Chapitre 2. Algorithme du simplexe

lundi 4 janvier 2021 16:22

- Parenthèse sur la programmation linéaire.
  - industrialisation à grande

<u>Question de base</u> : existence d'une solution réalisable ?

- Exemples emblématiques :
  - ▹ Problèmes d'affectation :
    - emploi du temps.
    - homme - machine
    - avion - hangar
  - ▹ Problèmes de chemins :
    - plus courts chemins.
    - tournées de véhicules
      - ↳ <u>Voyageur de commerce</u> (TSP)
        - NP-complet
        - bien résolu grâce à la PL, et le logiciel Concorde.

I - <u>Programme linéaire en général</u> :

1) <u>Forme générale</u> :

dimension

$$\min / \max \sum_{i=1}^{d} c_i x_i$$

ensemble des indices d'inégalités de type $\leq$.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{d} a_{i,j} x_j \leq b_i, & i \in I^{\leq} \\ \sum_{j=1}^{d} a_{i,j} x_j \geq b_i, & i \in I^{\geq} \\ \sum a_{i,j} x_j = b_i, & i \in I^{=}. \\ x_i \geq 0, & j \in J_+ \\ x_i \leq 0, & j \in J_- \\ x_i \text{ libre}, & j \in J. \end{cases}$$

2) Forme canonique :

max $c.x$

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$\sum_{j=1}^{d} a_{i,j} x_j \leq b_j, \; i = 1, \dots m.$

A est une matrice de taille $m \times d$

$x_j \geq 0, \; j = 1, \dots d.$

3) Forme standard :

différence entre les 2 formes.

max cx

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Théorème: a) Au prix d'un éventuel ajout

__Théorème:__ a) Au prix d'un éventuel ajout de contraintes et de variables, tout programme linéaire peut être transformé en un programme linéaire équivalent sous forme canonique.

toute solution optimale de l'un fournit une solution optimale de l'autre.

b) pareil pour forme standard.

__Règles de transformation:__

min $\leftrightarrow$ max : $\quad \min cx = -\max(-cx)$

"$\geq$" $\leftrightarrow$ "$\leq$": $\quad ax \geq b \iff -ax \leq -b$

"$=$" $\leftrightarrow$ "$\leq$": $\quad ax = b \iff \begin{cases} ax \leq b \\ -ax \leq -b \end{cases}$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} ax \leq b \\ ax \geq b \end{cases}$$

"$x_i \leq 0$" : on pose $x_i' := -x_i$ et on remplace x_i

"$x_j \leq 0$" : on pose $x'_j = -x_j$ et on remplace x_j par $-x'_j$ partout, et du coup on a $x'_j \geq 0$.

"x_j libre" : on remplace x_j par $x_j^+ - x_j^-$ et on ajoute $x_j^+ \geq 0$ et $x_j^- \geq 0$. (on supprime x_j ensuite).

(<u>ex:</u> $x_j = 5 \rightsquigarrow x_j^+ = 5$, $x_j^- = 0$.
$x_j = -3 \rightsquigarrow x_j^+ = 0$, $x_j^- = 3$)

"$\leq$" $\to$ "$=$" : ajout de variables d'écarts.

$ax \leq b$ devient $\begin{cases} ax + e = b \\ e \geq 0 \end{cases}$

variable d'écart.

<u>Exemple :</u>

<u>forme générale :</u>

min $x - y$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x + y = 2 \\ x - 2y \leq 4 \end{cases}$$

$x - (y^+ - y^-)$

$x \geq 1$

$\boxed{x + y^+ - y^- = 2}$

$x - 2y^+ + 2y^- \leq 4$

$$\begin{cases} x - 2y \leq 4 \\ x \geqslant 0 \quad (y \text{ libre}) \end{cases}$$

$x - 2y^+ + 2y^- \leq 4$

$\max cx$

$Ax \leq b$

$x \geqslant 0$

PL équivalent sous forme canonique :

à oublier temporairement ② $-\max -x + y^+ - y^-$

① $y = y^+ - y^-$

$y^+ \geqslant 0$

$y^- \geqslant 0$

$$\begin{cases} -x \leq -1 \\ x + y^+ - y^- \leq 2 \\ -x - y^+ + y^- \leq -2 \\ x - 2y^+ + 2y^- \leq 4 \\ x, y^+, y^- \geqslant 0. \end{cases}$$

