

微積溯源序

微積溯源八卷，前四卷爲微分術，後四卷爲積分術，乃算學中最深之事也。余既與西士傅蘭雅譯畢代數術二十五卷，更思求其進境，故又與傅君譯此書焉。先是咸豐年間，曾有海寧李壬叔與西士偉烈亞力譯出代微積拾級一書，流播海內。余素與壬叔相友，得讀其書，粗明微積二術之梗概。所以又譯此書者，蓋欲補其所略也。書中代數之式甚繁，校算不易，則劉君省菴之力居多。

今刻工已竣矣，故序之，曰：吾以爲古時之算法惟有加減而已。其乘與除乃因加減之不勝其繁，故更立二術以使之簡易也。開方之法，又所以濟除法之窮者也。蓋算學中自有加減乘除開方五法，而一切淺近易明之數，無不可通矣。惟人之心思智慮日出不窮，往往以能人之所不能者爲快。遇有窒礙難通之處，輒思立法以濟其窮。故有減其所不可減而正負之名不得不立矣；除其所不能除而寄母通分之法又不得不立矣。代數中種種記號之法皆出於不得已而立者也，惟每立一法必能使繁者爲簡，難者爲易，遲者爲速，而算學之境界藉此得更進一層。如是屢進不已而所立之法於是乎日多矣。微分積分者，蓋又因乘除開

方之不勝其繁，且有窒礙難通之處，故更立此二術以濟其窮，又使簡易而速者也。試觀圓徑求周、真數求對等事，雖無微分積分之時，亦未嘗不可求，惟須乘除開方數十百次。其難有不可言喻者，不如用微積之法理明而數捷也。然則謂加減乘除開方代數之外者，更有二術焉，一曰微分，一曰積分可也。其積分術爲微分之還原，猶之開平方爲自乘之還原、除法爲乘之還原、減法爲加之還原也。然加與乘其原無不可還，而微分之原有可還有不可還，是猶算式中有不可開之方耳，又何怪焉。如必曰加減乘除開方已足供吾之用矣，何必更究其精？是舍舟車之便利而必欲負重遠行也。其用力多而成功少，蓋不待智者而辨矣。

同治十三年九月十八日，金匱華蘅芳序。

微積溯源卷一

論變數與函數之變比例

第一款 用代數以解任何曲線，其中每有幾種數，其大小恆有定率者，如橢圓之長徑、拋物線之通徑、雙曲線之屬徑之類是也。

又每有幾種數可有任若干相配之同數，其大小恆不能有定率者，如曲線任一點之縱橫線是也。

數既有此兩種分別，則每種須有一總名以賅之，故名其有定之數曰常數，無定之數曰變數。

凡常數之同數不能增亦不能損。

凡變數之同數，能變爲大，亦能變爲小。故其從此同數變至彼同數之時，必歷彼此二數間最小最微之各分數。

如平圓之半徑爲常數，而其任一段之弧或弧之弦矢切割各線、及各線與弧所成之面，

皆謂之變數。

橢圓之長徑短徑皆爲常數，而其曲線之任一段或曲線上任一點之縱橫線，並其形內形外所能作之任何線或面或角，皆謂之變數。

拋物線之通徑爲常數，而其曲線之任一段或任一點之縱橫線、或弧與縱橫線所成之面，皆謂之變數。他種曲線亦然。

凡常數，恆以甲乙丙丁等字代之。凡變數，恆以天地人等字代之。

第二款 若有彼此二數皆爲變數，此數變而彼數因此數變而亦變者，則彼數爲此數之函數。

如平圓之八線皆爲弧之函數。若反求之，亦可以弧爲八線之函數。

又如重學中令物體前行之力，與其物所行之路，皆爲時刻之函數。

如有式 $\frac{\text{地} \perp \text{天}}{\text{甲} \perp \text{天}}$ ，此式中甲爲常數，天爲自主之變數，地爲天之函數。故地之同數能以天與甲明之。

如有式 $\frac{\text{地} \perp \text{天}}{\text{甲}(\text{地} \perp \text{天})}$ ，此式中甲與一皆爲常數，地爲自主之變數，天爲地之函數，故天之同數可以地與甲及一明之。

如有式 $\text{戊} = \frac{\text{甲} \perp \text{乙} \text{天} \perp \text{丙} \text{天} \perp \text{戊} \text{戊}}{\sqrt{\text{甲} \perp \text{乙} \text{天} \perp \text{天} \perp \text{戊} \text{戊}}} = \frac{\text{丙} \perp \text{天} \perp}{\text{甲} \perp \sqrt{\text{乙} \text{天}}}$ ，其甲

