實驗 1 基本度量與誤差傳遞

圖 1: 基本度量實驗使用的器材和各種待測物。後排左至右分別為槓桿式天平、等臂式天平、輻射偵測器暨輻射偵測頭；前排左至右：游標尺、螺旋測微器、球徑計(曲度量測器)和砝碼組。以及三個不同內徑的塑膠圓柱管、鐵球、長方體木塊、平面玻璃片和曲面玻璃。另有準確度 0.02 g 的電子天平和準確度高達 10-5 g 的高精密分析電子天平(未呈列於照片中)。

學門領域：普通物理實驗
關鍵字(Keywords)：測量值、估計值、誤差傳遞

(一) 目的：

認識實驗常用的幾種基本量測儀器，瞭解其設計原理，並熟悉正確的使用方法。

1. 建立實驗測量的基本概念和實驗數據的正確取法。
2. 瞭解實驗數據的誤差來源，實驗數據和誤差的正確處理流程。
3. 建構數據分析的基本常識和處理技巧。

二、 數據分析原理及方法：

物理是一門以實驗為基礎的科學，因此在物理學科的學習過程中，物理實驗課程是一門很重要的必修課程。而物理實驗結果的正確與否，不僅取決於實驗數據的量度是否正確，正確的數據處理和分析過程也非常重要。開始基礎物理實驗課程的第一步是常用的幾種基本測量儀器的認識和操作。本實驗設計使用一些基本的測量儀器，進行基本物理量的簡單測量實驗，包括長度與質量的測量。並藉由以不同精確度的長度和質量測量儀器，測量各種待測物的長度和質量。使學習者得以熟用各種基本度量儀器、不同度量儀器間的精準度差異，以及實驗誤差的來源。同時學習認識實驗數據的“可信度”與精密度的概念有一些體會[※1]。首先介紹數據處理：

(一) 表示數據的方式

要完整且精確地表示實驗量得的物理量， 數量、精密度和單位三者缺一不可。為了清楚地表示一個數值，最好用簡潔的方式記錄，如寫成$(abc \pm d) \times 10^{n}$的科學符號形式※2，並附上適當的單位。

(二) 有效數字和捨入

在記錄實驗數據和實驗結果時，要使用適當位數的有效數字，以正確表達實驗的"準確度" ※3。例如，測量(長度)時直接從儀器(直尺)刻度上讀出來的數量必定在某一位數中止。我們在記錄數據時，除了從儀器上直接讀下精確的數字(如"25.8"cm)外，通常再加一位估計數字(例如"5")，最後的這一位估計數字當然是不準確的，這個包含估計數字的數據("25 . 85"cm)，就稱作"有效數字"。

數據經過運算後，需要將運算結果所得多餘的位數做"捨"或"入"時，可以按"四捨六入"原則，即：

(1) 要捨去部份的第一位數是"6"或是大於"6"的數，則捨去後將前面一位數加 1，例如： "1.478"經捨入得"1.48"。

(2) 要捨去部份的第一位數是"4"或是小於"4"的數，則捨去後的前面位數不變，例如："1.472"經捨入得"1.47"。

(3) 如果捨去部份只有一位，其值為"5"則由前面一位數的奇、偶決定："遇雙便捨"，"逢單則入"， 使捨入以後的數最後一位是偶數。這樣在運算中會比較好處理；同時就機率而言， 捨和入的機會一樣多。如果捨去部份不僅有一位數，而其第一位數為"5"， 則捨去後前面一位數加"1"(即四捨五入)。

註:

※1. 精密度(precision)是指測量的精密程度，亦即測量結果可以重複的程度，它跟"誤差"的大小有關，詳細說明見本節第(五)項內容。

※2. a、b 及 c 均為代表 0、1、2 …、9 的數字，d 表示誤差， n 為正或負的整數。

※3. 準確度(accuracy)是指"實驗值"與待測物理量的"真正值"的差異值，詳細說明請看本節第(五)項內容。

(三) 實驗誤差：

用儀器量度物理量時，無論儀器的製作多麼精良，也無論量度實驗做得多麼小心， 均不能得到"絕對準確"的數據。測量值的"可信度"，通常只能推測出一個範圍，實驗進行當中，已達實驗需求的條件之後，再加多少細微變量，儀器開始會有明顯反應? 例如：在(自認為)已達平衡的天平上再加一個小小的砝碼；已達共振的線路再改變一點點頻率；……等等，由這類"變量"可以知道在數據的取捨之間必定有誤差產生，因此我們必須瞭解測量數據的精密度，以及探究將誤差減到最低的方法。一般來說，誤差可以粗分為兩大類(參考資料 4)：

A. 系統誤差(systematic error) ：

系統誤差又分為(i)設備系統誤差，(ii)環境系統誤差，及(iii)人為誤差。設備系統誤差是因儀器的製作不夠精密而來，所以在操作實驗儀器之前，要先檢查設備是否運作正常? 通常需要做到以下三點：

1.適當選擇測量儀器(例如：測紙張面積用直尺，測鋼絲直徑用測微器)。

2.能有一套標準設備或標準數據校正手邊的儀器。

3.若發現設備有系統誤差時，應該求出一個校正公式，校正所有由該設備所測得的數據。環境系統誤差的來源是外在環境因素，如： 溫度改變、氣壓、濕度不穩定、電磁場、…… 等等的干擾，通常可以用一些特別的設計消除或降低環境的影響，或者設法修正其誤差。人為誤差有些是實驗者的個性，習慣或偏見所引起，但也有些是疏忽造成的。前者可以由參與實驗的不同實驗者分別量取數據加以平均，以求人為誤差減至最小；後者發生時，只有捨去數據重做，但在捨去數據時必須有充分的理由或證據。系統誤差會影響實驗結果的準確度。一般情況，如果測量某一物理量少數幾次所得到的平均值比理想值(或曰正確值)為高，則多次測量的結果，平均值也會比理想值為高。

B. 統計誤差(statistical error)：

這種誤差也稱為隨機誤差(random error) ，其原因不是觀測者所能控制的，而是自然界存在的一種必然現象，是一種機率問題。設計良好的實驗，其統計誤差出現的範圍較小，但還是不能完全避免，只有增加實驗次數，對同一物理量取較多次的實驗數據，並且用統計理論來處理，以期得到較接近“真確值“的結果[※4]。

