微積溯源序

微積溯源八卷，前四卷爲微分術，後四卷爲積分術，乃算學中最深之事也。余既與西士傅蘭雅譯畢代數術二十五卷，更思求其進境，故又與傅君譯此書焉。先是咸豐年間，曾有海寗李壬叔與西士偉烈亞力譯出代微積拾級一書，流播海内。余素與壬叔相友，得讀其書，粗明微積二術之梗概。所以又譯此書者，蓋欲補其所略也。書中代數之式甚繁，校算不易，則劉君省菴之力居多。

今刻工已竣矣，故序之，曰：吾以爲古時之算法惟有加減而已。其乘與除乃因加減之不勝其繁，故更立二術以使之簡易也。開方之法，又所以濟除法之窮者也。蓋算學中自有加減乘除開方五法，而一切淺近易明之數，無不可通矣。惟人之心思智慮日出不窮，往往以能人之所不能者爲快。遇有窒礙難通之處，輒思立法以濟其窮。故有減其所不可減而正負之名不得不立矣；除其所不能除而寄母通分之法又不得不立矣。代數中種種記號之法皆出於不得已而立者也，惟每立一法必能使繁者爲簡，難者爲易，遲者爲速，而算學之境界藉此得更進一層。如是屢進不已而所立之法於是乎日多矣。微分積分者，蓋又因乘除開

方之不勝其繁，且有窒礙難通之處，故更立此二術以濟其窮，又使簡易而速者也。試觀圓徑求周、真數求對等事，雖無微分積分之時，亦未嘗不可求，惟須乘除開方數十百次。其難有不可言喻者，不如用微積之法理明而數捷也。然則謂加減乘除開方代數之外者，更有二術焉，一曰微分，一曰積分可也。其積分術爲微分之還原，猶之開平方爲自乘之還原、除法爲乘之還原、減法爲加之還原也。然加與乘其原無不可還，而微分之原有可還有不可還，是猶算式中有不可開之方耳，又何怪焉。如必曰加減乘除開方已足供吾之用矣，何必更究其精？是舍舟車之便利而必欲負重遠行也。其用力多而成功少，蓋不待智者而辨矣。

同治十三年九月十八日，金匱華蘅芳序。

微積溯源卷一

論變數與函數之變比例

第一款　用代數以解任何曲線，其中每有幾種數，其大小恆有定率者，如橢圓之長徑、拋物線之通徑、雙曲線之屬徑之類是也。又每有幾種數可有任若干相配之同數，其大小恆不能有定率者，如曲線任一點之縱橫線是也。數既有此兩種分別，則每種須有一總名以賅之，故名其有定之數曰常數，無定之數曰變數。

凡常數之同數不能增亦不能損。

凡變數之同數，能變為大，亦能變為小。故其從此同數變至彼同數之時，必歷彼此二數間最小最微之各分數。

如平圓之半徑為常數，而其任一段之弧或弧之弦矢切割各線、及各線與弧所成之面，

皆謂之變數。

橢圓之長徑短徑皆爲常數，而其曲線之任一段或曲線上任一點之縱橫線，並其形内形外所能作之任何線或面或角，皆謂之變數。

拋物線之通徑爲常數，而其曲線之任一段或任一點之縱橫線、或弧與縱橫線所成之面，皆謂之變數。他種曲線亦然。

凡常數，恆以甲乙丙丁等字代之。凡變數，恆以天地人等字代之。

第二款　若有彼此二數皆爲變數，此數變而彼數因此數變而亦變者，則彼數爲此數之函數。

如平圓之八線皆爲弧之函數。若反求之，亦可以弧爲八線之函數。

又如重學中令物體前行之力，與其物所行之路，皆爲時刻之函數。

如有式$地 = \frac{甲丅天}{甲丄天}$，此式中甲爲常數，天爲自主之變數，地爲天之函數。故地之同數能以天與甲明之。

如有式$天 = \frac{地丄一}{甲(地丅一)}$，此式中甲與一皆爲常數，地爲自主之變數，天爲地之函數，故天之同數可以地與甲及一明之。

如有式$戊 = 甲丄乙天丄丙天^{二}$或$戊 = \sqrt{甲^{二}丄乙天丄天^{二}}$或$戊 = \frac{丙丄天^{二}}{甲丄\sqrt{乙天}}$，其甲

乙丙爲常數，天爲自變之數，而戊皆爲天之函數。

凡函數之中，可以有數箇自主之變數。

如有式$戊 = 甲天^{二} \perp 乙天地 \perp 丙地^{二}$ 則天與地皆爲自主之變數，戊爲天地兩變數之函數。

凡變數之函數，其形雖有多種，然每可化之，使不外乎以下數類$天^{卯}$、$甲^{天}$、正弦天、餘弦天 等類是也。

凡函數爲$天^{卯}$ 之類，其指數爲常數，則可從天之卯方，用代數之常法化之。

而以有窮之項明其函數之同數。故謂之代數函數，亦謂之常函數。

如有式$戊 = 甲天^{三} \perp \dfrac{\sqrt{甲^{二} \perp 天^{二}}}{乙天^{二} \top 丙^{二}天}$，此種函數，其戊之同數可用加減乘除開方等法而得之。

凡函數爲甲、對天之類，則其函數之同數不能以有窮之項明之。故謂之越函數。越者，超越於尋常之意也。

凡函數爲正弦天、餘弦天及正切天、正割天之類，其函數之同數皆可以平圓之各線明之。故謂之圓函數，亦謂之角函數。

以上三種函數常函數、越函數、圓函數也。，若已知天之同數，則其函數之同數卽可求得。故

名此三種函數爲陽函數。因其顯而易明，故謂之陽函數。

更有他種函數，必先解其方程式，令函數中之各變數分開，然後能求其同數者。

如有式$戊天 = \frac{戊丅天}{戊丄天}$，其戊爲天之函數，如欲求其戊與天相配之同數，必先解其二次方程式始能通。

此種之式名曰天之陰函數。因其雜糅未明，故謂之陰函數。反之亦可云天爲戊之陰函數。

如解其方程式爲$戊 = \frac{二}{一}\left[天丄\frac{天}{一}丄\frac{天}{\sqrt{天^{四}丄六天^{二}丄一}}\right]$，則戊變爲天之陰函數。

整理者註：右最後一句云戊變爲天之陰函數，這顯而易見是錯誤的。原文大英百科全書卷第九之 Fluxions 作 explicit function，卽陽函數，此當爲譯者譯錯。目前由於校勘凡例未定，暫留此字，待討論後決定修改與否。

昔代數之家，凡遇須用開平方之處，每于其式之左旁作一根字以記之，如根天爲天之平方根。後又變通其法，而以根號記之，如$\sqrt{天}$爲天之平方根。此代數之例也。茲可仿照此例，凡遇某變數之函數，亦用一號以記之。所以凡有任何變數之函數，皆可書一函字于其變數之旁，以爲識別。

