{三天辛}^{\text{二}} \perp \text{辛}^{\text{三}} \end{cases}$$，而$\dfrac{\text{辛}}{\text{戊}' \top \text{戊}} = \text{三天}^{\text{二}} \perp \text{三天辛} \perp \text{辛}^{\text{二}}$。可見天變爲$\text{天} \perp \text{辛}$之時，其函數戊必變爲$\text{戊} \perp \text{三天}^{\text{二}}\text{辛} \perp \text{三天辛}^{\text{二}} \perp \text{辛}^{\text{三}}$，其所長之數爲$\text{三天}^{\text{二}}\text{辛} \perp \text{三天辛}^{\text{二}} \perp \text{辛}^{\text{三}}$。此式中之各項皆爲辛之整方與他數相乘所成。又可見變數與函數之變比例，其式爲$\text{三天}^{\text{二}}\text{辛} \perp \text{三天辛}^{\text{二}} \perp \text{辛}^{\text{三}}$，其初項$\text{三天}^{\text{二}}$與天之長數辛無相關。

設函數之式爲$\text{戊} = \text{天}^{\text{四}}$。令天之長數爲辛，而以$\text{戊}'$爲函數之新同數，則$\text{戊}' = \text{戊} \perp \text{四天}^{\text{三}}\text{辛} \perp \text{六天}^{\text{二}}\text{辛}^{\text{二}} \perp \text{四天辛}^{\text{三}} \perp \text{辛}^{\text{四}}$，而$\dfrac{\text{辛}}{\text{戊}' \top \text{戊}} = \text{四天}^{\text{三}} \perp \text{六天}^{\text{二}}\text{辛} \perp \text{四天辛}^{\text{二}} \perp \text{辛}^{\text{三}}$。

由此可見天若變爲$\text{天} \perp \text{辛}$，則其各函數之新同數如左：

如$\text{戊} = \text{天}^{\text{二}}$，則$\text{戊}' = \text{戊} \perp \text{二天辛} \perp \text{辛}^{\text{二}}$。如$\text{戊} = \text{天}^{\text{三}}$，則$\text{戊}' = \text{戊} \perp \text{三天}^{\text{二}}\text{辛} \perp \text{三天辛}^{\text{二}} \perp \text{辛}^{\text{三}}$。如$\text{戊} = \text{天}^{\text{四}}$，則$\text{戊}' = \text{戊} \perp \text{四天}^{\text{三}}\text{辛} \perp \text{六天}^{\text{二}}\text{辛}^{\text{二}} \perp \text{四天辛}^{\text{三}} \perp \text{辛}^{\text{四}}$。其餘類推。

總言之，若以卯爲天之任何整指數，而令天之長數爲辛，又以巳午未申等字挨次而代

辛之各方之倍數，則函數$\text{戊} = \text{天}^{\text{卯}}$之新同數必爲$\text{戊}' = \text{辛} \perp \text{巳辛} \perp \text{午辛}^{\text{二}} \perp \text{未辛}^{\text{三}} \perp \text{申辛}^{\text{四}} \perp \cdots\cdots$。由是知函數之新同數必爲級數，其初項戊爲函數之原同數，其餘各項爲天之長數辛之各整方，以巳午未申之類爲各倍數，其各倍數皆爲天之別種函數，其式亦從本函數而生。

由以上各式又可見函數爲$\text{戊} = \text{天}^{\text{二}}$、$\text{戊} = \text{天}^{\text{三}}$、$\text{戊} = \text{天}^{\text{四}}$之類，則其變數與函數之變比例必爲$\frac{\text{戊}'\text{丁戊}}{\text{辛}} = \text{二天} \perp \text{辛}$、$\frac{\text{戊}'\text{丁戊}}{\text{辛}} = \text{三天}^{\text{二}} \perp \text{三天辛} \perp \text{辛}^{\text{二}}$、$\frac{\text{戊}'\text{丁戊}}{\text{辛}} = \text{四天}^{\text{三}} \perp \text{六天}^{\text{二}}\text{辛} \perp \text{四天辛}^{\text{二}} \perp \text{辛}^{\text{三}}$之類。總之若以卯爲天之整指數，則$\text{戊} = \text{天}^{\text{卯}}$之變比例必爲$\frac{\text{戊}'\text{丁戊}}{\text{辛}} = \text{巳} \perp \text{午辛} \perp \text{未辛}^{\text{二}} \perp \text{申辛}^{\text{三}} \perp \cdots\cdots$。由此可見，變數天之長數與函數$\text{天}^{\text{卯}}$之長數其變比例$\frac{\text{戊}'\text{丁戊}}{\text{辛}}$之同數$\text{巳} \perp \text{午辛} \perp \text{未辛}^{\text{二}} \perp \text{申辛}^{\text{三}} \perp \cdots\cdots$可分之爲兩式，其一式爲巳，此式與天之長數辛無相關；又一式爲$\text{午辛} \perp \text{未辛}^{\text{二}} \perp \text{申辛}^{\text{三}} \perp \cdots\cdots$。卽$\text{辛}\left(\text{午} \perp \text{未辛} \perp \text{申辛}^{\text{二}} \perp \cdots\cdots\right)$。此式因以辛爲乘數，故辛若變小，其數亦必隨辛而變小。如令辛爲任何小，則此式之數可小至甚近于〇。故此數可以不計，而以巳爲變比例之限。

設有緐函數之式$戊=甲\perp乙天\perp丙天^{二}$，令天之長數爲辛，則天變爲$天\perp辛$之時，其函數之同數必變爲$戊\begin{cases}=甲\perp乙(天\perp辛)\perp丙(天\perp辛)^{二}\\=甲\perp乙天\perp丙天^{二}\perp(乙\perp二丙天)辛\perp丙辛^{二}\end{cases}$，故$戊'\top戊=(乙\perp二丙天)辛\perp丙辛^{二}$，而$\frac{辛}{戊'\top戊}=乙\perp二丙天\perp丙辛$。其$乙\perp二丙天$爲本函數變比例之限。

以此法偏試各種特設之函數，見其皆有相類之性情，所以例設如左。

例曰：命任何自主之變數爲天，而令天之任何函數等于戊，則天變爲$天\perp辛$之時，函數之新同數爲$戊'=戊\perp巳辛\perp午辛^{二}\perp未辛^{三}\perp\cdots\cdots$，其變數與函數之變比例爲$\frac{辛}{戊'\top戊}=巳\perp午辛\perp未辛^{二}\perp申辛^{三}\perp\cdots\cdots$。此式中之初項巳爲變比例之限，無論何種函數，其限皆可依此比例求之。

