Solution TD2
Suite numerique

EX1 : on demontre par definition

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \iff \forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}^*$

$\forall n\geq n_0 \Rightarrow |U_n - l|<\varepsilon$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty \iff \forall A>0, \exists n_0\in\mathbb{N}^*$

$\forall n\geq n_0 \Rightarrow U_n > A$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty \iff \forall A>0, \exists n_0\in\mathbb{N}^*$

$\forall n\geq n_0 \Rightarrow U_n < -A$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+9n+8}{n(n-10)} = 1 \iff$

$\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \overset{?}{\in}\mathbb{N}^*, \forall n\geq n_0$

$\Rightarrow \left|\dfrac{n^2+9n+7}{n(n-10)} - 1\right| < \varepsilon$

Pour la demonstration on commence par connaitre $\varepsilon>0$

$\left|\dfrac{n^2+9n+7}{n(n-10)} - 1\right| = \left|\dfrac{19n+8}{n(n-10)}\right|$

$= \dfrac{19n+8}{n(n-10)}$ si $n-10>0$

donc $n \geq 11$

$\dfrac{19n+8}{n(n-10)} = \dfrac{19(n-10)+190+8}{n(n-10)}$

$= \dfrac{19}{n} + \dfrac{198}{n(n-10)}$

on a $n(n-10) > (n-10)^2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{n(n-10)} < \dfrac{1}{(n-10)^2}$

$|U_n-1| \leq \dfrac{19}{n} + \dfrac{198}{(n-10)^2} < \varepsilon$

$\dfrac{19}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $\dfrac{198}{(n-10)^2} < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow n > \dfrac{38}{\varepsilon}$ et $(n-10)^2 > \dfrac{198\times 2}{\varepsilon}$

$\Rightarrow n > \dfrac{38}{\varepsilon}$ et $n > \sqrt{\dfrac{198\times 2}{\varepsilon}} + 10$

d'après Archiméd

$n_{10} = \left[\dfrac{38}{\varepsilon}\right]+1$ et

$n_{20} = \left[\sqrt{\dfrac{198\times 2}{\varepsilon}}\right]+11$

donc $\boxed{\exists\, n_0 = \max(n_{01}, n_{02}, 11)}$

donc notre but don la demonstration de la limite c'est de trouver $\boxed{n_0}$ qui verifie $|U_n - l|<\varepsilon$

Si par exemple on a

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+9n+8}{n(n+10)} = 1$

$|U_n - 1| = \left|\dfrac{-n+8}{n(n+10)}\right| = \dfrac{n-8}{n(n+10)}$

pour tout $n \geq 8$.

$n - 8 \leq n$.

$n + 10 \geq n$ donc

$n(n+10) \geq n^2$

$$\frac{n-8}{n(n+10)} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$\Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$ d'après Archimed

$\exists n_{0_1} = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$

$$\boxed{n_0 = \max(n_{0_1}, 8)}$$

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 - 3n^2 = -\infty \iff$

$\forall A > 0, \exists n_0 ; \forall n \geq n_0 \Rightarrow U_n < -A$

$\underline{\forall A > 0}$: $2 - 3n^2 < -A$

$\Rightarrow 3n^2 > 2 + A \Rightarrow n^2 > \frac{2+A}{3}$

$n > \sqrt{\frac{2+A}{3}}$ ou $n < -\sqrt{\frac{2+A}{3}}$

puisque $n \to +\infty$ alors il est positif donc $n < -\sqrt{\frac{2+A}{3}}$ est rejeté il reste

$n > \sqrt{\frac{2+A}{3}}$ d'après Archimed

$$\boxed{\exists\, n_0 = \left[\sqrt{\frac{2+A}{3}}\right] + 1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2n + 3\sqrt{n}}{n+1} = 2$$

