Решения

Задача 1.1

Если мы имеем n внешне одинаковых объектов, после одного взвешивания останется в худшем случае $\lceil n \rceil$ объектов, среди которых есть отличающийся по весу. Таким образом, если $n = 12$, то, в худшем случае, понадобятся 3 взвешивания $12 \Rightarrow 4 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$. Ответ: 3.

Задача 1.2

Пусть номер квартиры равен $\overline{abc} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c$, где a, b и c – цифры числа. Число с перевернутыми двумя последними цифрами при этом будет равно $\overline{acb} = 100 \cdot a + 10 \cdot c + b$. Затем решим уравнение в целых числах

$$100 \cdot a + 10 \cdot b + c + 100 \cdot a + 10 \cdot c + b = 1187,$$

$$200 \cdot a + 11 \cdot b + 11 \cdot c = 1187$$

с учетом ограничений на то, что a, b и c – цифры в десятичной системе счисления.

$$200 \cdot a + 11 \cdot (b + c) = 200 \cdot 5 + 11 \cdot 17.$$

Таким образом, возможные номера квартир 589 и 598. Выбираем наименьший – 589. Ответ: 589.

Задача 1.3

Пусть N – количество учащихся в классе, A – количество юношей в классе. Вероятность того, что оба дежурных окажутся мальчиками составляет

$$P = \frac{A}{N} \cdot \frac{A-1}{N-1}.$$

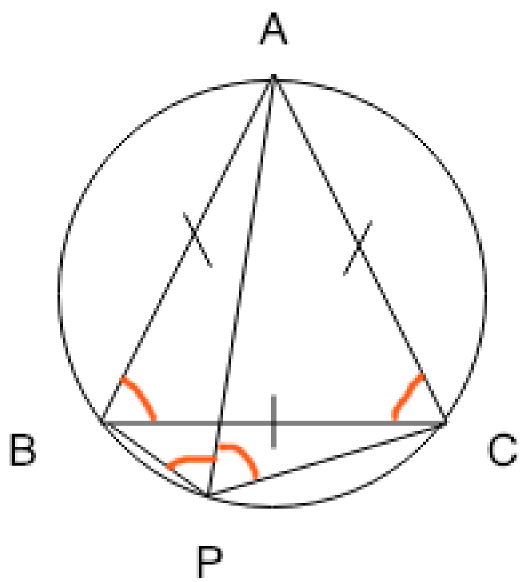
Подставим из условия $N = 25$, $P = 3/25$ и получим следующее уравнение:

$$\frac{A}{25} \cdot \frac{A-1}{24} = \frac{3}{25},$$

$$A^2 - A - 3 \cdot 24 = 0.$$

Уравнение имеет только один положительный корень $A = 9$. Значит, девочек в классе $25 - 9 = 16$. Ответ: 16.

Задача 1.4



Так как $\triangle ABC$ – равносторонний, то $\angle BAC = \angle ABC = \angle ACB = 60^\circ$ и $AB = AC$. $\angle ABC = \angle APC$, так как опираются на $\smile AC$. $\angle ACB = \angle APB$, так как опираются на $\smile AB$. Таким образом, $\angle APB = \angle APC = 60^\circ$. По теореме косинусов

$$\begin{cases} AB^2 = AP^2 + BP^2 - 2 \cdot AP \cdot BP \cdot \cos(\angle APB), \\ AC^2 = AP^2 + CP^2 - 2 \cdot AP \cdot CP \cdot \cos(\angle APC). \end{cases}$$

Так как $AB = AC$ и $\angle APC = \angle APB = 60^\circ$, получим:

$$AP^2 + BP^2 - AP \cdot BP \cdot = AP^2 + CP^2 - AP \cdot CP,$$

$$BP^2 - CP^2 = AP \cdot (BP - CP),$$

$$AP = BP - CP.$$

Подставим значения $BP = 3$ и $CP = 4$ и получим $AP = 7$. Ответ: 7.

Задача 1.5

Пусть на доске записаны 4 числа a, b, c и d. Пусть НОД$(a, b) = 2$, тогда НОД$(c, d) = 4$ быть не может, так как НОД всех пар будет кратным 2.

Значит, пусть НОД$(a, c) = 4$ и тогда d будет нечётным числом. Исходя из записанных равенств, можно выписать следующие:

$$a = 4 \cdot a_4 = 2 \cdot a_2$$

$$b = 2 \cdot b_2$$

$$c = 4 \cdot c_4$$

При этом НОД$(a_2, b_2) = 1$ и НОД$(a_4, c_4) = 1$. Очевидно также, что НОД$(b, c) = 2 \cdot x$ – то есть это последняя искомая пара. Попробуем подобрать значения a, b, c и d так, чтобы они удовлетворяли всем равенствам и из НОД оставшихся пар равнялись указанным значениям. Например, $a = 4$, $b = 10$, $c = 12$ и $d = 15$. Таким образом, наименьшее возможное значение равно 2. Ответ: 2.

