Chapitre I : Programmation linéaire en 2D.

lundi 4 janvier 2021 08:46

Bob fabrique des Yaourts de 2 types : Allégés et Sucré, avec 3 ingrédiants. Les proportions sont les suivantes :

	A	S
fraises	2	1
lait	1	2
sucre	0	1

Prix de vente : A : 4€/kg
S : 5€/kg

Les stocks disponibles sont : 800kg de fraises, 700l de lait, 300kg de sucre.

Question : Comment maximiser le revenu de Bob ?

Modélisation : Soit x_A la quantité produite de Yaourt allégé.
et x_S ——— sucré.

Fonction objectif : $\max \; 4x_A + 5x_S$ revenu

Contraintes :

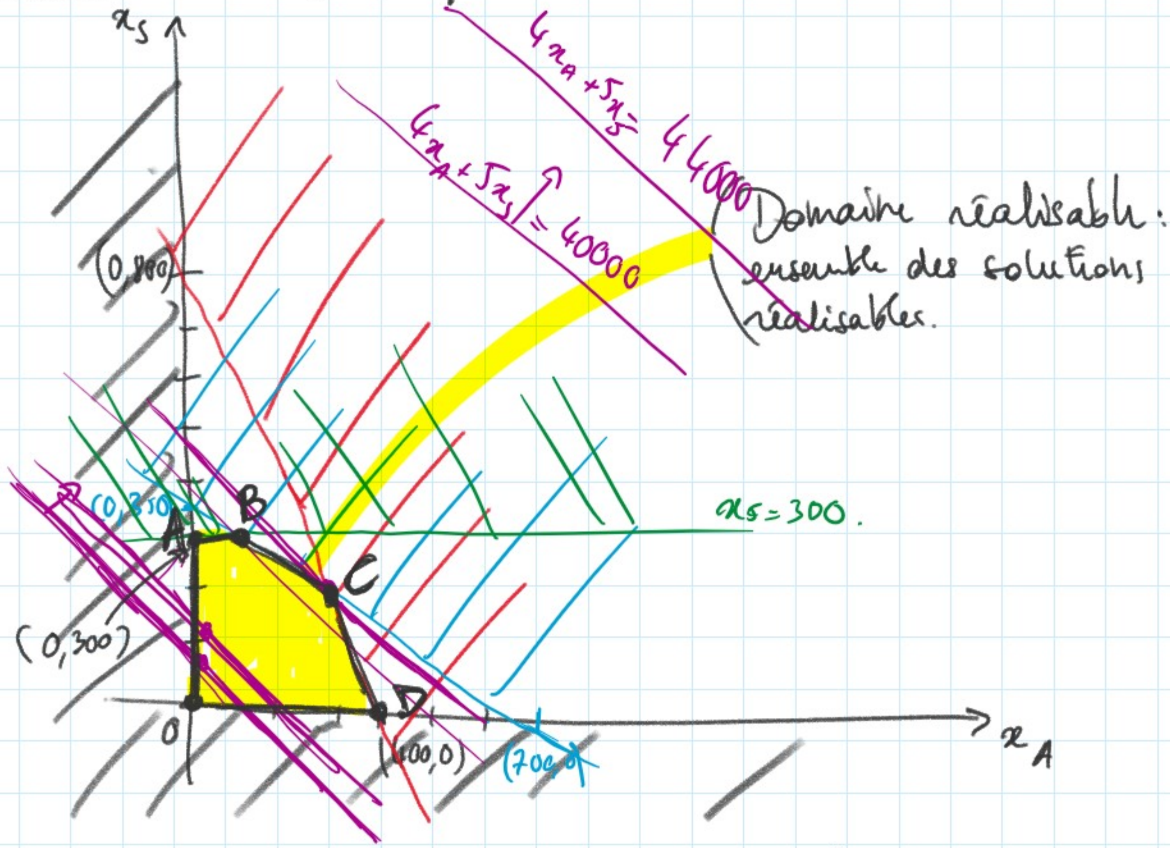
$$\begin{cases} 2x_A + x_S \leq 800 & \leftarrow \text{(800 kg de fraises)} \\ x_A + 2x_S \leq 700 & \text{(lait)} \\ x_S \leq 300 & \text{(sucre)} \\ x_A \geq 0 \\ x_S \geq 0 \end{cases}$$

PL

$x_S \geq 0$

PL

Résolution graphique :



Droite $2x_A + x_S = 800$: $\quad 2x_A + 0 = 800$

↳ deux points : $(0,800)$ et $(400,0)$

Remarque : $2 \times 0 + 0 = 0 < 800$, donc 0 est du côté ≤ 800

Droite $x_A + 2x_S = 700$: $\quad (700,0)$ et $(0,350)$

Remarque : Le maximum, s'il existe, est atteint en un sommet du domaine réalisable.

un sommet du domaine réalisable.

