数学试题（六）参考答案

1-4．CCAA　　5-8.ADCD　　9．CD　　10．ABD　　11．ABD

12．$\frac{\pi}{3}$　　13．45　　14．36π

15.【详解】(1) $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha=3\cos\alpha$，且$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\alpha$为锐角，解得$\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

$\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$所以$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{10}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{10}-3\sqrt{30}}{20}$.

(2) 由(1)可知：$\sin\alpha=3\cos\alpha$，可得 $\tan\alpha=3$，

所以$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times3}{1-9}=-\frac{3}{4}$，

所以$\tan\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan2\alpha-1}{1+\tan2\alpha}=\frac{-1-\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=-7$.

16.【详解】(1)

$$\begin{aligned}f(x)&=2\sin^2x-\sqrt{3}\cos2(x+\frac{\pi}{4})-m\\&=-\cos2x+1-\sqrt{3}\cos(2x+\frac{\pi}{2})-m\\&=\sqrt{3}\sin2x-\cos2x+1-m\\&=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})+1-m\end{aligned},$$

因为$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$，

则当$2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$时，$f(x)$取得最大值$3-m$，故$3-m=5$，即$m=-2$.

(2) $f(x)$的单调递减区间需要满足：$\frac{\pi}{2}+2k\pi\le2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in Z)$，

解得$\frac{\pi}{3}+k\pi\le x\le\frac{5\pi}{6}+k\pi(k\in Z)$，

所以$f(x)$的单调递减区间为：$\left[\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{5\pi}{6}+k\pi\right](k\in Z)$.

17.(1) 因为$a=2$，由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

得 $(a+c)(a-c)=b(b-c)$，即$b^2+c^2-a^2=bc$，　故$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，

因为$0<A<\pi$，故$A=\frac{\pi}{3}$.

(2) 因为$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}a\cdot h_a=h_a$，所以要求$BC$边上高的最大值，即求$\triangle ABC$的面积最大值.

由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即$b^2+c^2=bc+4\ge2bc$，则$bc\le4$，

当且仅当$b=c=2$时取等号，

故 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc\le\sqrt{3}$，

所以 BC 边上高的最大值为 $\sqrt{3}$.

18.（1）证明：因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，$CD\subset$ 面 $ABCD$，

所以 $PA\perp CD$.

（2）因为底面为直角梯形，$\angle DAB=90°$，所以 $AB\perp AD$，

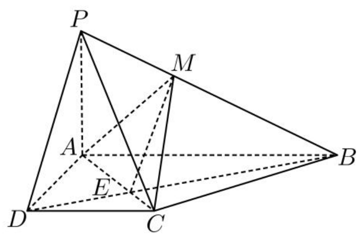
因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，$AB\subset$ 面 $ABCD$，所以 $PA\perp AB$，

又 $PA\cap AD=A,PA,AD\subset$ 面 PAD，所以 $AB\perp$ 面 PAD，

因为 $AB//DC$，所以 $DC\perp$ 面 OAD，又 $DC\subset$ 面 PCD，

所以平面 $PAD\perp$ 平面 PCD.

（3）存在，理由如下：



连接 AM，AC，连接 BD 交 AC 于 E，连接 ME，

因为 $PD//$ 面 ACM，$PD\subset$ 面 PBD，

面 $PBD\cap$ 面 $ACM=ME$，

所以 $PD//ME$，

所以 $\frac{PM}{MB}=\frac{DE}{EB}=\frac{DC}{AB}=\frac{1}{2}$.

19.（1）由题意可得：$\cos^2A-\cos^2B+\cos^2C=(1-\sin^2A)-(1-\sin^2B)+(1-\sin^2C)=1$，

整理得 $\sin^2A+\sin^2C=\sin^2B$，

由正弦定理可得：$a^2+c^2=b^2$，所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形且 $B=\frac{\pi}{2}$，

又因为 $a^2+c^2\ge 2ac$，当且仅当 $a=c$ 时，等号成立，

则 $2bc\le b^2=1$，则 $ac\le\frac{1}{2}$，

所以△ABC 面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\le\frac{1}{4}$，即△ABC 面积的最大值为 $\frac{1}{4}$.

（2）由题意可知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos A=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=c^2<\frac{1}{2}$，所以 $0<c<\frac{\sqrt{2}}{2}$，

因为 $a^2+c^2=1$，设 $c=\sin\theta,a=\cos\theta,\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，

则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$，

令 $t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，

因为 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，则 $\theta+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，

可得 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，故 $t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in\left(1,\sqrt{2}\right)$，

又因为$t^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$，可得$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2}$，

所以$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{2t}{t^2-1},t\in\left(1,\sqrt{2}\right)$，

构建$f\left(t\right)=\dfrac{2t}{t^2-1}=\dfrac{2}{t-\frac{1}{t}},t\in\left(1,\sqrt{2}\right)$，

则$y=t-\dfrac{1}{t}$在$\left(1,\sqrt{2}\right)$上单调递增，且$t-\dfrac{1}{t}>0$，

可得$f\left(t\right)=\dfrac{2}{t-\frac{1}{t}}$在$\left(1,\sqrt{2}\right)$上单调递减，所以$f\left(t\right)>f\left(\sqrt{2}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}}=2\sqrt{2}$，

故$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}$的取值范围为$\left(2\sqrt{2},+\infty\right)$.