微積溯源序

微積溯源八卷，前四卷爲微分術，後四卷爲積分術，乃算學中最深之事也。余既與西士傅蘭雅譯畢代數術二十五卷，更思求其進境，故又與傅君譯此書焉。先是咸豐年間，曾有海寧李壬叔與西士偉烈亞力譯出代微積拾級一書，流播海內。余素與壬叔相友，得讀其書，粗明微積二術之梗概。所以又譯此書者，蓋欲補其所略也。書中代數之式甚繁，校算不易，則劉君省菴之力居多。

今刻工已竣矣，故序之，曰：吾以爲古時之算法惟有加減而已。其乘與除乃因加減之不勝其繁，故更立二術以使之簡易也。開方之法，又所以濟除法之窮者也。蓋算學中自有加減乘除開方五法，而一切淺近易明之數，無不可通矣。惟人之心思智慮日出不窮，往往以能人之所不能者爲快。遇有窒礙難通之處，輒思立法以濟其窮。故有減其所不可減而正負之名不得不立矣；除其所不能除而寄母通分之法又不得不立矣。代數中種種記號之法皆出於不得已而立者也，惟每立一法必能使繁者爲簡，難者爲易，遲者爲速，而算學之境界藉此得更進一層。如是屢進不已而所立之法於是乎日多矣。微分積分者，蓋又因乘除開

方之不勝其繁，且有窒礙難通之處，故更立此二術以濟其窮，又使簡易而速者也。試觀圜徑求周、真數求對等事，雖無微分積分之時，亦未嘗不可求，惟須乘除開方數十百次。其難有不可言喻者，不如用微積之法理明而數捷也。然則謂加減乘除開方代數之外者，更有二術焉，一曰微分，一曰積分可也。其積分術爲微分之還原，猶之開平方爲自乘之還原、除法爲乘之還原、減法爲加之還原也。然加與乘其原無不可還，而微分之原有可還有不可還，是猶算式中有不可開之方耳，又何怪焉。如必曰加減乘除開方已足供吾之用矣，何必更究其精？是舍舟車之便利而必欲負重遠行也。其用力多而成功少，蓋不待智者而辨矣。

同治十三年九月十八日，金匱華蘅芳序。

微積溯源卷一

論變數與函數之變比例

第一款　用代數以解任何曲線，其中每有幾種數，其大小恆有定率者，如橢圓之長徑、拋物線之通徑、雙曲線之屬徑之類是也。又每有幾種數可有任若干相配之同數，其大小恆不能有定率者，如曲線任一點之縱橫線是也。

數既有此兩種分別，則每種須有一總名以賅之，故名其有定之數曰常數，無定之數曰變數。

凡常數之同數不能增亦不能損。

凡變數之同數，能變爲大，亦能變爲小。故其從此同數變至彼同數之時，必歷彼此二數間最小最微之各分數。

如平圓之半徑爲常數，而其任一段之弧或弧之弦矢切割各線、及各線與弧所成之面，

皆謂之變數。

橢圓之長徑短徑皆爲常數，而其曲線之任一段或曲線上任一點之縱橫線，並其形內形外所能作之任何線或面或角，皆謂之變數。

拋物線之通徑爲常數，而其曲線之任一段或任一點之縱橫線、或弧與縱橫線所成之面，皆謂之變數。他種曲線亦然。

凡常數，恆以甲乙丙丁等字代之。凡變數，恆以天地人等字代之。

第二款　若有彼此二數皆爲變數，此數變而彼數因此數變而亦變者，則彼數爲此數之函數。

如平圓之八線皆爲弧之函數。若反求之，亦可以弧爲八線之函數。

又如重學中令物體前行之力，與其物所行之路，皆爲時刻之函數。

如有式$\text{地} = \dfrac{\text{甲} \top \text{天}}{\text{甲} \perp \text{天}}$，此式中甲爲常數，天爲自主之變數，地爲天之函數。故地之同數能以天與甲明之。

如有式$\text{天} = \dfrac{\text{地} \perp \text{一}}{\text{甲}(\text{地} \top \text{一})}$，此式中甲與一皆爲常數，地爲自主之變數，天爲地之函數，故天之同數可以地與甲及一明之。

如有式$\text{戊} = \text{甲} \perp \text{乙天} \perp \text{丙天}^{\text{二}}$或$\text{戊} = \sqrt{\text{甲}^{\text{二}} \perp \text{乙天} \perp \text{天}^{\text{二}}}$或$\text{戊} = \dfrac{\text{丙} \perp \text{天}^{\text{二}}}{\text{甲} \perp \sqrt{\text{乙天}}}$，其甲

乙丙爲常數，天爲自變之數，而戊皆爲天之函數。

凡函數之中，可以有數箇自主之變數。

如有式$戊 = 甲天^{二} \perp 乙天地 \perp 丙地^{二}$則天與地皆爲自主之變數，戊爲天地兩變數之函數。

凡變數之函數，其形雖有多種，然每可化之，使不外乎以下數類$天^{卯}$、$甲^{天}$、正弦天、餘弦天等類是也。

凡函數爲$天^{卯}$之類，其指數爲常數，則可從天之卯方，用代數之常法化之。而以有窮之項明其函數之同數。故謂之代數函數，亦謂之常函數。

如有式$戊 = 甲天^{三} \perp \frac{\sqrt{甲^{二} \perp 天^{二}}}{乙天^{二} \top 丙^{二}天}$，此種函數，其戊之同數可用加減乘除開方等法而得之。

凡函數爲甲、對天之類，則其函數之同數不能以有窮之項明之。故謂之越函數。越者，超越於尋常之意也。

凡函數爲正弦天、餘弦天及正切天、正割天之類，其函數之同數皆可以平圓之各線明之。故謂之圓函數，亦謂之角函數。

以上三種函數常函數、越函數、圓函數也。，若已知天之同數，則其函數之同數卽可求得。故

名此三種函數爲陽函數。因其顯而易明，故謂之陽函數。

更有他種函數，必先解其方程式，令函數中之各變數分開，然後能求其同數者。

如有式$戊天=\frac{戊丅天}{戊丄天}$，其戊爲天之函數，如欲求其戊與天相配之同數，必先解其二次方程式始能通。

此種之式名曰天之陰函數。因其雜糅未明，故謂之陰函數。反之亦可云天爲戊之陰函數。

如解其方程式爲$戊=\frac{二}{一}\left[天丄\frac{天}{一}丄\frac{天}{\sqrt{天^{四}丄六天^{二}丄一}}\right]$，則戊變爲天之陰函數。

