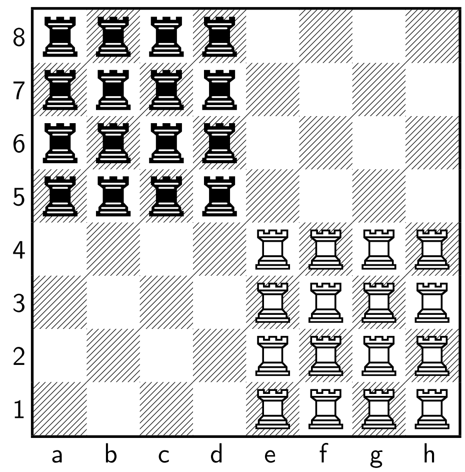
Решения

Задача 3.1

Необходимо расставить ладьи одного цвета так, что на одной горизонтали с каждой из них было еще 3 и на одной вертикали 3 другие. Таким образом, в каждой строке или столбце ровно 4 ладьи одного цвета. Например:



Ответ: 16.

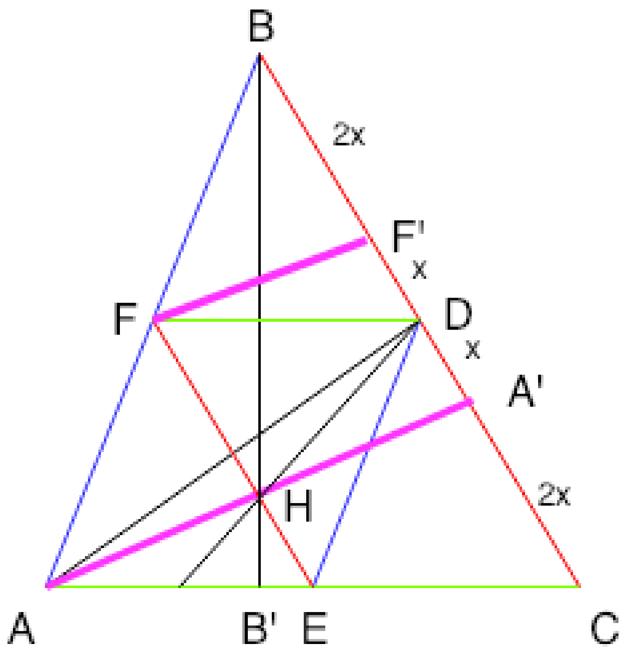
Задача 3.2

Обе функции в левой и правой частях уравнения выпуклые, единственный корень у уравнения возникает тогда, когда $y = a^x$ касается прямой $y = x$, то есть $f(x_0) = x_0$ и $f'(x_0) = a^{x_0} \ln a = 1$. Отсюда $x_0 = \frac{1}{\ln a}$, т.е. $e = a^{\frac{1}{\ln a}} = \frac{1}{\ln a}$, $\ln a = \frac{1}{e}$, $a = e^{\frac{1}{e}} = 1.44466786$. Ответ: 1.44466786.

Задача 3.3

Количество слов из 3 букв длиной n $W_n = 3^N$. Так $W = 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 = 1080$. Ответ: 1080.

Задача 3.4



Рассмотрим $\triangle ABC$: DE, EF, DF – медианы, AA', BB' – высоты. $BD = DC$. В $\triangle ADE$: медианы пересекаются в точке H, которая разделяет их в отношении $2:1$. Из подобия треугольников очевидно, что $DA' : A'C = 1 : 2$. Пусть $AD = x$, $A'C = 2x$. $FH = 2\cdot(HE + HE/2) - HE = 2HE = 2x$ По свойству паралелограмма, образованного медианами FE и BC, перпендикулярами AA' и FF': $FH = F'A' = 2x$ и $FF' = HA'$, $F'D = x$. Также из подобия треугольников $BF' = 2x$, $FF' = HA' = AH$.
Рассмотрим $\triangle BA'H \sim \triangle AHE$(по 2 углам). $A'B : A'H = A'H : HE \Rightarrow A'H = \sqrt{A'B \cdot HE} = \sqrt{4x^2} = 2x = EF' = BF'$. Так, $\triangle BF'F$ – прямоугольный равнобедренный, и угол при основании $\angle FBF' = 45°$.
Ответ: 45.

Задача 3.5

Все натуральные числа вида $(1 + x^n)$, где n – нечетное число, делятся нацело на $(1 + x)$.
Таким образом, вычеркнем все числа, где n = 1, 3, 5, 7, 9, 11 и 13. 15 оставляем.
Далее заменим x^2 на y. По аналогии вычеркнем числа, где n = 2, 6, 10.

