Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
"Белгородский государственный технологический университет им. В. Г.
Шухова"
(БГТУ им. В.Г. Шухова)

Институт информационных технологий и управляющих систем

Кафедра программного обеспечения вычислительной техники
и автоматизированных систем

Лабораторная работа № 1
по дисциплине математическая логика и теория алгоритмов
тема: Логика высказываний

Выполнил: студент группы ПВ-223
Игнатьев Артур Олегович
Проверил: старший преподаватель
Куценко Дмитрий Александрович

Белгород 2023

Лабораторная работа № 1

Тема: Логика высказываний

Цель работы: Разработать программный модуль, способный находить значение формы (представленной в нормальной форме) на данной интерпретации. Разработать программу, способную считывать формулу логики высказываний в одной из нормальных форм (по выбору пользователя) и находить значения данной формулы на вводимых пользователем интерпретации.

Содержание отсчёта

1. Название и цель лабораторной работы.

2. Решение предложенных в теоретической части задач.

3. Программа на выбранном языке программирования в виде исходных кодов (с поясняющими комментариями) и в электронном варианте для демонстрации на ЭВМ.

4. Спецификация программы с указанием основных структур данных и алгоритмов.

5. Наборы текстовых данных.

Вариант 3

Теоретическое задание:

2.6. Если в огороде нет бузины, то в Киеве нет дядьки.

7.3. Постройте таблицу истинности, соответствующую следующей формуле:

$$X \to (X \vee Y)$$

8.18. Используя таблицу истинности, доказать равность формулы:

$$\underline{X \& 0 \equiv 0}$$

10.5. Используя равносильные преобразования доказаь, выполняется ли следующее соотношение:

$$(P \vee Q) \& (P \vee \bar{Q}) \equiv P$$

12.2. Найти ДНФ для формулы:

$$\overline{\bar{X} \to \bar{X} \vee Y \vee Z}$$

14.6. Упростить вид формулы, используя равносильные преобразования:

$$(\overline{\bar{X} \vee \bar{Y}} \to X \vee Y) \& Y$$

19.4. Проверить эквивалентность следующей формулы, преобразуя формулу с обеих сторон от знака “≡” к одной и той же нормальной форме:

$$P \vee (P \to (Q \& P)) \equiv \bar{Q} \vee \bar{P} \vee (Q \& P)$$

23.5. Приведением к совершенной нормальной форме доказать неравносильность следующей формулы:

$$(X \to Y) \vee Z \equiv (X \to Y) \to Z$$

30.4. Для следующего выражения найти двойственные:

$$X \vee (Y \vee Z)$$

35.10. Выяснить является ли первая формула логическим следствием остальных:

$$\bar{X}; X \leftrightarrow Y, Y \vee \bar{Z}, Z$$

38.6. Доказать правильность умозаключения:

$$\frac{A \to B,\ \ B \to C,\ \ \bar{C}}{\bar{A}}$$

49.2. Найти все следствия из посылки

$$X \to Y, Y \vee Z, XY \leftrightarrow Z$$

Практическое задание:

Разработать программу, решающую задачи согласно своему варианту. Программа должна считывать формулу логики высказываний в указанной нормальной форме. Алгоритмы, выполняющие решения задачи, должны содержатся в отдельном модуле.

Форма КНФ:

1. Программа должна строить таблицу истинности введённой формулы.

4. Программа должна отыскивать все интерпретации, на которых введённая формула принимает истинное значение.

Решение заданий:

Теоретическая часть:

2.6. Если в огороде нет бузины, то в Киеве нет дядьки.

P: "в огороде нет бузины"

Q: "в Киеве нет дядьки"

$P \rightarrow Q$

Если условие P истинно, то следствие Q тоже должно быть истинно. В противном случае, если условие P ложно, то утверждение $P \rightarrow Q$ не накладывает никаких ограничений на Q.

7.3. Постройте таблицу истинности, соответствующую следующей формуле:

$X \rightarrow (X \vee Y)$

X	Y	$X \vee Y$	$X \rightarrow (X \vee Y)$
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Как видно из таблицы, для всех комбинаций значений X и Y, выражение $X \rightarrow (X \vee Y)$ имеет значение 1 (истина).

8.18. Используя таблицу истинности, доказать равность формулы:

$X\&0 \equiv 0$

X	X&0	0	$X\&0 \equiv 0$

0	0	0	1
1	0	0	1

Из таблицы видно, что для всех значений X (как 0, так и 1), результат операции X & 0 равен 0. Таким образом, формула X & 0 ≡ 0 верна для всех значений X.