整理者註：右最後一句云戊變爲天之陰函數，這顯而易見是錯誤的。原文大英百科全書卷第九之 Fluxions 作 explicit function，卽陽函數，此當爲譯者譯錯。目前由於校勘凡例未定，暫留此字，待討論後決定修改與否。

昔代數之家，凡遇須用開平方之處，每于其式之左旁作一根字以記之，如根天爲天之平方根。後又變通其法，而以根號記之，如$\sqrt{天}$爲天之平方根。此代數之例也。茲可仿照此例，凡遇某變數之函數，亦用一號以記之。所以凡有任何變數之函數，皆可書一函字于其變數之旁，以爲識別。

如天之函數則作函天，或作函(天)，皆言天之函數也。

所以凡見變數之左旁有一函字者，其函字並非代表天之倍數，其意謂是某變數之函數

也。

用此法則可將$戌 = 天^{卯}$、$戌 = 甲^{天}$、$戌 = 對天$、$戌 = 正弦天$、$戌 = 餘弦天$ 各種之式以一語賅之，謂之$戌 = 函天$ 或$戌 = 函(天)$。

若函數從兩箇變數而成，其天與地皆爲自主之變數，其式如$戌 = 甲天^{二} \perp 乙天地 \perp 丙地^{二}$ 者，則可以$戌 = 函(天, 地)$ 別之。函數爲多箇變數所成者，仿此推之。

惟函數只指其變數言之，若甲乙丙丁各常數。雖多不論。

第三款　凡觀此書者，必先明變數與函數變比例之限。如幾何原本中證明平圓之面積必比其外切多等邊形之面積微小，若其外切多等邊形之邊愈多，則其面積愈近于平圓之面積。所以可設平圓之面積爲任何小，而切其圓外爲多等邊形，可使多等邊形之面積與平圓之面積較其數甚小于所設之圓面積；再設其多等邊形之面積爲級數，而其邊之變率可每變多若干倍，則其多等邊形之面積必漸與平圓之面積相近而以平圓爲限。雖切于圓外之多邊形其邊任變至若何多，其面積總不能等于平圓之面積。然其級數之總數可比平圓之面積所差甚微，其較數之小，可小至莫可名言。

若用此法于圓內容多等邊形，則其多等邊形之面積亦以平圓之面積爲限。

總言之，凡平圓之周爲其內容外切多等邊形之限。

如代數術第二百六十六款言，如令甲代平圓之任何弧，則$\frac{甲}{正弦甲}$恆大于半徑，而$\frac{甲}{正切甲}$恆小于半徑。然令其弧爲任何小，則其式之同數必甚近于半徑，而其所差之數可小至不能以言語形容。所以此兩數中間之數爲一。即半徑也。故其公限亦爲一。

由此可見凡弧與弦切，三者之中取其二以相較，其比例之限必相等。

如代數術中亦會證甲弧爲卯正切$\frac{甲}{卯}$與卯正弦$\frac{甲}{卯}$兩式之限，惟其卯必爲任何大。

依代數術第五十六款之例$一⊥天⊥天^{二}⊥天^{三}\cdots\cdots⊥天^{卯丅一}$即$\frac{一丅天^{卯}}{一丅天}$。若天變至小于一，而卯大至無窮，則$天^{卯}＝〇$，而式變爲$\frac{一}{一丅天}$。所以任取其級數若干項之和，必小于$\frac{一}{一丅天}$。惟其項愈多，則與$\frac{一}{一丅天}$愈相近，而其所差之數可小至莫可名言。

則可見$\frac{一}{一丅天}$必爲其諸級數之限。

若依二項例之式$\left(一⊥\frac{天}{卯}\right)^{卯}＝一⊥\frac{天}{一}⊥\frac{天^{二}}{一\cdot二}\left(一⊥\frac{一}{卯}\right)⊥\frac{天^{三}}{一\cdot二\cdot三}\left(一⊥\frac{一}{卯}\right)\left(一⊥\frac{二}{卯}\right)⊥\cdots\cdots$，其卯之同數無論如何，必合于理。惟卯若爲大數，則其各項之

乘數$一丄\frac{二}{卯}$、$一丄\frac{三}{卯}$之類與一相較之差甚小，若卯愈大，則其差愈微；若令卯為任意大，則各乘數可略等于一，所以得$\left(一丄\frac{天}{卯}\right)^{卯}=一丄\frac{天}{一}丄\frac{天^{二}}{一\cdot二}丄\frac{天^{三}}{一\cdot二\cdot三}丄$……㊙。

曾在代數術第一百七十七款中證㊙式之右邊為由函數$戊^{天}$而成。其戊之同數因為二.七一八二八一八，即訥白爾對數之根也。所以卯若愈大則$\left(一丄\frac{天}{卯}\right)^{卯}$必愈與$戊^{天}$相近，而其限為$戊^{天}$。如令$天=一$，則$\left(一丄\frac{天}{卯}\right)^{卯}$之限為戊，即$\left(一丄\frac{天}{卯}\right)^{卯}一戊=二.七一八二八一八$，故其函數為常數。

第四款 惟因函數之同數本從變數而生，故變數之同數與函數之長數比則為$\frac{戊'丅戊}{辛}=二天丄辛$。

設函數之式為$戊=天^{二}$，令天長數為辛，而以函數之新同數為$戊'$則

$$\text{戊}' = (\text{天}\perp\text{辛})^{\text{三}}\begin{cases}=\text{天}^{\text{三}}\perp\text{三天}^{\text{二}}\text{辛}\perp\text{三天辛}^{\text{二}}\perp\text{辛}^{\text{三}}\\=\text{戊}\perp\text{三天}^{\text{二}}\text{辛}\perp\text{三天辛}^{\text{二}}\perp\text{辛}^{\text{三}}\end{cases}$$

，而$\dfrac{\text{辛}}{\text{戊}'\top\text{戊}} = \text{三天}^{\text{二}}\perp\text{三天辛}\perp\text{辛}^{\text{二}}$。可見天變爲$\text{天}\perp\text{辛}$之時，其函數$\text{戊}$必變爲$\text{戊}\perp\text{三天}^{\text{二}}\text{辛}\perp\text{三天辛}^{\text{二}}\perp\text{辛}^{\text{三}}$，其所長之數爲$\text{三天}^{\text{二}}\text{辛}\perp\text{三天辛}^{\text{二}}\perp\text{辛}^{\text{三}}$。此式中之各項皆爲辛之整方與他數相乘所成。又可見變數與函數之變比例，其式爲$\text{三天}^{\text{二}}\text{辛}\perp\text{三天辛}^{\text{二}}\perp\text{辛}^{\text{三}}$，其初項$\text{三天}^{\text{二}}$與天之長數辛無相關。

