APPLICATIONS PRATIQUES DE LA TRIGONOMETRIE

I - Première application de la trigonométrie : La navigation en mer

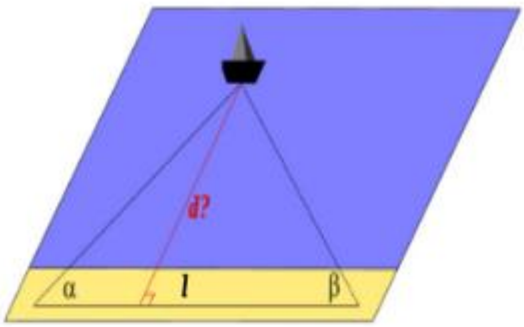
La première application de la trigonométrie est le principe de triangulation, permettant en fonction de deux endroits de déterminer un troisième endroit. Une des premières applications de la trigonométrie est donc la navigation (l'orientation en mer).

a) La trigonométrie permit de calculer la distance d'un bateau à une côte

Pour avoir une mesure approximative de cette distance, Thalès de Milet plaça deux observateurs A et C sur le rivage, éloignés d'une distance b connue.

Il demanda à chacun d'entre eux de mesurer l'angle que font les droites passant par le bateau B et l'un d'entre eux, et la droite passant par les deux observateurs.

Cette méthode a un intérêt si nous voulons déterminer de grandes distances. Mais dans ce cas nous devons placer les deux observateurs suffisamment éloignés l'un de l'autre, pour que les mesures d'angle soient plus précises.

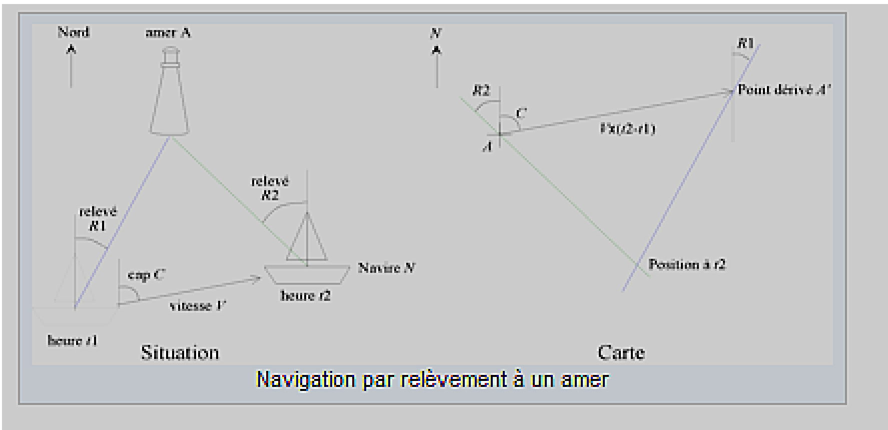


$$d = \frac{\sin\alpha \, \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\, l$$

b) Navigation par un amer : comment se repérer en mer lorsqu'on aperçoit une terre

Jusque dans les années 1980, on utilisait essentiellement la triangulation pour mesurer les distances.

Le navire est placé à un point B, et voit la lumière d'un phare (point A). On mesure l'angle fait entre la droite (AB) et le Nord indiqué par une boussole. On obtient la mesure de l'angle R1.



Navigation par relèvement à un amer

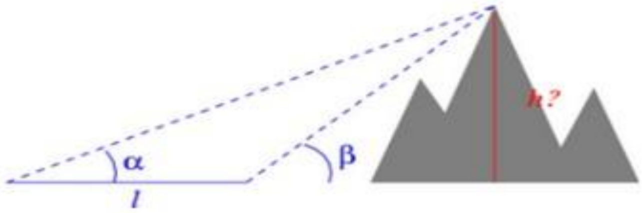
Le bateau dérive à une certaine vitesse, il se trouve alors en un point C. On mesure l'angle fait entre la droite (AC) et le Nord, on obtient la mesure de l'angle R2.