10.5. Используя равносильные преобразования доказать, выполняется ли следующее соотношение:

$$(P \vee Q) \& (P \vee \bar{Q}) \equiv P$$

Доказательства равносильности данного соотношения:

$$(P \vee Q) \wedge (P \vee \bar{Q}) = P \vee (Q \wedge (P \vee \bar{Q}))$$

$$(P \vee \bar{Q}) \wedge \bar{Q} = P \vee (Q \wedge \bar{Q})$$

$$P \vee (Q \wedge \bar{Q} = 0) = P \vee 0$$

$$P \vee 0 = P$$

Доказали равносильность данного соотношения:

$$(P \vee Q) \wedge (P \vee \bar{Q}) \equiv P.$$

12.2. Найти ДНФ для формулы:

$$\overline{\bar{X} \rightarrow \bar{X} \vee Y \vee Z}$$

Нахождение дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ):

$$\overline{(\bar{X} \rightarrow \bar{X} \vee Y \vee Z)} = \overline{(\bar{X})} \vee \overline{(\bar{X} \vee Y \vee Z)}$$

$$\overline{(\bar{X} \vee Y \vee Z)} = \overline{(\bar{X})} \wedge (\bar{Y} \vee \bar{Z})$$

$$\left(\overline{(\bar{X})} = X\right) \wedge (\bar{Y} \vee \bar{Z}) = X \wedge (\bar{Y} \vee \bar{Z})$$

$$X \wedge (\bar{\mathrm{Y}} \vee \bar{\mathrm{Z}}) = (X \wedge \bar{Y}) \vee (X \wedge \bar{Z})$$

Найдена дизъюнктивная нормальная формф (ДНФ):

$$\overline{\bar{X} \to \bar{X} \vee Y \vee Z} = (X \wedge \bar{Y}) \vee (X \wedge \bar{Z})$$

14.6. Упростить вид формулы, используя равносильные преображения:

$$(\overline{\bar{\bar{X}} \vee \bar{\bar{Y}}} \to X \vee Y) \& Y$$

Найдём упрощенный вид данной формулы:

$$(\overline{(\bar{X} \vee \bar{Y})} \to X \vee Y) \wedge Y = (\overline{(\bar{X})} \wedge \overline{(\bar{Y})} \to X \vee Y) \wedge Y$$

$$\left(\left(\overline{(\bar{X})} = X\right) \wedge \left(\overline{(\bar{Y})} = Y\right) \to X \vee Y\right) \wedge Y = (X \wedge Y \to X \vee Y) \wedge Y$$

$$(X \wedge Y \to X \vee Y) \wedge Y = (\bar{X} \vee Y \vee X \vee Y) \wedge Y$$

$$(\bar{X} \vee X \vee Y \vee Y) \wedge Y = (\bar{X} \vee X \vee Y) \wedge Y$$

$$(\bar{X} \vee X \vee Y) \wedge Y = (1 \vee Y) \wedge Y$$

$$(1 \vee Y) \wedge Y = 1 \wedge Y$$

$$1 \wedge Y = Y$$

Упрощенная формула равна просто Y.

$$(\overline{\bar{X} \vee \bar{Y}} \to X \vee Y) \& Y = Y$$

19.4. Проверить эквивалентность следующей формулы, преобразуя формулу с обеих сторон от знака “≡” к одной и той же нормальной форме:

$$P \vee (P \to (Q \& P)) \equiv \bar{Q} \vee \bar{P} \vee (Q \& P)$$

Начнём с левой стороны:

$$P \vee (P \to (Q \wedge P)) = P \vee (\bar{P} \vee (Q \wedge P))$$

$$P \lor \left(\bar{P} \lor (Q \land P)\right) = \mathrm{P} \lor ((\mathrm{Q} \land \mathrm{P}) \lor \overline{\mathrm{P}})$$

$$\mathrm{P} \lor \left((\mathrm{Q} \land \mathrm{P}) \lor \overline{\mathrm{P}}\right) = (\mathrm{P} \lor (\mathrm{Q} \land \mathrm{P})) \lor (\mathrm{P} \lor \overline{\mathrm{P}})$$

$$\left(\mathrm{P} \lor (\mathrm{Q} \land \mathrm{P})\right) \lor (\mathrm{P} \lor \overline{\mathrm{P}}) = (\mathrm{P} \lor (\mathrm{Q} \land \mathrm{P})) \lor 1$$

$$\left(\left(\mathrm{P} \lor (\mathrm{Q} \land \mathrm{P})\right) = 1\right) \lor 1 = 1 \lor 1$$

$$1 \lor 1 = 1$$

Перейдем к правой стороне:

$$\bar{Q} \lor \bar{P} \lor (Q \land P) = (Q \lor P) \lor (Q \land P)$$

$$(Q \lor P) \lor (Q \land P) = (\mathrm{Q} \lor \mathrm{P} \lor (\mathrm{Q} \land \mathrm{P}))$$

$$\left(Q \lor P \lor (Q \land P)\right) = 1$$

Обе стороны формулы упростились до 1. Исходная формула и преобразованная формула эквивалентны:

$$P \lor (P \to (Q \land P)) \equiv \bar{Q} \lor \bar{P} \lor (Q \land P) \equiv 1$$