如天之函數則作函天，或作函(天)，皆言天之函數也。

所以凡見變數之左旁有一函字者，其函字並非代表天之倍數，其意謂是某變數之函數

也。

用此法則可將戊＝天^卯、戊＝甲^天、戊＝對天、戊＝正弦天、戊＝餘弦天 各種之式以一語賅之，謂之戊＝函天 或戊＝函(天)。

若函數從兩箇變數而成，其天與地皆爲自主之變數，其式如戊＝甲天^二 ⊥ 乙天地 ⊥ 丙地^二 者，則可以戊＝函(天,地) 別之。函數爲多箇變數所成者，仿此推之。

惟函數只指其變數言之，若甲乙丙丁各常數。雖多不論。

第三款 凡觀此書者，必先明變數與函數變比例之限。如幾何原本中證明平圓之面積必比其外切多等邊形之面積微小，若其外切多等邊形之邊愈多，則其面積愈近于平圓之面積。所以可設平圓之面積爲任何小，而切其圓外爲多等邊形，可使多等邊形之面積與平圓之面積較其數甚小于所設之圓面積；再設其多等邊形之面積爲級數，而其邊之變率可每變多若干倍，則其多等邊形之面積必漸與平圓之面積相近而以平圓爲限。雖切于圓外之多邊形其邊任變至若何多，其面積總不能等于平圓之面積。然其級數之總數可比平圓之面積所差甚微，其較數之小，可小至莫可名言。

若用此法于圓內容多等邊形，則其多等邊形之面積亦以平圓之面積爲限。

總言之，凡平圓之周爲其內容外切多等邊形之限。

如代數術第二百六十六款言，如令甲代平圓之任何弧，則$\frac{\text{甲}}{\text{正弦甲}}$恆大于半徑，而$\frac{\text{甲}}{\text{正切甲}}$恆小于半徑。然令其弧爲任何小，則其式之同數必甚近于半徑，而其所差之數可小至不能以言語形容。所以此兩數中間之數爲一。即半徑也。故其公限亦爲一。

由此可見凡弧與弦切，三者之中取其二以相較，其比例之限必相等。

如代數術中亦會證甲弧爲卯正切$\frac{\text{甲}}{\text{卯}}$與卯正弦$\frac{\text{甲}}{\text{卯}}$兩式之限，惟其卯必爲任何大。

依代數術第五十六款之例一丄天丄天$^{\text{二}}$丄天$^{\text{三}}$……丄天$^{\text{卯丅一}}$即$\frac{\text{一丅天}^{\text{卯}}}{\text{一丅天}}$。若天變至小于一，而卯大至無窮，則天$^{\text{卯}}$＝〇，而式變爲$\frac{\text{一}}{\text{一丅天}}$。所以任取其級數若干項之和，必小于$\frac{\text{一}}{\text{一丅天}}$。惟其項愈多，則與$\frac{\text{一}}{\text{一丅天}}$愈相近，而其所差之數可小至莫可名言。則可見$\frac{\text{一}}{\text{一丅天}}$必爲其諸級數之限。

若依二項例之式$\left(\text{一丄}\frac{\text{天}}{\text{卯}}\right)^{\text{卯}}=\text{一丄}\frac{\text{天}}{\text{一}}\text{丄}\frac{\text{天}^{\text{二}}}{\text{一·二}}\left(\text{一丄}\frac{\text{一}}{\text{卯}}\right)\text{丄}\frac{\text{天}^{\text{三}}}{\text{一·二·三}}\left(\text{一丄}\frac{\text{一}}{\text{卯}}\right)\left(\text{一丄}\frac{\text{二}}{\text{卯}}\right)$丄……，其卯之同數無論如何，必合于理。惟卯若爲大數，則其各項之

乘數$一丄\frac{卯}{二}$、$一丄\frac{卯}{三}$之類與一相較之差甚小，若卯愈大，則其差愈微；若令卯爲任意大，則各乘數可略等于一，所以得$\left(一丄\frac{卯}{天}\right)^{卯}＝一丄\frac{一}{天}丄\frac{一}{一.二天^{二}}丄\frac{一}{一.二.三天^{三}}丄$……甲。

曾在代數術第一百七十七款中證甲式之右邊爲由函數$戊^{天}$而成。其戊之同數因爲二.七一八二八一八，卽訥白爾對數之根也。所以卯若愈大則$\left(一丄\frac{卯}{天}\right)^{卯}$必愈與$戊^{天}$相近，而其限爲$戊^{天}$。

如令天＝一，則$\left(一丄\frac{卯}{天}\right)^{卯}$之限爲戊，卽$\left(一丄\frac{卯}{天}\right)^{卯}一戊＝二.七一八二八一八$，故其函數爲常數。

第四款　惟因函數之同數本從變數而生，故變數之同數與函數之長數比則爲$\frac{辛}{戊'丅戊}＝二天丄辛$。

設函數之式爲$戊＝天^{三}$，令天長數爲辛，而以函數之新同數爲戊'，則

$$\text{戊}' = (\text{天} \perp \text{辛})^{\text{三}} \begin{cases} = \text{天}^{\text{三}} \perp \text{三天}^{\text{二}}\text{辛} \perp \text{三天辛}^{\text{二}} \perp \text{辛}^{\text{三}} \\ = \text{戊} \perp \text{三天}^{\text{二}}\text{辛} \perp \text{三天辛}^{\text{二}} \perp \text{辛}^{\text{三}} \end{cases}$$，而$\dfrac{\text{辛}}{\text{戊}' \top \text{戊}} = \text{三天}^{\text{二}} \perp \text{三天辛} \perp \text{辛}^{\text{二}}$。可見天變爲$\text{天} \perp \text{辛}$之時，其函數$\text{戊}$必變爲$\text{戊} \perp \text{三天}^{\text{二}}\text{辛} \perp \text{三天辛}^{\text{二}} \perp \text{辛}^{\text{三}}$，其所長之數爲$\text{三天}^{\text{二}}\text{辛} \perp \text{三天辛}^{\text{二}} \perp \text{辛}^{\text{三}}$。此式中之各項皆爲辛之整方與他數相乘所成。又可見變數與函數之變比例，其式爲$\text{三天}^{\text{二}}\text{辛} \perp \text{三天辛}^{\text{二}} \perp \text{辛}^{\text{三}}$，其初項$\text{三天}^{\text{二}}$與天之長數辛無相關。

設函數之式爲$\text{戊} = \text{天}^{\text{四}}$。令天之長數爲辛，而以$\text{戊}'$爲函數之新同數，則$\text{戊}' = \text{戊} \perp \text{四天}^{\text{三}}\text{辛} \perp \text{六天}^{\text{二}}\text{辛}^{\text{二}} \perp \text{四天辛}^{\text{三}} \perp \text{辛}^{\text{四}}$，而$\dfrac{\text{辛}}{\text{戊}' \top \text{戊}} = \text{四天}^{\text{三}} \perp \text{六天}^{\text{二}}\text{辛} \perp \text{四天辛}^{\text{二}} \perp \text{辛}^{\text{三}}$。

