微積溯源序

微積溯源八卷，前四卷爲微分術，後四卷爲積分術，乃算學中最深之事也。余既與西士傅蘭雅譯畢代數術二十五卷，更思求其進境，故又與傅君譯此書焉。先是咸豐年間，曾有海寗李壬叔與西士偉烈亞力譯出代微積拾級一書，流播海内。余素與壬叔相友，得讀其書，粗明微積二術之梗概。所以又譯此書者，蓋欲補其所略也。書中代數之式甚繁，校算不易，則劉君省菴之力居多。

今刻工已竣矣，故序之，曰：吾以爲古時之算法惟有加減而已。其乘與除乃因加減之不勝其繁，故更立二術以使之簡易也。開方之法，又所以濟除法之窮者也。蓋算學中自有加減乘除開方五法，而一切淺近易明之數，無不可通矣。惟人之心思智慮日出不窮，往往以能人之所不能者爲快。遇有窒礙難通之處，輒思立法以濟其窮。故有減其所不可減而正負之名不得不立矣；除其所不能除而寄母通分之法又不得不立矣。代數中種種記號之法皆出於不得已而立者也，惟每立一法必能使繁者爲簡，難者爲易，遲者爲速，而算學之境界藉此得更進一層。如是屢進不已而所立之法於是乎日多矣。微分積分者，蓋又因乘除開

方之不勝其繁，且有窒礙難通之處，故更立此二術以濟其窮，又使簡易而速者也。試觀圓徑求周、真數求對等事，雖無微分積分之時，亦未嘗不可求，惟須乘除開方數十百次。其難有不可言喻者，不如用微積之法理明而數捷也。然則謂加減乘除開方代數之外者，更有二術焉，一曰微分，一曰積分可也。其積分術爲微分之還原，猶之開平方爲自乘之還原、除法爲乘之還原、減法爲加之還原也。然加與乘其原無不可還，而微分之原有可還有不可還，是猶算式中有不可開之方耳，又何怪焉。如必曰加減乘除開方已足供吾之用矣，何必更究其精？是舍舟車之便利而必欲負重遠行也。其用力多而成功少，蓋不待智者而辨矣。

同治十三年九月十八日，金匱華蘅芳序。

微積溯源卷一

論變數与函數之變比例

第一款　用代數以解任何曲線，其中每有幾種數，其大小恒有定率者，如橢圓之長徑、拋物線之通徑、雙曲線之屬徑之類是也。又每有幾種數可有任若干相配之同數，其大小恒不能有定率者，如曲線任一點之縱橫線是也。數既有此兩種分別，則每種須有一總名以賅之，故名其有定之數曰常數，無定之數曰變數。

凡常數之同數不能增亦不能損。

凡變數之同數，能變爲大，亦能變爲小。故其從此同數變至彼同數之時，必歷彼此二數間最小最微之各分數。

如平圓之半徑爲常數，而其任一段之弧或弧之弦矢切割各線、及各線與弧所成之面，

皆謂之變數。

橢圓之長徑短徑皆爲常數，而其曲線之任一段或曲線上任一點之縱橫線，並其形内形外所能作之任何線或面或角，皆謂之變數。

拋物線之通徑爲常數，而其曲線之任一段或任一點之縱橫線、或弧與縱橫線所成之面，皆謂之變數。他種曲線亦然。

凡常數，恒以甲乙丙丁等字代之。凡變數，恒以天地人等字代之。

第二款　若有彼此二數皆爲變數，此數變而彼數因此數變而亦變者，則彼數爲此數之函數。

如平圓之八線皆爲弧之函數。若反求之，亦可以弧爲八線之函數。

又如重學中令物體前行之力，與其物所行之路，皆爲時刻之函數。

如有式$\text{地}=\dfrac{\text{甲}\top\text{天}}{\text{甲}\perp\text{天}}$，此式中甲爲常數，天爲自主之變數，地爲天之函數。故地之同數能以天與甲明之。

如有式$\text{天}=\dfrac{\text{地}\perp\text{一}}{\text{甲}(\text{地}\top\text{一})}$，此式中甲與一皆爲常數，地爲自主之變數，天爲地之函數，故天之同數可以地與甲及一明之。

如有式$\text{戊}=\text{甲}\perp\text{乙天}\perp\text{丙天}^{\text{二}}$或$\text{戊}=\sqrt{\text{甲}^{\text{二}}\perp\text{乙天}\perp\text{天}^{\text{二}}}$或$\text{戊}=\dfrac{\text{丙}\perp\text{天}^{\text{二}}}{\text{甲}\perp\sqrt{\text{乙天}}}$，其

