数学试题（一）参考答案

1. C【详解】复数$\frac{1+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\frac{-(1+2\mathrm{i})\mathrm{i}}{\mathrm{i}\times(-\mathrm{i})}=2-\mathrm{i}$ ，所以虚部为-1 .

2. C【详解】若$l//\alpha$，且$m//\alpha$，则l与m可能平行，可能相交，可能异面，A 选项错误；

若$\alpha\perp\beta$，$m//\alpha$，$n\perp\beta$，则m与n可能平行，可能相交，可能异面，B 选项错误；

两条平行直线，其中一条与平面垂直，则另一条也与平面垂直，C 选项正确；

若$m\perp n$，$m\perp\alpha$，$n//\beta$，则α与β可能平行可能相交，D 选项错误.故选：C

3. C【详解】由函数图象可得：$\mathrm{T}=\frac{2\pi}{\omega}=4\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)$，解得$\omega=\frac{1}{2}$，由于点$\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$在函数图象上且为五点作图法的第一个点，可得$\frac{1}{2}\times\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\theta=0+2k\pi,k\in\mathrm{Z}$解得$\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathrm{Z}$

当$k=0$时，可得$\theta=\frac{\pi}{6}$

4.D【详解】因为$\tan2\alpha=\frac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$，所以$\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$，

即$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$，因为$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以$\cos\alpha>0$，$\sin\alpha>0$，

所以$4\sin\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$，因为$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以$4\sin\alpha=1$，解得$\sin\alpha=\frac{1}{4}$.

5. B【详解】由题意得，在直角$\triangle ABC$中，$\angle ACB=45°$，所以$BC=AB$，

在直角$\triangle ABD$，$\angle ADB=30°$，所以$\frac{AB}{BD}=\tan30°$，即$BD=\sqrt{3}AB$，

在$\triangle BCD$中，$\angle BCD=120°$，$CD=112$，

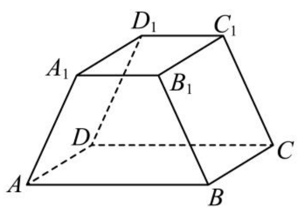
由余弦定理得$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos120°$，

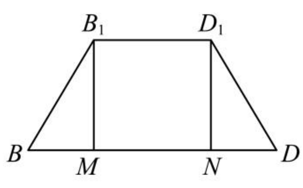
即$3AB^2=AB^2+112^2-2\times112\cdot(-\frac{1}{2})\cdot AB$，因为$AB>0$，所以解得$AB=112$.

即大运塔AB的高为$112\mathrm{m}$.

6. B

【详解】





由题意可得正四棱台的截面图，如图所示，且 B_1BDD_1 为等腰梯形，过点 B_1 做 $B_1M \perp BD$，过点 D_1 做 $D_1N \perp BD$，由线面角的定义可知，侧棱 BB_1 与底面 $ABCD$ 所成角即为 $\angle B_1BM$，

由条件可得，$BB_1 = 1$，$B_1D_1 = \sqrt{2}$，$BD = 2\sqrt{2}$，则 $B_1D_1 = MN = \sqrt{2}$，$BM = BD = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则

$B_1M = \sqrt{1^2 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\triangle B_1BM$ 为等腰直角三角形，

所以 $\angle B_1BM = 45^\circ$，即 $\sin\angle B_1BM = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

7. D【详解】因为 $\vec{a} = (-1,1), \vec{b} = (4,3)$，

所以 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量为 $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\cdot\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \dfrac{-4+3}{16+9}(4,3) = \left(-\dfrac{4}{25}, -\dfrac{3}{25}\right)$，

8. C【详解】依题意得 $g(x) = f(x+\dfrac{\pi}{2}) = \sin\left[\omega\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right] = \sin\left(\omega x + \dfrac{\omega\pi}{2}\right)$，

由已知得 $g(0) = \sin\dfrac{\omega\pi}{2} = 1$，所以 $\dfrac{\omega\pi}{2} = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$，$k \in Z$，

所以 $\omega = 4k+1$，$k \in Z$，$g(x) = \sin\left[(4k+1)x + \dfrac{(4k+1)\pi}{2}\right] = \cos\left[(4k+1)x\right]$，$k \in Z$，

对于 A，$g(-x) = \cos\left[-(4k+1)x\right] = \cos\left[(4k+1)x\right] = g(x)$，且 $g(x)$ 的定义域关于原点对称，所以 $g(x)$ 为偶函数，故 A 正确；

