



*Université Abdelhamid MEHRI – Constantine2 –*

# Cours

# ALGEBRE 1

2020/2021



# 1. Ensembles

## 1.1 Définitions

1.1.1 Ensemble

1.1.2 Comment définir un ensemble

1.2.3 Egalité de deux ensembles

1.2.4 Partie d'un ensemble

## 1.2 Opérations sur les ensembles

1.2.1 L'intersection

1.2.2 La réunion

1.2.3 Partition d'un ensemble

1.2.4 Le complémentaire d'un ensemble

1.2.5 Produit cartésien

1.2.6 Différence de deux ensembles

1.2.7 Différence symétrique de deux ensembles

# 2. Applications

## 2.1 Définitions

2.1.1 Applications

2.1.2 Egalité de deux applications

2.1.3 Le graphe d'une application

2.1.4 Compositions d'applications

2.1.5 Prolongement et restrictions

## 2.2 Applications injectives, surjectives, bijectives

2.2.1 Applications injectives

2.2.2 Applications surjectives

2.2.3 Applications bijectives

2.2.4 Application réciproque

# 1. Ensembles

## 1.1 Définitions :

### 1.1.1 Définition : (Ensemble)

Un ensemble est une collection d'objets différents. Un objet  $x$  d'un ensemble  $E$  appelé élément de  $E$  et on dit que  $x$  appartient à  $E$  et on note " $x \in E$ ". Si  $x$  n'appartient pas à l'ensemble  $E$ , on note " $x \notin E$ ".

### Exemple :

Soit  $E$  l'ensemble des diviseurs positifs de 6 alors  $E = \{1; 2; 3; 6\}$ .

- On dit que 3 est un élément de  $E$  et on écrit  $3 \in E$ .
- 4 n'appartient pas à l'ensemble  $E$  donc on écrit  $4 \notin E$ .

### 1.1.2 Comment définir un ensemble ?

Il y'a deux façons pour définir un ensemble :

a-Les ensembles n'ayant qu'un nombre fini d'éléments peuvent être définis par la liste de leurs éléments, souvent indiqués en écrivant ces éléments entre accolades et on appelle le nombre de ces éléments le cardinal de  $E$  et on le note  $\text{card}(E)$ .

### Exemples :

$E = \{1,3,5,7,9; 11\}$  donc  $\text{card}(E) = 6$ .

$F = \{\text{Dimanche}, \text{Lundi}, \text{Mardi}, \text{Mercredi}, \text{Jeudi}\}$  donc  $\text{card}(F) = 5$ .

$H = \{\text{Blond}, \text{noir}\}$  donc  $\text{card}(H) = 2$ .

b-Une autre façon pour définir un ensemble, si on connaît une relation qui lie leurs éléments.

### Exemples :

$$F = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x^2 < 9\} \quad , \quad E = \{x \in \mathbb{R} / |x| < 2\}$$

### Remarque :

Si  $E$  contient une infinité d'éléments, on dit qu'il est de cardinal infini.

Par exemple : - L'ensemble des nombres naturels  $\mathbb{N} = \{0,1,2, \dots\}$ .

- L'ensemble des nombres entiers  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ .

- L'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$ .

### 1.2.3 Egalité de deux ensembles :

Deux ensembles  $E$  et  $F$  sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes éléments, et on écrit :

$$E = F \Leftrightarrow \forall x, x \in E \Leftrightarrow x \in F$$

Par exemple l'ensemble des nombres naturels et l'ensemble des nombres entiers positifs sont égaux, et on écrit  $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+$ .

### Cas particulier :

1/ Un ensemble est vide s'il n'a pas d'éléments, on le note  $\emptyset$  et on a  $\text{card}(\emptyset) = 0$ .

2/ Si  $E$  un ensemble qui contenant un seul élément, on dit que  $E$  est un "singleton" et  $\text{card}(E) = 1$ .

### 1.2.4 Partie d'un ensemble :

On dit que l'ensemble  $F$  est un sous-ensemble ou partie de  $E$  (ou  $F$  inclus dans  $E$ ) notée  $F \subset E$  si chaque élément de  $F$  est un élément de  $E$ , et on écrit :

$$F \subset E \Leftrightarrow \forall x \in F \Rightarrow x \in E$$

- L'égalité de deux ensembles peut être écrite sous la nouvelle forme :

$$E = F \Leftrightarrow (E \subset F) \wedge (F \subset E)$$

### Exemple :

Soient les deux ensembles :  $E = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$  et  $F = \{1,3,5,7\}$ .

