IT Fundamentals

IT Fundamentals - Voorkennis

S. Lievens - N. Slaats - J. Van Steen

Bachelor in de Toegepaste Informatica
2021-2022

Inhoudsopgave

HOOFDSTUK 1

Getallenverzamelingen

1.1 De natuurlijke getallen

Definitie 1.1 *De verzameling van de* ***natuurlijke getallen*** *bevat het getal 0 en al de getallen die het resultaat zijn van een telling van een eindig aantal dingen.*
De verzameling wordt aangeduid met het symbool $\mathbb{N}$.

1.2 De gehele getallen

Definitie 1.2 *De verzameling van de* ***gehele getallen*** *bevat alle natuurlijke getallen* $\{0, 1, 2, ...\}$ *en hun tegengestelde* $\{-1, -2, \ldots\}$.
De verzameling van de gehele getallen wordt voorgesteld door $\mathbb{Z}$.

Opmerking Het getal -0 is hetzelfde als 0.

1.3 De rationale getallen

Definitie 1.3 *De verzameling van de* ***rationale getallen*** *bevat alle getallen die voorgesteld kunnen worden d.m.v. een breuk.*
De verzameling van rationale getallen wordt genoteerd als $\mathbb{Q}$.

1.4 De reële getallen

Definitie 1.4 *De verzameling van de* ***reële getallen*** *is de verzameling van alle decimale getallen.*
De verzameling van de reële getallen wordt genoteerd als $\mathbb{R}$.

HOOFDSTUK 2

Bewerkingen

Op de elementen van $\mathbb{R}$ zijn een aantal bewerkingen gedefinieerd. We overlopen de belangrijkste.

2.1 Optellen

De optelling van getallen noemen we ook de **som** van getallen. Als symbool gebruiken we voor de optelling een plusteken ($+$).

Voorbeelden

- Er geldt
$$5 + 3 = 8.$$
We zeggen: '5 plus 3 is (gelijk aan) 8'. Het resultaat 8 wordt de *som* genoemd, 5 en 3 zijn de *termen*.
- Er geldt
$$-5 + 3 = -2.$$
- Er geldt
$$-5 + (-3) = -8.$$
- De som van twee breuken kan enkel uitgevoerd worden wanneer de beide breuken gelijknamig zijn.
Als de noemers van de twee breuken gelijk zijn, dan is het resultaat van de som opnieuw een breuk met als teller de som van de tellers, de noemer blijft onveranderd.
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}$$

Voor de optelling gedefinieerd in $\mathbb{R}$ gelden een aantal eigenschappen.

Eigenschap 2.1 *Stel $x, y, z \in \mathbb{R}$, er geldt:*

- *de verzameling $\mathbb{R}$ is gesloten voor $+$: $x + y \in \mathbb{R}$.*
- *de bewerking $+$ is commutatief: $x + y = y + x$.*
- *de bewerking $+$ is associatief: $(x + y) + z = x + (y + z)$.*
- *het element 0 is het neutraal element voor $+$: $x + 0 = x$.*
- *elk element x heeft een symmetrisch element, $-x$, voor +: $x + (-x) = 0$.*

Hieruit mogen we besluiten dat $\mathbb{R}, +$ een commutatieve groep is.

Definitie 2.1 *Het **verschil** van twee reële getallen a en b wordt gedefinieerd als*

$$a - b = a + (-b).$$

Voorbeelden

- $5 - 3 = 5 + (-3) = 2$
- $\dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{10} = \dfrac{4}{10} - \dfrac{1}{10} = \dfrac{4-1}{10} = \dfrac{3}{10}$

Notaties Het *sommatieteken* $\sum$ wordt gebruikt om een eindige som, waarbij alle termen a.d.h.v. eenzelfde formule kunnen voorgesteld worden, verkort te noteren. Voorbeelden:

- Beschouw de som $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$. In deze som is elke term van de vorm i^2 met i een natuurlijk getal van 1 tot 5. Dit wordt verkort weergegeven als volgt:

  $$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55.$$

  De *sommatie-index i* moet lopen van 1 tot 5. De eerste waarde van de sommatie-index wordt weergegeven onder het sommatieteken, de laatste waarde wordt boven het sommatieteken genoteerd.

