

微積溯源序

微積溯源八卷，前四卷爲微分術，後四卷爲積分術，乃算學中最深之事也。余既與西士傅蘭雅譯畢代數術二十五卷，更思求其進境，故又與傅君譯此書焉。先是咸豐年間，曾有海寧李壬叔與西士偉烈亞力譯出代微積拾級一書，流播海內。余素與壬叔相友，得讀其書，粗明微積二術之梗概。所以又譯此書者，蓋欲補其所略也。書中代數之式甚繁，校算不易，則劉君省菴之力居多。

今刻工已竣矣，故序之，曰：吾以爲古時之算法惟有加減而已。其乘與除乃因加減之不勝其繁，故更立二術以使之簡易也。開方之法，又所以濟除法之窮者也。蓋算學中自有加減乘除開方五法，而一切淺近易明之數，無不可通矣。惟人之心思智慮日出不窮，往往以能人之所不能者爲快。遇有窒礙難通之處，輒思立法以濟其窮。故有減其所不可減而正負之名不得不立矣；除其所不能除而寄母通分之法又不得不立矣。代數中種種記號之法皆出於不得已而立者也，惟每立一法必能使繁者爲簡，難者爲易，遲者爲速，而算學之境界藉此得更進一層。如是屢進不已而所立之法於是乎日多矣。微分積分者，蓋又因乘除開

方之不勝其繁，且有窒礙難通之處，故更立此二術以濟其窮，又使簡易而速者也。試觀圓徑求周、真數求對等事，雖無微分積分之時，亦未嘗不可求，惟須乘除開方數十百次。其難有不可言喻者，不如用微積之法理明而數捷也。然則謂加減乘除開方代數之外者，更有二術焉，一曰微分，一曰積分可也。其積分術爲微分之還原，猶之開平方爲自乘之還原、除法爲乘之還原、減法爲加之還原也。然加與乘其原無不可還，而微分之原有可還有不可還，是猶算式中有不可開之方耳，又何怪焉。如必曰加減乘除開方已足供吾之用矣，何必更究其精？是舍舟車之便利而必欲負重遠行也。其用力多而成功少，蓋不待智者而辨矣。

同治十三年九月十八日，金匱華蘅芳序。

微積溯源卷一

論變數與函數之變比例

第一款 用代數以解任何曲線，其中每有幾種數，其大小恆有定率者，如橢圓之長徑、拋物線之通徑、雙曲線之屬徑之類是也。

又每有幾種數可有任若干相配之同數，其大小恆不能有定率者，如曲線任一點之縱橫線是也。

數既有此兩種分別，則每種須有一總名以賅之，故名其有定之數曰常數，無定之數曰變數。

凡常數之同數不能增亦不能損。

凡變數之同數，能變爲大，亦能變爲小。故其從此同數變至彼同數之時，必歷彼此二數間最小最微之各分數。

如平圓之半徑爲常數，而其任一段之弧或弧之弦矢切割各線、及各線與弧所成之面，

皆謂之變數。

橢圓之長徑短徑皆爲常數，而其曲線之任一段或曲線上任一點之縱橫線，並其形內形外所能作之任何線或面或角，皆謂之變數。

拋物線之通徑爲常數，而其曲線之任一段或任一點之縱橫線、或弧與縱橫線所成之面，皆謂之變數。他種曲線亦然。

凡常數，恆以甲乙丙丁等字代之。凡變數，恆以天地人等字代之。

第二款 若有彼此二數皆爲變數，此數變而彼數因此數變而亦變者，則彼數爲此數之函數。

如平圓之八線皆爲弧之函數。若反求之，亦可以弧爲八線之函數。

又如重學中令物體前行之力，與其物所行之路，皆爲時刻之函數。

如有式 $\frac{\text{甲} \perp \text{天}}{\text{甲} \perp \text{天}}$ ，此式中甲爲常數，天爲自主之變數，地爲天之函數。故地之同

數能以天與甲明之。

如有式 $\frac{\text{地} \perp \text{一}}{\text{甲}(\text{地} \perp \text{一})}$ ，此式中甲與一皆爲常數，地爲自主之變數，天爲地之函數，

故天之同數可以地與甲及一明之。

如有式 $\text{戊} = \frac{\text{甲} \perp \text{乙} \text{天} \perp \text{丙} \text{天} \perp \text{戊} \text{戊}}{\sqrt{\text{甲} \perp \text{乙} \text{天} \perp \text{天} \perp \text{戊} \text{戊}}} = \frac{\text{丙} \perp \text{天} \perp}{\text{甲} \perp \sqrt{\text{乙} \text{天}}}$ ，其甲

乙丙爲常數，天爲自變之數，而戊皆爲天之函數。

凡函數之中，可以有數箇自主之變數。

如有式 $戊 = 甲^2 \cdot 乙 \cdot 丙^2$ ，則天與地皆爲自主之變數，戊爲天地兩變數之函數。

凡變數之函數，其形雖有多種，然每可化之，使不外乎以下數類 $甲^2$ 、 $甲^2 \cdot 乙$ 、 $甲^2 \cdot 乙^2$ 、 $甲^2 \cdot 乙^2 \cdot 丙^2$ 等類是也。

凡函數爲 $甲^2$ 之類，其指數爲常數，則可從天之卯方，用代數之常法化之。而以有窮之項明其函數之同數。故謂之代數函數，亦謂之常函數。

如有式 $戊 = 甲^2 \cdot 乙 \cdot \sqrt{\frac{甲^2 \cdot 丙^2}{乙^2}}$ ，此種函數，其戊之同數可用加減乘除開方等法而得之。

凡函數爲 $甲^2$ 、 $甲^2 \cdot 乙$ 之類，則其函數之同數不能以有窮之項明之。故謂之越函數。越者，超越於尋常之意也。

凡函數爲 $甲^2$ 、 $甲^2 \cdot 乙$ 及 $甲^2 \cdot 乙^2$ 、 $甲^2 \cdot 乙^2 \cdot 丙^2$ 之類，其函數之同數皆可以平圓之各線明之。故謂之圓函數，亦謂之角函數。

以上三種函數常函數、越函數、圓函數也。，若已知天之同數，則其函數之同數即可求得。故

名此三種函數爲陽函數。因其顯而易明，故謂之陽函數。

更有他種函數，必先解其方程式，令函數中之各變數分開，然後能求其同數者。

如有式 $\sqrt{x} = \frac{x+1}{x-1}$ ，其戊爲天之函數，如欲求其戊與天相配之同數，必先解其二

次方程式始能通。

此種之式名曰天之陰函數。因其雜糅未明，故謂之陰函數。反之亦可云天爲戊之陰函數。

如解其方程式爲 $\sqrt{x} = \frac{x+1}{x-1}$ ，則戊變爲天之陰函數。

整理者註：右最後一句云戊變爲天之陰函數，這顯而易見是錯誤的。原文大英百科全書卷第九之 Fluxions 作 explicit function，即陽函數，此當爲譯者譯錯。目前由於校勘凡例未定，暫留此字，待討論後決定修改與否。

昔代數之家，凡遇須用開平方之處，每于其式之左旁作一根字以記之，如 \sqrt{x} 爲天之平方根。後又變通其法，而以根號記之，如 \sqrt{x} 爲天之平方根。此代數之例也。茲可仿照此例，凡遇某變數之函數，亦用一號以記之。所以凡有任何變數之函數，皆可書一函字于其變數之旁，以爲識別。

如天之函數則作 $\text{函}x$ ，或作 $\text{函}(x)$ ，皆言天之函數也。

所以凡見變數之左旁有一函字者，其函字並非代表天之倍數，其意謂是某變數之函數

也。

用此法則可將 $\text{成} = \text{天}^{\text{卯}}$ 、 $\text{成} = \text{甲}^{\text{天}}$ 、 $\text{成} = \text{對}^{\text{天}}$ 、 $\text{成} = \text{正}^{\text{弦}^{\text{天}}}$ 、 $\text{成} = \text{餘}^{\text{弦}^{\text{天}}}$ 各種之式以一語賅之，謂之 $\text{成} = \text{函}^{\text{天}}$ 或 $\text{成} = \text{函}(\text{天})$ 。

若函數從兩箇變數而成，其天與地皆爲自主之變數，其式如 $\text{成} = \text{甲}^{\text{天}} \text{乙}^{\text{地}}$ 或 $\text{成} = \text{函}(\text{天}, \text{地})$ 者，則可以 $\text{成} = \text{函}(\text{天}, \text{地})$ 別之。函數爲多箇變數所成者，仿此推之。

惟函數只指其變數言之，若甲乙丙丁各常數。雖多不論。

第三款

凡觀此書者，必先明變數與函數變比例之限。如幾何原本中證明平圓之面積必比其外切多等邊形之面積微小，若其外切多等邊形之邊愈多，則其面積愈近于平圓之面積。所以可設平圓之面積爲任何小，而切其圓外爲多等邊形，可使多等邊形之面積與平圓之面積較其數甚小于所設之圓面積；再設其多等邊形之面積爲級數，而其邊之變率可每變多若干倍，則其多等邊形之面積必漸與平圓之面積相近而以平圓爲限。雖切于圓外之多邊形其邊任變至若何多，其面積總不能等于平圓之面積。然其級數之總數可比平圓之面積所差甚微，其較數之小，可小至莫可名言。

若用此法于圓內容多等邊形，則其多等邊形之面積亦以平圓之面積爲限。總言之，凡平圓之周爲其內容外切多等邊形之限。

如代數術第二百六十六款言，如令甲代平圓之任何弧，則 $\frac{\text{正弦甲}}{\text{甲}}$ 恆大于半徑，而 $\frac{\text{正切甲}}{\text{甲}}$ 恆小于半徑。然令其弧爲任何小，則其式之同數必甚近于半徑，而其所差之數可小至不能以言語形容。所以此兩數中間之數爲一。即半徑也。故其公限亦爲一。

由此可見凡弧與弦切，三者之中取其二以相較，其比例之限必相等。

如代數術中亦會證甲弧爲 $\frac{\text{正弦甲}}{\text{甲}}$ 與 $\frac{\text{正切甲}}{\text{甲}}$ 兩式之限，惟其卯必爲任何大。

