数学试题（三）参考答案

1-4. ABAB　　5-8. DCBA　　9.AD　　10.ABD　　11.BD

12. $-\frac{1}{2}$　　13. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$或$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　14. ②④

15.（1）因为$\left|\overrightarrow{e_1}\right|=\left|\overrightarrow{e_2}\right|=1$，$\overrightarrow{e_1}$与$\overrightarrow{e_2}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，

所以$\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}=\left|\overrightarrow{e_1}\right|\left|\overrightarrow{e_2}\right|\cos\langle\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\rangle=1\times1\times\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，

所以$\left(2\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}\right)\cdot\overrightarrow{e_2}=2\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}-\overrightarrow{e_2}^2=2\times\frac{1}{2}-1^2=0$，所以$\left(2\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}\right)\perp\overrightarrow{e_2}$.

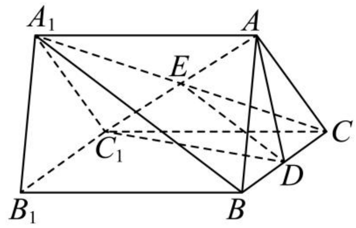
（2）由（1）知，$\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}=\frac{1}{2}$，因为$\left|\overrightarrow{e_1}\right|=\left|\overrightarrow{e_2}\right|=1$，$\left|\vec{m}\right|=\left|\vec{n}\right|$，

所以$\left(\lambda\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}\right)^2=\left(3\overrightarrow{e_1}-2\overrightarrow{e_2}\right)^2$，即$\lambda^2\overrightarrow{e_1}^2+2\lambda\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_2}^2=9\overrightarrow{e_1}^2-12\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}+4\overrightarrow{e_2}^2$，

于是有$\lambda^2\times1^2+2\lambda\times\frac{1}{2}+1^2=9\times1^2-12\times\frac{1}{2}+4\times1^2=7$，

即$\lambda^2+\lambda-6=\left(\lambda+3\right)\left(\lambda-2\right)=0$，解得$\lambda=-3$或$\lambda=2$，所以$\lambda$的值为$-3$或$2$.

16.（1）连接A_1C，设$A_1C\cap AC_1=E$，连接DE.



因为ACC_1A_1是正三棱柱的侧面，所以ACC_1A_1为矩形，

所以E是A_1C的中点，所以DE是$\triangle CA_1B$的中位线，所以$DE//A_1B$，

又$A_1B\not\subset$平面ADC_1，$DE\subset$平面ADC_1，所以$A_1B//$平面ADC_1.

（2）因为在正三棱柱中，底面正三角形的边长为2，D为BC的中点，$AD\perp BC$，

所以$BC=2$，$AD=AB\sin60^\circ=\sqrt{3}$，故$S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}AD\cdot DC=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又$CC_1\perp$平面ABC，$CC_1=AA_1=3$，所以$V_{A-CC_1D}=V_{C_1-CAD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ADC}\cdot CC_1=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times3=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又$AD\perp BC$，由正三棱柱的性质可知，平面$ABC\perp$平面BCC_1B_1，

又平面$ABC\cap$平面$BCC_1B_1=BC$，$AD\subset$平面ABC，所以$AD\perp$平面BCC_1B_1，

因为$C_1D\subset$平面BCC_1B_1，所以$AD\perp C_1D$，

又$C_1D=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$，所以$S_{\triangle ADC_1}=\frac{1}{2}AD\cdot C_1D=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{10}=\frac{\sqrt{30}}{2}$，

设点C到平面AC_1D的距离为d，

则$V_{C-AC_1D}=V_{C_1-CAD}$，即$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{30}}{2}d=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得$d=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

所以点 C 到平面 AC_1D 的距离为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

17.（1）$\frac{\sqrt{2}c-b}{a}=\sin C-\cos C$，由正弦定理得 $\frac{\sqrt{2}\sin C-\sin B}{\sin A}=\sin C-\cos C$，

$\sqrt{2}\sin C-\sin B=\sin A\sin C-\sin A\cos C$，

又 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\sin C\cos A$，

所以 $\sqrt{2}\sin C-\sin A\cos C-\sin C\cos A=\sin A\sin C-\sin A\cos C$，

得 $\sqrt{2}\sin C-\sin C\cos A=\sin A\sin C$，又 $\sin C>0$，

所以 $\sqrt{2}-\cos A=\sin A$，即 $\sin A+\cos A=\sqrt{2}\sin(A+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$，

得 $\sin(A+\frac{\pi}{4})=1$，又 $0<A<\pi$，所以 $A+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，故 $A=\frac{\pi}{4}$；

（2）由 $CD=2DB$，得 $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，即 $3\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，

所以 $\left|3\overrightarrow{AD}\right|^2=\left|2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|^2=4\overrightarrow{AB}^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2=18+4\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos 45^\circ=26$，

所以 $\left|\overrightarrow{AD}\right|=\frac{\sqrt{26}}{3}$，即 $AD=\frac{\sqrt{26}}{3}$.