由此可見天若變爲$\text{天} \perp \text{辛}$，則其各函數之新同數如左：

如$\text{戊} = \text{天}^{\text{二}}$，則$\text{戊}' = \text{戊} \perp \text{二天辛} \perp \text{辛}^{\text{二}}$。如$\text{戊} = \text{天}^{\text{三}}$，則$\text{戊}' = \text{戊} \perp \text{三天}^{\text{二}}\text{辛} \perp \text{三天辛}^{\text{二}} \perp \text{辛}^{\text{三}}$。如$\text{戊} = \text{天}^{\text{四}}$，則$\text{戊}' = \text{戊} \perp \text{四天}^{\text{三}}\text{辛} \perp \text{六天}^{\text{二}}\text{辛}^{\text{二}} \perp \text{四天辛}^{\text{三}} \perp \text{辛}^{\text{四}}$。其餘類推。

總言之，若以卯爲天之任何整指數，而令天之長數爲辛，又以巳午未申等字挨次而代

辛之各方之倍數，則函數$戌=天^{卯}$之新同數必爲$戌'=辛丄巳辛丄午辛^{二}丄未辛^{三}丄申辛^{四}丄\cdots\cdots$。由是知函數之新同數必爲級數，其初項戌爲函數之原同數，其餘各項爲天之長數辛之各整方，以巳午未申之類爲各倍數，其各倍數皆爲天之別種函數，其式亦從本函數而生。

由以上各式又可見函數爲$戌=天^{二}$、$戌=天^{三}$、$戌=天^{四}$之類，則其變數與函數之變比例必爲$\frac{辛}{戌'丅戌}=二天丄辛$、$\frac{辛}{戌'丅戌}=三天^{二}丄三天辛丄辛^{二}$、$\frac{辛}{戌'丅戌}=四天^{三}丄六天^{二}辛丄四天辛^{二}丄辛^{三}$之類。總之若以卯爲天之整指數，則$戌=天^{卯}$之變比例必爲$\frac{辛}{戌'丅戌}=巳丄午辛丄未辛^{二}丄申辛^{三}丄\cdots\cdots$。由此可見，變數天之長數與函數$天^{卯}$之長數其變比例$\frac{辛}{戌'丅戌}$之同數$巳丄午辛丄未辛^{二}丄申辛^{三}丄\cdots\cdots$可分之爲兩式，其一式爲巳，此式與天之長數辛無相關；又一式爲$午辛丄未辛^{二}丄申辛^{三}丄\cdots\cdots$。卽$辛(午丄未辛丄申辛^{二}丄\cdots\cdots)$。此式因以辛爲乘數，故辛若變小，其數亦必隨辛而變小。如令辛爲任何小，則此式之數可小至甚近于〇。故此數可以不計，而以巳爲變比例之限。

設有繁函數之式$戊=甲\perp乙天\perp丙天^{二}$，令天之長數爲辛，則天變爲$天\perp辛$之時，其函數之同數必變爲$戊'\begin{cases}=甲\perp乙(天\perp辛)\perp丙(天\perp辛)^{二}\\=甲\perp乙天\perp丙天^{二}\perp(乙\perp二丙天)辛\perp丙辛^{二}\end{cases}$，故$戊'丅戊=(乙\perp二丙天)辛\perp丙辛^{二}$，㠯$\frac{辛}{戊'丅戊}=乙\perp二丙天\perp丙辛$。其$乙\perp二丙天$爲本函數變比例之限。

以此法徧試各種特設之函數，見其皆有相類之性情，所以例設如左。

例曰：命任何自主之變數爲天，而令天之任何函數等于戊，則天變爲$天\perp辛$之時，函數之新同數爲$戊'=戊\perp巳辛\perp午辛^{二}\perp未辛^{三}\perp\cdots\cdots$，其變數與函數之變比例爲$\frac{辛}{戊'丅戊}=巳\perp午辛\perp未辛^{二}\perp申辛^{三}\perp\cdots\cdots$。此式中之初項巳爲變比例之限，無論何種函數，其限皆可依此比例求之。

由以上所論變數之長數與函數之長數相關之理，可于算學中開出兩種極廣大極精微之法。

其第一種爲有任何變數之任何函數而求其變數與函數變比例之限。

其第二種爲有任何變數與函數變比例之限而求其函數之原式。

此二種法，若細攷其根源，卽奈端所謂正流數、反流數也；亦卽來本之所謂微分算術、積分算術也；又卽拉果闌諸所謂函數變例也。

論各種函數求微分之公法

第五款　若函數之式爲$戌 = 天^{二}$，令天變爲$天 \perp 辛$，則函數之新同數必爲$戌' = 戌 \perp 二天辛 \perp 辛^{二}$，其與原同數之較爲$戌' \top 戌$，卽$二天辛 \perp 辛^{二}$，此式之初項二天辛，名之曰溢率。

依同理推之，若函數之式爲$戌 = 天^{三}$，令天變爲$天 \perp 辛$，則函數之新同數爲$戌' = 戌 \perp 三天^{二}辛 \perp 三天辛^{二} \perp 辛^{三}$，其與原同數之較爲$戌' \top 戌$，卽$三天^{二}辛 \perp 三天辛^{二} \perp 辛^{三}$。其初項$三天^{二}辛$爲溢率。

若函數之式爲$戌 = 天^{四}$，而天變爲$天 \perp 辛$，則函數之新同數與原同數之較爲$四天^{三}辛 \perp 六天^{二}辛^{二} \perp 四天辛^{三} \perp 辛^{四}$，而其溢率爲$四天^{三}辛$。

總言之，凡天之函數無論爲某方，恆可以$天 \perp 辛$代其天，而變其函數之同數爲$戌 \perp 巳辛 \perp 午辛^{二} \perp 未辛^{三} \perp \cdots\cdots$，乃以原同數戌減之得$巳辛 \perp 午辛^{二} \perp 未辛^{三} \perp \cdots\cdots$，而取其初項巳辛爲溢率。

準此推之，則知天之溢率卽爲其長數辛。惟因函數之溢率每藉天之長數而生，故微分術中，恆以彳天代天之溢率。其彳號者，非天之倍數，不過是天之溢率耳。溢率之名，本爲流數術中所用。而彳號者，卽微字之偏旁，故微分之術用之。

如有式$戊 = 天^{二}$，則$彳戊 = 二天彳天$。此式之意謂戊之微分等于二天乘天之微分。猶言函數戊之溢率等于以二天乘其天之溢率也。如有式$戊 = 天^{三}$，則$彳戊 = 三天^{二}彳天$。此式之意謂戊之微分等于$三天^{二}$乘天之微分。猶言函數戊之溢率等于以$三天^{二}$乘其天之溢率也。