設函數之式爲$\text{戊} = \text{天}^{\text{四}}$。令天之長數爲辛，而以$\text{戊}'$爲函數之新同數，則$\text{戊}' = \text{戊}\perp\text{四天}^{\text{三}}\text{辛}\perp\text{六天}^{\text{二}}\text{辛}^{\text{二}}\perp\text{四天辛}^{\text{三}}\perp\text{辛}^{\text{四}}$，而$\dfrac{\text{辛}}{\text{戊}'\top\text{戊}} = \text{四天}^{\text{三}}\perp\text{六天}^{\text{二}}\text{辛}\perp\text{四天辛}^{\text{二}}\perp\text{辛}^{\text{三}}$。

由此可見天若變爲$\text{天}\perp\text{辛}$，則其各函數之新同數如左：

如$\text{戊} = \text{天}^{\text{二}}$，則$\text{戊}' = \text{戊}\perp\text{二天辛}\perp\text{辛}^{\text{二}}$。如$\text{戊} = \text{天}^{\text{三}}$，則$\text{戊}' = \text{戊}\perp\text{三天}^{\text{二}}\text{辛}\perp\text{三天辛}^{\text{二}}\perp\text{辛}^{\text{三}}$。如$\text{戊} = \text{天}^{\text{四}}$，則$\text{戊}' = \text{戊}\perp\text{四天}^{\text{三}}\text{辛}\perp\text{六天}^{\text{二}}\text{辛}^{\text{二}}\perp\text{四天辛}^{\text{三}}\perp\text{辛}^{\text{四}}$。其餘類推。

總言之，若以卯爲天之任何整指數，而令天之長數爲辛，又以巳午未申等字挨次而代

辛之各方之倍數，則函數$戊＝天^{卯}$之新同數必爲$戊'＝辛⊥巳辛⊥午辛^{二}⊥未辛^{三}⊥申辛^{四}⊥\cdots\cdots$。由是知函數之新同數必爲級數，其初項戊爲函數之原同數，其餘各項爲天之長數辛之各整方，以巳午未申之類爲各倍數，其各倍數皆爲天之別種函數，其式亦從本函數而生。

由以上各式又可見函數爲$戊＝天^{二}$、$戊＝天^{三}$、$戊＝天^{四}$之類，則其變數與函數之變比例必爲$\frac{辛}{戊'丅戊}＝二天⊥辛$、$\frac{辛}{戊'丅戊}＝三天^{二}⊥三天辛⊥辛^{二}$、$\frac{辛}{戊'丅戊}＝四天^{三}⊥六天^{二}辛⊥四天辛^{二}⊥辛^{三}$之類。總之若以卯爲天之整指數，則$戊＝天^{卯}$之變比例必爲$\frac{辛}{戊'丅戊}＝巳⊥午辛⊥未辛^{二}⊥申辛^{三}⊥\cdots\cdots$。由此可見，變數天之長數與函數$天^{卯}$之長數其變比例$\frac{辛}{戊'丅戊}$之同數$巳⊥午辛⊥未辛^{二}⊥申辛^{三}⊥\cdots\cdots$可分之爲兩式，其一式爲巳，此式與天之長數辛無相關；又一式爲$午辛⊥未辛^{二}⊥申辛^{三}⊥\cdots\cdots$。卽$辛\left(午⊥未辛⊥申辛^{二}⊥\cdots\cdots\right)$。此式因以辛爲乘數，故辛若變小，其數亦必隨辛而變小。如令辛爲任何小，則此式之數可小至甚近于〇。故此數可以不計，而以巳爲變比例之限。

設有繁函數之式$\text{戊}=\text{甲}\perp\text{乙天}\perp\text{丙天}^{二}$，令天之長數爲辛，則天變爲$\text{天}\perp\text{辛}$之時，其函數之同數必變爲$\text{戊}\begin{cases}=\text{甲}\perp\text{乙}(\text{天}\perp\text{辛})\perp\text{丙}(\text{天}\perp\text{辛})^{二}\\=\text{甲}\perp\text{乙天}\perp\text{丙天}^{二}\perp(\text{乙}\perp\text{二丙天})\text{辛}\perp\text{丙辛}^{二}\end{cases}$，故$\text{戊}'\top\text{戊}=(\text{乙}\perp\text{二丙天})\text{辛}\perp\text{丙辛}^{二}$，而$\dfrac{\text{辛}}{\text{戊}'\top\text{戊}}=\text{乙}\perp\text{二丙天}\perp\text{丙辛}$。其$\text{乙}\perp\text{二丙天}$爲本函數變比例之限。

以此法偏試各種特設之函數，見其皆有相類之性情，所以例設如左。

例曰：命任何自主之變數爲天，而令天之任何函數等于戊，則天變爲$\text{天}\perp\text{辛}$之時，函數之新同數爲$\text{戊}'=\text{戊}\perp\text{巳辛}\perp\text{午辛}^{二}\perp\text{未辛}^{三}\perp\cdots\cdots$，其變數與函數之變比例爲$\dfrac{\text{辛}}{\text{戊}'\top\text{戊}}=\text{巳}\perp\text{午辛}\perp\text{未辛}^{二}\perp\text{申辛}^{三}\perp\cdots\cdots$。此式中之初項巳爲變比例之限，無論何種函數，其限皆可依此比例求之。

由以上所論變數之長數與函數之長數相關之理，可于算學中開出兩種極廣大極精微之法。

其第一種爲有任何變數之任何函數而求其變數與函數變比例之限。

其第二種爲有任何變數與函數變比例之限而求其函數之原式。

此二種法，若細攷其根源，卽奈端所謂正流數、反流數也；亦卽來本之所謂微分算術、積分算術也；又卽拉果蘭諸所謂函數變例也。

論各種函數求微分之公法

第五款 若函數之式爲$戊 = 天^{二}$，令天變爲$天 丄 辛$，則函數之新同數必爲$戊' = 戊 丄 二天辛 丄 辛^{二}$，其與原同數之較爲$戊' 丅 戊$，卽$二天辛 丄 辛^{二}$，此式之初項$二天辛$，名之曰溢率。

依同理推之，若函數之式爲$戊 = 天^{三}$，令天變爲$天 丄 辛$，則函數之新同數爲$戊' = 戊 丄 三天^{二}辛 丄 三天辛^{二} 丄 辛^{三}$，其與原同數之較爲$戊' 丅 戊$，卽$三天^{二}辛 丄 三天辛^{二} 丄 辛^{三}$。其初項$三天^{二}辛$爲溢率。