- On voit que  $F \subset E$  car  $\forall x \in F \Rightarrow x \in E$ .

### Définition :

L'ensembles de toutes les parties d'un ensemble  $E$  est notée  $\mathcal{P}(E)$ .

- Si  $E$  un ensemble alors  $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$  et  $E \in \mathcal{P}(E)$ .

- Et on a aussi  $\text{card}\mathcal{P}(E) = 2^n$  tels que :  $n = \text{card}(E)$ .

### Exemple :

Soit l'ensemble  $E = \{2,4,6\}$ .

- On a  $\text{card}(E) = 3$  donc :  $\text{card}\mathcal{P}(E) = 2^3 = 8$ .

- Et on a :  $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2,4\}, \{2,6\}, \{4,6\}, E\}$ .

## 1.2 Opérations sur les ensembles :

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles non vide.

**1.2.1 L'intersection :** L'intersection de  $E$  et  $F$  notée  $(E \cap F)$  est l'ensemble des éléments communs à  $E$  et  $F$ , on écrit :

$$E \cap F = \{x/x \in E \wedge x \in F\}$$

**1.2.2 La réunion :** La réunion de  $E$  et  $F$  notée  $(E \cup F)$  est l'ensemble des éléments qui appartiennent à  $E$  ou à  $F$ , et on écrit :

$$E \cup F = \{x/x \in E \vee x \in F\}$$

Après les définitions précédente, on obtient les propositions suivantes :

$$(E \cap F \subset E) \wedge (E \cap F \subset F)$$

$$(E \subset E \cup F) \wedge (F \subset E \cup F)$$

### Remarque :

Si  $E \cap F = \emptyset$ , on dit que  $E$  et  $F$  sont deux ensembles disjoints.

### 1.2.3 Partition d'un ensemble :

On dit que la collection des ensembles  $\{A_i\}_{i \in I}$  est une partition d'un ensemble  $E$  non vide, si la collection des ensembles  $\{A_i\}_{i \in I}$  vérifie les conditions suivantes :

a- les ensembles  $\{A_i\}_{i \in I}$  ne sont pas vide, c'est-à-dire :  $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$ .

b- les ensembles  $\{A_i\}_{i \in I}$  sont disjoints deux a deux, c'est-à-dire :

$$\forall i, j \in I; i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

c- la réunion des ensembles  $\{A_i\}_{i \in I}$  égale à l'ensemble  $E$ , c'est-à-dire :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = E$$

### Exemple 1 :

1/ Soient les ensembles :

$$E = \{0,1,2,3,4,5\}, F = \{2,3,5,8,9\}, G = \{0,1,4\}, H = \{2,3,5\}.$$

Déterminer les sous-ensembles suivantes :  $E \cap F, F \cap G, F \cup G, G \cap H, G \cup H$ .

### Solution :

$$E \cap F = \{2,3,5\}, F \cup G = \{0,1,2,3,4,5,8,9\}, F \cap G = \emptyset.$$

$$G \cap H = \emptyset, G \cup H = \{0,1,2,3,4,5\} = E.$$

On voit que  $G \cap H = \emptyset$  donc  $G$  et  $H$  sont deux ensembles disjoints, et  $G \cup H = E$  donc l'ensemble  $\{G, H\}$  forme une partition de l'ensemble  $E$ .

### Exemple 2 :

Soient les deux ensembles :  $E = \{x \in \mathbb{R} / |x| \leq 1\}$  et  $F = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$

Alors :  $E \cap F = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 1\}$  et  $E \cup F = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -1\}$ .

