Table des matières

Chapitre 1

Corps des nombres réels

1 Introduction

L'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ des entiers naturels est à base de dénombrement, $\mathbb{N}$ muni de l'addition n'est pas un groupe en effet $x + 2 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$ ceci conduit à la construction de l'ensemble $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ des entiers relatifs qui a pour but de pouvoir résoudre toute les équations de la forme $x + b = a$, mais $\mathbb{Z}$ ne donne pas la solution de l'équation $x.2 = 1$ et donc ceci amené a la construction de corps commutatif ordonné pour les deux lois internes $+, .$ et la relation d'odre $\leqslant$ dans $\mathbb{Q}$, il n'existe pas de nombre rationnel de carré égale à 2 l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$ on démontre par l'absurde, en effet si on suppose qu'il existe $x = \frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{Z}$, où x est une fraction simplifier donc l'un au moins est impair donc

$$\begin{aligned}
x^2 = 2 &\Rightarrow \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \\
m^2 = 2n^2 &\Rightarrow m^2\, est\, pair \;\Rightarrow m \;\; est \;\; pair \\
&\Rightarrow m = 2k \Rightarrow (2k)^2 = 2n^2 \\
2k^2 = n^2\, donc\, n^2\, est \;\; pair \;\; &\Rightarrow n \;\; est \;\; pair
\end{aligned}$$

alors n et m sont pair donc une contradiction avec $x \in \mathbb{Q}$, et x une fraction simplifier d'où la nécissité de la construction d'un corps de nombres plus vaste que $\mathbb{Q}$ ce sera le corps des nombres réels noté $\mathbb{R}$.

2 Définition des nombres réels

Définition 1.1 *Le corps des nombres réels est un ensemble $\mathbb{R}$ muni de deux loi internes $(+)$ et $(.)$ et d'une relation $(\leqslant)$ telle que :*

1. $(\mathbb{R}, +, .)$ *est un corps commutatif*
2. $\leqslant$ *est une relation d'ordre total qui vérifie :* $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c \\ a \leqslant b \Rightarrow a.c \leqslant b.c \;\; avec \;\; c \geqslant 0 \end{cases}$$

3. $\mathbb{R}$ *vérifie l'axiome de la borne supérieure (voir plutard)*

Remarques
- *toutes les règles de l'arithmétique découlent des axiomes que $\mathbb{R}$ est associatif, commutatif.*
- *il existe un élément neutre 0 et pour chaque $x \in \mathbb{R}$ on correspont $(-x) \in \mathbb{R}$ t.q : $x + (-x) = 0$ élément inverse pour la loi d'addition.*
- *pour la loi multiplication $(.)$ dans $\mathbb{R}$ est associative, commutative, il existe un élément neutre 1 unique et pour chaque $x \in \mathbb{R}$ on a $x^{-1} = \frac{1}{x}$ est son inverse.*
- *la multiplication est distrubitive par rapport à l'addition $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:* $x.(y + z) = xy + xz$

2.1 Propriétés élémentaire des nombres réels

Propriétés 1.1 1. $0 \times x = 0$

$$\begin{aligned} 0 \times x &= (0+0)x = 0 \times x + 0 \times x \\ \Rightarrow \underbrace{0 \times x + (-0 \times x)}_{=0} &= 0x + \underbrace{0 \times x + (-0 \times x)}_{=0} \\ 0 &= 0x \end{aligned}$$

2. 0 *n'a pas d'inverse multiplicatif, si* (0^{-1}) *existe on aurait*

$$1 = 0.0^{-1} = 0 \ \ impossible$$

3. $\forall x \in \mathbb{R}$: $(-x) = (-1)x$
   en effet

$$\begin{aligned} (-1)x + x &= (-1)x + 1.x \\ &= (-1+1)x = 0 \times x = 0 \end{aligned}$$

   donc $(-1)x$ *est l'inverse de* x *alors* $(-1)x = -x$

4. $x > y \Longleftrightarrow x - y > 0$
   en effet

$$\begin{aligned} y \in \mathbb{R} &\Rightarrow (-y) \in \mathbb{R} \\ x > y &\Rightarrow x + (-y) > y + (-y) \\ x + (-y) > 0 &\Rightarrow x - y > 0 \end{aligned}$$

5. $x > y$ *et* $z < 0 \Rightarrow xz < yz$
   en effet

$$z < 0 \wedge x > y \Rightarrow x - y > 0 \ et \ 0 > z$$

   en multipliant par $(x-y)$ *on obtient*

$$\begin{aligned} 0 \times (x-y) > z \times (x-y) &\Longleftrightarrow 0 > zx - zy \\ &\Rightarrow zx > zy \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} x > y \ et \ a \geqslant b &\Rightarrow x + a > y + b \\ a \geqslant b &\Rightarrow a + y \geqslant b + y \ \ (1) \\ x > y \Rightarrow x + a > y + a \ \ (2) \end{aligned}$$

   de (1) *et* (2)

$$x + a > y + a \geqslant b + y \Rightarrow x + a > b + y$$

7. $x > y > 0$ *et*

$$\begin{aligned} a \geqslant b > 0 &\Rightarrow ax > by \\ x > y &\Rightarrow ax > ay \ (a > 0) \\ a \geqslant b &\Rightarrow ay > by (y > 0) \\ &\Rightarrow ax > ay \geqslant by \\ &\Rightarrow ax > by \end{aligned}$$

8. $x > 0 \Rightarrow (-x) < 0$ *et* $x^{-1} > 0$
   $x > 1 \Rightarrow x^{-1} < 1$
   en effet

$$\begin{aligned} x > 0 \ et \ (-1) &< 0 \\ (-1)x &< (-1)0 \\ (-x) &< 0 \\ x > 0 &\Rightarrow x.x^{-1} = 1 \\ &\Rightarrow x.x^{-1} > 0 \\ &\Rightarrow x^{-1} > 0 \ \ puisque \ \ x > 0 \end{aligned}$$

3 Valeur absolue d'un réel

Définition 1.2 *On appelle valeur absolue de $x \in \mathbb{R}$ le réel positif noté $|x|$ défini par :*

$$|x| = \begin{cases} x & si \ \ x \geqslant 0 \\ -x & si \ \ x < 0 \end{cases}$$

Propriétés 1.2
1. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geqslant 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = 0 \iff x = 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = |-x|$
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x.y| = |x|.|y|$
5. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x+y| \leqslant |x| + |y|$
6. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^+$

$$|x| \leqslant a \Rightarrow -a \leqslant x \leqslant a$$

$$|x| \geqslant a \iff \begin{cases} x \geqslant a \\ x \leqslant -a \end{cases}$$

7. $x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$
8. $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$
9. $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$
$$\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$$

Démonstration.
1. $x > 0$ *et* $y > 0 \Rightarrow |x| = x$ *et* $|y| = y$ *donc* $|x|.|y| = x.y = |x.y|$
2. *A)* $x < 0$ *et* $y < 0 \Rightarrow |x| = -x$ *et* $|y| = -y$ *donc* $|x|.|y| = x.y = |x.y|$
   B)

$$si \quad x.y < 0 \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \vee y > 0 \\ x > 0 \vee y < 0 \end{cases}$$

3.
$$x < 0 \vee y > 0 \Rightarrow |x| = -x \quad et \quad |y| = y$$
$$|x|.|y| = -x.y = |x.y|$$

4.
$$x > 0 \vee y < 0 \quad alors \quad |x| = x \vee |y| = -y$$
$$|x|.|y| = -x.y = |x.y|$$

d'où le résultat

5. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y|$ *on retrouve*

$$|x| + |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$$

on a $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$ *et* $-|y| \leqslant y \leqslant |y|$
alors
$$-|x| - |y| \leqslant x + y \leq |x| + |y| \Rightarrow |x + y| \leqslant |x| + |y|$$

6. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^+, |x| \leqslant a \Rightarrow -a \leqslant x \leqslant a$

$$|x| = \begin{cases} x & six \geqslant 0 \\ -x & six < 0 \end{cases}$$

$$|x| \leqslant a \Rightarrow \begin{cases} x \\ -x \end{cases}$$

$$x \leq a \ \ et \ \ -x \leq a \Longleftrightarrow x \leq a \ \ et \ \ x \geq -a \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a$$

7. $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = \begin{cases} x & six \geqslant 0 \\ -x & six < 0 \end{cases}$$

alors
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = |x|$$

8.
$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

il suffit de montré que $-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$
A) $x = x - y + y$ *alors* $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$
donc $|x| - |y| \leq |x - y|$
B) $y = y - x + x$ *alors* $|y| \leq |y = y - x + x|$
donc $|x| - |y| \geq -|x - y|$
de (A) et (B) on a

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y| \Rightarrow ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

d'où le résultat

9. $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

— *Si $x > y$:*
$\max(x, y) = x \Rightarrow x - y > 0 \Rightarrow |x - y| = x - y$
En remplaçant $\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+x-y}{2} = x$
donc $\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$
de la même façon

— *Si $x < y$:*
$\max(x, y) = y$ *et* $x - y < 0 \Rightarrow |x - y| = -(x - y)$

$$\frac{x + y + |x - y|}{2} = \frac{x + y - (x - y)}{2} = \frac{2y}{2} = y$$

de la même façon pour le $\min$

4 Intervalles

Définition 1.3 *Pour $a, b \in \mathbb{R}$ tq : $a < b$ on définit :*
— $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$
— $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$
— $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$
— $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R}, x < a\}$
— $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$
— $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

les intervalles $]-\infty, a], [a, +\infty[, [a, b]$ sont appelés des intervalles fermés.
les intervalles $]a, b[,]-\infty, a[,]a, +\infty[$ sont appelés des intervalles ouverts.
les intervalles $[a, b[,]a, b]$ sont appelés des intervalles semi-ouverts ou semi-fermés.
les réels a et b sont appelés les extrémités de l'intervalle.

5 Borne Supérieure , partie majoré de $\mathbb{R}$

Définition 1.4 *on dit qu'une partie non vide E de $\mathbb{R}$ est majorée quand il existe un réel $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq M$*
un tel réel M s'appelle un majorant de E

Remarque 5.1 *Si M est un majorant de E, tout réel Supérieur à M est aussi un majorant de E, donc une partie majorée de $\mathbb{R}$ admet une infinté de majorant*

Exemple 5.1 $E =]-\infty, a]$
$E =]-\infty, a[$

$E = [a, b]$
$E = \{x = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, ...\}$ *E majoré par* 1
$E = \{x \in \mathbb{Q}^+, x^2 < 2\}$
$M = 1,5$ *est un majorant de E car* $x > 1,5 \Rightarrow x^2 > 2,25 > 2$
aucun élément de E ne peut être plus grand que $1,5$
$x \in \mathbb{Q}^+$ *et* $x^2 < 2 \Rightarrow x < \sqrt{2} = 1,41 < 1,5$
donc E est majorée par $\frac{3}{2} = 1,5$ *- l'ensemble* $\mathbb{N}$ *n'est pas une partie majoré de* $\mathbb{R}$

Définition 1.5 *Soit E une partie non vide et majorée de* $\mathbb{R}$*, Alors il existe un majotant de E qui est le plus petit que tous les autres majorants de E on l'appelle borne supérieure de E et on note* $\sup E$ *elle n'a aucune raison d'appartenir à E*

5.1 Propriétés Caractéristique de la borne Supérieure

Propriété 1.1 *Soit M un majorant de E, Alors on a :*

$$(1) \;\; M = \sup E \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E, x \leq M \\ \forall \epsilon > 0, \end{cases} \;\; (2)$$

$$\exists x_\epsilon \in E, x > M - \epsilon(2)$$

Démonstration. $\underline{(1) \Rightarrow (2)}$

$$M = \sup E \Rightarrow \forall x \in E : x \leq M$$

supposons que $\exists \epsilon > 0, \forall x \in E : x \leq M - \epsilon \Rightarrow M - \epsilon$ *est un majorant de E, mais M est le plus petit des majorants donc* $M < M - \epsilon$ *(*$\epsilon > 0$ *impossible)*
donc $\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in E, x > M - \epsilon$ *est vérifié*

$\underline{(2) \Rightarrow (1)}$

$$\forall x \in E, x \leq M \Rightarrow M$$

est un majorant de E
Reste à montré que M est le plus petit.
Supposons qu'il existe un autre majorant de E : M' *tq* $M' > M \Rightarrow M - M' > 0$
On choisit $\epsilon = M - M' > 0 \Rightarrow x > M - (M - M') \Rightarrow x > M'$ *impossible puisque* M' *est un majorant de E* $(x \leq M')$

Remarque 5.2 *dans* $\mathbb{Q}$ *il y'a des parties qui sont majoré et qui n'on pas de borne Supérieure*

Exemple 5.2

$$E = \left\{x \in \mathbb{Q}^+, x^2 < 2\right\}$$

$$E = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, ...\right\}$$

E est majoré par 2
E est majoré par $\frac{3}{2}$
E est majoré ùais elle n'a pas une borne supérieure
supposons que $\sup E$ *existe* $\Rightarrow \forall x \in E, x \leq \sup E \Rightarrow x^2 \leq \sup^2 E$ *et on a* $x \in E \Rightarrow x^2 < 2$

$$\begin{cases} x^2 \leq \sup^2 E \\ x^2 < 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$\sup^2 E = 2$ *impossible* $\sup E = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}^+$
donc $\sup^2 E > 2$ *ou* $\sup^2 E < 2$