$\underline{\forall \varepsilon > 0}$: $\left|\frac{2n + 3\sqrt{n}}{n+1} - 2\right| =$

$$\left|\frac{3\sqrt{n} - 2}{n+1}\right| = \frac{3\sqrt{n} - 2}{n+1}$$

pour $3\sqrt{n} - 2 \geq 0$

$\sqrt{n} \geq \frac{2}{3} \Rightarrow n \geq \frac{4}{9}$

$n_{0_1} = [4/9] + 1 = 1$

$3\sqrt{n} - 2 < 3\sqrt{n}$

$n + 1 > n \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$

$$\frac{3\sqrt{n} - 2}{n+1} < \frac{3\sqrt{n}}{n} = \frac{3}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

$\Rightarrow \sqrt{n} > \frac{3}{\varepsilon} \Rightarrow n > \left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^2$

$n_{0_2} = [(\frac{3}{\varepsilon})^2] + 1$ d'après Archimed

$$\boxed{n_0 = \max\left(1, \left[\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^2\right] + 1\right)}$$

3) $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^{3n-1} = +\infty \iff$

$\underline{\forall A > 0}$: $2^{3n-1} > A$

$(3n-1)\ln 2 > \ln A$

$3n - 1 > \frac{\ln A}{\ln 2} \Rightarrow$

$n > \frac{\ln A}{3\ln 2} + \frac{1}{3}$ d'après Archimed $\exists n_0$

$$\boxed{n_0 = \left[\frac{\ln A}{3\ln 2} + \frac{1}{3}\right] + 1}$$

b) * $\lim \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$

On a $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\lim \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2}{6}$

$= \frac{1}{3}$

* $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n^2+n} - n =$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n} - n)(\sqrt{n^2+n} + n)}{\sqrt{n^2+n} + n} =$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{n^2} + n - \cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1)}$

$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}$

* $\lim \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} E(kx)$

$E(kx) \leq kx < E(kx) + 1$

$\sum_{k=1}^{n} E(kx) \leq \sum_{k=1}^{n} kx < \sum_{k=1}^{n} E(kx)+1$

$\sum E(kx) \leq x \sum_{k=1}^{n} k < \sum_{k=1}^{n} E(kx) + n$

$\sum E(kx) \leq x \frac{n(n+1)}{2} < \sum E(kx) + n$

$\frac{1}{n^2} \sum E(kx) \leq \frac{x(n(n+1))}{2n^2} < \frac{1}{n^2} \sum E(kx) + \frac{1}{n}$

On passon à la limite

$\lim \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} E(kx) \leq \frac{x}{2} \leq \lim \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} E(kx)$

donc $\lim \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} E(kx) = \frac{x}{2}$

* $\lim_{n \to +\infty} \frac{n \sin n}{n^2+1}$

On a $|\sin n| \leq 1 \quad \forall n$

$-1 \leq \sin n \leq 1$

$\frac{-n}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1} \sin n \leq \frac{n}{n^2+1}$

$0 = \lim_{n \to +\infty} \frac{-n}{n^2+1} \leq \lim_{n \to +\infty} \frac{n \sin n}{n^2+1} \leq \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{n \sin n}{n^2+1} = 0$

ou $|U_n| \leq M$

$v_n \longmapsto 0$

alors $U_n \cdot v_n \to 0$

* $\lim_{n \to +\infty} \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n} = \frac{\cancel{3^n}(1 - (-\frac{2}{3})^n)}{\cancel{3^n}(1 + (\frac{2}{3})^n)}$

$|-\frac{2}{3}| < 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} (-\frac{2}{3})^n = 0$

$\lim \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n} = \boxed{1}$

<u>EX2</u> $U_n = 2^n \sin \frac{\theta}{2^n}$

$v_n = 2^n \operatorname{tg} \frac{\theta}{2^n}$

On a

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\sin\frac{\theta}{2^n} = \sin\left(2\,\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$

$= 2\sin\frac{\theta}{2^{n+1}} \times \cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$

