



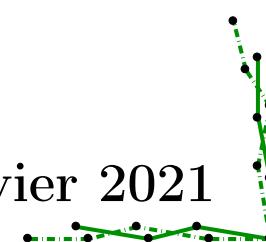
Conception et Pratique de l'Algorithmique

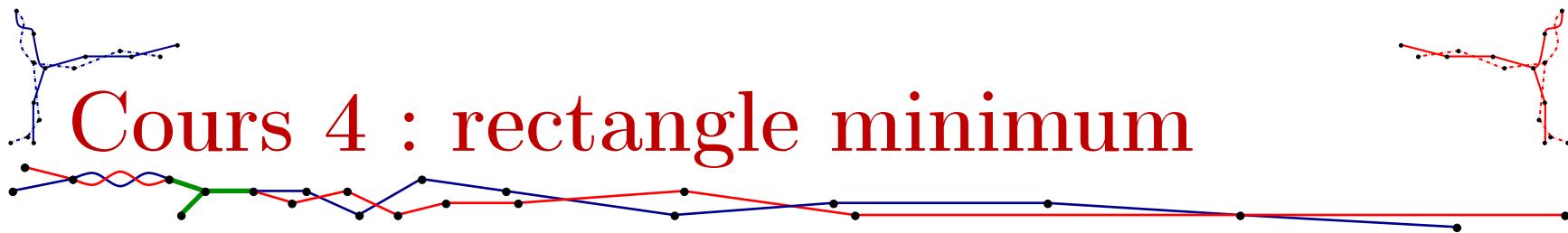
<http://www-apr.lip6.fr/~buixuan/cpaad2020>

Binh-Minh Bui-Xuan



PARIS, Janvier 2021



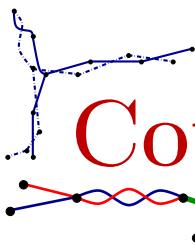


Cours 4 : rectangle minimum

RAPPEL COURS + TME 2-3 :

- collision : cas de polygones convexes (esthétique !)
- problème ENVCONVEXE : nuage de points → polygone convexe
- algorithme naïf : complexité $O(n^3)$
- techniques : précalcul (pixel, Akl-Toussaint), décomposition
- algorithmes : Jarvis, Graham (+variants), Chan, QuickHull





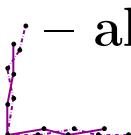
Cours 4 : rectangle minimum

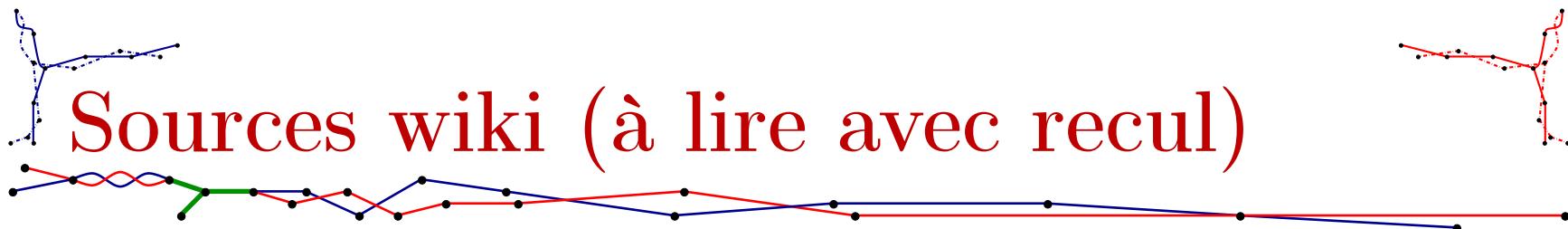
RAPPEL COURS + TME 2-3 :

- collision : cas de polygones convexes (esthétique !)
- problème ENVCONVEXE : nuage de points → polygone convexe
- algorithme naïf : complexité $O(n^3)$
- techniques : précalcul (pixel, Akl-Toussaint), décomposition
- algorithmes : Jarvis, Graham (+variants), Chan, QuickHull

AUJOURD'HUI :

- collision : cas de rectangles (compromis esthétique/simplicité)
- problème RECTANGLEMIN : nuage de points → rectangle
- algorithme “naïf” : complexité $O(n^2)$
- techniques : précalcul, pied à coulisse, paires antipodales
- algorithmes : Shamos, Toussaint



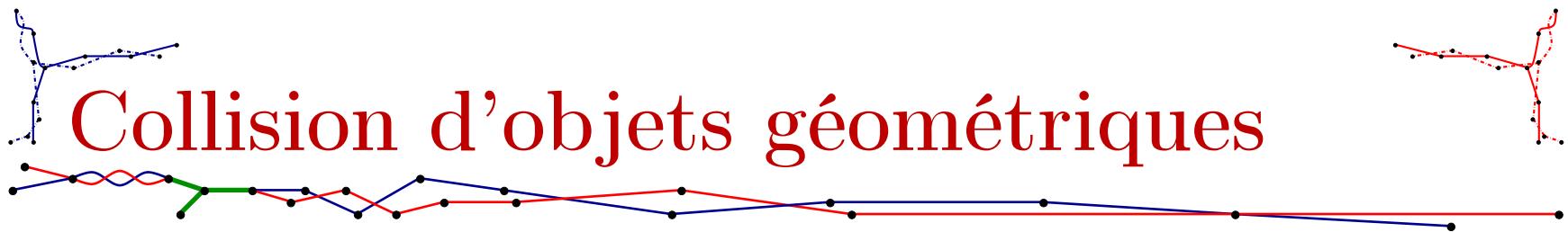


Sources wiki (à lire avec recul)

WIKIPEDIA :

- http://en.wikipedia.org/wiki/Rotating_calipers



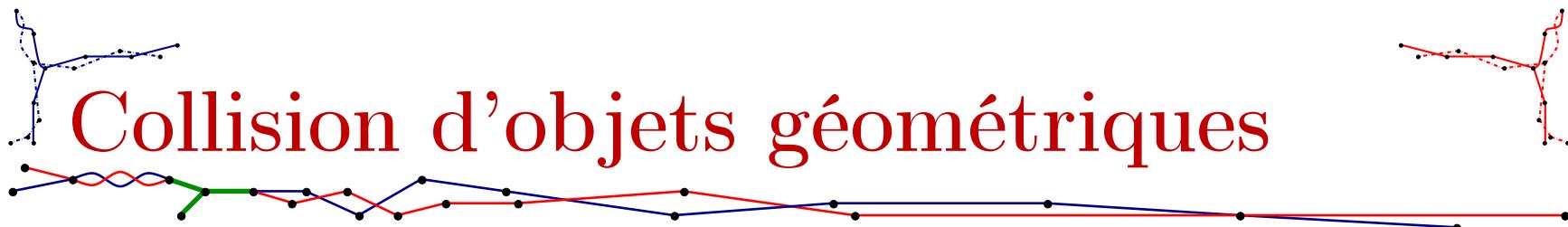


Collision d'objets géométriques

QUESTION : touché ?

