

轉動慣量測量及角動量守恆實驗結報

一、實驗結果

A. 實驗 A：

1. 實驗數據：(R₁ 為外徑，R₂ 為內徑)

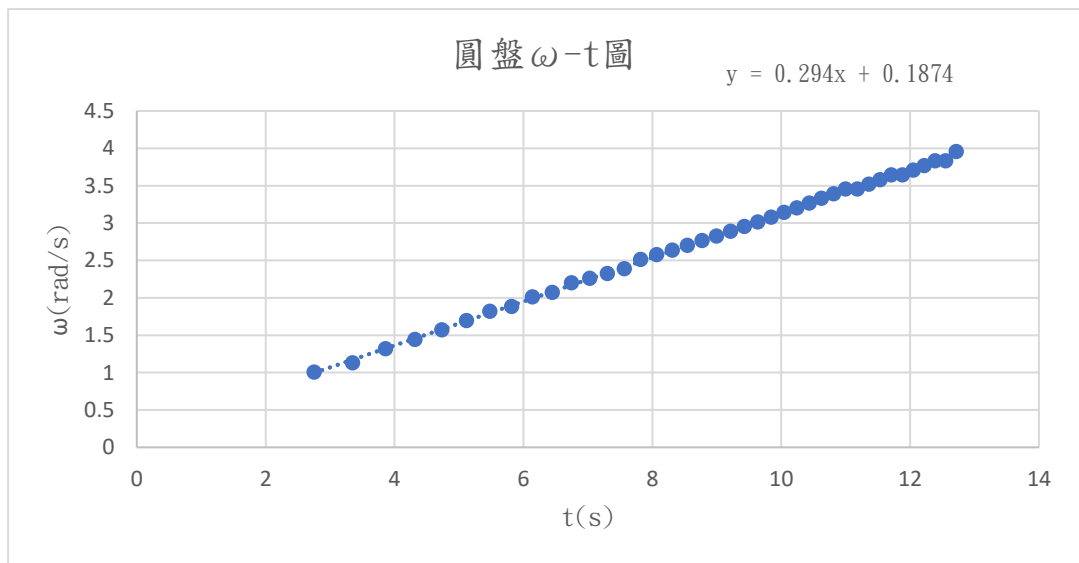
| | M(kg) | R ₁ (m) | R ₂ (m) | 力臂 r(m) | 懸掛物 m(kg) |
|-------|-------|--------------------|--------------------|---------|-----------|
| 圓盤 | 1.483 | 0.115 | | 0.0085 | 0.04035 |
| 圓環 | 1.503 | 0.064 | 0.054 | 0.0085 | 0.04035 |
| 圓盤+圓環 | 2.986 | | | 0.0085 | 0.04035 |

圓盤轉動慣量理論值：

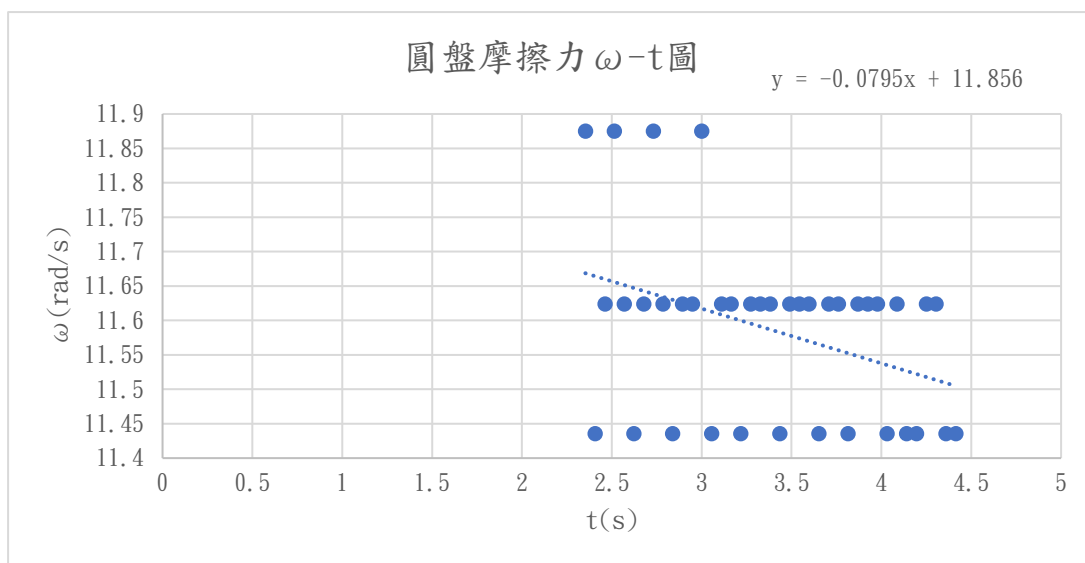
$$I = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2} \times 1.483 \times 0.115^2 = 0.00981 \text{ (kg/m}^2\text{)}$$