註：

※4. 被觀測的自然現象之“真確值”是不可能得到的，因為“測量”是有極限的；例如增加儀器的精密度，就一定會增加數據的“擾動”。其實數量、物理公式或經驗方程式並不“等於”它所描述的物理現象本身，而只是人為地“形容”現象。所以在本文介紹的統計分析中，我們強調數據的“有效性”。

(四) 統計分析：

統計分析理論一直被廣泛地用來處理實驗數據，藉這種分析，我們可以瞭解實驗的結果到底含有何種程度的不確定性。這裡先介紹統計分析中常用的幾個術語和它們的計算法，再簡要介紹誤差在加、減、乘、除運算中的傳遞。最後，我們舉一個例題，將統計分析做簡單的應用。

A. 算術平均值(mean)或簡稱“平均值”： 如果對同一個物理量作 n 次測量，每次所得的數據分別為：x_1、x_2⋯、x_n，則實驗的結果通常以算術平均值表示，即：

$$\bar{x} \equiv \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1}$$

理論上，無限多的數據可以得到最好的平均值，但實用上，有限個數據已可得到很好的結果。

B. 偏差（deviation)：某一個特定數據與整組數據的算術平均值之差，稱作“偏差”。偏差數值有正有負，整組數據的偏差值總和為零。令符號 d 代表偏差:

$$d_1 = x_1 - \bar{x}，d_2 = x_2 - \bar{x}， \ldots ，d_n = x_n - \bar{x}$$

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_n = \sum_i d_i = 0 \tag{2}$$

C. 平均偏差（average deviation)：

平均偏差 D 的定義為：

$$D \equiv \frac{|d_1|+|d_2|+\cdots+|d_n|}{n} = \frac{1}{n}\sum_i |d_i| \tag{3}$$

平均偏差的大小可以顯示實驗所用儀器的精密度但一般實驗結果的不準度，很少以平均偏差來表示。

D. 標準偏差(或稱標準差，standard deviation) ：

標準差的定義為：

$$\sigma \equiv \sqrt{\frac{d_1^2+d_2^2+\cdots+d_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i^2} \tag{4}$$

當數據為有限個時，將標準差作下面的修正，則結果較正確，即：

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} d_i^2} \tag{5}$$

E. 簡單的統計理論(參考資料 3)：

各位在高中一定學過簡單的機率論，這些觀念對做實驗的人非常重要。一般來講，最具代表性的機率分佈有三種：二項式分佈(binomial distribution)、朴松分佈(Poisson’s distribution)及常態分佈(normal distribution)。

1. 二項式分佈：

這是最簡單也是日常生活中最容易遇到的一種。假設有一個人擲骰子，得到“6”點向上的機率一定是 1/6。如果他一次共擲出十個骰子，其中有三個骰子“6”點向上，其餘七個都不是“6”點向上的機率就是

$$p = c(10,3)\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7 = \frac{10!}{3!(10-3)!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^{10-3}$$

這是很容易瞭解。一次擲出十個骰子，有三個“6”朝上；和一個骰子重覆擲十次，有三次“6”點朝上，機率是相同的。

現在假設一事件發生的形式只有 X 與 Y 兩種，而 X 的發生機率為 p，Y 的發生機率為 q (q=1-p)，則在 N 次的實驗中，X 形式發生 n 次的機率為：

$$P_B(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!}p^n q^{N-n} \tag{6}$$

這種函數形式稱為二項式分佈。

2. 朴松分佈：

上述的情況，若 X 形式發生的機率趨近於零(p→0) ，且將實驗次數增為極大(N→∞) ，則 X 形式發生 n 次的機率就成朴松分佈(參考圖 2)。在原子核物理實驗中，放射性樣品是一堆具有放射性的原子核，各個原子核在每秒內因輻射而蛻變或衰變的機率 p 可能在 10^{-10} 或者更低，但是通常所用的樣品可能包含 $N=10^{15}$ 個或更多個原子核，因此每秒鐘內的輻射量大約是 10^5 左右，這時我們定義期望值(expectation value)或平均值為：

$$m = N_p$$

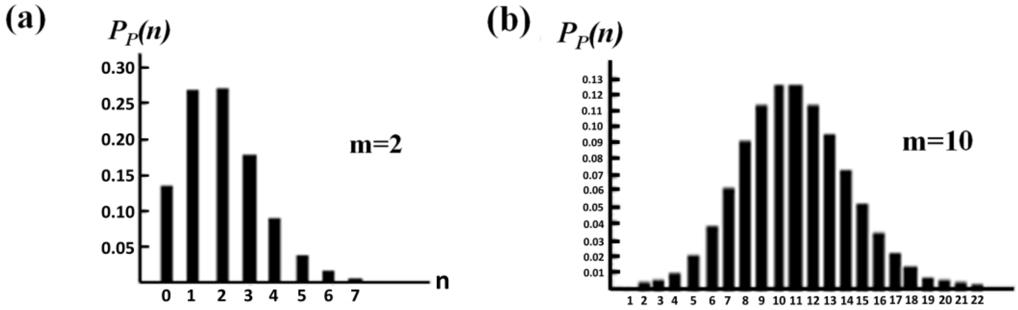


圖 2 朴松分布曲線圖: (a)m=2; (b)m=10。

不過，實際的測量並不一定量得到有 m 個原子核蛻變。這和我們知道拋擲一個銅板，落地時正面向上的機率是 1/2 ，但同時丟出十個銅板，並不一定剛好有五個是正面朝上是同樣的道理。(6)式經過數學的導證(參考資料 3) ，在 N→∞時，可以得到朴松分佈：

$$P_p(n) = \frac{m^n e^{-m}}{n!} \tag{7}$$

式中 m 為 n 的平均值，即標準偏差為：

$$\sigma = \sqrt{m} \tag{8}$$

當 m 值越大，圖 2 的形狀越接近對稱，同時由(9)式可知：σ/m 越小。通常在原子物理及原子核物理實驗中，為了獲得較佳的統計誤差，計數輻射粒子時，往往延長測量時問，使輻射粒子到達偵測器的數目為數千甚至上萬，如此可將百分誤差值降低到 5 % ，甚至 1 ％以下。但若遇輻射線強度很弱的情況，這樣做將費時甚久。因此作實驗時，到底 m 應取多大才合適，必需由實驗者作適當的判斷。