1. *si* $\sup^2 E > 2 \Rightarrow 2 - \sup^2 E > 2 > 0$
   posons $x_0 = \sup E + \frac{2-\sup^2 E}{2+\sup^2 E} > 0$

$$\begin{aligned} x_0^2 - 2 &= \sup^2 E + \left(\frac{2-\sup^2 E}{2+\sup^2 E}\right)^2 + 2\sup E\left(\frac{2-\sup^2 E}{2+\sup^2 E}\right) - 2 \\ &= \frac{\sup^2 E(2+\sup E)^2 + (2-\sup^2 E)^2 + 2\sup E(2+\sup E)(2-\sup^2 E)}{(2+\sup E)^2} - 2 \\ &= \frac{4\sup^2 E + 8\sup E + 4}{(2+\sup E)^2} - 2 \\ &= \frac{4(\sup^2 E + 2\sup E + 1) - 2(2+\sup E)^2}{(2+\sup E)^2} \\ &= \frac{2(\sup^2 E - 2)}{(2+\sup E)^2} < 0 \end{aligned}$$

   $\Rightarrow x_0^2 < 2 \Rightarrow x_0 \in E$ *et* $x_0 < \sup E$
   mais $x_0 = \sup E + \frac{2-\sup^2 E}{\sup E+2} < \sup E$ *impossible*

2. $(\sup A)^2 > 2$ *posons :*

$$M' = \sup E - \frac{\sup^2 E - 2}{2\sup E} = \frac{\sup^2 A + 2}{2\sup A} > 0$$

   donc $M' < \sup A$
   d'autre part montrons que M' *est un majorant de* E

$$\begin{aligned} M'^2 - 2 &= \left(\frac{\sup^2 E + 2}{2\sup E}\right)^2 - 2 \\ &= \frac{(\sup^2 E + 2)^2}{4\sup^2 E} > 0 \end{aligned}$$

$$M'^2 > 2 > x^2 \Rightarrow M' > x, \forall x \in E$$

   M' est un majorant de E, $M' < \sup A$ impossible

Remarque 5.3 *Soit E une partie majorée de $\mathbb{R}$*
Alors la borne supérieure est unique, en effet supposons qu'il existe $M_1 = \sup A$ et $M_2 = \sup A$
$M_1 = \sup A \Rightarrow M_1$ est un majorant et c'est le plus petit des majorants de A donc $M_1 \leq M_2$
$M_2 = \sup A \Rightarrow M_2$ est un majorant et c'est le plus petit des majorants de A donc $M_2 \leq M_1$
Alors $M_1 = M_2$

Proposition 1.1 *Si M est un majorant de A et $M \in A$ donc $M = \sup A$ et on le note $\max A$*

Démonstration. *supposons qu'il existe M' un autre majorant de A tq : $M' = \sup A$ donc $M' \leq M$ où $M \in A$*
M' majorant de A donc $\forall x \in A, x \leq M' \leq M \Rightarrow$ impossible.

6 Borne Inférieure , partie minorée de $\mathbb{R}$

Définition 1.6 *On dit qu'une partie E de $\mathbb{R}$ est minorée quand il existe un réel m tq : $\forall x \in E, x \geq m$*
un tel réel m s'appelle un minorant de E

Remarque 6.1 *si m est un minorant de E tout réel inférieur a m est aussi un minorant de E donc une partie minorée de $\mathbb{R}$ admet une infinité de minorant*

Exemple 6.1
- $E = [a, +\infty[, E =]a, +\infty[$
- $E = [a, b]$
- $E = \{x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\}$
  $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$
- $\mathbb{N}$ *est minorée par 0*

6.1 Borne Inférieure

Définition 1.7 *Soit E une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ Alors il existe un minorant de E on l'appelle borne inférieure de E et on la note $\inf E$ elle n'a aucune raison d'appatenir a E.*

6.2 Propiétés caractéristique de la borne inférieure

Propriété 1.2 *Soit E une partie minorée de $\mathbb{R}$ par m alors :*

$$m = \inf E \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \geq m \\ \forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in A : x_\epsilon < m + \epsilon \end{cases}$$

Remarque 6.2 *Si E est une partie minorée $\inf E$ est unique.*

7 Théorème d'Archimede

Théorème 1.1 $\mathbb{R}$ *vérifie*
$\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists n \in \mathbb{N}^*, n \geq x$ *ou bien,* $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : n > x$
$\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^*_+, \exists n \in \mathbb{N}^* : nx > y$

Démonstration. *On raisonne par l'absurde*

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists n \in \mathbb{N}^* : n \geq x \\ &\exists x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}^* : n < x \\ x > n \Rightarrow \mathbb{N} \quad &est \quad bornée \quad par \quad x \quad supérieurement \\ &A = \{n, n \in \mathbb{N}^*\} \end{aligned}$$

on voit que A *a une borne supérieure si* $\alpha = \sup A \Rightarrow \alpha$ *vérifie*

$$\begin{cases} \forall n \in A, n \leq \alpha \\ \forall \epsilon > 0, \exists n \in A, n > \alpha - \epsilon \end{cases}$$

on choisit $\epsilon = \frac{1}{2}$

$$n > \alpha - \frac{1}{2} \Rightarrow n + 1 > \alpha + \frac{1}{2} > \alpha$$

donc

$$n + 1 > \alpha \Rightarrow n + 1 = z \in A$$

alors $z \leq \sup A = \alpha$ *et* $z > \alpha$ *impossible*
donc le théorème d'Archimede est vérifié $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists n \in \mathbb{N}^*, n \geq x$

Remarque 7.1 *l'axiome d'Archimede signifie que* $\mathbb{N}$ *n'est pas majorée*

Exemple 7.1 1. — $A = \{1, 2, 3, 4\}$
on a $\forall x \in A, 1 \leq x \leq 4$ *donc* A *est majorée et bornée par* 4 *et* $\sup A = 4 = \max A$
— $A =]2, 4[$
$\forall x \in A, 2 < x < 4$ *donc* A *est majorée par* 4 *est ce que* $4 = \sup A$
si on suppose que $\sup A = 5$ *donc il vérifie la propriété de la borne supérieure*

$$M = \sup A \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \leq M \\ \forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in E : x > M - \epsilon \end{cases}$$

donc (1) vérifie $(\forall x \in A : x \leq 5)$

2.

$$\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in A, x_\epsilon > 5 - \epsilon$$

la négation de (2) est de la forme :

$$\exists \epsilon > 0, \forall x_\epsilon \in A, x_\epsilon \leq 5 - \epsilon$$

Si $\epsilon = 0,001$ *et* $M = 5$

$$M - \epsilon = 5 - 0,001 = 4,999$$

$$\forall x \in A, x \leq 4 < 5 - \epsilon = 4,999$$

donc $(\bar{2})$ *est vérifié alors* (2) *n'est pas vérifié donc* 5 *n'est pas le* $\sup A$

3.

$$A = \left\{3 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

est ce que le $\sup$ *existe ?*
On a

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1$$

$$0 + 3 < 3 + \frac{1}{n} \leq 4$$

donc 4 *est une borne Supérieure de* A *, est ce que* $\underline{4 = \sup A}$ *?*
Si $\sup A = 4$ *elle vérifie*

$$\begin{cases} (1)\forall x \in A, x \leq 4 \\ (2)\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in A : x_\epsilon > 4 - \epsilon \end{cases}$$

(1) est vérifié de ce qui précède
On vérifie (2) :
$\forall \epsilon > 0$ *est ce qu'il existe* $x_\epsilon \in A$ *tq :* $x_\epsilon > 4 - \epsilon$

$$x_\epsilon \in A \Rightarrow x = 3 + \frac{1}{n_\epsilon}$$

$$3 + \frac{1}{n_\epsilon} > 4 - \epsilon$$

$$\frac{1}{n_\epsilon} > 1 - \epsilon$$

— $\underline{Si\ 1 - \epsilon < 0 \Rightarrow \epsilon > 1}$

$$\underbrace{\frac{1}{n_\epsilon}}_{positif} > \underbrace{1 - \epsilon}_{négatif}$$

elle vérifie pour tout $n \neq 0$ *donc*

$$\exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists x_\epsilon \in A$$

— $\underline{Si\ 1 - \epsilon > 0 \Rightarrow 0 < \epsilon < 1}$

$$\frac{1}{n_\epsilon} > 1 - \epsilon$$

$$n_\epsilon < \frac{1}{1 - \epsilon}$$

$$n_\epsilon \in] - \infty, \frac{1}{1 - \epsilon}[$$

puisque $n_\epsilon \in \mathbb{N}^*$: $n_\epsilon \in]0, \frac{1}{1-\epsilon}[$
donc il existe toujours un entier $n_\epsilon \in \mathbb{N}^*$ *alors* $\exists x_\epsilon \in A$ *de (1) et (2) pour tout* $\epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in A$ *qui vérifie* $x_\epsilon > 4 - \epsilon$ *donc (2) est vérifié , alors* $4 = \sup A$
on montre que : $Inf A = 3$

$$\inf A = 3 \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \geq 3 \\ \forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in A \quad x_\epsilon < 3 + \epsilon \end{cases}$$

(1) est vérifié - On montre que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in A : x_\epsilon < 3 + \epsilon$$

pour tout $\epsilon > 0, x_\epsilon \in A \Rightarrow x_\epsilon = 3 + \frac{1}{n} \Rightarrow x_\epsilon = 3 + \frac{1}{n_\epsilon} < 3 + \epsilon \Rightarrow \frac{1}{n_\epsilon} < \epsilon \Rightarrow n_\epsilon > \frac{1}{\epsilon}$
il est vérifié par l'axiome d'Archimede puisque $\frac{1}{\epsilon} > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* : n > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow n_\epsilon \quad existe \quad \Rightarrow x_\epsilon \quad existe$

Exemple 7.2 *Soit l'ensemble A défini comme suit :*

$$A = \left\{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

trouver : $\sup A, \inf A, \max A$ *et* $\min A$

1. $$0 < \frac{1}{n} \leq 1$$
   $$-1 \leq -\frac{1}{n} < 0$$
   $$1 - 1 \leq 1 - \frac{1}{n} < 1$$

   Soit $x \in A \Rightarrow 0 \leq x < 1$
   alors A est borné, il existe une borne supérieure de $A, \sup A$ *et une borne inférieure* $\inf A$
2. *Soit* U_n *une suite tq :* $\forall n \in \mathbb{N}^* : U_n = 1 - \frac{1}{n}$

   $$U_{n+1} - U_n = 1 - \frac{1}{n+1}.(1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

   donc U_n *est croissante* $\forall n \in \mathbb{N}^*$

   $$0 = U_1 \leq U_2 \leq U_3 \leq ... \leq U_n \leq ...$$
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 = U_1 \leq U_2 \leq U_3 \leq ... \leq \lim_{n \to +\infty} U_n = 1$$
   $$0 \leq U_0 \leq 1$$
   $$\forall x \in A, 0 \leq x \leq 1$$

   donc A est borné

3.

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x}, x \geq 1$$
$$f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0, \forall x \geq 1$$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$0 = f(x)$ $\nearrow$	$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

$$\forall x \geq 1, 0 \leq 1 - \frac{1}{x} \leq 1$$

alors A est borné , il reste à montrer que $\inf A = 0, \sup A = 1$

$$\inf A = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \geq 0 \\ \forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in A, x_\epsilon < 0 + \epsilon \end{cases}$$

puisque A est borné, alors (1) est vérifié
on démontre (2)

$$\forall \epsilon > 0, \exists ? x_\epsilon \in A : x_\epsilon < 0 + \epsilon$$
$$x_\epsilon \in A \Longleftrightarrow x_\epsilon = 1 - \frac{1}{n_\epsilon}, n_\epsilon \in \mathbb{N}$$
$$1 - \frac{1}{n_\epsilon} < 0 + \epsilon$$
$$-\frac{1}{n_\epsilon} < -1 + \epsilon$$
$$\frac{1}{n_\epsilon} > 1 - \epsilon$$

— <u>*Si* $1 - \epsilon < 0 \Rightarrow \epsilon > 1$</u>

$$\underbrace{\frac{1}{n_\epsilon}}_{positif} > \underbrace{1 - \epsilon}_{positif} \Rightarrow \quad elle \quad est \quad toujours \quad vérifié$$

donc il existe toujours $n_\epsilon \in \mathbb{N}^*$ qui vérifie cette relation.
alors il existe toujours $x_\epsilon \in A$ qui vérifie (2)

— <u>*Si* $1 - \epsilon \geq 0 \Rightarrow 0 < \epsilon \leq 1$</u>

$$n_\epsilon < \frac{1}{1 - \epsilon}$$

on peut choisir n_ϵ le premier nombre naturel inférieure à $\frac{1}{1-\epsilon}$ alors n_ϵ existe donc x_ϵ alors (2) est vérifié donc