甲乙丙爲常數，天爲自變之數，而戊皆爲天之函數。

凡函數之中，可以有數箇自主之變數。

如有式 $戊 = 甲天^{二} \perp 乙天地 \perp 丙地^{二}$ 則天與地皆爲自主之變數，戊爲天地兩變數之函數。

凡變數之函數，其形雖有多種，然每可化之，使不外乎以下數類 $天^{卯}$、$甲^{天}$、正弦天、餘弦天 等類是也。

凡函數爲 $天^{卯}$ 之類，其指數爲常數，則可從天之卯方，用代數之常法化之。

而以有窮之項明其函數之同數。故謂之代數函數，亦謂之常函數。

如有式 $戊 = 甲天^{三} \perp \dfrac{\sqrt{甲^{二} \perp 天^{二}}}{乙天^{二} \top 丙^{二}天}$，此種函數，其戊之同數可用加減乘除開方等法而得之。

凡函數爲甲、對天之類，則其函數之同數不能以有窮之項明之。故謂之越函數。越者，超越於尋常之意也。

凡函數爲正弦天、餘弦天及正切天、正割天之類，其函數之同數皆可以平圓之各線明之。故謂之圓函數，亦謂之角函數。

以上三種函數常函數、越函數、圓函數也。，若已知天之同數，則其函數之同數即可求得。故

名此三種函數爲陽函數。因其顯而易明，故謂之陽函數。

更有他種函數，必先解其方程式，令函數中之各變數分開，然後能求其同數者。

如有式戊天 $=\dfrac{戊丅天}{戊\perp天}$，其戊爲天之函數，如欲求其戊與天相配之同數，必先解其二次方程式始能通。

此種之式名曰天之陰函數。因其雜糅未明，故謂之陰函數。反之亦可云天爲戊之陰函數。

如解其方程式爲戊 $=\dfrac{二}{一}\left[天\perp\dfrac{天}{一}\perp\dfrac{天}{\sqrt{天^{四}\perp六天^{二}\perp一}}\right]$，則戊變爲天之陰函數。

昔代數之家，凡遇須用開平方之處，每于其式之左旁作一根字以記之，如根天爲天之平方根。後又變通其法，而以根號記之，如 $\sqrt{天}$ 爲天之平方根。此代數之例也。茲可仿照此例，凡遇某變數之函數，亦用一號以記之。所以凡有任何變數之函數，皆可書一函字于其變數之旁，以爲識別。

如天之函數則作函天，或作函(天)，皆言天之函數也。

所以凡見變數之左旁有一函字者，其函字并非代表天之倍數，其意謂是某變數之函數也。

用此法則可將戊 $=天^{卯}$、戊 $=甲^{天}$、戊 $=$ 對天、戊 $=$ 正弦天、戊 $=$ 餘弦天 各種之式

以一語賅之，謂之$戊=函天$ 或$戊=函(天)$。

若函數從兩箇變數而成，其天與地皆爲自主之變數，其式如$戊=甲天^{二}\perp乙天地\perp丙地^{二}$者，則可以$戊=函(天,地)$別之。函數爲多箇變數所成者，仿此推之。

惟函數只指其變數言之，若甲乙丙丁各常數。雖多不論。

第三款 凡觀此書者，必先明變數與函數變比例之限。如幾何原本中證明平圓之面積必比其外切多等邊形之面積微小，若其外切多等邊形之邊愈多，則其面積愈近于平圓之面積。所以可設平圓之面積爲任何小，而切其圓外爲多等邊形，可使多等邊形之面積與平圓之面積較其數甚小于所設之圓面積；再設其多等邊形之面積爲級數，而其邊之變率可每變多若干倍，則其多等邊形之面積必漸與平圓之面積相近而以平圓爲限。雖切于圓外之多邊形其邊任變至若何多，其面積總不能等于平圓之面積。然其級數之總數可比平圓之面積所差甚微，其較數之小，可小至莫可名言。

若用此法于圓內容多等邊形，則其多等邊形之面積亦以平圓之面積爲限。

總言之，凡平圓之周爲其內容外切多等邊形之限。

如代數術第二百六十六款言，如令甲代平圓之任何弧，則$\frac{正弦甲}{甲}$恒小于半徑，而$\frac{正切甲}{甲}$

恒小于半徑。然令其弧爲任何小，則其式之同數必甚近于半徑，而其所差之數可小至不能以言語形容。所以此兩數中間之數爲一。即半徑也。故其公限亦爲一。

由此可見凡弧與弦切，三者之中取其二以相較，其比例之限必相等。

如代數術中亦會證甲弧爲卯正切$\frac{卯}{甲}$與卯正弦$\frac{卯}{甲}$兩式之限，惟其卯必爲任何大。

依代數術第五十六款之例$一⊥天⊥天^{二}⊥天^{三}……⊥天^{卯丅一}$即$\frac{一丅天}{一丅天^{卯}}$。若天變至小于一，而卯大至無窮，則$天^{卯}＝〇$，而式變爲$\frac{一丅天}{一}$。所以任取其級數若干項之和，必小于$\frac{一丅天}{一}$。惟其項愈多，則與$\frac{一丅天}{一}$愈相近，而其所差之數可小至莫可名言。則可見$\frac{一丅天}{一}$必爲其諸級數之限。

