3éme *CE QU'IL FAUT RETENIR SUR LES FONCTIONS*

Soit f une fonction(numérique) : procédé qui associe un nombre à un autre nombre unique.(parfois le même).

<u>Comment définir ce procédé ?</u>

f : $x \rightarrow$ f (x¿ définie pour tout x (ou avec conditions) ou f définie par, pour tout x f (x¿=¿.....

ex :f :$x \rightarrow x^2+2x-3$ x définie pour tout x ou f définie par, pour tout x f(x) = $\underbrace{x^2+2x-3}_{\textit{formule explicite de } f}$

x est la variable et donc peut prendre n'importe quelle valeur du moment que f (x¿ est calculable.

Pour une valeur particulière a de x,

$$x \xrightarrow{\quad f \quad} f(x)$$

un antécédent de f(x) par f — l'image de x par f

<u>Utilisation</u>

Formulation de la question	méthode	conclusion
- Déterminer l'image du nombre a par la fonction f. - De quel nombre a est-il un antécédent par f ?	On remplace x par a dans f(x) et dans la formule explicite de f, on calcule f(a)et on obtient un nombre b	- L'image de a par f est b - a est un antécédent de b par f
- déterminer les éventuels antécédents du nombre b par la fonction f. - existe-t-il des nombres qui ont pour image b par la fonction f ?	Revient à déterminer x tel que f(x) = b et donc à résoudre l'équation f(x) = b d'inconnue x avec les méthodes usuelles en tenant compte d'éventuelles conditions.	- b admet pour antécédent(s) par f les solutions, si elles existent, de l'équation. - Si l'équation admet des solutions :conclure sur l'existence ,et nommer les nombres qui ont pour image b par f Si l'équation n'admet pas de solution : il n'existe pas de nombres qui ont pour image b par f.

Représentation graphique d'une fonction

Soit (O ;I ;J) un repère du plan , soit f une fonction.

La courbe représentative de f dans le repère (O ;I ;J) est constituée de tous les points M du plan de couple de coordonnées (x; f(x)) pour les valeurs de$x$ pour lesquelles f(x) est calculable.

On la note en général Cf et on dit que Cf admet pour équation y = f (x), et on note Cf : y = f(x) .

ce qui veut dire qu'en considérant A (x_A; y_A) dans le repére (O ;I ;J)

si A ∈ Cf alors y_A = f (x_A)

si y_A = f (x_A) alors A ∈ Cf .