- $\sum_{i=2}^{4} (i - 1) = (2 - 1) + (3 - 1) + (4 - 1) = 1 + 2 + 3 = 6.$
- $\sum_{i=1}^{3} \dfrac{3-i}{2} = \dfrac{(3-1)}{2} + \dfrac{(3-2)}{2} + \dfrac{(3-3)}{2} = \dfrac{2}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{0}{2} = \dfrac{3}{2}.$

2.2 Vermenigvuldigen

Een som van gelijke termen noteren we korter als een **product** (notatie: $\cdot$).

$$n \cdot m = \underbrace{m + m + \cdots + m}_{n\times}.$$

Indien geen verwarring mogelijk is, mag het symbool '$\cdot$' weggelaten worden: $n \cdot m = nm$.

Voorbeelden

- Beschouw het volgende product van twee gehele getallen:

  $$4 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20.$$

  We lezen: '4 maal 5 is (gelijk aan) 20'. Het resultaat 20 wordt het *product* genoemd, 4 en 5 zijn de *factoren*.

- Twee willekeurige breuken kunnen steeds met elkaar vermenigvuldigd worden. Het resultaat is opnieuw een breuk met als teller het product van de beide tellers en als noemer het product van de beide noemers.

  $$\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 2} = \frac{21}{10}.$$

- Het product van twee negatieve getallen is een positief getal:

  $$(-5) \cdot (-\frac{3}{5}) = \frac{(-5) \cdot (-3)}{5} = \frac{15}{5} = 3.$$

- Het product van een negatief getal en een positief getal is opnieuw negatief:

  $$-0,5 \cdot 8 = -4.$$

Eigenschap 2.2 *Stel $x, y, z \in \mathbb{R}$, er geldt:*

- *de verzameling $\mathbb{R}$ is gesloten voor $\cdot$: $x \cdot y \in \mathbb{R}$.*
- *de bewerking $\cdot$ is commutatief: $x \cdot y = y \cdot x$.*
- *de bewerking $\cdot$ is associatief: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.*
- *het element 1 is het neutraal element voor $\cdot$: $x \cdot 1 = x$.*
- *elke $x \in \mathbb{R}_0$ heeft een invers element, x^{-1}, voor $\cdot$: $x \cdot x^{-1} = 1$.*

Hieruit mogen we besluiten dat $\mathbb{R}_0, \cdot$ een commutatieve groep is.

Eigenschap 2.3 *Stel $x, y, z \in \mathbb{R}$, er geldt:*

- *$\mathbb{R}, +$ vormt een commutatieve groep;*
- *$\mathbb{R}_0, \cdot$ vormt een commutatieve groep;*
- *de bewerking $\cdot$ is distributief t.o.v. $+$: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.*

Hieruit mogen we besluiten dat $\mathbb{R}, +, \cdot$ een veld vormt.

Definitie 2.2 *Een reëel getal a delen door een reëel getal b, $b \neq 0$, is a vermenigvuldigen met de inverse van b, b^{-1}.*

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}.$$

Voorbeelden

- $5 \cdot 2^{-1} = 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5.$
- $\frac{\frac{2}{5}}{3} = \frac{2}{5} \cdot 3^{-1} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}.$
- Een getal a delen door een breuk is hetzelfde als het getal a vermenigvuldigen met de omgekeerde breuk:

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{5} \cdot (\frac{3}{10})^{-1} = \frac{2}{5} \cdot \frac{10}{3} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}.$$

2.3 Machten

Definitie 2.3

- *Stel $a \in \mathbb{R}_0$ dan geldt voor alle $n \in \mathbb{N}_0$*

$$\begin{array}{rcl} a^0 & = & 1 \\ a^1 & = & a \\ a^n & = & a \cdot a^{n-1} \quad (n \geq 2) \\ a^{-n} & = & \frac{1}{a^n}. \end{array}$$