若依二項例之式$\left(一⊥\frac{卯}{天}\right)^{卯}＝一⊥\frac{一}{天}⊥\frac{一·二}{天^{二}}\left(一⊥\frac{卯}{一}\right)⊥\frac{一·二·三}{天^{三}}\left(一⊥\frac{卯}{一}\right)\left(一⊥\frac{卯}{二}\right)⊥……$，其卯之同數無論如何，必合于理。惟卯若爲大數，則其各項之乘數$一⊥\frac{卯}{一}$、$一⊥\frac{卯}{二}$之類與一相較之差甚小，若卯愈大，則其差愈微；若令

卯爲任意大，則各乘數可略等于一，所以得$\left(一\perp\frac{卯}{天}\right)^{卯}=一\perp\frac{一}{天}\perp\frac{一.二}{天^{二}}\perp\frac{一.二.三}{天^{三}}\perp\cdots\cdots$甲。

曾在代數術第一百七十七款中證甲式之右邊爲由函數$戊^{天}$而成。其戊之同數因爲二.七一八二八一八，即訥白爾對數之根也。所以卯若愈大則$\left(一\perp\frac{卯}{天}\right)^{卯}$必愈與$戊^{天}$相近，而其限爲$戊^{天}$。

如令天＝一，則$\left(一\perp\frac{卯}{天}\right)^{卯}$之限爲戊，即$\left(一\perp\frac{卯}{天}\right)^{卯}$一戊＝二.七一八二八一八，故其函數爲常數。

第四款　惟因函數之同數本從變數而生，故變數之同數與函數之長數比則爲$\frac{辛}{戊'\top戊}=二天\perp辛$。

設函數之式爲$戊=天^{三}$，令天長數爲辛，而以函數之新同數爲$戊'$則

$$戊'=(天\perp辛)^{三}\begin{cases}=天^{三}\perp三天^{二}辛\perp三天辛^{二}\perp辛^{三}\\=戊\perp三天^{二}辛\perp三天辛^{二}\perp辛^{三}\end{cases}$$

，而$\frac{辛}{戊'\top戊}=三天^{二}\perp$

$三天辛 \perp 辛^{二}$。可見天變爲$天 \perp 辛$之時，其函數$戊$必變爲$戊 \perp 三天^{二}辛 \perp 三天辛^{二} \perp 辛^{三}$，其所長之數爲$三天^{二}辛 \perp 三天辛^{二} \perp 辛^{三}$。此式中之各項皆爲辛之整方與他數相乘所成。又可見變數與函數之變比例，其式爲$三天^{二}辛 \perp 三天辛^{二} \perp 辛^{三}$，其初項$三天^{二}$與天之長數辛無相關。

設函數之式爲$戊 = 天^{四}$。令天之長數爲辛，而以$戊'$爲函數之新同數，則$戊' = 戊 \perp 四天^{三}辛 \perp 六天^{二}辛^{二} \perp 四天辛^{三} \perp 辛^{四}$，而$\frac{辛}{戊' \top 戊} = 四天^{三} \perp 六天^{二}辛 \perp 四天辛^{二} \perp 辛^{三}$。

由此可見天若變爲$天 \perp 辛$，則其各函數之新同數如左：

如$戊 = 天^{二}$，則$戊' = 戊 \perp 二天辛 \perp 辛^{二}$。如$戊 = 天^{三}$，則$戊' = 戊 \perp 三天^{二}辛 \perp 三天辛^{二} \perp 辛^{三}$。如$戊 = 天^{四}$，則$戊' = 戊 \perp 四天^{三}辛 \perp 六天^{二}辛^{二} \perp 四天辛^{三} \perp 辛^{四}$。其餘類推。

總言之，若以卯爲天之任何整指數，而令天之長數爲辛，又以巳午未申等字挨次而代辛之各方之倍數，則函數$戊 = 天^{卯}$之新同數必爲$戊' = 辛 \perp 巳辛 \perp 午辛^{二} \perp 未辛^{三} \perp 申辛^{四} \perp \cdots\cdots$。由是知函數之新同數必爲級數，其初項戊爲函數之原同數，其餘各項爲天之長數辛之各整方，以巳午未申之類爲各倍數，其各倍數皆爲天之別種函數，

