Solution TD 1
Nombres Reels

EX 1 : Revision

1) n^2 pair $\Rightarrow n$ pair.

On montre par la contraposé

$A \Rightarrow B \iff \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$

on demontre que

n n'est pas pair $\Rightarrow n^2$ n'est pas pair

ou n impair $\Rightarrow n^2$ impair

n est impair $\Rightarrow \exists k : n = 2k+1$

$\Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$= 2(2k^2 + 2k) + 1$

$= 2p + 1$ alors

n^2 est impair. donc

n^2 pair $\Rightarrow n$ pair

2) $\forall x \in \mathbb{R}, (\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon \Rightarrow x = 0)$

On demontre par contraposé

il suffit de montrer que

$\forall x \in \mathbb{R}\ (x \neq 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0, |x| \geq \varepsilon)$

Soit $x \neq 0 \Rightarrow |x| > 0$

on prend $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$ on a

$|x| > \frac{|x|}{2}$ donc c'est vrais

alors on a trouver $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$

tq: $|x| > \varepsilon$

alors $\forall x \in \mathbb{R}, (\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon \Rightarrow$

est vrais

3) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0\ (|x| < \varepsilon \Rightarrow$

elle est fausse

on demontre pas un con

exemple ou on demontre q

$\exists x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ tq $|x|$

mais $x \neq 0$, on pose

$x = 1, \quad \varepsilon = 0$

$|x| = |1| = 1 < \varepsilon = 2$

mais $x \neq 0$ donc

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, (|x| < \varepsilon \Rightarrow x$

elle est fausse

4) $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} -$

on demontre par Recurren

$P(0) : \sum_{k=0}^{0} 2^k = 2^0 = 1$

$2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$

donc $P(0)$ est vrais

on suppose que $P(n)$ es

vrais : $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$

et on demontre que

$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{(n+1)+1} - 1$

$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k + 2^{n+1}$

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1}$$
$$= 2 \times 2^{n+1} - 1$$
$$= 2^{n+2} - 1$$

donc $P(n+1)$ est vrais

alors

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

4) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ ①

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ②$$

on demontre par recurance

① $P(0)$: $\sum_{k=0}^{0} k = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$

donc elle est vrais

on suppose que $P(n)$ est vrais

et on demontre $P(n+1)$

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + (n+1)$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$
$$= (n+1)\left[\frac{n}{2} + 1\right]$$
$$= (n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right)$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

donc $P(n+1)$ est vrais

alors

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

de la même manière on d[...]

par recurance

$P(0)$: $\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0 = \frac{0(0+1)(\ldots}{6}$

vrais

$P(n)$ est vrais

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

on demontre $P(n+1)$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$
$$= (n+1)\left(\frac{n(2n+1) + 6(n+1)}{6}\right)$$
$$= (n+1)\left(\frac{2n^2 + n + 6n + 6}{6}\right)$$
$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

$P(n+1)$ est vrais

alors

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

②

Ex 2

1) $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$\left|\sqrt{|a|}-\sqrt{|b|}\right| \leq \sqrt{|a-b|}$$

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

On démontre :

$$-\sqrt{|a-b|} \leq \sqrt{|a|}-\sqrt{|b|} \leq \sqrt{|a-b|}$$

$$a = a - b + b$$

$$|a| = |a-b+b| \leq |a-b| + |b|$$

$$(|x+y| \leq |x| + |y|)$$

$$\sqrt{|a|} \leq \sqrt{|a-b|+|b|}$$

$$\leq \sqrt{|a-b|} + \sqrt{|b|}$$

$$(\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y})$$

$$\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|} \leq \sqrt{|a-b|} \quad \text{.. } ①$$

de la même manière.

$$b = b - a + a$$

$$|b| \leq |b-a| + |a|$$

$$\sqrt{|b|} \leq \sqrt{|b-a|} + \sqrt{|a|}$$

$$\sqrt{|b|} - \sqrt{|a|} \leq \sqrt{|b-a|}$$

$$-(\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}) \leq \sqrt{|a-b|}$$

$$(|\cancel{x-y}| = |-x|)$$

$$\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|} \geq -\sqrt{|a-b|}$$

de ① ~~et~~ ②

$$\left|\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}\right| \leq \sqrt{|a-b|}$$

