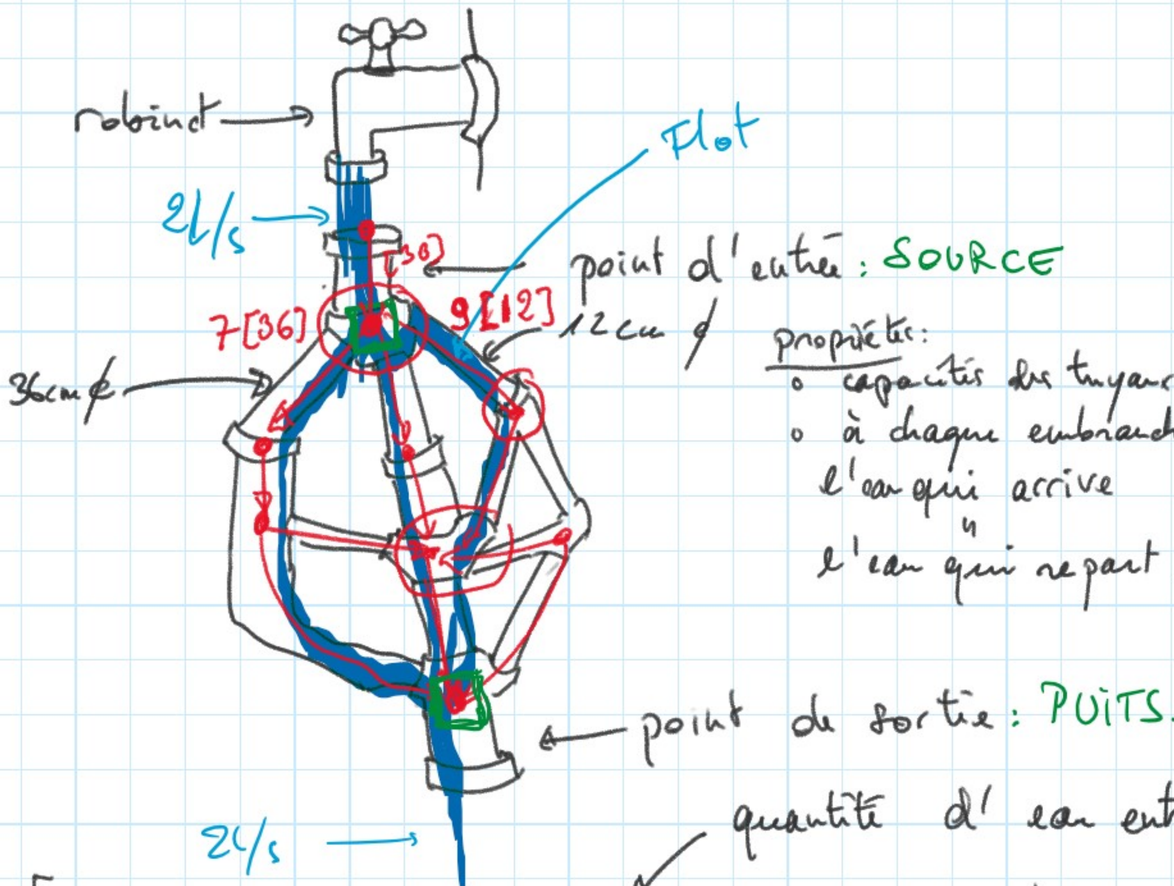
Chapitre 3 : Flot Max - Coupe Min.

vendredi 8 janvier 2021 08:24



propriétés :
- capacités des tuyaux
- à chaque embranchement, l'eau qui arrive = l'eau qui repart.

quantité d'eau entrante.

Question : Quelle la valeur maximale d'un flot circulant dans mon réseau.

C'est le problème du flot maximum.

Le problème a de nombreuses applications.

- ▷ distribution d'eau (eau de Paris).
- ▷ pipeline pour l'acheminement du pétrole
- ▷ distribution de gaz
- ▷ problèmes d'affectation.

▷ problèmes d'affectation.

