Université Abdelhamid MEHRI – Constantine2 –

Cours
ALGEBRE 1

2020/2021

Chapitre 4 : Structures algébriques

1. Loi de composition interne.
2. Groupes.
3. Anneau.
4. Corps

1. Loi de composition interne

Définition 1 :

On appelle loi de composition interne sur un ensemble E toute application $*$ de $E \times E$ dans E

$$*: E \times E \longrightarrow E$$
$$(x, y) \longmapsto x * y$$

$x * y$ s'appelle composée x et y.

Une **LCI** notée aussi $\top, \oplus, \otimes, \ldots$.

Si la LCI notée + elle est dite additive, et si elle est notée $\cdot$ est dite multiplicative.

Définition 2 :

Soit E une ensemble, et $*$ une LCI sur E.

- On dit que $*$ est associative si :

$$\forall x, y, z \in E: (x * y) * z = x * (y * z)$$

- On dit que $*$ est commutative si :

$$\forall x, y \in E: x * y = y * x$$

- On dit que e est un élément neutre pour $*$ si :

$$\forall x \in E, \exists e \in E : x * e = e * x = x$$

- On dit que $x \in E$ est symetrisable s'il existe un élément $y \in E$ tel que :

$$x * y = y * x = e$$

Un tel élément y est appelé le symetrique de x et on le note $x'; sym(x), x^{-1}$.

Définition 3 :

On dit la LCI $\top$ est distributive par rapport $*$ si :

$$\forall x, y, z \in E : x \top (y * z) = (x \top y) * (x \top z)$$
$$(y * z) \top x = (y \top x) * (z \top x)$$

Proposition 1 :

Si e et e' deux éléments neutres de $*$ dans E alors $e = e'$.

Proposition 2 :

Supposons que $*$ est associative et soit $x \in E$.

Si x est symetrisable pour $*$ alors x admet un seul symétrique pour $*$.

Proposition 2 :

Supposons que $*$ est associative et soit $x, y \in E$.

Si x et y sont symétrisables pour $*$ alors $x * y$ est symétrisable pour $*$ et on a :

$$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$$

2.Groupes

Définition (Groupe)

On dit qu'un ensemble G muni d'une LCI $*$ est un groupe si et seulement si :
$*$ est associative
G admet un élément neutre pour $*$
tout élément de G admet un symétrique pour $*$
Si de plus $*$ est commutative, on dit que $(G,*)$ est un groupe abélien (ou groupe commutatif).

Définition (Sous-groupe)

Soit $(G,*)$ un groupe, une partie H non-vide de G est appelée un sous-groupe de G si la restriction de $*$ a H lui confère une structure de groupe.

Remarque :

L'élément neutre de tout sous-groupe H de G coïncide avec celui de G.

Proposition :

Soit $(G,*)$ un groupe et H un sous-ensemble de G, alors H est un sous-groupe de G si et seulement si :

$$\forall x, y \in H : x * y \in H$$
$$\forall x \in H, x^{-1} \in H$$

Ce qui est aussi équivalent a :

$$\forall x, y \in H : x * y^{-1} \in H$$

Proposition :

Soit G un groupe et H_1 et H_2 deux sous-groupes de G. Alors $H_1 \cap H_2$ est un sous groupe de G.

Remarque :

Ce résultat reste valable pour un nombre quelconque de groupes.

3.Anneau

Définition :

Soit A un ensemble muni de deux lois de composition internes $*$ et $\top$.
On dit que $(A,*,\top)$ est un anneau si :
$(G,*)$ est un groupe abélien
$\top$ est associative.
$\top$ est distributive par rapport a $*$.
Si $\top$ est commutative, on dit que $(A,*,\top)$ est un anneau commutatif.
Si A a un élément neutre pour $\top$, on dit que $(A,*,\top)$ est un anneau unitaire.

4. Corps

Définition :

Soit $\mathbb{k}$ un ensemble muni de deux lois de composition internes $*$ et $\top$.

On dit que $(\mathbb{k}, *, \top)$ est un corps si :

$(\mathbb{k}, *, \top)$ est un anneau unitaire.

tous les élément de $\mathbb{k}$ sauf le neutre de $*$ sont symétrisables pour $\top$.