由以上所論變數之長數與函數之長數相關之理，可于算學中開出兩種極廣大極精微之法。

其第一種爲有任何變數之任何函數而求其變數與函數變比例之限。

其第二種爲有任何變數與函數變比例之限而求其函數之原式。

此二種法，若細攷其根源，卽奈端所謂正流數、反流數也；亦卽來本之所謂微分算術、積分算術也；又卽拉果闌諸所謂函數變例也。

## 論各種函數求微分之公法

第五款　若函數之式爲戊＝天$^{二}$，令天變爲天丄辛，則函數之新同數必爲戊$'$＝戊丄二天辛丄辛$^{二}$，其與原同數之較爲戊$'$丅戊，卽二天辛丄辛$^{二}$，此式之初項二天辛，名之曰溢率。

依同理推之，若函數之式爲戊＝天$^{三}$，令天變爲天丄辛，則函數之新同數爲戊$'$＝戊丄三天$^{二}$辛丄三天辛$^{二}$丄辛$^{三}$，其與原同數之較爲戊$'$丅戊，卽三天$^{二}$辛丄三天辛$^{二}$丄辛$^{三}$。其初項三天$^{二}$辛 爲溢率。

若函數之式爲戊＝天$^{四}$，而天變爲天丄辛，則函數之新同數與原同數之較爲四天$^{三}$辛丄六天$^{二}$辛$^{二}$丄四天辛$^{三}$丄辛$^{四}$，而其溢率爲四天$^{三}$辛。

總言之，凡天之函數無論爲某方，恆可以天丄辛 代其天，而變其函數之同數爲戊丄巳辛丄午辛$^{二}$丄未辛$^{三}$丄……，乃以原同數戊減之得巳辛丄午辛$^{二}$丄未辛$^{三}$丄……，而取其初項巳辛 爲溢率。

準此推之，則知天之溢率卽爲其長數辛。惟因函數之溢率每藉天之長數而生，故微分術中，恆以$彳天$代天之溢率。其彳號者，非天之倍數，不過是天之溢率耳。溢率之名，本爲流數術中所用。而彳號者，卽微字之偏旁，故微分之術用之。

如有式$戊=天^{二}$，則$彳戊=二天彳天$。此式之意謂戊之微分等于$二天$乘天之微分。猶言函數戊之溢率等于以$二天$乘其天之溢率也。如有式$戊=天^{三}$，則$彳戊=三天^{二}彳天$。此式之意謂戊之微分等于$三天^{二}$乘天之微分。猶言函數戊之溢率等于以$三天^{二}$乘其天之溢率也。

第六款　惟因每遇$戊=天^{二}$，則$彳戊=二天彳天$，所以可寫之如$\frac{彳天}{彳戊}=二天$。此爲天微分之倍數，亦謂之微係數。

又依前法推之，如函數之式爲$戊=天^{三}$，則$彳戊=三天^{二}彳天$，而$\frac{彳天}{彳戊}=三天^{二}$。其$三天^{二}$爲原函數$戊=天^{三}$之微係數。

總言之，無論何種函數之微係數，皆可以$\frac{彳天}{彳戊}$代之。而函數之新同數爲$戊 \perp 巳辛 \perp 午辛^{二} \perp \cdots\cdots$，所以$\frac{彳天}{彳戊}=巳$，其巳爲天之他函數，其形每隨函數之式而變。如之戊之同數爲何式，則其巳之同數卽易求得。

凡函數之欲求微分者，先于其式之左旁作一彳號以記之。如有$[(甲 \perp 天)(乙^{二} \top 天^{二})]$式，欲求其微分，則可先作$彳[(甲 \perp 天)(乙^{二} \top 天^{二})]$。

凡函數之欲求微係數者，于其式之左旁作彳號，又以$彳天$爲其分母。如有$[(甲 \perp 天)(乙^{二} \top 天^{二})]$式，欲求其微係數，則作$\dfrac{彳天}{彳[(甲 \perp 天)(乙^{二} \top 天^{二})]}$。

從以上各款諸說，易知求微分之公法。

法曰：無論天之任何函數，欲求微分，則以$天 \perp 辛$代其原式中之天而詳之。依辛之整方數自小而大序之，取其初有辛之項，而以$彳天$代其辛即得。

如有式$戊 = 甲天 \perp 乙天^{二}$，欲求其微係數，則以$天 \perp 辛$代其天，而令函數之新同數爲$戊'$，則得$戊' \begin{cases} = 甲(天 \perp 辛) \perp 乙(天 \perp 辛)^{二} \\ = 甲天 \perp 乙天^{二} \perp (甲 \perp 二乙天)辛 \perp 乙辛^{二} \\ = 戊 \perp (甲 \perp 二乙天)辛 \perp 乙辛^{二} \end{cases}$。取其初有辛之項$(甲 \perp 二乙天)辛$，以$彳天$代其辛，即得$彳戊 = (甲 \perp 二乙天)彳天$，故其$\dfrac{彳天}{彳戊} = 甲 \perp 二乙天$。

**第七款** 上款之法，必令天變爲$天 \perp 辛$，而詳其函數之同數爲級數，此乃論其立法之理當如是也。惟求得級數之後，所用者僅爲其辛一方之項，則但能求得此項已足用矣。前于第

四款中言此項之倍數爲變數與函數變比例之限，又于第六款中言此項之倍數謂之微係數。然則求函數之微係數與求變數與函數變比例之限，其法本無異也。

如有式$\text{戊} = \frac{\text{天}}{\text{甲}^{二}}$，則$\text{戊}' = \frac{\text{天} \perp \text{辛}}{\text{甲}^{二}}$。而$\text{戊} \top \text{戊}' = \frac{\text{天}}{\text{甲}^{二}} \top \frac{\text{天} \perp \text{辛}}{\text{甲}^{二}}$，卽$\text{戊} \top \text{戊}' = \frac{\text{天}(\text{天} \perp \text{辛})}{\top \text{甲}^{二}\text{辛}}$，故其變比例之式爲$\frac{\text{辛}}{\text{戊} \top \text{戊}'} = \frac{\text{天}(\text{天} \perp \text{辛})}{\top \text{甲}^{二}}$。惟此式可不待詳爲級數而始得其變比例之限，因可見辛愈小，則其式愈近于$\top \frac{\text{天}^{二}}{\text{甲}^{二}}$，故此式必卽爲$\frac{\text{彳天}}{\text{彳戊}}$之同數，所以得$\text{彳戊} = \top \frac{\text{天}^{二}}{\text{甲}^{二}\text{彳天}}$。