On se trouve donc dans un triangle ABC dont on connait les angles et la mesure d'un côté (BC). On applique alors le procédé de triangulation, ce qui permet de se repérer en mer

II - Deuxième application de la Trigonométrie : La mesure de grands espaces

a) Calcul de la hauteur d'une montagne

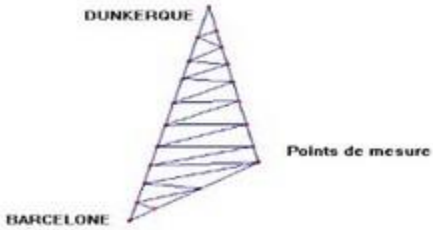
(calculs qui développèrent l'architecture, permettant la construction de grands édifices comme les cathédrales) :



$$h = \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}\, l$$

b) Le calcul de longues distances (cartographie)

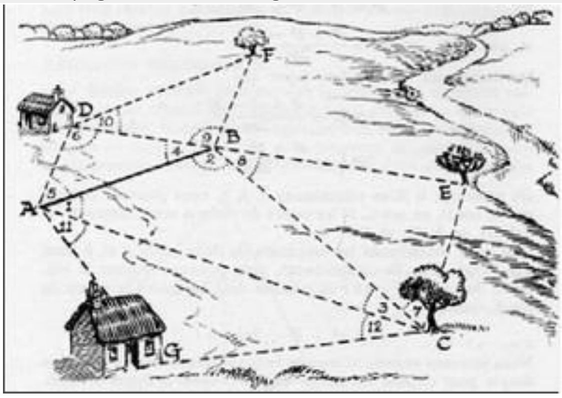
Ce procédé de triangulation, répété de proche en proche, a été utilisé par Delambre et Méchain de 1792 à 1798 pour mesurer la distance entre Dunkerque et Barcelone (environ 1 147 km) sur le méridien de Paris.
Ce qui permettra la première définition du mètre en 1799.



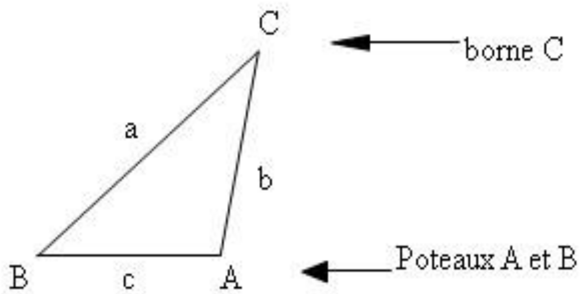
c) L'arpentage d'un terrain

On découpe le terrain en différents triangles (voir figure A) et on mesure leurs aires.découpage d'un terrain : figure A Mesures de l'aire du triangle : figure B

découpage d'un terrain : figure A



Mesures de l'aire du triangle : figure B



Pour mesurer l'aire d'un triangle , on va procéder ainsi :

La démarche habituelle (voir figure B) consiste à planter deux poteaux aux points A et B, et avec un décamètre ou une chaîne d'arpenteur et à mesurer la distance c qui les sépare (« la ligne de base »).

Remplacez ensuite le poteau A par une lunette d'arpenteur munie d'un plateau divisé en 360 degrés permettant de repérer sa direction (« azimut »).En visant successivement une borne C puis le poteau B, vous obtenez l'angle A du triangle ABC par soustraction des valeurs lues sur le plateau d'azimut. À partir du point B on mesure l'angle B de façon analogue.

On obtient les mesures a et b à l'aide de formules trigonométriques dont la formule des tangentes (dite parfois formule des arpenteurs) :

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

et $a = b.\cos C + c.\cos B$ *(formule de projections)*

Il ne reste plus qu'à calculer l'aire du triangle à l'aide de la formule d'Héron :

si $s = \frac{1}{2} \times (a+b+c)$ alors l'aire du triangle ABC $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$