WIKIPEDIA

K-L 轉換

維基百科，自由的百科全書

K-L轉換(Karhunen-Loève Transform)是建立在統計特性基礎上的一種轉換，它是均方差(MSE, Mean Square Error)意義下的最佳轉換，因此在資料壓縮技術中佔有重要的地位。

K-L轉換名稱來自Kari Karhunen和Michel Loève。

K-L轉換是對輸入的向量x，做一個正交變換，使得輸出的向量得以去除數據的相關性。

然而，K-L轉換雖然具有均方差(MSE)意義下的最佳轉換，但必須事先知道輸入的訊號，並且需經過一些繁雜的數學運算，例如協方差(covariance)以及特徵向量(eigenvector)的計算。因此在工程實踐上K-L轉換並沒有被廣泛的應用，不過K-L轉換是理論上最佳的方法，所以在尋找一些不是最佳、但比較好實現的一些轉換方法時，K-L轉換能夠提供這些轉換性能的評價標準。

以處理圖片為範例，在K-L轉換途中，圖片的能量會變得集中，有助於壓縮圖片，但是實際上，KL轉算為input-dependent，即需要對每張輸入圖片存下一個轉換機制，每張圖都不一樣，這在實務應用上是不實際的。

目錄

原理

E為期望值(Expectation)

KL轉換屬於正交轉換，其處輸入訊號的原理如下：

對輸入向量$\mathbf{x}$做KL傳換後，輸出向量$\mathbf{X}$之元素間($u_1 \neq u_2, u_1$和u_2為$\mathbf{X}$之元素的index)的相關性為零，即：$E[(X[u_1] - \bar{X}[u_1])(X[u_2] - \bar{X}[u_2])] = 0$

展開上式並做消去：

$$E[X[u_1]X[u_2]] - \bar{X}[u_1]\bar{X}[u_2] = 0$$

如果$\bar{x}[n] = 0$，因為KL轉換式線性轉換的關係，$\bar{X}[n] = 0$，則可以達成以下式，所以這裡得輸入向量$\mathbf{x}$之平均值$\bar{x}$需為$\mathbf{0}$，所以KLT是專門用於隨機程序的分析：

$$E[X[u_1]X[u_2]] = 0$$

其中$u_1 \neq u_2$，即輸出向量不同元素相關性為$\mathbf{0}$。

回到矩陣表示形式，令$\mathbf{K}$為KL轉換矩陣，使：

$$\mathbf{X} = \mathbf{K}\mathbf{x}$$

以$\mathbf{K}$和$\mathbf{x}$表示$\mathbf{X}$之covariance矩陣：

$$E[\mathbf{X}\mathbf{X}^T] = E[\mathbf{K}\mathbf{x}\mathbf{x}^T\mathbf{K}^T] = \mathbf{K}E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T]\mathbf{K}^T$$

因為$\bar{x}[n] = 0$，$E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T]$直接等於covariance矩陣：

$$E[\mathbf{X}\mathbf{X}^T] = \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{K}^T$$

其中$\mathbf{C}$為$\mathbf{x}$之covariance矩陣。

如果要使$E[X[u_1]X[u_2]] = 0$，則$E[\mathbf{X}\mathbf{X}^T]$必須為對角線矩陣，即對角線上之值皆為$\mathbf{0}$，所以$\mathbf{K}$必須將傳換成對角線矩陣，即$\mathbf{K}$的每一行皆為$\mathbf{C}$之特徵向量。

K-L轉換的目的是將原始數據做轉換，使得轉換後資料的相關性最小。若輸入數據為一維：

$$y[u] = \sum_{n=0}^{N-1} K[u,n]x[n]$$

$$K[u,n] = e_n[n]$$

其中e_n為輸入訊號x共變異數矩陣(covariance matrix)C_x的特徵向量(eigenvector)

若輸入訊號x為二維：

$$y[u,v] = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} K[u,m]K[v,m]x[m,n]$$

KLT與PCA的區別

KLT和Principle component analysis (PCA)有相似的特性，二者之間有很細微的差異，其中KLT專門處理隨機性的訊號，但PCA則沒有這個限制。對PCA而言，這裡假設輸入訊號為ㄧ向量，輸入向量$\mathbf{x}$在乘上轉換矩陣$\mathbf{W}$之前，會先將輸入向量扣去平均值，即:

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}(\mathbf{x} - \bar{x})$$

PCA會根據$\mathbf{x}$之covariance矩陣來選擇特徵向量做為轉換矩陣之內容：

$$E[(\mathbf{x} - \bar{x})(\mathbf{x} - \bar{x})^T] = \mathbf{W}\mathbf{\Lambda}\mathbf{W}^T$$

其中$\mathbf{\Lambda}$為對角線矩陣且對角線值為特徵值。

由上述可見PCA和KLT之差異在於有沒有減去平均值，這是由於輸入資料分布的限制造成的，當輸入向量支平均值為零時，二這者沒有差異。

應用

在影像的壓縮上，目的是要將原始的影像檔用較少的資料量來表示，由於大部分的影像並不是隨機的分布，相鄰的像素(Pixal)間存在一些相關性，如果我們能找到一種可逆轉換(reversible transformation)，它可以去除數據的相關性，如此一來就能更有效地儲存資料，由於K-L轉換是一種線性轉換，並有去除資料相關性的特性，便可以將它應用在影像的壓縮上。此外，由於K-L轉換具有將訊號轉到特徵空間(eigenspace)的特性，因此也可以應用在人臉辨識上。

參考文獻

1. Ding, J. J. (2017). Advanced Digital Signal Processing [Powerpoint slides] http://djj.ee.ntu.edu.tw/ADSP8.pdf (http://djj.ee.ntu.edu.tw/ADSP15.pdf)

2. Gerbrands, J.J., On the relationships between SVD, KLT, and PCA, Pattern Recogn., 14 (1981), pp. 375-381