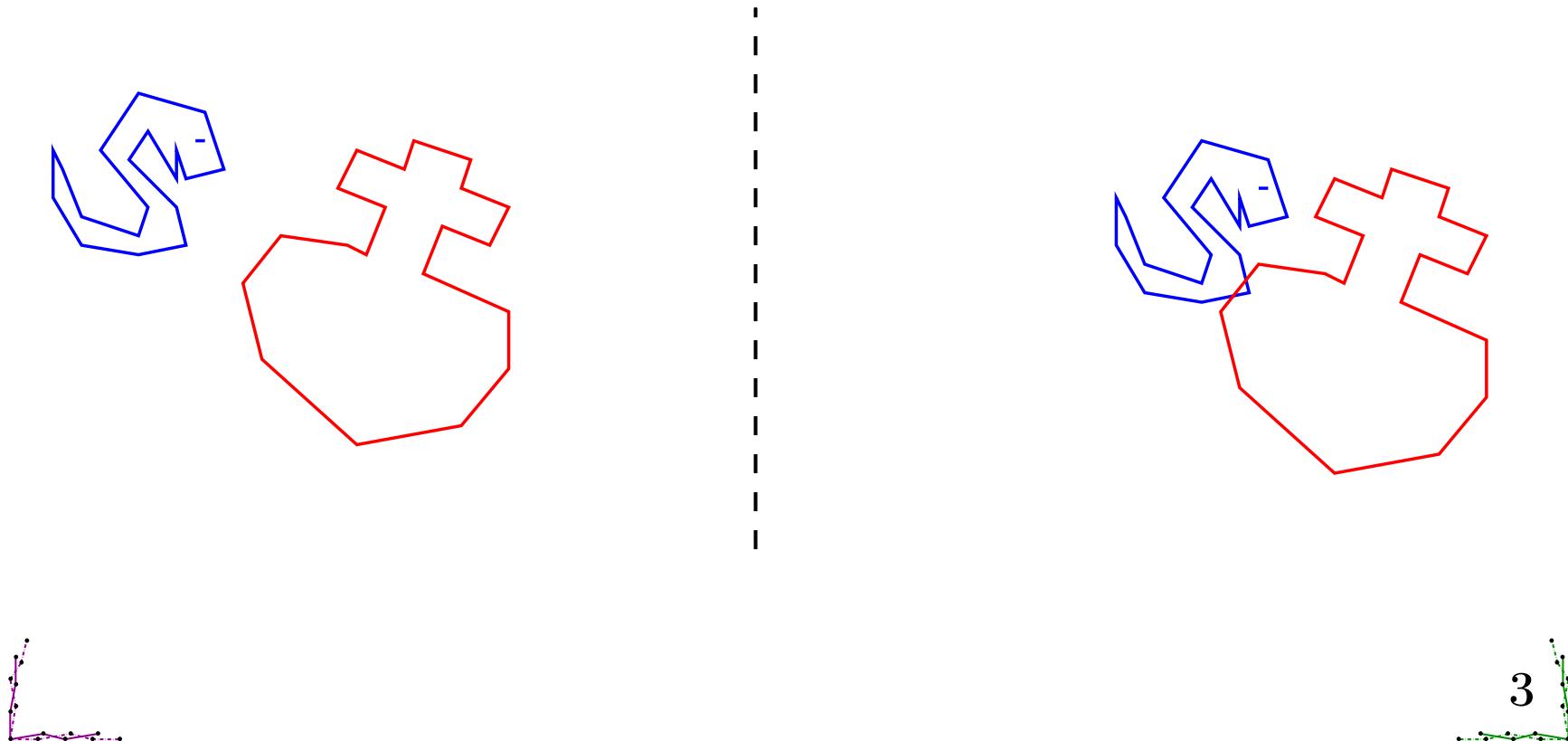


3

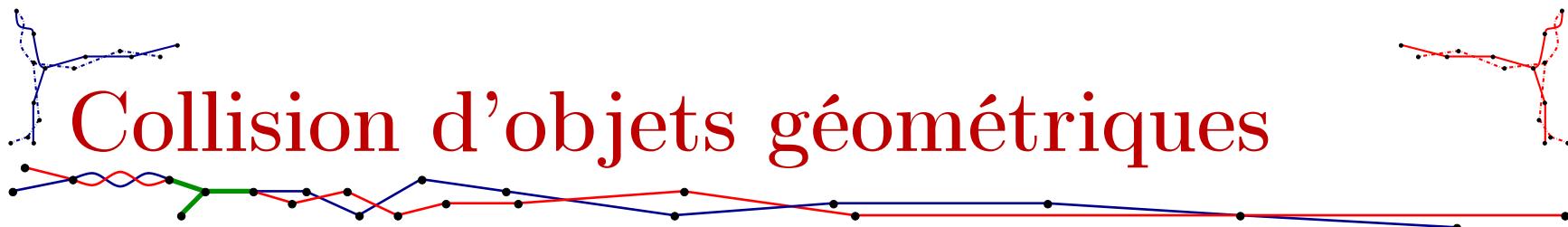


Collision d'objets géométriques

QUESTION : touché ?