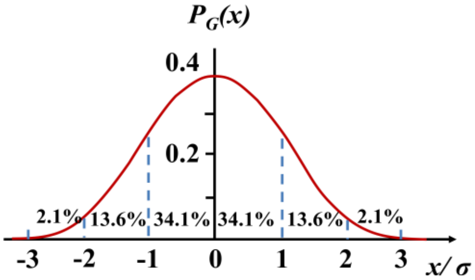
3. 常態分佈：

通常又稱為高斯分佈(Gaussian distribution)。對自然界中很多事物的某一物理量做重覆多次測量時，所得數據大都會呈一個鐘形的分佈圖形，這種情況相當於朴松分佈中 m 非常大的情形。測量的次數愈多，這個分佈曲線就愈平滑、愈明顯。這種常態分佈曲線(參看圖 3、圖 4) ，可以用函數形式表示(參考資料 4)：

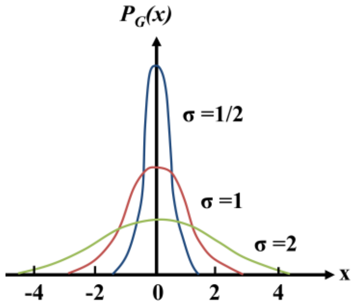
$$P_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma}e^{-(x-x_0)^2/2\sigma^2} \tag{9}$$

式中，x_0 為鐘形分佈之鐘頂位置的 x 座標值，σ 為標準差，σ 與 x 的單位相同。一組呈常態分佈形式的數據，其算術平均值是在常態曲線的對稱中心。

圖 3(a)表示當一個數值距平均值有多少個標準差時，分佈在平均值與這個數值之問的數據佔全部數據的比例。例如：數值在$\bar{x}\pm\sigma$($\bar{x}+\sigma$與$\bar{x}-\sigma$)之間的數據佔全部數據的 68.2%；數值在$\bar{x}\pm 2\sigma$之間的數據佔全部數據的 95.5 %；數值在$\bar{x}\pm 3\sigma$之間的數據所佔比例高達 99.7 % ，也就是說只有 0.3 ％的數據其數值是在$\bar{x}\pm 3\sigma$之外的。同時由圖 3(b)也可以看出來,標準差愈小的一組數據,數據值愈集中在平均值附近。



(a)



(b)

圖 3(a)為常態分布函數:縱軸表示一個 x 值發生的或然率，橫軸表示以σ為單位的 x 值，圖中假設 $x_0 = 0$。圖 3(b)為三個不同標準差的常態分布曲線，曲線下的面積都是 1 (100%)。

F. 平均標準差(standard deviation of the mean)：

由一組 n 個量度而得之數據，其平均值的準確度要比單一量度的值好。若記錄第二組 n 個量度的數據。一般而言，第二組的平均值與第一組的平均值不會相等，但可以預期其差值必小於任一組的標準差。理論上我們可以做 N 組 n 個量度，畫出這 N 個平均值分佈圖，並計算所有這些平均值的總平均值之標準差，稱為平均標準差$\sigma_{\bar{x}}$。這個平均標準差一定比由單一組得到的標準差小。這種工作冗繁無比，但我們無需這樣做，利用統計理論，可以從一組點個量度的標準差σ算$\sigma_{\bar{x}}$，其計算式為：

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_i d_i^2} \tag{10}$$

我們將此$\sigma_{\bar{x}}$視做測得的平均值之精密度(或誤差)最佳估計。通常以$\bar{x} \pm \sigma$表示某一物理量 x 的測量值。

G. 誤差的傳遞：

物理量分為基本量與導出量，導出量是由幾個基本量運算而得的，例如：密度等於質量除以體積。物理實驗又往往是測量某一個量與其他量之間的關係，因此一個實驗的結果往往是由幾個直接測得的量運算而得的。這種物理量的平均標準差就必須由直接測量之各量的然計算而得。在這裡我們非常簡單地說明，測量所得的數據之誤差在加、減、乘、除四則運算中，對計算結果之影響。各位可以在學到更多的數學工具以後，再回頭來研究其所以然。當 x、y 為獨立變數時：

1. 加減的誤差傳遞：

$$\overline{x \pm y} = \bar{x} \pm \bar{y} \tag{11}$$

$$\sigma^2_{\overline{x \pm y}} = \sigma^2_{\bar{x}} + \sigma^2_{\bar{y}} \tag{12}$$

n 個量相加減，平均標準差計算的一般式為：

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2 \tag{13}$$

2. 乘除的誤差傳遞：

$$\overline{xy} = \bar{x}\bar{y};\ \overline{x/y} = \bar{x}/\bar{y} \tag{14}$$

$$\left(\frac{\sigma_{\overline{xy}}}{\overline{xy}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2 \tag{15}$$

$$\left(\frac{\sigma_{\overline{x/y}}}{\overline{x/y}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2 \tag{16}$$

一般式為：

$$\left(\frac{\sigma}{y}\right)^2=\left(\frac{\sigma_1}{y_1}\right)^2+\left(\frac{\sigma_2}{y_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\sigma_n}{y_n}\right)^2 \tag{17}$$

其中 y 為導出量的平均值;y_1、y_2、⋯、y_n 為乘除計算中每一個物理量之平均值。σ_i 為各物理量 y_i 的平均標準差。

3.有冪次的乘除：

$$\overline{x^l y^m}=\overline{x^l}\,\overline{y^m}=\bar{x}^l\bar{y}^m$$

$$\left(\frac{\sigma_{\overline{x^l y^m}}}{\overline{x^l y^m}}\right)^2=l^2\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2+m^2\left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2 \tag{18}$$

由以上的運算規則求出導出量的平均標準差之後，導出量的正規表示法為“平均值±平均標準差”但常因使用了(17)式的運算，往往有人為了方便，以“$y\pm(\sigma/y)\times100\%$”來表示結果，此時稱為百分誤差。例如：某張桌子的面積為(1003± 0.2 %)cm^2。

H. 例題：

下面是對一個正立方體的測量、誤差分析及計算的實例。實驗數據如表 1 所示，實驗平均值及它的各種偏差的計算如下：

表一

量度次數	長度(mm)	偏差$d=L-\bar{L}$	d^2
1.	22.1	+0.17	0.029
2.	22.0	+0.07	0.005
3.	21.9	-0.03	0.001
4.	21.8	-0.13	0.017
5.	21.8	-0.13	0.017
6.	21.7	-0.23	0.053
7.	21.9	-0.03	0.001
8.	22.0	+0.07	0.005
9.	21.9	-0.03	0.001
10.	22.3	+0.37	0.137
11.	21.9	-0.03	0.001
12.	22.1	+0.07	0.029
13.	21.9	-0.03	0.001
14.	21.8	-0.13	0.017
15.	22.0	+0.07	0.005
16.	21.8	-0.13	0.017
	$\sum L=350.9$	$\sum\lvert d\rvert=1.82$	$\sum d^2=0.336$