乙丙爲常數，天爲自變之數，而戊皆爲天之函數。

凡函數之中，可以有數箇自主之變數。

如有式 $戊 = 甲^2 \cdot 乙 \cdot 丙^2$ ，則天與地皆爲自主之變數，戊爲天地兩變數之函數。

凡變數之函數，其形雖有多種，然每可化之，使不外乎以下數類 $天^n$ ， $甲^m \cdot 乙^n$ ， $正切天$ ， $餘弦天$ 等類是也。

凡函數爲 $天^n$ 之類，其指數爲常數，則可從天之卯方，用代數之常法化之。而以有窮之項明其函數之同數。故謂之代數函數，亦謂之常函數。

如有式 $戊 = 甲^2 \cdot 乙 \cdot 丙^2$ ，此種函數，其戊之同數可用加減乘除開方等法而得之。

凡函數爲 $天^n$ ， $正切天$ 之類，則其函數之同數不能以有窮之項明之。故謂之越函數。越者，超越於尋常之意也。

凡函數爲 $正切天$ ， $餘弦天$ 及 $正切天$ ， $正切天$ 之類，其函數之同數皆可以平圓之各線明之。故謂之圓函數，亦謂之角函數。

以上三種函數常函數、越函數、圓函數也。，若已知天之同數，則其函數之同數即可求得。故

名此三種函數爲陽函數。因其顯而易明，故謂之陽函數。

更有他種函數，必先解其方程式，令函數中之各變數分開，然後能求其同數者。

如有式 $\sqrt{x} = \frac{x+1}{x-1}$ ，其戊爲天之函數，如欲求其戊與天相配之同數，必先解其次方程式始能通。

此種之式名曰天之陰函數。因其雜糅未明，故謂之陰函數。反之亦可云天爲戊之陰函數。

如解其方程式爲 $\sqrt{x} = \frac{x+1}{x-1}$ ，則戊變爲天之陰函數。

整理者註：右最後一句云戊變爲天之陰函數，這顯而易見是錯誤的。原文大英百科全書卷第九之 Fluxions 作 explicit function，即陽函數，此當爲譯者譯錯。目前由於校勘凡例未定，暫留此字，待討論後決定修改與否。

昔代數之家，凡遇須用開平方之處，每于其式之左旁作一根字以記之，如 \sqrt{x} 爲天之平方根。後又變通其法，而以根號記之，如 \sqrt{x} 爲天之平方根。此代數之例也。茲可仿照此例，凡遇某變數之函數，亦用一號以記之。所以凡有任何變數之函數，皆可書一函字于其變數之旁，以爲識別。

如天之函數則作 $\text{函}x$ ，或作 $\text{函}(x)$ ，皆言天之函數也。

所以凡見變數之左旁有一函字者，其函字並非代表天之倍數，其意謂是某變數之函數

也。

用此法則可將 $\text{成} = \text{天}^{\text{卯}}$ 、 $\text{成} = \text{甲}^{\text{天}}$ 、 $\text{成} = \text{對}^{\text{天}}$ 、 $\text{成} = \text{正}^{\text{弦}^{\text{天}}}$ 、 $\text{成} = \text{餘}^{\text{弦}^{\text{天}}}$ 各種之式以一語賅之，謂之 $\text{成} = \text{函}^{\text{天}}$ 或 $\text{成} = \text{函}(\text{天})$ 。

若函數從兩箇變數而成，其天與地皆爲自主之變數，其式如 $\text{成} = \text{甲}^{\text{天}} \text{乙}^{\text{地}}$ 或 $\text{成} = \text{函}(\text{天}, \text{地})$ 者，則可以 $\text{成} = \text{函}(\text{天}, \text{地})$ 別之。函數爲多箇變數所成者，仿此推之。

惟函數只指其變數言之，若甲乙丙丁各常數。雖多不論。

第三款 凡觀此書者，必先明變數與函數變比例之限。如幾何原本中證明平圓之面積必比其外

切多等邊形之面積微小，若其外切多等邊形之邊愈多，則其面積愈近于平圓之面積。

所以可設平圓之面積爲任何小，而切其圓外爲多等邊形，可使多等邊形之面積與平圓之面積較其數甚小于所設之圓面積；再設其多等邊形之面積爲級數，而其邊之變率可每變多若干倍，則其多等邊形之面積必漸與平圓之面積相近而以平圓爲限。雖切于圓外之多邊形其邊任變至若何多，其面積總不能等于平圓之面積。然其級數之總數可比平圓之面積所差甚微，其較數之小，可小至莫可名言。

若用此法于圓內容多等邊形，則其多等邊形之面積亦以平圓之面積爲限。總言之，凡平圓之周爲其內容外切多等邊形之限。

如代數術第二百六十六款言，如令甲代平圓之任何弧，則 $\frac{\text{正弦甲}}{\text{甲}}$ 恆大于半徑，而 $\frac{\text{正切甲}}{\text{甲}}$ 恆小于半徑。然令其弧爲任何小，則其式之同數必甚近于半徑，而其所差之數可小至不能以言語形容。所以此兩數中間之數爲一。即半徑也。故其公限亦爲一。

由此可見凡弧與弦切，三者之中取其二以相較，其比例之限必相等。

如代數術中亦會證甲弧爲 $\frac{\text{正弦甲}}{\text{甲}}$ 與 $\frac{\text{正切甲}}{\text{甲}}$ 兩式之限，惟其卯必爲任何大。

依代數術第五十六款之例 $1 - \frac{1}{\text{天}} + \frac{1}{\text{天}^2} - \frac{1}{\text{天}^3} + \dots + \frac{1}{\text{天}^{\text{卯}-1}} - \frac{1}{\text{天}^{\text{卯}}}$ 即 $\frac{1 - \frac{1}{\text{天}^{\text{卯}}}}{1 - \frac{1}{\text{天}}}$ 。若天變至小

于一，而卯大至無窮，則 $\frac{1}{\text{天}} = 0$ ，而式變爲 $\frac{1 - \frac{1}{\text{天}}}{1}$ 。所以任取其級數若干項之和，

必小于 $\frac{1 - \frac{1}{\text{天}}}{1}$ 。惟其項愈多，則與 $\frac{1 - \frac{1}{\text{天}}}{1}$ 愈相近，而其所差之數可小至莫可名言。