$\max cx$

$\begin{cases} Ax = b \\ x \geqslant 0 \end{cases}$

PL équivalent sous forme standard :

$-\max -x + y^+ - y^-$

$$\begin{cases} -x + e_1 = -1 \\ x + y^+ - y^- = 2 \\ x - 2y^+ + 2y^- + e_2 = 4 \\ x, y^+, y^-, e_1, e_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

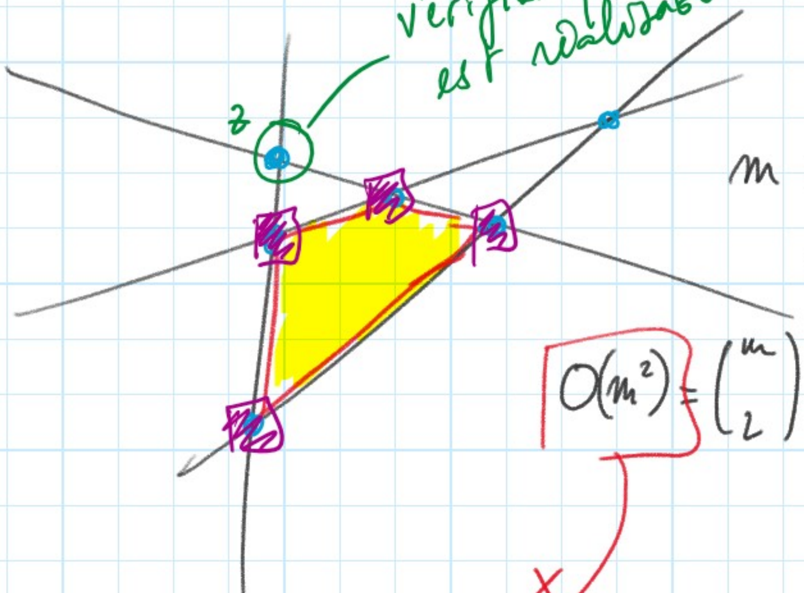
Parenthèse Algè Représentation Graphique.

Parenthèse Algo Représentation Graphique.

1. Énumération des sommets : $O(m^3)$
2. Valeur de chaque sommet : $O(m)$

$\max 4x + 5y$

vérifier que le point est réalisable



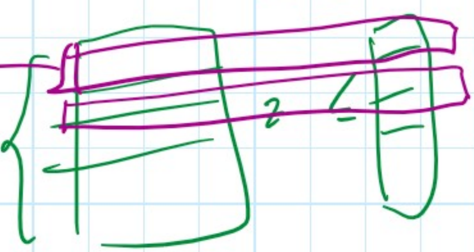
m droites.

$\Downarrow$

$\boxed{O(m^2)} = \binom{m}{2}$ intersections possibles.

m inégalités $\longrightarrow Ax \leq b$: a-t-on $Az \leq b$

$\boxed{O(m)}$ $\left(m \times O(1) \right.$



$O(m^3)$

Conséquence: sous forme standard $\max cx$, $\{Ax = b$

[illegible]

on peut supposer rang$(A) = m$, où m est le nombre de lignes de A.

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

ex: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ n'a pas rang$(A) = m$, car $L_3 = L_1 + L_2$.

ex 1: $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\max \; x_1 + x_2$

$$\begin{cases} Ax = b_1 \\ x \geq 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ \cancel{x_1 + x_2 = 2} \end{array}$$

ex 2: $b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\max \; x_1 + x_2$

$$\begin{cases} Ax = b_2 \\ x \geq 0 \end{cases} \rightsquigarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{array}\right\} \emptyset$$

Dorénavant, on suppose rang$(A) = m$.

Définitions: Soit $\max \; cx$ $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ un PL sous forme standard,

dimension, ou nombre de colonnes de A.