▷ couplages

▷ (plus courts) chemins

I. Définitions.

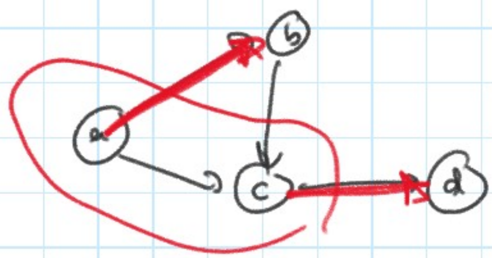
Un graphe orienté (directed) $D = (V, A)$ (V : vertices, A : arcs) est composé d'un ensemble de sommets V et d'un ensemble d'arcs A. Un arc $a = (u, v)$ est un couple de sommets représenté par $u \xrightarrow{a} v$ (u : extrémité initiale, v : extrémité terminale).

Étant donné un sommet u :

$\delta^+(u)$: l'ensemble des arcs sortant de u.

$\delta^-(u)$: ———————— entrant en u.

ex :



$\delta^-(c) = \{ac, bc\}$

$\delta^+(c) = \{cd\}$.

Étant donné un ensemble de sommets X :

$\delta^+(X)$: ensemble des arcs sortant de X.

ex : $\delta^+(\{a, c\}) = \{ab, cd\}$

Un **réseau de transport** est un graphe orienté $D=(V,A)$ dans lequel il existe :

- un sommet s sans prédécesseur : la **source**.
- ——— t sans successeurs : le **puits**.

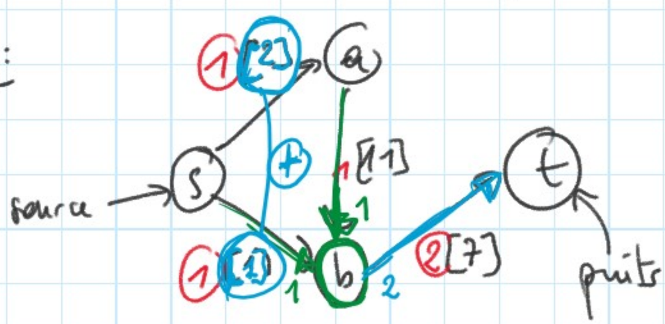
et chaque arc a est muni d'une capacité $c_a \geq 0$.

Un **flot** est la donnée d'une valeur f_a sur chaque arc a telle que :

1. $f_a \geq 0$, pour tout arc $a \in A$. (**positivité**)
2. $f_a \leq c_a$, ——— (**respect des capacités**)
3. $\sum_{a \in \delta^-(u)} f_a = \sum_{a \in \delta^+(u)} f_a$, pour sommet $u \neq s,t$.

conservation du flot / loi des noeuds / loi de Kirchhoff.

ex :



Les valeurs en rouge forment un flot :
- ≥ 0
- respect les capacités,
- conservation du flot.

de valeur 2.

La **valeur d'un flot** est la quantité de flot sortant de la source.

flot sortant de la source.

<u>Conséquence</u>: Le flot sortant de la source est égal au flot entrant dans le puits.

<u>Problématique du chapitre</u>: déterminer un flot de valeur maximum.

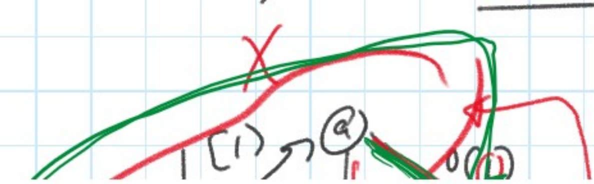
C'est ce qu'on appellera un **flot maximum**.

<u>Comment trouver de bonnes bornes supérieures sur la valeur d'un flot maximum?</u>

<u>Remarque</u>: La valeur d'un flot est toujours inférieure ou égale à la somme des capacités des arcs sortant de la source.

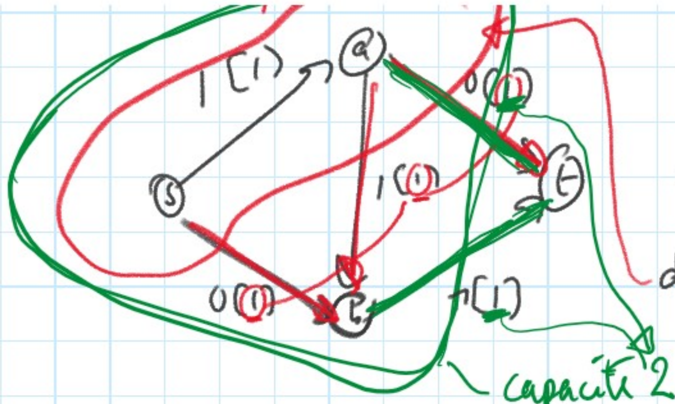
<u>Définition</u>: Soit X un ensemble de sommets contenant la source mais pas le puits : on appelle $\delta^+(X)$ une **st-coupe**.