則可見 $\frac{1 - \frac{1}{\text{天}}}{1}$ 必爲其諸級數之限。

若依二項例之式 $\left(1 - \frac{1}{\text{天}}\right)^{\text{卯}} = 1 - \frac{1}{\text{天}} + \frac{1 \cdot 2}{\text{天}^2} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{\text{天}^3} + \dots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \text{卯}}{\text{天}^{\text{卯}}} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \text{卯}}{\text{天}^{\text{卯}+1}} + \dots$ 其卯之同數無論如何，必合于理。惟卯若爲大數，則其各項之

乘數 $1 - \frac{1}{2^n}$ 之類與 $1 - \frac{1}{2^{n+1}}$ 相較之差甚小，若 n 愈大，則其差愈微；若令 n 爲任意大，則各乘數可略等於 1，所以得 $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^n = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{2^{n^2}} - \cdots$ ①。

曾在代數術第一百七十七款中證①式之右邊爲由函數 e^x 而成。其 e 之同數因爲 $1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{2^{n^2}} - \cdots$ ，即訥白爾對數之根也。所以 n 若愈大則 $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^n$ 必愈與 e^x 相近，而其限爲 e^x 。

如令 $x = 1$ ，則 $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^n$ 之限爲 e ，即 $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^n - e = 0.7182818284 \cdots$ ，故其函數爲常數。

第四款 惟因函數之同數本從變數而生，故變數之同數與函數之長數比則爲 $\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{2^{n^2}} - \cdots$

設函數之式爲 $y = x^n$ ，令天長數爲 x ，而以函數之新同數爲 y ，則

$$\begin{aligned} \text{戊}' &= (\text{天} \uparrow \text{辛})^{\text{三}} = \text{天}^{\text{三}} \uparrow \text{三} \text{天}^{\text{二}} \text{辛} \uparrow \text{三} \text{天}^{\text{二}} \text{辛} \uparrow \text{三} \text{天}^{\text{二}} \text{辛} \uparrow \text{三} \text{天}^{\text{二}} \text{辛} \\ &= \text{戊} \uparrow \text{三} \text{天}^{\text{二}} \text{辛} \uparrow \text{三} \text{天}^{\text{二}} \text{辛} \uparrow \text{三} \text{天}^{\text{二}} \text{辛} \end{aligned} \quad , \quad \frac{\text{辛}}{\text{戊}' \uparrow \text{丁} \text{戊}} = \text{三} \text{天}^{\text{二}} \uparrow$$

二天^二辛^二辛^二。可見天變爲天^二辛^二之時，其函數戊必變爲戊^二天^二天^二辛^二辛^二天^二辛^二天^二辛^二，其所長之數爲三^二天^二辛^二天^二天^二辛^二天^二辛^二。此式中之各項皆爲辛之整方與他數相乘所成。又可見變數與函數之變比例，其式爲三^二天^二辛^二天^二天^二辛^二天^二辛^二，其初項三^二天^二與天之長數辛無相關。

設函數之式爲戊^四 = 天^四。令天之長數爲辛，而以戊^四爲函數之新同數，則戊^四 = 戊^三上四天^三辛^三上六天^二辛^二上四天^二辛^二上辛^四， $\frac{\text{辛}}{\text{戊}' \uparrow \text{丁} \text{戊}} = \text{四天}^{\text{三}} \uparrow \text{六天}^{\text{二}} \text{辛} \uparrow \text{四天}^{\text{二}} \text{辛} \uparrow \text{辛}^{\text{四}}$ 。

由此可見天若變爲天^三辛^三，則其各函數之新同數如左：

如戊^三 = 天^三，則戊^三 = 戊^二上二天^二辛^二辛^二。如戊^三 = 天^三，則戊^三 = 戊^二上二天^二辛^二上三天^二辛^二上辛^三。如戊^三 = 天^四，則戊^三 = 戊^三上四天^三辛^三上六天^二辛^二上四天^二辛^二上辛^四。其餘類推。

總言之，若以卯爲天之任何整指數，而令天之長數爲辛，又以巳午未申等字挨次而代

辛之各方之倍數，則函數 $\text{戊} = \text{天}^{\text{第}}_{\text{辛}}$ 之新同數必爲 $\text{戊}' = \text{辛}_1 \text{辛}_2 \text{辛}_3 \text{辛}_4 \text{辛}_5 \text{辛}_6 \text{辛}_7 \text{辛}_8$ 。由是知函數之新同數必爲級數，其初項戊爲函數之原同數，其餘各項爲天之長數辛之各整方，以巳午未申之類爲各倍數，其各倍數皆爲天之別種函數，其式亦從本函數而生。

由以上各式又可見函數爲戊^一 = 天^一、戊^二 = 天^二、戊^三 = 天^三、戊^四 = 天^四之類，則其變數與函數之變比例必爲

$$\frac{\text{辛}^{\text{一}}}{\text{戊}^{\text{一}} \text{丁}^{\text{一}} \text{戊}^{\text{一}}} = \text{二天}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}}、\frac{\text{辛}^{\text{二}}}{\text{戊}^{\text{二}} \text{丁}^{\text{二}} \text{戊}^{\text{二}}} = \text{三天}^{\text{二}} \text{辛}^{\text{二}} \text{辛}^{\text{二}}、\frac{\text{辛}^{\text{三}}}{\text{戊}^{\text{三}} \text{丁}^{\text{三}} \text{戊}^{\text{三}}} =$$

