ROPL

Chapitre I : Programmation linéaire en 2D

Problème A

> Bob fabrique des yaourt de deux type : Allégés et sucrés, avec 3 ingrédients. Les proportions sont les suivantes :
>
> | Ingrédients/Type | Allégés | Sucrés |
> | --- | --- | --- |
> | Fraises | 2 | 1 |
> | 1 | 1 | 2 |
> | Sucre | 0 | 1 |
>
> Prix de vente :
>
> - Allégés : 4€/kg
> - Sucrés 5€/kg
>
> Les stockes disponibles sont :
>
> - 800kg de fraises
> - 700L de lait
> - 300kg de sucre
>
> **Question :** Comment maximiser le revenu de Bob ?

Modélisation problème A

Soit X_a la quantité produite de yaourt allégé et X_S la quantité produite de sucré

Fonction objectif :

$$max(4x_a + 5x_s)$$

Ce qui va correspondre au revenu de Bob.

Contraintes :

$$\begin{gathered} 2x_a + x_s \leq 800 \text{ (800kg de farine)} \\ x_a + 2x_s \leq 700 \text{ (800kg de lait)} \\ x_s \leq 300 \text{ (300kg de sucre)} \\ x_a \geq 0 \\ x_s \geq 0 \end{gathered}$$

Résolution graphique

Voir cours du prof pour la courbe.

- *Droite $2x_a+x_s = 800$* : deux points (0,800) et (400,0)
  - **Remarque :** 2*0 + 0 = 0 < 800, donc 0 est du côté <= 800
- *Droite $x_a+2x_s=700$* : deux points (700,0) et (0,350)

Domaine réalisable : Ensemble des solutions réalisables

Remarque : le maximum s'il existe, est atteint en un sommet du domaine réalisable

Conséquence : Pour trouver le maximum s'il existe, il suffit de calculer la valeur de la fonction objectif pour chaque sommet.

Sommet	**O: (0,0)**	**A:(0,300)**	**B(100,300)**	**C : (300, 200)**	**D : (400, 0)**
Valeurs ($4x_a+5x_s$)	0	1500	1900	2200	1600

Donc Bob gagnera au maximum 2200 € en faisant 300 allégés et 200 sucrés.

Il s'agit ici d'un problème de **production**.

Etapes pour résoudre un problème d'optimisation

1. Modélisation
   - Quelles sont les variables a introduire ?
   - Quelle est la fonction objectif ?
   - Quelles sont les contraintes ?
2. Résolution des programmes linéaires (PL) obtenu
   - En 2D : Résolution graphique
   - En général : Algo du simplexe

Un peu de vocabulaire

Un programme linéaire est généralement représenté sous forme matricielle :

$$max(c.x)$$
$$\begin{cases} A_x \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Dans le problème de Bob :

$$x = \begin{pmatrix} x_a \\ x_s \end{pmatrix}$$

c = [4 5], donc c.x = $4x_a + 5x_s$ et

$$a = \begin{pmatrix} 2\,1 \\ 1\,2 \\ 0\,1 \end{pmatrix} et\ b = \begin{pmatrix} 800 \\ 700 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$$A_x = \begin{pmatrix} 2\,1 \\ 1\,2 \\ 0\,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_a + x_s \\ x_a + 2x_s \\ x_s \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 800 \\ 700 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Définition :

$$\{x : A_x \leq b, x \geq 0\}$$

est l'ensemble des solutions réalisables et appelé **POLYEDRE**.

C'est aussi l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces. Un polyèdre borné est un **POLYTOPE**. En 2D, ces demi-espaces sont des demi-plans et les polytopes sont polygones.

Une **FACE** d'un polèdre est l'ensemble des points du polyèdre qui vérifie une des inégalités à égalité.

Si lorsqu'on enlève l'inégalité de la description (A_x <= b), on obtient le même polyèdre, cette inégalité est dite **REDONDANTE**.

Remarque : Les polyèdres sont convexes. P convexe lorsque pour tout x, y dans P, le segemnt [x, y] est contenu dans P.

Complexité de l'algo

Quelle est la complexité de l'algorithme "résolution graphique" (algorithme utilisé un peu plus haut) ? Appliqué a un polygone définit par un m inégalités, en supposant qu'aucune inégalité n'est redondante.