若以戊爲任何函數之原同數，而以$\text{天} \perp \text{辛}$代其天，則其函數之新同數爲$\text{戊}' = \text{戊} \perp \text{巳辛} \perp \text{午辛}^{二} \perp \text{未辛}^{三} \perp \cdots\cdots$，卽得$\frac{\text{辛}}{\text{戊}' \top \text{戊}} = \text{巳} \perp \text{午辛} \perp \text{未辛}^{二} \perp \cdots\cdots$。惟因$\frac{\text{辛}}{\text{戊}' \top \text{戊}}$之限爲巳，故得$\frac{\text{彳天}}{\text{彳戊}} = \text{巳}$，而$\text{彳戊} = \text{巳彳天}$。

由此得一解曰：凡微分之術，其意專爲求任何變數與函數同時變大之限耳。

凡求任何函數之微分，不過將一尋常之代數式另用他法以變化之。因其變化之法與代數中常用之法異，則不得不另有一名以別之，故謂之微分術。

第八款　凡變數與函數變比例之限，無論以何數爲主，其形必同。

如戊爲天之函數，若天變爲$\text{天} \perp \text{辛}$，則戊變爲$\text{戊} \perp \text{巳}\text{辛} \perp \text{午}\text{辛}^{\text{二}} \perp \text{未}\text{辛}^{\text{三}} \perp \cdots\cdots$。其巳、午、未各數俱爲天之他函數，從本函數所生。如令其$\text{巳}\text{辛} \perp \text{午}\text{辛}^{\text{二}} \perp \text{未}\text{辛}^{\text{三}} \perp \cdots\cdots = \text{子}$，則天與戊同時變大之數爲辛與子。如依代數術第一百六十三款之法反求其級數，則得$\text{辛} = \frac{\text{巳}}{\text{一}}\text{子} \top \frac{\text{巳}^{\text{二}}}{\text{午}}\text{子}^{\text{二}} \perp \cdots\cdots$，故其變數與函數之公比例爲$\frac{\text{子}}{\text{辛}} = \frac{\text{巳}}{\text{一}} \top \frac{\text{巳}^{\text{二}}}{\text{午}}\text{子} \perp \cdots\cdots$。故$\frac{\text{子}}{\text{辛}}$之限爲$\frac{\text{巳}}{\text{一}}$，而$\frac{\text{辛}}{\text{子}}$之限爲巳，此即$\frac{\text{一}}{\text{巳}}$也。

第九款　由此易知，凡有相等之函數，則其微係數亦必相等。

如戊與亥爲兩函數，而$\text{戊} = \text{亥}$，其天變爲$\text{天} \perp \text{辛}$之時，戊變爲$\text{戊}'$，亥變爲$\text{亥}'$，則$\text{戊}' = \text{亥}'$，而$\text{戊}' \top \text{戊} = \text{亥}' \top \text{亥}$，故$\frac{\text{辛}}{\text{戊}' \top \text{戊}} = \frac{\text{辛}}{\text{亥}' \top \text{亥}}$。如以巳與午各爲其變比例之限，則$\text{巳} = \text{午}$。故$\text{巳}\,\text{彳}\text{天} = \text{午}\,\text{彳}\text{天}$，而$\text{彳}\text{戊} = \text{彳}\text{亥}$。

由此可見，凡函數之式無論如何改形，若其同數無異者，則其微係數必同。

如函數之原式爲$\text{天}^{\text{三}} \perp \text{甲}^{\text{三}}$，若改其形爲$(\text{天} \perp \text{甲})(\text{天}^{\text{二}} \top \text{甲}\text{天} \perp \text{甲}^{\text{二}})$，則此式之微係數與原式之微係數必無異。

惟此理，若反言之而謂相等之微係數必從相等之函數而生，則不盡然。如函數之式爲$戊 = 甲 丄 乙天$，令天變爲$天 丄 辛$，而戊變爲$戊'$，則$戊' = 甲 丄 乙天 丄 乙辛 = 戊 丄 乙辛$，故得$\frac{辛}{戊' 丅 戊} = 乙$。觀此可知，其常數之項甲不能入變比例之限內，故其微係數必與$戊 = 乙天$之微係數無異。惟微係數乙既能屬於本函數$甲 丄 乙天$，又能屬於他函數$乙天$，所以有下例。

例曰：凡變數與常數相加減之函數，其微係數中不見其加減之常數。惟變數與常數相乘除者，則其微係數中有常數爲倍數。

## 求兩函數相乘積之微分

第十款　凡變數之函數，無論其形如何，皆可以第六款之公法求其微分。然不如每種異形之函數各設一專法以求之，則更簡捷。

如有式$戊 = 未申$，其未與申各爲天之函數。今欲得一法專能求未、申相乘積之微分，若令天變爲$天 丄 辛$，則未、申二函數必變爲$未' = 未 丄 巳辛 丄 午辛^{二} 丄 \cdots\cdots$、$申' = 申 丄 巳'辛 丄 午'辛^{二} 丄 \cdots\cdots$，其巳、午爲由未函數所得之天之他函數；其$巳'$、$午'$爲

由申函數所得之天之他函數。

再令戌′＝未′申′，則依法得戌′＝未′申′＝未申⊥(未巳′⊥申巳)辛⊥(未午′⊥巳巳′⊥申午)辛$^{二}$⊥……。以戌代其未申，移項而以辛約之，則得$\frac{辛}{戌'丁戌}$＝未巳′⊥申巳⊥(未午′⊥巳巳′⊥申午)辛⊥……。此式中之未巳′與申巳兩項乃天之他函數，而與辛無涉者，其餘各項俱有辛之各方爲乘數。設辛爲甚微，則其所乘之衆項亦甚微，故其變比例之限爲$\frac{辛}{戌'丁戌}$＝未巳′⊥申巳。惟因巳＝$\frac{辛}{未'丁未}$、巳′＝$\frac{辛}{申'丁申}$，故可依第六款之法以$\frac{彳天}{彳戌}$代其$\frac{辛}{戌'丁戌}$；以$\frac{彳天}{彳未}$代其$\frac{辛}{未'丁未}$；以$\frac{彳天}{彳申}$代其$\frac{辛}{申'丁申}$。則得$\frac{彳天}{彳戌}$＝未$\frac{彳天}{彳申}$⊥申$\frac{彳天}{彳未}$，而彳戌＝未彳申⊥申彳未。故得專法如左：

