

# TD de Recherche Opérationnelle

## Simplexe - Algorithme primal

### Exercice 1.

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 5x_2 \\ \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & & \leq 3 \\ 4x_1 + 2x_2 & \leq & 16 \\ x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

**Q1.** Faire la résolution graphique du programme linéaire ci-dessus.

**Q2.** Appliquer l'algorithme primal du simplexe pour résoudre le programme linéaire.

### Exercice 2.

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \left\{ \begin{array}{lcl} 2x_1 + 3x_2 & \leq & 1 \\ x_1 & \leq & \frac{1}{3} \\ & x_2 & \leq \frac{1}{4} \\ x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

**Q1.** Faire la résolution graphique du programme linéaire ci-dessus.

**Q2.** Au début de l'algorithme primal du simplexe,  $x_1$  et  $x_2$  sont toutes les deux candidates pour entrer en base. En utilisant la résolution graphique peut-on prévoir quel choix est le plus judicieux ?

**Q3.** Appliquer l'algorithme primal du simplexe, respectivement,  
 — lorsque  $x_1$  est la première à entrer en base,  
 — et lorsque  $x_2$  est la première à entrer en base.

### Exercice 3.

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ (P) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + 2x_2 & \leq & 4 \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 4 \\ 2x_1 + 2x_2 & \leq & 5 \\ x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

**Q1.** Appliquer l'algorithme primal du simplexe pour résoudre le programme linéaire ci-dessus.

**Q2.** Montrer que la solution de (P) trouvée en **Q1** n'est pas unique.

**Q3.** Déterminer un autre point extrême optimal en itérant l'algorithme primal du simplexe.

**Q4.** En déduire l'expression de l'ensemble des solutions optimales de (P).

**Exercice 4.**

Appliquer l'algorithme primal du simplexe pour résoudre le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{rcllcl} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ & \left\{ \begin{array}{lclcl} x_1 & - & 2x_2 & \leq & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & \geq & 2 \\ -2x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array} \right. & & \end{array}$$

**Exercice 5.**

$$(P) \quad \begin{array}{rcllcl} \max & x_1 & & & & \\ & \left\{ \begin{array}{lclcl} 2x_1 & + & x_2 & \leq & 1 & (1) \\ & & x_2 & + & x_3 & \geq & 2 & (2) \\ x_1 & & & - & x_3 & \geq & 1 & (3) \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 3 & (4) \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array} \right. & & \end{array}$$

- Q1.** Faire une combinaison des contraintes de la forme standard du programme linéaire (P) pour minimiser le nombre de variables artificielles à introduire.
- Q2.** Appliquer l'algorithme primal du simplexe pour résoudre (P).
- Q3.** Retrouver le résultat de **Q2** en comparant une combinaison des contraintes (1) et (3) à la contrainte (2) et les contraintes de signe.