Mini-question : Combien P a-t-il de sommets ? ~> m

Algo :

> Pour toute paire de droite provenant de la description du polygone, on calcule le point d'intersection.
>
> Si ce point est dans ce polygone, c'est un sommet

O(m^2)

> Ensuite, il suffit de trouver un sommet de plus grande valeur

O(m) : Il y a m sommet, et on doit calculer la valeur de la fonction objectif pour chacun d'entre eux.

Total : O(m^3) il est donc polynomial.

<u>Question :</u> Qu'est ce que ça donne en dimension d ?

Si P est un polytope avec m inégalités : m dimension d, un sommet est l'intersection de d de ces m inégalités.

$$\binom{m}{d} = (m^d)$$

Et m^d possibilités ça explose.

Redondance

Sur l'exercice 1 du TD_2D on peut observer que la droite $20x_{T1} + 30x_{T2} \leq 480$ est redondante. Pourquoi ?

On a déjà :

$$\begin{gathered}(1) 40x_{T1} + 30x_{T2} \leq 360 \\ (2) 20x_{T1} + 30x_{T2} \leq 480 \\ (3) - x_{T1} \leq 0 \\ (4) - x_{T2} \leq 0\end{gathered}$$

Sur le dessin on observe que (2) est redondante :

$$(1)-(3):\begin{cases}40x_{T1}+30x_{T2}\leq 360\\ -x_{T1}\leq 0\end{cases}$$
$$39x_{T1}+30x_{T2}\leq 360$$
$$\text{Cette inégalité est valide pour l'ensemble des points satifaisant (1) et (3)}$$

$(1)-20*(3)$ donne donc $20x_{T1}+30x_{T2}\leq 360(*)<480$.

Y'a t-il une relation entre (*) et (2) ?

Tous les points satisfaisant (*) vérifiant (2).

Idée : Une inégalité est redondante si on peut écrire une inégalité au moins aussi forte en combinant les autres.

Chapitre II : Algorithme du simplexe

...

Forme standard

$$max\ cx$$
$$\begin{cases}A_x=b\\ x\geq 0\end{cases}$$

Conséquence : Sous forme standard on peut supposer $rang(A)=m$, où m est le nombre de lignes de A.

Ex :

> $$\begin{pmatrix}1\,0\\0\,1\\1\,1\end{pmatrix}\text{N'a pas de rang(A) = m, car } L_3=L_1+L_2$$

Dorénavant on supposera que dans la forme standard le rang de la matrice est égal à son nombre de ligne. $rang(A)=m$.

Définitions

Soit :

$$max\ cx$$
$$\begin{cases}A_x=b\\ x\geq 0\end{cases}$$

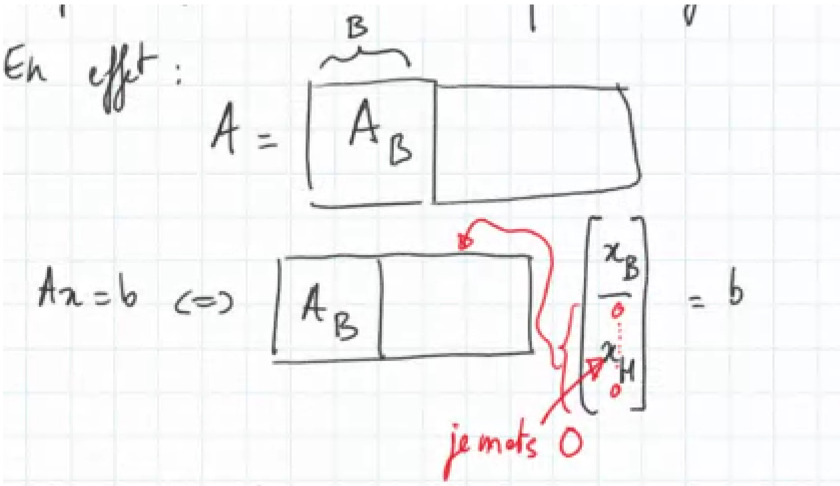
un programme linéaire sous forme standard.