1. 算數平均值：

平均長度 $\bar{L}=\frac{\sum L_i}{16}=21.93\ \text{mm}$

2. 平均偏差：

$$D = \frac{\sum|d_i|}{16} = 0.11\ \ \text{mm}$$

3. 標準偏差：

$$\sigma = \left[\frac{\sum d_i^2}{15}\right]^{1/2} = 0.16\ \ \text{mm}$$

4. 平均標準差：

$$\sigma_L = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.04\ \ \text{mm}$$

分析結果，長度為：

$$L = (21.93 \pm 0.04)\ \ \text{mm} = 21.93\ \ \text{mm} \pm 0.18\%$$

立方體體積之平均值為：

$$\bar{V} = \bar{L}^3 = (21.93)^3 = 10546.68\ \ \text{mm}^3$$

長度平均值的小數點後的第二位數為有誤差的數，準確值只有三位，因此在計算體積L^3後，其第四位數(4)即有誤差，我們可以只取到這位數值，後面數值按四捨六入方法處理。則$\bar{V} = 10550\ \ \text{mm}^3$或$10547\ \ \text{mm}^3$，再多取數字也無意義。按照(18)式：

$$\left(\frac{\sigma_{\bar{V}}}{\bar{V}}\right)^2 = 3^2\left(\frac{\sigma_{\bar{L}}}{\bar{L}}\right)^2$$

若取體積為$\bar{V} = 10547\ \ \text{mm}^3$，則

$$\sigma_{\bar{V}} = 58\ \ \text{mm}^3$$

$$\therefore V = (10547 \pm 58)\ \ \text{mm}^3$$

或

$$V = 10547\text{mm}^3 \pm 0.55\%$$

本例數據之圖析（histogram ）如圖 4 所示。

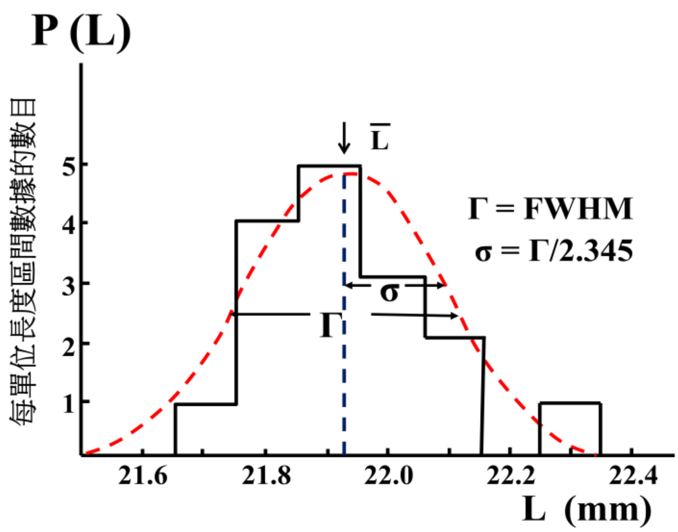


圖 4 統計分析圖:曲線表示理論的常態分布。

(五) 準確度與精密度：

在實驗中，我們選用測量儀器時，常會先想到它們的“準確度(accuracy) ”及“精密度(precision)”如何?例如測量細鋼絲直徑常會選用“游標尺”或“測微器”(參看附錄A)，測量鋼絲長度則選用“米尺”(長度為 1 m 長的尺，最小刻度為 1 mm)即可。這三

種測量儀器測量結果的"準確度"和"精密度"並不相同。我們在普物實驗中，常視需要而作選擇。因此，我們有必要對兩者作較明確的認知。所謂"準確度"是指"實驗值"與待測物理量的"真正值"之差。"精密度"則是指實驗結果"可重複的程度"。在相同的條件下重複作多次測量，實驗數據是不可能完全"重複"(即，相同)的，因此，精密度也可以說是：重複多次測量，各個結果的差異程度，差異越小，精密度越高。在本節第(四)項中，曾提到待測物理量的實驗結果常以"平均值$(\bar{x})\pm$平均標準差$(\sigma_{\bar{x}})$"表示。換言之，我們用"平均值"來表示待測物理量的"實驗值"。"平均標準差"則用來表示實驗值變動的最可能範圍，亦即它跟實驗結果的"可重複程度"有關。也就是說，實驗結果的"平均值$(\bar{x})$" 跟待測物理量"真正值(x_t)" 的差愈小(即愈接近)，表示儀器的準確度愈高，反之，則稱準確度較低；"平均標準差$(\sigma_{\bar{x}})$"則跟精密度有關，平均標準差較小，表示實驗結果的"可重複程度"較高，也就是精密度較高，反之，則表示精密度較低。為了讓讀者更清楚瞭解準確度和精密度的涵義，我們舉兩個常見的例子說明如下：

【例 1】利用兩儀器(如兩支長尺)測量某一物體的待測量(如長度，L_t)。兩儀器測得的實驗結果分別為"$\overline{L_1}\pm\sigma_{\overline{L_1}}$"及"$\overline{L_2}\pm\sigma_{\overline{L_2}}$"，如圖 5 所示。圖中$d_1$和$d_2$分別為兩實驗結果$\overline{L_1}$和$\overline{L_2}$跟待測物理量真正值$L_t$的差。由圖 5 可知：$d_1 > d_2$，$\sigma_{\overline{L_1}} < \sigma_{\overline{L_2}}$。此結果表示：儀器(長尺)1 的準確度較差，但精密度較高。此儀器製作較精密(實驗結果的可重複性較高)，但在組合、校正時沒做好，或人為偏差、環境干擾(如溼度、溫度、磁場)而造成測量結果往某一方向有較大的偏移。這些"系統誤差"往往可以經修正或清除而得到改善。

