

Exam 2

109060013

張芯瑜

(1a) $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 25 \times 4^{n-2} \quad n \geq 2, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 32$

<sol> 1° homo: $x^2 = 2x + 3$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ or } -1$$

$$\Rightarrow a_n = A3^n + B(-1)^n = A3^n + B(-1)^n (\text{homo})$$

2° particular: Guess $a_n = C \cdot 4^n$

$$\Rightarrow C \cdot 4^n = 2 \cdot C \cdot 4^{n-1} + 3 \cdot C \cdot 4^{n-2} + 25 \times 4^{n-2}$$

$$\Rightarrow 16C = 8C + 3C + 25 \Rightarrow C = 5 \Rightarrow a_n = 5 \cdot 4^n$$

3° By 1°, 2° $\Rightarrow a_n = A3^n + B(-1)^n + 5 \cdot 4^n$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = A + B + 5 = 1 \\ a_1 = 3A - B + 20 = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{a_n = 2 \cdot 3^n - 6 \cdot (-1)^n + 5 \cdot 4^n} \quad \#$$

(1b) $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0 \quad n \geq 2, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 15$

<sol> 1° homo: $x^2 - 6x + 9 = 0$

$$\Rightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ (重根)}$$

$$\Rightarrow a_n = (A + Bn) \cdot 3^n$$

$$2^\circ \begin{cases} a_0 = A \cdot 1 = 1 \\ a_1 = (A + B) \cdot 3 = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{a_n = (1 + 4n) \cdot 3^n} \quad \#$$

(3) $2020^{2k} - 1^{2k}$

$$= (2020+1)(2020^{2k-1} - 2020^{2k-2} + 2020^{2k-3} - \dots - 1)$$

$$= 2021 \times (2020^{2k-1} - 2020^{2k-2} + \dots - 1)$$

~~~~~

#

(4) 1° for  $1 \sim 100$ , 我們可以把數字分成:

$$\begin{cases} 25k+0 \\ 25k+1 \\ 25k+2 \\ \vdots \\ 25k+24 \end{cases} \quad (k=0, 1, 2, 3)$$

⇒ 每組有 4 個數字

2° 為了達到 "sum" 或 difference 是 multiple of 25,

sum → 所加的數相加為 25 的倍數  
difference → 位於同一組.

3° case 1: 所選數字沒有位於同一組的.

∴  $1+24 = 2+23 = \dots = 12+13 \rightarrow$  共有 "12" 組可配成 25 倍數  
且 "0" 不能與任何組別配

∴  $16 - 12 - 1 = 3 \Rightarrow$  必有 3 組可配成 25 之倍數 !!

case 2: 所選數字有一位於同一組的.

∴ 同 case 1 → 共有 "12 組" 可配成 25 倍數  
且 "0" 不能與任何組別配

∴  $16 - 2 - 1 - 12 = 1 \Rightarrow$  一定還有一組 sum 可以  
是 25 之倍數 !!  
↑      ↑  
同-組   0

other case: 所選數字有 2 位於同一組 → 符合要求  
不選  $25k+0$  的組別情況 → 符合要求

∴ proved #



$$(5) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + 7^2 + 9^2 = 12^2$$

$$1^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 = 11^2$$

$$1^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 7^2 = 10^2$$

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = 13^2$$

$$\Rightarrow (1, 2, 3, 7, 9), (1, 2, 4, 6, 8), (1, 3, 4, 5, 7),$$

(2, 4, 6, 7, 8)

$$(2) \quad a_n a_{n-2} = (a_{n-1})^2 + 2a_{n-1} a_{n-2} \quad n \geq 2, \quad a_0 = 2, \quad a_1 = 4$$

$\langle \text{sol} \rangle$

<sol>  $a_2 a_0 x^2 = a_1^2 x^2 + 2a_1 a_0 x^2$

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

$$a_3 a_1 x^4 = a_2^2 x^4 + 2a_2 a_1 x^4$$

$$\Rightarrow A'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$$

444

$$a_n a_{n-2} X^{2n-2} = a_{n-1}^2 X^{2n-2} + 2a_{n-1} a_{n-2} X^{2n-2}$$

+) )

$$a_2 \cdot 2 = 16 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \Rightarrow a_2 = 16$$

$$a_3 \cdot 4 = 256 + 2 \cdot 16 \cdot 4 \Rightarrow a_3 = 96$$

384