- Un ensemble $B \subseteq \{1, \dots, d\}$ tel que les

- Un ensemble $B \subseteq \{1, \dots, d\}$ tel que les colonnes de A indicées par B forment une matrice A_B inversible est appelé <u>une base</u>.
  - ▷ $x_B = (x_j : j \in B)$ sont les <u>variables de base</u>.
  - ▷ $x_H = (x_j : j \notin B)$ sont les <u>variables hors-base</u>.

<u>ex :</u>

$$A = \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 7 \\ -1 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right] \end{array}$$

Q : $\{1,2\}$ forme une base ? → inversible : oui

oui

- car le déterminant est $1 \times 1 - (-1 \times 2) = 3 \neq 0$.
- 2 colonnes indépendantes.

Par rapport à la base $\{1,2\}$:

- x_1, x_2 sont les variables de base.
- x_3, x_4 sont hors-base.

Q : $\{2,3\}$ forme une base ?

non car $\det = 0$

- Étant donné une base B : poser $x_H = 0$ (c'est-à-dire mettre toutes variables hors-base à zero) définit une solution unique au système $Ax = b$.

B

Ex. ...

définir une solution unique au système $Ax = b$.

En effet :

$$A = \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{A_B}^{B} & \qquad\qquad \end{array}\right]$$

$$Ax = b \iff \left[\begin{array}{c|c} A_B & \qquad\qquad \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_B \\ \hline 0 \\ \vdots \\ x_H \\ 0 \end{bmatrix} = b$$

je mets 0

On obtient $A_B x_B = b$ qui a pour unique solution $x_B = A_B^{-1} b$.

Cette solution (x_B, x_H) est appelée solution de base associée à la base.

Si $x_B, x_H \geqslant 0$: c'est une solution de base réalisable.

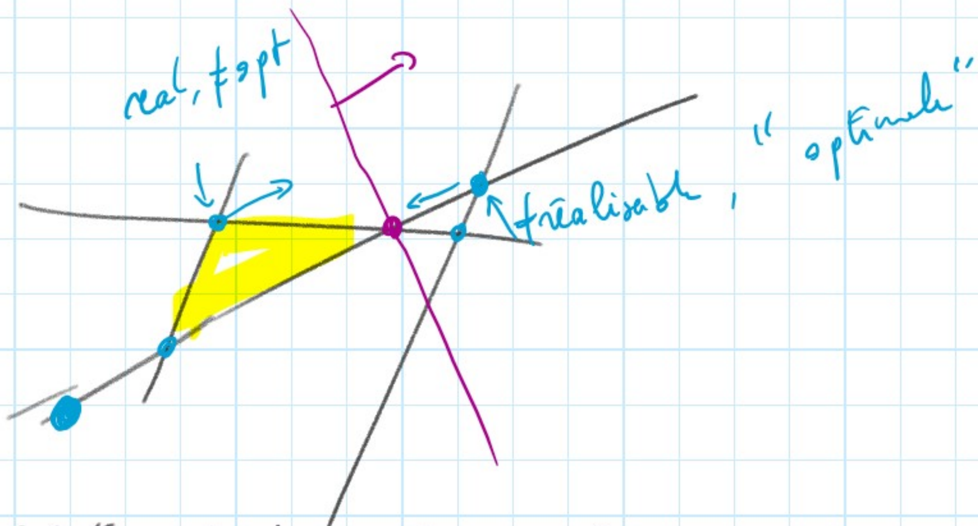
- Coûts réduits : on écrit la fonction objectif en fonction des variables hors-base : les coefficients obtenus sont les coûts réduits des variables.

<u>Idée:</u> le coût réduit d'une variable indique de combien augmenterait la fonction objectif si on faisant entrer la variable dans la base.

en faisant entrer la variable dans la base.

<u>Conséquence :</u> Si tous les coûts réduits sont ≤ 0, alors la solution courante est "optimale".

(est-elle réalisable ?)



<u>TD Solution de base Exercice 2.</u>

$$\max \quad 30x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 20x_4 - 12x_5$$

$$Ax = b \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array} \right.$$

<u>Q1.</u> ▸ $\{4, 5\}$ forme-t-elle une base ?

Oui : $\det\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$

▸ Quelle est la solution de base associée ?