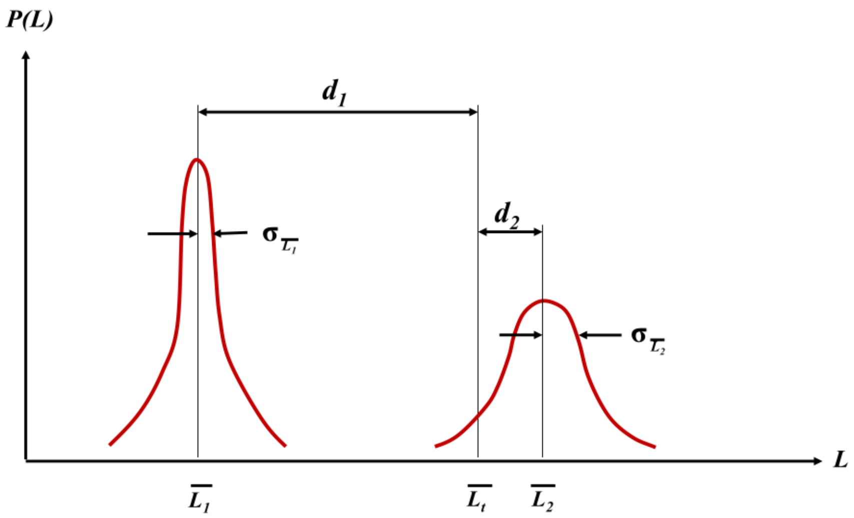


圖 5 例 1 的實驗結果。實驗值($\overline{L_1}$及$\overline{L_2}$)和真正值(L_t)的差$d_1 > d_2$，但平均標準差$\sigma_{\overline{L_1}} < \sigma_{\overline{L_2}}$。

【例 2】由同一神射手試射兩把手槍 A 及 B ，其彈著點分佈如圖 6(a)及(b)所示，由圖 6 可知：手槍 A 的彈著點分佈之平均位置較接近靶中心，它的準確度較高。手槍 B 的準確度較差，但精密度卻較高，因其彈著點分佈集中於較小範圍內，亦即實驗結果(彈著點)的可重複性較高。

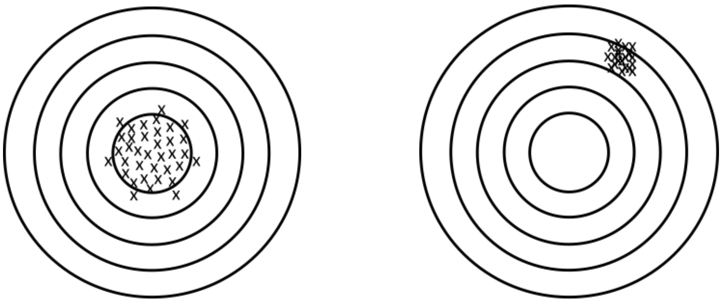


圖 6 手槍測試的彈著 (a) 布圖: (a)手槍 A 的準確度 (b) 精密度較差；
(b)手槍 B 的準確度較差，精密度較高。

從上述兩例，我們可以知道：對物體的某一待測量，重複做多次測量所得結果並不一定會相同。在統計學上，常以“平均值($\bar{x}$)” 代表實驗結果分佈的最大可能值(most probable value)，也用它來表示待測量的實驗值。此值與“真正值”的差愈小，則表示測量用的儀器或方法的準確度越高。“實驗值”的分佈範圍與“平均標準差($\sigma_{\bar{x}}$)”有關。因此，我們用它來表示儀器的精密度，也就是實驗結果的可重複程度。在此我們要強調說明的是：利用“$\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$”來表示實驗結果，其意義僅表示待測量的“實驗值$x_{expt}$”是在“$\bar{x} - \sigma_{\bar{x}}$”和“$\bar{x} + \sigma_{\bar{x}}$”的範圍內，即

$$(\bar{x} - \sigma_{\bar{x}}) \leq x_{expt} \leq (\bar{x} + \sigma_{\bar{x}})$$

換言之，上式僅表示實驗的平均結果和精密度而已。至於真正值(x_t)是多少，我們大都無從得知，因此，準確度在這裡看不出來。初學實驗的同學常常喜歡以“公認值(x_s)” 為標準來作比較，亦即常以“$(|x_s - \bar{x}|/x_s) \times 100\%$”來表示實驗結果做得好不好，其意義往往並不大。在研究工作中，為了驗證實驗結果對不對，通常是將我們的“$\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$”跟別人的“$\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$”(往往是公認比較正確者)做比較。請注意：不是比$\bar{x}$值的大小，也不是比$\sigma_{\bar{x}}$值的大小，更不是比“$(|x_s - \bar{x}|/x_s) \times 100\%$”或$(\sigma_{\bar{x}}/\bar{x}) \times 100\%$的大小，而是著重在兩者的“實驗值範圍($\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$)”是否有互相重疊部份，或公認值是否落在範圍內？如果是，則可以宣稱我們的實驗方法即結果有可能是對的。至於誰的結果比較正確(較接近真正值)，則有待更多的人使用相同的方法，相同或更精密的儀器或不同的方法來重測此待測量，當然，理論的推導與精進也很重要。到相當程度，大家都公認某人的結果最正確，就會被採為“公認值”。一直到更新、更精準的結果出現，才會再改。請大家回頭再去看測量“光速”實驗值的演變，就可明瞭了[※5]。這個被採用為“公認值”的實驗結果有可能是你做的，也可能是別人做的。因此，各位同學將來從事研究工作，把別人的結果或公認值當參考無妨，但老是把別人的結果當作“標準”、當作“絕對標準”而來檢視自己的結果的百分誤差是多少的方式是值得商榷的。

註：

※5. 從伽利略用遮光方式的失敗，到黎馬利用天文方法觀測木星「蝕」週期，布拉多黎的天文觀測法；菲索利用轉動的齒輪觀測法、邁克森利用旋轉稜鏡法。之後，終於知道了光速約為 3×10^8 m 。(這些歷程請參閱參考資料 9) ，現今，“光速”則採用人為定義的 299,792,485 m / s (此值是由“光速在真空中 1 / 299,792,485 sec 所走的距離定義為 l m 而來”)。

三、 儀器：

多種待測物，直尺，游標尺，測微器，粗天平，精密天平，燒杯

四、 步驟：

(一) 測量各待測物的密度：

試以實驗室提供之各測量器材量測計算出待測物之密度，實驗值需以多次統計方式得出(平均值、平均偏差值、標準差，及平均標準差，並注意誤差傳遞的結果)，需注意各儀器零點校正。

五、 問題：

1. 量金屬圓柱體的高度和直徑時，應該在同一位置量多次，還是不同位置與不同方向都要量?為什麼?
2. 為什麼用直尺量長度多次時，每次要取自直尺不同的位置(參閱參考資料 4)?
3. 一個長方形物體的長、寬各測十次，計算面積時應以長度平均值與寬度之平均值相乘，或是長、寬一對一相乘後再平均?試申述理由。
4. 請一一列舉此實驗所使用的儀器之系統誤差。
5. 若使用的游標尺如圖 7 所示，即主尺上 49 格刻劃(每格的長度為 1mm)等於游標上的 50 格,則游標上的刻劃一格相當於多長(參考附錄 A)?刻度的讀法是否和附錄 A 之一中所述的相同?