依代數術第五十六款之例 $1 - \frac{1}{\text{天}} + \frac{1}{\text{天}^2} - \frac{1}{\text{天}^3} + \frac{1}{\text{天}^4} - \dots + \frac{1}{\text{天}^{\text{卯}-1}} - \frac{1}{\text{天}^{\text{卯}}}$ 即 $\frac{1 - \frac{1}{\text{天}^{\text{卯}}}}{1 - \frac{1}{\text{天}}}$ 。若天變至小

于一，而卯大至無窮，則 $\frac{1}{\text{天}} = 0$ ，而式變爲 $\frac{1 - \frac{1}{\text{天}}}{1}$ 。所以任取其級數若干項之和，

必小于 $\frac{1 - \frac{1}{\text{天}}}{1}$ 。惟其項愈多，則與 $\frac{1 - \frac{1}{\text{天}}}{1}$ 愈相近，而其所差之數可小至莫可名言。

則可見 $\frac{1 - \frac{1}{\text{天}}}{1}$ 必爲其諸級數之限。

若依二項例之式 $\left(1 - \frac{1}{\text{天}}\right)^{\text{卯}} = 1 - \frac{1}{\text{天}} + \frac{1 \cdot 2}{\text{天}^2} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{\text{天}^3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{\text{天}^4} - \dots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{\text{天}^5} - \dots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{\text{天}^6} - \dots$ ，其卯之同數無論如何，必合于理。惟卯若爲大數，則其各項之

乘數一、二、三之類與一相較之差甚小，若卯愈大，則其差愈微；若令卯爲任意大，則各乘數可略等於一，所以得

$$\left(\frac{1}{\text{天}} \right)^{\text{卯}} = \frac{1}{\text{天}} \cdot \frac{1}{\text{天}} \cdot \frac{1}{\text{天}} \cdots \frac{1}{\text{天}}$$

……
 ①。

曾在代數術第一百七十七款中證^①式之右邊爲由函數 δ 而成。其戊之同數因爲 $\frac{1}{1-\delta}$ ，即 $\frac{1}{1-\delta}$ 對數之根也。所以卯若愈大則 $\left(\frac{1}{1-\delta}\right)$ 必愈與 δ 相近，而其限爲 δ 。

如今天 = 1, 則 $\left(1 - \frac{\rho}{\tau}\right)^{\rho\tau}$ 之限爲戊, 即 $\left(1 - \frac{\rho}{\tau}\right)^{\rho\tau} - \text{戊} = 1.71821818$, 故其函數爲常數。

第四款 惟因函數之同數本從變數而生，故變數之同數與函數之長數比則爲

$$\frac{\text{辛}}{\text{戊}} = \frac{\text{丁}}{\text{戊}}$$

設函數之式爲 $y = \frac{1}{x}$ ，今天長數爲 x ，而以函數之新同數爲 y ，則

辛之各方之倍數，則函數 $\text{戊} = \text{天}^{\text{卯}}$ 之新同數必爲 $\text{戊}' = \text{辛}^{\text{一}} \text{巳}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{午}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{未}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{申}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{酉}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{戌}^{\text{一}} \dots$ 。由是知函數之新同數必爲級數，其初項 戊 爲函數之原同數，其餘各項爲天之長數辛之各整方，以巳午未申之類爲各倍數，其各倍數皆爲天之別種函數，其式亦從本函數而生。

由以上各式又可見函數爲 $\text{戊} = \text{天}^{\text{一}} \text{戊} = \text{天}^{\text{二}} \text{戊} = \text{天}^{\text{三}} \text{戊} = \text{天}^{\text{四}} \text{之類}$ ，則其變數與函數之變比例必爲 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}' \text{丁} \text{戊}} = \frac{\text{二天}^{\text{一}} \text{辛}}{\text{戊}' \text{丁} \text{戊}} = \frac{\text{三天}^{\text{一}} \text{一三天}^{\text{一}} \text{辛}}{\text{戊}' \text{丁} \text{戊}} = \frac{\text{四天}^{\text{一}} \text{一六天}^{\text{一}} \text{辛}}{\text{戊}' \text{丁} \text{戊}} \text{之類}$ 。總之若以卯爲天之整指數，則 $\text{戊} = \text{天}^{\text{卯}}$ 之變比例必爲 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}' \text{丁} \text{戊}} = \text{巳}^{\text{一}} \text{午}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{未}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{申}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{酉}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{戌}^{\text{一}} \dots$ 。由此可見，變數天之長數與函

數 $\text{天}^{\text{卯}}$ 之長數其變比例 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}' \text{丁} \text{戊}}$ 之同數 $\text{巳}^{\text{一}} \text{午}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{未}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{申}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{酉}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{戌}^{\text{一}} \dots$ 可分之爲兩式，其一式爲 巳 ，此式與天之長數辛無相關；又一式爲 $\text{辛}^{\text{一}} \text{午}^{\text{一}} \text{未}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{申}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{酉}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{戌}^{\text{一}} \dots$ 。即 $\text{辛}^{\text{一}} (\text{午}^{\text{一}} \text{未}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{申}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{酉}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{戌}^{\text{一}} \dots)$ 。此式因以辛爲乘數，故辛若變小，其數亦必隨辛而變小。如令辛爲任何小，則此式之數可小至甚近于 \bigcirc 。故此數可以不計，而以巳爲變比例之限。

論各種函數求微分之公法

若函數之式爲 $y = ax^2$ ，令 x 變爲 $2x$ ，則函數之新同數必爲 $4y = 4ax^2 = 4a(2x)^2$ ，其與原同數之較爲 $4y - y = 3y$ ，即 $3ax^2$ ，此式之初項 $3ax^2$ ，名之曰溢率。依同理推之，若函數之式爲 $y = ax^3$ ，令 x 變爲 $2x$ ，則函數之新同數爲 $8y = 8ax^3 = 8a(2x)^3$ ，其與原同數之較爲 $7y = 7ax^3$ ，即 $7ax^3$ ，此式之初項 $7ax^3$ ，名之曰溢率。其初項 $7ax^3$ 爲溢率。

總言之，凡天之函數無論爲某方，恆可以 μ 代其天，而變其函數之同數爲 ν ，而取其初項 μ 爲溢率。

準此推之，則知天之溢率即爲其長數辛。惟因函數之溢率每藉天之長數而生，故微分術中，恆以 $\frac{\Delta}{\Delta x}$ 代天之溢率。其 Δ 號者，非天之倍數，不過是天之溢率耳。溢率之名，本爲流數術中所用。而 Δ 號者，即微字之偏旁，故微分之術用之。

如有式 $y = x^2$ ，則 $\Delta y = 2x \Delta x$ 。此式之意謂 y 之微分等于 $2x$ 乘 x 之微分。猶言函數 y 之溢率等于以 $2x$ 乘其 x 之溢率也。如有式 $y = x^3$ ，則 $\Delta y = 3x^2 \Delta x$ 。此式之意謂 y 之微分等于以 $3x^2$ 乘 x 之微分。猶言函數 y 之溢率等于以 $3x^2$ 乘其 x 之溢率也。

第六款 惟因每遇 $y = x^2$ ，則 $\Delta y = 2x \Delta x$ ，所以可寫之如 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$ 。此爲天微分之倍數，亦謂之微係數。

又依前法推之，如函數之式爲 $y = x^3$ ，則 $\Delta y = 3x^2 \Delta x$ ，而 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2$ 。其 $3x^2$ 爲原函數 $y = x^3$ 之微係數。

總言之，無論何種函數之微係數，皆可以 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 代之。而函數之新同數爲 $y + \Delta y$ ， $x + \Delta x$ ，所以 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$ ，其已爲天之他函數，其形每隨函數之式而變。如之 y 之同數爲何式，則其已之同數即易求得。

凡函數之欲求微分者，先于其式之左旁作一 \times 號以記之。如有 $[(\text{甲} \perp \text{天})(\text{乙} \dashv \text{天} \dashv)]$ 式，欲求其微分，則可先作 $\times[(\text{甲} \perp \text{天})(\text{乙} \dashv \text{天} \dashv)]$ 。

凡函數之欲求微係數者，于其式之左旁作 \times 號，又以 \times 代爲其分母。如有 $[(\text{甲} \perp \text{天})(\text{乙} \dashv \text{天} \dashv)]$ 式，欲求其微係數，則作 $\frac{\times[(\text{甲} \perp \text{天})(\text{乙} \dashv \text{天} \dashv)]}{\times \text{天}}$ 。

從以上各款諸說，易知求微分之公法。

法曰：無論天之任何函數，欲求微分，則以 \times 代其原式中之天而詳之。依辛之整方數自小而大序之，取其初有辛之項，而以 \times 代其辛即得。

如有式 $\text{戌} = \text{甲} \text{天} \perp \text{乙} \text{天} \dashv$ ，欲求其微係數，則以 $\text{天} \perp \times$ 代其天，而令函數之新同數

$$\begin{aligned} \text{爲戌}' & \left\{ \begin{aligned} &= \text{甲}(\text{天} \perp \times) \perp \text{乙}(\text{天} \perp \times) \dashv \\ &= \text{甲} \text{天} \perp \text{乙} \text{天} \dashv \perp (\text{甲} \perp \text{天} \perp \text{乙} \text{天}) \times \perp \text{乙} \times \dashv \\ &= \text{戌} \perp (\text{甲} \perp \text{天} \perp \text{乙} \text{天}) \times \perp \text{乙} \times \dashv \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

取其初有辛之項 $(\text{甲} \perp$

$$\text{乙} \text{天}) \times \perp \times \text{天} \text{代其辛，即得} \times \text{戌} = (\text{甲} \perp \text{天} \perp \text{乙} \text{天}) \times \text{天} \text{，故其} \frac{\times \text{天}}{\times \text{戌}} = \text{甲} \perp \text{天} \perp \text{乙} \text{天} \text{。}$$

第七款 上款之法，必令天變爲 \times ，而詳其函數之同數爲級數，此乃論其立法之理當如是也。惟求得級數之後，所用者僅爲其辛一方之項，則但能求得此項已足用矣。前于第