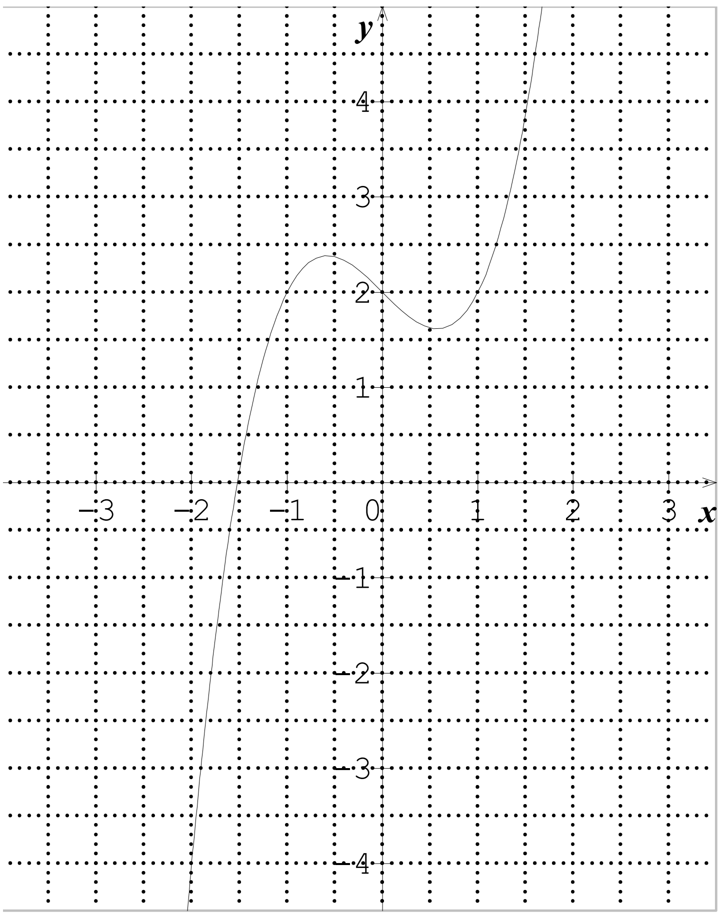
utilisation

Formulation de la question	Méthode et rédaction	conclusion
Le point A (x_A; y_A) appartient-il à Cf ?	On définit x_A et on calcule f(x_A¿et on le compare à y_A. - si y_A = f (x_A) alors A ∈ Cf - si $y_A \neq$ f (x_A) alors A ∉ Cf	-Le point A (x_A; y_A) appartient à Cf . -Le point A(x_A; y_A) n'appartient pas à Cf .
Déterminer l'ordonnée du point B de Cf d'abscisse $x_B$donnée.	si B(x_B; y_B) ∈ Cf alors y_B = f (x_B) or on connait x_B donc on calcule f(x_B)	L'ordonnée du point B de Cf d'abscissex_B est………
Déterminer les abscisses possibles de C de Cf d'ordonnée y_C donnée.	si C(x_C; y_C) ∈ Cf alors y_C = f (x_C) or on connait y_C donc on cherche x tel que f(x) = y_C et donc on résout l'équation f(x) = y_C d'inconnue $x$avec les méthodes usuelles en tenant compte d'éventuelles conditions.	-Si l'équation n'admet pas de solution :il n'existe aucun point de Cf dont l'ordonnée est y_C. -Si l'équation admet une ou plusieurs solutions :les abscisses des points de Cf d'ordonnée y_C sont …….

Graphiquement

:Soit Cf donnée dans un repère avec les graduation, les points à coordonnées exactes sont généralement signalées par une croix.

Exemple :



Utilisation

Formulation de la question	Méthode et rédaction	Conclusion sur la copie
Déterminer graphiquement l'image d'un nombre b donné par la fonction f. (sous réserve que cela soit possible) (fait pour b = 0,5 sur le graphique)	On cherche l'ordonnée du point de Cf d'abscisse b :on part du point d'abscisse a de l'axe des abscisses ,on remonte parallèlement à l'axe des ordonnées à la courbeCf , on obtient un point dont on repère l'ordonnée sur l'axe des ordonnées. L'explication n'est en général pas demandée , en revanche le **fléchage est obligatoire**.	si obtient une valeur exacte (correspondant à une croix) : L'image de b par f est … b a pour image par f ….. si ce n'est pas le cas : L'image de b par f est le nombre d avec d≈….. b a pour image par f est le nombre d avec d≈…. on peut aussi un encadrement de l'image d …≤ d ≤…
Déterminer graphiquement les éventuels antécédents d'un nombre c donné par la fonction f. (fait pour b = 2 et pour b = 3 sur le graphique)	On cherche les abscisses des points de Cf d'ordonnée c, s'ils existent :on part du point d'ordonnée c de l'axe des ordonnées ,on se déplace à droite et à gauche parallèlement à l'axe des abscisses pour rejoindre la courbeCf , on obtient un point , plusieurs ou même aucun. On repère l'abscisse de chacun de ces points sur l'axe des abscisses . L'explication n'est en général pas demandée , en revanche le **fléchage est obligatoire.**	Si on obtient une ou plusieurs valeurs exactes(correspondant aux abscisses des points signalés par une croix) : L' (es) antécédent(s) de c par f est(sont) ……. Si ce n'est pas le cas : L'(es) antécédent(s) de c par f est (sont) x_1 (x_2,……) avec $x_{1\approx}$….. ou ….≤ x_1 ≤……… On peut avoir à « panacher » la rédaction Si on n'obtient aucune valeur : Le nombre c n'a pas d'antécédent par f.
Résoudre graphiquement l'équation f (x) = b où b est un nombre donné	**On doit écrire sur la copie ce que l' on fait** :on cherche les abscisses de tous les points de Cf d'ordonnée b. **On fait le fléchage obligatoire sur le graphique** avec la méthode précédente, **on repère** x_1**,**x_2**…….** **sur l'axe des abscisses (s'ils existent).** **On écrit sur la copie ce qu'on a obtenu** avant de conclure.	Si on n'obtient aucune valeur : L'équation f(x) = b n'admet pas de solution Si on obtient une ou plusieurs valeurs :les solutions de l'équation sont x_1, x_2………. avec x_1 =…. ou x_1 ≈…. selon le cas, de même avec les autres
Résoudre graphiquement l'équation f(x) =g (x)	**On doit écrire sur la copie ce que l' on fait** : on cherche les abscisses des points communs à Cf et Cg . **On les repère sur l'axe des abscisses avec fléchage**, **on écrit sur la copie ce qu'on obtient avant de conclure**.	Même principe qu'au dessus