### Propositions :

Soit  $F, G$  et  $H$  des parties d'un ensemble non vide  $E$ , on a les propositions (vraies) suivantes :

$$F \cup (G \cap H) = (F \cup G) \cap (F \cup H)$$

$$F \cap (G \cup H) = (F \cap G) \cup (F \cap H)$$

$$(F \cap G = F \cup G) \Rightarrow F = G$$

$$\text{Si } F \cup G = E \Rightarrow \text{card}(E) = \text{card}(F) + \text{card}(G) - \text{card}(F \cap G)$$

### 1.2.4 Le complémentaire d'un ensemble :

**Définition :** Soit  $F$  un sous-ensemble d'un ensemble  $E$ . On définit le complément de  $F$  dans  $E$  notée  $C_E F$  (ou  $F^c$ ) par l'ensemble des éléments de  $E$  qui n'appartient pas à  $F$  et on écrit :

$$C_E F = \{x / x \in E \wedge x \notin F\}$$

Si  $E$  est un ensemble fini et  $F$  un sous ensemble de  $F$ , alors :

$$E = F \cup (C_E F) \text{ et } \text{card}(E) = \text{card}(F) + \text{card}(C_E F)$$

### Exemples :

1/ Soit  $E = \{0,2,4,6,8,10,12\}$  et  $F = \{0,4,8\}$ .

Donc  $C_E F = \{2,6,10,12\}$ .

On voit que

$$\text{card}(F) = 3 \text{ et } \text{card}(C_E F) = 4 \text{ donc } \text{card}(F) + \text{card}(C_E F) = 7 = \text{card}(E).$$

2/ Le complémentaire de l'ensemble des nombres rationnels  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$  est  $C_{\mathbb{R}} \mathbb{Q}$  l'ensemble des nombres irrationnels.

### Propositions :

Soient  $E$  et  $F$  deux sous-ensembles d'un ensemble non vide  $G$ , on a les propositions (vraies) suivantes :

$$C_E(C_E E) = E$$

$$F \subset E \Leftrightarrow C_G E \subset C_G F$$

$$C_G(E \cup F) = C_G E \cap C_G F$$

$$C_G(E \cap F) = C_G E \cup C_G F$$

### 1.2.5 Produit cartésien :

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles non vide. On définit le produit cartésien  $E \times F$  par l'ensemble des couples  $(x, y)$  tels que  $x \in E \wedge y \in F$ .

#### Remarque :

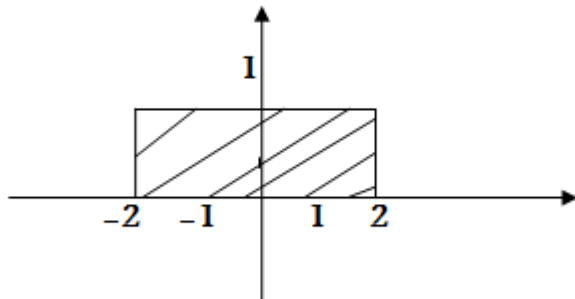
Si  $E \times F = F \times E$  alors  $E = F$ .

#### Exemple 1 :

Soient les ensembles  $E = \{0, 2, 4\}$  et  $F = \{1, 3\}$ . Alors :  $E \times F = \{(0, 1), (0, 3), (2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3)\}$  et  $F \times E = \{(1, 0), (1, 2), (1, 4), (3, 0), (3, 2), (3, 4)\}$ .

#### Exemple 2 :

Soient les deux ensembles  $E = \{x \in \mathbb{R} / |x| \leq 2\}$  et  $F = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 1\}$   
Donc  $E \times F = \{(x, y) / x \in E \wedge y \in F\}$



### 1.2.6 Différence de deux ensembles :

Soient  $E$  et  $F$  deux parties d'un ensemble  $G$ .

On définit la différence de  $E$  et  $F$  notée  $(E - F)$  par l'ensemble des éléments de  $E$  qui n'appartiennent pas à  $F$ , c'est-à-dire :

$$E - F = \{x / x \in E \wedge x \notin F\}$$

### 1.2.7 Différence symétrique de deux ensembles :

Soient  $E$  et  $F$  deux parties d'un ensemble  $G$ .

On définit la différence symétrique de  $E$  et  $F$  notée  $(E \Delta F)$  par l'ensemble des éléments qui appartiennent à un seul des ensembles  $E$  et  $F$ , c'est-à-dire la réunion de  $(E - F)$  et  $(F - E)$ . Et on écrit :

$$E \Delta F = (E - F) \cup (F - E)$$

#### Exemple :

Soient  $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  et  $F = \{2, 3, 5, 8, 9\}$ . Alors on trouve :

$$E - F = \{0,1,4\} \text{ et } F - E = \{8,9\}.$$

$$E \Delta F = (E - F) \cup (F - E) = \{0,1,4,8,9\}.$$

### Propositions :

Soient  $E, F$  et  $H$  des sous-ensembles d'un ensemble non vide  $G$ , on a les propositions (vraies) suivantes :