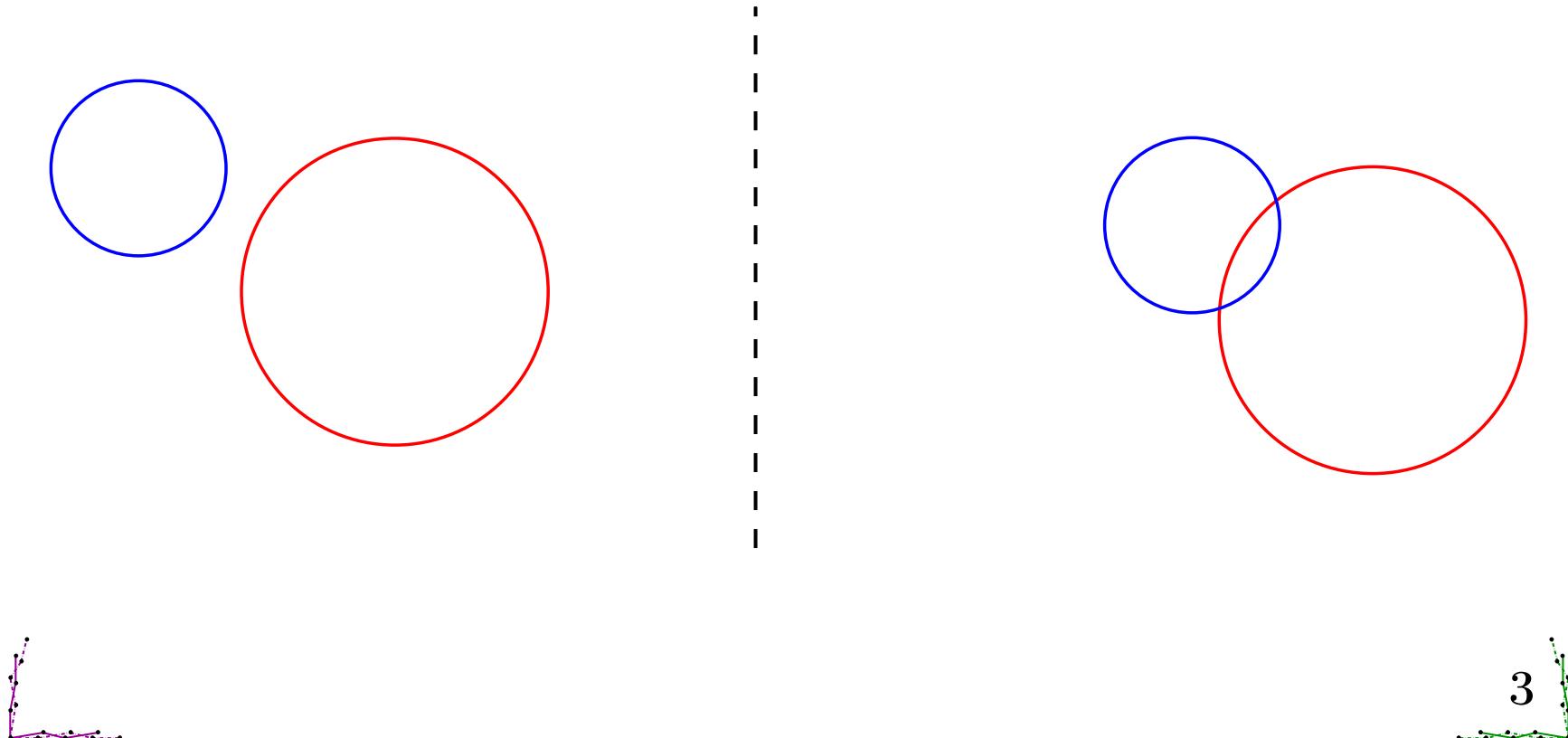


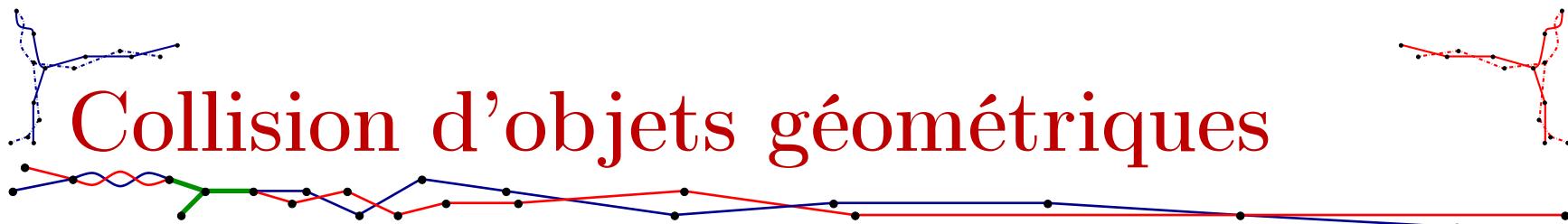
3



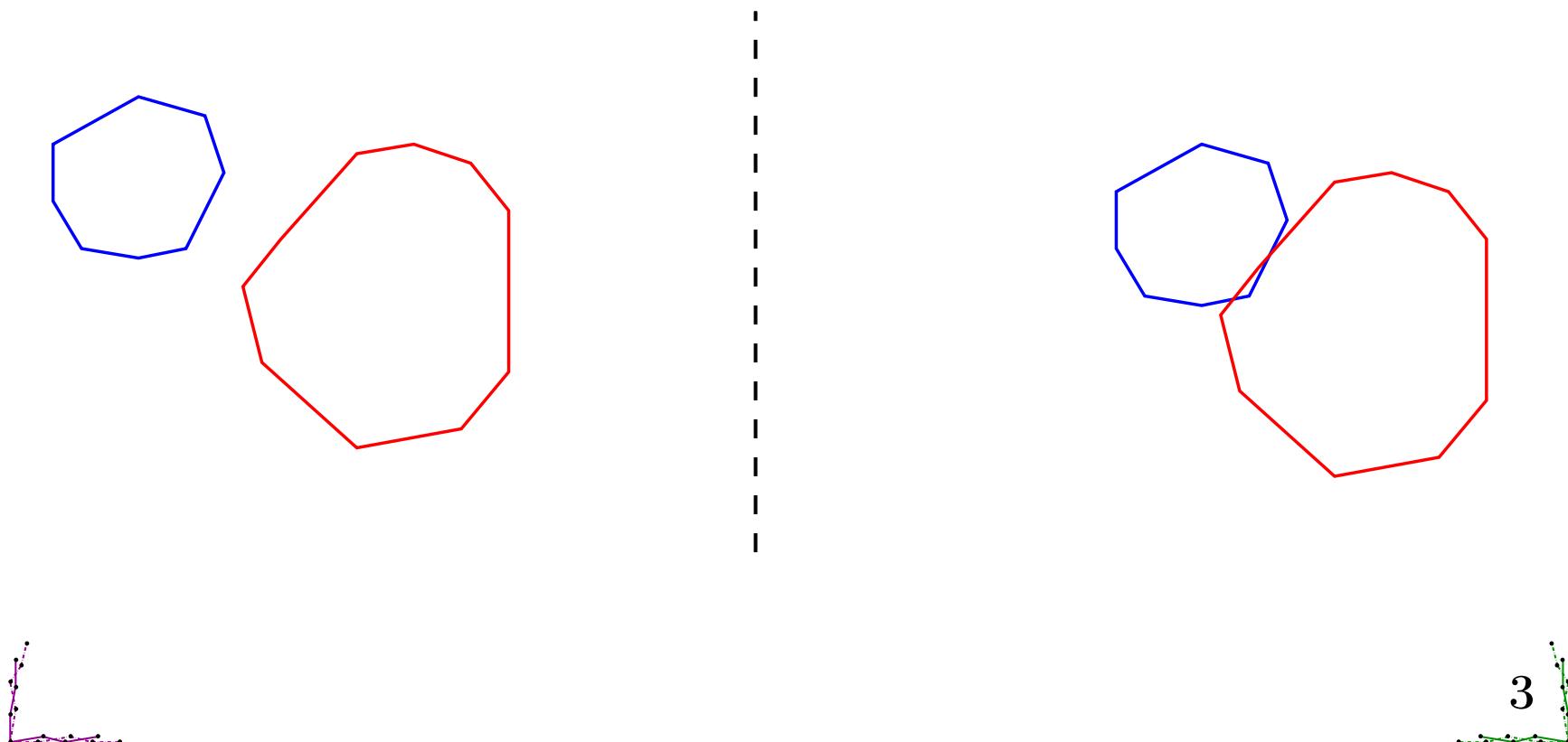
Collision d'objets géométriques

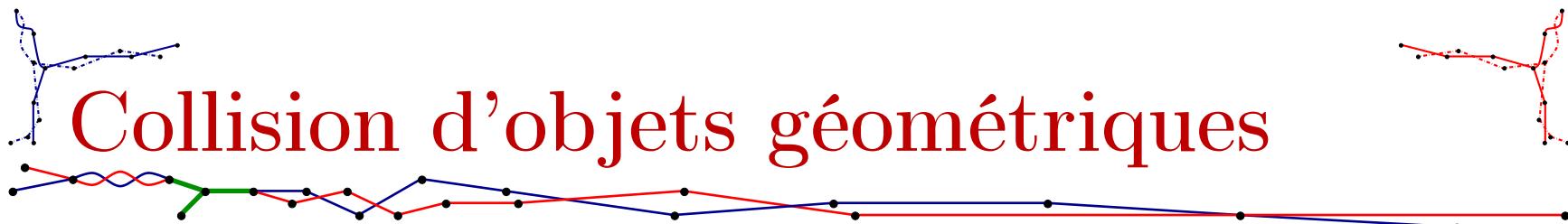
QUESTION : touché ?



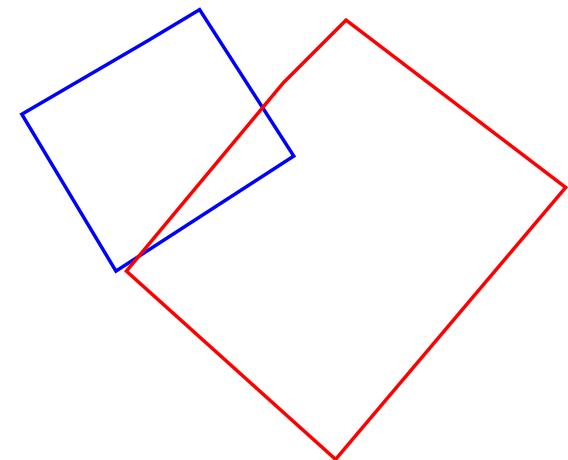
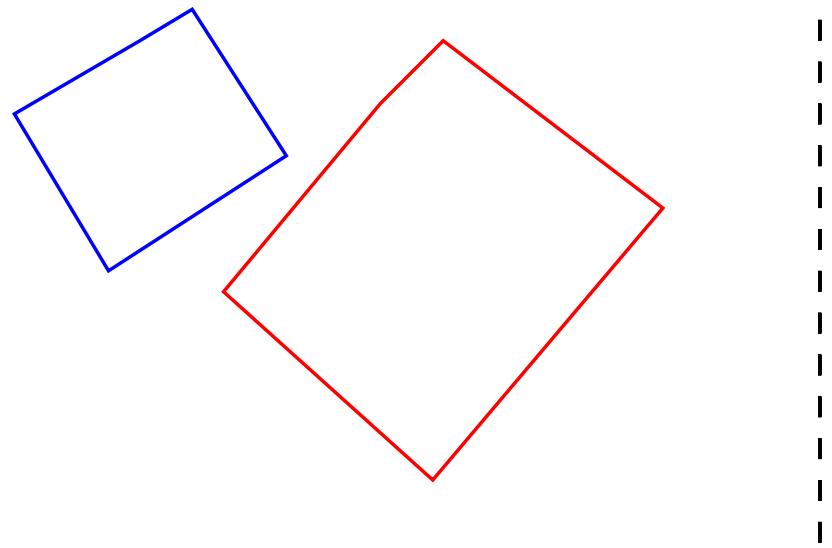


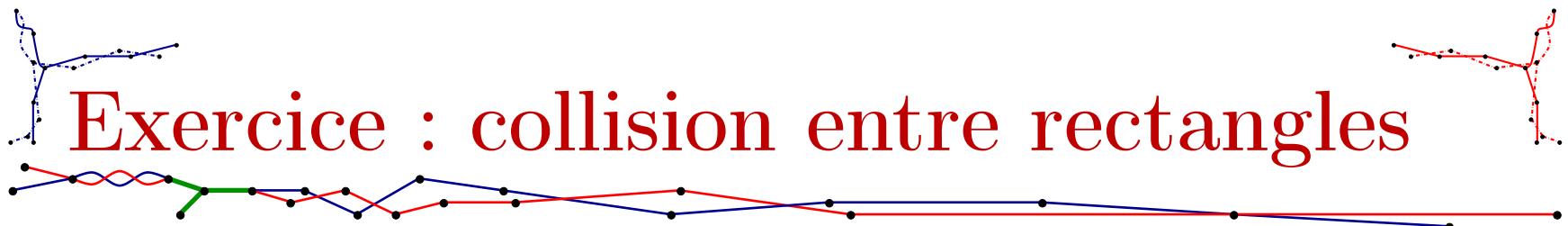
QUESTION : touché ?





QUESTION : touché ?