2) $$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

on a

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$1 + |a+b| \leq 1 + |a| + |b|$$

$$\frac{1}{1+|a+b|} \geq \frac{1}{1+|a|+|b|}$$

$$\frac{-1}{1+|a+b|} \leq \frac{-1}{1+|a|+|b|}$$

$$1 - \frac{1}{1+|a+b|} \leq 1 - \frac{1}{1+|a|+|b|}$$

$$\frac{\cancel{1}+|a+b|-\cancel{1}}{1+|a+b|} \leq \frac{1+|a|+|b|-1}{1+|a|+|b|}$$

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|}$$

on a $1+|a|+|b| \geq 1+|a|$

$$\frac{1}{1+|a|+|b|} \leq \frac{1}{1+|a|}$$

de même

$$\frac{1}{1+|a|+|b|} \leq \frac{1}{1+|b|}$$

donc

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

3) $\forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$

$$[-x] = -[x] - 1$$

$\forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

$$-[x] \geq -x > -[x] - 1$$

$$-[x]-1 < \boxed{-x \leq -[x]} \quad (1)$$

mais par definition.

$$[-x] \leq \boxed{-x < [-x] + 1} \quad (2)$$

alors de (1) et (2)

$$-[x] = [-x] + 1$$

$$\boxed{[-x] = -[x] - 1}$$

4) $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1$$

on a

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

$$[y] \leq y < [y] + 1$$

$$[x] + [y] \leq x + y < [x] + [y] + 2 \quad (1)$$

4

on a

$$[x+y] \leq x+y < [x+y] + 1$$

on a $[a] \leq a < [a] + 1$

$[a] + 1$ est le plus petit des majorant alors de (1)

$$[x+y] + 1 \leq [x] + [y] + 2$$

$$\Rightarrow \boxed{[x+y] \leq [x] + [y] + 1}$$

et $[a] \leq a$

$[a]$ est ~~est~~ minaurant de a et $[a]$ est le plus grand des minaurants

donc

$$[x+y] \geq [x] + [y]$$

d'où le resultat

$$[x+y] \leq [x+y] \leq [x] + \ldots$$

$+$

Ex 3 : $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$

Sup A est le plus petit des majorant $\sup A \in A \Rightarrow$
$\sup A = \max A$

$\sup A \notin A \Rightarrow$ max A n'éxste pas

inf A est le plus grand des minaurant.

$\inf A \in A \Rightarrow \inf A = \min A$

$\inf A \notin A \Rightarrow$ inf A n'éxste pas.

1) $A = \{1, -3, 5, 0, 10, 2, -5\}$

$= \{-5, -3, 0, 1, 2, 10\}$

$\cancel{\forall x} \in A$

$-5 \leq x \leq 10$

A est majorée et minaurée alors bornée $\Rightarrow$

$\exists \sup A$ et $\exists \inf A$.

l'ensemble des majorant $[10, +\infty[$ le plus petit des majorant.

$\sup A = 10 \in A$

$\Rightarrow \max A = 10$

l'ensemble des minau[rant]

$]-\infty, -5]$ le plus gr[and]

des minaurant $\inf A =$ [...]

$-5 \in A \Rightarrow \min A = -$[...]

2) $B = [-5, 2]$

$\forall \quad x \in B$

$-5 \leq x \leq 2$

$\Rightarrow \sup B = \max B =$ [...]

$\inf B = \min B = -5$

$C =]-\infty, 2]$

$\forall x \in C \Rightarrow x$ [...]

donc $\sup C = \max C$

inf C et min C n'éxst[e] pas

$D = [1, 20[$

$\forall x D \quad 1 \leq x < 20$

$\sup D = 20 \notin D$

donc max D n'éxste pa[s]

$\inf D = 1 \in D \Rightarrow$

$\min D = 1$

$E =]-4, +\infty[$

$\forall x \in E \quad x > -4$

$\inf E = -4 \notin E$ donc $\min E$ n'existe pas.