$$E \Delta F = C_G E \Delta C_G F$$

$$E \Delta F = (E \cup F) - (E \cap F)$$

$$E \cap (F - H) = (E \cap F) - (E \cap H)$$

$$E \cap (F \Delta H) = (E \cap F) \Delta (E \cap H)$$

$$(E \cup F) - H = (E - H) \cup (F - H)$$

## 2. Applications

### 2.1 Définitions :

#### 2.1.1 Définition : (Application)

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles non vide. Une application  $f$  de domaine  $E$  et de codomaine  $F$  est une relation associe chaque élément  $x \in E$  un unique élément  $y \in F$  que l'on note  $y = f(x)$ , c'est-à-dire :

$$(\forall x \in E, \exists! y \in F / y = f(x) \quad \wedge \quad \forall x \in E, f(x) \in F)$$

ce qui est équivalent à :

$$\forall x_1, x_2 \in E, x_1 = x_2 \implies f(x_1) = f(x_2)$$

et on écrit :  $f: E \longrightarrow F$

$$x \mapsto f(x) = y$$

tels que :  $E$  s'appelle l'ensemble de départ.

$F$  s'appelle l'ensemble d'arrivée.

$x$  s'appelle l'antécédent de  $y$ .

$y$  s'appelle image de  $x$ .

### Remarque :

Si  $E = F$ , on dit que  $f$  est une transformation.

### Cas particulier :

soit  $E$  un ensemble non vide. L'application de  $E$  dans  $E$  qui a tout élément  $x$  associe  $x$  s'appelle l'application identité de  $E$  notée  $Id_E$  et on écrit :  $Id_E: E \longrightarrow E$

$$x \mapsto x$$

#### 2.1.2 Egalité de deux applications :

On dit que deux applications  $f: E \longrightarrow F$  et  $g: E' \longrightarrow F'$  sont égaux si et seulement si :

$$E = E'$$



$$\left\{ \begin{array}{l} F = F' \\ \forall x \in E, f(x) = g(x) \end{array} \right.$$

**Exemple :**

Soit les deux applications :  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$   

$$x \mapsto x^2 \qquad x \mapsto x^2$$

Les applications  $f$  et  $g$  ne sont pas égaux parce que  $\mathbb{R} \neq \mathbb{R}_+$ .

**2.1.3 Le graphe d'une application :**

Soit l'application  $f: E \rightarrow F$ , on appelle graphe de  $f$  notée  $G(f)$  le sous-ensemble du produit cartésien  $E \times F$  défini par :

$$G(f) = \{(x, y) \in E \times F / y = f(x)\} = \{(x, f(x)) / x \in E\}.$$

**2.1.4 Compositions d'applications :**

Soient  $f: E \rightarrow F$  et  $g: E' \rightarrow F'$  deux applications. Si  $F \subseteq E'$ , on peut définir l'application composée  $(g \circ f): E \rightarrow F'$  par :  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ .

**Exemple :**

Soit les deux applications :  $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   

$$x \mapsto \frac{x}{1-x} \qquad x \mapsto x^2 - 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x}{1-x}\right) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 - 1$$

$$\text{Donc : } (g \circ f)(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

**Propriétés :**

1/ La composition de deux applications n'est pas commutatives en général, c'est-à-dire :

$$(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$$

2/ La composition des applications est associative, c'est-à-dire :

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

**2.1.5 Prolongement et restrictions :****Définition :**

Soit  $f: E \rightarrow F$  une application. On appelle restriction de  $f$  une partie  $A \subset E$ , l'application  $g: A \rightarrow F$  définie par :  $\forall x \in A, g(x) = f(x)$ . L'application  $g$  est notée  $f|_A$ .

**Définition :**

Soit  $f: A \rightarrow F$  une application. On appelle prolongement de  $f$  à un ensemble tels que  $A \subset E$ , l'application  $g: E \rightarrow F$  définie par :  $g(x) = f(x), \forall x \in A$ .

**Exemple :**

Soit l'application  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$   

$$n \mapsto |n|$$

La restriction de  $f$  à  $\mathbb{N}$  est l'application  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$n \mapsto |n| = n$$

On voit que  $g = Id_{\mathbb{N}}$  est  $f$  est un prolongement de  $Id_{\mathbb{N}}$ .

