



# Khử nhiễu âm thanh bằng SVD

Thanh Danh, Nghi Gia, Minh Hien, Cao Lam, Huu Luong

June 25, 2024

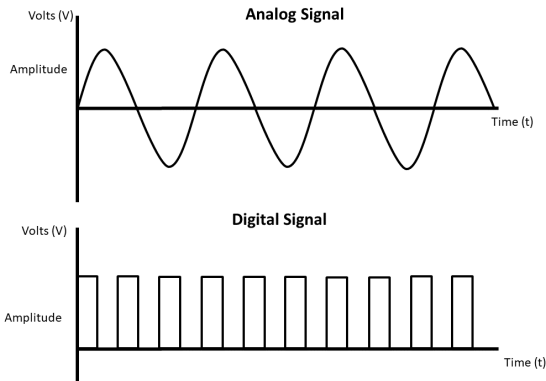
# Contents

- 1 Digital audio signal
- 2 Singular Spectrum Analysis
- 3 Implementation

# Khử nhiễu âm thanh bằng SVD

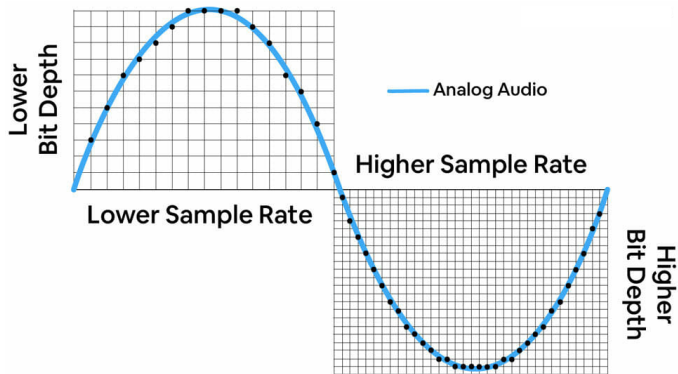
Digital audio signal

# Digital audio signal



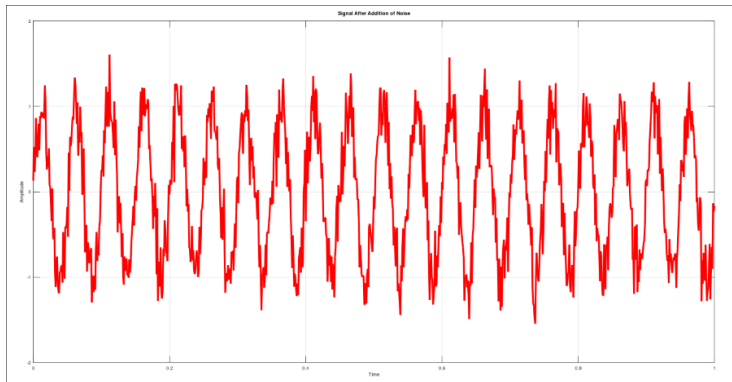
**Digital audio signal** là một loại tín hiệu âm thanh được mã hóa thành định dạng số, có thể được lưu trữ và xử lý bởi máy tính và các thiết bị số khác.

## Digital audio signal (cont)



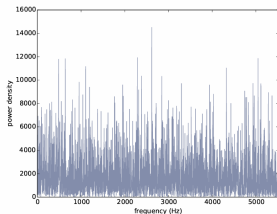
Hai yếu tố chính ảnh hưởng đến chất lượng của digital audio signal là tần số lấy mẫu âm thanh (sample rate) và độ sâu bit (bit depth).

# Noise

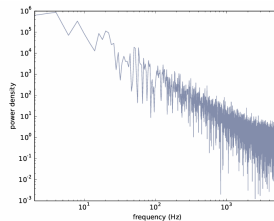


**Noise** là một tín hiệu chứa các thành phần tại nhiều tần số, do đó thiếu cấu trúc tuần hoàn như các tín hiệu chu kỳ chúng ta đã thấy trước đó.

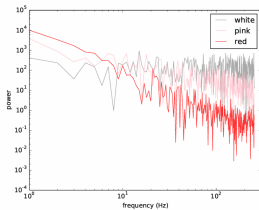
# Different types of noise



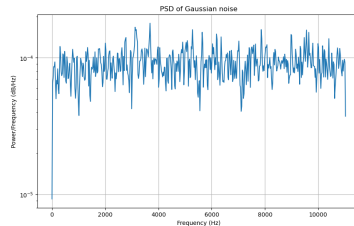
PSD of Uncorrelated noise



PSD of Brown noise



PSD of Pink, white, red noise



PSD of Gaussian noise

# Khử nhiễu âm thanh bằng SVD

## Singular Spectrum Analysis



# Singular Value Decomposition (SVD)

Phương pháp phân tích suy biến là phương pháp phân tích ma trận  $A$  kích thước  $m \times n$  thành dạng tích ba ma trận:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$$