圓環轉動慣量理論值：

$$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2) = \frac{1}{2} \times 1.503 \times (0.064^2 + 0.054^2) = 0.00527 \text{ (kg/m}^2\text{)}$$



圓盤角加速度： $\alpha = 0.294 \text{ (rad/s}^2\text{)}$



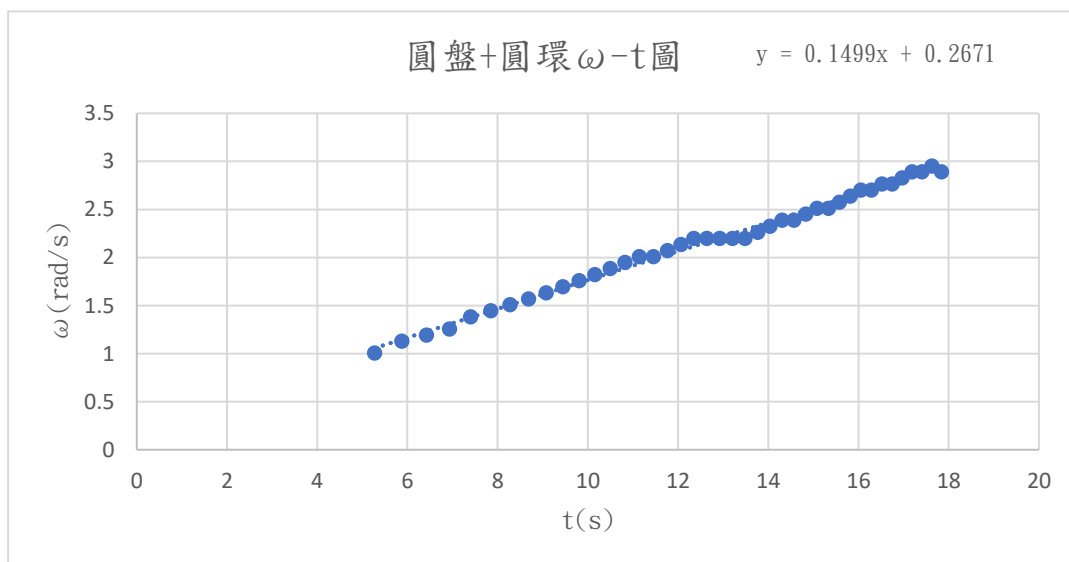
圓盤摩擦力造成的角加速度： $\alpha_0 = -0.0795 \text{ (rad/s}^2\text{)}$