四^二天^一一六^二天^一辛^一一四^二天^一辛^一之類。總之若以卯爲天之整指數，則戊^二 = 天^一之變
比例必爲 $\frac{\text{辛}^{\text{一}}}{\text{戊}^{\text{二}} \text{丁}^{\text{二}} \text{戊}^{\text{二}}} = \text{巳}^{\text{一}} \text{午}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{未}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{申}^{\text{一}} \text{辛}^{\text{一}} \text{酉}^{\text{一}} \dots\dots$ 。由此可見，變數天之長數與函

數^辛之長數其變比例^辛之同數^巳。可分之爲兩式，其一式爲^巳，此式與天之長數辛無相關；又一式爲^辛。即^辛（^辛……）。此式因以辛爲乘數，故辛若變小，其數亦必隨辛而變小。如令辛爲任何小，則此式之數可小至甚近于○。故此數可以不計，而以^巳爲變比例之限。

此二種法，若細攷其根源，卽奈端所謂正流數、反流數也；亦卽來本之所謂微分算術、積分算術也；又卽拉果蘭諸所謂函數變例也。

論各種函數求微分之公法

第五款 若函數之式爲 $\text{戊} = \text{天}^{\text{辛}}$ ，令天變爲 $\text{天}^{\text{辛}^{\text{辛}}}$ ，則函數之新同數必爲 $\text{戊}' = \text{戊}^{\text{辛}^{\text{辛}}}$ ，其與原同數之較爲 $\text{戊}' - \text{戊}$ ，卽 $\text{天}^{\text{辛}^{\text{辛}}} - \text{天}^{\text{辛}}$ ，此式之初項 $\text{天}^{\text{辛}}$ ，名之曰溢率。依同理推之，若函數之式爲 $\text{戊} = \text{天}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}}}}$ ，令天變爲 $\text{天}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}}}}}$ ，則函數之新同數爲 $\text{戊}' = \text{戊}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}}}}}$ ，其與原同數之較爲 $\text{戊}' - \text{戊}$ ，卽 $\text{天}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}}}}} - \text{天}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}}}}$ 。其初項 $\text{天}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}}}}$ 爲溢率。

若函數之式爲 $\text{戊} = \text{天}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}}}}}$ ，而天變爲 $\text{天}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}}}}}}$ ，則函數之新同數與原同數之較爲 $\text{戊}' - \text{戊}$ ， $\text{天}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}}}}}}} - \text{天}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}}}}}}$ ，而其溢率爲 $\text{天}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}}}}$ 。

總言之，凡天之函數無論爲某方，恆可以 $\text{天}^{\text{辛}}$ 代其天，而變其函數之同數爲 $\text{戊}^{\text{辛}}$ ， $\text{戊}^{\text{辛}^{\text{辛}}}$ ， $\text{戊}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}}}}$ ， $\text{戊}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}}}}}$ ， $\text{戊}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}}}}}}$ ，乃以原同數戊減之得 $\text{戊}^{\text{辛}} - \text{戊}$ ， $\text{戊}^{\text{辛}^{\text{辛}}} - \text{戊}^{\text{辛}}$ ， $\text{戊}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}}}} - \text{戊}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}}}}$ ， $\text{戊}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}}}}} - \text{戊}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}^{\text{辛}}}}}$ ，而取其初項 $\text{戊}^{\text{辛}}$ 爲溢率。

準此推之，則知天之溢率卽爲其長數辛。惟因函數之溢率每藉天之長數而生，故微分

術中，恆以 $\frac{\Delta x}{x}$ 代天之溢率。其 Δx 號者，非天之倍數，不過是天之溢率耳。溢率之名，本爲流數術中所用。而 Δx 號者，卽微字之偏旁，故微分之術用之。

如有式 $y = f(x)$ ，則 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ 。此式之意謂 Δy 之微分等于 Δx 乘天之微分。猶言函數 Δy 之溢率等于以 Δx 乘其天之溢率也。如有式 $y = f(x)$ ，則 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ 。此式之意謂 Δy 之微分等于以 Δx 乘天之微分。猶言函數 Δy 之溢率等于以 Δx 乘其天之溢率也。

第六款 惟因每遇 $\Delta y = f(x)$ ，則 $\Delta y = f(x + \Delta x)$ ，所以可寫之如 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ 。此爲天微分之倍數，亦謂之微係數。

又依前法推之，如函數之式爲 $y = f(x)$ ，則 $\Delta y = f(x + \Delta x)$ ，而 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ 。其 Δy 爲原函數 $y = f(x)$ 之微係數。

總言之，無論何種函數之微係數，皆可以 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 代之。而函數之新同數爲 $y + \Delta y$ ， $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ ，所以 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ ，其已爲天之他函數，其形每隨函數之式而變。如之 Δy 之同數爲何式，則其已之同數卽易求得。

凡函數之欲求微分者，先于其式之左旁作一 \times 號以記之。如有 $[(\text{甲} \perp \text{天})(\text{乙} \neg \neg \text{天} \neg \neg)]$ 式，欲求其微分，則可先作 $\neg[(\text{甲} \perp \text{天})(\text{乙} \neg \neg \text{天} \neg \neg)]$ 。