若函數之式爲$戊 = 天^{四}$，而天變爲$天 丄 辛$，則函數之新同數與原同數之較爲$四天^{三}辛 丄 六天^{二}辛^{二} 丄 四天辛^{三} 丄 辛^{四}$，而其溢率爲$四天^{三}辛$。

總言之，凡天之函數無論爲某方，恆可以$天 丄 辛$代其天，而變其函數之同數爲$戊 丄 巳辛 丄 午辛^{二} 丄 未辛^{三} 丄 \cdots\cdots$，乃以原同數戊減之得$巳辛 丄 午辛^{二} 丄 未辛^{三} 丄 \cdots\cdots$，而取其初項$巳辛$爲溢率。

準此推之，則知天之溢率卽爲其長數辛。惟因函數之溢率每藉天之長數而生，故微分

術中，恆以彳天代天之溢率。其彳號者，非天之倍數，不過是天之溢率耳。溢率之名，本爲流數術中所用。而彳號者，卽微字之偏旁，故微分之術用之。

如有式戊＝天^{二}，則彳戊＝二天彳天。此式之意謂戊之微分等于二天乘天之微分。猶言函數戊之溢率等于以二天乘其天之溢率也。如有式戊＝天^{三}，則彳戊＝三天^{二}彳天。此式之意謂戊之微分等于三天^{二}乘天之微分。猶言函數戊之溢率等于以三天^{二}乘其天之溢率也。

第六款　惟因每遇戊＝天^{二}，則彳戊＝二天彳天，所以可寫之如$\frac{\text{彳戊}}{\text{彳天}}$＝二天。此爲天微分之倍數，亦謂之微係數。

又依前法推之，如函數之式爲戊＝天^{三}，則彳戊＝三天^{二}彳天，而$\frac{\text{彳戊}}{\text{彳天}}$＝三天^{二}。

其三天^{二}爲原函數戊＝天^{三}之微係數。

總言之，無論何種函數之微係數，皆可以$\frac{\text{彳戊}}{\text{彳天}}$代之。而函數之新同數爲戊⊥巳辛⊥午辛^{二}⊥……，所以$\frac{\text{彳戊}}{\text{彳天}}$＝巳，其巳爲天之他函數，其形每隨函數之式而變。如之戊之同數爲何式，則其巳之同數卽易求得。

凡函數之欲求微分者，先于其式之左旁作一彳號以記之。如有$[(\text{甲}\perp\text{天})(\text{乙}^{\text{二}}\,\text{丅}\,\text{天}^{\text{二}})]$式，欲求其微分，則可先作$\text{彳}[(\text{甲}\perp\text{天})(\text{乙}^{\text{二}}\,\text{丅}\,\text{天}^{\text{二}})]$。

凡函數之欲求微係數者，于其式之左旁作彳號，又以彳天為其分母。如有$[(\text{甲}\perp\text{天})(\text{乙}^{\text{二}}\,\text{丅}\,\text{天}^{\text{二}})]$式，欲求其微係數，則作$\dfrac{\text{彳}[(\text{甲}\perp\text{天})(\text{乙}^{\text{二}}\,\text{丅}\,\text{天}^{\text{二}})]}{\text{彳天}}$。

從以上各款諸說，易知求微分之公法。

法曰：無論天之任何函數，欲求微分，則以$\text{天}\perp\text{辛}$代其原式中之天而詳之。依辛之整方數自小而大序之，取其初有辛之項，而以彳天代其辛即得。

如有式$\text{戊}=\text{甲天}\perp\text{乙天}^{\text{二}}$，欲求其微係數，則以$\text{天}\perp\text{辛}$代其天，而令函數之新同數為$\text{戊}'$，則得

$$\text{戊}'\begin{cases}=\text{甲}(\text{天}\perp\text{辛})\perp\text{乙}(\text{天}\perp\text{辛})^{\text{二}}\\=\text{甲天}\perp\text{乙天}^{\text{二}}\perp(\text{甲}\perp\text{二乙天})\text{辛}\perp\text{乙辛}^{\text{二}}\\=\text{戊}\perp(\text{甲}\perp\text{二乙天})\text{辛}\perp\text{乙辛}^{\text{二}}\end{cases}$$

。取其初有辛之項$(\text{甲}\perp\text{二乙天})\text{辛}$，以$\text{彳天}$代其辛，即得$\text{彳戊}=(\text{甲}\perp\text{二乙天})\text{彳天}$，故其$\dfrac{\text{彳戊}}{\text{彳天}}=\text{甲}\perp\text{二乙天}$。

第七款　上款之法，必令天變為$\text{天}\perp\text{辛}$，而詳其函數之同數為級數，此乃論其立法之理當如是

也。惟求得級數之後，所用者僅爲其辛一方之項，則但能求得此項已足用矣。前于第四款中言此項之倍數爲變數與函數變比例之限，又于第六款中言此項之倍數謂之微係數。然則求函數之微係數與求變數與函數變比例之限，其法本無異也。

如有式$戊 = \frac{天}{甲^{二}}$，則$戊' = \frac{天 \perp 辛}{甲^{二}}$。而$戊 \top 戊' = \frac{天}{甲^{二}} \top \frac{天 \perp 辛}{甲^{二}}$，即$戊 \top 戊' = \frac{天(天 \perp 辛)}{\top 甲^{二}辛}$，故其變比例之式爲$\frac{辛}{戊 \top 戊'} = \frac{天(天 \perp 辛)}{\top 甲^{二}}$。惟此式可不待詳爲級數而始得其變比例之限，因可見辛愈小，則其式愈近于$\top\frac{天^{二}}{甲^{二}}$，故此式必即爲$\frac{彳天}{彳戊}$之同數，所以得$彳戊 = \top\frac{天^{二}}{甲^{二}彳天}$。

若以戊爲任何函數之原同數，而以$天 \perp 辛$代其天，則其函數之新同數爲$戊' = 戊 \perp 巳辛 \perp 午辛^{二} \perp 未辛^{三} \perp \cdots\cdots$，即得$\frac{辛}{戊' \top 戊} = 巳 \perp 午辛 \perp 未辛^{二} \perp \cdots\cdots$。惟因$\frac{辛}{戊' \top 戊}$之限爲巳，故得$\frac{彳天}{彳戊} = 巳$，而$彳戊 = 巳彳天$。

