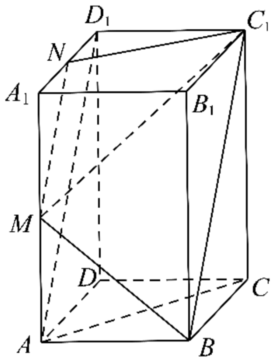
# 数学试题（七）参考答案

1-4. ACCC　　5-8 . DDBA　　9.BC　　10.AC　　11.ABC

12. $-\frac{1}{2}$　　13.4　　14. $2\sqrt{2}+4\sqrt{5}$

14.长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=AD=2$，点$M$为$AA_1$的中点，且$MB\perp MC_1$，如图所示：




设$AA_1=2x$，由于点$M$为$AA_1$的中点，则$AM=x$，$AC=2\sqrt{2}$,

由于$MB\perp MC_1$，利用勾股定理$MB^2+MC_1^2=BC_1^2$，

即$(4+x^2)+\left[x^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2\right]=4+4x^2$，解得$x=2$，故$AA_1=4$，

设$N$为平面$MBC_1$与棱$A_1D_1$的交点，

则平面$MBC_1$被长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$截得的平面图形为四边形$BMNC_1$，

连接$AD_1$，由于平面$AA_1D_1D//$平面$BB_1C_1C$，平面$MBC_1\cap$平面$AA_1D_1D=MN$，

平面$MBC_1\cap$平面$BB_1C_1C=BC_1$，

$\therefore MN//BC_1$，又$AD_1//BC_1$，$\therefore MN//AD_1$，

$\because M$为$AA_1$的中点，$\therefore N$为$A_1D_1$的中点，

所以，$BM=2\sqrt{2}$，$MN=\sqrt{5}$，$C_1N=\sqrt{5}$，$BC_1=2\sqrt{5}$，

因此，截面图形$BMNC_1$的周长为$2\sqrt{2}+\sqrt{5}\times 2+2\sqrt{5}=2\sqrt{2}+4\sqrt{5}$.

15.（1）若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，即$8-m=0$，$m=8$.

（2）若$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为锐角，则$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$且$\vec{a}$、$\vec{b}$不共线，

由$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$，得$8-m>0$，即$m<8$，

假设$\vec{a}$、$\vec{b}$共线，则$-4=2m$，即$m=-2$，

所以当$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为锐角时，$m<8$且$m\neq-2$.

16.（1）因为$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2\sqrt{10}}{5}$，所以$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\left(\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)^2$，化简得$2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{5}$,

因为$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，所以$\cos\alpha>\sin\alpha$，

所以$\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2-4\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)^2-\frac{6}{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$,

所以$\cos\alpha=\frac{\frac{2\sqrt{10}}{5}+\frac{\sqrt{10}}{5}}{2}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\sin\alpha=\frac{\frac{2\sqrt{10}}{5}-\frac{\sqrt{10}}{5}}{5}=\frac{\sqrt{10}}{10}$,

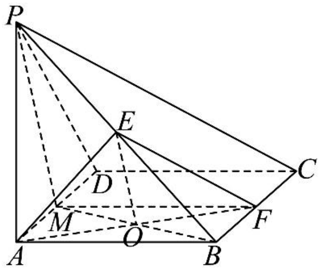
所以$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{10}}{10}}{\frac{3\sqrt{10}}{10}}=\frac{1}{3}$.

（2）由（1）知，$\tan\alpha=\frac{1}{3}$，所以$\tan(2\alpha+\beta)=\tan[(\alpha+\beta)+\alpha]=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\alpha}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha}$

所以$-\frac{1}{2}=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}\tan(\alpha+\beta)}$，解得$\tan(\alpha+\beta)=-1$，

因为$0<\beta<\pi$，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以$0<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$，所以$\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$.

17.（1）如图，连接$BM$交$AF$于点$O$，连接$OE$，




$\because$底面$ABCD$为正方形，$F$为$BC$中点，$M$为$AD$中点，

$\therefore AM//BF$且$AM=BF$，

$\because$四边形$ABFM$为平行四边形，$\therefore O$为$BM$中点.

又$\because E$为$PB$中点，$\therefore OE//PM$，

又$OE\subset$平面$AEF$，$PM\not\subset$平面$AEF$，$\therefore PM//$平面$AEF$.

（2）$\because$底面$ABCD$为正方形，$\therefore AB\perp BC$，

$\because PA\perp$平面$ABCD$，$BC\subset$平面$ABCD$，$\therefore PA\perp BC$，

又$\because PA\cap AB=A$，$PA$，$AB\subset$平面$PAB$，$\therefore BC\perp$平面$PAB$，

$\because AE\subset$平面$PAB$，$\therefore BC\perp AE$，

$\because PA=AB=4$，且$E$为$PB$中点，则$AE\perp PB$，

又$\because BC\cap PB=B$，$BC$，$PB\subset$平面$PBC$，

$\therefore AE\perp$平面$PBC$.

18.（1）由 $2a\sin B=\sqrt{3}b$，

利用正弦定理得：$2\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B$，

$\because \sin B\neq 0$，$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又$A$为锐角，则$A=\frac{\pi}{3}$；

（2）由余弦定理得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$，

即 $49=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc=100-3bc$，

$\therefore bc=17$，又 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{17\sqrt{3}}{4}$.

19.（1）以$D$为原点，$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DP}$分别为$x$轴、$y$轴、$z$轴正方向建立空间直角坐标系，设$PD=DC=1$，则$D(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$C(0,1,0)$，$P(0,0,1)$

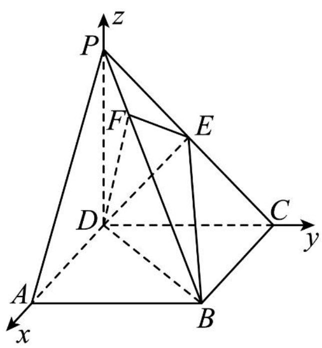
连接$AC$，交$BD$于$O$，连接$OE$，则$O$是$AC$的中点，则$O\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$，

又$E$是$PC$的中点，$\therefore E\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{OE}=\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{PA}=(1,0,-1)$，

所以$\overrightarrow{PA}=-2\overrightarrow{OE}$，所以$PA//OE$

又$OE\subset$ 平面$EDB,PA\not\subset$ 平面$EDB$，

$\therefore PA//$平面$EDB$




（2）由题意知平面$PBD$的一个法向量是$\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$；

平面$PBC$的一个法向量是$\overrightarrow{DE}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

则 $\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DE}\rangle=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DE}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{DE}|}=\frac{(-1,1,0)\cdot\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{1}{2}$

所以，$\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DE}\rangle=\frac{\pi}{3}$，

即二面角$C-PB-D$的大小为$\frac{\pi}{3}$.