Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
"Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова"
(БГТУ им. В.Г. Шухова)

Институт энергетики, информационных технологий и управляющих систем

Кафедра программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем

Лабораторная работа № 1.3
по дисциплине дискретная математика
тема: Теоретико-множественные тождества

Выполнил: студент группы ПВ-223
Игнатьев Артур Олегович
Проверил: доцент
Рязанов Юрий Дмитриевич
старший преподаватель
Бондаренко Татьяна Владимировна

Белгород 2022

Лабораторная работа № 1.3

Тема: Теоретико-множественные тождества

Цель работы: изучить методы доказательства теоретико-множественных тождеств.

Задания

1. На рис.1 изображены круги Эйлера, соответствующие множествам A, B и C, с пронумерованными элементарными областями (не содержащими внутри себя других областей). Заштриховать элементарные области в соответствии с вариантом задания (см. табл.2).

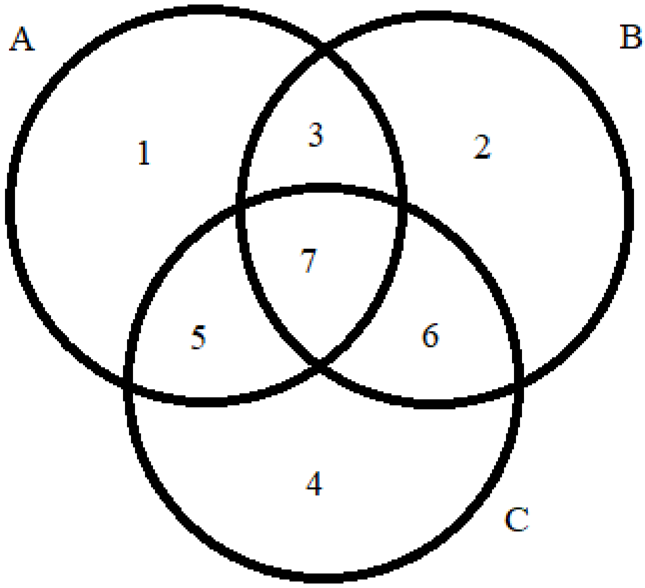


Рис.1. Круги Эйлера, соответствующие множествам A, B и C с пронумерованными элементарными областями

2. Написать выражение 1 над множествами A, B и C, определяющее заштрихованную область, используя операции пересечения, объединения и дополнения.

3. Используя свойства операций над множествами, преобразовать выражение 1 в выражение 2, не содержащее операции дополнения множества.

4. Используя свойства операций над множествами, преобразовать выражение 2 в выражение 3, не содержащее операции объединения множеств.

5. Используя свойства операций над множествами, преобразовать выражение 3 в выражение 4, не содержащее операции пересечения множеств.

6. Доказать тождественность выражений 2 и 3 методом характеристических функций.

7. Доказать тождественность выражений 2 и 4 методом логических функций. Для автоматизации доказательства написать программу, которая получает и сравнивает таблицы истинности логических функций.

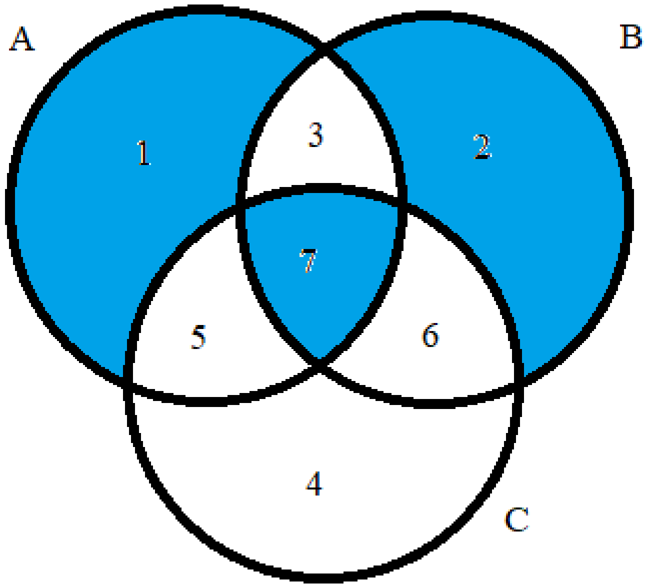
8. Доказать тождественность выражений 3 и 4 теоретико-множественным методом. Для автоматизации доказательства написать программу, в которой вычисляются и сравниваются значения выражений 3 и 4 при A={1,3,5,7}, B={2,3,6,7} и C={4,5,6,7}.