凡求同變彼此兩函數相乘積之微分，法將此函數乘彼函數之微分，又將彼函數乘此函數之微分，而以乘得之兩式相加卽得。

# 求多函數連乘積之微分

第十一款　前款論函數之式爲戌 $=$ 未申，則彳戌 $=$ 未彳申 $\perp$ 申彳未，所以 $\frac{\text{戌}}{\text{彳戌}}=\frac{\text{未}}{\text{彳未}}\perp\frac{\text{申}}{\text{彳申}}$。

由此推之，如戌爲三箇同變數之函數連乘如未酉亥，可令其申 $=$ 酉亥，則亦能爲戌 $=$ 未申　而 $\frac{\text{戌}}{\text{彳戌}}=\frac{\text{未}}{\text{彳未}}\perp\frac{\text{申}}{\text{彳申}}$。惟因申 $=$ 酉亥，可依同例得 $\frac{\text{申}}{\text{彳申}}=\frac{\text{酉}}{\text{彳酉}}\perp\frac{\text{亥}}{\text{彳亥}}$，所以 $\frac{\text{戌}}{\text{彳戌}}=\frac{\text{未}}{\text{彳未}}\perp\frac{\text{酉}}{\text{彳酉}}\perp\frac{\text{亥}}{\text{彳亥}}$。若仍將未申　代還其戌而以常法化之，則爲彳戌 $=$ 酉亥彳未 $\perp$ 未亥彳酉 $\perp$ 未酉彳亥。故得專法如左：

凡求同變數之若干函數連乘積之微分，法以各本函數之微分與其餘之各他函數連乘，而以各乘得之式相加卽得。

此法易用以總式以明之。無論其同變數之函數有若干數連乘，皆可以一例推之：

如多函數連乘之式爲未申酉亥，則其微分之式爲彳(未申酉亥) $=$ 未申酉亥 $\left[\frac{\text{未}}{\text{彳未}}\perp\frac{\text{申}}{\text{彳申}}\perp\frac{\text{酉}}{\text{彳酉}}\perp\frac{\text{亥}}{\text{彳亥}}\right]$。

# 求變數之分函數微分

第十二款　若有分數之式，其母子爲同變數之各函數，則欲得其求微分之專法，可令戌 $= \frac{未}{申}$，則未 $=$ 戌申，而彳未 $=$ 戌彳申 $\perp$ 申彳戌。乃以其戌之同數 $\frac{未}{申}$ 代其戌，則彳未 $= \frac{未彳申}{申} \perp$ 申彳戌，而彳戌 $= \frac{申彳未 \top 未彳申}{申^{二}}$。故得專法如左：

凡同變量之函數，若爲分數，則求微分之法可將分母乘其分子之微分，乃以分子乘分母之微分減之，而以分母之平方約之。

此法亦可用一總式以明之。

惟因戌 $= \frac{未}{申}$ 之微分爲 $\frac{彳戌}{戌} = \frac{彳未}{未} \top \frac{彳申}{申}$，所以戌 $= \frac{未申酉}{亥地}$ 之微分爲 $\frac{彳戌}{戌} = \frac{彳未}{未} \perp \frac{彳申}{申} \perp \frac{彳酉}{酉} \top \frac{彳亥}{亥} \top \frac{彳地}{地}$。由此推之，則戌 $= \frac{未申酉}{亥地}$ 之微分當爲 $\frac{彳戌}{戌} = \frac{彳(未申酉)}{未申酉} \top \frac{彳(亥地)}{亥地}$。又依第十一款之例，其 $\frac{彳(未申酉)}{未申酉} = \frac{彳未}{未} \perp \frac{彳申}{申} \perp \frac{彳酉}{酉}$，

而$\frac{亥地}{彳(亥地)} = \frac{亥}{彳亥} \perp \frac{地}{彳地}$，故得$\frac{戊}{彳戊} = \frac{未}{彳未} \perp \frac{申}{彳申} \perp \frac{酉}{彳酉} \top \frac{亥}{彳亥} \top \frac{地}{彳地}$。由是知若有分數之函數，其分母分子爲任若干同變數之函數連乘之積如$\frac{亥地}{未申酉}$者，可以$彳\left(\frac{亥地}{未申酉}\right) = \frac{亥地}{未申酉}\left[\frac{未}{彳未} \perp \frac{申}{彳申} \perp \frac{酉}{彳酉} \top \frac{亥}{彳亥} \top \frac{地}{彳地}\right]$之式明之。

第十三款　茲欲攷任何函數地之任何乘方求微分之專法。其地或爲自變之數，或爲他變之函數，皆可。

先設$戊 = 地^{卯}$，其卯爲任何整數，則其函數之詳式必有卯箇地連乘如$戊 = 地 \cdot 地 \cdot 地 \cdot 地 \cdots\cdots$。則依第十一款之例，$\frac{戊}{彳戊} = \frac{地}{彳地} \perp \frac{地}{彳地} \perp \frac{地}{彳地} \perp \cdots\cdots$，其項必有卯數。

故$\frac{戊}{彳戊} = \frac{地}{卯彳地}$，而得$彳戊 = \frac{地}{卯彳地}戊 = 卯地^{卯\top一}彳地$。

設函數爲分指數如$戊 = 地^{\frac{卯}{寅}}$，則$戊^{卯} = 地^{寅}$。若依第九款之例，則得$卯戊^{卯\top一}彳戊 = 寅地^{寅\top一}彳地$，而$彳戊 = \frac{卯}{寅} \times \frac{戊^{卯\top一}}{地^{寅\top一}}彳地$。惟因$戊 = 地^{\frac{卯}{寅}}$、$戊^{卯\top一} = 地^{寅\top\frac{卯}{寅}}$，所以$\frac{戊^{卯\top一}}{地^{寅\top一}} = 地^{\frac{卯}{寅}\top一}$，而$彳戊 = \frac{卯}{寅}地^{\frac{卯}{寅}\top一}彳地$。