第六款　惟因每遇$戊 = 天^{二}$，則$彳戊 = 二天彳天$，所以可寫之如$\frac{彳天}{彳戊} = 二天$。此爲天微分之倍數，亦謂之微係數。

又依前法推之，如函數之式爲$戊 = 天^{三}$，則$彳戊 = 三天^{二}彳天$，而$\frac{彳天}{彳戊} = 三天^{二}$。

其$三天^{二}$爲原函數$戊 = 天^{三}$之微係數。

總言之，無論何種函數之微係數，皆可以$\frac{彳天}{彳戊}$代之。而函數之新同數爲$戊 \perp 巳辛 \perp 午辛^{二} \perp \cdots\cdots$，所以$\frac{彳天}{彳戊} = 巳$，其巳爲天之他函數，其形每隨函數之式而變。如之戊之同數爲何式，則其巳之同數卽易求得。

凡函數之欲求微分者，先于其式之左旁作一亻號以記之。如有$[(甲 \perp 天)(乙^{二} \top 天^{二})]$式，欲求其微分，則可先作$彳[(甲 \perp 天)(乙^{二} \top 天^{二})]$。

凡函數之欲求微係數者，于其式之左旁作亻號，又以$彳天$為其分母。如有$[(甲 \perp 天)(乙^{二} \top 天^{二})]$式，欲求其微係數，則作$\frac{彳[(甲 \perp 天)(乙^{二} \top 天^{二})]}{彳天}$。

從以上各款諸說，易知求微分之公法。

法曰：無論天之任何函數，欲求微分，則以$天 \perp 辛$代其原式中之天而詳之。依辛之整方數自小而大序之，取其初有辛之項，而以$彳天$代其辛即得。

如有式$戊 = 甲天 \perp 乙天^{二}$，欲求其微係數，則以$天 \perp 辛$代其天，而令函數之新同數為$戊'$，則得

$$戊' \left\{ \begin{aligned} &= 甲(天 \perp 辛) \perp 乙(天 \perp 辛)^{二} \\ &= 甲天 \perp 乙天^{二} \perp (甲 \perp 二乙天)辛 \perp 乙辛^{二} \\ &= 戊 \perp (甲 \perp 二乙天)辛 \perp 乙辛^{二} \end{aligned} \right.$$

。取其初有辛之項$(甲 \perp 二乙天)辛$，以$彳天$代其辛，即得$彳戊 = (甲 \perp 二乙天)彳天$，故其$\frac{彳戊}{彳天} = 甲 \perp 二乙天$。

第七款 上款之法，必令天變為$天 \perp 辛$，而詳其函數之同數為級數，此乃論其立法之理當如是也。惟求得級數之後，所用者僅為其辛一方之項，則但能求得此項已足用矣。前于第

四款中言此項之倍數爲變數與函數變比例之限，又于第六款中言此項之倍數謂之微係數。然則求函數之微係數與求變數與函數變比例之限，其法本無異也。

如有式$戊=\frac{天}{甲^{二}}$，則$戊'=\frac{天\perp辛}{甲^{二}}$。而$戊\top戊'=\frac{天}{甲^{二}}\top\frac{天\perp辛}{甲^{二}}$，卽$戊\top戊'=\frac{天(天\perp辛)}{\top甲^{二}辛}$，故其變比例之式爲$\frac{辛}{戊\top戊'}=\frac{天(天\perp辛)}{\top甲^{二}}$。惟此式可不待詳爲級數而始得其變比例之限，因可見辛愈小，則其式愈近于$\top\frac{天^{二}}{甲^{二}}$，故此式必卽爲$\frac{彳天}{彳戊}$之同數，所以得$彳戊=\top\frac{天^{二}}{甲^{二}彳天}$。

若以戊爲任何函數之原同數，而以$天\perp辛$代其天，則其函數之新同數爲$戊'=戊\perp巳辛\perp午辛^{二}\perp未辛^{三}\perp\cdots\cdots$，卽得$\frac{辛}{戊'\top戊}=巳\perp午辛\perp未辛^{二}\perp\cdots\cdots$。惟因$\frac{辛}{戊'\top戊}$之限爲巳，故得$\frac{彳天}{彳戊}=巳$，而$彳戊=巳彳天$。

由此得一解曰：凡微分之術，其意專爲求任何變數與函數同時變大之限耳。

凡求任何函數之微分，不過將一尋常之代數式另用他法以變化之。因其變化之法與代數中常用之法異，則不得不另有一名以別之，故謂之微分術。

第八款　凡變數與函數變比例之限，無論以何數爲主，其形必同。

如戊爲天之函數，若天變爲$天\perp辛$，則戊變爲$戊\perp巳辛\perp午辛^{二}\perp未辛^{三}\perp$……。其巳、午、未各數俱爲天之他函數，從本函數所生。如令其$巳辛\perp午辛^{二}\perp未辛^{三}\perp$……＝子，則天與戊同時變大之數爲辛與子。如依代數術第一百六十三款之法反求其級數，則得$辛=\frac{巳}{一}子\top\frac{巳^{二}}{午}子^{二}\perp$……，故其變數與函數之公比例爲$\frac{子}{辛}=\frac{巳}{一}\top\frac{巳^{二}}{午}子\perp$……。故$\frac{子}{辛}$之限爲$\frac{巳}{一}$，而$\frac{辛}{子}$之限爲巳，此即$\frac{一}{巳}$也。

第九款　由此易知，凡有相等之函數，則其微係數亦必相等。

如戊與亥爲兩函數，而$戊=亥$，其天變爲$天\perp辛$之時，戊變爲$戊'$，亥變爲$亥'$，則$戊'=亥'$，而$戊'\top戊=亥'\top亥$，故$\frac{辛}{戊'\top戊}=\frac{辛}{亥'\top亥}$。如以巳與午各爲其變比例之限，則$巳=午$。故$巳彳天=午彳天$，而$彳戊=彳亥$。

由此可見，凡函數之式無論如何改形，若其同數無異者，則其微係數必同。

如函數之原式爲$天^{三}\perp甲^{三}$，若改其形爲$(天\perp甲)(天^{二}\top甲天\perp甲^{二})$，則此式之微係數與原式之微係數必無異。

惟此理，若反言之而謂相等之微係數必從相等之函數而生，則不盡然。

如函數之式爲戊＝甲⊥乙天，令天變爲天⊥辛，而戊變爲戊′，則戊′＝甲⊥乙天⊥乙辛＝戊⊥乙辛，故得 $\frac{戊'丅戊}{辛}$ ＝乙。觀此可知，其常數之項甲不能入變比例之限內，故其微係數必與戊＝乙天之微係數無異。惟微係數乙既能屬於本函數甲⊥乙天，又能屬於他函數乙天，所以有下例。