<u>ex</u>:



$\delta^+(\{s,a\})$

ex :



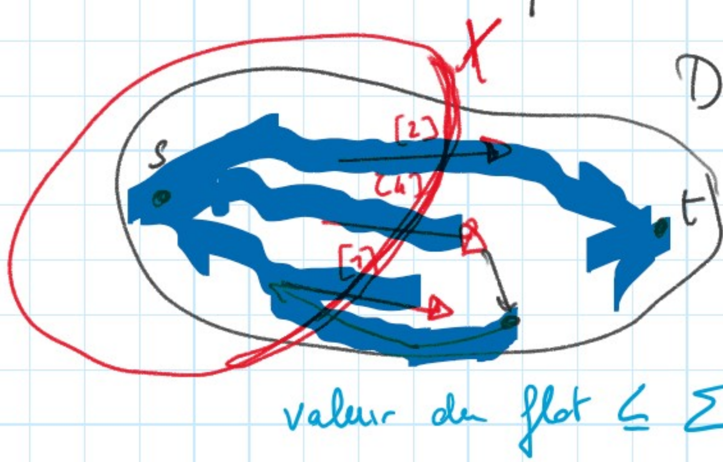
$\delta^+(\{s,a\}) = \{sb, ab, at\}$.

de capacité 3.

Remarque : Que se passe-t-il si on supprime tous les arcs d'une st-donnée ?

Après coup, il n'y a plus de chemins de s à t. En effet toute st-coupe intersecte tout chemin de s à t.

Théorème : La valeur d'un flot quelconque est inférieure ou égale à la capacité de toute st-coupe.



valeur du flot $\leq \sum ? \leq$ capacité de la st-coupe $2+4+1$.

Conséquence : Si la valeur d'un flot f

__Conséquence :__ Si la valeur d'un flot f est égale à la capacité d'une st-coupe $\delta^+(X)$, alors f est un flot maximum.

II - Flot Max - Coupe Min.

1) Chaîne augmentante :

On se donne un flot f dans un réseau de transport D.

- __arc saturé__ : si la valeur du flot circulant sur l'arc est égale à la capacité.

  __ex__ : $s \xrightarrow{2[2]} t$ st est saturé.

- Un arc a __transporté du flot__ si $f_a > 0$.

  __ex__ : $a \xrightarrow{1[17]} b$ $c \xrightarrow{0(1)} d$

  - ab transporte du flot
  - cd ne transporte pas de flot.

- Une chaîne de s à t est __augmentante__ pour le flot f si :

  arc non saturé → • $f_a < c_a$: pour tous les arcs de la chaîne parcourus dans le bon sens.

arc

parcourus dans le bon sens.

arc transporte du flot → • $f_a > 0$: pour tous les arcs parcourus dans le mauvais sens.

• Étant donné une chaîne augmentante,

soit $\delta = \min \begin{cases} c_a - f_a : & a \text{ parcouru dans le bon sens.} \\ f_a : & a \text{ parcouru dans le mauvais sens.} \end{cases}$

On peut augmenter la valeur du flot de δ

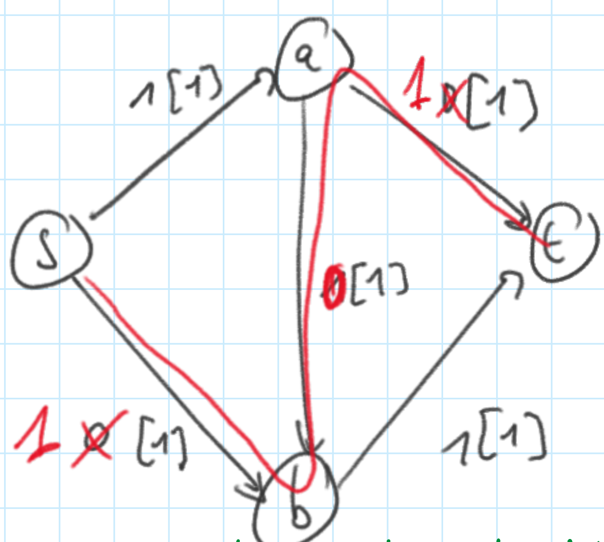
en faisant : • $f_a + \delta$: a dans le bon sens.

on augmente sur les arcs dans le bon sens

• $f_a - \delta$: a dans le mauvais sens.

