Université :Abdelhamid Mehri Constantine 2

DEPARTEMENT MATH ET INFORMATIQUE

ANALYSE 1

Enseignante :Benzeghba Soumeya

Table des matières

7) **Suite extraite (partielle)………………………………………**

8) **Suite récurrente………………………………………………**

Chapitre 1

Corps des nombres réelles

1) Introduction

L'ensemble $\mathbb{N}$={0,1,2,...} des entiers naturels est à base de dénombrement, $\mathbb{N}$ muni de l'addition(+) n'est pas un groupe en effet x+2=0 n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$ ceci conduit à la construction d'in nouveau l'ensemble Z = {...,−2,−1,0,1,2,...} des entiers relatifs qui a pour but de pouvoir résoudre toute les équations de la forme x+b = a, mais $\mathbb{Z}$ ne donne pas la solution de l'équation 2x=1 et donc ceci amène à la construction de corps commutatif ordonné pour les deux lois internes(+,.) et la relation d'ordre $\leq$ dans $\mathbb{Q}$, il n'existe pas de nombre rationnel de carré égale à 2 l'équation x^2 = 2 n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$ ceci nous a amené à construire un ensemble plus grand on appelle les nombres réel .

2) QUATORZE AXIOMES de $\mathbb{R}$: Nous supposons donné un ensemble $\mathbb{R}$ sur lequel sont définies des opérations d'addition x, y → x+y et de multiplication x, y → x· y = xy et une relation d'ordre x $\leq$ y obéissant aux quatorze axiomes suivants.

2-1 Les axiomes de l'arithmétique Toutes les règles de l'arithmétique d´écoulent des neuf premiers axiomes.

A1) Quels que soient x, y et z $\in\mathbb{R}$,

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

A2) Quels que soient x et y $\in \mathbb{R}$,

$$x + y = y + x$$

A3) Il existe un ´élément 0 $\in \mathbb{R}$ tel que, pour tout x $\in\mathbb{R}$,

$$x + 0 = x$$

A4) A chaque x $\in \mathbb{R}$ correspond un ´élément −x $\in \mathbb{R}$ tel que

$$x + (-x) = 0.$$

L'associativité (axiome A1) et la commutativité (axiome A2) de l'addition font que l'on peut ´écrire sans équivoque la somme de trois nombres x, y et z sous la forme x + y + z et permettent l'utilisation de la notation Σ pour désigner une somme comportant n termes :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \dots . + a_n.$$

L'élément neutre pour l'addition (axiome A3) est unique car si $0'$ avait la même propriété que 0, on aurait $0' = 0' + 0 = 0$. De même, l'inverse additif d'un nombre (axiome A4) est uniquement défini car si $-x'$ avait la même propriété que −x, on aurait

$$-x' = (-x') + 0 = (-x') + x + (-x) = 0 + (-x) = -x.$$

Observons que $-0 = (-0) + 0 = 0$. Soustraire y de x, c'est additionner −y à x et l'on ´écrit

$$x + (-y) = x - y.$$

A5) Quels que soient x, y et z $\in\mathbb{R}$, $x(yz) = (xy)z$

A6) Quels que soient x et y $\in\mathbb{R}$,

$$Xy = yx$$

A7) Il existe un élément $1 \neq 0 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$x1 = x$$

A8) A chaque $x \neq 0 \in \mathbb{R}$ correspond un élément $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tel que

$$xx^{-1} = 1.$$

L'associativité (axiome A5) et la commutativité (axiome A6) de la multiplication font que l'on peut écrire sans équivoque le produit de trois nombres x, y et z sous la forme xyz et permettent l'utilisation de la notation Π pour désigner un produit comportant n termes :

$$\prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 a_1 a_2 \dots\dots a_n$$

L'élément neutre pour la multiplication (axiome A7) est unique car si $1'$ avait la même propriété que 1, on aurait $1' = 1'\,1 = 1$. De même, l'inverse multiplicatif d'un nombre non nul (axiome A8) est uniquement défini car si $(x^{-1})'$avait la même propriété que x^{-1} , on aurait

$$(x^{-1})' = (x^{-1})'1 = (x^{-1})'xx^{-1} = 1x^{-1} = x^{-1}$$

Observons que

$$1^{-1} = 1^{-1}1 = 1$$

Diviser x par $y \neq 0$, c'est multiplier x par y^{-1} et l'on ´écrit aussi $y^{-1} = \frac{1}{y}$ pour d´designer l'inverse multiplicatif.