圓盤轉動慣量實驗值：

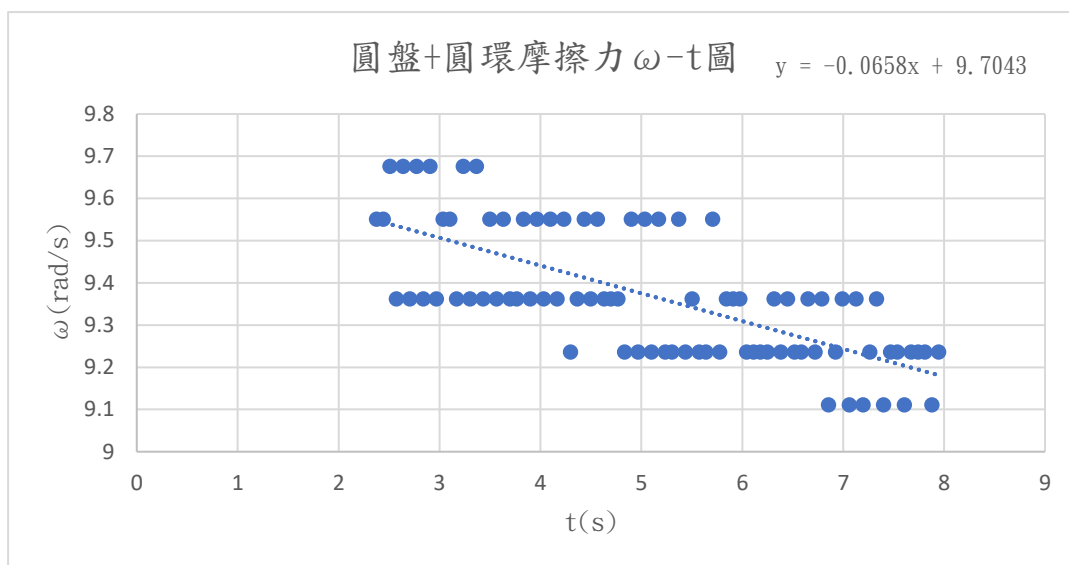
$$I = \frac{mr^2(g-r\alpha)}{\alpha+|\alpha_0|} = \frac{0.4035 \times 0.0085^2 (9.8 - 0.0085 \times 0.294)}{0.294 + 0.0795} = 0.00900 \text{ (kg/m}^2\text{)}$$

$$\text{圓盤摩擦力：} f = \frac{I\alpha_0}{r} = \frac{0.0157 \times (-0.0795)}{0.0085} = -0.147 \text{ (N)}$$

$$\text{誤差：} (|0.00900 - 0.00981|) \div 0.00981 = 8.26\%$$



圓盤+圓環角加速度： $\alpha = 0.1499 \text{ (rad/s}^2\text{)}$



圓盤+圓環摩擦力造成的角加速度： $\alpha_0 = -0.0658 \text{ (rad/s}^2\text{)}$

圓盤+圓環轉動慣量實驗值：

$$I = \frac{mr^2(g-r\alpha)}{\alpha+|\alpha_0|} = \frac{0.4035 \times 0.0085^2 (9.8 - 0.0085 \times 0.1499)}{0.1499 + 0.0658} = 0.0156 \text{ (kg/m}^2\text{)}$$

$$\text{圓盤+圓環摩擦力：} f = \frac{I\alpha_0}{r} = \frac{0.0400 \times (-0.0658)}{0.0085} = -0.309 \text{ (N)}$$

$$\text{圓環轉動慣量實驗值：} 0.0156 - 0.00900 = 0.00658 \text{ (kg/m}^2\text{)}$$

$$\text{誤差：} (|0.00658 - 0.00527|) \div 0.00527 = 24.9\%$$

B. 實驗 B：

1. 實驗數據：

| | M(kg) | R(m) | d(m) | m(kg) | r(m) |
|-----|-------|-------|-------|---------|--------|
| 第一組 | 1.483 | 0.115 | 0.050 | 0.04035 | 0.0085 |
| 第二組 | 1.483 | 0.115 | 0.100 | 0.04035 | 0.0085 |
| 第三組 | 1.483 | 0.115 | 0.150 | 0.09085 | 0.0085 |