对于 B，$g(-\dfrac{\pi}{2}) = \cos\dfrac{-(4k+1)\pi}{2} = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$，$k \in Z$，故 B 正确；

对于 C，当 $\omega = 5$ 时，$k=1$，$g(x) = \cos 5x$，由 $g(x) = 0$，得 $\cos 5x = 0$，得 $5x = n\pi + \dfrac{\pi}{2}$，$x = \dfrac{n\pi}{5} + \dfrac{\pi}{10}$，$n \in Z$，

因为 $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$，所以 $x = \dfrac{\pi}{10}$ 或 $x = \dfrac{3\pi}{10}$ 或 $x = \dfrac{\pi}{2}$，则 $g(x)$ 在 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上恰有 3 个零点，故 C 不正确；

对于 D，由 $2k\pi \le (4k+1)x \le 2k\pi + \pi$，$k \in Z$，得 $\dfrac{2k\pi}{4k+1} \le x \le \dfrac{(2k+1)\pi}{4k+1}$，$k \in Z$，

所以$\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\subseteq\left[\dfrac{2k\pi}{4k+1},\dfrac{(2k+1)\pi}{4k+1}\right]$，$k\in Z$，所以$k=0$，所以$\omega=1$，故 D 正确.

9. AC【详解】由向量$\vec{a}=\left(\sqrt{2},1\right),\vec{b}=\left(\cos\theta,\sin\theta\right)$，

对于 A 中，由$\vec{a}\perp\vec{b}$，可得$\sqrt{2}\cos\theta+\sin\theta=0$，所以$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\sqrt{2}$，所以 A 正确；

对于 B 中， 若$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，可得$\vec{b}=\left(0,1\right)$，则$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{3},\left|\vec{b}\right|=1,\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，

可得$\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以 B 错误；

对于 C 中，当$\vec{a}$与$\vec{b}$同向时，此时$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$，$\left(\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|\right)^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$，

即$\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=0$时，使得$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$成立，所以 C 正确；

对于 D 中，由$\vec{a}=\left(\sqrt{2},1\right)$，则与$\vec{a}$共线的单位向量为$\pm\dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2},1\right)$，

即$\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$或$\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$，所以 D 错误.

10. ABC【详解】对于 A,由余弦定理可得$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}=\sqrt{16+4-2\times4\times2\times\dfrac{1}{2}}=2\sqrt{3}$，

由于$a^2=b^2+c^2$，故$\triangle ABC$为直角三角形，A 正确，

对于 B，$\because$三角形的三边长分别为$a=5,b=7,c=8$，

$\therefore\cos B=\dfrac{5^2+8^2-7^2}{2\times5\times8}=\dfrac{1}{2}$，$\because B\in(0,\pi)$，$\therefore B=\dfrac{\pi}{3}$，故$A+C=\dfrac{2\pi}{3}$，

则该三角形最大角与最小角之和为$\dfrac{2\pi}{3}$,B 正确，

对于 C，由正弦定理可得$\dfrac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{4}{\sin B}$ Þ $\sin B=\dfrac{1}{2}$,由于$B\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$，故$B=\dfrac{\pi}{6}$，C 正确，

对于 D，由$\dfrac{c}{b}<\cos A$可得

$c<b\cos A\Rightarrow\sin C<\sin B\cos A\Rightarrow\sin\left(B+A\right)=\sin B\cos A+\cos B\sin A<\sin B\cos A$，

所以$\cos B\sin A<0$，由于$A,B\in\left(0,\pi\right)$,所以$\sin A>0$，进而$\cos B<0$,故$B\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，因此三角

形为钝角三角形，D 错误，故选：ABC

11. ABD【详解】连接 BC_1，易知 $BC_1 \perp B_1C$，又正方体中 $C_1D_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1，

从而有 $C_1D_1 \perp B_1C, C_1D_1 \cap BC_1 = C_1$，$B_1C \perp$ 平面 BD_1C_1，

从而得 $B_1C \perp BD_1$，异面直线 BD_1 与 B_1C 所成的角大小为 $90°$，A 正确；

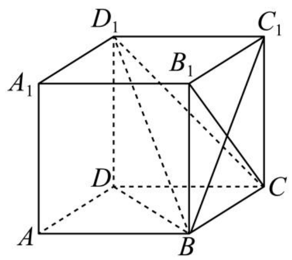
正方体中 $DD_1 \perp$ 平面 $ABCD$，则 $DD_1 \perp BD, DD_1 \perp CD$，