例曰：凡變數與常數相加減之函數，其微係數中不見其加減之常數。惟變數與常數相乘除者，則其微係數中有常數爲倍數。

求兩函數相乘積之微分

第十款　凡變數之函數，無論其形如何，皆可以第六款之公法求其微分。然不如每種異形之函數各設一專法以求之，則更簡捷。

如有式戊＝未申，其未與申各爲天之函數。今欲得一法專能求未、申相乘積之微分，若令天變爲天⊥辛，則未、申二函數必變爲未′＝未⊥巳辛⊥午$辛^{二}$⊥……，申′＝申⊥巳′辛⊥午′$辛^{二}$⊥……，其巳、午爲由未函數所得之天之他函數；其巳′、午′爲

由申函數所得之天之他函數。

再令戊$'$ = 未$'$申$'$，則依法得戊$'$ = 未$'$申$'$ = 未申 ⊥ (未巳$'$ ⊥ 申巳)辛 ⊥ (未午$'$ ⊥ 巳巳$'$ ⊥ 申午)辛^{二} ⊥ ……。以戊代其未申，移項而以辛約之，則得$\frac{辛}{戊' 丅 戊}$ = 未巳$'$ ⊥ 申巳 ⊥ (未午$'$ ⊥ 巳巳$'$ ⊥ 申午)辛 ⊥ ……。此式中之未巳$'$ 與申巳 兩項乃天之他函數，而與辛無涉者，其餘各項俱有辛之各方爲乘數。設辛爲甚微，則其所乘之衆項亦甚微，故其變比例之限爲$\frac{辛}{戊' 丅 戊}$ = 未巳$'$ ⊥ 申巳。惟因巳 = $\frac{辛}{未' 丅 未}$、巳$'$ = $\frac{辛}{申' 丅 申}$，故可依第六款之法以$\frac{彳天}{彳戊}$ 代其$\frac{辛}{戊' 丅 戊}$∴以$\frac{彳天}{彳未}$ 代其$\frac{辛}{未' 丅 未}$∴以$\frac{彳天}{彳申}$ 代其$\frac{辛}{申' 丅 申}$。則得$\frac{彳天}{彳戊}$ = 未$\frac{彳天}{彳申}$ ⊥ 申$\frac{彳天}{彳未}$，而彳戊 = 未彳申 ⊥ 申彳未。故得專法如左：

凡求同變彼此兩函數相乘積之微分，法將此函數乘彼函數之微分，又將彼函數乘此函數之微分，而以乘得之兩式相加即得。

求多函數連乘積之微分

第十一款　前款論函數之式爲戌＝未申，則彳戌＝未彳申⊥申彳未，所以$\frac{\text{戌}}{\text{彳戌}}=\frac{\text{未}}{\text{彳未}}\perp\frac{\text{申}}{\text{彳申}}$。

由此推之，如戌爲三箇同變數之函數連乘如未酉亥，可令其申＝酉亥，則亦能爲戌＝未申而$\frac{\text{戌}}{\text{彳戌}}=\frac{\text{未}}{\text{彳未}}\perp\frac{\text{申}}{\text{彳申}}$。惟因申＝酉亥，可依同例得$\frac{\text{申}}{\text{彳申}}=\frac{\text{酉}}{\text{彳酉}}\perp\frac{\text{亥}}{\text{彳亥}}$，所以$\frac{\text{戌}}{\text{彳戌}}=\frac{\text{未}}{\text{彳未}}\perp\frac{\text{酉}}{\text{彳酉}}\perp\frac{\text{亥}}{\text{彳亥}}$。若仍將未申代還其戌而以常法化之，則爲彳戌＝酉亥彳未⊥未亥彳酉⊥未酉彳亥。故得專法如左：

凡求同變數之若干函數連乘積之微分，法以各本函數之微分與其餘之各他函數連乘，而以各乘得之式相加卽得。

此法易用以總式以明之。無論其同變數之函數有若干數連乘，皆可以一例推之：

如多函數連乘之式爲未申酉亥，則其微分之式爲彳(未申酉亥)＝未申酉亥$\left[\frac{\text{未}}{\text{彳未}}\perp\frac{\text{申}}{\text{彳申}}\perp\frac{\text{酉}}{\text{彳酉}}\perp\frac{\text{亥}}{\text{彳亥}}\right]$。

求變數之分函數微分

第十二款　若有分數之式，其母子爲同變數之各函數，則欲得其求微分之專法，可令戌＝$\frac{甲}{未}$，則未＝戌甲，而彳未＝戌彳甲丄甲彳戌。乃以其戌之同數$\frac{甲}{未}$代其戌，則彳未＝$\frac{甲}{未彳甲}$丄甲彳戌，而彳戌＝$\frac{甲^{二}}{甲彳未丅未彳甲}$。故得專法如左：

凡同變量之函數，若爲分數，則求微分之法可將分母乘其分子之微分，乃以分子乘分母之微分減之，而以分母之平方約之。

此法亦可用一總式以明之。

惟因戌＝$\frac{甲}{未}$之微分爲$\frac{戌}{彳戌}$＝$\frac{未}{彳未}$丅$\frac{甲}{彳甲}$，所以戌＝$\frac{亥地}{未申酉}$之微分爲$\frac{戌}{彳戌}$＝$\frac{未}{彳未}$丄$\frac{申}{彳申}$丄$\frac{酉}{彳酉}$丅$\frac{亥}{彳亥}$丅$\frac{地}{彳地}$。由此推之，則戌＝$\frac{亥地}{未申酉}$之微分當爲$\frac{戌}{彳戌}$＝$\frac{未申酉}{彳(未申酉)}$丅$\frac{亥地}{彳(亥地)}$。又依第十一款之例，其$\frac{未申酉}{彳(未申酉)}$＝$\frac{未}{彳未}$丄$\frac{申}{彳申}$丄$\frac{酉}{彳酉}$，

而$\frac{\text{亥地}}{\text{彳(亥地)}}=\frac{\text{亥}}{\text{彳亥}}\perp\frac{\text{地}}{\text{彳地}}$，故得$\frac{\text{戌}}{\text{彳戌}}=\frac{\text{未}}{\text{彳未}}\perp\frac{\text{申}}{\text{彳申}}\perp\frac{\text{酉}}{\text{彳酉}}\top\frac{\text{亥}}{\text{彳亥}}\top\frac{\text{地}}{\text{彳地}}$。由是知若有分數之函數，其分母分子爲任若干同變數之函數連乘之積如$\frac{\text{亥地}}{\text{未申酉}}$者，可以$\text{彳}\left(\frac{\text{亥地}}{\text{未申酉}}\right)=\frac{\text{亥地}}{\text{未申酉}}\left[\frac{\text{未}}{\text{彳未}}\perp\frac{\text{申}}{\text{彳申}}\perp\frac{\text{酉}}{\text{彳酉}}\top\frac{\text{亥}}{\text{彳亥}}\top\frac{\text{地}}{\text{彳地}}\right]$之式明之。