四款中言此項之倍數爲變數與函數變比例之限，又于第六款中言此項之倍數謂之微係數。然則求函數之微係數與求變數與函數變比例之限，其法本無異也。

如有式 $\text{戊} = \frac{\text{天}}{\text{甲}^2}$ ，則 $\text{戊}' = \frac{\text{天} \uparrow \text{辛}}{\text{甲}^2}$ 。而 $\text{戊} \downarrow \text{戊}' = \frac{\text{天}}{\text{甲}^2} - \frac{\text{天} \uparrow \text{辛}}{\text{甲}^2}$ ，即 $\text{戊} \downarrow \text{戊}' = \frac{\text{天}(\text{天} \uparrow \text{辛})}{\text{甲}^2}$ ，故其變比例之式爲 $\frac{\text{辛}}{\text{戊} \downarrow \text{戊}'} = \frac{\text{天}(\text{天} \uparrow \text{辛})}{\text{天} \uparrow \text{辛}}$ 。惟此式可不待詳爲級數而始得其變比例之限，因可見辛愈小，則其式愈近于 $\frac{\text{天}^2}{\text{甲}^2}$ ，故此式必卽爲 $\frac{\text{天}}{\text{甲}^2}$ 之同數，

所以得 $\frac{\text{天}}{\text{甲}^2} = \frac{\text{天}^2}{\text{甲}^2 \text{天}}$ 。

若以戊爲任何函數之原同數，而以 $\text{天} \uparrow \text{辛}$ 代其天，則其函數之新同數爲 $\text{戊}' = \text{戊} \uparrow \text{辛} \uparrow \text{辛}^2 \uparrow \text{辛}^3 \uparrow \dots\dots$ ，即得 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}' \downarrow \text{戊}} = \text{辛} \uparrow \text{辛}^2 \uparrow \text{辛}^3 \uparrow \dots\dots$ 。惟

因 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}' \downarrow \text{戊}}$ 之限爲辛，故得 $\frac{\text{天}}{\text{甲}^2} = \text{辛}$ ，而 $\frac{\text{天}}{\text{甲}^2} = \text{辛} \uparrow \text{天}$ 。

由此得一解曰：凡微分之術，其意專爲求任何變數與函數同時變大之限耳。

凡求任何函數之微分，不過將一尋常之代數式另用他法以變化之。因其變化之法與代數中常用之法異，則不得不另有一名以別之，故謂之微分術。

惟此理，若反言之而謂相等之微係數必從相等之函數而生，則不盡然。

如函數之式爲 $\alpha = \alpha + \beta$ ，令 α 變爲 $\alpha + \delta$ ，而 β 變爲 $\beta + \epsilon$ ，則 $\alpha = \alpha + \beta + \delta + \epsilon$
 $\beta = \beta + \epsilon$ ，故得 $\frac{\delta}{\epsilon} = 1$ 。觀此可知，其常數之項 α 不能入變比例之限

內，故其微係數必與 $\alpha = \beta$ 之微係數無異。惟微係數 β 既能屬於本函數 $\alpha + \beta$ ，又能屬於他函數 β ，所以有下例。

例曰：凡變數與常數相加減之函數，其微係數中不見其加減之常數。惟變數與常數相乘除者，則其微係數中有常數爲倍數。

求兩函數相乘積之微分

第十款 凡變數之函數，無論其形如何，皆可以第六款之公法求其微分。然不如每種異形之函數各設一專法以求之，則更簡捷。

如有式 $\alpha = \alpha + \beta$ ，其未與 α 各爲天之函數。今欲得一法專能求 α 、 β 相乘積之微分，若令 α 變爲 $\alpha + \delta$ ，則未、 β 二函數必變爲 $\alpha + \delta + \epsilon$ ， $\beta = \beta + \epsilon$ ， $\alpha = \alpha + \delta + \epsilon$ ， $\beta = \beta + \epsilon$ ，其已、 α 爲

由申函數所得之天之他函數。

再令 $\text{戊}' = \text{米}'\text{母}'$ ，則依法得 $\text{戊}' = \text{米}'\text{母}' = \text{米}\text{申}\text{上}(\text{米}\text{巳}'\text{上}\text{申}\text{巳})\text{辛}\text{上}(\text{米}\text{午}'\text{上}\text{巳}\text{巳}'\text{上}\text{母}\text{午})\text{辛}\text{上}\dots\dots$ 。以戊代其 $\text{米}\text{母}$ ，移項而以辛約之，則得 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}'\text{丁}\text{戊}} = \text{米}\text{巳}'\text{上}\text{母}\text{巳}\text{上}$

($\text{米}\text{午}'\text{上}\text{巳}\text{巳}'\text{上}\text{母}\text{午})\text{辛}\text{上}\dots\dots$ 。此式中之 $\text{米}\text{巳}'$ 與 $\text{母}\text{巳}$ 兩項乃天之他函數，而與辛無涉者，其餘各項俱有辛之各方為乘數。設辛為甚微，則其所乘之眾項亦甚微，故其變比例之限為 $\frac{\text{戊}'\text{丁}\text{戊}}{\text{辛}} = \text{米}\text{巳}'\text{上}\text{母}\text{巳}$ 。惟因 $\text{巳} = \frac{\text{米}'\text{丁}\text{米}}{\text{辛}}$ 、 $\text{巳}' = \frac{\text{母}'\text{丁}\text{母}}{\text{辛}}$ ，故可

依第六款之法以 $\frac{\text{米}'\text{丁}\text{米}}{\text{辛}}$ 代其 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}'\text{丁}\text{戊}}$ ；以 $\frac{\text{米}'\text{丁}\text{米}}{\text{辛}}$ 代其 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}'\text{丁}\text{戊}}$ ；以 $\frac{\text{米}'\text{丁}\text{米}}{\text{辛}}$ 代其 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}'\text{丁}\text{戊}}$ 。則得 $\frac{\text{米}'\text{丁}\text{米}}{\text{辛}} = \text{米}\text{巳}'\text{上}\text{母}\text{巳}$ ，而 $\frac{\text{米}'\text{丁}\text{米}}{\text{辛}} = \text{米}\text{巳}'\text{上}\text{母}\text{巳}$ 。故得專法如左：

凡求同變彼此兩函數相乘積之微分，法將此函數乘彼函數之微分，又將彼函數乘此函數之微分，而以乘得之兩式相加即得。

求多函數連乘積之微分

第十一款 前款論函數之式爲 $\frac{戊}{戊} = \frac{未}{未} \cdot \frac{申}{申}$ ，則 $\frac{戊}{戊} = \frac{未}{未} \cdot \frac{申}{申}$ ，所以 $\frac{戊}{戊} = \frac{未}{未} \cdot \frac{申}{申}$ 。
 由此推之，如戊爲三箇同變數之函數連乘如 $\frac{未}{未} \cdot \frac{申}{申} \cdot \frac{亥}{亥}$ ，可令其 $\frac{未}{未} = \frac{申}{申}$ ，則亦能爲 $\frac{戊}{戊}$ ，
 $\frac{未}{未} \cdot \frac{申}{申} = \frac{未}{未} \cdot \frac{申}{申}$ 。惟因 $\frac{申}{申} = \frac{亥}{亥}$ ，可依同例得 $\frac{戊}{戊} = \frac{未}{未} \cdot \frac{申}{申} \cdot \frac{亥}{亥}$ ，
 所以 $\frac{戊}{戊} = \frac{未}{未} \cdot \frac{申}{申} \cdot \frac{亥}{亥}$ 。若仍將 $\frac{未}{未}$ 代還其戊而以常法化之，則爲 $\frac{戊}{戊} =$
 $\frac{戊}{戊} \cdot \frac{未}{未} \cdot \frac{申}{申} \cdot \frac{亥}{亥}$ 。故得專法如左：

凡求同變數之若干函數連乘積之微分，法以各本函數之微分與其餘之各他函數連乘，
 而以各乘得之式相加卽得。

此法易用以總式以明之。無論其同變數之函數有若干數連乘，皆可以一例推之：

如多函數連乘之式爲 $\frac{未}{未} \cdot \frac{申}{申} \cdot \frac{亥}{亥}$ ，則其微分之式爲 $\frac{未}{未} \cdot \frac{申}{申} \cdot \frac{亥}{亥} = \frac{未}{未} \cdot \frac{申}{申} \cdot \frac{亥}{亥}$

$$\frac{未}{未} \cdot \frac{申}{申} \cdot \frac{亥}{亥} = \frac{未}{未} \cdot \frac{申}{申} \cdot \frac{亥}{亥}$$

求變數之分函數微分

第十二款 若有分數之式，其母子爲同變數之各函數，則欲得其求微分之專法，可令 $\frac{u}{v}$ 爲

則未_二戊申，而_二未_二戊申_一。乃以其戊之同數_未代其戊，則_二未_二

$\frac{\text{申}}{\text{上申}} \text{戊} \text{而} \text{戊} = \frac{\text{申}}{\text{申}} \text{未} \text{丁未} \text{申} \text{申}$ 。故得專法如左：

凡同變量之函數，若爲分數，則求微分之法可將分母乘其分子之微分，乃以分子乘分母之微分減之，而以分母之平方約之。

此法亦可用一總式以明之。

[illegible]

求變數之分函數微分

而 $\frac{\text{亥地}}{\text{子(亥地)}} = \frac{\text{亥}}{\text{子}} \frac{\text{地}}{\text{亥地}}$ ，故得 $\frac{\text{戌}}{\text{子戌}} = \frac{\text{未}}{\text{子未}} \frac{\text{申}}{\text{子申}} \frac{\text{酉}}{\text{子酉}} \frac{\text{亥}}{\text{子亥}} \frac{\text{地}}{\text{子地}}$ 。由

是知若有分數之函數，其分母分子爲任若干同變數之函數連乘之積如 $\frac{\text{亥地}}{\text{未申酉}}$ 者，可

以 $\frac{\text{亥地}}{\text{未申酉}} = \frac{\text{亥地}}{\text{未申酉}} \left[\frac{\text{未}}{\text{子未}} \frac{\text{申}}{\text{子申}} \frac{\text{酉}}{\text{子酉}} \frac{\text{亥}}{\text{子亥}} \frac{\text{地}}{\text{子地}} \right]$ 之式明之。

第十三款 茲欲攷任何函數地之任何乘方求微分之專法。其地或爲自變之數，或爲他變之函數，皆可。

先設 $\text{戌} = \text{地}^{\text{卯}}$ ，其卯爲任何整數，則其函數之詳式必有卯箇地連乘如 $\text{戌} = \text{地} \cdot \text{地} \cdot \text{地} \cdot \text{地} \cdots \cdots$ 。則依第十一款之例， $\frac{\text{戌}}{\text{子戌}} = \frac{\text{地}}{\text{子地}} \frac{\text{地}}{\text{子地}} \frac{\text{地}}{\text{子地}} \frac{\text{地}}{\text{子地}} \cdots \cdots$ ，其項必有卯數。