<u>Conséquence :</u> Pour trouver le maximum s'il existe, il suffit de calculer la valeur de la fonction objectif en chaque sommet, et de garder la plus grande.

Sommets :	$O : (0,0)$	$A : (0,300)$	$B : (100,300)$	$C : (300,200)$	$D : (400,0)$
Valeurs $(4x_A + 5x_S)$	0	1500	1900	2200	1600

$$\begin{cases} x_S = 300 \\ x_A + 2x_S = 700 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_A + x_S = 800 \\ x_A + 2x_S = 700 \end{cases}$$

C est solution optimale de valeur 2200.

On peut désormais répondre à Bob qu'il doit produire 300 kg de yaourts allégés et 200 kg de sucrés : il gagnera 2200 €.

<u>Bilan :</u> Étapes pour résoudre un problème d'optimisation

1 – Modélisation :
- quelles sont les variables à introduire ?
- quelle est la fonction objectif ?
- quelles sont les contraintes ?

2 – Résolution du PL obtenu : programme linéaire.
- ↳ en 2D : résolution graphique.
- ↳ en général : algorithme du simplexe.

↳ en général : algorithme du simplexe.

Un peu de vocabulaire :

Un programme linéaire est généralement représenté sous forme matricielle :

$$\max \; c.x \qquad (4 \;\; 5)$$

$$(c_1 \dots c_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Dans le problème de Bob : $x = \begin{bmatrix} x_A \\ x_S \end{bmatrix}$

$c = [4 \;\; 5]$, donc $c.x = 4x_A + 5x_S$.

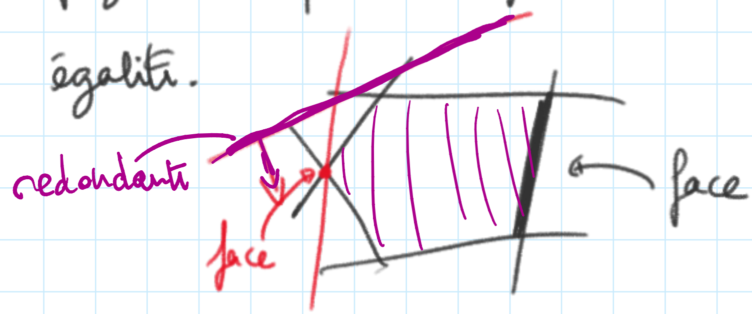
et $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $b = \begin{bmatrix} 800 \\ 700 \\ 300 \end{bmatrix}$.

d'où : $Ax = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_A + x_S \\ x_A + 2x_S \\ x_S \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 800 \\ 700 \\ 300 \end{bmatrix}$

<u>Définition</u> : $\{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$ est l'ensemble des solutions réalisables, et est appelé POLYÈDRE. C'est aussi l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces. Un polyèdre borné est un POLYTOPE.

demi-espaces. Un polyèdre borné est un POLYTOPE. En 2D, ces demi-espaces sont des demi-plans et les polytopes sont polygones.

Une face d'un polyèdre est l'ensemble des point du polyèdre qui vérifie une des inégalités à égalité.



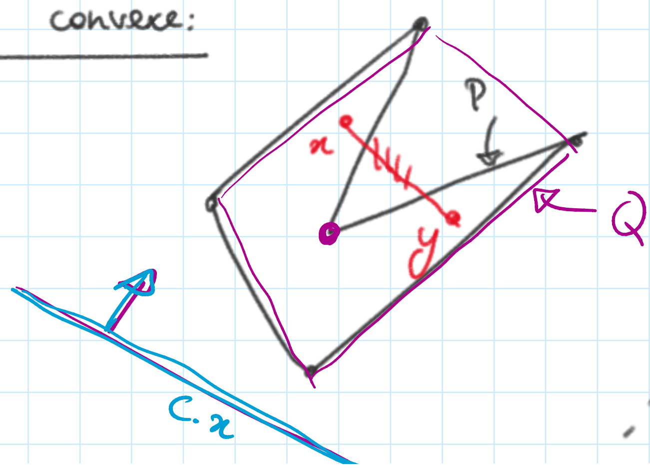
Si lorsqu'on enlève une inégalité de la description ($Ax \leq b$), on obtient le même polyèdre, cette inégalité est dite redondante.

Remarque: Les polyèdres sont convexes.