Les opérations d'addition et de multiplication sont reliées par l'axiome de distributivité

A9) Quels que soient x, y et z ∈ R, $x (y + z) = xy + xz$. La première conséquence de cet axiome est que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$,

$$0x = 0.$$

En effet, $0x = (0 + 0) x = 0x + 0x$ et le résultat suit en soustrayant 0x de chaque membre de l´équation. En conséquence, 0 n'a pas d'inverse multiplicatif : si 0^{-1} existait, on aurait en effet

$$1 = 00^{-1} = 0$$

Ce qui est exclu. De plus, quel que soit $x \in \mathbb{R}$,

$$-x = (-1) x.$$

2-2 La relation d'ordre :

A10) Quels que soient x et $y \in \mathbb{R}$, une et une seule des trois possibilités suivantes est réalisée

$$\mathbf{x > y \quad ou\ x = y \quad ou\ x < y \quad .}$$

A11) Quels que soient x, y et $z \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{x > y \quad et \quad y > z \quad \Rightarrow x > z.}$$

A12) Quels que soient x, y et $z \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{x > y \qquad \Rightarrow \qquad x + z > y + z.}$$

A13) Quels que soient x, y et $z \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{x > y\ et\ z > 0 \qquad \Rightarrow \qquad xz > yz.}$$

Les propriétés usuelles des inégalités d´écoulent toutes de ces quatre axiomes

$x > y$ est équivalent à $x-y > 0$.

Conséquence directe de l'axiome A12. $x > y$ et $z < 0$ impliquent $xz < yz$.

En éffet

$0 > z$ et $x-y > 0$ impliquent $0(x-y) > z (x-y)$ (axiomeA13),

C'est-`a-dire $0 > xz-yz$ puis $yz > xz$.

x > y et a ≥ b impliquent x+ a > y + b. En effet, x + a > y + a et a + y ≥ b + y impliquent, par transitivité (axiome A11), x+ a > b + y.

x > y > 0 et a ≥ b > 0 impliquent ax > by. En effet, ax > ay et ay ≥ by impliquent ax > by.

x > 0 implique −x < 0 et x^{-1}> 0.

2-3 L'axiome de la borne supérieure Cet axiome porte sur des ensembles de nombres réels, les parties (sous-ensembles) de$\mathbb{R}$. Une partie E ⊆ $\mathbb{R}$ est dite bornée supérieurement s'il existe
β ∈ $\mathbb{R}$ tel que, pour tout x ∈ E, x ≤ β. Le nombre β est alors une borne supérieure ou un majorant pour E — s'il existe une borne supérieure, il en existe une infinité. Une partie E ⊆R est dite bornée inférieurement s'il existe α ∈R tel que, pour tout x ∈ E,
α ≤ x. Le nombre α est alors une borne inferieure ou un minorant pour E — s'il existe une borne inferieure, il en existe une infinité. L'ensemble E est dit borné s'il est borné à la fois supérieurement et inférieurement.
A14) Tout ensemble ∅⊆ E ⊆ $\mathbb{R}$ non vide de nombres réels qui est borné supérieurement admet une plus petite borne supérieure.

De par sa dentition même, la plus petite borne supérieure b d'un ensemble E borné supérieurement est unique. C'est la borne supérieure de E. On la ´dénote par le symbole sup

b = supE = sup{x | x ∈ E}= sup x∈E .Elle est donc caractérisée par les deux relations suivantes pour tout x ∈ E, x ≤ b et b est le plus petit des majorant

2-3-1 Borne Supérieure, partie majoré de$\mathbb{R}$

Définition on dit qu'une partie non vide E de $\mathbb{R}$ est majorée quand il existe un réel M ∈ $\mathbb{R}$ tel que ∀x ∈E, x ≤ M un tel réel M s'appelle un majorant de E

Remarque Si M est un majorant de E, tout réel Supérieur à M est aussi un majorant de E, donc une **partie majorée de$\mathbb{R}$ admet une infinité de majorant LE PLUS PETIT DE CES MAJORANT ON L'APPELLE BORNE SUPERIEUR SUP si supE appartienne à E on appelle max E**

Exemple

1) E =] A, B] pour tout xϵE on a x≤ B alors E est majoré l'ensemble des majorant $[B.;+\infty[$ (une infinité de majorant) le plus petit de ces majorant est B alors supE= B= maxE

2) E =$]-\infty;A[$ pour tout xϵE on a x< A alors E est majoré l'ensemble des majorant $[A;+\infty[$

(Une infinité de majorant) le plus petit de ces majorant est A alors supE= A ∉E donc max E il n'existe pas.

3) E =]A,+∞]   pour tout $x\epsilon$E on a   x$>$ A alors E n'est pas majoré l'ensemble des majorant n'existe pas ;le plus petit de ces majorant supE= n'existe pas alors max E il n'existe pas ..

E=$\{-1; 25; 9; 100; 1212; 32452\}$ Pour tout $x\epsilon$E on a   x$\leq$ 32452 alors E est majoré l'ensemble des majorant $[32452; +\infty[$ (Une infinité de majorant) le plus petit de ces majorant est 32452 alors supE= 32452=maxE.