↳ on diminue sur les arcs dans le mauvais sens.

ex :



non saturé — transporte du flot — non saturé

Chaîne : $s \xrightarrow{0[1]} b \xleftarrow{1[1]} a \xrightarrow{0[1]} t$

Chaîne : $s \xrightarrow{0[1]} b \xleftarrow{1[1]} a \xrightarrow{0[1]} t$

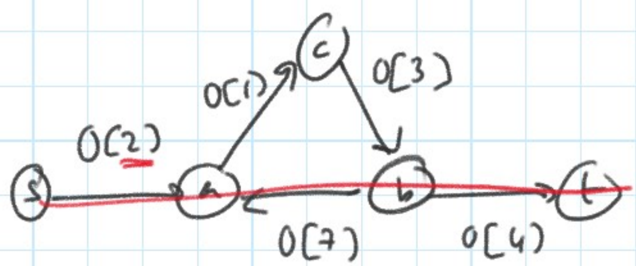
est-elle augmentante ? oui.

Calculons le δ correspondant :

$$s \xrightarrow[+1]{\overset{1}{\cancel{0}}[1]} b \xleftarrow[-1]{\overset{0}{\cancel{1}}[1]} a \xrightarrow{\overset{1}{\cancel{0}}[1]} t$$

$$\delta = \min\{1-0\ ,\ 1\ ,\ 1-0\} = 1$$

ex :



chaîne de s à t : $s \xrightarrow{0[2]} a \xleftarrow{0[7]} b \xrightarrow{0[4]} t$

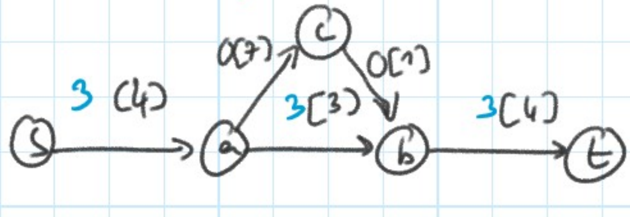
non saturé ✓

ne transporte pas de flot

non saturé ✓

est-ce une chaîne augmentante ? NON

ex :



chaîne de s à t :

$$s \xrightarrow{\overset{3}{\cancel{0}}[4]} a \xrightarrow{\overset{3}{\cancel{0}}[3]} b \xrightarrow{\overset{3}{\cancel{0}}[4]} t$$

est-ce une chaîne augmentante ?

$$s \xrightarrow{0(4)} a \xrightarrow{0(3)} b \xrightarrow{0(4)} t$$

est-ce une chaîne augmentante?
Oui : tous les arcs sont dans le bon sens et non saturés.

$$\delta = \min \{ 4-0 \,,\, 3-0 \,,\, 4-0 \} = 3$$

2) Algorithme :

Entrée : Un réseau de transport $D = (V, A)$, $s, t \in V$, éventuellement parcouru d'un flot. $c_a : A \longrightarrow \mathbb{R}_+$

Sortie : Un flot de valeur maximum et une st-coupe capacité minimum (égale à la valeur du flot).

MARQUAGE (routine)

Initialisation : marquer s du label $+$.

Itération :

Tant qu'il existe un sommet u marqué non traité,

Traiter u, c'est-à-dire :

- Pour tout successeur v de u non marqué avec (u, v) non saturé :
  - Marquer v du label $+u$.

- Marquer v du label $+u$.

► Pour tout prédécesseur w de u non marqué avec (w,u) transportant du flot :

- Marquer w du label $-u$.

Fin Tant que

Si le puits est marqué, alors on a trouvé une chaîne augmentante : il suffit de remonter les labels en partant du puits.

Si le puits n'est pas marqué, alors le flot est maximum, et une st-coupe $\delta^+(X)$ de capacité minimum est donnée par l'ensemble X des sommets marqués.