- x_4, x_5 sont les variables de base

- x_4, x_5 sont les variables de base
- x_1, x_2, x_3 ——————— hors-base

Construction de la solution associée :

① $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

② Résoudre $Ax = b$ sachant ①, c'est-à-dire

trouver x_4, x_5 tels que : $\begin{cases} 2x_4 - 4x_5 = 0 \\ x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$

On trouve $x_4 = 2$, $x_5 = 1$.

D'où la solution de base $(0, 0, 0, 2, 1)$:

réalisable car ≥ 0.

Q2. Quels sont les coûts réduits associés à $\{4,5\}$?

Dans $Ax = b$, je fais $L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2$

$$\begin{cases} L_1' & -10x_1 + 9x_2 - 5x_3 - 2x_4 = -4 \\ L_2 & 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$$

$+1$ $+9$ $-9 + \frac{9}{2}$ $\frac{5}{2}$ 1 $+1$ $+\frac{5}{2}$ $+\frac{9}{2}$ $\frac{5}{2}$ $-2 + \frac{9}{2}$

$F = 30x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 20x_4 - 12x_5$ $-12L_2$

$0\,0\,0\,2\,1$

F' $F - 12L_2$: $-6x_1 + 32x_2 - 10x_3 + 8x_4 \, (-12)$ valeur : 28

réécrire F sans x_4 et x_5.

Réécrire F sans x_4 et x_5.

$F' \leftarrow F' + 4L_1'$: $\boxed{-46 x_1 + 68 x_2 - 30 x_3 \; (-28)}$

coût réduit de x_1

coût réduit > 0 : si j'augmente x_2 de 1, je gagne $+68$.

Consequence : 0 0 0 2 1 n'est pas optimale.

$\Rightarrow$ augmenter x_1 ou x_3 fait diminuer fait diminuer la valeur de la solution courante.

$\Rightarrow$ augmenter x_2 fait augmenter la valeur de la solution courante.

On augmente x_2 de k :

- en augmente x_4 de $\frac{9}{2}k$, on préserve L_1'.
- ——— x_5 de $\frac{5}{2}k$, ——— L_2.

on obtient :

$\left(0, 1, 0, \frac{13}{2}, \frac{7}{2}\right)$ réalisable de valeur $28 + 68k$

On obtient des solutions réalisables de coûts $28 + 68k$ pour tout $k \geq 0$, ce qui tend vers $+\infty$

$20 + 8k$ pour tout $k \leq 0$, ce qui tend vers $+\infty$ lorsque $k \to +\infty$: donc la valeur de P est $+\infty$.

<u>Tableau correspondant à une base</u> : (ici la base $\{4,5\}$ de l'exercice 2)

base (x_4, x_5)

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
on part de $Ax=b$	L_1	2	1	-1	2	-4	0
	L_2	3	-2	1	1	-1	1
f^{tc} objectif	F	30	8	2	20	-12	0

En faisant des opérations sur les lignes (en utilisant $Ax=b$) on réécrit la partie bleue comme ceci

$$\begin{array}{cc} x_4 & x_5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}$$

Tableau associé à la base $\{4,5\}$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
$L_1' = -\frac{1}{2}(L_1 - 4L_2)$	x_4	5	$-\frac{9}{2}$	$+\frac{5}{2}$	1	0	2
$L_2' = -(L_2 - L_1')$	x_5	-1	$-\frac{5}{2}$	$+\frac{3}{2}$	0	$+1$	$+1$
$F \leftarrow F - 20L_1' + 12L_2'$		-28	68	-30	0	0	-28

$(0\,0\,0\,2\,1)$

$F \leftarrow F - 20L_1' + 12L_2'$ $\quad \underbrace{-28 \quad 68 \quad -30}_{\text{coûts réduits}} \quad \boxed{0 \quad 0} \quad \Big| \; -28$

– valeur de la solution courante

<u>Remarque:</u> on peut lire immédiatement dans le tableau :

- les coûts réduits
- les coordonnées de la solution de base associée.

Le tableau associé à une base B donnée est la réécriture sous forme de tableau de $\begin{array}{c} Ax = b \\ F \end{array}$

avec $\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}^{B}$ dans les colonnes correspondant à B.

ALGORITHME DU SIMPLEXE (PHASE II).