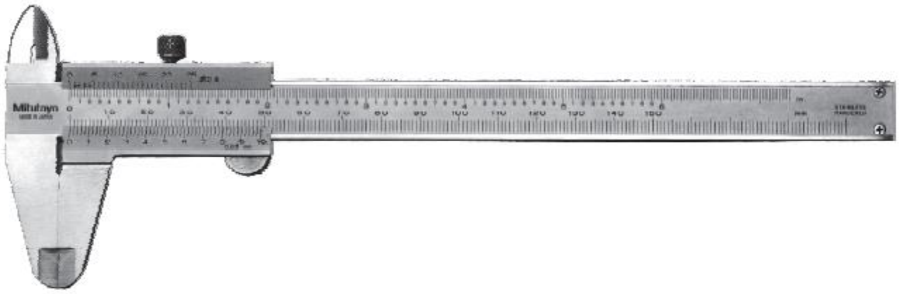


圖 7

6. x^2的標準差利用(15)式和(18)式計算所得的結果有何不同?那一種是正確的?為什麼?

六、 參考資料：

1. 高雄師範學院物理系：物理實驗手冊，第五章，42 頁。

2. H. D. Young ： Statistical Treatment of Experimental Data (McGraw-Hill Book Co. Inc.，N.Y.，1962).

3. P. R. Bevington ： Data Reduction and Error Allaly - sis for the Physical Science (McGraw-Hill Book Co. Inc.，N.Y.1969) ，chap.3 ，p.27.

4. G. L. Squires ： Practical Physics (McGraw-Hill Book Co. Inc.，1968) ，chap.2 ，p.7; chap.3 ，p.12; chap.6，p.59.

5. 台大物理系;台大普物實驗講義(上)(1978)，導言，1 ~14 頁。

6. 中山大學物理實驗室：普通物理實驗，實驗 1。

7. E. Bleuler and G.J.Goldsmith ： Experimental Nu-cleonics (Rinehard，N.Y.，1958) ，chap.1 ，p.49.

8. G .F.Knoll ： Radiation Detection and Measurement (John Wiley & Sons ，Inc . ，1979) ，chap.7 ，p.218.

9. 新世紀編輯小組(周東川審定)：相對論的故事(銀禾文化事業有限公司，1994 年元月再版)，3~19 頁。

附錄 A：

游標尺(vernier calipers 或 calipers)

(一) 構造(圖 A-1)：

1. 包括主尺 A 及游標 B。
2. 主尺上刻有公制單位※6，最小刻劃間隔為 1mm。
3. 游標可以在主尺上自由移動，利用游標使長度的測量可精確讀至 0.05 mm。
4. 歸零時，將游標左移到主尺盡頭，游標零刻度與主尺零刻度重合，a 角與主尺垂直之邊必與 b 角垂直邊接合，c 角垂直邊也必與 d 角垂直邊接合。
5. 由角的形式知道：a 、b 角可作中空物體內徑量度；c 、d 角可作物體外徑量度，e 處可測量深度或厚度【圖 A-1(b)】。

註：

※6. 此處以公制為例，另有英制刻度的游標尺，用法類似。

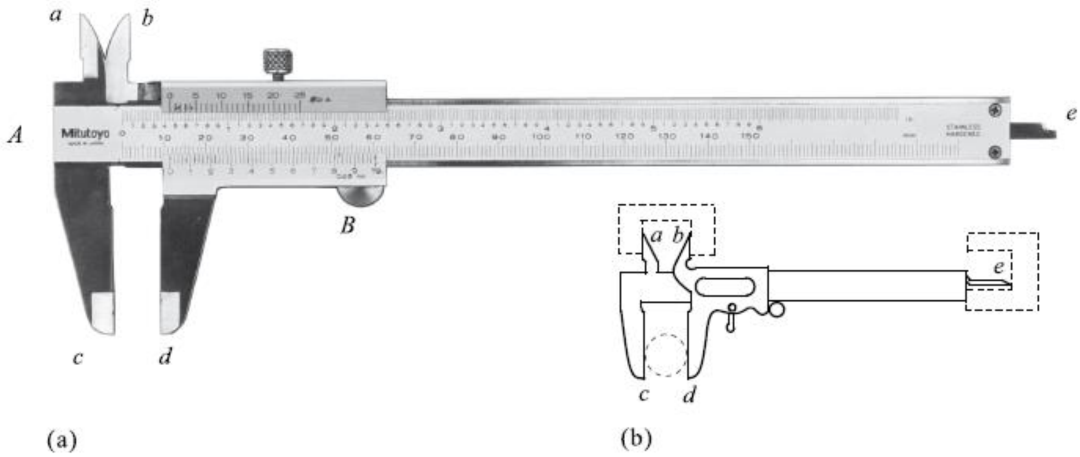


圖 A-1 游標尺：(a)構造圖；(b)用法：a ，b 測內徑；c ，d 測外徑；e 測深度或厚度。

(二) 原理：

由圖 A-2 (a)，可知游標上 20 個刻度與主尺上 19 個刻度等長。如以$\mathrm{S_m}$代表主尺上每一刻度的長度；$\mathrm{S_n}$代表游標上每一刻度的長度，則：

$$20\mathrm{S_n} = 19\mathrm{S_m}$$

$$\mathrm{S_n} = \frac{19}{20}\mathrm{S_m}$$

$$\mathrm{S_n} + \frac{1}{20}\mathrm{S_m} = \mathrm{S_m}$$

表示$\mathrm{S_m}$比$\mathrm{S_n}$大$\frac{1}{20}\mathrm{S_m}$單位。

以圖 A-2 為例，我們可以說：(b)中 x 為$10/20\,\mathrm{S_m}$單位；而(c)中Δx為 10 又$8/20\mathrm{S_m}$單位。通常$\mathrm{S_m} = 1$ mm，而$\mathrm{S_n}$標成 10 個大格，即$\mathrm{S_n}$每一格相當於 0.05 mm 。因此在實驗量度時，可以直接由刻度讀出。如圖 A-2 (b)中的 x：游標的“5”與主標的某一刻度(“10”）對齊，故 x 為 0.5mm ；同理，(c)中的$\Delta \mathrm{x} = 10.4$ mm (游標的“4”與主標的“18”對齊)。