<u>Propriétés Caractéristique de la borne Supérieure</u> Soit M un majorant de E, Alors on a :

$$\text{M=supE} \Leftrightarrow \begin{cases} (\forall \mathrm{x} \ \in \ \mathrm{E}, \mathrm{x} \ \leq \ \mathrm{M} \ \ (1) \\ \forall \mathcal{E} > 0; \exists x_{\varepsilon} \in \ \mathrm{E}, x_{\varepsilon} \ > \ \mathrm{M} \ - \varepsilon(2) \end{cases}$$

<u>2-3-2 Borne Inférieure, partie minorée de$\mathbb{R}$</u>

Définition : On dit qu'une partie E de$\mathbb{R}$ est minorée quand il existe un réel m tq : ∀x ∈ E, x ≥ m un tel réel m s'appelle un minorant de E

Remarque si m est un minorant de E tout réel inférieur a m est aussi un minorant de E donc une partie minorée de $\mathbb{R}$ admet une infinité de minorant **le plus grand de ces minorant on appelle borne inferieur inf E.si il appartienne à E on le note min E**

<u>Propriétés Caractéristique de la borne Supérieure</u> Soit M un majorant de E, Alors on a :

$$\text{M=supE} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \mathrm{x} \ \in \ \mathrm{E}, \mathrm{x} \ \geq \ \mathrm{M} \qquad\qquad (1) \\ \forall \mathcal{E} > 0; \exists x_{\varepsilon} \in \ \mathrm{E}, x_{\varepsilon} \ < \ \mathrm{M} + \varepsilon \quad\ (2) \end{cases}$$

<u>Exemple</u>

1) E =] A, B]   pour tout $x\epsilon$E on a   x$>$ A alors E est Minore l'ensemble des minorant $]-\infty.; A]$ (une infinité de Minorant) le plus grand de ces minorant est A alors inf E=A min E IL il n'existe pas
2) E =$]-\infty; A[$ pour tout $x\epsilon$E on a   x$<$ A alors E n'est pas minoré l'ensemble des minorant n'existe pas min E n'existe pas
3) E =$[\mathrm{A}, +\infty \ \ [$ pour tout $x\epsilon$E on a   x$\geq$ A alors E est minoré l'ensemble des minorant $]-\infty; A]$; le plus grand de ces minorant inf E= A ∈ Edoc minE=A

4) E=$\{-1; 25; 9; 100; 1212; 32452\}$ Pour tout $x\epsilon$E on a   x$\geq$ -1 alors E est minoré l'ensemble des minorant $]-\infty; -1]$(Une infinité de minorant) inf E=-1=minE

3) Valeur absolue d'un réel

Définition : On appelle valeur absolue de x $\in\mathbb{R}$,le réel positif noté |x| défini par :

$$|x|=\begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Propriétés :

1) $\forall x \in\mathbb{R}$, $|x|>0$

2) $\forall x \in\mathbb{R}$, $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$

3) $\forall x \in R$, $|x|=|-x|$

4) $\forall x,y \in\mathbb{R}$, $|x.y|=|x|.|y|$

5) $\forall x,y \in\mathbb{R}$,$|x+y|\leq|x|+|y|$

6) $\forall x \in\mathbb{R}$, $\forall a \in\mathbb{R}^+$; $|x|\leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$ $|x|> a \Leftrightarrow \begin{cases} x > a \\ x < -a \end{cases}$

7) $x \in\mathbb{R}$, $\sqrt{x^2}=|x|$

8) $||x|-|y||\leq|x-y|$

9) $\forall x, y \in\mathbb{R}$ $\max(x,y)=\frac{x+y+|x-y|}{2}$; $\min(x,y)=\frac{x+y-|x-y|}{2}$

4) Intervalles

Définition Pour a, b $\in\mathbb{R}$ tq : a < b on définit :

$[a, b]=\{x \in\mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$

$[a, b[=\{x \in\mathbb{R}, a \leq x < b\}$

$]a, b[=\{x \in\mathbb{R} , a < x < b\}$

$]-\infty, a[=\{x \in\mathbb{R}, x < a\}$

$[a, +\infty[=\{x \in\mathbb{R}, x \geq a\}$

$]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$ les intervalles]-∞,a],[a,+∞[,[a,b]sont appelés des intervalles fermés.

Les intervalles] a, b [,]-∞, a [;] a,+∞[sont appelés des intervalles ouverts.

les intervalles [a,b[,]a,b]sont appelés des intervalles semi-ouverts ou semi-fermés.

Les réels a et b sont appelés les extrémités de l'intervalle

5) Théorème d'Archimède

Théorème : $\forall x \in \mathbb{R}^{+}$, $\exists n \in N*$, $n \geq x$ (pour tout réelle positif il existe un entier naturelle plus grand que ce réelle).