$\inf A = 0$
$\sup A = 1$

$$\sup A = 1 \begin{cases} \forall x \in A, x \leq 1 \\ \forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in A : x_\epsilon > 1 - \epsilon \end{cases}$$

de ce que précède $\forall x \in A, x \leq 1$ *donc (1) est vérifié*
on démontre (2)

$$\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in A, x_\epsilon > 1 - \epsilon$$

$$x_\epsilon \in A \Rightarrow x_\epsilon = 1 - \frac{1}{n_\epsilon}$$

$$1 - \frac{1}{n_\epsilon} > 1 - \epsilon$$

$$n_\epsilon > \frac{1}{\epsilon}$$

puisque $\epsilon > 0 \Rightarrow \frac{1}{\epsilon} > 0$*, d'après le théorème d'Archimède il existe toujours un entier*

Exemple 7.3

$$E = \left\{ x_n = \frac{n+2}{n+7}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

1. *on voit que* $n + 2 < n + 7 \Rightarrow \frac{n+2}{n+7} < 1$
2. $f(x) = \frac{x+2}{x+7}, x \geq 0$ *et* $\frac{n+2}{n+7} > \frac{2}{7}$

$$f'(x) = \frac{x + 7 - x - 2}{(x+7)^2} = \frac{5}{(x+7)^2} \geq 0$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$\frac{2}{7} \nearrow$	1

$1 \in^? E \Rightarrow \frac{n+2}{n+7} = 1 \Rightarrow n + 2 = n + 7 \Longleftrightarrow 2 = 7 \;\; impossible \;\; \Rightarrow 1 \notin E$
$\forall x \geq 0 : \frac{2}{7} \leq \frac{x+2}{x+7} \leq 1$ *donc elle est bornée*

3. $$\frac{n+3}{n+8} - \frac{n+2}{n+7} = \frac{5}{(n+8)(n+7)} > 0$$

donc elle est croissante

$$\frac{2}{7} - U_0 < U_1 < \ldots < U_n < \lim U_n = 1$$

elle est bornée, 1 *est un majorant de* E

$$\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in E, x_\epsilon > 1 - \epsilon, \exists n \in \mathbb{N} : \frac{n+2}{n+7} > 1 - \epsilon \Rightarrow n > \frac{5 - 7\epsilon}{\epsilon}$$

Si $5 - 7\epsilon > 0 \Rightarrow n_\epsilon > x$ *d'après Archimede*

$$x = \frac{5 - 7\epsilon}{\epsilon}, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : n_\epsilon > x$$

alors il existe $x_\epsilon \in A : x_\epsilon > 1 - \epsilon$
Si $5 - 7\epsilon < 0 \Rightarrow n_\epsilon >$ *un nombre négatif elle est toujours vrais*
donc (2) est vérifié alors $\sup E = 1$

$$\forall x \in E, x > \frac{2}{7}$$

$\frac{2}{7}$ *est un minorant* $\frac{2}{7} \in A \Rightarrow \frac{2}{7} = \frac{n+2}{n+7} \Rightarrow n = 0 \in \mathbb{N}$
donc $\frac{2}{7} = \inf A = \min A$

Exemple 7.4

$$E = \left\{x^2 + \frac{1}{x^2}, x \in \mathbb{R}^*\right\}$$

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = 2x - \frac{2x}{x^4} = \frac{2(x^4 - 1)x}{x^4}$$

$$= \frac{2x(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x^4}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
G	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

On voit que $\forall x \in \mathbb{R}^*, x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$
donc la borne supérieure n'existe pas, il reste à démontré que $\inf A = 2$
2 *est un minorant de* A *est ce que* $2 \in A \Rightarrow 2 = x^2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow 2x^2 = x^4 + 1$

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = \mp 1 \in \mathbb{R}^*$$

Exemple 7.5

$$A = \left\{-x^2 + 2x, x \in]1, 2[\right\}$$

$$f(x) = -x^2 + 2x$$

$$f'(x) = -2x + 2 = -2(x - 1)$$

x	1		2
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0

$\forall y \in A : 0 \leq y \leq 1$
$0 \in A \Rightarrow 0 = -x^2 + 2x \iff -x(x-2) = 0 \iff x = 0 \wedge x = 2$
$0 \notin]1,2[\wedge 2 \notin]1,2[$ *donc* $\min A$ *n'existe pas*
donc on démontre que :

$$\inf A = 0 \iff \begin{cases} \forall x \in A, x \geq 0 \\ \forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in A, x_\epsilon < \epsilon + 0 \end{cases}$$

(1) est vérifié (0 est un minorant de A)
(2) $\forall \epsilon > 0, \exists ? x_\epsilon \in A, y_\epsilon < \epsilon + 0 : y_\epsilon = -x_\epsilon^2 + 2x_\epsilon$

$$-x^2 + 2x < \epsilon$$
$$-x^2 + 2x - \epsilon < 0$$
$$\triangle = 4 - 4\epsilon \begin{cases} 4 - 4\epsilon < 0 \Rightarrow \epsilon > 1 \\ 4 - 4\epsilon \geq 0 \Rightarrow 0 < \epsilon \leq 1 \end{cases}$$

Si $\triangle < 0, -x^2 + 2x - \epsilon < 0$ *elle est vérifié , donc pour tout* $x \in]1,2[$ *la relation est vérifié*
Si $\triangle \geqslant 0$

$$x_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{1-\epsilon}}{-2} = 1 + \sqrt{1-\epsilon} < 2$$
$$x_2 = \frac{-2 + 2\sqrt{1-\epsilon}}{-2} = 1 - \sqrt{1-\epsilon} < 1$$

car $1 - \epsilon < 1 \Rightarrow \sqrt{1-\epsilon} < 1 \Rightarrow 1 + \sqrt{1-\epsilon} < 2$

x		x_2	1	x_1	2
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$

$\exists x_\epsilon \in [x_1, 2[\cap]1,2[$ *tq :* $-x_\epsilon^2 + 2x_\epsilon - \epsilon < 0$
alors il existe $y_\epsilon \in A$ *tq :* $y_\epsilon < 0 + \epsilon$ *donc (2) est vérifié*

$$\sup A = 1 \iff \begin{cases} \forall y_\epsilon \in A, y \leqslant 1 \\ \forall \epsilon, \exists y_\epsilon \in A : y_\epsilon > 1 - \epsilon \end{cases}$$

$1 \in A \Rightarrow 1 = -x^2 + 2x \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \notin]1,2[$
(1) est vérifié

$$\forall \epsilon, \exists y_\epsilon \in A : y_\epsilon > 1 - \epsilon, \exists ? x_\epsilon \in]1,2[$$
$$-x_\epsilon^2 + 2x_\epsilon > 1 - \epsilon$$
$$-x_\epsilon^2 + 2x_\epsilon - (1 - \epsilon) > 0$$
$$\triangle = 4 - 4(1-\epsilon) = 4\epsilon > 0$$
$$x_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{\epsilon}}{-2} = 1 + \sqrt{\epsilon}$$
$$x_2 \frac{-2 + 2\sqrt{\epsilon}}{-2} = 1 - \sqrt{\epsilon} < 1$$

x		x_2		1		x_1		2	
$f'(x)$	$-$		$+$		$+$		$-$		$-$

7.1 Propriétés de la borne Supérieure

Propriétés 1.3 1. *$A \subset B$ A et B bornées*

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \sup A \leq \sup B \\ &\inf A \geq \inf B \end{aligned}$$

2. *A et B bornées $\Rightarrow A \cup B$ est borné et*

$$\begin{aligned} \sup(A \cup B) &= \max(\sup A, \sup B) \\ \inf(A \cup B) &= \min(\inf A, \inf B) \end{aligned}$$

3. *Si $A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow A \cap B$ borné,*

$$\begin{aligned} \sup(A \cap B) &\leqslant \min(\sup A, \sup B) \\ \inf(A \cap B) &\geqslant \max(\sup A, \sup B) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \sup(-A) &= -\inf A \\ \inf(-A) &= -\sup A \\ \sup(A+B) &= \sup A + \sup B \\ \inf(A+B) &= \inf A + \inf B \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} A.B &= \{a = x.y, x \in A, y \in B\} \\ A+B &= \{a = x+y, x \in A, y \in B\} \\ \sup(A.B) &= \sup A. \sup B \\ \inf(A+B) &= \inf A. \inf B \end{aligned}$$

Exemple 7.6

$$\begin{aligned} A &= \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 10\} \\ B &= \{5, 6, 7, 8, 9\} \\ \sup A &= 10 \\ \sup B &= 9 \\ A \cap B &= \{5, 6\} \\ \sup(A \cap B) &= 6 \leqslant \underbrace{\min(10, 9)}_{=9} \end{aligned}$$

Démonstration. 1. *$A \subset B$ et A, B bornée*

$$A \subset B \iff \forall x \in A \Rightarrow x \in B$$
$$(B \;\; bornée) \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} :$$
$$\forall x \in B, \alpha \leq x \leq B \;\; ou \;\; \inf B \leq x \leq \sup B$$
$$x \in B \Rightarrow x \in A$$

donc $\sup B$ *est un majorant de* A *et* $\sup A$ *est le plus petit majorant donc* $\sup A \leq \sup B$
de même que $\inf B, x \in A$ *donc* $\inf B$ *est un minorant de* A *est* $\inf A$ *est le plus grand des minorants* $\inf A \geq \inf B$

2. *A et B bornée alors $A \cup B$ est bornée*
A bornée $\iff \forall x \in A : \inf A \leq x \leq \sup A$
B bornée $\iff \forall y \in B : \inf B \leq y \leq \sup B$
$\forall x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B$
$\Rightarrow \inf A \leq x \leq \sup A \vee \inf B \leq x \leq \sup B$
$x \leq max(\sup A, \sup B)$
$x \geq min(\inf A, \inf B)$
$\forall x \in A \cup B, \alpha \leq x \leq \beta$ *donc* $A \cup B$ *est bornée*
on démontre que : $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$
$\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$
$\forall x \in A \cup B : x \leq \max(\sup A, \sup B)$ *alors* $\max(\sup A, \sup B)$ *est un majorant de* $A \cup B$ *et* $\sup(A \cup B)$ *est le plus petit des majorants*
donc $\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B)$ *il reste à démontré que :*
$\max(\sup A, \sup B) \leq \sup(A \cup B)$
$A \cup B$ est bornée , donc $\forall x \in A \cup B : \sup(A \cup B) \leq x \leq \sup(A \cup B)$
d'après (1)
$A \subset A \cup B : \sup A \leq \sup A \cup B, B \subset A \cup B : \sup B \leq \sup(A \cup B)$
$\sup(A \cup B) \geq \max(\sup A, \sup B)$ *d'où le résultat*

8 Partie entière d'un réel

Définition 1.8 *Soit $x \in \mathbb{R}$ on appelle partie entière de x et on note $E(x)$ ou $[x]$ l'entier n qui vérifie :*

$$n \leq x < n + 1$$
$$[x] \leq x < [x] + 1$$

alors tout réel x peut s'écrire d'une seule manière $x = [x] + \alpha$ tq : $0 \leq \alpha < 1$
puisque :

$$\frac{5}{2} = 2 + 0,5$$
$$[-\frac{5}{2}] = -3$$
$$-\frac{5}{2} = -3 + 0,5$$

Propriétés 1.4 1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^* : [x+n] = [x] + n$

2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, [x] + [y] \leq [x+y] < [x] + [y] + 1$

3. $\forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} : [-x] = -[x] - 1$

4. $\forall x, y \in \mathbb{R} : [x] \leq [y]$

9 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Définition 1.9 *entre deux réels différents il existe un rationnel*

Démonstration. *Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $x \neq y$: $x < y \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow \frac{1}{y-x} > 0$ d'après le théorème d'Archimède $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tq : $n > \frac{1}{y-x}$ on pose :*

$$\begin{aligned} &p = E[nx] \\ &p \leq nx < p+1 \\ &\frac{p}{n} \leq x < \frac{p+1}{n} \\ &x < \frac{p+1}{n} \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

Reste à montrer que :

$$\begin{aligned} &\frac{p+1}{n} < y \\ &\quad n > \frac{1}{y-x} \Rightarrow n(y-x) > 1 \wedge p < nx \Rightarrow p+1 < nx+1 \\ &p+1 < nx+1 \\ &\frac{p+1}{n} < \frac{nx+1}{n} \wedge 1 < n(y-x) \\ &1 + nx < n(y-x) + nx \\ &1 + nx < ny \\ &\frac{1+nx}{n} < y \\ &\Rightarrow \frac{p+1}{n} < \frac{1+nx}{n} < y \\ &\quad \Rightarrow x < \frac{p+1}{n} < y \end{aligned}$$

Remarque 9.1 *entre 2 réels différents il existe une infinité de rationnel*

<u>l'ensemble $\bar{\mathbb{R}}$</u>

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{R}} &= \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \\ &= [-\infty, +\infty] \end{aligned}$$

appelé la droite numérique achevée $\bar{\mathbb{R}}$

Remarque 9.2 *toute partie non vide de $\bar{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure. toutes les opérations dans $\bar{\mathbb{R}}$ sont de la forme :*