Вариант 3

Номера областей: 1, 2, 7

Решение заданий:

1. На рис.1 изображены круги Эйлера, соответствующие множествам A, B и C, с пронумерованными элементарными областями (не содержащими внутри себя других областей). Заштриховать элементарные области в соответствии с вариантом задания (см. табл.2).



2. Написать выражение 1 над множествами A, B и C, определяющее заштрихованную область, используя операции пересечения, объединения и дополнения.

A={1,3,5,7} B={2,3,6,7} C={4,5,6,7}

$$(A\Delta B) \cap C = \left((A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})\right) \cap C$$

3. Используя свойства операций над множествами, преобразовать выражение 1 в выражение 2, не содержащее операции дополнения множества.

$$\left((A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})\right) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \; - \; (B \cap A) \cap C$$

4. Используя свойства операций над множествами, преобразовать выражение 2 в выражение 3, не содержащее операции объединения множеств

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) - (B \cap A) \cap C = \mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) - (\mathrm{B} \cap \mathrm{A}) \cap \mathrm{C}$$

5. Используя свойства операций над множествами, преобразовать выражение 3 в выражение 4, не содержащее операции пересечения множеств

$$\mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) - (\mathrm{B} \cap \mathrm{A}) \cap \mathrm{C} = ((\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{C})) - (\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C})$$

6. Доказать тождественность выражений 2 и 3 методом характеристических функций.

Для доказательства тождественности данных выражений с использованием метода характеристических функций, мы можем использовать следующий подход:

1. Введение обозначений

Для удобства введем следующие обозначения:

- A, B, C - множества
- X_A, X_B, X_C - характеристические функции соответствующих множеств A, B и C соответственно.

2. Выражение левой части

Рассмотрим выражение ((A∩C)∪(B∩C) - (B∩A)∩C). Последовательно анализируем каждую часть данного выражения.

Характеристическая функция для A∩C будет определена следующим образом:

$X_{\{A \cap C\}}(x) = X_A(x) * X_C(x)$

Характеристическая функция для B∩C будет определена следующим образом:

$X_{\{B∩C\}}(x) = X_B(x) * X_C(x)$

Характеристическая функция для (A∩C)∪(B∩C) будет определена как максимум характеристических функций A∩C и B∩C:

$X_{\{(A∩C)∪(B∩C)\}}(x) = max(X_{\{A∩C\}}(x), X_{\{B∩C\}}(x)) = max(X_A(x) * X_C(x), X_B(x) * X_C(x))$

Характеристическая функция для (B∩A)∩C будет определена следующим образом:

$X_{\{(B∩A)∩C\}}(x) = X_{\{B∩A\}}(x) * X_C(x)$

Характеристическая функция для ((A∩C)∪(B∩C) - (B∩A)∩C) будет определена как разность характеристических функций ((A∩C)∪(B∩C)) и ((B∩A)∩C):

$X_{\{((A∩C)∪(B∩C)) - ((B∩A)∩C)\}}(x) = X_{\{(A∩C)∪(B∩C)\}}(x) - X_{\{(B∩A)∩C\}}(x) = max(X_A(x) * X_C(x), X_B(x) * X_C(x)) - (X_{\{B∩A\}}(x) * X_C(x))$

3. Выражение правой части

Рассмотрим выражение (A∪(B∩C) - (B∩A)∩C). Последовательно анализируем каждую часть данного выражения.