23.5. Приведением к совершенной нормальной форме доказать неравносильность следующей формулы:

$$(X \to Y) \lor Z \equiv (X \to Y) \to Z$$

Начнем с левой стороны:

$$(X \to Y) \lor Z = (\bar{X} \lor Y) \lor Z$$

$$(\bar{X} \lor Y) \lor Z = (\overline{\mathrm{X}} \lor \mathrm{Y} \lor \mathrm{Z})$$

$$(\bar{X} \lor Y \lor Z) = (\bar{X} \lor (Y \lor Z))$$

Преобразуем правую сторону:

$$(X \rightarrow Y) \rightarrow Z = \left(\overline{(\bar{X} \vee Y)} \vee Z\right) = X \,\&\, \bar{Y} \vee Z = (X \vee Z) \,\&\, (\bar{Y} \vee Z)$$
$$= (X \vee Y \vee Z) \,\&\, (X \vee \bar{Y} \vee Z) \,\&\, (\bar{X} \vee \bar{Y} \vee Z)$$

Совершенные нормальные формы (СНФ) для левой и правой стороны формулы:

Левая сторона: $(\bar{X} \vee (Y \vee Z))$

Правая сторона: $(X \vee Y \vee Z) \,\&\, (X \vee \bar{Y} \vee Z) \,\&\, (\bar{X} \vee \bar{Y} \vee Z)$

Сравнив обе СНФ они не эквивалентны.

30.4. Для следующего выражения найти двойственные:

$$X \vee (Y \vee Z)$$

Двойственным выражением для $X \vee (Y \vee Z)$ является $X \wedge (Y \wedge Z)$.

35.10. Выяснить является ли первая формула логическим следствием остальных:

$$\bar{X}; X \leftrightarrow Y, Y \vee \bar{Z}, Z$$

Для того чтобы выяснить, является ли первая формула "X̄" логическим следствием остальных формул, используем таблицу истинности.

X	Y	Z	X̄	X ≡ Y	$Y \vee \bar{Z}$	(X ≡ Y) & $(Y \vee \bar{Z})$ & (Z)
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0

0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0	0

Когда формула "$\bar{X}$" принимает значение 1, то "$\bar{X}$" равно 1 только в строках, где X равно 0. Таким образом, в каждой из этих строк формула "$\bar{X}$" является истиной.

Формулы $X \equiv Y, Y \vee \bar{Z}$ и Z не являются одновременно истинными. Следовательно, любая формула является их следствием.

Таким образом, заданное логическое следствие верно.

38.6. Доказать правильность умозаключения:

$$\frac{A \to B,\ \ B \to C,\ \ \bar{C}}{\bar{A}}$$

Для того чтобы выяснить, является ли первая формула "$\bar{A}$" логическим следствием остальных формул, используем таблицу истинности.

A	B	C	$\bar{A}$	$\bar{C}$	$A \to B$	$B \to C$	$(A \to B)$ & $(B \to C)$ & $\bar{C}$
1	0	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1	0

Когда формула "$\bar{A}$" принимает значение 1, то "$\bar{A}$" равно 1 только в строках, где A равно 0. Таким образом, в каждой из этих строк формула "$\bar{A}$" является истиной.

Формулы $(A \to B), (B \to C)$ и $\bar{C}$ не являются одновременно истинными.

Следовательно, любая формула является их следствием.

Таким образом, заданное логическое следствие верно.

49.2. Найти все следствия из посылки

$$X \to Y, Y \vee Z, XY \leftrightarrow Z$$

Составим конъюнкцию посылок и эквивалентными преобразованиями приведём её к СКНФ:

$$(X \to Y) \,\&\, (Y \vee Z) \,\&\, \big((X \& Y) \leftrightarrow Z\big)$$
$$= (\bar{X} \vee Y) \,\&\, (Y \vee Z) \,\&\, \Big(\big((X \to Z) \,\&\, (Z \to X)\big) \& \big((Y \to Z) \,\&\, (Z \to Y)\big)\Big)$$
$$= (\bar{X} \vee Y) \,\&\, (Y \vee Z) \,\&\, \Big(\big((\bar{X} \vee Z) \,\&\, (\bar{Z} \vee X)\big) \& \big((\bar{Y} \vee Z) \,\&\, (\bar{Z} \vee Y)\big)\Big)$$
$$= (\bar{X} \vee Y) \,\&\, (Y \vee Z) \,\&\, (\bar{X} \vee Z) \,\&\, (\bar{Z} \vee X) \,\&\, (\bar{Y} \vee Z) \,\&\, (\bar{Z} \vee Y)$$
$$= (\bar{X} \vee Y) \,\&\, (Y \vee Z)$$