18.（1）由图可得 $\frac{3}{4}T=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{12}\Rightarrow\frac{3}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\frac{3\pi}{4}\Rightarrow\omega=2$，

∵ 函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$ 过点 $\left(\frac{\pi}{12},1\right)$，

所以 $\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{12}+\varphi\right)=1$，则 $\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi\left(k\in Z\right)$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi\left(k\in Z\right)$，

又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，则 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$；

（2）若 $f\left(x_0\right)=\frac{3}{5}$，即 $\sin(2x_0+\frac{\pi}{3})=\frac{3}{5}$，

而 $\cos\left(2x_0-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x_0\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(2x_0+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\sin\left(2x_0+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{5}$；

（3）因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，所以 $2x+\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$，

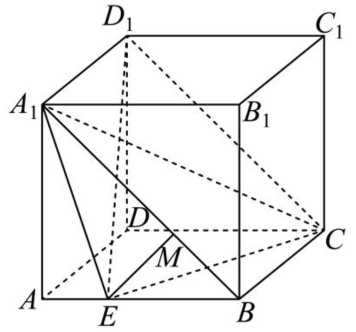
则 $f\left(x\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，令 $t=f\left(x\right),t\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，

设 $g(t)=t^2-mt-1$，则 $g(t)\le 0$ 恒成立，

由二次函数的图象性质可知，只需 $\begin{cases}g(-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}m-1\le 0\\ g(1)=-m\le 0\end{cases}$，

解得 $0\le m\le\frac{3}{2}$，故 m 的取值范围为 $\left[0,\frac{3}{2}\right]$.

19.（1）过E作$EM\perp A_1B$，垂足为M，



因为$A_1B//D_1C$，所以面A_1D_1C即面A_1BCD_1

明显$BC\perp EM,A_1B\perp EM,BC\cap A_1B=B,BC,A_1B\subset$ 面A_1BCD_1，

所以$EM\perp$面A_1BCD_1，

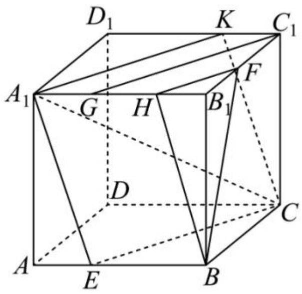
又$EM=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BE=\sqrt{2}$，$S_{\triangle A_1CD_1}=\dfrac{1}{2}A_1D_1\cdot CD_1=\dfrac{1}{2}\times 3\times 3\sqrt{2}=\dfrac{9}{\sqrt{2}}$，

所以$V_{D_1-A_1CE}=V_{E-A_1CD_1}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle A_1CD_1}\cdot EM=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{9}{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}=3$

（2）假设在线段B_1C_1上存在点F，使得$BF//$平面A_1CE，

取A_1B_1的三等分点G,H，使$A_1G=GH=HB_1=1$，则四边形A_1HBE是平行四边形，

所以$BH//A_1E$，又$BH\not\subset$面A_1CE，$A_1E\subset$面A_1CE，



所以$BH//$面A_1CE，又$BF//$面A_1CE，$BH\cap BF=B$，

所以面$BHF//$面A_1CE，又$HF\subset$面BHF，所以$HF//$面A_1CE，

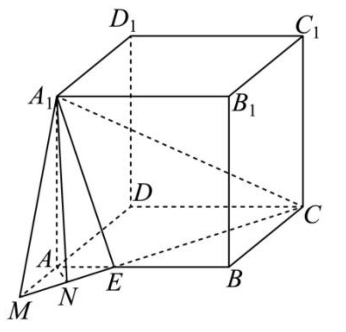
取C_1D_1的三等分点K（靠近C_1），则$A_1K//C_1G//CE$，

所以面$A_1CE\cap$面$A_1B_1C_1D_1=A_1K$，又$HF\subset$面$A_1B_1C_1D_1$，$HF//$面A_1CE，

所以$HF//A_1K//C_1G$，又H为GB_1的中点，所以$\dfrac{C_1F}{B_1C_1}=\dfrac{1}{2}$；

（3）延长DA,CE交于点M，作$AN\perp ME$，垂足为N，连接A_1N，则$ME\perp$面AA_1N，

从而$ME\perp A_1N$，所以$\angle A_1NA$为二面角A_1-CE-A的平面角，



在$\mathrm{Rt}\triangle A_1NA$中，$A_1A=3,AN=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$，所以$\tan\angle A_1NA=\dfrac{A_1A}{AN}=\sqrt{13}$，

所以$\cos\angle A_1NA=\dfrac{1}{\sqrt{13+1}}=\dfrac{\sqrt{14}}{14}$.