1. $\forall x \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned} x + (+\infty) &= +\infty \\ x + (-\infty) &= -\infty \\ (+\infty) + (+\infty) &= +\infty \\ (-\infty) + (-\infty) &= -\infty \end{aligned}$$
2. $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$
$$\begin{aligned} x(+\infty) &= +\infty \\ x(-\infty) &= -\infty \end{aligned}$$
3. $\forall x \in \mathbb{R}_*^-$
$$\begin{aligned} x(+\infty) &= -\infty \\ x(-\infty) &= +\infty \\ (+\infty).(+\infty) &= +\infty \\ (-\infty)(-\infty) &= +\infty \\ (+\infty)(-\infty) &= -\infty \end{aligned}$$
4. $\forall x \in \mathbb{R}$
$$-\infty < x < +\infty$$
$$\sup \bar{\mathbb{R}} = +\infty$$
$$\inf \bar{\mathbb{R}} = -\infty$$
$\bar{\mathbb{R}}$ *est bornée*
5. $0 \times (+\infty), (+\infty) + (-\infty), (-\infty) \times 0$ *ce sont les cas indéfini alors* $\bar{\mathbb{R}}$ *perd sa compatibilité* $\Rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ *n'est pas compate*

Chapitre 2

Les Suites Numériques

1 Les Suites

Définition 2.1 1. ***Une Suite Numérique*** *est une application de* $\mathbb{N}$ *dans* $K, K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$

$$f : \mathbb{N} \to k$$
$$n \to f(n)$$

$f(n)$ est une suite, on la note souvent $(U_n), (V_n), (W_n); n \in \mathbb{N}$ une suite réelle est une suite numérique tq : $U_n \in \mathbb{R}$ et complexe si $U_n \in \mathbb{C}$
pour chaque $n \in \mathbb{N}, U_n$ est appelé terme générale de la suite, on peut considerer les suites de la forme : l'un de ces termes $1, 2, 3, ...$
ou $U_n = \frac{1}{n}, U_n = 3n + 1$ ou

$$U_n = \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{1 + U_n} \end{cases}$$

suite récurrente

2. ***Suites Réelles Monotones***
Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on dit que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq U_{n+1}$

— *on dit que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \leq U_n$*
— *on dit que U_n est strictement croissante $\forall n \in \mathbb{N}(U_n < U_{n+1})$*
— *on dit que U_n est strictement décroissante $\forall n \in \mathbb{N}(U_n > U_{n+1})$*
— *on dit que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone si et seulement si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante ou $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ou aussi*

$$(U_n \ \ croissante \ \ ) \Longleftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} - U_n \geq 0)$$

$$(U_n \ \ décroissante) \Longleftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} - U_n \leq 0)$$

elle est vraie aussi pour U_n strictement croissante ou strictement décroissante , il suffit qu'on remplace ($<$ au lieu de $\leq$)

3. ***Une suite réelle est majorée***
si pour tout $n \in \mathbb{N}$
il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et il existe $M \in \mathbb{R} : \forall n \geq n_0, U_n \leq M$ ou

$$U_n \ \ majorée \ \ \Longleftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \geq n_0, U_n \leq M$$

$$U_n \ \ minorée \ \ \Longleftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{R}, \forall n \geq n_0, U_n \geq m$$

(U_n) bornée $\Longleftrightarrow U_n$ majorée et U_n minorée
ou
(U_n) bornée $\Longleftrightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists M, m \in \mathbb{R}, \forall n \geq n_0 : m \leq U_n \leq M)$
ou
$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^+ : \forall n \geq n_0, |U_n| \leq \alpha$

2 Convergence, Divergence, relation de la limite

Définition 2.2 *On dit que la suite numérique $U_n, n \in \mathbb{N}$ admet une limite l quand n tend vers $+\infty$ si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : (n \geqslant n_0 \Rightarrow |U_n - l| < \epsilon)$$

et on écrit

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = l$$

— *on dit que (U_n) est convergente si elle a une limite finie quand $n \to +\infty$ on écrit*

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = l < \infty$$

— *on dit que (U_n) est divergente si elle n'est pas convergente, on écrit*

$$\forall l \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \wedge |U_n - l| \geq \epsilon$$

—

Exemple 2.1 $U_n = \frac{n+1}{2n} \rightarrow$ *convergente* $\frac{1}{2}$

$$U_n = (-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad divergente \ elle \ a \ 2 \ limites \ diff\acute{e}rentes$$

$U_n = n + 1 \rightarrow +\infty$ *divergente*

Proposition 2.1 *Si U_n est convergente alors sa limite est unique*

Démonstration. *On suppose qu'il existe deux limites différente quand $n \to +\infty$ tq : $\lim_{n\to+\infty} U_n = l_1$ et $\lim_{n\to+\infty} U_n = l_2$*

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = l_1 \iff \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N} \\ \forall n \geq n_1, |U_n - l_1| < \epsilon \end{cases}$$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = l_2 \iff \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N} \\ \forall n \geq n_2, |U_n - l_2| < \epsilon \end{cases}$$

$$\forall n \geq n_1, |U_n - l_1| < \frac{\epsilon}{2} \wedge \forall n \geq n_2, |U_n - l_2| < \frac{\epsilon}{2}$$

on choisit $n_0 = \max(n_1, n_2)$ alors

$$\forall n \geq n_0 : |l_1 - l_2| = |l_1 - U_n - U_n - l_2| \leqslant |l_1 - U_n| + |U_n - l_2| < \epsilon + \epsilon$$

$$|l_1 - l_2| < 2\epsilon = \epsilon'$$

Si $\epsilon' \to 0 : 0 \leq |l_1 - l_2| \leq \epsilon' \to 0 \iff l_1 - l_2 = 0 \Rightarrow l_1 = l_2$
donc la limite est unique

Exemple 2.2 *démontré que* $U_n = \frac{1}{3^n} \to 0$
$U_n = \cos n^{\frac{2}{3}} \times \sin \frac{1}{n} \to 0$

Démonstration. 1. *On veut démontrer que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} = 0 \Longleftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, |U_n - 0| < \epsilon$$

on démontre que :

$$\forall\epsilon > 0, |U_n - 0| < \epsilon$$
$$|\frac{1}{3^n}| < \epsilon \Rightarrow \frac{1}{3^n} < \epsilon$$
$$\frac{1}{\epsilon} < 3^n \Rightarrow \ln\frac{1}{\epsilon} < n \ln 3$$
$$n > \frac{\ln\frac{1}{\epsilon}}{\ln 3}$$
$$\frac{1}{\epsilon} < 1 \Rightarrow \epsilon > 1$$
$$\ln\frac{1}{\epsilon} < 0$$
$$\underbrace{n}_{positif} > \underbrace{\frac{\ln\frac{1}{\epsilon}}{\ln 3}}_{négatif}$$

donc il existe toujours $n \in \mathbb{N}$ *tq cette relation soit vérifié*
Si $\frac{1}{\epsilon} \geqslant 1 \Rightarrow 0 < \epsilon \leq 1 : n > \frac{\ln\frac{1}{\epsilon}}{\ln 3}$
d'après Archimede $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tq*

$$\left[\frac{\ln\frac{1}{\epsilon}}{\ln 3}\right] \leqslant \frac{\ln\frac{1}{\epsilon}}{\ln 3} < \left[\frac{\ln\frac{1}{\epsilon}}{\ln 3}\right] + 1$$

on peut choisir

$$n \geq n_0 : n_0 = \left[\frac{\ln\frac{1}{\epsilon}}{\ln 3}\right] + 1$$

donc n_0 *existe, alors* $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

2. $U_n = \cos n^{\frac{2}{3}} \times \sin\frac{1}{n} \to 0$ *on prend*

$$\forall\epsilon > 0, |\cos n^{\frac{2}{3}} \times \sin\frac{1}{n}| < \epsilon$$
$$|\cos n^{\frac{2}{3}} \times \sin\frac{1}{n}| < |\sin\frac{1}{n}| < \frac{1}{n} < \epsilon$$
$$\Rightarrow \frac{1}{n} < \epsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\epsilon}$$

d'après Archimede $\exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 > \frac{1}{\epsilon}$
$[\frac{1}{\epsilon}] \leqslant \frac{1}{\epsilon} < [\frac{1}{\epsilon}] + 1$

$$n_0 = \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1$$

donc il existe n_0 *alors* $|U_n - 0| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

Définition 2.3 *Soit* U_n *une suite réel*

— $U_n \to +\infty$ *quand* $n \to +\infty$ *Si*

$$\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq n_0 \Rightarrow U_n > A)$$

et on note :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$$

— $U_n \to -\infty$ *quand* $n \to +\infty$ *Si*

$$\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq n_0 \Rightarrow U_n < -A)$$

et on note :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$$

Proposition 2.2

1. *toute suite convergente est bornée*
2. *toute suite* $U_n \to +\infty$ *est minorée*
3. *toute suite* $U_n \to -\infty$ *est majorée*

Remarque 2.1 *il existe des suites bornées mais pas convergente, donc le contraire de la proposition n'est pas toujours vrai*

Exemple 2.3

— $U_n = \sin(n\frac{\pi}{2})$ *elle est bornée mais pas convergente* $|\sin(n\frac{\pi}{2})| \leq 1$ *tq :* $\lim_{n\to+\infty} \sin(n\frac{\pi}{2})$ *n'existe pas*

— $U_n = n$ *elle est ni bornée ni convergente*
U_n *covergente* $\Rightarrow U_n$ *bornée*
donc : U_n *n'est pas bornée* $\Rightarrow U_n$ *n'est pas convergente*
alors pour démontré que U_n *est divergente il suffit de démontrer que* U_n *n'est pas bornée*

Théorème 2.1

1. *toute suite réelle croissante et majorée est convergente*
2. *toute suite réelle décroissante et minorée est convergente*

Démonstration. *Soit* U_n *une suite réelle croissante et majorée donc* $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ *l'ensemble est majorée alors il admet une borne supérieure noté* l *donc* $U_n \leq l = \sup U_n$

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall \epsilon > 0, l - \epsilon \leqslant U_N \leqslant l$$

puisque U_n *est croissante alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow U_n \geqslant U_N \Rightarrow l - \epsilon < U_n < l + \epsilon \Rightarrow |U_n - l| < \epsilon$$

donc U_n *est convergente, alors* $\lim_{n\to+\infty} U_n = l = \sup U_n$
et si $U_n \searrow$ *et minorée, alors* $\lim_{n\to+\infty} U_n = \inf U_n$

Exemple 2.4 *Soit* $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

$$\begin{aligned}
U_{n+1} - U_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\
&= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - ... - \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+2} \\
&= \frac{2n+2-2(2n+1)+(2n+2)}{2(n+1)(2n+1)} \\
&= \frac{1}{(n+1)(2n+1)} > 0
\end{aligned}$$

donc elle est croissante, d'autre part, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1} &\leqslant \frac{1}{n+1} \\
\frac{1}{n+2} &\leqslant \frac{1}{n+1} \\
\frac{1}{n+3} &\leqslant \frac{1}{n+1} \\
&. \\
&. \\
&. \\
\frac{1}{n+n} &\leqslant \frac{1}{n+1} \\
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} \\
U_n &\leqslant \frac{n}{n+1} \leqslant 1
\end{aligned}$$

donc U_n *est majorée*

3 Propriétés des Suites Convergentes

Théorème 2.2 *soient* $(U_n), (V_n), (W_n)$ *trois suites numériques tq :*
Si $(U_n), (V_n)$ *converge vers* l, l' *respectivement alors :*

1. $U_n + V_n, \frac{U_n}{V_n}, V_n \neq 0, U_n \times V_n, \lambda U_n$ *elles converge vers* $l + l', \frac{l}{l'}, l - l', \lambda . l$
2. *Si* $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \to l$ *et elle vérifie :*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : U_n > 0 \Rightarrow l \geq 0 \vee \lim_{n \to +\infty} U_n \geqslant 0$$

3. *Si (U_n) et (V_n) converge vers l et l' respectivement et vérifie :*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, U_n \leqslant V_n \Rightarrow l \leq l' \vee \lim_{n \to +\infty} U_n \leq \lim_{n \to +\infty} V_n$$

4. *Si $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$ et si (U_n) et (V_n) converge vers la même limite l et $U_n < W_n < V_n$ alors $W_n \to l$*
5. *Si $(U_n) \to l$ alors $|U_n| \to |l|$*
6. *Si $(U_n) \to 0$ et V_n bornée alors $(U_n V_n) \to 0$*

Démonstration. 1. ***On montre que*** $U_n + V_n \to l + l'$

$$U_n \to l \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow |U_n - l| < \epsilon \end{cases}$$

$$V_n \to l' \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N} \\ \forall n \geq n_1 \Rightarrow |V_n - l'| < \epsilon \end{cases}$$

on veut montrer que $U_n + V_n \to l + l'$ ou

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 \Rightarrow |U_n + V_n - (l + l')| < \epsilon$$

on a

$$U_n \to l \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |U_n - l| < \epsilon$$
$$V_n \to l' \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} : n \geq n_1 \Rightarrow |V_n - l'| < \epsilon n_2 \qquad = \max(n_0, n_1)$$
$$|U_n + V_n - (l + l')| = |U_n - l + V_n - l'| \leq |U_n - l| + |V_n - l'| \leq \epsilon + \epsilon$$

donc $|U_n + V_n - (l + l')| \leq 2\epsilon$
on pose $2\epsilon = \epsilon' > 0$ alors

$$\forall \epsilon' > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2 \Rightarrow |U_n + V_n - (l + l')| < \epsilon'$$

alors

$$\lim_{n \to +\infty} (U_n + V_n) = l + l'$$

On montre que $U_n V_n \to ll'$

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2 \Rightarrow |U_n V_n - ll'| < \epsilon$$