Remarque Théorème d'Archimède signifie que $\mathbb{N}$ n'est pas majorée (sup$\mathbb{N}$ n'existe pas ;inf $\mathbb{N} = 0$)

6) Propriétés de la borne Supérieure

Propriétés

1) $A \subset B$ A et B bornées $\Rightarrow$supA ≤ supB et infA ≥ infB

2) A et B bornées$\Rightarrow$ A∪B est borné et sup(A∪B)=max (supA, supB) et inf(A∪B)=min (infA, infB)

3) Si $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow$ A∩B borné, sup(A∩B)≤min(supA,supB) et inf(A∩B)>max(supA, supB)

4) sup (−A)=−infA et inf (−A)=−supA ; sup (A+B)=supA+supB et inf (A+B)=infA+infB

5) A.B ={a = x.y ,x ∈ A, y ∈ B}} , sup(A.B)=supA. SupB et inf(AB)=infA. InfB

6) A+B = {a = x+y,x ∈ A,y ∈ B} ; sup(A+B)=supA+supB et inf(A+B)=infA+infB

7) Partie entière d'un réel

Définition : Soit $x \in \mathbb{R}$ on appelle partie entière de x et on note E(x) ou [x] l'entier n qui vérifie : n ≤ x < n+1 ou [x]≤ x < [x]+1

alors tout réel x peut s'écrire d'une seule manière x =[x]+α tq :0≤ α < 1 [2.5]=2 puisque : 2.5=2+0,5 et [-2.5]=-3 puisque -2.5 =-3+0.5

Propriétés 1) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^{*}$:[x+n]=[x]+n

2) $\forall x,y \in \mathbb{R}$, [x]+[y]≤ [x+y] < [x]+[y]+1

3) $\forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$: [−x]=−[x]−1

4) $\forall x,y \in \mathbb{R}$:[x]≤[y]

8) Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème : entre deux réels différents il existe un rationnel

Remarque entre 2 réels différents il existe une infinité de rationnel

9) **L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ *ou la droite achevée* :** $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty;+\infty\}=[-\infty;+\infty]$

Remarque toute partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure. Toutes les opérations dans $\overline{\mathbb{R}}$ sont de la forme :

1) $\forall x \in\mathbb{R}$; $x+(+\infty)=+\infty$
2) $x+(-\infty)=-\infty$
3) $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$
4) $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$
5) $\forall x \in\mathbb{R}_*^+$; $x\,(+\infty)=+\infty$; $x\,(-\infty)=-\infty$
6) $\forall x \in\mathbb{R}_*^-$ $x\,(+\infty)=-\infty$; $x\,(-\infty)=+\infty$
7) $(+\infty).(+\infty)=+\infty$; $(-\infty).(-\infty)=+\infty$; $(+\infty).(-\infty)=-\infty$
8) $\forall x \in\mathbb{R}$ $-\infty < x < +\infty$ $\sup\overline{\mathbb{R}}=+\infty$; $\inf\overline{\mathbb{R}}=-\infty$; donc $\overline{\mathbb{R}}$ est bornée

$0\times(+\infty)$, $(+\infty)+(-\infty)$, $(-\infty)\times 0$ ce sont les cas indéfinie il non pas de solution dans $\overline{\mathbb{R}}$

Alors $\overline{\mathbb{R}}$ n'est pas compatible pour cela on travaille avec l'ensemble des nombre réels $\mathbb{R}$.

UNIVERSITE Constantine 2 **2020-2021**

1ére année informatique **Analyse1**

SERIE TD 1
Nombre réel

Exercice1 : ***démontrer les propriétés suivantes :***

1)-$n^2 est$ **pair** ⇒n **est pair.**

2)-$\forall\ x\epsilon\mathbb{R}$ **,**$(\forall\varepsilon>0,|x|<\varepsilon\Rightarrow x=0).est\ vrais$

3)$-\forall\ x\epsilon\mathbb{R}\ ,\forall\varepsilon>0,(|x|<\varepsilon\Rightarrow x=0)$ **est faux**

3)-$\forall n\in\mathbb{N}:\sum_{k=0}^{n}2^k=2^{n+1}-1.$

4))-$\forall n\in\mathbb{N}:\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}\ ;\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

Exercice2 : ***montré que :***

1) $\forall a,b\in\mathbb{R};\left|\sqrt{|a|}-\sqrt{|b|}\right|\leq\sqrt{|a-b|}.$
2) $\forall a,b\in\mathbb{R}\ ;\ \frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leq\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$
3) $\forall x,y\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ***; [-x]=-[x]-1. (cours)***
4) $\forall x,y\in\mathbb{R}\ ;[x]+[y]\leq[x+y]\leq[x]+[y]+1$

Exercice3 : trouvez les bornes supérieures et inferieurs des ensembles suivants (sup, inf, max, min)si elles existes(cours) :