$\sup E$, $\max E$ n'existe pas.

3) $F = \left\{ \frac{2n+1}{n-2}, n > 2 \right\}$

~~1ère méthode~~

~~On~~ pose $n > 2 \Rightarrow n = 3, 4, \ldots$

$f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ $x \in [3, +\infty[$

$f'(x) = \frac{2(x-2) - 1(2x+1)}{(x-2)^2}$

$= \frac{-5}{(x-2)^2} < 0$

x	3 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$7 \searrow 2$

donc $\forall x \in [0, +\infty[$

$2 < f(x) < 7$

alors $\forall y \in F$

$2 < y < 7$

donc $\sup F = 7$

$\inf F = 2$

$7 \overset{?}{\in} F \Rightarrow \overset{?}{\exists} n >$

$7 = \frac{2n+1}{n-2} \Rightarrow$

$7(n-2) = 2n+1 \Rightarrow$

$7n - 14 = 2n + 1$

$5n = 15 \Rightarrow \underline{\underline{n = 3 >}}$

donc $7 \in F$ alors

$\max F = 7$

$2 \overset{?}{\in} F \Rightarrow \overset{?}{\exists} n >$

$2 = \frac{2n+1}{n-2} \Rightarrow$

$2(n-2) = 2n + 1 \Rightarrow$

$\cancel{2n} - 4 = \cancel{2n} + 1$

$-4 = 1$ c'est impossible alors

$\not\exists n > 2 : 2 = \frac{2n+1}{n-1}$

alors $2 \notin F$

donc $\min F$ n'existe pas.

$G = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n+1}, \right.$

$G = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\} + \left\{ \frac{(-1)^n}{n+1}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

$\left(\begin{array}{l} \sup(A+B) = \sup A + \sup B \\ \inf(A+B) = \inf A + \inf B \end{array} \right)$

donc on pose

$A = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

$B = \left\{ \frac{(-1)^n}{n+1}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

On trouve $\sup A$, $\inf A$ et $\sup B$, $\inf B$

2ème methode pour trouver sup, inf

$U_n = \frac{1}{n}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$

$= \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$

U_n est decroissante $\Rightarrow$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$U_1 \geq U_2 \geq \cdots \geq U_n \geq \lim_{n \to +\infty} U_n$

$U_1 = \frac{1}{1} = 1$

$\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$1 \geq U_n \geq 0$

donc elle est bornée

$\boxed{\begin{array}{l} \sup A = 1 \\ \inf A = 0 \end{array}}$

$1 \overset{?}{\in} A \Rightarrow \overset{?}{\exists} n \in \mathbb{N}^*$

$1 = \frac{1}{n} \Rightarrow n = 1 \in \mathbb{N}$

donc $1 = \max A$

$0 \overset{?}{\in} A \Rightarrow \overset{?}{\exists} n \in \mathbb{N}^*$

$0 = \frac{1}{n} \Rightarrow 0 = 1$

impossible donc

$0 \notin A \Rightarrow \min A$ n'existe

$B = \left\{ \frac{(-1)^n}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right.$

~~$n=2k$~~ $\left\{ \frac{(-1)^{2k}}{2k+1}, k \in \right.$

$\cup \left\{ \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1+1}, k \in \right.$

$= \left\{ \frac{1}{2k+1}, k \in \mathbb{N} \right.$

$\cup \left\{ \frac{-1}{2k+2}, k \in \right.$

$\left(\begin{array}{l} \sup(A \cup B) = \max(\sup A, \\ \inf(A \cup B) = \min(\inf A, \end{array} \right.$

$\cancel{B} = A_1 \sqcup A_2$

$A_1 = \left\{ \frac{1}{2k+1} , k \in \mathbb{N}^* \right\}$

$f(x) = \frac{1}{2x+1} \quad x \in [1, +\infty[$

ou

$U_n = \frac{1}{2n+1} , n \in \mathbb{N}^*$

vous pouvez choisir la 1ère methode ou 2ème methode

$f(x) = \frac{1}{2x+1} \quad x \in [1, +\infty[$

$f'(x) = \frac{-2}{(2x+1)^2} < 0$

$f'(x) < 0$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{3}$ $\searrow$	0