故 $\frac{\text{戌}}{\text{子戌}} = \frac{\text{地}}{\text{卯地}}$ ，而得 $\text{子戌} = \frac{\text{地}}{\text{卯地}} \text{戌} = \text{卯地}^{\text{卯}-1} \text{地}$ 。

設函數爲分指數如 $\text{戌} = \text{地}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}}$ ，則 $\text{戌}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}} = \text{地}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}} \cdot \frac{\text{卯}}{\text{寅}}} = \text{地}^{\frac{\text{卯}^2}{\text{寅}^2}}$ 。若依第九款之例，則得 $\text{卯戌} = \text{地}^{\frac{\text{卯}^2}{\text{寅}^2}-1} \text{子戌} =$

$\text{寅地}^{\frac{\text{卯}^2}{\text{寅}^2}-1} \text{子地}$ ， $\text{卯子戌} = \frac{\text{卯}}{\text{寅}} \times \frac{\text{戌}}{\text{寅地}^{\frac{\text{卯}^2}{\text{寅}^2}-1}} \text{子地}$ 。惟因 $\text{戌} = \text{地}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}}$ 、 $\text{戌}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}-1} = \text{地}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}-1} \text{寅地}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}}$ ，所

以 $\frac{\text{戌}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}-1}}{\text{寅地}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}-1}} = \text{地}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}-1}$ ， $\text{卯子戌} = \frac{\text{卯}}{\text{寅}} \text{地}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}-1} \text{子地}$ 。

再設卯爲負指數，無論爲整數爲分數，則 $\text{戌} = \text{地}^{\text{卯}}$ ，即 $\text{戌} = \frac{\text{地}^{\text{卯}}}{1}$ 。若依第十二款之

例，因其分子爲常數，故其分子之微分當爲〇，而得 $\frac{\text{地}^{二卯}}{\text{卯地}^{卯丁一} \times \text{地}}$ ，卽 $\frac{\text{戊}}{\text{卯地}^{卯丁一} \times \text{地}}$ 。

合觀本款之各式，可見地之指數卯無論爲正爲負爲整爲分，其微分之式必爲 $\frac{\text{戊}^{卯}}{\text{卯地}^{卯丁一} \times \text{地}}$ 。故得專法如左：

凡求函數乘方之微分，法將其原指數以一減之爲新指數，而以原指數爲其倍數，又以變數之微分乘之卽得。惟其原函數若本有常數爲倍數者，則其原倍數必仍在乘數之中。

如函數之式爲 $\text{戊}^{卯} = \text{甲天}^{卯}$ ，則其微分之式爲 $\frac{\text{戊}^{卯}}{\text{卯地}^{卯丁一} \times \text{天}}$ 。

求函數諸乘方之微分更有簡便之法，可藉代數術第一百六十款與一百六十一款之二項例而得。所以于此不論者，因二項之例亦可由微分而得，余欲用微分之術證明二項之例以便于用，故俟後詳論之。

求變數平方根之微分

用前法已能求各負方之微分，惟因 \sqrt{x} 為微分術中常見之式，所以必更設一最易之專法以便于用。

依本款求諸乘方微分之法， $\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ，即 $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ，

即 $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 。所以得專法如左：

凡求函數平方根之微分，法以函數之微分爲實而二倍其原函數之平方根以約之即得。

求重函數之微分

第十四款 設有地爲天之函數而戊爲地之函數，欲求其戊與天相配之微分。

令天變其同數爲 x ，則地變爲 y ， $y = f(x)$ 。乃令 x 變爲 $x + \Delta x$ ，則地變爲 $y + \Delta y$ 。惟因戊爲地之函數，若地變爲 $y + \Delta y$ ，則戊變爲 $z + \Delta z = f(y + \Delta y)$ 。其 $y, \Delta y, z, \Delta z$ 各數爲地之他函數，

二十三

求多項函數之微分

第十五款 如有同變數之若干函數合成一多項式，則求此多項式之微分亦可設一專法。

設亥地人為變數天之任何函數，欲求 $\text{戊}' = \text{甲} \text{乙} \text{亥} \text{丙} \text{地} \text{丁} \text{戌} \text{人}$ 之微分，若天變為 $\text{天} \text{丁} \text{辛}$ 而其同時中亥變為 $\text{亥} \text{上} \text{巴} \text{辛} \text{上} \text{午} \text{辛}'' \text{上} \dots \dots$ ，地變為 $\text{地} \text{上} \text{巴} \text{辛} \text{上} \text{午} \text{辛}'' \text{上} \dots \dots$ ，人變為 $\text{人} \text{上} \text{巴} \text{辛} \text{上} \text{午} \text{辛}'' \text{上} \dots \dots$ ，戊變為 $\text{戊}'$ ，故得

$$\text{戊}' = \left\{ \begin{array}{l} \text{甲} \text{上} \text{乙} \text{亥} \text{上} \text{丙} \text{地} \text{丁} \text{戌} \text{人} \\ \text{上} (\text{乙} \text{巴} \text{上} \text{丙} \text{巴}' \text{上} \text{戌} \text{巴}'') \text{辛} \\ \text{上} (\text{乙} \text{午} \text{上} \text{丙} \text{午}' \text{上} \text{戌} \text{午}'') \text{辛}'' \\ \text{上} \dots \dots \end{array} \right.$$

。如以戊代其右邊之上層，移其項而以辛約

之，則得已知 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}' \text{丁} \text{戌}} = \text{乙} \text{巴} \text{上} \text{丙} \text{巴}' \text{丁} \text{戌} \text{巴}'' \text{上} (\text{乙} \text{午} \text{上} \text{丙} \text{午}' \text{上} \text{戌} \text{午}'') \text{辛} \text{上} \dots \dots$ 。

觀其各限可見 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}' \text{丁} \text{戌}}$ 為戊之微係數，而巴與巴'及巴''為亥與地及人之微係數。所以

其 $\frac{\text{天}}{\text{戊}} = \frac{\text{天}}{\text{乙亥}} \frac{\text{天}}{\text{上丙}} \frac{\text{天}}{\text{地丁}} \frac{\text{天}}{\text{戊人}}$ ，而 $\text{天} = \text{乙亥} \frac{\text{天}}{\text{上丙}} \frac{\text{天}}{\text{地丁}} \frac{\text{天}}{\text{戊人}}$ 。故得專法如左：

凡有同變數之各函數和較而成之多項式，則其總函數之微分必等于各函數微分之和較，而其常數之項恆變爲○。

代函數求微分各題

第十六款 茲設數題以明之。

一題 設有 $\text{天} = \text{甲天}^{\text{五}}$ ，欲求其微分之式。

此式與公式 $\text{天} = \text{甲天}^{\text{四}}$ 爲一類，所以可用第十三款之法求其微分得 $\text{天} = \text{五甲天}^{\text{四}} \text{天}$ 。

二題 設有 $\text{天} = \frac{\text{天}^{\text{五}}}{\text{甲}}$ ，欲求其微分之式。

惟因 $\text{天} = \frac{\text{天}^{\text{五}}}{\text{甲}}$ 即 $\text{天} = \text{甲天}^{\text{五}}$ ，故如法求得 $\text{天} = \text{丁五甲天}^{\text{六}} \text{天}$ ，即 $\text{天} =$

$\frac{\text{天}^{\text{六}}}{\text{丁五甲天}}$ 。

代函數求微分各題

三題 設有 $\text{戊} = \sqrt{\text{天}^{\frac{2}{3}}}$ ，欲求其微分之式。

$$\begin{aligned} \text{惟因 } \text{戊} &= \sqrt{\text{天}^{\frac{2}{3}}} \quad \text{即 } \text{戊} = \text{天}^{\frac{1}{3}}, \quad \text{故如法求得 } \text{戊} = \frac{1}{3} \text{天}^{\frac{1}{3}} \text{天}, \quad \text{即。} \text{戊} = \\ &= \frac{1}{3} \text{天} \sqrt{\text{天}}。 \end{aligned}$$

四題 設有 $\text{戊} = \text{甲} \text{天}^{\frac{2}{3}} \text{上} \text{乙} \text{天}^{\frac{1}{3}} \text{上} \text{丙} \text{天} \text{上} \text{戊}$ ，欲求其微分之式。

此爲多項之函數，故如法求得 $\text{戊} = \frac{2}{3} \text{甲} \text{天}^{\frac{1}{3}} \text{天} \text{上} \text{乙} \text{天} \text{上} \text{丙} \text{天} \text{上} \text{戊} + \frac{1}{3} \text{乙} \text{天}^{\frac{2}{3}} \text{天} \text{上} \text{丙} \text{天} \text{上} \text{戊} + \frac{1}{3} \text{丙} \text{天}^{\frac{2}{3}} \text{天} \text{上} \text{乙} \text{天} \text{上} \text{戊}$ 。其常數之項戊于求微分之時變爲○而不見。

五題 設有 $\text{戊} = (\text{甲} \text{上} \text{乙} \text{天}^{\frac{1}{3}})^{\frac{2}{3}}$ ，欲求其微分之式。

$$\begin{aligned} \text{此即令地} &= \text{甲} \text{上} \text{乙} \text{天}^{\frac{1}{3}}, \quad \text{即 } \text{戊} = \text{地}^{\frac{2}{3}} \quad \text{即 } \text{戊} = \text{地}^{\frac{2}{3}} \text{上} \text{地}^{\frac{1}{3}} \text{地}。 \quad \text{惟因地}^{\frac{2}{3}} = \\ &= (\text{甲} \text{上} \text{乙} \text{天}^{\frac{1}{3}})^{\frac{2}{3}}, \quad \text{即 } \text{地} = \text{上} \text{乙} \text{天}^{\frac{1}{3}} \text{天}^{\frac{1}{3}} \text{天}, \quad \text{所以得} \\ \text{戊} &= \text{乙} \text{天}^{\frac{1}{3}} \text{天}^{\frac{1}{3}} (\text{甲} \text{上} \text{乙} \text{天}^{\frac{1}{3}})^{\frac{2}{3}} \text{上} \text{天}^{\frac{1}{3}} \text{天}^{\frac{1}{3}} \text{天}。 \end{aligned}$$

此題之式若不用地代其括弧內之數，而以 $\text{甲} \text{上} \text{乙} \text{天}^{\frac{1}{3}}$ 爲一箇簡函數，其戊爲簡函數之某方面依第十三款之法求之，亦通。