- *Stel $a \in \mathbb{R}_0^+$ dan geldt voor alle $p \in \mathbb{N}$ en $q \in \mathbb{N}_0$*

$$\begin{array}{rcl} a^{\frac{1}{q}} & = & \sqrt[q]{a} = w \Leftrightarrow w^q = a \quad (w \in \mathbb{R}) \\ a^{\frac{p}{q}} & = & \sqrt[q]{a^p} \\ a^{-\frac{p}{q}} & = & \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}. \end{array}$$

Voorbeelden

- $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$. We zeggen de *tweedemacht* van 5 is 25. We spreken ook van het *kwadraat* van 5.
- $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. We zeggen de derdemacht van 5 is 125, met 5 het *grondtal* en 3 de *exponent*.
- $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$.
- $\sqrt[3]{27} = 3$ want $(3)^3 = 27$.
- $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$.
- $8^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{64}} = \dfrac{1}{4}$.
- $2^1 = 2$.
- $2^0 = 1$.
- $2^{-1} = \dfrac{1}{2^1} = \dfrac{1}{2}$.

Eigenschap 2.4 *Stel $a, b \in \mathbb{R}_0^+$. Voor alle $r, s \in \mathbb{Q}$ geldt dan*

$$\begin{aligned} a^r \cdot a^s &= a^{r+s} \\ \tfrac{a^r}{a^s} &= a^{r-s} \\ (a^r)^s &= a^{r \cdot s} \\ a^r \cdot b^r &= (a \cdot b)^r \\ \tfrac{a^r}{b^r} &= (\tfrac{a}{b})^r. \end{aligned}$$

Voorbeelden

- $2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8 = 256$
- $\dfrac{2^3}{2^5} = 2^{3-5} = 2^{-2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$
- $(2^3)^5 = 2^{3 \cdot 5} = 2^{15} = 32\,768$
- $2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3 = 1000$
- $\dfrac{10^3}{5^3} = (\dfrac{10}{5})^3 = 2^3 = 8$.

2.4 Logaritmen

We weten dat $2^3 = 8$, m.a.w. we moeten 2 tot de derde macht verheffen om 8 te bekomen. Dit schrijven we als $\log_2(8) = 3$.
Er geldt: $16^{\frac{1}{2}} = 4$. Dus 4 is de $\frac{1}{2}$-macht van 16. Dit wordt genoteerd als: $\log_{16}(4) = \frac{1}{2}$.

Definitie 2.4 *Stel $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus 1$ en $b \in \mathbb{R}_0^+$ het **logaritme met grondtal** a van argument b is*

$$log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b.$$

- *Het **briggse logaritme (log)** is het logaritme met grondtal 10*

$$log\, b = log_{10} b = x \Leftrightarrow 10^x = b.$$

- *Het **neperiaans (of natuurlijk) logaritme (ln)** is het logaritme met grondtal het getal e ($= 2,72\ldots$).*

$$ln\, b = log_e b = x \Leftrightarrow e^x = b.$$

Voorbeelden

- $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$
- $\log_2 2 = \log_2 2^1 = 1$
- $\log_2 1 = \log_2 2^0 = 0$
- $\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$
- $\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$
- $\ln \mathrm{e} = \log_{\mathrm{e}} \mathrm{e}^1 = 1$
- $\log 1000 = \log_{10} 10^3 = 3.$

Eigenschap 2.5 *Stel $a, b \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$.*

$$\begin{aligned}
log_a(x \cdot y) &= log_a x + log_a y \\
log_a \frac{x}{y} &= log_a x - log_a y \\
log_a(x^p) &= p \cdot log_a x \quad (met\ p \in \mathbb{Q}) \\
log_a a &= 1 \\
log_a x &= \frac{log_b x}{log_b a}.
\end{aligned}$$

Voorbeelden

- $\log_4 2 + \log_4 8 = \log_4(2 \cdot 8) = \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2$
- $\log_3 36 - \log_3 4 = \log_3 \frac{36}{4} = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$
- $2 \cdot \log_4 8 = \log_4 8^2 = \log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$
- $\log_7 7 = 1$
- $\log_{25} 125 = \frac{\log_5 125}{\log_5 25} = \frac{\log_5 5^3}{\log_5 5^2} = \frac{3}{2}.$

2.5 Voorrangsregels

De volgorde waarin rekenkundige bewerkingen in een berekening uitgevoerd worden, hangt af van hun prioriteit en van de plaats van eventuele haakjes.