$\forall y \in A_1$

$0 < y < \frac{1}{3}$

$\sup A_1 = 1/3$

$\inf A_2 = 0$

ou

$U_n = \frac{1}{2n+1}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2(n+1)+1} - \frac{1}{2n+1}$

$= \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+1}$

$= \frac{2n+1 - 2n - 3}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{-2}{(2n+3)(\ldots}$

< 0

$U_1 \geq U_1 \geq \cdots \geq U_n \geq$

$\frac{1}{3} \geq U_n > 0$

donc $\sup A_1 = \frac{1}{3}$

$\inf A_1 = 0$

$A_2 = \left\{ \frac{-1}{2k+2} , k \in \mathbb{N} \right\}$

de la même manière vous pouvez choisir la 1ère et 2ème methode pour trouver $\sup A_2$ et $\inf A_2$.

$U_n = -\frac{1}{2n+2}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{-1}{2(n+1)+2} - \ldots$

$= \frac{-1}{2n+4} + \frac{1}{2n+2}$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-(2n+2) + (2n+4)}{(2n+4)(2n+2)}$$

$$= \frac{2}{(2n+4)(2n+2)} > 0.$$

$U_n \nearrow$.

$U_0 < U_1 \leq \cdots < U_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

$U_0 = -\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad -\frac{1}{2} \leq U_n < 0$.

$\sup A_2 = 0$

$\inf A_2 = -\frac{1}{2}$

$B = A_1 \cup A_2$

$\sup B = \sup(A_1 \cup A_2)$

$= \max(\sup A_1, \sup A_2)$

$= \max\left(\frac{1}{3}, 0\right) = \boxed{\frac{1}{3}}$

$\inf B = \inf(A_1 \cup A_2) =$

$\min(\inf A_1, \inf A_2) =$

$\min\left(0, -\frac{1}{2}\right) = \boxed{-\frac{1}{2}}$.

$G = A + B$

$\sup G = \sup(A+B)$

$= \sup A + \sup B$

$= 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

$\inf G = \inf(A+B)$

$= \inf A + \inf B$

$= 0 + \left(-\frac{1}{2}\right)$

$= -\frac{1}{2}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sup G = \frac{4}{3} \\ \inf G = -\frac{1}{3} \end{array}}$$

4) $H = \{-3x+1, x$
$[-2,$

$f(x) = -3x+1, \quad x \in [$

$f'(x) = -3 < 0$

x	-2
$f'(x)$	$-$
	$7 \searrow$

$\forall x \in [-2, 1[$

$y = -3x+1$

$7 \geq y > -2$

donc H est bornée

$\exists \operatorname{Sup} H = 7$

$\inf H = -2$

$7 \overset{?}{\in} H \Rightarrow \overset{?}{\exists} x \in [-2,1[$

$-3x+1 = 7 \Rightarrow$

$-3x = 6 \Rightarrow x = -2 \in [-2,1[$

donc $\max H = 7$.

$-2 \overset{?}{\in} H \Rightarrow \exists^{?} x \in [-2,1[$

$-3x+1 = -2 \Rightarrow$

$-3x = -3 \Rightarrow x = 1 \notin [-2,1[$

donc $-2 \notin H$ alors

min H n'existe pas.

$I = \left\{ x^2 + \frac{1}{x^2}, x \in \mathbb{R}^* \right\}$

$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}, \quad x \in \mathbb{R}^*.$

$f'(x) = 2x - \frac{2x}{x^4}$

$= \frac{2x(x^4-1)}{x^4}$

$= \frac{2x(x^2-1)(x^2+1)}{x^4}$

$= \frac{2x(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x^4}$

x		-1		0		1
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	0
$f(x)$	$+\infty \searrow$	2	$\nearrow +\infty$	$\parallel$	$+\infty \searrow$	2

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad y \geq 2$

donc

Sup I, max I n'existe pas.