再設卯爲負指數，無論爲整數爲分數，則$戊 = 地^{\top卯}$，即$戊 = \frac{地^{卯}}{一}$。若依第十二款之

例，因其分子爲常數，故其分子之微分當爲〇，而得$彳戊 = 丅\dfrac{地^{二卯}}{卯地^{卯丅一}彳地}$，卽$彳戊 = 丅卯地^{丅卯丅一}彳地$。

合觀本款之各式，可見地之指數卯無論爲正爲負爲整爲分，其微分之式必爲$彳\left(地^{卯}\right) = 卯地^{卯丅一}彳地$。故得專法如左：

凡求函數乘方之微分，法將其原指數以一減之爲新指數，而以原指數爲其倍數，又以變數之微分乘之卽得。惟其原函數若本有常數爲倍數者，則其原倍數必仍在乘數之中。

如函數之式爲$戊 = 甲天^{卯}$，則其微分之式爲$彳\left(甲天^{卯}\right) = 卯甲天^{卯丅一}彳天$。

求函數諸乘方之微分更有簡便之法，可藉代數術第一百六十款與一百六十一款之二項例而得。所以于此不論者，因二項之例亦可由微分而得，余欲用微分之術證明二項之例以便于用，故俟後詳論之。

## 求變數平方根之微分

用前法已能求各負方之微分，惟因$\sqrt{地} = 地^{\frac{一}{二}}$為微分術中常見之式，所以必更設一最易之專法以便于用。

依本款求諸乘方微分之法，$彳\left(地^{\frac{一}{二}}\right) = \frac{一}{二}地^{\frac{一}{二}丅一}彳地$，卽$彳\left(地^{\frac{一}{二}}\right) = \frac{一}{二}地^{丅\frac{一}{二}}彳地$，卽$彳\left(\sqrt{地}\right) = \frac{彳地}{二\sqrt{地}}$。所以得專法如左：

凡求函數平方根之微分，法以函數之微分爲實而二倍其原函數之平方根以約之卽得。

## 求重函數之微分

第十四款　設有地爲天之函數而戊爲地之函數，欲求其戊與天相配之微分。

令天變其同數爲$天丄辛$，則地變爲$地' = 地丄巳辛丄午辛^{二}丄未辛^{三}丄\cdots\cdots$。乃令$巳辛丄午辛^{二}丄未辛^{三}丄\cdots\cdots = 子$，則地變爲$地丄子$。惟因戊爲地之函數，若地變爲$地丄子$，則戊變爲$戊' = 戊丄巳'子丄午'子^{二}丄未'子^{三}丄\cdots\cdots$。其$巳'午'未'$各數爲地之他函數，

與子及辛皆無相關。所以于此級數中，以子之同數$\text{巳辛} \perp \text{午辛}^{二} \perp \cdots\cdots$代之，則天變爲$\text{天} \perp \text{辛}$之時，其戊之同數必變爲$\text{戊}' = \text{戊} \perp \text{巳}'\text{巳辛} \perp (\text{巳}'\text{午} \perp \text{午}'\text{巳}^{二})\,\text{辛}^{二} \perp \cdots\cdots$。所以得$\dfrac{\text{辛}}{\text{戊} \top \text{戊}'} = \text{巳}'\text{巳} \perp (\text{巳}'\text{午} \perp \text{午}'\text{巳}^{二})\,\text{辛} \perp \cdots\cdots$。如令辛爲甚小，則其限必爲$\dfrac{\text{辛}}{\text{戊} \top \text{戊}'} = \text{巳}'\text{巳}$。惟因地爲天之函數，故$\text{巳} = \dfrac{\text{彳天}}{\text{彳地}}$。又因戊爲地之函數，故$\text{巳} = \dfrac{\text{彳地}}{\text{彳戊}}$。**整理者註**：上巳當爲巳'。 如知戊亦可爲天之函數，則$\dfrac{\text{彳天}}{\text{彳戊}} = \dfrac{\text{辛}}{\text{戊} \top \text{戊}'} = \text{巳}'\text{巳}$。由此可見，$\dfrac{\text{彳天}}{\text{彳戊}} = \dfrac{\text{彳地}}{\text{彳戊}} \times \dfrac{\text{彳天}}{\text{彳地}}$，而$\text{彳戊} = \left(\dfrac{\text{彳地}}{\text{彳戊}} \times \dfrac{\text{彳天}}{\text{彳地}}\right)\text{彳天}$。故得專法如左：

凡有地爲天之函數、戊爲地之函數而欲求其微分者，法先以戊專爲地之函數而求其微係數，又以地專爲天之函數而求其微係數，乃將兩微係數相乘，又以天之微分乘之卽爲戊之微分。

已知$\dfrac{\text{彳地}}{\text{彳戊}} \times \dfrac{\text{彳天}}{\text{彳地}} = \dfrac{\text{彳天}}{\text{彳戊}}$，如令$\text{戊} = \text{天}$，則變其式爲$\dfrac{\text{彳地}}{\text{彳戊}} \times \dfrac{\text{彳天}}{\text{彳地}} = \dfrac{\text{彳天}}{\text{彳天}} = \text{一}$，所以可作$\dfrac{\text{彳地}}{\text{彳天}} = \dfrac{\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}}{\text{一}}$。由是知：凡以天爲地之函數與以地爲天之函數，其兩微係數必可互爲倒數。以法爲實，以實爲法，謂之倒數。 此例可由第八款得之。

# 求多項函數之微分

第十五款　如有同變數之若干函數合成一多項式，則求此多項式之微分亦可設一專法。

設亥地人爲變數天之任何函數，欲求戊 $=$ 甲 $\perp$ 乙亥 $\perp$ 丙地 $\top$ 戊人 之微分，若天變為天 $\perp$ 辛 而其同時中亥變為亥 $\perp$ 巳辛 $\perp$ 午辛$^{二}$ $\perp\cdots\cdots$，地變為地 $\perp$ 巳$'$辛 $\perp$ 午$'$辛$^{二}$ $\perp\cdots\cdots$，人變為人 $\perp$ 巳$''$辛 $\perp$ 午$''$辛$^{二}$ $\perp\cdots\cdots$，戊變為戊$'$，故得

$$\text{戊}' = \begin{cases} \text{甲} \perp \text{乙亥} \perp \text{丙地} \top \text{戊人} \\ \perp (\text{乙巳} \perp \text{丙巳}' \perp \text{戊巳}'')\,\text{辛} \\ \perp (\text{乙午} \perp \text{丙午}' \perp \text{戊午}'')\,\text{辛}^{二} \\ \perp \cdots\cdots \end{cases}$$

