Université Abdelhamid MEHRI – Constantine2 –

Cours

ALGEBRE 1

2020/2021

Chapitre 3 : Relations binaires

1. Relations binaires

1.1 Définitions et exemples.

2. Relation d’équivalence

2.1 Définitions.

2.2 Classe d’équivalence, ensembles quotient.

3. Relation d’ordre

3.1 Définitions.

3.2 Ordre total, ordre partiel.

3.3 Plus petit, plus grand élément.

1. Relations binaires

1.1 Définition : (Relation binaire)

Une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble non vide E est un sous ensemble du produit cartésien $E \times E$, et on écrit :

$$\forall (x, y) \in E \times E, x\, \mathcal{R} y$$

On dit que x est en relation avec y.

1.2 Définition :

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble non vide E. On dit que :

$$\mathcal{R}\ est\ reflexive \Leftrightarrow \forall x \in E, x\mathcal{R}x$$
$$\mathcal{R}\ est\ symetrique \Leftrightarrow \forall x, y \in E, (x\mathcal{R}y) \Longrightarrow (y\mathcal{R}x)$$
$$\mathcal{R}\ est\ transitive \Leftrightarrow \forall x, y, z \in E, (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Longrightarrow (x\mathcal{R}z)$$
$$\mathcal{R}\ est\ antisymetrique \Leftrightarrow \forall x, y \in E, (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x) \Longrightarrow x = y$$

Exemple :

On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{C}$ par :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C},\ \ z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$$

- La relation $\mathcal{R}$ est elle réflexive ? symétrique ? transitive ? antisymétrique ?

Solution :

- On a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| = |z| \Leftrightarrow z\mathcal{R}z$$

Donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

- On a :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow |z| = |z'| \Longrightarrow |z'| = |z| \Longrightarrow z'\mathcal{R}z$$

Donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

- On a :

$$\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, (|z| = |z'| \wedge |z'| = |z''|) \Longrightarrow |z| = |z''|$$

Alors :

$$\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, \left(z\mathcal{R}z' \wedge z'\mathcal{R}z''\right) \Longrightarrow z'\mathcal{R}z''$$

Donc $\mathcal{R}$ est transitive.

- On a :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \left(\left(z\mathcal{R}z'\right) \wedge \left(z'\mathcal{R}z\right)\right) \Leftrightarrow (|z| = |z'| \wedge |z'| = |z|)$$

Cette proposition ne donne pas que $z = z'$, par exemple on suppose que $z = i$ et $z' = -i$. On voit que $z \neq z'$ mais $|z| = |z'| = 1$. Donc $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique.

2. Relation d'équivalence

2.1 Définition : (Relation d'équivalence)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble non vide E. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si : $\mathcal{R}$ est réflexive, $\mathcal{R}$ est symétrique, $\mathcal{R}$ est transitive.

Et pour tout $x, y \in E, x\mathcal{R}y$ on dit que x et y sont équivalentes.

Exemple :

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \iff x^2 = y^2$$

- On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 = x^2 \Leftrightarrow x\mathcal{R}x$$

Donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

- On a :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \iff x^2 = y^2 \Longrightarrow y^2 = x^2 \Longrightarrow y\mathcal{R}x$$

Donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

- On a :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \iff x^2 = y^2 \ldots\ldots (1)$$
$$\forall y, z \in \mathbb{R}, y\mathcal{R}z \iff y^2 = z^2 \ldots\ldots (2)$$

De (1) et (2), on conclut que : $x^2 = z^2 \Longrightarrow x\mathcal{R}z$.

Donc $\mathcal{R}$ est transitive. Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2.2 Classe d'équivalence, Ensembles quotient

2.2.1 Définition : (Classe d'équivalence)

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans un ensemble E. Pour tout élément x de E, on définit la classe d'équivalence de x (modulo $\mathcal{R}$) notée $\bar{x}$ par l'ensemble :

$$\bar{x} = \{y \in E\ /\ xRy\}$$

2.2.2 Définition : (Ensemble quotient)

On appelle ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalences modulo $\mathcal{R}$. Et on le note $E/_{\mathcal{R}}$

Exemple :

Soit E un ensemble non vide et $A \subset E$. On définit la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ par :

$$\forall X, Y \in \mathcal{P}(E), X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow X \cap A = Y \cap A$$

Trouver les classes d'équivalences de :

$$\overline{\complement_E A}, \bar{A}, \bar{E}, \bar{\emptyset}$$

Solution :