Soit $\epsilon > 0$ on a :

$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow |U_n - l| < \epsilon$$
$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow |V_n - l'| < \epsilon$$

on prend $n_2 = \max(n_0, n_1)$ pour que

$$\forall n \geq n_2 \Rightarrow |U_n - l| < \epsilon \wedge |V_n - l'| < \epsilon$$

d'autre part :

$$|U_nV_n - ll'| = |U_nV_n - lV_n + lV_n - ll'| = |V_n(U_n - l) + l(V_n - l')|$$

donc

$$|U_nV_n - ll'| \leq |V_n||U_n - l| + |l||V_n - l'|$$

V_n est convergente alors V_n est bornée alors

$$\exists n_3 \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}^+, \forall n \geq n_3 : |V_n| \leq M$$
$$\exists n_4 = \max(n_2, n_3), |V_n| \leq M, |U_n - l| < \epsilon \wedge |V_n - l'| < \epsilon$$
$$\forall n \geq n_4, |U_nV_n - ll'| \leq M\epsilon + |l|\epsilon = \epsilon(M + |l|)$$
$$\epsilon' = \epsilon(M + |l|) > 0$$
$$\forall n \geq n_4 \Rightarrow |U_nV_n - ll'| < \epsilon'$$
$$\lim_{n \to +\infty} U_nV_n = ll'$$

— ***On montre $\frac{U_n}{V_n} \to \frac{l}{l'}$***
On a $\frac{U_n}{V_n} = U_n \times \frac{1}{V_n}, V_n \neq 0 \wedge l' \neq 0$
donc il suffit de démontrer que

$$\frac{1}{V_n} \to \frac{1}{l'}, \forall n \geq n_2 \Rightarrow \left|\frac{1}{V_n} - \frac{1}{l'}\right| < \epsilon$$

On a $V_n \to l'$ alors

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : n \geq n_1 \Rightarrow |V_n - l'| < \epsilon, \left|\frac{1}{V_n} - \frac{1}{l'}\right| = \left|\frac{l' - V_n}{V_n l'}\right| = \frac{|V_n - l'|}{|V_n||l'|}$$

(V_n) convergente alors $(\frac{1}{V_n})$ est convergente donc $(\frac{1}{V_n})$ est bornée donc $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+ : |\frac{1}{V_n}| \leq \alpha$
on prend $n_2 = \max(n_1, n_3)$ t.q :

$$\forall n \geq n_2 : |\frac{1}{V_n}| \leq \alpha \wedge |V_n - l'| < \epsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{V_n} - \frac{1}{l'}\right| \leq \frac{\epsilon\alpha}{|l'|}$$

on pose $\epsilon' = \frac{\epsilon\alpha}{|l'|} > 0$ alors $\exists n_2 \in \mathbb{N}, n \geq n_2, |\frac{1}{V_n} - \frac{1}{l'}| < \epsilon'$ donc $\frac{1}{V_n} \to \frac{1}{l'}$ donc

$$\frac{U_n}{V_n} = U_n \times \frac{1}{V_n} \to l \times \frac{1}{l'} = \frac{l}{l'}$$

— *on montre que $\lambda U_n \to \lambda l$ on a $U_nV_n \to ll'$*

$$V_n = \lambda \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} V_n = \lambda$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} (\lambda U_n) = \lim_{n \to +\infty} \lambda . \lim_{n \to +\infty} U_n$$
$$= \lambda \lim_{n \to +\infty} U_n = \lambda l$$

2. *$U_n \to l$ et $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, U_n > 0$ on montre que $l > 0$*
   $\underline{\forall \epsilon > 0}$: $\exists n_1 \in \mathbb{N}, n \geq n_1 : |U_n - l| < \epsilon$
   donc $\exists n_2 = \max(n_0, n_1) : |U_n - l| < \epsilon$ et $U_n > 0$
   on a
$$\begin{aligned} -\epsilon < U_n - l < \epsilon \\ l - \epsilon < U_n < l + \epsilon \\ \wedge U_n > 0 \Rightarrow l + \epsilon > 0 \Rightarrow l > -\epsilon \end{aligned}$$
   puisque $\epsilon > 0$ alors $-\epsilon < 0, l$ est supérieure a tout des chiffres négatifs donc l est positid ou égale à 0 tq $l \geq 0$
3. *$U_n \to l$ et $V_n \to l'$ et $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, U_n \geq V_n$*
   On définie $W_n = V_n - U_n$ tq $\exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : W_n \geq 0$ d'après (2) on a $\lim_{n \to +\infty} W_n \geq 0$ donc
$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} W_n &= \lim_{n \to +\infty} (V_n - U_n) \\ &= l' - l \\ &\Rightarrow l' - l \geqslant 0 \Rightarrow l' \geqslant l \end{aligned}$$
4. *$U_n \to l$ et $V_n \to l, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : U_n < W_n < V_n$*
   d'après (3) on obtient :
$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} U_n \leq \lim_{n \to +\infty} W_n \leq \lim_{n \to +\infty} V_n \\ l \leq \lim_{n \to +\infty} W_n \leq l \\ \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} W_n = l \end{aligned}$$
5. *$U_n \to l$ on montre $|U_n| \to l$*
$$U_n \to l \Rightarrow \forall > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \Rightarrow |U_n - l| < \epsilon$$
   d'autre part :
$$||U_n| - |l|| \leq |U_n - l|$$
   donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow ||U_n| - |l|| \leq \epsilon$
   alors $|U_n| \to \leqslant \epsilon$
6. *$|U_n| \to 0$ et V_n bornée $\Rightarrow U_n V_n \to 0$*
$$\begin{aligned} (U_n \to 0) &\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : |U_n| < \epsilon \\ (V_n \ \ born\acute{e}e) &\Longleftrightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^+, n \geq n_1 : |V_n| < \epsilon \\ m_2 &= \max(n_0, n_1), |U_n| < \epsilon \wedge |V_n| \leq \alpha : |U_n V_n| = |U_n||V_n| \leq \alpha\epsilon = \epsilon' \\ &\Rightarrow |U_n V_n - 0| < \epsilon \\ (U_n V_n \to 0) & \end{aligned}$$

4 Suites Adjacentes

Définition 2.4 *deux suites (U_n) et (V_n) sont dites adjacentes ssi*

$$\begin{cases} U_n croissante \\ V_n décroissante \end{cases} U_n - V_n \to 0$$

Proposition 2.3 *Si deux suites réelles (U_n) et (V_n) sont adjacentes alors elles converge vers la même limite*

Démonstration. *En posant $W_n = V_n - U_n$*

$$\begin{aligned} W_{n+1} - W_n &= (V_{n+1} - U_{n+1}) - (V_n - U_n) \\ &= (V_{n+1} - U_{n+1}) - (V_n - U_n) \leq 0 \\ U_n \leq U_{n+1} \wedge V_n \geq V_{n+1} \end{aligned}$$

donc $W_n \searrow$ et $W_n \to 0$ elle est décroissante et elle coverge vers 0 donc elle est minorée par 0 donc

$$\begin{aligned} W_n \geq 0 \Rightarrow V_n - U_n \geq 0 \\ V_n \geq U_n \end{aligned}$$

donc

$$U_0 < ... < U_n \leq V_n < ... < V_0$$

U_n est croissante et U_n majorée par $V_0 \Rightarrow U_n$ est convergente, V_n est décroissante et minorée par U_0 donc elle est convergente

$$\lim_{n\to+\infty}(V_n - U_n) = \lim_{n\to+\infty} V_n - \lim_{n\to+\infty} U_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} U_n$$

5 Suite de Cauchy

Définition 2.5 *On dit que (U_n) est une suite de Cauchy si elle vérifie*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p > q \geq n_0 \Rightarrow |U_p - U_q| < \epsilon$$

autrement dit $|U_p - U_q| \to 0$ p et q $\to \infty$ ou $|U_p - U_q| \to 0$
(U_n) n'est pas de Cauchy $\iff \exists \epsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists p > q \geq n_0 \wedge |U_p - U_q| > \epsilon$

Proposition 2.4 *toute suite convergente est de Cauchy.*

Démonstration.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} U_n = l \iff \forall \epsilon > 0, \exists \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall \geq n_0 \Rightarrow |U_n - l| < \epsilon \\ \Rightarrow \forall p > q > n_0 : |U_p - l| < \frac{\epsilon}{2} \wedge |U_q - l| < \frac{\epsilon}{2} \\ |U_p - U_q| = |U_p - l + l - U_q| \leq |U_p - l| + |U_q - l| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

donc elle est de Cauchy

Proposition 2.5 *toute suite de Cauchy est bornée*

Démonstration. (U_n) *de Cauchy* $\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p > q > n_0 \Rightarrow |U_p - U_q| < \epsilon$

$$\forall p > n_0, |U_p - U_{n_0}| < \epsilon$$

donc U_p *est bornée*

Remarque 5.1 *Dans* $\mathbb{R}$ *toute suite de Cauchy est convergente, on dit que* $\mathbb{R}$ *est complet,* $\mathbb{Q}$ *n'est pas complet dans une autre raison pour prolonger* $\mathbb{Q}$ *à* $\mathbb{R}$

Exemple 5.1

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos kx}{3^k}$$

Montrer que U_n *est de Cauchy*

$$\begin{aligned}
|U_{q+\alpha} - U_q| &= \left| \sum_{k=1}^{q+\alpha} \frac{\cos kx}{3^k} - \sum_{k=1}^{q} \frac{\cos kx}{3^k} \right| \\
&\leq \frac{1}{3^{q+1}} + \frac{1}{3^{q+2}} + ... + \frac{1}{3^{q+\alpha}} \\
&= \frac{1}{3^{q+1}} \left(\frac{1-(\frac{1}{3})^\alpha}{1-\frac{1}{3}} \right) \\
&= \frac{1}{3^{q+1}} \times \frac{3}{2} \left(1 - (\frac{1}{3})^\alpha \right)
\end{aligned}$$

$$1 - (\frac{1}{3})^\alpha < 1$$

$$\frac{1}{3^{q+1}} \times \frac{3}{2} \left(1 - (\frac{1}{3})^\alpha \right) < \frac{1}{3^{q+1}} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{3^q} \times \frac{1}{2} < \epsilon$$

$$\frac{1}{3^q} < 2\epsilon \Rightarrow 3^q > \frac{1}{2\epsilon}$$

$$q \ln 3 > \ln \frac{1}{2\epsilon}$$

$$q > \frac{\ln \frac{1}{2\epsilon}}{\ln 3}$$

il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ *tq :*

$$[.] \leq \frac{\ln \frac{1}{2\epsilon}}{\ln 3} < \underbrace{[.] + 1}_{n_0}$$

$$\forall q > n_0 > \frac{\ln \frac{1}{2\epsilon}}{\ln 3}$$

$$|U_{q+\alpha} - U_q| < \epsilon$$

$(\frac{1}{3})^q \to 0$ *quand* $q \to +\infty$

Exemple 5.2

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

elle n'est pas de Cauchy si $\exists \epsilon > 0, \forall n_0, \exists p, q : p > q > n_0 \wedge |U_p - U_q| > \epsilon$

$$|U_{q+\alpha} - U_q| = \frac{1}{q+1} + ... + \frac{1}{q+\alpha}$$

$$q+1 < q+\alpha$$

$$\frac{1}{q+1} > \frac{1}{q+\alpha}$$

$$.$$
$$.$$
$$.$$

$$\frac{1}{q+\alpha} > \frac{1}{q+\alpha}$$

$$|U_{q+\alpha} - U_q| > \frac{\alpha}{q+\alpha} = \frac{q}{2q} = \frac{1}{2}$$

$\exists \alpha = q$ *et* $p = 2q$
on a $|U_p - U_q| > \frac{1}{2} = \epsilon$
$U_n = \cos \frac{1}{n}$ *Cauchy*
$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{2^k}$ *Cauchy*
$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\log k}$ *n'est pas de Cauchy*
$U_n = \cos \frac{1}{n}$
U_n *de Cauchy* $\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall p > q > n_0 : |U_p - U_q| < \epsilon$

$$\forall \epsilon > 0, |U_p - U_q| = \left|\cos \frac{1}{p} - \cos \frac{1}{q}\right|$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos \frac{1}{p} - \cos \frac{1}{q} = 2 \left|\sin \frac{p-q}{2pq} \sin \frac{p+q}{2pq}\right|$$

$$\leq 2 \left|\sin \frac{p+q}{2pq}\right|$$

$$\frac{p+q}{2pq} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

$$p \geqslant q \Rightarrow \frac{1}{p} \leq \frac{1}{q}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{2}{q} < \epsilon$$

$$q > \frac{2}{\epsilon}$$

$$\left[\frac{2}{\epsilon}\right] \leq \frac{2}{\epsilon} < \left[\frac{2}{\epsilon}\right] + 1$$
$$n_0 = [\frac{2}{\epsilon}] + 1$$
$$\forall p > q > n_0 : |U_p - U_q| < \epsilon$$

6 Suites extraites

Définition 2.6 *Une suite (V_n) est appellée suite extraite ou une sous suite d'une suite (U_n) s'il existe une application strictement croissante*
ie : $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant :
$\forall n \in \mathbb{N}, V_n = U_{\phi(n)}$