<u>Entrée</u> : Un PL sous forme standard

et une solution de base réalisable (base B).
et son tableau.

<u>Sortie</u> : La valeur du PL, et une solution optimale si cette valeur est finie.

<u>Tant qu'il existe une variable hors-base de coût réduit strictement positif :</u>

- variable entrante : variable k hors-base de coût réduit maximum.

coût réduit maximum.

- Variable sortante : variable l minimisant $\frac{b_i}{a_{i,k}}$ avec $a_{i,k} > 0$
- Nouvelle base : $B := B \cup \{k\} \setminus \{l\}$
- Ecrire le tableau associé à la nouvelle base.

<u>Terminaison:</u>

- Tous les coûts réduits sont négatifs ou nuls : l'algorithme termine et la solution de base courante est optimale.
- S'il existe un coûts strictement positif (donc il y a une variable entrante k) mais que tous les $a_{i,k}$ sont ≤ 0 (il n'y a pas de variable sortante), alors la valeur du PL est $+\infty$.

<u>Exemple:</u> $\max\ 4x + 5y$

$$\begin{cases} 2x + y + e_1 = 8 \\ x + 2y + e_2 = 7 \\ y + e_3 = 3 \\ x, y, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

Forme standard

$(x, y, e_1, e_2, e_3 \geq 0)$

$\{e_1, e_2, e_3\}$ est-elle une base réalisable ?

oui — oui : la solution de base associée $(0, 0, 8, 7, 3)$ — $x_1\ x_2\ e_1\ e_2\ e_3$

Tableau associé à $\{e_1, e_2, e_3\}$:

variable de base

	x	y	e_1	e_2	e_3	b		
e_1	2	1	1	0	0	8	$8/1$	$= \frac{b_1}{a_{1,y}}$
e_2	1	2	0	1	0	7	$7/2$	$= \frac{b_2}{a_{2,y}}$
e_3	0	1	0	0	1	3	$3/1$ min	$= \frac{b_3}{a_{3,y}}$
C	4	5	0	0	0	(0)		

coûts réduits

pivot

C'est quoi $\frac{b_i}{a_{i,k}}$? k : c'est y.

avec $a_{i,k} > 0$

Tableau associé à $\{ e_1, e_2, y \}$

objectif : utiliser le pivot pour obtenir $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

		x	y	e_1	e_2	e_3	b	
$L_{e_1} - L_y$	e_1	2	0	1	0	-1	5	$5/2$
$L_{e_2} - 2L_y$	e_2	1	0	0	1	-2	1	$1/1$
	y	0	1	0	0	1	3	X

	y	0	1	0	0	1	3	×
$C-5L_y$	C	4	0	0	0	-5	(-15)	

Pivot

Tableau associé à $\{e_1, x, y\}$.

		x	y	e_1	e_2	e_3	b	
$L_{e_1}-2L_x$	e_1	0	0	1	-2	3	3	$\frac{b_1}{a_{1,e_3}} = 3/3$ min
	x	1	0	0	1	-2	1	×
	y	0	1	0	0	1	3	$3/1$
$C-4L_x$	C	0	0	0	-4	3	(-19)	

parenthèse:
solution de base associée : $(1, 3, 3, 0, 0)$.
$4\times1+5\times3 = 19$

Tableau associé à $\{e_3, x, y\}$.

pivot

		x	y	e_1	e_2	e_3	b
$L_{e_3}=L_{e_1}/3$	e_3	0	0	$1/3$	$-2/3$	1	1
$L_x+2L_{e_3}$	x	1	0	$2/3$	$-1/3$	0	3
$L_y-L_{e_3}$	y	0	1	$-1/3$	$2/3$	0	2
$C-3L_{e_3}$	C	0	0	-1	-2	0	-22

$C - 3L_{e_3}$	C	0	0	-1	-2	0	-22

Tous les coûts réduits sont négatifs ou nuls, l'algorithme termine et la solution de base courante est optimale. C'est $(3, 2, 0, 0, 1)$ de valeur 22.

Remarque : Pour revenir à une solution optimale du PL de départ, il suffit d'oublier les variables d'écarts.

Vue de haut : L'algorithme se promène de solution de base réalisable en ____________ en augmentant la valeur à chaque étape.