。如以戊代其右邊之上層，移其項而以辛約之，則得已知 $\dfrac{\text{辛}}{\text{戊}' \top \text{戊}} = \text{乙巳} \perp \text{丙巳}' \top \text{戊巳}'' \perp (\text{乙午} \perp \text{丙午}' \perp \text{戊午}'')\,\text{辛} \perp \cdots\cdots$。

觀其各限可見 $\dfrac{\text{辛}}{\text{戊}' \top \text{戊}}$ 爲戊之微係數，而巳 與巳$'$ 及巳$''$ 爲亥與地及人之微係數。所以

其$\frac{彳天}{彳戊} = \frac{彳天}{乙彳亥} ⊥ \frac{彳天}{丙彳地} ⊤ \frac{彳天}{戊彳人}$，而$彳戊 = 乙彳亥 ⊥ 丙彳地 ⊤ 戊彳人$。故得專法如左：

凡有同變數之各函數和較而成之多項式，則其總函數之微分必等于各函數微分之和較，而其常數之項恆變爲〇。

## 代函數求微分各題

第十六款　茲設數題以明之。

一題　設有$戊 = 甲天^{五}$，欲求其微分之式。

此式與公式$戊 = 甲天^{卯}$爲一類，所以可用第十三款之法求其微分得$彳戊 = 五甲天^{四}彳天$。

二題　設有$戊 = \frac{天^{五}}{甲}$，欲求其微分之式。

惟因$戊 = \frac{天^{五}}{甲}$卽$戊 = 甲天^{丁五}$，故如法求得$彳戊 = 丁五甲天^{丁六}彳天$，卽$彳戊 = \frac{天^{六}}{丁五甲彳天}$。

三題 設有$\text{戊}=\sqrt{\text{天}^{\text{三}}}$，欲求其微分之式。

惟因$\text{戊}=\sqrt{\text{天}^{\text{三}}}$ 卽$\text{戊}=\text{天}^{\frac{\text{二}}{\text{三}}}$，故如法求得$\text{彳戊}=\frac{\text{二}}{\text{三}}\text{天}^{\frac{\text{二}}{\text{一}}}\text{彳天}$，卽。$\text{彳戊}=\frac{\text{二}}{\text{三}}\text{彳天}\sqrt{\text{天}}$。

四題 設有$\text{戊}=\text{甲天}^{\text{三}}\perp\text{乙天}^{\text{二}}\perp\text{丙天}\perp\text{戊}$，欲求其微分之式。

此爲多項之函數，故如法求得$\text{彳戊}=\text{三甲天}^{\text{二}}\text{彳天}\perp\text{二乙天彳天}\perp\text{丙彳天}$，卽$\text{彳戊}=(\text{三甲天}^{\text{二}}\perp\text{二乙天}\perp\text{丙})\text{彳天}$。其常數之項戊于求微分之時變爲〇而不見。

五題 設有$\text{戊}=\left(\text{甲}\perp\text{乙天}^{\text{卯}}\right)^{\text{巳}}$，欲求其微分之式。

此可令$\text{地}=\text{甲}\perp\text{乙天}^{\text{卯}}$，則$\text{戊}=\text{地}^{\text{巳}}$ 而$\text{彳戊}=\text{巳地}^{\text{巳丅一}}\text{彳地}$。惟因$\text{地}^{\text{巳丅一}}=\left(\text{甲}\perp\text{乙天}^{\text{卯}}\right)^{\text{巳丅一}}$，而$\text{彳地}=\perp\text{乙卯天}^{\text{卯丅一}}\text{彳天}$，所以得

$\text{彳戊}=\text{乙卯巳}\left(\text{甲}\perp\text{乙天}^{\text{卯}}\right)^{\text{巳丅一}}\perp\text{天}^{\text{卯丅一}}\text{彳天}$。

此題之式若不用地代其括弧內之數，而以$\text{甲}\perp\text{乙天}^{\text{卯}}$ 爲丨箇簡函數，其戊爲簡函數之某方而依第十三款之法求之，亦通。

六題 設有$\text{戊}=\text{天}^{\text{三}}(\text{甲}\perp\text{天})^{\text{二}}$，此題爲表明第十款之法。 欲求其微分之式。

令$\text{巳} = \text{天}^{\text{三}}$，$\text{午} = (\text{甲} \perp \text{天})^{\text{二}}$，則$\text{戊} = \text{巳午}$。故得$\text{彳戊} = \text{午彳巳} \perp \text{巳彳午}$。惟因$\text{彳巳} = \text{三天}^{\text{二}}\text{彳天}$，$\text{彳午} = \text{二}(\text{甲} \perp \text{天})\,\text{彳天}$，所以$\text{彳戊} = \text{三天}^{\text{二}}(\text{甲} \perp \text{天})^{\text{二}}\,\text{彳天} \perp \text{二天}^{\text{三}}(\text{甲} \perp \text{天})\,\text{彳天}$，即$\text{彳戊} = \text{天}^{\text{二}}(\text{甲} \perp \text{天})(\text{三甲} \perp \text{五天})\,\text{彳天}$。

若平常習算之時，可不必用巳、午二數相代，而即以原式如法求之，亦同。

七題　設有$\text{戊} = \text{天}(\text{一} \perp \text{天})(\text{一} \perp \text{天}^{\text{二}})$，其戊爲同變數之三箇函數連乘之積。欲求其微分之式。

依第十一款之法得$\text{彳戊} = (\text{一} \perp \text{天})(\text{一} \perp \text{天}^{\text{二}})\,\text{彳天} \perp \text{天}(\text{一} \perp \text{天}^{\text{二}})\,\text{彳天} \perp \text{二天}^{\text{二}}(\text{一} \perp \text{天})\,\text{彳天}$，又以常法化之得$\text{彳戊} = (\text{一} \perp \text{二天} \perp \text{三天}^{\text{二}} \perp \text{四天}^{\text{三}})\,\text{彳天}$。