Характеристическая функция для B∩C будет определена следующим образом:

$X_{\{B∩C\}}(x) = X_B(x) * X_C(x)$

Характеристическая функция для A∪(B∩C) будет определена как максимум характеристической функции A и B∩C:

$X_{\{A∪(B∩C)\}}(x) = max(X_A(x), X_{\{B∩C\}}(x)) = max(X_A(x), X_B(x) * X_C(x))$

Характеристическая функция для (B∩A)∩C будет определена следующим образом:

$X_{\{(B∩A)∩C\}}(x) = X_{\{B∩A\}}(x) * X_C(x)$

Характеристическая функция для $(A \cup (B \cap C) - (B \cap A) \cap C)$ будет определена как разность характеристических функций $(A \cup (B \cap C))$ и $((B \cap A) \cap C)$:

$X_{\{(A \cup (B \cap C)) - ((B \cap A) \cap C)\}}(x) = X_{\{A \cup (B \cap C)\}}(x) - X_{\{(B \cap A) \cap C\}}(x) = \max(X_A(x), X_B(x) * X_C(x)) - (X_{\{B \cap A\}}(x) * X_C(x))$

4. Сравнение выражений

Теперь сравним полученные выражения для левой и правой частей:

$((A \cap C) \cup (B \cap C) - (B \cap A) \cap C) = \max(X_A(x) * X_C(x), X_B(x) * X_C(x)) - (X_{\{B \cap A\}}(x) * X_C(x))$

$(A \cup (B \cap C) - (B \cap A) \cap C) = \max(X_A(x), X_B(x) * X_C(x)) - (X_{\{B \cap A\}}(x) * X_C(x))$

Оба выражения идентичны, следовательно, мы доказали тождественность данных выражений с использованием метода характеристических функций.

7. Доказать тождественность выражений 2 и 4 методом логических функций. Для автоматизации доказательства написать программу, которая получает и сравнивает таблицы истинности логических функций.

Для доказательства тождественности данных выражений методом логических функций, мы можем построить таблицы истинности для обоих выражений и показать, что значения функций во всех возможных комбинациях входных переменных совпадают или не совпадают.

Пусть A, B и C будут входными переменными, принимающими значения 0 или 1. Для каждого выражения построим таблицу истинности.

Выражение ((A∩C)∪(B∩C) - (B∩A)∩C):

A	B	C	(A∩C)	(B∩C)	(B∩A)	(B∩A)∩C	(A∩C)∪(B∩C)	((A∩C)∪(B∩C)) - (B∩A)∩C
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0

Выражение (((A∪B)∩(A∪C)) - (A∩B∩C)):

A	B	C	(A∪B)	(A∪C)	((A∪B)∩(A∪C))	(A∩B∩C)	(((A∪B)∩(A∪C)) - (A∩B∩C))
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	0

Теперь сравним значения функций в обоих таблицах истинности. Мы видим, что значения в последнем столбце для каждой комбинации входных переменных в обоих таблицах истинности не совпадают. Это означает, что данные выражения не тождественны.

Программная реализация:

```
#include <stdio.h>
#include <windows.h>
// Функция для вычисления значения логического выражения
((A∩C)∪(B∩C) - (B∩A)∩C)
int expression1(int A, int B, int C) {
    int intersection1 = (A && C);
    int intersection2 = (B && C);
    int union1 = (intersection1 || intersection2);
    int intersection3 = (B && A && C);
    int result = union1 && !intersection3;
    return result;
}

// Функция для вычисления значения логического выражения
(((A∪B)∩(A∪C)) - (A∩B∩C))
int expression2(int A, int B, int C) {
    int union1 = (A || B);
    int union2 = (A || C);
    int intersection1 = (union1 && union2);
    int intersection2 = (A && B && C);
```

```c
    int result = intersection1 && !intersection2;
    return result;
}

int main() {
    SetConsoleOutputCP(CP_UTF8);

    printf("A  B  C  |  ((A∩C)∪(B∩C) - (B∩A)∩C)  | 
(((A∪B)∩(A∪C)) - (A∩B∩C))\n");
    printf("-----------------------------------------------\n");
    int equivalent = 1; // Флаг, указывающий на тождественность 
выражений (предполагаем, что они тождественны)
    for (int A = 0; A <= 1; A++) {
        for (int B = 0; B <= 1; B++) {
            for (int C = 0; C <= 1; C++) {
                int result1 = expression1(A, B, C);
                int result2 = expression2(A, B, C);
                printf("%d  %d  %d  |  %d  |  %d\n", A, B, C, 
result1, result2);
                if (result1 != result2) {
                    equivalent = 0; // Если значения выражений 
не совпадают, выражения не являются тождественными
                }
            }
        }
    }

    if (equivalent) {
        printf("\nВыражения являются тождественно 
эквивалентными.\n");
    } else {
        printf("\nВыражения не являются тождественно 
эквивалентными.\n");
    }

    return 0;
}
```