- Un ensemble $B\subseteq\{1,-d\}$ (avec d correspondant au nombre de colonne de la matrice) tel que les colonnes de A indicées par B forment une matrice A_b inversible est appelé **une base**
  - $x_B=(x_j:j\in B)$ sont les **variables de base**
  - $x_H=(x_j:j\notin B)$ sont les **variables hors base**

Ex :

> $$A=\begin{pmatrix}1\,2\,4\,7\\-1\,1\,1\,8\end{pmatrix}$$
>
> Q: $\{1,2\}$ forme une base ?
>
> R: Oui car elle est inversible

- Etant donné une base B : poser $x_H = 0$ (c'est à dire mettre toutes les variables hors-base à zéro) définit une solution unique au système $A_x = b$



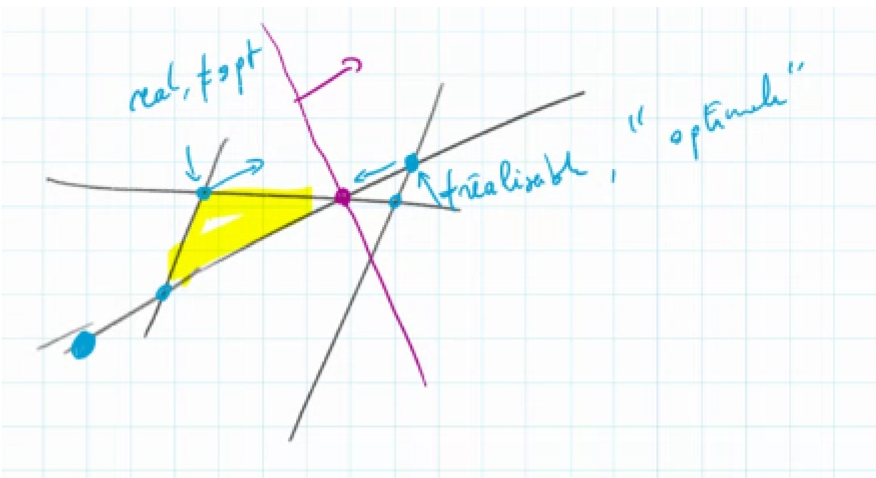
On obtient $A_x x_B = b$ qui a pour unique solution $x_B = A_B^{-1}b$.

Cette solution (x_B, x_H) est appelée **solution de base associée à la base.** (Variable hors base a 0 et système linéaire restant résolu)

Si $x_B, x_H \geq 0$: c'est une **solution de base réalisable**. (Toutes les variables sont positives ou nulles)

Et le simplexe va chercher a améliorer les valeurs de la fonction objectif.

- Coûts réduits : On écrit la fonction objectif en fonction des variables hors base et une fois ceci fait les coefficients obtenus sont les coûts réduits des variables.
    - <u>Idée :</u> Le coût réduit d'une variable indique de combien augmenterais la fonction objectif si en faisant entrer la variable dans la base.
    - <u>Conséquence :</u> Si tout les coûts réduits sont négatifs ou nul alors la solution courante est "optimale" <u>ssi</u> elle est **réalisable**. Si elle n'est pas réalisable cela signifie que la solution courante est du côté de l'optimale mais est en dehors du domaine réalisable.



Et le point rose est **réalisable** et **optimale**.

