UNIVERSITÉ ABDELHAMID MAHRI – CONSTANTINE 2-
FACULTÉ DES NTIC
DÉPARTEMENT TRONC COMMUN "MI"

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2020/2021
1 ÈRE ANNÉE MI
ALGEBRE I

SÉRIE TD N°2

ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Exercice1 :

Soit l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{Z} / -5 \leq n \leq 7\}$.

Et soient B et C deux sous-ensembles de A telles que :

$$B = \{n \in A / \exists k \in \mathbb{Z};\ n = 2k+1\} \quad \text{et} \quad C = \{n \in A /\ n \geq 0\}.$$

1- Déterminer les ensembles A, B et C.

2- Déterminer les sous-ensembles $-C, C - B, C \cap B, C \cup B, C \Delta B, \complement_A B, \complement_A C, \complement_A (B \cup C)$, $\mathcal{P}\left(\complement_A (B \cup C)\right)$, ensuite et parmi ces sous-ensembles, trouver une partition de l'ensemble A.

Exercice 2 :

On considère les deux ensembles : $A = \left\{\frac{\pi}{3} + 2\frac{k\pi}{5} / k \in \mathbb{Z}\right\}$ et $B = \left\{\frac{\pi}{6} + 2\frac{k\pi}{5} / k \in \mathbb{Z}\right\}$.

- Démonter que : $A \cap B = \emptyset$.

Exercice 3 :

Soient F et G deux sous-ensembles d'un ensemble E. Démonter les propositions suivantes :

$$F \subset G \Leftrightarrow \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(G)$$
$$\mathcal{P}(F \cap G) \subset \mathcal{P}(F) \cap \mathcal{P}(G)$$
$$\mathcal{P}(F) \cup \mathcal{P}(G) \subset \mathcal{P}(F \cup G)$$
$$\mathcal{P}(F \cup G) \subset \mathcal{P}(F) \cup \mathcal{P}(G) \Longrightarrow (F \subset G \vee G \subset F)$$

Exercice 4 :

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Démonter les propositions suivantes :

$$card(\complement_E A) = card(E) - card(A)$$
$$card(A - B) = card(A) - card(A \cap B)$$
$$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$$
$$card(A \Delta B) = card(A) + card(B) - 2card(A \cap B)$$

Exercice 5 :

Soit f l'application de l'ensemble $\{1,2,3,4,5\}$ dans lui-même définie par :

$$f(1) = 4\,,\ \ f(2) = 1\,,\ \ f(3) = 2\,,\ \ f(4) = f(5) = 5$$

-Déterminer $f(A)$ lorsque : $A = \{1,2\}, A = \{1,3,4\}, A = \{1,2,5\}$.

-Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque : $A = \{2\}, A = \{1,5\}, A = \{3\}, A = \{3,4\}$.

Soit $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $g(x) = x^2$.

-Déterminer les ensembles : $g([-3,1]), g([-2,-1]), g([-3,1] \cup [1,4])$.

-Déterminer les ensembles : $g^{-1}([1,+\infty[), g^{-1}([-4,4]), g^{-1}(]-\infty,2] \cup [4,7])$.

Exercice 6 :

Soit l'application $f: E \longrightarrow F$ telles que : $E = \{1,2,3,4\}$ et $F = \{0,1,3,5,7,10\}$ définie par son graphe $G(f) = \{(1,3),(2,5),(3,5),(4,0)\}$.

-Déterminer les ensembles : $f(E), f(\{1,2,3\}), f(\{4\})$.

-Déterminer les ensembles : $f^{-1}(\{5\}), f^{-1}(\{0,1,3\}), f^{-1}(\{1,10\})$.

Exercice 7 :
Soit $f: E \longrightarrow F$ une application, avec E et F sont deux ensembles non vides. Et soient A et B deux parties de E. Démontrer que :

$$A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$$
$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$
$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$
$$f \text{ est injective} \Longrightarrow f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$
$$f \text{ est bijective} \Leftrightarrow f(C_E A) = C_F f(A)$$

Exercice 8 :
Soit $f: E \longrightarrow F$ une application, avec E et F sont deux ensembles non vides. Et soient A et B deux parties de F. Démontrer que :

$$A \subset B \Longrightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$$
$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$
$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$
$$f^{-1}(C_F A) = C_E f^{-1}(A)$$

Exercice 9 :
Soient $f: E \longrightarrow F$ et Soit $g: F \longrightarrow G$ deux applications, démontrer les implications suivantes :

$$g \circ f \text{ injective} \Longrightarrow f \text{ injective}$$
$$g \circ f \text{ surjective} \Longrightarrow g \text{ surjective}$$
$$(g \circ f \text{ injective } \wedge f \text{ surjective}) \Longrightarrow g \text{ injective}$$
$$(g \circ f \text{ surjective } \wedge g \text{ injective}) \Longrightarrow f \text{ surjective}$$

Exercice 10 :
Soient les deux applications $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définis par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad f(k) = 2k \qquad g(k) = \begin{cases} \dfrac{k}{2} & si\ k\ est\ pair \\ \dfrac{k-1}{2} & si\ k\ est\ impair \end{cases}$$

1- Etudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité de f et g.
2- Déterminer les applications $f \circ g$ et $g \circ f$, ensuite étudier leur injectivité, surjectivité et bijectivité.

Exercice 11 :
Soient l'application $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

f est elle injective ? surjective ?
- Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.
- Montrer que la restriction $g: [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$ est une bijection.
- Retrouver ce résultat en étudiant les variations de f.