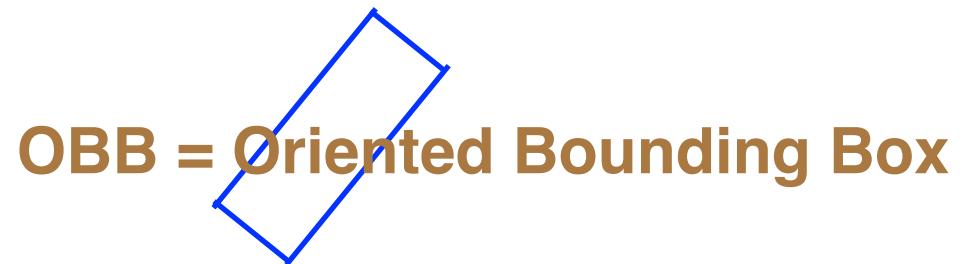


Exercice : collision entre rectangles

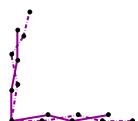
EXERCICE : comment déterminer si deux rectangles intersectent ?

QUESTION : implantation ?

Notes pour révision : voir cas polygone, cours 2-3.

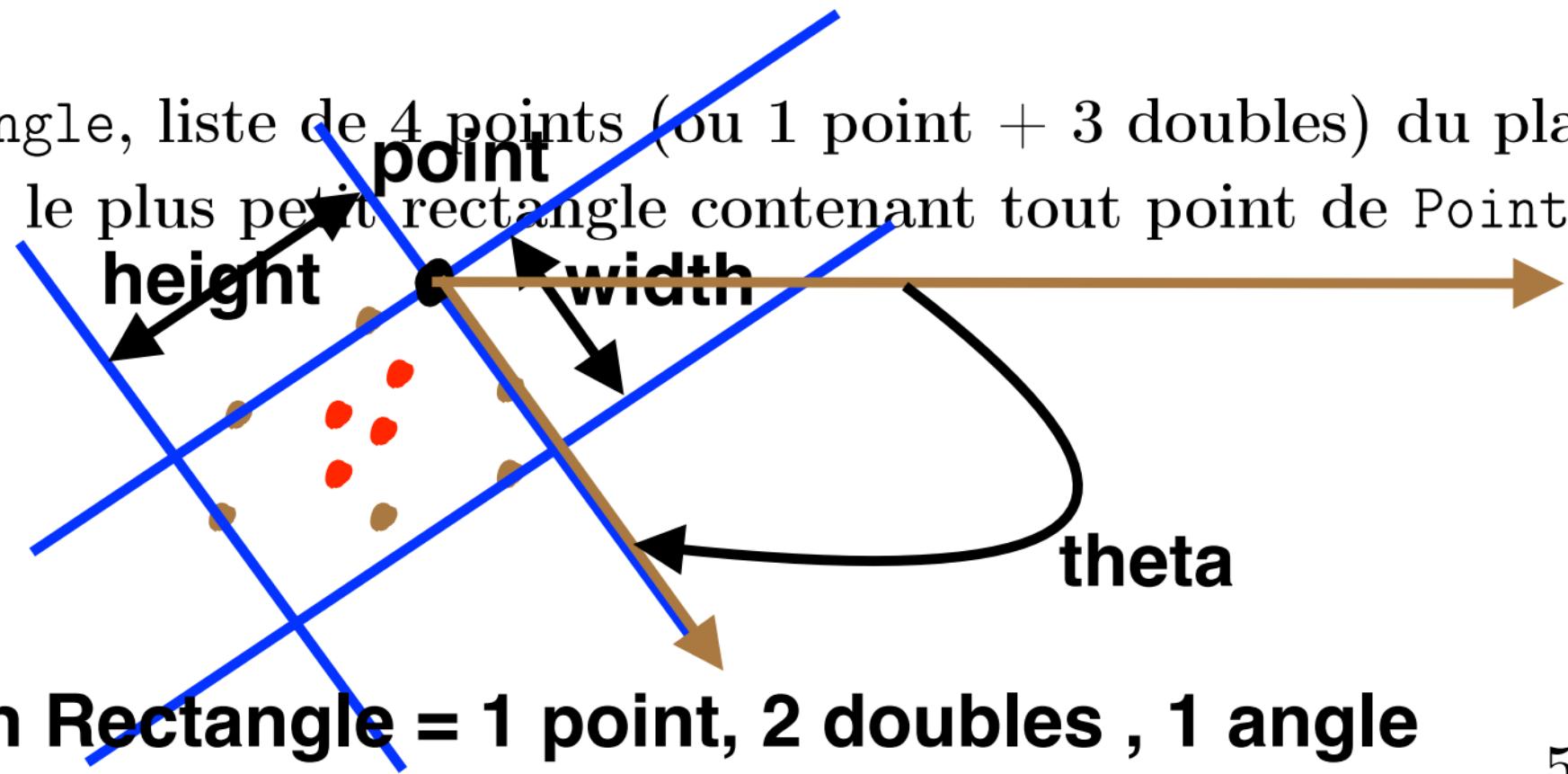


AABB = Axis Aligned Bounding Box

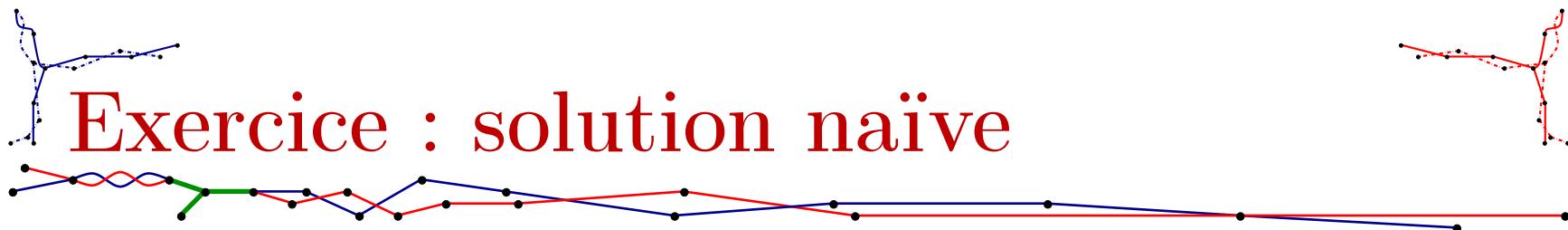


nts, une liste de coordonnées de points en 2D

Rectangle, liste de 4 points (ou 1 point + 3 doubles) du plan
tant le plus petit rectangle contenant tout point de Point:



un Rectangle = 1 point, 2 doubles , 1 angle



Exercice : solution naïve

PROPRIÉTÉ : *le rectangle minimum contenant un ensemble de points a un côté parallèle avec l'un des côtés de l'enveloppe convexe de ces points*

EXERCICE : solution naïve au problème du rectangle minimum ?

QUESTIONS : complexité ? implantation ? précalcul ? estimation du temps de calcul avec un ordinateur de l'ordre du Giga-Hertz avec $n = 10000, 100000$, etc ?



Si $n = \text{points.size()}$ et
 $h = \text{enveloppe.size()}$
Alors $h = O(n)$

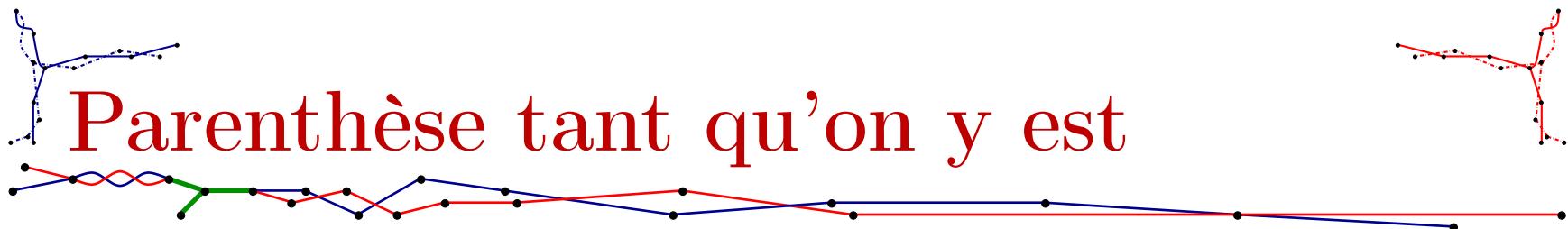
Notes pour révision : algorithme

\tau

1. enveloppe \leftarrow enveloppe convexe de points
 2. pour tout côté pq de enveloppe
 3. s \leftarrow coin de l'enveloppe le plus loin de (pq)
 4. $\Delta \leftarrow$ droite passant par s, orthogonale à (pq)
 5. t, u \leftarrow coins de l'enveloppe le plus loin de Δ dans les deux demi-plans définis par Δ
 6. $\Gamma \leftarrow$ droite passant par t, orthogonale à (pq)
 7. $\Lambda \leftarrow$ droite passant par u, orthogonale à (pq)
 8. $\Phi \leftarrow$ droite passant par s, parallèle à (pq)
 9. a', b', c', d' \leftarrow intersections de Γ , Λ , Φ et (pq)
 10. si l'aire de a', b', c', d' est plus petit que a, b, c, d alors
 11. a, b, c, d \leftarrow a', b', c', d'
 12. retourner a, b, c, d

TOTAL: $\tau + O(h^2) = \tau + O(n^2)$
ODJ: $\tau + O(h) = \tau + O(n) ?$

1



Parenthèse tant qu'on y est

Problème du DIAMÈTRE d'un ensemble de points :

IN : Points, une liste de coordonnées de points en 2D

OUT : Diamètre, liste de 2 points de Points de distance maximum

**Si $n = \text{points.size()}$ et
 $h = \text{enveloppe.size()}$**

Alors $h = O(n)$

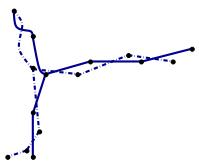
QUESTION : solution naïve ? précalcul ?

