数学试题（四）参考答案

1-4.CDAB　　5-8.BACD　　9.ACD　　10.ABD　　11.ACD

12.$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　13.$\frac{\sqrt{6}}{4}$　　14.$-\frac{3}{2}$

7．解析：由正弦定理得$\frac{9}{4}\sin A\sin C=\sin^2 B$，因为$B=\frac{\pi}{3}$，所以$\sin A\sin C=\frac{4}{9}\sin^2 B=\frac{1}{3}$.

由余弦定理得$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B=a^2+c^2-ac=\frac{9}{4}ac$，所以$a^2+c^2=\frac{13}{4}ac$，

所以$\sin^2 A+\sin^2 C=\frac{13}{4}\sin A\sin C$，

所以$(\sin A+\sin C)^2=\sin^2 A+\sin^2 C+2\sin A\sin C=\frac{21}{4}\sin A\sin C=\frac{7}{4}$，又$\sin A>0$，$\sin C>0$，

所以$\sin A+\sin C=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

8．解析：由题意知$\triangle PAB$为正三角形，因为$PC^2+PD^2=CD^2$，所以$PC\perp PD$.如图，分别取AB,CD的中点E,F,连接PE,EF,PF,则$PE=2\sqrt{3}$，$PF=2$，$EF=4$，于是$PE^2+PF^2=EF^2$，所以$PE\perp PF$.过点P作$PG\perp EF$，垂足为G.易知$CD\perp PF$，$CD\perp EF$，$EF,PF\subset$平面PEF，且$EF\cap PF=F$，所以$CD\perp$平面PEF.又$PG\subset$平面PEF，所以$CD\perp PG$.又$PG\perp EF$，$CD,EF\subset$平面$ABCD$，$CD\cap EF=F$，所以$PG\perp$平面$ABCD$，所以PG为四棱锥$P-ABCD$高.

由$\frac{1}{2}PE\cdot PF=\frac{1}{2}EF\cdot PG$，得$PG=\frac{PE\cdot PF}{EF}=\frac{2\sqrt{3}\times 2}{4}=\sqrt{3}$.故选 D.

11．解析：对于 A 中，由$\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FO}$，可得$\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，即$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FC})$，

整理得$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FC}$，所以 A 正确；

对于 B 中，由圆O的半径为$r=6$，因为$\angle COE=60^\circ$，则$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OE}=\left|\overrightarrow{OC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OE}\right|\cos 60^\circ=18$，

且$\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{OE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{OE}$，

可得$\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{DE}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{OE}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OE}+2\left|\overrightarrow{OE}\right|^2=12+72=84$，

所以$\overrightarrow{FE}$在$\overrightarrow{DE}$上的投影向量为$\frac{\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{DE}}{\left|\overrightarrow{DE}\right|}\cdot\frac{\overrightarrow{DE}}{\left|\overrightarrow{DE}\right|}=\frac{\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{DE}}{\left|\overrightarrow{DE}\right|^2}\cdot\overrightarrow{DE}=\frac{7}{12}\overrightarrow{DE}$，所以 B 不正确；

对于 C 中，因为$\triangle DEF$中，FO 是 DE 边上的中线，所以$\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{FE}=2\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BO}$，

由圆 O 的半径为 $r=6$，则 $\left|\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{FE}\right|$ 等于 $\frac{2}{3}\times6=4$ 为定值，所以 C 正确；

对于 D 中，由 $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FO}$，可得 $\overrightarrow{FC}=4\overrightarrow{FO}=2(\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{FE})$，

因为 $\overrightarrow{FC}=\lambda\overrightarrow{FD}+\mu\overrightarrow{FE}$，可得 $\lambda=\mu=2$，所以 $\lambda+\mu=4$，所以 D 正确.