由此得一解曰：凡微分之術，其意專爲求任何變數與函數同時變大之限耳。

凡求任何函數之微分，不過將一尋常之代數式另用他法以變化之。因其變化之法與代

數中常用之法異，則不得不另有一名以別之，故謂之微分術。

第八款 凡變數與函數變比例之限，無論以何數爲主，其形必同。如戊爲天之函數，若天變爲$天 \perp 辛$，則戊變爲$戊 \perp 巳辛 \perp 午辛^{二} \perp 未辛^{三} \perp \cdots\cdots$。其巳、午、未各數俱爲天之他函數，從本函數所生。如令其$巳辛 \perp 午辛^{二} \perp 未辛^{三} \perp \cdots\cdots = 子$，則天與戊同時變大之數爲辛與子。如依代數術第一百六十三款之法反求其級數，則得$辛 = \frac{巳}{一}子 \top \frac{巳^{二}}{午}子^{二} \perp \cdots\cdots$，故其變數與函數之公比例爲$\frac{子}{辛} = \frac{巳}{一} \top \frac{巳^{二}}{午}子 \perp \cdots\cdots$。故$\frac{子}{辛}$之限爲$\frac{巳}{一}$，而$\frac{辛}{子}$之限爲巳，此即$\frac{一}{巳}$也。

第九款 由此易知，凡有相等之函數，則其微係數亦必相等。如戊與亥爲兩函數，而$戊 = 亥$，其天變爲$天 \perp 辛$之時，戊變爲$戊'$，亥變爲$亥'$，則$戊' = 亥'$，而$戊' \top 戊 = 亥' \top 亥$，故$\frac{辛}{戊' \top 戊} = \frac{辛}{亥' \top 亥}$。如以巳與午各爲其變比例之限，則$巳 = 午$。故$巳彳天 = 午彳天$，而$彳戊 = 彳亥$。由此可見，凡函數之式無論如何改形，若其同數無異者，則其微係數必同。如函數之原式爲$天^{三} \perp 甲^{三}$，若改其形爲$(天 \perp 甲)(天^{二} \top 甲天 \perp 甲^{二})$，則此式之微係

數與原式之微係數必無異。

惟此理，若反言之而謂相等之微係數必從相等之函數而生，則不盡然。如函數之式爲戊＝甲⊥乙天，令天變爲天⊥辛，而戊變爲戊′，則戊′＝甲⊥乙天⊥乙辛＝戊⊥乙辛，故得$\frac{辛}{戊'⊤戊}$＝乙。觀此可知，其常數之項甲不能入變比例之限內，故其微係數必與戊＝乙天之微係數無異。惟微係數乙既能屬於本函數甲⊥乙天，又能屬於他函數乙天，所以有下例。

例曰：凡變數與常數相加減之函數，其微係數中不見其加減之常數。惟變數與常數相乘除者，則其微係數中有常數爲倍數。

求兩函數相乘積之微分

第十款　凡變數之函數，無論其形如何，皆可以第六款之公法求其微分。然不如每種異形之函數各設一專法以求之，則更簡捷。

如有式戊＝未申，其未與申各爲天之函數。今欲得一法專能求未、申相乘積之微分，若令天變爲天⊥辛，則未、申二函數必變爲未′＝未⊥巳辛⊥午辛^{二}⊥……、申′＝

$\text{申}\perp\text{巳}'\text{辛}\perp\text{午}'\text{辛}^{二}\perp\cdots\cdots$，其巳、午爲由未函數所得之天之他函數∴其$\text{巳}'$、$\text{午}'$爲由申函數所得之天之他函數。

再令$\text{戊}'=\text{未}'\text{申}'$，則依法得$\text{戊}'=\text{未}'\text{申}'=\text{未申}\perp(\text{未巳}'\perp\text{申巳})\text{辛}\perp(\text{未午}'\perp\text{巳巳}'\perp\text{申午})\text{辛}^{二}\perp\cdots\cdots$。以戊代其未申，移項而以辛約之，則得$\frac{\text{辛}}{\text{戊}'\top\text{戊}}=\text{未巳}'\perp\text{申巳}\perp(\text{未午}'\perp\text{巳巳}'\perp\text{申午})\text{辛}\perp\cdots\cdots$。此式中之$\text{未巳}'$與申巳兩項乃天之他函數，而與辛無涉者，其餘各項俱有辛之各方爲乘數。設辛爲甚微，則其所乘之衆項亦甚微，故其變比例之限爲$\frac{\text{辛}}{\text{戊}'\top\text{戊}}=\text{未巳}'\perp\text{申巳}$。惟因$\text{巳}=\frac{\text{辛}}{\text{未}'\top\text{未}}$、$\text{巳}'=\frac{\text{辛}}{\text{申}'\top\text{申}}$，故可依第六款之法以$\frac{\text{彳天}}{\text{彳戊}}$代其$\frac{\text{辛}}{\text{戊}'\top\text{戊}}$∴以$\frac{\text{彳天}}{\text{彳未}}$代其$\frac{\text{辛}}{\text{未}'\top\text{未}}$∴以$\frac{\text{彳天}}{\text{彳申}}$代其$\frac{\text{辛}}{\text{申}'\top\text{申}}$。則得$\frac{\text{彳天}}{\text{彳戊}}=\text{未}\frac{\text{彳天}}{\text{彳申}}\perp\text{申}\frac{\text{彳天}}{\text{彳未}}$，而$\text{彳戊}=\text{未彳申}\perp\text{申彳未}$。故得專法如左∴

凡求同變彼此兩函數相乘積之微分，法將此函數乘彼函數之微分，又將彼函數乘此函數之微分，而以乘得之兩式相加卽得。

求多函數連乘積之微分

第十一款　前款論函數之式爲戊＝未申，則彳戊＝未彳申⊥申彳未，所以$\frac{戊}{彳戊}=\frac{未}{彳未}\perp\frac{申}{彳申}$。

由此推之，如戊爲三箇同變數之函數連乘如未酉亥，可令其申＝酉亥，則亦能爲戊＝未申而$\frac{戊}{彳戊}=\frac{未}{彳未}\perp\frac{申}{彳申}$。惟因申＝酉亥，可依同例得$\frac{申}{彳申}=\frac{酉}{彳酉}\perp\frac{亥}{彳亥}$，所以$\frac{戊}{彳戊}=\frac{未}{彳未}\perp\frac{酉}{彳酉}\perp\frac{亥}{彳亥}$。若仍將未申代還其戊而以常法化之，則爲彳戊＝酉亥彳未⊥未亥彳酉⊥未酉彳亥。故得專法如左：

凡求同變數之若干函數連乘積之微分，法以各本函數之微分與其餘之各他函數連乘，而以各乘得之式相加即得。

此法易用以總式以明之。無論其同變數之函數有若干數連乘，皆可以一例推之：

如多函數連乘之式爲未申酉亥，則其微分之式爲彳(未申酉亥)＝未申酉亥$\left[\frac{未}{彳未}\perp\frac{申}{彳申}\perp\frac{酉}{彳酉}\perp\frac{亥}{彳亥}\right]$。