$O(n^2)$

$\backslash\tau + O(h^2) = \backslash\tau + O(n^2)$

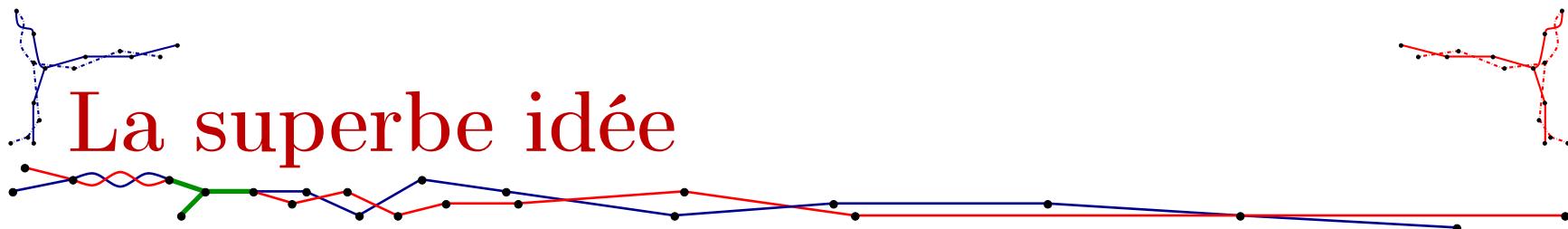
ODJ: $\backslash\tau + O(h) = \backslash\tau + O(n) ?$