Het plaatsen van haken duidt aan dat de bewerking die tussen deze haken staat eerst moet worden uitgevoerd of m.a.w. voorrang moet krijgen bij de berekening.

Haken wijzigen de normale voorrangsregels van de bewerkingen. De voorrangsregels zijn:

1. haakjes uitwerken;
2. de bewerkingen uitvoeren volgens dalende orde van prioriteit:
   - eerst machten,
   - dan vermenigvuldigingen en delingen,
   - tenslotte alle sommen.

Bewerkingen van dezelfde prioriteit worden van links naar rechts uitgewerkt.

Voorbeelden

- $(2+3) \cdot 6^2 - 2 = 5 \cdot 36 - 2 = 180 - 2 = 178$
- $100 - 2 \cdot (12 - 3^2) + 2 \cdot 4 = 100 - 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 100 - 6 + 8 = 102.$

2.6 Oefeningen

1. Bereken:

   a) $\frac{3}{4} + \frac{1}{6} - \frac{2}{3}$

   b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{3}$

   c) $\frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{30} \cdot \frac{2}{15}}$

   d) $(\frac{3}{4} + \frac{1}{8}) \cdot \frac{8}{7}$

   e) $\frac{3}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{7}$

   f) $2 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 \cdot (27 - 5^2) + (-1)^3 + 3 \cdot ((-4)^2 - 16)$