凡函數之欲求微係數者，于其式之左旁作 \times 號，又以 $\neg \text{天}$ 爲其分母。如有 $[(\text{甲} \perp \text{天})(\text{乙} \neg \neg \text{天} \neg \neg)]$ 式，欲求其微係數，則作 $\frac{\neg[(\text{甲} \perp \text{天})(\text{乙} \neg \neg \text{天} \neg \neg)]}{\neg \text{天}}$ 。

從以上各款諸說，易知求微分之公法。

法曰：無論天之任何函數，欲求微分，則以 $\neg \text{天}$ 代其原式中之天而詳之。依辛之整方數自小而大序之，取其初有辛之項，而以 $\neg \text{天}$ 代其辛即得。

如有式 $\text{戌} = \text{甲} \text{天} \perp \text{乙} \text{天} \neg \neg$ ，欲求其微係數，則以 $\text{天} \perp \neg \text{天}$ 代其天，而令函數之新同數

爲 $\text{戌}'$ ，則得 $\text{戌}' = \left\{ \begin{array}{l} = \text{甲}(\text{天} \perp \neg \text{天}) \perp \text{乙}(\text{天} \perp \neg \text{天}) \neg \neg \\ = \text{甲} \text{天} \perp \text{乙} \text{天} \neg \neg \perp (\text{甲} \perp \neg \neg \text{乙} \text{天}) \neg \neg \perp \text{乙} \neg \neg \text{天} \neg \neg \end{array} \right.$ 。取其初有辛之項 $(\text{甲} \perp \neg \neg \text{乙} \text{天}) \neg \neg \perp \text{乙} \neg \neg \text{天} \neg \neg$

$\neg \neg \text{乙} \text{天}) \neg \neg$ ，以 $\neg \text{天}$ 代其辛，即得 $\neg \text{戌} = (\text{甲} \perp \neg \neg \text{乙} \text{天}) \neg \neg \text{天}$ ，故其 $\frac{\neg \text{天}}{\neg \text{戌}} = \text{甲} \perp \neg \neg \text{乙} \text{天}$ 。

第七款 上款之法，必令天變爲 $\neg \text{天}$ ，而詳其函數之同數爲級數，此乃論其立法之理當如是

也。惟求得級數之後，所用者僅爲其辛一方之項，則但能求得此項已足用矣。前于第四款中言此項之倍數爲變數與函數變比例之限，又于第六款中言此項之倍數謂之微係數。然則求函數之微係數與求變數與函數變比例之限，其法本無異也。

如有式 $\text{戊} = \frac{\text{天}}{\text{甲}^{\frac{1}{2}}}$ ，則 $\text{戊}' = \frac{\text{天}^{\frac{1}{2}} \text{辛}}{\text{甲}^{\frac{1}{2}}}$ 。而 $\text{戊} \text{ 丁 } \text{戊}' = \frac{\text{天}}{\text{甲}^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\text{天}^{\frac{1}{2}} \text{辛}}{\text{甲}^{\frac{1}{2}}} = \frac{\text{天}(\text{天}^{\frac{1}{2}} \text{辛})}{\text{丁甲}^{\frac{1}{2}}}$ ，故其變比例之式爲 $\frac{\text{辛}}{\text{戊} \text{ 丁 } \text{戊}'} = \frac{\text{天}(\text{天}^{\frac{1}{2}} \text{辛})}{\text{丁甲}^{\frac{1}{2}}}$ 。惟此式可不待詳爲級數而始得其變比例之限，因可見辛愈小，則其式愈近于 $\frac{\text{天}^{\frac{1}{2}}}{\text{甲}^{\frac{1}{2}}}$ ，故此式必卽爲 $\frac{\frac{1}{2}\text{天}}{\frac{1}{2}\text{戊}}$ 之同數，

所以得 $\frac{1}{2}\text{戊} = \frac{\text{天}^{\frac{1}{2}}}{\text{甲}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\text{天}}$ 。

若以戊爲任何函數之原同數，而以 $\text{天}^{\frac{1}{2}}$ 代其天，則其函數之新同數爲 $\text{戊}' = \text{戊} \text{ 丁 } \text{戊}' = \text{辛}^{\frac{1}{2}} \text{ 丁 } \text{辛}^{\frac{1}{2}} \text{ 丁 } \text{辛}^{\frac{1}{2}} \text{ 丁 } \text{辛}^{\frac{1}{2}} \text{ 丁 } \dots\dots$ ，即得 $\frac{\text{辛}}{\text{戊} \text{ 丁 } \text{戊}'} = \text{辛}^{\frac{1}{2}} \text{ 丁 } \text{辛}^{\frac{1}{2}} \text{ 丁 } \text{辛}^{\frac{1}{2}} \text{ 丁 } \text{辛}^{\frac{1}{2}} \text{ 丁 } \dots\dots$ 。惟

因 $\frac{\text{辛}}{\text{戊} \text{ 丁 } \text{戊}'}$ 之限爲已，故得 $\frac{\frac{1}{2}\text{天}}{\frac{1}{2}\text{戊}} = \text{已}$ ，而 $\frac{1}{2}\text{戊} = \text{已} \frac{1}{2}\text{天}$ 。

由此得一解曰：凡微分之術，其意專爲求任何變數與函數同時變大之限耳。凡求任何函數之微分，不過將一尋常之代數式另用他法以變化之。因其變化之法與代

第八款 凡變數與函數變比例之限，無論以何數爲主，其形必同。

[illegible]