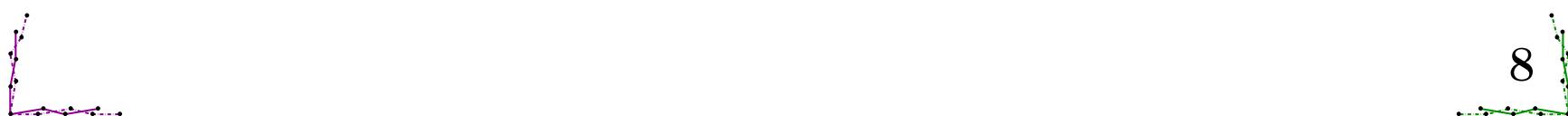
Algorithmes

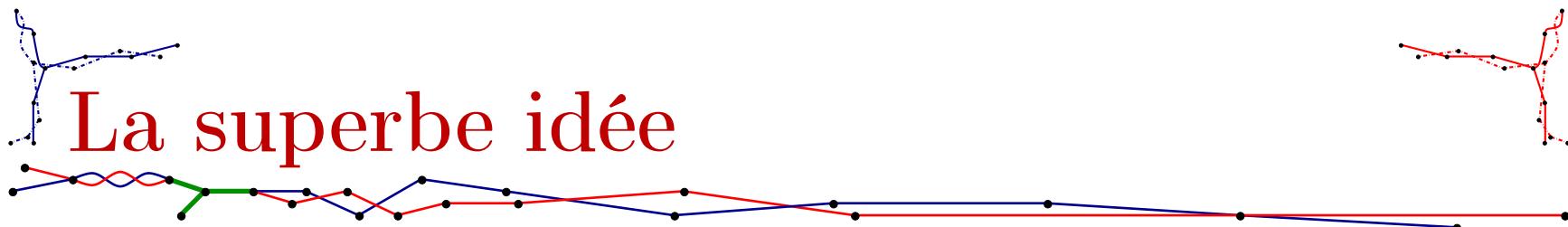




La superbe idée

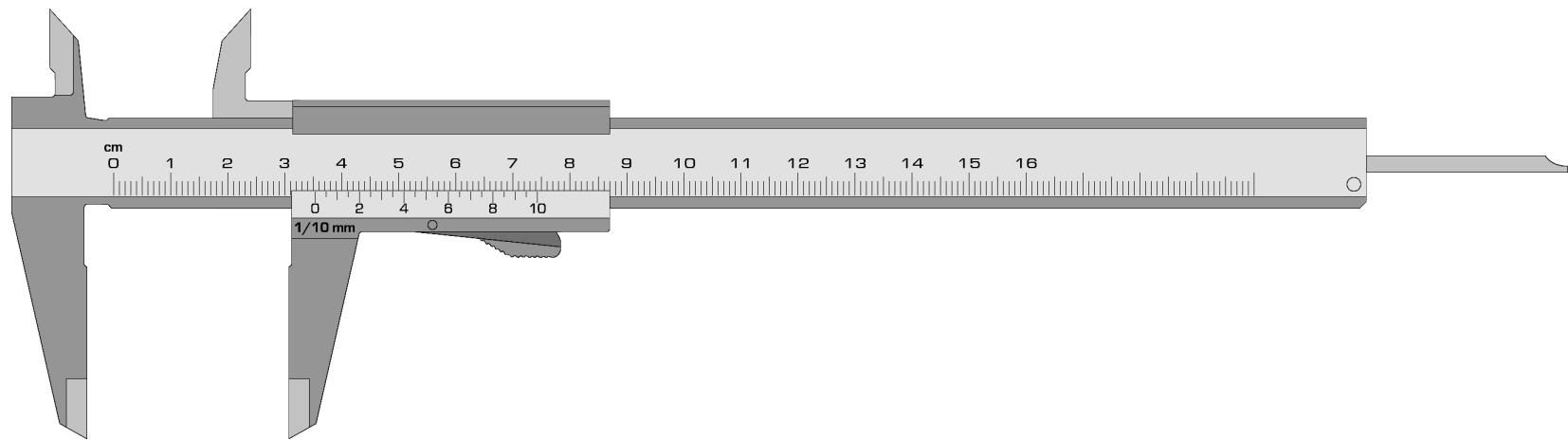
IDÉE (Shamos) : pied à coulisse

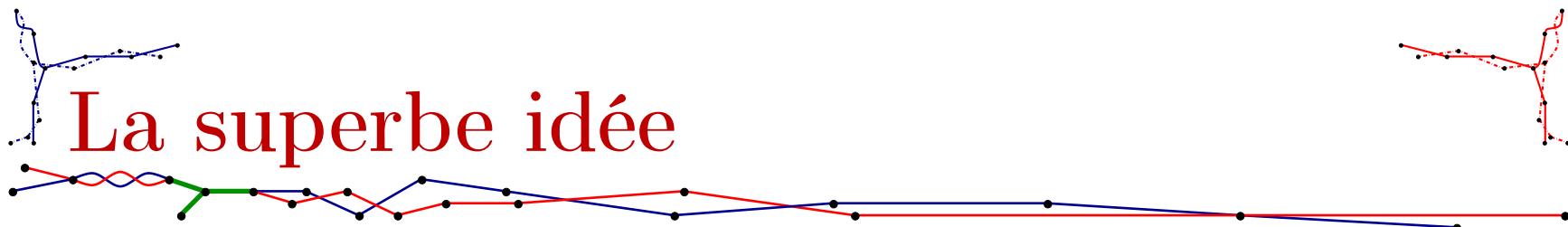




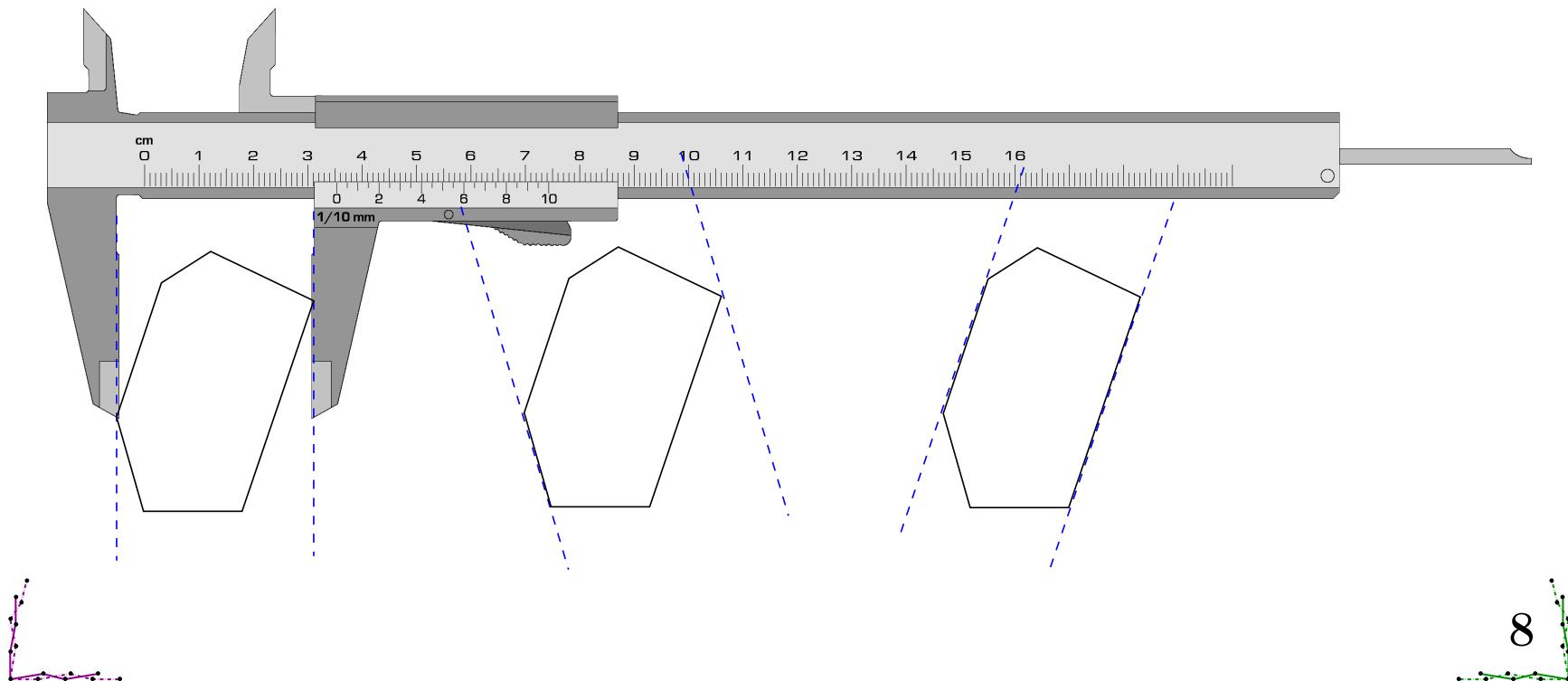
La superbe idée

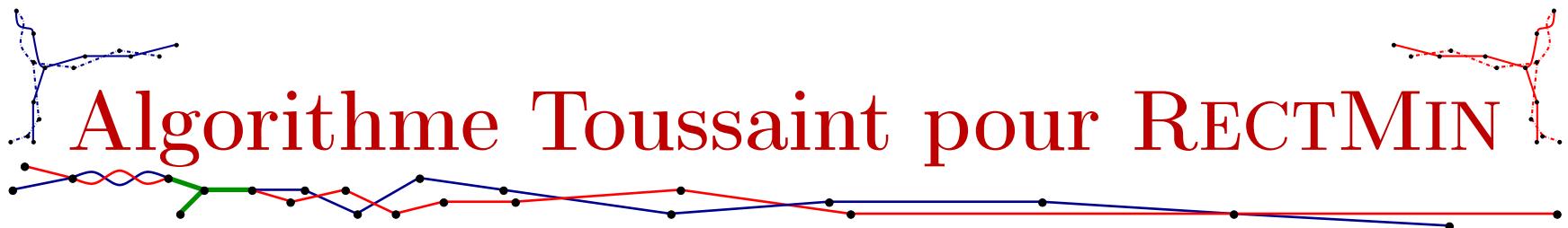
IDÉE (Shamos) : pied à coulisse





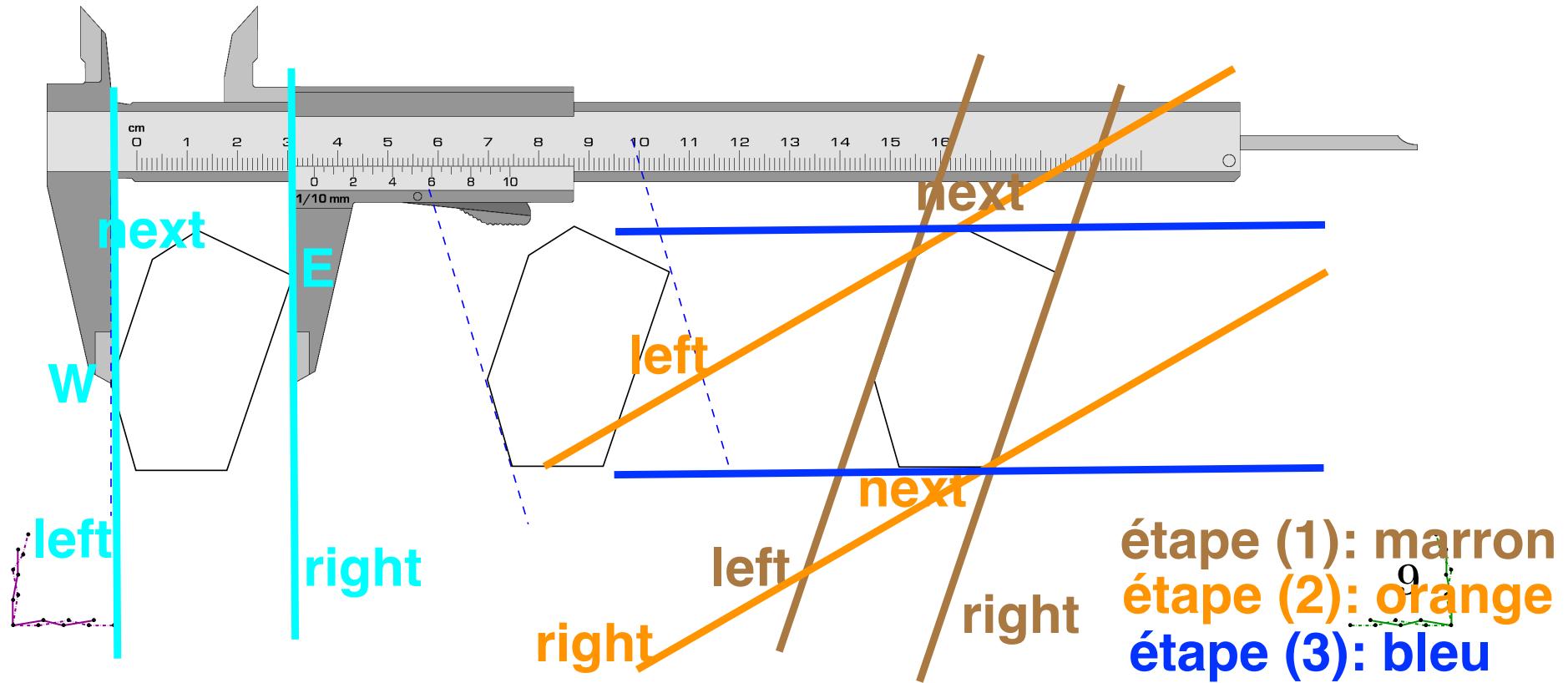
IDÉE (Shamos) : pied à coulisse

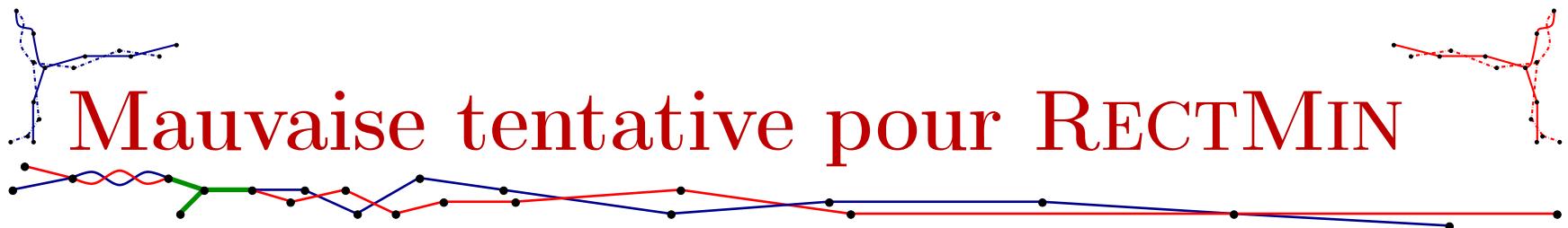




Algorithme Toussaint pour RECTMIN

IDÉE : utiliser un pied à coulisse et résoudre RECTANGLEMIN en temps $O(n + \tau)$, où τ est la complexité de ENVCONVEXE