   g) $\sqrt[3]{2^6}$

   h) $\sqrt[3]{\frac{8}{2^6}}$

2. Bereken:

   a) $\sum_{i=2}^{4} (\frac{1}{i})$

   b) $\sum_{i=2}^{3} (i^2 - 2)$

   c) $\sum_{l=1}^{3} ((\sum_{i=2}^{3} i) - l)$

3. Bereken:

   a) $\sum_{i=1}^{3} (5 - i)$

   b) $(\sum_{i=1}^{5} i) - 5$

c) $\sum_{x=1}^{4} \frac{x-1}{x}$

4. Bereken:

a) $\frac{2}{5} + \frac{8}{3}$

b) $\frac{3}{2} + \frac{5}{12} - \frac{6}{3}$

c) $\frac{7}{10} + 2 - \frac{3}{4}$

5. Bereken:

a) $\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3}$

b) $\frac{33}{12} \cdot \frac{120}{11}$

c) $\frac{\frac{5}{13}}{\frac{2}{7}}$

6. Bereken:

a) $(-\frac{1}{3})^0$

b) $(-\frac{3}{8})^{-1}$

c) 10^{-3}

d) $\sqrt[6]{64}$

e) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$

f) $32^{\frac{2}{5}}$

g) $100^{\frac{5}{2}}$

7. Bereken:

a) $\log_2(16)$

b) $\log_3(27)$

c) $\log_{\frac{1}{3}}(27)$

d) $\log_5(5)$

e) $\log_{\frac{1}{7}}(\frac{1}{7})$

f) $\log_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{125})$

g) $\log_{\sqrt{2}}(1)$

8. Druk uit in functie van $\log(a)$, $\log(b)$ en $\log(c)$:

   a) $\log(abc)$

   b) $\log(a^{10}b)$

   c) $\log\left(\dfrac{1}{b\sqrt{c}}\right)$

   d) $\log\left(\sqrt{\dfrac{ab^3}{\sqrt{c}}}\right)$

9. Stel $x, y \in \mathbb{R}$. Noteer de volgende uitdrukkingen zo compact mogelijk:

   a) $x + x + y + x$

   b) $x \cdot y \cdot x \cdot x \cdot y$

   c) $x^2 \cdot y \cdot y + x \cdot x \cdot y^2 + x \cdot y \cdot x \cdot y$

   d) $(6x^3)^2 - 2(x^2)^3$

10. Stel $x, y \in \mathbb{R}$. Breng op gelijke noemer en vereenvoudig indien mogelijk.

   a) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

   b) $\dfrac{3}{y} + \dfrac{2}{y^3}$

   c) $\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x+3}$

   d) $\dfrac{2x^2 \cdot y}{x \cdot y} + \dfrac{(-2x)^3 \cdot y^2}{y}$

   e) $x^2 + x \cdot y + x \cdot x - \dfrac{x \cdot y^2}{y}$

   f) $\dfrac{2x + 3y(5x-2)}{x} + \dfrac{(x-2)y - y(2x+1-x)}{y}$

HOOFDSTUK **3**

Veeltermen

3.1 Inleiding

Een **eenterm** in een variabele x is een uitdrukking van de vorm ax^n met a een willekeurig reëel getal ($a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$).
De uitdrukkingen $3x^5$, $-\frac{x^3}{7}$, $\sqrt{2}x$ zijn allemaal voorbeelden van eentermen.

Een som van meerdere eentermen wordt een **veelterm** genoemd.

Definitie 3.1 *Een willekeurige **veelterm** v_n **van de** n**-de graad** wordt gedefinieerd als*

$$v_n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

met $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\} \subset \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ en $n \in \mathbb{N}$.
*De term $a_n x^n$ wordt de **hoogste graadsterm** genoemd;*
*de coëfficiënt a_n wordt de **hoogste graadscoëfficiënt** genoemd.*

Voor veeltermen zijn een aantal bewerkingen gedefinieerd, herhalen we de belangrijkste bewerkingen a.d.h.v. een voorbeeld.

Stel

$$\begin{aligned} f(x) &= 6x^5 + 3x^3 - 4x^2 + 5 \\ g(x) &= 3x^2 - 6x^3 + 2x + 6\ . \end{aligned}$$

- De som van twee veeltermen:

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (6x^5 + 3x^3 - 4x^2 + 5) + (3x^2 - 6x^3 + 2x + 6) \\ &= 6x^5 + (3-6)x^3 + (-4+3)x^2 + 2x + (5+6) \\ &= 6x^5 - 3x^3 - x^2 + 2x + 11\ . \end{aligned}$$

- Het verschil van twee veeltermen:
$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (6x^5 + 3x^3 - 4x^2 + 5) - (3x^2 - 6x^3 + 2x + 6) \\ &= 6x^5 + (3 - (-6))x^3 + (-4 - 3)x^2 - 2x + (5 - 6) \\ &= 6x^5 + 9x^3 - 7x^2 - 2x - 1\ . \end{aligned}$$

- Het product van twee veeltermen:
$$\begin{aligned} g(x) \cdot (6x - 1) &= (3x^2 - 6x^3 + 2x + 6) \cdot (6x - 1) \\ &= 18x^3 - 3x^2 - 36x^4 + 6x^3 + 12x^2 - 2x + 36x - 6 \\ &= -36x^4 + (18 + 6)x^3 + (-3 + 12)x^2 + (-2 + 36)x - 6 \\ &= -36x^4 + 24x^3 + 9x^2 + 34x - 6\ . \end{aligned}$$

Alvorens onmiddellijk oefeningen te maken op veeltermen van een willekeurige graad, zullen we eerst de veeltermen van de eerste en tweede graad iets meer in detail bekijken.

Een veelterm van de nulde graad is per definitie van de vorm $a_0x^0 = a_0$. Dit is niets anders dan het reëel getal a_0 zelf. Werken met veeltermen van de nulde graad komt dus overeen met rekenen in $\mathbb{R}$.

3.2 Veeltermen van de eerste graad

Definitie 3.2 *Een veelterm v_1 van de eerste graad wordt gedefinieerd als*

$$v_1 = ax + b$$

met $a \in \mathbb{R}_0$ en $b \in \mathbb{R}$.