12．解析：由题知 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{4}{1-\sqrt{2}-1}=-2\sqrt{2}$，

即 $\sin(\alpha+\beta)=-2\sqrt{2}\cos(\alpha+\beta)$，又 $\sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)=1$，可得 $\sin(\alpha+\beta)=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

由 $2k\pi<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，$2m\pi+\pi<\beta<2m\pi+\frac{3\pi}{2}$，$m\in\mathbf{Z}$，

得 $2(k+m)\pi+\pi<\alpha+\beta<2(k+m)\pi+2\pi$，$k+m\in\mathbf{Z}$.又 $\tan(\alpha+\beta)<0$，

所以 $\alpha+\beta$ 是第四象限角，故 $\sin(\alpha+\beta)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

14．解析：由于 ΔABC 为直角三角形，且 $\angle A=30^\circ$，$\angle C=90^\circ$，所以 $\angle B=60^\circ$，由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}\Rightarrow AC=\frac{BC\ \sin B}{\sin A}=\frac{1\times\sin60^\circ}{\sin30^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\right)$
$=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$，$\therefore\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right)=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2=-\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{3}\right)^2=-\frac{3}{2}$.

15．解析：（1）因为 $z+\overline{z}=2$，$z-\overline{z}=4\mathrm{i}$，两式相加得 $z=1+2\mathrm{i}$，所以 $\overline{z}=1-2\mathrm{i}$，

故 $\left|3+\overline{z}\right|=\left|4-2\mathrm{i}\right|=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$.

（2）由（1）得 $z\overline{z}=(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})=1-4\mathrm{i}^2=5$，则 $A\left(5,0\right)$，

$z+2\overline{z}=1+2\mathrm{i}+2-4\mathrm{i}=3-2\mathrm{i}$，则 $B\left(3,-2\right)$，

$\frac{10}{z}=\frac{10}{1+2\mathrm{i}}=\frac{10(1-2\mathrm{i})}{5}=2-4\mathrm{i}$，则 $C\left(2,-4\right)$，

所以 $\overrightarrow{AB}=\left(-2,-2\right)$，$\overrightarrow{BC}=\left(-1,-2\right)$，故 $\cos\left\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{6}{2\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

16．解析：（1）证明：连接 A_1C，交 AC_1 于点 E（图略），

则点 E 是 A_1C 及 AC_1 的中点，而 D 是 BC 的中点，

连接 DE，则 $DE//A_1B$，

因为 $DE\subset$ 平面 ADC_1，$A_1B\not\subset$ 平面 ADC_1，所以 $A_1B//$ 平面 ADC_1.

（2）$\because AB\perp AC$， $AB=AC=1$， $AA_1=2$，

$\therefore$ 几何体 $ABD-A_1B_1C_1$ 的体积：$V=V_{ABC-A_1B_1C_1}-V_{C_1-ADC}$

$=S_{\triangle ABC}\times AA_1-\frac{1}{3}S_{\triangle ADC}\times AA_1=\frac{1}{2}\times1\times1\times2-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\times1\times1)\times2=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

17．解析：（1）向量 $\vec{m}=(b,c-2a)$ 与向量 $\vec{n}=(\cos C,\cos B)$ 垂直，则 $b\cos C+(c-2a)\cdot\cos B=0$，

由正弦定理得 $\sin B\cos C+\sin C\cos B-2\sin A\cos B=0$，

则 $\sin(B+C)-2\sin A\cos B=0,\therefore\sin A=2\sin A\cos B$，

$\because\sin A>0,\therefore\cos B=\frac{1}{2},\because B\in(0,\pi),\therefore B=\frac{\pi}{3}$， $\therefore b^2=a^2+c^2-ac,\because a=3c,\therefore b^2=7c^2,\therefore\frac{b}{c}=\sqrt{7}$，

即 $\frac{\sin B}{\sin C}=\sqrt{7}$；

（2）根据题意，因为 BD 为角 B 的内角平分线，

所以 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}ac=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}c+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}a\Leftrightarrow ac=a+c\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=1$，

根据余弦定理可得 $b^2=a^2+c^2-ac=(a+c)^2-3ac\geq(a+c)^2-3\times\left(\frac{a+c}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(a+c)^2$，

又 $(a+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)=2+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\geq4$，所以 $b^2\geq\frac{1}{4}(a+c)^2\geq4$，（当且仅当 $a=c=2$，取等号），

所以 $b\geq2$，所以 b 的最小值为 2.