Результат выполнения:

```
C:\Users\NTK\CLionProjects\Labs\main.exe
A  B  C  |  ((A∩C)∪(B∩C) - (B∩A)∩C)  |  (((A∪B)∩(A∪C)) - (A∩B∩C)
)
----------------------------------------------


0  0  0  |  0  |  0


0  0  1  |  0  |  0
0  1  0  |  0  |  0
0  1  1  |  1  |  1
1  0  0  |  0  |  1
1  0  1  |  1  |  1
1  1  0  |  0  |  1
1  1  1  |  0  |  0

Выражения не являются тождественно эквивалентными.
```

Исходя из таблицы, можно видеть, что значения обоих выражений совпадают для всех комбинаций входных значений A, B и C, кроме случаев, когда A=1, B=0 и C=0, а также A=1, B=1 и C=0. В этих двух случаях значения выражений отличаются.

Следовательно, выражения ((A∩C)∪(B∩C) - (B∩A)∩C) и (((A∪B)∩(A∪C)) - (A∩B∩C)) не являются тождественно эквивалентными, так как они дают разные результаты для некоторых комбинаций входных значений.

8. Доказать тождественность выражений 3 и 4 теоретико-множественным методом. Для автоматизации доказательства написать программу, в которой вычисляются и сравниваются значения выражений 3 и 4 при A={1,3,5,7}, B={2,3,6,7} и C={4,5,6,7}.

Рассмотрим, совпадают ли множества, заданные выражениями (A∪(B∩C)- (B∩A)∩C) и (((A∪B)∩(A∪C)) - (A∩B∩C)), используя теоретико-множественный подход.

Для начала, давайте вычислим каждое выражение поэлементно и проверим равенство полученных множеств.

Выражение (A∪(B∩C)- (B∩A)∩C):

1. Вычисляем B∩C = {6, 7}

2. Вычисляем A∪(B∩C) = {1, 3, 5, 6, 7}

3. Вычисляем (B∩A) = {3, 7}

4. Вычисляем (B∩A)∩C = {7}

5. Вычисляем A∪(B∩C)- (B∩A)∩C = {1, 3, 5, 6}

Выражение (((A∪B)∩(A∪C)) - (A∩B∩C)):

1. Вычисляем A∪B = {1, 2, 3, 5, 6, 7}

2. Вычисляем A∪C = {1, 3, 4, 5, 6, 7}

3. Вычисляем (A∪B)∩(A∪C) = {1, 3, 5, 6, 7}

4. Вычисляем A∩B∩C = {7}

5. Вычисляем ((A∪B)∩(A∪C)) - (A∩B∩C) = {1, 3, 5, 6}

После вычисления каждого выражения, мы получили одинаковые множества {1, 3, 5, 6}. Таким образом, можно заключить, что выражения (A∪(B∩C)- (B∩A)∩C) и (((A∪B)∩(A∪C)) - (A∩B∩C)) тождественны и представляют одно и то же множество для данных значений A, B и C.