(三) 用法：

1. 先將游標移至主尺頂端，令 c，d 重合，檢查游標零刻度與主尺零刻度是否重合。若不能重合，則需做零點校正。

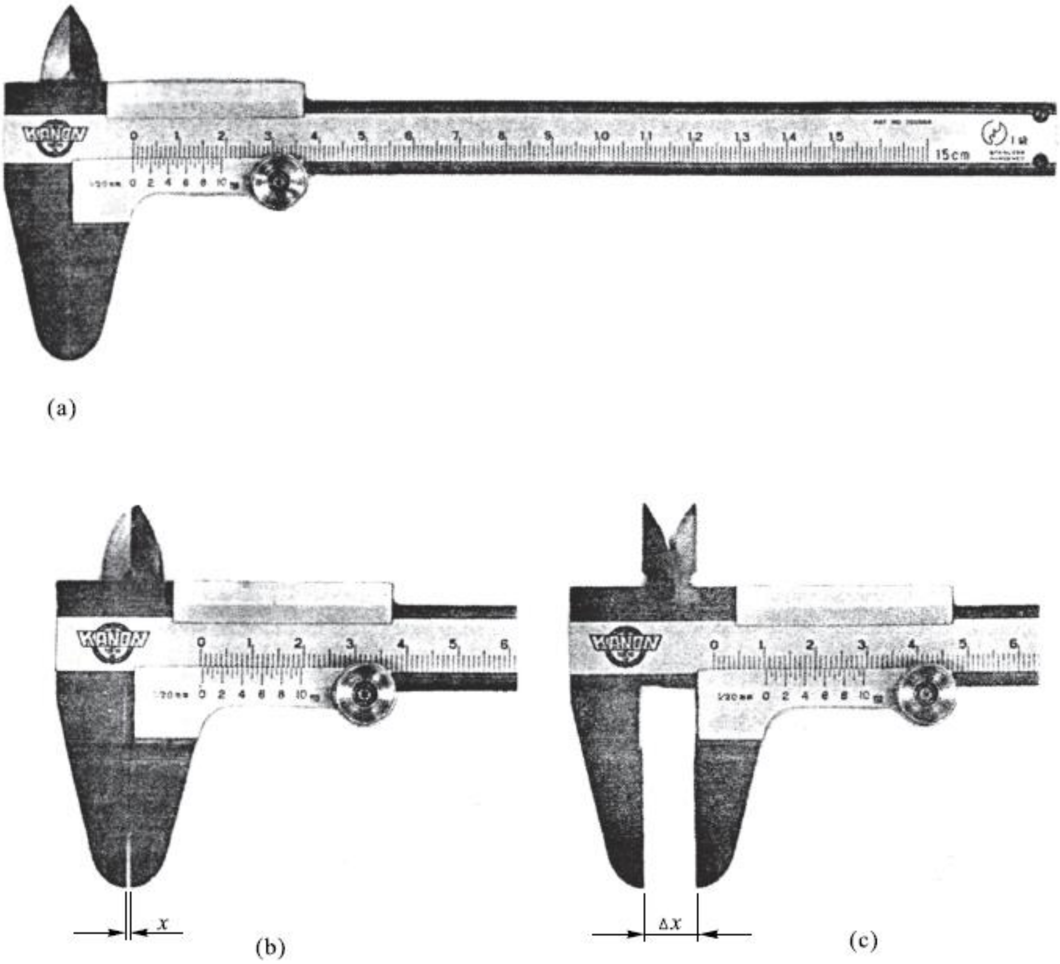


圖 A-2 游標尺：(a)歸零；(b)測量例 1，$\Delta x = 0.5$ mm；(c)測量例 2，$\Delta x = 10.4$ mm。

2. 將物體置於 c 、d 垂直邊之問，參考圖 A-1 主尺上零刻度與游標上零刻度之距離即為物體長度。
3. 大於 1 mm 的刻度由主尺上直接讀出，小於 1 mm 的刻度由游標上直接讀出。

附錄 B：

測微器或螺旋測徑器(micrometer 或 micrometer calipers)：

(一)構造(圖 A-3)：

1. 固定鐵砧 A ，與桿尺 S 以支架 F 連接。
2. S 上有可以任意旋轉的套筒 T 與另一鐵砧 R 連接，旋轉 T 時，R 可以前進或後退。
3. H 為一特殊設計，當被測物輕夾在 A 與 R 之問，慢慢轉動 H ，使 A 、R 與被測物接觸時會有“滴答”聲發出，每一聲代表一個固定的壓力。為確定每次測量時，被測物所受壓力相同，並避免損壞精密的螺紋刻度，當 A 、R 與被測物接近時，請由 H 處轉動 R。

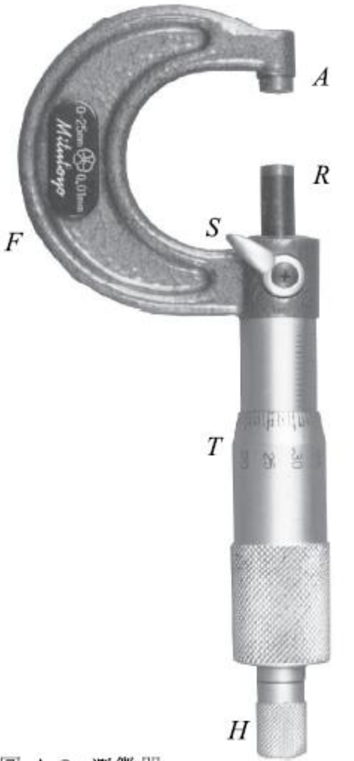


圖 A-3 測微器。

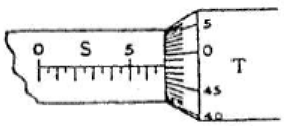


圖 A-4 測微器刻度示意圖。

(二)原理：

由圖 A-4 可以看出：S 上每一刻度問距為 0.5 mm；T 上一圈共分 50 刻度，每一刻度代表螺距的 1/50 。螺旋測徑器的螺距通常為 0.5 mm，即 T 每轉一圈，R 移動 0.5mm，所以 T 轉一刻度，R 移動 0.01 mm ，若再加一位估計值，數據位數可達到10^{-3} mm。

