数学试题（五）参考答案

1-4.BADC　　5-8.DCDD　　9.AC　　10.BD　　11.ACD

12.$\sqrt{3}$　　13.1　　14.$\frac{\pi}{4}$　$\frac{\sqrt{6}}{3}$

15.【详解】(1) 因为向量$\vec{m}=\left(2b,\sqrt{3}\right)$，$\vec{n}=\left(c,\sin C\right)$，且$\vec{m}//\vec{n}$，

所以$2b\sin C=\sqrt{3}c$，由正弦定理可得$2\sin B\sin C=\sqrt{3}\sin C$，因为$\sin C>0$，

所以$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又$B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以$B=\frac{\pi}{3}$.

(2) 因为$\triangle ABC$的面积为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$，所以$\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，又$B=\frac{\pi}{3}$，$a=3$，所以$c=2$，

所以$BM=1$，在$\triangle BCM$中$CM^2=BC^2+BM^2-2BM\cdot BC\cos B=3^2+1^2-2\times3\times1\times\frac{1}{2}=7$，所以

$CM=\sqrt{7}$.

16.【详解】(1) 因为G是ΔABC的重心,

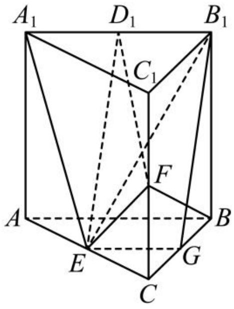
所以$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$,因为$\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}=y\overrightarrow{AN}$,所以$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}x\overrightarrow{AM}+\frac{1}{3}y\overrightarrow{AN}$,因为$M,G,N$三点共线,所以$\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1$,则$x+y=3$.

(2) 由⑴得,$x+y=3\left(x,y>0\right)$,则$x+y=3$,

所以$\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)\left(x+y\right)=\frac{1}{3}\left(3+\frac{2y}{x}+\frac{x}{y}\right)\geq\frac{3+2\sqrt{2}}{3}$,当且仅当$2y^2=x^2$且$x+y=3$,即

$\mathrm{x}=3(2-\sqrt{2}),\mathrm{y}=3(\sqrt{2}-1)$,所以$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$的最小值为$\frac{3+2\sqrt{2}}{3}$,此时$\mathrm{x}=3(2-\sqrt{2}),\mathrm{y}=3(\sqrt{2}-1)$.

17.【解】(1) 如图，点G为BC的中点，连接EG,GB_1，



由E为AC中点，则$EG//AB$，又$AB//A_1B_1$，所以$EG//A_1B_1$，所以A_1,B_1,G,E四点共面，故平面A_1B_1E与棱柱的截面为A_1B_1GE.

(2) 证明：因为在$\mathrm{Rt}\triangle BFC$与$\mathrm{Rt}\triangle B_1GB$中，$\tan\angle BFC=\tan\angle B_1GB=2$，

所以$\angle BFC=\angle B_1GB$，又$\angle BFC+\angle FBC=90°$，所以$\angle B_1GB+\angle FBC=90°$，所以$BF\perp B_1G$，

$BF\perp B_1E$，且$B_1G\cap B_1E=B_1,B_1G,B_1E\subset$平面$A_1B_1GE$，所以$BF\perp$平面$A_1B_1GE$，即$BF\perp$平面$A_1B_1E$；

(3) 由(2)知$BF\perp$平面A_1B_1GE，又$EG\subset$平面A_1B_1GE，所以$EG\perp BF$，又$EG//AB,AB\perp B_1B$，

所以$EG\perp B_1B$，又$BF\cap B_1B=B$，且$BF,B_1B\subset$平面BCC_1B_1，所以$EG\perp$平面BCC_1B_1，

又$A_1B_1 /\!/ EG$，所以D到平面EFG的距离等于B_1到平面EFG的距离，

所以$V_{D-EFG}=V_{B_1-EFG}=V_{E-FGB_1}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle FGB_1}\cdot EG=\frac{1}{3}\cdot\left(S_{正方形BCC_1B_1}-S_{\triangle FCG}-2S_{\triangle GBB_1}\right)EG$

$=\frac{1}{3}\times\left(2\times2-\frac{1}{2}\times1\times1-2\times\frac{1}{2}\times2\times1\right)\times1=\frac{1}{2}$，