3.2.1 Lineaire vergelijkingen

Een *lineaire vergelijking* of *eerstegraadsvergelijking* is een vergelijking waarbij het linkerlid een veelterm van de eerste graad voorstelt, het rechterlid is een constante:

$$ax + b = c \qquad (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0).$$

Wanneer we wensen deze vergelijking op te lossen in $\mathbb{R}$ dan moet de x-waarde, met $x \in \mathbb{R}$, bepaald worden waarvoor de vergelijking voldaan is.
De oplossing van de vergelijking vinden we door deze te herschrijven zodanig dat x geïsoleerd wordt in het linkerlid. Het rechterlid geeft dan de oplossing weer.

Bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} 5x + 3 = 2 &\Leftrightarrow 5x = 2 - 3 \\ &\Leftrightarrow 5x = -1 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \cdot 5^{-1} \\ &\Leftrightarrow x = -\tfrac{1}{5} \end{aligned}$$

3.2.2 Oefeningen

1. Bereken:

   a) $(2x+5)+(3x-2)$
   b) $(2x+5)-(3x-2)$
   c) $3\cdot(2x+5)$
   d) $(2x+5)\cdot(3x-2)$

2. Voor welke waarde van x ($x \in \mathbb{R}$) hebben de beide gegeven veeltermen dezelfde oplossing?

   a) $-3x-2$ en $5x+6$
   b) $-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}$ en $\frac{7}{6}x-\frac{1}{6}$
   c) $x\sqrt{3}+6\sqrt{3}$ en $-2x\sqrt{3}$

3.3 Veeltermen van de tweede graad

Definitie 3.3 *Een **veelterm van de tweede graad** wordt gedefinieerd als*

$$v_2 = ax^2+bx+c$$

met a, b en c gegeven reële getallen en $a \neq 0$.

3.3.1 Kwadratische vergelijkingen

Een tweedegraadsvergelijking $ax^2+bx+c=0$ oplossen in $\mathbb{R}$ kan op verschillende manieren. Een oplossingsmethode, die bruikbaar is voor elke kwadratische vergelijking, is de methode gebaseerd op de *discriminant*.

We herhalen de formules voor het oplossen van een tweedegraadsvergelijking m.b.v. de discriminant.

Beschouw de vergelijking $ax^2+bx+c=0$. Deze vergelijking heeft maximaal twee oplossingen, x_1 en x_2, in $\mathbb{R}$.

De formule voor de discriminant D is

$$D = b^2-4ac.$$

De waarde van de discriminant D geeft aan of er $0, 1$ of 2 *wortels* (oplossingen) zijn.

- $D > 0$: er zijn twee verschillende reële oplossingen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

- $D = 0$: er is juist één reële oplossing

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

- $D < 0$: er is geen oplossing.

Eens de wortels gekend zijn, kunnen we de kwadratische vergelijking ontbinden in factoren als volgt

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

3.3.2 Oefeningen

1. Bereken:
   a) $(3x^2 - 5x + 7) + (2x^2 + 4x - 6)$
   b) $(3x^2 - 5x + 7) - (2x^2 + 4x - 6)$
   c) $(3x^2 - 5x + 7) \cdot (2x^2 + 4x - 6)$
   d) $4x \cdot (3x^2 - 5x + 7)$
   e) $(3x^2 - 5x + 7)/(4x)$.
2. Bepaal de wortels van de gegeven kwadratische vergelijkingen:
   a) $-x^2 + 2x + 5 = 0$
   b) $3x^2 + 2x + 5 = 0$
   c) $-x^2 + 2x = 1$
   d) $3x^2 + 4x = 0$
   e) $x^2 - 9 = 0$.
3. Voor welke waarde van p ($p \in \mathbb{R}$) heeft de gegeven vergelijking juist één oplossing?
   a) $3x^2 + 5x + p = 0$
   b) $4x^2 + px + 1 = 0$
   c) $px^2 + 9x = 0$.

   Zelfde vraag voor twee verschillende oplossingen en geen oplossing.

4. Voor welke waarde van x ($x \in \mathbb{R}$) hebben de beide gegeven veeltermen dezelfde oplossing?

   a) $x^2 + 5x - 6$ en $4x - 8$
   b) $(x - 3)^2$ en $3 - x$
   c) $2x^2 - 3$ en $7x^2 + x$.