其式亦從本函數而生。

由以上各式又可見函數爲$\text{戌}=\text{天}^{\text{二}}$、$\text{戌}=\text{天}^{\text{三}}$、$\text{戌}=\text{天}^{\text{四}}$之類，則其變數與函數之變比例必爲$\frac{\text{辛}}{\text{戌}'\text{丅戌}}=\text{二天}\perp\text{辛}$、$\frac{\text{辛}}{\text{戌}'\text{丅戌}}=\text{三天}^{\text{二}}\perp\text{三天辛}\perp\text{辛}^{\text{二}}$、$\frac{\text{辛}}{\text{戌}'\text{丅戌}}=\text{四天}^{\text{三}}\perp\text{六天}^{\text{二}}\text{辛}\perp\text{四天辛}^{\text{二}}\perp\text{辛}^{\text{三}}$之類。總之若以卯爲天之整指數，則$\text{戌}=\text{天}^{\text{卯}}$之變比例必爲$\frac{\text{辛}}{\text{戌}'\text{丅戌}}=\text{巳}\perp\text{午辛}\perp\text{未辛}^{\text{二}}\perp\text{申辛}^{\text{三}}\perp\cdots\cdots$。由此可見，變數天之長數與函數$\text{天}^{\text{卯}}$之長數其變比例$\frac{\text{辛}}{\text{戌}'\text{丅戌}}$之同數$\text{巳}\perp\text{午辛}\perp\text{未辛}^{\text{二}}\perp\text{申辛}^{\text{三}}\perp\cdots\cdots$可分之爲兩式，其一式爲巳，此式與天之長數辛無相關；又一式爲$\text{午辛}\perp\text{未辛}^{\text{二}}\perp\text{申辛}^{\text{三}}\perp\cdots\cdots$。即$\text{辛}\left(\text{午}\perp\text{未辛}\perp\text{申辛}^{\text{二}}\perp\cdots\cdots\right)$。此式因以辛爲乘數，故辛若變小，其數亦必隨辛而變小。如令辛爲任何小，則此式之數可小至甚近于〇。故此數可以不計，而以巳爲變比例之限。

設有繁函數之式$\text{戌}=\text{甲}\perp\text{乙天}\perp\text{丙天}^{\text{二}}$，令天之長數爲辛，則天變爲$\text{天}\perp\text{辛}$之時，其函數之同數必變爲

$$\text{戌}\begin{cases}=\text{甲}\perp\text{乙}(\text{天}\perp\text{辛})\perp\text{丙}(\text{天}\perp\text{辛})^{\text{二}} \\ =\text{甲}\perp\text{乙天}\perp\text{丙天}^{\text{二}}\perp(\text{乙}\perp\text{二丙天})\text{辛}\perp\text{丙辛}^{\text{二}}\end{cases}$$

，故

$\text{戊}'\text{丅戊} = (\text{乙} \perp \text{二丙天})\text{辛} \perp \text{丙辛}^{\text{二}}$，而$\dfrac{\text{辛}}{\text{戊}'\text{丅戊}} = \text{乙} \perp \text{二丙天} \perp \text{丙辛}$。其$\text{乙} \perp \text{二丙天}$爲本函數變比例之限。

以此法徧試各種特設之函數，見其皆有相類之性情，所以例設如左。

例曰：命任何自主之變數爲天，而令天之任何函數等于戊，則天變爲$\text{天} \perp \text{辛}$之時，函數之新同數爲$\text{戊}' = \text{戊} \perp \text{巳辛} \perp \text{午辛}^{\text{二}} \perp \text{未辛}^{\text{三}} \perp \cdots\cdots$，其變數與函數之變比例爲$\dfrac{\text{辛}}{\text{戊}'\text{丅戊}} = \text{巳} \perp \text{午辛} \perp \text{未辛}^{\text{二}} \perp \text{申辛}^{\text{三}} \perp \cdots\cdots$。此式中之初項巳爲變比例之限，無論何種函數，其限皆可依此比例求之。

由以上所論變數之長數與函數之長數相關之理，可于算學中開出兩種極廣大極精微之法。

其第一種爲有任何變數之任何函數而求其變數與函數變比例之限。

其第二種爲有任何變數與函數變比例之限而求其函數之原式。

此二種法，若細攷其根源，即奈端所謂正流數、反流數也；亦即來本之所謂微分算術、積分算術也；又即拉果闌諸所謂函數變例也。

論各種函數求微分之公法

第五款　若函數之式爲戊＝天，令天變爲天⊥辛，則函數之新同數必爲戊′＝戊⊥二天辛⊥辛^{二}，其與原同數之較爲戊′丅戊，即二天辛⊥辛^{二}，此式之初項二天辛，名之曰溢率。