Exemple 6.1 $V_n = U_{2n}, V_n = U_{2n+1}$

Proposition 2.6 *Si $(U_n) \to l$ alors toute suite extraite de (U_n) converge vers l*

Remarque 6.1 *On utilise le résultat de la proposition par contraposé, s'il existe deux suites extraites de (U_n) qui convergent vers deux limies différentes, ou si une suite extraite diverge alors U_n diverge*

7 Suite recurrente

Définition 2.7 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ tq : $f(I) \subset I$*
On appelle suite recurrente la suite (U_n) définie par :

$$U_0 \in I \wedge \forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = f(U_n)$$

— ***Cas où f est croissante***

1. $$U_0 < U_1$$ $$f(U_0) < f(U_1)$$ $$U_1 < U_2$$
   donc $U_n \nearrow$
2. $$U_0 > U_1$$ $$f(U_0) > f(U_1)$$ $$U_1 > U_2$$
   donc $U_n \searrow$

$U_{n+1} - U_n$ *est de même signe que* $U_1 - U_0$

— ***Cas où f décroissante***
Si $f \searrow \Rightarrow f \circ f \nearrow$

$$\begin{aligned} U_{n+2} &= f(U_{n+1}) = f(f(U_n)) \\ &= f \circ f(U_n) \\ &= f^2(U_n) \end{aligned}$$

donc on a

$$\begin{aligned} U_{2(n+1)} &= U_{2n+2} = f(U_{2n+1}) \\ &= f \circ f(U_{2n}) \\ &= f^2(U_{2n}) = g(U_{2n}) f^2 \quad = g \\ U_{2n+3} &= U_{2n+1+2} = f^2(U_{2n+1}) \\ U_{2(n+1)+1} &= g(U_{2n+1}) \end{aligned}$$

$f \searrow \Rightarrow \forall x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
$f(f(x)) \leq f(f(y)) \Rightarrow f \circ f \searrow$
U_n *converge* $\Longleftrightarrow U_{2n}$ *et* U_{2n+1} *converge vers la même limite.*

7.1 Calcule de la limite

Dans le cas où U_n convergente

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} U_n &= l \\ \lim_{n \to +\infty} U_{n+1} &= \lim_{n \to +\infty} f(U_n) \\ &= f(\lim_{n \to +\infty} U_n) \end{aligned}$$

(f est continu)

1. Si l'équation $l = f(l)$ n'a pas de solution $\Rightarrow U_n$ diverge
2. Si l'équation $l = f(l)$ a des solutions $\not\Rightarrow U_n$ converge

Exemple 7.1

$$U_n = \begin{cases} 1 \\ 2U_{n-1} \end{cases}$$

$U_n = \{1, 2, 4, 8, 16, ...\}$
$U_n \nearrow$ *et* U_n *n'est pas bornée* $\Rightarrow U_n \to +\infty$
$l = f(l) \Rightarrow l = 2l \Rightarrow l = 0$

$$U_n = \begin{cases} 2 \\ U_{n-1} \end{cases} \quad U_n \to +\infty$$

$U_n = \{2, 4, 16, ...\}$
$l = l^2 \Rightarrow l(l-1) = 0 \Rightarrow l = 0 \wedge l = 1$
SI on montre que U_n *est convergente et l'équation* $l = f(l)$ *a plusieurs solutions, on choisit la solution qui convient avec la suite.*
<u>par exemple</u> $U_n > 1$ *et on a* $l_1 < 1, l_2 > 1$ *on choisit* l_2

Exemple 7.2

$$(U_n) = \begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \sqrt{5+2V_n} \end{cases}$$

$f(x) = f(V_n)$ où $f(x) = \sqrt{5+2x}$ et $D_f = \{5+2x > 0\}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{5+2x}} > 0$$
$$V_1 = \sqrt{5+2.4} = \sqrt{13} < 4$$
$$V_1 < V_0 \Rightarrow V_n \searrow$$

Donc reste à motrer que V_n est minorée

$$V_n > 0$$
$$V_{n+1} < V_n$$
$$\sqrt{5+2V_n} <^? V_n$$
$$5+2V_n <^? V_n^2$$
$$V_n^2 - 2V_n - 5 >^? 0$$
$$\triangle = 6$$
$$V_n > 1+\sqrt{6} \Rightarrow V_n \;\; est \;\; cv$$
$$l = f(l) \Rightarrow l = \sqrt{5+2l}$$
$$l^2 - 2l - 5 = 0$$
$$l_1 = 1-\sqrt{6} \wedge l_2 = 1+\sqrt{6}$$
$$U_n > 0 \wedge U_n > 1+\sqrt{6}$$
$$\lim_{n\to\infty} U_n = 1+\sqrt{6}$$

Exemple 7.3

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{1+\sqrt{1+U_n}} \end{cases}$$

montrer que $U_n > 0$
On va la démonté par recurrence
$U_n > 0$
On suppose que $U_n > 0$ et on montre qu'elle vérifié pour U_{n+1} tq : $U_{n+1} = \frac{U_n}{1+\sqrt{1+U_n^2}}$

puisque $U_n > 0$

$$U_n^2 > 0 \Rightarrow U_n^2 + 1 > 0$$
$$\Rightarrow \sqrt{U_n^2 + 1} > 0$$
$$1 + \sqrt{1 + U_n^2} > 1 > 0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{1 + \sqrt{1 + U_n^2}} > 0$$
$$\frac{U_n}{1 + \sqrt{1 + U_n^2}} > 0$$
$$\Rightarrow U_{n+1} > 0$$
$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n}{1 + \sqrt{1 + U_n^2}} - U_n$$
$$= \frac{-U_n\sqrt{1 + U_n^2}}{1 + \sqrt{1 + U_n^2}} < 0$$
$$U_n \searrow$$

$U_n \searrow$ *et* U_n *minorée* $\Rightarrow$ U_n *converge et*

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = l$$
$$l = f(l)$$
$$l = \frac{l}{1 + \sqrt{1 + l^2}}$$
$$l + l\sqrt{1 + l^2} = l$$
$$l\sqrt{1 + l^2} = 0$$
$$l = 0 \wedge \sqrt{1 + l^2} \neq 0$$

donc $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

Chapitre 3

Limite et Continuité

1 Limite en un point x_0 de $\mathbb{R}$

On dit qu'une fonction définie au voisinage de x_0 sauf peut-être en x_0, à une limite l au point x_0 si on a :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

et on écrit : $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

Exemple 1.1

$$\lim_{x \to 1}(3x - 2) = 1$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \neq 1, : |x - 1| < \alpha \Rightarrow |f(x) - 1| < \epsilon$$

$$|f(x) - 1| = |3x - 2 - 1| = 3|x - 1| < \epsilon \Rightarrow |x - 1| < \frac{\epsilon}{3}$$

$$\exists \alpha = \frac{\epsilon}{3} : |x - 1| < \frac{\epsilon}{3} \Rightarrow |f(x) - 1| < \epsilon$$

f n'admet pas de limite quand $x \to x_0$

$$\forall l \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x, |x - l| < \alpha : |f(x) - l| \geq \epsilon$$

Remarque 1.1 *toutes les propriétés étudier dans les suites sont valables pour les fonctions (au lieu de dire $n > n_0$ on dit $|x - x_0| < \alpha$)*

Proposition 3.1

$$f : I \to \mathbb{R}$$

f admet l pour limite au point x_0 ssi

$$\forall x_n \in I : x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to l$$

x_0 et l finie ou infinie

Remarque 1.2 *s'il existe $x_n \to x_0$ et $f(x_n) \nrightarrow l$ donc $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq l$*

Exemple 1.2 *demontrer que $\lim_{x \to +\infty} \sin x$ et $\lim_{x \to +\infty} \cos x$ n'existe pas*
<u>Solution</u>
On demontre qu'il existe deux suites
$x_n = 2\pi n \to +\infty$ tq : $\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$
et $y_n = 2\pi n + \frac{\pi}{2} \to +\infty$ tq : $\lim_{n \to +\infty} y_n = +\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} f(x_n) &= \lim_{n \to +\infty} \sin(2\pi n) \\ &= \lim_{n \to +\infty} 0 = 0 \\ \lim_{n \to +\infty} f(y_n) &= \lim_{n \to +\infty} \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = 1 \\ \lim_{n \to +\infty} f(x_n) &\neq \lim_{n \to +\infty} f(y_n) \end{aligned}$$

donc $f(x)$ n'admet pas de limite.
pour demontrer que $\lim_{x \to x_0} f(x)$ n'existe pas, il suffit de trouver deux suites différentes qui convergent vers x_0 et $\lim f(x_n) \neq \lim f(y_n)$

2 Limite à droite - Limite à gauche

On dit que f a une limite à droite (resp. à gauche) au point x_0 si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x : x_0 < x < x_0 + \alpha (resp.\ \ x_0 - \alpha < x < x_0) \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

et on écrit :

$$\lim_{x \to^{>} x_0} f(x) = l \wedge \lim_{x \to^{<} x_0} f(x) = l$$
$$Si \quad \lim_{x \to^{>} x_0} f(x) = \lim_{x \to^{<} x_0} f(x)$$

$\Rightarrow$ la limite de $f(x)$ quand $x \to x_0$ existe.

Définition 3.1 (Définition des Limites) *1.*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \beta > 0, \forall x > \beta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

2.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \beta > 0, \forall x > -\beta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

3.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > A$$

4.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) < -A$$

Exemple 2.1 *1.* $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$

2. $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

3. $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

Solution

1.

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0 \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x : |x - 0| < \alpha \Rightarrow |x^2 - 0| < \epsilon$$
$$|x^2 - 0| = |x^2| = x^2 < \epsilon \Rightarrow |x| < \sqrt{\epsilon} \Rightarrow \exists \alpha = \sqrt{\epsilon}$$
$$Si \ \ |x| < \alpha \Rightarrow |x^2 - 0| < \epsilon$$

2.

$$\lim_{x \to +\infty} = +\infty$$
$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x : x > B \Rightarrow x^2 > A$$
$$\forall A > 0, x^2 > A \Rightarrow |x| > \sqrt{A}$$
$$x > \sqrt{A} \wedge x < -\sqrt{A}$$
$$\exists \alpha > 0 : \alpha = \sqrt{A}$$
$$x > \sqrt{A} \Rightarrow x^2 > A \wedge x < -\sqrt{A} \Rightarrow x^2 > A$$

donc : $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ *et* $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

Exemple 2.2

$$f(x) = \begin{cases} -x & si \;\; x < 0 \\ x & si \;\; x > 0 \\ 0 & si \;\; x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to > 0} f(x) = 0 = \lim_{x \to < 0} f(x)$
$f(x) = \sin \frac{1}{x}, \lim_{x \to 0} f(x)$
$x_n = \frac{1}{(2n+\frac{1}{2})^{\pi}} \to 0, f(x_n) \to 1$
$y_n = \frac{1}{(2n-\frac{1}{2})^{\pi}} \to 0, f(y_n) \to -1$

3 Continuité

3.1 Continuité en un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}, x_0 \in I$
f est continue au point x_0 Ssi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) : \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

On dit que f est discontinue si elle n'est pas continue

3.2 Discontinuité de 1^{ere} espece

f admet une limite à gauche en x_0 et admet une limite à droite en x_0 mais

$$\lim_{x \to > x_0} f(x) \neq \lim_{x \to < x_0} f(x)$$

3.3 Discontinuité de 2^{eme} espece

Si la $\lim_{x \to > x_0} f(x)$ ou $\lim_{x \to < x_0} f(x)$ n'existe pas ou $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

3.4 Discontinuité Simple

Si $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe et $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

Exemple 3.1 1. $f(x) = \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$

2.

$$g(x) = \begin{cases} 1 + x & x \leq 1 \\ \frac{2}{x} - 1 & x > 0 \end{cases}$$

3.

$$h(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ x\sin\frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$$

Solution

1. $f(x) = \frac{x\sin x}{1-\cos x}$
   $D_f = \{x \in \mathbb{R}, 1 - \cos x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}, x \neq 2k\pi\} = \mathbb{R} - \{2k\pi\}$
   Si $k = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x}$$

$$\begin{aligned} \sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \\ \cos x &= \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} \\ &= 1 - \sin^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} \\ &= 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} \\ &\Rightarrow 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0} 2\frac{\cos\frac{x}{2}}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}} = 2$$

0 *est un point de discontinuité simple*
Si $k \neq 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2k\pi} \frac{x\sin x}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 2k\pi} \frac{x\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \\ &= \frac{2k\pi\cos k\pi}{\sin k\pi} = \frac{2k\pi}{0} \\ &= \begin{cases} +\infty, k \;\; positif \\ -\infty, k \;\; négatif \end{cases} \end{aligned}$$

au point $2k\pi$
$\lim_{x\to 2k\pi} f(x)$ *n'existe pas, donc* $2k\pi$ *est un point de discontinuité de* 2^{eme} *espece*

2.