1) A=$\{1,-3,5,0,10{,}2,-5\}$
2) **B=]-5 ;2] ;C=]-∞ ;-2] ;D=[1 ;20[;E=]-4 ;+∞[.**
3) F=$\left\{\frac{2n+1}{n-2}\ ;\ n>2\right\}$; G=$\left\{-\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n+1}\ ;n\in\mathbb{N}^*\right\}$ **.**
4) **H= {-3x+1 ;x∈[-2 ;1[} ; I =**$\{x^2+\frac{1}{x^2}\ ;\ x\in\mathbb{R}^*\}$ **;J={-**x^2**+2x ;x∈]1 ;2[}**

Exercice4 : soit l'ensemble A et B définies par :

$$A=\left\{\frac{n-1}{n+4}\ ;n\in\mathbb{N}^*\right\}\ ;B=\left\{\frac{2n+3}{n+4}\ ;n\in\mathbb{N}^*\right\}$$

1) **Montrer que A est bornée, trouver la borne supérieure et inferieur de A, est ce que le maximum et minimum existe ?**
2) **Montre que si A et B deux ensembles bornée et non vide de** $\mathbb{R}$ **et A+B= {x∈**$\mathbb{R}$ **; x=a+b ,a∈A et b∈B } alors sup(A+B)=supA+ supB**

2) déduire le sup B et inf B (remarque $\frac{2n+3}{n+4}=\frac{n-1}{n+4}+\alpha$**).**

<u>Exercice5</u> : A un ensemble borné et non vide de $\mathbb{R}^+$

-1) *Soit B= {$\sqrt{x}$, x∈A} montrer que B et bornée et trouver sup B et inf B.*

-2) C= {$\frac{1}{X}$, $x \in A\}$; D= {$\frac{1}{1-x}$, $x \in A\}$ même question pour C et D (laissez pour l'étudiant)

-3) E= {x∈$\mathbb{R}^+$,a$x^2 + b \in A$,a∈$\mathbb{R}^+$et b∈ $\mathbb{R}^-$} montre que inf E=$\sqrt{\frac{1}{a}(inf A - b)}$.trouver une relation pour le sup .

<u>Exercices supplémentaires :(pour l'étudiant)</u>

-A un ensemble bornée et non vide de $\mathbb{R}^+$

B= {x∈$\mathbb{R}^+$, $x^2 \in A\}$; C= {$\alpha -$ x, $x \in A\}$

D= {y∈ℝ, $y = \frac{1}{1+x}$; $x \in]0;\frac{1}{2}]\}$

E= {x∈ℝ, $x = (-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$; $n \geq 1\}$

F= {Cos $\frac{2n\pi}{7}$; $n \in \mathbb{Z}$}. K= {sin$\frac{2n\pi}{7}$; $n \in \mathbb{Z}$}

G= {$\frac{2^n}{2^n-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$; $n \in \mathbb{N}^*$}

$$H = \left\{ \frac{1}{n^2+n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$I = \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{2n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

G=$\left\{\frac{2^n}{2^n-1}; \quad n \in \mathbb{N}^*\right\}$

montrer qu'elles sont bornées et trouver leurs sup et inf. .

Etudier l'existence des max, min.

Chapitre 2

Suites numériques

Les Suites

1)Définition : Une Suite Numérique est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$

$$F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \to F(n)$$

F(n) est une suite, on la note souvent (U_n), (V_n), (W_n) ; n ∈ N une suite réelle est une suite numérique tq : $U_n \in \mathbb{R}$ pour chaque n ∈$\mathbb{N}$, U_n est appelé terme générale de la suite, on peut considerer les suites de la forme :

a) U_n est définie par l'un de ces termes U_0 ;U_1 ; U_2 ;U_3 … … … U_n

b) U_n est définie par son terme générale par exemple $U_n = \frac{1}{n}$ ou U_n =3n+1

c) U_n est une suite récurrente exple U_0 =1 ; U_{n+1} =1+U_n

2) Suites Réelles Monotones : Soit (U_n) n∈N une suite réelle,

On dit que (U_n) n∈N est croissante (strictement croissante) si et seulement si ∀n ∈ N, $U_n \leq U_{n+1}$ ($U_n < U_{n+1}$) .

On dit que (U_n) n∈N est décroissante (strictement décroissante) si et seulement si ∀n ∈N, $U_{n+1} \leq U_n$ ($U_{n+1} < U_n$).