Логические следствия:

1) $(\bar{X} \vee Y) = X \to Y$ – посылка 1

2) $(Y \vee Z) = (Y \vee Z)$ – посылка 2

3) $(\bar{X} \vee Y) \,\&\, (Y \vee Z) = Y \cup (\bar{X} \,\&\, Z)$

Ответ: логическими следствиями указанных посылок являются следующие формуды: $X \to Y$, $Y \vee Z$, $Y \cup (\bar{X} \,\&\, Z)$.

Практическая часть:

Файл lab1.h

```c
#include <stdio.h>
#include <string.h>
#include <windows.h>

// Функция определения значения переменной в заданной интерпретации
bool evaluate(char variable, bool interpretation[]);

// Функция вычисления значения формулы для заданной интерпретации
bool evaluateFormula(char formula[], bool interpretation[]);

// Функция для построения таблицы истинности
void truthTable(char formula[], int numVariables);

// Функция для поиска всех интерпретаций, при которых формула истинна
void findTrueInterpretations(char formula[], int numVariables);
```

Файл lab1.c

```c
#include "lab1.h"

bool evaluate(char variable, bool interpretation[]) {
    int index = variable - 'A'; // Индекс переменной в массиве интерпретации
    return interpretation[index];
}

bool evaluateFormula(char formula[], bool interpretation[]) {
    int len = strlen(formula);
    for (int i = 0; i < len; i++) {
        if (formula[i] == '&') {
            continue; // Пропускаем конъюнкцию
        } else if (formula[i] == '|') {
            continue; // Пропускаем дизъюнкцию
        } else if (formula[i] == '!') {
            i++; // Переходим к следующему символу после '!'
            bool result = !evaluate(formula[i], interpretation); // Отрицание
            return result;
        } else {
            return evaluate(formula[i], interpretation); // Переменная
        }
    }
    return false; // В случае ошибки
}

void truthTable(char formula[], int numVariables) {
    int numRows = 1 << numVariables; // 2 в степени numVariables
    printf("Таблица истинности:\n");

    // Заголовок таблицы
    for (int i = 0; i < numVariables; i++) {
        printf("%c\t", 'A' + i);
    }
    printf("Формула\n");

    // Заполнение таблицы
    for (int row = 0; row < numRows; row++) {
        bool interpretation[numVariables];

        // Заполняем интерпретацию текущей строки
```

```
        for (int i = 0; i < numVariables; i++) {
            interpretation[i] = (row & (1 << i)) != 0; // Установка битов в
соответствии с текущей строкой
            printf("%d\t", interpretation[i]);
        }

        // Вычисляем значение формулы для текущей интерпретации
        bool result = evaluateFormula(formula, interpretation);
        printf("%d\n", result);
    }
}

void findTrueInterpretations(char formula[], int numVariables) {
    int numRows = 1 << numVariables; // 2 в степени numVariables
    printf("Истинные интерпретации:\n");

    for (int row = 0; row < numRows; row++) {
        bool interpretation[numVariables];

        // Заполняем интерпретацию текущей строки
        for (int i = 0; i < numVariables; i++) {
            interpretation[i] = (row & (1 << i)) != 0; // Установка битов в
соответствии с текущей строкой
        }

        // Вычисляем значение формулы для текущей интерпретации
        bool result = evaluateFormula(formula, interpretation);

        // Если значение формулы истинно, выводим интерпретацию
        if (result) {
            for (int i = 0; i < numVariables; i++) {
                printf("%d ", interpretation[i]);
            }
            printf("\n");
        }
    }
}
```

Файл main.c

```
int main() {
    // Устанавливаем кодировку вывода в UTF-8 для корректного отображения
    SetConsoleOutputCP(CP_UTF8);

    int numVariables;
    printf("Введите количество переменных: ");
    scanf("%d", &numVariables);

    char formula[100];
    printf("Введите формулу в КНФ: ");
    scanf("%s", formula);

    // Построение таблицы истинности
    truthTable(formula, numVariables);

    // Поиск интерпретаций, при которых формула истинна
    findTrueInterpretations(formula, numVariables);
    return 0;
}
```

Вывод: на этой лабораторной работе я разработал программный модуль, способный находить значение формы (представленной в нормальной форме) на данной интерпретации. Разработал программу, способную считывать формулу логики высказываний в одной из нормальных форм (по выбору пользователя) и находить значения данной формулы на вводимых пользователем интерпретации.