$\inf I = 2$

$2 \overset{?}{\in} I \Rightarrow$

$\frac{1}{x^2} + x^2 = 2 \Rightarrow$

$1 + x^4 = 2x^2$

$x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

$(x^2-1)^2 = 0$

$x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1 \in$

donc $2 \in I$

$\min I = 2$

$J = \{ -x^2+2x, x \in]1,$

$f(x) = -x^2+2x, \quad x \in]$

$f'(x) = -2x+2$

$f'(x) > 0 \Rightarrow x < 1$

$f'(x) < 0 \Rightarrow x > 1$

x	1	2
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$1 \searrow$	0

$\forall\, y \in J$

$0 < y \leq 1$

$\sup J = 1 \;,\; \inf J = 0$

$1 \overset{?}{\in} J \Rightarrow \overset{?}{\exists}\, x \in]1, 2[$

$-x^2 + 2x = 1$

$-x^2 + 2x - 1 = 0$

$-(x-1)^2 = 0$

$x = 1 \notin]1, 2[$

donc max J n'existe pas

$0 \overset{?}{\in} J \Rightarrow \overset{?}{\exists}\, x \in]1, 2[$

$-x^2 + 2x = 0$

$-x^2 + 2x + \cancel{2} = 0$

$-x(x-2) = 0$

$x = 0$ ou $x = 2$

$0 \notin]1,2[$ et $2 \notin]1,2[$

donc min J il n'existe pas.

EX4

$A = \left\{ \dfrac{n-1}{n+4} \,,\; n \in \mathbb{N}^* \right.$

$f(x) = \dfrac{x-1}{x+4} \quad x \in [1$

$f'(x) = \dfrac{x+4-(x-1)}{(x+4)^2}$

$= \dfrac{5}{(x+4)^2} > 0$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$0 \nearrow$	1

A est bornée

$\forall\, x \in [1, +\infty[$

$0 \leq y \leq 1$

$\sup A = 1 \,,\; \inf A =$

$1 \overset{?}{\in} A \Rightarrow \overset{?}{\exists}\, x \in \mathbb{N}^*$

$1 = \dfrac{n-1}{n+1} \Rightarrow n+1 = n-$

$1 = -1$ impossible

donc $1 \notin A$ alors max A il n'existe p

$0 \overset{?}{\in} A \Rightarrow \overset{?}{\exists}\, x \in \mathbb{N}^*$

$0 = \dfrac{n-1}{n+1} \Rightarrow n =$

$n \in \mathbb{N}^*$ donc min A n'existe pa demonstration dans le Cours.

2) $B = \left\{ \frac{2n+3}{n+4}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

On a $\frac{2n+3}{n+4} = \frac{n-1}{n+4} + \alpha$

$= \frac{n-1}{n+4} + \frac{\alpha(n+4)}{n+4}$

$= \frac{(1+\alpha)n + 4\alpha - 1}{n+4}$

$\begin{cases} 1+\alpha = 2 \\ 4\alpha - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = 1. \end{cases}$

$\frac{2n+3}{n+4} = \frac{n-1}{n+4} + 1$

$B = \left\{ \frac{n-1}{n+4}, n \in \mathbb{N}^* \right\} + \{1\}$

$\sup B = \sup A + \sup\{1\}$
$= 1 + 1 = \boxed{2}$

$\inf B = \inf A + \inf\{1\}$
$= 0 + 1 = \boxed{1}$

12

Ex5 $A \subset \mathbb{R}^{+}$

1) $B = \{\sqrt{x}, x \in A\}$

A bornée $\Rightarrow$

$\exists \sup A$ et $\inf A$

$\forall x \in A \Rightarrow$

$\inf A \leq x \leq \sup A$

$\sqrt{\inf A} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{\sup A}$

$\forall y \in B \quad y = \sqrt{x}$

$\sqrt{x} \in B \Rightarrow$

B bornée $\Rightarrow \exists \sup B$,

On demontre que

$\sup B = \sqrt{\sup A}$

$\forall y \in B$

$\sqrt{\inf A} \leq y \leq \sqrt{\sup A}$

$\sqrt{\sup A}$ est un majorant de B et $\sup B$ est le plus petit des majorants

$\boxed{\sup B \leq \sqrt{\sup A}}$

$y \leq \sup B$

$\Rightarrow \sqrt{x} \leq \sup B$

$x \leq (\sup B)^2$

$\Rightarrow (\sup B)^2$ est un majorant de A et sup A est le plus petit des majorant de A $\Rightarrow \sup A \leq (\sup B)^2$

$$\boxed{\sup B \geq \sqrt{\sup A}} \quad (2)$$

de (1) est (2)

$$\boxed{\sup B = \sqrt{\sup A}}$$

on montre $\inf B = \sqrt{\inf A}$.

