数学试题（八）参考答案

1-5:DAACB　　6-8:BCD　　9.ABD　　10.ABD　　11.BCD

12. $-4+2\mathrm{i}$．　13. $\frac{3}{8}$．　14. $\frac{\sqrt{21}}{2}$

15.解：1）由正弦定理知，$\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin B=\frac{b}{2R}$，$\sin C=\frac{c}{2R}$，即$\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{c}{2R}\right)^2=\frac{a}{2R}\cdot\frac{c}{2R}+\left(\frac{b}{2R}\right)^2$，

$\because a^2+c^2=ac+b^2$，$\therefore \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$，又$\because B\in(0,\pi)$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$.

（2）$\because b=\sqrt{3}$，$B=\frac{\pi}{3}$，$\therefore a^2+c^2=3+ac$，又$\because S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore ac=2$，

$\therefore (a+c)^2=3+3ac=9$，$\therefore a+c=3$，故$\triangle ABC$的周长为$a+b+c=3+\sqrt{3}$.

16.解：（1）由题意可知：该圆锥的底面半径$r=2$，母线长$l=4$，

所以表面积$S_{表}=\pi rl+\pi r^2=\pi\times2\times4+\pi\times2^2=12\pi$.

（2）连接BD,DE由题意可得：$PO=\sqrt{AP^2-AO^2}=2\sqrt{3}$，

因为$PO\perp$平面ABC，$BC\subset$平面ABC，可知$PO\perp BC$，

由题意可知：$AE\perp BC$，$PO\cap AE=O$，$PO,AE\subset$平面ADE，所以$BC\perp$平面ADE，

在$\triangle ABC$中，因为$\frac{BC}{\sin 60^\circ}=4$，所以$BC=4\sin 60^\circ=2\sqrt{3}$，可得三棱锥$B-PAD$的高为$\frac{1}{2}BC=\sqrt{3}$，

所以$V_{D-APB}=V_{B-PAD}=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}=\frac{4}{3}$.

17.解：（1）由于函数$f(x)=2\sin x\cos(x+\frac{\pi}{3})+m=2\sin x(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)+m=\sin x\cos x-\sqrt{3}\sin^2 x+m$

$=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\cos 2x)+m=\sin(2x+\frac{\pi}{3})+m-\frac{\sqrt{3}}{2}$

由于$-1\le\sin(2x+\frac{\pi}{3})\le1$，故函数$f(x)$的最大值为$1+m-\frac{\sqrt{3}}{2}=2m$，解得$m=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（2）由于$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$(k\in\mathbf{Z})$，解得$-\frac{5\pi}{12}+k\pi\le x\le k\pi+\frac{\pi}{12}$，$(k\in\mathbf{Z})$；

故函数$f(x)$的单调递增区间为$[-\frac{5\pi}{12}+k\pi,k\pi+\frac{\pi}{12}]$，$(k\in\mathbf{Z})$；

故$[0,a]\subseteq[-\frac{5\pi}{12}+k\pi,k\pi+\frac{\pi}{12}]$，$(k\in\mathbf{Z})$；故取$k=0$，则$[0,a]\subseteq[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}]$

故$a\in(0,\frac{\pi}{12}]$，即a的最大值为$\frac{\pi}{12}$.

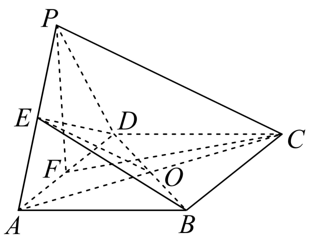
18.解：（1）证明：连接AC，BD交于点O，连接OE.

由已知 OE 为 $\triangle PAC$ 的中位线，故 $PC \parallel OE$， $OE \subset$ 平面 BDE， $PC \not\subset$ 平面 BDE，所以 $PC \parallel$ 平面 BDE

（2）取 AD 中点 F，连接 PF，则由 $\triangle PAD$ 为等边三角形可知 $PF \perp AD$

因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$，它们的交线为 AD， $PF \subset$ 平面 PAD，$PF \perp AD$

所以 $PF \perp$ 平面 $ABCD$，故 PC 在平面 $ABCD$ 的射影为 CF，故 $\angle PCF$ 即为所求.