六題 設有 $\text{戊} = \text{天}^{\frac{2}{3}} (\text{甲} \text{上} \text{天})^{\frac{1}{3}}$ ，此題爲表明第十款之法。欲求其微分之式。

令巳 = 天^二，午 = (甲上 天)^二，則戌 = 巳午。故得 亥戌 = 午 亥巳上 巳 亥午。惟因 亥巳 = 三天^二 亥天，亥午 = 二(甲上 天) 亥天，所以 亥戌 = 三天^二 (甲上 天)^二 亥天上 二天^二 (甲上 天) 亥天，即 亥戌 = 天^二 (甲上 天) (三甲上 丑天) 亥天。

若平常習算之時，可不必用巳，午二數相代，而即以原式如法求之，亦同。

七題 設有 戌 = 天(一上 天)(一上 天^二)，其戌爲同變數之三箇函數連乘之積。欲求其微分之式。

依第十一款之法得 亥戌 = (一上 天)(一上 天^二) 亥天上 天(一上 天^二) 亥天上 二天^二 (一上 天) 亥天，又公常法化之得 亥戌 = (一上 二天上 三天^二 上 四天^二) 亥天。

又法可從本公式 亥(未 申 酉) = 未 申 酉 $\left[\frac{\text{未}}{\text{亥未}} \frac{\text{申}}{\text{上亥申}} \frac{\text{酉}}{\text{上亥酉}} \right]$ 得
 亥戌 = 天(一上 天)(一上 天^二) $\left[\frac{\text{天}}{\text{亥天}} \frac{\text{一上 天}}{\text{上亥天}} \frac{\text{一上 天^二}}{\text{二天亥天}} \right]$ 。此式易化爲 亥戌 = (一上 二天上 三天^二 上 四天^二) 亥天。

八題 設有 戌 = $\frac{\text{一上 天^二}}{\text{天}}$ ，此爲分數之函數。欲求其微分之式。

依第十三款之法得 亥戌 = $\frac{(\text{一上 天^二})^{\text{二}}}{(\text{一上 天^二}) 亥天 \text{ 上 } \text{二天^二 亥天}}$ ，即 亥戌 = $\frac{(\text{一上 天^二})^{\text{二}}}{(\text{一上 天^二}) 亥天}$ 。

九題 設有 $\text{戊} = \frac{\text{天}^{\text{四}} \text{天}^{\text{二}} \text{天}^{\text{一}} \text{一}}{\text{天}^{\text{三}} \text{上} \text{天}} = \frac{\text{天}^{\text{四}} \text{天}^{\text{二}} \text{天}^{\text{一}} \text{一}}{\text{天} (\text{天}^{\text{二}} \text{上} \text{一})}$ ，欲求其微分之式。

將所設之式與本公式 $\frac{\text{酉}}{\text{申}} = \frac{\text{酉}}{\text{申}} \left[\frac{\text{米}}{\text{米}} \text{上} \frac{\text{申}}{\text{申}} \text{天}^{\text{四}} \text{天}^{\text{二}} \text{天}^{\text{一}} \text{一} \right]$ 相比，則 $\text{天} = \text{米}$ ，

$$\begin{aligned} \text{天}^{\text{二}} \text{上} \text{一} &= \text{申} \cdot \text{天}^{\text{四}} \text{天}^{\text{二}} \text{天}^{\text{一}} \text{一} = \text{酉} \cdot \text{所求得} \\ \text{天}^{\text{四}} \text{天}^{\text{二}} \text{天}^{\text{一}} \text{一} &= \frac{\text{天}^{\text{四}} \text{天}^{\text{二}} \text{天}^{\text{一}} \text{一}}{\text{天}^{\text{三}} \text{上} \text{天}} \left[\frac{\text{天}}{\text{天}} \text{上} \frac{\text{一}}{\text{二}} \text{天}^{\text{二}} \text{天}^{\text{一}} \text{一} \right] \frac{\text{天}^{\text{四}} \text{天}^{\text{二}} \text{天}^{\text{一}} \text{一}}{(\text{四} \text{天}^{\text{三}} \text{天}^{\text{二}} \text{天}) \text{天}} \end{aligned}$$

化之得 $\text{戊} = \frac{(\text{天}^{\text{四}} \text{天}^{\text{二}} \text{天}^{\text{一}} \text{一})^{\text{二}}}{\text{天} (\text{天}^{\text{六}} \text{上} \text{四} \text{天}^{\text{四}} \text{天}^{\text{二}} \text{天}^{\text{一}}) \text{天}}$ 。

十題 設有 $\text{戊} = \text{三} \text{地}^{\text{二}}$ ， $\text{地} = \text{天}^{\text{三}} \text{上} \text{甲} \text{天}$ 此題爲表明第十四款之法。 欲求其微分之式。

如法求之， $\text{酉} = \frac{\text{天}^{\text{三}} \text{地}^{\text{二}}}{\text{天}^{\text{三}} \text{上} \text{甲} \text{天}} = \frac{\text{天}^{\text{三}}}{\text{天}^{\text{三}} \text{上} \text{甲}} \cdot \frac{\text{地}^{\text{二}}}{\text{天}}$ ，所以 $\frac{\text{地}^{\text{二}}}{\text{天}} \times \frac{\text{天}}{\text{地}} = \text{六} \text{地} (\text{三} \text{天}^{\text{二}} \text{上} \text{甲})$ ，
 $\frac{\text{地}^{\text{二}}}{\text{天}^{\text{三}} \text{上} \text{甲} \text{天}} \times \frac{\text{天}}{\text{地}} = \text{一} \text{八} \text{天}^{\text{二}} \text{地} \text{上} \text{六} \text{甲} \text{地}$ 。雖因 $\text{天}^{\text{三}} \text{上} \text{甲} \text{天} = \text{六} \text{地} (\text{三} \text{天}^{\text{二}} \text{上} \text{甲})$ ，
 $\text{一} \text{八} \text{天}^{\text{二}} \text{地} \text{上} \text{六} \text{甲} \text{地} \text{天}$ 。

此式亦可由他法而得。蓋因其 $\text{戊} = \text{三} \text{地}^{\text{二}}$ ，則 $\text{天}^{\text{三}} \text{上} \text{甲} \text{天} = \text{六} \text{地} \text{天}$ 。又因地 $= \text{天}^{\text{三}} \text{上} \text{甲} \text{天}$ ，則 $\text{天}^{\text{三}} \text{上} \text{甲} \text{天} = \text{三} \text{天}^{\text{二}} \text{天} \text{上} \text{甲} \text{天}$ ，故回將 $\text{天}^{\text{三}} \text{上} \text{甲} \text{天}$ 之同數帶入 $\text{天}^{\text{三}} \text{上} \text{甲} \text{天}$ 之同數中，其