(三)用法：

1. 旋轉 T 處，當 R 與 A 快要接觸時，改旋轉 H 處至聽到兩聲※7“滴答”為止。
2. 讀測微器上的讀數，稱為零位讀數(有時讀數不剛好為零，表示有零位誤差。此時可用此零位讀數修正零位誤差，這個步驟稱為歸零)。
3. 旋轉 T 將待測物夾在 A 與 R 之問，當 A 、R 兩點與待測物將要接觸時，旋轉 H 至聽到兩聲“滴答”停止。

4. 讀測微器上的讀數，減去零位讀數就是待測物的長度。

註：

※7. 不一定以“兩聲”為準，“三聲”或“五聲”都可以，只要歸零及測物體時之“聲”數相同即可。但“聲”數取太多，在實質上並無多大意義。

附錄 C：

電子天平

(一) 構造(圖 D-1)：

圖 D-1 電子天秤

(二) 操作功能

操作鍵	操作功能
/電源/ON	電源鍵，ON/OFF
/歸零/ZERO	歸零鍵，在設定狀態時為確定鍵。(當前重量超出歸零範圍時，歸零鍵無效)
/扣重/TARE	扣重鍵，扣重後螢幕顯示淨重。
% /百分比	百分比鍵，秤重狀態下按此鍵進入百分數狀態，在百分數零位元狀態下按此鍵回到秤重狀態。
/數量/SMPL	記數鍵，秤重狀態下按此鍵進入記數狀態，在記數狀態下按此鍵回到秤重狀態。
/功能/MODE	模式轉換鍵，秤重狀態下按此鍵可切換單位，在設定狀態時維修改鍵，在計數狀態下為單重、總重、數量切換鍵。
/列印/PRINT	列印鍵，未連接印表機時為累加鍵，連接印表機後可列印，在功能設定時按此鍵可放棄修改退出。

註：

※量測範圍：0.2~1500g。

附錄:　可疑數據之去除

若在全部的測量數據中，**某個測量值偏離平均數過大，則該測量值之誤差來源便不單純是機率誤差而已，因此必須考慮是否去除這個測量數據**。此套判斷方法是統計學家 Chauvenet 所定，它在物理實驗數據分析上頗為重要，且應用價值頗高。其說明如下：**數據處理之要求標準有兩個：(1)變異係數 C 不可大於 5% ，且為優先判斷條件。(2)所有測量值不可超過最大容許值及最小容許值 X_a、X_b。**

例題：

某生測量單擺週期十次，得數據如下表：問 (a)、那些數據是必須去除的？(b)、此單擺週期為何？

次序	週期（秒）x_i	x_i^2
1	2.54	6.4516
2	2.63	6.9169
3	2.58	6.6546
4	2.65	7.0225
5	2.49	6.2001
6	2.92	8.5264
7	2.46	6.0516
8	2.32	5.3824
9	2.48	6.1504
10	2.60	6.7600

解答導引：

(1) 首先以此十個數據計算平均數及樣本標準差與變異係數因測量次數達十次，故計算數值有效數字可較測量值多一位

平均數 $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = 2.567$ (計算過程中應再多取一位)

樣本標準差 $s = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{10} d_i^2}{(10-1)}} = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2}{9} - \dfrac{(\sum_{i=1}^{10} x_i)^2}{9\times 10}} = 0.15755$ (計算過程中應再多取一位)

變異係數 $C = \left(\dfrac{s}{\bar{x}}\times 100\right)\% = 6.1377\%$　(計算過程中應再多取一位)

(2) 因 $C > 5\%$ ，故必須去掉部分數據，最先考慮的當然是偏離平均數 2.567 最遠之數據為 2.92 (偏差值為 0.353) 。故將 2.92 先去除後再重複計算平均數及樣本標準差與變異係數。因測量次數未達十次，故計算數值有效數字只能與測量值相同

平均數　$\bar{x} = 2.528$

樣本標準差　s = 0.1030 (有效數字四位)

變異係數 $C = 4.074$ % (有效數字四位) ，

因 C <5 %，整體看來全部數據似乎頗合理，但仍須考慮每一數據是否合理即**偏離平均數過大之情形**。故必須再計算偏差臨界值 r

(3) 依照下表計算偏差臨界值(critical deviation)

測量次數 n	加權值 t
2	1.15
3	1.38
4	1.53
5	1.64
6	1.73
7	1.80
8	1.86
9	1.91
10	1.96
11	2.00
11 以上	2.00

因 $n = 9$ ， t 值為 1.91

偏差臨界值 $s_c = t \times s = 1.91 \times 0.1030 = 0.1967$

計算測量值之最大容許值 X_a 及最小容許值 X_b

$$X_a = \bar{x} + s_c$$

$$X_b = \bar{x} - s_c$$

最大容許值 2.528 + 0.1968 = 2.7248

最小容許值 2.528 - 0.1968 = 2.3312

(4) 判斷是否有大於 X_a(2.7248)或小於 X_b(2.3312) 之數據，並去除其中偏離平均數最遠之數據：因只有 2.32 超出最小容許值必須去除，去除之後所剩八個數據(t=1.86)，須再計算下列數值：平均數、樣本標準差、變異係數、最大容許值、最小容許值：

平均數 $\bar{x} = 2.554$

樣本標準差 s = 0.07210 (有效數字四位)

變異係數 $CV = 2.823\%$ ， （$CV < 5\%$，方可計算 X_a、 X_b）

偏差臨界值 $s_c = 1.86 \times 0.07210 = 0.1341$

最大容許值　$X_a = 2.554 + 0.1341 = 2.6881$

最小容許值　$X_b = 2.554 - 0.1341 = 2.4199$

全部測量值都在容許值之間，故剩餘之八個數據為完全可靠數據。

(5) 依照所做實驗之數據結果，且經數據處理分析後結論如下：

此單擺之週期應以八個有效測量求平均，即為 2.55 秒。

測量誤差為數據樣本標準差，即為 7.21×10^{-2} 秒。

測量差異程度為變異係數，即為 2.83%。

最大有效測量範圍為最大容許值，即為 2.688 秒。

最小有效測量範圍為最小容許值，即為 2.420 秒。

(a) 之答案為 2.92 及 2.32 應被去除。而 (b) 之答案則以去除後所剩 8 個數據之平均值為代表，也就是此單擺之週期為 2.55 秒。且所有測量值應該介於 2.688 與 2.420 秒之間。超出此範圍之測量值，其測量過程必定由操作因素造成，應予去除。

總歸而言，數據處理之要求標準有兩個：(1)、變異係數 C 不可大於 5% ，且為優先判斷條件。(2)、所有測量值不可超過最大容許值及最小容許值 X_a、 X_b。