On dit que (U_n) n∈N est monotone si et seulement si (U_n) n∈N croissante ou (U_n) n∈N est décroissante

3) Une suite réelle est majorée et minorée : si pour tout n ∈N il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et il existe M ∈$\mathbb{R}$:

∀n ≥ n_0 , U_n ≤ M ou

U_n majorée ⇔∃n_0 ∈$\mathbb{N}$, ∃M ∈$\mathbb{R}$, ∀n ≥ n_0 , U_n ≤ M

U_n Minorée ⇔∃n_0 ∈$\mathbb{N}$, ∃m ∈R $\mathbb{R}$, ∀n ≥n_0 , U_n ≥ m

(U_n) Bornée⇔ majorée et Un minorée ou

(U_n) bornée ⇔∃n_0 ∈$\mathbb{N}$, ∃M et m ∈$\mathbb{R}$,∀n ≥ n_0 , U_n ≤ M et U_n ≥ m

Ou (U_n) bornée ⇔∃n_0 ∈$\mathbb{N}$, ∃α∈$\mathbb{R}^+$, ∀n ≥n_0 , $|U_n| \leq \alpha$

4) Convergence, Divergence, relation de la limite :

Definition On dit que la suite numérique (U_n) n ∈$\mathbb{N}$ admet une limite L quand n tend vers+∞ si :

∀ε > 0, ∃ n_0 ∈$\mathbb{N}$, ∀n ∈$\mathbb{N}$:(n > n_0 ⇒$|U_n - l| < \mathcal{E}$) et on écrit

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = L$$

■On dit que (U_n) est convergente si elle a une limite finie quand n →+∞ on écrit $\lim_{n\to+\infty} U_n = L < \infty$

■ On dit que (U_n) est divergente si elle n'est pas convergente, on écrit

$$\forall L \in \mathbb{R}, \exists \mathcal{E} > 0, \forall\, n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \wedge |U_n - L| \geq \mathcal{E}$$

Exemple :

■ $U_n = \frac{n+1}{2n}$ est convergente et converge vers $\frac{1}{2}$

■ $U_n = -(-1)^n = \begin{cases} 1 & si\ n\ pair \\ -1 & si\ n\ inpaire \end{cases}$ divergente car elle a 2 limites différentes

■ U_n = n+1 divergente car elle a une limite +∞

Proposition : Si U_n est convergente alors sa limite est unique

Démonstration : On suppose qu'il existe deux limites différentes quand n →+∞ tq :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = L_1 \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} U_n = L_2$$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = L_1$ ⇔ $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$:(n > n_1 ⇒ $|U_n - L_1| < \mathcal{E}$)

$\lim_{n\to+\infty} U_n = L_2$ ⇔ $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\, n_2 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$:(n > n_2 ⇒ $|U_n - L_2| < \mathcal{E}$)

On choisit $n_0 = \max(n_1, n_1)$ alors $\forall n \geq n_0$:

$|L_1 - L_2| = |L_1 - U_n + U_n - L_2| = |L_1 - U_n| + |L_1 - U_n| < \varepsilon + \varepsilon$

$|L_1 - L_2| < 2\varepsilon$ Si $\varepsilon \to 0$: $0 \leq |L_1 - L_2| \leq 2\,\varepsilon \to 0 \Leftarrow\Rightarrow |L_1 - L_2| = 0$ donc $L_1 = L_2$ alors la limite est unique.

Exemple montré que $U_n = \frac{1}{3n} \to 0$ et $U_n = \cos(n)^{\frac{2}{3}} \sin(\frac{1}{n}) \to 0$

Solution : On veut démontrer que

$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$:(n > n_0 ⇒ $|U_n - 0| < \mathcal{E}$

On démontre que : $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$:(n > n_0)

1) $|U_n - 0| = \left|\frac{1}{3n} - 0\right| = \frac{1}{3n} < \varepsilon \Rightarrow 3n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{3\varepsilon}$ d'après Archimède il existe n_0 ; tq $n_0 = \left[\frac{1}{3\varepsilon}\right] + 1$ alors ∀ n> $n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{3n} - 0\right| < \varepsilon$ ⇔ $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3n} = 0$

2) $|U_n - 0| = \left|\cos(n)^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{1}{n}\right) - 0\right| = \left|\cos(n)^{\frac{2}{3}} \sin(\frac{1}{n})\right| < \left|\cos(n)^{\frac{2}{3}}\right| \left|\sin(\frac{1}{n})\right| < 1.\frac{1}{n}$ puisque

$|cosx| \leq 1\ et\ |sinx| \leq |x|$; Alors $|U_n - 0| < \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$ d'après Archimède il existe $n_0 \epsilon \mathbb{N}^*$ tq

$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$; $\forall n > n_0 \Rightarrow \left|\cos(n)^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{1}{n}\right) - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \cos(n)^{\frac{2}{3}} \sin(\frac{1}{n}) = 0$

***Définition* de la limite** : Soit Un une suite réel

●U_n →+∞ quand n →+∞ ⇔∀A > 0,∃n_0 ∈ℕ,∀n ∈ℕ :(n ≥ n_0 ⇒ U_n > A) et on note : $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