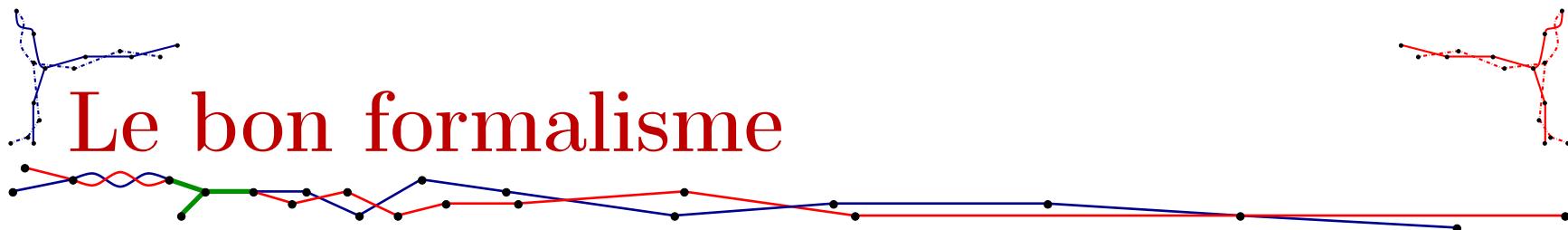


1. enveloppe \leftarrow enveloppe convexe de points
2. W \leftarrow point le plus à l'Ouest de enveloppe
3. E \leftarrow point le plus à l'Est de enveloppe
4. left \leftarrow droite verticale passant par W
5. right \leftarrow droite parallèle à left passant par E
6. maintenir ce parallélisme pendant tout le reste de l'algorithme
7. répéter jusqu'à ce que la condition suivante se réalise deux fois :
8. condition : left passe par E ou right passe par W
9. next \leftarrow côté d'enveloppe formant angle min avec left
10. box \leftarrow rectangle min contenant enveloppe passant par next
11. pivoter left et right pour que l'un des deux contient next
12. retourner le min des valeurs de box

10

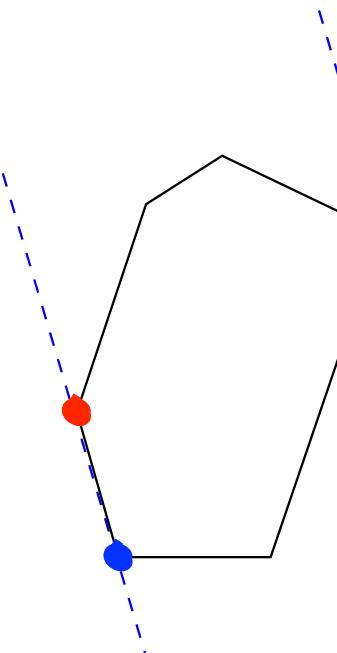
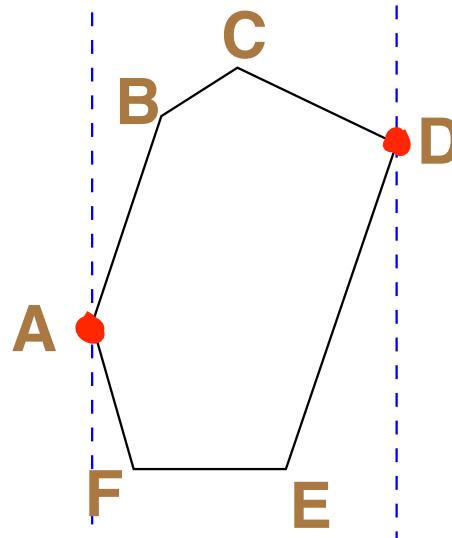
problème: complexité ligne 10 est $O(n)$

Donc TOTAL: $\tau + O(n^2)$



Le bon formalisme

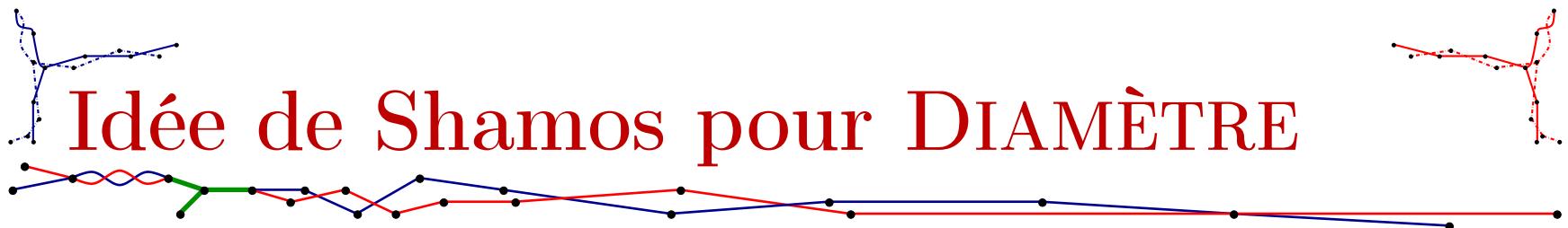
IDÉE : paires antipodales



paires antipodales:

- AB (KO)
- AC (KO)
- AD (OK)
- AE (OK)
- AF (KO)
- ...
- BE (OK)
- DF (OK)
- EB (OK)
- ...





Idée de Shamos pour DIAMÈTRE

DÉFINITION : une paire $\{A, B\}$ de points de Points est antipodale s'il existe 2 droites parallèles passant par A et B telles que la bande du plan entre ces deux droites contient tous les points de Points

Prop1

PROPRIÉTÉ : *le diamètre de Points est la distance maximum entre deux points d'une paire antipodale de Points*

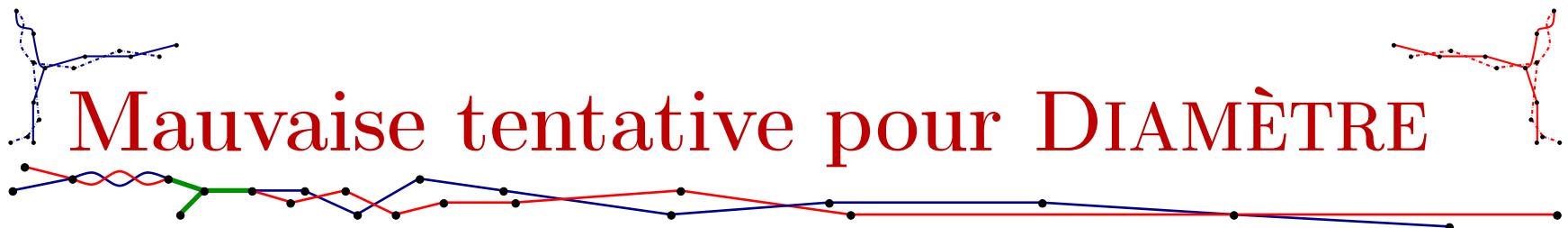
Prop2

PROPRIÉTÉ : *il y a au plus $2 \cdot n$ (plus quelques) de paires antipodales d'un ensemble Points de n points*

QUESTION : résoudre DIAMÈTRE utilisant paires antipodales ?



12



Mauvaise tentative pour DIAMÈTRE

Prop1

1. enveloppe \leftarrow enveloppe convexe de points
2. paires_antipodales $\leftarrow \emptyset$
3. pour tout point p de enveloppe
4. pour tout point q de enveloppe
5. si p, q est une paire antipodale alors
6. ajouter (p,q) dans paires_antipodales

Prop2

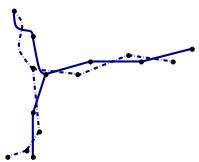
7. max $\leftarrow 0$
8. pour tout paire (p,q) dans paires_antipodales
9. si distance(p,q) > max alors max \leftarrow distance(p,q)
10. retourner max

QUESTION : complexité ? horrible ?



Lignes 2-6 : en temps $\backslash\Omega(n^3)$!!

Lignes 7-10 : en temps $O(n)$



Comment faire mieux ?