Cas des fonctions linéaires et affines

1)Soit a et b deux nombres fixés

Fonction affine : f : $x \rightarrow ax+b$ définie pour tout x.

Fonction linéaire : f : f : $x \rightarrow ax$ définie pour tout x. (fonction affine avec b ¿ 0)

Fonction constante : f : $x \rightarrow b$ définie pour tout x. (fonction affine avec a = 0)

2)Propriétés

- Si f est la fonction linéaire de coefficient a alors pour tout x, f(x) = ax

  et pour tout x non nul $\frac{f(x)}{x}$ = a.

- Si f est une fonction telle que pour tout x, f(x) = ax où a désigne une constante alors f est la fonction linéaire de coefficient.
- Si f est la fonction affine de coefficients a et b alors pour tout x_1 et pour tout x_2 ,

  f(x_1) – f(x_2) = a ($x_1 - x_2$)

  et pour tout x_1 et pour tout x_2 tels que $x_1 \neq x_2$

  $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ = a .

  f(x_1) – f(x_2) est appelé l'accroissement de f(x_2) $\grave{a}$ f(x_1) (accroissement des images) ;

  $x_1 - x_2$ est appelé l'accroissement de x_2 à x_1 (accroissement des x)

  $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ est appelé le taux d'accroissement de f entre x_1 et x_2 (ou entre x_2 et x_1)

3) Représentations graphiques

Soit (O ;I ;J) un repère du plan

-Si f est la fonction linéaire de coefficient a alors sa représentation graphique dans le repère est la droite (d) passant par O origine du repère et le point A(1 ; a).

a est appelé le coefficient directeur de (d).

(d) admet pour équation y = ax et on note (d) : y = ax .

-Si f est la fonction affine de coefficients a et b alors sa représentation graphique dans le repère est la droite (d') ,parallèle à la droite (d) d 'équation y = ax passant par le point B(0 ; b).

a est appelé le coefficient directeur de (d').

b est appelé l'ordonnée à l'origine de (d') (c-a-d , l'ordonnée du point de(d') d'abscisse 0)

(d') admet pour équation y = ax + b et on note (d') : y = ax +b.

-Réciproquement, dans le repère (O ;I ;J), toute droite(D) qui n'est pas parallèle à l'axe, est la représentation d'une fonction affine et donc (D) admet une équation du type y = ax+b où a et b seront à déterminer.

Si (D) passe par O ,l'origine du repère alors (D) est la représentation graphique d'une fonction linéaire et donc (D) admet une équation du type y = ax où a sera à determiner.

Si A (x_A; y_A) et B (x_B; y_B) avec $x_{A \neq} x_B$ sont deux points de (D) alors le coefficient directeur de (D) est

$$\mathbf{a} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{accroissement\ des\ ordonn\acute{e}es\ de\ B\ \grave{a}\ A}{accroissement\ des\ abscisses\ de\ B\ \grave{a}\ A}$$

cette méthode pour déterminer le coefficient directeur d'une droite, non parallèle à l'axe des ordonnées est générale ; en effet **si (D) passe par O** alors O a pour couple de coordonnées (0 ; 0) dans le repère et donc

$$\mathbf{a} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{y_A - 0}{x_A - 0} = \frac{y_A}{x_A} = \frac{ordonn\acute{e}e\ de\ A}{abscisse\ de\ A}.$$

-Pour déterminer a , il suffit de lire les coordonnées exactes de deux points de (D) quand (D) ne passe pas par O et d'un seul quand elle passe par O et ensuite calculer a.

Détermination de b : on lit l'ordonnée du point d'abscisse 0 de (D), si c'est lisible ,on en déduit b directement, sinon on utilise les coordonnées de A ou B

Sachant que A (ou B) appartient à (D) , on a y_A= a x_A+ b et donc b = $y_A -$ ¿ a x_A.