Puisque $\left|\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}\right| \leq 1$

donc

$\sin\frac{\theta}{2^n} \leq 2\sin\frac{\theta}{2^{n+1}}$

alors

$2^n\sin\frac{\theta}{2^n} \leq 2^n \times \left(2\sin\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$

$\underbrace{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}} \leq \underbrace{2^{n+1}\sin\frac{\theta}{2^{n+1}}}$

$U_n \leq U_{n+1}$

alors $U_n \nearrow$ (croissante)

de même

$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$tg\frac{\theta}{2^n} = tg\left(2\,\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$

$= \frac{2\,tg\frac{\theta}{2^{n+1}}}{1 - tg^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}$

$1 - tg^2\frac{\theta}{2^{n+1}} < 1$

$\frac{1}{1-tg^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)} > 1$

$tg\frac{\theta}{2^n} > 2\,tg\frac{\theta}{2^{n+1}}$

$2^n\,tg\frac{\theta}{2^n} > 2^n \times 2\,tg\frac{\theta}{2^{n+1}}$

$\underbrace{2^n\,tg\frac{\theta}{2^n}}_{V_n} > \underbrace{2^{n+1}\,tg\frac{\theta}{2^{n+1}}}_{V_{n+1}}$

$V_n \searrow$ (decroissante)

il reste à demontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n - V_n = 0$

$|U_n - V_n| = \left|2^n\sin\frac{\theta}{2^n} - 2^n\,tg\frac{\theta}{2^n}\right|$

$= 2^n\left|\sin\frac{\theta}{2^n} - \frac{\sin\frac{\theta}{2^n}}{\cos\frac{\theta}{2^n}}\right|$

$= 2^n\left|\sin\frac{\theta}{2^n}\right|\left|1 - \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2^n}}\right|$

$-1 < \cos\frac{\theta}{2^n} < 1$

$\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2^n}} > 1$

ou $\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2^n}} < -1$

$-1 < -\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2^n}} < 1$

$0 < 1 - \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2^n}} < 2$

$\left|1 - \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2^n}}\right| < 2$

$|U_n - v_n| \leq 2^n \left|\sin \frac{\theta}{2n}\right| \times 2$

$|U_n - v_n| \leq 2^{n+1} \left|\sin \frac{\theta}{2n}\right|$

$|\sin x| \leq |x| \quad \forall x$

donc

$\left|\sin \frac{\theta}{2n}\right| \leq \frac{\theta}{2n}.$

$|U_n - v_n| \leq 2^{n+1} \times \frac{\theta}{2n} = 2\theta$

du TD 1

$\forall x \in \mathbb{R}, (\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon \Rightarrow x = 0)$

On a $\forall \theta > 0 \quad |U_n - v_n| < 2\theta$

$\lim_{n \to +\infty} (U_n - v_n) = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} v_n$

alors U_n et v_n sont adjacente.

* $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$

$v_n = U_n + \frac{1}{n\, n!}$

$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$

$= \frac{1}{n+1!} > 0$

$U_n \nearrow$.

$v_{n+1} - v_n = U_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - U_n - \frac{1}{n(n)!}$

$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n(n+1)!} - \frac{1}{n n!}$

$= \frac{n(n+1) + (n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!}$

$= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$

v_n decroissante $\searrow$

$\lim_{n \to +\infty} U_n - v_n = \lim \frac{1}{n\, n!} = 0$

donc U_n et v_n sont adjacente.

Ex 3 $\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n - 2} \end{cases}$

pour montrer que $\frac{3}{2} \leq U_n \leq 2$ on demontre par recurrence.