14 оставляем.
Далее заменим x^3 на z. $n = 3$, 9 – вычеркнуты. 15 оставляем. Далее заменим x^4 на w. По аналогии вычеркнем число, где $n = 4$. 12 оставляем.
Далее заменим x^5 на v. $n = 5$ вычеркнуто. 15 оставляем.
Далее нет смысла перебирать, так как $3n > 15$. Оставшиеся числа взаимнопростые. Таким образом, минимально мы вычеркнули 11 чисел (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13). Ответ: 11.

Задача 3.6

Найдем первое значение для перебора: $\frac{5x+2x+4x}{9} \approx 120 \Leftrightarrow x \approx 98$. Проверим значение:

$$\left[\frac{5 \cdot 98}{9}\right] + \left[\frac{2 \cdot 98}{9}\right] + \left[\frac{4 \cdot 98}{9}\right] = 54 + 22 + 44 = 120.$$

Ответ: 98.

Задача 3.7

$$H(t_0) = at_0^2 + bt_0 + c = 0,$$
$$H'(t_0) = 2at_0 + b = 0.$$

Выразим b и c через a и t_0:

$$b = -2at_0,$$

$$c = at_0^2.$$

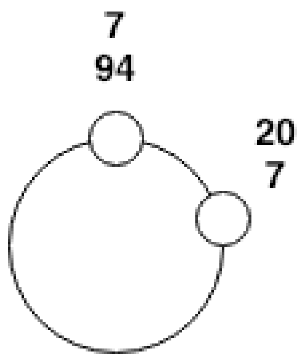
Пусть τ – время достижения половинного уровня.

$$2H(\tau) = H(0),$$

$$2(a\tau^2 + (-2at_0)\tau + at_0^2) = at_0^2,$$
$$2\tau^2 - 4t_0\tau + t_0^2 = 0,$$
$$D = 16t_0^2 - 4 \cdot 2t_0^2 = 8t_0^2,$$
$$\tau = \frac{4t_0 \pm 2\sqrt{2}t_0}{2 \cdot 2} = t_0 \pm t_0/\sqrt{2}.$$

Так как $\tau < t_0$ из условия, то $\tau = t_0 \cdot (2 - \sqrt{2})/2$, то есть $t_0 = \tau(2 + \sqrt{2})$, то есть $[t_0] = [1 \cdot (2 + \sqrt{2})] = 3$. Ответ: 3.

Задача 3.8

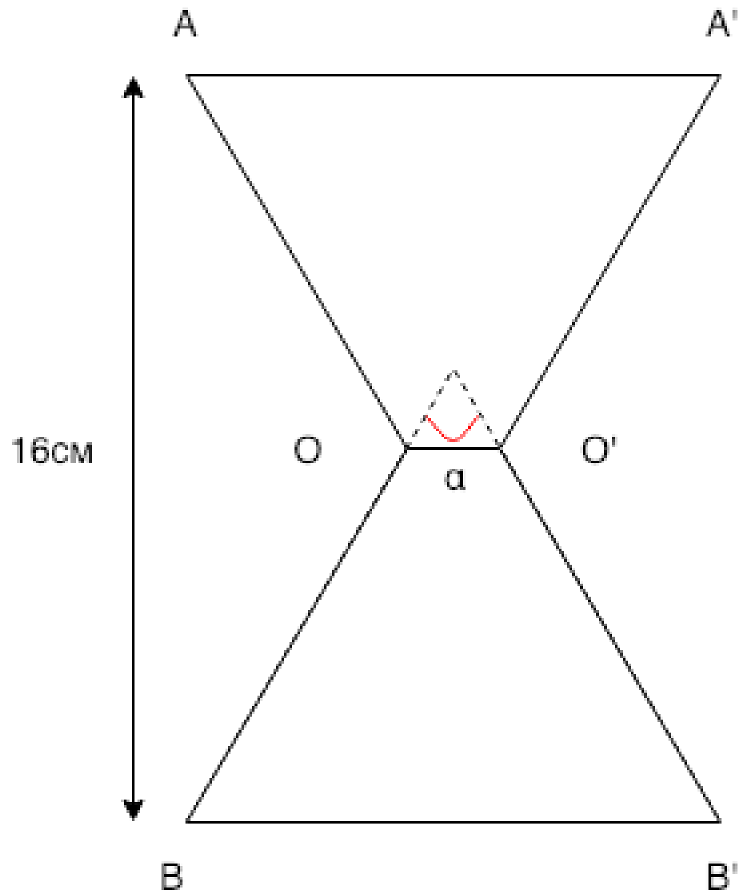


Считаем по обеим дугам количество стульев, включая один из двух крайних: $20 - 7 + 94 - 7 = 100$. Ответ: 100.