●U_n →-∞ quand n →+∞ ⇔∀A > 0, ∃n_0 ∈ℕ,∀n ∈ℕ :(n ≥ n_0 ⇒ $U_n < -A$ A) et on note : $\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$

Proposition :1) toute suite convergente est bornée

2) toute suite Un →+∞ est minorée

3) toute suite Un →−∞ est majorée

Remarque il existe des suites bornées mais pas convergente, donc le contraire de la proposition n'est pas toujours vrai

Exemple : Un = sin ($\frac{n\pi}{2}$) elle est bornée mais pas convergente :|sin($\frac{n\pi}{2}$)| ≤ 1 donc bornée mais : $\lim_{n\to+\infty} \sin(\frac{n\pi}{2})$n'existe pas alors elle n'est pas convergente

U_n = n ; elle est ni bornée ni convergente

U_nConvergente ⇒ $U_n$bornée

U_n N'est pas bornée⇒ U_n n'est pas convergente

Alors pour démontré que $U_n$est divergente il suffit de démontrer que U_n n'est pas bornée

Théorème : 1) toute suite réelle croissante et majorée est convergente.

2) toute suite réelle décroissante et minorée est convergente.

Exemple : $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ montré que $U_n$est convergente

Solution : pour démontrer que U_n convergente il suffit de montrer que U_n croissante majorée ou décroissante minorée

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

$$= \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots .. \frac{1}{n+1+n} + \frac{1}{n+n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots .. \frac{1}{n+n}\right)$$

$$= \frac{1}{n+n+1} + \frac{1}{n+n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(2n+1)} > 0$$

Donc elle est croissante il reste de montrer majorée

$$n+1 \geq n \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$$

$$n+2 \geq n \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{n}$$

$$n+3 \geq n \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n+3} \leq \frac{1}{n}$$

..

..

..

$$n+n \geq n+1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n+n} \leq \frac{1}{n}$$

…………………………………………………………………………….

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots\ldots.\frac{1}{n+n}\leq\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots\ldots\ldots.+\frac{1}{n}=\frac{n}{n}=1$$

$donc\ U_n$ $\leq$1 alors elle est majorée.

$U_n\ croissante\ et\ majoree\ alors\ elle\ est\ convergente$

5) Propriétés des Suites Convergentes : Soient (U_n),(V_n),(W_n) trois suites numériques tq :

Si (U_n),(V_n) converge vers L $et\ L'$ respectivement alors :

1) $U_n + V(U_n), (V_n), (_n,\ \ U_nV_n$; λU_n . ${}^{U_n}/_{V_n}$ $(V_n \neq 0)$Elles convergent vers L+L' ; L L' ; λL ;${}^{L}/_{L'}$; $L' \neq 0$.

2) (U_n) → L et elle vérifie : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$: si $U_n > 0$ ⇒ L ≥0

3) $U_n \leq V_n$ et elle vérifie : $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$ ⇒ $L \leq L'$

4) (U_n) et (V_n) converge vers la même limite L ;$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$ et $U_n < W_n < V_n$ alors $W_n \to L$

5) $U_n \to L$; $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$ alors$|U_n| \to |L|$

6. Si$(U_n) \to 0$ et V_n bornée alors $(U_nV_n) \to 0$

6)Suites Adjacentes

Définition deux suites (U_n),(V_n), sont dites adjacentes ssi (U_n) croissante(V_n) décroissante

$U_n - V_n \to 0$.

Proposition : soit $U_n\ et\ V_n$ deux suites adjacentes alors elle converge vers la même limite.

7) Suite de Cauchy On dit que (U_n) est une suite de Cauchy si elle vérifie

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p > q \geq n_0 \Rightarrow |U_P - U_q| < \mathcal{E}$ autrement dit$|U_P - U_q| \to 0$ p et q $\to \infty$

(U_n) n'est pas de Cauchy$\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists p > q \geq n_0 \wedge |U_P - U_q| > \mathcal{E}$

Proposition : toute suite convergente est de Cauchy.

Proposition : toute suite de Cauchy est bornée

Remarque Dans ℝsuite de Cauchy est convergente, on dit que ℝ est complet,ℚ n'est pas complet dans une autre raison pour prolonger ℚ àℝ.

7) Suite extraite(partielle) Une suite (V_n) est appelée suite extraite ou une sous suite d'une suite (U_n) s'il existe une application strictement croissante ϕ : ℕ→ℕ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = U_{(\varphi(n))}$

Exemple $U_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & n\ pair \\ -1 & n\ inpair \end{cases} = \begin{cases} U_{2n} \\ U_{2n+1} \end{cases}$

Proposition : Si (U_n) → L alors toute suite extraite de (U_n) converge vers L

<u>Remarque</u> : On utilise le résultat de la proposition par contraposé, s'il existe deux suites extraites de (U_n) qui convergent vers deux limites différentes, ou si une suite extraite diverge alors U_n diverge

<u>Théorème</u> Toute suite contient une suite extraite monotone.