第十三款　茲欲攷任何函數地之任何乘方求微分之專法。其地或爲自變之數，或爲他變之函數，皆可。

先設$\text{戌}=\text{地}^{\text{卯}}$，其卯爲任何整數，則其函數之詳式必有卯箇地連乘如$\text{戌}=\text{地}\cdot\text{地}\cdot\text{地}\cdot\text{地}\cdots\cdots$。則依第十一款之例，$\frac{\text{戌}}{\text{彳戌}}=\frac{\text{地}}{\text{彳地}}\perp\frac{\text{地}}{\text{彳地}}\perp\frac{\text{地}}{\text{彳地}}\perp\cdots\cdots$，其項必有卯數。

故$\frac{\text{戌}}{\text{彳戌}}=\frac{\text{地}}{\text{卯彳地}}$，而得$\text{彳戌}=\frac{\text{地}}{\text{卯彳地}}\text{戌}=\text{卯地}^{\text{卯}\top\text{一}}\text{彳地}$。

設函數爲分指數如$\text{戌}=\text{地}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}}$，則$\text{戌}^{\text{卯}}=\text{地}^{\text{寅}}$。若依第九款之例，則得$\text{卯戌}^{\text{卯}\top\text{一}}\text{彳戌}=\text{寅地}^{\text{寅}\top\text{一}}\text{彳地}$，而$\text{彳戌}=\frac{\text{卯}}{\text{寅}}\times\frac{\text{戌}^{\text{卯}\top\text{一}}}{\text{地}^{\text{寅}\top\text{一}}}\text{彳地}$。惟因$\text{戌}=\text{地}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}}$、$\text{戌}^{\text{卯}\top\text{一}}=\text{地}^{\text{寅}\top\frac{\text{卯}}{\text{寅}}}$，所以$\frac{\text{戌}^{\text{卯}\top\text{一}}}{\text{地}^{\text{寅}\top\text{一}}}=\text{地}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}\top\text{一}}$，而$\text{彳戌}=\frac{\text{卯}}{\text{寅}}\text{地}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}\top\text{一}}\text{彳地}$。

再設卯爲負指數，無論爲整數爲分數，則$\text{戌}=\text{地}^{\top\text{卯}}$，卽$\text{戌}=\frac{\text{一}}{\text{地}^{\text{卯}}}$。若依第十二款之

例，因其分子爲常數，故其分子之微分當爲〇，而得彳戊＝丁$\frac{地^{二卯}}{卯地^{卯丁一}彳地}$，卽彳戊＝丁卯地^{丁卯丁一}彳地。

合觀本款之各式，可見地之指數卯無論爲正爲負爲整爲分，其微分之式必爲彳$\left(地^{卯}\right)$＝卯地^{卯丁一}彳地。故得專法如左：

凡求函數乘方之微分，法將其原指數以一減之爲新指數，而以原指數爲其倍數，又以變數之微分乘之卽得。惟其原函數若本有常數爲倍數者，則其原倍數必仍在乘數之中。

如函數之式爲戊＝甲天^{卯}，則其微分之式爲彳$\left(甲天^{卯}\right)$＝卯甲天^{卯丁一}彳天。

求函數諸乘方之微分更有簡便之法，可藉代數術第一百六十款與一百六十一款之二項例而得。所以于此不論者，因二項之例亦可由微分而得，余欲用微分之術證明二項之例以便于用，故俟後詳論之。

求變數平方根之微分

用前法已能求各負方之微分，惟因$\sqrt{\text{地}}=\text{地}^{\frac{\text{一}}{\text{二}}}$爲微分術中常見之式，所以必更設一最易之專法以便于用。

依本款求諸乘方微分之法，$\text{彳}\left(\text{地}^{\frac{\text{一}}{\text{二}}}\right)=\frac{\text{一}}{\text{二}}\text{地}^{\frac{\text{一}}{\text{二}}-\text{一}}\text{彳地}$，即$\text{彳}\left(\text{地}^{\frac{\text{一}}{\text{二}}}\right)=\frac{\text{一}}{\text{二}}\text{地}^{-\frac{\text{一}}{\text{二}}}\text{彳地}$，

即$\text{彳}\left(\sqrt{\text{地}}\right)=\frac{\text{彳地}}{\text{二}\sqrt{\text{地}}}$。所以得專法如左：

凡求函數平方根之微分，法以函數之微分爲實而二倍其原函數之平方根以約之即得。

求重函數之微分

第十四款　設有地爲天之函數而戌爲地之函數，欲求其戌與天相配之微分。

令天變其同數爲$\text{天}+\text{辛}$，則地變爲$\text{地}'=\text{地}+\text{巳辛}+\text{午辛}^{\text{二}}+\text{未辛}^{\text{三}}+\cdots\cdots$。乃令$\text{巳辛}+\text{午辛}^{\text{二}}+\text{未辛}^{\text{三}}+\cdots\cdots=\text{子}$，則地變爲$\text{地}+\text{子}$。惟因戌爲地之函數，若地變爲$\text{地}+\text{子}$，

則戌變爲$\text{戌}'=\text{戌}+\text{巳}'\text{子}+\text{午}'\text{子}^{\text{二}}+\text{未}'\text{子}^{\text{三}}+\cdots\cdots$。其$\text{巳}'\text{午}'\text{未}'$各數爲地之他函數，

與子及辛皆無相關。所以于此級數中，以子之同數$㔾辛丄午辛^{二}丄\cdots\cdots$代之，則天變爲天丄辛之時，其戊之同數必變爲$戊'＝戊丄㔾'㔾辛丄(㔾'午丄午'㔾^{二})辛^{二}丄\cdots\cdots$。所以得$\frac{辛}{戊丁戊'}＝㔾'㔾丄(㔾'午丄午'㔾^{二})辛丄\cdots\cdots$。如令辛爲甚小，則其限必爲$\frac{辛}{戊丁戊'}＝㔾'㔾$。惟因地爲天之函數，故$㔾＝\frac{彳天}{彳地}$。又因戊爲地之函數，故$㔾＝\frac{彳地}{彳戊}$。整理者註：上㔾當爲㔾′。　如知戊亦可爲天之函數，則$\frac{彳天}{彳戊}＝\frac{辛}{戊丁戊'}＝㔾'㔾$。由此可見，$\frac{彳天}{彳戊}＝\frac{彳地}{彳戊}\times\frac{彳天}{彳地}$，而$彳戊＝\left(\frac{彳地}{彳戊}\times\frac{彳天}{彳地}\right)彳天$。故得專法如左：

凡有地爲天之函數、戊爲地之函數而欲求其微分者，法先以戊專爲地之函數而求其微係數，又以地專爲天之函數而求其微係數，乃將兩微係數相乘，又以天之微分乘之卽爲戊之微分。

已知$\frac{彳地}{彳戊}\times\frac{彳天}{彳地}＝\frac{彳天}{彳戊}$，如令$戊＝天$，則變其式爲$\frac{彳地}{彳戊}\times\frac{彳天}{彳地}＝\frac{彳天}{彳天}＝一$，所以可作$\frac{彳地}{彳天}＝\frac{\frac{彳天}{彳地}}{一}$。由是知：凡以天爲地之函數與以地爲天之函數，其兩微係數必可互爲倒數。以法爲實，以實爲法，謂之倒數。　此例可由第八款得之。