又法可從本公式$\text{彳}(\text{未申酉}) = \text{未申酉}\left[\dfrac{\text{未}}{\text{彳未}} \perp \dfrac{\text{申}}{\text{彳申}} \perp \dfrac{\text{酉}}{\text{彳酉}}\right]$得

$\text{彳戊} = \text{天}(\text{一} \perp \text{天})(\text{一} \perp \text{天}^{\text{二}})\left[\dfrac{\text{天}}{\text{彳天}} \perp \dfrac{\text{一} \perp \text{天}}{\text{彳天}} \perp \dfrac{\text{一} \perp \text{天}^{\text{二}}}{\text{二天彳天}}\right]$。此式易化爲$\text{彳戊} = (\text{一} \perp \text{二天} \perp \text{三天}^{\text{二}} \perp \text{四天}^{\text{三}})\,\text{彳天}$。

八題　設有$\text{戊} = \dfrac{\text{一} \perp \text{天}^{\text{二}}}{\text{天}}$，此爲分數之函數。欲求其微分之式。

依第十二款之法得$\text{彳戊} = \dfrac{(\text{一} \perp \text{天}^{\text{二}})^{\text{二}}}{(\text{一} \perp \text{天}^{\text{二}})\,\text{彳天} \top \text{二天}^{\text{二}}\text{彳天}}$，即$\text{彳戊} = \dfrac{(\text{一} \perp \text{天}^{\text{二}})^{\text{二}}}{(\text{一} \top \text{天}^{\text{二}})\,\text{彳天}}$。

**九題** 設有$戌 = \dfrac{天^{四} \top 天^{二} \perp 一}{天^{三} \perp 天} = \dfrac{天^{四} \top 天^{二} \perp 一}{天\left(天^{二} \perp 一\right)}$，欲求其微分之式。

將所設之式與本公式$彳\left[\dfrac{酉}{申未}\right] = \dfrac{酉}{申未}\left[\dfrac{未}{彳未} \perp \dfrac{申}{彳申} \top \dfrac{酉}{彳酉}\right]$相比，則$天 = 未$，$天^{二} \perp 一 = 申$，$天^{四} \top 天^{二} \perp 一 = 酉$。所以得

$彳戌 = \dfrac{天^{四} \top 天^{二} \perp 一}{天^{三} \perp 天}\left[\dfrac{天}{彳天} \perp \dfrac{一 \perp 天^{二}}{二天彳天} \top \dfrac{天^{四} \top 天^{二} \perp 一}{\left(四天^{三} \top 二天\right)彳天}\right]$，化之得$彳戌 =$

$$\frac{\left(天^{四} \top 天^{二} \perp 一\right)^{二}}{\top\left(天^{六} \perp 四天^{四} \top 四天^{二} \top 一\right)彳天}。$$

**十題** 設有$戌 = 三地^{二}$，$地 = 天^{三} \perp 甲天$此題爲表明第十四款之法。欲求其微分之式。

如法求之，則$\dfrac{彳地}{彳戌} = 六地$，$\dfrac{彳天}{彳地} = 三天^{二} \perp 甲$，所以$\dfrac{彳地}{彳戌} \times \dfrac{彳天}{彳地} = 六地\left(三天^{二} \perp 甲\right)$，

即$\dfrac{彳地}{彳戌} \times \dfrac{彳天}{彳地} = 一八天^{二}地 \perp 六甲地$。惟因$彳戌 = \dfrac{彳地}{彳戌} \times \dfrac{彳天}{彳地}彳天$，故得$彳戌 =$ $一八天^{二}地彳天 \perp 六甲地彳天$。

此式亦可由他法而得。蓋因其$戌 = 三地^{二}$，則$彳戌 = 六地彳地$。又因$地 = 天^{三} \perp 甲天$，則$彳地 = 三天^{二}彳天 \perp 甲彳天$，故可將$彳地$之同數帶入$彳戌$之同數中，其

所得之式亦為彳戊＝一八天$^{二}$地彳天⊥六甲地彳天。

## 求二項例之證

第十七款 以下各款之法必用二項例推之，故茲款特用微分之法證明其例以便于用。設有二項之式$(一⊥天)^{卯}$＝一⊥呷天⊥乙天$^{二}$⊥丙天$^{三}$⊥叮天$^{四}$⊥……，其指數卯可任為或正或負或整數或分之數。則從此式易知其各項之倍數呷、乙、丙、叮等類皆從指數卯所生，而與天之同數無涉。又因式之左右既為相等之數，則其微分之式左右同，故可依第九款之法各求其微分，得$(一⊥天)^{卯丅一}$彳天＝呷彳天⊥二乙天彳天⊥三丙天$^{二}$彳天⊥四叮天$^{三}$彳天⊥……。若兩邊各以彳天徧約之，又以一⊥天徧通之，則得$(一⊥天)^{卯}$＝呷⊥(呷⊥二乙)天⊥(二乙⊥三丙)天$^{二}$⊥(三丙⊥四叮)天$^{三}$⊥……㈠。又由原式得$(一⊥天)^{卯}$＝卯⊥卯呷天⊥卯乙天$^{二}$⊥卯丙天$^{三}$⊥卯叮天$^{四}$⊥……㈡，則㈠㈡兩式右邊之多項，其形雖不同，其數必無異。因其式皆能等於$(一⊥天)^{卯}$

故也。所以

$$\left.\begin{array}{r}\text{呷}=\text{卯}\\ \text{呷}\perp\text{二口乙}=\text{卯呷}\\ \text{二口乙}\perp\text{三口丙}=\text{卯口乙}\\ \text{三口丙}\perp\text{四叮}=\text{卯口丙}\\ \vdots\\ \vdots\end{array}\right\}\text{則}\left\{\begin{array}{l}\text{呷}=\text{卯}\\ \text{口乙}=\dfrac{\text{二}}{(\text{卯}\top\text{一})}\text{呷}\\ \text{口丙}=\dfrac{\text{三}}{(\text{卯}\top\text{二})}\text{口乙}\\ \text{叮}=\dfrac{\text{四}}{(\text{卯}\top\text{三})}\text{口丙}\\ \vdots\\ \vdots\end{array}\right.$$