$$g(x) = \begin{cases} 1 + x, x \leq 1 \\ \frac{2}{x} - 1, x > 1 \end{cases} \quad \lim_{x\to^{>}1} f(x) \quad = 1$$

$$\lim_{x\to^{<}1} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to^{>}1} f(x) \neq \lim_{x\to^{<}1} f(x)$$

donc 1 *est un point de discontinuité du* 1^{ere} *espece*

3.
$$h(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ x\sin\frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to >0} \sin\frac{1}{x}$ *n'existe pas*
$\lim_{x \to <0} f(x) = \lim_{x \to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$ *puisque* $|x\sin\frac{1}{x}| \leqslant x$
la limite à droite n'existe pas donc 0 *est un point de discontinuité de* 2^{eme} *espece*

Proposition 3.2 f *est continue au point* $x_0 \iff \forall x_n \in I, x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$

3.5 Continuité sur un Intervalle

Soit $I \subset \mathbb{R}$ on dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point x de I

Théorème 3.1 *Si* f, g *sont continues au point* $x_0 \in I$ *alors* $f + g, f \times g, \frac{f}{g}, \lambda f$ *sont continues au point* x_0

Théorème 3.2 (de la valeur intermediaire) *Soit* $f : I \to \mathbb{R}; a, b \in I : f(a) \leq f(b), \forall \gamma \in [f(a), f(b)], \exists c \in I : f(c) = \gamma$
On utilise souvent le théorème de la valeur intermediaire dans le cas où $f(a) \leq 0, f(b) \geq 0$ *alors* $\exists c \in]a, b[: f(c) = 0$

Exemple 3.2 $f(x) = x^6 - 5x^2 + 3$
$f(0) = 3 \geq 0, f(1) = -1 < 0$
$\exists c \in]0, 1[: f(c) = 0$
c *est unique si* f *est strictement monotone*

3.6 prolongement par Continuité

Si $x_0 \notin D_f$ et si f possède une limite finie l en x_0 alors la fonction définie par :

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

$\widetilde{f}$ est continue en x_0 on appelle prolongement par continuité de f au point x_0

Exemple 3.3
$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$
$D_f = \mathbb{R}^*, \lim_{x \to 0} f(x) = 1$
$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{x}{|x|}$$

$D_g = \mathbb{R}^*, \lim_{x \to >0} g(x) = 1, \lim_{x \to <0} g(x) = -1$
$\lim_{x \to 0} f(x)$ *n'existe pas donc n'est pas prolongeable en* 0

Exemple 3.4 $f(x) = E(x)$
Si $x_0 \in \mathbb{Z} : f(x_0) = n$

$$\lim_{x \to^< x_0} f(x) = n - 1$$
$$\lim_{x \to^> x_0} f(x) = n$$
$$\lim_{x \to^> x_0} f(x) \neq \lim_{x \to^< x_0} f(x)$$

donc f *est discontinue au point* $x_0 = n$
Si $x_0 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow x_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$

$$[x] \leq x_0 < [x] + 1$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = E(x_0)$$

elle est continue dans $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$

Proposition 3.3 *Soit* $f : I \to I', g : I' \to \mathbb{R}$
Si f *est continue au point* x_0 *et* g *continue au point* $y_0 = f(x_0)$ *alors* $g \circ f$ *est continue au point* x_0

$$f : I \to I' \to \mathbb{R}$$
$$g \circ f : I \to \mathbb{R}$$
$$x_0 \to g(f(x_0))$$

Théorème 3.3 *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *,* f *continue alors*

1. f *bornée*
2. f *atteint ces bornes*

$$\exists \alpha \in [a, b] : \sup f(x) = f(\alpha)$$
$$\exists \beta \in [a, b] : \inf f(x) = f(\beta)$$

Remarque 3.1 *la propriété n'est pas vrai si l'intervalle n'est pas borné ou fermé*

$$f(x) = x^2, x \in [0, +\infty[$$
$$f(x) = \frac{1}{x}, x \in]0, 1]$$
$$f(x) = \begin{cases} x & si \ \ 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & si \ \ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$
$$\lim_{x \to^< \frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{2} \wedge \lim_{x \to^> \frac{1}{2}} f(x) = 0$$

discontinue au point $\frac{1}{2}$ *tq :* $\sup f(x) = \frac{1}{2}$
$\nexists c \in [0, 1] : f(c) = 0$

Définition 3.2 *On dit que I est un intervalle Ssi* $\Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I : [x_1, x_2] \subset I$

Théorème 3.4 *Si f est continue alors $f(I)$ est un intervalle*

3.7 Application Réciproque

Théorème 3.5 *Soit $f : I \to f(I) \subset \mathbb{R}$, si f est continue et strictement monotone, alors :*

1. *f est bijective*
2. *f^{-1} est strictement monotone et de même signe que f*
3. *f^{-1} est continue sur $f(I)$*

Exemple 3.5

$$\begin{aligned} &f(x) = \sin x, D_f = [0, 2\pi] \\ &f'(x) = \cos x \\ &f'(x) > 0, x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ &f'(x) < 0, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

donc sur $[0, 2\pi]$ f n'est pas strictement monotone
On choisit la restriction de f à $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, elle admet une application réciproque noté $\arcsin$ *tq :*

$$\begin{aligned} \arcsin : [-1, 1] \to \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x \to y = \arcsin x \\ y = \arcsin x \Longleftrightarrow x = \sin y \end{aligned}$$

elle est strictement croissante

$$\arcsin 0 = \alpha \Longleftrightarrow \sin \alpha = 0 : \alpha = 0$$

de même on peut définir la fonction reciproque de $\cos x$ *qui est strictement croissante* $[0, \pi]$

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

3.8 Continuité Uniforme (U.C)

Soit $f : I \to \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}$
On dit que f est continue uniformement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x', x'' \in I : |x' - x''| < \alpha \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \epsilon$$

Remarque 3.2 *f continue uniformement $\Rightarrow$ f est continue*
mais le contraire n'est pas toujours vrai

Exemple 3.6 $f(x) = \frac{1}{x^2}, x \in]0, 1]$ *;* $g(x) = \sqrt{x}, x \in [0, +\infty[$
$\sqrt{x}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^+$
$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2_+, \forall \epsilon > 0, |f(x_1) - f(x_2)| = |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \leqslant \sqrt{|x_1 - x_2|} < \epsilon \Rightarrow |x_1 - x_2| < \epsilon^2 = \alpha$
$\exists \alpha = \epsilon^2 : |x_1 - x_2| < \epsilon \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$
donc (u.c)
$f(x) = \sin x$
$\underline{\forall \epsilon > 0}$

$$\begin{aligned}
|\sin x_1 - \sin x_2| &= 2\left|\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\cos\frac{x_1 + x_2}{2}\right| \\
&\leqslant \left|\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\right| \\
&\leqslant 2\frac{|x_1 - x_2|}{2} = |x_1 - x_2| < \epsilon \\
\exists \alpha = \epsilon : |x_1 - x_2| < \alpha &\Rightarrow |\sin x_1 - \sin x_2| < \epsilon
\end{aligned}$$

donc (u.c)
$f(x) = \frac{1}{x^2}, x \in]0, 1]$ *n'est pas u.c*

$$\exists \epsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x_1, x_2 \in]0, 1] : |x_1 - x_2| < \alpha \wedge |f(x_1) - f(x_2)| \geq \epsilon$$

$\underline{\forall \alpha > 0}$

1. ***Si*** $0 < \alpha < 1$

$$x_1 = \alpha, x_2 = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow |x_1 - x_2| = |\alpha - \frac{\alpha}{2}| = \frac{\alpha}{2} < \alpha$$

   D'autre part :

$$\begin{aligned}
|f(x_1) - f(x_2)| &= \left|\frac{1}{\alpha^2} - \frac{4}{\alpha^2}\right| \\
&= \frac{3}{\alpha^2} > 3 \\
&\Rightarrow 0 < \alpha < 1 \\
0 &< \alpha^2 < 1 \\
1 &< \frac{1}{\alpha^2} \\
3 &< \frac{3}{\alpha^2}
\end{aligned}$$

   $\exists \epsilon = 3 : |x_1 - x_2| < \alpha \wedge |f(x_1) - f(x_2)| > \epsilon$ *elle n'est pas (u.c)*

2. ***Si*** $1 \leqslant \alpha$

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{\alpha}, x_1 \in]0,1] \\
x_2 &= \frac{1}{2\alpha}, x_2 \in]0,1] \\
|x_1 - x_2| &= \frac{1}{2\alpha} < \alpha \\
|f(x_1) - f(x_2)| &= |\alpha^2 - 4\alpha^2| = 3\alpha^2 > 3 \\
\alpha &> 1 \\
3\alpha^2 &> 3 \\
\exists \epsilon &= 3
\end{aligned}$$

elle n'est pas (u.c) mais $\frac{1}{x^2}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^*$ *de même on montre que* $\frac{1}{x}, x \in]0,1]$ *n'est pas (u.c)*

$\log x$ *n'est pas (u.c)*

$$x_1 = \frac{\alpha}{2}, x_2 = \frac{\alpha}{4}, |x_1 - x_2| = \frac{\alpha}{2} < \alpha$$
$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\log\frac{\alpha}{2} - \log\frac{\alpha}{4}| = \log 2 \exists \epsilon \qquad = \log 2, \forall \alpha > 0$$

Chapitre 4

Dérivabilité

1 Derivée en un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ tq $I \subset \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$
f est dérivable au point x_0 Ssi $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et elle est définie, ou par $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe et on note : $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$

2 Derivée à gauche - Derivée à droite

f est derivable à gauche (resp. à droite) si $\lim_{x\to^< x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_g(x_0)$ (resp. $\lim_{x\to^> x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_d(x_0)$) existe
Si $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$ on dit que f est derivable au point x_0

3 Derivée sur un intervalle

On dit que f est derivable sur I si elle est derivable en tout point $x_0 \in I$

Exemple 3.1

$$\begin{aligned}
f(x) &= c \\
\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \frac{c-c}{x-x_0} = 0 \\
\Rightarrow f'(x_0) &= 0 \\
f(x) &= |x|, x_0 = 0 \\
f(x) &= \begin{cases} x, x > 0 \\ -x, x \leq 0 \end{cases} \\
\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \frac{|x|}{x} \\
&= \begin{cases} 1, x > 0 \\ -1, x < 0 \end{cases} \\
\lim_{x\to^> 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= 1 \neq -1 = \lim_{x\to^< 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}
\end{aligned}$$

f n'est pas derivable au point 0

$$\begin{aligned}
f(x) &= \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ x^2, x > 0 \end{cases} \\
\lim_{x\to^> 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2-0}{x-0} \\
&= \lim_{x\to 0} x = 0 \\
\lim_{x\to^< 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \frac{0-0}{x-0} = 0 \\
f'_g(0) &= f'_d(0)
\end{aligned}$$

donc f est derivable au point 0

Proposition 4.1 *Si f est derivable au point x_0 alors elle est continue en x_0*

Remarque 3.1 *la réciproque est fausse*
$f(x) = |x|$, f est définie sur $\mathbb{R}$ elle est continue sur $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \to^> 0} f(x) = \lim_{x \to^< 0} f(x) = 0 = f(0)$$

mais elle n'est pas derivable au point 0
$f(x) = \sqrt{x}$, $D_f = \mathbb{R}_+$ elle est continue sur son domaine de définition mais

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0}$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Donc elle n'est pas dérivable

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

$x \sin \frac{1}{x}$ est définie que $\mathbb{R}^*$ elle est continue sur $\mathbb{R}^*$, On étudie la continuité au point 0

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$
$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leqslant |x|$$
$$\lim_{x \to 0} \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq \lim_{x \to 0} |x| = 0$$
$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

donc f est continue au point 0
est-ce-que f est dérivable au point 0 ?

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} = \sin \infty$$

elle n'existe pas donc $f'(0)$ n'existe pas

Proposition 4.2 (propriété Algèbrique) *f et g deux fonctions dérivables alors $f+g$, $f \times g$, $\frac{f}{g}$, $\frac{1}{f}$, λf sont dérivables et ses dérivées sont : $(f + g)'$, $f'g + g'f$, $\frac{f'g - g'f}{g^2}$, $\lambda f'$, $-\frac{f'}{f^2}$ (resp.)*

4 Dérivée d'une composé

$$\begin{aligned} f &: I \to J \\ g &: J \to K \\ tq \quad : \quad f(I) &\subset J \end{aligned}$$

f est dérivable au point x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable au point x_0

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) . f'(x_0)$$

5 Dérivée d'une fonction réciproque

$f : I \to \mathbb{R}$
une application strictement monotone et continue sur I dérivable au point x_0 et $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est la fonction réciproque de f : $f^{-1} : f(I) \to I$ dérivable en $f(x_0) = y_0$ tq : $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ ou $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Exemple 5.1 *$f(x) = x^2$, f est monotone sur $\mathbb{R}^+$ donc il existe f^{-1} la fonction réciproque de f*

$$\begin{aligned} x^2 = y \Rightarrow x &= \sqrt{y} \\ f^{-1}(x) &= \sqrt{y} \\ \left(f^{-1}(y_0)\right)' &= \frac{1}{f'(x_0)} \\ f'(x_0) &= 2x_0 \\ \left(f^{-1}(y_0)\right)' &= \frac{1}{2x_0} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y_0}} \\ \Rightarrow (\sqrt{y})' &= \frac{1}{2\sqrt{y_0}} \end{aligned}$$

$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, f est strictement monotone sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc il admet une fonction réciproque f^{-1} on appelle :

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= \arctan x \\ (\arctan)'(\tan x) &= \frac{1}{(f'(x))} \\ (y)' = (\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \\ \arctan(y) &= \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2} \end{aligned}$$

6 Dérivées successive

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ Si f est dérivable sur I alors f' est la première dérivée de f si f' est dérivable alors on définie f'' qui est la deuxième dérivée de f, on définie par recurrence $f^{(n)}(x)$ la dérivée de $f^{(n-1)}(x)$ tq $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$
On dit que $f \in C^n(I)$ si f est n fois dérivable et $f^{(n)}$ continue.