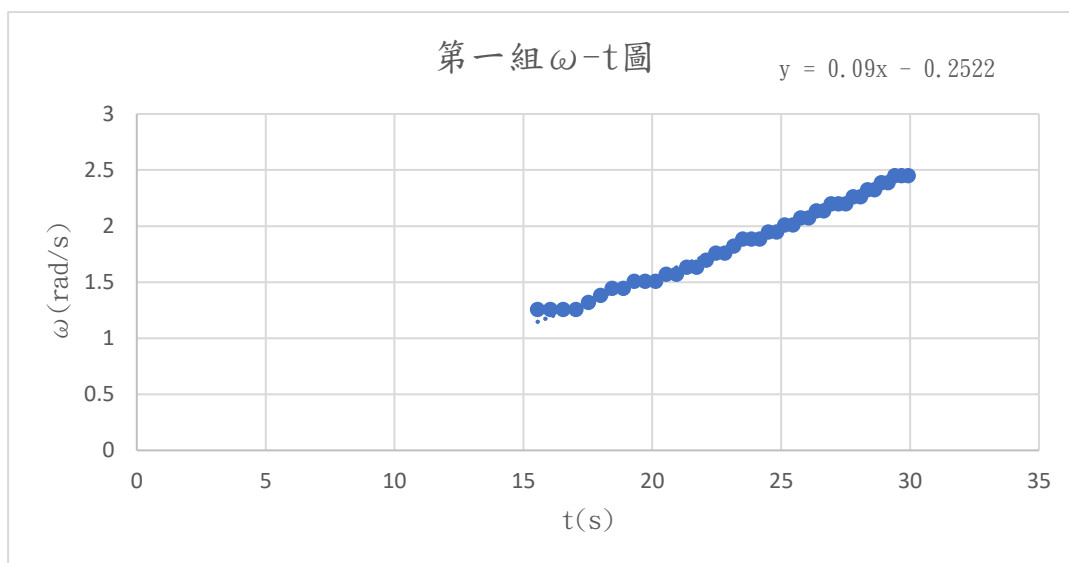
I 理論值：

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + Md^2$$

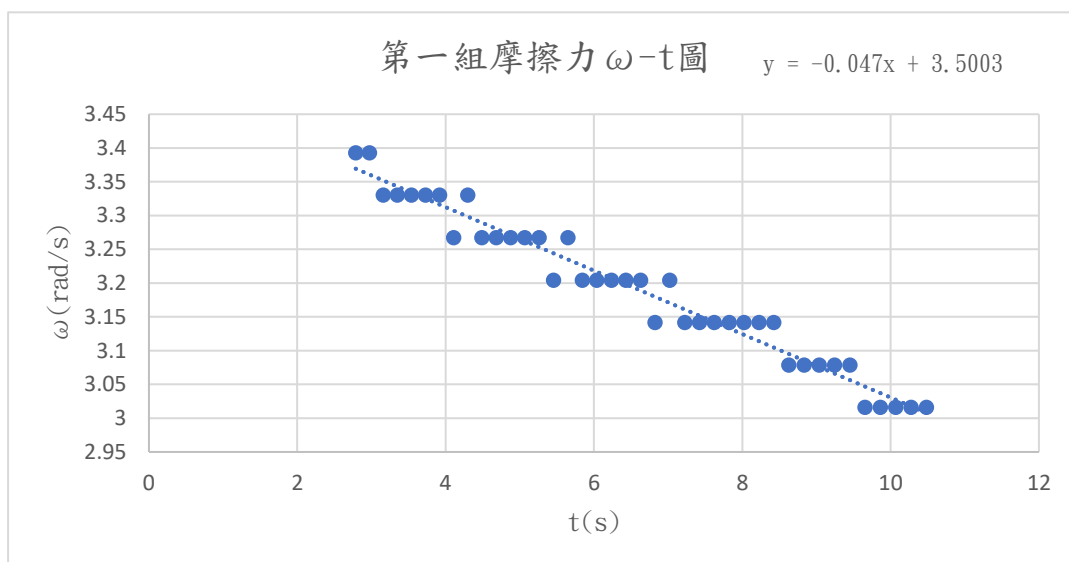
$$\text{第一組理論值：} I = \frac{1}{2}1.483 \times 0.115^2 + 1.483 \times 0.050^2 = 0.0135 \text{ (kg/m}^2\text{)}$$

$$\text{第二組理論值：} I = \frac{1}{2}1.483 \times 0.115^2 + 1.483 \times 0.100^2 = 0.0246 \text{ (kg/m}^2\text{)}$$

$$\text{第三組理論值：} I = \frac{1}{2}1.483 \times 0.115^2 + 1.483 \times 0.150^2 = 0.0432 \text{ (kg/m}^2\text{)}$$