Задача 1.6

Пусть загаданное число $X = A \cdot B$, где A – наименьший делитель, B – наибольший. Тогда $A + 77 = B$. $X = A \cdot (A + 77) \to min$. Так как $A \neg 1$, то минимум достигается при $A = 2$. Таким образом, $X = 2 \cdot 79 = 158$. Ответ: 158.

Задача 1.7

Каждая комбинация цифр на циферблате отображается ровно 1 минуту, следовательно в задаче требуется найти количество соответствующих комбинаций. В группе цифр, отображающей часы может встретиться только 0 или 1 тройка. В остальных – 0, 1 или 2. Четыре тройки можно получить из следующих комбинаций: $X_1 = Q([0] : [2] : [2])$, $X_2 = Q([1] : [1] : [2])$, $X_3 = Q([1] : [2] : [1])$. Q – количество комбинаций в соответствии с количеством троек в группах цифр циферблата, соответствующих часам, минутам, секундам. $X_1 = 21 \cdot 1 \cdot 1$. $X_2 = 3 \cdot 14 \cdot 1$. $X_3 = 3 \cdot 1 \cdot 14$. $X = X_1 + X_2 + X_3 = 21 + 42 + 42 = 105$. Ответ: 105.

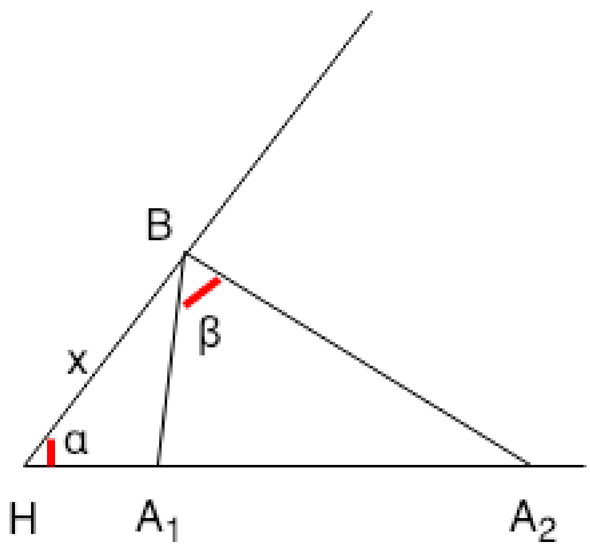
Задача 1.8

$$x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 + 1),$$
$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) - 4xy(x + y) = 4,$$

$$(x+y)(x^2-5xy+y^2)=4.$$

В левой части множители могут принимать только следующие пары значений: (-4, 1), (-2, -2), (-1, -4), (1, 4), (2, 2), (4, 1). Все 6 систем уравнений не дают целых корней. Ответ: 0.

Задача 1.9



Обозначим $\alpha = \angle BAA_2 = 60°$, $\beta = \angle A_1BA_2$, $x = BH$. По теореме косинусов выразим A_1B и A_2B и подставим значения $A_1 = 2B$ и $A_1A_2 = 8$ из условия:

$$A_1B^2 = x^2 + A_1H^2 - 2xA_1H \cdot \cos\alpha = x^2 + 4 - 2x,$$

$$A_2B^2 = x^2 + A_2H^2 - 2xA_2H \cdot \cos\alpha = x^2 + 100 - 10x.$$

Рассмотрим $\triangle A_1BA_2$, по теореме косинусов:

$$A_1A_2{}^2 = A_1B^2 + A_2B^2 - 2A_1B \cdot A_2B\cos\beta.$$

Выразим $\cos\beta$:

$$\cos\beta = \frac{A_1B^2 + A_2B^2 - A_1A_2{}^2}{2A_1B \cdot A_2B} = \frac{x^2+4-2x+x^2+100-10x-64}{2\sqrt{x^2+4-2x}\cdot\sqrt{x^2+100-10x}} =$$

$$= \frac{x^2-6x+20}{\sqrt{x^2+4-2x}\cdot\sqrt{x^2+100-10x}}.$$

Для максимизации острого угла A_1BA_2 требуется, найти x, при котором достигается $min(\cos\beta)$. Решим уравнение $(\cos\beta)'_x = 0$ и найдем точку минимума. $x = 2\sqrt{5} \approx 4.472135955$. Ответ: 4.472135955.

Задача 1.10

Расстояние между точкой с координатами (x_0, y_0, z_0) и плоскостью, задаваемой уравнением $Ax + By + Cx + D = 0$ вычисляется по формуле:

$$S = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Для заданных точки и плоскости

$$S = \frac{|2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 - 4 \cdot 6 - 6|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2}} = 3.$$

Ответ: 3.