1/ $X \in \bar{\emptyset} \Leftrightarrow A \cap \emptyset = A \cap X \Leftrightarrow A \cap X = \emptyset \Leftrightarrow X \subseteq \complement_E A.$

$$Donc\ \bar{\emptyset} = \{X \in \mathcal{P}(E)\ /X \subseteq \complement_E A\} = \mathcal{P}(\complement_E A)$$

2/ $X \in \bar{E} \Leftrightarrow A \cap E = A \cap X \Leftrightarrow A \cap X = A \Leftrightarrow A \subseteq X.$

$$Donc\ \bar{E} = \{X \in \mathcal{P}(E)\ /A \subseteq X\}$$

3/ $X \in \bar{A} \Leftrightarrow A \cap A = A \cap X \Leftrightarrow A \cap X = A \Leftrightarrow A \subseteq X.$

$$Donc\ \bar{A} = \{X \in \mathcal{P}(E)\ /A \subseteq X\}$$

4/ $X \in \overline{\complement_E A} \Leftrightarrow A \cap \complement_E A = A \cap X \Leftrightarrow A \cap X = \emptyset \Leftrightarrow X \subseteq \complement_E A.$

$$Donc\ \overline{\complement_E A} = \{X \in \mathcal{P}(E)\ /X \subseteq \complement_E A\} = \mathcal{P}(\complement_E A)$$

3. Relations d'ordre

3.1 Définition : (Relation d'ordre)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E, on dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre notée $\preccurlyeq_{\mathcal{R}}$ si $\mathcal{R}$ est réflexive, transitive, et antisymétrique.

Et on dit que deux éléments x et y de E sont comparables si "$x \preccurlyeq_{\mathcal{R}} y$" $\vee$ "$y \preccurlyeq_{\mathcal{R}} x$" .

3.2 Définition : (Ordre total-Ordre partiel)

Si l'ensemble E est totalement ordonné par $\preccurlyeq_{\mathcal{R}}$, c'est-à-dire tous les éléments de E sont deux a deux comparables, alors $\preccurlyeq_{\mathcal{R}}$ est une relation d'ordre total. Sinon, on dit que $\preccurlyeq_{\mathcal{R}}$ est une relation d'ordre partiel.

Exemple :

Soit l'application $f: E \longrightarrow F$ injective et monotone. Et soit $\preccurlyeq_{\mathcal{R}}$ une relation binaire sur E définie par :

$$x \preccurlyeq_{\mathcal{R}} y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$$

$\preccurlyeq_{\mathcal{R}}$ est elle une relation d'ordre ?

Solution :

- On a :

$$\forall x \in E, f(x) \leq f(x) \Longrightarrow x \preccurlyeq_{\mathcal{R}} x$$

Donc $\preccurlyeq_{\mathcal{R}}$ est réflexive.

- On a :

$$\forall x, y, z \in E, (f(x) \leq f(y) \wedge f(y) \leq f(z)) \Longrightarrow f(x) \leq f(z)$$

Donc

$$\forall x, y, z \in E; (x \preccurlyeq_{\mathcal{R}} y) \wedge (y \preccurlyeq_{\mathcal{R}} z) \Longrightarrow (x \preccurlyeq_{\mathcal{R}} z)$$

Alors $\preccurlyeq_{\mathcal{R}}$ est transitive.

- On a :

$\forall x, y \in E, (f(x) \leq f(y) \wedge f(y) \leq f(x)) \Longrightarrow f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y\ (car\ f\ est\ injective)$

Donc $\preccurlyeq_{\mathcal{R}}$ est antisymétrique.

Ce qui montre que $\preccurlyeq_{\mathcal{R}}$ est une relation d'ordre.

- On voit que :

$$\forall x, y \in E, (f(x) \leq f(y) \vee f(y) \leq f(x)) \Longrightarrow (x \preccurlyeq_{\mathcal{R}} y) \vee (y \preccurlyeq_{\mathcal{R}} x)$$

Donc $\preccurlyeq_{\mathcal{R}}$ est une relation d'ordre total.

3.3 Plus petit, Plus grand élément

3.3.1 Définition :

Soit $(E, \preccurlyeq_{\mathcal{R}})$ un ensemble ordonné et $A \in \mathcal{P}(E)$.

- On dit que $m \in A$ est le plus petit élément de A si

$$\forall\, y \in A, (m \preccurlyeq_{\mathcal{R}} y)$$

- On dit que $M \in A$ est le plus grand élément de A si

$$\forall\, y \in A, (y \preccurlyeq_{\mathcal{R}} M)$$