Part 1 公式與定義總整理

(1) Series, Integral, and Transform (非常重要)

把握不同 transform 之間的「關聯性」，多比較彼此之間相同或相異的地方

(1) Laplace Transform	$L\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$
(2) Fourier series (standard form)	interval: $x \in [-p, p]$ $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{p}x+b_n\sin\frac{n\pi}{p}x\right)$, $a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)dx$, $a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\cos\frac{n\pi}{p}xdx$, $b_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\sin\frac{n\pi}{p}xdx$, a_0, a_n, b_n: Fourier coefficients
(2-1) Fourier series (half range extension form)	interval: $x \in [0, L]$ 將 Fourier series 的 p 變成 $L/2$ $\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}$ 變成 $\frac{2}{L}\int_0^L$
(3) Fourier cosine series (cosine series)	$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{p}x$ $a_0=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)dx$, $a_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\frac{n\pi}{p}xdx$ 適用情形： (1) interval: $x \in [-p, p]$, $f(x)=f(-x)$ (2) interval: $x \in [0, p]$ (half range extension 時)
(4) Fourier sine series (sine series)	$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{p}x$ $b_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\frac{n\pi}{p}xdx$ 適用情形： (1) interval: $x \in [-p, p]$, $f(x)=-f(-x)$ (2) interval: $x \in [0, p]$ (half range extension 時)

(2) 和 Laplace Transform 相關的公式 (很重要)

Laplace transform	$L\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$
Differentiation $L\{f^{(n)}(t)\}=$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$
Multiplication by t $L\{t^n f(t)\}=$	$(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s)$
Integration	$L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}=\frac{F(s)}{s}$
Multiplication by exp	$L\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)$
Translation (I)	$L\{f(t-a)u(t-a)\}=e^{-as}F(s)$
Translation (II)	$L\{g(t)u(t-a)\}=e^{-as}L\{g(t+a)\}$
Convolution property	convolution: $y(t)=f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ $L\{y(t)\}=F(s)G(s)$
Periodic input If $f(t)=f(t+T)$	$L\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt$
$L\{1\}=$	$1/s$
$L\{u(t)\}=$	$1/s$
$L\{t^n\}=$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$L\{\exp(at)\}=$	$\frac{1}{s-a}$
$L\{\sin(kt)\}=$	$\frac{k}{s^2+k^2}$
$L\{\cos(kt)\}=$	$\frac{s}{s^2+k^2}$
$L\{\sinh(kt)\}=$	$\frac{k}{s^2-k^2}$

$L\{\cosh(kt)\} =$	$\dfrac{s}{s^2-k^2}$
$L\{u(t-t_0)\} =$	$\dfrac{e^{-t_0 s}}{s}$
$L\{\delta(t)\} =$	1

(3) Chapter 7 的相關公式與定義

Step function	$u(t-a) = 1$ for $t > a$, $u(t-a) = 0$ for $t < a$,
convolution (旋積) 很重要，一定要會	$f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ 這裡 * 代表旋積
Integration for $\delta(t-t_0)$	$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1$
Sifting property for $\delta(t-t_0)$	$\int_p^q f(t)\delta(t-t_0)dt=f(t_0)$
Relation between $\delta(t-t_0)$ and $u(t)$	$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau-t_0)d\tau=u(t-t_0)$ $\dfrac{d}{dt}u(t-t_0)=\delta(\tau-t_0)$

(4) Chapter 11 的相關公式與定義

inner product	$(f_1, f_2)=\int_a^b f_1(x)f_2^*(x)dx$ *: conjugate
orthogonal	$(f_1, f_2)=\int_a^b f_1(x)f_2^*(x)dx=0$
square norm	$\lVert f(x)\rVert^2=(f(x), f(x))=\int_a^b f(x)f^*(x)dx=\int_a^b \lvert f(x)\rvert^2 dx$
norm	$\lVert f(x)\rVert=\sqrt{(f(x), f(x))}=\sqrt{\int_a^b f(x)f^*(x)dx}=\sqrt{\int_a^b \lvert f(x)\rvert^2 dx}$
inner product with weight function	$(f_1, f_2)=\int_a^b f_1(x)f_2^*(x)w(x)dx$
orthogonal with respect to a weight function	$(f_1, f_2)=\int_a^b f_1(x)f_2^*(x)w(x)dx=0$
normalize	$\psi(x) \longrightarrow v(x)=\dfrac{\psi(x)}{\lVert\psi(x)\rVert}$ 註：$\lVert v(x)\rVert=1$

orthogonal set	$(\phi_m(x),\phi_n(x))=0$ for $m \neq n$, no constraint for $(\phi_n(x),\phi_n(x))$
orthonormal set	$(\phi_m(x),\phi_n(x))=0$ for $m \neq n$, $(\phi_n(x),\phi_n(x))=1$
orthogonal series expansion	$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\phi_n(x)$ where $c_n=\dfrac{(f(x),\phi_n(x))}{(\phi_n(x),\phi_n(x))}$ inner products
even and odd	If $f(x)$ is even, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ If $f(x)$ is odd, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

