Решения

Задача 2.1

За один вопрос можно сократить перебираемое множество вдвое. Таким образом, достаточно двух вопросов. Ответ: 2.

Задача 2.2

Подставим точки в уравнение и решим систему:

$$\begin{cases} 1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c, \\ 2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c, \\ 1 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c; \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 1, \\ a + b = 1, \\ 2a + b = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1, \\ b = 2, \\ c = 1. \end{cases}$$

Уравнение параболы с вычисленными коэффициентами $y = -x^2 + 2x + 1$. Найдем абсциссу точки перегиба:

$$y'_x = 0 \Leftrightarrow -2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

При x = 1 y = 2. Ответ: (1, 2).

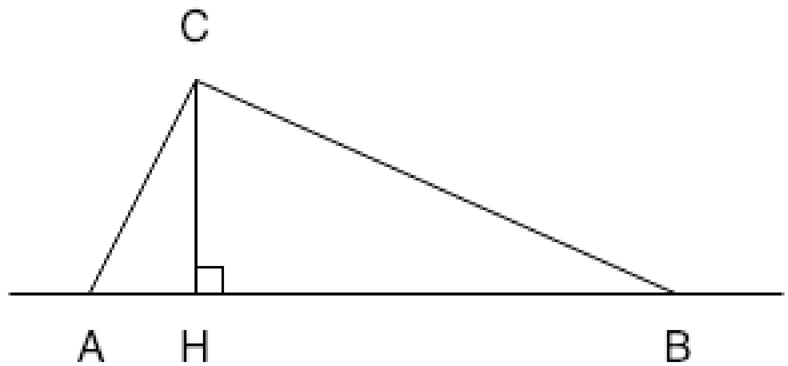
Задача 2.3

Выразим корень уравнения: $x = -A/3$. Таким образом, $x \in [-2/3, -1/3]$. Значит

$$P(x \in [-2/3, -0.4]) = \frac{-0.4 + 2/3}{1/3} = 2 - 1.2 = 0.8.$$

Ответ: 0.8.

Задача 2.4



Наикратчайший путь равен длине перпендикуляра, опущенного из вершины C к прямой AB. По длинам сторон очевидно, что $\triangle ABC$ – прямойгольный, с прямым углом в вершине $C(7^2+24^2=25^2)$. Так, согласно свойству прямоугольного треугольника, $CH = AC \cdot BC/AB = 6.72$. Ответ: 6.72.

Задача 2.5

В данной задаче необходимо найти такое натуральное максимальное n, при котором $\exists a \forall x \in N : x < n \Rightarrow x < a^x < x+1$. Выпишем границы интервалов $(\sqrt[x]{x}, \sqrt[x]{x+1})$ для нескольких первых значений x.

x	Левая граница a	Правая граница a
1	1	2
2	$\sqrt[2]{2} = 1.41421356$	$\sqrt[2]{3} = 1.73205081$
3	$\sqrt[3]{3} = 1.44224957$	$\sqrt[3]{4} = 1.58740105$
4	$\sqrt[4]{4} = 1.41421356$	$\sqrt[4]{5} = 1.49534878$
5	$\sqrt[5]{5} = 1.37972966$	$\sqrt[5]{6} = 1.43096908$
...	...	...

По таблице видно, что $\sqrt[5]{6} < \sqrt[3]{3}$. Таким образом, $n = 4$ – наибольшее значение, удовлетворяющее условию задачи. Ответ: 4.

Задача 2.6

В данной задаче надо проверить делимость произведения чисел. $x \cdot (x+2) \cdot (x+3) \cdot (x+4)$ гарантированно делится на 2 и на 3, так как содержит произведение последовательно идущих 3 чисел. Делимость на остальные числа при любом x гарантировать нельзя. Ответ: 6.

Задача 2.7

Первый может выбросить 9 различных наборов (последовательность не учитывается). Если в наборе x орлов, то количество возможных вариантов второго игрока, удовлетворяющих условию $(9-x)$. Всего возможных способов выкинуть наборы у обоих игроков: $9 \cdot 10 = 90$.

$$P = \frac{\sum\limits_{x=0}^{8} 9 - x}{90} = 0.5.$$

Ответ: 0.5.