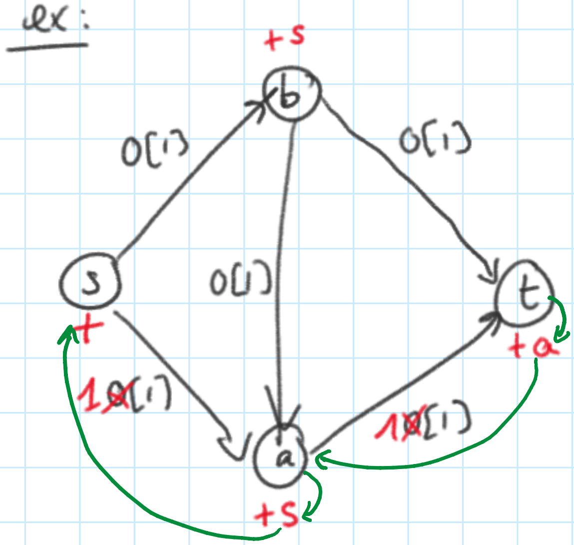
<u>FORD-FULKERSON</u> (1956)

Tant que le puits est marqué lors du MARQUAGE :

► Augmenter le flot à l'aide de la chaîne augmentante correspondante.

Fin Tant que.

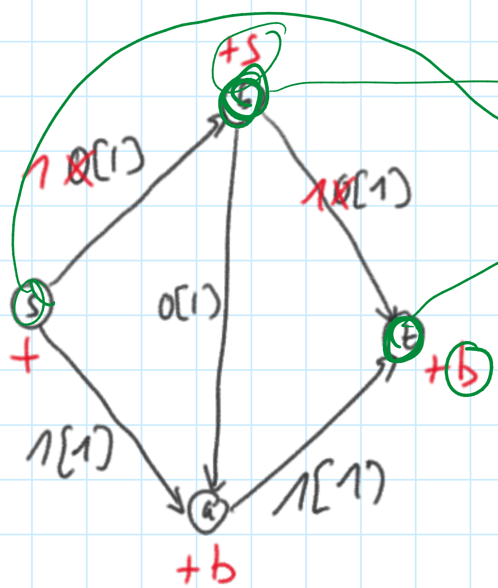
ex:



ITERATION 1:

$$s \xrightarrow{0[1]} a \xrightarrow{0[1]} t$$

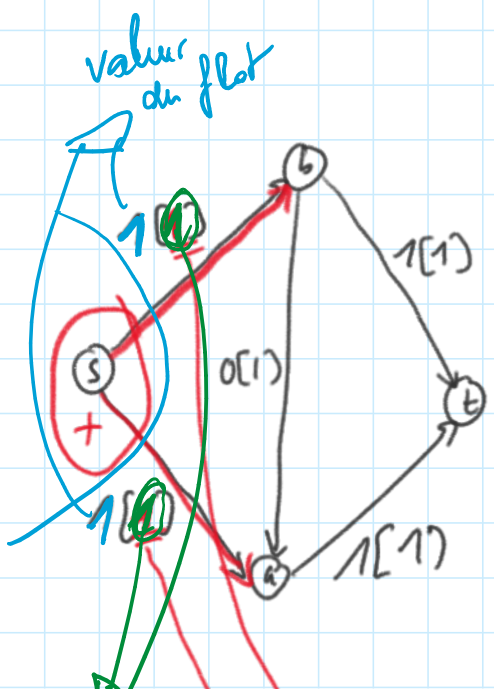
$$\delta = \min\{1-0,\ 1-0\} = 1$$



ITERATION 2:

$$s \xrightarrow{0(1)} b \xrightarrow{0(1)} t$$

$$\delta = \min\{1-0,\ 1-0\} = 1$$

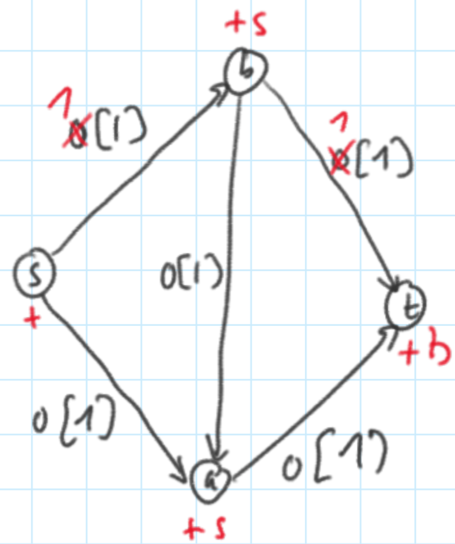


ITERATION 3:

L'algo termine avec un flot maximum de valeur 2 et une st-coupe min $\delta^+(\{s\}) = \{sa, sb\}$ de capacité