$\frac{3}{2} \leq U_0 = \frac{3}{2} \leq 2$

elle est verifier. on suppose que $\frac{3}{2} \leq U_n \leq 2$ et on demontre que $\frac{3}{2} \leq U_{n+1} \leq 2$.

$$\frac{3}{2} \leq U_n \leq 2$$
$$\frac{9}{2} \leq 3U_n \leq 6$$
$$\frac{5}{2} = \frac{9}{2} - 2 \leq 3U_n - 2 \leq 6 - 2 = 4$$
$$\sqrt{\frac{5}{2}} \leq \sqrt{3U_n - 2} \leq 2$$
on a $\frac{5}{2} = \frac{10}{4} > \frac{9}{4}$
$$\sqrt{\frac{5}{2}} > \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$
$$\frac{3}{2} \leq U_{n+1} \leq 2$$
donc $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{3}{2} \leq U_n \leq 2$
$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{3U_n - 2} - U_n$$
$$= \frac{(\sqrt{3U_n-2} - U_n)(\sqrt{3U_n-2} + U_n)}{\sqrt{3U_n-2} + U_n}$$
$$= \frac{3U_n - 2 - U_n^2}{\sqrt{3U_n-2} + U_n}$$
$$= \frac{-(U_n^2 - 3U_n + 2)}{\sqrt{3U_n-2} + U_n}$$
$$= \frac{-(U_n - 1)(U_n - 2)}{\sqrt{3U_n-2} + U_n}$$
de le qui précède
$\frac{3}{2} \leq U_n \leq 2 \Rightarrow$
$U_n - 2 \leq 0$
$U_n - 1 \geq 0$
$\Rightarrow U_{n+1} - U_n \geq 0$

$U_n \nearrow$

U_n croissante et majorée donc U_n convergente alors
$$\lim_{n \to +\infty} U_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} U_n$$
$l = \sqrt{3l - 2} \Rightarrow$
$l^2 = 3l - 2 \Rightarrow$
$l^2 - 3l + 2 = 0$
$l = 1$ ou $l = 2$
puisque $\frac{3}{2} \leq U_n$ alors $l = 1$ rejeté donc
$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = 2}$$

<u>Ex4</u> : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1 + \sqrt{1 + (U_n)^2}} \end{cases}$

On montre par récurrence que $U_n > 0$
$U_0 = 1 > 0$ est vérifiée.
on suppose $U_n > 0$ et on démontre $U_{n+1} > 0$
$U_n > 0 \Rightarrow$
$\frac{U_n}{1+\sqrt{1+U_n^2}} > 0$ puisque
$1 + \sqrt{1 + U_n^2} > 0 \Rightarrow$
$U_{n+1} > 0$

donc $\forall n \in \mathbb{N} : U_n > 0$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^* \; U_n \leq \frac{1}{2^n}$

Par recurrance.

$U_0 = 1 \leq \frac{1}{2^0} = 1$

On suppose $U_n \leq \frac{1}{2^n}$

et on demontre $U_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

$U_n \leq \frac{1}{2^n}$

$1 + U_n^2 \geq 1$

$1 + \sqrt{1+U_n^2} \geq 1 + 1 = 2$

$\frac{1}{1+\sqrt{1+U_n^2}} \leq \frac{1}{2}$.

$U_{n+1} = \frac{U_n}{1+\sqrt{1+U_n^2}} = U_n \times \frac{1}{1+\sqrt{1+U_n^2}}$

$\leq \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}$

d'ou le resultat

3) $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n}{1+\sqrt{1+U_n^2}} - U_n$.

$= \frac{\cancel{U_n} - \cancel{U_n} - \sqrt{1+U_n^2}}{1+\sqrt{1+U_n^2}}$

$= \frac{-\sqrt{1+U_n^2}}{1+\sqrt{1+U_n^2}} < 0$

$U_n \searrow$

On a $U_n \searrow$ et $U_n > 0$

4) donc U_n convergente

1ere methode

$\lim U_n = \lim U_{n+1}$

$l = f(l)$

$l = \frac{l}{1+\sqrt{1+l^2}} \Rightarrow$

$\cancel{l} + l\sqrt{1+l^2} = \cancel{l} \Rightarrow$

$l = 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

2eme methode

$0 < U_n \leq \frac{1}{2^n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} U_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0}$

5) $A = \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$

$U_n \searrow$

$1 = U_0 \geq U_1 \geq \dots \geq U_n \geq \lim\limits_{n\to+\infty} U_n =$

$1 \geq U_n \geq 0$

donc $\sup U_n = 1$

$\inf U_n = 0$

EX 5 : $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{3^k}$

U_n est de Cauchy.