所以三棱锥$D-EFG$的体积为定值$\frac{1}{2}$． $\triangle EFG$中，$EG\perp FG,EG=1,FG=\sqrt{2}$，

所以$S_{\triangle EFG}=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，由$V_{D-EFG}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle EFG}\cdot h=\frac{1}{2}$，可得$h=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

所以点D到平面EFG的距离为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

18. （1）解：因为向量$\vec{a}=\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right),\sin^2x\right)$，$\vec{b}=\left(\sin x,-1\right)$，

则$f\left(x\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{4}=\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin^2x+\frac{1}{4}=\sin x\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)-\sin^2x+\frac{1}{4}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x-\frac{1}{2}\sin^2x+\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x-\frac{1-\cos 2x}{4}+\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

（2）解：因为$f\left(\frac{\theta}{4}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{5}}{10}$，所以，$\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

因为$\theta\in\left(\frac{7}{6}\pi,\frac{5}{3}\pi\right)$，则$\frac{3\pi}{4}<\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}<\pi$，

所以，$\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

由二倍角公式可得$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=2\times\frac{\sqrt{5}}{5}\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{4}{5}$,

$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1-2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=1-2\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2=\frac{3}{5}$.

所以，$\sin\theta=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{4}{5}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{5}=-\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$.

19.【解】(1) 在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AA_1\perp$平面ABC，$AC,AB\subset$平面ABC，

则$AA_1\perp AC$，$AA_1\perp AB$，所以点A的曲率为$2\pi-2\times\frac{\pi}{2}-\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$，

所以$\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$．因为$AB=AC$，所以$\triangle ABC$为正三角形．因为$N$为$AB$的中点，所以$CN\perp AB$．

又$AA_1\perp$平面ABC，$CN\subset$平面ABC，所以$AA_1\perp CN$，

因为$AA_1\cap AB=A$，AA_1、$AB\subset$平面ABB_1A_1，所以$CN\perp$平面ABB_1A_1．

（2）取AB_1的中点D，连接DM，DN.

因为N为AB的中点，所以$DN//BB_1$且$DN=\dfrac{1}{2}BB_1$．又$CM//BB_1$且$CM=\dfrac{1}{2}BB_1$，所以$DN//CM$且$DN=CM$，

所以四边形$CNDM$为平行四边形，则$DM//CN$．由（1）知$CN\perp$平面ABB_1A_1，则$DM\perp$平面ABB_1A_1．

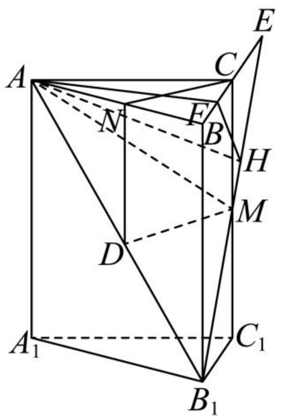
又$DM\subset$平面AMB_1，所以平面$AMB_1\perp$平面ABB_1A_1．（3）取BC的中点F，连接AF，则$AF\perp BC$．

因为$BB_1\perp$平面ABC，$AF\subset$平面ABC，所以$BB_1\perp AF$，因为$BB_1\cap BC=B$，BB_1、$BC\subset$平面BB_1C_1C，

所以$AF\perp$平面BB_1C_1C．又$B_1M\subset$平面BB_1C_1C，所以$AF\perp B_1M$，过F作B_1M的垂线，垂足为H，连接AH，

则$B_1M\perp FH$，又$AF\cap FH=F,AF$、$FH\subset$平面AFH，所以$B_1M\perp$平面AFH，又$AH\subset$平面AFH，

$AH\perp B_1M$，



所以$\angle AHF$为二面角$A-MB_1-C_1$的平面角的补角.

设$B_1M\cap BC=E$，$AB=2$，则$AF=\sqrt{3}$，$EF=1+2=3$，$ME=2\sqrt{2}$．

由等面积法可得$\dfrac{1}{2}ME\cdot FH=\dfrac{1}{2}EF\cdot CM$，则$FH=\dfrac{EF\cdot CM}{ME}=\dfrac{3\times 2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$，

则$\tan\angle AHF=\dfrac{AF}{FH}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，故二面角$A-MB_1-C_1$的正切值为$-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$．