第一組圓盤角加速度： $\alpha = 0.0900 \text{ (rad/s}^2\text{)}$

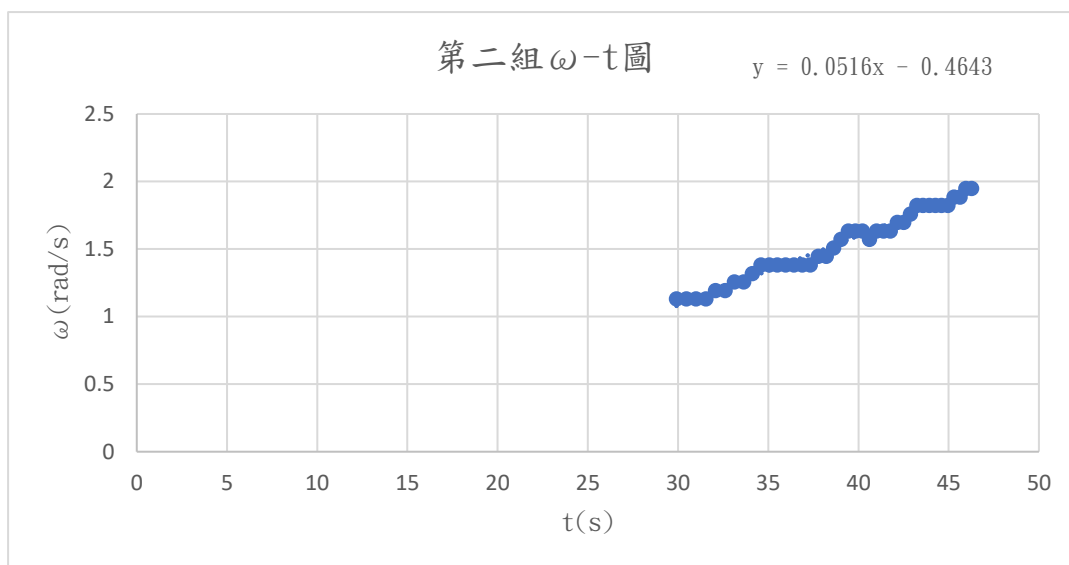


第一組圓盤摩擦力造成的角加速度： $\alpha_0 = -0.0470 \text{ (rad/s}^2\text{)}$

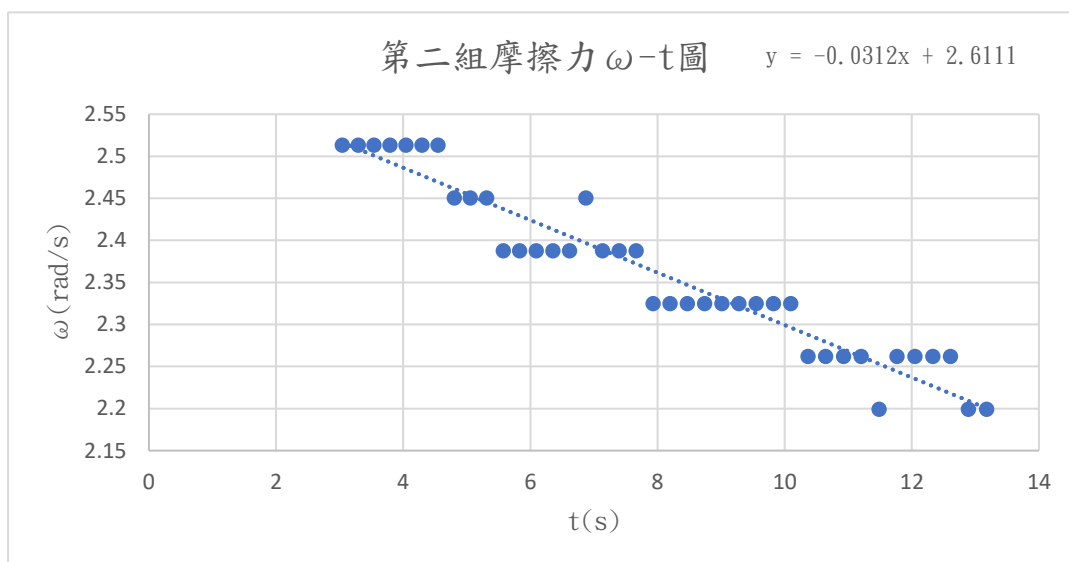
第一組圓盤轉動慣量實驗值：

$$I = \frac{mr^2(g-r\alpha)}{\alpha+|\alpha_0|} = \frac{0.4035 \times 0.0085^2 (9.8 - 0.0085 \times 0.0900)}{0.0900 + 0.0470} = 0.0245 \text{ (kg/m}^2\text{)}$$