<u>Théorème</u> (Bolzano-Weierstrass) Toute suite bornée contient une suite partielle convergente.

<u>8) Suite récurrente</u> Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit f : I →$\mathbb{R}$ tq : f(I) ⊂ I On appelle suite récurrente la suite (U_n) définie par : U_0 ∈ I ∧∀n ∈N : U_{n+1}= f (U_n)

UNIVERSITE Constantine 2 2020-2021

1ére année informatique

Analyse1

SERIE TD 2
Suite numérique

Exercice1 :

a) Démontrer par la définition de la limite que :

1) $lim_{x\to+\infty} \frac{n^2-n+2}{3(n^2+2n-4)} = \frac{1}{3}$; 2) $lim_{x\to+\infty} 2-3n = -\infty$; 3) $lim_{x\to+\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n+1} = 1$

4) $lim_{x\to+\infty} 3^{2n-1} = +\infty$

b) trouver les limites suivantes :

1) $lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$; 2) $lim_{x\to+\infty}\sqrt{n^2 + n}$ - n ;3) $lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(kx)$

4) $lim_{x\to+\infty} \frac{nsinn}{n^2+1}$; 5) $lim_{x\to+\infty} \frac{3^n-(-2)^n}{3^n+(-2)^n}$

Exercice2 : montrer que les suites suivantes sont adjacentes :

1) $U_n=2^n \, sin\frac{\theta}{2^n}$, $V_n=2^n \, tag\frac{\theta}{2^n}$
2) $U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\,!}$, $V_n=U_n+\frac{1}{nn!}$

Exercice3 : soit a et b deux réels positif

1) Montrer que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ et si $0 < a < b$ $alors$:

   a< $\frac{a+b}{2}$ <b ; a< $\sqrt{ab}$ <b
2) U_0 et V_0 deux positifs tq $U_0 < V_0$; et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suite qui vérifie $U_{n+1} = \sqrt{U_nV_n}$, $V_{n+1} = \frac{U_n+V_n}{2}$

   Montrer que $U_n > 0$, $V_n > 0$ et $U_n < V_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$
3) Montrer que $U_n et\ V_n$ sont adjacentes.

Exercice4 : soit $U_n$une suite récurant définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1+\sqrt{1+(U_n)^2}} \end{cases}$$

1) Montrer que $U_n > 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

2)$montrer\ que\ pou\ tout\ n \in N^*\quad U_n \leq \frac{1}{2^n}$.

3)$montrer\ que\ U_n$Est décroissante.

4)$deduire\ la\ limite\ par\ deux\ methode$.

5) A=$\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ trouver supA et infA .

Exercice5 :étudier la nature des suites d'après Cauchy :

1) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{sink}{3^n}$ 2) $v_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{logk}$ 3) $w_n = cos\frac{1}{n}$

Exercice supplémentaire

1) Démontrer par la définition de la limite que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n-1} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{2n-3}{3n+1} = \frac{2}{3}, \quad \lim_{n\to+\infty} sin\frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n-10} = +\infty,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 1$$

2) Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique définie par :

$$U_0 = \frac{11}{4}$$
$$U_{n+1} = \frac{5}{2} + \sqrt{U_n - \frac{7}{4}} \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

1- Montrer que $\frac{5}{2} \leq U_n \leq 4$ $pour\ tout\ n \in \mathbb{N}$.
2- Montré que (U_n) est monotone.
3- Déduire que (U_n) $est\ convergente$; et calculer la $\lim_{n\to\infty} U_n$.
4- A=$\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ trouver supA et infA

UNIVERSITE Constantine2 **Abdelhamid Mehri**

2019-2020 **1h** **1MI**

Interrogation ANALYSE 1

Exercice1 (8point) : Soit l'ensemble A et B définies par :

$$A=\left\{\frac{2n}{n^2+1}\ ;\ n>2\right\} \qquad ;\ B=\left\{\frac{e^x-1}{x}\ ;\ x\in]0;+\infty[\right\}$$

3) **Montrer que A et B sont bornées, et trouver les bornes supérieures et inferieurs de A et B**
4) **Déduire les bornes supérieures et inferieurs de A+B ; A-B et AUB**

Exercice2 (5point) *:* : Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique définie par :

$$\begin{cases} 0 < U_0 < 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{4}(U_n+2) \quad \forall n \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

5- Montrer que $0 < U_n < 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
6- Montré que (U_n) *est* monotone.
7- ***Conclure pour la nature de la suite*** U_n
8- ***Calculer la*** $\lim_{n\to+\infty} U_n$

Exercice3 (3point) Démontrer par la définition de la limite que :

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+2}{(x-1)(x+3)} = +\infty$$

Bonne chance