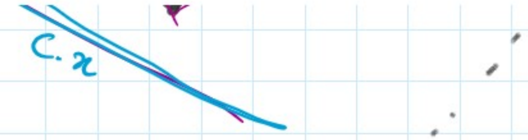
P convexe lorsque pour tout x, y dans P, le segment $[x, y]$ est contenu dans P.

ex de truc non convexe:

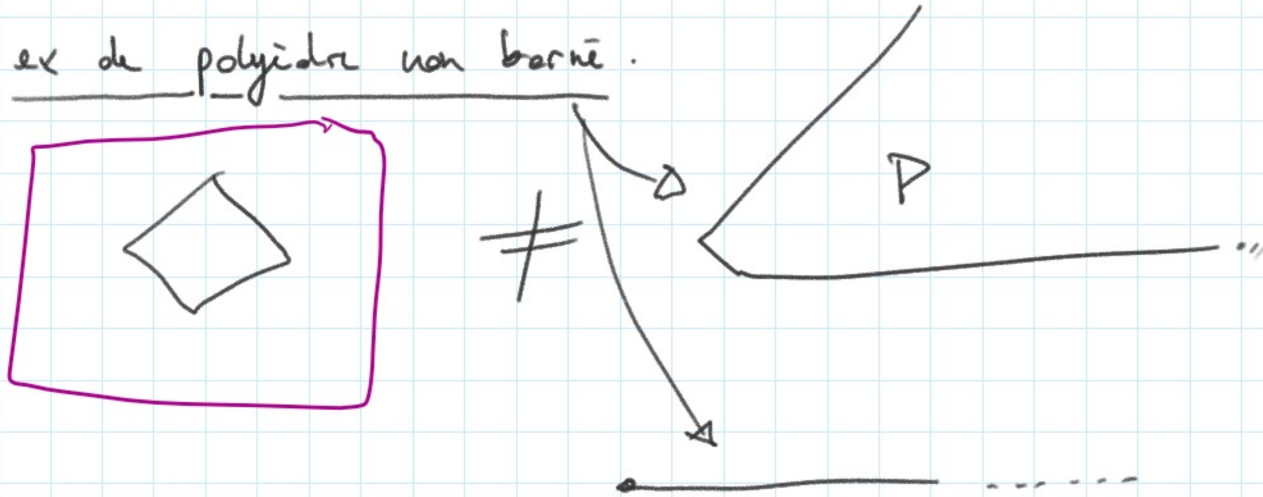
$$\max_{x \in P} cx$$
$$\|$$
$$\max_{x \in Q} cx$$



$x \in Q$



ex de polyèdre non borné.



Question : Quelle est la complexité de l'algorithme "résolution graphique" ?

Appliqué à un polygone P définit par m inégalités, en supposant qu'aucune inégalité n'est redondante.

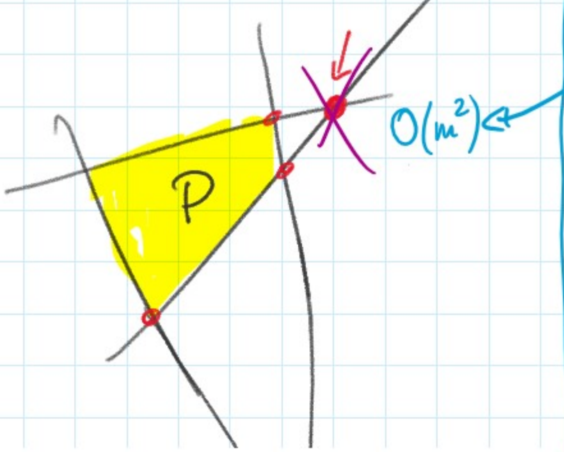
Mini-question : Combien P a-t-il de sommets ?

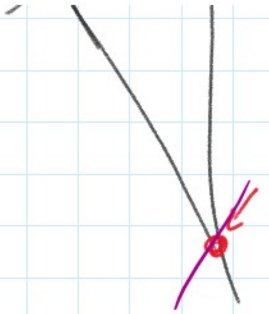
$\rightsquigarrow m$. $\quad \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2} \sim \frac{m^2}{2}$

Algo : $O(m^3) \longrightarrow (1)$

Pour toute paire de droite provenant de la description du polygone, on calcule le point d'intersection. $O(m^2)$

Si ce point est dans le





$O(m)$ Si ce point est dans le polygone, c'est un sommet.

$O(m)$ Ensuite, il suffit de trouver un sommet de plus grande valeur.

il y a m sommets, et on doit calculer la valeur de la fonction objectif pour chacun d'entre eux.

Total : $O(m^3)$ c'est un algorithme polynomial.

Question: Qu'est-ce que ça donne en dimension d ?

Si P est un polytope avec m inégalités : en dimension d, un sommet est l'intersection de d de ces m inégalités.

$\rightsquigarrow \binom{m}{d} = O(m^d)$ possibilités : ça explose.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix}$$

max $c.x$

$\binom{m}{d} \leftarrow \big(Ax \leq b$

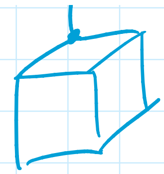
2^3 sommets

(b_1, b_2, b_3)

$0 \leq x \leq 1$

$0 \leq y \leq 1$

$\binom{m}{d} \leftarrow \{ Ax \le b$



$0 \le y \le 1$

$0 \le z \le 1$

$0 \le t \le 1$

$m \geq 2d$

inégalités $[\, 0 \le x_i \le 1 , \quad i = 1, \dots d$

2^d sommets

2^4 sommets