第九款 由此易知，凡有相等之函數，則其微係數亦必相等。

如戌與亥爲兩函數，而戌₁ = 亥₁，其天變爲天₁之時，戌變爲亥₂，亥變爲亥₂，則戌₂ = 亥₂，而戌₂ = 亥₂ = 亥₂，故 $\frac{\text{戌}_2}{\text{戌}_1} = \frac{\text{亥}_2}{\text{亥}_1}$ 。如以巳與午各爲其變比例之限，則巳₁ = 午₁。故巳₁ = 午₁，而巳₂ = 午₂。

由此可見，凡函數之式無論如何改形，若其同數無異者，則其微係數必同。如函數之原式爲 $y = f(x)$ ，若改其形爲 $y = f(x + a)$ ，則此式之微係

數與原式之微係數必無異。

惟此理，若反言之而謂相等之微係數必從相等之函數而生，則不盡然。

如函數之式爲 $y = a + bx$ ，令 x 變爲 $x + \Delta x$ ，而 y 變爲 $y + \Delta y$ ，則 $\Delta y = b \Delta x$ ，故得 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = b$ 。觀此可知，其常數之項 a 不能入變比例之限

內，故其微係數必與 $y = a + bx$ 之微係數無異。惟微係數 b 既能屬於本函數 $y = a + bx$ ，又能屬於他函數 $y = cx$ ，所以有下例。

例曰：凡變數與常數相加減之函數，其微係數中不見其加減之常數。惟變數與常數相乘除者，則其微係數中有常數爲倍數。

求兩函數相乘積之微分

第十款 凡變數之函數，無論其形如何，皆可以第六款之公法求其微分。然不如每種異形之函數各設一專法以求之，則更簡捷。

如有式 $y = u \cdot v$ ，其未與 u 各爲 x 之函數。今欲得一法專能求 u 、 v 相乘積之微分，若令 x 變爲 $x + \Delta x$ ，則 u 、 v 二函數必變爲 $u + \Delta u$ 、 $v + \Delta v$ ，則 y 變爲 $y + \Delta y$ ，即 $y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$ ，故得 $\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$ ，

母₁巴₁辛₁午₁辛₂午₂……，其巴、午爲由未函數所得之天之他函數；其巴、午爲由申函數所得之天之他函數。

再令戊₁ = 未₁申₁，則依法得戊₁ = 未₁申₁ (未巴₁申巴₁) 辛₁ (未午₁申巴₁ 申午) 辛₂ 申₂……。以戊代其未申，移項而以辛約之，則得 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}} = \frac{\text{未巴}_1 \text{申巴}_1}{\text{申午}}$ = 未巴₁申巴₁

(未午₁申巴₁申午) 辛₁……。此式中之未巴₁與申巴₁兩項乃天之他函數，而與辛無涉者，其餘各項俱有辛之各方爲乘數。設辛爲甚微，則其所乘之衆項亦甚微，故其變比例之限爲 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}} = \text{未巴}_1 \text{申巴}_1$ 。惟因巴 = $\frac{\text{辛}}{\text{未}_1 \text{申}_1}$ 、巴₁ = $\frac{\text{申}_1}{\text{未}_1}$ ，故可

依第六款之法以 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}}$ 代其 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}}$ ；以 $\frac{\text{辛}}{\text{未}}$ 代其 $\frac{\text{辛}}{\text{未}}$ ；以 $\frac{\text{辛}}{\text{申}}$ 代其 $\frac{\text{辛}}{\text{申}}$ 。則得 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}} = \frac{\text{辛}}{\text{未}} \frac{\text{辛}}{\text{申}}$ ，而戊 = 未申。故得專法如左：

凡求同變彼此兩函數相乘積之微分，法將此函數乘彼函數之微分，又將彼函數乘此函數之微分，而以乘得之兩式相加即得。

求多函數連乘積之微分

第十一款 前款論函數之式爲 $戊 = 未 \cdot 申$ ，則 $戊 = 未 \cdot 申$ ，所以 $\frac{戊}{申} = \frac{未}{申}$ 。由此推之，如戊爲三箇同變數之函數連乘如 $未 \cdot 申 \cdot 亥$ ，可令其 $申 = 申 \cdot 亥$ ，則亦能爲 $戊 = 未 \cdot 申$ ，而 $\frac{戊}{申} = \frac{未}{申}$ 。惟因 $申 = 申 \cdot 亥$ ，可依同例得 $\frac{戊}{申} = \frac{未}{申} \cdot \frac{亥}{亥}$ ，所以 $\frac{戊}{申} = \frac{未}{申} \cdot \frac{亥}{亥}$ 。若仍將 $未 \cdot 申$ 代還其戊而以常法化之，則爲 $戊 = 未 \cdot 申 \cdot 亥$ ，故得專法如左：

凡求同變數之若干函數連乘積之微分，法以各本函數之微分與其餘之各他函數連乘，而以各乘得之式相加即得。

此法易用以總式以明之。無論其同變數之函數有若干數連乘，皆可以一例推之：

如多函數連乘之式爲 $未 \cdot 申 \cdot 亥$ ，則其微分之式爲 $\frac{戊}{申} = \frac{未}{申} \cdot \frac{亥}{亥} + \frac{未}{申} \cdot \frac{亥}{亥} + \frac{未}{申} \cdot \frac{亥}{亥}$ 。

申 $\frac{戊}{申} = \frac{未}{申} \cdot \frac{亥}{亥} + \frac{未}{申} \cdot \frac{亥}{亥} + \frac{未}{申} \cdot \frac{亥}{亥}$ 。