求變數之分函數微分

第十二款　若有分數之式，其母子爲同變數之各函數，則欲得其求微分之專法，可令戌 $=\frac{\text{申}}{\text{未}}$，則未 $=$ 戌申，而彳未 $=$ 戌彳申 $\perp$ 申彳戌。乃以其戌之同數 $\frac{\text{申}}{\text{未}}$ 代其戌，則彳未 $=\frac{\text{申}}{\text{未彳申}}\perp$ 申彳戌，而彳戌 $=\frac{\text{申}^{二}}{\text{申彳未}\top\text{未彳申}}$。故得專法如左：

凡同變量之函數，若爲分數，則求微分之法可將分母乘其分子之微分，乃以分子乘分母之微分減之，而以分母之平方約之。

此法亦可用一總式以明之。

惟因戌 $=\frac{\text{申}}{\text{未}}$ 之微分爲 $\frac{\text{戌}}{\text{彳戌}}=\frac{\text{未}}{\text{彳未}}\top\frac{\text{申}}{\text{彳申}}$，所以戌 $=\frac{\text{亥地}}{\text{未申酉}}$ 之微分爲 $\frac{\text{戌}}{\text{彳戌}}=\frac{\text{未}}{\text{彳未}}\perp\frac{\text{申}}{\text{彳申}}\perp\frac{\text{酉}}{\text{彳酉}}\top\frac{\text{亥}}{\text{彳亥}}\top\frac{\text{地}}{\text{彳地}}$。由此推之，則戌 $=\frac{\text{亥地}}{\text{未申酉}}$ 之微分當爲 $\frac{\text{戌}}{\text{彳戌}}=\frac{\text{未申酉}}{\text{彳(未申酉)}}\top\frac{\text{亥地}}{\text{彳(亥地)}}$。又依第十一款之例，其 $\frac{\text{未申酉}}{\text{彳(未申酉)}}=\frac{\text{未}}{\text{彳未}}\perp\frac{\text{申}}{\text{彳申}}\perp\frac{\text{酉}}{\text{彳酉}}$，

而 $\frac{\text{亥地}}{\text{彳}(\text{亥地})} = \frac{\text{亥}}{\text{彳亥}} \perp \frac{\text{地}}{\text{彳地}}$，故得 $\frac{\text{戌}}{\text{彳戌}} = \frac{\text{未}}{\text{彳未}} \perp \frac{\text{申}}{\text{彳申}} \perp \frac{\text{酉}}{\text{彳酉}} \top \frac{\text{亥}}{\text{彳亥}} \top \frac{\text{地}}{\text{彳地}}$。由是知若有分數之函數，其分母分子爲任若干同變數之函數連乘之積如 $\frac{\text{亥地}}{\text{未申酉}}$ 者，可以 $\text{彳}\left(\frac{\text{亥地}}{\text{未申酉}}\right) = \frac{\text{亥地}}{\text{未申酉}}\left[\frac{\text{未}}{\text{彳未}} \perp \frac{\text{申}}{\text{彳申}} \perp \frac{\text{酉}}{\text{彳酉}} \top \frac{\text{亥}}{\text{彳亥}} \top \frac{\text{地}}{\text{彳地}}\right]$ 之式明之。

第十三款 茲欲攷任何函數地之任何乘方求微分之專法。其地或爲自變之數，或爲他變之函數，皆可。

先設 $\text{戌} = \text{地}^{\text{卯}}$，其卯爲任何整數，則其函數之詳式必有卯箇地連乘如 $\text{戌} = \text{地}\cdot\text{地}\cdot\text{地}\cdot\text{地}\cdots\cdots$。則依第十一款之例，$\frac{\text{戌}}{\text{彳戌}} = \frac{\text{地}}{\text{彳地}} \perp \frac{\text{地}}{\text{彳地}} \perp \frac{\text{地}}{\text{彳地}} \perp \cdots\cdots$，其項必有卯數。

故 $\frac{\text{戌}}{\text{彳戌}} = \frac{\text{地}}{\text{卯彳地}}$，而得 $\text{彳戌} = \frac{\text{地}}{\text{卯彳地}}\text{戌} = \text{卯地}^{\text{卯}\top\text{一}}\,\text{彳地}$。

設函數爲分指數如 $\text{戌} = \text{地}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}}$，則 $\text{戌}^{\text{卯}} = \text{地}^{\text{寅}}$。若依第九款之例，則得 $\text{卯戌}^{\text{卯}\top\text{一}}\,\text{彳戌} = \text{寅地}^{\text{寅}\top\text{一}}\,\text{彳地}$，而 $\text{彳戌} = \frac{\text{卯}}{\text{寅}} \times \frac{\text{戌}^{\text{卯}\top\text{一}}}{\text{地}^{\text{寅}\top\text{一}}}\,\text{彳地}$。惟因 $\text{戌} = \text{地}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}}$、$\text{戌}^{\text{卯}\top\text{一}} = \text{地}^{\text{寅}\top\frac{\text{卯}}{\text{寅}}}$，所以 $\frac{\text{戌}^{\text{卯}\top\text{一}}}{\text{地}^{\text{寅}\top\text{一}}} = \text{地}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}\top\text{一}}$，而 $\text{彳戌} = \frac{\text{卯}}{\text{寅}}\text{地}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}\top\text{一}}\,\text{彳地}$。

再設卯爲負指數，無論爲整數爲分數，則$戊 = 地^{丅卯}$，卽$戊 = \frac{一}{地^{卯}}$。若依第十二款之例，因其分子爲常數，故其分子之微分當爲〇，而得$彳戊 = 丅\frac{卯地^{卯丅一}彳地}{地^{二卯}}$，卽$彳戊 = 丅卯地^{丅卯丅一}彳地$。

合觀本款之各式，可見地之指數卯無論爲正爲負爲整爲分，其微分之式必爲$彳\left(地^{卯}\right) = 卯地^{卯丅一}彳地$。故得專法如左：

凡求函數乘方之微分，法將其原指數以一減之爲新指數，而以原指數爲其倍數，又以變數之微分乘之卽得。惟其原函數若本有常數爲倍數者，則其原倍數必仍在乘數之中。

如函數之式爲$戊 = 甲天^{卯}$，則其微分之式爲$彳\left(甲天^{卯}\right) = 卯甲天^{卯丅一}彳天$。

求函數諸乘方之微分更有簡便之法，可藉代數術第一百六十款與一百六十一款之二項例而得。所以于此不論者，因二項之例亦可由微分而得，余欲用微分之術證明二項之例以便于用，故俟後詳論之。