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*; \forall p > q \geq n_0$

$\Rightarrow |U_p - U_q| < \varepsilon$

on prend

$$|U_p - U_q| = \left|\sum_{k=1}^{p} \frac{\sin k}{3^k} - \sum_{k=1}^{q} \frac{\sin k}{3^k}\right|$$

$$= \left|\frac{\sin(q+1)}{3^{k+1}} + \frac{\sin(q+2)}{3^{k+2}} + \cdots + \frac{\sin p}{3^p}\right|$$

$$\leq \sum_{k=q+1}^{p} \left|\frac{\sin k}{3^k}\right| \leq \sum_{k=q+1}^{p} \frac{1}{3^k}$$

Puisque $|\sin k| \leq 1$

$$|U_p - U_q| \leq \frac{1}{3^{q+1}}\left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^{p-(q+1)}}\right)$$

$$= \frac{1}{3^{q+1}}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{p-q}}{1-\frac{1}{3}}\right)$$

(Somme d'une suite géométrique)

$$1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{p-q} \leq 1$$

$$\frac{1}{3^{q+1}}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{p-q}}{1-\frac{1}{3}}\right) \leq \frac{2}{3^q}$$

$\frac{2}{3}$

$$|U_p - U_q| \leq \frac{2}{3^q} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow 3^q > \frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow q \ln 3 > \ln\frac{2}{\varepsilon}$$

$q > \dfrac{\ln 2/\varepsilon}{\ln 3}$ donc d'après

Archimed $\exists\, n_0 = \left[\dfrac{\ln\frac{2}{\varepsilon}}{\ln 3}\right] + 1$

$\forall\, p > q > n_0 \Rightarrow |U_p - U_q| < \varepsilon$

donc elle est de Cauchy.

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\log k}$ n'est pas de Cauchy

$$|U_p - U_q| = \left|\frac{1}{\log(q+1)} + \frac{1}{\log(q+2)} + \cdots \frac{1}{\log p}\right|$$

on a $\forall n \geq 2$ $\log n \leq n$.

$$\frac{1}{\log n} \geq \frac{1}{n}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{\log q+1} \geq \dfrac{1}{q+1} \\ \vdots \\ \dfrac{1}{\log p} \geq \dfrac{1}{p} \end{array}\right\} |U_p - U_q| \geq \frac{1}{q+1} + \cdots + \frac{1}{p}$$

si $\underline{p = 2q}$

$$|U_p - U_q| \geq \frac{q}{2q} = \frac{1}{2}$$

$\exists\, \varepsilon = \frac{1}{2}$ donc elle n'est pas de Cauchy.

3) $U_n = \cos\frac{1}{n}$

$$|U_p - U_q| = \left|\cos\frac{1}{p} - \cos\frac{1}{q}\right|$$

$$= 2\left|\sin\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\sin\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right|$$

$$\leq 2\left|\sin\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\right| \leq$$

$$2\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) \leq 2 \times \frac{2}{q} = \frac{4}{q}$$

$$p > q \Rightarrow \frac{1}{p} < \frac{1}{q} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{q} + \frac{1}{q} = \frac{2}{q}$$

$$|U_p - U_q| < \frac{4}{q} < \varepsilon \Rightarrow q > \frac{4}{\varepsilon}$$

d'après Archimed.

$\exists\, n_0 = \left[\frac{4}{\varepsilon}\right] + 1$

$\forall\, p > q > \left[\frac{4}{\varepsilon}\right] + 1 \Rightarrow$

$|U_p - U_q| < \varepsilon$ donc elle est de Cauchy.