求變數之分函數微分

第十二款 若有分數之式，其母子爲同變數之各函數，則欲得其求微分之專法，可令 $\frac{戊}{未} = \frac{申}{未}$ ，

則 $\frac{未}{未} = \frac{戊}{申}$ ，而 $\frac{未}{未} = \frac{戊}{申} \times \frac{申}{申} = \frac{戊}{申}$ 。乃以其戊之同數 $\frac{申}{未}$ 代其戊，則 $\frac{未}{未} =$

$$\frac{\frac{申}{未}}{\frac{申}{未}} = \frac{\frac{申}{申} \times \frac{申}{未}}{\frac{申}{申} \times \frac{申}{未}} = \frac{\frac{申}{申}}{\frac{申}{申}} = 1$$

故得專法如左：

凡同變量之函數，若爲分數，則求微分之法可將分母乘其分子之微分，乃以分子乘分母之微分減之，而以分母之平方約之。

此法亦可用一總式以明之。

$$\begin{aligned} \text{惟因 } \frac{戊}{未} &= \frac{\frac{申}{未} \times \frac{申}{申}}{\frac{申}{申} \times \frac{申}{未}} = \frac{\frac{申}{申}}{\frac{申}{申}} = 1 \\ \text{之微分爲 } \frac{\frac{申}{申}}{\frac{申}{申}} &= \frac{\frac{申}{申} \times \frac{申}{申}}{\frac{申}{申} \times \frac{申}{申}} = \frac{\frac{申}{申}}{\frac{申}{申}} = 1 \\ \text{所以 } \frac{戊}{未} &= \frac{\frac{申}{申} \times \frac{申}{申}}{\frac{申}{申} \times \frac{申}{申}} = \frac{\frac{申}{申}}{\frac{申}{申}} = 1 \\ \text{之微分當爲 } \frac{\frac{申}{申}}{\frac{申}{申}} &= \frac{\frac{申}{申} \times \frac{申}{申}}{\frac{申}{申} \times \frac{申}{申}} = \frac{\frac{申}{申}}{\frac{申}{申}} = 1 \end{aligned}$$

求變數之分函數微分

而 $\frac{\text{亥地}}{\text{子(亥地)}} = \frac{\text{亥}}{\text{子}} \cdot \frac{\text{地}}{\text{子地}}$ ，故得 $\frac{\text{戌}}{\text{子戌}} = \frac{\text{未}}{\text{子未}} \cdot \frac{\text{申}}{\text{子申}} \cdot \frac{\text{酉}}{\text{子酉}} \cdot \frac{\text{亥}}{\text{子亥}} \cdot \frac{\text{地}}{\text{子地}}$ 。由

是知若有分數之函數，其分母分子爲任若干同變數之函數連乘之積如 $\frac{\text{亥地}}{\text{未申酉}}$ 者，可

以 $\text{子} \left(\frac{\text{亥地}}{\text{未申酉}} \right) = \frac{\text{亥地}}{\text{未申酉}} \left[\frac{\text{未}}{\text{子未}} \cdot \frac{\text{申}}{\text{子申}} \cdot \frac{\text{酉}}{\text{子酉}} \cdot \frac{\text{亥}}{\text{子亥}} \cdot \frac{\text{地}}{\text{子地}} \right]$ 之式明之。

第十三款 茲欲攷任何函數地之任何乘方求微分之專法。其地或爲自變之數，或爲他變之函數，皆可。

先設 $\text{戌} = \text{地}^{\text{卯}}$ ，其卯爲任何整數，則其函數之詳式必有卯箇地連乘如 $\text{戌} = \text{地} \cdot \text{地} \cdot \text{地} \cdot \text{地} \cdots$ 。則依第十一款之例， $\frac{\text{戌}}{\text{子戌}} = \frac{\text{地}}{\text{子地}} \cdot \frac{\text{地}}{\text{子地}} \cdot \frac{\text{地}}{\text{子地}} \cdots$ ，其項必有卯數。

故 $\frac{\text{戌}}{\text{子戌}} = \frac{\text{地}}{\text{卯子地}}$ ，而得 $\text{子戌} = \frac{\text{地}}{\text{卯子地}} \cdot \text{戌} = \text{卯子地}^{\text{卯}-1} \cdot \text{子地}$ 。

設函數爲分指數如 $\text{戌} = \text{地}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}}$ ，則 $\text{戌}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}} = \text{地}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}}$ 。若依第九款之例，則得 $\text{子戌}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}} \cdot \text{子戌} = \text{寅地}^{\text{卯}-1} \cdot \text{子地} \cdot \text{子戌} = \frac{\text{卯}}{\text{寅}} \times \frac{\text{戌}}{\text{寅地}^{\text{寅}-1}} \cdot \text{子地}$ 。惟因 $\text{戌} = \text{地}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}}$ 、 $\text{戌}^{\text{卯}-1} = \text{地}^{\frac{\text{寅}-1}{\text{寅}}}$ ，所

以 $\frac{\text{戌}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}}}{\text{寅地}^{\text{寅}-1}} = \text{地}^{\frac{\text{寅}-1}{\text{寅}}}$ ， $\text{子戌}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}} \cdot \text{子戌} = \frac{\text{卯}}{\text{寅}} \cdot \text{地}^{\frac{\text{寅}-1}{\text{寅}}} \cdot \text{子地}$ 。