所得之式亦爲 $\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{8x^3} + \frac{1}{16x^4} - \frac{1}{32x^5} + \frac{1}{64x^6} - \frac{1}{128x^7} + \frac{1}{256x^8} - \frac{1}{512x^9} + \frac{1}{1024x^{10}} - \frac{1}{2048x^{11}} + \frac{1}{4096x^{12}} - \frac{1}{8192x^{13}} + \frac{1}{16384x^{14}} - \frac{1}{32768x^{15}} + \frac{1}{65536x^{16}} - \frac{1}{131072x^{17}} + \frac{1}{262144x^{18}} - \frac{1}{524288x^{19}} + \frac{1}{1048576x^{20}} - \frac{1}{2097152x^{21}} + \frac{1}{4194304x^{22}} - \frac{1}{8388608x^{23}} + \frac{1}{16777216x^{24}} - \frac{1}{33554432x^{25}} + \frac{1}{67108864x^{26}} - \frac{1}{134217728x^{27}} + \frac{1}{268435456x^{28}} - \frac{1}{536870912x^{29}} + \frac{1}{1073741824x^{30}} - \frac{1}{2147483648x^{31}} + \frac{1}{4294967296x^{32}} - \frac{1}{8589934592x^{33}} + \frac{1}{17179869184x^{34}} - \frac{1}{34359738368x^{35}} + \frac{1}{68719476736x^{36}} - \frac{1}{137438953472x^{37}} + \frac{1}{274877906944x^{38}} - \frac{1}{549755813888x^{39}} + \frac{1}{1099511627776x^{40}} - \frac{1}{2199023255552x^{41}} + \frac{1}{4398046511104x^{42}} - \frac{1}{8796093022208x^{43}} + \frac{1}{17592186044416x^{44}} - \frac{1}{35184372088832x^{45}} + \frac{1}{70368744177664x^{46}} - \frac{1}{140737488355328x^{47}} + \frac{1}{281474976710656x^{48}} - \frac{1}{562949953421312x^{49}} + \frac{1}{1125899906842624x^{50}} - \frac{1}{2251799813685248x^{51}} + \frac{1}{4503599627370496x^{52}} - \frac{1}{9007199254740992x^{53}} + \frac{1}{18014398509481984x^{54}} - \frac{1}{36028797018963968x^{55}} + \frac{1}{72057594037927936x^{56}} - \frac{1}{144115188075855872x^{57}} + \frac{1}{288230376151711744x^{58}} - \frac{1}{576460752303423488x^{59}} + \frac{1}{1152921504606846976x^{60}} - \frac{1}{2305843009213693952x^{61}} + \frac{1}{4611686018427387904x^{62}} - \frac{1}{9223372036854775808x^{63}} + \frac{1}{18446744073709551616x^{64}} - \frac{1}{36893488147419103232x^{65}} + \frac{1}{73786976294838206464x^{66}} - \frac{1}{147573952589676412928x^{67}} + \frac{1}{295147905179352825856x^{68}} - \frac{1}{590295810358705651712x^{69}} + \frac{1}{1180591620717411303424x^{70}} - \frac{1}{2361183241434822606848x^{71}} + \frac{1}{4722366482869645213696x^{72}} - \frac{1}{9444732965739290427392x^{73}} + \frac{1}{18889465931478580854784x^{74}} - \frac{1}{37778931862957161709568x^{75}} + \frac{1}{75557863725914323419136x^{76}} - \frac{1}{151115727451828646838272x^{77}} + \frac{1}{302231454903657293676544x^{78}} - \frac{1}{604462909807314587353088x^{79}} + \frac{1}{1208925819614629174706176x^{80}} - \frac{1}{2417851639229258349412352x^{81}} + \frac{1}{4835703278458516698824704x^{82}} - \frac{1}{9671406556917033397649408x^{83}} + \frac{1}{19342813113834066795298816x^{84}} - \frac{1}{38685626227668133590597632x^{85}} + \frac{1}{77371252455336267181195264x^{86}} - \frac{1}{154742504910672534362390528x^{87}} + \frac{1}{309485009821345068724781056x^{88}} - \frac{1}{618970019642690137449562112x^{89}} + \frac{1}{1237940039285380274899124224x^{90}} - \frac{1}{2475880078570760549798248448x^{91}} + \frac{1}{4951760157141521099596496896x^{92}} - \frac{1}{9903520314283042199192993792x^{93}} + \frac{1}{19807040628566084398385987584x^{94}} - \frac{1}{39614081257132168796771975168x^{95}} + \frac{1}{79228162514264337593543950336x^{96}} - \frac{1}{158456325028528675187087900672x^{97}} + \frac{1}{316912650057057350374175801344x^{98}} - \frac{1}{633825300114114700748351602688x^{99}} + \frac{1}{1267650600228229401496703205376x^{100}} - \frac{1}{2535301200456458802993406410752x^{101}} + \frac{1}{5070602400912917605986812821504x^{102}} - \frac{1}{10141204801825835211973625643008x^{103}} + \frac{1}{20282409603651670423947251286016x^{104}} - \frac{1}{40564819207303340847894502572032x^{105}} + \frac{1}{81129638414606681695789005144064x^{106}} - \frac{1}{162259276829213363391578010288128x^{107}} + \frac{1}{324518553658426726783156020576256x^{108}} - \frac{1}{649037107316853453566312041152512x^{109}} + \frac{1}{1298074214633706907132624082305024x^{110}} - \frac{1}{2596148429267413814265248164610048x^{111}} + \frac{1}{5192296858534827628530496329220096x^{112}} - \frac{1}{10384593717069655257060992658440192x^{113}} + \frac{1}{20769187434139310514121985316880384x^{114}} - \frac{1}{41538374868278621028243970633760768x^{115}} + \frac{1}{83076749736557242056487941267521536x^{116}} - \frac{1}{166153499473114484112975882535043072x^{117}} + \frac{1}{332306998946228968225951765070086144x^{118}} - \frac{1}{664613997892457936451903530140172288x^{119}} + \frac{1}{1329227995784915872903807060280344576x^{120}} - \frac{1}{2658455991569831745807614120560689152x^{121}} + \frac{1}{5316911983139663491615228241121378304x^{122}} - \frac{1}{10633823966279326983230456482242756608x^{123}} + \frac{1}{21267647932558653966460912964485513216x^{124}} - \frac{1}{42535295865117307932921825928971026432x^{125}} + \frac{1}{85070591730234615865843651857942052864x^{126}} - \frac{1}{170141183460469231731687303715884105728x^{127}} + \frac{1}{340282366920938463463374607431768211456x^{128}} - \frac{1}{680564733841876926926749214863536422912x^{129}} + \frac{1}{1361129467683753853853498429727072845824x^{130}} - \frac{1}{2722258935367507707706996859454145691648x^{131}} + \frac{1}{5444517870735015415413993718908291383296x^{132}} - \frac{1}{10889035741470030830827987437816582766592x^{133}} + \frac{1}{21778071482940061661655974875633165533184x^{134}} - \frac{1}{43556142965880123323311949751266331066368x^{135}} + \frac{1}{87112285931760246646623899502532662132736x^{136}} - \frac{1}{174224571863520493293247799005065324265472x^{137}} + \frac{1}{348449143727040986586495598010130648530944x^{138}} - \frac{1}{696898287454081973172991196020261297061888x^{139}} + \frac{1}{1393796574908163946345982392040522594123776x^{140}} - \frac{1}{2787593149816327892691964784081045188247552x^{141}} + \frac{1}{5575186299632655785383929568162090376495104x^{142}} - \frac{1}{11150372599265311570767859136324180752990208x^{143}} + \frac{1}{22300745198530623141535718272648361505980416x^{144}} - \frac{1}{44601490397061246283071436545296723011960832x^{145}} + \frac{1}{89202980794122492566142873090593446023921664x^{146}} - \frac{1}{178405961588244985132285746181186892047843328x^{147}} + \frac{1}{356811923176489970264571492362373784095686656x^{148}} - \frac{1}{713623846352979940529142984724747568191373312x^{149}} + \frac{1}{1427247692705959881058285969449495136382746624x^{150}} - \frac{1}{2854495385411919762116571938898990272765493248x^{151}} + \frac{1}{5708990770823839524233143877797980545530986496x^{152}} - \frac{1}{11417981541647679048466287755595961091061972992x^{153}} + \frac{1}{22835963083295358096932575511191922182123945984x^{154}} - \frac{1}{45671926166590716193865151022383844364247891968x^{155}} + \frac{1}{91343852333181432387730302044767688728495783936x^{156}} - \frac{1}{182687704666362864775460604089535377456991567872x^{157}} + \frac{1}{365375409332725729550921208179070754913983135744x^{158}} - \frac{1}{730750818665451459101842416358141509827966271488x^{159}} + \frac{1}{1461501637330902918203684832716283019655932542976x^{160}} - \frac{1}{2923003274661805836407369665432566039311865085952x^{161}} + \frac{1}{5846006549323611672814739330865132078623730171904x^{162}} - \frac{1}{11692013098647223345629478661730264157247460343808x^{163}} + \frac{1}{23384026197294446691258957323460528314494920687616x^{164}} - \frac{1}{46768052394588893382517914646921056628989841375232x^{165}} + \frac{1}{93536104789177786765035829293842113257979682750464x^{166}} - \frac{1}{187072209578355573530071658587684226515959365500928x^{167}} + \frac{1}{374144419156711147060143317175368453031918731001856x^{168}} - \frac{1}{748288838313422294120286634350736906063837462003712x^{169}} + \frac{1}{1496577676626844588240573268701473812127674924007424x^{170}} - \frac{1}{2993155353253689176481146537402947624255349848014848x^{171}} + \frac{1}{5986310706507378352962293074805895248510699696029696x^{172}} - \frac{1}{11972621413014756705924586149611790497021399392059392x^{173}} + \frac{1}{23945242826029513411849172299223580994042798784118784x^{174}} - \frac{1}{47890485652059026823698344598447161988085597568237568x^{175}} + \frac{1}{95780971304118053647396689196894323976171195136475136x^{176}} - \frac{1}{191561942608236107294793378393788647952342390272950272x^{177}} + \frac{1}{383123885216472214589586756787577295904684780545900544x^{178}} - \frac{1}{766247770432944429179173513575154591809369561091801088x^{179}} + \frac{1}{1532495540865888858358347027150309183618739122183602176x^{180}} - \frac{1}{3064991081731777716716694054300618367237478244367204352x^{181}} + \frac{1}{6129982163463555433433388108601236734474956488734408704x^{182}} - \frac{1}{12259964326927110866866776217202473468949912977468817408x^{183}} + \frac{1}{24519928653854221733733552434404946937899825954937634816x^{184}} - \frac{1}{49039857307708443467467104868809893875799651909875269632x^{185}} + \frac{1}{98079714615416886934934209737619787751599303819750539264x^{186}} - \frac{1}{196159429230833773869868419475239575503198607639501078528x^{187}} + \frac{1}{392318858461667547739736838950479151006397215279002157056x^{188}} - \frac{1}{784637716923335095479473677900958302012794430558004314112x^{189}} + \frac{1}{1569275433846670190958947355801916604025588861116008628224x^{190}} - \frac{1}{3138550867693340381917894711603833208051177722232017256448x^{191}} + \frac{1}{6277101735386680763835789423207666416102355444464034512896x^{192}} - \frac{1}{12554203470773361527671578846415332832204710888928069025792x^{193}} + \frac{1}{25108406941546723055343157692830665664409421777856138051584x^{194}} - \frac{1}{50216813883093446110686315385661331328818843555712276103168x^{195}} + \frac{1}{100433627766186892221372630771322662657637687111424552206336x^{196}} - \frac{1}{200867255532373784442745261542645325315275374222849104412672x^{197}} + \frac{1}{401734511064747568885490523085290650630550748445698208825344x^{198}} - \frac{1}{803469022129495137770981046170581301261101496891396417650688x^{199}} + \frac{1}{1606938044258990275541962092341162602522202993782792835301376x^{200}} - \frac{1}{3213876088517980551083924184682325205044405987565585670602752x^{201}} + \frac{1}{6427752177035961102167848369364650410088811975131171341205504x^{202}} - \frac{1}{12855504354071922204335696738729300820177623950262342682411008x^{203}} + \frac{1}{25711008708143844408671393477458601640355247900524685364822016x^{204}} - \frac{1}{51422017416287688817342786954917203280710495801049370729644032x^{205}} + \frac{1}{102844034832575377634685573909834406561420991602098741459288064x^{206}} - \frac{1}{205688069665150755269371147819668813122841983204197482918576128x^{207}} + \frac{1}{411376139330301510538742295639337626245683966408394965837152256x^{208}} - \frac{1}{822752278660603021077484591278675252491367932816789931674304512x^{209}} + \frac{1}{1645504557321206042154969182557350504982735865633579863348609024x^{210}} - \frac{1}{3291009114642412084309938365114701009965471731267159726697218048x^{211}} + \frac{1}{6582018229284824168619876730229402019930943462534319453394436096x^{212}} - \frac{1}{13164036458569648337239753460458804039861886925068638906788872192x^{213}} + \frac{1}{26328072917139296674479506920917608079723773850137277813577744384x^{214}} - \frac{1}{52656145834278593348959013841835216159447547700274555627155488768x^{215}} + \frac{1}{105312291668557186697918027683670432318895095400549111254310977536x^{216}} - \frac{1}{210624583337114373395836055367340864637790190801098222508621955072x^{217}} + \frac{1}{421249166674228746791672110734681729275580381602196445017243910144x^{218}} - \frac{1}{842498333348457493583344221469363458551160763204392890034487820288x^{219}} + \frac{1}{1684996666696914987166688442938726917102321526408785780068975640576x^{220}} - \frac{1}{3369993333393829974333376885877453834204643052817571560137951281152x^{221}} + \frac{1}{6739986666787659948666753771754907668409286105635143120275902562304x^{222}} - \frac{1}{13479973333575319897333507543509815336818572211270286240551805124608x^{223}} + \frac{1}{26959946667150639794667015087019630673637144422540572481103610249216x^{224}} - \frac{1}{53919893334301279589334030174039261347274288845081144962207220498432x^{225}} + \frac{1}{107839786668602559178668060348078522694548577690162289924414440996864x^{226}} - \frac{1}{215679573337205118357336120696157045389097155380324579848828881993728x^{227}} + \frac{1}{431359146674410236714672241392314090778194310760649159697657763987456x^{228}} - \frac{1}{862718293348820473429344482784628181556388621521298319395315527974912x^{229}} + \frac{1}{1725436586697640946858688965569256363112777243042596638790631055949824x^{230}} - \frac{1}{3450873173395281893717377931138512726225554486085193277581262111899648x^{231}} + \frac{1}{6901746346790563787434755862277025452451108972170386555162524223799296x^{232}} - \frac{1}{13803492693581127574869511724554050904902217944340773110325048447598592x^{233}} + \frac{1}{27606985387162255149739023449108101809804435888681546220650096895197184x^{234}} - \frac{1}{55213970774324510299478046898216203619608871777363092441300193790394368x^{235}} + \frac{1}{110427941548649020598956093796432407239217743554726184882600387580788736x^{236}} - \frac{1}{220855883097298041197912187592864814478435487109452369765200775161577472x^{237}} + \frac{1}{441711766194596082395824375185729628956870974218904739530401550323154944x^{238}} - \frac{1}{883423532389192164791648750371459257913741948437809479060803100646309888x^{239}} + \frac{1}{1766847064778384329583297500742918515827483896875618958121606201292619776x^{240}} - \frac{1}{3533694129556768659166595001485837031654967793751237916243212402585239552x^{241}} + \frac{1}{7067388259113537318333190002971674063309935587502475832486424805170479104x^{242}} - \frac{1}{14134776518227074636666380005943348126619871175004951664972849610340958208x^{243}} + \frac{1}{28269553036454149273332760011886696253239742350009903329945699220681916416x^{244}} - \frac{1}{56539106072908298546665520023773392506479484700019806659891398441363832832x^{245}} + \frac{1}{113078212145816597093331040047546785012958969400039613319782796882727665664x^{246}} - \frac{1}{226156424291633194186662080095093570025917938800079226639565593765455331328x^{247}} + \frac{1}{452312848583266388373324160190187140051835877600158453279131187530910662656x^{248}} - \frac{1}{9046256971665327767466483203803742801036717552$