同理 $BC \perp CD, BC \perp CD_1$，

$\therefore$ 四面体 D_1DBC 的四个面都是直角三角形，B 正确；

由 $BC \perp CD, BC \perp CC_1$，知 $\angle DCC_1$ 二面角 $D_1 - BC - B_1$ 的平面角是，

为 $45°$，即二面角 $D_1 - BC - B_1$ 为 $45°$，C 错误；



易知 BD_1 的中点是正方体外接球和内切球的球心，

又外接球半径为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．内切球半径这 $\frac{1}{2}$，

$\therefore$ 内切球上一点与外接球上一点的距离的最小值为 $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$，D 正确．故选：ABD．

12. 【详解】因为圆柱形容器底面直径与母线均为 2，
所以该容器可内置的最大球与圆柱的侧面和上下底面都相切，且球的直径为 2，
所以球的半径 $r = 1$，
所以该球的体积为 $\dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{4}{3}\pi \times 1^3 = \dfrac{4}{3}\pi$，故答案为：$\dfrac{4}{3}\pi$

13. 【详解】由辅助角公式得 $\sin\alpha + 3\cos\alpha = \sqrt{10}\sin(\alpha+\varphi)$，

其中 $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{10}}{10}, \sin\varphi = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，

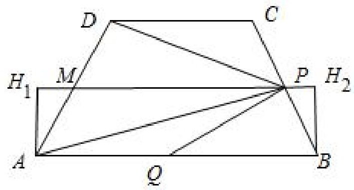
又 $\sin\alpha + 3\cos\alpha = \sqrt{10}$，故 $\sqrt{10}\sin(\alpha+\varphi) = \sqrt{10}$，

即 $\sin(\alpha+\varphi) = 1$，则 $\alpha + \varphi = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathrm{Z}$，

故 $\sin\alpha = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi + 2k\pi\right) = \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$，$k \in \mathrm{Z}$.故答案为：$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

14. 【详解】如图，取 AD 的中点 M，则 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PM}$，

故$\overrightarrow{PQ}\cdot\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD}\right)=2\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PM}$.



又因为 PM 为梯形 $ABCD$ 的中位线，故$\left|\overrightarrow{PM}\right|=\dfrac{2+4}{2}=3$,

过 A、B 作 PM 的垂线，垂足分别为H_1、H_2，

在$\mathrm{Rt}\triangle AMH_1$中，$\left|\overrightarrow{AM}\right|=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{\cos 60^\circ}=1$，$\angle AMH_1=60^\circ$，故$\left|\overrightarrow{MH_1}\right|=\dfrac{1}{2}$，

同理$\left|\overrightarrow{PH_2}\right|=\dfrac{1}{2}$，根据数量积的几何意义可知

$\overrightarrow{PQ}\cdot\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD}\right)=2\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PM}=2|\overrightarrow{PQ}|\cos\angle MPQ\cdot|\overrightarrow{PM}|$,

当 Q 位于 A 点时，$|\overrightarrow{PQ}|\cos\angle MPQ$ 最大为$3+\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{2}$ ，

此时$\overrightarrow{PQ}\cdot\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD}\right)$取到最大值为$2\times\dfrac{7}{2}\times 3=21$ ，

当 Q 位于 B 点时，$|\overrightarrow{PQ}|\cos\angle MPQ$ 最小为$-\dfrac{1}{2}$ ，

此时$\overrightarrow{PQ}\cdot\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD}\right)$取到最小值为$2\times(-\dfrac{1}{2})\times 3=-3$ ，

故$\overrightarrow{PQ}\cdot\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD}\right)\in[-3,21]$，故答案为：$\left[-3,21\right]$

15. （1）由余弦定理有$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$，对比已知$a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$，

可得$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{\sqrt{2}ab}{2ab}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，因为$C\in\left(0,\pi\right)$，所以$\sin C>0$，

从而$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

又因为$\sin C=\sqrt{2}\cos B$，即$\cos B=\dfrac{1}{2}$，注意到$B\in\left(0,\pi\right)$，所以$B=\dfrac{\pi}{3}$.

