UNIVERSITÉ ABDELHAMID MAHRI – CONSTANTINE 2-
FACULTÉ DES INTIC
DÉPARTEMENT TRONC COMMUN "MI"

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2020/2021
1 ÈRE ANNÉE MI
ALGEBRE I

SÉRIE TD N°3

RELATIONS BINAIRES

Exercice 1 :

Soit $\mathbb{P}^*$ l'ensemble des nombres premiers strictement supérieurs a 2, et soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur l'ensemble $\mathbb{P}^*$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{P}^* \times \mathbb{P}^*, \qquad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} \in \mathbb{P}^*$$

- La relation $\mathcal{R}$ est elle réflexive ? symétrique ? transitive ? antisymétrique ?

Exercice 2 :

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $\mathbb{Z}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \qquad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \equiv y[3]$$

- Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
- Donner la classe d'équivalence de 0, 1, 2.

Exercice 3 :

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$$

- Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
- Déterminer la classe d'équivalence $\bar{x}$ pour tout réel x.
- Déterminer l'ensemble quotient.

Exercice 4 :

Soit l'application $f: E \longrightarrow F$, on définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E par :

$$\forall (x,y) \in E \times E, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

- Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
- Décrire la classe d'équivalence $\bar{x}$ de l'élément $x \in E$.

Soit l'application $g: {}^{E}/_{\mathcal{R}} \longrightarrow F$

$$\bar{x} \longrightarrow g(\bar{x})$$

- g est elle bien définie ?
- Montrer que g est injective. Que peut on conclure sur l'ensemble quotient ${}^{E}/_{\mathcal{R}}$.

Exercice 5 :

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $\mathbb{N}^*$ définie par : $\forall (a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a\ divise\ b$

- Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.
- $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total ou partiel ?

Exercice 6 :

Dans $\mathbb{N}^*$, on définit une relation $\ll$ par :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \qquad x \ll y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* / y = x^n$$

- Démontrer que $\ll$ est une relation d'ordre partiel.
- Soit deux ensembles $A = \{2,4,16\}\ et\ B = \{3,9,27,729\}$.

Déterminer le plus grand élément et le plus petit élément de $A\ et\ B$.