3.4 Veeltermen van willekeurige graad

We herhalen de definitie van een willekeurige veelterm.

Definitie 3.4 *Een willekeurige* ***veelterm*** v_n ***van de*** n***-de graad*** *wordt gedefinieerd als*

$$v_n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

met $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\} \subset \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ *en* $n \in \mathbb{N}$.
De term $a_n x^n$ *wordt de* ***hoogste graadsterm*** *genoemd;*
de coëfficiënt a_n *wordt de* ***hoogste graadscoëfficiënt*** *genoemd.*

3.4.1 Oplossen van hogere-graadsvergelijkingen in $\mathbb{R}$

Een eerstegraadsvergelijking oplossen is, zoals we reeds aantoonden, relatief eenvoudig. Een kwadratische vergelijking oplossen lukt steeds m.b.v. de discriminant.

Voor het oplossen van een derde- en vierde-graadsvergelijking bestaat een wiskundige formule die de oplossing aanreikt. Vanaf vijfde graad en hoger bestaat er geen wiskundig exacte oplossingsmethode meer om de oplossing van een dergelijke vergelijking te bepalen.

De vergelijking ontbinden in factoren kan een oplossing bieden voor het bepalen van de oplossingen van een willekeurige hogere-graadsvergelijking.

3.4.2 Ontbinden in factoren

Een willekeurige veelterm wordt gedefinieerd als de som van eentermen. Deze som van eentermen kan herleid worden naar een product van factoren.
Wanneer we wensen een veelterm te ontbinden in factoren dan wordt de som van eentermen omgevormd tot een product van zoveel mogelijk factoren. In een eerste fase worden de gemeenschappelijke factoren voorop geplaatst. Vervolgens wordt indien mogelijk een merkwaardig product toegepast op de overblijvende veelterm.

Voorbeeld

$$\begin{aligned} x^3 - x &= x(x^2 - 1) \\ &= x(x-1)(x+1). \end{aligned}$$

Merkwaardige producten De belangrijkste merkwaardige producten zijn:

- $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$
- $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$
- $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
- $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
- $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$.

3.4.3 Oefeningen

1. Noteer de gegeven veelterm in zijn standaard vorm:
   a) $v_6 = \sum_{i=0}^{6} a_i x^i$ met $a_i = 2i$ $(i = 0, \ldots, 6)$;
   b) $v_7 = \sum_{i=0}^{7} a_i x^i$ met $a_i = (i+1)/2$ $(i = 1, 3, 5, 7)$ en $a_i = i/2$ $(i = 0, 2, 4, 6)$;
   c) $v_5 = \sum_{i=1}^{5} a_i x^i$ met $a_i = 5 - i$ $(i = 1, \ldots, 5)$.
2. $v_1 = 3x - 2$
   $v_2 = 2x^2 + 3x - 1$
   $v_3 = -5x^3 + 6$
   Bereken:
   a) $v_2 - (v_3 + v_1)$
   b) $v_2 + v_3.v_1$
   c) $v_2.v_3 - v_1^2$.
3. Ontbind in factoren
   a) $2x^3 - 2x$
   b) $2x^3 - 128$
   c) $x^3 + 15x^2 + 56x$.
4. Los de volgende vergelijkingen op naar x $(x \in \mathbb{R})$:
   a) $x^3 + 4x^2 + 3x = 0$
   b) $2x^4 = 32$
   c) $(x - 3)(x^2 + 2x + 1) = 0$
   d) $(x^2 - 3x - 4)(x^2 - x) = 0$.

Bibliografie

[1] G. Bruyneel, *Discrete Wiskunde*, cursus Hogeschool Gent, 1999.

[2] I. De Pauw, B. Masselis, em Wiskunde voor IT, Lannoo Campus, 2010.

[3] P. Gevers, J. De Langhe, H. Martens, G. Roels, H. Vercauter, R. Vermesen, *Delta 4A*, Wolters Leuven, 1986.

[4] R. Maerivoet, *Alice TI*, Standaard Boekhandel, 2004.