由已知 $PF=\sqrt{3}$， $CF=\sqrt{CD^2+DF^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

故 $\tan\angle PCF=\dfrac{PF}{CF}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，

故 PC 和平面 $ABCD$ 所成角的正切值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

19.解：（1）由题意知： $\angle ADC=360^\circ-\left(120^\circ+90^\circ+60^\circ+\theta\right)=90^\circ-\theta$.

在 $\triangle ACD$ 中，由正弦定理： $\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}=\dfrac{AD}{\sin\angle ACD}$，即： $AC=2\sqrt{3}\cos\theta$，在 $\triangle ABC$ 中，$\because\ \angle ACB=\theta$，

$\therefore\ \angle CAB=60^\circ-\theta$. 由正弦定理： $\dfrac{AB}{\sin\theta}=\dfrac{BC}{\sin\left(60^\circ-\theta\right)}=\dfrac{AC}{\sin 120^\circ}=4\cos\theta$，

$AB=4\cos\theta\sin\theta=2\sin 2\theta$， $BC=4\cos\theta\sin\left(60^\circ-\theta\right)$，

$\therefore\ S=AB+BC=2\sin 2\theta+4\cos\theta\sin\left(60^\circ-\theta\right)$ 且 $0^\circ<\theta<60^\circ$，

又 $S=\sin 2\theta+\sqrt{3}\cos 2\theta+\sqrt{3}=2\sin\left(2\theta+60^\circ\right)+\sqrt{3}$,

$\because\ 0^\circ<\theta<60^\circ$， $\therefore\ 60^\circ<2\theta+60^\circ<180^\circ$，

$\therefore S$ 的最大值为 $2+\sqrt{3}$，当且仅当 $\theta=15^\circ$ 时取得等号.

（2）由（1）知： $BC=4\cos\theta\sin\left(60^\circ-\theta\right)$， $CD=2\sqrt{3}\sin\left(\theta+30^\circ\right)$.

$\therefore\ S=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cos\theta\sin\left(60^\circ-\theta\right)\cdot 2\sqrt{3}\sin\left(\theta+30^\circ\right)\cdot\sin\left(60^\circ+\theta\right)$

$=2\cos\theta\sin\left[90^\circ-\left(30^\circ+\theta\right)\right]\cdot 2\sqrt{3}\sin\left(\theta+30^\circ\right)\cdot\sin\left(60^\circ+\theta\right)$

$=2\cos\theta\sin(60^\circ+\theta)2\sqrt{3}\cos(30^\circ+\theta)\sin(30^\circ+\theta)$

$=(\sqrt{3}\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta)\sqrt{3}\sin(2\theta+60^\circ)$

$=\sqrt{3}\sin(2\theta+60^\circ)(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\theta+\dfrac{1}{2}\sin 2\theta)$

$=\sqrt{3}\sin(2\theta+60^\circ)[\sin(2\theta+60^\circ)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}]$，

$\therefore S=\sqrt{3}\sin\left(2\theta+60^\circ\right)\left[\sin\left(2\theta+60^\circ\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$,

不妨设$t=\sin\left(2\theta+60^\circ\right)$，又$\because 0^\circ<\theta<60^\circ$，$\therefore 60^\circ<2\theta+60^\circ<180^\circ$，$t\in\left(0,1\right]$,

$\therefore S=\sqrt{3}t^2+\dfrac{3}{2}t$而$S$在$t\in\left(0,1\right]$上单调递增,

$S_{\max}=S\left(1\right)=\dfrac{3}{2}+\sqrt{3}$，当且仅当$\theta=15^\circ$时取得等号.