求多項函數之微分

第十五款　如有同變數之若干函數合成一多項式，則求此多項式之微分亦可設一專法。

設亥地人爲變數天之任何函數，欲求戊 $=$ 甲 $\perp$ 乙亥 $\perp$ 丙地 $\top$ 戊人 之微分，若天變為天 $\perp$ 辛 而其同時中亥變為亥 $\perp$ 巳辛 $\perp$ 午辛^{二} $\perp\cdots\cdots$，地變為地 $\perp$ 巳$'$辛 $\perp$ 午$'$辛^{二} $\perp\cdots\cdots$，人變為人 $\perp$ 巳$''$辛 $\perp$ 午$''$辛^{二} $\perp\cdots\cdots$，戊變為戊$'$，故得

$$\text{戊}' = \begin{cases} \text{甲} \perp \text{乙亥} \perp \text{丙地} \top \text{戊人} \\ \perp (\text{乙巳} \perp \text{丙巳}' \perp \text{戊巳}'')\,\text{辛} \\ \perp (\text{乙午} \perp \text{丙午}' \perp \text{戊午}'')\,\text{辛}^{二} \\ \perp \cdots\cdots \end{cases}$$

。如以戊代其右邊之上層，移其項而以辛約之，則得已知 $\dfrac{\text{辛}}{\text{戊}' \top \text{戊}} = \text{乙巳} \perp \text{丙巳}' \top \text{戊巳}'' \perp (\text{乙午} \perp \text{丙午}' \perp \text{戊午}'')\,\text{辛} \perp \cdots\cdots$。

觀其各限可見 $\dfrac{\text{辛}}{\text{戊}' \top \text{戊}}$ 爲戊之微係數，而巳 與巳$'$ 及巳$''$ 爲亥與地及人之微係數。所以

其$\frac{彳天}{彳戌}＝\frac{彳天}{乙彳亥}丄\frac{彳天}{丙彳地}丅\frac{彳天}{戊彳人}$，而彳戌＝乙彳亥丄丙彳地丅戊彳人。故得專法如左：

凡有同變數之各函數和較而成之多項式，則其總函數之微分必等于各函數微分之和較，而其常數之項恆變爲〇。

代函數求微分各題

第十六款　茲設數題以明之。

一題　設有戌＝甲天^{五}，欲求其微分之式。

此式與公式戌＝甲天^{卯}爲一類，所以可用第十三款之法求其微分得彳戌＝五甲天^{四}彳天。

二題　設有戌＝$\frac{天^{五}}{甲}$，欲求其微分之式。

惟因戌＝$\frac{天^{五}}{甲}$即戌＝甲天^{丅五}，故如法求得彳戌＝丅五甲天^{丅六}彳天，即彳戌＝$\frac{天^{六}}{丅五甲彳天}$。

三題　設有戌 $= \sqrt{天^{三}}$，欲求其微分之式。

惟因戌 $= \sqrt{天^{三}}$ 即戌 $= 天^{\frac{二}{三}}$，故如法求得彳戌 $= \frac{二}{三}天^{\frac{二}{一}}$ 彳天，即。彳戌 $=$ $\frac{二}{三}$彳天$\sqrt{天}$。

四題　設有戌 $=$ 甲天^{三} ⊥ 乙天^{二} ⊥ 丙天 ⊥ 戊，欲求其微分之式。

此爲多項之函數，故如法求得彳戌 $=$ 三甲天^{二}彳天⊥二乙天彳天⊥丙彳天，即彳戌 $=$ (三甲天^{二} ⊥ 二乙天 ⊥ 丙) 彳天。其常數之項戊于求微分之時變爲〇而不見。

五題　設有戌 $=$ (甲 ⊥ 乙天^{卯})^{巳}，欲求其微分之式。

此可令地 $=$ 甲 ⊥ 乙天^{卯}，則戌 $=$ 地^{巳} 而彳戌 $=$ 巳地^{巳丅一}彳地。惟因地^{巳丅一} $=$ (甲 ⊥ 乙天^{卯})^{巳丅一}，而彳地 $=$ ⊥乙卯天^{卯丅一}彳天，所以得

彳戌 $=$ 乙卯巳(甲 ⊥ 乙天^{卯})^{巳丅一} ⊥ 天^{卯丅一}彳天。

此題之式若不用地代其括弧內之數，而以甲 ⊥ 乙天^{卯} 爲一箇箇函數，其戌爲箇函數之某方而依第十三款之法求之，亦通。

六題　設有戌 $=$ 天^{三}(甲 ⊥ 天)^{二}，此題爲表明第十款之法。 欲求其微分之式。

令巳 $=$ 天^{三}，午 $=$ $(甲 \perp 天)^{二}$，則戊 $=$ 巳午。故得彳戊 $=$ 午彳巳 $\perp$ 巳彳午。惟因彳巳 $=$ 三天^{二}彳天，彳午 $=$ 二$(甲 \perp 天)$彳天，所以彳戊 $=$ 三天$^{二}(甲 \perp 天)^{二}$彳天 $\perp$ 二天$^{三}(甲 \perp 天)$彳天，即彳戊 $=$ 天$^{二}(甲 \perp 天)(三甲 \perp 五天)$彳天。

若平常習算之時，可不必用巳、午二數相代，而即以原式如法求之，亦同。

七題 設有戊 $=$ 天$(一 \perp 天)(一 \perp 天^{二})$，其戊爲同變數之三箇函數連乘之積。欲求其微分之式。

依第十一款之法得彳戊 $=$ $(一 \perp 天)(一 \perp 天^{二})$彳天 $\perp$ 天$(一 \perp 天^{二})$彳天 $\perp$ 二天$^{二}(一 \perp 天)$彳天，又以常法化之得彳戊 $=$ $(一 \perp 二天 \perp 三天^{二} \perp 四天^{三})$彳天。

又法可從本公式彳$(未申酉)$ $=$ 未申酉$\left[\frac{未}{彳未} \perp \frac{申}{彳申} \perp \frac{酉}{彳酉}\right]$得

彳戊 $=$ 天$(一 \perp 天)(一 \perp 天^{二})\left[\frac{天}{彳天} \perp \frac{一 \perp 天}{彳天} \perp \frac{一 \perp 天^{二}}{二天彳天}\right]$。此式易化爲彳戊 $=$ $(一 \perp 二天 \perp 三天^{二} \perp 四天^{三})$彳天。

八題 設有戊 $=$ $\frac{一 \perp 天^{二}}{天}$，此爲分數之函數。欲求其微分之式。

依第十三款之法得彳戊 $=$ $\frac{(一 \perp 天^{二})^{二}}{(一 \perp 天^{二})彳天 \top 二天^{二}彳天}$，即彳戊 $=$ $\frac{(一 \perp 天^{二})^{二}}{(一 \top 天^{二})彳天}$。