Déterminer si une base est réalisable

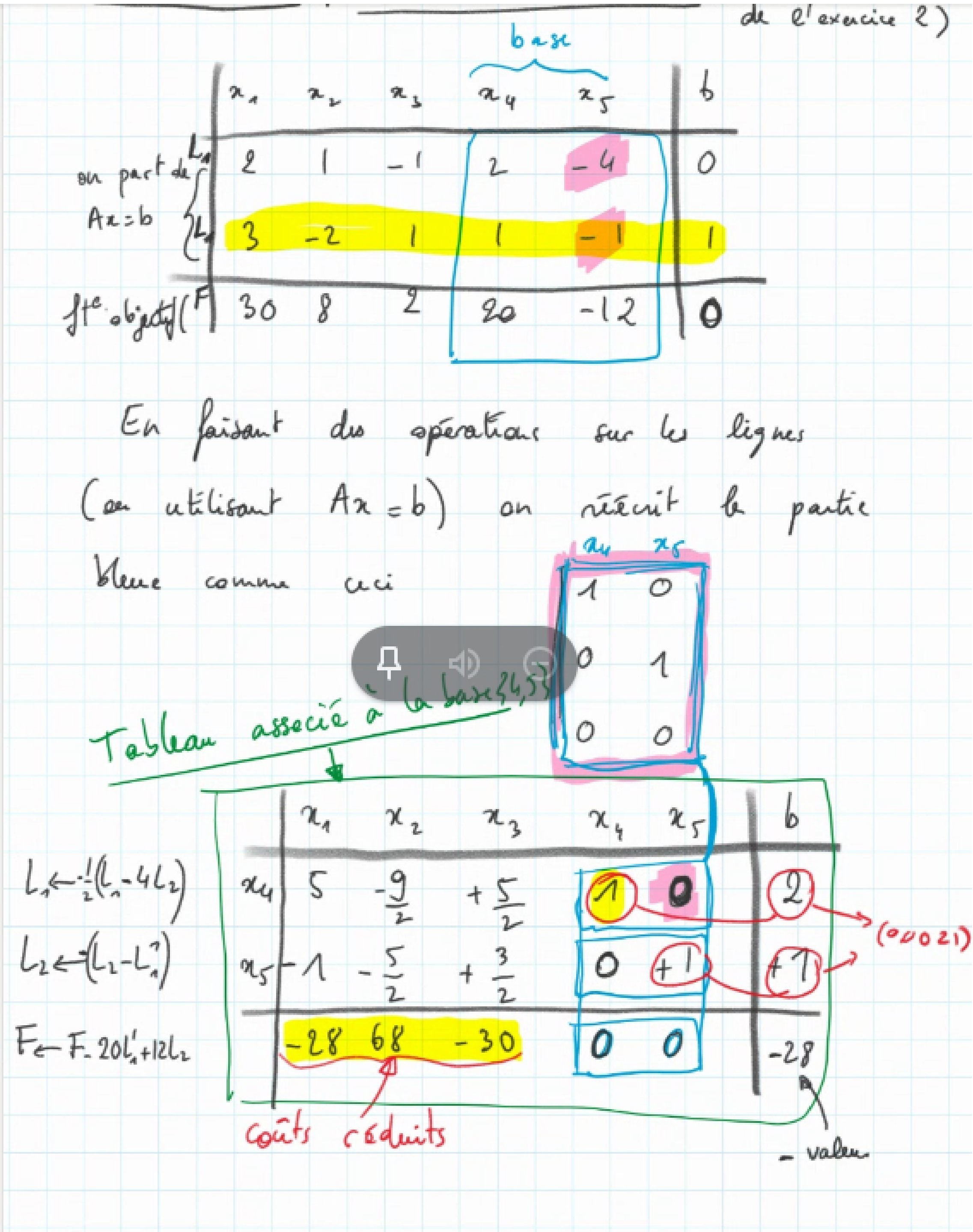
Etant donné un PL, pour vérifier si la base est réalisable :

1. Déterminer la matrice carrée obtenue
2. Si c'est < 0 ça forme une base
3. Déterminer les variables en base (celle dans la matrice carrée) et hors base (les autres)

4. Poser les variables hors bases a 0
5. Résoudre le système linéaire sachant ça
6. Les valeurs trouvées pour les variables en base détermine la solution de base
7. Si elle est supérieur ou égal a 0 alors c'est réalisable

Trouver les coûts réduits

Ici sur la base $I = \{4, 5\}$ issue de l'exercice 2 du TD "Solution de base"



Remarque : On peut lire immédiatement dans le tableau :

- Les coûts réduits
- Les coordonnées de la solution de base associée

Le tableau associé à une base B donnée est la réécriture sous forme de tableau de $\begin{matrix} A_x = b \\ F \end{matrix}$ avec

$\begin{pmatrix} 1 \; 0 \\ 0 \; 1 \\ 0 \; 0 \end{pmatrix}$ dans les colonnes correspondant à B.

Algorithme du simplexe (Phase 2)

Entrée/Sortie

Entrée : Un programme linéaire sous forme standard et une solution de base réalisable (base B) et son tableau

Sortie : La valeur du programme linéaire, et une solution optimale si cette valeur est finie.

Corps

Tant qu'il existe une variable hors-base de coût réduit strictement positif :

- Variable entrante : variable k hors-base de coût réduit maximum
- Variable sortante : variable l minimisant $\frac{b_i}{a_{i,k}} avec \; a_{i,k} > 0$
- Nouvelle base : $B := B \cup \{k\} \setminus \{l\}$
- Ecrire le tableau associé à la nouvelle base

Terminaison (Conditions de sortie)

- Tous les coûts réduits sont négatifs ou nuls : l'algorithme termine et la solution de base courante est optimale
- S'il existe un coût réduit strictement positif (donc il y a une variable entrante) mais que tous les $a_{i,k}$ sont positif ou nul (il n' a pas de variable sortante), alors la valeur du PL est $+\infty$