$\delta^+(\{s\}) = \{sa, sb\}$ de capacité $1+1=2$

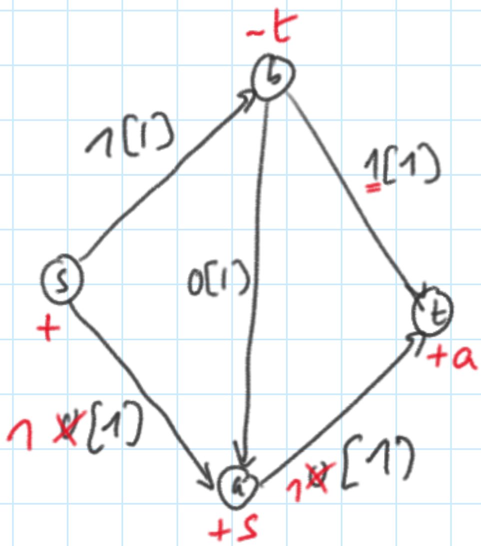
Deuxième tentative:



ITERATION 1:

$$s \xrightarrow{0(1)} b \xrightarrow{0(1)} t$$

$$\delta = \min\{1-0,\ 1-0\} = 1$$



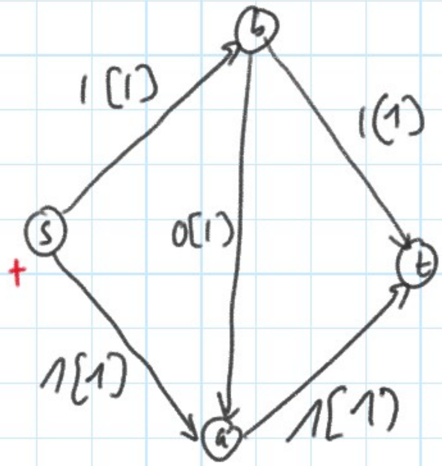
ITERATION 2:

$$s \xrightarrow{0(1)} a \xrightarrow{0(1)} t$$

$$\delta = \min\{1-0,\ 1-0\} = 1$$

ITERATION 3:

ITERATION 3 :



L'algo termine :

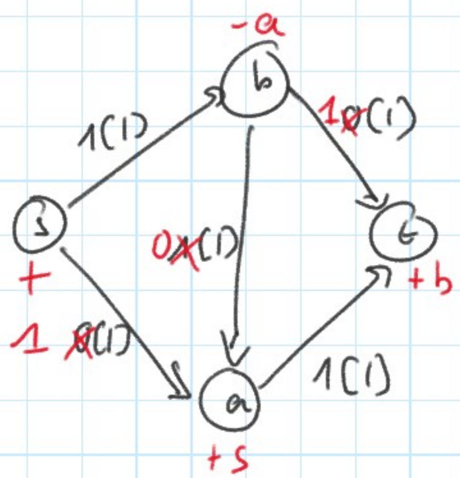
flot max = 2

st-coupe min $\delta^+(s) = \{sa, sb\}$

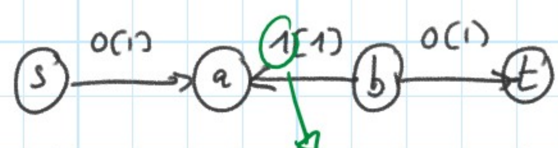
de capacité 2.

C'est bien la même valeur !

Autre exemple : (avec du flot déjà présent dans le graphe).



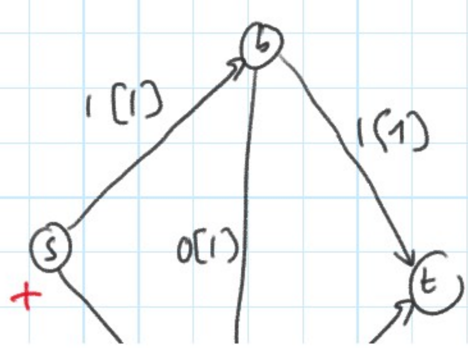
ITERATION 1 :

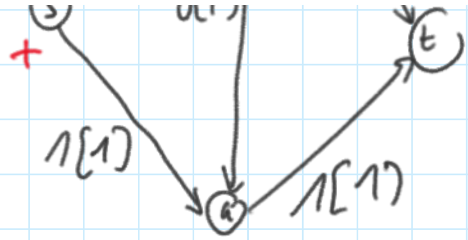


$\delta = \min\{1-0\ ,\ 1\ ,\ 1-0\} = 1$

ITERATION 2 :

idem que précédemment.





<u>Théorème:</u> La valeur d'un flot maximum est égale à la capacité d'une st-coupe minimum.