九題　設有戌 $= \dfrac{\text{天}^{\text{四}} \top \text{天}^{\text{二}} \perp \text{一}}{\text{天}^{\text{三}} \perp \text{天}} = \dfrac{\text{天}^{\text{四}} \top \text{天}^{\text{二}} \perp \text{一}}{\text{天}\left(\text{天}^{\text{二}} \perp \text{一}\right)}$，欲求其微分之式。

將所設之式與本公式 $\text{彳}\left[\dfrac{\text{酉}}{\text{申未}}\right] = \dfrac{\text{酉}}{\text{申未}}\left[\dfrac{\text{未}}{\text{彳未}} \perp \dfrac{\text{申}}{\text{彳申}} \top \dfrac{\text{酉}}{\text{彳酉}}\right]$ 相比，則天 $=$ 未，天$^{\text{二}} \perp$ 一 $=$ 申，天$^{\text{四}} \top$ 天$^{\text{二}} \perp$ 一 $=$ 酉。所以得

$$\text{彳戌} = \frac{\text{天}^{\text{四}} \top \text{天}^{\text{二}} \perp \text{一}}{\text{天}^{\text{三}} \perp \text{天}}\left[\frac{\text{天}}{\text{彳天}} \perp \frac{\text{一} \perp \text{天}^{\text{二}}}{\text{二天彳天}} \top \frac{\text{天}^{\text{四}} \top \text{天}^{\text{二}} \perp \text{一}}{\left(\text{四天}^{\text{三}} \top \text{二天}\right)\text{彳天}}\right]$$

，化之得 $\text{彳戌} = \dfrac{\left(\text{天}^{\text{四}} \top \text{天}^{\text{二}} \perp \text{一}\right)^{\text{二}}}{\top\left(\text{天}^{\text{六}} \perp \text{四天}^{\text{四}} \top \text{四天}^{\text{二}} \top \text{一}\right)\text{彳天}}$。

十題　設有戌 $=$ 三地$^{\text{二}}$，地 $=$ 天$^{\text{三}} \perp$ 甲天此題爲表明第十四款之法。欲求其微分之式。

如法求之，則 $\dfrac{\text{彳地}}{\text{彳戌}} = \text{六地}$，$\dfrac{\text{彳天}}{\text{彳地}} = \text{三天}^{\text{二}} \perp \text{甲}$，所以 $\dfrac{\text{彳地}}{\text{彳戌}} \times \dfrac{\text{彳天}}{\text{彳地}} = \text{六地}\left(\text{三天}^{\text{二}} \perp \text{甲}\right)$，即 $\dfrac{\text{彳地}}{\text{彳戌}} \times \dfrac{\text{彳天}}{\text{彳地}} = \text{一八天}^{\text{二}}\text{地} \perp \text{六甲地}$。惟因 $\text{彳戌} = \dfrac{\text{彳地}}{\text{彳戌}} \times \dfrac{\text{彳天}}{\text{彳地}}\text{彳天}$，故得 $\text{彳戌} = \text{一八天}^{\text{二}}\text{地彳天} \perp \text{六甲地彳天}$。

此式亦可由他法而得。蓋因其戌 $=$ 三地$^{\text{二}}$，則彳戌 $=$ 六地彳地。又因地 $=$ 天$^{\text{三}} \perp$ 甲天，則彳地 $=$ 三天$^{\text{二}}$彳天 $\perp$ 甲彳天，故可將彳地之同數帶入彳戌之同數中，其

所得之式亦為彳戊 ＝ 一八天$^{\text{二}}$地彳天 ⊥ 六甲地彳天。

求二項例之證

第十七款　以下各款之法必用二項例推之，故茲款特用微分之法證明其例以便于用。

設有二項之式(一 ⊥ 天)$^{\text{卯}}$ ＝ 一 ⊥ 呷天 ⊥ 吃天$^{\text{二}}$ ⊥ 呐天$^{\text{三}}$ ⊥ 叮天$^{\text{四}}$ ⊥ ……，其指數卯可任為或正或負或整數或分之數。則從此式易知其各項之倍數呷、吃、呐、叮等類皆從指數卯所生，而與天之同數無涉。又因式之左右既為相等之數，則其微分之式左右同，故可依第九款之法各求其微分，得 (一 ⊥ 天)$^{\text{卯丅一}}$ 彳天 ＝ 呷彳天 ⊥ 二吃天彳天 ⊥ 三呐天$^{\text{二}}$彳天 ⊥ 四叮天$^{\text{三}}$彳天 ⊥ ……。若兩邊各以彳天 徧約之，又以一 ⊥ 天 徧通之，則得 (一 ⊥ 天)$^{\text{卯}}$ ＝ 呷 ⊥ (呷 ⊥ 二吃) 天 ⊥ (二吃 ⊥ 三呐) 天$^{\text{二}}$ ⊥ (三呐 ⊥ 四叮) 天$^{\text{三}}$ ⊥ ……㊀。又由原式得 (一 ⊥ 天)$^{\text{卯}}$ ＝ 卯 ⊥ 卯呷天 ⊥ 卯吃天$^{\text{二}}$ ⊥ 卯呐天$^{\text{三}}$ ⊥ 卯叮天$^{\text{四}}$ ⊥ ……㊁，則㊀㊁兩式右邊之多項，其形雖不同，其數必無異。因其式皆能等於 (一 ⊥ 天)$^{\text{卯}}$

故也。所以

$$\left.\begin{array}{rl} 呷= & 卯 \\ 呷\perp二𠮙= & 卯呷 \\ 二𠮙\perp三𠰳= & 卯𠮙 \\ 三𠰳\perp四叮= & 卯𠰳 \\ \vdots & \\ \vdots & \end{array}\right\}則\left\{\begin{array}{l} 呷=卯 \\ 𠮙=\dfrac{二}{(卯\top一)}呷 \\ 𠰳=\dfrac{三}{(卯\top二)}𠮙 \\ 叮=\dfrac{四}{(卯\top三)}𠰳 \\ \vdots \\ \vdots \end{array}\right.$$

。故可用代法得$(一\perp天)^{卯}=一\perp\frac{一}{卯}天\perp\frac{一\cdot二}{卯(卯\top一)}天^{二}\perp\frac{一\cdot二\cdot三}{卯(卯\top一)(卯\top二)}天^{三}\perp\cdots\cdots$。以$\frac{甲}{天}$代其天，兩邊俱以$甲^{卯}$通之，則得$(甲\perp天)^{卯}=甲^{卯}\perp\frac{一}{卯}甲^{卯\top一}天\perp\frac{一\cdot二}{卯(卯\top一)}甲^{卯\top二}天^{二}\perp\frac{一\cdot二\cdot三}{卯(卯\top一)(卯\top二)}甲^{卯\top三}天^{三}\perp\cdots\cdots$。