(5) 其他重要公式

$\cos(a+b)=$	$\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
$\sin(a+b)=$	$\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
$\cos(a)\cos(b)=$	$[\cos(a+b)+\cos(a-b)]/2$
$\sin(a)\sin(b)=$	$[-\cos(a+b)+\cos(a-b)]/2$
$\sin(a)\cos(b)=$	$[\sin(a+b)+\sin(a-b)]/2$
$\cos(2a)=$	$\cos^2(a)-\sin^2(a)$ or $1-2\sin^2(a)$ or $2\cos^2(a)-1$
$\sin(2a)=$	$2\sin a \cos a$
$\cosh x=$	$\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$
$\sinh x=$	$\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$
$\sinh(0)=$	0
$\cosh(0)=$	1
$\left.\dfrac{d}{dx}\cosh x\right\|_{x=0}=$	0

公式雖然多，但是把握彼此之間的關係，注意相同或相異之處，就可以較容易的記起來

Part 2 「解法」總整理

(一) Variation of Parameters (Matrix) for Particular Solution

Suitable for any linear DE

$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots\cdots + u_n y_n$ where $u_k'(x) = \dfrac{W_k}{W}$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

W_k : replace the k^{th} column of W by $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$, note: $f(x) = \dfrac{g(x)}{a_n(x)}$

範例： 講義 233, 235, 237, 242 頁

(二) Cauchy Euler Equation

Homogeneous

$$a_n x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 x y'(x) + a_0 y = 0$$

$$\Rightarrow a_n \frac{m!}{(m-n)!} + a_{n-1} \frac{m!}{(m-n+1)!} + \cdots + a_1 x \frac{m!}{(m-1)!} + a_0 = 0$$

Nonhomogeneous

(方法一) 使用 Variation of Parameters 範例： 講義 259 頁

(方法二) Set $t = \ln x$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dt}$, $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{d^2 y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\right)$ 範例： 講義 261 頁

(三) Laplace transform 解 DE 的方法

方法：

DE → Laplace transform → 計算 → 分解因式(若需要的話) → inverse Laplace transform

範例： 講義 332, 333 頁

主要精神：把微分簡化為乘法

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y = g(x) \longrightarrow P(s)Y(s) = Q(s) + G(s)$$

$P(s)$: 即 auxiliary function, $Q(s)$: 來自 initial conditions

計算 $Q(s)$ 的快速法

參考講義 334, 335 頁

- **分解因式的方法 (Cover up method)**

$$\frac{K(s)}{(s-a_1)(s-a_2)\cdots(s-a_n)^2\cdots\cdots\cdots(s-a_N)} = \frac{A_1}{s-a_1} + \frac{A_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{A_n + B_n(s-a_n)}{(s-a_n)^2} + \cdots + \frac{A_N}{s-a_N}$$

其中 $a_1, a_2, \ldots, a_N$ 互異, 分子的 order 要小於分母的 order

則 $$A_n = \left.\frac{K(s)}{(s-a_1)(s-a_2)\cdots\cdots(s-a_{n-1})\cancel{(s-a_n)}(s-a_{n+1})\cdots\cdots(s-a_N)}\right|_{s=a_n}$$

$$B_n = \frac{d}{ds}\left.\frac{K(s)}{(s-a_1)(s-a_2)\cdots\cdots(s-a_{n-1})(s-a_{n+1})\cdots\cdots(s-a_N)}\right|_{s=a_n}$$

(四) Laplace transform 解多個 DEs 的方法

方法： DE $\to$ Laplace transform $\to$ 聯立方程式 $\to$ 消掉其他應變數，只剩一個應變數

$\to$ 分解因式(若需要的話) $\to$ inverse Laplace transform $\to$ 解其他應變數

範例： 講義 381, 385 頁

(五) 用 Fourier Series 來解 Particular Solutions

精神：當 $f(t) = f(t+2p)$ 時，用 Fourier series, Furier cosine series, 或 Fouries sine series 將 $f(t)$ 表示成 $\cos\left(\frac{n\pi}{p}t\right)$, $\sin\left(\frac{n\pi}{p}t\right)$ 的 linear combination

流程： 見講義 462-463 頁

範例： 講義 464 頁

(六) Partial Differential Equations 的解法 (一)

用 Separation of Variables

精神： 例如當 independent variables 為 x and y 時，

假設 $u(x,y) = X(x)Y(y)$ ，代入原式

使得 **PDE** $\longrightarrow$ **ODE**

流程： 7 個 Steps, 講義 477-479 頁 (非常重要，請熟悉)

注意： (1) 其中 Steps 3, 4, 5 要分成不同的 cases 來解

(2) 經常把 $d_1 e^{2\alpha x} + d_2 e^{-2\alpha x}$ 表示成 $c_4 \cosh(2\alpha x) + c_5 \sinh(2\alpha x)$

Part 3 補充

同學們若覺得以上的整理，還漏掉哪些公式、定義、或解法，就在這邊補充吧！