（2）由（1）可得$B=\dfrac{\pi}{3}$，$\cos C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$C\in\left(0,\pi\right)$，从而$C=\dfrac{\pi}{4}$，$A=\pi-\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5\pi}{12}$，

而$\sin A=\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

由正弦定理有$\dfrac{a}{\sin\frac{5\pi}{12}}=\dfrac{b}{\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{c}{\sin\frac{\pi}{4}}$，从而$a=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{2}c=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}c,b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}c=\dfrac{\sqrt{6}}{2}c$，

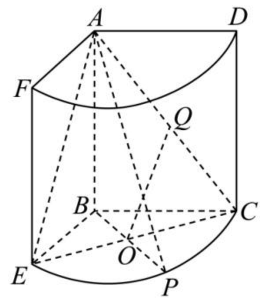
由三角形面积公式可知，$\triangle ABC$的面积可表示为

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}c\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{2}c\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{8}c^2$，

由已知$\triangle ABC$的面积为$3+\sqrt{3}$，可得$\dfrac{3+\sqrt{3}}{8}c^2=3+\sqrt{3}$，所以$c=2\sqrt{2}$.

16.（1）连接AE，由点P是弧CE的中点，可得O为EC的中点，又Q是AC的中点，则$AE\parallel QO$，

又$AE\subset$平面$ABEF$，$QO\not\subset$平面$ABEF$，则$OQ\parallel$平面$ABEF$；



（2）由点P是弧CE的中点，可得$BP\perp EC$，又$AB\perp BC, AB\perp BE$，

$BC\cap BE=B$，$BC,BE\subset$平面$BCPE$，则$AB\perp$平面$BCPE$，

又$EC\subset$平面$BCPE$，则$AB\perp EC$，又$AB\cap BP=B$，$AB,BP\subset$平面ABP

则$EC\perp$平面ABP，又$AP\subset$平面ABP，则$AP\perp CE$.

17.（1）由题意可知$\begin{cases}A+b=33\\-A+b=19\end{cases}$，解得$\begin{cases}A=7\\b=26\end{cases}$，

所以$y=7\sin(\omega t+\varphi)+26(\omega>0,|\varphi|<\pi,t\in[0,24))$，因为$\dfrac{T}{2}=14-2$，得$T=24$，

所以$\dfrac{2\pi}{\omega}=24$，得$\omega=\dfrac{\pi}{12}$，所以$y=7\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t+\varphi\right)+26(|\varphi|<\pi,t\in[0,24))$，

因为当$t=14$时，$y=33$，所以$33=7\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\times 14+\varphi\right)+26$，所以$\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}+\varphi\right)=1$，

所以$\dfrac{7\pi}{6}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，得$\varphi=-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$，因为$|\varphi|<\pi$，所以$\varphi=-\dfrac{2\pi}{3}$，

所以$y=7\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t-\dfrac{2\pi}{3}\right)+26(t\in[0,24))$

（2）由$7\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t-\dfrac{2\pi}{3}\right)+26\geq 26$，得$\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t-\dfrac{2\pi}{3}\right)\geq 0$，

所以$2k\pi\leq\dfrac{\pi}{12}t-\dfrac{2\pi}{3}\leq\pi+2k\pi,k\in Z$，所以$2k\pi+\dfrac{2\pi}{3}\leq\dfrac{\pi}{12}t\leq\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$，

解得$24k+8\leq t\leq 20+24k,k\in Z$，因为$t\in[0,24)$，所以$8\leq t\leq 20$，

因为考试时间为每天上午 7：40-12：00，下午 14：30-17：00，晚上 19：00-20：15，
所以每天考试期间教室内的空调要开$4+2.5+1=7.5$小时.

18.（1）连接AC交DB于点O，连接OP.

在底面$ABCD$中，因为$AB//CD$，且$AB=2CD$，由$\triangle ABO\backsim\triangle CDO$，可得$\dfrac{AO}{CO}=\dfrac{AB}{CD}=2$，

因为$AP=2PS$，即$\dfrac{AP}{PS}=2$，所以在$\triangle CAS$中，$\dfrac{AO}{OC}=\dfrac{AP}{PS}=2$，所以$OP//CS$，

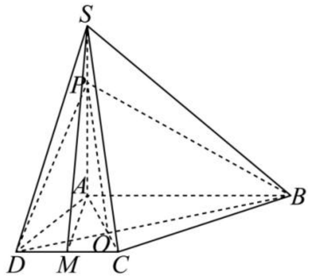
又因为$OP\subset$平面PBD，$SC\not\subset$平面PBD，所以$SC//$平面PBD.