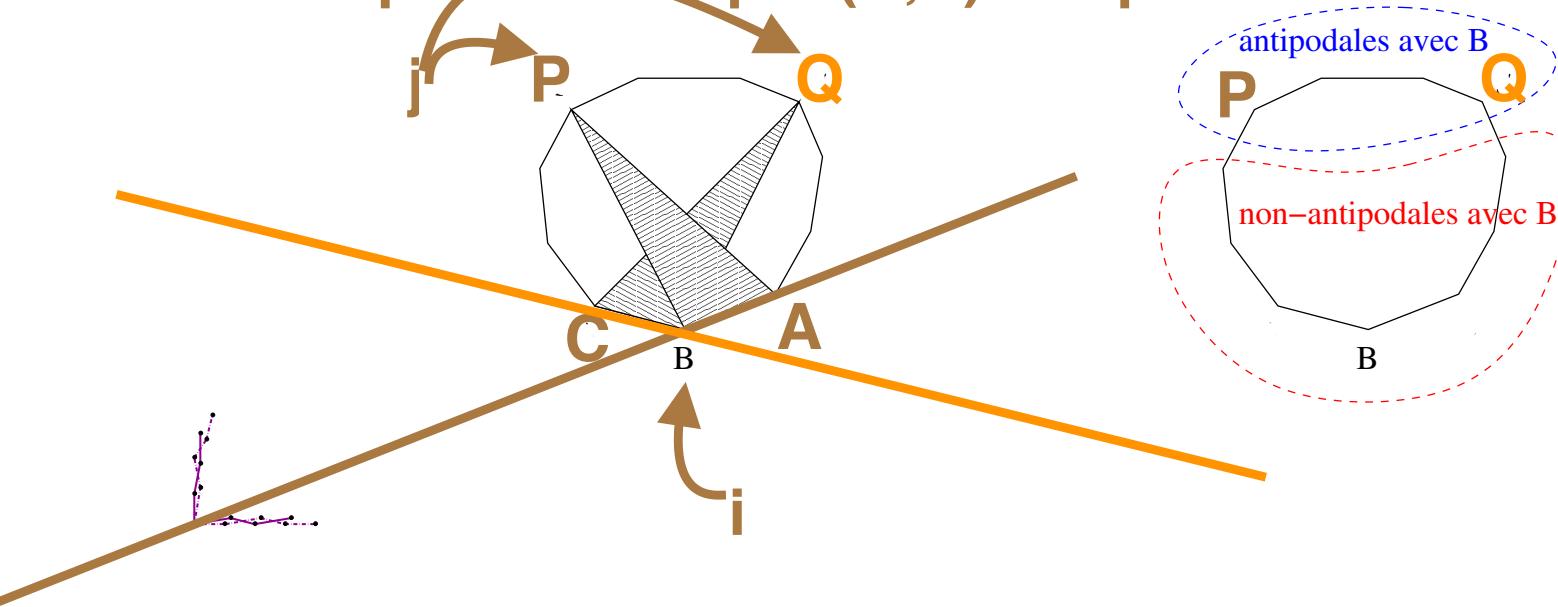




Le vrai algorithme Shamos

PROPRIÉTÉ : si A, B, C sont trois points successives de l'enveloppe convexe de Points et P, Q les deux points de distance maximum par rapport aux droites (AB) et (BC) , alors les paires antipodales contenant B contiennent aussi un point à mi-chemin entre P et Q suivant l'ordre des points de l'enveloppe convexe

Question: point X tel que (B,X) antipodale?



Réponse:

- BP
- BP_next
-
- BQ_prev
- BQ

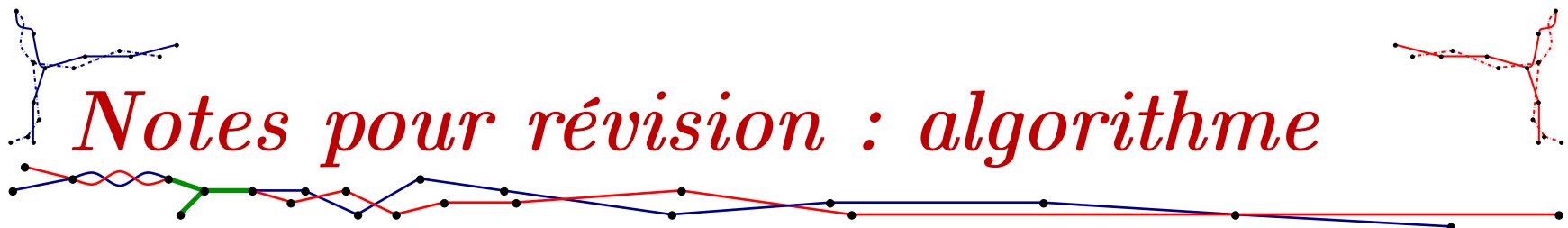


Le vrai algorithme Shamos

PROPRIÉTÉ : si A, B, C sont trois points successives de l'enveloppe convexe de Points et P, Q les deux points de distance maximum par rapport aux droites (AB) et (BC), alors les paires antipodales contenant B contiennent aussi un point à mi-chemin entre P et Q suivant l'ordre des points de l'enveloppe convexe

QUESTION : DIAMÈTRE en temps $O(n + \tau)$, où τ est la complexité de ENVCONVEXE ?

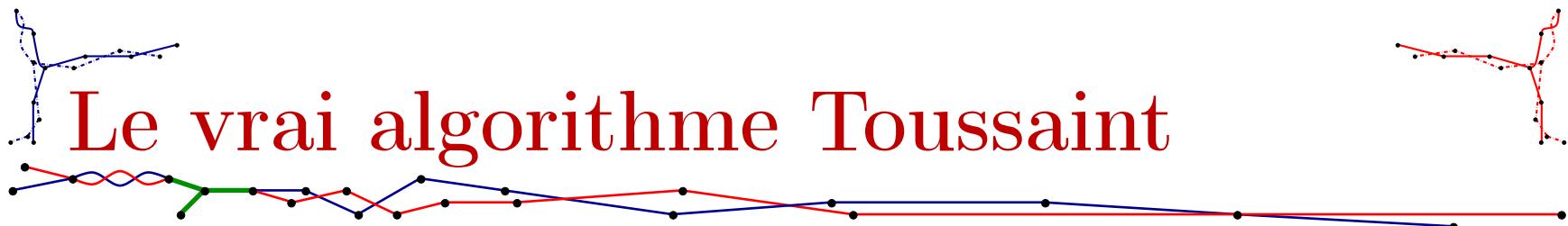




Notes pour révision : algorithme

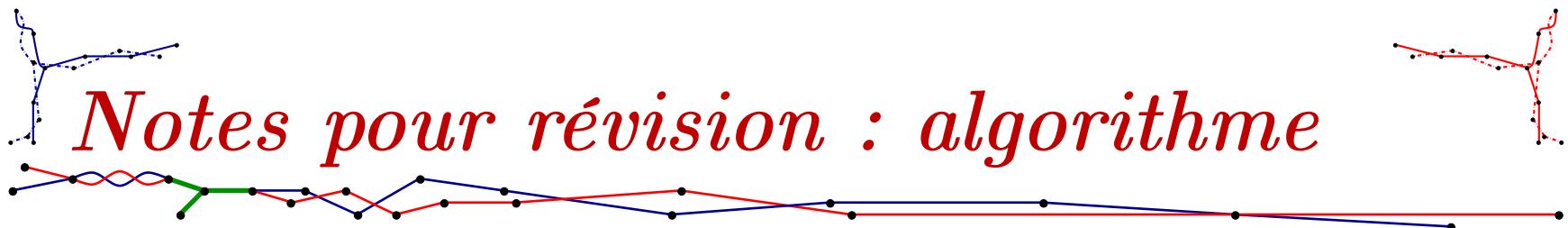
Voir TME4





QUESTION : RECTMIN en temps $O(n + \tau)$, où τ est la complexité de ENVCONVEXE ?

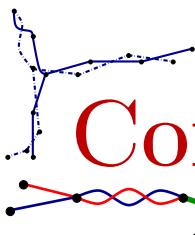




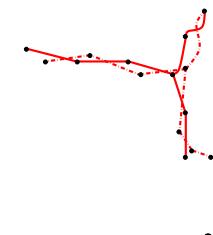
Notes pour révision : algorithme

Voir TME4





Conclusion, question



CONCLUSION :

- RECTANGLEMIN algorithme “naïf” en $O(n^2)$
- DIAMÈTRE algorithme naïf en $O(n^2)$
- technique de filtrage : enveloppe convexe
- technique exotique : pied à coulisse
- algorithmes : Toussaint, Shamos

QUESTION :

- implantation ? (voir TME)