<u>exemple rédigé</u>

Sur le graphique ci-contre :(D) et (D') sont deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées , de plus elles ne passent pas par l'origine du repère, donc elles admettent respectivement pour équations des équations du type y = ax +b et y = a' x + b'.

(D) passe par B(**0** ; 3) et A(2 ; -1)

On a donc directement b =3

or a =$\dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ avec $x_A \neq x_B$

donc a =$\dfrac{-1-3}{2-0}$ d'où a = -2

(D) admet pour équation y = -2x + 3

(D') passe par A' (-3 ;-1,5) et B'(-0,5 ;-0,5)

b' diificile à lire et a' =$\dfrac{y_{A'} - y_{B'}}{x_{A'} - x_{B'}}$ avec $x_{A'} \neq x_{B'}$

soit a' = 0,4 d'où y = 0,4x+ b'

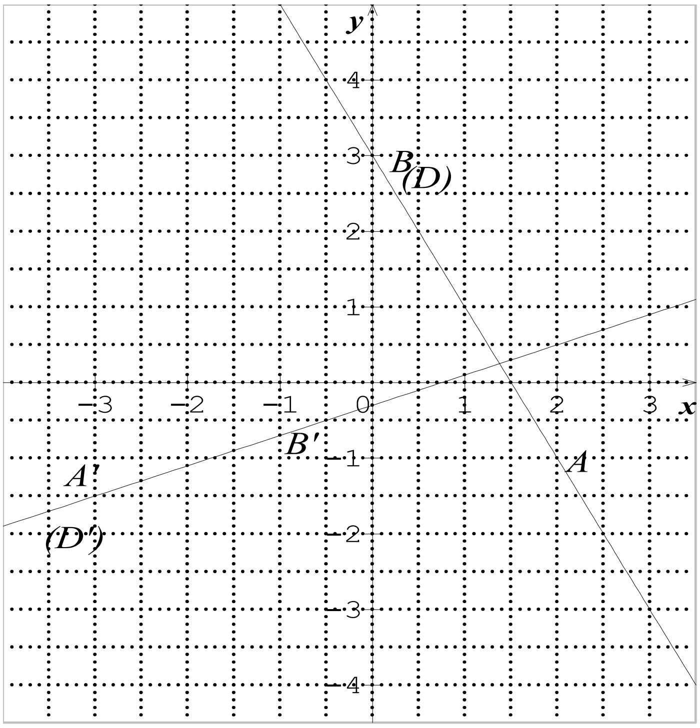
comme B 'appartient à (D'), ses coordonnées vérifient

$y_{B'}$= 0,4 $x_{B'}$+ b'

d'où b' =$y_{B'}$- 0,4 $x_{B'}$

b'= - 0,5 – 0,4× (- 0,5) ; b' = - 0,3

(D') admet pour équation y =0,4x-0,3.



<u>Remarque importante</u> : si on connait les coordonnées de trois points distincts dans un repère, pour savoir si ces points sont alignés, on calcule les coefficients directeurs de deux droites passant respectivement par deux de ces points :s'ils sont égaux alors les trois points sont alignés ,sinon ils ne le sont pas.

-Pour déterminer a et b, on peut résoudre le système linéaire de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} y_A = a\,x_A + b \\ y_B = a\,x_B + b \end{cases}$$

d'inconnues a et b. avec l'exemple de (D'), on résout $\begin{cases} -1{,}5 = a \times (-3) + b \\ -0{,}5 = a \times (-0{,}5) + b \end{cases}$ par combinaison ou substitution ou par la méthode suivante(les systèmes suivants ont les mêmes solutions que le premier) $\begin{cases} b = -1{,}5 + 3a \\ b = -0{,}5 + 0{,}5a \end{cases}$;

$\begin{cases} -1{,}5 + 3a = -0{,}5 + 0{,}5a \\ b = -1{,}5 + 3a \end{cases}$; $\begin{cases} 2{,}5a = 1 \\ b = -1{,}5 + 3a \end{cases}$; $\begin{cases} a = 0{,}4 \\ b = -0{,}3 \end{cases}$. On retrouve bien les résultats précédents.