求變數平方根之微分

用前法已能求各負方之微分，惟因$\sqrt{地} = 地^{\frac{一}{二}}$為微分術中常見之式，所以必更設一最易之專法以便于用。

依本款求諸乘方微分之法，$彳\left(地^{\frac{一}{二}}\right) = \frac{一}{二}地^{\frac{一}{二}丅一}彳地$，即$彳\left(地^{\frac{一}{二}}\right) = \frac{一}{二}地^{丅\frac{一}{二}}彳地$，即$彳\left(\sqrt{地}\right) = \frac{彳地}{二\sqrt{地}}$。所以得專法如左：

凡求函數平方根之微分，法以函數之微分為實而二倍其原函數之平方根以約之卽得。

求重函數之微分

第十四款　設有地為天之函數而戊為地之函數，欲求其戊與天相配之微分。

令天變其同數為$天丄辛$，則地變為$地' = 地丄巳辛丄午辛^{二}丄未辛^{三}丄\cdots\cdots$。乃令$巳辛丄午辛^{二}丄未辛^{三}丄\cdots\cdots = 子$，則地變為$地丄子$。惟因戊為地之函數，若地變為$地丄子$，則戊變為$戊' = 戊丄巳'子丄午'子^{二}丄未'子^{三}丄\cdots\cdots$。其$巳'午'未'$各數為地之他函數，

與子及辛皆無相關。所以于此級數中，以子之同數$巳辛\perp午辛^{二}\perp\cdots\cdots$代之，則天變爲$天\perp辛$之時，其戊之同數必變爲$戊'=戊\perp巳'巳辛\perp(巳'午\perp午'巳^{二})辛^{二}\perp\cdots\cdots$。所以得$\frac{辛}{戊丅戊'}=巳'巳\perp(巳'午\perp午'巳^{二})辛\perp\cdots\cdots$。如令辛爲甚小，則其限必爲$\frac{辛}{戊丅戊'}=巳'巳$。惟因地爲天之函數，故$巳=\frac{彳天}{彳地}$。又因戊爲地之函數，故$巳=\frac{彳地}{彳戊}$。**整理者註**：上巳當爲巳'。 如知戊亦可爲天之函數，則$\frac{彳天}{彳戊}=\frac{辛}{戊丅戊'}=巳'巳$。由此可見，$\frac{彳天}{彳戊}=\frac{彳地}{彳戊}\times\frac{彳天}{彳地}$，而$彳戊=\left(\frac{彳地}{彳戊}\times\frac{彳天}{彳地}\right)彳天$。故得專法如左：

凡有地爲天之函數、戊爲地之函數而欲求其微分者，法先以戊專爲地之函數而求其微係數，又以地專爲天之函數而求其微係數，乃將兩微係數相乘，又以天之微分乘之卽爲戊之微分。

已知$\frac{彳地}{彳戊}\times\frac{彳天}{彳地}=\frac{彳天}{彳戊}$，如令$戊=天$，則變其式爲$\frac{彳地}{彳戊}\times\frac{彳天}{彳地}=\frac{彳天}{彳天}=一$，所以可作$\frac{彳地}{彳天}=\frac{\frac{彳天}{彳地}}{一}$。由是知：凡以天爲地之函數與以地爲天之函數，其兩微係數必可互爲倒數。以法爲實，以實爲法，謂之倒數。 此例可由第八款得之。

求多項函數之微分

第十五款　如有同變數之若干函數合成一多項式，則求此多項式之微分亦可設一專法。

設亥地人爲變數天之任何函數，欲求$\text{戊} = \text{甲} \perp \text{乙亥} \perp \text{丙地} \top \text{戊人}$之微分，若天變為$\text{天} \perp \text{辛}$而其同時中亥變為$\text{亥} \perp \text{巳辛} \perp \text{午辛}^{二} \perp \cdots\cdots$，地變為$\text{地} \perp \text{巳}'\text{辛} \perp \text{午}'\text{辛}^{二} \perp \cdots\cdots$，人變為$\text{人} \perp \text{巳}''\text{辛} \perp \text{午}''\text{辛}^{二} \perp \cdots\cdots$，戊變為$\text{戊}'$，故得

$$\text{戊}' = \begin{cases} \text{甲} \perp \text{乙亥} \perp \text{丙地} \top \text{戊人} \\ \perp (\text{乙巳} \perp \text{丙巳}' \perp \text{戊巳}'')\,\text{辛} \\ \perp (\text{乙午} \perp \text{丙午}' \perp \text{戊午}'')\,\text{辛}^{二} \\ \perp \cdots\cdots \end{cases}$$

。如以戊代其右邊之上層，移其項而以辛約之，則得已知$\dfrac{\text{辛}}{\text{戊}' \top \text{戊}} = \text{乙巳} \perp \text{丙巳}' \top \text{戊巳}'' \perp (\text{乙午} \perp \text{丙午}' \perp \text{戊午}'')\,\text{辛} \perp \cdots\cdots$。

觀其各限可見$\dfrac{\text{辛}}{\text{戊}' \top \text{戊}}$爲戊之微係數，而巳與$\text{巳}'$及$\text{巳}''$爲亥與地及人之微係數。所以其$\dfrac{\text{彳天}}{\text{彳戊}} = \dfrac{\text{彳天}}{\text{乙彳亥}} \perp \dfrac{\text{彳天}}{\text{丙彳地}} \top \dfrac{\text{彳天}}{\text{戊彳人}}$，而$\text{彳戊} = \text{乙彳亥} \perp \text{丙彳地} \top \text{戊彳人}$。故得專

法如左：

凡有同變數之各函數和較而成之多項式，則其總函數之微分必等于各函數微分之和較，而其常數之項恆變爲〇。

代函數求微分各題

第十六款　茲設數題以明之。

一題　設有$戊=甲天^{五}$，欲求其微分之式。

此式與公式$戊=甲天^{卯}$爲一類，所以可用第十三款之法求其微分得$彳戊=五甲天^{四}彳天$。

二題　設有$戊=\frac{甲}{天^{五}}$，欲求其微分之式。

惟因$戊=\frac{甲}{天^{五}}$卽$戊=甲天^{丁五}$，故如法求得$彳戊=丁五甲天^{丁六}彳天$，卽$彳戊=\frac{丁五甲彳天}{天^{六}}$。