on a $\sqrt{\inf A} \leq \sqrt{x} \Rightarrow$

$\sqrt{\inf A}$ est un minorant de B et inf B est le plus grand des minorant.

$$\boxed{\inf B \geq \sqrt{\inf A}} \quad (1)$$

on a aussi

$$\sqrt{x} \geq \inf B \Rightarrow$$

$$x \geq (\inf B)^2 \Rightarrow$$

$(\inf B)^2$ est un minorant de A et inf A est le plus grand des minorant.

$$\inf A \geq (\inf B)^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\sqrt{\inf A} \geq \inf B} \quad (2)$$

donc $\inf B = \sqrt{\inf A}$

c) $C = \left\{ \frac{1}{x}, x \in A \right\}$

de la même manière

A bornée $\Rightarrow$

$\forall x \in A : \inf A \leq x \leq \sup$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sup A} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\inf A}$$

$$\Rightarrow \forall x \in A \Rightarrow \frac{1}{x} \in C$$

$\Rightarrow$ C est bornée $\Rightarrow \exists \sup C$,

on demontre de la même façon que. $\sup C = \frac{1}{\inf A}$

$\inf C = \frac{1}{\sup A}$

(en jouant sur le majorant et le minorant)

$$D = \left\{ \frac{1}{1-x}, x \in A \right\}$$

$$\inf A \leq x \leq \sup A$$

$$-\sup A \leq -x \leq -\inf A$$

$$1-\sup A \leq 1-x \leq 1-\inf A$$

$$\frac{1}{1-\inf A} \leq \frac{1}{1-x} \leq \frac{1}{1-\sup A}$$

D

donc D bornée

$$\sup D = \frac{1}{1-\sup A}$$

$$\inf D = \frac{1}{1-\inf A}$$

3) $E = \{x \in \mathbb{R}^+ ,\ ax^2+b \in A,\ a \in \mathbb{R}^+,\ b \in \mathbb{R}^-\}$

$ax^2+b \in A \Rightarrow$

$\inf A \leq ax^2+b \leq \sup A$

$\inf A - b \leq ax^2 \leq \sup A - b$

$\frac{\inf A - b}{a} \leq x^2 \leq \frac{\sup A - b}{a}$

$\sqrt{\frac{\inf A - b}{a}} \leq x \leq \sqrt{\frac{\sup A - b}{a}}$

donc $x \in E \Rightarrow$

E bornée de la même manière on demontre que $\sup E = \sqrt{\frac{\sup A - b}{a}}$

$\inf E = \sqrt{\frac{\inf A - b}{a}}$

(à l'aide des majorant et les minaurant)

$x \geq \sqrt{\frac{\inf A - b}{a}}$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{\inf A - b}{a}}$ est un minauent de E et inf E est le plus grand des minaurant

$\boxed{\inf E \geq \sqrt{\frac{\inf A - b}{a}}}$ - ①

$x \in E$

$x \geq \inf E$

$x^2 \geq (\inf E)^2$

$\underbrace{ax^2+b}_{\substack{A \\ A}} \geq a(\inf E)^2 + b$

$a(\inf E)^2+b$ est un minorant de A et inf A est le plus grand des minaurant.

$\inf A \geq a(\inf E)^2 + b$

$\frac{\inf A - b}{a} \geq (\inf E)^2$

$\inf E \leq \sqrt{\frac{\inf A - b}{a}}$

de ① et ②

$\inf E = \sqrt{\frac{\inf A - b}{a}}$

de la même manière on peut demontrer

$\sup E = \sqrt{\frac{\sup A - b}{a}}$.