（2）设CD的中点为M，连接AM、SM，

因为$\angle CDA=60^\circ$，$AD=CD=2$，所以$\triangle CDA$为等边三角形，所以$AM\perp CD$，

又$SA\perp$平面$ABCD$，$CD\subset$平面$ABCD$，所以$SA\perp CD$，$SA\cap AM=A$，$SA,AM\subset$平面SAM，

所以$CD\perp$平面SAM，$SM\subset$平面SAM，所以$CD\perp SM$，



所以$\angle SMA$为二面角$S-DC-A$的平面角，

$SA\perp$平面$ABCD$，$AM\subset$平面$ABCD$，所以$SA\perp AM$，

在$\mathrm{Rt}\triangle SMA$中$SA=SP+AP=3$，$AM=\sqrt{3}$，

所以$\tan\angle SMA=\dfrac{SA}{AM}=\sqrt{3}$，所以$\angle SMA=60^\circ$，

即二面角$S-DC-A$的大小为60°；

（3）因为$AB//CD$，$\angle CDA=60^\circ$，所以$\angle DAB=120^\circ$，

所以$S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}AD\times AB\sin\angle DAB=\dfrac{1}{2}\times2\times4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，

在$\triangle PBD$中$PD=\sqrt{AP^2+AD^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，$PB=\sqrt{AP^2+AB^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，

$BD=\sqrt{AD^2+AB^2-2AD\cdot AB\cos\angle DAB}=\sqrt{2^2+4^2-2\times2\times4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=2\sqrt{7}$，

所以$PD^2+PB^2=BD^2$，即$PD\perp PB$，

所以$S_{\triangle PBD}=\dfrac{1}{2}PB\times PD=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{5}=2\sqrt{10}$，

设点A到平面PBD的距离为d，则$V_{A-PBD}=V_{P-ABD}$，即$\dfrac{1}{3}S_{\triangle PBD}\cdot d=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABD}\times PA$，

即$d=\dfrac{S_{\triangle ABD}\times PA}{S_{\triangle PBD}}=\dfrac{2\sqrt{3}\times2}{2\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{30}}{5}$，即点A到平面$PBD$的距离为$\dfrac{\sqrt{30}}{5}$.

19. （1）证明：因为N为AC的中点，M为BC的中点，

所以$\overrightarrow{BN}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}$，

因为B,P,N三点共线，所以设$\overrightarrow{BN}=\lambda\overrightarrow{BP}$，所以$\lambda\overrightarrow{BP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}$，

所以$\overrightarrow{BP}=\dfrac{1}{2\lambda}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{\lambda}\overrightarrow{BM}$，因为$A,P,M$三点共线，所以$\dfrac{1}{2\lambda}+\dfrac{1}{\lambda}=1$，得$\lambda=\dfrac{3}{2}$，

所以$\overrightarrow{BN}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BP}$，所以$\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PN}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BP}$，所以$\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PN}$，所以$BP:PN=2:1$；

（2）在$\triangle ABC$中，$AB=2,BC=2\sqrt{3},\angle BAC=60^\circ$，

由余弦定理得 $\cos\angle BAC=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}$，

所以 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{4+AC^2-12}{4AC}$，整理得 $AC^2-2AC-8=0$，解得 $AC=4$ 或 $AC=-2$（舍去），

所以 $AB^2+BC^2=4+12=16=AC^2$，所以 $AB\perp BC$，

由（1）可知 $\overrightarrow{PN}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BN}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=\dfrac{1}{6}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$，

$\overrightarrow{PM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\dfrac{1}{6}(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{BC}$，

所以 $\left|\overrightarrow{PN}\right|=\dfrac{1}{6}(\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right|)=\dfrac{1}{6}\sqrt{\overrightarrow{BA}^2+2BA\cdot BC+\overrightarrow{BC}^2}=\dfrac{1}{6}\sqrt{4+12}=\dfrac{2}{3}$，

$\left|\overrightarrow{PM}\right|=\left|-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{\dfrac{1}{9}\overrightarrow{BA}^2-\dfrac{1}{9}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{36}\overrightarrow{BC}^2}=\sqrt{\dfrac{4}{9}+\dfrac{12}{36}}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$，

$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{1}{6}(-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}^2-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{BC}^2)$

$=\dfrac{1}{6}\times(-\dfrac{1}{3}\times4+\dfrac{1}{6}\times12)=\dfrac{1}{9}$，所以 $\cos\angle MPN=\dfrac{\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}}{\left|\overrightarrow{PM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PN}\right|}=\dfrac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{7}}{3}}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$，

（3）因为 $\overrightarrow{PB}=-\overrightarrow{BP}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BN}=-\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$，

$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NC}=\dfrac{1}{6}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{6}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$，

所以 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=-\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right)$

$=-\dfrac{1}{3}(-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}^2+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}^2)$

$=-\dfrac{1}{3}\times\left(-\dfrac{1}{3}\times2^2+\dfrac{2}{3}\times12\right)=-\dfrac{20}{9}$.