- Trong đó  $\mathbf{U}$  là ma trận trực giao có kích thước  $m \times m$
- Trong đó  $\mathbf{\Sigma}$  là ma trận đường chéo có kích thước  $m \times n$
- Trong đó  $\mathbf{V}$  là ma trận trực giao có kích thước  $n \times n$

# Truncated SVD

Đối với ma trận  $\mathbf{\Sigma}$  các giá trị trên đường chéo chính là không âm và giảm dần

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 0$$

Thông thường, chỉ một số giá trị riêng  $\lambda_i$  có giá trị lớn, còn lại thường nhỏ và gần 0. Khi đó, với phương pháp **truncated SVD**, ta có thể xấp xỉ ma trận  $\mathbf{A}$  bằng tổng của  $k < r$  ma trận có hạng 1.

$$\mathbf{A} \approx \mathbf{A}_k = \mathbf{U}_k \mathbf{\Sigma}_k \mathbf{V}_k^T$$

Hoặc ta có thể biểu diễn dưới dạng tổng của tích vô hướng các vector cột và dòng của  $\mathbf{U}$  và  $\mathbf{V}^T$

$$\mathbf{A} \approx \mathbf{A}_k = \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i v_i^T \quad (1)$$

# Singular Spectrum Analysis (SSA)

## Overview

Phương pháp phân tích dữ liệu thời gian là một phương pháp ước lượng phổ không tham số. Nó kết hợp các yếu tố của phân tích chuỗi thời gian cổ điển, thống kê đa biến, hình học đa biến, hệ thống động lực học và xử lý tín hiệu. Gồm 4 bước chính:

- 1 Embedding
- 2 Applying SVD
- 3 Rank reduction
- 4 Diagonal averaging

# Singular Spectrum Analysis (SSA)

## Embedding

Với  $N$  là số lượng mẫu của dữ liệu vào một không gian vectơ  $M$  chiều. Việc áp dụng SSA cho chuỗi thời gian  $s(t)$  được thực hiện như sau:

Giả sử  $L$  là độ dài của các vectơ trễ với  $1 < L < N$  và số lượng các vectơ trễ sẽ phụ thuộc vào chiều nhúng, với  $K = NL + 1$ . Mỗi vectơ trễ sẽ có dạng:

$$\mathbf{l}_i = (s_i, s_{i+1}, \dots, s_{i+L-1})^T \quad 1 \leq i \leq K$$

Dùng phép chuyển vị xây dựng một ma trận  $M$  từ các vector trễ:  $\mathbf{M} = (\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \dots, \mathbf{l}_K)$  khi đó  $M$  được gọi là ma trận quỹ đạo có dạng:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_K \\ s_2 & s_3 & \cdots & s_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_L & s_{L+1} & \cdots & s_N \end{pmatrix}$$

# Singular Spectrum Analysis (SSA)

## *Applying SVD*

Khi phân rã ma trận quỹ đạo bằng phương pháp SVD sẽ có dạng như sau:

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^r \sqrt{\lambda_i} \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i \quad (2)$$

Trong đó:

- $\lambda_i$  là trị riêng thứ  $i$  của  $\mathbf{M}\mathbf{M}^H$
- $r$  là hạng của ma trận quỹ đạo  $\mathbf{M}$ .
- $\mathbf{u}_i$  và  $\mathbf{v}_i$  là các vector riêng thứ  $i$  của  $\mathbf{M}\mathbf{M}^H$  và  $\mathbf{M}^H\mathbf{M}$
- $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$  được gọi là giá trị suy biến của ma trận  $\mathbf{M}$ .

Biểu thức trên có thể chuyển thành dạng ma trận:

$$\mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H$$

# Singular Spectrum Analysis (SSA)

## *Rank reduction*

Khi áp dụng thuật toán SSA, thì việc giảm hạng của ma trận quỹ đạo rất quan trọng. Để  $k$  là hạng mong muốn cho ma trận quỹ đạo, có thể thực hiện bằng cách:

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{U}_k \Sigma_k \mathbf{V}_k^T$$

Trong đó:

- $\mathbf{M}_k$  là ma trận quỹ đạo đã được khôi phục và giảm hạng.
- Hạng của ma trận sau khi khôi phục sẽ bằng  $k$  nhân với chuẩn Frobenius nhỏ nhất.

# Singular Spectrum Analysis (SSA)

## *Diagonal averaging*

Việc thu hồi chuỗi thời gian có thể được thực hiện bằng cách chỉ chọn các giá trị ở các đường chéo phụ của ma trận thu hồi  $\mathbf{M}_k$ . Nói cách khác, nếu  $\mathbf{s}_k$  là chuỗi thời gian mong muốn sau khi giảm hạng của ma trận quỹ đạo, thì phần tử thứ  $n$  của chuỗi thời gian này sẽ được thu hồi bởi tất cả các phần tử  $\mathbf{M}_k(i, j)$  dọc theo đường chéo phụ, với  $(i, j)$  sao cho  $i + j - 1 = n$ .

# Khử nhiễu âm thanh bằng SVD

## Implementation



Thanks for watching!