

## Bài 3: Góc giữa hai đường thẳng

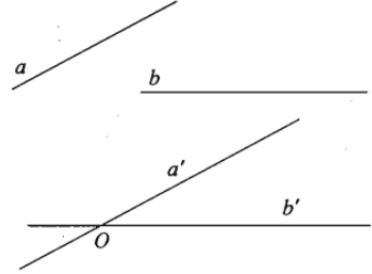
### 1/ Tính góc giữa hai đường thẳng

#### Dạng 1. Dùng định nghĩa

Góc giữa hai đường thẳng  $a, b$  trong không gian là góc giữa hai đường  $a'; b'$  cùng đi qua  $O$  và lần lượt song song với  $a, b$ .

Kí hiệu:  $(a; b) = (a'; b') \in [0^\circ; 90^\circ]$

Chú ý: Nếu  $a \perp b \Rightarrow (a; b) = 90^\circ$ ;  $a // b; a \equiv b$  thì  $(a; b) = 0^\circ$



- VD 1.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ , tính góc giữa  
a/  $AB$  và  $B'C'$                       b/  $AC$  và  $B'C'$                       c/  $A'C'$  và  $B'C$                       d/  $A'B$  và  $B'C$   
e) Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC$ . Tính góc giữa  $MN$  và  $C'D'$
- VD 2.** Cho tứ diện  $OABC$  có các cạnh  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc với nhau và  $OA = OB = OC = 1$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $AB$ . Tính góc giữa  $OM$  và  $BC$ .  
A.  $90^\circ$                       B.  $45^\circ$                       C.  $120^\circ$                       D.  $60^\circ$
- VD 3.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành,  $SA = SB = 2a, AB = a$ . Tính góc giữa  $CD$  và  $SA$ ?  
A.  $\frac{1}{4}$                       B.  $\frac{1}{2}$                       C.  $\frac{2}{3}$                       D. 1
- VD 4.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = CD = 2a$ . Gọi  $E, F$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $AD$ . Biết  $EF = a\sqrt{3}$ , tính góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$ .  
A.  $60^\circ$                       B.  $45^\circ$                       C.  $30^\circ$                       D.  $120^\circ$
- VD 5.** Cho tứ diện đều  $ABCD$ ,  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Khi đó  $\cos(AB, DM)$  bằng  
A.  $\frac{\sqrt{3}}{6}$                       B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       D.  $\frac{1}{2}$

**Dạng 2. Dùng tích vô hướng**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v}) \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

$$\text{Hệ quả: } \cos(AB; CD) = \frac{|\overline{AB} \cdot \overline{CD}|}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{CD}|}$$

- VD 6.** Cho tứ diện đều  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tính góc giữa  $AD$  và  $BC$ .  
A.  $60^\circ$                       B.  $90^\circ$                       C.  $120^\circ$                       D.  $45^\circ$
- VD 7.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $BC = a\sqrt{2}$ , các cạnh còn lại đều bằng  $a$ . Tính góc  $SB$  và  $AC$   
A.  $120^\circ$                       B.  $60^\circ$                       C.  $90^\circ$                       D.  $45^\circ$

### 2/ Chứng minh hai đường thẳng vuông góc



$$*1) AC \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \quad *2) \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2 \text{ hay } \overrightarrow{AB}^2 = AB^2 \quad *3) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$$

- VD 8.** Cho tứ diện ABCD có  $AB = AC = AD$  và  $BAC = BAD = 60^\circ$  và  $CAD = 90^\circ$ . Chứng minh rằng:  
a/  $AB \perp CD$       b/  $M, N$  là trung điểm AB, CD thì  $MN \perp AB; MN \perp CD$
- VD 9.** Cho tứ diện ABCD có  $AB \perp AC, AB \perp BD$ . Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng  $AB \perp PQ$ .
- VD 10.** Cho tứ diện ABCD. Chứng minh rằng:  
a/  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$   
b/ Từ đẳng thức trên suy ra  $AB \perp CD, AC \perp DB$  thì  $AD \perp BC$ .
- VD 11.** Cho hình chóp tam giác S.ABC có  $SA = SB = SC$  và góc  $ASB = BSC = CSA = \alpha$ . Chứng minh rằng:  
a/  $SA \perp BC$       b/  $SB \perp AC$       c/  $SC \perp AB$
- VD 12.** Gọi S là diện tích của tam giác ABC. Chứng minh rằng  $S = \frac{1}{2} \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$

### Bài Tập Tự Luyện

- Câu 1.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $B'D'$  và  $A'A$ .  
A.  $90^\circ$ .      B.  $45^\circ$ .      C.  $60^\circ$ .      D.  $30^\circ$
- Câu 2.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Góc giữa hai đường thẳng  $BA'$  và  $CD$  bằng:  
A.  $45^\circ$ .      B.  $60^\circ$ .      C.  $30^\circ$ .      D.  $90^\circ$ .
- Câu 3.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $A'D$  bằng  
A.  $45^\circ$ .      B.  $30^\circ$ .      C.  $60^\circ$ .      D.  $90^\circ$ .
- Câu 4.** Tứ diện đều ABCD số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng  
A.  $45^\circ$ .      B.  $30^\circ$ .      C.  $90^\circ$ .      D.  $60^\circ$ .
- Câu 5.** Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a, M là trung điểm của cạnh BC. Gọi  $\alpha$  là góc giữa hai đường thẳng AB và DM, khi đó  $\cos \alpha$  bằng  
A.  $\frac{\sqrt{3}}{6}$       B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       D.  $\frac{1}{2}$
- Câu 6.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AD, C'D'. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng MN và CP.  
A.  $\frac{3}{\sqrt{10}}$ .      B.  $\frac{\sqrt{10}}{5}$ .      C.  $\frac{1}{\sqrt{10}}$ .      D.  $\frac{\sqrt{15}}{5}$ .





- Câu 7.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Góc giữa hai đường thẳng  $A'C'$  và  $BD$  bằng.  
A.  $60^\circ$ . B.  $30^\circ$ . C.  $45^\circ$ . D.  $90^\circ$ .
- Câu 8.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có tất cả các cạnh đều bằng  $a$ . Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm của  $SC$  và  $BC$ . Số đo của góc  $(IJ, CD)$  bằng  
A.  $30^\circ$ . B.  $45^\circ$ . C.  $60^\circ$ . D.  $90^\circ$ .
- Câu 9.** Cho hình lập phương  $ABCDEFGH$ , góc giữa hai đường thẳng  $EG$  và  $BC$  là:  
A.  $0^\circ$ . B.  $45^\circ$ . C.  $90^\circ$ . D.  $30^\circ$ .
- Câu 10.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = CD = a$ ,  $IJ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  ( $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $AD$ ). Số đo góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  là  
A.  $30^\circ$ . B.  $45^\circ$ . C.  $60^\circ$ . D.  $90^\circ$ .
- Câu 11.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $SA = a$ ,  $SB = 2a$ ,  $SC = 3a$ ,  $ASB = BSC = 60^\circ$ ,  $CSA = 90^\circ$ . Gọi  $\alpha$  là góc giữa hai đường thẳng  $SA$  và  $BC$ . Tính  $\cos \alpha$ .  
A.  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{7}$ . B.  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{7}$ . C.  $\cos \alpha = 0$ . D.  $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ .
- Câu 12.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA = SB = SC = AB = AC = 1$ ,  $BC = \sqrt{2}$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $AB$ ,  $SC$ .  
A.  $45^\circ$ . B.  $120^\circ$ . C.  $30^\circ$ . D.  $60^\circ$ .

=HẾT=

