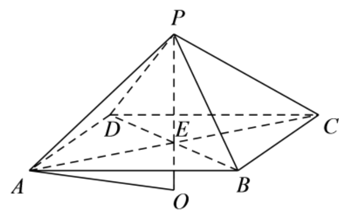
数学试题（二）参考答案

1-4. BDDA　　5-8. AADA　　9．BD　　10．ACD　　11．ACD

12.$100\sqrt{6}$　　13．$2\sqrt{19}$　　14．①③④

8．D【详解】设$AC\cap BD=E$，连接PE，则$PE\perp$平面$ABCD$，



依题意可得$AC=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，$AE=\frac{1}{2}AC=\sqrt{2}$，

所以$PE=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=1$，则球心$O$在直线$PE$上，

连接AO，设外接球的半径为R，则$R^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(R-1\right)^2$，解得$R=\frac{3}{2}$，

又Q为球O表面上的一点，点S是正四棱锥$P-ABCD$的表面上的一点，$2R>AC=2\sqrt{2}$，

所以$|SQ|$的最大值为$2R=3$.

15．【详解】(1) $\because\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{b}\right|$，$\therefore\left|\left(5,2m+4\right)\right|=\sqrt{25+\left(2m+4\right)^2}=5$，$\therefore 2m+4=0$，$\therefore m=-2$，

(2) 设$\vec{c}=\left(x,y\right),\sqrt{x^2+y^2}\neq 0$，$\because\vec{c}\perp\vec{b}$，$\therefore 3x+4y=0$，所以$x,y$都不等于 0，

设$\vec{c}$与$\vec{a}+\vec{b}$的夹角为θ，$\vec{a}+\vec{b}=(4,2)$，

则$\cos\theta=\frac{\vec{c}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)}{\left|\vec{c}\right|\left|\vec{a}+\vec{b}\right|}=\frac{4x+2y}{2\sqrt{5}\times\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\frac{5}{2}x}{2\sqrt{5}\times\left|\frac{5x}{4}\right|}=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$.

16．【详解】(1) 由$b=c\cos A$，和余弦定理得$b=c\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，

即$a^2+b^2=c^2$，所以$C=\frac{\pi}{2}$．所以$\triangle ABC$是直角三角形.

(2) 由(1)知$\triangle ABC$是直角三角形，且$c=1$，可得$a=\sin A,b=\cos A$．

所以$\triangle ABC$周长为$1+\sin A+\cos A=1+\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\leq 1+\sqrt{2}$,

所以当$A=\frac{\pi}{4}$时，即$\triangle ABC$为等腰直角三角形，周长有最大值为$1+\sqrt{2}$.

17．【详解】(1) 因为函数$f\left(x\right)=\vec{m}\cdot\vec{n}$，其中向量$\vec{m}=\left(2\cos x,1\right)$，$\vec{n}=\left(\cos x,\sqrt{3}\sin 2x\right)$，

所以$f(x)=2\cos^2 x+\sqrt{3}\sin 2x=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+1$

$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)+1=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$，

所以$f\left(x\right)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

（2）当$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$时$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$，所以$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，

所以$f\left(x\right)\in\left[0,3\right]$，即$f\left(x\right)$在$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$上的值域为$\left[0,3\right]$；

（3）由$f\left(A\right)=2$，得$2\sin\left(2A+\frac{\pi}{6}\right)+1=2$，则$\sin\left(2A+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，

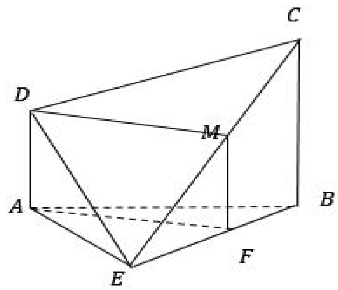
又$A\in\left(0,\pi\right)$，所以$2A+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{13\pi}{6}\right)$，故$2A+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$，则$A=\frac{\pi}{3}$.

由$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times1\times c\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，可得$c=2$.

在$\triangle ABC$中，由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=1+4-2\times1\times2\times\frac{1}{2}=3$，所以$a=\sqrt{3}$，

由$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$，所以$\frac{b+c}{\sin B+\sin C}=\frac{2\sin B+2\sin C}{\sin B+\sin C}=2$.

18.【详解】（1）取EC中点M，连接FM，DM，



$\because AD//BC//FM$，$AD=\frac{1}{2}BC=MF$，

$\therefore ADMF$是平行四边形，$\therefore AF//DM$，

$\because AF\not\subset$平面DEC，$DM\subset$平面DEC，$\therefore AF//$平面DEC.

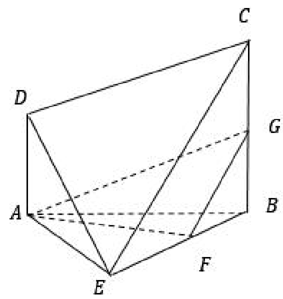
（2）点G为BC的中点.

证：连接FG，AG，

因为G、F分别是BC，BE的中点，所以$GF//CE$，

又$GF\not\subset$平面DCE，$CE\subset$平面DCE，所以$GF//$平面DCE，

又因为$AD//BC$，$AD=\frac{1}{2}BC$，所以$AD//GC$且$AD=GC$，



即四边形$ADCG$是平行四边形，所以$DC//AG$，

因为$AG\not\subset$平面DCE，所以$AG//$平面DCE.

又因为$AG\cap GF=G$，所以平面$AFG//$平面DCE.

19.【详解】（1）因为$AB//CD,\angle ABC=90°,AB=2CD=2BC=2$，

所以$BD=\sqrt{2},AD=\sqrt{2}$，于是$AB^2=BD^2+AD^2$，所以$BD\perp AD$，

又平面$ADM\perp$平面$ABCD$，平面$ADM\cap$平面$ABCD=AD,BD\subset$平面$ABCD$，

所以$BD\perp$平面ADM，又$AM\subset$平面ADM，所以$AM\perp BD$.

异面直线AM与BD所成角的大小为$90°$.

（2）等腰直角三角形ADM中，$AM=DM$，所以$AM\perp DM$.

由（1）知$AM\perp BD$，又$DM\cap BD=D,DM,BD\subset$平面BDM，

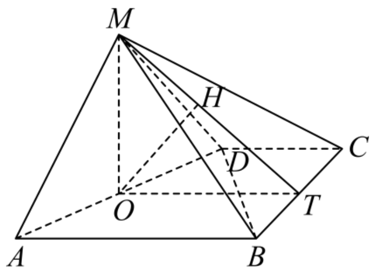
所以$AM\perp$平面BDM.

（3）取BC的中点为T，连接OT,MT. 则$BC\perp OT$.

因为O为腰AD的中点，$AM=DM$，所以$OM\perp$平面$ABCD$，从而$OM\perp BC$，

又$OM\cap OT=O$，$OM,OT\subset$平面OMT，所以$BC\perp$平面OMT.

又 $BC\subset$ 平面 OMT，所以平面 $OMT\perp$ 平面 BCM．



过点 O 作 $OH\perp MT$ 于点 H．所以 $OH\perp$ 平面 MBC．

设 OM 与平面 MBC 所成角为 θ，又 $OM=\dfrac{\sqrt{2}}{2},OT=\dfrac{3}{2}$，

所以 $\tan\theta=\tan\angle OMH=\tan\angle OMT=\dfrac{OT}{OM}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$．

所以直线 OM 与平面 MBC 所成角的正切值为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$．