Exemple 6.1

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0 \qquad\quad, x = 0 \end{cases}$$

f dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\quad, x = 0 \end{cases}$$
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f'(x) &= \lim_{x\to 0} \left(2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}\right) \\ &= 0 + \lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x} \end{aligned}$$

n'existe pas donc f' n'est pas continue alors f' n'est pas dérivable

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \\ f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1} \\ f^{(2)} &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \\ &. \\ &. \\ &. \\ f^{(n)} &= \alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1)) \times (1+x)^{\alpha-n} \end{aligned}$$

7 Théorème de Leibnitz

f et g deux fonctions définies de I sur $\mathbb{R}$ sont n fois dérivable alors :

$$(f.g)^n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemple 7.1 $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$, $g(x) = \sin x$
trouver $f^{(n)}$ et $g^{(n)}$

1.

$$f(x) = x^2 \times \frac{1}{1-x}$$
$$f_1(x) = x^2, f_2(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$$
$$f_1'(x) = 2x, f_1''(x) = 2, f_1^{(3)} = 0$$
$$f_2' = \frac{1}{(1-x)^2}$$
$$f_2''(x) = 1 \times 2(1-x)^{-3}$$
$$f_2^{(3)}(x) = 1 \times 2 \times 3(1-x)^{-4} = \frac{3!}{(1-x)^4}$$

.

.

.

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$
$$\Rightarrow (f_1 \times f_2)^n (x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f_1^k f_2^k$$
$$= C_n^0 x^2 \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} + C_n^1 2x \frac{(n-1)!}{(1-x)^n} + C_n^2 2 \frac{(n-2)!}{(1-x)^{n-1}}$$
$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}, C_n^1 = n, C_n^0 = 1$$
$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \left[x^2 + 2x(1-x) + (1-x)^2\right]$$
$$= \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}, \forall n \geqslant 2$$

2.

$$g(x) = \sin x$$
$$g'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$
$$g''(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{2\pi}{2})$$
$$g^{(3)}(x) = \cos(x + \frac{2\pi}{2}) = \sin(x + \frac{3\pi}{2}) \quad .$$

.

.

$$g^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$$

8 Représentation Graphique

Soit f une fonction définie de I sur $\mathbb{R}$
la dérivabilité de f au point x_0 se traduit géométriquement par l'existance d'une tangente au point $A(x_0, f(x_0))$ de la courbe représentative de f cette tangente a pour coefficient de direction $f'(x_0)$ et l'équation de la tangente ce présente par $\triangle$: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to +\infty$ la courbe C_f admet une demi-tangente parallele à (yy')

8.1 Théorème de Rolle

Soit f une fonction définie et continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ tq :

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in]a, b[: f'(c) = 0$$

Si f vérifie les conditions du théorème de Rolle alors il existe un point $(c, f(c))$ tq : la courbe C_f admet une tangente parallele à (xx')

Remarque 8.1 *Si f est continue sur $]a, b[$ (elle n'est pas continue au point a et b) le théorème n'est pas vérifier*

Exemple 8.1

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}, a < x < b \\ 0 \qquad\qquad\quad , x = a \vee x = b \end{cases}$$

$$\lim_{x \to^{>} a} f(x) = -\infty, \lim_{x \to^{<} b} f(x) = +\infty$$

f non continue au point a et b

$$f(a) = f(b) = 0$$
$$f'(x) = \frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{(x-b)^2} > 0$$

donc Rolle n'est pas vérifier

9 Théorème des accroissement finie (A.F)

f continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ alors $\exists c \in]a, b[$ tq $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$
Si f vérifie les conditions du théorème (A.F) il existe $c \in]a, b[: (c, f(c))$ tq la tangente de c est parallele à (AB) tq $A(a, f(a)), B(b, f(b))$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Remarque 9.1 *Si f est* $\nearrow$

$$\forall x_1, x_2 \in]a,b[\quad si \quad f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c)$$
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f'(c) > 0$$

Si f est $\searrow$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f'(c) < 0$$

Si f est constante $f'(c) = 0$

Exemple 9.1 *Montrer que* $|\sin x| \leqslant |x|$

$$f(t) = \sin t$$

On applique le théorème (A.F) de la fonction f sur $[0, x]$
$\sin x$ *est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur [0 , x], elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors elle est dérivable sur $]0, x[$ d'après le théorème (A.F) $\exists c \in]0, x[$*

$$f(x) - f(0) = (x - 0)f'(c)$$
$$\sin x - \sin 0 = (x - 0)(\cos c)$$
$$\sin x = x \cos c$$
$$|\cos c| \leq 1 \Rightarrow |x \cos c| \leq |x|$$
$$|\sin x| \leq |x|$$

Montrer que $1 - x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}, \forall x \in [0, 1[$
on veut montré que :

$$e^x - \frac{1}{1-x} \leq 0 \wedge 1 - x - e^x \leq 0$$
$$g(x) = e^x - \frac{1}{1-x}$$
$$f(x) = 1 - x - e^x$$

On applique le théorème A.F sur $[0, x]$ tq $(0 < x < 1)$

f est continue sur $[0,x]$ dérivable sur $]0,x[$ alors d'après le théorème A.F il existe $c \in]0,x[$:

$$\begin{aligned}
f(x)-f(0) &= (x-0)f'(c)\\
f(0) &= 0\\
f'(x) &= -1-e^x\\
f'(c) &= -1-e^c<0\\
1-x-e^x &= xf'(c)\\
0<x<c &\Rightarrow x>0\\
xf'(c) &\leq 0\\
1-x-e^x &\leq 0\\
1-x &\leq e^x\\
g(x) &= e^x-\frac{1}{1-x}\\
&= \frac{(1-x)e^x-1}{1-x}
\end{aligned}$$

On a $0<x<1, 1-x>0$
On veut demontré que $(1-x)e^x-1\leq 0$ on met $g_1(x)=(1-x)e^x-1$, g_1 est continue sur $[0,x]$ dérivable sur $]0,x[$ donc d'après le théorème A.F $\exists c \in]0,x[$ tq :

$$\begin{aligned}
g_1(x)-g_1(0) &= (x-0)g_1'(c)\\
g_1(x) &= (1-x)e^x-1\\
g_1(0) &= 0\\
g_1'(x) &= -e^x+(1-x)e^x\\
g_1'(c) &= -ce^c\leq 0\\
xg_1'(c) &\leq 0\\
g_1(x)-g_1(0) &\leq 0\\
e^x &\leqslant \frac{1}{1-x}\\
\Rightarrow \forall x\in[0,1[, 1-x\leq e^x &< \frac{1}{1-x}
\end{aligned}$$

10 Théorème A.F généralisé (A.F.G)

Soit f, g deux fonctions continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$ et si $g'(x)\neq 0, \forall x \in]a,b[$ alors il existe $c\in]a,b[$ tq : $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$

11 Règle de l'Hopital

Si f et g sont deux fontions dérivables dans un voisinage de a et $\lim f(x)=0, \lim g(x)=0$ en a et si $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ admet une limite l au point a alors $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$ admet la même limite.

Remarque 11.1 *Si* $f(a) = g(a) = 0$

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Remarque 11.2 *La réciproque est en général fausse*

Exemple 11.1 *1.* $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0}$
On applique la règle de l'hopitale

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

2. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^4} = \frac{0}{0}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^4} &= \frac{2x \sin x^2}{4x^3} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \frac{2x \cos x^2}{2x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \cos x^2 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos ax}{2 \sin^2 bx} &= \lim_{x \to 0} \frac{a \sin ax}{4b \cos bx \sin bx} \\
&= \frac{\lim_{x \to 0} a^2 \cos ax}{-4b^2 \sin^2 bx + 4b^2 \cos^2 bx} \\
&= \frac{a^2}{4b^2}
\end{aligned}$$

donc on peut appliquer la règle de l'Hopitale plusieurs fois

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} &= \frac{0}{0} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} \times x \sin \frac{1}{x} \\
&= 0 \\
\frac{f'(x)}{g'(x)} &= \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}
\end{aligned}$$

elle n'a pas de limite quand $x \to 0$ *donc si* $\frac{f'}{g'}$ *n'existe pas sa ne prouve pas sa ne prouve pas que* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *n'a pas de limite.*

12 Conséquence de la rège de l'Hopitale

On peut appliquer la règle de L'Hopitale dans le cas où $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty, \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$ ou quand $x \to \infty$

— **Cas indéfinie :** $0 \times \infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x).g(x) &= 0 \times \infty \\
\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \wedge \lim_{x\to x_0} g(x) &= \infty \\
\lim_{x\to x_0} f(x).g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} &= \frac{0}{0} \\
= \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} &= \frac{\infty}{\infty}
\end{aligned}$$

puis on applique la règle de l'Hopitale sur les fonctions $f \wedge \frac{1}{g}$ ou $g \wedge \frac{1}{f}$

— **Cas indéfinie :** $0 \times \infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x).g(x) &= 0 \times \infty \\
\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \wedge \lim_{x\to x_0} g(x) &= \infty \\
\lim_{x\to x_0} f(x).g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} &= \frac{0}{0} \\
= \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} &= \frac{\infty}{\infty}
\end{aligned}$$

puis on applique la règle de l'Hopitale sur les fonctions $f \wedge \frac{1}{g}$ ou $g \wedge \frac{1}{f}$

— **Cas indéfinie** $\infty - \infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] &= \infty - \infty \\
\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) &= +\infty, \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty \\
On \ \ a: \ \ f(x) - g(x) &= \ln e^{f(x)-g(x)} \\
&= \ln \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} \\
\lim_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] &= \ln \lim_{x\to x_0} \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} \\
\lim_{x\to x_0} \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} &= \frac{\infty}{\infty}
\end{aligned}$$

Donc on peut appliquer le théorème de l'Hopitale sur e^f et e^g si $\lim_{x\to x_0} \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = \alpha$ donc $\lim_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] = \ln \alpha$

— **Cas indéfinie** $0^0, \infty^0, 1^\infty$

On peut avoir ces cas de $\lim[f(x)]^{g(x)}$

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{\ln[f(x)]} = e^{g(x)\ln[f(x)]}$$

Dans tous les cas on peut avoir

$$\lim_{x \to x_0} g(x) \ln f(x) = 0 \times \infty$$

On applique la règle de l'Hopitale sur $f(x)$ et $\frac{1}{\ln g(x)}$ ou $\ln f(x)$ et $\frac{1}{g(x)}$
Si $\lim_{x \to x_0} g(x) \ln f(x) = \alpha$ on a $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)} = e^{\alpha}$

Remarque 12.1 $0^{-\infty} = +\infty, 0^{+\infty} = 0$ *ne sont pas des cas d'indéfinité*

Exemple 12.1

1. $\lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{k}{x})^x$
2. $\lim_{n \to +\infty} \frac{e^x}{x^n}$
3. $\lim_{x \to 4} (5 - x)^{\frac{1}{x-4}}$
4. $\lim_{x \to +\infty} (x - \ln x)$

Solution

1.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = 1^{\infty}$$

$$\left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^{\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)^x}$$

$$= e^{x \ln\left(1+\frac{k}{x}\right)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{k}{x}\right) = \infty \times 0$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{k}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\ln\left(1 + \frac{k}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\frac{k}{x^2}}{1+\frac{k}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{k}{1 + \frac{k}{x}} = k$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x \ln(1+\frac{k}{x})} = e^k$$

2.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(e^x)'}{(x^n)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \frac{\infty}{\infty}$$

On peut appliquer la règle de l'Hopitale plusieurs fois

$$g(x) = e^x, f'(x) = e^x, ..., f^{(n)} = e^x$$

$$g(x) = x^n, g'(x) = nx^{n-1}, ..., g^{(n)} = n!$$

donc

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(e^x)^{(n)}}{(x^n)^{(n)}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{n!} = +\infty$$

3.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 4} (5-x)^{\frac{1}{x-4}} &= 1^{\infty} \\
&= \lim_{x \to 4} e^{\ln(5-x)^{\frac{1}{x-4}}} \\
&= \lim_{x \to 4} e^{\frac{(5-x)}{x-4}} \\
\lim_{x \to 4} \frac{(5-x)}{x-4} &= \frac{0}{0} \\
&= \lim_{x \to 4} \frac{\frac{-1}{5-x}}{-1} = -1 \\
\Rightarrow \lim_{x \to 4} (5-x)^{\frac{1}{x-4}} &= e^{-1}
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} (x - \ln x) &= +\infty - \infty \\
&= \lim_{x \to +\infty} \ln e^{(x - \ln x)} = \lim_{x \to +\infty} \ln \frac{e^x}{e^{\ln x}} = \ln[\frac{e^x}{x}] \\
\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} &= \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty \\
\lim_{x \to +\infty} (x - \ln x) &= \ln(+\infty) = +\infty
\end{aligned}$$