$$\text{第一組圓盤摩擦力：} f = \frac{I\alpha_0}{r} = \frac{0.0782 \times (-0.0470)}{0.0085} = -0.432 \text{ (N)}$$



第二組圓盤角加速度： $\alpha = 0.0516$ (rad/s²)



第二組圓盤摩擦力造成的角加速度： $\alpha_0 = -0.0312$ (rad/s²)

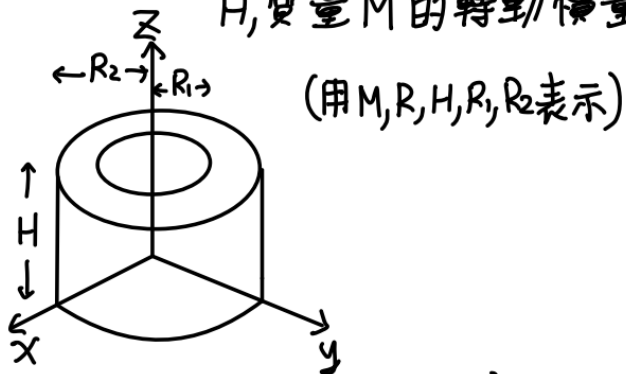
第二組圓盤轉動慣量實驗值：

$$I = \frac{mr^2(g-r\alpha)}{\alpha+|\alpha_0|} = \frac{0.4035 \times 0.0085^2 (9.8 - 0.0085 \times 0.0516)}{0.0516 + 0.0312} = 0.0406 \text{ (kg/m}^2\text{)}$$

$$\text{第二組圓盤摩擦力：} f = \frac{I\alpha_0}{r} = \frac{0.165 \times (-0.0312)}{0.0085} = -0.605 \text{ (N)}$$

二、習題

習題1: 計算內徑 R_1 , 外徑 R_2 , 高度 H , 質量 M 的轉動慣量 I



(用 M, R, H, R_1, R_2 表示)

提示: ① dm 填滿了 $r \in [R_1, R_2]$
 $\theta \in [0, 2\pi]$
 $z \in [0, H]$ 的區域

$$\rho = \frac{M}{\pi R^2 H}$$

$$\int_0^H \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} r^3 (\rho dr d\theta dz)$$

$$= \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} d\theta dz$$

$$= \rho \int_0^H \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} 2\pi dz$$

$$= \rho \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} 2\pi H$$

$$= \frac{R_1^2 + R_2^2}{2} (R_1^2 - R_2^2) \pi H \rho$$

$$= \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2)$$

習題2: 證明 $I = \frac{mr(g - r\alpha)}{\alpha + |\alpha_0|}$

(普物實驗室網站是錯的)

$$\begin{cases} \vec{\tau} = \vec{\tau}_t + \vec{\tau}_f = \vec{T} \times \vec{r} + I \vec{\alpha}_0 = I \vec{\alpha} \\ mg - T = ma \rightarrow T = m(g - a), a = \alpha r \end{cases}, \alpha = \alpha_t - |\alpha_0|,$$

$$I = \frac{\vec{T} \times \vec{r}}{I \vec{\alpha}_t} = \frac{Tr \sin 90^\circ}{I(\alpha + |\alpha_0|)} = \frac{m(g - a)}{\alpha + |\alpha_0|} = \frac{m(g - r\alpha)}{\alpha + |\alpha_0|}$$

三、心得

這次實驗準備的還算充足，實驗過程中沒遇到什麼太大的阻礙，只是 Coolterm 有時候會當機有點麻煩，剩下的部分還算順利。