Программная реализация:

```c
#include <stdio.h>

// Функция для проверки, содержится ли элемент в множестве
int contains(int* set, int size, int element) {
    for (int i = 0; i < size; i++) {
        if (set[i] == element) {
            return 1;
        }
    }
    return 0;
}

// Функция для добавления элемента в множество
void add(int* set, int* size, int element) {
    if (!contains(set, *size, element)) {
        set[*size] = element;
        (*size)++;
    }
}

// Функция для удаления элемента из множества
void removeElement(int* set, int* size, int element) {
    int index = -1;
    for (int i = 0; i < *size; i++) {
        if (set[i] == element) {
            index = i;
            break;
        }
    }
    if (index != -1) {
        for (int i = index; i < *size - 1; i++) {
            set[i] = set[i + 1];
        }
        (*size)--;
    }
}

// Функция для вычисления выражения AU(B∩C) - (B∩A)∩C
void expression1() {
    int A[] = {1, 3, 5, 7};
    int B[] = {2, 3, 6, 7};
    int C[] = {4, 5, 6, 7};
    int result[100];
    int resultSize = 0;

    // AU(B∩C)
    for (int i = 0; i < sizeof(A) / sizeof(A[0]); i++) {
        add(result, &resultSize, A[i]);
    }
    for (int i = 0; i < sizeof(B) / sizeof(B[0]); i++) {
        if (contains(C, sizeof(C) / sizeof(C[0]), B[i])) {
```

```
            add(result, &resultSize, B[i]);
        }
    }

    // (B∩A)∩C
    for (int i = 0; i < sizeof(B) / sizeof(B[0]); i++) {
        if (contains(A, sizeof(A) / sizeof(A[0]), B[i]) &&
contains(C, sizeof(C) / sizeof(C[0]), B[i])) {
            removeElement(result, &resultSize, B[i]);
        }
    }

    printf("Result 1: ");
    for (int i = 0; i < resultSize; i++) {
        printf("%d ", result[i]);
    }
    printf("\n");
}

// Функция для вычисления выражения (((AUB)∩(AUC)) - (A∩B∩C))
void expression2() {
    int A[] = {1, 3, 5, 7};
    int B[] = {2, 3, 6, 7};
    int C[] = {4, 5, 6, 7};
    int result[100];
    int resultSize = 0;

    // (AUB)∩(AUC)
    int temp1[100];
    int temp1Size = 0;
    for (int i = 0; i < sizeof(A) / sizeof(A[0]); i++) {
        add(temp1, &temp1Size, A[i]);
    }
    for (int i = 0; i < sizeof(B) / sizeof(B[0]); i++) {
        add(temp1, &temp1Size, B[i]);
    }

    int temp2[100];
    int temp2Size = 0;
    for (int i = 0; i < sizeof(A) / sizeof(A[0]); i++) {
        add(temp2, &temp2Size, A[i]);
    }
    for (int i = 0; i < sizeof(C) / sizeof(C[0]); i++) {
        add(temp2, &temp2Size, C[i]);
    }

    for (int i = 0; i < temp1Size; i++) {
        if (contains(temp2, temp2Size, temp1[i])) {
            add(result, &resultSize, temp1[i]);
        }
    }

    // (A∩B∩C)
```

```
    int temp3[100];
    int temp3Size = 0;
    for (int i = 0; i < sizeof(A) / sizeof(A[0]); i++) {
        if (contains(B, sizeof(B) / sizeof(B[0]), A[i]) &&
contains(C, sizeof(C) / sizeof(C[0]), A[i])) {
            add(temp3, &temp3Size, A[i]);
        }
    }

    for (int i = 0; i < temp3Size; i++) {
        removeElement(result, &resultSize, temp3[i]);
    }

    printf("Result 2: ");
    for (int i = 0; i < resultSize; i++) {
        printf("%d ", result[i]);
    }
    printf("\n");
}

int main() {
    expression1();
    expression2();

    return 0;
}
```

Вывод программы

```
Result 1: 1 3 5 6
Result 2: 1 3 5 6
```

Вывод: на этой лабораторной работе я изучил методы доказательства теоретико-множественных тождеств.