18．解析：（1）已知 $AD//BC$，故 $\angle DAP$ 或其补角即为异面直线 AP 与 BC 所成的角.

因为 $AD\perp$ 平面 PDC， $PD\subset$ 平面 PDC，所以 $AD\perp PD$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PDA$ 中，由已知得 $AP=\sqrt{AD^2+PD^2}=\sqrt{5}$，故 $\cos\angle DAP=\frac{AD}{AP}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

所以异面直线 AP 与 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

（2）证明：因为 $AD\perp$ 平面 PDC，直线 $PD\subset$ 平面 PDC，所以 $AD\perp PD$.

因为 $BC//AD$，所以 $PD\perp BC$，

又因为 $PD\perp PB$， $BC\cap PB=B$， $BC,PB\subset$ 平面 PBC，

所以 $PD\perp$ 平面 PBC.

（3）过点 D 作 AB 的平行线交 BC 于点 F，连接 PF(图略)，

则直线 DF 与平面 PBC 所成的角等于直线 AB 与平面 PBC 所成的角.

因为 $PD\perp$ 平面 PBC，故 PF 为 DF 在平面 PBC 上的射影，

所以 $\angle DFP$ 为直线 DF 和平面 PBC 所成的角.

因为 $AD//BC$， $DF//AB$，所以四边形 $ABFD$ 为平行四边形，所以 $BF=AD=1$.

由已知得 $CF=BC-BF=2$.

又因为 $AD\perp DC$，所以 $BC\perp DC$，

故在 $\mathrm{Rt}\triangle DCF$ 中，$DF=\sqrt{CD^2+CF^2}=2\sqrt{5}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle DPF$ 中，$\sin\angle DFP=\dfrac{PD}{DF}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

所以直线 AB 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

19．解析：（1）因为三角形 ABC 为直角三角形,$\angle CAB=\theta$，

所以 $\angle ABC=\angle PCB=\dfrac{\pi}{2}-\theta$，

在直角 $\triangle ABC$ 中,因为 $AB=10$,所以 $AC=10\cos\theta, BC=10\sin\theta$.

因为点 P 为半圆上一点,所以 $\angle CPB=\dfrac{\pi}{2}$,又因为 $\angle ABC=\angle PCB$，

所以 $\angle PBC=\theta$,所以 $PC=BC\cdot\sin\theta=10\sin^2\theta$,

$CA+CP=10\cos\theta+10\sin^2\theta=10\cos\theta+10\left(1-\cos^2\theta\right)=-10\left(\cos\theta-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{25}{2}$,因为 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,

所以当 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$,即 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 时,$CA+CP$ 达最大值;

（2）在直角 $\triangle ABC$ 中,因为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}CA\cdot CB=\dfrac{1}{2}AB\cdot CH$，

所以 $CH=\dfrac{CA\cdot CB}{AB}=\dfrac{10\cos\theta\cdot 10\sin\theta}{10}=10\sin\theta\cos\theta$，

因为 $\angle CAB=\theta$,所以 $\angle CBA=\dfrac{\pi}{2}-\theta$,又因为 $\angle PBA=\dfrac{\pi}{3}$,所以 $\angle CBP=\theta-\dfrac{\pi}{6}$,

在直角 $\triangle PBC$ 中,$CP=CB\cdot\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=10\sin\theta\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\dfrac{1}{2}\cos\theta\right)=5\sqrt{3}\sin^2\theta-5\sin\theta\cos\theta$，

所以 $CH+CP=10\sin\theta\cos\theta+5\sqrt{3}\sin^2\theta-5\sin\theta\cos\theta=5\sin\theta\cos\theta+5\sqrt{3}\sin^2\theta$,

$=\dfrac{5}{2}\sin 2\theta-\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\cos 2\theta+\dfrac{5\sqrt{3}}{2}=5\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$,$\theta\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$,

所以当 $2\theta-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$ 即 $\theta=\dfrac{5\pi}{12}$ 时,$CH+CP$ 达到最大值,

答:当 $\theta=\dfrac{5\pi}{12}$ 时,$CH+CP$ 达到最大值 $5+\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ cm.