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{l}
 \text{卯} = \text{卯} \\
 \text{卯} \text{上} \text{二} \text{乙} = \text{卯} \text{卯} \\
 \text{二} \text{乙} \text{上} \text{三} \text{丙} = \text{卯} \text{乙} \\
 \text{三} \text{丙} \text{上} \text{四} \text{丁} = \text{卯} \text{丙}
 \end{array}
 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{卯} = \text{卯} \\ \text{卯} \text{上} \text{二} \text{乙} = \text{卯} \text{卯} \\ \text{二} \text{乙} \text{上} \text{三} \text{丙} = \text{卯} \text{乙} \\ \text{三} \text{丙} \text{上} \text{四} \text{丁} = \text{卯} \text{丙} \end{array}} \right\} \text{則}
 \quad \left\{ \begin{array}{l}
 \text{卯} = \text{卯} \\
 \text{乙} = \frac{\text{二}}{(\text{卯} \text{上} \text{一})} \text{卯} \\
 \text{丙} = \frac{\text{三}}{(\text{卯} \text{上} \text{二})} \text{乙} \\
 \text{丁} = \frac{\text{四}}{(\text{卯} \text{上} \text{三})} \text{丙}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

故也。所以

故可用代法得(一上天)_卯 =

$$\begin{array}{l}
 \text{一上} \frac{\text{一}}{\text{卯}} \text{天} \text{上} \frac{\text{一} \cdot \text{二}}{\text{卯} (\text{卯} \text{上} \text{一})} \text{天} \text{上} \frac{\text{一} \cdot \text{二} \cdot \text{三}}{\text{卯} (\text{卯} \text{上} \text{一}) (\text{卯} \text{上} \text{二})} \text{天} \text{上} \dots \dots \frac{\text{一}}{\text{天}} \text{代其天，兩} \\
 \text{邊俱以甲} \text{卯} \text{通之，則得} (\text{甲} \text{上} \text{天}) \text{卯} = \text{甲} \text{卯} \text{上} \frac{\text{一}}{\text{甲} \text{卯} \text{上} \text{一}} \text{天} \text{上} \frac{\text{一} \cdot \text{二}}{\text{卯} (\text{卯} \text{上} \text{一})} \text{甲} \text{卯} \text{上} \text{二} \text{天} \text{上} \\
 \frac{\text{一} \cdot \text{二} \cdot \text{三}}{\text{卯} (\text{卯} \text{上} \text{一}) (\text{卯} \text{上} \text{二})} \text{甲} \text{卯} \text{上} \text{三} \text{天} \text{上} \dots \dots
 \end{array}$$

第十八款 上款攷證二項例之法爲微分積分中常用之式。本款亦然。

凡遇相等之式如甲上乙天上丙天_上丁天_上…… = 甲上乙天_上丙天_上丁天_上……
 ……①者，若其各項中之倍數皆爲常數，而天爲同變之數，則左右各項中之各倍

數必挨次相同，故可合之爲一公共之式。

次因其天爲變數，故可設想其天變至極小而無異于○，則得 $\text{甲} = \text{甲}$ 。如將①式中兩邊相等之 甲 、 甲 截去而以天約其餘之各項，則得 $\text{乙} = \text{乙}$ 、 $\text{丙} = \text{丙}$ 、 $\text{丁} = \text{丁}$ 、 $\text{戊} = \text{戊}$ 、 $\text{己} = \text{己}$ 、 $\text{庚} = \text{庚}$ 、 $\text{辛} = \text{辛}$ 、 $\text{壬} = \text{壬}$ 、 $\text{癸} = \text{癸}$ 。此式中若今天無異于○，則乙必無異于乙。如是累推之，則得 $\text{甲} = \text{甲}$ 、 $\text{乙} = \text{乙}$ 、 $\text{丙} = \text{丙}$ 、 $\text{丁} = \text{丁}$ 、 $\text{戊} = \text{戊}$ 、 $\text{己} = \text{己}$ 、 $\text{庚} = \text{庚}$ 、 $\text{辛} = \text{辛}$ 、 $\text{壬} = \text{壬}$ 、 $\text{癸} = \text{癸}$ 。

越函數微分

第十九款 越函數爲指函數與對函數之總名。茲款先論指函數求微分之專法。

設有指函數之式 $\text{甲}^{\text{天}}$ ，其指數天爲變數而甲爲常數，令天之長數爲辛，則天變爲 $\text{天} = \text{辛}$ ，戊變爲 $\text{戊}'$ ，故得 $\text{戊}' = \text{甲}^{\text{天} = \text{辛}}$ ，即 $\text{戊}' = \text{甲}^{\text{天} = \text{辛}}$ 。所以 $\text{戊}' = \text{甲}^{\text{天} = \text{辛}}$ 。而 $\frac{\text{戊}'}{\text{戊}} = \frac{\text{甲}^{\text{天} = \text{辛}}}{\text{甲}^{\text{天} = \text{辛}}}$ ，欲求其變比例之限，則必攷辛變至甚小之時 $\frac{\text{戊}' - \text{戊}}{\text{戊}}$ 所向之限。

如令 $\text{甲} = 1$ ，則依第十七款之例得 $\text{甲}^{\text{天}} = (1)^{\text{天}} = 1$ ， $\frac{\text{甲}^{\text{天} = \text{辛}} - 1}{\text{辛}}$ ， $\frac{1 - 1}{\text{辛}} = 0$ 。

$$\text{則 } \frac{\text{戌}'\text{丁戌}}{\text{辛}} = \frac{\text{子}}{\text{天}(\text{甲}'\text{丁}-1)}, \text{而 } \frac{\text{辛}}{\text{戌}'\text{丁戌}} = \frac{\text{天}}{1} \times \frac{\text{甲}'\text{丁}-1}{\text{子}}。 \text{觀此式之左右兩邊，}$$

欲求其變比例之限，則依上款之法，令其天變至甚小，則 $\frac{\text{甲}'\text{丁}-1}{\text{子}} = \frac{\text{辛}}{1}$ 。所以

$$\text{得 } \frac{\text{天}}{\text{子}} = \frac{\text{訥甲}}{1} \times \frac{\text{天}}{1}。 \text{令 } \text{訥} \text{ 爲常乘數，} \text{即對數底訥對之倒數。若依代數術第一百七十二款，則爲對數之根。}$$

$$\text{即得 } \text{天} = \frac{\text{訥天}}{\text{天}}。 \text{故得專法如左：}$$

凡求任何數之對數微分，法將本數之微分以本對數之根乘之，而以本數約分之即得。若求訥對之微分，必令 $\text{訥} = 1$ 。此例須謹記之。

圓函數微分

第二十一款 茲款欲明圓函數 正弦天 與 餘弦天 求微分之專法。

設有式 $\text{戌} = \text{正弦天}$ 。若天變爲 天上辛 而戌變爲 $\text{戌}' = \text{正弦}(\text{天上辛})$ ，依代數術第二百四十款之法 $\text{戌}'\text{丁戌} = \text{正弦}(\text{天上辛})\text{丁正弦天}$ ， $\text{即 } \text{戌}'\text{丁戌} = \text{二餘弦}(\text{天上二辛})\text{正弦二辛}$ ，

惟因天爲其弧， \angle 亥 = 地 \angle 天，所以地 \angle 地 = 丁亥地 \angle 天，而 \angle 地 = 丁亥 \angle 天。
第二十二款 凡切線割線之函數，皆從正弦餘弦之函數而成，故其求微分之法可依類得之。

一式設有 $\text{戊} = \frac{\text{正切天}}{\text{正弦天}} = \frac{\text{餘弦天}}{\text{正弦天}}$ ，則依第十二款、第二十一款之例可得

$$\begin{aligned} \angle \text{戊} &= \frac{\text{餘弦}^{\text{丁}} \text{天}}{\angle (\text{正弦天}) \text{餘弦天} \text{丁} \angle (\text{餘弦天}) \text{正弦天}} \\ &= \frac{\text{餘弦}^{\text{丁}} \text{天}}{(\text{餘弦}^{\text{丁}} \text{天} \perp \text{正弦}^{\text{丁}} \text{天}) \angle \text{天}} = \frac{\text{餘弦}^{\text{丁}} \text{天}}{\angle \text{天}} \end{aligned}$$