三題　設有$戊=\sqrt{天^{三}}$，欲求其微分之式。

惟因戊 $=\sqrt{天^{三}}$ 卽戊 $=天^{\frac{二}{三}}$，故如法求得彳戊 $=\frac{二}{三}天^{\frac{二}{一}}彳天$，卽。彳戊 $=\frac{二}{三}彳天\sqrt{天}$。

四題　設有戊 $=甲天^{三}\perp乙天^{二}\perp丙天\perp戊$，欲求其微分之式。

此爲多項之函數，故如法求得彳戊 $=三甲天^{二}彳天\perp二乙天彳天\perp丙彳天$，卽彳戊 $=(三甲天^{二}\perp二乙天\perp丙)彳天$。其常數之項戊于求微分之時變爲〇而不見。

五題　設有戊 $=\left(甲\perp乙天^{卯}\right)^{巳}$，欲求其微分之式。

此可令地 $=甲\perp乙天^{卯}$，則戊 $=地^{巳}$ 而彳戊 $=巳地^{巳\top一}彳地$。惟因地$^{巳\top一}=\left(甲\perp乙天^{卯}\right)^{巳\top一}$，而彳地 $=\perp乙卯天^{卯\top一}彳天$，所以得

$彳戊=乙卯巳\left(甲\perp乙天^{卯}\right)^{巳\top一}\perp天^{卯\top一}彳天$。

此題之式若不用地代其括弧內之數，而以$甲\perp乙天^{卯}$爲一箇箇函數，其戊爲箇函數之某方而依第十三款之法求之，亦通。

六題　設有戊 $=天^{三}(甲\perp天)^{二}$，此題爲表明第十款之法。欲求其微分之式。

令巳 $=天^{三}$，午 $=(甲\perp天)^{二}$，則戊 $=巳午$。故得彳戊 $=午彳巳\perp巳彳午$。惟

因彳巳＝三天^{二}彳天，彳午＝二(甲⊥天)彳天，所以彳戌＝三天^{二}(甲⊥天)^{二}彳天⊥二天^{三}(甲⊥天)彳天，卽彳戌＝天^{二}(甲⊥天)(三甲⊥五天)彳天。

若平常習算之時，可不必用巳、午二數相代，而卽以原式如法求之，亦同。

七題　設有戌＝天(一⊥天)(一⊥天^{二})，其戌爲同變數之三箇函數連乘之積。欲求其微分之式。

依第十一款之法得彳戌＝(一⊥天)(一⊥天^{二})彳天⊥天(一⊥天^{二})彳天⊥二天^{二}(一⊥天)彳天，又以常法化之得彳戌＝(一⊥二天⊥三天^{二}⊥四天^{三})彳天。

又法可從本公式彳(未申酉)＝未申酉$\left[\frac{未}{彳未}\perp\frac{申}{彳申}\perp\frac{酉}{彳酉}\right]$得

彳戌＝天(一⊥天)(一⊥天^{二})$\left[\frac{天}{彳天}\perp\frac{一\perp天}{彳天}\perp\frac{一\perp天^{二}}{二天彳天}\right]$。此式易化爲彳戌＝(一⊥二天⊥三天^{二}⊥四天^{三})彳天。

八題　設有戌＝$\frac{一\perp天^{二}}{天}$，此爲分數之函數。欲求其微分之式。

依第十三款之法得彳戌＝$\frac{(一\perp天^{二})^{二}}{(一\perp天^{二})彳天\top二天^{二}彳天}$，卽彳戌＝$\frac{(一\perp天^{二})^{二}}{(一\top天^{二})彳天}$。

九題　設有戌＝$\frac{天^{四}\top天^{二}\perp一}{天^{三}\perp天}=\frac{天^{四}\top天^{二}\perp一}{天(天^{二}\perp一)}$，欲求其微分之式。

將所設之式與本公式$\text{彳}\left[\frac{\text{酉}}{\text{申未}}\right]=\frac{\text{酉}}{\text{申未}}\left[\frac{\text{未}}{\text{彳未}}\text{丄}\frac{\text{申}}{\text{彳申}}\text{丅}\frac{\text{酉}}{\text{彳酉}}\right]$相比，則$\text{天}=\text{未}$，$\text{天}^{\text{二}}\text{丄一}=\text{申}$，$\text{天}^{\text{四}}\text{丅天}^{\text{二}}\text{丄一}=\text{酉}$。所以得

$$\text{彳戊}=\frac{\text{天}^{\text{四}}\text{丅天}^{\text{二}}\text{丄一}}{\text{天}^{\text{三}}\text{丄天}}\left[\frac{\text{天}}{\text{彳天}}\text{丄}\frac{\text{一丄天}^{\text{二}}}{\text{二天彳天}}\text{丅}\frac{\text{天}^{\text{四}}\text{丅天}^{\text{二}}\text{丄一}}{\left(\text{四天}^{\text{三}}\text{丅二天}\right)\text{彳天}}\right]$$

，化之得

$$\text{彳戊}=\frac{\left(\text{天}^{\text{四}}\text{丅天}^{\text{二}}\text{丄一}\right)^{\text{二}}}{\text{丅}\left(\text{天}^{\text{六}}\text{丄四天}^{\text{四}}\text{丅四天}^{\text{二}}\text{丅一}\right)\text{彳天}}。$$

十題　設有$\text{戊}=\text{三地}^{\text{二}}$，$\text{地}=\text{天}^{\text{三}}\text{丄甲天}$此題爲表明第十四款之法。欲求其微分之式。

如法求之，則$\frac{\text{彳地}}{\text{彳戊}}=\text{六地}$，$\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}=\text{三天}^{\text{二}}\text{丄甲}$，所以$\frac{\text{彳地}}{\text{彳戊}}\times\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}=\text{六地}\left(\text{三天}^{\text{二}}\text{丄甲}\right)$，即$\frac{\text{彳地}}{\text{彳戊}}\times\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}=\text{一八天}^{\text{二}}\text{地丄六甲地}$。惟因$\text{彳戊}=\frac{\text{彳地}}{\text{彳戊}}\times\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}\text{彳天}$，故得$\text{彳戊}=\text{一八天}^{\text{二}}\text{地彳天丄六甲地彳天}$。

此式亦可由他法而得。蓋因其$\text{戊}=\text{三地}^{\text{二}}$，則$\text{彳戊}=\text{六地彳地}$。又因$\text{地}=\text{天}^{\text{三}}\text{丄甲天}$，則$\text{彳地}=\text{三天}^{\text{二}}\text{彳天丄甲彳天}$，故可將彳地之同數帶入彳戊之同數中，其所得之式亦爲$\text{彳戊}=\text{一八天}^{\text{二}}\text{地彳天丄六甲地彳天}$。