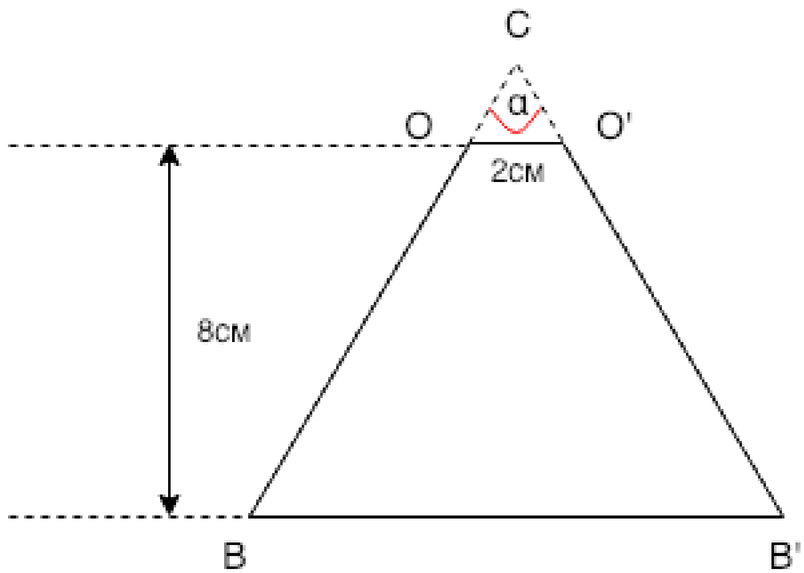
Задача 3.9

Пусть a, b, c, d, e – количество шаров в 1, 2, 3, 4 и 5 часы соответственно. $a \geq b \geq c \geq d \geq e$, $a + b + c + d + e = 100$, $b + d <= a + c$, требуется найти $\min(a + c + e)$. Данная задача сводится к поиску $\max(b + d)$. Так как $b + d <= a + c$, а $a + b + c + d + e = 100$, то $b + d \leq 100/2 = 50$. Такой случай легко придумать: $a, b, c, d, e = 25, 25, 25, 25, 0$. Таким образом, $\min(a + c + e) = 100 - \max(b + d) = 50$. Ответ: 50.

Задача 3.10



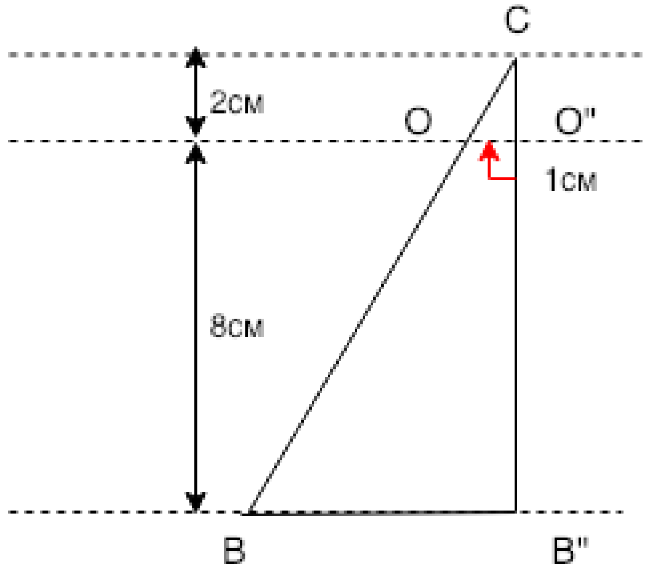
Рассмотрим один из конусов.



$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha},$$
$$cos\alpha = \frac{3}{5}.$$

Пусть $OC = O'C = x$, по теореме косинусов: $OO'^2 = x^2+x^2-2x\cdot x\cos\alpha = \frac{4x^2}{5}$, $x=\sqrt{5}$. Опустим перпендикуляр CO'' к OO''.

$$CO'' = \sqrt{x^2 - OO''^2} = \sqrt{5-1} = 2$$



Из подобия треугольников $BB'' = 5$. Объем песочных часов, т.е. удвоенный объем усеченного конуса, равен

$$V = \frac{2}{3}\pi O''B''(OO''^2 + OO''BB'' + BB''^2) = \frac{2\pi}{3} \cdot 8 \cdot (1+5+25) = 519.409 \approx 519.$$

Ответ: 519.