所以得 $\angle \text{戊} = \angle \text{正切}^{\text{丁}} \text{天}$ ，即 $\angle \text{戊} = \angle \text{天} (1 - \text{正切}^{\text{丁}} \text{天})$ 。

一式設有 $\text{戊} = \text{餘切天}$ ，則依同法得 $\angle \text{戊} = \frac{\text{正切}^{\text{丁}} \text{天}}{\text{丁} \angle \text{天}} = \text{丁} \angle \text{天} \text{餘割}^{\text{丁}} \text{天}$ ，即 $\angle \text{戊} =$

$\text{丁} \angle \text{天} (1 - \text{餘切}^{\text{丁}} \text{天})$ 。

第二十三款 茲款論求弧微分之法。

既有 $\text{戊} = \text{正弦天}$ ， $\text{戊} = \text{餘弦天}$ ，類之正函數，則必有與此相配之反函數。其反函數爲 $\text{戊} = \text{弧} (\text{正弦} = \text{天})$ ， $\text{戊} = \text{弧} (\text{餘弦} = \text{天})$ 。曾有英國算學士以 $\text{戊} = \text{正弦}^{\text{丁}} \text{天}$

明正弦 = 天之弧， \angle 戌 = 餘弦^T 天 明餘弦 = 天之弧，故弧之微分可求。

$$\begin{aligned} \text{一式 證有戌} &= \text{弧} (\text{正弦} = \text{天}) = \text{正弦}^{\text{T}} \text{天}，\text{証天} = \text{正弦戌}，\text{証天} = \text{天} \text{戌} \text{餘弦戌} = \\ &\text{天} \text{戌} \sqrt{1 - \text{天}^{\text{T}} \text{天}^{\text{T}}}，\text{所以證天} \text{戌} = \frac{\sqrt{1 - \text{天}^{\text{T}} \text{天}^{\text{T}}}}{\text{天}}。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{二式 證有戌} &= \text{弧} (\text{餘弦} = \text{天}) = \text{餘弦}^{\text{T}} \text{天}，\text{証天} = \text{餘弦戌}，\text{証天} = \text{天} \text{天} \text{戌} \text{正弦戌} = \\ &\text{天} \text{天} \text{戌} \sqrt{1 - \text{天}^{\text{T}} \text{天}^{\text{T}}}，\text{所以證天} \text{戌} = \frac{\sqrt{1 - \text{天}^{\text{T}} \text{天}^{\text{T}}}}{\text{天} \text{天}}。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{三式 證有戌} &= \text{弧} (\text{正切} = \text{天}) = \text{正切}^{\text{T}} \text{天}，\text{証天} = \text{正切戌}，\text{証天} = \text{天} \text{戌} (1 - \text{天}^{\text{T}} \text{天}^{\text{T}})， \\ &\text{所以證天} \text{戌} = \frac{1 - \text{天}^{\text{T}} \text{天}^{\text{T}}}{\text{天}}。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{四式 證有戌} &= \text{弧} (\text{餘切} = \text{天}) = \text{餘切}^{\text{T}} \text{天}，\text{証天} = \text{餘切戌}，\text{証天} = \text{天} \text{天} \text{戌} (1 - \text{天}^{\text{T}} \text{天}^{\text{T}})， \\ &\text{所以證天} \text{戌} = \frac{1 - \text{天}^{\text{T}} \text{天}^{\text{T}}}{\text{天} \text{天}}。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{五式 證有戌} &= \text{弧} (\text{正割} = \text{天}) = \text{正割}^{\text{T}} \text{天}，\text{証天} = \text{正割戌}，\text{証天} = \text{天} \text{戌} \text{正割戌} \text{正切戌} = \\ &\text{天} \text{戌} \text{天} \sqrt{\text{天}^{\text{T}} \text{天}^{\text{T}} - 1}，\text{所以證天} \text{戌} = \frac{\text{天} \sqrt{\text{天}^{\text{T}} \text{天}^{\text{T}} - 1}}{\text{天}}。 \end{aligned}$$

六式設有 $\text{戊} = \text{弧}(\text{餘割} = \text{天}) = \text{餘割}^{\text{丁}} \text{天}$ ，則依同法求得 $\text{天} = \frac{\sqrt{\text{天}^2 - 1}}{\text{丁} \text{天}}$ 。

繁函數求微分諸題

第二十四款 以上各款已明越函數、圓函數求微分之專法，故茲款用其各法以求繁函數之微分。

一題 設函數之式爲 $\text{戊} = \text{天}_{\text{地}}$ ，欲求其微分之式。

此式有變數天自乘至地方，卽爲變數變方之函數也，故可依對數之例，令 $\text{戊} = \text{地} \text{訥} \text{天}$ ，而 $\text{亥} = \text{訥} \text{戊}$ ， $\text{人} = \text{訥} \text{天}$ ，則 $\text{亥} = \text{地} \text{人}$ 。依第十款之例可得 $\text{天} = \frac{\text{亥}}{\text{戊}}$ ， $\text{地} = \frac{\text{人}}{\text{亥}}$ 。故又可依第二十款之例，令 $\text{亥} = \text{天}(\text{訥} \text{戊}) = \frac{\text{天}}{\text{戊}}$ ， $\text{人} = \frac{\text{天}}{\text{亥}}$ 。

$$\begin{aligned} \text{天}(\text{訥} \text{天}) &= \frac{\text{天}}{\text{天}} \text{，則其} \frac{\text{戊}}{\text{天}} = \frac{\text{天}}{\text{地} \text{天}} \text{，訥} \text{天} \text{天} \text{地} \text{，} \\ &= \text{戊} \left[\frac{\text{天}}{\text{地}} \text{天} \text{訥} \text{天} \text{天} \text{地} \right] \\ &= \text{天} \left[\frac{\text{天}}{\text{地}} \text{天} \text{訥} \text{天} \text{天} \text{地} \right] \\ &= \text{天}^{\text{地} \text{丁}} \text{地} \text{天} \text{訥} \text{天} \text{天} \text{地} \text{訥} \text{天} \text{天} \text{地} \end{aligned}$$

二題 設函數之式爲 $戊 = 天^天$ ，欲求其微分之式。

則依前法求之，得其微分之式爲 $天^天 = 天^天(1 + 天)$ 。

三題 設函數之式爲 $戊 = 甲^乙^天$ ，欲求其微分之式。

則可令 $乙^天 = 地$ ，則 $戊 = 甲^地$ 。故又可依第十九款之例得 $天^戊 = 天^甲^地$ ， $天^地 = 天^乙^天$ ，所以其微分之式爲 $天^戊 = 天^甲^天^乙^天$ 。

四題 設函數之式爲 $戊 = 天^{\left(\frac{\sqrt{甲^天}}{天}\right)}$ ，欲求其微分之式。

則令 $\frac{\sqrt{甲^天}}{天} = 人$ ，則 $天^戊 = 天^人$ 。

推因 $天^人 = \frac{甲^天}{天^天} = \frac{(甲^天)^{\frac{1}{天}}}{天^天}$ ，故求得 $天^戊 = \frac{天^{\sqrt{甲^天}}}{天^天}$ 。

$天^{\left(\frac{\sqrt{甲^天}}{天}\right)}$ 。

五題 設函數之式爲 $戊 = \left[\frac{\sqrt{1+天}}{\sqrt{1+天}} \cdot \frac{\sqrt{1+天}}{\sqrt{1+天}} \right]$ ，欲求其微分之式。

[illegible]

六題 設函數之式爲 $y = \frac{ax}{x^2 + 1}$ ，欲求其微分之式。

如法求之，得其微分之式爲 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 。

七題 設函數之式爲 $y = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$

，欲求其微分之式。

如法求之，得其微分之式爲 $y' = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}$ 。

第二十五款 此爲對函數、圓函數在繁函數中之各題。

一題 設函數之式爲 $y = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$ ，欲求其微分之式。

則如法求之，得其微分之式爲 $y' = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \sin x$ 。

二題 設函數之式爲 $y = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$ ，欲求其微分之式。

則如法求之，得其微分之式爲 $y' = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \sin x$ 。

第二十六款 此款爲繁式角函數之題。

一題 設函數之式爲 $y = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$ ，欲求其微分之式。

此式之意：其天爲切線，而戊爲有此切線之弧。故可令 $人 = 餘弦卯戌餘弦^{卯}戌$ 而求其 $\frac{1}{人} 天$ 。則 $彳戌 = \frac{正割^{-1}戌}{彳天} = 彳天餘弦^{-1}戌$ 。

$$\left. \begin{aligned} 且彳人 &= 丁卯彳戌 \left(正弦卯戌餘弦^{卯}戌 \perp 餘弦卯戌正弦戌餘弦^{卯T-1}戌 \right) \\ &= 丁卯彳戌餘弦^{卯T-1}戌 \left(正弦卯戌餘弦戌 \perp 餘弦卯戌正弦戌 \right) \\ &= 丁卯彳戌餘弦^{卯T-1}戌正弦(卯 \perp -1)戌 \end{aligned} \right\} \text{，故} \frac{1}{人} 天 = 丁卯正弦(卯 \perp -1)戌餘弦^{卯 \perp -1}戌。$$

二題 設函數之式爲 $戌 = 餘切^{T-1}天$ ，欲求其微分之式。
則可令 $人 = 正弦卯戌餘弦^{卯}戌$ 而求其 $\frac{1}{人} 天$ 。

$$\left. \begin{aligned} 且彳人 &= 卯彳戌 \left(餘弦卯戌餘弦^{卯}戌 \perp 正弦卯戌正弦戌餘弦^{卯T-1}戌 \right) \\ &= 卯彳戌餘弦^{卯T-1}戌 \left(餘弦卯戌餘弦戌 \perp 正弦卯戌正弦戌 \right) \\ &= 卯彳戌餘弦^{卯T-1}戌餘弦(卯 \perp -1)戌 \end{aligned} \right\} \text{，故求得其微分之式爲} \frac{1}{人} 天 = 卯餘弦(卯 \perp -1)戌餘弦^{卯 \perp -1}戌。$$