再設卯爲負指數，無論爲整數爲分數，則 $\text{戊} = \text{地}^{\text{丁卯}}$ ，即 $\text{戊} = \frac{\text{地}^{\text{卯}}}{1}$ 。若依第十二款之例，因其分子爲常數，故其分子之微分當爲0，而得 $\text{戊} = \frac{\text{地}^{\text{二卯}}}{\text{丁卯地}^{\text{卯}-1} \times \text{地}}$ ，即 $\text{戊} = \text{丁卯地}^{\text{丁卯}-1} \times \text{地}$ 。

合觀本款之各式，可見地之指數卯無論爲正爲負爲整爲分，其微分之式必爲 $\text{戊} \left(\text{地}^{\text{卯}} \right) = \text{卯地}^{\text{卯}-1} \times \text{地}$ 。故得專法如左：

凡求函數乘方之微分，法將其原指數以一減之爲新指數，而以原指數爲其倍數，又以變數之微分乘之即得。惟其原函數若本有常數爲倍數者，則其原倍數必仍在乘數之中。

如函數之式爲 $\text{戊} = \text{甲天}^{\text{卯}}$ ，則其微分之式爲 $\text{戊} \left(\text{甲天}^{\text{卯}} \right) = \text{卯甲天}^{\text{卯}-1} \times \text{天}$ 。

求函數諸乘方之微分更有簡便之法，可藉代數術第一百六十款與一百六十一款之二項例而得。所以于此不論者，因二項之例亦可由微分而得，余欲用微分之術證明二項之例以便于用，故俟後詳論之。

求變數平方根之微分

用前法已能求各負方之微分，惟因 \sqrt{x} 為微分術中常見之式，所以必更設一最易之專法以便于用。

依本款求諸乘方微分之法， $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ ，即 $\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$ ，
即 $\frac{1}{n} \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \sqrt[n]{x}$ 。所以得專法如左：

凡求函數平方根之微分，法以函數之微分爲實而二倍其原函數之平方根以約之即得。

求重函數之微分

第十四款 設有地爲天之函數而戌爲地之函數，欲求其戌與天相配之微分。

令天變其同數爲 x ，則地變爲 y ， $y = f(x)$ 。乃令 x 變爲 $x + \Delta x$ ，則地變爲 $y + \Delta y$ 。惟因戌爲地之函數，若地變爲 $y + \Delta y$ ，則戌變爲 $z + \Delta z$ ， $z = g(y)$ 。其 Δx ， Δy ， Δz 各數爲地之他函數，

二十三

求多項函數之微分

第十五款 如有同變數之若干函數合成一多項式，則求此多項式之微分亦可設一專法。

設亥地人為變數天之任何函數，欲求 $\text{戊} = \text{甲} \text{上} \text{乙} \text{亥} \text{上} \text{丙} \text{地} \text{上} \text{戊} \text{人}$ 之微分，若天變為 $\text{丙} \text{上} \text{辛}$ 而其同時中亥變為 $\text{亥} \text{上} \text{巴} \text{辛} \text{上} \text{午} \text{辛} \text{上} \dots\dots$ ，地變為 $\text{地} \text{上} \text{巴} \text{辛} \text{上} \text{午} \text{辛} \text{上} \dots\dots$ ，人變為 $\text{人} \text{上} \text{巴} \text{辛} \text{上} \text{午} \text{辛} \text{上} \dots\dots$ ，戊變為 $\text{戊}'$ ，故得

$$\text{戊}' = \left\{ \begin{array}{l} \text{甲} \text{上} \text{乙} \text{亥} \text{上} \text{丙} \text{地} \text{上} \text{戊} \text{人} \\ \text{上} (\text{乙} \text{巴} \text{上} \text{丙} \text{巴}' \text{上} \text{戊} \text{巴}) \text{辛} \\ \text{上} (\text{乙} \text{午} \text{上} \text{丙} \text{午}' \text{上} \text{戊} \text{午}) \text{辛} \\ \text{上} \dots\dots \end{array} \right.$$

。如以戊代其右邊之上層，移其項而以辛約

之，則得已知 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}' \text{上} \text{戊}} = \text{乙} \text{巴} \text{上} \text{丙} \text{巴}' \text{上} \text{戊} \text{巴} \text{上} (\text{乙} \text{午} \text{上} \text{丙} \text{午}' \text{上} \text{戊} \text{午}) \text{辛} \text{上} \dots\dots$ 。

觀其各限可見 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}' \text{上} \text{戊}}$ 為戊之微係數，而 巴 與 $\text{巴}'$ 及 $\text{巴}''$ 為亥與地及人之微係數。所以 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}' \text{上} \text{戊}} = \frac{\text{辛}}{\text{乙} \text{巴} \text{上} \text{丙} \text{巴}' \text{上} \text{戊} \text{巴} \text{上} (\text{乙} \text{午} \text{上} \text{丙} \text{午}' \text{上} \text{戊} \text{午}) \text{辛} \text{上} \dots\dots}$ ，而 $\frac{\text{辛}}{\text{戊}' \text{上} \text{戊}} = \text{乙} \text{巴} \text{上} \text{丙} \text{巴}' \text{上} \text{戊} \text{巴} \text{上} \text{人}$ 。故得專

法如左：

凡有同變數之各函數和較而成之多項式，則其總函數之微分必等于各函數微分之和較，而其常數之項恆變爲○。