。故可用代法得$(\text{一}\perp\text{天})^{\text{卯}}=\text{一}\perp\dfrac{\text{一}}{\text{卯}}\text{天}\perp\dfrac{\text{一}\cdot\text{二}}{\text{卯}(\text{卯}\top\text{一})}\text{天}^{\text{二}}\perp\dfrac{\text{一}\cdot\text{二}\cdot\text{三}}{\text{卯}(\text{卯}\top\text{一})(\text{卯}\top\text{二})}\text{天}^{\text{三}}\perp\cdots\cdots$。以$\dfrac{\text{甲}}{\text{天}}$代其天，兩邊俱以$\text{甲}^{\text{卯}}$通之，則得$(\text{甲}\perp\text{天})^{\text{卯}}=\text{甲}^{\text{卯}}\perp\dfrac{\text{一}}{\text{卯}}\text{甲}^{\text{卯}\top\text{一}}\text{天}\perp\dfrac{\text{一}\cdot\text{二}}{\text{卯}(\text{卯}\top\text{一})}\text{甲}^{\text{卯}\top\text{二}}\text{天}^{\text{二}}\perp\dfrac{\text{一}\cdot\text{二}\cdot\text{三}}{\text{卯}(\text{卯}\top\text{一})(\text{卯}\top\text{二})}\text{甲}^{\text{卯}\top\text{三}}\text{天}^{\text{三}}\perp\cdots\cdots$。

**第十八款** 上款攷證二項例之法爲微分積分中常用之式。本款亦然。

凡遇相等之式如$\text{甲}\perp\text{乙天}\perp\text{丙天}^{\text{二}}\perp\text{丁天}^{\text{三}}\perp\cdots\cdots=\text{呷}\perp\text{口乙天}\perp\text{口丙天}^{\text{二}}\perp\text{叮天}^{\text{三}}\perp\cdots\cdots$㊀者，若其各項之中之倍數皆爲常數，而天爲同變之數，則左右各項中之各倍

數必挨次相同，故可合之爲一公共之式。

次因其天爲變數，故可設想其天變至極小而無異于〇，則得甲＝口甲。如將㈠式中兩邊相等之甲、口甲截去而以天約其所餘之各項，則得乙⊥丙天⊥丁天$^{二}$⊥……＝口乙⊥口丙天⊥口丁天$^{二}$⊥……。此式中若令天無異于〇，則乙必無異于口乙。如是累推之，則得甲＝口甲、乙＝口乙、丙＝口丙、丁＝口丁、戊＝口戊……

## 越函數微分

第十九款　越函數爲指函數與對函數之總名。茲款先論指函數求微分之專法。

設有指函數之式戊＝$甲^{天}$，其指數天爲變數而甲爲常數，令天之長數爲辛，則天變爲天⊥辛，戊變爲戊′，故得戊′＝$甲^{天⊥辛}$，即戊′＝$甲^{天}甲^{辛}$。所以戊′丅戊＝$甲^{天}甲^{辛}$丅$甲^{天}$，即戊′丅戊＝$甲^{天}(甲^{辛}丅一)$。而$\frac{戊′丅戊}{辛}＝甲^{天}\frac{甲^{辛}丅一}{辛}$，欲求其變比例之限，則必攷辛變至甚小之時$\frac{甲^{辛}丅一}{辛}$所向之限。

如令甲＝一⊥丙，則依第十七款之例得$甲^{辛}＝(一⊥丙)^{辛}＝一⊥辛丙⊥\frac{辛(辛丅一)}{一\cdot二}丙^{二}⊥$

$\frac{一.二.三}{辛(辛丅一)(辛丅二)}丙^{三}丄\cdots\cdots$。

所以$\frac{辛}{甲^{辛}丅一}=丙丄\frac{二}{辛丅一}丙^{二}丄\frac{二.三}{(辛丅一)(辛丅二)}丙^{三}丄\cdots\cdots$。惟因辛可爲甚小，故式之右邊可甚近于$丙丅\frac{二}{一}丙^{二}丄\frac{二\times三}{丅一\times丅二}丙^{三}丅\frac{二\times三\times四}{丅一\times丅二\times丅三}丙^{四}丄\cdots\cdots$，卽甚近$丙丅\frac{二}{一}丙^{二}丄\frac{三}{一}丙^{三}丅\frac{四}{一}丙^{四}丄\cdots\cdots=(甲丅一)丅\frac{二}{一}(甲丅一)^{二}丄\frac{三}{一}(甲丅一)^{三}丅\frac{四}{一}(甲丅一)^{四}丄\cdots\cdots$。準代數術第一百七十三款及此書中以後所證，知此級數能明甲之訥對。所以$\frac{辛}{甲^{辛}丅一}$之限爲訥甲，卽$彳戊=(訥甲)甲^{天}彳天$。故得專法如左：

凡求常數變方之微分，法將常數之訥對與變指數之微分乘之卽得。此爲求指函數微分之法。

第二十款　凡甲底之對數，若以戊爲甲對之越函數，則欲得其求微分之專法，可依代數術第一百六十五款之法得之。

設有式$天=甲^{戊}$，若天變爲$天丄辛$而戊變爲$戊'$，則$天丄辛=甲^{戊'}$。所以得$辛=甲^{戊'}丅甲^{戊}$，卽$辛=甲^{戊}\left(甲^{戊'丅戊}丅一\right)$，卽$辛=天\left(甲^{戊'丅戊}丅一\right)$。如令$子=戊'丅戊$，

則$\frac{辛}{戊'丁戊}=\frac{天(甲^{子}丁一)}{子}$，而$\frac{戊'丁戊}{辛}=\frac{一}{天}\times\frac{子}{甲^{子}丁一}$。觀此式之左右兩邊，

欲求其變比例之限，則依上款之法，令其天變至甚小，則$\frac{子}{甲^{子}丁一}=\frac{一}{訥甲}$。所以

得$\frac{彳戊}{彳天}=\frac{一}{訥甲}\times\frac{一}{天}$。令寅爲常乘數，即對數底訥對之倒數。若依代數術第一百七十二款，則爲對數之根。

即得$彳戊=\frac{寅彳天}{天}$。故得專法如左：

凡求任何數之對數微分，法將本數之微分以本對數之根乘之，而以本數約分之即得。

若求訥對之微分，必令寅＝一。此例須謹記之。