### Propositions :

Soit l'application  $f: E \rightarrow F$  et  $A, B$  deux parties de  $E$ , on a les propositions (vraies) suivantes :

$$\begin{aligned} A \subset B &\Rightarrow f(A) \subset f(B) \\ f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B) \\ f(A \cap B) &\subset f(A) \cap f(B) \end{aligned}$$

## 2.2 Applications injectives, surjectives, bijectives :

### 2.2.1 Applications injectives :

Soit  $f: E \rightarrow F$  une application. On dit que  $f$  est injective si deux éléments de  $E$  distincts ont pour image par  $f$  deux éléments distincts de  $F$ . C'est-à-dire :

$$\forall x_1, x_2 \in E \quad (x_1 \neq x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

ou bien :

$$\forall x_1, x_2 \in E \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1 = x_2)$$

### Exemple :

Soit l'application  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = 4x - 3$ .  $f(x)$  est elle injective ?

Pour que  $f(x)$  soit injective, il faut que :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1 = x_2)$$

$$\text{On a : } \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 4x_1 - 3 = 4x_2 - 3 \Rightarrow 4x_1 = 4x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Donc  $f(x)$  est injective.

### 2.2.2 Applications surjectives :

Soit  $f: E \rightarrow F$  une application. On dit que  $f$  est surjective si pour chaque élément  $y \in F$  a au moins un antécédent  $x \in E$ . C'est-à-dire :

$$\forall y \in F, \exists x \in E \text{ tels que } y = f(x)$$

### Exemple :

Soit l'application  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = 2x + 1$ .  $f(x)$  est elle surjective ?

Pour que  $f(x)$  soit surjective, il faut que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \text{ tels que } y = 2x + 1$$

On voit que  $f(x)$  est surjective car l'équation  $y = 2x + 1$  admet une solution a  $\mathbb{R}$ , tels que

$$x = \frac{y - 1}{2} \in \mathbb{R}$$

### 2.2.3 Applications bijectives :

Une application  $f: E \rightarrow F$  est dite bijective si  $f$  est injective et surjective a la fois, autrement dit  $f$  est bijective si pour chaque élément de  $F$  a un unique antécédent de  $E$ , c'est-à-dire :

$$\forall y \in F, \exists! x \in E \text{ tels que } y = f(x)$$

### Exemple :

Soit l'application  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2$ .  $f(x)$  est-elle bijective ?

Pour que  $f(x)$  soit bijective, il faut que  $f(x)$  soit injective et surjective a la fois.

On voit que  $f(x)$  n'est pas injective parce que  $f(-1) = 1 = f(1)$ . Donc  $f(x)$  n'est pas bijective.

### 2.2.4 Application réciproque :

Soit  $f: E \rightarrow F$  une application. Si  $f$  est bijective, on peut définir une application  $g: F \rightarrow E$  telle que pour tout  $y$  dans  $F$  ;  $g(y)$  est l'unique antécédent de  $y$  par  $f$ .

$g$  est appelé l'application réciproque de  $f$ , on la note  $f^{-1}$ .

#### Exemple :

Soit l'application  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = 3x - 2$ .

$f(x)$  est-elle bijective ?

Si  $f(x)$  est bijective, déterminer l'application réciproque.

#### Solution :

Pour que  $f(x)$  soit bijective, il faut qu'elle soit injective et surjective a la fois.

a/  $f(x)$  est elle injective ?

Pour que  $f(x)$  soit injective, il faut que :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1 = x_2)$$

$$\text{On a : } \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 - 2 = 3x_2 - 2 \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Donc  $f(x)$  est injective.

b/  $f(x)$  est elle surjective ?

Pour que  $f(x)$  soit surjective, il faut que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} / y = 3x - 2$$

On voit que  $f(x)$  est surjective car l'équation  $y = 3x - 2$  admet une solution a  $\mathbb{R}$ , tels que

$$x = \frac{y+2}{3} \in \mathbb{R}$$

Donc  $f(x)$  est bijective et on peut déterminer l'application réciproque  $f^{-1}$  définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

On a  $f(x) = 3x - 2$  c'est-à-dire  $y = 3x - 2$  donc  $x = \frac{y+2}{3}$  alors on trouve :

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$$