UNIVERSITÉ ABDELHAMID MAHRI – CONSTANTINE 2-
FACULTÉ DES INTIC
DÉPARTEMENT TRONC COMMUN "MI"
ANNÉE UNIVERSITAIRE 2020/2021
1 ÈRE ANNÉE MI
ALGEBRE I

SÉRIE TD N°4
STRUCTURES ALGÉBRIQUES

Exercices 1 : (Contrôle 2018)

On définit sur $\mathbb{R}$ les deux lois $*$ et $\perp$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \perp y = \sqrt{x + y}$$

1 – Les lois $*$ et $\perp$ sont-elles des lois de composition interne ? (Justifier votre réponse)
2 – La loi $*$ est-elle commutative ? Associative ?

Exercices 2 :

Soit les LCI $\star$ et $\perp$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \star y = x + y - 1$$
$$\forall x \in \mathbb{R} : x \perp y = x + y - xy$$

1/ La loi $\star$ est-elle associative ? est-elle commutative ? admet-elle un élément neutre ?
2/ La loi $\perp$ est-elle associative ? est-elle commutative ? admet-elle un élément neutre ?
3/ Montrer que $\perp$ est distributive par rapport à $\star$.

Exercice 3 :

Soit la loi $*$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x * y = (x^3 + y^3)^{\frac{1}{3}}$$

Montrer que $(\mathbb{R},*)$ est un groupe abélien.

Exercice 4 :

Soit $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ l'anneau des nombres réels.
On définit les deux lois $\oplus$ et $\otimes$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} : x \oplus y = x + y - 2$$
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} : x \otimes y = x \cdot y - 2x - 2y + 6$$

Montrer que $(\mathbb{R}, \oplus)$ est un groupe abélien.
Montrer que $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ est un anneau commutatif unitaire.

Exercice 5 :

On définit dans $\mathbb{R}$ deux lois $\oplus$ et $\otimes$ par :

$$x \oplus y = x + y - 1$$
$$x \otimes y = x + y - xy$$

Montrer que $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ est un corps commutatif.