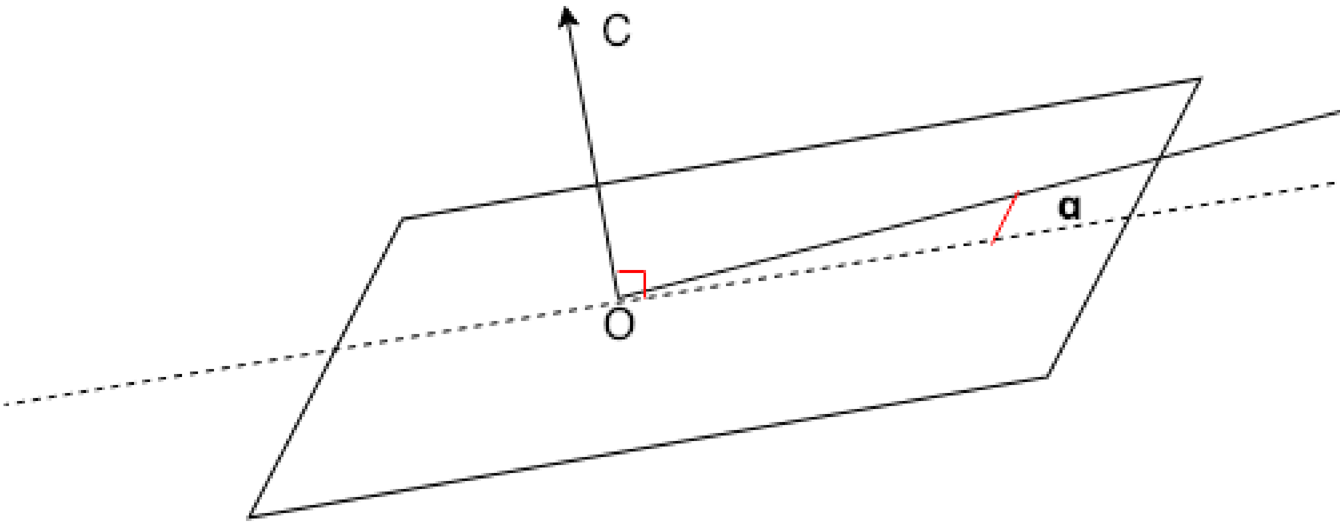
Задача 2.8

Постепенно раскрывая скобки найдем сумму коэффициентов полинома $(x^2 - 3x + 1)^n$ для n, начиная с 1.

n	Сумма коэффициентов
1	-1
2	1
3	-1
4	1
...	...

Подметим, что при нечётном n сумма коэффициентов равна -1, а при чётном – 1. Ответ: 1.

Задача 2.9



$$\cos\alpha = \frac{|(\vec{OB}, \vec{OC})|}{|\vec{OB}| \cdot |\vec{OC}|} = \frac{20}{\sqrt{25+144}\sqrt{16+9}} = \frac{4}{13},$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = 0.9514859.$$

Ответ: 0.9514859.

Задача 2.10

Обозначим искомый угол буквой α. $\angle BAC = 45^\circ \Rightarrow \angle OAC = 45^\circ - \alpha$. $\angle OCA = 15^\circ \Rightarrow \angle AOC = 120^\circ + \alpha$. $\angle OCB = \angle OBC = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ \Rightarrow \angle BOC = 90^\circ$. $\angle ABO = 30^\circ$. По теореме синусов:

$$\frac{\sin\alpha}{OB} = \frac{\sin 30^\circ}{AO} \Rightarrow AO = \frac{OB}{2\sin\alpha}$$

$$\frac{\sin 15^\circ}{OA} = \frac{\sin(45^\circ - \alpha)}{OC} \Rightarrow AO = \frac{OC\sin 15^\circ}{\sin(45^\circ - \alpha)}$$

Так как $OB = OC$,

$$\sin(45^\circ - \alpha) = 2\sin\alpha\sin 15^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ.$$

Ответ: 30.